unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

SÍNTESE DE SISTEMAS ERP BASEADA EM LMIs E CONTROLE COM ESTRUTURA VARIÁVEL

MÁRCIO ROBERTO COVACIC

DOUTORADO



Ilha Solteira - SP



Márcio Roberto Covacic

Síntese de sistemas ERP baseada em LMIs e controle com estrutura variável

1210001654

UNESP - "CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA"
SERVIÇO TÉC. DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO

DATA DE CHEGADA	DATA DE TOMBO
22.03.06	28.04.06
REGISTRADO POR	**TOMBO**
Aiza	Te. 1654
AQUISIÇÃO	**CLASSIFICAÇÃO**
Doação Autor R$ 10,00	C873t

Co sys 456620
sys 59695

Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista – UNESP, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira

Ilha Solteira, SP
2006

BCpIS FEIS - UNESP

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação/Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da UNESP-Ilha Solteira

C873s

Covacic, Márcio Roberto.
Síntese de sistemas ERP baseada em LMIs e controle com estrutura variável / Márcio Roberto Covacic. -- Ilha Solteira : [s.n.], 2006
222 p. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2006

Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira.
Bibliografia: p. 202-207

650 650 650

1. Sistemas de controle por realimentação. 2. Teoria do controle. 3. Teoria dos sistemas dinâmicos. 4. Sistemas estritamente reais positivos (ERP). 5. Inequações matriciais lineares (LMIs).

690 690

30405033.

unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO: SÍNTESE DE SISTEMAS ERP BASEADA EM LMIs E CONTROLE COM ESTRUTURA VARIÁVEL

AUTOR: MÁRCIO ROBERTO COVACIC
ORIENTADOR: Prof. Dr. MARCELO CARVALHO M TEIXEIRA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de DOUTOR em ENGENHARIA ELÉTRICA pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. MARCELO CARVALHO M TEIXEIRA
DEE/FE - UNESP

Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO
DEE/FE - UNESP

Prof. Dr. JOSE PAULO FERNANDES GARCIA
DEE/FE - UNESP

Prof. Dr. HAROLDO RODRIGUES DE AZEVEDO
Departamento de Engenharia Elétrica / Universidade Federal de Uberlândia

Prof. Dr. IVAN NUNES DA SILVA
DEE / Escola de Engenharia de São Carlos - EESC/USP

Data da realização: 20 de fevereiro de 2006.

Presidente da Comissão Examinadora
Prof. Dr. MARCELO CARVALHO M TEIXEIRA

BCpIS FEIS - UNESP



Aos meus pais, Pedro e Maria, pelo incentivo e pelo apoio em todos os momentos difíceis da minha vida, pela confiança, carinho e amor que sempre depositaram em mim e por serem, em sua simplicidade, os melhores pais que eu poderia desejar

OFEREÇO

À minha irmã, Ana Cláudia, pelo incentivo, companheirismo, cumplicidade e principalmente pelo amor que me concede

DEDICO

unesp

Agradecimentos

Agradeço a Deus, que me deu força e vontade para superar todos os obstáculos encontrados no caminho até chegar a este momento.

Aos meus pais, Pedro e Maria, à minha irmã e à minha família, pelo apoio, incentivo e carinho sempre presentes.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, por participar diretamente da minha formação científica, pela amizade, humildade, empenho, competência e por seu espírito nobre, correto e altruísta, que me deram muitos ensinamentos.

Ao Prof. Dr. José Paulo Fernandes Garcia, ao Prof. Dr. Aparecido Augusto de Carvalho e ao Prof. Dr. Nobuo Oki, pela amizade e pelos ensinamentos.

Ao Prof. Dr. Edvaldo Assunção, pelas suas dicas de organização, ajuda com o *Latex*, *Matlab*, *LMISol*, com as simulações e pela amizade.

Aos professores, técnicos e demais funcionários do Departamento de Engenharia Elétrica e da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, que propiciaram a infra-estrutura necessária para a realização deste trabalho.

Aos meus amigos da graduação, pós-graduação e da cidade de Ilha Solteira, pela amizade, companheirismo e saudável convivência.

Finalmente, à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP, pelo auxílio financeiro dado a esta pesquisa.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

Resumo

Propõem-se novas condições, em termos de Inequações Matriciais Lineares (em inglês, *Linear Matrix Inequalities*, LMIs), para a solução do seguinte problema, classificado como síntese Estritamente Real Positiva (ERP): dada uma planta linear invariante no tempo $\{A, B, C\}$, de ordem n, com o número de saídas (p) maior ou igual ao número de entradas (m), encontre uma matriz constante de realimentação da saída K_o e uma matriz constante em série com a saída F para que o sistema controlado seja ERP. Quando $p = m$ ou $p = n$, eram conhecidas condições necessárias e suficientes para este problema, mas para $m < p < n$, apenas condições suficientes. Esta tese propõe novas condições suficientes para $m+1 < p < n$ e condições necessárias e suficientes para $p = m+1 < n$. Então, com base nestes resultados, um novo projeto baseado em LMIs para o Controle com Estrutura Variável (CEV) com realimentação da saída de plantas dinâmicas incertas é apresentado. O método considera as seguintes especificações do projeto: distúrbios casados ou não-linearidades da planta, restrições na entrada e na saída, taxa de decaimento e, finalmente, incertezas da planta não casadas. O método é aplicado em alguns exemplos. As principais contribuições nesta tese são as propostas de novos métodos de projeto para plantas com o número de saídas maior que o número de entradas e a generalização dos métodos de projeto para sistemas incertos. Outra contribuição foi a utilização de compensadores dinâmicos com a ordem igual ao número de entradas, para plantas que não podem ser tornadas ERP através de controladores estáticos e um método baseado em LMIs para tornar ERP o sistema realimentado, com a planta estendida. Foi desenvolvido, também, um método para a determinação da faixa de estabilidade de sistemas com realimentação estática da saída, baseado no Critério de Estabilidade de Routh. Este método é útil para a obtenção de condições necessárias e suficientes para os seguintes problemas, considerando plantas lineares invariantes no tempo: (i) estabilidade de sistemas com realimentação estática da saída através da lei de controle $u(t) = -ky(t)$, com $k \in \mathbb{R}$ e sendo $y \in \mathbb{R}^m$ a saída da planta; (ii) síntese ERP utilizando controladores estáticos para plantas com uma entrada e duas saídas; (iii) estabilidade de sistemas incertos $\dot{x}(t) = (A_o + \alpha\Delta A)x(t)$, sendo A e ΔA matrizes constantes conhecidas e $\alpha \in \mathbb{R}$ um parâmetro constante incerto; (iv) taxa de decaimento do problema apresentado em (i); (v) estabilidade de sistemas discretos, para o problema apresentado em (i); (vi) a solução dos problemas (i) e (ii) com incertezas politópicas na planta.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Abstract

It is proposed new Linear Matrix Inequalities (LMIs) conditions for the following problem, called Strictly Positive Real (SPR) synthesis: given a linear time-invariant plant $\{A, B, C\}$, of order equal to n, with the number of outputs (p) greater or equal to the number of inputs (m), find a constant output feedback matrix K_o and a constant output tandem matrix F for the controlled system to be SPR. When $p = m$ or $p = n$, necessary and sufficient conditions for this problem are known, but when $m < p < n$, only sufficient conditions were available. This thesis proposes new sufficient conditions when $m+1 < p < n$ and necessary and sufficient conditions when $p = m+1 < n$. Then, taking into account these results, a new LMI-based design for output Variable Structure Control (VSC) of uncertain dynamic plants is presented. The method considers the following design specifications: matched disturbances or nonlinearities of the plant, input and output constraints, decay rate and, finally, unmatched plant uncertainties. The method is applied in some examples. This thesis presents new design methods for plants with more outputs than inputs and the generalization of the design methods for uncertain systems. Another contribution was the use of dynamic compensators with the order equal to the number of inputs, for plants that can not be turned SPR with static controllers and an LMI-based method to turn this extended plant into an SPR system. It was also developed a method to determine the stability range for static output systems, based on Routh Stability Criterion. This method is useful for the obtaintion of necessary and sufficient conditions for linear time-invariant plants: (i) stability of static output feedback systems using the control law $u(t) = -ky(t)$, where $k \in \mathbb{R}$ and $y \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, is the plant output; (ii) SPR synthesis using static controllers for plants with one input and two outputs; (iii) stability of the uncertain system $\dot{x}(t) = (A_o + \alpha\Delta A)x(t)$, where A and ΔA are known and constant matrices and $\alpha \in \mathbb{R}$ is an uncertain constant parameter; (iv) decay rate of the problem stated in (i); (v) stability of discrete-time systems, for the problem stated in (i); (vi) the solution of the problems (i) and (ii), considering polytopic uncertainties in the plant.



Sumário

1 Introdução p. 1

2 Condições Baseadas em LMIs para Sistemas ERP p. 8

2.1 Sistemas ERP . . . . . p. 8

2.2 Formulação do Problema . . . . . p. 11

2.3 Sistemas com Realimentação das Variáveis de Estado . . . . . p. 12

2.4 Sistemas com Realimentação da Saída . . . . . p. 14

2.4.1 Sistemas com o Mesmo Número de Entradas e Saídas . . . . . p. 14

2.4.2 Sistemas com Números Diferentes de Entradas (m) e Saídas (p) p. 16

2.5 Taxa de Decaimento . . . . . p. 38

2.5.1 Sistemas com o Mesmo Número de Entradas e Saídas . . . . . p. 39

2.5.2 Sistemas com Números Diferentes de Entradas (m) e Saídas (p) p. 42

2.6 Sistemas Incertos . . . . . p. 55

2.6.1 Sistemas com o Mesmo Número de Entradas e Saídas . . . . . p. 56

2.6.2 Sistemas com Números Diferentes de Entradas (m) e Saídas (p) p. 58

2.6.3 Sistemas Incertos com Taxa de Decaimento . . . . . p. 62

2.6.3.1 Sistemas com o Mesmo Número de Entradas e Saídas . p. 62

2.6.3.2 Sistemas com Números Diferentes de Entradas e Saídas p. 64

2.7 Síntese de Sistemas ERP com Compensadores Dinâmicos de Ordem m p. 69

2.7.1 Sistema ERP com Compensador de Ordem m e Realimentação da Saída . . . . . p. 72

unesp

2.7.2 Taxa de Decaimento com Compensador de Ordem m e Realimentação da Saída . . . . . p. 75

2.7.3 Compensadores Dinâmicos de Ordem m para Sistemas Incertos p. 77

2.7.3.1 Sistema ERP com Compensador de Ordem m e Realimentação da Saída para Sistemas Incertos . . . . . p. 79

2.7.3.2 Taxa de Decaimento com Compensador de Ordem m e Realimentação da Saída para Sistemas Incertos . . . . p. 82

2.8 Conclusões Parciais do Capítulo . . . . . p. 84

3 Critério de Estabilidade de Routh: Síntese de Sistemas ERP e Outras Aplicações p. 86

3.1 Introdução . . . . . p. 86

3.2 Estabilidade de Sistemas com Dependência Polinomial . . . . . p. 88

3.3 Estabilidade de Sistemas com Realimentação Estática da Saída . . . . . p. 91

3.3.1 Plantas SISO . . . . . p. 91

3.3.2 Plantas MIMO . . . . . p. 93

3.4 Aplicação do Critério de Estabilidade de Routh na Síntese de Sistemas de Fase Mínima . . . . . p. 97

3.5 Obtenção de um Sistema ERP a Partir de um Sistema de Fase Mínima p. 99

3.6 Aplicação do Critério de Estabilidade de Routh para Especificação da Taxa de Decaimento . . . . . p. 100

3.6.1 Aplicação do Critério de Estabilidade de Routh para o Posicionamento dos Zeros de Transmissão . . . . . p. 101

3.7 Estabilidade de Sistemas com Controladores PI, PD e PID . . . . . p. 102

3.8 Análise de Polinômios com Coeficientes Incertos . . . . . p. 104

3.8.1 Teorema de Kharitonov para Polinômios com Coeficientes Reais p. 104

3.8.2 Estabilidade de Sistemas com Realimentação Estática da Saída com Plantas SISO Incertas . . . . . p. 105

3.8.3 Aplicação do Teorema de Kharitonov na Síntese de Sistemas de Fase Mínima com Plantas SISO Incertas . . . . . p. 107

3.8.4 Obtenção de um Sistema ERP a Partir de um Sistema de Fase Mínima Incerto . . . . . p. 108

3.8.5 Aplicação do Teorema de Kharitonov para Especificação da Taxa de Decaimento . . . . . p. 109

3.8.6 Aplicação do Teorema de Kharitonov para o Posicionamento dos Zeros de Transmissão . . . . . p. 110

3.9 Outras Aplicações do Critério de Estabilidade de Routh . . . . . p. 111

3.9.1 Especificação de Regiões no Plano Complexo Utilizando o Critério de Estabilidade de Routh . . . . . p. 111

3.9.2 Análise da Estabilidade de Sistemas Incertos $\dot{x} = (A_o + \alpha\Delta A)x$ p. 117

3.9.3 Análise da Estabilidade de Sistemas com Realimentação Negativa com uma Planta $\{A, B, C\}$ e uma Matriz de Realimentação $K = kI$ . . . . . p. 118

3.9.4 Estabilidade de Sistemas Discretos . . . . . p. 119

3.10 Conclusões Parciais do Capítulo . . . . . p. 120

4 Controle com Estrutura Variável e Modos Deslizantes p. 123

4.1 Modos Deslizantes . . . . . p. 123

4.2 Controle com Estrutura Variável e Observação de Sistemas Não-Lineares p. 132

4.2.1 Descrição do sistema e definições básicas . . . . . p. 133

4.2.2 Projeto do Controlador . . . . . p. 134

4.2.3 Observação dos estados . . . . . p. 138

4.2.4 Síntese do controlador-observador . . . . . p. 142

4.3 Controle com Estrutura Variável Utilizando Sistemas ERP . . . . . p. 144

4.4 Conclusões Parciais do Capítulo . . . . . p. 145

5 Controle com Estrutura Variável Utilizando Sistemas ERP e LMIs p. 146

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

5.1 Estabilidade e Robustez . . . . . p. 147

5.2 Estabilidade, Robustez e Taxa de Decaimento . . . . . p. 152

5.3 Estabilidade, Robustez, Taxa de Decaimento e Restrições na Entrada e na Saída . . . . . p. 153

5.4 Conclusões Parciais do Capítulo . . . . . p. 155

6 Exemplos de Aplicação p. 156

6.1 Exemplo 1 . . . . . p. 156

6.2 Exemplo 2 . . . . . p. 165

6.3 Exemplo 3 . . . . . p. 174

6.4 Exemplo 4 . . . . . p. 179

6.5 Exemplo 5 . . . . . p. 181

6.6 Exemplo 6 . . . . . p. 184

6.7 Exemplo 7 . . . . . p. 188

6.8 Exemplo 8 . . . . . p. 189

6.9 Exemplo 9 . . . . . p. 190

6.10 Conclusões Parciais do Capítulo . . . . . p. 195

7 Conclusão p. 198

7.1 Sugestões para Pesquisas Futuras . . . . . p. 200

7.2 Artigos Publicados e Artigos Submetidos . . . . . p. 200

Referências p. 202

Apêndice A – Zeros de Transmissão de um Sistema p. 208

Apêndice B – Demonstração do Lema 3 [1] p. 210

Apêndice C – Obtenção da Faixa de Estabilidade Utilizando o Critério de Routh com o *Matlab* p. 213

Apêndice D – Restrições na Entrada e na Saída p. 216

D.1 Restrição no Vetor de Entrada . . . . . p. 216

D.2 Restrição no Vetor de Saída . . . . . p. 220

Lista de Figuras

1 Sistema realimentado dos Teoremas 3 e 4. . . . . p. 10

2 Sistema realimentado do Problema 1. . . . . p. 12

3 Sistema realimentado do Problema 2. . . . . p. 12

4 Sistema realimentado do Problema 3. . . . . p. 56

5 Sistema de malha aberta. . . . . p. 69

6 Sistema com realimentação da saída. . . . . p. 71

7 Sistema de malha fechada. . . . . p. 73

8 Sistema de malha fechada com F_o em série com a saída. . . . . p. 74

9 Intervalos entre as raízes reais dos termos da primeira coluna. . . . . p. 91

10 Sistema SISO realimentado com controlador proporcional. . . . . p. 92

11 Sistema MIMO realimentado com controlador proporcional. . . . . p. 93

12 Sistema realimentado com controlador $G_c(s)$. . . . . p. 103

13 Região especificada no plano complexo s. . . . . p. 111

14 Região especificada no plano complexo s. . . . . p. 112

15 Região especificada no plano complexo s. . . . . p. 113

16 Região especificada no plano complexo s. . . . . p. 113

17 Região especificada no plano complexo s. . . . . p. 114

18 Região especificada no plano complexo s. . . . . p. 115

19 Região especificada no plano complexo s. . . . . p. 115

20 Região especificada no plano complexo s. . . . . p. 116

21 Região especificada no plano complexo s. . . . . p. 117

22 Modo deslizante. . . . . p. 124

unesp

23 Ocorrência de modo deslizante apenas na intersecção das superfícies. . . . . p. 124

24 Subsistemas lineares instáveis: (a)$\psi = -\alpha$ e (b)$\psi = \alpha$. . . . . p. 126

25 Estabilidade assintótica através de EVMD, no plano $(x_1, x_2) = (x, \dot{x})$. . . . . p. 126

26 Método de Filippov. . . . . p. 129

27 Modo deslizante em sistema com histerese. . . . . p. 130

28 Modo deslizante em sistema com atraso. . . . . p. 131

29 Configuração do Controlador-Observador. . . . . p. 142

30 Região de factibilidade do item (i) do Teorema 13 para o Exemplo 1. . . . . p. 158

31 Região de factibilidade do item (ii) do Teorema 13 para o Exemplo 1. . . . . p. 158

32 Região de factibilidade do item (iii) do Teorema 13 para o Exemplo 1. . . . . p. 159

33 Região de factibilidade do item (iv) do Teorema 13 para o Exemplo 1. . . . . p. 159

34 Região de factibilidade do item (v) do Teorema 13 para o Exemplo 1. . . . . p. 160

35 Região de factibilidade do item (vi) do Teorema 13 para o Exemplo 1. . . . . p. 160

36 Região de factibilidade do item (vii) do Teorema 13 para o Exemplo 1. . . . . p. 161

37 Região de factibilidade do item (viii) do Teorema 13 para o Exemplo 1. . . . . p. 161

38 Região de factibilidade do item (ix) do Teorema 13 para o Exemplo 1. . . . . p. 162

39 Região de factibilidade do item (x) do Teorema 13 para o Exemplo 1. . . . . p. 162

40 Região de factibilidade do item (xi) do Teorema 13 para o Exemplo 1. . . . . p. 163

41 Região de factibilidade do Algoritmo 1 para o Exemplo 1. . . . . p. 163

42 Região de factibilidade do Teorema 9 para o Exemplo 2. . . . . p. 166

43 Região de factibilidade do Teorema 10 para o Exemplo 2. . . . . p. 166

44 Região de factibilidade do item (i) do Teorema 13 para o Exemplo 2. . . . . p. 167

45 Região de factibilidade do item (ii) do Teorema 13 para o Exemplo 2. . . . . p. 167

46 Região de factibilidade do item (iii) do Teorema 13 para o Exemplo 2. . . . . p. 168

47 Região de factibilidade do item (iv) do Teorema 13 para o Exemplo 2. . . . . p. 168

48 Região de factibilidade do item (v) do Teorema 13 para o Exemplo 2. . . . . p. 169

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

49 Região de factibilidade do item (vi) do Teorema 13 para o Exemplo 2. . . . . p. 169

50 Região de factibilidade do item (vii) do Teorema 13 para o Exemplo 2. . . . . p. 170

51 Região de factibilidade do item (viii) do Teorema 13 para o Exemplo 2. . . . . p. 170

52 Região de factibilidade do item (ix) do Teorema 13 para o Exemplo 2. . . . . p. 171

53 Região de factibilidade do item (x) do Teorema 13 para o Exemplo 2. . . . . p. 171

54 Região de factibilidade do item (xi) do Teorema 13 para o Exemplo 2. . . . . p. 172

55 Região de factibilidade do Algoritmo 1 para o Exemplo 2. . . . . p. 172

56 Evolução das variáveis de saída da planta, $y_1(t)$ e $y_2(t)$, do Exemplo 3. . . . . p. 178

57 Lei de controle do Exemplo 3. . . . . p. 178

58 Região de estabilidade para o Exemplo 5 com um controlador PD. . . . . p. 182

59 Região de estabilidade para o Exemplo 5 com um controlador PI. . . . . p. 183

60 Região de estabilidade para o Exemplo 5 com um controlador PID. . . . . p. 183

61 Evolução das variáveis de estado da planta do Exemplo 9. . . . . p. 194

62 Sinal de controle do Exemplo 9. . . . . p. 195

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

1 Introdução

As características de um sistema são descritas através da sua modelagem matemática. Este modelo pode conter incertezas devido ao desconhecimento de parâmetros, que podem ser constantes, variantes no tempo ou imprecisamente conhecidos, e, ainda, sinais externos não completamente conhecidos, chamados de distúrbios, podem atuar no sistema.

Desde a introdução da teoria de sistemas com Estrutura Variável e Modos Deslizantes (EVMD) pelo Professor Vadim I. Utkin, para a comunidade ocidental que pesquisa sistemas de controle [2], as atividades de pesquisa, fora da antiga União Soviética e Iugoslávia, em sistemas com EVMD, têm continuado crescentes. Além disso, a natureza dessas investigações tem-se expandido, de assuntos normalmente teóricos durante as décadas de setenta e oitenta, para muitos problemas de aplicações práticas industriais interessantes, em muitos campos da engenharia, no final dos anos oitenta [3].

O interesse por Controle com Estrutura Variável (CEV) justifica-se pelas suas aplicações efetivas em problemas de automação que são muito diversificados em sua natureza física e propósitos funcionais. No curso de toda a história do desenvolvimento da teoria de controle automático, a intensidade das investigações de controle descontínuo tem-se mantido em um nível suficientemente alto. Particularmente, durante os estágios iniciais, relés tomaram destaque no projeto de sistemas de controle a realimentação, por facilidade de implementação e eficiência do equipamento de controle [3].

Recentemente, tem sido dada uma atenção crescente para sistemas onde as ações de controle são funções descontínuas de suas coordenadas e distúrbios. As trajetórias de estado representam as propriedades de um sistema dinâmico. Portanto, através de uma escolha adequada das ações de controle, as trajetórias de estado podem ser mudadas para que sejam dadas as propriedades desejadas de um processo a um sistema [4].

Um sistema com CEV consiste de um conjunto de subsistemas contínuos, com uma lógica própria de chaveamento. A ação de controle resultante é uma função descontínua dos estados do sistema, distúrbios e referências de entrada. Essencialmente, para sis-

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

temas de segunda ordem, um sistema com estrutura variável utiliza uma lei de controle com alta velocidade de chaveamento para levar a trajetória de estado da planta a uma superfície especificada no plano de fase, mantendo-a sobre esta superfície por todo o tempo subseqüente. Então, a dinâmica da planta fica restrita a esta superfície, que é convenientemente escolhida, de maneira a obter um comportamento desejado [3].

O projeto de sistemas com ações de controle descontínuas normalmente se reduz à seleção de superfícies no plano de fase para que a função de controle tenha descontinuidades. Quando certas relações são válidas, um tipo especial de movimento, chamado modo deslizante, pode aparecer. Este pode ser o caso, por exemplo, se, na vizinhança da superfície onde a função de controle tenha descontinuidades, as trajetórias de estado estiverem direcionadas a esta superfície.

Uma vez nesta superfície, o sistema evidentemente não pode se mover ao longo de nenhuma trajetória adjacente a esta em qualquer outro instante. Portanto, em resposta a qualquer mudança, um movimento que começa sempre retorna a esta superfície. Conseqüentemente, no sistema em discussão, a trajetória pode se mover somente ao longo da superfície descontínua. Este movimento é convencionalmente chamado de modo deslizante [4].

O primeiro passo no projeto de um CEV, em geral, é a escolha de um subespaço deslizante (superfície de chaveamento). Um modo deslizante estável é conseguido através da seleção adequada de hiperplanos, de maneira que a resposta dinâmica de malha fechada desejada seja alcançada. O segundo passo envolve a seleção de uma lei de controle que assegure o alcance e a permanência do sistema em modo deslizante [5].

Estudos subseqüentes têm revelado que movimentos em modos deslizantes resultam em controle ótimo. A teoria de sistemas com CEV tornou-se um campo independente na teoria geral de sistemas não-lineares [4].

Nos últimos anos, surgiu um novo paradigma para o projeto de CEV: a descrição do problema através de Inequações Matriciais Lineares (em inglês, *Linear Matrix Inequalities*, LMIs). Dois fatores tornam as técnicas de LMIs especiais:

(a) Uma grande variedade de especificações e restrições de projeto podem ser expressas como LMIs;

(b) Uma vez formulado em termos de LMIs, quando factível, o problema pode ser solucionado por algoritmos de otimização bastante eficientes;

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Agora, serão descritos seis artigos que abordam o CEV com LMIs, obtidos após um levantamento bibliográfico. Em [6], os autores apresentam dois métodos numéricos para o projeto de CEV, com acesso somente às saídas da planta. O projeto considera funções de chaveamento do tipo $s = Gy$, sendo y o vetor que contém as saídas da planta e G uma matriz constante. A matriz G, que define o comportamento no deslizamento, é considerada disponível e o projeto procura satisfazer à condição $s^T\dot{s} < 0$, para $s \neq 0$, utilizando uma lei de controle adequada e métodos de otimização empregados nas soluções das LMIs.

Os trabalhos [7–11], sobre o emprego de LMIs no projeto de CEV, descritos a seguir, consideram a disponibilidade do vetor de estado.

Em [7], a especificação das superfícies de deslizamento é feita em termos de LMIs, permitindo, inclusive, a especificação da taxa de decaimento. Posteriormente, o artigo [8] generalizou estes resultados, considerando incertezas não casadas.

Em [9], é demonstrado que as condições de existência para as LMIs descritas em [8] são necessárias e suficientes, além de serem apresentadas novas condições para o projeto da superfície de chaveamento linear, em termos de LMIs, permitindo o projeto por alocação de pólos do sistema de ordem reduzida no deslizamento, mais geral do que os métodos descritos em [7, 8]. Em [10], o projeto das superfícies de deslizamento é feito de modo a minimizar, adicionalmente, a influência de distúrbios não casados. Foi empregado o método de controle ótimo com a norma $\mathcal{H}_\infty$ e são consideradas incertezas nos parâmetros da planta pertencentes a um politopo convexo. Estes autores apresentaram um método similar, considerando agora a norma $\mathcal{H}_2$ [11].

Em [12], foi abordado o projeto de CEV, com acesso somente às saídas da planta, utilizando apenas controladores estáticos invariantes no tempo e um método de projeto baseado em LMIs. Assume-se, inicialmente, como efetuado em [13], que a planta apresenta o mesmo número de entradas e saídas e o método proposto permite a consideração de não-linearidades ou distúrbios casados, de restrições nas saídas, da taxa de decaimento e da robustez, com respeito a incertezas nos parâmetros da planta, casadas e não casadas. Em seguida, o método é aplicado para sistemas com números diferentes de entradas e saídas. Neste trabalho, foram desenvolvidas novas condições suficientes para sistemas com o número de saídas maior que o número de entradas e a generalização dessas condições para sistemas com incertezas politópicas.

O projeto de CEV com controladores invariantes no tempo e acesso somente às saídas da planta já foi estudado, por exemplo, em [14–16]. Entretanto, estes métodos não são tão gerais, pois não permitem, por exemplo, a especificação da robustez com respeito às

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

incertezas nos parâmetros da planta não casadas ou de restrições nas saídas da planta.

Em [17], é apresentada uma metodologia de controle com CEV para sistemas dinâmicos incertos com várias entradas, utilizando somente informações da saída da planta. O projeto da superfície de chaveamento através de aproximação por LMIs utiliza realimentação estática da saída. Uma nova aproximação da otimização baseada em LMIs é empregada na construção da lei de controle para garantir o modo deslizante. Em [18], é considerado um controlador em modo deslizante que requer somente informações da saída e é estático por natureza. A novidade é a razão e o método usado para sintetizar o componente de controle linear que envolve uma otimização em termos de LMIs. Em ambos os casos, os sistemas apresentam um número de saídas maior ou igual ao número de entradas. Entretanto, estes métodos não permitem a especificação da taxa de decaimento, robustez e restrições na entrada e nas saídas, como proposto nesta tese.

Os sistemas ERP também têm uma grande importância no controle de sistemas com incertezas e distúrbios, devido aos importantes resultados disponíveis sobre a estabilidade destes sistemas, como por exemplo a hiperestabilidade assintótica de Popov [19]. Desta forma, um procedimento para a análise e projeto de sistemas de controle consiste na manipulação do sistema, com o objetivo de colocá-lo na forma de um sistema ERP, de modo que os resultados sobre a estabilidade destes sistemas possam ser utilizados.

Os sistemas Reais Positivos (RP), também conhecidos como passivos, nasceram na teoria de circuitos e foram definidos, inicialmente, dentro dos Sistemas Lineares Invariantes no Tempo (SLIT). As matrizes de transferência RP e ERP possuem duas interpretações interessantes em termos de circuitos elétricos. Considere dois nós de um circuito elétrico composto pela conexão de elementos passivos com parâmetros concentrados R, L e C (resistores, indutores e capacitores), de modo arbitrário. Então, a impedância usando a Transformada de Laplace entre os dois nós, $Z(s)$ é RP, e, de modo inverso, qualquer função de transferência $Z(s)$ RP pode ser realizada como a impedância entre dois nós de um circuito elétrico com elementos passivos R, L e C. Agora, se aplicarmos uma tensão entre estes dois nós mencionados anteriormente e se $Z(s)$ for RP, então a soma da energia inicial armazenada no circuito, no instante inicial $t = 0$, com a energia fornecida no intervalo $t \in [0, T]$, $T > 0$, deve ser maior ou igual à energia armazenada em $t = T$.

Esta tese apresenta novos resultados, baseados em LMIs, sobre o projeto de sistemas ERP, para plantas com o número de saídas maior ou igual ao número de entradas, e generaliza os resultados disponíveis para plantas com o mesmo número de entradas e saídas. Os teoremas 6, 8, 11–14, 18–21, 23, 24, 26 e 27, os lemas 4 e 5 e os algoritmos

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

1 e 2 foram contribuições desta tese. Outras contribuições são descritas na Seção 2.7, no Capítulo 3 e no Apêndice C. Estes resultados viabilizaram o desenvolvimento de um novo método para o projeto de CEV baseado em LMIs, com acesso somente às saídas da planta. Este novo método permite a consideração de não-linearidades ou distúrbios casados, de restrições na entrada e na saída, da taxa de decaimento e da robustez com respeito às incertezas nos parâmetros da planta, casados e não casados. Estes resultados não têm similar na literatura [13].

A base para o desenvolvimento dos novos resultados desta tese foi a formulação, em termos de LMIs, de novas condições para tornar uma planta ERP, utilizando controladores estáticos e acesso somente às saídas da planta. As LMIs aqui descritas são mais adequadas para o projeto de CEV do que as propostas por [20], pois estas últimas não permitem a especificação direta da robustez paramétrica e de restrições na saída [21]. Em [22], é apresentado o projeto de compensadores dinâmicos para sistemas ERP, com acesso às saídas da planta, através da solução por LMIs, de uma função de custo, de maneira a prover um controle robusto da planta. Existe uma diferença fundamental entre o artigo [22] e os resultados desta tese. Considerando a planta dada por:

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$
$$y = Cx + Du,$$

então em [22], é considerado que $D + D^T > 0$, enquanto que, nesta tese, assume-se que $D = 0$. O ponto chave dos resultados foi a formulação, em termos de LMIs, de novas condições para tornar uma planta ERP, utilizando compensadores estáticos, como descrito no problema chamado síntese de sistemas ERP, descrito a seguir: encontrar dois controladores estáticos, K_o que realimenta a saída da planta e F em série com a saída da planta, de modo que o sistema controlado seja ERP, sendo que a planta é um SLIT dado por $\{A, B, C\}$, de ordem n, com m entradas e p saídas. Na nossa opinião, o caso $D = 0$ considerado é mais comumente encontrado na prática, o que torna importante a solução deste problema. Quando $p = m$ ou $p = n$, eram conhecidas condições necessárias e suficientes para este problema, mas para $m < p < n$, apenas condições suficientes. Esta tese propõe novas condições suficientes para $m + 1 < p < n$ e condições necessárias e suficientes para $p = m + 1 < n$.

O Critério de Estabilidade de Routh é uma ferramenta útil para a determinação da faixa de valores de $k \in \mathbb{R}$, tal que o sistema realimentado seja estável. Outras aplicações para o Critério de Estabilidade de Routh estão disponíveis na literatura. Em [23], o critério é utilizado para determinar se um sistema é estabilizável, isto é, se existe um controlador



que torna o sistema estável. Em [24], são apresentados alguns testes para checar as condições de Routh-Hurwitz e a positividade total de uma matriz, transformando-a em uma matriz triangular superior. Em [25], o Critério de Estabilidade de Routh é utilizado para testar a propriedade Hurwitz de um segmento de polinômios $(1-\lambda)p_o(s)+\lambda p_1(s)$, sendo que $0 \leq \lambda \leq 1$. Em [26,27], o método é estendido para combinações convexas de polinômios complexos. Em [28–30], é apresentado um método para a análise da estabilidade de polinômio, cujos coeficientes sofrem perturbações. Em [25,31,32], o método é estendido para determinar modelos de intervalos de ordem reduzida para sistemas lineares em que cada coeficiente de $n(s)$ e $d(s)$ pertence a um intervalo. Em [33], os coeficientes do polinômio característico dependem de um conjunto de parâmetros, com cada parâmetro pertencente a um intervalo.

Nesta tese, o Critério de Estabilidade de Routh é utilizado para determinar a faixa de valores de $k \in \mathbb{R}$ tais que todas as raízes de um polinômio característico $d(s,k)$ possuam parte real negativa. Os coeficientes de $d(s,k)$ dependem do parâmetro k. Então, o polinômio característico $d(s,k)$ é dado por:

$$d(s,k) = \sum_{i=0}^{n} d_i(k) s^i.$$

Além disso, os coeficientes $d_i(k)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, são polinômios em k, como descrito abaixo:

$$d_i(k) = \sum_{j=0}^{b_i} d_{ij} k^j,$$

para $i = 0, \ldots, n$, sendo b_i o grau de $d_i(k)$.

Nas referências citadas acima, os coeficientes $d_i(k)$ são, no máximo, de primeiro grau ($b_i \leq 1$, $\forall\, i$). Nesta tese, o método pode ser utilizado para coeficientes $d_i(k)$ de qualquer grau. São propostas nesta tese condições necessárias e suficientes para os seguintes problemas: (i) estabilizar um sistema com uma planta de m entradas e m saídas através de uma matriz de realimentação kI, sendo I uma matriz identidade de ordem m; (ii) obter um sistema de fase mínima com uma planta com uma entrada e duas saídas, que é uma condição necessária para que o sistema seja ERP; (iii) determinar o domínio de estabilidade de sistemas incertos que dependem de um parâmetro; (iv) especificar uma taxa de decaimento; e (v) estabilizar um sistema discreto, para o problema apresentado em (i). A solução dos itens (i) e (ii) permite também a existência de matrizes politópicas nos parâmetros da planta. O método citado acima foi vital para o estabelecimento de



condições necessárias e suficientes para a síntese de sistemas ERP, quando $p = m + 1$.

No Capítulo 2, é apresentado o conceito de sistemas ERP e são descritas novas condições para sistemas ERP, baseadas em LMIs. No Capítulo 3, é proposto um método baseado no Critério de Estabilidade de Routh para determinar a faixa de estabilidade de certos sistemas realimentados e suas aplicações, entre elas, na síntese de sistemas ERP. O Capítulo 4 trata da teoria e os métodos de projeto disponíveis para controladores com EVMD. No Capítulo 5, são descritos novos métodos de projeto de CEV para sistemas não-lineares, com acesso somente às saídas da planta, levando em consideração índices de desempenho como robustez paramétrica, taxa de decaimento e restrição nos vetores de entrada e saída da planta. No Capítulo 6, os métodos de projeto discutidos nesta tese são aplicados e comparados em alguns exemplos, considerando acesso somente às saídas da planta. O Capítulo 7 é uma conclusão geral desta tese.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

2 Condições Baseadas em LMIs para Sistemas ERP

2.1 Sistemas ERP

Considere a planta linear, invariante no tempo, controlável e observável:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{2.1}$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle, $y \in \mathbb{R}^m$ a saída do sistema, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz característica do sistema, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ a matriz de entrada do sistema e $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a matriz de saída do sistema.

Definição 1 *[19] A matriz de transferência $G(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ do sistema (2.1) é Real Positiva (RP) se as seguintes condições forem satisfeitas:*

(a) Os elementos de $G(s)$ não possuem pólos com parte real positiva;

(b) $G^*(s) = G^T(s^*)$ e

(c) A matriz hermitiana $J(s) = G(s) + G^T(s^*)$ é semi-definida positiva em $Re(s) > 0$,

sendo que o asterisco (*) denota o complexo conjugado de um escalar ou o complexo conjugado transposto de um vetor ou matriz.

Definição 2 *[19] A matriz de transferência $G(s)$ é Estritamente Real Positiva (ERP) se $G(s - \epsilon)$ for RP para algum $\epsilon > 0$.*

Considere, agora, a planta linear invariante no tempo, controlável e observável abaixo:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du, \end{aligned} \tag{2.2}$$

com $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$ e o vetor de entrada $u \in \mathbb{R}^m$ tal que, para todo T positivo,

$$\int_0^T u(t)^T y(t)dt < \delta[||x(0)||]sup||x(t)||,\ 0 \leq t \leq T. \tag{2.3}$$

Neste caso, δ é uma constante positiva, que depende do estado inicial do sistema $x(0)$ mas independe do tempo T. Os resultados a seguir foram formulados por V. M. Popov na década de 1960 [19].

Definição 3 *[19] O sistema (2.2) é dito hiperestável se, para qualquer u(.) limitado satisfazendo (2.3), a inequação*

$$||x(t)|| \leq K(||x(0)|| + \delta) \tag{2.4}$$

é satisfeita para alguma constante positiva K e para todo $t \geq 0$.

Definição 4 *[19] O sistema (2.2) é dito assintoticamente hiperestável se, para qualquer u(.) limitado satisfazendo (2.3), a inequação (2.4) é satisfeita e, também,*

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0. \tag{2.5}$$

Seja, por definição, $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ a matriz de transferência do sistema (2.2), então:

Teorema 1 *[19] A condição necessária e suficiente para que o sistema (2.2) seja hiperestável é que $G(s)$ seja RP.*

Teorema 2 *[19] A condição necessária e suficiente para que o sistema (2.2) seja assintoticamente hiperestável é que $G(s)$ seja ERP.*

O Lema 1, a seguir, fornece condições para os sistemas ERP.

Lema 1 *[19] A matriz de transferência do sistema (2.1), $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$, é ERP se e somente se existir uma matriz $P = P^T$, tal que:*

$$\begin{aligned} PA + A^T P &< 0, \\ B^T P &= C, \\ P &> 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

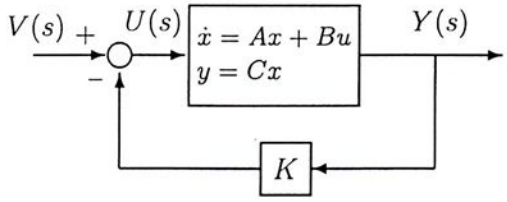


Figura 1: Sistema realimentado dos Teoremas 3 e 4.

Em [20], foram obtidas outras condições, utilizando LMIs, para que o sistema realimentado descrito na Fig. 1, com entrada $V(s)$ e saída $Y(s)$, seja ERP para alguma matriz constante K.

Teorema 3 *[20] Existe uma matriz K, constante, de realimentação da saída, que torna o sistema de malha fechada da Fig. 1 ERP, se e somente se, para $\tilde{C} = C^T$,*

$$B^T\tilde{C} = \tilde{C}^T B > 0, \tag{2.7}$$

e se existir uma matriz $X = X^T > 0$, tal que

$$\tilde{C}_\perp^T \text{herm}(B_\perp X B_\perp^T A)\tilde{C}_\perp < 0. \tag{2.8}$$

A matriz $\tilde{C}_\perp$ é definida como

$$\tilde{C}_\perp \in \mathbb{R}^{n\times n-m},\ \text{posto}(\tilde{C}_\perp) = n - m\ e\ \tilde{C}^T\tilde{C}_\perp = 0$$

e a função $\text{herm}(X)$ *é dada por:*

$$\text{herm}(X) = \frac{1}{2}(X + X^*),$$

sendo X^* a matriz complexa conjugada transposta de X.

Sendo (2.7) e (2.8) factíveis, todas as soluções para K serão descritas por:

$$K = \tilde{C}^\dagger \text{herm}(PA)\{I - \tilde{C}_\perp[\tilde{C}_\perp^T \text{herm}(PA)\tilde{C}_\perp]^{-1}\tilde{C}_\perp^T \text{herm}(PA)\}\tilde{C}^{\dagger T} + S, \tag{2.9}$$

sendo

$$P = P^T = \tilde{C}(B^T\tilde{C})^{-1}\tilde{C}^T + B_\perp X B_\perp^T > 0,$$

S uma matriz definida positiva qualquer e $\tilde{C}^\dagger = (\tilde{C}^T\tilde{C})^{-1}\tilde{C}^T$ denota a pseudo-inversa de Moore-Penrose de $\tilde{C}$.

O problema descrito no Teorema 3 já foi estudado teoricamente em [34, 35], como mostra o Teorema 4.

Teorema 4 *[35, 36]: Considere a Fig. 1. Então, existe uma matriz constante K, tal que o sistema da Fig. 1, com entrada $V(s)$ e saída $Y(s)$, seja ERP, se e somente se as seguintes condições forem satisfeitas:*

(i) $CB = (CB)^T > 0$;

(ii) *todos os zeros de transmissão da planta $\{A, B, C\}$ apresentam parte real negativa.*

O Apêndice A define o conceito de zeros de transmissão de um sistema.

Observação 1 *É oportuno mencionar que o Teorema 4 apresenta as mesmas condições descritas em [36], Lema 1, p. 55, excetuando-se que, naquele lema, a condição (i) do Teorema 4 é substituída pela condição $CB > 0$.*

Embora não tenha sido explicitado, no Lema 1 em [36], a condição de simetria (i) do Teorema 4 está implícita. Esta simetria é necessária, pois das condições (2.6), $CB = B^T P B = (B^T P B)^T$, tendo em vista que $P = P^T$.

2.2 Formulação do Problema

Considere a planta linear, invariante no tempo, controlável e observável:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{2.10}$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle, $y \in \mathbb{R}^p$, a saída do sistema, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz característica do sistema, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ a matriz de entrada do sistema e $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ a matriz de saída do sistema, com $p \geq m$, posto$(C) = p$ e posto(B) = posto$(CB) = m$.

Com base no Lema 1, são propostos os seguintes problemas:

Problema 1 Dada a planta $\{A, B, C\}$ linear, invariante no tempo, controlável e observável, com posto$(C) = p$, eposto(B) = posto$(CB) = m$, obtenha condições necessárias e/ou suficientes, usando LMIs, para a existência de matrizes constantes $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $K_s \in \mathbb{R}^{m \times p}$, para que o sistema descrito na Fig. 2 seja ERP.

Problema 2 Dada a planta $\{A, B, C\}$ linear, invariante no tempo, controlável e observável, com posto$(C) = p$, eposto(B) = posto$(CB) = m$, obtenha condições necessárias

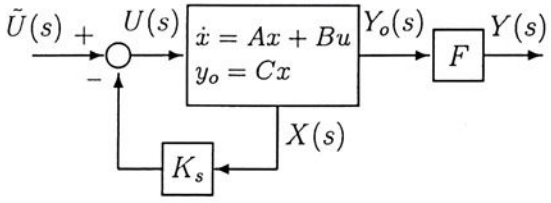


Figura 2: Sistema realimentado do Problema 1.

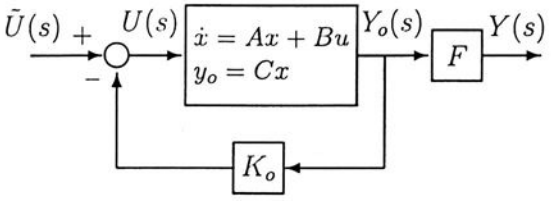


Figura 3: Sistema realimentado do Problema 2.

e/ou suficientes, usando LMIs, para a existência de matrizes constantes F e $K_o \in \mathbb{R}^{m \times p}$, para que o sistema descrito na Fig. 3 seja ERP.

2.3 Sistemas com Realimentação das Variáveis de Estado

A solução do Problema 1, para sistemas com o mesmo número de entradas e saídas ($p = m$), proposta em [21], é apresentada no Teorema 5.

Teorema 5 *[21] O Problema 1, para sistemas com o mesmo número de entradas e saídas ($p = m$), tem solução se e somente se existirem matrizes $P = P^T$, R e F que satisfazem às seguintes LMIs:*

$$PA + A^T P - C^T R - R^T C < 0, \tag{2.11}$$

$$B^T P = FC, \tag{2.12}$$

$$P > 0. \tag{2.13}$$

Neste caso, a matriz K_s é dada por:

$$K_s = (F^T)^{-1} R. \tag{2.14}$$

O Teorema 6, proposto neste trabalho, estabelece uma relação entre as soluções dos Problemas 1 e 2 e é a primeira contribuição desta tese.

Teorema 6 *O Problema 2 tem solução se e somente se o Problema 1 tiver solução.*

Prova (Suficiência) Suponha que existe uma solução para o Problema 1. Então, existem matrizes K_s e F tais que o sistema $\{A - BK_s, B, FC\}$ seja ERP. Portanto, considerando na Fig. 1, $A_z = A - BK_s$, $B_z = B$ e $C_z = FC$, o sistema realimentado é ERP, para $K_z = 0$. Assim, de acordo com o Teorema 4, as seguintes condições são satisfeitas:

(i) $FCB = (FCB)^T > 0$;

(ii) todos os zeros de transmissão da planta $\{A - BK_s, B, FC\}$ apresentam parte real negativa.

Os zeros de transmissão de uma planta $\{A, B, FC\}$, sendo que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ e $F \in \mathbb{R}^{m\times p}$, são os números $s \in \mathbb{C}$, tais que:

$$\text{posto} \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -FC & 0 \end{bmatrix} < n + m.$$

Através de operações elementares nas colunas da matriz acima, que define os zeros de transmissão da planta $\{A - BK_s, B, FC\}$, pode-se observar que os zeros de transmissão de $\{A - BK_s, B, FC\}$ são os mesmos zeros de transmissão de $\{A, B, FC\}$:

$$\text{posto} \begin{bmatrix} sI - A + BK_s & B \\ -FC & 0 \end{bmatrix} = \text{posto} \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -FC & 0 \end{bmatrix} < n + m.$$

Novamente, do Teorema 4, agora para $A_z = A$, $B_z = B$ e $C_z = FC$ na Fig. 1, considerando que $FCB = (FCB)^T > 0$ e todos os zeros de transmissão da planta $\{A, B, FC\}$ apresentam parte real negativa, então existe uma matriz de realimentação da saída K_z, tal que a planta $\{A - BK_zFC, B, FC\}$ seja ERP. Então, as matrizes F e $K_o = K_zF$ constituem uma solução do Problema 2.

(Necessidade) Considere a existência de matrizes K_o e F, tais que a planta $\{A - BK_oC, B, FC\}$ seja ERP e defina $K_s = K_oC$. Então, existem matrizes K_s e F, tais que a planta $\{A - BK_s, B, FC\}$ seja ERP. □



2.4 Sistemas com Realimentação da Saída

2.4.1 Sistemas com o Mesmo Número de Entradas e Saídas

Considere a planta definida pelas equações (2.10), com $p = m$. A solução do Problema 2, para sistemas com o mesmo número de entradas e saídas, é apresentada no Teorema 7.

Teorema 7 *[13, 21] O Problema 1 tem solução se e somente se existirem matrizes $P = P^T$, R e F, tais que:*

$$PA + A^T P - C^T(R + R^T)C < 0, \tag{2.15}$$

$$B^T P = FC, \tag{2.16}$$

$$P > 0. \tag{2.17}$$

Além disso, quando (2.15)–(2.17) são satisfeitas, então uma matriz K_o, que pode ser obtida pela expressão:

$$K_o = (F^T)^{-1} R, \tag{2.18}$$

torna o sistema da Fig. 3, com entrada $\tilde{U}(s)$ e saída $Y(s)$, ERP.

Prova [13] A partir do Lema 1, o sistema descrito na Fig. 3, com entrada $\tilde{U}(s)$ e saída $Y(s)$ é ERP se e somente se existirem matrizes $P = P^T$, K e F, tais que:

$$P(A - BKC) + (A - BKC)^T P < 0, \tag{2.19}$$

$$B^T P = FC, \tag{2.20}$$

$$P > 0. \tag{2.21}$$

Agora, substituindo (2.20) em (2.19) e definindo $R = F^T K$, tem-se:

$$\begin{aligned} &PA + A^T P - C^T F^T KC - C^T K^T FC < 0, \\ &PA + A^T P - C^T(R + R^T)C < 0, \end{aligned} \tag{2.22}$$

que corresponde à equação (2.15). Agora, de (2.16), como posto$(B) = m$ então $B^T PB = FCB$ tem posto m. Portanto, $F \in \mathbb{R}^{m \times m}$ também tem posto m e assim $(F^T)^{-1}$ existe. Então, se o sistema na Fig. 3 for ERP, (2.15)–(2.17) são factíveis e se (2.15)–(2.17) forem factíveis, o sistema na Fig. 3 é ERP, para K dado em (2.18). □

Observação 2 *Se as LMIs dadas em (2.15)–(2.17) forem factíveis, elas podem ser facilmente resolvidas utilizando-se programas computacionais disponíveis, como o* Matlab *[37] e o* LMISol *[38].*



O lema a seguir permite remover a restrição de igualdade do Teorema 7, como descrito no Corolário 1 abaixo.

Lema 2 *[14,34] Considere o sistema* $\{A, B, C\}$*, descrito em (2.1), com* posto$(CB) = m$*. Então, existe uma transformação linear* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*, tal que:*

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ y_o \end{bmatrix} = Tx, \tag{2.23}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{y}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ y_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ CB \end{bmatrix} u, \tag{2.24}$$

$$y_o = \begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ y_o \end{bmatrix}. \tag{2.25}$$

Corolário 1 *[21] Considere que as matrizes* A*,* B *e* C*, na Fig. 3, tenham as seguintes formas:*

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ C_o B_o \end{bmatrix} \; e \; C = \begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix}, \tag{2.26}$$

sendo posto$(C_o B_o) = m$*. Então, as condições necessárias e suficientes para a solução do Problema 2 são a existência de matrizes* $P = P^T$ *e* R*, tais que*

$$P = \begin{bmatrix} P_a & 0 \\ 0 & P_c \end{bmatrix} > 0 \; e \tag{2.27}$$

$$PA + A^T P - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (R + R^T) \end{bmatrix} < 0, \tag{2.28}$$

sendo as matrizes K_o *e* F *obtidas pelas expressões:*

$$K_o = (F^T)^{-1} R = (P_c C_o B_o)^{-1} R, \tag{2.29}$$

$$F = (C_o B_o)^T P_c. \tag{2.30}$$

Prova A prova deste corolário é similar à prova do Teorema 7 e é apresentada em [21]. □

Comparando-se os resultados do Corolário 1 com os do Teorema 7, observa-se que foi removida a Equação Linear Matricial (em inglês, *Linear Matrix Equality*, LME) (2.16). Alguns programas computacionais, como o *toolbox* de LMI do *Matlab* não aceitam diretamente a existência de LMEs. Desta forma, o Corolário 1 pode ser útil para a obtenção de uma solução numérica do Problema 2.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

2.4.2 Sistemas com Números Diferentes de Entradas (m) e Saídas (p)

Considere a planta definida em (2.31):

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A_o\tilde{x} + B_o u, \\ y &= C_o\tilde{x}, \end{aligned} \tag{2.31}$$

sendo $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle, $y \in \mathbb{R}^p$, a saída do sistema, $A_o \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a matriz característica do sistema, $B_o \in \mathbb{R}^{n\times m}$ a matriz de entrada do sistema e $C_o \in \mathbb{R}^{p\times n}$ a matriz de saída do sistema, com $p > m$, posto$(C_o) = p$ e posto$(B_o) =$ posto$(C_oB_o) = m$.

Considere, inicialmente, que $p = n$. Neste caso, o Problema 2 é equivalente ao Problema 1, com $K_s = K_oC$, e o Teorema 8 estabelece a solução do Problema 2.

Teorema 8 *O Problema 2, com $p = n$, tem solução se e somente se existirem matrizes $X = X^T$ e R que satisfazem às seguintes LMIs:*

$$AX + XA^T - BR - R^TB^T < 0, \tag{2.32}$$

$$X > 0. \tag{2.33}$$

Neste caso, as matrizes F e K_o podem ser obtidas por:

$$F = B^TX^{-1}C^{-1}, \tag{2.34}$$

$$K_o = RX^{-1}C^{-1}. \tag{2.35}$$

Prova A partir do Lema 1, o sistema descrito na Fig. 3, com entrada $\tilde{U}(s)$ e saída $Y(s)$, é ERP se e somente se existirem matrizes $P = P^T$, K_o e F, tais que:

$$P(A - BK_oC) + (A - BK_oC)^TP < 0, \tag{2.36}$$

$$B^TP = FC, \tag{2.37}$$

$$P > 0. \tag{2.38}$$

Definindo-se $X = P^{-1}$, tem-se, de (2.36)–(2.38):

$$(A - BK_oC)X + X(A - BK_oC)^T < 0, \tag{2.39}$$

$$B^T = FCX, \tag{2.40}$$

$$X > 0. \tag{2.41}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

As LMIs (2.33) e (2.41) são equivalentes. Definindo-se, em (2.39), $R = K_o C X$, obtém-se a LMI (2.32). Como as matrizes C e X são inversíveis, as matrizes F e K_o podem ser obtidas através das equações (2.34) e (2.35). □

Considere, agora, $p < n$. Embora não tenham sido obtidas condições necessárias e suficientes, em termos de LMIs, para a solução do Problema 2 neste caso, são propostas, nesta tese, algumas condições suficientes que são úteis na solução do problema.

Considere, também, o seguinte lema:

Lema 3 *[1, 34] Considere o sistema (2.31), com $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ e $p \geq m$. Então, existe uma transformação linear T, de modo que:*

$$x = T\tilde{x}, \tag{2.42}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ C_o B_o \end{bmatrix} u = Ax + Bu, \tag{2.43}$$

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} x = Cx, \tag{2.44}$$

sendo I_p a matriz identidade de ordem p. Note que, no Lema 3, $C_o B_o = CB$ e que $B^T = (CB)^T C$.

A prova deste lema é reproduzida no Apêndice B.

Nos Teoremas 9 e 10, será considerado que as matrizes da planta satisfazem à condição $B^T = (CB)^T C$.

Um procedimento, que será útil para obter uma transformação linear T, que garante as condições acima, é apresentado a seguir [12]:

(a) Obtenha P_o, tal que:

$$B_o^T P_o = (C_o B_o)^T C_o \text{ e } P_o = P_o^T > 0;$$

(b) Calcule $T_o = \sqrt{P_o}$ (o *Matlab* faz este cálculo diretamente). Então, $P_o = T_o T_o$ e é bem conhecido [39, 40] que, como $P_o = P_o^T > 0$, então, $T_o = T_o^T > 0$.

Note que:

$$B_o^T P_o = (C_o B_o)^T C_o \Rightarrow B_o^T T_o T_o = (C_o B_o)^T C_o$$
$$(T_o B_o)^T = (C_o T_o^{-1} T_o B_o)^T (C_o T_o^{-1})$$
$$B^T = (CB)^T C.$$



Uma condição suficiente para a solução do Problema 2, com $B^T = (CB)^T C$, é apresentada no Teorema 9.

Teorema 9 *[12] Uma condição suficiente para a solução do Problema 2, com $B^T = (CB)^T C$, é a existência de matrizes $P = P^T$, N e M, tais que:*

$$PA + A^T P - BNC - C^T N^T B^T < 0, \tag{2.45}$$

$$B^T P = MB^T, \tag{2.46}$$

$$P > 0. \tag{2.47}$$

Quando (2.45)-(2.47) são satisfeitas, então as matrizes F e K_o podem ser obtidas por:

$$F = M(CB)^T, \tag{2.48}$$

$$K_o = (M^T)^{-1} N. \tag{2.49}$$

Prova A partir do Lema 1, o sistema descrito na Fig. 3, com entrada $\tilde{U}(s)$ e saída $Y(s)$ é ERP se e somente se existirem matrizes $P = P^T$, K_o e F, tais que:

$$P(A - BK_oC) + (A - BK_oC)^T P < 0, \tag{2.50}$$

$$B^T P = FC, \tag{2.51}$$

$$P > 0. \tag{2.52}$$

Considere que existem matrizes P, N e M que satisfazem às equações (2.45)–(2.47). As equações (2.47) e (2.52) são equivalentes.

Como $B^T = (CB)^T C$, então, de (2.46), tem-se que:

$$B^T P = MB^T = M(CB)^T C.$$

Desta forma, para $F = M(CB)^T$, a equação (2.46) implica na equação (2.51).

Finalmente, de (2.45) e (2.46), obtém-se:

$$\begin{aligned} & PA + A^T P - BNC - C^T N^T B^T \\ &= PA + A^T P - BM^T (M^T)^{-1} NC - C^T N^T M^{-1} MB^T \\ &= PA + A^T P - PB(M^T)^{-1} NC - C^T N^T M^{-1} B^T P \\ &= P(A - B(M^T)^{-1} NC) + (A - B(M^T)^{-1} NC)^T P < 0. \end{aligned}$$



Definindo-se $K_o = (M^T)^{-1}N$, tem-se:

$$P(A - BK_oC) + (A - BK_oC)^T P < 0.$$

Portanto, a equação (2.45) implica na equação (2.50). □

Corolário 2 *[12] A condição necessária e suficiente para a factibilidade das LMIs (2.45)–(2.47) é que todos os zeros de transmissão do sistema $\{A, B, B^T\}$ tenham parte real negativa.*

Prova (Suficiência) Pelo Teorema 4, se todos os zeros de transmissão do sistema $\{A, B, B^T\}$ têm parte real negativa, então, existe uma matriz K, tal que o sistema $\{A - BKB^T, B, B^T\}$ seja ERP, pois posto$(B) = m$, então $B^TB > 0$. Assim, de acordo com o Lema 1, existe $P = P^T$, tal que:

$$P(A - BKB^T) + (A - BKB^T)^T P < 0, \tag{2.53}$$

$$B^TP = B^T, \tag{2.54}$$

$$P > 0. \tag{2.55}$$

As equações (2.55) e (2.47) são equivalentes. A partir de (2.54), definindo $M = I_m$, tem-se:

$$B^TP = MB^T.$$

Portanto, a equação (2.54) implica na equação (2.46).

A partir de (2.53), tem-se:

$$PA + A^TP - PBKB^T - BK^TB^TP < 0. \tag{2.56}$$

Substituindo (2.54) em (2.56), segue que:

$$PA + A^TP - BKB^T - BK^TB^T < 0. \tag{2.57}$$

Da hipótese de que $B^T = (CB)^TC$, tem-se:

$$PA + A^TP - BK(CB)^TC - C^T(CB)K^TB^T < 0. \tag{2.58}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

Definindo $N = K(CB)^T$, segue que:

$$PA + A^T P - BNC - C^T N^T B^T < 0.$$

Portanto, a equação (2.53) implica na equação (2.45).

(Necessidade) De (2.45) a (2.47), o sistema $\{A - BK_oC, B, MB^T\}$ é ERP e, portanto, todos os zeros de transmissão deste sistema têm parte real negativa. Como a matriz M é inversível, pode-se verificar que os sistemas $\{A - BK_oC, B, MB^T\}$ e $\{A, B, B^T\}$ têm os mesmos zeros de transmissão, usando operações elementares, primeiro nas colunas e depois nas linhas, da matriz que define os zeros de transmissão de $\{A - BK_oC, B, MB^T\}$:

$$\begin{bmatrix} sI - A + BK_oC & B \\ -MB^T & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -MB^T & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -B^T & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, todos os zeros de transmissão do sistema $\{A, B, B^T\}$ têm parte real negativa. □

Outra condição suficiente para a solução do Problema 2, com $B^T = (CB)^T C$, é apresentada no Teorema 10.

Teorema 10 *[12] Uma condição suficiente para a solução do Problema 2, com $B^T = (CB)^T C$, é a existência de matrizes $X = X^T$, Y e Z, tais que:*

$$AX + XA^T - BZC - C^T Z^T B^T < 0, \tag{2.59}$$

$$CX = YC, \tag{2.60}$$

$$X > 0. \tag{2.61}$$

Quando (2.59)-(2.61) são satisfeitas, então as matrizes F e K_o podem ser obtidas por:

$$F = (CB)^T Y^{-1}, \tag{2.62}$$

$$K_o = ZY^{-1}. \tag{2.63}$$

Prova A partir do Lema 1, o sistema descrito na Fig. 3, com entrada $\tilde{U}(s)$ e saída $Y(s)$, é ERP se e somente se existirem matrizes $P = P^T$, K_o e F, tais que:

$$P(A - BK_oC) + (A - BK_oC)^T P < 0, \tag{2.64}$$

$$B^T P = FC, \tag{2.65}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

$$P > 0. \tag{2.66}$$

Definindo-se $X = P^{-1}$, tem-se, de (2.64)–(2.66):

$$(A - BK_oC)X + X(A - BK_oC)^T < 0, \tag{2.67}$$

$$B^T = FCX, \tag{2.68}$$

$$X > 0. \tag{2.69}$$

Considere a existência de matrizes X, Y e Z, que satisfazem às equações (2.59)–(2.61). As equações (2.61) e (2.69) são equivalentes. Note que, de (2.60) e (2.61), $CXC^T = YCC^T$ tem posto m e, assim, $Y \in \mathbb{R}^{m \times m}$ também tem posto m.

Como $B^T = (CB)^T C$, então, de (2.60), segue que:

$$CX = YC,$$
$$(CB)^T Y^{-1} CX = (CB)^T Y^{-1} YC,$$
$$(CB)^T Y^{-1} CX = (CB)^T C = B^T.$$

Assim, para $F = (CB)^T Y^{-1}$, a equação (2.60) implica na equação (2.68).

A partir da equação (2.59), obtém-se:

$$AX + XA^T - BZC - C^T Z^T B^T < 0,$$
$$AX + XA^T - BZY^{-1}YC - C^T Y^T (Y^{-1})^T Z^T B^T < 0. \tag{2.70}$$

Substituindo (2.60) em (2.70), segue que:

$$AX + XA^T - BZY^{-1}CX - X^T C^T (Y^{-1})^T Z^T B^T < 0,$$
$$(A - BZY^{-1}C)X + X(A - BZY^{-1}C)^T < 0. \tag{2.71}$$

Definindo $K_o = ZY^{-1}$, segue que:

$$(A - BK_oC)X + X(A - BK_oC)^T < 0.$$

Portanto, a equação (2.59) implica na equação (2.67). □

Corolário 3 *[12] Uma condição necessária para a factibilidade das LMIs (2.59)–(2.61) é que todos os zeros de transmissão do sistema $\{A, C^T, C\}$ tenham parte real negativa.*



Prova De (2.59)–(2.63), o sistema $\{A - BK_oC, C^T, Y^{-1}C\}$ é ERP e, portanto, todos os zeros de transmissão deste sistema têm parte real negativa. Como a matriz Y^{-1} é inversível, pode-se verificar que os sistemas $\{A - BK_oC, C^T, Y^{-1}C\}$ e $\{A, C^T, C\}$ têm os mesmos zeros de transmissão, usando operações elementares nas linhas da matriz que define os zeros de transmissão de $\{A - BK_oC, C^T, Y^{-1}C\}$:

$$\begin{bmatrix} sI - A + BK_oC & C^T \\ -Y^{-1}C & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} sI - A & C^T \\ -Y^{-1}C & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} sI - A & C^T \\ -C & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, se o sistema $\{A-BK_oC, C^T, Y^{-1}C\}$ é ERP, ou de forma equivalente, se (2.59)–(2.61) são factíveis, todos os zeros de transmissão do sistema $\{A, C^T, C\}$ têm parte real negativa. □

Observação 3 *Através de várias aplicações dos Teoremas 9 e 10, em exemplos numéricos, foi possível constatar que existem casos nos quais um funciona e o outro não e vice-versa. Desta forma, as condições destes teoremas são distintas e um teorema não pode ser visto como um caso particular do outro.*

Considere, agora, a planta linear, invariante no tempo, controlável e observável:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A_o\tilde{x} + B_ou, \\ \tilde{y} &= C_o\tilde{x}. \end{aligned} \tag{2.72}$$

Considerando a planta (2.72), os Lemas 4 e 5 são a base para os Teoremas 11 e 12, propostos nesta tese:

Lema 4 *Considere a matriz $M \in \mathbb{R}^{p\times p}$, definida por:*

$$M = \begin{bmatrix} (C_oB_o)_\perp^T \\ \left[(C_oB_o)^T(C_oB_o)\right]^{-1}(C_oB_o) \end{bmatrix}, \tag{2.73}$$

sendo $(C_oB_o)_\perp^T \in \mathbb{R}^{p-m\times p}$ tal que $(C_oB_o)_\perp^T(C_oB_o) = 0$ e posto$[(C_oB_o)_\perp] = p - m$. Multiplicando a saída $\tilde{y}$ por M, defina a nova saída $\tilde{y}_N = MC_o = C_1\tilde{x}$. Então, o produto C_1B_o, com $C_1 = MC_o$, é dado por:

$$C_1B_o = MC_oB_o = \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix}.$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

Lema 5 *Considere o sistema (2.72), com a nova saída* $\tilde{y}_N = M\tilde{y} = MC_o = C_1\tilde{x}$, *definida no Lema 4. Então, utilizando uma transformação linear dada por:*

$$T = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{o\perp}^T \\ C_1 \end{bmatrix},$$

sendo $\tilde{B}_{o\perp}^T \in \mathbb{R}^{n-p\times n}$ *tal que* $\tilde{B}_{o\perp}^T B_o = 0$, $\text{posto}(\tilde{B}_{o\perp}) = n - p$ *e tal que* $\text{posto}(T) = n$, *o sistema transformado adquire a seguinte forma definida pelas equações (2.10), com:*

$$x = T\tilde{x}, \quad y = M\tilde{y},$$

$$A = TA_oT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}, \tag{2.74}$$

$$B = TB_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_m \end{bmatrix}, \tag{2.75}$$

$$C = C_1T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & I_{p-m} & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix}. \tag{2.76}$$

Neste caso específico, o Teorema 11, proposto neste trabalho, estabelece as condições necessárias e suficientes para que o sistema (2.10), com as matrizes A, B e C definidas em (2.74)–(2.76), seja ERP.

Teorema 11 *O Problema 2, com as matrizes A, B e C definidas em (2.74)–(2.76), tem solução se e somente se existirem matrizes* $P_{11} = P_{11}^T$, P_{12}, $P_{22} = P_{22}^T$, P_{23}, $P_{33} = P_{33}^T$, K_1 *e* K_2 *que satisfazem às seguintes condições:*

$$PA + A^TP - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{23}K_1 & P_{23}K_2 \\ 0 & P_{33}K_1 & P_{33}K_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_1^TP_{23}^T & K_2^TP_{33} \\ 0 & K_1^TP_{23}^T & K_2^TP_{33} \end{bmatrix} < 0, \tag{2.77}$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & 0 \\ P_{12}^T & P_{22} & P_{23} \\ 0 & P_{23}^T & P_{33} \end{bmatrix} > 0, \tag{2.78}$$

sendo que as matrizes possuem dimensões apropriadas. Neste caso, as matrizes K_o *e* F *podem ser obtidas por:*

$$K_o = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}, \tag{2.79}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

$$F = \left[\begin{array}{cc} P_{23}^T & P_{33} \end{array} \right], \tag{2.80}$$

Prova A partir do Lema 1, o sistema descrito na Fig. 3, com entrada U_o e saída Y_o é ERP se e somente se existirem matrizes $P = P^T$, F e K_o, tais que:

$$P(A - BK_oC) + (A - BK_oC)^T P < 0, \tag{2.81}$$

$$B^T P = FC, \tag{2.82}$$

$$P > 0. \tag{2.83}$$

Decompondo-se as matrizes P, F e K_o, tem-se:

$$P = P^T = \left[\begin{array}{ccc} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12}^T & P_{22} & P_{23} \\ P_{13}^T & P_{23}^T & P_{33} \end{array} \right], \; F = \left[\begin{array}{cc} F_1 & F_2 \end{array} \right], \; K_o = \left[\begin{array}{cc} K_1 & K_2 \end{array} \right].$$

Com base nesta decomposição, obtém-se:

$$B^T P = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & I_m \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12}^T & P_{22} & P_{23} \\ P_{13}^T & P_{23}^T & P_{33} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} P_{13}^T & P_{23}^T & P_{33} \end{array} \right], \tag{2.84}$$

$$FC = \left[\begin{array}{cc} F_1 & F_2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} 0 & I_{p-m} & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} 0 & F_1 & F_2 \end{array} \right]. \tag{2.85}$$

Substituindo-se as expressões (2.84) e (2.85) em (2.82), segue que:

$$P_{13}^T = 0, \; P_{23}^T = F_1, \; P_{33} = F_2.$$

Portanto,

$$F = \left[\begin{array}{cc} P_{23}^T & P_{33} \end{array} \right],$$

o que corresponde à equação (2.80).

Substituindo-se $P_{13} = 0$ na expressão de P, a expressão (2.83) corresponde à expressão (2.78).



Já o produto PBK_oC é dado por:

$$PBK_oC = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & 0 \\ P_{12}^T & P_{22} & P_{23} \\ 0 & P_{23}^T & P_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_{p-m} & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{23}K_1 & P_{23}K_2 \\ 0 & P_{33}K_1 & P_{33}K_2 \end{bmatrix}.$$

Substituindo-se a equação acima na expressão (2.81), obtém-se a expressão (2.77). □

O inconveniente do Teorema 11 é que as condições não são expressas em termos de LMIs. Entretanto, com $P_{23} = 0$, podem ser obtidas condições suficientes, em termos de LMIs, para que o sistema descrito em (2.10), com as matrizes A, B e C definidas em (2.74)–(2.76), seja ERP.

Teorema 12 *O sistema (2.10), com as matrizes A, B e C definidas em (2.74)–(2.76), é ERP se existirem matrizes $P_{11} = P_{11}^T$, P_{12}, $P_{22} = P_{22}^T$, $P_{33} = P_{33}^T$, R_{32} e R_{33} que satisfazem às seguintes condições:*

$$PA + A^TP - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{32}^T \\ 0 & 0 & R_{33}^T \end{bmatrix} < 0, \tag{2.86}$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & 0 \\ P_{12}^T & P_{22} & 0 \\ 0 & 0 & P_{33} \end{bmatrix} > 0, \tag{2.87}$$

sendo que as matrizes possuem dimensões apropriadas. Neste caso, as matrizes K_o e F podem ser obtidas por:

$$K_o = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}, \tag{2.88}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & P_{33} \end{bmatrix}, \tag{2.89}$$

sendo:

$$K_1 = P_{33}^{-1}R_{32}, \tag{2.90}$$

$$K_2 = P_{33}^{-1}R_{33}. \tag{2.91}$$

Prova Substituindo-se $P_{23} = 0$ e definindo-se $R_{32} = P_{33}K_1$ e $R_{33} = P_{33}K_2$ nas expressões (2.77)–(2.80), obtêm-se as expressões (2.86)–(2.89). □

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

Considere, novamente, a planta definida pelas equações (2.10), com $p > m$. O Teorema 13 apresenta outras condições suficientes para que o sistema da Fig. 3 seja ERP, propostas neste trabalho:

Teorema 13 *O sistema da Fig. 3 é ERP se pelo menos uma das condições (i)-(xi) for satisfeita:*

(i) Existem matrizes $P = P^T$, K_o e F que satisfazem às seguintes condições:

$$\begin{bmatrix} -2P & A^T - C^T K_o^T B^T + P + I_n \\ A - BK_oC + P + I_n & -2I_n \end{bmatrix} < 0, \tag{2.92}$$

$$B^T P = FC. \tag{2.93}$$

(ii) Existem matrizes $P_N = P_N^T$, K_o e F_N que satisfazem às seguintes condições, para algum $\delta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{bmatrix} -2P_N & A^T - C^T K_o^T B^T + P_N + \delta I_n \\ A - BK_oC + P_N + \delta I_n & -2\delta I_n \end{bmatrix} < 0, \tag{2.94}$$

$$B^T P_N = F_N C. \tag{2.95}$$

Neste caso, a matriz F é dada por:

$$F = \frac{1}{\delta} F_N. \tag{2.96}$$

(iii) Existem matrizes $P = P^T$, K_f e F que satisfazem às seguintes condições:

$$\begin{bmatrix} -BK_fB^T - BK_f^T B^T - 2I_n & A + P + I_n \\ A^T + P + I_n & -2P \end{bmatrix} < 0, \tag{2.97}$$

$$B^T P = FC. \tag{2.98}$$

Neste caso, a matriz K_o é dada por:

$$K_o = K_f F. \tag{2.99}$$

(iv) Existem matrizes $P_N = P_N^T$, K_f e F_N que satisfazem às seguintes condições, para



algum $\delta \in \mathbb{R}$, *com* $\delta > 0$:

$$\begin{bmatrix} -BK_fB^T - BK_f^TB^T - 2\delta I_n & A + P_N + \delta I_n \\ A^T + P_N + \delta I_n & -2P_N \end{bmatrix} < 0, \tag{2.100}$$

$$B^TP_N = F_NC. \tag{2.101}$$

Neste caso, as matrizes F *e* K_o *podem ser obtidas por:*

$$F = \frac{1}{\delta}F_N, \;\; K_o = K_fF. \tag{2.102}$$

(v) Existem matrizes $P = P^T$, K_1, K_2 *e* F *que satisfazem às seguintes condições:*

$$\begin{bmatrix} -2P & A^T - C^TK_1^TB^T + P + I_n \\ A - BK_1C + P + I_n & -BK_2B^T - BK_2^TB^T - 2I_n \end{bmatrix} < 0, \tag{2.103}$$

$$B^TP = FC. \tag{2.104}$$

Neste caso, a matriz K_o *é dada por:*

$$K_o = K_1 + K_2F. \tag{2.105}$$

(vi) Existem matrizes $P_N = P_N^T$, K_1, K_2 *e* F_N *que satisfazem às seguintes condições, para algum* $\delta \in \mathbb{R}$, *com* $\delta > 0$:

$$\begin{bmatrix} -2P_N & A^T - C^TK_1^TB^T + P_N + \delta I_n \\ A - BK_1C + P_N + \delta I_n & -BK_2B^T - BK_2^TB^T - 2\delta I_n \end{bmatrix} < 0, \tag{2.106}$$

$$B^TP_N = F_NC. \tag{2.107}$$

Neste caso, as matrizes F *e* K_o *podem ser obtidas por:*

$$F = \frac{1}{\delta}F_N, \tag{2.108}$$

$$K_o = K_1 + K_2F. \tag{2.109}$$

(vii) Existem matrizes $P = P^T$, K_o *e* F *que satisfazem às seguintes condições:*

$$\begin{bmatrix} PA + A^TP - 2P & -C^TK_o^TB^T + P + I_n \\ -BK_oC + P + I_n & -2I_n \end{bmatrix} < 0, \tag{2.110}$$

$$B^TP = FC, \tag{2.111}$$

$$P > 0. \tag{2.112}$$



(viii) Existem matrizes $P_N = P_N^T$, K_N e F_N que satisfazem às seguintes condições, para algum $\delta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{bmatrix} P_N A + A^T P_N - 2P_N & -C^T K_N^T B^T + P_N + \delta I_n \\ -BK_N C + P_N + \delta I_n & -2\delta I_n \end{bmatrix} < 0, \tag{2.113}$$

$$B^T P_N = F_N C, \tag{2.114}$$

$$P_N > 0. \tag{2.115}$$

Neste caso, as matrizes F e K_o podem ser obtidas por:

$$F = \frac{1}{\delta} F_N, \tag{2.116}$$

$$K_o = \frac{1}{\delta} K_N. \tag{2.117}$$

(ix) Existem matrizes $P = P^T$, K_1, K_2 e F que satisfazem às seguintes condições:

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P - 2P & -C^T K_1^T B^T + P + I_n \\ -BK_1 C + P + I_n & -BK_2 B^T - BK_2^T B^T - 2I_n \end{bmatrix} < 0, \tag{2.118}$$

$$B^T P = FC, \tag{2.119}$$

$$P > 0. \tag{2.120}$$

Neste caso, a matriz K_o é dada por:

$$K_o = K_1 + K_2 F. \tag{2.121}$$

(x) Existem matrizes $P_N = P_N^T$, K_{N1}, K_{N2} e F_N que satisfazem às seguintes condições, para algum $\delta \in \mathbb{R}$, com $\delta > 0$:

$$\begin{bmatrix} P_N A + A^T P_N - 2P_N & -C^T K_{N1}^T B^T + P_N + \delta I_n \\ -BK_{N1} C + P_N + \delta I_n & -BK_{N2} B^T - BK_{N2}^T B^T - 2\delta I_n \end{bmatrix} < 0, \tag{2.122}$$

$$B^T P_N = F_N C, \tag{2.123}$$

$$P_N > 0. \tag{2.124}$$

Neste caso, as matrizes F e K_o podem ser obtidas por:

$$F = \frac{1}{\delta} F_N, \tag{2.125}$$

$$K_o = K_1 + K_2 F, \tag{2.126}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

sendo:

$$K_1 = \frac{1}{\delta} K_{N1},$$

$$K_2 = \frac{1}{\delta} K_{N2}.$$

(xi) Existem matrizes $P = P^T$, M, N e F que satisfazem às seguintes condições:

$$PA + A^T P - C^T N^T B^T - BNC < 0, \tag{2.127}$$

$$P > 0, \tag{2.128}$$

$$BM = PB, \tag{2.129}$$

$$B^T P = FC. \tag{2.130}$$

Neste caso, a matriz K_o é dada por:

$$K_o = M^{-1} N. \tag{2.131}$$

Prova A partir do Lema 1, o sistema descrito na Fig. 3, com entrada U_o e saída Y_o é ERP se e somente se existirem matrizes $P = P^T$, F e K_o, tais que:

$$P(A - BK_oC) + (A - BK_oC)^T P < 0, \tag{2.132}$$

$$B^T P = FC, \tag{2.133}$$

$$P > 0. \tag{2.134}$$

(i) As equações (2.93) e (2.133) são equivalentes. A LMI (2.134) é uma condição necessária para (2.92). Multiplicando-se a LMI (2.92) à esquerda por $\left[\begin{array}{cc} I_n & P \end{array} \right]$ e à direita por $\left[\begin{array}{cc} I_n & P \end{array} \right]^T$, tem-se:

$$\left[\begin{array}{cc} I_n & P \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} -2P & A^T - C^T K_o^T B^T + P + I_n \\ A - BK_oC + P + I_n & -2I_n \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} I_n \\ P \end{array} \right]$$

$$= P(A - BK_oC) + (A - BK_oC)^T P < 0.$$

Portanto, a LMI (2.92) implica nas LMIs (2.132) e (2.134).

(ii) Considere $P_N = \delta P$ e $F_N = \delta F$. Assim, as equações (2.95) e (2.133) são equi-

valentes. A LMI (2.134) é uma condição necessária para (2.94). Note que (2.94) implica que $\delta > 0$ e assim $P_N = \delta P = P_N^T > 0$. Multiplicando-se a LMI (2.94) à esquerda por $\left[\begin{array}{cc} I_n & P \end{array}\right]$ e à direita por $\left[\begin{array}{cc} I_n & P \end{array}\right]^T$, tem-se:

$$\left[\begin{array}{cc} I_n & P \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} -2P_N & A^T - C^T K_o^T B^T + P_N + \delta I_n \\ A - BK_oC + P_N + \delta I_n & -2\delta I_n \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} I_n \\ P \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc} I_n & P \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} -2\delta P & A^T - C^T K_o^T B^T + \delta P + \delta I_n \\ A - BK_oC + \delta P + \delta I_n & -2\delta I_n \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} I_n \\ P \end{array}\right]$$

$$= P(A - BK_oC) + (A - BK_oC)^T P < 0.$$

Portanto, a LMI (2.94) implica nas LMIs (2.132) e (2.134).

(iii) As equações (2.98) e (2.133) são equivalentes. A LMI (2.134) é uma condição necessária para (2.97). Multiplicando-se a LMI (2.97) à esquerda por $\left[\begin{array}{cc} P & I_n \end{array}\right]$ e à direita por $\left[\begin{array}{cc} P & I_n \end{array}\right]^T$, tem-se:

$$\left[\begin{array}{cc} P & I_n \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} -BK_fB^T - BK_f^TB^T - 2I_n & A + P + I_n \\ A^T + P + I_n & -2P \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} P \\ I_n \end{array}\right]$$

$$= PA + A^TP - PBK_fB^TP - PBK_f^TB^TP < 0. \qquad (2.135)$$

Substituindo (2.98) e (2.99) em (2.135), tem-se:

$$PA + A^TP - PBK_fB^TP - PBK_f^TB^TP = PA + A^TP - PBK_fFC - C^TF^TK_f^TB^TP$$

$$= PA + A^TP - PBK_oC - C^TK_o^TB^TP = P(A - BK_oC) + (A - BK_oC)^TP < 0.$$

Portanto, a LMI (2.97) implica nas LMIs (2.132) e (2.134).

(iv) Considere $P_N = \delta P$ e $F_N = \delta F$. Assim, as equações (2.101) e (2.133) são equivalentes. A LMI (2.134) é uma condição necessária para (2.100). Como $\delta > 0$, então note que $P_N = \delta P = P_N^T > 0$. Multiplicando-se a LMI (2.100) à esquerda por $\left[\begin{array}{cc} P & I_n \end{array}\right]$ e à direita por $\left[\begin{array}{cc} P & I_n \end{array}\right]^T$, tem-se:

$$\left[\begin{array}{cc} P & I_n \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} -BK_fB^T - BK_f^TB^T - 2\delta I_n & A + P_N + \delta I_n \\ A^T + P_N + \delta I_n & -2P_N \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} P \\ I_n \end{array}\right]$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

$$= \begin{bmatrix} P & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -BK_fB^T - BK_f^TB^T - 2\delta I_n & A + \delta P + \delta I_n \\ A^T + \delta P + \delta I_n & -2\delta P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ I_n \end{bmatrix}$$

$$= PA + A^TP - PBK_fB^TP - PBK_f^TB^TP < 0. \tag{2.136}$$

Substituindo (2.101) e (2.102) em (2.136), tem-se:

$$PA + A^TP - PBK_fB^TP - PBK_f^TB^TP = PA + A^TP - PBK_fFC - C^TF^TK_f^TB^TP$$

$$= PA + A^TP - PBK_oC - C^TK_o^TB^TP = P(A - BK_oC) + (A - BK_oC)^TP < 0.$$

Portanto, a LMI (2.100) implica nas LMIs (2.132) e (2.134).

(v) As equações (2.104) e (2.133) são equivalentes. A LMI (2.134) é uma condição necessária para (2.103). Multiplicando-se a LMI (2.103) à esquerda por $\begin{bmatrix} I_n & P \end{bmatrix}$ e à direita por $\begin{bmatrix} I_n & P \end{bmatrix}^T$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} I_n & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2P & A^T - C^TK_1^TB^T + P + I_n \\ A - BK_1C + P + I_n & -BK_2B^T - BK_2^TB^T - 2I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ P \end{bmatrix}$$

$$= PA + A^TP - PBK_1C - C^TK_1^TB^TP - PBK_2B^TP - PBK_2^TB^TP < 0. \tag{2.137}$$

Substituindo (2.104) e (2.105) em (2.137), tem-se:

$$PA + A^TP - PBK_1C - C^TK_1^TB^TP - PBK_2B^TP - PBK_2^TB^TP$$

$$= PA + A^TP - PBK_1C - C^TK_1^TB^TP - PBK_2FC - PBK_2^TFC$$

$$= PA + A^TP - PB(K_1 + K_2F)C - C^T(K_1 + K_2F)^TB^TP$$

$$= P(A - BK_oC) + (A - BK_oC)^TP < 0.$$

Portanto, a LMI (2.103) implica nas LMIs (2.132) e (2.134).

(vi) Considere $P_N = \delta P$ e $F_N = \delta F$. As equações (2.107) e (2.133) são equivalentes. A LMI (2.134) é uma condição necessária para (2.106). Como $\delta > 0$, então note que $P_N = \delta P = P_N^T > 0$. Multiplicando-se a LMI (2.106) à esquerda por $\begin{bmatrix} I_n & P \end{bmatrix}$ e à direita

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

por $\left[\begin{array}{cc} I_n & P \end{array}\right]^T$, tem-se:

$$\left[\begin{array}{cc} I_n & P \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} -2P_N & A^T - C^T K_1^T B^T + P_N + \delta I_n \\ A - BK_1C + P_N + \delta I_n & -BK_2B^T - BK_2^T B^T - 2\delta I_n \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} I_n \\ P \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc} I_n & P \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} -2\delta P & A^T - C^T K_1^T B^T + \delta P + \delta I_n \\ A - BK_1C + \delta P + \delta I_n & -BK_2B^T - BK_2^T B^T - 2\delta I_n \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} I_n \\ P \end{array}\right]$$

$$= PA + A^T P - PBK_1C - C^T K_1^T B^T P - PBK_2B^T P - PBK_2^T B^T P < 0. \qquad (2.138)$$

Substituindo (2.107) e (2.109) em (2.137), tem-se:

$$PA + A^T P - PBK_1C - C^T K_1^T B^T P - PBK_2B^T P - PBK_2^T B^T P$$

$$= PA + A^T P - PBK_1C - C^T K_1^T B^T P - PBK_2FC - PBK_2^T FC$$

$$= PA + A^T P - PB(K_1 + K_2F)C - C^T(K_1 + K_2F)^T B^T P$$

$$= P(A - BK_oC) + (A - BK_oC)^T P < 0.$$

Portanto, a LMI (2.106) implica nas LMIs (2.132) e (2.134).

(vii) As equações (2.111) e (2.133) são equivalentes. As LMIs (2.112) e (2.134) são equivalentes. Multiplicando-se a LMI (2.110) à esquerda por $\left[\begin{array}{cc} I_n & P \end{array}\right]$ e à direita por $\left[\begin{array}{cc} I_n & P \end{array}\right]^T$, tem-se:

$$\left[\begin{array}{cc} I_n & P \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} PA + A^T P - 2P & -C^T K_o^T B^T + P + I_n \\ -BK_oC + P + I_n & -2I_n \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} I_n \\ P \end{array}\right]$$

$$= P(A - BK_oC) + (A - BK_oC)^T P < 0.$$

Portanto, a LMI (2.110) implica na LMI (2.132).

(viii) Considere $P_N = \delta P$, $F_N = \delta F$ e $K_N = \delta K_o$. As equações (2.114) e (2.133) são equivalentes. As LMIs (2.115) e (2.134) são equivalentes. Note que (2.113) implica que $\delta > 0$ e então, $P_N = \delta P = P_N^T > 0$. Multiplicando-se a LMI (2.113) à esquerda por $\left[\begin{array}{cc} I_n & P \end{array}\right]$ e à direita por $\left[\begin{array}{cc} I_n & P \end{array}\right]^T$, tem-se:

$$\left[\begin{array}{cc} I_n & P \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} P_N A + A^T P_N - 2P_N & -C^T K_N^T B^T + P_N + \delta I_n \\ -BK_NC + P_N + \delta I_n & -2\delta I_n \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} I_n \\ P \end{array}\right]$$



$$\begin{bmatrix} I_n & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta PA + \delta A^T P - 2\delta P & -\delta C^T K_o^T B^T + \delta P + \delta I_n \\ -\delta B K_o C + \delta P + \delta I_n & -2\delta I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ P \end{bmatrix}$$
$$= \delta[P(A - BK_oC) + (A - BK_oC)^T P] < 0.$$

Como, de (2.113), $\delta > 0$, segue que:

$$P(A - BK_oC) + (A - BK_oC)^T P < 0.$$

Portanto, a LMI (2.113) implica na LMI (2.132).

(ix) As equações (2.119) e (2.133) são equivalentes. As LMIs (2.120) e (2.134) são equivalentes. Multiplicando-se a LMI (2.118) à esquerda por $\begin{bmatrix} I_n & P \end{bmatrix}$ e à direita por $\begin{bmatrix} I_n & P \end{bmatrix}^T$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} I_n & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} PA + A^T P - 2P & -C^T K_1^T B^T + P + I_n \\ -BK_1C + P + I_n & -BK_2B^T - BK_2^T B^T - 2I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ P \end{bmatrix}$$
$$= PA + A^T P - PBK_1C - C^T K_1^T B^T P - PBK_2B^T P - PBK_2^T B^T P < 0. \quad (2.139)$$

Substituindo (2.119) e (2.121) em (2.139), tem-se:

$$PA + A^T P - PBK_1C - C^T K_1^T B^T P - PBK_2B^T P - PBK_2^T B^T P$$
$$= PA + A^T P - PBK_1C - C^T K_1^T B^T P - PBK_2FC - PBK_2^T FC$$
$$= PA + A^T P - PB(K_1 + K_2F)C - C^T(K_1 + K_2F)^T B^T P$$
$$= P(A - BK_oC) + (A - BK_oC)^T P < 0.$$

Portanto, a LMI (2.118) implica na LMI (2.132).

(x) Considere $P_N = \delta P$, $F_N = \delta F$, $K_{N1} = \delta K_1$ e $K_{N2} = \delta K_2$. As equações (2.123) e (2.133) são equivalentes. As LMIs (2.124) e (2.134) são equivalentes. Como $\delta > 0$, então note que $P_N = \delta P = P_N^T > 0$. Multiplicando-se a LMI (2.122) à esquerda por $\begin{bmatrix} I_n & P \end{bmatrix}$ e à direita por $\begin{bmatrix} I_n & P \end{bmatrix}^T$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} I_n & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_N A + A^T P_N - 2P_N & -C^T K_{N1}^T B^T + P_N + \delta I_n \\ -BK_{N1}C + P_N + \delta I_n & -BK_{N2}B^T - BK_{N2}^T B^T - 2\delta I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ P \end{bmatrix}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

$$\begin{bmatrix} I_n & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta PA + \delta A^T P - 2\delta P & -\delta C^T K_1^T B^T + \delta P + \delta I_n \\ -\delta BK_1 C + \delta P + \delta I_n & -\delta BK_2 B^T - \delta BK_2^T B^T - 2\delta I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ P \end{bmatrix}$$
$$= \delta[PA + A^T P - PBK_1 C - C^T K_1^T B^T P - PBK_2 B^T P - PBK_2^T B^T P] < 0.$$

Como, de (2.122), $\delta > 0$, segue que:

$$PA + A^T P - PBK_1 C - C^T K_1^T B^T P - PBK_2 B^T P - PBK_2^T B^T P < 0. \qquad (2.140)$$

Substituindo (2.123) e (2.126) em (2.140), tem-se:

$$PA + A^T P - PBK_1 C - C^T K_1^T B^T P - PBK_2 B^T P - PBK_2^T B^T P$$
$$= PA + A^T P - PBK_1 C - C^T K_1^T B^T P - PBK_2 FC - PBK_2^T FC$$
$$= PA + A^T P - PB(K_1 + K_2 F)C - C^T (K_1 + K_2 F)^T B^T P$$
$$= P(A - BK_o C) + (A - BK_o C)^T P < 0.$$

Portanto, a LMI (2.122) implica na LMI (2.132).

(xi) As equações (2.130) e (2.133) são equivalentes. As LMIs (2.132) e (2.134) são a condição necessária e suficiente para a estabilidade do sistema $\{A - BK_o C, B, C\}$. De acordo com [41], uma condição suficiente para a existência de uma matriz K_o que torna o sistema $\{A - BK_o C, B, C\}$ estável é a existência de matrizes $P = P^T$, M e N que satisfazem às condições (2.127)–(2.129). Neste caso, a matriz K_o é dada por (2.131). □

Observação 4 *A condição (v) engloba as condições (i) e (iii) e a condição (vi) engloba as condições (ii) e (iv).*

Observação 5 *As condições do item (xi) do Teorema 13 são mais gerais ou pelo menos equivalentes às condições do Teorema 9, pois não exigem a restrição $B^T = (CB)^T C$. Note que se as condições do Teorema 9 são factíveis, então $F = M(CB)^T$ atende à condição (2.130) do item (xi). Desta forma, quando o Teorema 9 apresenta solução, o item (xi) do Teorema 13 também apresenta solução. Este resultado é útil quando a planta possui incertezas paramétricas e existe a dificuldade de colocá-la na forma $B^T = (CB)^T C$.*

Observação 6 *A partir das LMIs (2.129) e (2.130) e definindo-se $C_n = FC$, tem-se $C_n = FC = M^T B^T$. Como M é inversível, então os zeros de transmissão de $\{A, B, C_n\}$*



correspondem aos zeros de transmissão de $\{A, B, B^T\}$. *Portanto, a condição necessária e suficiente para a existência de uma solução para as LMIs (2.127)-(2.130) é que todos os zeros de transmissão de* $\{A, B, B^T\}$ *possuam parte real negativa.*

Considere, agora, uma dada matriz F tal que o sistema $\{A, B, FC\}$ seja de fase mínima. O Teorema 14, proposto neste trabalho, fornece condições necessárias e suficientes para a existência de uma matriz K_o que torna ERP o sistema da Fig. 3.

Teorema 14 *Considere* F *tal que o sistema* $\{A, B, FC\}$ *seja de fase mínima. Então, uma solução para o Problema 2 é obtida através das seguintes LMIs, em termos de* K_o *e* $P = P^T$*:*

$$PA + A^T P - C^T F^T K_o C - C^T K_o^T F C < 0,$$

$$B^T P = FC,$$

$$P > 0.$$

Prova A prova deste teorema é obtida diretamente do Lema 1. □

Defina, agora, a matriz $B_\perp \in \mathbb{R}^{n \times n-m}$, tal que $B_\perp^T B = 0$, posto$(B_\perp) = n - m$ e então,

$$\text{posto}\left(\begin{bmatrix} B & B_\perp \end{bmatrix}\right) = n.$$

Assim, a matriz A pode ser decomposta da seguinte maneira:

$$A = BA_B + B_\perp A_o = \begin{bmatrix} B & B_\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_B \\ A_o \end{bmatrix}, \tag{2.141}$$

sendo as matrizes $A_B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $A_o \in \mathbb{R}^{n-m \times n}$ obtidas através da equação:

$$\begin{bmatrix} A_B \\ A_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & B_\perp \end{bmatrix}^{-1} A. \tag{2.142}$$

A partir do Lema 1, o sistema $\{A - BK, B, FC\}$ é ERP se e somente se as seguintes LMIs forem satisfeitas:

$$P(A - BK) + (A - BK)^T P < 0, \tag{2.143}$$

$$B^T P = FC, \tag{2.144}$$

$$P > 0. \tag{2.145}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

Susbstituindo (2.141) em (2.143) e definindo-se $K_N = K - A_B$, tem-se:

$$P(A-BK)+(A-BK)^TP = P(B_\perp A_o - B(K-A_B)) + (B_\perp A_o - B(K-A_B))^TP$$

$$= P(B_\perp A_o - BK_N) + (B_\perp A_o - BK_N)^TP < 0,$$

$$PB_\perp A_o + A_o^T B_\perp^T P - PBK_N - K_N^T B^T P < 0. \tag{2.146}$$

Sem perda de generalidade, considere $K_N = MFC$, sendo $M \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Note que se existem K e F tais que $\{A-BK, B, FC\}$ é ERP, então $\{A, B, FC\}$ é de fase mínima e $FCB = B^TPB$ é simétrica e definida positiva. Assim, pelo Teorema 4 existe M tal que $\{A-BMF, B, FC\}$ é ERP. Substituindo K_N e (2.144) em (2.146), segue que:

$$PB_\perp A_o + A_o^T B_\perp^T P - C^T F^T MFC - C^T F^T M^T FC < 0. \tag{2.147}$$

Defina, também, as matrizes $A_{o\perp} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $(FC)_\perp \in \mathbb{R}^{n-m\times n}$, tais que $A_{o\perp}A_o^T = 0$, $\text{posto}(A_{o\perp}) = m$, $(FC)_\perp (FC)^T = 0$ e $\text{posto}((FC)_\perp) = n-m$. Assim, note que, de (2.147):

$$\begin{bmatrix} A_{o\perp} \\ (FC)_\perp \end{bmatrix} \left(PB_\perp A_o + A_o^T B_\perp^T P - C^T F^T MFC - C^T F^T M^T FC\right) \begin{bmatrix} A_{o\perp}^T & (FC)_\perp^T \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -A_{o\perp}C^TF^TMFCA_{o\perp}^T - A_{o\perp}C^TF^TM^TFCA_{o\perp}^T & \cdots \\ (FC)_\perp A_o^T B_\perp^T P A_{o\perp}^T & \cdots \\ \cdots & A_{o\perp}PB_\perp A_o (FC)_\perp^T \\ \cdots & (FC)_\perp PB_\perp A_o (FC)_\perp^T + (FC)_\perp A_o^T B_\perp^T P (FC)_\perp^T \end{bmatrix} < 0. \tag{2.148}$$

Assim, existe uma matriz M que satisfaz à LMI (2.148) se e somente se:

$$\text{posto}(A_{o\perp}C^TF^T) = \text{posto}(FCA_{o\perp}^T) = \text{posto}(CA_{o\perp}^T) = m \tag{2.149}$$

e

$$(FC)_\perp PB_\perp A_o (FC)_\perp^T + (FC)_\perp A_o^T B_\perp^T P (FC)_\perp^T < 0. \tag{2.150}$$

Note que estas condições implicam que:

$$\text{posto}\left(\begin{bmatrix} A_{o\perp} \\ (FC)_\perp \end{bmatrix}\right) = n.$$

Considere o caso particular no qual:

$$F = NA_{o\perp}C^T, \tag{2.151}$$

sendo $N \in \mathbb{R}^{m\times m}$ inversível. Assim, $(FC)_\perp$ deve ser tal que:

$$(FC)_\perp (FC)^T = (FC)_\perp C^T C A_{o\perp}^T N^T = 0.$$

Como N é inversível, então, $(FC)_\perp C^T C A_{o\perp}^T = 0$. Portanto, a matriz $(FC)_\perp$ possui a forma:

$$(FC)_\perp = L(C^T C A_{o\perp}^T)_\perp^T, \tag{2.152}$$

sendo $L \in \mathbb{R}^{n-m\times n-m}$ inversível e $(C^T C A_{o\perp}^T)_\perp^T \in \mathbb{R}^{n-m\times n}$ tal que:

$$(C^T C A_{o\perp}^T)_\perp^T (C^T C A_{o\perp}^T) = 0$$

e

$$\text{posto}(C^T C A_{o\perp}^T) = n - m.$$

Então a LMI (2.150), com $(FC)_\perp$ dada em (2.152), é dada por:

$$(FC)_\perp P B_\perp A_o (FC)_\perp^T + (FC)_\perp A_o^T B_\perp^T P (FC)_\perp^T$$

$$= L(C^T C A_{o\perp}^T)_\perp^T P B_\perp A_o (C^T C A_{o\perp}^T)_\perp L^T + L(C^T C A_{o\perp}^T)_\perp^T A_o^T B_\perp^T P (C^T C A_{o\perp}^T)_\perp L^T < 0.$$

Como L é inversível, a LMI acima é equivalente a:

$$(C^T C A_{o\perp}^T)_\perp^T P B_\perp A_o (C^T C A_{o\perp}^T)_\perp + (C^T C A_{o\perp}^T)_\perp^T A_o^T B_\perp^T P (C^T C A_{o\perp}^T)_\perp < 0. \tag{2.153}$$

Note que, como $(C^T C A_{o\perp}^T)_\perp^T \in \mathbb{R}^{n-m\times n}$, uma condição suficiente para (2.153) é que $\text{posto}(A_o) = n - m$.

A LME (2.144), com F dada em (2.151), é equivalente a:

$$B^T P = FC = NA_{o\perp}C^T C. \tag{2.154}$$

Assim, o Algoritmo 1, proposto nesta tese, apresenta uma condição suficiente e novas condições necessárias para a solução do Problema 2. De acordo com o o Teorema 4, uma condição necessária para a existência de matrizes F e K_o tais que o sistema $\{A - BK_oC, B, FC\}$ seja ERP é que a planta $\{A, B, C\}$ seja de fase mínima [15].

Algoritmo 1 *Considere uma planta $\{A, B, C\}$ de fase mínima (se a planta não for de*

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

fase mínima, o Problema 2 não tem solução). Uma condição suficiente para a solução do Problema 2 pode ser obtida através do procedimento abaixo:

1. *Determine* $B_\perp \in \mathbb{R}^{n\times n-m}$, *tal que* $B_\perp^T B = 0$ *e* $\text{posto}([B\ B_\perp]) = n$;

2. *Obtenha* $A_o \in \mathbb{R}^{n-m\times n}$ *pela expressão (2.142). Se* $\text{posto}(A_o) < n-m$, *o Problema 2 não tem solução. No caso de* $\text{posto}(A_o) = n-m$, *passe para o item 3;*

3. *Determine* $A_{o\perp} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *tal que* $A_{o\perp}A_o^T = 0$ *e* $\text{posto}(A_{o\perp}) = m$. *Se* $\text{posto}(CA_{o\perp}^T) < m$, *o Problema 2 não tem solução. No caso de* $\text{posto}(CA_{o\perp}^T) = m$, *passe para o item 4;*

4. *Encontre, se possível,* $P_1 = P_1^T$ *e* N *que satisfazem às seguintes LMIs:*

$$(C^TCA_{o\perp}^T)_\perp^T P_1 B_\perp A_o (C^TCA_{o\perp}^T)_\perp + (C^TCA_{o\perp}^T)_\perp^T A_o^T B_\perp^T P_1 (C^TCA_{o\perp}^T)_\perp < 0,$$

$$B^TP_1 = NA_{o\perp}C^TC,$$

$$P_1 > 0;$$

5. *Obtenha* $F = NA_{o\perp}C^T$;

6. *Para* F *obtido no item 5, encontre* $P_2 = P_2^T$ *e* K *que satisfazem às seguintes LMIs:*

$$P_2A + A^TP_2 - C^TF^TKC - C^TK^TFC < 0,$$

$$B^TP_2 = FC,$$

$$P_2 > 0.$$

2.5 Taxa de Decaimento

Em muitos casos, somente a estabilidade não é suficiente para a obtenção de um desempenho satisfatório para um sistema de controle. Freqüentemente, é necessário especificar também a resposta transitória. Dado um Sistema Linear Invariante no Tempo (SLIT), $\dot{x} = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, então, de acordo com [42], a taxa de decaimento é definida como o máximo valor da constante real $\gamma > 0$, tal que a condição:

$$\lim_{t\to\infty} e^{\gamma t}||x(t)|| = 0,\ \forall\, x(0) \in \mathbb{R}^n,$$

é satisfeita para todas as trajetórias $x(t)$.



A estabilidade corresponde a taxa de decaimento positiva. Pode-se utilizar a função de Lyapunov quadrática $V(\xi) = \xi^T P \xi$ para estabelecer um limite inferior para a taxa de decaimento, por exemplo, da planta (2.1). Se $\dot{V}(x) \leq -2\gamma V(x)$ para todas as trajetórias, então $V(x(t)) \leq V(x(0))\mathrm{e}^{-2\gamma t}$, e assim:

$$||x(t)|| \leq ||x(0)|| \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}\, \mathrm{e}^{-\gamma t},$$

sendo $\lambda_{\max}(P)$ e $\lambda_{\min}(P)$ o máximo e o mínimo autovalor de P, respectivamente, para todas as trajetórias, e portanto a taxa de decaimento da planta (2.1) é pelo menos igual a γ [42].

A condição de que $\dot{V}(x) \leq -2\gamma V(x)$ em um sistema $\{A_o, B_o, C_o\}$, para todas as trajetórias é equivalente a:

$$A_o^T P + P A_o + 2\gamma P = (A_o + \gamma I)^T P + P(A_o + \gamma I) \leq 0. \tag{2.155}$$

2.5.1 Sistemas com o Mesmo Número de Entradas e Saídas

Considere a planta definida pelas equações (2.10), com $p = m$. O Teorema 15, dado em [13], estabelece condições necessárias e suficientes para que todos os pólos do sistema da Fig. 3 tenham parte real menor que $-\gamma$ e que este sistema seja ERP.

Teorema 15 *[13] Considere $z_i = \sigma_i + \mathrm{j}\,\beta_i$, σ_i e $\beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, p$, os zeros de transmissão do sistema $\{A, B, C\}$, descrito no Problema 2. Então, dada uma constante positiva γ, existem matrizes $P = P^T$, R e F, tais que:*

$$PA + A^T P - C^T(R + R^T)C < -2\gamma P, \tag{2.156}$$

$$B^T P = FC, \tag{2.157}$$

$$P > 0. \tag{2.158}$$

se e somente se $\gamma < -\sigma$, sendo $\sigma = max\{\sigma_1, \ldots, \sigma_p\}$, e posto$(CB) = m$. *Neste caso, uma matriz K_o pode ser obtida pela expressão:*

$$K_o = (F^T)^{-1} R. \tag{2.159}$$

Prova [13] Definindo $\tilde{A} = A + \gamma I$, então (2.156) pode ser descrita por:

$$P(\tilde{A} - \gamma I) + (\tilde{A} - \gamma I)^T P - C^T(R + R^T)C < -2\gamma P,$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

$$P\tilde{A} - \gamma P + \tilde{A}^T P - \gamma P - C^T(R + R^T)C < -2\gamma P,$$
$$P\tilde{A} + \tilde{A}^T P - C^T(R + R^T)C - 2\gamma P < -2\gamma P,$$
$$P\tilde{A} + \tilde{A}^T P - C^T(R + R^T)C < 0. \qquad (2.160)$$

Do Teorema 7, de (2.156) (que é equivalente a (2.160)), (2.157) e (2.158) são factíveis se e somente se o sistema $\{\tilde{A} - BK_oC, B, FC\}$ é ERP. Agora, sabe-se, também, que todos os zeros de transmissão de um sistema ERP apresentam parte real negativa [36]. Sabe-se que os zeros de transmissão de um sistema $\{A, B, C\}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ e $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$, são os números $s \in \mathbb{C}$, tais que:

$$\text{posto} \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} < n + m.$$

De (2.157), a matriz F tem posto m e, assim, é fácil verificar que os sistemas $\{\tilde{A} - BK_oC, B, FC\}$ e $\{\tilde{A}, B, C\}$ têm os mesmos zeros de transmissão, usando operações elementares, primeiro nas colunas e depois nas linhas, da matriz que define os zeros de transmissão de $\{\tilde{A}, B, C\}$:

$$\begin{bmatrix} sI - \tilde{A} + BK_oC & B \\ -FC & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} sI - \tilde{A} & B \\ -FC & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} sI - \tilde{A} & B \\ -C & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora, os zeros de transmissão $\{\tilde{A}, B, C\}$ são os números $s \in \mathbb{C}$, tais que

$$\text{posto} \begin{bmatrix} (s-\gamma)I - A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} < n + m.$$

Portanto, se $s = s_o$ for um zero de transmissão de $\{A, B, C\}$, então $s = s_o + \gamma$ será um zero de transmissão de $\{\tilde{A}, B, C\}$. Então, todos os zeros de transmissão de $\{\tilde{A}, B, C\}$ apresentam parte real negativa se $\sigma_i + \gamma < 0$, $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$. Daí, $\gamma < -\sigma$, $\sigma = max\{\sigma_1, \ldots, \sigma_p\}$. Agora, de (2.157) e (2.158), $\text{posto}(B^T P B) = \text{posto}(FCB) = m$ e, assim, $\text{posto}(CB) = m$. A necessidade está provada. Para demonstrar a suficiência, considere que $0 < \gamma < -\sigma$, ou seja, todos os zeros de transmissão de $\{\tilde{A}, B, C\}$ apresentam parte real negativa e que $\text{posto}(CB) = m$. Agora, defina $F = (CB)^T$ e note que o sistema $\{\tilde{A}, B, FC\}$ satisfaz às condições (i) e (ii) do Teorema 4. Assim, existe K_f tal que $K_o = K_f F$ torne o sistema $\{\tilde{A} - BK_oC, B, FC\}$ ERP. Finalmente, do Teorema 7, (2.156) (que é equivalente a (2.160)), (2.157) e (2.158) são factíveis e o Teorema 15 está provado. □

unesp

Observação 7 *[13] Considere uma candidata a função de Lyapunov* $V(x(t)) = x(t)^T \times Px(t)$, $P = P^T > 0$, *para o sistema na Fig. 3. Se a planta tem zeros de transmissão* $z_i = \sigma_i + \mathrm{j}\,\beta_i$, $i = 1, \ldots, p$ *e* $0 < \gamma < -\sigma$, *sendo* $\sigma = max\{\sigma_1, \ldots, \sigma_p\}$, *então, do Teorema 15, as LMIs (2.156), (2.157) e (2.158) são factíveis e, então, não é difícil ver que* $\dot{V}(t) \leq -2\gamma V(t)$. *Portanto,* $V(t) \leq V(0)e^{-2\gamma t}$ *e [7]*

$$||x(t)|| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)}}\, ||x(0)||\, e^{-\gamma t},$$

sendo $\lambda_{max}(P)$ *e* $\lambda_{min}(P)$ *o máximo e o mínimo autovalor de* P, *respectivamente. O Teorema 15 mostra que existe um limite superior para* γ, *relacionado com os zeros de transmissão da planta, para que o sistema na Fig. 3 seja ERP. Uma conclusão geral é que, para sistemas ERP, os zeros de transmissão definem o máximo valor da taxa de decaimento ERP. A taxa de decaimento do sistema ERP não considera a restrição (2.157) e então pode ser diferente da taxa de decaimento ERP. Em controle adaptativo e CEV de sistemas incertos utilizando a teoria ERP, a restrição (2.157) é necessária. O resultado do Teorema 15 é considerado razoável, se for utilizada uma realimentação* K *com alto ganho, como nos modos CEV e deslizante, pois sabe-se que, neste caso, os zeros de transmissão da planta serão os pólos do sistema de malha fechada (no caso de CEV e modos deslizantes, os zeros de transmissão da planta serão os pólos do sistema no deslizamento [16]). O inesperado é a influência da localização dos zeros de transmissão para todas as matrizes* K, *que realimentam a planta e* F *na Fig. 3.*

Corolário 4 *[21] Considere* $z_i = \sigma_i + \mathrm{j}\,\beta_i$, σ_i *e* $\beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, p$, *os zeros de transmissão do sistema* $\{A_o, B_o, C_o\}$, *descrito no Problema 2. Considere, também, que as matrizes* A_o, B_o *e* C_o, *na Fig. 3, tenham as seguintes formas:*

$$A_o = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix},\ B_o = \begin{bmatrix} 0 \\ CB \end{bmatrix}\ e\, C_o = \begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix}, \tag{2.161}$$

sendo $\mathrm{posto}(CB) = m$. *Então, dada uma constante positiva* γ, *existem matrizes* $P = P^T$ *e* R, *tais que:*

$$P = \begin{bmatrix} P_a & 0 \\ 0 & P_c \end{bmatrix} > 0\ e \tag{2.162}$$

$$PA + A^T P - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (R + R^T) \end{bmatrix} < -2\gamma \begin{bmatrix} P_a & 0 \\ 0 & P_c \end{bmatrix}, \tag{2.163}$$

se e somente se $\gamma < -\sigma$, *sendo* $\sigma = max\{\sigma_1, \ldots, \sigma_p\}$, *e* $\mathrm{posto}(CB) = m$. *Neste caso, as*



matrizes K_o e F são obtidas pelas expressões:

$$K_o = (F^T)^{-1}R = (P_cCB)^{-1}R, \tag{2.164}$$

$$F = (CB)^T P_c. \tag{2.165}$$

Prova A prova deste corolário é similar à prova do Teorema 15. □

2.5.2 Sistemas com Números Diferentes de Entradas (m) e Saídas (p)

Considere a planta definida pelas equações (2.10), com $p > m$. Os Teoremas 16 e 17, dados em [12], estabelecem as condições suficientes para que todos os pólos do sistema da Fig. 3 tenham parte real menor que $-\gamma$ e que este sistema seja ERP. Nestes teoremas, considera-se que $B^T = (CB)^T C$.

Teorema 16 *[12] Considere $z_i = \sigma_i + \mathrm{j}\beta_i, \sigma_i$ e $\beta_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, p$ os zeros de transmissão do sistema $\{A, B, B^T\}$, descrito no Problema 2. Então, dada uma constante positiva γ, uma condição suficiente para a existência de matrizes $P = P^T$, N e M, tais que:*

$$PA + A^T P - BNC - C^T N^T B^T < -2\gamma P, \tag{2.166}$$

$$B^T P = MB^T, \tag{2.167}$$

$$P > 0, \tag{2.168}$$

é que $\gamma < -\sigma$, sendo $\sigma = max\{\sigma_1, \ldots, \sigma_p\}$. Neste caso, as matrizes F e K_o podem ser obtidas por:

$$F = M(CB)^T, \tag{2.169}$$

$$K_o = (M^T)^{-1}N. \tag{2.170}$$

Prova Definindo $\tilde{A} = A + \gamma I$, então (2.166) pode ser descrita por

$$\begin{aligned} P(\tilde{A} - \gamma I) + (\tilde{A} - \gamma I)^T P - BNC - (BNC)^T &< -2\gamma P, \\ P\tilde{A} - \gamma P + \tilde{A}^T P - \gamma P - BNC - (BNC)^T &< -2\gamma P, \\ P\tilde{A} + \tilde{A}^T P - BNC - (BNC)^T - 2\gamma P &< -2\gamma P, \\ P\tilde{A} + \tilde{A}^T P - BNC - C^T N^T B^T &< 0. \end{aligned} \tag{2.171}$$

Pelo Corolário 2, de (2.166) (que é equivalente a (2.171)), (2.167) e (2.168), os zeros de transmissão de $\{\tilde{A}, B, B^T\}$ possuem parte real negativa. Agora, sabe-se, também, que

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

todos os zeros de transmissão de um sistema ERP apresentam parte real negativa [36]. É conhecido, também, que os zeros de transmissão de um sistema $\{A, B, B^T\}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ e $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $p \geq m$, são os números $s \in \mathbb{C}$, tais que:

$$\text{posto} \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -B^T & 0 \end{bmatrix} < n + m.$$

De (2.166), a matriz F tem posto m e, assim, é fácil verificar que os sistemas $\{\tilde{A} - BKC, B, MB^T\}$ e $\{\tilde{A}, B, B^T\}$ têm os mesmos zeros de transmissão, usando operações elementares, primeiro nas colunas e depois nas linhas, da matriz que define os zeros de transmissão de $\{\tilde{A}, B, B^T\}$:

$$\begin{bmatrix} sI - \tilde{A} + BKC & B \\ -MB^T & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} sI - \tilde{A} & B \\ -MB^T & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} sI - \tilde{A} & B \\ -B^T & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora, os zeros de transmissão $\{\tilde{A}, B, B^T\}$ são os números $s \in \mathbb{C}$, tais que

$$\text{posto} \begin{bmatrix} (s-\gamma)I - A & B \\ -B^T & 0 \end{bmatrix} < n + m.$$

Portanto, se $s = s_o$ for um zero de transmissão de $\{A, B, B^T\}$, então $s = s_o + \gamma$ será um zero de transmissão de $\{\tilde{A}, B, B^T\}$. Então, todos os zeros de transmissão de $\{\tilde{A}, B, B^T\}$ apresentam parte real negativa se $\sigma_i + \gamma < 0$, $\forall i \in \{1, \ldots, r\}$. Daí, $\gamma < -\sigma$, $\sigma = max\{\sigma_1, \ldots, \sigma_r\}$. □

Teorema 17 *[12] Considere $z_i = \sigma_i + j\beta_i$, σ_i e $\beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, p$ os zeros de transmissão do sistema $\{A, C^T, C\}$, descrito no Problema 2. Então, dada uma constante positiva γ, uma condição necessária para a existência de matrizes $P = P^T$, N e M, tais que:*

$$AX + XA^T - BZC - C^T Z^T B^T < -2\gamma X, \tag{2.172}$$

$$YC = CX, \tag{2.173}$$

$$X > 0, \tag{2.174}$$

é que $\gamma < -\sigma$, sendo $\sigma = max\{\sigma_1, \ldots, \sigma_p\}$. Neste caso, as matrizes F e K_o podem ser obtidas por:

$$F = (CB)^T Y, \tag{2.175}$$

$$K_o = ZY^{-1}. \tag{2.176}$$

unesp

Prova Definindo $\tilde{A} = A + \gamma I$, então (2.172) pode ser descrita por:

$$\begin{aligned}
(\tilde{A} - \gamma I)X + X(\tilde{A} - \gamma I)^T - BZC - (BZC)^T &< -2\gamma X, \\
\tilde{A}X - \gamma X + X\tilde{A} - \gamma X - BZC - (BZC)^T &< -2\gamma X, \\
\tilde{A}X + X\tilde{A}^T - BZC - (BZC)^T - 2\gamma X &< -2\gamma X, \\
\tilde{A}X + X\tilde{A}^T - BZC - C^T Z^T B^T &< 0. \qquad (2.177)
\end{aligned}$$

Pelo Corolário 3, de (2.172) (que é equivalente a (2.177)), (2.173) e (2.174), os zeros de transmissão de $\{\tilde{A}, C^T, C\}$ possuem parte real negativa. Agora, sabe-se, também, que todos os zeros de transmissão de um sistema ERP apresentam parte real negativa [36]. É bem conhecido, também, que os zeros de transmissão de um sistema $\{A, C^T, C\}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ e $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $p \geq m$, são os números $s \in \mathbb{C}$, tais que:

$$\text{posto} \begin{bmatrix} sI - A & C^T \\ -C & 0 \end{bmatrix} < n + m.$$

É fácil verificar que os sistemas $\{\tilde{A} - BKC, C^T, Y^{-1}C\}$ e $\{\tilde{A}, C^T, C\}$ têm os mesmos zeros de transmissão, usando operações elementares nas linhas da matriz que define os zeros de transmissão de $\{\tilde{A}, C^T, C\}$:

$$\begin{bmatrix} sI - \tilde{A} + BKC & C^T \\ -Y^{-1}C & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} sI - \tilde{A} & C^T \\ -Y^{-1}C & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} sI - \tilde{A} & C^T \\ -C & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, os zeros de transmissão $\{\tilde{A}, C^T, C\}$ são os números $s \in \mathbb{C}$, tais que

$$\text{posto} \begin{bmatrix} (s-\gamma)I - A & C^T \\ -C & 0 \end{bmatrix} < n + m.$$

Portanto, se $s = s_o$ for um zero de transmissão de $\{A, C^T, C\}$, então $s = s_o + \gamma$ será um zero de transmissão de $\{\tilde{A}, C^T, C\}$. Então, todos os zeros de transmissão de $\{\tilde{A}, C^T, C\}$ apresentam parte real negativa se $\sigma_i + \gamma < 0$, $\forall i \in \{1, \ldots, r\}$. Daí, $\gamma < -\sigma$, $\sigma = max\{\sigma_1, \ldots, \sigma_r\}$. □

Observação 8 *Através de várias aplicações dos Teoremas 16 e 17, em exemplos numéricos, foi possível constatar que existem casos nos quais um funciona e o outro não e vice-versa. Desta forma, as condições destes teoremas são distintas e um teorema não pode ser visto como um caso particular do outro.*



Considere, agora, a planta (2.72) e os Lemas 4 e 5. Neste caso específico, o Teorema 18, proposto neste trabalho, estabelece condições necessárias e suficientes para que todos os pólos do sistema (2.10), com as matrizes A, B e C definidas em (2.74)–(2.76), tenham parte real menor que $-\gamma$ e que este sistema seja ERP.

Teorema 18 *Considere $z_i = \sigma_i + \mathrm{j}\,\beta_i$, σ_i e $\beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, p$ os zeros de transmissão do sistema $\{A, B, B^T\}$, descrito no Problema 2, com as matrizes A, B e C definidas em (2.74)–(2.76). Então, dada uma constante positiva γ, uma condição necessária e suficiente para a existência de matrizes $P_{11} = P_{11}^T$, P_{12}, $P_{22} = P_{22}^T$, P_{23}, $P_{33} = P_{33}^T$, K_1 e K_2, tais que:*

$$PA + A^T P - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{23}K_1 & P_{23}K_2 \\ 0 & P_{33}K_1 & P_{33}K_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_1^T P_{23}^T & K_2^T P_{33} \\ 0 & K_1^T P_{23}^T & K_2^T P_{33} \end{bmatrix} < -2\gamma P, \tag{2.178}$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & 0 \\ P_{12}^T & P_{22} & P_{23} \\ 0 & P_{23}^T & P_{33} \end{bmatrix} > 0, \tag{2.179}$$

sendo que as matrizes possuem dimensões apropriadas, é que $\gamma < -\sigma$, sendo $\sigma = max\{\sigma_1, \ldots, \sigma_p\}$. Neste caso, as matrizes K_o e F podem ser obtidas por:

$$K_o = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}, \tag{2.180}$$

$$F = \begin{bmatrix} P_{23}^T & P_{33} \end{bmatrix}. \tag{2.181}$$

Prova A prova deste teorema é similar à prova do Teorema 11. □

O inconveniente do Teorema 18 é que as condições não são expressas em termos de LMIs. Entretanto, com $P_{23} = 0$, podem ser obtidas condições suficientes, em termos de LMIs, para que a factibilidade das expressões (2.178)–(2.179).

Teorema 19 *Considere $z_i = \sigma_i + \mathrm{j}\,\beta_i$, σ_i e $\beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, p$ os zeros de transmissão do sistema $\{A, B, B^T\}$, descrito no Problema 2, com as matrizes A, B e C definidas em (2.74)–(2.76). Então, dada uma constante positiva γ, uma condição necessária para a existência de matrizes $P_{11} = P_{11}^T$, P_{12}, $P_{22} = P_{22}^T$, $P_{33} = P_{33}^T$, R_{32} e R_{33}, tais que:*

$$PA + A^T P - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{32}^T \\ 0 & 0 & R_{33}^T \end{bmatrix} < -2\gamma P, \tag{2.182}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & 0 \\ P_{12}^T & P_{22} & 0 \\ 0 & 0 & P_{33} \end{bmatrix} > 0, \tag{2.183}$$

sendo que as matrizes possuem dimensões apropriadas, é que $\gamma < -\sigma$, *sendo* $\sigma = max\{\sigma_1, \ldots, \sigma_p\}$. *Neste caso, as matrizes* K_o *e* F *podem ser obtidas por:*

$$K_o = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}, \tag{2.184}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & P_{33} \end{bmatrix}, \tag{2.185}$$

sendo:

$$K_1 = P_{33}^{-1} R_{32}, \tag{2.186}$$

$$K_2 = P_{33}^{-1} R_{33}. \tag{2.187}$$

Prova A prova deste teorema é similar à prova do Teorema 12. □

Considere, novamente, a planta definida pelas equações (2.10), com $p > m$. O Teorema 20 apresenta outras condições suficientes para que todos os pólos do sistema da Fig. 3 possuam parte real menor que $-\gamma$, com $\gamma > 0$, e que este sistema seja ERP, propostas neste trabalho:

Teorema 20 *Todos os pólos do sistema da Fig. 3 possuem parte real menor que* $-\gamma$, *com* $\gamma > 0$, *e este sistema é ERP se pelo menos uma das condições (i)-(xi) for satisfeita:*

(i) Existem matrizes $P = P^T$, K_o *e* F *que satisfazem às seguintes condições:*

$$\begin{bmatrix} -2P & A^T + \gamma I - C^T K_o^T B^T + P + I_n \\ A + \gamma I - B K_o C + P + I_n & -2I_n \end{bmatrix} < 0, \tag{2.188}$$

$$B^T P = FC. \tag{2.189}$$

(ii) Existem matrizes $P_N = P_N^T$, K_o *e* F_N *que satisfazem às seguintes condições, para algum* $\delta \in \mathbb{R}$*:*

$$\begin{bmatrix} -2P_N & A^T + \gamma I - C^T K_o^T B^T + P_N + \delta I_n \\ A + \gamma I - B K_o C + P_N + \delta I_n & -2\delta I_n \end{bmatrix} < 0, \tag{2.190}$$

$$B^T P_N = F_N C. \tag{2.191}$$

Neste caso, a matriz F *é dada por:*

$$F = \frac{1}{\delta} F_N. \tag{2.192}$$



(iii) Existem matrizes $P = P^T$, K_f e F que satisfazem às seguintes condições:

$$\begin{bmatrix} -BK_fB^T - BK_f^TB^T - 2I_n & A + \gamma I + P + I_n \\ A^T + \gamma I + P + I_n & -2P \end{bmatrix} < 0, \tag{2.193}$$

$$B^TP = FC. \tag{2.194}$$

Neste caso, a matriz K_o é dada por:

$$K_o = K_fF. \tag{2.195}$$

(iv) Existem matrizes $P_N = P_N^T$, K_f e F_N que satisfazem às seguintes condições, para algum $\delta \in \mathbb{R}$, com $\delta > 0$:

$$\begin{bmatrix} -BK_fB^T - BK_f^TB^T - 2\delta I_n & A + \gamma I + P_N + \delta I_n \\ A^T + \gamma I + P_N + \delta I_n & -2P_N \end{bmatrix} < 0, \tag{2.196}$$

$$B^TP_N = F_NC. \tag{2.197}$$

Neste caso, as matrizes F e K_o podem ser obtidas por:

$$F = \frac{1}{\delta}F_N, \quad K_o = K_fF. \tag{2.198}$$

(v) Existem matrizes $P = P^T$, K_1, K_2 e F que satisfazem às seguintes condições:

$$\begin{bmatrix} -2P & A^T + \gamma I - C^TK_1^TB^T + P + I_n \\ A + \gamma I - BK_1C + P + I_n & -BK_2B^T - BK_2^TB^T - 2I_n \end{bmatrix} < 0, \tag{2.199}$$

$$B^TP = FC. \tag{2.200}$$

Neste caso, a matriz K_o é dada por:

$$K_o = K_1 + K_2F. \tag{2.201}$$

(vi) Existem matrizes $P_N = P_N^T$, K_1, K_2 e F_N que satisfazem às seguintes condições, para algum $\delta \in \mathbb{R}$, com $\delta > 0$:

$$\begin{bmatrix} -2P_N & A^T + \gamma I - C^TK_1^TB^T + P_N + \delta I_n \\ A + \gamma I - BK_1C + P_N + \delta I_n & -BK_2B^T - BK_2^TB^T - 2\delta I_n \end{bmatrix} < 0, \tag{2.202}$$

$$B^TP_N = F_NC. \tag{2.203}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

Neste caso, as matrizes F e K_o podem ser obtidas por:

$$F = \frac{1}{\delta} F_N, \tag{2.204}$$

$$K_o = K_1 + K_2 F. \tag{2.205}$$

(vii) Existem matrizes $P = P^T$, K_o e F que satisfazem às seguintes condições:

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P - 2P & -C^T K_o^T B^T + P + I_n \\ -BK_oC + P + I_n & -2I_n \end{bmatrix} < -2\gamma \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.206}$$

$$B^T P = FC, \tag{2.207}$$

$$P > 0. \tag{2.208}$$

(viii) Existem matrizes $P_N = P_N^T$, K_N e F_N que satisfazem às seguintes condições, para algum $\delta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{bmatrix} P_N A + A^T P_N - 2P_N & -C^T K_N^T B^T + P_N + \delta I_n \\ -BK_NC + P_N + \delta I_n & -2\delta I_n \end{bmatrix} < -2\gamma \begin{bmatrix} P_N & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.209}$$

$$B^T P_N = F_N C, \tag{2.210}$$

$$P_N > 0. \tag{2.211}$$

Neste caso, as matrizes F e K_o podem ser obtidas por:

$$F = \frac{1}{\delta} F_N, \tag{2.212}$$

$$K_o = \frac{1}{\delta} K_N. \tag{2.213}$$

(ix) Existem matrizes $P = P^T$, K_1, K_2 e F que satisfazem às seguintes condições:

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P - 2P & -C^T K_1^T B^T + P + I_n \\ -BK_1C + P + I_n & -BK_2B^T - BK_2^T B^T - 2I_n \end{bmatrix} < -2\gamma \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.214}$$

$$B^T P = FC, \tag{2.215}$$

$$P > 0. \tag{2.216}$$

Neste caso, a matriz K_o é dada por:

$$K_o = K_1 + K_2 F. \tag{2.217}$$

(x) Existem matrizes $P_N = P_N^T$, K_{N1}, K_{N2} e F_N que satisfazem às seguintes condições,

para algum $\delta \in \mathbb{R}$, *com* $\delta > 0$:

$$\begin{bmatrix} P_N A + A^T P_N - 2P_N & -C^T K_{N1}^T B^T + P_N + \delta I_n \\ -BK_{N1}C + P_N + \delta I_n & -BK_{N2}B^T - BK_{N2}^T B^T - 2\delta I_n \end{bmatrix} < -2\gamma \begin{bmatrix} P_N & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.218}$$

$$B^T P_N = F_N C, \tag{2.219}$$

$$P_N > 0. \tag{2.220}$$

Neste caso, as matrizes F *e* K_o *podem ser obtidas por:*

$$F = \frac{1}{\delta} F_N, \tag{2.221}$$

$$K_o = K_1 + K_2 F, \tag{2.222}$$

sendo:

$$K_1 = \frac{1}{\delta} K_{N1},$$

$$K_2 = \frac{1}{\delta} K_{N2},$$

(xi) Existem matrizes $P = P^T$, M, N *e* F *que satisfazem às seguintes condições:*

$$PA + A^T P - C^T N^T B^T - BNC < -2\gamma P, \tag{2.223}$$

$$P > 0, \tag{2.224}$$

$$BM = PB, \tag{2.225}$$

$$B^T P = FC. \tag{2.226}$$

Neste caso, a matriz K_o *é dada por:*

$$K_o = M^{-1} N. \tag{2.227}$$

Prova A prova deste teorema é similar à prova do Teorema 13, substituindo-se A por $A + \gamma I$. □

Observação 9 *A condição (v) engloba as condições (i) e (iii) e a condição (vi) engloba as condições (ii) e (iv).*

Observação 10 *As condições do item (xi) do Teorema 20 são mais gerais ou pelo menos equivalentes às condições do Teorema 16, pois não exigem a restrição* $B^T = (CB)^T C$. *Note que se as condições do Teorema 9 são factíveis, então* $F = M(CB)^T$ *atende à*

condição (2.226) do item (xi). Desta forma, quando o Teorema 16 apresenta solução, o item (xi) do Teorema 20 também apresenta solução. Este resultado é útil quando a planta possui incertezas paramétricas e existe a dificuldade de colocá-la na forma $B^T = (CB)^T C$.

Observação 11 *A partir das LMIs (2.225) e (2.226) e definindo-se* $C_n = FC$, *tem-se* $C_n = FC = M^T B^T$. *Como* M *é inversível, então os zeros de transmissão de* $\{A, B, C_n\}$ *correspondem aos zeros de transmissão de* $\{A, B, B^T\}$. *Portanto, a condição necessária e suficiente para a existência de uma solução para as LMIs (2.223)-(2.226) é que todos os zeros de transmissão de* $\{A, B, B^T\}$ *possuam parte real menor que* $-\gamma$.

Considere, agora, uma dada matriz F tal que todos os zeros de transmissão do sistema $\{A, B, FC\}$ possuem parte real menor que $-\gamma$, $\gamma > 0$. O Teorema 21, proposto neste trabalho, fornece condições necessárias e suficientes para a existência de uma matriz K_o tal que todos os pólos do sistema da Fig. 3 tenham parte real menor que $-\gamma$, e que este sistema seja ERP.

Teorema 21 *Considere* F *tal que todos os zeros de transmissão do sistema* $\{A, B, FC\}$ *possuem parte real menor que* $-\gamma$, $\gamma > 0$. *Então, uma condição suficiente para que todos os pólos do sistema da Fig. 3 tenham parte real menor que* $-\gamma$, *e que este sistema seja ERP é obtida através das seguintes LMIs, em termos de* K_o *e* $P = P^T$:

$$PA + A^T P - C^T F^T K_o C - C^T K_o^T F C < -2\gamma P,$$

$$B^T P = FC,$$

$$P > 0.$$

Prova A prova deste teorema é obtida diretamente do Lema 1. □

Defina, agora, a matriz $B_\perp \in \mathbb{R}^{n \times n-m}$, tal que $B_\perp^T B = 0$, posto$(B_\perp) = n - m$ e então,

$$\text{posto}\left(\begin{bmatrix} B & B_\perp \end{bmatrix}\right) = n.$$

Assim, a matriz A pode ser decomposta da seguinte maneira:

$$A = BA_B + B_\perp A_o = \begin{bmatrix} B & B_\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_B \\ A_o \end{bmatrix}, \tag{2.228}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

sendo as matrizes $A_B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $A_o \in \mathbb{R}^{n-m\times n}$ obtidas através da equação:

$$\begin{bmatrix} A_B \\ A_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & B_\perp \end{bmatrix}^{-1} A. \tag{2.229}$$

A partir do Lema 1, o sistema $\{A - BK, B, FC\}$ é ERP se e somente se as seguintes LMIs forem satisfeitas:

$$P(A - BK) + (A - BK)^T P < 0, \tag{2.230}$$

$$B^T P = FC, \tag{2.231}$$

$$P > 0. \tag{2.232}$$

Defina $\tilde{A} = A + \gamma I$, com $\gamma > 0$. Então, a partir do Lema 1, o sistema $\{\tilde{A} - BK, B, FC\}$ é ERP se e somente se as seguintes LMIs forem satisfeitas:

$$P(\tilde{A} - BK) + (\tilde{A} - BK)^T P < 0, \tag{2.233}$$

$$B^T P = FC, \tag{2.234}$$

$$P > 0. \tag{2.235}$$

De (2.233), segue que:

$$\begin{aligned} P(\tilde{A} - BK) + (\tilde{A} - BK)^T P < 0, \\ P(A + \gamma I - BK) + (A + \gamma I - BK)^T P < 0, \\ P(A - BK) + \gamma P + (A - BK)^T P + \gamma P < 0, \\ P(A - BK) + (A - BK)^T P + 2\gamma P < 0. \end{aligned} \tag{2.236}$$

Do Lema 1, de (2.233) (que é equivalente a (2.236)), (2.234) e (2.235) são factíveis se e somente se o sistema $\{\tilde{A} - BK, B, FC\}$ é ERP. Agora, sabe-se, também, que todos os zeros de transmissão de um sistema ERP apresentam parte real negativa [36]. Sabe-se que os zeros de transmissão de um sistema $\{A_o, B_o, C_o\}$, $A_o \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_o \in \mathbb{R}^{n\times m}$ e $C_o \in \mathbb{R}^{m\times n}$, são os números $s \in \mathbb{C}$, tais que:

$$\text{posto} \begin{bmatrix} sI - A_o & B_o \\ -C_o & 0 \end{bmatrix} < n + m.$$

De (2.234), a matriz F tem posto m e, assim, é fácil verificar que os sistemas $\{\tilde{A} - BK, B, FC\}$ e $\{\tilde{A}, B, FC\}$ têm os mesmos zeros de transmissão, usando operações

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

elementares, primeiro nas colunas e depois nas linhas, da matriz que define os zeros de transmissão de $\{\tilde{A} - BK, B, FC\}$:

$$\begin{bmatrix} sI - \tilde{A} - BK & B \\ -F & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} sI - \tilde{A} & B \\ -FC & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora, os zeros de transmissão $\{\tilde{A} - BK, B, FC\}$ são os números $s \in \mathbb{C}$, tais que

$$\text{posto} \begin{bmatrix} (s-\gamma)I - A & B \\ -FC & 0 \end{bmatrix} < n + m.$$

Portanto, se $s = s_o$ for um zero de transmissão de $\{A, B, FC\}$, então $s = s_o + \gamma$ será um zero de transmissão de $\{\tilde{A}, B, FC\}$. Então, todos os zeros de transmissão de $\{\tilde{A}, B, FC\}$ apresentam parte real negativa se $\sigma_i + \gamma < 0$, $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$. Daí, $\gamma < -\sigma$, $\sigma = max\{\sigma_1, \ldots, \sigma_p\}$.

Assim, os pólos do sistema $\{A - BK, B, FC\}$ apresentam parte real menor que $-\gamma$ se e somente se as seguintes LMIs forem satisfeitas:

$$P(A - BK) + (A - BK)^T P + 2\gamma P < 0, \tag{2.237}$$

$$B^T P = FC, \tag{2.238}$$

$$P > 0. \tag{2.239}$$

Susbstituindo (2.228) em (2.237) e definindo-se $K_N = K - A_B$, tem-se:

$$\begin{aligned} &P(A - BK) + (A - BK)^T P + 2\gamma P \\ &= P(B_\perp A_o - B(K - A_B)) + (B_\perp A_o - B(K - A_B))^T P + 2\gamma P \\ &= P(B_\perp A_o - BK_N) + (B_\perp A_o - BK_N)^T P + 2\gamma P < 0, \\ &PB_\perp A_o + A_o^T B_\perp^T P - PBK_N - K_N^T B^T P + 2\gamma P < 0. \end{aligned} \tag{2.240}$$

Sem perda de generalidade, considere $K_N = MFC$, sendo $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Note que se existem K e F tais que todos os zeros de transmissão de $\{A - BK, B, FC\}$ possuem parte real menor que $-\gamma$, então $\{A + \gamma I, B, FC\}$ é de fase mínima e $FCB = B^T PB$ é simétrica e definida positiva. Assim, pelo Teorema 4 existe M tal que todos os zeros de transmissão de $\{A - BMF, B, FC\}$ possuem parte real menor que $-\gamma$ e que o sistema é

ERP. Substituindo K_N e (2.238) em (2.240), segue que:

$$PB_{\perp}A_o + A_o^T B_{\perp}^T P - C^T F^T MFC - C^T F^T M^T FC + 2\gamma P < 0. \tag{2.241}$$

Defina, também, as matrizes $A_{o\perp} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $(FC)_{\perp} \in \mathbb{R}^{n-m\times n}$, tais que $A_{o\perp}A_o^T = 0$, $\text{posto}(A_{o\perp}) = m$, $(FC)_{\perp}(FC)^T = 0$ e $\text{posto}((FC)_{\perp}) = n-m$. Assim, note que de (2.241):

$$\begin{bmatrix} A_{o\perp} \\ (FC)_{\perp} \end{bmatrix} \left(PB_{\perp}A_o + A_o^T B_{\perp}^T P - C^T F^T MFC - C^T F^T M^T FC + 2\gamma P\right) \begin{bmatrix} A_{o\perp}^T & (FC)_{\perp}^T \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -A_{o\perp}C^T F^T MFCA_{o\perp}^T - A_{o\perp}C^T F^T M^T FCA_{o\perp}^T + 2\gamma A_{o\perp}PA_{o\perp}^T & \cdots \\ (FC)_{\perp}A_o^T B_{\perp}^T PA_{o\perp}^T + 2\gamma(FC)_{\perp}PA_{o\perp}^T & \cdots \\ \cdots & A_{o\perp}PB_{\perp}A_o(FC)_{\perp}^T + 2\gamma A_{o\perp}P(FC)_{\perp}^T \\ \cdots & (FC)_{\perp}PB_{\perp}A_o(FC)_{\perp}^T + (FC)_{\perp}A_o^T B_{\perp}^T P(FC)_{\perp}^T + 2\gamma(FC)_{\perp}P(FC)_{\perp}^T \end{bmatrix} < 0. \tag{2.242}$$

Assim, existe uma matriz M que satisfaz à LMI (2.242) se e somente se:

$$\text{posto}(A_{o\perp}C^T F^T) = \text{posto}(FCA_{o\perp}^T) = \text{posto}(CA_{o\perp}^T) = m, \tag{2.243}$$

e

$$(FC)_{\perp}PB_{\perp}A_o(FC)_{\perp}^T + (FC)_{\perp}A_o^T B_{\perp}^T P(FC)_{\perp}^T + 2\gamma(FC)_{\perp}P(FC)_{\perp}^T < 0. \tag{2.244}$$

Note que estas condições implicam que:

$$\text{posto}\left(\begin{bmatrix} A_{o\perp} \\ (FC)_{\perp} \end{bmatrix}\right) = n.$$

Considere o caso particular no qual:

$$F = NA_{o\perp}C^T, \tag{2.245}$$

sendo $N \in \mathbb{R}^{m\times m}$ inversível. Assim, $(FC)_{\perp}$ deve ser tal que:

$$(FC)_{\perp}(FC)^T = (FC)_{\perp}C^T CA_{o\perp}^T N^T = 0.$$



Como N é inversível, então, $(FC)_\perp C^T C A_{o\perp}^T = 0$. Portanto, a matriz $(FC)_\perp$ possui a forma:

$$(FC)_\perp = L(C^T C A_{o\perp}^T)_\perp^T, \tag{2.246}$$

sendo $L \in \mathbb{R}^{n-m \times n-m}$ inversível e $(C^T C A_{o\perp}^T)_\perp^T \in \mathbb{R}^{n-m \times n}$ tal que:

$$(C^T C A_{o\perp}^T)_\perp^T (C^T C A_{o\perp}^T) = 0.$$

e

$$\text{posto}(C^T C A_{o\perp}^T) = n - m.$$

Então a LMI (2.244), com $(FC)_\perp$ dada em (2.246), é dada por:

$$(FC)_\perp P B_\perp A_o (FC)_\perp^T + (FC)_\perp A_o^T B_\perp^T P (FC)_\perp^T + 2\gamma (FC)_\perp P (FC)_\perp^T$$

$$= L(C^T C A_{o\perp}^T)_\perp^T P B_\perp A_o (C^T C A_{o\perp}^T)_\perp L^T + L(C^T C A_{o\perp}^T)_\perp^T A_o^T B_\perp^T P (C^T C A_{o\perp}^T)_\perp L^T +$$

$$2\gamma L(C^T C A_{o\perp}^T)_\perp^T P (C^T C A_{o\perp}^T)_\perp L^T < 0.$$

Como L é inversível, a LMI acima é equivalente a:

$$\begin{aligned} &(C^T C A_{o\perp}^T)_\perp^T P B_\perp A_o (C^T C A_{o\perp}^T)_\perp + (C^T C A_{o\perp}^T)_\perp^T A_o^T B_\perp^T P (C^T C A_{o\perp}^T)_\perp + \\ &2\gamma (C^T C A_{o\perp}^T)_\perp^T P (C^T C A_{o\perp}^T)_\perp < 0. \\ &(C^T C A_{o\perp}^T)_\perp^T P B_\perp A_o (C^T C A_{o\perp}^T)_\perp + (C^T C A_{o\perp}^T)_\perp^T A_o^T B_\perp^T P (C^T C A_{o\perp}^T)_\perp \\ &< -2\gamma (C^T C A_{o\perp}^T)_\perp^T P (C^T C A_{o\perp}^T)_\perp. \end{aligned} \tag{2.247}$$

Note que, como $(C^T C A_{o\perp}^T)_\perp^T \in \mathbb{R}^{n-m \times n}$, uma condição suficiente para (2.247) é que $\text{posto}(A_o) = n - m$.

A LME (2.238), com F dada em (2.245), é equivalente a:

$$B^T P = FC = N A_{o\perp} C^T C. \tag{2.248}$$

Assim, as matrizes F e K tais que todos os pólos do sistema da Fig. 3 tenham parte real menor que $-\gamma$, $\gamma > 0$, e que este sistema seja ERP podem ser obtidas através do Algoritmo 2, proposto nesta tese. De acordo com o o Teorema 4, uma condição necessária para a existência de matrizes F e K_o tais que todos os pólos do sistema $\{A - BK_oC, B, FC\}$ apresentam parte real menor que $-\gamma$ e que este sistema é ERP é que todos os zeros de transmissão da planta $\{A, B, C\}$ possuam parte real menor que $-\gamma$.

Algoritmo 2 *Considere uma planta $\{A, B, C\}$, cujos zeros de transmissão possuem parte*



real menor que $-\gamma$, $\gamma > 0$. As matrizes F e K tais que todos os pólos do sistema da Fig. 3 tenham parte real menor que $-\gamma$ e que este sistema seja ERP podem ser obtidas através do procedimento abaixo:

1. *Determine $B_\perp \in \mathbb{R}^{n\times n-m}$, tal que $B_\perp^T B = 0$ e* posto$([B\ B_\perp]) = n$;
2. *Obtenha $A_o \in \mathbb{R}^{n-m\times n}$ pela expressão (2.229). Se* posto$(A_o) < n - m$, *o problema não tem solução. No caso de* posto$(A_o) = n - m$, *passe para o item 3;*
3. *Determine $A_{o\perp} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que $A_{o\perp}A_o^T = 0$ e* posto$(A_{o\perp}) = m$. *Se* posto$(CA_{o\perp}^T) < m$, *o problema não tem solução. No caso de* posto$(CA_{o\perp}^T) = m$, *passe para o item 4;*
4. *Encontre, se possível, $P_1 = P_1^T$ e N que satisfazem às seguintes LMIs:*

$$\begin{aligned}(C^TCA_{o\perp}^T)_\perp^T P_1 B_\perp A_o (C^TCA_{o\perp}^T)_\perp + (C^TCA_{o\perp}^T)_\perp^T A_o^T B_\perp^T P_1 (C^TCA_{o\perp}^T)_\perp \\ < -2\gamma (C^TCA_{o\perp}^T)_\perp^T P_1 (C^TCA_{o\perp}^T)_\perp, \qquad (2.249)\\ B^TP_1 = NA_{o\perp}C^TC, \qquad (2.250)\\ P_1 > 0; \qquad (2.251)\end{aligned}$$

5. *Obtenha $F = NA_{o\perp}C^T$;*
6. *Para F obtido no item 5, encontre $P_2 = P_2^T$ e K que satisfazem às seguintes LMIs:*

$$P_2A + A^TP_2 - C^TF^TKC - C^TK^TFC < -2\gamma P_2,$$

$$B^TP_2 = FC,$$

$$P_2 > 0.$$

2.6 Sistemas Incertos

Nas situações práticas em geral, existem incertezas nos parâmetros da planta. Desta forma, é importante levar em conta estas incertezas no projeto de sistemas de controle. Considere, então, a planta descrita em (2.252):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(\alpha)x + Bu,\\ y &= C(\alpha)x,\end{aligned} \qquad (2.252)$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

sendo $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$, $p \geq m$ e $\alpha \in \mathbb{R}^r$ dado por:

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{r-1} \\ \alpha_r \end{bmatrix}, \tag{2.253}$$

sendo $\alpha_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, r-1, r$ constantes desconhecidas, com $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{r-1}+\alpha_r = 1$

São admitidas as seguintes hipóteses:

A1 O vetor x não está disponível para medição, mas o vetor y está disponível para medição;

A2 As matrizes com incertezas $A(\alpha)$ e $C(\alpha)$ são constantes, mas desconhecidas e descritas por:

$$A(\alpha) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i A_i \text{ e } C(\alpha) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i C_i,$$

sendo $\alpha_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, r-1, r$ constantes desconhecidas, $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{r-1}+\alpha_r = 1$ e as matrizes A_i e C_i, $i = 1, \ldots, r$ são conhecidas (incertezas politópicas).

Considerando a planta descrita em (2.252), satisfazendo às hipóteses A1 e A2, foi proposto o seguinte problema:

Problema 3 Dada a planta $\{A(\alpha), B, C(\alpha)\}$, satisfazendo às condições A1 e A2, encontre condições necessárias e suficientes, usando LMIs, para a existência de matrizes constantes F e $K_o \in \mathbb{R}^{m \times m}$, para que o sistema descrito na Fig. 4, com entrada $\tilde{U}(s)$ e saída $Y(s)$, seja ERP.

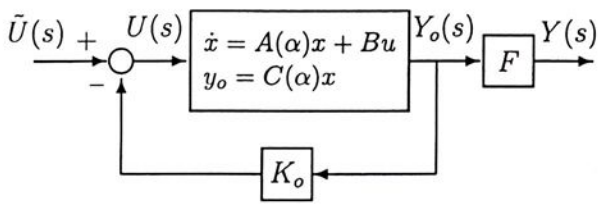


Figura 4: Sistema realimentado do Problema 3.

2.6.1 Sistemas com o Mesmo Número de Entradas e Saídas

Considere a planta definida em (2.252), com $p = m$, satisfazendo às hipóteses A1 e A2. A solução do Problema 3 é apresentada no Teorema 22.

Teorema 22 *[12] O Problema 3 tem solução se e somente se existirem matrizes* $P(\alpha) = P(\alpha)^T$, R *e* F, *tais que:*

$$P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T(R + R^T)C(\alpha) < 0, \tag{2.254}$$

$$B^T P(\alpha) = FC(\alpha), \tag{2.255}$$

$$P(\alpha) > 0. \tag{2.256}$$

para todo α *definido em (2.253) e A2. Aliás, se (2.254)-(2.256) forem satisfeitas, então* K_o *pode ser obtido pela expressão:*

$$K_o = (F^T)^{-1}R. \tag{2.257}$$

Prova A partir do Lema 1, o sistema descrito na Fig. 4, com entrada $\tilde{U}(s)$ e saída $Y(s)$, é ERP se e somente se existirem matrizes $P(\alpha) = P(\alpha)^T$, K_o e F, tais que:

$$P(\alpha)(A(\alpha) - BK_oC(\alpha)) + (A(\alpha) - BK_oC(\alpha))^T P(\alpha) < 0, \tag{2.258}$$

$$B^T P(\alpha) = FC(\alpha), \tag{2.259}$$

$$P(\alpha) > 0. \tag{2.260}$$

Agora, considerando (2.258) e definindo $R = F^T K$, segue que:

$$\begin{gathered} P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T F^T K_o C(\alpha) - C(\alpha)^T K_o^T FC(\alpha) < 0, \\ P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T(R + R^T)C(\alpha) < 0, \end{gathered} \tag{2.261}$$

que corresponde à equação (2.254). Agora, de (2.255), com posto$(B) = m$, então $B^T P(\alpha) \times B = FC(\alpha)B$ tem posto m. Portanto, $F \in \mathbb{R}^{m \times m}$ também tem posto m e assim $(F^T)^{-1}$ existe. Então, se o sistema na Fig. 4 for ERP, (2.254)-(2.256) são factíveis e se (2.254)-(2.256) forem factíveis, o sistema na Fig. 4 é ERP, para K_o dado em (2.257). □

Observação 12 *As expressões dadas nos teoremas desta seção, com as matrizes* $P(\alpha)$, $A(\alpha)$ *e* $C(\alpha)$, *podem ser definidas em termos de LMIs, como será estudado no Capítulo 5.*

Observação 13 *Se as incertezas consideradas no Teorema 22 forem removidas, tem-se o Teorema 7. Note, também, que a condição de igualdade (2.255) limita a localização das incertezas na matriz* $C(\alpha)$.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

2.6.2 Sistemas com Números Diferentes de Entradas (m) e Saídas (p)

Considere a planta definida em (2.252), com $p > m$, satisfazendo às hipóteses A1 e A2. O Teorema 23, proposto neste trabalho, que é extensão do Teorema 13 para sistemas incertos, apresentam algumas condições suficientes para a solução do Problema 3:

Teorema 23 *O sistema da Fig. 4 é ERP se pelo menos uma das condições (i)-(xi) for satisfeita:*

(i) Existem matrizes $P(\alpha) = P(\alpha)^T$, K_o e F que satisfazem às seguintes condições:

$$\begin{bmatrix} -2P(\alpha) & A(\alpha)^T - C(\alpha)^T K_o^T B^T + P(\alpha) + I_n \\ A(\alpha) - BK_oC(\alpha) + P(\alpha) + I_n & -2I_n \end{bmatrix} < 0, \tag{2.262}$$

$$B^T P(\alpha) = FC(\alpha). \tag{2.263}$$

(ii) Existem matrizes $P_N(\alpha) = P_N^T(\alpha)$, K_o e F_N que satisfazem às seguintes condições, para algum $\delta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{bmatrix} -2P_N(\alpha) & A(\alpha)^T - C(\alpha)^T K_o^T B^T + P_N(\alpha) + \delta I_n \\ A(\alpha) - BK_oC(\alpha) + P_N(\alpha) + \delta I_n & -2\delta I_n \end{bmatrix} < 0, \tag{2.264}$$

$$B^T P_N(\alpha) = F_N C(\alpha). \tag{2.265}$$

Neste caso, a matriz F é dada por:

$$F = \frac{1}{\delta} F_N. \tag{2.266}$$

(iii) Existem matrizes $P(\alpha) = P(\alpha)^T$, K_f e F que satisfazem às seguintes condições:

$$\begin{bmatrix} -BK_fB^T - BK_f^TB^T - 2I_n & A(\alpha) + P(\alpha) + I_n \\ A(\alpha)^T + P(\alpha) + I_n & -2P(\alpha) \end{bmatrix} < 0, \tag{2.267}$$

$$B^T P(\alpha) = FC(\alpha). \tag{2.268}$$

Neste caso, a matriz K_o é dada por:

$$K_o = K_f F. \tag{2.269}$$

(iv) Existem matrizes $P_N(\alpha) = P_N(\alpha)^T$, K_f e F_N que satisfazem às seguintes condições,



para algum $\delta \in \mathbb{R}$, *com* $\delta > 0$:

$$\begin{bmatrix} -BK_fB^T - BK_f^TB^T - 2\delta I_n & A(\alpha) + P_N(\alpha) + \delta I_n \\ A(\alpha)^T + P_N(\alpha) + \delta I_n & -2P_N(\alpha) \end{bmatrix} < 0, \tag{2.270}$$

$$B^T P_N(\alpha) = F_N C(\alpha). \tag{2.271}$$

Neste caso, as matrizes F *e* K_o *podem ser obtidas por:*

$$F = \frac{1}{\delta} F_N, \;\; K_o = K_f F. \tag{2.272}$$

(v) Existem matrizes $P(\alpha) = P(\alpha)^T$, K_1, K_2 *e* F *que satisfazem às seguintes condições:*

$$\begin{bmatrix} -2P(\alpha) & A(\alpha)^T - C(\alpha)^T K_1^T B^T + P(\alpha) + I_n \\ A(\alpha) - BK_1C(\alpha) + P(\alpha) + I_n & -BK_2B^T - BK_2^TB^T - 2I_n \end{bmatrix} < 0, \tag{2.273}$$

$$B^T P(\alpha) = FC(\alpha). \tag{2.274}$$

Neste caso, a matriz K_o *é dada por:*

$$K_o = K_1 + K_2 F. \tag{2.275}$$

(vi) Existem matrizes $P_N(\alpha) = P_N(\alpha)^T$, K_1, K_2 *e* F_N *que satisfazem às seguintes condições, para algum* $\delta \in \mathbb{R}$, *com* $\delta > 0$:

$$\begin{bmatrix} -2P_N(\alpha) & A(\alpha)^T - C(\alpha)^T K_1^T B^T + P_N(\alpha) + \delta I_n \\ A(\alpha) - BK_1C(\alpha) + P_N(\alpha) + \delta I_n & -BK_2B^T - BK_2^TB^T - 2\delta I_n \end{bmatrix} < 0, \tag{2.276}$$

$$B^T P_N(\alpha) = F_N C(\alpha). \tag{2.277}$$

Neste caso, as matrizes F *e* K_o *podem ser obtidas por:*

$$F = \frac{1}{\delta} F_N, \tag{2.278}$$

$$K_o = K_1 + K_2 F. \tag{2.279}$$

(vii) Existem matrizes $P(\alpha) = P(\alpha)^T$, K_o *e* F *que satisfazem às seguintes condições:*

$$\begin{bmatrix} P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - 2P(\alpha) & -C(\alpha)^T K_o^T B^T + P(\alpha) + I_n \\ -BK_oC(\alpha) + P(\alpha) + I_n & -2I_n \end{bmatrix} < 0, \tag{2.280}$$

$$B^T P(\alpha) = FC(\alpha), \tag{2.281}$$



$$P(\alpha) > 0. \tag{2.282}$$

(viii) Existem matrizes $P_N(\alpha) = P_N(\alpha)^T$, K_N *e* F_N *que satisfazem às seguintes condições, para algum* $\delta \in \mathbb{R}$*:*

$$\begin{bmatrix} P_N(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P_N(\alpha) - 2P_N(\alpha) & -C(\alpha)^T K_N^T B^T + P_N(\alpha) + \delta I_n \\ -BK_N C(\alpha) + P_N(\alpha) + \delta I_n & -2\delta I_n \end{bmatrix} < 0, \tag{2.283}$$

$$B^T P_N(\alpha) = F_N C(\alpha), \tag{2.284}$$

$$P_N(\alpha) > 0. \tag{2.285}$$

Neste caso, as matrizes F *e* K_o *podem ser obtidas por:*

$$F = \frac{1}{\delta} F_N, \tag{2.286}$$

$$K_o = \frac{1}{\delta} K_N. \tag{2.287}$$

(ix) Existem matrizes $P(\alpha) = P(\alpha)^T$, K_1, K_2 *e* F_N *que satisfazem às seguintes condições:*

$$\begin{bmatrix} P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - 2P(\alpha) & -C(\alpha)^T K_1^T B^T + P(\alpha) + I_n \\ -BK_1 C(\alpha) + P(\alpha) + I_n & -BK_2 B^T - BK_2^T B^T - 2I_n \end{bmatrix} < 0, \tag{2.288}$$

$$B^T P(\alpha) = F C(\alpha), \tag{2.289}$$

$$P(\alpha) > 0. \tag{2.290}$$

Neste caso, a matriz K_o *é dada por:*

$$K_o = K_1 + K_2 F. \tag{2.291}$$

(x) Existem matrizes $P_N(\alpha) = P_N(\alpha)^T$, K_{N1}, K_{N2} *e* F_N *que satisfazem às seguintes condições, para algum* $\delta \in \mathbb{R}$*, com* $\delta > 0$*:*

$$\begin{bmatrix} P_N(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P_N(\alpha) - 2P_N(\alpha) & -C^T(\alpha) K_{N1}^T B^T + P_N(\alpha) + \delta I_n \\ -BK_{N1} C(\alpha) + P_N(\alpha) + \delta I_n & -BK_{N2} B^T - BK_{N2}^T B^T - 2\delta I_n \end{bmatrix} < 0, \tag{2.292}$$

$$B^T P_N(\alpha) = F_N C(\alpha), \tag{2.293}$$

$$P_N(\alpha) > 0. \tag{2.294}$$

Neste caso, as matrizes F *e* K_o *podem ser obtidas por:*

$$F = \frac{1}{\delta} F_N, \tag{2.295}$$

$$K_o = K_1 + K_2 F, \tag{2.296}$$

sendo:

$$K_1 = \frac{1}{\delta} K_{N1},$$

$$K_2 = \frac{1}{\delta} K_{N2}.$$

(xi) Existem matrizes $P(\alpha) = P(\alpha)^T$, M, N e F que satisfazem às seguintes condições:

$$P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T N^T B^T - BNC(\alpha) < 0, \tag{2.297}$$

$$P(\alpha) > 0, \tag{2.298}$$

$$BM = P(\alpha)B, \tag{2.299}$$

$$B^T P(\alpha) = FC(\alpha). \tag{2.300}$$

Neste caso, a matriz K_o é dada por:

$$K_o = M^{-1} N. \tag{2.301}$$

Prova A prova deste teorema é similar à prova do Teorema 13, substituindo-se A por $A(\alpha)$, C por $C(\alpha)$ e P por $P(\alpha)$. □

Observação 14 *Como será estudado no Capítulo 5, é possível solucionar as condições (i)-(xi) do Teorema 23 sem a dependência do parâmetro α. Por exemplo, as expressões (2.262) e (2.263), dadas no item (i), são equivalentes a:*

$$\begin{bmatrix} -2P_i & A_i^T - C_i^T K_o^T B^T + P_i + I_n \\ A_i - BK_oC_i + P_i + I_n & -2I_n \end{bmatrix} < 0,$$

$$B^T P_i = FC_i,$$

$$i = 1, 2, \ldots, r.$$

Considere, agora, uma dada matriz F tal que o sistema $\{A(\alpha), B, FC(\alpha)\}$ seja de fase mínima. O Teorema 24, proposto neste trabalho, fornece condições necessárias e suficientes para a existência de uma matriz K_o que torna ERP o sistema da Fig. 4.

Teorema 24 *Considere F tal que o sistema $\{A(\alpha), B, FC(\alpha)\}$ seja de fase mínima, para todo α admissível. Então, uma solução para o Problema 3 é obtida através das seguintes LMIs, em termos de K_o e $P(\alpha) = P(\alpha)^T$:*

$$P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T F^T K_o C(\alpha) - C(\alpha)^T K_o^T FC(\alpha) < 0,$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

$$B^T P(\alpha) = FC(\alpha),$$

$$P(\alpha) > 0.$$

A prova deste teorema é obtida diretamente do Lema 1.

Observação 15 *Como será estudado no Capítulo 5, é possível solucionar o Teorema 24 sem a dependência do parâmetro α.*

2.6.3 Sistemas Incertos com Taxa de Decaimento

2.6.3.1 Sistemas com o Mesmo Número de Entradas e Saídas

Normalmente, apenas a estabilidade de um sistema de controle é insuficiente para a obtenção de um desempenho adequado para um sistema de controle. Freqüentemente, também é necessário especificar a resposta transitória. O Teorema 25, concebido em [12], estabelece condições necessárias e suficientes para que todos os pólos do sistema incerto da Fig. 4, com o mesmo número de entradas e saídas, tenham parte real menor que $-\gamma$ e que este sistema seja ERP.

Teorema 25 *[12] Sejam $z_i(\alpha) = \sigma_i(\alpha) + \mathrm{j}\,\beta_i(\alpha)$, $\sigma_i(\alpha)$ e $\beta_i(\alpha) \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, p$ os zeros de transmissão do sistema $\{A(\alpha), B, C(\alpha)\}$, descrito no Problema 3. Então, dada uma constante positiva γ, existem matrizes $P(\alpha) = P(\alpha)^T$, R e F, tais que:*

$$P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T(R + R^T)C(\alpha) < -2\gamma P(\alpha), \tag{2.302}$$

$$B^T P(\alpha) = FC(\alpha), \tag{2.303}$$

$$P(\alpha) > 0. \tag{2.304}$$

se e somente se $\gamma < -\sigma$, sendo $\sigma = max\{\sigma_1(\alpha), \ldots, \sigma_p(\alpha)\}$ e existe $F \in \mathbb{R}^{m \times m}$, tal que $FC(\alpha)B = (FC(\alpha)B)^T > 0$, para todo α admissível. Neste caso, uma matriz K_o pode ser obtida pela expressão:

$$K_o = (F^T)^{-1}R. \tag{2.305}$$

Prova Definindo $\tilde{A}(\alpha) = A(\alpha) + \gamma I$, então (2.302) pode ser descrito por:

$$\begin{aligned}
P(\alpha)(\tilde{A}(\alpha) - \gamma I) + (\tilde{A}(\alpha) - \gamma I)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T(R + R^T)C(\alpha) < -2\gamma P(\alpha),\\
P(\alpha)\tilde{A}(\alpha) - \gamma P(\alpha) + \tilde{A}(\alpha)^T P(\alpha) - \gamma P(\alpha) - C(\alpha)^T(R + R^T)C(\alpha) < -2\gamma P(\alpha),\\
P(\alpha)\tilde{A}(\alpha) + \tilde{A}(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T(R + R^T)C(\alpha) - 2\gamma P(\alpha) < -2\gamma P(\alpha),\\
P(\alpha)\tilde{A}(\alpha) + \tilde{A}(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T(R + R^T)C(\alpha) < 0.
\end{aligned} \tag{2.306}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

Do Teorema 22, de (2.302) (que é equivalente a (2.306)), (2.303) e (2.304), o sistema $\{\tilde{A}(\alpha) - BKC(\alpha), B, FC(\alpha)\}$ é ERP. Agora, sabe-se, também, que todos os zeros de transmissão de um sistema ERP apresentam parte real negativa [36]. Sabe-se que os zeros de transmissão de um sistema $\{A(\alpha), B, C(\alpha)\}$, $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ e $C(\alpha) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, são os números $s(\alpha) \in \mathbb{C}$, tais que:

$$\text{posto} \begin{bmatrix} s(\alpha)I - A(\alpha) & B \\ -C(\alpha) & 0 \end{bmatrix} < n + m.$$

De (2.303), a matriz F tem posto m e, assim, é fácil verificar que os sistemas $\{\tilde{A}(\alpha) - BKC(\alpha), B, FC(\alpha)\}$ e $\{\tilde{A}(\alpha), B, C(\alpha)\}$ têm os mesmos zeros de transmissão, usando operações elementares, primeiro nas colunas e depois nas linhas, da matriz que define os zeros de transmissão de $\{\tilde{A}(\alpha), B, C(\alpha)\}$:

$$\begin{bmatrix} s(\alpha)I - \tilde{A}(\alpha) + BKC(\alpha) & B \\ -FC(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} s(\alpha)I - \tilde{A}(\alpha) & B \\ -FC(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} s(\alpha)I - \tilde{A}(\alpha) & B \\ -C(\alpha) & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora, os zeros de transmissão $\{\tilde{A}(\alpha), B, C(\alpha)\}$ são os números $s(\alpha) \in \mathbb{C}$, tais que:

$$\text{posto} \begin{bmatrix} (s(\alpha) - \gamma)I - A(\alpha) & B \\ -C(\alpha) & 0 \end{bmatrix} < n + m.$$

Portanto, se $s(\alpha) = s_o(\alpha)$ for um zero de transmissão de $\{A(\alpha), B, C(\alpha)\}$, então $s(\alpha) = s_o(\alpha) + \gamma$ será um zero de transmissão de $\{\tilde{A}(\alpha), B, C(\alpha)\}$. Então, todos os zeros de transmissão de $\{\tilde{A}(\alpha), B, C(\alpha)\}$ apresentam parte real negativa se $\sigma_i(\alpha) + \gamma < 0$, $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$. Daí, $\gamma < -\sigma$, $\sigma = max\{\sigma_1(\alpha), \ldots, \sigma_p(\alpha)\}$, para todo α admissível. Agora, de (2.303) e (2.304), $FC(\alpha)B = B^TPB > 0$. A necessidade está provada. Para demonstrar a suficiência, considere que $0 < \gamma < -\sigma$, ou seja, todos os zeros de transmissão de $\{\tilde{A}(\alpha), B, C(\alpha)\}$ apresentam parte real negativa e, ainda, que existe $F \in \mathbb{R}^{m\times m}$ tal que $FC(\alpha)B = (FC(\alpha)B)^T > 0$. Note que, nestas condições, o sistema $\{\tilde{A}(\alpha), B, FC(\alpha)\}$ satisfaz as condições (i) e (ii) do Teorema 4. Assim, existe $K_o(\alpha)$ tal que $K(\alpha) = K_o(\alpha)F$ torne o sistema $\{\tilde{A}(\alpha) - BK(\alpha)C(\alpha), B, FC(\alpha)\}$ ERP. Mais especificamente, pode-se demonstrar que, usando argumentos descritos em [34,35], $K_o(\alpha) = kI$, $k > 0$, constante e suficientemente grande torna o sistema descrito acima ERP. Finalmente, do Teorema 22, (2.302) (que é equivalente a (2.306)), (2.303) e (2.304) são factíveis e o Teorema 25 está demonstrado. □

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

Observação 16 *Se as incertezas consideradas no Teorema 25 forem removidas, tem-se o Teorema 15.*

2.6.3.2 Sistemas com Números Diferentes de Entradas e Saídas

Considere a planta definida em (2.252), com $p > m$, satisfazendo às hipóteses A1 e A2. O teorema 26, proposto neste trabalho, que é extensão do Teorema 20 para sistemas incertos, estabelecem condições suficientes para que todos os pólos do sistema incerto da Fig. 4, com o número de saídas maior que o número de entradas, tenham parte real menor que $-\gamma$, $\gamma > 0$, e que este sistema seja ERP:

Teorema 26 *Todos os pólos do sistema da Fig. 4 possuem parte real menor que $-\gamma$, com $\gamma > 0$, e este sistema é ERP se pelo menos uma das condições (i)-(xi) for satisfeita:*

(i) Existem matrizes $P(\alpha) = P(\alpha)^T$, K_o e F que satisfazem às seguintes condições:

$$\begin{bmatrix} -2P(\alpha) & \cdots \\ A(\alpha) + \gamma I - BK_oC(\alpha) + P(\alpha) + I_n & \cdots \\ \cdots & A(\alpha)^T + \gamma I - C(\alpha)^T K_o^T B^T + P(\alpha) + I_n \\ \cdots & -2I_n \end{bmatrix} < 0, \quad (2.307)$$

$$B^T P(\alpha) = FC(\alpha). \quad (2.308)$$

(ii) Existem matrizes $P_N(\alpha) = P_N(\alpha)^T$, K_o e F_N que satisfazem às seguintes condições, para algum $\delta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{bmatrix} -2P_N(\alpha) & \cdots \\ A(\alpha) + \gamma I - BK_oC(\alpha) + P_N(\alpha) + \delta I_n & \cdots \\ \cdots & A(\alpha)^T + \gamma I - C(\alpha)^T K_o^T B^T + P_N(\alpha) + \delta I_n \\ \cdots & -2\delta I_n \end{bmatrix} < 0, \quad (2.309)$$

$$B^T P_N(\alpha) = F_N C(\alpha). \quad (2.310)$$

Neste caso, a matriz F é dada por:

$$F = \frac{1}{\delta} F_N. \quad (2.311)$$



(iii) Existem matrizes $P(\alpha) = P(\alpha)^T$, K_f *e* F *que satisfazem às seguintes condições:*

$$\begin{bmatrix} -BK_fB^T - BK_f^TB^T - 2I_n & A(\alpha) + \gamma I + P(\alpha) + I_n \\ A(\alpha)^T + \gamma I + P(\alpha) + I_n & -2P(\alpha) \end{bmatrix} < 0, \tag{2.312}$$

$$B^TP(\alpha) = FC(\alpha). \tag{2.313}$$

Neste caso, a matriz K_o *é dada por:*

$$K_o = K_fF. \tag{2.314}$$

(iv) Existem matrizes $P_N(\alpha) = P_N(\alpha)^T$, K_f *e* F_N *que satisfazem às seguintes condições, para algum* $\delta \in \mathbb{R}$, *com* $\delta > 0$*:*

$$\begin{bmatrix} -BK_fB^T - BK_f^TB^T - 2\delta I_n & A(\alpha) + \gamma I + P_N(\alpha) + \delta I_n \\ A(\alpha)^T + \gamma I + P_N(\alpha) + \delta I_n & -2P_N(\alpha) \end{bmatrix} < 0, \tag{2.315}$$

$$B^TP_N(\alpha) = F_NC(\alpha). \tag{2.316}$$

Neste caso, as matrizes F *e* K_o *podem ser obtidas por:*

$$F = \frac{1}{\delta}F_N, \;\; K_o = K_fF. \tag{2.317}$$

(v) Existem matrizes $P(\alpha) = P(\alpha)^T$, K_1, K_2 *e* F *que satisfazem às seguintes condições:*

$$\begin{bmatrix} -2P(\alpha) & \cdots & \\ A(\alpha) + \gamma I - BK_1C(\alpha) + P(\alpha) + I_n & \cdots & \\ \cdots & A(\alpha)^T + \gamma I - C(\alpha)^TK_1^TB^T + P(\alpha) + I_n & \\ \cdots & -BK_2B^T - BK_2^TB^T - 2I_n & \end{bmatrix} < 0, \tag{2.318}$$

$$B^TP(\alpha) = FC(\alpha). \tag{2.319}$$

Neste caso, a matriz K_o *é dada por:*

$$K_o = K_1 + K_2F. \tag{2.320}$$

(vi) Existem matrizes $P_N(\alpha) = P_N(\alpha)^T$, K_1, K_2 *e* F_N *que satisfazem às seguintes condições, para algum* $\delta \in \mathbb{R}$, *com* $\delta > 0$*:*

$$\begin{bmatrix} -2P_N(\alpha) & \cdots \\ A(\alpha) + \gamma I - BK_1C(\alpha) + P_N(\alpha) + \delta I_n & \cdots \end{bmatrix}$$



$$\begin{matrix} \cdots & A(\alpha)^T + \gamma I - C(\alpha)^T K_1^T B^T + P_N(\alpha) + \delta I_n \\ \cdots & -BK_2B^T - BK_2^T B^T - 2\delta I_n \end{matrix} \Bigg] < 0, \quad (2.321)$$

$$B^T P_N(\alpha) = F_N C(\alpha). \quad (2.322)$$

Neste caso, as matrizes F e K_o podem ser obtidas por:

$$F = \frac{1}{\delta} F_N, \quad (2.323)$$

$$K_o = K_1 + K_2 F. \quad (2.324)$$

(vii) Existem matrizes $P(\alpha) = P(\alpha)^T$, K_o e F que satisfazem às seguintes condições:

$$\begin{bmatrix} P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - 2P(\alpha) & -C(\alpha)^T K_o^T B^T + P(\alpha) + I_n \\ -BK_oC(\alpha) + P(\alpha) + I_n & -2I_n \end{bmatrix}$$
$$< -2\gamma \begin{bmatrix} P(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.325)$$

$$B^T P(\alpha) = FC(\alpha), \quad (2.326)$$

$$P(\alpha) > 0. \quad (2.327)$$

(viii) Existem matrizes $P_N(\alpha) = P_N(\alpha)^T$, K_N e F_N que satisfazem às seguintes condições, para algum $\delta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{bmatrix} P_N(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P_N(\alpha) - 2P_N(\alpha) & -C(\alpha)^T K_N^T B^T + P_N(\alpha) + \delta I_n \\ -BK_NC(\alpha) + P_N(\alpha) + \delta I_n & -2\delta I_n \end{bmatrix}$$
$$< -2\gamma \begin{bmatrix} P_N(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.328)$$

$$B^T P_N(\alpha) = F_N C(\alpha), \quad (2.329)$$

$$P_N(\alpha) > 0. \quad (2.330)$$

Neste caso, as matrizes F e K_o podem ser obtidas por:

$$F = \frac{1}{\delta} F_N, \quad (2.331)$$

$$K_o = \frac{1}{\delta} K_N. \quad (2.332)$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

(ix) Existem matrizes $P(\alpha) = P(\alpha)^T$, K_1, K_2 e F_N que satisfazem às seguintes condições:

$$\begin{bmatrix} P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - 2P(\alpha) & -C(\alpha)^T K_1^T B^T + P(\alpha) + I_n \\ -BK_1C(\alpha) + P(\alpha) + I_n & -BK_2B^T - BK_2^T B^T - 2I_n \end{bmatrix}$$
$$< -2\gamma \begin{bmatrix} P(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.333}$$

$$B^T P(\alpha) = FC(\alpha), \tag{2.334}$$

$$P(\alpha) > 0. \tag{2.335}$$

Neste caso, a matriz K_o é dada por:

$$K_o = K_1 + K_2 F. \tag{2.336}$$

(x) Existem matrizes $P_N(\alpha) = P_N(\alpha)^T$, K_{N1}, K_{N2} e F_N que satisfazem às seguintes condições, para algum $\delta \in \mathbb{R}$, com $\delta > 0$:

$$\begin{bmatrix} P_N(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P_N(\alpha) - 2P_N(\alpha) & -C(\alpha)^T K_{N1}^T B^T + P_N(\alpha) + \delta I_n \\ -BK_{N1}C(\alpha) + P_N(\alpha) + \delta I_n & -BK_{N2}B^T - BK_{N2}^T B^T - 2\delta I_n \end{bmatrix}$$
$$< -2\gamma \begin{bmatrix} P_N(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.337}$$

$$B^T P_N(\alpha) = F_N C(\alpha), \tag{2.338}$$

$$P_N(\alpha) > 0. \tag{2.339}$$

Neste caso, as matrizes F e K_o podem ser obtidas por:

$$F = \frac{1}{\delta} F_N, \tag{2.340}$$

$$K_o = K_1 + K_2 F, \tag{2.341}$$

sendo:

$$K_1 = \frac{1}{\delta} K_{N1},$$
$$K_2 = \frac{1}{\delta} K_{N2}.$$

(xi) Existem matrizes $P(\alpha) = P(\alpha)^T$, M, N e F que satisfazem às seguintes condições:

$$P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T N^T B^T - BNC(\alpha) < -2\gamma P(\alpha), \tag{2.342}$$

$$P(\alpha) > 0, \tag{2.343}$$



$$BM = P(\alpha)B, \tag{2.344}$$

$$B^T P(\alpha) = FC(\alpha). \tag{2.345}$$

Neste caso, a matriz K_o é dada por:

$$K_o = M^{-1}N. \tag{2.346}$$

Prova A prova deste teorema é similar à prova do Teorema 13, substituindo-se A por $A(\alpha) + \gamma I$, C por $C(\alpha)$ e P por $P(\alpha)$. □

Observação 17 *Como será estudado no Capítulo 5, é possível solucionar as condições (i)-(xi) do Teorema 26 sem a dependência do parâmetro α.*

Considere, agora, uma dada matriz F tal que todos os zeros de transmissão do sistema $\{A(\alpha), B, FC(\alpha)\}$ possuem parte real menor que $-\gamma$, $\gamma > 0$. O Teorema 27, proposto neste trabalho, fornece condições necessárias e suficientes para a existência de uma matriz K_o tal que todos os pólos do sistema da Fig. 4 tenham parte real menor que $-\gamma$, e que este sistema seja ERP.

Teorema 27 *Considere F tal que todos os zeros de transmissão do sistema $\{A(\alpha), B, FC(\alpha)\}$ possuem parte real menor que $-\gamma$, $\gamma > 0$, para todo α admissível. Então, uma condição suficiente para que todos os pólos do sistema da Fig. 4 tenham parte real menor que $-\gamma$ e que este sistema seja ERP é obtida através das seguintes LMIs, em termos de K_o e $P(\alpha) = P(\alpha)^T$:*

$$P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T F^T K_o C(\alpha) - C(\alpha)^T K_o^T FC(\alpha) < -2\gamma P(\alpha),$$

$$B^T P(\alpha) = FC(\alpha),$$

$$P(\alpha) > 0.$$

Prova A prova deste teorema é obtida diretamente do Lema 1. □

Observação 18 *Como será estudado no Capítulo 5, é possível solucionar o Teorema 27 sem a dependência do parâmetro α.*

Observação 19 *Se as incertezas consideradas nos teoremas desta seção forem removidas, têm-se os teoremas das Seções 2.4 e 2.5.*



2.7 Síntese de Sistemas ERP com Compensadores Dinâmicos de Ordem m

Considere o sistema de malha aberta na Fig. 5, com um compensador $G_c(s)$, cuja ordem corresponde ao número de entradas da planta, e uma matriz constante F em série com a saída.

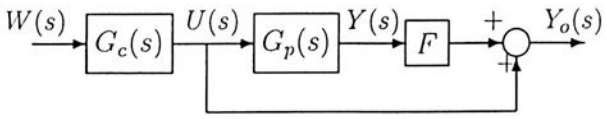


Figura 5: Sistema de malha aberta.

Considerando a representação da planta $G_p(s)$ em espaço de estados, dada por $\{A_p, B_p, C_p\}$, uma parte do sistema da Fig. 5 pode ser representada na forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= A_p x_p + B_p u, \\ y_o &= F C_p x_p + I_m u, \end{aligned} \tag{2.347}$$

sendo $x_p \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y_o \in \mathbb{R}^m$, $A_p \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_p \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C_p \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $p \geq m$, posto$(B_p) = m$ e posto$(C_p) = p$.

Na Fig. 5, o compensador $G_c(s)$ apresenta a seguinte representação em espaço de estados:

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c w, \\ u &= C_c x_c, \end{aligned} \tag{2.348}$$

sendo $x_c \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^m$,$u \in \mathbb{R}^m$, $A_c \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $B_c \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $C_c \in \mathbb{R}^{m\times m}$, posto$(B_c) = m$ e posto$(C_c) = m$.

Observação 20 *Considere* $G_c(s) = C_c(sI_m - A_c)^{-1}B_c = N_c(s)(D_c(s))^{-1}$, *sendo* $D_c(s) = (s-a)I_m$ *e* $N_c(s) = N_c$. *A representação do compensador em espaço de estados é dada em (2.348), cujas matrizes* A_c, B_c *e* C_c *podem ser definidas por:*

$$A_c = aI_m, \;\; B_c = I_m, \;\; C_c = N_c. \tag{2.349}$$

Então, a representação em espaço de estados do sistema de malha aberta na Fig. 5, com a planta $G_p(s)$ representada por (2.347) e o compensador $G_c(s)$ representado por (2.348), é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bw, \\ y_o &= Cx, \end{aligned}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

sendo:

$$x = \begin{bmatrix} x_p \\ x_c \end{bmatrix}, \; A = \begin{bmatrix} A_p & B_pC_c \\ 0 & A_c \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_c \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} FC_p & C_c \end{bmatrix}. \tag{2.350}$$

Observação 21 *Note que o sistema da Fig. 5 tem o mesmo número de entradas e saídas.*

Observação 22 *O produto (CB) é dado por:*

$$CB = \begin{bmatrix} FC_p & C_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ B_c \end{bmatrix} = C_cB_c.$$

Observação 23 *Os zeros de transmissão de $\{A, B, C\}$ são os autovalores de $(A_p - B_pFC_p)$:*

$$\text{posto} \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \text{posto} \begin{bmatrix} sI_n - A_p & -B_pC_c & 0 \\ 0 & sI_m - A_c & B_c \\ -FC_p & -C_c & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \text{posto} \left(\begin{bmatrix} I_n & 0 & -B_p \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI_n - A_p & -B_pC_c & 0 \\ 0 & sI_m - A_c & B_c \\ -FC_p & -C_c & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \text{posto} \begin{bmatrix} sI_n - A_p + B_pFC_p & 0 & 0 \\ 0 & sI_m - A_c & B_c \\ -FC_p & -C_c & 0 \end{bmatrix} < n + 2m.$$

Como as matrizes B_c e C_c têm posto completo, suas linhas são linearmente independentes. Então, segue que:

$$\text{posto} \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} < n + 2m \iff \text{posto}\,(sI_n - A_p + B_pFC_p) < n$$

$$\iff \det\,(sI_n - A_p + B_pFC_p) = 0.$$

Teorema 28 *Existe um compensador $G_c(s)$ de ordem m e uma matriz de realimentação da saída K_o que torna o sistema da Fig. 5 ERP se e somente se existe uma matriz F tal que a matriz $(A_p - B_pFC_p)$ seja Hurwitz, isto é, o sistema da Fig. 6 é estável.*

Prova A prova deste teorema é baseada no Teorema 4 e nas Observações 22 e 23. □

Os Lemas 6 e 7, propostos pelos autores, e os Lemas 8 e 9, dados em [41], apresentam condições suficientes para a estabilidade do sistema na Fig. 6.



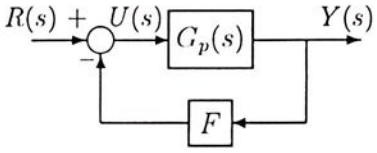


Figura 6: Sistema com realimentação da saída.

Lema 6 *Uma condição suficiente para a estabilidade do sistema na Fig. 6 é a existência de matrizes $P_N = P_N^T$ e F que satisfazem às seguintes LMIs, para algum $\delta \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{bmatrix} -2P_N & A_p^T - C_p^T F^T B_p^T + P_N + \delta I_n \\ A_p - B_p F C_p + P_N + \delta I_n & -2\delta I_n \end{bmatrix} < 0. \tag{2.351}$$

Prova Do critério de estabilidade de Lyapunov [42], o sistema $\{A_p - B_p F C_p,\ B_p, C_p\}$ é quadraticamente estável se e somente se existir uma matriz $P = P^T > 0$ tal que:

$$P(A_p - B_p F C_p) + (A_p - B_p F C_p)^T P < 0. \tag{2.352}$$

Seja $P_N = \delta P$. Uma condição necessária para (2.351) é que $P_N > 0$ e $\delta > 0$. Então, $P = P^T > 0$. Multiplicando a LMI (2.351) à esquerda por $\begin{bmatrix} I_n & P \end{bmatrix}$ e à direita por $\begin{bmatrix} I_n & P \end{bmatrix}^T$, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} I_n & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2P_N & A_p^T - C_p^T F^T B_p^T + P_N + \delta I_n \\ A_p - B_p F C_p + P_N + \delta I_n & -2\delta I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ P \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_n & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2\delta P & A_p^T - C_p^T F^T B_p^T + \delta P + \delta I_n \\ A_p - B_p F C_p + \delta P + \delta I_n & -2\delta I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ P \end{bmatrix}$$

$$= P(A_p - B_p F C_p) + (A_p - B_p F C_p)^T P < 0.$$

Assim, (2.351) é uma condição suficiente para (2.352). Então, se existir $P_N = P_N > 0$, F e δ que satisfazem à LMI (2.351), o sistema na Fig. 6 é assintoticamente estável. □

Lema 7 *Uma condição suficiente para a estabilidade do sistema da Fig. 6 é a existência de matrizes $P_N = P_N^T$ e F_N, que satisfazem às seguintes LMIs, para algum $\delta \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{bmatrix} P_N A_p + A_p^T P_N - 2P_N & -C_p^T F_N^T B_p^T + P_N + \delta I_n \\ -B_p F_N C_p + P_N + \delta I_n & -2\delta I_n \end{bmatrix} < 0, \tag{2.353}$$

$$P_N > 0. \tag{2.354}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

Neste caso, a matriz F é dada por:

$$F = \frac{1}{\delta} F_N. \tag{2.355}$$

Prova A prova deste lema é similar à prova do Lema 6. □

Lema 8 *[41] Uma condição suficiente para a estabilidade do sistema da Fig. 6 é a existência de matrizes $P = P^T$, M e N que satisfazem às seguintes condições:*

$$PA + A^T P - C^T N^T B^T - BNC < 0, \tag{2.356}$$

$$P > 0, \tag{2.357}$$

$$BM = PB, \tag{2.358}$$

Neste caso, a matriz K_o é dada por:

$$K_o = M^{-1} N. \tag{2.359}$$

Prova A prova deste lema é mostrada em [41]. □

Lema 9 *[41] Uma condição suficiente para a estabilidade do sistema da Fig. 6 é a existência de matrizes $W = W^T$, M e N que satisfazem às seguintes condições:*

$$AW + WA^T - BNC - C^T N^T B^T < 0, \tag{2.360}$$

$$W > 0, \tag{2.361}$$

$$MC = CW, \tag{2.362}$$

Neste caso, a matriz K_o é dada por:

$$K_o = NM^{-1}. \tag{2.363}$$

Prova A prova deste lema é mostrada em [41]. □

2.7.1 Sistema ERP com Compensador de Ordem m e Realimentação da Saída

Considere, agora, o sistema de malha fechada na Fig. 7, com a matriz F em série com a saída da planta, de modo que $(A_p - B_p F C_p)$ seja Hurwitz.



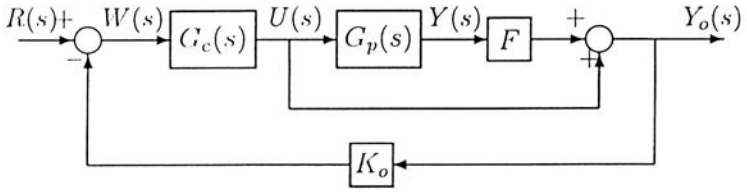


Figura 7: Sistema de malha fechada.

Teorema 29 *Existe uma matriz K_o tal que o sistema na Fig. 7 seja ERP se e somente se existirem matrizes $P_{11} = P_{11}^T$ e K_o que satisfazem às seguintes LMIs:*

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix} < 0, \tag{2.364}$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & C_p^T F^T B_c^{-1} \\ (B_c^T)^{-1} F C_p & (B_c^T)^{-1} C_c \end{bmatrix} > 0, \tag{2.365}$$

sendo:

$$Q_{11} = P_{11}A_p + A_p^T P_{11} - C_p^T F^T K_o F C_p - C_p^T F^T K_o^T F C_p, \tag{2.366}$$

$$Q_{12} = P_{11}B_p C_c + C_p^T F^T B_c^{-1} A_c - C_p^T F^T K_o C_c + A_p^T C_p^T F^T B_c^{-1} - C_p^T F^T K_o^T C_c, \tag{2.367}$$

$$Q_{22} = (B_c^T)^{-1} F C_p B_p C_c + C_c^T B_p^T C_p^T F^T B_c^{-1} + (B_c^T)^{-1} C_c A_c + A_c^T C_c^T B_c^{-1} - C_c^T K_o C_c - C_c^T K_o^T C_c. \tag{2.368}$$

Prova De acordo com o Lema 1, o sistema mostrado na Fig. 7, com entrada $R(s)$ e saída $Y_o(s)$ é ERP se e somente se existirem matrizes $P = P^T$ e K_o, tais que:

$$P(A - BK_oC) + (A - BK_oC)^T P < 0, \tag{2.369}$$

$$B^T P = C, \tag{2.370}$$

$$P > 0. \tag{2.371}$$

Considere:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} = P^T > 0.$$

Então, substituindo a matriz P definida acima e as matrizes A, B e C dadas em (2.350) em (2.370), tem-se:

$$P_{12}^T = (B_c^T)^{-1} F C_p, \tag{2.372}$$

$$P_{22} = (B_c^T)^{-1} C_c. \tag{2.373}$$

Portanto, substituindo (2.372) e (2.373) em (2.371), obtém-se a LMI (2.365).

Como P é simétrica e definida positiva, P_{22} também é simétrica e definida positiva, e então:

$$(B_c^T)^{-1} C_c = C_c^T B_c^{-1} > 0. \tag{2.374}$$

A condição (2.374) é satisfeita se e somente se o compensador for escolhido de modo que $C_c B_c = (C_c B_c)^T > 0$. Para B_c e C_c dados em (2.349), esta condição corresponde a $N_c = N_c^T > 0$.

Então, com as matrizes A, B e C dadas em (2.350), e P dada em (2.365), de (2.369) e (2.374), obtém-se a LMI (2.364). □

Considere, agora, o sistema de malha fechada na Fig. 8, com a matriz F em série com a saída da planta, de modo que $(A_p - B_p F C_p)$ seja Hurwitz, e outra matriz F_o em série com a saída do sistema.

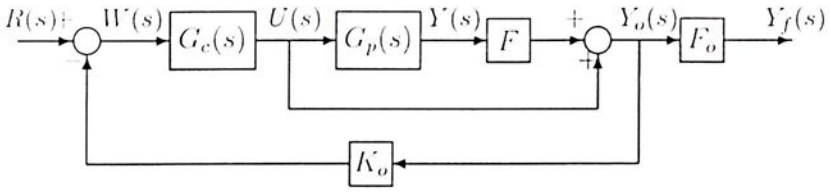


Figura 8: Sistema de malha fechada com F_o em série com a saída.

Teorema 30 *Existem matrizes K_o e F_o tais que o sistema na Fig. 8 seja ERP se e somente se existirem matrizes $P_{11} = P_{11}^T$, $P_{22} = P_{22}^T$ e R, que satisfazem às seguintes LMIs:*

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix} < 0, \tag{2.375}$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & C_p^T F^T (C_c^{-1})^T P_{22} \\ P_{22} C_c^{-1} F C_p & P_{22} \end{bmatrix} > 0, \tag{2.376}$$

sendo:

$$Q_{11} = P_{11} A_p + A_p^T P_{11} - C_p^T F^T (C_c^{-1})^T R F C_p - C_p^T F^T R^T C_c^{-1} F C_p, \tag{2.377}$$

$$Q_{12} = P_{11} B_p C_c + C_p^T F^T (C_c^{-1})^T P_{22} A_c - C_p^T F^T (C_c^{-1})^T R C_c + A_p^T C_p^T F^T (C_c^{-1})^T P_{22} - C_p^T F^T R^T, \tag{2.378}$$

$$Q_{22} = P_{22} C_c^{-1} F C_p B_p C_c + C_c^T B_p^T C_p^T F^T (C_c^{-1})^T P_{22} + P_{22} A_c + A_c^T P_{22} -$$

$$RC_c - C_c^T R^T. \tag{2.379}$$

Quando as LMIs (2.375) e (2.376) são satisfeitas, as matrizes K_o e F_o podem ser obtidas por:

$$K_o = B_c^{-1} P_{22}^{-1} R, \tag{2.380}$$

$$F_o = B_c^T P_{22} C_c^{-1}. \tag{2.381}$$

Prova De acordo com o Lema 1, o sistema da Fig. 7, com entrada $R(s)$ e saída $Y_o(s)$ é ERP se e somente se existirem matrizes $P = P^T$ e K_o, tais que:

$$P(A - BK_oC) + (A - BK_oC)^T P < 0, \tag{2.382}$$

$$B^T P = F_o C, \tag{2.383}$$

$$P > 0. \tag{2.384}$$

Considere:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} = P^T > 0.$$

Então, substituindo a matriz P definida acima e as matrizes A, B e C dadas em (2.350) em (2.383), tem-se:

$$P_{12}^T = P_{22} C_c^{-1} F C_p, \tag{2.385}$$

$$B_c^T P_{22} = F_o C_c. \tag{2.386}$$

Portanto, de (2.386), segue a equação (2.381). Além disso, substituindo (2.385) em (2.384), obtém-se a LMI (2.376).

Defina $R = P_{22} B_c K_o$. Então, com as matrizes A, B e C dadas em (2.350), e P dada em (2.376), obtém-se a LMI (2.375). A matriz de realimentação da saída K_o é obtida através da equação (2.380). □

2.7.2 Taxa de Decaimento com Compensador de Ordem m e Realimentação da Saída

Considere o sistema de malha aberta na Fig. 5, com um compensador $G_c(s)$, de ordem m, e uma matriz constante F em série com a saída. Considerando a representação da planta $G_p(s)$ em espaço de estados, dada por $\{A_p, B_p, C_p\}$, uma parte do sistema da Fig. 5 pode ser representada na forma (2.347) e a representação do compensador $G_c(s)$ é dada

por (2.348).

Teorema 31 *Existe um compensador $G_c(s)$ de ordem m e uma matriz de realimentação da saída K_o tais que todos os pólos do sistema da Fig. 5 apresentam parte real menor que $-\gamma$, $\gamma > 0$, e este sistema seja ERP se e somente se existe uma matriz F tal que todos os autovalores da matriz $(A_p - B_pFC_p)$ possuam parte real menor que $-\gamma$.*

Prova A prova deste teorema é baseada no Teorema 4 e nas Observações 22 e 23. □

Considere, agora, o sistema de malha fechada na Fig. 7, com a matriz F em série com a saída da planta, de modo que todos os autovalores de $(A_p - B_pFC_p)$ possuam partes reais menores que $-\gamma$.

Teorema 32 *Considere $z_i = \sigma_i + \mathrm{j}\,\beta_i$, σ_i e $\beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, p$, os autovalores de $(A_p - B_pFC_p)$. Então, dada uma constante positiva γ, existem matrizes K_o e $P_{11} = P_{11}^T$, tais que:*

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix} < -2\gamma \begin{bmatrix} P_{11} & C_p^T F^T B_c^{-1} \\ (B_c^T)^{-1} F C_p & (B_c^T)^{-1} C_c \end{bmatrix}, \tag{2.387}$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & C_p^T F^T B_c^{-1} \\ (B_c^T)^{-1} F C_p & (B_c^T)^{-1} C_c \end{bmatrix} > 0, \tag{2.388}$$

sendo:

$$Q_{11} = P_{11}A_p + A_p^T P_{11} - C_p^T F^T K_o F C_p - C_p^T F^T K_o^T F C_p, \tag{2.389}$$

$$Q_{12} = P_{11}B_pC_c + C_p^T F^T B_c^{-1} A_c - C_p^T F^T K_o C_c + A_p^T C_p^T F^T B_c^{-1} - C_p^T F^T K_o^T C_c, \tag{2.390}$$

$$Q_{22} = (B_c^T)^{-1} F C_p B_p C_c + C_c^T B_p^T C_p^T F^T B_c^{-1} + (B_c^T)^{-1} C_c A_c + A_c^T C_c^T B_c^{-1} - C_c^T K_o C_c - C_c^T K_o^T C_c, \tag{2.391}$$

se e somente se $\gamma < \sigma$, sendo $\sigma = max\{\sigma_1, \ldots, \sigma_p\}$.

Prova A prova deste teorema é similar à prova do Teorema 29. □

Considere, agora, o sistema de malha fechada na Fig. 8, com a matriz F em série com a saída da planta, de modo que todos os autovalores de $(A_p - B_pFC_p)$ possuam partes reais menores que $-\gamma$, e outra matriz F_o em série com a saída do sistema.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

Teorema 33 *Considere* $z_i = \sigma_i + \mathrm{j}\,\beta_i$, σ_i *e* $\beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, p$, *os autovalores de* $(A_p - B_p F C_p)$. *Então, dada uma constante positiva* γ, *existem matrizes* K_o, F_o, $P_{11} = P_{11}^T$, $P_{22} = P_{22}^T$ *e* R *tais que:*

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix} < -2\gamma \begin{bmatrix} P_{11} & C_p^T F^T (C_c^{-1})^T P_{22} \\ P_{22} C_c^{-1} F C_p & P_{22} \end{bmatrix}, \tag{2.392}$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & C_p^T F^T (C_c^{-1})^T P_{22} \\ P_{22} C_c^{-1} F C_p & P_{22} \end{bmatrix} > 0, \tag{2.393}$$

sendo:

$$Q_{11} = P_{11} A_p + A_p^T P_{11} - C_p^T F^T (C_c^{-1})^T R F C_p - C_p^T F^T R^T C_c^{-1} F C_p, \tag{2.394}$$

$$Q_{12} = P_{11} B_p C_c + C_p^T F^T (C_c^{-1})^T P_{22} A_c - C_p^T F^T (C_c^{-1})^T R C_c + A_p^T C_p^T F^T (C_c^{-1})^T P_{22} - C_p^T F^T R^T, \tag{2.395}$$

$$Q_{22} = P_{22} C_c^{-1} F C_p B_p C_c + C_c^T B_p^T C_p^T F^T (C_c^{-1})^T P_{22} + P_{22} A_c + A_c^T P_{22} - R C_c - C_c^T R^T, \tag{2.396}$$

se e somente se $\gamma < \sigma$, *sendo* $\sigma = max\{\sigma_1, \ldots, \sigma_p\}$. *Quando as LMIs (2.392) e (2.393) são satisfeitas, as matrizes* K_o *e* F_o *podem ser obtidas por:*

$$K_o = B_c^{-1} P_{22}^{-1} R, \tag{2.397}$$

$$F_o = B_c^T P_{22} C_c^{-1}. \tag{2.398}$$

Prova A prova deste teorema é similar à prova do Teorema 30. □

2.7.3 Compensadores Dinâmicos de Ordem m para Sistemas Incertos

Considere o sistema de malha aberta na Fig. 5, com um compensador $G_c(s)$, de ordem m e uma matriz constante F em série com a saída.

Considerando a representação da planta $G_p(s)$ em espaço de estados, dada por $\{A_p(\alpha), B_p, C_p(\alpha)\}$, uma parte do sistema da Fig. 5 pode ser representada na forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= A_p(\alpha) x_p + B_p u, \\ y_o &= F C_p(\alpha) x_p + I_m u, \end{aligned} \tag{2.399}$$

sendo $x_p \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y_o \in \mathbb{R}^m$, $A_p(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_p \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C_p(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times n}$, posto$(B_p) =$

m e posto$(C_p(\alpha)) = p$, para todo α admissível.

Na Fig. 5, o compensador $G_c(s)$ apresenta a seguinte representação em espaço de estados:

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c w, \\ u &= C_c x_c, \end{aligned} \tag{2.400}$$

sendo $x_c \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $w \in \mathbb{R}^m$,$u \in \mathbb{R}^m$, $A_c \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $B_c \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $C_c \in \mathbb{R}^{m\times m}$, posto$(B_c) = m$ e posto$(C_c) = m$.

Observação 24 *Considere* $G_c(s) = C_c(sI_m - A_c)^{-1}B_c = N_c(s)(D_c(s))^{-1}$, *sendo* $D_c(s) = (s-a)I_m$ *e* $N_c(s) = N_c$. *A representação do compensador em espaço de estados é dada em (2.348), cujas matrizes* A_c, B_c *e* C_c *podem ser definidas por:*

$$A_c = aI_m, \;\; B_c = I_m, \;\; C_c = N_c. \tag{2.401}$$

Então, a representação em espaço de estados do sistema de malha aberta na Fig. 5, com a planta $G_p(s)$ representada por (2.399) e o compensador $G_c(s)$ representado por (2.400), é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\alpha)x + Bw, \\ y_o &= C(\alpha)x, \end{aligned}$$

sendo:

$$x = \begin{bmatrix} x_p \\ x_c \end{bmatrix}, \; A(\alpha) = \begin{bmatrix} A_p(\alpha) & B_pC_c \\ 0 & A_c \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_c \end{bmatrix}, \; C(\alpha) = \begin{bmatrix} FC_p(\alpha) & C_c \end{bmatrix}. \tag{2.402}$$

Observação 25 *Note que o sistema da Fig. 5 tem o mesmo número de entradas e saídas.*

Observação 26 *O produto* $(C(\alpha)B)$ *é dado por:*

$$C(\alpha)B = \begin{bmatrix} FC_p(\alpha) & C_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ B_c \end{bmatrix} = C_cB_c.$$

Observação 27 *Os zeros de transmissão de* $\{A(\alpha), B, C(\alpha)\}$ *são os autovalores de* $(A_p(\alpha) - B_pFC_p(\alpha))$*:*

$$\text{posto} \begin{bmatrix} sI - A(\alpha) & B \\ -C(\alpha) & 0 \end{bmatrix} = \text{posto} \begin{bmatrix} sI_n - A_p(\alpha) & -B_pC_c & 0 \\ 0 & sI_m - A_c & B_c \\ -FC_p(\alpha) & -C_c & 0 \end{bmatrix}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

$$= \text{posto}\left(\begin{bmatrix} I_n & 0 & -B_p \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} sI_n - A_p(\alpha) & -B_pC_c & 0 \\ 0 & sI_m - A_c & B_c \\ -FC_p(\alpha) & -C_c & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \text{posto}\begin{bmatrix} sI_n - A_p(\alpha) + B_pFC_p(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & sI_m - A_c & B_c \\ -FC_p(\alpha) & -C_c & 0 \end{bmatrix} < n + 2m.$$

Como as matrizes B_c e C_c têm posto completo, suas linhas são linearmente independentes. Então, segue que:

$$\text{posto}\begin{bmatrix} sI - A(\alpha) & B \\ -C(\alpha) & 0 \end{bmatrix} < n + 2m \iff \text{posto}\left(sI_n - A_p(\alpha) + B_pFC_p(\alpha)\right) < n$$

$$\iff \det\left(sI_n - A_p(\alpha) + B_pFC_p(\alpha)\right) = 0.$$

Teorema 34 *Existe um compensador $G_c(s)$, de ordem m, e uma matriz de realimentação da saída K_o que torna o sistema da Fig. 5 ERP se e somente se existe uma matriz F tal que a matriz $(A_p(\alpha) - B_pFC_p(\alpha))$ seja Hurwitz, isto é, o sistema da Fig. 6 é estável, para todo α admissível.*

Prova A prova deste teorema é baseada no Teorema 4 e nas Observações 26 e 27. □

2.7.3.1 Sistema ERP com Compensador de Ordem m e Realimentação da Saída para Sistemas Incertos

Considere, agora, o sistema de malha fechada na Fig. 7, com a matriz F em série com a saída da planta, de modo que $(A_p(\alpha) - B_pFC_p(\alpha))$ seja Hurwitz, para todo α admissível.

Teorema 35 *Existe uma matriz K_o tal que o sistema na Fig. 7 seja ERP se e somente se existirem matrizes $P_{11}(\alpha) = P_{11}(\alpha)^T$ e K_o que satisfazem às seguintes LMIs:*

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix} < 0, \tag{2.403}$$

$$P(\alpha) = \begin{bmatrix} P_{11}(\alpha) & C_p(\alpha)^T F^T B_c^{-1} \\ (B_c^T)^{-1} FC_p(\alpha) & (B_c^T)^{-1} C_c \end{bmatrix} > 0, \tag{2.404}$$

sendo:

$$Q_{11} = P_{11}(\alpha)A_p(\alpha) + A_p(\alpha)^T P_{11}(\alpha) - C_p(\alpha)^T F^T K_o FC_p(\alpha) -$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

$$C_p(\alpha)^T F^T K_o^T F C_p(\alpha), \tag{2.405}$$

$$Q_{12} = P_{11}(\alpha) B_p C_c + C_p(\alpha)^T F^T B_c^{-1} A_c - C_p(\alpha)^T F^T K_o C_c + A_p(\alpha)^T C_p(\alpha)^T F^T B_c^{-1} - C_p(\alpha)^T F^T K_o^T C_c, \tag{2.406}$$

$$Q_{22} = (B_c^T)^{-1} F C_p(\alpha) B_p C_c + C_c^T B_p^T C_p(\alpha)^T F^T B_c^{-1} + (B_c^T)^{-1} C_c A_c + A_c^T C_c^T B_c^{-1} - C_c^T K_o C_c - C_c^T K_o^T C_c. \tag{2.407}$$

Prova De acordo com o Lema 1, o sistema mostrado na Fig. 7, com entrada $R(s)$ e saída $Y_o(s)$ é ERP se e somente se existirem matrizes $P(\alpha) = P(\alpha)^T$ e K_o, tais que:

$$P(\alpha)(A(\alpha) - BK_oC(\alpha)) + (A(\alpha) - BK_oC(\alpha))^T P(\alpha) < 0, \tag{2.408}$$

$$B^T P(\alpha) = C(\alpha), \tag{2.409}$$

$$P(\alpha) > 0. \tag{2.410}$$

Considere:

$$P(\alpha) = \begin{bmatrix} P_{11}(\alpha) & P_{12}(\alpha) \\ P_{12}(\alpha)^T & P_{22}(\alpha) \end{bmatrix} = P(\alpha)^T > 0.$$

Então, substituindo a matriz $P(\alpha)$ definida acima e as matrizes $A(\alpha)$, B e $C(\alpha)$ dadas em (2.350) em (2.409), tem-se:

$$P_{12}(\alpha)^T = (B_c^T)^{-1} F C_p(\alpha), \tag{2.411}$$

$$P_{22}(\alpha) = (B_c^T)^{-1} C_c. \tag{2.412}$$

Portanto, substituindo (2.411) e (2.412) em (2.410), obtém-se a LMI (2.404).

Como $P(\alpha)$ é simétrica e definida positiva, $P_{22}(\alpha)$ também é simétrica e definida positiva, e então:

$$(B_c^T)^{-1} C_c = C_c^T B_c^{-1} > 0. \tag{2.413}$$

A condição (2.413) é satisfeita se e somente se o compensador for escolhido de modo que $C_c B_c = (C_c B_c)^T > 0$. Para B_c e C_c dados em (2.349), esta condição corresponde a $N_c = N_c^T > 0$.

Então, com as matrizes $A(\alpha)$, B e $C(\alpha)$ dadas em (2.402), e $P(\alpha)$ dada em (2.404), de (2.408) e (2.413), obtém-se a LMI (2.403). □

Considere, agora, o sistema de malha fechada na Fig. 8, com a matriz F em série com a saída da planta, de modo que $(A_p(\alpha) - B_p F C_p(\alpha))$ seja Hurwitz, para todo α admissível,



e outra matriz F_o em série com a saída do sistema.

Teorema 36 *Existem matrizes K_o e F_o tais que o sistema na Fig. 8 seja ERP se e somente se existirem matrizes $P_{11}(\alpha) = P_{11}(\alpha)^T$, $P_{22} = P_{22}^T$ e R, que satisfazem às seguintes LMIs:*

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix} < 0, \tag{2.414}$$

$$P(\alpha) = \begin{bmatrix} P_{11}(\alpha) & C_p(\alpha)^T F^T (C_c^{-1})^T P_{22} \\ P_{22} C_c^{-1} F C_p(\alpha) & P_{22} \end{bmatrix} > 0, \tag{2.415}$$

sendo:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= P_{11}(\alpha)A_p(\alpha) + A_p(\alpha)^T P_{11}(\alpha) - C_p(\alpha)^T F^T (C_c^{-1})^T R F C_p(\alpha) - \\ &\quad C_p(\alpha)^T F^T R^T C_c^{-1} F C_p(\alpha), \end{aligned} \tag{2.416}$$

$$\begin{aligned} Q_{12} &= P_{11}(\alpha)B_p C_c + C_p(\alpha)^T F^T (C_c^{-1})^T P_{22} A_c - C_p(\alpha)^T F^T (C_c^{-1})^T R C_c + \\ &\quad A_p(\alpha)^T C_p(\alpha)^T F^T (C_c^{-1})^T P_{22} - C_p(\alpha)^T F^T R^T, \end{aligned} \tag{2.417}$$

$$\begin{aligned} Q_{22} &= P_{22} C_c^{-1} F C_p(\alpha) B_p C_c + C_c^T B_p^T C_p(\alpha)^T F^T (C_c^{-1})^T P_{22} + P_{22} A_c + \\ &\quad A_c^T P_{22} - R C_c - C_c^T R^T. \end{aligned} \tag{2.418}$$

Quando as LMIs (2.414) e (2.415) são satisfeitas, as matrizes K_o e F_o podem ser obtidas por:

$$K_o = B_c^{-1} P_{22}^{-1} R, \tag{2.419}$$

$$F_o = B_c^T P_{22} C_c^{-1}. \tag{2.420}$$

Prova De acordo com o Lema 1, o sistema da Fig. 7, com entrada $R(s)$ e saída $Y_o(s)$ é ERP se e somente se existirem matrizes $P(\alpha) = P(\alpha)^T$ e K_o, tais que:

$$P(\alpha)(A(\alpha) - BK_oC(\alpha)) + (A(\alpha) - BK_oC(\alpha))^T P(\alpha) < 0, \tag{2.421}$$

$$B^T P(\alpha) = F_o C(\alpha), \tag{2.422}$$

$$P(\alpha) > 0. \tag{2.423}$$

Considere:

$$P(\alpha) = \begin{bmatrix} P_{11}(\alpha) & P_{12}(\alpha) \\ P_{12}(\alpha)^T & P_{22} \end{bmatrix} = P(\alpha)^T > 0.$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

Então, substituindo a matriz $P(\alpha)$ definida acima e as matrizes $A(\alpha)$, B e $C(\alpha)$ dadas em (2.402) em (2.422), tem-se:

$$P_{12}(\alpha)^T = P_{22}C_c^{-1}FC_p(\alpha), \tag{2.424}$$

$$B_c^T P_{22} = F_o C_c. \tag{2.425}$$

Portanto, de (2.425), segue a equação (2.420). Além disso, substituindo (2.385) em (2.423), obtém-se a LMI (2.415).

Defina $R = P_{22}B_cK_o$. Então, com as matrizes $A(\alpha)$, B e $C(\alpha)$ dadas em (2.402), e $P(\alpha)$ dada em (2.415), obtém-se a LMI (2.414). A matriz de realimentação da saída K_o é obtida através da equação (2.419). □

2.7.3.2 Taxa de Decaimento com Compensador de Ordem m e Realimentação da Saída para Sistemas Incertos

Considere o sistema de malha aberta na Fig. 5, com um compensador $G_c(s)$, de ordem m, e uma matriz constante F em série com a saída. Considerando a representação da planta $G_p(s)$ em espaço de estados, dada por $\{A_p(\alpha), B_p, C_p(\alpha)\}$, uma parte do sistema da Fig. 5 pode ser representada na forma (2.399) e a representação do compensador $G_c(s)$ é dada por (2.400).

Teorema 37 *Existe um compensador $G_c(s)$, de ordem m, e uma matriz de realimentação da saída K_o tais que todos os pólos do sistema da Fig. 5 apresentam parte real menor que $-\gamma$, $\gamma > 0$, e este sistema seja ERP se e somente se existe uma matriz F tal que todos os autovalores da matriz $(A_p(\alpha) - B_pFC_p(\alpha))$ possuam parte real menor que $-\gamma$.*

Prova A prova deste teorema é baseada no Teorema 4 e nas Observações 26 e 27. □

Considere, agora, o sistema de malha fechada na Fig. 7, com a matriz F em série com a saída da planta, de modo que todos os autovalores de $(A_p(\alpha) - B_pFC_p(\alpha))$ possuam partes reais menores que $-\gamma$.

Teorema 38 *Considere $z_i = \sigma_i + \mathrm{j}\,\beta_i$, σ_i e $\beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, p$, os autovalores de $(A_p(\alpha) - B_pFC_p(\alpha))$. Então, dada uma constante positiva γ, existem matrizes K_o e $P_{11}(\alpha) = P_{11}(\alpha)^T$, tais que:*

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix} < -2\gamma \begin{bmatrix} P_{11}(\alpha) & C_p(\alpha)^T F^T B_c^{-1} \\ (B_c^T)^{-1} FC_p(\alpha) & (B_c^T)^{-1} C_c \end{bmatrix}, \tag{2.426}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

$$P(\alpha) = \begin{bmatrix} P_{11}(\alpha) & C_p(\alpha)^T F^T B_c^{-1} \\ (B_c^T)^{-1} F C_p(\alpha) & (B_c^T)^{-1} C_c \end{bmatrix} > 0, \tag{2.427}$$

sendo:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= P_{11}(\alpha)A_p(\alpha) + A_p(\alpha)^T P_{11}(\alpha) - C_p(\alpha)^T F^T K_o F C_p(\alpha) - \\ &\quad C_p(\alpha)^T F^T K_o^T F C_p(\alpha), \qquad (2.428) \\ Q_{12} &= P_{11}(\alpha)B_p C_c + C_p(\alpha)^T F^T B_c^{-1} A_c - C_p(\alpha)^T F^T K_o C_c + \\ &\quad A_p(\alpha)^T C_p(\alpha)^T F^T B_c^{-1} - C_p(\alpha)^T F^T K_o^T C_c, \qquad (2.429) \\ Q_{22} &= (B_c^T)^{-1} F C_p(\alpha) B_p C_c + C_c^T B_p^T C_p(\alpha)^T F^T B_c^{-1} + (B_c^T)^{-1} C_c A_c + \\ &\quad A_c^T C_c^T B_c^{-1} - C_c^T K_o C_c - C_c^T K_o^T C_c, \qquad (2.430) \end{aligned}$$

se e somente se $\gamma < \sigma$, *sendo* $\sigma = max\{\sigma_1, \ldots, \sigma_p\}$.

Prova A prova deste teorema é similar à prova do Teorema 35. □

Considere, agora, o sistema de malha fechada na Fig. 8, com a matriz F em série com a saída da planta, de modo que todos os autovalores de $(A_p(\alpha) - B_p F C_p(\alpha))$ possuam partes reais menores que $-\gamma$, e outra matriz F_o em série com a saída do sistema.

Teorema 39 *Considere* $z_i = \sigma_i + \mathrm{j}\,\beta_i$, σ_i *e* $\beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, p$, *os autovalores de* $(A_p(\alpha) - B_p F C_p(\alpha))$. *Então, dada uma constante positiva* γ, *existem matrizes* K_o, F_o, $P_{11}(\alpha) = P_{11}(\alpha)^T$, $P_{22} = P_{22}^T$ *e* R *tais que:*

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix} < -2\gamma \begin{bmatrix} P_{11}(\alpha) & C_p(\alpha)^T F^T (C_c^{-1})^T P_{22} \\ P_{22} C_c^{-1} F C_p(\alpha) & P_{22} \end{bmatrix}, \tag{2.431}$$

$$P(\alpha) = \begin{bmatrix} P_{11}(\alpha) & C_p(\alpha)^T F^T (C_c^{-1})^T P_{22} \\ P_{22} C_c^{-1} F C_p(\alpha) & P_{22} \end{bmatrix} > 0, \tag{2.432}$$

sendo:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= P_{11}(\alpha)A_p(\alpha) + A_p(\alpha)^T P_{11}(\alpha) - C_p(\alpha)^T F^T (C_c^{-1})^T R F C_p(\alpha) - \\ &\quad C_p(\alpha)^T F^T R^T C_c^{-1} F C_p(\alpha), \qquad (2.433) \\ Q_{12} &= P_{11}(\alpha)B_p C_c + C_p(\alpha)^T F^T (C_c^{-1})^T P_{22} A_c - C_p(\alpha)^T F^T (C_c^{-1})^T R C_c + \\ &\quad A_p(\alpha)^T C_p(\alpha)^T F^T (C_c^{-1})^T P_{22} - C_p(\alpha)^T F^T R^T, \qquad (2.434) \\ Q_{22} &= P_{22} C_c^{-1} F C_p(\alpha) B_p C_c + C_c^T B_p^T C_p(\alpha)^T F^T (C_c^{-1})^T P_{22} + P_{22} A_c + \\ &\quad A_c^T P_{22} - R C_c - C_c^T R^T, \qquad (2.435) \end{aligned}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

se e somente se $\gamma < \sigma$, *sendo* $\sigma = max\{\sigma_1, \ldots, \sigma_p\}$. *Quando as LMIs (2.431) e (2.432) são satisfeitas, as matrizes* K_o *e* F_o *podem ser obtidas por:*

$$K_o = B_c^{-1} P_{22}^{-1} R, \tag{2.436}$$

$$F_o = B_c^T P_{22} C_c^{-1}. \tag{2.437}$$

Prova A prova deste teorema é similar à prova do Teorema 36. □

2.8 Conclusões Parciais do Capítulo

Neste capítulo, inicialmente, foram apresentadas as definições de sistemas ERP e os resultados disponíveis na literatura. Para plantas sem incertezas e com o mesmo número de entradas e saídas, foram discutidos os resultados sobre o problema de sistemas ERP com controladores estáticos e acesso somente às saídas da planta, formulado no Problema 2 e solucionado em [13, 21].

Em [12], foi estudado o Problema 3, que é uma extensão do Problema 2 para sistemas com incertezas politópicas, para plantas com o mesmo número de entradas e saídas. Adicionalmente, foram obtidas duas condições suficientes, duais, para o sistema da Fig. 3, cujas plantas possuem o número de saídas maior que o número de entradas, que atendem à condição $B^T = (CB)^T C$, e os resultados foram relacionados com os zeros de transmissão da planta.

Nesta tese, foram obtidas novas condições suficientes para a solução dos Problemas 2 e 3, para os sistemas das Figs. 3 e 4, cujas plantas possuem o número de saídas maior que o número de entradas e podem apresentar incertezas paramétricas, sem a restrição $B^T = (CB)^T C$. Embora não tenha sido encontrada a condição necessária e suficiente em termos de LMIs, os resultados obtidos foram um passo importante para a obtenção desta solução. Foram obtidas também novas condições necessárias para a solução dos Problemas 2 e 3, descritas no Algoritmo 1. No Capítulo 6 (Exemplos de Aplicação) são apresentadas várias comparações entre os resultados propostos e os já existentes sobre o assunto.

Ainda neste capítulo, foi proposta a extensão da planta através de compensadores dinâmicos, cuja ordem corresponde ao número de entradas da planta, para plantas que não podem ser tornadas ERP através de compensadores estáticos. Para a planta estendida, foi proposto um método baseado em LMIs para tornar ERP os sistemas das Figs. 7 e 8.



No próximo capítulo, é proposto um método para a determinação da faixa de estabilidade de sistemas com realimentação negativa, utilizando o Critério de Estabilidade de Routh, além de algumas aplicações deste método. Entre essas aplicações, está a determinação da faixa de valores de f_k tal que um sistema $\{A, B, FC\}$, com $F = f_1[\ 1 \quad f_k\ ]$, seja de fase mínima, o que constitui uma condição necessária e suficiente para a existência de matrizes K_o e F_o tais que o sistema $\{A - BK_oC, B, F_oC\}$ seja ERP.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

3 Critério de Estabilidade de Routh: Síntese de Sistemas ERP e Outras Aplicações

3.1 Introdução

No projeto de um sistema de controle linear invariante no tempo utilizando a teoria de controle clássico, o primeiro passo é a escolha do tipo de controlador. Embora os tipos de controladores disponíveis para projetos de sistemas de controle sejam limitados apenas pela imaginação, a prática de engenharia normalmente determina a escolha do controlador mais simples que atende a todas as especificações [43]. Na maioria dos casos, o custo dos sistemas de controle aumenta com sua complexidade. Entre os controladores conhecidos *Lead* [43–50], *Lag* [43–51], *Lead-Lag* [43–49, 52] e Proporcional-Integral-Derivativo (PID) [43–49, 53–61], o mais simples é o controlador Proporcional (P). Agora, a especificação mais importante para um sistema de controle é a estabilidade. Considerando os fatos descritos acima, a estabilidade de sistemas realimentados com controladores P tem sido considerada um tópico essencial em cursos de Engenharia de Controle para a graduação. Em vista deste fato, existem alguns métodos que podem ser usados para o estudo da estabilidade de sistemas realimentados com controladores P na teoria de controle clássico, por exemplo o método do lugar das raízes, o critério de estabilidade de Nyquist e o Critério de Estabilidade de Routh. Acreditamos que na maioria dos cursos de controle para a graduação, o Critério de Estabilidade de Routh é o primeiro a ser ensinado. Este fato pode ser observado em quase todos os livros sobre teoria de controle clássico [43–49], nos quais o Critério de Estabilidade de Routh é introduzido imediatamente após a definição de estabilidade.

O Critério de Estabilidade de Routh pode ser utilizado, por exemplo, para estabilizar um sistema com uma entrada e uma saída (em inglês, *Single Input Single Output*, SISO) com realimentação da saída, através de um ganho escalar k. Utilizando o Critério de

unesp

Estabilidade de Routh, pode-se encontrar a faixa de valores de $k \in \mathbb{R}$ tal que o sistema realimentado seja estável, se existir.

Quando a ordem da planta aumenta, o procedimento para a obtenção da faixa de estabilidade de sistemas realimentados com controladores P utilizando o Critério de Estabilidade de Routh torna-se mais difícil. Note que, para plantas com ordem elevada, que estão mais próximas dos sistemas reais, não é fácil investigar os sinais dos elementos da primeira coluna na tabela de Routh, pois estes elementos possuem a seguinte forma: $a_{i1}(k) = p_{i1}(k)/q_i(k)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, sendo n a ordem da planta, k o ganho do controlador P e $p_{i1}(k)$ e $q_i(k)$ polinômios em relação ao parâmetro k. Com base neste fato, quase todos os livros de engenharia de controle [43–49] restringem este tipo de análise a plantas de ordem reduzida.

Foi implementado um programa em *Matlab* para a determinação desta faixa de estabilidade de sistemas realimentados com controladores P. Este programa é simples de compreender, fácil de utilizar e permite uma solução exata necessária e suficiente para o problema. O método e o programa também permitem a especificação de uma taxa de decaimento no projeto de controladores proporcionais e, adicionalmente, foram estendidos para outros tipos de controladores, como Proporcional-Integral (PI), Proporcional-Derivativo (PD) e PID, que são mais usados em processos industriais. Este programa foi descrito em um artigo, intitulado "Proportional Controllers: Direct Method for Stability Analysis and MATLAB Implementation", que foi submetido ao periódico *IEEE Transactions on Education* [62] e também é descrito no Apêndice C.

Neste capítulo, o Critério de Estabilidade de Routh é utilizado para determinar a faixa de valores de $k \in \mathbb{R}$ tais que todas as raízes de um polinômio característico $d(s, k)$ possuam parte real negativa. Os coeficientes de $d(s, k)$ dependem do parâmetro k. Então, o polinômio característico $d(s, k)$ é dado por:

$$d(s, k) = \sum_{i=0}^{n} d_i(k) s^i.$$

Além disso, $d_i(k)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, são polinômios em k, como descrito abaixo:

$$d_i(k) = \sum_{j=0}^{b_i} d_{ij} k^j,$$

para $i = 0, \ldots, n$, sendo b_i o grau de $d_i(k)$.

O método proposto neste capítulo, assim como o programa implementado em *Matlab*,

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

é útil para a obtenção de condições necessárias e suficientes para os seguintes problemas, considerando plantas lineares invariantes no tempo:

(i) Estabilidade de sistemas com realimentação estática da saída através da lei de controle $u(t) = -ky(t)$, com $k \in \mathbb{R}$ e sendo $y \in \mathbb{R}^m$ a saída da planta;

(ii) Obtenção de sistemas de fase mínima com uma matriz $F \in \mathbb{R}^{1\times 2}$, para plantas com uma entrada e duas saídas, o que constitui uma condição necessária para a obtenção de sistemas ERP;

(iii) Especificação de uma taxa de decaimento para os problemas apresentados em (i) e (ii);

(iv) Estabilidade de sistemas com plantas SISO, realimentados através de controladores dos tipos PI, PD e PID;

(v) A solução dos problemas (i) e (ii), com incertezas politópicas na planta;

(vi) Posicionamento dos pólos de malha fechada em regiões especificadas no plano complexo;

(vii) Análise da estabilidade de sistemas incertos $\dot{x}(t) = (A_o + \alpha\Delta A)x(t)$, sendo A e ΔA matrizes constantes conhecidas e $\alpha \in \mathbb{R}$ um parâmetro constante incerto;

(viii) Estabilidade de sistemas discretos para o problema apresentado em (i).

De acordo com o Teorema 4, existem matrizes F e K_o tais que o sistema $\{A - BK_oC, B, FC\}$ é ERP se e somente existir F tal que $FCB = (FCB)^T > 0$ e $\{A, B, FC\}$ é um sistema de fase mínima. A motivação deste estudo foi a obtenção de uma matriz F que torne o sistema $\{A, B, FC\}$ de fase mínima. Para plantas com uma entrada e duas saídas, o Critério de Estabilidade de Routh fornece condições necessárias e suficientes para a solução deste problema.

3.2 Estabilidade de Sistemas com Dependência Polinomial

Considere um sistema linear invariante no tempo, cujo polinômio característico $d(s, k)$ é dado por:

$$d(s,k) = d_n(k)s^n + d_{(n-1)}(k)s^{n-1} + \ldots + d_1(k)s + d_0(k), \tag{3.1}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

sendo $d_n(k)$, $d_{(n-1)}(k)$, ..., $d_1(k)$ e $d_0(k)$ polinômios em k, como descrito abaixo:

$$d_i(k) = d_{ib_i}k^{b_i} + \ldots + d_{i1}k + d_{i0}, \tag{3.2}$$

para $i = 0, \ldots, n$, sendo b_i o grau do coeficiente $d_i(k)$.

O sistema é estável se e somente se todas as raízes do polinômio característico $d(s,k)$, apresentado em (3.1), tiverem parte real negativa. O Critério de Estabilidade de Routh [48] é uma ferramenta útil para determinar se o sistema é estável.

Através do Critério de Estabilidade de Routh, podem-se obter os valores de k tais que todas as raízes do polinômio característico $d(s,k)$ tenham parte real negativa, caso existam. Considere a Tabela 1.

Tabela 1: Tabela de Routh.

linha n	s^n	$a_{n1}(k) = \frac{p_{n1}(k)}{q_n(k)}$	$a_{n2}(k) = \frac{p_{n2}(k)}{q_n(k)}$	$a_{n3}(k) = \frac{p_{n3}(k)}{q_n(k)}$	$\cdots$
linha $(n-1)$	s^{n-1}	$a_{(n-1)1}(k) = \frac{p_{(n-1)1}(k)}{q_{(n-1)}(k)}$	$a_{(n-1)2}(k) = \frac{p_{(n-1)2}(k)}{q_{(n-1)}(k)}$	$a_{(n-1)3}(k) = \frac{p_{(n-1)3}(k)}{q_{(n-1)}(k)}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
linha 2	s^2	$a_{21}(k) = \frac{p_{21}(k)}{q_2(k)}$	$a_{22}(k) = \frac{p_{22}(k)}{q_2(k)}$		
linha 1	s^1	$a_{11}(k) = \frac{p_{11}(k)}{q_1(k)}$			
linha 0	s^0	$a_{01}(k) = \frac{p_{01}(k)}{q_0(k)}$			

Os termos da linha n são dados por $a_{n1}(k)$, $a_{n2}(k)$, ..., sendo:

$$\begin{aligned} p_{n1}(k) &= d_n(k), \\ p_{n2}(k) &= d_{(n-2)}(k), \\ p_{n3}(k) &= d_{(n-4)}(k), \ \cdots \\ q_n(k) &= 1. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Os termos da linha $(n-1)$ são dados por $a_{(n-1)1}(k)$, $a_{(n-1)2}(k)$, ..., sendo:

$$\begin{aligned} p_{(n-1)1}(k) &= d_{(n-1)}(k), \\ p_{(n-1)2}(k) &= d_{(n-3)}(k), \ \cdots \\ q_{(n-1)}(k) &= 1. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Para determinar estas duas primeiras linhas, seguindo o procedimento acima, considera-se que $d_i(k) = 0$, para $i = -1, -2, -3, \ldots$.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

Os termos da linha j, $j = n-2, \ldots, 1, 0$, são dados por:

$$a_{ji}(k) = \frac{a_{(j+1)1}(k)a_{(j+2)(i+1)}(k) - a_{(j+2)1}(k)a_{(j+1)(i+1)}(k)}{a_{(j+1)1}(k)},$$

$$a_{ji}(k) = \frac{\frac{p_{(j+1)1}(k)}{q_{(j+1)}(k)}\frac{p_{(j+2)(i+1)}(k)}{q_{(j+2)}(k)} - \frac{p_{(j+2)1}(k)}{q_{(j+2)}(k)}\frac{p_{(j+1)(i+1)}(k)}{q_{(j+1)}(k)}}{\frac{p_{(j+1)1}(k)}{q_{(j+1)}(k)}}.$$

Então, $a_{ji}(k) = p_{ji}(k)/q_j(k)$, sendo:

$$p_{ji}(k) = p_{(j+1)1}(k)p_{(j+2)(i+1)}(k) - p_{(j+2)1}(k)p_{(j+1)(i+1)}(k),$$

$$q_j(k) = q_{(j+2)}(k)p_{(j+1)1}(k), \tag{3.5}$$

$$j = n-2, n-1, \ldots, 1, 0, \;\; i = 1, 2, \ldots.$$

Os elementos não-nulos $p_{ji}(k)$ e $q_j(k)$, $j = n, n-1, \ldots, 1, 0$, $i = 1, 2, \ldots$, são polinômios em k.

De acordo com o Critério de Estabilidade de Routh, o número de raízes de $d(s,k)$ com parte real positiva é igual ao número de mudanças de sinal na primeira coluna da tabela de Routh. Então, o polinômio $d(s,k)$ é Hurwitz para um dado valor de $k = k_o$, isto é, todas as raízes de $d(s,k_o)$ têm parte real negativa, se e somente se todos os elementos $a_{j1}(k_o)$, $j = n, n-1, \ldots, 1, 0$, da primeira coluna da tabela de Routh apresentam o mesmo sinal.

Sejam z_{j1}, z_{j2}, $z_{j3}, \ldots, z_{jl_j}$ as raízes reais de $p_{j1}(k)$ e $q_j(k)$, tais que $z_{j1} < z_{j2} < z_{j3} < \ldots < z_{jl_j}$, sendo as raízes repetidas consideradas somente uma vez, e sendo l_j o número de raízes reais distintas de $p_{j1}(k)$ e $q_j(k)$ e $j = n, n-1, \ldots, 1, 0$. Note que o sinal de $a_{j1}(k)$ pode mudar, em função de $k \in \mathbb{R}$, somente nas raízes reais de $p_{j1}(k)$ e $q_j(k)$, para $k = z_{ji}$, $i = 1, 2, \ldots, l_j$. Nos intervalos entre essas raízes, definidos por $z_{ji} < k < z_{j(i+1)}$, para $i = 1, 2, \ldots, l_{j-1}$, $k < z_{j1}$ e $k > z_{jl_j}$, o sinal de $a_{j1}(k)$ é constante.

Analisando todos os elementos na primeira coluna da tabela de Routh, a variação de sinal ocorre somente nas raízes dos termos $p_{j1}(k)$ e $q_j(k)$, $j = n, n-1, \ldots, 1, 0$. Note, em (3.3), (3.4) e (3.5), que $q_n(k)$ e $q_{(n-1)}(k)$ não possuem raízes e que as raízes de $q_j(k)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n-2$, são também raízes de $p_{(n-1)1}(k)$, $p_{(n-2)1}(k), \ldots, p_{11}(k)$. Portanto, é suficiente considerar somente as raízes de $p_{n1}(k)$, $p_{(n-1)1}(k), \ldots, p_{01}(k)$.

Sejam z_1, z_2, $z_3, \ldots, z_l$ as raízes reais de todos os termos $p_{j1}(k)$, $j = n, n-1, \ldots, 1, 0$, tais que $z_1 < z_2 < z_3 < \ldots < z_l$, sendo as raízes repetidas consideradas somente uma vez,



e sendo l o número de raízes reais distintas de todos os termos $p_{j1}(k)$ na primeira coluna da tabela de Routh. Nos intervalos entre essas raízes, os sinais de todos os elementos da primeira coluna são constantes. Então, para analisar a estabilidade do sistema, basta considerar um ponto de cada intervalo, de acordo com a Fig. 9.

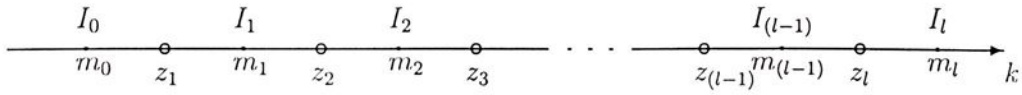


Figura 9: Intervalos entre as raízes reais dos termos da primeira coluna.

Seja $k = m_i$ um ponto qualquer do intervalo I_i. Se todos os termos $a_{j1}(m_i)$, $j = n, n-1, \ldots, 1, 0$, na primeira coluna da tabela de Routh apresentam o mesmo sinal, então todas as raízes de $d(s, m_i)$ apresentam parte real negativa e, então, o sistema é estável para qualquer valor de k no intervalo I_i. Se o sistema é instável para todos os pontos m_i, $i = 1, 2, \ldots, l$, então o sistema é instável para qualquer valor de k e o problema de estabilização de malha fechada não tem solução.

Observação 28 *Uma possível escolha dos pontos m_i é a seguinte:*

$$m_0 = \begin{cases} 2z_1, & \text{se } z_1 < 0, \\ -1, & \text{se } z_1 \geq 0, \end{cases}$$

$$m_i = \frac{z_i + z_{i+1}}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots, l-1,$$

$$m_l = \begin{cases} 2z_l, & \text{se } z_l > 0, \\ 1, & \text{se } z_l \leq 0. \end{cases}$$

3.3 Estabilidade de Sistemas com Realimentação Estática da Saída

3.3.1 Plantas SISO

Considere uma planta SISO, controlável e observável, $G_{ol}(s)$, dada por:

$$G_{ol}(s) = \frac{n(s)}{d(s)}, \tag{3.6}$$

sendo:

$$n(s) = n_n s^n + n_{(n-1)} s^{n-1} + \ldots + n_1 s + n_0, \tag{3.7}$$

$$d(s) = d_n s^n + d_{(n-1)} s^{n-1} + \ldots + d_1 s + d_0 \tag{3.8}$$

unesp

e $d_n \neq 0$.

É proposto o seguinte problema: determine a faixa de valores de $k \in \mathbb{R}$, se existirem, tais que o sistema realimentado da Fig. 10 é estável, utilizando o Critério de Estabilidade de Routh.

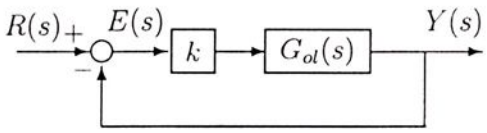


Figura 10: Sistema SISO realimentado com controlador proporcional.

A função de transferência do sistema de malha fechada $G_{cl}(s)$ é dada por:

$$G_{cl}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{kG_{ol}(s)}{1 + kG_{ol}(s)} = \frac{kn(s)}{d(s) + kn(s)}. \tag{3.9}$$

Os pólos do sistema são as raízes do polinômio característico $d(s,k) = d(s) + kn(s)$. Substituindo (3.7) e (3.8) em (3.9), o polinômio característico é dado por:

$$d(s,k) = (d_n + kn_n)s^n + (d_{(n-1)} + kn_{(n-1)})s^{n-1} + \ldots + (d_1 + kn_1)s + (d_0 + kn_0). \tag{3.10}$$

Através do Critério de Estabilidade de Routh, podem-se obter os valores de k tais que todas as raízes do polinômio característico $d(s,k)$ tenham parte real negativa, caso existam. Considere a tabela de Routh na Tabela 1.

Os termos da linha n são dados por $a_{n1}(k)$, $a_{n2}(k), \ldots$, sendo:

$$p_{n1}(k) = d_n + kn_n,$$

$$p_{n2}(k) = d_{(n-2)} + k_{(n-2)},$$

$$p_{n3}(k) = d_{(n-4)} + k_{(n-4)}, \ \cdots$$

$$q_n(k) = 1.$$

Os termos da linha $(n-1)$ são dados por $a_{(n-1)1}(k)$, $a_{(n-1)2}(k), \ldots$, sendo:

$$p_{(n-1)1}(k) = d_{(n-1)} + k_{(n-1)},$$

$$p_{(n-1)2}(k) = d_{(n-3)} + k_{(n-3)}, \ \cdots$$

$$q_{(n-1)}(k) = 1.$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

Os termos da linha j, $j = n-2, \ldots, 1, 0$, são determinados a partir dos termos das linhas anteriores, como discutido na Seção 3.2.

3.3.2 Plantas MIMO

Considere, agora, o sistema na Fig. 11, cuja planta, controlável e observável, possui múltiplas entradas e múltiplas saídas (em inglês, *Multiple Input Multiple Output*, MIMO) e é representada por $G_{ol}(s) = D(s)^{-1}N(s)$, sendo $N(s) \in \mathbb{R}^{m\times m}(s)$ e $D(s) \in \mathbb{R}^{m\times m}(s)$ matrizes polinomiais coprimas à esquerda [63].

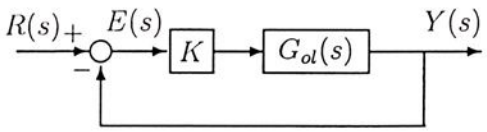


Figura 11: Sistema MIMO realimentado com controlador proporcional.

A saída da planta é dada por:

$$Y(s) = G_{ol}(s)KE(s) = D(s)^{-1}N(s)KE(s),$$

$$Y(s) = D(s)^{-1}N(s)K\Big[R(s) - Y(s)\Big],$$

$$\Big[I + D(s)^{-1}N(s)K\Big]Y(s) = D(s)^{-1}N(s)KR(s),$$

$$\Big[D(s) + N(s)K\Big]Y(s) = N(s)KR(s),$$

$$Y(s) = \Big[D(s) + N(s)K\Big]^{-1}N(s)KR(s) = G_{cl}(s)R(s),$$

sendo:

$$G_{cl}(s) = \Big[D(s) + N(s)K\Big]^{-1}N(s)K.$$

Sejam:

$$N(s) = \begin{bmatrix} n_{11}(s) & \cdots & n_{1m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{m1}(s) & \cdots & n_{mm}(s) \end{bmatrix},$$

$$D(s) = \begin{bmatrix} d_{11}(s) & \cdots & d_{1m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1}(s) & \cdots & d_{mm}(s) \end{bmatrix}$$

e $K = kI$, sendo $I \in \mathbb{R}^{m\times m}$ a matriz identidade. Então, os pólos do sistema de malha

fechada são os valores de $s \in \mathbb{C}$ tais que:

$$d(s,k) = \det\Big[D(s) + kN(s)\Big] = 0.$$

O polinômio característico $d(s,k)$ é calculado através do método apresentado no Lema 10, dado em [64]:

Lema 10 *[64] Considere a matriz $M(\delta, s)$, dada por $M(\delta, s) = \delta_1 M_1(s) + \delta_2 M_2(s)$, sendo $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = k$,*

$$M_1(s) = D(s) = \begin{bmatrix} a_{11}(s) \\ a_{12}(s) \\ \vdots \\ a_{1m}(s) \end{bmatrix} \text{ e } M_2(s) = N(s) = \begin{bmatrix} a_{21}(s) \\ a_{22}(s) \\ \vdots \\ a_{2m}(s) \end{bmatrix}.$$

O determinante de $M(\delta, s)$ pode ser determinado por:

$$\det(M(\delta,s)) = \sum_{s_1=1}^{2} \cdots \sum_{s_m=1}^{2} \delta_{s_1} \cdots \delta_{s_m} \begin{vmatrix} a_{s_1 1}(s) \\ a_{s_2 2}(s) \\ \vdots \\ a_{s_m m}(s) \end{vmatrix}, \tag{3.11}$$

sendo que $|\cdot|$ indica o determinante de uma matriz, isto é:

$$\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} = \det\left(\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}\right).$$

Então, o polinômio característico $d(s,k)$ é dado por:

$$d(s,k) = r_0(s) + r_1(s)k + r_2(s)k^2 + \ldots + r_{(m-1)}(s)k^{m-1} + r_m(s)k^m, \tag{3.12}$$

sendo:

$$r_0(s) = \begin{vmatrix} d_{11}(s) & \cdots & d_{1m}(s) \\ d_{21}(s) & \cdots & d_{2m}(s) \\ d_{31}(s) & \cdots & d_{3m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1}(s) & \cdots & d_{mm}(s) \end{vmatrix} = \det(D(s)),$$

$$r_1(s) = \begin{vmatrix} d_{11}(s) & \cdots & d_{1m}(s) \\ d_{21}(s) & \cdots & d_{2m}(s) \\ d_{31}(s) & \cdots & d_{3m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{m1}(s) & \cdots & n_{mm}(s) \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} d_{11}(s) & \cdots & d_{1m}(s) \\ d_{21}(s) & \cdots & d_{2m}(s) \\ n_{31}(s) & \cdots & n_{3m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1}(s) & \cdots & d_{mm}(s) \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} d_{11}(s) & \cdots & d_{1m}(s) \\ n_{21}(s) & \cdots & n_{2m}(s) \\ d_{31}(s) & \cdots & d_{3m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1}(s) & \cdots & d_{mm}(s) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n_{11}(s) & \cdots & n_{1m}(s) \\ d_{21}(s) & \cdots & d_{2m}(s) \\ d_{31}(s) & \cdots & d_{3m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1}(s) & \cdots & d_{mm}(s) \end{vmatrix},$$

$$r_2(s) = \begin{vmatrix} d_{11}(s) & \cdots & d_{1m}(s) \\ d_{21}(s) & \cdots & d_{2m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{(m-1)1}(s) & \cdots & n_{(m-1)m}(s) \\ n_{m1}(s) & \cdots & n_{mm}(s) \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} d_{11}(s) & \cdots & d_{1m}(s) \\ n_{21}(s) & \cdots & n_{2m}(s) \\ n_{31}(s) & \cdots & n_{3m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1}(s) & \cdots & d_{mm}(s) \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} n_{11}(s) & \cdots & n_{1m}(s) \\ d_{21}(s) & \cdots & d_{2m}(s) \\ n_{31}(s) & \cdots & n_{3m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1}(s) & \cdots & d_{mm}(s) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n_{11}(s) & \cdots & n_{1m}(s) \\ n_{21}(s) & \cdots & n_{2m}(s) \\ d_{31}(s) & \cdots & d_{3m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1}(s) & \cdots & d_{mm}(s) \end{vmatrix}, \cdots$$

$$r_{(m-1)}(s) = \begin{vmatrix} d_{11}(s) & \cdots & d_{1m}(s) \\ n_{21}(s) & \cdots & n_{2m}(s) \\ n_{31}(s) & \cdots & n_{3m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{m1}(s) & \cdots & n_{mm}(s) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n_{11}(s) & \cdots & n_{1m}(s) \\ d_{21}(s) & \cdots & d_{2m}(s) \\ n_{31}(s) & \cdots & n_{3m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{m1}(s) & \cdots & n_{mm}(s) \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} n_{11}(s) & \cdots & n_{1m}(s) \\ n_{21}(s) & \cdots & n_{2m}(s) \\ d_{31}(s) & \cdots & d_{3m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{m1}(s) & \cdots & n_{mm}(s) \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} n_{11}(s) & \cdots & n_{1m}(s) \\ n_{21}(s) & \cdots & n_{2m}(s) \\ n_{31}(s) & \cdots & n_{3m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1}(s) & \cdots & d_{mm}(s) \end{vmatrix},$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

$$r_m(s) = \begin{vmatrix} n_{11}(s) & \cdots & n_{1m}(s) \\ n_{21}(s) & \cdots & n_{2m}(s) \\ n_{31}(s) & \cdots & n_{3m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{m1}(s) & \cdots & n_{mm}(s) \end{vmatrix} = \det(N(s)).$$

Os determinantes das matrizes acima são calculados através do método apresentado no Lema 11, também dado em [64]:

Lema 11 *[64] Considere a seguinte matriz $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$:*

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= m_{11}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \ldots + m_{nn}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

e defina:

$$h_{s_i} = \begin{bmatrix} h_{s_i,1}\cdots h_{s_i,i-1} & h_{s_i,i} & h_{s_i,i+1}\cdots h_{s_i,n} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0\cdots 0 & 1 & 0\cdots 0 \end{bmatrix},\ i = 1,\ldots,n.$$

Então, o determinante de M pode ser descrito por:

$$|M| = \sum_{s_1=1}^{n} \sum_{\substack{s_2=1 \\ s_2\neq s_1}}^{n} \cdots \sum_{\substack{s_n=1 \\ s_n\neq s_1,\ldots,s_{n-1}}}^{n} m_{1,s_1}\cdots m_{n,s_n} \begin{vmatrix} h_{s_1} \\ \vdots \\ h_{s_n} \end{vmatrix}. \tag{3.13}$$

A faixa de valores de k tais que os sistema é estável pode ser determinada pelo Critério de Estabilidade de Routh, com o método proposto, como discutido na Seção 3.2. Inicialmente, o polinômio característico $d(s,k)$ é redefinido em função de s:

$$\begin{aligned} d(s,k) &= r_0(s) + r_1(s)k + r_2(s)k^2 + \ldots + r_{(m-1)}(s)k^{m-1} + r_m(s)k^m \\ &= d_\nu(k)s^\nu + d_{(\nu-1)}(k)s^{\nu-1} + \ldots + d_1(k)s + d_0(k), \end{aligned} \tag{3.14}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

sendo ν o grau de $d(s,k)$, em função de s, e os coeficientes $d_i(k)$, $i = 0, 1, \ldots, \nu$ polinômios em k.

Através do Critério de Estabilidade de Routh, podem-se obter os valores de k tais que todas as raízes do polinômio característico $d(s,k)$ tenham parte real negativa, caso existam. Considere a tabela de Routh na Tabela 1.

Os termos da linha n são dados por $a_{n1}(k)$, $a_{n2}(k), \ldots$, sendo:

$$p_{n1}(k) = d_\nu(k),$$

$$p_{n2}(k) = d_{(\nu-2)}(k),$$

$$p_{n3}(k) = d_{(\nu-4)}(k), \ \cdots$$

$$q_n(k) = 1.$$

Os termos da linha $(n-1)$ são dados por $a_{(n-1)1}(k)$, $a_{(n-1)2}(k), \ldots$, sendo:

$$p_{(n-1)1}(k) = d_{(\nu-1)}(k),$$

$$p_{(n-1)2}(k) = d_{(\nu-3)}(k), \ \cdots$$

$$q_{(n-1)}(k) = 1.$$

Os termos da linha j, $j = n-2, \ldots, 1, 0$, são determinados a partir dos termos das linhas anteriores, como discutido na Seção 3.2.

3.4 Aplicação do Critério de Estabilidade de Routh na Síntese de Sistemas de Fase Mínima

Considere uma planta $\{A, B, C\}$, controlável e observável, com uma entrada e duas saídas, cuja matriz de transferência é dada por:

$$G_{ol}(s) = C(sI - A)^{-1}B = N(s)D(s)^{-1}, \tag{3.15}$$

sendo $N(s)$ e $D(s)$ matrizes polinomiais coprimas à direita, $D(s) = d(s)I$ e:

$$N(s) = \begin{bmatrix} n_1(s) \\ n_2(s) \end{bmatrix},$$

com:

$$n_1(s) = n_{1(n-1)}s^{n-1} + \ldots + n_{11}s + n_{10},$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

$$n_2(s) = n_{2(n-1)}s^{n-1} + \ldots + n_{21}s + n_{20},$$

$$d(s) = d_n s^n + d_{(n-1)}s^{n-1} + \ldots + d_1 s + d_0$$

e $d_n \neq 0$.

De acordo com o Teorema 4, existem matrizes F e K_o tais que o sistema $\{A - BK_oC, B, FC\}$ é ERP se e somente se existir F tal que $FCB = (FCB)^T > 0$ e $\{A, B, FC\}$ for um sistema de fase mínima, isto é, os zeros de transmissão de $\{A, B, FC\}$ apresentam parte real negativa.

Seja $F = [\ f_1 \quad f_2\ ] \in \mathbb{R}^2$. Então, o produto $FG_{ol}(s)$ é dado por:

$$FG_{ol}(s) = FN(s)D(s)^{-1} = \frac{f_1 n_1(s) + f_2 n_2(s)}{d(s)},$$

sendo:

$$\begin{aligned} &f_1 n_1(s) + f_2 n_2(s) = f_1\left(n_{1(n-1)}s^{n-1} + \ldots + n_{11}s + n_{10}\right) + \\ &\ f_2\left(n_{2(n-1)}s^{n-1} + \ldots + n_{21}s + n_{20}\right) \\ &= (f_1 n_{1(n-1)} + f_2 n_{2(n-1)})s^{n-1} + \ldots + (f_1 n_{11} + f_2 n_{21})s + (f_1 n_{10} + f_2 n_{20}). \end{aligned}$$

A condição $FCB = (FCB)^T > 0$ ocorre somente quando o grau relativo de $FG_{ol}(s) = FC(sI - A + BK_oC)^{-1}B$ é igual a 1, isto é, grau$(f_1 n_1(s) + f_2 n_2(s))$ = grau$(d(s)) - 1$. Isto ocorre se e somente se:

$$f_1 n_{1(n-1)} + f_2 n_{2(n-1)} \neq 0.$$

Se $n_{1(n-1)} = n_{2(n-1)} = 0$, o grau relativo do sistema é maior que 1, para qualquer $F \in \mathbb{R}^2$. Então, não existem matrizes F e K que tornam o sistema ERP.

Os zeros da planta $G_{ol}(s)$ são os valores de $s \in \mathbb{C}$ tais que $N(s) = [\ 0 \quad 0\ ]^T$. Sejam $z_{p1}, z_{p2}, \ldots, z_{pk}$ os zeros da planta. Então,

$$n_p(s) = (s - z_{p1})(s - z_{p2}) \cdots (s - z_{pk}),$$

$$n_1(s) = n_p(s)\bar{n}_1(s),$$

$$n_2(s) = n_p(s)\bar{n}_2(s),$$

sendo que $\bar{n}_1(s)$ e $\bar{n}_2(s)$ são polinômios coprimos, isto é, não possuem raízes comuns.

Os zeros do sistema $FG_{ol}(s)$ são as raízes de:

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

$$FN(s) = f_1 n_1(s) + f_2 n_2(s) = f_1 n_p(s)\bar{n}_1(s) + f_2 n_p(s)\bar{n}_2(s)$$

$$FN(s) = n_p(s)[f_1\bar{n}_1(s) + f_2\bar{n}_2(s)].$$

Então, os zeros do sistema $FG_{ol}(s)$ são as raízes de $n_p(s)$ e $[f_1\bar{n}_1(s) + f_2\bar{n}_2(s)]$. Logo, se $n_p(s)$ possui pelo menos uma raiz com parte real não-negativa, não existe uma matriz $F \in \mathbb{R}^2$ tal que o sistema $FG_{ol}(s)$ seja de fase mínima.

Se $f_1 = 0$, então $FN(s) = f_2 n_2(s)$. Neste caso, os zeros do sistema $FG_{ol}(s)$ são as raízes de $n_2(s)$.

Se $f_2 = 0$, então $FN(s) = f_1 n_1(s)$. Neste caso, os zeros do sistema $FG_{ol}(s)$ são as raízes de $n_1(s)$.

Se $f_1 \neq 0$ e $f_2 \neq 0$, então:

$$\begin{aligned} FN(s) &= f_1 n_1(s) + f_2 n_2(s) = f_1 n_p(s)\bar{n}_1(s) + f_2 n_p(s)\bar{n}_2(s) \\ &= f_1 n_p(s)\left[\bar{n}_1(s) + \frac{f_2}{f_1}\bar{n}_2(s)\right] = f_1 n_p(s)[\bar{n}_1(s) + f_k\bar{n}_2(s)], \end{aligned}$$

sendo $f_k = \frac{f_2}{f_1}$.

Se todas as raízes de $n_p(s)$ apresentam parte real negativa, então os valores de f_k tais que o sistema $FG_{ol}(s)$ seja de fase mínima, se existirem, são tais que todas as raízes do polinômio:

$$r(s, f_k) = \bar{n}_1(s) + f_k\bar{n}_2(s) \tag{3.16}$$

apresentam parte real negativa. A faixa de valores de f_k tais que o sistema $FG_{ol}(s)$ é de fase mínima, se existirem, pode ser determinada através do Critério de Estabilidade de Routh, com o método discutido na Seção 3.2.

3.5 Obtenção de um Sistema ERP a Partir de um Sistema de Fase Mínima

De acordo com o Teorema 4, existem matrizes F e K_o tais que o sistema $\{A - BK_oC, B, FC\}$ é ERP se e somente se existir F tal que $FCB = (FCB)^T > 0$ e $\{A, B, FC\}$ for um sistema de fase mínima, isto é, os zeros de transmissão de $\{A, B, FC\}$ apresentam parte real negativa. Na Seção 3.4, foi apresentado um método baseado no Critério de Estabilidade de Routh para determinar a faixa de valores de $f_k \in \mathbb{R}$ tal que o sistema

$FG_{ol}(s)$, com uma planta $G_{ol}(s)$, com uma entrada e duas saídas, dada por (3.15) e $F = f_1[\ 1 \quad f_k\ ] \in \mathbb{R}^2$, seja de fase mínima.

Considere, assim, uma matriz F tal que o sistema $FG_{ol}(s)$ seja de fase mínima. A matriz K_o que torna ERP o sistema $\{A - BK_oC, B, FC\}$ é determinada através do Teorema 14. A solução do problema através de LMIs permite a adição de outras especificações, como taxa de decaimento, restrições na entrada e na saída.

3.6 Aplicação do Critério de Estabilidade de Routh para Especificação da Taxa de Decaimento

Considere um sistema linear invariante no tempo, cujo polinômio característico $d(s,k)$ é dado por (3.1), sendo $d_n(k)$, $d_{(n-1)}(k)$, ..., $d_1(k)$ e $d_0(k)$ polinômios em k, como descrito em (3.2).

Na Seção 3.2, foi apresentado um método para a obtenção da faixa de valores de $k \in \mathbb{R}$ tal que todas as raízes do polinômio $d(s,k)$, possuam parte real negativa, utilizando o Critério de Estabilidade de Routh. Nesta seção, o método é utilizado para determinar a faixa de valores de $k \in \mathbb{R}$ que garante, além da estabilidade, uma taxa de decaimento maior que γ, com $\gamma > 0$.

De acordo com [48], um método útil para examinar a taxa de decaimento é obtido deslocando o eixo imaginário no plano complexo e aplicando o método proposto para o Critério de Estabilidade de Routh. Substituindo s por $\hat{s} - \gamma$ na equação característica $d(s,k)$ e reescrevendo o polinômio em termos de $\hat{s}$, segue que:

$$d(s,k) = d((\hat{s} - \gamma), k) = \hat{d}(\hat{s}, k),$$

sendo:

$$\hat{d}(\hat{s}, k) = d_n(k)(\hat{s} - \gamma)^n + d_{n-1}(k)(\hat{s} - \gamma)^{n-1} + \ldots + d_1(k)(\hat{s} - \gamma) + d_0(k).$$

Então, para encontrar a faixa de valores de $k \in \mathbb{R}$ tal que todas as raízes de $d(s,k)$ apresentam partes reais $\sigma < -\gamma$, aplica-se o Critério de Estabilidade de Routh para o novo polinômio $d(\hat{s}, k)$, de acordo com o método descrito na Seção 3.2.

O número de mudanças de sinal na primeira coluna da tabela de Routh corresponde ao número de raízes de $d(s,k)$ localizadas à direita da reta vertical $\sigma = -\gamma$. Se todos os

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

elementos da primeira coluna apresentarem o mesmo sinal, então todas as raízes de $d(s,k)$ apresentam parte real $\sigma < -\gamma$. Portanto, o Critério de Estabilidade de Routh pode ser utilizado para encontrar a faixa de valores de $k \in \mathbb{R}$ tais que todas as raízes de $d(s,k)$ apresentam partes reais $\sigma < -\gamma$.

3.6.1 Aplicação do Critério de Estabilidade de Routh para o Posicionamento dos Zeros de Transmissão

Considere uma planta $\{A, B, C\}$, controlável e observável, com uma entrada e duas saídas, cuja matriz de transferência é dada por:

$$G_{ol}(s) = C(sI - A)^{-1}B = N(s)D(s)^{-1}, \tag{3.17}$$

sendo $D(s) = d(s)I$ e:

$$N(s) = \begin{bmatrix} n_1(s) \\ n_2(s) \end{bmatrix},$$

com:

$$n_1(s) = n_{1(n-1)}s^{n-1} + \ldots + n_{11}s + n_{10},$$

$$n_2(s) = n_{2(n-1)}s^{n-1} + \ldots + n_{21}s + n_{20},$$

$$d(s) = d_n s^n + d_{(n-1)}s^{n-1} + \ldots + d_1 s + d_0$$

e $d_n \neq 0$.

Seja $F = [\ f_1 \quad f_2\ ] \in \mathbb{R}^2$. Então, o produto $FG_{ol}(s)$ é dado por:

$$FG(s) = FN(s)D(s)^{-1} = \frac{f_1 n_1(s) + f_2 n_2(s)}{d(s)}.$$

Os zeros da planta $G_{ol}(s)$ são os valores de $s \in \mathbb{C}$ tais que $N(s) = [\ 0 \quad 0\ ]^T$. Sejam $z_{p1}, z_{p2}, \ldots, z_{pk}$ os zeros da planta. Então,

$$n_p(s) = (s - z_{p1})(s - z_{p2}) \cdots (s - z_{pk}),$$

$$n_1(s) = n_p(s)\bar{n}_1(s),$$

$$n_2(s) = n_p(s)\bar{n}_2(s),$$

sendo que $\bar{n}_1(s)$ e $\bar{n}_2(s)$ são polinômios coprimos, isto é, não possuem raízes comuns.

Os zeros do sistema $FG_{ol}(s)$ são as raízes de:

BCpIS FEIS - UNESP

$$FN(s) = f_1 n_1(s) + f_2 n_2(s) = f_1 n_p(s)\bar{n}_1(s) + f_2 n_p(s)\bar{n}_2(s) = n_p(s)[f_1\bar{n}_1(s) + f_2\bar{n}_2(s)]$$

$$= f_1 n_p(s)[\bar{n}_1(s) + f_k\bar{n}_2(s)] = f_1 n_p(s) r(s, f_k),$$

sendo $f_k = \frac{f_2}{f_1}$ e

$$r(s, f_k) = \bar{n}_1(s) + f_k\bar{n}_2(s).$$

Na Seção 3.4, foi apresentado um método para a obtenção da faixa de valores de $f_k \in \mathbb{R}$ tal que todos os zeros do sistema $FG_{ol}(s)$ apresentem parte real negativa, utilizando o Critério de Estabilidade de Routh. Nesta seção, o método é utilizado para determinar a faixa de valores de $f_k \in \mathbb{R}$ tal que todos os zeros do sistema $FG_{ol}(s)$ apresentem parte real $\sigma < -\gamma$.

Substituindo s por $\hat{s} - \gamma$ na expressão de $r(s, f_k)$ e reescrevendo o polinômio em termos de $\hat{s}$, segue que:

$$r(s, f_k) = d((\hat{s} - \gamma), f_k) = \hat{r}(\hat{s}, f_k),$$

sendo:

$$\hat{r}(\hat{s}, f_k) = \bar{n}_1(\hat{s} - \gamma) + f_k\bar{n}_2(\hat{s} - \gamma).$$

Então, para encontrar a faixa de valores de $f_k \in \mathbb{R}$ tal que todas as raízes de $r(s, f_k)$ apresentam partes reais $\sigma < -\gamma$, aplica-se o Critério de Estabilidade de Routh para o novo polinômio $d(\hat{s}, k)$, de acordo com o método descrito na Seção 3.4.

3.7 Estabilidade de Sistemas com Controladores PI, PD e PID

A maioria dos sistemas de controle são operados por controladores PID. Dada a grande utilização industrial dos controladores PID, é claro que mesmo um pequeno aperfeiçoamento no projeto de controladores PID pode ter um tremendo impacto mundial [59].

Controladores PID oferecem um termo proporcional K_P, um termo de integração K_I/s e um termo derivativo $K_D s$ [46]. A função de transferência de um controlador PID é dada por:

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s.$$



Na prática, a função de transferência do termo derivativo $K_D s$ é:

$$G_d(s) = \frac{K_D s}{\tau_d s + 1},$$

mas, usualmente, τ_d é muito menor que as constantes de tempo do processo e, conseqüentemente, pode ser ignorado.

Um controlador PID possui um pólo em $s = 0$ e dois zeros, cujas posições dependem de K_P, K_I e K_D. Para a implementação do controlador PID, é necessário determinar, para um dado processo, os ganhos proporcional, integral e derivativo. Numerosos métodos têm sido apresentados para o ajuste dos parâmetros de controladores PI, PD e PID [53–61].

Considere o sistema realimentado na Fig. 12, sendo $G_c(s)$ um controlador PID. De (3.6)–(3.8), a função de transferência do sistema de malha fechada $G_{cl}(s)$ é dada por:

$$G_{cl}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G_{ol}(s)}{1 + G_c(s)G_{ol}(s)} = \frac{(K_P s + K_I + K_D s^2)n(s)}{sd(s) + (K_P s + K_I + K_D s^2)n(s)}.$$

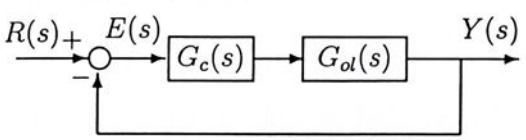


Figura 12: Sistema realimentado com controlador $G_c(s)$.

Os pólos do sistema são as raízes do polinômio característico $r(s, K_P, K_I, K_D) = sd(s) + (K_P s + K_I + K_D s^2)n(s)$.

Para $K_D = 0$, tem-se um controlador PI, descrito por:

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$$

e a função de transferência do sistema de malha fechada $G_{cl}(s)$ é dada por:

$$G_{cl}(s) = \frac{(K_P s + K_I)n(s)}{sd(s) + (K_P s + K_I)n(s)}.$$

Os pólos do sistema são as raízes do polinômio característico $r(s, K_P, K_I) = sd(s) + (K_P s + K_I)n(s)$.

Para $K_I = 0$, tem-se um controlador PD, descrito por:

$$G_c(s) = K_P + K_D s$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

e a função de transferência do sistema de malha fechada $G_{cl}(s)$ é dada por:

$$G_{cl}(s) = \frac{(K_P + K_D s)n(s)}{d(s) + (K_P + K_D s)n(s)}.$$

Os pólos do sistema são as raízes do polinômio característico $r(s, K_P, K_D) = d(s) + (K_P + K_D s)n(s)$.

Os controladores Integral (I), Derivativo (D) e Integral-Derivativo (ID) podem ser analisados seguindo as mesmas idéias e considerando $K_P = K_D = 0$, $K_P = K_I = 0$ e $K_P = 0$, respectivamente.

Para o controlador PID, fixando-se os valores de dois parâmetros (por exemplo, K_I e K_D), é possível determinar a faixa de estabilidade do terceiro parâmetro (no caso, K_P), utilizando-se o Critério de Estabilidade de Routh. Atribuindo-se um conjunto de valores, definido por um valor inicial, um valor final e um valor de incremento, para cada um dos dois parâmetros fixos, pode-se obter um esboço da região de estabilidade do sistema da Fig. 12 realimentado com um controlador PID.

Para controladores PI, PD e ID, a análise da estabilidade é obtida fixando-se um dos dois parâmetros e determinando-se a faixa de estabilidade do segundo parâmetro, através do Critério de Estabilidade de Routh. Para controladores I e D, a faixa de estabilidade é determinada através do mesmo método utilizado para controladores P, com a inclusão de um pólo e um zero, respectivamente, em $s = 0$.

3.8 Análise de Polinômios com Coeficientes Incertos

3.8.1 Teorema de Kharitonov para Polinômios com Coeficientes Reais

Considere, agora, um conjunto $\mathcal{I}(s)$ de polinômios reais com grau n, da forma:

$$\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \delta_2 s^2 + \delta_3 s^3 + \delta_4 s^4 + \ldots + \delta_n s^n,$$

cujos coeficientes constantes δ_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, permanecem dentro de intervalos dados:

$$\delta_{i\,\min} \leq \delta_i \leq \delta_{i\,\max}.$$

Os coeficientes δ_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ pertencem a um politopo, definido pelos limites dos

intervalos em que se encontram:

$$\Delta = \left\{ \left[\begin{array}{cccc} \delta_0 & \delta_1 & \cdots & \delta_n \end{array} \right] : \delta_i \in \mathbb{R},\ \delta_{i\,\min} \leq \delta_i \leq \delta_{i\,\max},\ i = 0, 1, \ldots, n \right\}.$$

Assume-se que o grau de $\delta(s)$ permanece invariante em toda a família de polinômios $\mathcal{I}(s)$, isto é, $\delta_n = 0$ não pertence ao intervalo $\delta_{n\,\min} \leq \delta_n \leq \delta_{n\,\max}$. O Teorema 40 (Teorema de Kharitonov), apresentado em [65], fornece uma condição necessária e suficiente, simples e que pode ser facilmente verificada, para a estabilidade Hurwitz de toda a família $\mathcal{I}(s)$.

Teorema 40 *[65] Todo polinômio na família $\mathcal{I}(s)$ é Hurwitz se e somente se os quatro polinômios extremos a seguir são Hurwitz:*

$$K_1(s) = \delta_{0\,\min} + \delta_{1\,\min} s + \delta_{2\,\max} s^2 + \delta_{3\,\max} s^3 + \delta_{4\,\min} s^4 + \delta_{5\,\min} s^5 + \delta_{6\,\max} s^6 + \ldots, \quad (3.18)$$

$$K_2(s) = \delta_{0\,\min} + \delta_{1\,\max} s + \delta_{2\,\max} s^2 + \delta_{3\,\min} s^3 + \delta_{4\,\min} s^4 + \delta_{5\,\max} s^5 + \delta_{6\,\max} s^6 + \ldots, \quad (3.19)$$

$$K_3(s) = \delta_{0\,\max} + \delta_{1\,\min} s + \delta_{2\,\min} s^2 + \delta_{3\,\max} s^3 + \delta_{4\,\max} s^4 + \delta_{5\,\min} s^5 + \delta_{6\,\min} s^6 + \ldots, \quad (3.20)$$

$$K_4(s) = \delta_{0\,\max} + \delta_{1\,\max} s + \delta_{2\,\min} s^2 + \delta_{3\,\min} s^3 + \delta_{4\,\max} s^4 + \delta_{5\,\max} s^5 + \delta_{6\,\min} s^6 + \ldots. \quad (3.21)$$

Uma demonstração do Teorema de Kharitonov é apresentada em [66].

Com base no Teorema de Kharitonov, foi proposto um método para a determinação da faixa de estabilidade de sistemas com realimentação estática da saída com uma planta incerta $G_{ol}(s) = n(s)/d(s)$, na qual cada coeficiente de $n(s)$ e de $d(s)$ pertence a um intervalo definido. Este método é descrito na Subseção 3.8.2.

3.8.2 Estabilidade de Sistemas com Realimentação Estática da Saída com Plantas SISO Incertas

Considere uma planta SISO incerta, controlável e observável, $G_{ol}(s)$, dada por:

$$G_{ol}(s) = \frac{n(s)}{d(s)}, \quad (3.22)$$

sendo:

$$n(s) = n_n s^n + n_{(n-1)} s^{n-1} + \ldots + n_1 s + n_0, \quad (3.23)$$

$$d(s) = d_n s^n + d_{(n-1)} s^{n-1} + \ldots + d_1 s + d_0, \quad (3.24)$$

sendo que cada coeficiente de $n(s)$ e $d(s)$ pertence a um intervalo, dado por:

$$n_{i\,\min} \leq n_i \leq n_{i\,\max},\ \ d_{i\,\min} \leq d_i \leq d_{i\,\max},\ \ i = 0, 1, \ldots, n$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

e $d_n = 0$ não pertence ao intervalo $d_{n\,\min} \leq d_n \leq d_{n\,\max}$.

É proposto o seguinte problema: determine a faixa de valores de $k \in \mathbb{R}$, se existirem, tais que o sistema realimentado da Fig. 10 seja estável em todo o politopo, utilizando o Critério de Estabilidade de Routh.

A função de transferência do sistema de malha fechada $G_{cl}(s)$ é dada por:

$$G_{cl}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{kG_{ol}(s)}{1 + kG_{ol}(s)} = \frac{kn(s)}{d(s) + kn(s)}. \tag{3.25}$$

Os pólos do sistema são as raízes do polinômio característico $d(s,k) = d(s) + kn(s)$. Substituindo (3.23) e (3.24) em (3.25), o polinômio característico é dado por:

$$d(s,k) = (d_n + kn_n)s^n + (d_{(n-1)} + kn_{(n-1)})s^{n-1} + \ldots + (d_1 + kn_1)s + (d_0 + kn_0),$$

$$d(s,k) = \delta_n s^n + \delta_{(n-1)}s^{n-1} + \ldots + \delta_1 s + \delta_0, \tag{3.26}$$

cujos coeficientes δ_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, permanecem dentro de intervalos dados:

$$\delta_{i\,\min} \leq \delta_i \leq \delta_{i\,\max}, \tag{3.27}$$

cujos limites são dados por:

$$\delta_{i\,\min} = \begin{cases} d_{i\,\min} + kn_{i\,\min}, & \text{se } k \geq 0, \\ d_{i\,\min} + kn_{i\,\max}, & \text{se } k < 0, \end{cases} \tag{3.28}$$

$$\delta_{i\,\max} = \begin{cases} d_{i\,\max} + kn_{i\,\max}, & \text{se } k \geq 0, \\ d_{i\,\max} + kn_{i\,\min}, & \text{se } k < 0. \end{cases} \tag{3.29}$$

Para $k = 0$, os pólos do sistema de malha fechada correspondem aos pólos do sistema de malha aberta. Pelo Teorema de Kharitonov, o sistema de malha aberta é estável e, conseqüentemente, o sistema de malha fechada é estável para $k = 0$ se e somente se todas as raízes dos polinômios (3.18)–(3.21), com $\delta_i = d_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, tiverem parte real negativa.

A estabilidade do sistema de malha fechada para $k > 0$ e para $k < 0$ é analisada através do Teorema de Kharitonov, aplicando-se o Critério de Estabilidade de Routh aos polinômios (3.18)–(3.21), com $\delta_i = d_i + kn_i(s)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, cujos limites são dados em (3.28) e (3.29). A faixa de estabilidade para $k > 0$ corresponde à intersecção das faixas de estabilidade dos polinômios (3.18)–(3.21), considerando-se apenas os valores positivos de k. Para $k < 0$, a faixa de estabilidade corresponde à intersecção das faixas de estabilidade



dos polinômios (3.18)–(3.21), considerando-se apenas os valores negativos de k.

A solução do problema, isto é, a faixa de valores de $k \in \mathbb{R}$ para os quais o sistema da Fig. 10 é estável em todo o politopo, corresponde à união das soluções para os dois casos: $k \geq 0$ e $k < 0$.

3.8.3 Aplicação do Teorema de Kharitonov na Síntese de Sistemas de Fase Mínima com Plantas SISO Incertas

Considere uma planta incerta $\{A, B, C\}$, controlável e observável, com uma entrada e duas saídas, cuja matriz de transferência é dada por:

$$G_{ol}(s) = C(sI - A)^{-1}B = N(s)D(s)^{-1}, \tag{3.30}$$

sendo $N(s)$ e $D(s)$ matrizes polinomiais coprimas à direita, $D(s) = d(s)I$ e:

$$N(s) = \begin{bmatrix} n_1(s) \\ n_2(s) \end{bmatrix}, \tag{3.31}$$

com:

$$n_1(s) = n_{1(n-1)}s^{n-1} + \ldots + n_{11}s + n_{10}, \tag{3.32}$$

$$n_2(s) = n_{2(n-1)}s^{n-1} + \ldots + n_{21}s + n_{20}, \tag{3.33}$$

$$d(s) = d_n s^n + d_{(n-1)}s^{n-1} + \ldots + d_1 s + d_0 \tag{3.34}$$

e $d_n \neq 0$ e sendo $n_1(s)$ e $n_2(s)$ polinômios cujos coeficientes n_{ij} pertencem a intervalos, dados por:

$$n_{ij\,\min} \leq n_{ij} \leq n_{ij\,\max}, \;\; i = 1, 2, \;\; j = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{3.35}$$

De acordo com o Teorema 4, existem matrizes F e K tais que o sistema $\{A - BKC, B, FC\}$ é ERP se e somente se existir F tal que $FCB = (FCB)^T > 0$ e $\{A, B, FC\}$ for um sistema de fase mínima, isto é, os zeros de transmissão de $\{A, B, FC\}$ apresentarem parte real negativa.

Seja $F = [\; f_1 \quad f_2 \;] \in \mathbb{R}^2$. Então, o produto $FG_{ol}(s)$ é dado por:

$$FG(s) = FN(s)D(s)^{-1} = \frac{f_1 n_1(s) + f_2 n_2(s)}{d(s)},$$

sendo:

$$f_1 n_1(s) + f_2 n_2(s) = f_1 \left(n_{1(n-1)}s^{n-1} + \ldots + n_{11}s + n_{10} \right) +$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

$$f_2\left(n_{2(n-1)}s^{n-1}+\ldots+n_{21}s+n_{20}\right)$$
$$=(f_1n_{1(n-1)}+f_2n_{2(n-1)})s^{n-1}+\ldots+(f_1n_{11}+f_2n_{21})s+(f_1n_{10}+f_2n_{20}).$$

A condição $FCB=(FCB)^T>0$ ocorre somente quando o grau relativo de $G_{cl}(s)=FC(sI-A+BKC)^{-1}B$ é igual a 1, isto é, grau$(f_1n_1(s)+f_2n_2(s))=$ grau$(d(s))-1$. Isto ocorre se e somente se:

$$f_1n_{1(n-1)}+f_2n_{2(n-1)}\neq 0.$$

Se $n_{1(n-1)}=n_{2(n-1)}=0$, o grau relativo do sistema é maior que 1, para qualquer $F\in\mathbb{R}^2$. Então, não existem matrizes F e K que tornam o sistema ERP.

Assim, os zeros do sistema $FG_{ol}(s)$ são as raízes de $[f_1n_1(s)+f_2n_2(s)]$.

Se $f_1=0$, então $FN(s)=f_2n_2(s)$. Neste caso, os zeros do sistema $FG_{ol}(s)$ são as raízes de $n_2(s)$.

Se $f_2=0$, então $FN(s)=f_1n_1(s)$. Neste caso, os zeros do sistema $FG_{ol}(s)$ são as raízes de $n_1(s)$.

Se $f_1\neq 0$ e $f_2\neq 0$, então:

$$FN(s)=f_1n_1(s)+f_2n_2(s)=f_1[n_1(s)+f_kn_2(s)],$$

sendo $f_k=\frac{f_2}{f_1}$.

Os valores de f_k tais que o sistema $FG_{ol}(s)$ seja de fase mínima, se existirem, são tais que todas as raízes do polinômio:

$$r(s,f_k)=n_1(s)+f_kn_2(s) \tag{3.36}$$

apresentam parte real negativa. A faixa de valores de $f_k\in\mathbb{R}$ tais que o sistema $FG_{ol}(s)$ é de fase mínima em todo o politopo, se existirem, pode ser determinada através do Teorema de Kharitonov e do Critério de Estabilidade de Routh, com o método discutido na Subseção 3.8.2.

3.8.4 Obtenção de um Sistema ERP a Partir de um Sistema de Fase Mínima Incerto

De acordo com o Teorema 4, existem matrizes F e K_o tais que o sistema $\{A(\alpha)-BK_oC(\alpha),B,FC(\alpha)\}$ é ERP para todo α definido em (2.253) se e somente se existir F tal que $FC(\alpha)B=(FC(\alpha)B)^T>0$ e $\{A(\alpha),B,FC(\alpha)\}$ for um sistema de fase mínima,

cm 1 2 3 4 5 6 unesp 11 12 13 14 15 16

isto é, os zeros de transmissão de $\{A(\alpha), B, FC(\alpha)\}$ apresentam parte real negativa para todo α definido em (2.253). Na Subseção 3.8.3, foi apresentado um método baseado no Teorema de Kharitonov e no Critério de Estabilidade de Routh para determinar a faixa de valores de $f_k \in \mathbb{R}$ tal que o sistema $FG_{ol}(s)$, com uma planta incerta $G_{ol}(s)$, com uma entrada e duas saídas, dada por (3.30) e $F = f_1[\ 1 \quad f_k\ ] \in \mathbb{R}^2$, seja de fase mínima, em todo o politopo.

Considere, assim, uma matriz F tal que o sistema incerto $FG_{ol}(s)$ seja de fase mínima em todo o politopo. A matriz K_o que torna ERP o sistema $\{A(\alpha)-BK_oC(\alpha), B, FC(\alpha)\}$, para todo α definido em (2.253), é determinada através do Teorema 24. A solução do problema através de LMIs permite a adição de outras especificações, como taxa de decaimento, restrições na entrada e na saída.

3.8.5 Aplicação do Teorema de Kharitonov para Especificação da Taxa de Decaimento

Considere um sistema linear invariante no tempo, cujo polinômio característico $d(s,k)$ possui a forma dada em (3.26), sendo $d_n(k)$, $d_{(n-1)}(k)$, ..., $d_1(k)$ e $d_0(k)$ polinômios em k, cujos coeficientes permanecem dentro de intervalos, dados em (3.27).

Na Subseção 3.8.2, foi apresentado um método para a obtenção da faixa de valores de $k \in \mathbb{R}$ tal que todas as raízes do polinômio $d(s,k)$, possuam parte real negativa em todo o politopo, utilizando o Teorema de Kharitonov e o Critério de Estabilidade de Routh. Nesta subseção, o método é utilizado para determinar a faixa de valores de $k \in \mathbb{R}$ que garante, além da estabilidade, uma taxa de decaimento maior que γ em todo o politopo.

De acordo com [48], um método útil para examinar a taxa de decaimento é obtido deslocando o eixo imaginário no plano complexo e aplicando o método proposto para o Critério de Estabilidade de Routh. Substituindo s por $\hat{s} - \gamma$ na equação característica $d(s,k)$ e reescrevendo o polinômio em termos de $\hat{s}$, segue que:

$$d(s,k) = d((\hat{s}-\gamma),k) = \hat{d}(\hat{s},k),$$

sendo:

$$\hat{d}(\hat{s},k) = d_n(k)(\hat{s}-\gamma)^n + d_{(n-1)}(k)(\hat{s}-\gamma)^{n-1} + \ldots + d_1(k)(\hat{s}-\gamma) + d_0(k).$$

Então, para encontrar a faixa de valores de $k \in \mathbb{R}$ tal que todas as raízes de $d(s,k)$



apresentam partes reais $\sigma < -\gamma$ em todo o politopo, aplicam-se o Teorema de Kharitonov e o Critério de Estabilidade de Routh para o novo polinômio $d(\hat{s}, k)$, de acordo com o método descrito na Subseção 3.8.2.

3.8.6 Aplicação do Teorema de Kharitonov para o Posicionamento dos Zeros de Transmissão

Considere uma planta $\{A, B, C\}$, controlável e observável, com uma entrada e duas saídas, cuja função de transferência é dada por (3.30), com $D(s) = d(s)I$ e $N(s)$ descrito em (3.31)-(3.35), sendo $N(s)$ e $D(s)$ matrizes polinomiais coprimas à direita.

Seja $F = [\ f_1 \quad f_2\ ] \in \mathbb{R}^2$. Então, o produto $FG_{ol}(s)$ é dado por:

$$FG(s) = FN(s)D(s)^{-1} = \frac{f_1 n_1(s) + f_2 n_2(s)}{d(s)}.$$

Os zeros do sistema $FG_{ol}(s)$ são os valores de $s \in \mathbb{C}$ tais que:

$$FN(s) = f_1 n_1(s) + f_2 n_2(s) = f_1[n_1(s) + f_k n_2(s)] = f_1 r(s, f_k) = 0,$$

sendo $f_k = \frac{f_2}{f_1}$ e

$$r(s, f_k) = n_1(s) + f_k n_2(s).$$

Na Subseção 3.8.3, foi apresentado um método para a obtenção da faixa de valores de $f_k \in \mathbb{R}$ tal que todos os zeros do sistema $FG_{ol}(s)$ apresentem parte real negativa em todo o politopo, utilizando o Teorema de Kharitonov e o Critério de Estabilidade de Routh. Nesta subseção, o método é utilizado para determinar a faixa de valores de $f_k \in \mathbb{R}$ tal que todos os zeros do sistema $FG_{ol}(s)$ apresentem parte real $\sigma < -\gamma$ em todo o politopo.

Substituindo s por $\hat{s} - \gamma$ na expressão de $r(s, f_k)$ e reescrevendo o polinômio em termos de $\hat{s}$, segue que:

$$r(s, f_k) = d((\hat{s} - \gamma), f_k) = \hat{r}(\hat{s}, f_k),$$

sendo:

$$\hat{r}(\hat{s}, f_k) = n_1(\hat{s} - \gamma) + f_k n_2(\hat{s} - \gamma).$$

Então, para encontrar a faixa de valores de $f_k \in \mathbb{R}$ tal que todas as raízes de $r(s, f_k)$ apresentam partes reais $\sigma < -\gamma$ em todo o politopo, aplicam-se o Teorema de Kharitonov

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

e o Critério de Estabilidade de Routh para o novo polinômio $d(\hat{s}, k)$, de acordo com o método descrito na Seção 3.8.3.

3.9 Outras Aplicações do Critério de Estabilidade de Routh

3.9.1 Especificação de Regiões no Plano Complexo Utilizando o Critério de Estabilidade de Routh

Na Seção 3.2, foi apresentado um método baseado no Critério de Estabilidade de Routh para a determinação da faixa de estabilidade de um polinômio $d(s, k)$ cujos coeficientes em termos de s são polinômios de k.

Nesta subseção, com algumas transformações, o Critério de Estabilidade de Routh será utilizado para determinar a faixa de valores de $k \in \mathbb{R}$ tal que todas raízes de $d(s, k)$ estejam dentro de determinadas regiões especificadas no plano complexo.

Seja $s = \sigma + \mathrm{j}\,\omega$, para todas as regiões que serão analisadas. A região especificada na Fig. 13, definida por $\sigma < -\sigma_o$, será a primeira a ser estudada.

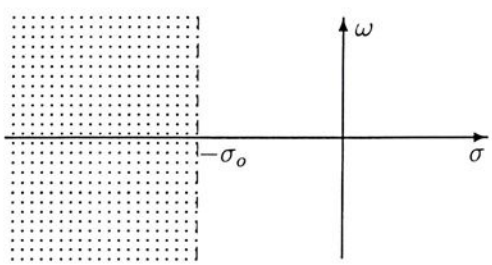


Figura 13: Região especificada no plano complexo s.

Considere a transformação:

$$s = \bar{s} - \sigma_o \text{ ou } \bar{s} = s + \sigma_o. \tag{3.37}$$

Assim, $\bar{s} = (\sigma + \sigma_o) + \mathrm{j}\,\omega$. A região especificada na Fig. 13 é equivalente a:

$$\sigma < -\sigma_o \Longleftrightarrow \sigma + \sigma_o = Re\{\bar{s}\} < 0,$$

sendo que $Re\{z\}$ representa a parte real de um número complexo z.

Logo, de acordo com a transformação (3.37), se s pertence à região especificada na

Fig. 13, então $\bar{s}$ possui parte real negativa. Portanto, se todas as raízes do polinômio em $\bar{s}$, $d(s,k) = d(\bar{s} - \sigma_o, k)$ tiverem parte real negativa, então todas as raízes de $d(s,k)$ pertencem à região especificada na Fig. 13.

Observação 29 *O posicionamento dos pólos de malha fechada na região especificada na Fig. 13 corresponde à especificação de uma taxa de decaimento, como descrito na Seção 3.6.*

A segunda região, especificada na Fig. 14, é definida por $\sigma > -\sigma_o$.

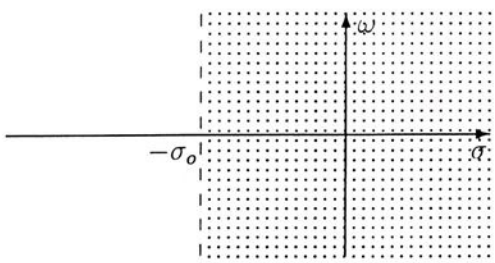


Figura 14: Região especificada no plano complexo s.

Considere, agora, a transformação:

$$s = -\bar{s} - \sigma_o \text{ ou } \bar{s} = -s - \sigma_o. \tag{3.38}$$

Assim, $\bar{s} = (-\sigma - \sigma_o) - \mathrm{j}\,\omega$. A região especificada na Fig. 14 é equivalente a:

$$\sigma > -\sigma_o \Longleftrightarrow -\sigma - \sigma_o = Re\{\bar{s}\} < 0.$$

Logo, de acordo com a transformação (3.38), se s pertence à região especificada na Fig. 14, então $\bar{s}$ possui parte real negativa. Portanto, se todas as raízes do polinômio em $\bar{s}$, $d(s,k) = d(-\bar{s} - \sigma_o, k)$ tiverem parte real negativa, então todas as raízes de $d(s,k)$ pertencem à região especificada na Fig. 14.

A terceira região especificada, na Fig. 15, é definida por:

$$\omega > \frac{b}{a}\sigma,$$

com $a > 0$.

Considere a transformação:

$$s = \frac{\bar{s}}{b + \mathrm{j}\,a} \text{ ou } \bar{s} = (b + \mathrm{j}\,a)s. \tag{3.39}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

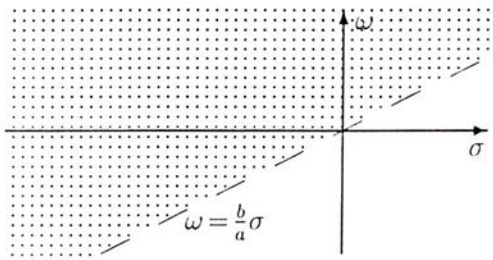


Figura 15: Região especificada no plano complexo s.

Assim,

$$\bar{s} = (b + \mathrm{j}\, a)(\sigma + \mathrm{j}\, \omega) = (b\sigma - a\omega) + \mathrm{j}\,(b\omega + a\sigma).$$

A região especificada na Fig. 15 é equivalente a:

$$\omega > \frac{b}{a}\sigma \iff a\omega > b\sigma \iff (b\sigma - a\omega) = Re\{\bar{s}\} < 0.$$

Logo, de acordo com a transformação (3.39), se s pertence à região especificada na Fig. 15, então $\bar{s}$ possui parte real negativa. Portanto, se todas as raízes do polinômio em $\bar{s}$, $d(s,k) = d(\bar{s}/(b + \mathrm{j}\, a), k)$ tiverem parte real negativa, então todas as raízes de $d(s,k)$ pertencem à região especificada na Fig. 15.

Note que:

$$\frac{\bar{s}}{(b + \mathrm{j}\, a)} = \frac{(b - \mathrm{j}\, a)\bar{s}}{(a^2 + b^2)}.$$

A quarta região, especificada na Fig. 16, é definida por:

$$\omega < -\frac{b}{a}\sigma,$$

com $a > 0$.

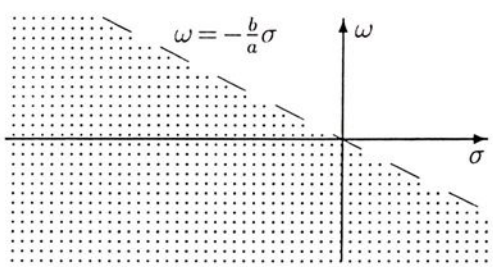


Figura 16: Região especificada no plano complexo s.

Considere a transformação:

$$s = \frac{\bar{s}}{b - \mathrm{j}\, a} \text{ ou } \bar{s} = (b - \mathrm{j}\, a)s. \tag{3.40}$$

Assim,

$$\bar{s} = (b - \mathrm{j}\, a)(\sigma + \mathrm{j}\, \omega) = (b\sigma + a\omega) + \mathrm{j}\, (b\omega - a\sigma).$$

A região especificada na Fig. 16 é equivalente a:

$$\omega < -\frac{b}{a}\sigma \Longleftrightarrow a\omega < -b\sigma \Longleftrightarrow (b\sigma + a\omega) = Re\{\bar{s}\} < 0.$$

Logo, de acordo com a transformação (3.40), se s pertence à região especificada na Fig. 16, então $\bar{s}$ possui parte real negativa. Portanto, se todas as raízes do polinômio em $\bar{s}$, $d(s,k) = d(\bar{s}/(b - \mathrm{j}\, a), k)$ tiverem parte real negativa, então todas as raízes de $d(s,k)$ pertencem à região especificada na Fig. 16.

A quinta região, especificada na Fig. 17, é definida por $\omega < \omega_o$, com $\omega_o > 0$.

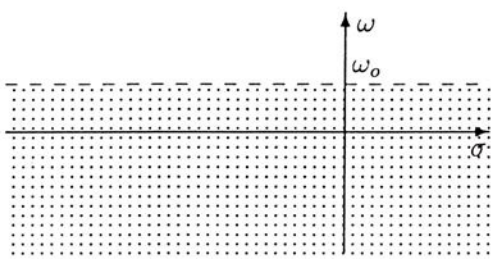


Figura 17: Região especificada no plano complexo s.

Considere a transformação:

$$s = \mathrm{j}\, (\bar{s} + \omega_o) \text{ ou } \bar{s} = -\mathrm{j}\, s - \omega_o. \tag{3.41}$$

Assim, $\bar{s} = (\omega - \omega_o) - \mathrm{j}\, \sigma$. A região especificada na Fig. 17 é equivalente a:

$$\omega < \omega_o \Longleftrightarrow \omega - \omega_o = Re\{\bar{s}\} < 0.$$

Logo, de acordo com a transformação (3.41), se s pertence à região especificada na Fig. 17, então $\bar{s}$ possui parte real negativa. Portanto, se todas as raízes do polinômio em $\bar{s}$, $d(s,k) = d(\mathrm{j}\, (\bar{s} + \omega_o), k)$ tiverem parte real negativa, então todas as raízes de $d(s,k)$ pertencem à região especificada na Fig. 17.

A sexta região, especificada na Fig. 18, é definida por $\omega > -\omega_o$, com $\omega_o > 0$.

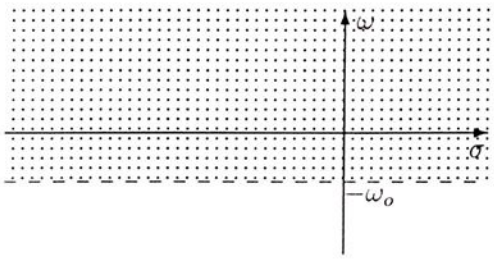


Figura 18: Região especificada no plano complexo s.

Considere a transformação:

$$s = \mathrm{j}\,(-\bar{s} - \omega_o) \text{ ou } \bar{s} = \mathrm{j}\,s - \omega_o. \tag{3.42}$$

Assim, $\bar{s} = (-\omega - \omega_o) + \mathrm{j}\,\sigma$. A região especificada na Fig. 18 é equivalente a:

$$\omega > -\omega_o \Longleftrightarrow -\omega - \omega_o = Re\{\bar{s}\} < 0.$$

Logo, de acordo com a transformação (3.42), se s pertence à região especificada na Fig. 18, então $\bar{s}$ possui parte real negativa. Portanto, se todas as raízes do polinômio $\bar{s}$, $d(s,k) = d(\mathrm{j}\,(-\bar{s} - \omega_o), k)$ tiverem parte real negativa, então todas as raízes de $d(s,k)$ pertencem à região especificada na Fig. 18.

A sétima região, especificada na Fig. 19, corresponde à intersecção das regiões especificadas nas Figs. 15 e 16.

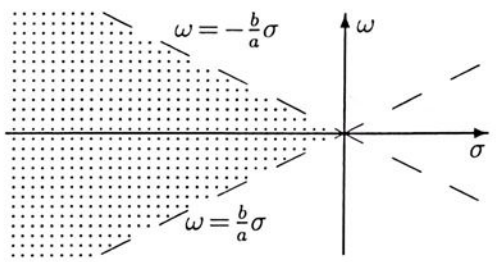


Figura 19: Região especificada no plano complexo s.

Para que todas as raízes do polinômio $d(s,k)$ estejam na região especificada na Fig. 19, é necessário que o polinômio atenda às especificações das regiões especificadas nas Figs. 15 e 16. Sejam $d_1(\bar{s},k)$ o polinômio obtido através da transformação (3.39) e $d_2(\bar{s},k)$ o polinômio obtido através da transformação (3.40). Então, a condição necessária

e suficiente para que todas as raízes de $d(s,k)$ estejam na região especificada na Fig. 19 é que todas as raízes de $\bar{d}_t(\bar{s},k) = d_1(\bar{s},k)d_2(\bar{s},k)$ possuam parte real negativa. Note que as raízes de $\bar{d}_t(\bar{s},k)$ correspondem às raízes de $d_1(\bar{s},k)$ e de $d_2(\bar{s},k)$.

Observação 30 *Note que, de (3.39) e (3.40), $\bar{s}$ em (3.39) é complexo conjugado de $\bar{s}$ em (3.40). Desta forma, $d_1(\bar{s},k)$ e $d_2(\bar{s},k)$ serão complexos conjugados, e então $\bar{d}_t(\bar{s},k) = d_1(\bar{s},k)d_2(\bar{s},k)$ será um polinômio com coeficientes reais, o que permite a aplicação do critério de Routh.*

A oitava região, especificada na Fig. 20, corresponde à intersecção das regiões especificadas nas Figs. 17 e 18.

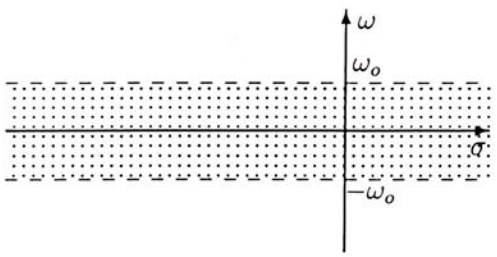


Figura 20: Região especificada no plano complexo s.

Para que todas as raízes do polinômio $d(s,k)$ estejam na região especificada na Fig. 20, é necessário que o polinômio atenda às especificações das regiões especificadas nas Figs. 17 e 18. Sejam $d_1(\bar{s},k)$ o polinômio obtido através da transformação (3.41) e $d_2(\bar{s},k)$ o polinômio obtido através da transformação (3.42). Então, a condição necessária e suficiente para que todas as raízes de $d(s,k)$ estejam na região especificada na Fig. 20 é que todas as raízes de $\bar{d}_t(\bar{s},k) = d_1(\bar{s},k)d_2(\bar{s},k)$ possuam parte real negativa.

De forma análoga aos comentários da Observação 30, note, na Fig. 20, que $\bar{d}_t(\bar{s},k)$ é um polinômio com todos os coeficientes reais, o que permite a aplicação do critério de Routh.

A nona região especificada na Fig. 21, corresponde à intersecção das regiões especificadas nas Figs. 13, 15 e 16.

Para que todas as raízes do polinômio $d(s,k)$ estejam na região especificada na Fig. 21, é necessário que o polinômio atenda às especificações das regiões especificadas nas Figs. 13, 15 e 16. Sejam $d_1(\bar{s},k)$ o polinômio obtido através da transformação (3.37), $d_2(\bar{s},k)$ o polinômio obtido através da transformação (3.39) e $d_3(\bar{s},k)$ o polinômio obtido através da transformação (3.40). Então, a condição necessária e suficiente para que todas

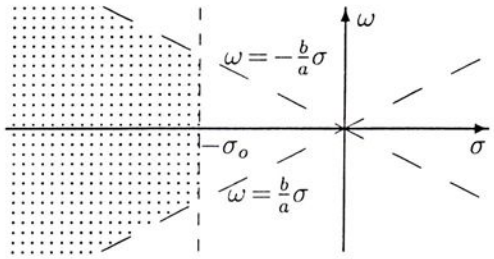


Figura 21: Região especificada no plano complexo s.

as raízes de $d(s,k)$ estejam na região especificada na Fig. 21 é que todas as raízes de $d_1(\bar{s},k)$ e de $\bar{d}_t(\bar{s},k) = d_2(\bar{s},k)d_3(\bar{s},k)$ possuam parte real negativa.

Observação 31 *A região da Fig. 21 é muito utilizada em projetos com controle clássico, pois especifica, para sistemas de segunda ordem subamortecidos sem zeros, as condições $PO < PO_o$ e $T_s < T_{so}$, sendo PO_o e T_{so} valores desejados e PO, T_s a porcentagem de* overshoot *e o tempo de estabelecimento, respectivamente, para uma entrada do tipo degrau [48].*

3.9.2 Análise da Estabilidade de Sistemas Incertos $\dot{x} = (A_o + \alpha\Delta A)x$

Em [67], os autores usam uma tabela de Routh sem fração (em inglês, *fraction-free Routh's array*), para testar a estabilidade de um segmento de polinômios $(1-\lambda)p_0(s) + \lambda p_1(s)$, sendo que $0 \leq \lambda \leq 1$. Nesta subseção, propõe-se o uso do Critério de Estabilidade de Routh para determinar a faixa completa de valores de λ para os quais o sistema é estável.

Considere o sistema incerto definido por (3.43):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) = (A_0 + \alpha\Delta A)x(t), \tag{3.43}$$

sendo $A_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\Delta A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrizes conhecidas e $\alpha \in \mathbb{R}$ um parâmetro desconhecido.

O sistema (3.43) é estável se e somente se todos os autovalores da matriz característica $A = A_0 + \alpha\Delta A$ tiverem parte real negativa. Os autovalores de A são as raízes de:

$$r(s,\alpha) = \det(sI - A) = \det(sI - A_0 - \alpha\Delta A).$$

O polinômio característico pode ser determinado através do Lema 10, com $M(\delta) = \delta_1 M_1 + \delta_2 M_2 + \delta_3 M_3$, $\delta_1 = s$, $\delta_2 = -1$, $\delta_3 = -\alpha$, $M_1 = I$, $M_2 = A_0$ e $M_3 = \Delta A$.

A faixa de valores de α para a qual o sistema (3.43) é estável pode ser determinada pelo método proposto neste capítulo, baseado no Critério de Estabilidade de Routh.

3.9.3 Análise da Estabilidade de Sistemas com Realimentação Negativa com uma Planta $\{A, B, C\}$ e uma Matriz de Realimentação $K = kI$

O método proposto na Seção 3.2 também pode ser utilizado para sistemas com realimentação negativa com uma planta $\{A, B, C\}$ e uma matriz de realimentação $K = kI$.

Considere a planta definida por (3.44):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \tag{3.44}$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e a lei de controle $u(t)$ dada por:

$$u(t) = -Ky(t), \tag{3.45}$$

com $K = kI$. Então, o sistema realimentado $\{A - BKC, B, C\}$ é definido por (3.46):

$$\dot{x}(t) = (A - BKC)x(t) = (A - kBC)x(t). \tag{3.46}$$

O sistema (3.46) é estável se e somente se todos os autovalores da matriz característica $(A - kBC)$ tiverem parte real negativa. Os autovalores de $(A - kBC)$ são os valores de $s \in \mathbb{C}$ tais que:

$$r(s, k) = \det(sI - (A - kBC)) = \det(sI - A + kBC).$$

O polinômio característico pode ser determinado através do Lema 10, com $M(\delta) = \delta_1 M_1 + \delta_2 M_2 + \delta_3 M_3$, $\delta_1 = s$, $\delta_2 = -1$, $\delta_3 = k$, $M_1 = I$, $M_2 = A$ e $M_3 = BC$.

A faixa de valores de k para a qual o sistema (3.46) é estável pode ser determinada pelo método proposto neste capítulo, baseado no Critério de Estabilidade de Routh.

unesp

3.9.4 Estabilidade de Sistemas Discretos

Considere um sistema discreto [43], controlável e observável, cuja função de transferência $G(z)$ é dada por:

$$G(z) = \frac{n_d(z)}{d_d(z)}, \tag{3.47}$$

sendo:

$$n_d(z) = n_{dn}z^n + n_{d(n-1)}z^{n-1} + \ldots + n_{d1}z + n_{d0}, \tag{3.48}$$

$$d_d(z) = d_{dn}z^n + d_{d(n-1)}z^{n-1} + \ldots + d_{d1}z + d_{d0} \tag{3.49}$$

e $d_{dn} \neq 0$.

O sistema discreto $G(z)$ é assintoticamente estável se e somente se todas as raízes do seu polinômio característico $d_d(z)$ se encontram dentro da circunferência unitária $|z| = 1$ no plano z.

O Critério de Estabilidade de Routh não pode ser aplicado diretamente a sistemas discretos, pois sua forma original é restrita ao eixo imaginário do plano s como limite de estabilidade. Entretanto, com uma transformação que projeta a circunferência unitária no plano z sobre o eixo imaginário de outro plano complexo, o Critério de Estabilidade de Routh pode ser aplicado para sistemas discretos [43].

A relação de transformação $z = e^{Ts}$ ou $s = (\ln(z))/T$, sendo T o período de amostragem do sistema, não pode ser utilizada, pois transforma uma equação algébrica em z em uma equação não-algébrica em s, e o critério de Routh não pode ser aplicado.

Em [43], é dada outra transformação que evita este problema:

$$z = \frac{1+v}{1-v} \text{ ou } v = \frac{z-1}{z+1}. \tag{3.50}$$

Então, substituindo (3.50) em (3.49), segue que:

$$d_d\left(\frac{1+v}{1-v}\right) = d_{dn}\left(\frac{1+v}{1-v}\right)^n + d_{d(n-1)}\left(\frac{1+v}{1-v}\right)^{n-1} + \ldots + d_{d1}\left(\frac{1+v}{1-v}\right) + d_{d0}$$

$$\begin{aligned} d_d\left(\frac{1+v}{1-v}\right) &= (1-v)^{-n}\Big[d_{dn}(1+v)^n + d_{d(n-1)}(1+v)^{n-1}(1-v) + \ldots + \\ &\quad d_{d1}(1+v)(1-v)^{n-1} + d_{d0}(1-v)^n\Big] = (1-v)^{-n}q(v), \end{aligned} \tag{3.51}$$

sendo:

$$q(v) = \sum_{i=0}^{n} d_{di}(1+v)^i(1-v)^{n-i}. \tag{3.52}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

Se $d_d(-1) \neq 0$, isto é, $z = -1$ não é uma raiz de $d_d(z)$, o Critério de Estabilidade de Routh pode ser aplicado em $q(v)$ para deteminar se o sistema $G(z)$ é estável: se todas as raízes de $q(v)$ possuem parte real negativa, então todas as raízes de $d_d(z)$ localizam-se dentro da circunferência unitária $|z| = 1$ no plano z e então o sistema $G(z)$ é assintoticamente estável.

Observação 32 *Desenvolvendo-se a expressão (3.52), tem-se:*

$$q(v) = \sum_{i=0}^{n} d_{di}(1+v)^i(1-v)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} d_{di} \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} 1^i v^j \right) \left(\sum_{k=0}^{n-i} \binom{n-i}{k} 1^{n-i} (-v)^k \right),$$

$$q(v) = \sum_{i=0}^{n} d_{di} \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} v^j \right) \left(\sum_{k=0}^{n-i} \binom{n-i}{k} (-1)^k v^k \right),$$

sendo:

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!\,(a-b)!},$$

$n!$ *o fatorial de um número* n, *dado por* $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$, *e* $0! = 1$.

Assim, coeficiente de v^n *em (3.52) é dado por:*

$$\sum_{i=0}^{n} d_{di} \binom{i}{i} \binom{n-i}{n-i} (-1)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} d_{di}(-1)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} d_{di}(-1)^n(-1)^{-i}$$

$$= (-1)^n \sum_{i=0}^{n} d_{di}(-1)^i = (-1)^n d_d(-1).$$

Então, se $z = -1$ *é uma raiz de* $d_d(z)$, *então o grau de* $q(v)$ *é menor que o grau de* $d_d(z)$.

Observação 33 *O critério de Routh vai especificar as regiões nas quais o ganho* k *garante que* $|z| < 1$, *impondo que* $\mathrm{Re}(v) < 0$. *Então, note que a condição* $z = -1$, *que comprometeria a transformação (3.50), não ocorrerá no procedimento proposto para o projeto de* k.

3.10 Conclusões Parciais do Capítulo

Neste capítulo, foi apresentado um método baseado no Critério de Estabilidade de Routh para determinar a faixa de valores de $k \in \mathbb{R}$ tal que um sistema com uma planta SISO e um ganho de realimentação k ou uma planta MIMO, com m entradas e m saídas,



e uma matriz de realimentação kI seja estável. O método é fácil de compreender, sua aplicação é simples e as condições são necessárias e suficientes.

O método pode ser aplicado para a análise de qualquer polinômio cujos coeficientes são polinômios em k. Esta versatilidade permite uma série de aplicações, tais como: (i) tornar de fase mínima um sistema cuja planta possui uma entrada e duas saídas; (ii) especificar uma taxa de decaimento; (iii) determinar um limite máximo para a parte real dos zeros de transmissão de um sistema; (iv) posicionar os pólos de um sistema em determinadas regiões do plano complexo; (v) determinar o domínio de estabilidade de sistemas incertos que dependem de um parâmetro e (vi) analisar a estabilidade de sistemas discretos.

A utilização do Critério de Estabilidade de Routh para a obtenção de sistemas de fase mínima é muito útil, visto que uma condição necessária para a existência de uma matriz K_o que torna ERP um sistema $\{A - BK_oC, B, FC\}$ é que o sistema $\{A, B, FC\}$ seja de fase mínima, isto é, que todos os zeros de transmissão de $\{A, B, FC\}$ possuam parte real negativa. Para plantas com uma entrada e duas saídas, o método fornece a condição necessária e suficiente para que uma matriz $F \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ torne o sistema $\{A, B, FC\}$ de fase mínima. Após a obtenção de F tal que $\{A, B, FC\}$ seja de fase mínima e apresente o mesmo número de entradas e saídas, é fácil a obtenção de F_o e K_o tais que $\{A - BK_oC, B, F_oC\}$ seja ERP.

O método também é útil para determinar a região de estabilidade de controladores I, D, PI, PD, ID e PID. Para os controladores I e D, é determinada a faixa de valores dos ganhos integral e derivativo, respectivamente, de modo que os controladores estabilizem o sistema. Para os controladores PI, PD e ID, que possuem dois ganhos, um dos ganhos é fixado e a faixa de estabilidade do outro ganho é determinada. Atribuindo-se um conjunto de valores para um dos ganhos (definido por um valor inicial, valor final e valor de incremento), obtém-se um esboço da região de estabilidade para estes controladores. Para controladores PID, os ganhos integral e derivativo são fixados e é determinada a faixa de valores do ganho proporcional. Atribuindo-se conjuntos de valores para os ganhos integral e derivativo, obtém-se um esboço da região de estabilidade para os controladores PID.

O Teorema de Kharitonov é uma ferramenta útil para determinar se todas as raízes de um polinômio incerto, cujos coeficientes, que são constantes, pertencem a intervalos dados, possuem parte real negativa para todos os valores possíveis dos coeficientes. Com base no Teorema de Kharitonov e no Critério de Estabilidade de Routh, foi proposto um método para determinar a faixa de estabilidade de um sistema com uma planta SISO



incerta e um ganho de realimentação k. Este método também é útil para determinar a faixa de valores de f_k tal que um sistema incerto $FN(s)$, com $F \in \mathbb{R}^{1\times 2}$, seja de fase mínima e, conseqüentemente, para a determinação de matrizes F_o e K_o de modo que $\{A - BK_oC, B, F_oC\}$ seja ERP.

O próximo capítulo apresenta a teoria sobre controle com estrutura variável e modos deslizantes.



4 Controle com Estrutura Variável e Modos Deslizantes

4.1 Modos Deslizantes

A característica principal de um sistema de CEV está na realimentação não-linear que possui descontinuidades sobre uma ou mais superfícies no espaço de estados. Assim, a estrutura do sistema de realimentação é alterada, ou chaveada, conforme os estados atravessam cada superfície descontínua. Em conseqüência deste fato, o sistema de malha fechada é descrito como sendo um sistema de Controle com Estrutura Variável, considerado como a combinação de subsistemas, cada qual com uma estrutura fixa e que opera em uma região específica do espaço de estados.

O CEV é caracterizado pela existência do modo deslizante. Isto ocorre quando o estado do sistema cruza imediatamente e repetidamente a superfície de chaveamento, pois todos os movimentos nas vizinhanças da superfície estão direcionados a esta superfície. Dependendo da forma da lei de controle selecionada, o movimento deslizante pode ocorrer em superfícies de chaveamento individuais no espaço de estados, sobre um conjunto de superfícies, ou em todas as superfícies de chaveamento juntas [5].

A existência de um modo deslizante requer a estabilidade da trajetória de estado para a superfície de deslizamento, no mínimo em uma vizinhança de $\{x(t) \mid s(x(t)) = 0\}$, ou seja, deve aproximar-se da superfície no mínimo assintoticamente. A vizinhança máxima é chamada região de atração. Geometricamente, o vetor tangente ou a derivada no tempo do vetor de estado deve apontar para a superfície de deslizamento na região de atração. Isto assemelha-se a um problema de estabilidade generalizado, e o segundo método de Lyapunov fornece uma ferramenta natural para a análise. Especificamente, a estabilidade para a superfície de chaveamento requer a seleção de uma função de Lyapunov generalizada $V(x,t)$, que é definida positiva e tem uma derivada no tempo negativa, na região de atração [68].



Um procedimento de projeto para o seguinte sistema [3]:

$$\dot{x}(t) = f(x,t,u) \qquad x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(x,t) \in \mathbb{R}^m, \tag{4.1}$$

$$u(x,t) = \begin{cases} u^+(x,t) & \text{se} \quad s(x(t)) > 0 \\ u^-(x,t) & \text{se} \quad s(x(t)) < 0 \end{cases}, \tag{4.2}$$

consiste em duas etapas. A primeira é a determinação das superfícies $s(x(t)) = 0$ no espaço de estados, em que o controle é descontínuo e segunda é a seleção das funções de controle contínuas $u^+(x,t)$ e $u^-(x,t)$. Devido à descontinuidade, a derivada dos vetores de estado pode estar direcionada para uma das superfícies e um modo deslizante pode ocorrer sobre ela (arcos *ab* e *cb*, na Fig. 22 [21]). Isto pode acontecer também sobre a intersecção (arcos *bd*). A Fig. 23 [21] ilustra o modo deslizante na intersecção, mostrando um caso em que ele não ocorre separadamente em cada superfície.

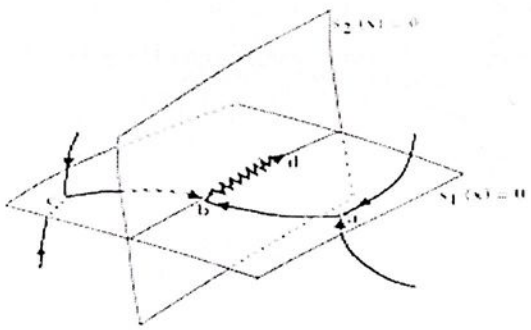


Figura 22: Modo deslizante.

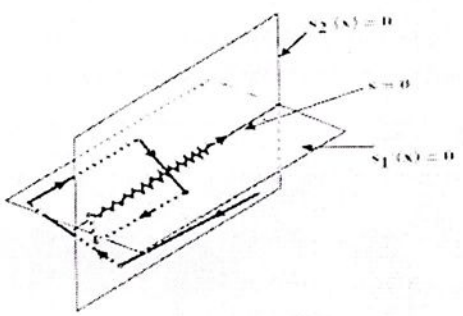


Figura 23: Ocorrência de modo deslizante apenas na intersecção das superfícies.

Modos deslizantes são muito importantes por dois motivos. Primeiro, no modo deslizante, o elemento que implementa a função descontínua, por exemplo um relé, chaveia

em alta freqüência. A sua entrada está em zero, enquanto que a sua saída, ou mais precisamente o seu valor médio, pode assumir um valor não nulo. Conseqüentemente, o elemento implementa um alto ganho (teoricamente infinito), que é o meio convencional para se atenuar a influência dos distúrbios e incertezas do sistema. Diferentemente dos sistemas com derivadas contínuas, o efeito de invariância é atingido pelo uso de ações de controle finito. Segundo, a ordem da equação do movimento é reduzida, pois as trajetórias do modo deslizante pertencem a alguma superfície de dimensão inferior à do sistema, ou seja, o movimento dinâmico do sistema é restringido e permanece dentro de um certo subespaço do espaço de estados. Assim, comporta-se como um sistema relaxado, de ordem inferior, chamado *sistema equivalente*. O movimento deste sistema equivalente é diferente dos subsistemas constituintes. Isto permite a simplificação e a decomposição do procedimento de projeto da lei de controle $u(x,t)$. Assim, o conceito básico do projeto da maioria dos sistemas com CEV se baseia em modos deslizantes, já que são o principal modo operacional deste tipo de sistema.

Por exemplo, admita o sistema apresentado em [4], descrito por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a_2 x_2 - a_1 x_1 + u, \end{aligned} \tag{4.3}$$

sendo a_1 e a_2 constantes. Considere a lei de controle

$$u = -\psi x_1, \tag{4.4}$$

e assuma que existem duas estruturas lineares para este sistema, associadas aos valores $-\alpha$ e α (α constante) do coeficiente ψ, como descrito em (4.5). Assuma também, a_2 negativo em (4.3) e que α seja selecionado de maneira que o sistema (4.3) e (4.4) tenha pólos complexos para $\psi = \alpha$ e pólos reais para $\psi = -\alpha$. Para ambos os casos, o sistema é instável, e representado pelos planos de fase da Fig. 24 [21], com um foco instável e um ponto de sela, respectivamente, pois para a matriz característica A do sistema (4.3)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (-a_1 - \psi) & -a_2 \end{bmatrix}$$

a equação característica dada por $det(sI - A) = s^2 + a_2 s + (a_1 + \psi) = 0$ leva às raízes:

$$s = \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4(a_1 + \psi)}}{2}$$

e portanto, os pólos do sistema de malha fechada sempre terão parte real positiva, pois

$a_2 < 0$. Pela equação acima, note que as raízes para $\psi = \alpha > (a_2^2 - 4a_1)/4$ e $\psi = -\alpha < (a_2^2 - 4a_1)/4$ serão, respectivamente, complexas conjugadas e reais.

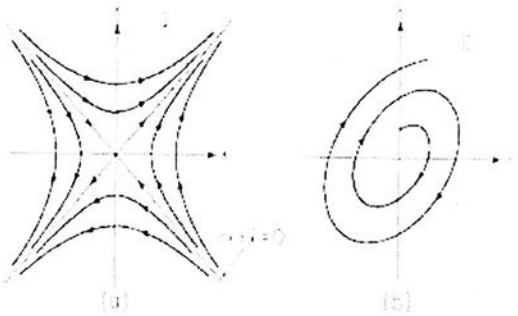


Figura 24: Subsistemas lineares instáveis: (a)$\psi = -\alpha$ e (b)$\psi = \alpha$.

Verifica-se, agora, que a estabilidade assintótica pode ser alcançada pela mudança das estruturas nas superfícies $x_1 = 0$ e $s = cx_1 + x_2 = 0$, (c constante). O coeficiente c é selecionado de maneira que a superfície $s = 0$ esteja entre o eixo x_1 e a assíntota das trajetórias hiperbólicas associadas com a estrutura $\psi = -\alpha$. A Fig. 25 [21] representa o plano de fase do sistema (4.3), para a lei de controle

$$\psi = \begin{cases} \alpha & \text{se } x_1 s > 0 \\ -\alpha & \text{se } x_1 s < 0 \end{cases}, \tag{4.5}$$

que mostra que a trajetória de estado alcança a superfície de chaveamento $s = 0$ para toda condição inicial. Nas vizinhanças da superfície de chaveamento, as trajetórias de ambas as estruturas estão direcionadas a ela, ocorrendo assim, um modo deslizante.

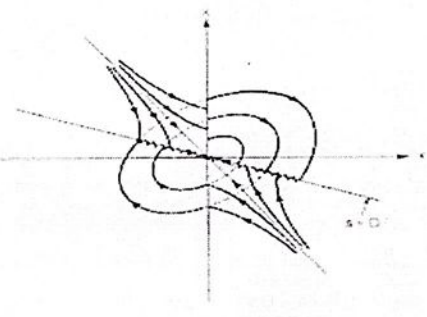


Figura 25: Estabilidade assintótica através de EVMD, no plano $(x_1, x_2) = (x, \dot{x})$.

As incertezas de um sistema aparecem como resultado da imperfeição do modelo

$$grad\ s\ [\mu f^+ + f^- - \mu f^-] = 0,$$
$$\mu grad\ s\ f^+ + grad\ s\ f^- - \mu grad\ s\ f^- = 0,$$
$$\mu[grad\ s\ f^+ - grad\ s\ f^-] + grad\ s\ f^- = 0,$$
$$\mu[grad\ s\ f^+ - grad\ s\ f^-] = -grad\ s\ f^-,$$
$$\mu = \frac{-grad\ s\ f^-}{grad\ s[f^+ - f^-]}$$

e

$$\begin{aligned}(1-\mu) &= 1 + \frac{grad\ s\ f^-}{grad\ s[f^+ - f^-]}, \\ &= \frac{grad\ s\ f^+ - grad\ s\ f^- + grad\ s\ f^-}{grad\ s[f^+ - f^-]}, \\ &= \frac{grad\ s\ f^+}{grad\ s[f^+ - f^-]}.\end{aligned}$$

Logo, de (4.6)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \mu f^+ + (1-\mu) f^-, \\ &= \frac{-grad\ s\ f^-}{grad\ s[f^+ - f^-]} f^+ + \frac{grad\ s\ f^+}{grad\ s[f^+ - f^-]} f^-, \\ &= \frac{grad\ s\ f^-}{grad\ s[f^- - f^+]} f^+ - \frac{grad\ s\ f^+}{grad\ s[f^- - f^+]} f^-. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Assim, a equação (4.7) descreve o movimento em modo deslizante.

Portanto, em sistemas com uma única superfície descontínua, o método de Filippov leva aos seguintes resultados:

(a) O mínimo convexo de todos os vetores $f(x,t,u)$, na vizinhança de algum ponto (x,t,u), na superfície descontínua (Fig. 26 [21]), é uma linha reta que liga o fim dos vetores f^+ e f^-;

(b) Desde que $f^0(x,t,u)$ é um modo deslizante em um plano tangencial à superfície descontínua, o fim deste vetor pode ser considerado como um ponto de intersecção deste plano com a linha reta que liga o fim dos vetores f^+ e f^-.

O método de Filippov é adequado no tratamento de funções de controle descritas por (4.1) e (4.2), desde que as relações dadas por (4.2) não levem a definições ambíguas do vetor $f(x,t,u)$, fora da superfície descontínua e permita que um mínimo convexo seja constituído para qualquer ponto em tal superfície. Logo, conclui-se que o modo deslizante,



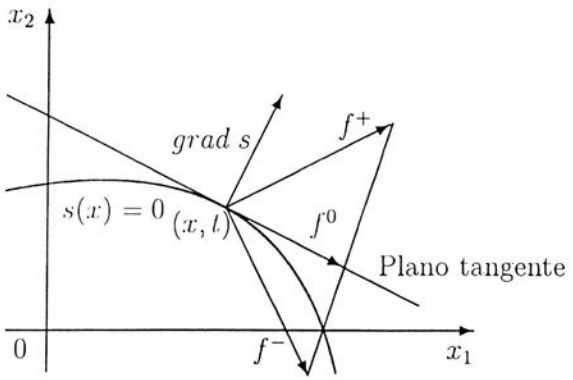


Figura 26: Método de Filippov.

em sistemas reais, não ocorre sobre as superfícies descontínuas, mas dentro de uma camada limite, em que os componentes do controle possuem valores entre $u(x,t) = u^+(x,t)$ e $u(x,t) = u^-(x,t)$.

Nos sistemas atuais, todos os dispositivos responsáveis por mudanças descontínuas da função de controle sempre possuem imperfeições, tais como atrasos, histerese, etc. Na situação descrita, as imperfeições fazem com que o chaveamento da ação de controle ocorra a uma freqüência finita e a trajetória de estado oscile em uma certa vizinhança da superfície de chaveamento.

Para eliminar a ambigüidade do comportamento do sistema sobre o limite descontínuo, algumas não-idealidades que sempre estão presentes devem ser consideradas, resultando em modos deslizantes reais. As equações para o deslizamento real são obtidas quando as não-idealidades tendem a zero. Discute-se a seguir, dois casos de não-idealidades, mostrando-se que quando introduzidas no sistema descrito por (4.1) e (4.2), elas levam aos mesmos resultados descritos pela equação (4.7) [4].

Histerese: Considere que o elemento que executa o chaveamento possua uma histerese. Então, a função $u(x,t)$, descrita em (4.2) será da forma

$$u(x,t) = \begin{cases} u^+(x,t) & \text{se} \quad s(x(t)) > \Delta \\ u^-(x,t) & \text{se} \quad s(x(t)) < -\Delta \end{cases} \qquad (\Delta = constante),$$

e na região $|s(x(t))| \leq \Delta$, a função $u(x,t)$ mantém o valor que possuía, quando $|s(x(t))|$ era igual a Δ.

Em um sistema ideal (com $\Delta = 0$), a condição para o modo deslizante

$$\lim_{s(x(t))\to 0^+} \dot{s}(x(t)) < 0 \quad e \quad \lim_{s(x(t))\to 0^-} \dot{s}(x(t)) > 0,$$

ainda é válida, implicando que nas vizinhanças da superfície descontínua $s(x(t)) = 0$, as trajetórias de estado estão direcionadas a ela. A histerese fará com que as trajetórias de estado não se movam exatamente sobre a superfície, mas que oscilem sobre uma vizinhança de largura 2Δ (Fig. 27 [21]). Para determinar a velocidade média associada com o movimento, deve-se primeiro encontrar o deslocamento na trajetória $\Delta x(t)$ sobre dois intervalos vizinhos (em um deles $u(x,t)$ é igual a $u^-(x,t)$ e no outro igual a $u^+(x,t)$).

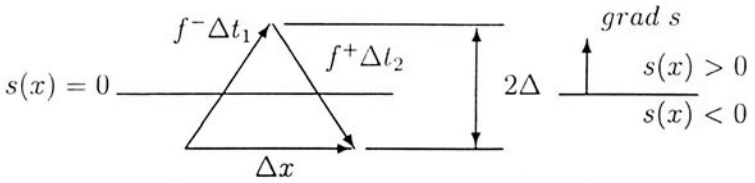


Figura 27: Modo deslizante em sistema com histerese.

Logo,

$$\Delta x(t) = f^-\Delta t_1 + f^+\Delta t_2,$$

sendo que Δt_1 e Δt_2 são os tempos de duração dos intervalos definidos como

$$\Delta t_1 = \frac{2\Delta}{grad\ s\ f^-} \quad \text{e} \quad \Delta t_2 = -\frac{2\Delta}{grad\ s\ f^+}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\Delta x(t) &= \frac{2\Delta f^-}{grad\ s\ f^-} - \frac{2\Delta f^+}{grad\ s\ f^+} \\ &= \frac{2\Delta grad\ s\ f^+f^- - 2\Delta grad\ s\ f^-f^+}{[grad\ s\ f^-][grad\ s\ f^+]}.\end{aligned}$$

Determina-se, então, a velocidade média

$$\begin{aligned}f^0(x,t,u) &= \frac{\Delta x(t)}{\Delta t_1 + \Delta t_2} \\ &= \frac{\frac{2\Delta grad\ s\ f^+f^- - 2\Delta grad\ s\ f^-f^+}{[grad\ s\ f^-][grad\ s\ f^+]}}{\frac{2\Delta grad\ s\ f^+ - 2\Delta grad\ s\ f^-}{[grad\ s\ f^-][grad\ s\ f^+]}} \\ &= \frac{grad\ s\ f^+f^- - grad\ s\ f^-f^+}{grad\ s\ f^+ - grad\ s\ f^-} \\ &= \frac{grad\ s\ f^+}{grad\ s\ [f^+ - f^-]}f^- - \frac{grad\ s\ f^-}{grad\ s[f^+ - f^-]}f^+ \\ &= \frac{grad\ s\ f^-}{grad\ s[f^- - f^+]}f^+ - \frac{grad\ s\ f^+}{grad\ s\ [f^- - f^+]}f^-. \qquad (4.8)\end{aligned}$$

Comparando as equações (4.7) e (4.8), verifica-se que o vetor velocidade acima encontrado coincide com aquele obtido através do método de Filippov.

Atraso: Considere que o controle possua descontinuidades não no instante em que o sinal de $s(x(t))$ muda, mas após um atraso τ, desta mudança de sinal. Em tal sistema, as trajetórias de estado, que se movem da região $s(x(t)) < 0$, alcançam a superfície descontínua $s(x(t)) = 0$ (ponto 1 na Fig. 28 [21]) e continuam se movendo durante um intervalo de tempo τ, através da trajetória associada ao controle $u(x,t)$, igual a $u^-(x,t)$ (ou $f(x,t,u) = f^-$). No tempo τ (ponto 2 na Fig. 28), o controle chaveia de $u^-(x,t)$ para $u^+(x,t)$ e, durante Δt_1, as trajetórias de estado se movem a uma taxa de f^+, para a superfície descontínua $s(x(t)) = 0$ (ponto 3 na Fig. 28). O chaveamento de $u^+(x,t)$ para $u^-(x,t)$ ocorre após um período τ (ponto 4 na Fig. 28). Desta maneira, um movimento com a velocidade de estado f^- se inicia e após um período Δt_2, resulta no encontro com a superfície descontínua (ponto 5 na Fig. 28). Para determinar a velocidade média, leva-se em consideração o deslocamento $\Delta x(t)$ (vetor 1-5 na Fig. 28) e os intervalos Δt_1 e Δt_2:

$$\Delta x(t) = f^-\tau + f^+\Delta t_1 + f^+\tau + f^-\Delta t_2,$$

sendo:

$$\Delta t_1[grad\ s\ f^+] + \tau[grad\ s(x(t))f^-] = 0,$$
$$\Delta t_1 = -\frac{grad\ s\ f^-}{grad\ s\ f^+}\tau \quad \text{e}$$
$$\Delta t_2[grad\ s\ f^-] + \tau[grad\ s\ f^+] = 0,$$
$$\Delta t_2 = -\frac{grad\ s\ f^+}{grad\ s\ f^-}\tau.$$

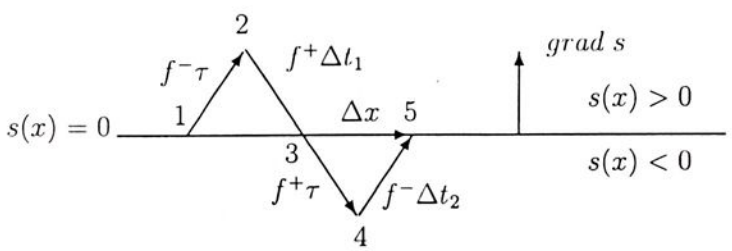


Figura 28: Modo deslizante em sistema com atraso.

Os valores resultantes determinam a velocidade média

$$f^0(x,t,u) = \frac{\Delta x(t)}{2\tau + \Delta t_1 + \Delta t_2}$$
$$= \frac{grad\ s\ f^-}{grad\ s\ [f^- - f^+]}f^+ - \frac{grad\ s\ f^+}{grad\ s\ [f^- - f^+]}f^+. \qquad (4.9)$$

Comparando as equações (4.7) e (4.9), verifica-se que o vetor velocidade acima encontrado coincide com aquele obtido através do método de Filippov.

Deve-se notar que, em ambos os casos, os resultados equivalentes ao descrito pelo método de Filippov foram obtidos sem o processo de limite que assume que a largura do ciclo de histerese de 2Δ, no primeiro caso e, o tempo de atraso τ, no segundo caso, tendam a zero. Contudo, o limite está implicitamente contido no fato de que os vetores f^+, f^- e *grad s* são constantes, porque estas condições somente são válidas no caso extremo em que as deflexões do ponto em consideração tendem a zero.

4.2 Controle com Estrutura Variável e Observação de Sistemas Não-Lineares

Recentemente, várias publicações têm sido dedicadas ao tópico de controle de sistemas não-lineares e/ou incertos. Uma aproximação para o problema de controle de sistemas não-lineares é a linearização do sistema sobre uma trajetória nominal e então, a aplicação da bem conhecida teoria de controle linear. Uma desvantagem deste método é que as leis de controle linear são válidas somente quando as trajetórias estiverem em uma vizinhança das trajetórias nominais.

Outra aproximação seria encontrar uma transformação não-linear que converta o sistema para a forma canônica controlável, ou outra forma linear equivalente, em que o projeto do controlador seja facilitado. A desvantagem deste método é que a construção de uma transformação apropriada não é, geralmente, trivial.

Um dos métodos mais atrativos, que pode ser aplicado em muitos sistemas não-lineares, resultando em controladores que são robustos para erros de modelagem e distúrbios desconhecidos no sistema, é o Controle com Estrutura Variável.

CEV é o controle de sistemas dinâmicos com realimentação de estados descontínua. O conceito desta teoria se baseia na mudança da estrutura do controlador, em resposta às mudanças dos estados do sistema, para que se obtenha a resposta desejada. Isto é realizado através do uso de uma lei de controle de chaveamento de alta velocidade, que força a trajetória do sistema a se manter em uma determinada superfície por todo o tempo subseqüente. O sistema é insensível à variação de certos parâmetros e distúrbios, enquanto as trajetórias estiverem sobre a superfície. Se o vetor de estado não estiver acessível, então a implementação de um observador adequado é uma solução para a obtenção de um controlador.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16

A questão da observação de sistemas não-lineares também tem recebido grande atenção na literatura. Aqui, também, uma aproximação para o problema é a linearização da equação do erro do observador sobre os pontos constantes de operação do sistema. Assim, além do fato de o projeto do observador ser válido apenas nas vizinhanças destes pontos operacionais constantes, o projeto não é feito independentemente da estratégia de controle. Isto sugere que tal observador não funcionaria bem quando combinado com uma lei de controle não constante.

Outro método para a observação dos estados de sistemas não-lineares, seria encontrar uma transformação que leve o sistema existente para a forma canônica observável, de modo que o projeto de um observador seja simplificado. Como antes mencionado, na estratégia de controle similar, encontrar uma transformação apropriada é, em geral, difícil se não impossível. Um problema comum em tais aproximações é que as não-linearidades da planta devem ser incorporadas, direta ou indiretamente, na dinâmica do observador.

A síntese combinada do controlador/observador envolve três passos. O primeiro é o projeto do controlador, assumindo a disponibilidade do vetor de estado. O segundo passo é o projeto do observador de estado. O observador deverá utilizar apenas a entrada e a saída da planta. O último passo é a combinação dos dois primeiros passos em uma estratégia de controle que utilize os valores estimados do vetor de estado ao invés dos reais.

A seguir é apresentada uma metodologia de projeto de controladores e observadores de estado com estrutura variável e modos deslizantes, para sistemas não-lineares, descrita em [70].

4.2.1 Descrição do sistema e definições básicas

Considere o sistema dinâmico modelado pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [A + \Delta A(t,x)]x + f(t,x) + B[u + w(t,x)], \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{4.10}$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle, $y \in \mathbb{R}^p$ a saída do sistema ($p \geq m$), $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz característica do sistema, $\Delta A(t,x)$ representando a incerteza na matriz característica do sistema, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ a matriz de entrada do sistema, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ a matriz de saída do sistema, $f(t,x)$ representando as não-linearidades da planta e $w(t,x)$ representando as não-linearidades ou distúrbios na entrada do sistema.

cm 1 2 3 4 5 6 unesp 11 12 13 14 15 16

Para propósitos de existência, assume-se que $\Delta A(t,x)$, $f(t,x)$ e $w(t,x)$ são contínuos e que as matrizes B e C têm posto completo. Além disso, considera-se que as seguintes condições são válidas:

A1 Existem funções $h(.) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $d(.) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, de maneira que $f(t,x) = Bh(t,x)$, $\Delta A(t,x)x = Bd(t,x)$. Estas hipóteses recebem o nome de incertezas, não-linearidades e distúrbios casados.

Então, define-se:

$$v(t,x) = \begin{bmatrix} v_1(t,x) \\ \vdots \\ v_m(t,x) \end{bmatrix} = h(t,x) + d(t,x)x + w(t,x); \tag{4.11}$$

A2 Existem funções contínuas, positivas, limitadas por valores reais, $r_i(.)$ e $\rho(.)$, de maneira que:

$$|v_i(t,x)| < r_i(t,x),\ i = 1, \ldots, m \text{ e } ||v(t,x)|| \leq \rho(t).$$

A3 O par (A,B) é completamente controlável e o par (A,C) é completamente observável.

Portanto, o sistema descrito em (4.10) pode ser simplificado para a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B[u + v(t,x)], \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{4.12}$$

sendo que $v = v(t,x)$ representa o conjunto de incertezas e/ou não-linearidades.

4.2.2 Projeto do Controlador

O projeto de um CEV se baseia na escolha das superfícies de chaveamento, na especificação das funções de controle descontínuas e na determinação da lógica de chaveamento associada às superfícies descontínuas. As superfícies de chaveamento são, normalmente, hiperplanos fixos no espaço de estados, passando através da origem, cuja intersecção forma o subespaço deslizante. O objetivo do projeto é levar o estado do sistema, de uma condição inicial arbitrária, para a intersecção das superfícies de chaveamento. Assim que o estado começa a deslizar, a ação de controle é necessária apenas para manter o estado sobre a intersecção destas superfícies ou em sua vizinhança.

cm 1 2 3 4 5 6 unesp 11 12 13 14 15 16

O sistema equivalente, que corresponde ao comportamento no deslizamento, deve ser assintoticamente estável, para que haja garantia de que o estado alcance a origem dentro do modo deslizante. O modo deslizante estável é assegurado através da escolha adequada das superfícies de chaveamento. Isto forma o primeiro estágio do projeto de um CEV. A questão da determinação do conjunto de hiperplanos que dará um comportamento adequado ao modo deslizante é descrito como sendo a questão da existência.

Uma vez resolvida a questão da existência, o segundo estágio no procedimento de projeto envolve a seleção de um controle, de maneira a assegurar que o modo deslizante seja atingido. Por esta razão, a questão da determinação de uma estrutura de controle e dos ganhos associados, que irão garantir a existência do modo deslizante, é chamada questão de alcançabilidade. A solução da questão de alcançabilidade é dependente das superfícies de chaveamento, já que as funções de controle são descontínuas sobre elas e, portanto, não podem ser alcançadas sem que a questão da existência tenha sido resolvida.

O transiente de um sistema com estrutura variável consiste, portanto, em dois estágios independentes: num movimento, preferencialmente rápido, que traga o estado do sistema para a superfície em que o modo deslizante ocorra e num movimento deslizante mais lento, durante a qual o estado deslize para a origem do espaço de estados, enquanto permanece no subespaço deslizante. Este comportamento de dois estágios pode ajudar a resolver o conflito entre as exigências opostas de exatidão estática e dinâmica que são encontradas no projeto de sistemas de controle lineares, porque o sistema de CEV pode ser projetado para dar uma resposta rápida sem perda de estabilidade, regulação de estado assintótica, insensibilidade a uma classe de variações de parâmetros e invariância a certos distúrbios externos [5].

Em um modo deslizante, para o caso da superfície de chaveamento linear $s(x(t)) = Sx(t) = 0$, $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e posto $(S) = m$, o sistema equivalente de ordem $n - m$ deve satisfazer à dinâmica estabelecida previamente no deslizamento, considerando-se as m equações algébricas $s(x(t)) = 0$. O uso de ambas as limitações reduz a ordem do sistema para um modelo de ordem $(n - m)$. Especificamente, deve-se supor que o sistema não-linear é restrito à superfície de chaveamento. Então, é possível resolver para m variáveis de estado, em termos das $(n - m)$ variáveis de estado restantes, se o posto$(S) = m$. Para obter a solução, deve-se resolver o sistema para m variáveis de estado, em termos das $(n - m)$ restantes. Substitui-se, então, estas relações nas $(n - m)$ equações restantes e as equações correspondentes às m variáveis de estado. O sistema de ordem $(n-m)$ resultante descreve completamente o sistema equivalente, dada uma condição inicial, satisfazendo à

cm 1 2 3 4 5 6 unesp 11 12 13 14 15 16

condição $Sx(t) = 0$ [68].

Como no modo deslizante, $S\dot{x} = 0$, obtem-se

$$S\dot{x} = S[Ax + B(u + v)] = SAx + SB(u + v) = 0 \Rightarrow u_{eq} = -(SB)^{-1}SAx - v.$$

Assim, o sistema equivalente, de ordem reduzida, é descrito por

$$\begin{cases} \dot{x} = [I - B(SB)^{-1}S]Ax, \\ \qquad Sx = 0. \end{cases}$$

É fácil de se verificar que $B(SB)^{-1}$ possui posto m e $[I - B(SB)^{-1}S]$ posto $(n - m)$. Portanto, a matriz $A_{eq} = [I - B(SB)^{-1}S]A$, no sistema equivalente, pode ter no máximo $(n - m)$ autovalores não nulos. Nosso objetivo é escolher S, de modo que os autovalores não nulos de A_{eq} sejam valores com parte real negativa e os autovetores correspondentes $\{w_1, \ldots, w_{n-m}\}$ sejam escolhidos de maneira que permaneçam sobre a superfície de chaveamento. Assim, $W = [w_1 \ldots w_{n-m}]$, $W \in \mathbb{R}^{n\times(n-m)}$. Sabe-se que a completa controlabilidade do par (A, B) é equivalente à existência de um controlador da forma $u = -Kx$, de maneira que os autovalores de $(A - BK)$ possam ser alocados arbitrariamente.

Se considerarmos $K = (SB)^{-1}SA$, temos que $(A - BK)$ deve possuir $(n - m)$ autovalores com parte real negativa $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-m}\}$ e $(n - m)$ autovetores correspondentes $\{w_1, \ldots, w_{n-m}\}$. Isto equivale a $(A - BK)W = WJ$, sendo $J = diag[\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-m}]$.

Considere $R(T)$ o *range* do operador T. Desde que SB seja não-singular e $SW = 0$, tem-se que $R(B) \cap R(W) = \{0\}$. Então, deve-se escolher inversas B^g, W^g, de B e W, respectivamente, de maneira que $B^gW = 0$ e $W^gB = 0$. Escolhe-se $\{w_1, \ldots, w_{n-m}\}$ de maneira que W^gB seja satisfeita. Obseve que $R(B) \cap R(W) = \{0\}$ é verificado em $W^gB = 0$. Agora, pode-se determinar S. Se for escolhido $B^g = S$, então $SB = I$ e $SW = 0$. Assim, a superfície de chaveamento é determinada de modo que $\{x \in \mathbb{R}^n \mid s(x) = Sx = 0\}$. Suponhamos que $|v_i(t, x)| < r_i(t, x)$, $i = 1, \ldots, m$, sendo que $v(t, x) = [v_1(t, x), \ldots, v_m(t, x)]^T$ é definido por (4.11) e $r_i(t, x) > 0$.

Considera-se

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} -r_1(t,x)\text{sign}(s^TSb_1) \\ \vdots \\ -r_m(t,x)\text{sign}(s^TSb_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \vdots \\ \bar{u}_m \end{bmatrix},$$

sendo que b_i é a i-ésima coluna da matriz B, e $s(x(t)) = Sx(t)$ e $\text{sign}(\varpi)$ é igual a 1,

quando $\varpi > 0$ e igual a -1, quando $\varpi < 0$. Pode-se verificar que se

$$u = -(SB)^{-1}SAx + \bar{u} \tag{4.13}$$

então, $s^T\dot{s} < 0$.

Portanto, com a lei de controle anteriormente descrita, consegue-se um modo deslizante. Realmente,

$$\begin{aligned}
s^T\dot{s} &= s^TS\dot{x} \\
&= s^TS[Ax - B(SB)^{-1}SAx + B\bar{u} + Bv(t,x)] \\
&= s^TSB[\bar{u} + v(t,x)] \\
&= \sum_{i=1}^{m} s^TSb_i[\bar{u}_i + v_i(t,x)] \\
&= \sum_{i=1}^{m} s^TSb_i[-r_i(t,x)\text{sign } s^TSb_i + v_i(t,x)] \\
&\leq \sum_{i=1}^{m}(-r_i(t,x) + |v_i(t,x)|)\,|s^TSb_i| < 0,
\end{aligned}$$

se $s^TSb_i \neq 0$.

Uma desvantagem da lei de controle descrita pela equação (4.13) é que ela é descontínua e isto pode ser uma dificuldade em implementações práticas causando, por exemplo, fadiga mecânica. Adicionalmente, quando as trajetórias do sistema estiverem sobre a superfície de chaveamento, ocorrerá um rápido chaveamento dos termos de controle $\bar{u}_i$, tendendo a excitar os modos de alta freqüência da planta. Este problema pode ser atenuado através da inserção de uma camada limite sobre as superfícies de chaveamento.

Considere o vetor $\epsilon = [\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m]^T$, sendo $\epsilon_i > 0$, para $i = 1, \ldots, m$. Substituindo $\bar{u}$ na equação (4.13) por $\bar{u}(\epsilon)$, sendo $\bar{u}(\epsilon) = [\bar{u}_i(\epsilon_1), \ldots, \bar{u}_m(\epsilon_m)]^T$, obtém-se:

$$\bar{u}_i(\epsilon_i) = \begin{cases} -r_i(t,x)\text{sign}(s^TSb_i) & |s(x(t))^Tb_i| \geq \epsilon_i \\ \frac{-r_i(t,x)s^TSb_i}{\epsilon_i} & |s(x(t))^Tb_i| < \epsilon_i \end{cases}.$$

O desempenho deste controlador contínuo pode ser feito arbitrariamente próximo do desempenho do controlador descontínuo correspondente, selecionando-se ϵ_i suficientemente pequeno.

cm 1 2 3 4 5 6 unesp 11 12 13 14 15 16

4.2.3 Observação dos estados

Considere o sistema modelado pela equação (4.12), com o objetivo de construir um observador de estado. Considere $\bar{x}$ os estados estimados de x, obtidos pelo observador. Então, a equação do observador, para o sistema linear ($v(t,x) = 0$), será descrita por:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= A\bar{x} + Bu + G(y - \bar{y}) \\ &= A\bar{x} + Bu + Gy - GC\bar{x} \\ &= (A - GC)\bar{x} + Gy + Bu. \end{aligned} \tag{4.14}$$

O erro é descrito por $e = \bar{x} - x$ e a sua derivada em relação ao tempo por

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{\bar{x}} - \dot{x} \\ &= (A - GC)\bar{x} + Gy + Bu - Ax - Bu \\ &= A\bar{x} - GC\bar{x} + GCx - Ax \\ &= A(\bar{x} - x) - GC(\bar{x} - x) \\ &= (A - GC)(\bar{x} - x) \\ &= (A - GC)e. \end{aligned} \tag{4.15}$$

A observabilidade de (A, C) implica na existência de uma matriz G, de maneira que $(A - GC)$ tenha autovalores com parte real negativa arbitrariamente posicionados.

Considere, então, uma candidata a função de Lyapunov na forma quadrática

$$V(e) = e^T P e,$$

em que P é uma matriz real simétrica e definida positiva. A derivada desta função em relação ao tempo, ao longo de qualquer trajetória, é descrita por

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} \\ &= [(A - GC)e]^T P e + e^T P[(A - GC)e] \\ &= (Ae - GCe)^T P e + e^T P(Ae - GCe) \\ &= (e^T A^T - e^T C^T G^T) P e + e^T P(Ae - GCe) \\ &= e^T A^T P e - e^T C^T G^T P e + e^T P A e - e^T P G C e \end{aligned}$$

$$= e^T(A^TP + PA - C^TG^TP - PGC)e. \tag{4.16}$$

Isto significa que, para qualquer matriz real simétrica definida positiva $Q = Q^T > 0$, pode-se resolver

$$(A - GC)^TP + P(A - GC) = -Q.$$

Escolhendo-se Q, de modo que, para algum $F \in \mathbb{R}^{m\times p}$, $FC = B^TP$. Se tais Q e F existirem, então a função $T(s) = FC[sI - A + GC]^{-1}B$ é ERP.

Define-se, então, a função

$$E(e,\rho) = \begin{cases} \rho\frac{BFCe}{\|FCe\|} & FCe \neq 0 \\ 0 & FCe = 0 \end{cases},$$

sendo que $\rho(t)$ obedece à condição A2. Assim, a equação completa do observador é descrita por

$$\dot{\bar{x}} = (A - GC)\bar{x} - E(e,\rho) + Gy + Bu. \tag{4.17}$$

Teorema 41 *[70] A função $\bar{x}$ é uma estimativa assintótica do estado x, isto é*

$$\lim_{t\to\infty} e = \lim_{t\to\infty}(\bar{x} - x) = 0$$

e o erro tende a zero exponencialmente.

Introduz-se, agora, uma versão modificada do observador. Este novo observador é mais fácil de ser implementado do que a estrutura descrita anteriormente.

Considere $\tilde{C} = [\tilde{c}_1^T, \ldots, \tilde{c}_m^T]^T = FC$, em que $\tilde{c}_i \in \mathbb{R}^{1\times n}$. Pela suposição A2, pode-se encontrar $\bar{\rho}(t) = [\bar{\rho}_1, \ldots, \bar{\rho}_m]^T$, de maneira que

$$|v_i(t,x)| < \bar{\rho}_i(t,u) \quad i = 1, \ldots, m.$$

Define-se a seguinte função

$$\bar{E}(e,\bar{\rho}) = B\begin{bmatrix} z_1(e,\bar{\rho}_1(t,u)) \\ \vdots \\ z_m(e,\bar{\rho}_m(t,u)) \end{bmatrix},$$

sendo

$$z_i(e,\bar{\rho}_i) = \begin{cases} \bar{\rho}_i(t,u)\mathrm{sign}(\tilde{c}_ie) & \tilde{c}_ie \neq 0 \\ 0 & \tilde{c}_ie = 0 \end{cases}$$

cm 1 2 3 4 5 6 unesp 11 12 13 14 15 16

Considere o observador de estado não-linear, descrito por

$$\dot{\tilde{x}} = (A - GC)\tilde{x} - \bar{E}(e, \bar{\rho}) + Gy + Bu. \tag{4.18}$$

Então, segue o seguinte:

Teorema 42 *[70] A função $\tilde{x}$ é uma estimativa assintótica do estado x, isto é*

$$\lim_{t\to\infty} e = \lim_{t\to\infty} (\tilde{x} - x) = 0$$

e o erro tende a zero exponencialmente.

Devido à lei de controle de sistemas com estrutura variável, uma desvantagem do observador, descrito por (4.18), é que o termo $\bar{E}(e, \bar{\rho})$ é descontínuo. O observador é particularmente vulnerável a excitações de modos de alta freqüência, se o observador for projetado de maneira que o tempo de resposta seja rápido. Pode-se implementar uma camada limite para superar este problema.

Substitui-se, então, o termo $\bar{E}(e, \bar{\rho})$ por $\bar{E}_\epsilon(e, \bar{\rho})$, sendo

$$\bar{E}_\epsilon(e, \bar{\rho}) = B \begin{bmatrix} z_{\epsilon_1}(e) \\ \vdots \\ z_{\epsilon_m}(e) \end{bmatrix}$$

e

$$z_{\epsilon_i}(e, \bar{\rho}_i) = \begin{cases} \bar{\rho}_i(t,u)\text{sign}(\tilde{c}_i e) & |\tilde{c}_i e| \geq \epsilon_i \\ \frac{\bar{\rho}_i(t,u)\tilde{c}_i e}{\epsilon_i} & |\tilde{c}_i e| < \epsilon_i \end{cases}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Embora tenha sido dada uma interpretação para a condição $FC = B^T P$, esta interpretação não ajuda no projeto do observador. A seguir, é dada um procedimento para a construção das matrizes F e C [70].

Passo 1: Escolher $G \in \mathbb{R}^{n\times p}$, de maneira que $(A - GC)$ tenha autovalores prescritos no semi-plano esquerdo;

Passo 2: Resolver a equação matricial $C^T F^T = PB$, para os elementos de P, em termos dos elementos de F. Obter relações entre os elementos de F, de maneira que a simetria de P seja preservada. Chame o resultado deste passo de P_F;

Passo 3: Formar $Q(P_F) = -[(A - GC)^T P_F + P_F(A - GC)]$;

cm 1 2 3 4 5 6 unesp 11 12 13 14 15 16

Passo 4: Escolher os elementos de $Q(P_F)$, de maneira que $\Delta_i[Q(P_F)] > 0$, para $i = 1, \ldots, n$, sendo que $\Delta_i[Q(P_F)] > 0$ denota o i-ésimo menor principal líder de $Q(P_F)$. Isto pode ser conseguido trabalhando-se com sucessivas submatrizes de $Q(P_F)$ e escolhendo-se os elementos de P_F, de maneira que os determinantes destas submatrizes sejam positivos. Adicionalmente, nomeando-se os elementos livres da matriz P_F para zero, simplifica esta tarefa;

Passo 5: Avaliar $P = P_F$ e substituir os valores correspondentes de volta em F. Utilizar as relações entre os elementos de F, encontrados no passo 2 e complete F. Esta escolha de P e F irá garantir que a condição $C^T F^T = PB$ seja satisfeita.

O Teorema 43, proposto nesta tese, apresenta a condição necessária e suficiente para a obtenção de um observador de estados $\{A - GC, B, FC\}$ que é ERP.

Teorema 43 *Considere o sistema $\{A, B, FC\}$, com um observador de estados $\{A - GC, B, FC\}$. O sistema $\{A - GC, B, FC\}$ é ERP se e somente se existirem matrizes $P = P^T$, L e F que satisfazem às seguintes LMIs:*

$$PA + A^T P - LC - C^T L^T < 0, \tag{4.19}$$

$$B^T P = FC, \tag{4.20}$$

$$P > 0. \tag{4.21}$$

Neste caso, a matriz G é dada por:

$$G = P^{-1} L. \tag{4.22}$$

Prova De acordo com o Lema 1, o sistema $\{A - LC, B, FC\}$ é ERP se e somente se as seguintes LMIs forem satisfeitas:

$$P(A - LC) + (A - LC)^T P < 0, \tag{4.23}$$

$$B^T P = FC, \tag{4.24}$$

$$P > 0. \tag{4.25}$$

As expressões (4.24) e (4.25) correspondem às expressões (4.20) e (4.21), respectivamente. Definindo-se $G = PL$, a LMI (4.23) corresponde à LMI (4.19). □

cm 1 2 3 4 5 6 unesp 11 12 13 14 15 16

4.2.4 Síntese do controlador-observador

Anteriormente, foram discutidos o controlador e o observador, separadamente. Agora, o observador será utilizado para prover uma estimativa dos estados como a entrada para um CEV (Fig. 29 [21]) e, neste caso, não se deve esperar que os estados se mantenham sobre a superfície de chaveamento.

Como $\bar{x}(t) = x + e$, então a trajetória dos estados, em modo deslizante, não estará precisamente sobre $s(x) = 0$, mas ao longo de $s(\bar{x}) = s(x + e) = 0$. Assim, o estado irá oscilar sobre a superfície. A meta é mostrar que o estado estimado $\bar{x}$, do observador, irá permanecer sobre a superfície $\{\bar{x} \mid s(\bar{x}) = 0\}$. Desde que $\bar{x}$ tende a x, tem-se que x estará sobre a superfície de chaveamento, quando $\bar{x}$ estiver em modo deslizante.

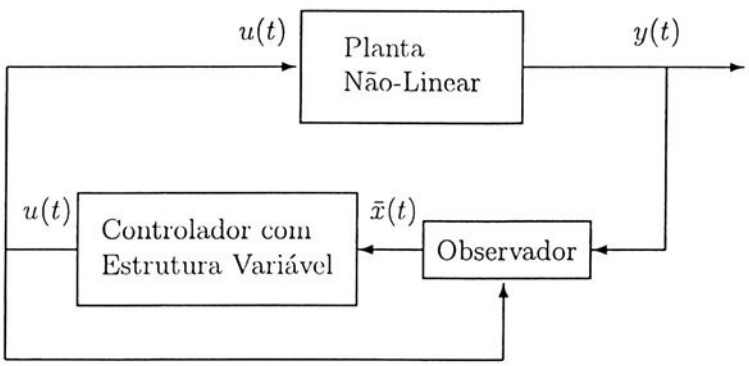


Figura 29: Configuração do Controlador-Observador.

A planta e o observador possuem a seguinte forma:
planta:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Bv(t, x),$$
$$y = Cx,$$

observador:

$$\dot{\bar{x}} = (A - GC)\bar{x} - E(e, \rho) + Gy + Bu.$$

A condição para que ocorra o deslizamento do sistema composto pelo controlador e pelo observador é $S\bar{x} = 0$ e $S\dot{\bar{x}} = 0$. Mais explicitamente:

$$S(A - GC)\bar{x} + SGy - SE(e, \rho) + SBu_{eq} = 0,$$
$$SA\bar{x} - SGC\bar{x} + SGCx - SE(e, \rho) + SBu_{eq} = 0,$$
$$SA\bar{x} - SGC\bar{x} + SGC(\bar{x} - e) - SE(e, \rho) + SBu_{eq} = 0,$$

$$SA\bar{x} - SGC\bar{x} + SGC\bar{x} - SGCe - SE(e,\rho) + SBu_{eq} = 0,$$
$$SA\bar{x} - SGCe - SE(e,\rho) + SBu_{eq} = 0.$$

Resolvendo para u_{eq}, chega-se ao controle equivalente:

$$u_{eq} = -(SB)^{-1}SA\bar{x} + (SB)^{-1}SE(e,\rho) + (SB)^{-1}SGCe.$$

A substituição de u_{eq} na equação do observador leva a:

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{x}} &= (A - GC)\bar{x} + Gy - E(e,\rho) + Bu_{eq} \\
&= A\bar{x} - GC\bar{x} + GCx - E(e,\rho) - B(SB)^{-1}SA\bar{x} + B(SB)^{-1}SGCe + \\
&\quad B(SB)^{-1}SE(e,\rho) \\
&= A\bar{x} - GC\bar{x} + GC(\bar{x} - e) - E(e,\rho) - B(SB)^{-1}SA\bar{x} + B(SB)^{-1}SGCe + \\
&\quad B(SB)^{-1}E(e,\rho) \\
&= A\bar{x} - GC\bar{x} + GC\bar{x} - GCe - E(e,\rho) - B(SB)^{-1}SA\bar{x} + B(SB)^{-1}SGCe + \\
&\quad B(SB)^{-1}SE(e,\rho) \\
&= [I - B(SB)^{-1}S]A\bar{x} + [I - B(SB)^{-1}S](-GCe) + [I - B(SB)^{-1}S](-E(e,\rho)). \\
&= [I - B(SB)^{-1}S](A\bar{x} - GCe - E(e,\rho)). \qquad (4.26)
\end{aligned}$$

Como $e = \bar{x} - x$ e, portanto, $\dot{e} = \dot{\bar{x}} - \dot{x}$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\dot{e} &= (A - GC)\bar{x} - E(e,\rho) + Gy + Bu - Ax - Bu - Bv \\
&= A\bar{x} - GC\bar{x} - E(e,\rho) + GCx - Ax - Bv \\
&= A\bar{x} - GC\bar{x} - E(e,\rho) + GC(\bar{x} - e) - Ax - Bv \\
&= A\bar{x} - GC\bar{x} - E(e,\rho) + GC\bar{x} - GCe - Ax - Bv \\
&= A(\bar{x} - x) - E(e,\rho) - GCe - Bv \\
&= Ae - E(e,\rho) - GCe - Bv \\
&= (A - GC)e - E(e,\rho) - Bv. \qquad (4.27)
\end{aligned}$$

Deste modo, (4.26) e (4.27) descrevem o sistema composto pelo controlador e pelo observador, em modo deslizante.

Observação 34 *No sistema composto pelo controlador e pelo observador, não é possível*

cm 1 2 3 4 5 6 unesp 11 12 13 14 15 16

garantir a estabilidade, isto é, não se conhecem resultados que garantem a estabilidade deste sistema de controle completo.

Resumindo, existem dois passos básicos no projeto de um CEV:

(a) O projeto da superfície de chaveamento, para que o comportamento do sistema tenha certas propriedades pré-estabelecidas sobre a superfície. Por exemplo, a superfície de chaveamento é projetada de maneira que o sistema seja assintoticamente estável sobre ela;

(b) O projeto da estratégia de controle de maneira a levar o sistema para a superfície de chaveamento e mantê-lo sobre ela por todo o tempo subseqüente.

4.3 Controle com Estrutura Variável Utilizando Sistemas ERP

Considere a planta incerta e com distúrbios descrita em (4.10)–(4.12), cuja forma final é dada em (4.12), sendo $x(t)$ não disponível e $y(t)$ disponível. Suponha a existência de matrizes $K_o \in \mathbb{R}^{m\times p}$ e $F \in \mathbb{R}^{m\times p}$ de modo a tornar o sistema controlado descrito na Fig. 3 e dado por $\{A - BK_oC, B, FC\}$ ERP. Assim, pelo Lema 1, existe $P = P^T$ tal que:

$$\begin{gathered} P(A - BK_oC) + (A - BK_oC)^T P < 0, \\ B^T P = FC, \\ P > 0. \end{gathered}$$

Adote a lei de controle:

$$u(t) = -K_o y - \beta(y,t)\text{sign}(Fy),$$

sendo $\beta(y,t) \in \mathbb{R}$ e $\beta(y,t) > 0$. Então, de (4.12), considerando a candidata a função de Lyapunov $V(x) = x^T Px$ e observando que $B^T Px = FCx$ e $|v(t,x)| \leq \rho(t) > 0$, então:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^T \left\{P(A - BK_oC) + (A - BK_oC)^T P\right\} x - x^T PB\left(\beta(y,t)\text{sign}(Fy) - \right. \\ &\quad \left. v(t,x)\right) - \left(\beta(y,t)\text{sign}(Fy)^T - v(t,x)^T\right) B^T Px \\ &\leq x^T \left\{P(A - BK_oC) + (A - BK_oC)^T P\right\} x - 2|Fy|\left(\beta(y,t) - \rho(t)\right), \end{aligned}$$

sendo que $|Fy|$ é igual à soma dos módulos dos elementos do vetor Fy. Logo, adotando-se $\beta(y,t) > \rho(t)$, então $\dot{V}(x)$ é definida negativa e o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema

controlado é globalmente assintoticamente estável.

Agora, será demonstrado que, sob certas condições, este sistema pode apresentar modos deslizantes. Este estudo será apenas ilustrativo, pois a análise acima é suficiente para exemplificar a eficiência do sistema de controle proposto para esta planta incerta, não-linear e com distúrbios, parcialmente desconhecidos.

Defina a nova saída do sistema (4.12), $y_o = Fy$. Note que, como $\{A - BK_oC, B, FC\}$ é ERP, então $FCB = B^TPB$ é simétrica e definida positiva. Assim, para provar que $y_o(t) \to 0$, $t \to \infty$ e pode gerar modos deslizantes, observe que:

$$V_o(y_o) = \frac{y_o^T(FCB)^{-1}y_o}{2}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}(y_o) &= y_o^T(FCB)^{-1}\dot{y}_o = y_o^T(FCB)^{-1}F\dot{y} = y_o^T(FCB)^{-1}FC\dot{x} \\
&= y_o^T\left[(FCB)^{-1}FCAx - (\beta(y,t)\text{sign}(y_o) - v(t,x))\right] \\
&\leq |y_o|\,||(FCB)^{-1}FCA||\,||x|| + |y_o|\,(-\beta(y,t) + \rho(t))\,.
\end{aligned}$$

Assim, se $\beta(y,t) > ||(FCB)^{-1}FCA||\,||x|| + \rho(t)$, $\dot{V}(y_o) < 0$ para $y_o \neq 0$ e $\dot{V}(0) = 0$. Desta forma, $y_o(t) \to 0$, $t \to \infty$. Se $\beta(y,t)$ for suficientemente grande, teremos modos deslizantes em $y_o = 0$.

4.4 Conclusões Parciais do Capítulo

Neste capítulo, foi apresentada a teoria e os métodos de projeto de controladores e observadores com EVMD. Inicialmente, foi apresentado o conceito de modos deslizantes. Em seguida, foi apresentado o projeto dos controladores e dos observadores, utilizando os modos deslizantes.

A teoria apresentada neste capítulo aplica-se a sistemas de controle com realimentação das variáveis de estado, diretamente ou através de observadores. Na Seção 4.3, o conceito de modos deslizantes foi aplicado a sistemas de controle com acesso somente às saídas da planta. No próximo capítulo, são descritas as condições, em termos de LMIs, para o controle com estrutura variável de sistemas com incertezas politópicas, com acesso somente às saídas da planta.

cm 1 2 3 4 5 6 unesp 11 12 13 14 15 16

5 *Controle com Estrutura Variável Utilizando Sistemas ERP e LMIs*

Na Seção 2.6, foram apresentadas condições em termos de LMIs para a síntese de sistemas ERP com plantas incertas. Neste capítulo, são descritos os métodos de projeto de CEV para sistemas com incertezas paramétricas e sujeitos a distúrbios, considerando robustez paramétrica, taxa de decaimento e restrições na entrada e na saída.

Considere o sistema incerto descrito por (5.1):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\alpha)x + B(\alpha)(u + \xi(t,x)), \\ y &= C(\alpha)x, \end{aligned} \tag{5.1}$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$, $p \geq m$ e $\alpha \in \mathbb{R}^r$ dado por:

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{bmatrix}, \tag{5.2}$$

sendo $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, r$ constantes desconhecidas, com $\alpha_1 + \ldots + \alpha_r = 1$.

A lei de controle é dada por:

$$u = -K_o y - \beta \text{sign}(Fy). \tag{5.3}$$

São admitidas as seguintes hipóteses:

B1 O vetor x não está disponível, mas o vetor y está disponível para medição;

B2 As matrizes com incertezas $A(\alpha)$ e $C(\alpha)$ são constantes, mas desconhecidas e des-

critas por:

$$A(\alpha) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i A_i \text{ e } C(\alpha) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i C_i,$$

sendo $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, r$ constantes desconhecidas, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_r = 1$ e as matrizes A_i e C_i, $i = 1, \ldots, r$ conhecidas (incertezas politópicas);

B3 Definindo-se $|\xi(t,x)| = ||\xi(t,x)||_1 = |\xi_1(t,x)| + \ldots + |\xi_m(t,x)|$, sendo que $\xi(t,x)^T = [\xi_1(t,x), \ldots, \xi_m(t,x)]$, então, existem e são conhecidas constantes positivas a e b, tais que $|\xi(t,x)| \leq a|x| + b$;

B4 A matriz $B(\alpha) = B + \Delta B$, sendo $\Delta B = B\Delta\tilde{B}$. Existem e s :ao conhecidas $l_i, i = 1, \ldots, m$, tais que $1 + \Delta\tilde{B}_{i,i} - |\Delta\tilde{B}_{i,1}| - \ldots - |\Delta\tilde{B}_{i,i-1}| - |\Delta\tilde{B}_{i,i+1}| - \ldots - |\Delta\tilde{B}_{i,m}| > l_i > 0$, $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$, e define-se $l = \min\{l_1, l_2, \ldots, l_m\}$.

A condição B3 é usual em CEV [69]. A condição B1 considera o CEV com acesso somente às saídas da planta, estudada por exemplo em [6, 15–18]. O método de projeto proposto nesta seção é mais geral que os resultados anteriores, pois apenas o método proposto considera estabilidade, taxa de decaimento, robustez e restrições no sinal. A condição B2 é geral, pois permite incertezas arbitrárias politópicas em $A(\alpha)$ e $C(\alpha)$. Por exemplo, considere $C(\alpha) = [\ c_1 \quad c_2\ ]$, sendo que as constantes $c_1 \in [2,3]$ e $c_2 \in [4,5]$ são desconhecidas. Então, para todo c_1 e c_2 factível, existem constantes $\beta_i \in [0,1], i = 1, \ldots, 4$, satisfazendo às condições $\beta_1 + \beta_2 = 1$ e $\beta_3 + \beta_4 = 1$, de modo que $c_1 = 2\beta_1 + 3\beta_2$ e $c_2 = 4\beta_3 + 5\beta_4$. Agora, note que $c_1 = (\beta_3 + \beta_4)(2\beta_1 + 3\beta_2) = 2\beta_1\beta_3 + 2\beta_1\beta_4 + 3\beta_2\beta_3 + 3\beta_2\beta_4$ e $c_2 = (\beta_1 + \beta_2)(4\beta_3 + 5\beta_4) = 4\beta_1\beta_3 + 5\beta_1\beta_4 + 4\beta_2\beta_3 + 5\beta_2\beta_4$. Então, definindo-se $\alpha_1 = \beta_1\beta_3$, $\alpha_2 = \beta_1\beta_4$, $\alpha_3 = \beta_2\beta_3$ e $\alpha_4 = \beta_2\beta_4$, note que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$ e $C(\alpha) = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \alpha_3 C_3 + \alpha_4 C_4$, sendo $C_1 = [\ 2 \quad 4\ ]$, $C_2 = [\ 2 \quad 5\ ]$, $C_3 = [\ 3 \quad 4\ ]$ e $C_4 = [\ 3 \quad 5\ ]$. A incerteza em $\Delta\tilde{B}$, dada em B4, é também usual, mas é possível relaxar esta condição, como mostrado em [71].

5.1 Estabilidade e Robustez

Para a análise da estabilidade do sistema incerto (5.1), com as condições B1–B4, uma candidata a função de Lyapunov é:

$$V(x,\alpha) = x^T P(\alpha) x,\ P(\alpha) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i P_i, \tag{5.4}$$

sendo $P_i = P_i^T > 0$, $i = 1, \ldots, r$.

cm 1 2 3 4 5 6 unesp 11 12 13 14 15 16

Considere a existência de $P(\alpha) = P(\alpha)^T$, K_o e F, de modo que, dadas $A(\alpha)$ e $C(\alpha)$ satisfazendo B2 e $B(\alpha)$ obedecendo à Hipótese B4, as equações abaixo sejam satisfeitas:

$$P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - P(\alpha)B(\alpha)K_o C(\alpha) - C(\alpha)^T K_o^T B(\alpha)^T P(\alpha) < 0, \tag{5.5}$$

$$B(\alpha)^T P(\alpha) = FC(\alpha). \tag{5.6}$$

$$P(\alpha) > 0, \tag{5.7}$$

para todo α_i, $i = 1, \ldots, r$, admissível. Então, para a lei de controle (5.3), de (5.1), B1–B4 e (5.5)–(5.3) chega-se a (5.8), pois:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x,\alpha) &= [A(\alpha)x - B(\alpha)K_o y - B(\alpha)\beta\text{sign}(Fy) + B(\alpha)\xi]^T P(\alpha)x + \\
&\quad x^T P(\alpha)[A(\alpha)x - B(\alpha)K_o y - B(\alpha)\beta\text{sign}(Fy) + B(\alpha)\xi] \\
&= [A(\alpha)x - B(\alpha)K_o C(\alpha)x - B(\alpha)\beta\text{sign}(Fy) + \\
&\quad B(\alpha)\xi]^T P(\alpha)x + x^T P(\alpha)[A(\alpha)x - B(\alpha)K_o C(\alpha)x - \\
&\quad B(\alpha)\beta\text{sign}(Fy) + B(\alpha)\xi] \\
&= x^T A(\alpha)^T P(\alpha)x - x^T C(\alpha)^T K_o^T B(\alpha)^T P(\alpha)x - \\
&\quad [B(\alpha)\beta\text{sign}(Fy) - B(\alpha)\xi]^T P(\alpha)x + x^T P(\alpha)A(\alpha)x - \\
&\quad x^T P(\alpha)B(\alpha)K_o C(\alpha)x - x^T P(\alpha)[B(\alpha)\beta\text{sign}(Fy) - B(\alpha)\xi] \\
&= x^T[P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - P(\alpha)B(\alpha)K_o C(\alpha) - \\
&\quad C(\alpha)^T K_o^T B(\alpha)^T P(\alpha)]x + 2x^T P(\alpha)B(\alpha)(-\beta\text{sign}(Fy) + \xi).
\end{aligned}$$

Mas, $B(\alpha) = B(I + \Delta\tilde{B})$, então:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x,\alpha) &= x^T[P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - P(\alpha)B(I + \Delta\tilde{B})K_o C(\alpha) - \\
&\quad C(\alpha)^T K_o(I + \Delta\tilde{B})^T B^T P(\alpha)]x + 2x^T P(\alpha)B(I + \Delta\tilde{B})(-\beta\text{sign}(Fy) + \xi).
\end{aligned}$$

Também, $B^T P(\alpha) = FC(\alpha)$, assim:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x,\alpha) &= x^T[P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T F^T(I + \Delta\tilde{B})K_o C(\alpha) - \\
&\quad C(\alpha)^T K_o(I + \Delta\tilde{B})^T FC(\alpha)]x + 2x^T P(\alpha)B(I + \Delta\tilde{B})(-\beta\text{sign}(Fy) + \xi) \\
&= x^T[P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T F^T K_o C(\alpha) - \\
&\quad C(\alpha)^T F^T \Delta\tilde{B}K_o C(\alpha) - C(\alpha)^T K_o FC(\alpha) -
\end{aligned}$$

cm 1 2 3 4 5 6 unesp 11 12 13 14 15 16

$$
\begin{aligned}
& C(\alpha)^T K_o \Delta\tilde{B}^T F C(\alpha)]x + 2x^T P(\alpha) B(I + \Delta\tilde{B})(-\beta \text{sign}(Fy) + \xi) \\
&= x^T [P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T (F^T K_o + K_o F) C(\alpha) - \\
& C(\alpha)^T (F^T \Delta\tilde{B} K_o + K_o \Delta\tilde{B}^T F) C(\alpha)]x + \\
& 2x^T P(\alpha) B(I + \Delta\tilde{B})(-\beta \text{sign}(Fy) + \xi) \\
&= x^T [P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T (F^T K_o + K_o F) C(\alpha)]x - \\
& x^T C(\alpha)^T F^T \Delta\tilde{B} K_o C(\alpha)x - x^T C(\alpha)^T K_o \Delta\tilde{B}^T F C(\alpha)x + \\
& 2x^T P(\alpha) B(I + \Delta\tilde{B})(-\beta \text{sign}(Fy) + \xi) \\
&= x^T [P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T (F^T K_o + K_o F) C(\alpha)]x - \\
& y^T F^T \Delta\tilde{B} K_o y - y^T K_o \Delta\tilde{B}^T F y + 2x^T C(\alpha)^T F^T (I + \Delta\tilde{B})(-\beta \text{sign}(Fy) + \xi) \\
&= x^T [P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T (F^T K_o + K_o F) C(\alpha)]x - \\
& 2y^T F^T \Delta\tilde{B} K_o y + 2y^T F^T (I + \Delta\tilde{B})(-\beta \text{sign}(Fy) + \xi) \\
&= x^T [P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T (F^T K_o + K_o F) C(\alpha)]x + J, \qquad (5.8)
\end{aligned}
$$

sendo:

$$J = -2y^T F^T \Delta\tilde{B} K_o y + 2y^T F^T (I + \Delta\tilde{B})(-\beta \text{sign}(Fy) + \xi).$$

Então, a partir de B4 e definindo-se $y^T F^T = \begin{bmatrix} f_1 & \dots & f_m \end{bmatrix}$, note que:

$$
\begin{aligned}
J &\leq |2y^T F^T \Delta\tilde{B} K_o y| + |2y^T F^T (I + \Delta\tilde{B})\xi| - 2y^T F^T (I + \Delta\tilde{B})\beta \text{sign}(Fy) \\
&\leq 2\,|y^T F^T|\,|\Delta\tilde{B} K_o y| + 2\,|y^T F^T|\,|I + \Delta\tilde{B}|\,|\xi| - 2y^T F^T (I + \Delta\tilde{B})\beta \text{sign}(Fy) \\
&\leq 2\,|y^T F^T|\,|\Delta\tilde{B} K_o y| + 2\,|y^T F^T|\,|I + \Delta\tilde{B}|(a|x| + b) - 2\beta f_1 \left[(1 + \Delta\tilde{B}_{1,1})\text{sign}(f_1) + \right. \\
& \left. \Delta\tilde{B}_{1,2}\text{sign}(f_2) + \ldots + \Delta\tilde{B}_{1,m}\text{sign}(f_m)\right] - \ldots - 2\beta f_m \left[\Delta\tilde{B}_{m,1}\text{sign}(f_1) + \right. \\
& \left. \Delta\tilde{B}_{m,2}\text{sign}(f_2) + \ldots + (1 + \Delta\tilde{B}_{m,m})\text{sign}(f_m)\right] \\
&\leq 2\,|y^T F^T|\,|\Delta\tilde{B} K_o y| + 2\,|y^T F^T|\,|I + \Delta\tilde{B}| \times (a|x| + b) - 2\beta|f_1| \left[(1 + \Delta\tilde{B}_{1,1}) - \right. \\
& \left. |\Delta\tilde{B}_{1,2}| - \ldots - |\Delta\tilde{B}_{1,m}|\right] - \ldots - 2\beta|f_m| \left[-|\Delta\tilde{B}_{m,1}| - |\Delta\tilde{B}_{m,2}| - \ldots + \right. \\
& \left. (1 + \Delta\tilde{B}_{m,m})\right] \\
&\leq 2\,|y^T F^T|\,|\Delta\tilde{B} K_o y| + 2\,|y^T F^T|\,|I + \Delta\tilde{B}|(a|x| + b) - 2\beta \left\{|f_1| l_1 + \ldots + |f_m| l_m\right\}. \qquad (5.9)
\end{aligned}
$$

cm 1 2 3 4 5 6 unesp 11 12 13 14 15 16

De B4, $l_i \geq l$, $i = 1, \ldots, m$. Portanto,

$$J \leq 2\,|y^T F^T|\,|\Delta\tilde{B}K_o y| + 2\,|y^T F^T|\,|I + \Delta\tilde{B}|(a|x| + b) - 2\beta\,\{|f_1| + \ldots + |f_m|\}\,l.$$

Mas a norma $|y^T F^T|$ é dada por:

$$|y^T F^T| = ||y^T F^T||_1 = |f_1| + \ldots + |f_m|.$$

Logo,

$$J \leq 2\,|y^T F^T|\,|\Delta\tilde{B}K_o y| + 2\,|y^T F^T|\,|I + \Delta\tilde{B}|(a|x| + b) - 2\beta\,|y^T F^T|\,l,$$

$$J \leq 2\,|y^T F^T|\,\left\{|\Delta\tilde{B}K_o y| + |I + \Delta\tilde{B}|\,(a|x| + b) - \beta l\right\}.$$

$$J \leq 2\,|y^T F^T|\,\left\{|\Delta\tilde{B}||K_o y| + |I + \Delta\tilde{B}|\,(a|x| + b) - \beta l\right\}. \tag{5.10}$$

Então, se:

$$\beta > \frac{|\Delta\tilde{B}||K_o y| + |I + \Delta\tilde{B}|\,(a|x| + b)}{l}, \tag{5.11}$$

segue, de (5.5), (5.8) e (5.10), que $\dot{V}(x, \alpha) < 0$, para $x \neq 0$ e, portanto, (5.5)-(5.7) são condições suficientes para a estabilidade assintótica global do sistema incerto (5.1) com a lei de controle (5.3).

Para sistemas com o mesmo número de entradas e saídas, segundo o Teorema 22, a condição necessária e suficiente para a factibilidade das condições (5.5)–(5.7) é a existência de matrizes $P(\alpha) = P(\alpha)^T$, R e F que satisfazem às seguintes condições:

$$P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T(R + R^T)C(\alpha) < 0, \tag{5.12}$$

$$B(\alpha)^T P(\alpha) = FC(\alpha). \tag{5.13}$$

$$P(\alpha) > 0, \tag{5.14}$$

Da hipótese B2, então (5.13) e (5.14) são verificadas, para todo α_i, $i = 1, \ldots, r$ admissível, se e somente se,

$$B^T P_i = FC_i,\ i = 1, \ldots, r, \tag{5.15}$$

$$P_i = P_i^T > 0,\ i = 1, \ldots, r. \tag{5.16}$$

A condição (5.12) é equivalente a:

$$\left[\begin{array}{ccc} \alpha_1 I & \ldots & \alpha_r I \end{array}\right] Q \left[\begin{array}{ccc} \alpha_1 I & \ldots & \alpha_r I \end{array}\right]^T < 0,$$

cm 1 2 3 4 5 6 unesp 11 12 13 14 15 16

sendo:

$$Q = \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \cdots A_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1^T \\ \vdots \\ A_r^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \cdots P_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_1^T \\ \vdots \\ C_r^T \end{bmatrix} (R + R^T) \begin{bmatrix} C_1 \cdots C_r \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

Portanto, uma condição suficiente para (5.12) é

$$Q < 0. \quad (5.18)$$

Se as LMIs (5.15), (5.16) e (5.18), com Q definido em (5.17) (que são equivalentes a (5.12)-(5.14)) forem factíveis, então a matriz K_o pode ser obtida pela expressão $K_o = (F^T)^{-1}R$.

Seguindo as idéias descritas em [72], a LMI (5.17) pode ser flexibilizada através do Teorema 44, proposto em [12].

Teorema 44 *Considere a matriz Q dada em (5.17). Então, o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema controlado (5.1) é globalmente assintoticamente estável se existirem matrizes simétricas $P_i > 0$ e $P_{ij} \geq 0$ de modo que:*

$$Q_N = Q + \begin{bmatrix} 0 & P_{12} & \cdots & P_{1r} \\ P_{12} & 0 & \cdots & P_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{1r} & P_{2r} & \cdots & 0 \end{bmatrix} < 0. \quad (5.19)$$

Prova A matriz Q dada em (5.17) pode ser decomposta em:

$$Q = [Q_{ij}] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1r} \\ Q_{12}^T & Q_{22} & \cdots & Q_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{1r}^T & Q_{2r}^T & \cdots & Q_{rr} \end{bmatrix}.$$

Então, dada uma candidata a função de Lyapunov $V(x(t)) = x^T(t)P(\alpha)x(t)$, de (5.1) e (5.17), tem-se:

$$\dot{V}(x(t)) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^2 x^T(t) Q_{ii} x(t) + 2 \sum_{i<j}^{r} \alpha_i \alpha_j x^T(t) Q_{ij} x(t),$$

sendo que:

$$\sum_{i<j}^{r} \alpha_i \alpha_j x^T(t) Q_{ij} x(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=i+1}^{r} \alpha_i \alpha_j x^T(t) Q_{ij} x(t)$$

cm 1 2 3 4 5 6 unesp 0 11 12 13 14 15 16

Dadas as matrizes $P_{ij} = P_{ij}^T \geq 0$, segue que:

$$\sum_{i<j}^{r} \alpha_i \alpha_j x^T(t) P_{ij} x(t) \geq 0.$$

Então:

$$\dot{V}(x(t)) \leq \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^2 x^T(t) Q_{ii} x(t) + 2 \sum_{i<j}^{r} \alpha_i \alpha_j x^T(t) Q_{ij} x(t) + \sum_{i<j}^{r} \alpha_i \alpha_j x^T(t) P_{ij} x(t),$$

$$\dot{V}(x(t)) \leq \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^2 x^T(t) Q_{ii} x(t) + 2 \sum_{i<j}^{r} \alpha_i \alpha_j x^T(t) (Q_{ij} + P_{ij}) x(t),$$

$$\dot{V}(x(t)) \leq x^T(t) \begin{bmatrix} \alpha_1 I & \alpha_2 I & \cdots & \alpha_r I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12}+P_{12} & \cdots & Q_{1r}+P_{1r} \\ Q_{12}^T+P_{12} & Q_{22} & \cdots & Q_{2r}+P_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{1r}^T+P_{1r} & Q_{2r}^T+P_{2r} & \cdots & Q_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 I \\ \alpha_2 I \\ \vdots \\ \alpha_r I \end{bmatrix} x(t).$$

Portanto, se (5.19) for satisfeita, $\dot{V}(x(t)) < 0$ e o sistema será globalmente assintoticamente estável. □

Observação 35 *Para sistemas com números diferentes de entradas e saídas, as condições estabelecidas nos Teoremas 22–24 são analisadas de maneira equivalente. Na maioria dos casos, não ocorre o produto $\alpha_i \alpha_j$, o que torna a análise mais simples.*

5.2 Estabilidade, Robustez e Taxa de Decaimento

A taxa de decaimento γ é especificada pela equação

$$P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T (R + R^T) C(\alpha) < -2\gamma P(\alpha), \tag{5.20}$$

ou, de forma equivalente,

$$P(\alpha)(A(\alpha) + \gamma I) + (A(\alpha) + \gamma I)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T (R + R^T) C(\alpha) < 0. \tag{5.21}$$

De modo similar à análise de (5.12), descrita nas equações (5.17)–(5.18), uma condição suficiente para a equação (5.21) é

$$Q + \begin{bmatrix} \gamma I & \cdots & \gamma I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1 & \cdots & P_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 & \cdots & P_r \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \gamma I & \cdots & \gamma I \end{bmatrix} < 0. \tag{5.22}$$

cm 1 2 3 4 5 6 unesp 10 11 12 13 14 15 16

As LMIs (5.15), (5.16) e (5.22), com Q definido em (5.17), especificam o projeto que garante estabilidade, robustez e taxa de decaimento, para o sistema controlado.

Assim como a LMI (5.17), a LMI (5.22) pode ser flexibilizada através do Teorema 44, substituindo-se Q por Q_N, definido em (5.19).

Observação 36 *Para sistemas com números diferentes de entradas e saídas, as condições estabelecidas nos Teoremas 25–27 são analisadas de maneira equivalente. Na maioria dos casos, não ocorre o produto $\alpha_i\alpha_j$, o que torna a análise mais simples.*

5.3 Estabilidade, Robustez, Taxa de Decaimento e Restrições na Entrada e na Saída

Considere o sinal:

$$s = Hx, \tag{5.23}$$

sendo $H \in \mathbb{R}^{q\times n}$, $1 \leq q \leq n$ uma matriz constante conhecida. Devido às limitações impostas pelas aplicações práticas de sistemas de controle, muitas vezes devem ser consideradas restrições no projeto, como as descritas abaixo:

$$\max_{t\geq 0} ||s(t)|| \leq \xi_o, \tag{5.24}$$

sendo ξ_o uma constante conhecida, para uma dada condição inicial $x(0)$.

Em [42], foram apresentadas duas LMIs para a especificação destas restrições, para um sinal de controle $u = Gx$. Analisando-se a dedução deste resultado, dada no Apêndice D, observa-se que a lei de controle pode ser arbitrária, desde que exista uma função de Lyapunov $V(x) = x^T P(\alpha)x$, com $P(\alpha) = P(\alpha)^T > 0$ e $\dot{V}(x) < 0$, para $x \neq 0$.

As condições apresentadas por [42], que asseguram que a condição (5.24) é satisfeita para s dado em (5.23), são dadas por:

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) & H^T \\ H & \xi_o^2 I \end{bmatrix} > 0, \tag{5.25}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T P(\alpha) \\ P(\alpha)x(0) & P(\alpha) \end{bmatrix} > 0. \tag{5.26}$$

Considerando a definição de $P(\alpha)$ em (5.4), então (5.25) e (5.26) são, respectivamente,

equivalentes às seguintes LMIs:

$$\begin{bmatrix} P_i & H^T \\ H & \xi_o^2 I \end{bmatrix} > 0, \tag{5.27}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T P_i \\ P_i x(0) & P_i \end{bmatrix} > 0, \tag{5.28}$$

$$i = 1, \ldots, r.$$

Se for necessário especificar restrições em mais de um sinal, podemos adicionar LMIs, como as descritas em (5.27) e (5.28), para cada sinal. As LMIs que especificam estas restrições devem ser consideradas juntamente com as LMIs que garantem estabilidade, robustez e taxa de decaimento.

Para o caso especial, no qual $s = y$, com y dada em (5.1) e considerando-se a condição B5, a LMI (5.25) é equivalente a:

$$\begin{bmatrix} P_i & C_i^T \\ C_i & \xi_o^2 I \end{bmatrix} > 0,$$

$$i = 1, \ldots, r.$$

Considere, agora, o sinal de entrada:

$$u = -K_o x, \tag{5.29}$$

com a restrição descrita abaixo:

$$\max_{t \geq 0} ||u(t)|| \leq \mu_o, \tag{5.30}$$

sendo μ_o uma constante conhecida, para uma dada condição inicial $x(0)$.

As condições apresentadas por [42], que asseguram que a condição (5.30) é satisfeita para u dado em (5.29), são dadas por (5.26) e:

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) & C(\alpha)^T K_o^T \\ K_o C(\alpha) & \mu_o^2 I \end{bmatrix} > 0, \tag{5.31}$$

Considerando a definição de $P(\alpha)$ em (5.4), então (5.26) e (5.31) são, respectivamente, equivalentes às LMIs (5.28) e:

$$\begin{bmatrix} P_i & C_i^T K_o^T \\ K_o C_i & \mu_o^2 I \end{bmatrix} > 0, \tag{5.32}$$

cm 1 2 3 4 5 6 unesp 10 11 12 13 14 15 16

$$i = 1, \ldots, r.$$

Observação 37 *Considere o sinal* $s(t) = [\ s_1(t) \ \cdots \ s_q(t)\ ]$. *A análise do Controle com Estrutura Variável é baseada na norma* $||s(t)||_1 = |s_1(t)| + \ldots + |s_q(t)|$. *Entretanto, as LMIs que garantem as restrições na entrada e na saída são baseadas na norma* $||s(t)||_2 = (|s_1(t)|^2 + \ldots + |s_q(t)|^2)^{1/2}$. *Para contornar este problema, a solução é impor restrições em cada elemento do sinal* $s(t)$*:*

$$||s_i(t)||_2 \leq \xi_{oi}, \ \ i = 1, \ldots, q.$$

Assim, a norma $||s(t)||_1$ *é dada por:*

$$||s(t)||_1 = |s_1(t)| + \ldots + |s_q(t)| = (s_1(t)^2)^{1/2} + \ldots + (s_q(t)^2)^{1/2} = |s_1(t)^2|^{1/2} + \ldots + |s_q(t)^2|^{1/2}$$

$$||s(t)||_1 = ||s_1(t)||_2 + \ldots + ||s_q(t)||_2 \leq \xi_{o1} + \ldots + \xi_{oq} = \xi_o,$$

sendo $\xi_o = \xi_{o1} + \ldots + \xi_{oq}$.

5.4 Conclusões Parciais do Capítulo

Neste capítulo, foram descritas condições, em termos de LMIs, para o controle com estrutura variável de sistemas com incertezas politópicas, com acesso somente às saídas da planta. Além da estabilidade e da robustez, foram consideradas outras especificações, como taxa de decaimento, restrições na entrada e nas saídas.

O método é aplicado tanto para sistemas com o mesmo número de entradas e saídas como para sistemas com o número de saídas maior que o número de entradas.



6 *Exemplos de Aplicação*

Neste capítulo, são apresentados os resultados das simulações de alguns sistemas, abrangendo os casos discutidos nos capítulos anteriores, considerando o acesso somente às saídas da planta.

6.1 Exemplo 1

Considere a planta apresentada em [73] e dada por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{6.1}$$

sendo:

$$A = \begin{bmatrix} -3+a & 0 & 1+a \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1+a & -2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1+0.5b \\ 0 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

sendo que os parâmetros a e b pertencem aos seguintes intervalos:

$$-2 \leq a \leq 6, \;\; -1 \leq b \leq 1.$$

Para $a = -1$, a planta possui um zero de transmissão em $s_o = -2$. Para $a \neq -1$, a planta não possui zeros de transmissão.

O objetivo deste exemplo foi obter matrizes K_o e F de modo a tornar o sistema $\{A - BK_oC, B, FC\}$ ERP.

Através de um programa implementado no *Matlab*, foram obtidas as regiões de factibilidade de a e b para as LMIs apresentadas na Subseção 2.4.2. Os Teoremas 9, 10 e 12 não foram utilizados, pois o sistema não atende às suas condições, isto é, $B^T \neq (CB)^T C$ e $B \neq [\, 0 \;\; 0 \;\; 1 \,]^T$. Para executar as LMEs, foi feita uma aproximação, dada no Lema 12.

LMI, dada por $P > I$ (ou $P_N > \delta I$), para evitar que P tenha a mesma ordem de grandeza de ϵ, o que comprometeria a LME $B^T P = FC$ (ou $B^T P_N = F_N C$). As figuras seguintes apresentam as regiões de factibilidade obtidas. Os pontos factíveis são representados por um círculo ("$\circ$") e os pontos em que o programa não encontrou solução são representados por um "$\times$".

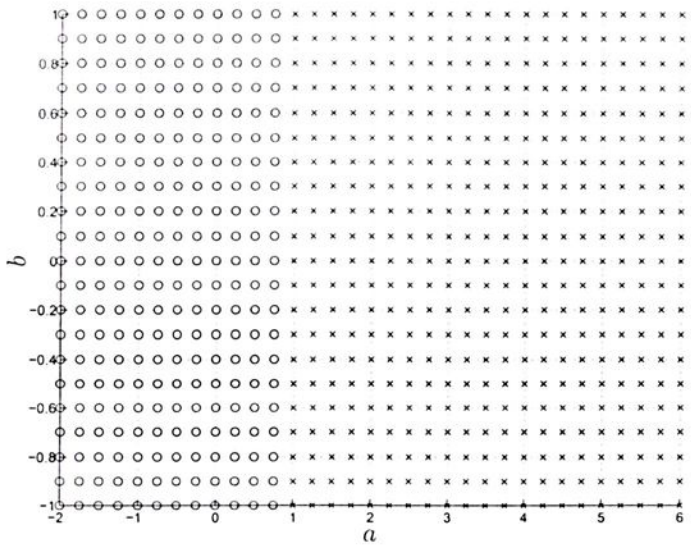


Figura 30: Região de factibilidade do item (i) do Teorema 13 para o Exemplo 1.

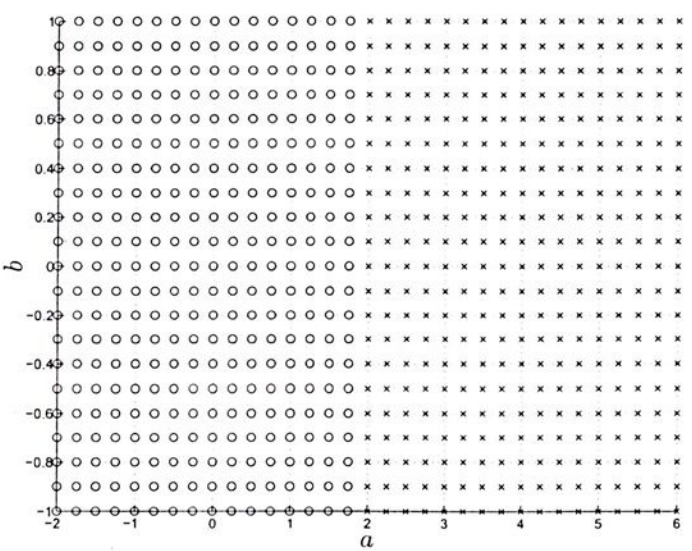


Figura 31: Região de factibilidade do item (ii) do Teorema 13 para o Exemplo 1.

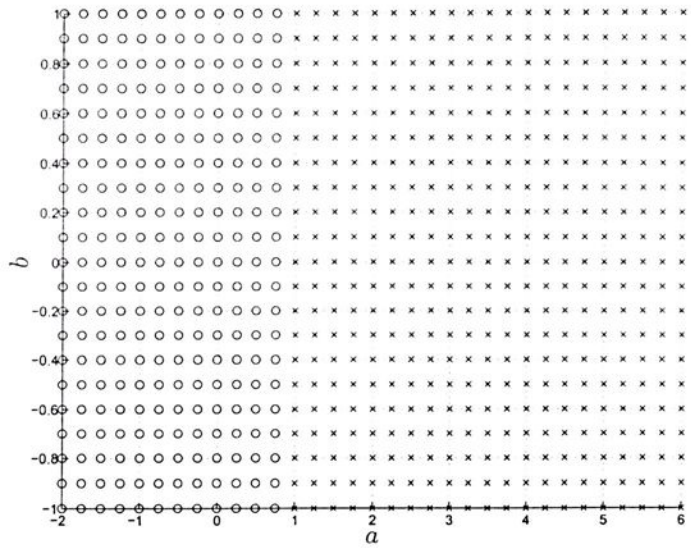


Figura 32: Região de factibilidade do item (iii) do Teorema 13 para o Exemplo 1.

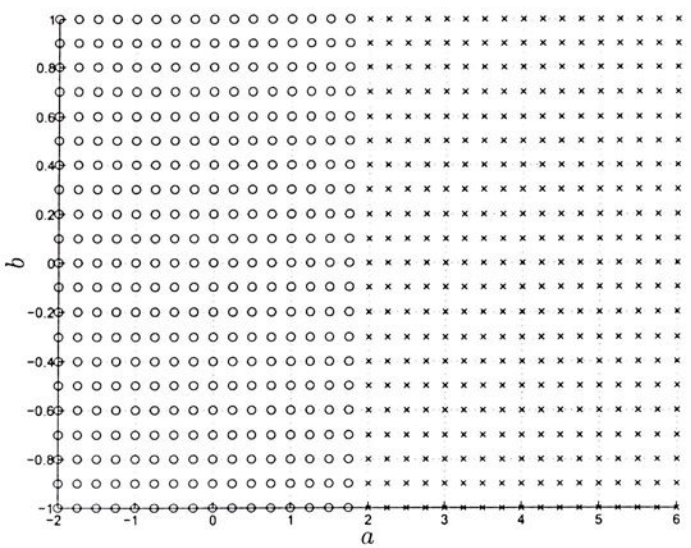


Figura 33: Região de factibilidade do item (iv) do Teorema 13 para o Exemplo 1.

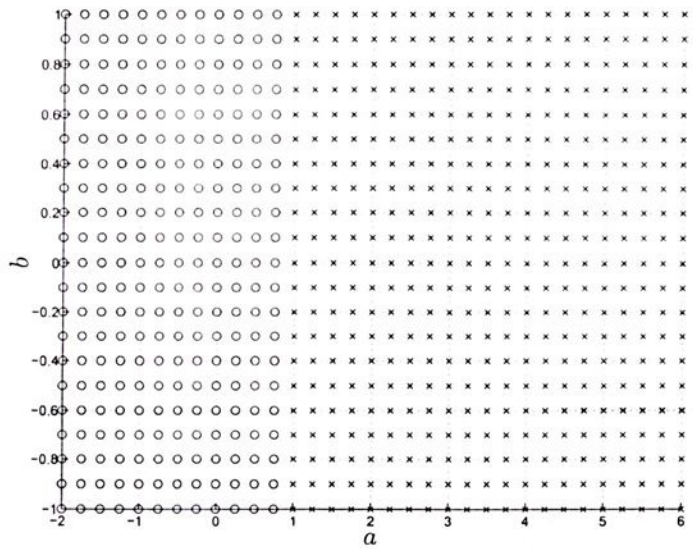


Figura 34: Região de factibilidade do item (v) do Teorema 13 para o Exemplo 1.

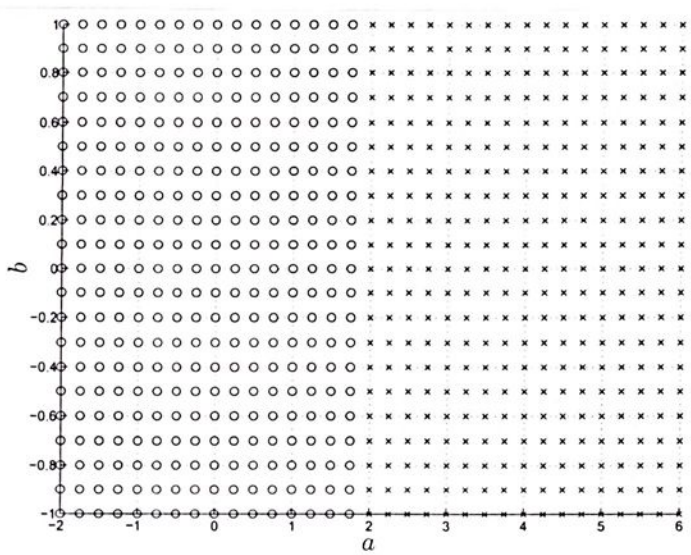


Figura 35: Região de factibilidade do item (vi) do Teorema 13 para o Exemplo 1.

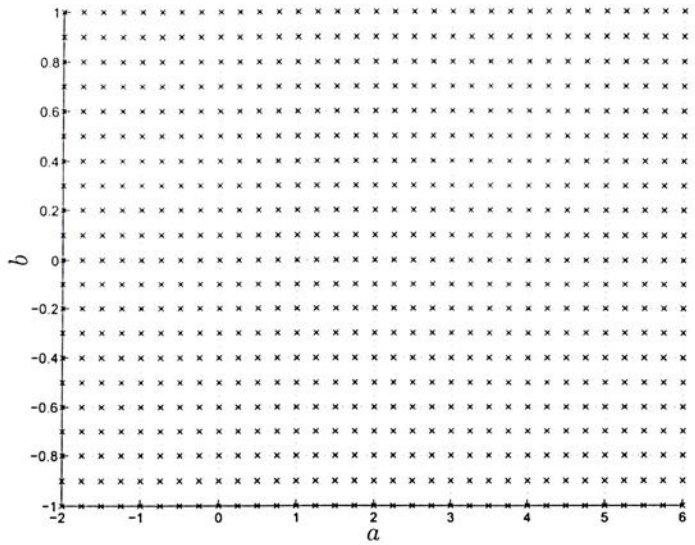


Figura 36: Região de factibilidade do item (vii) do Teorema 13 para o Exemplo 1.

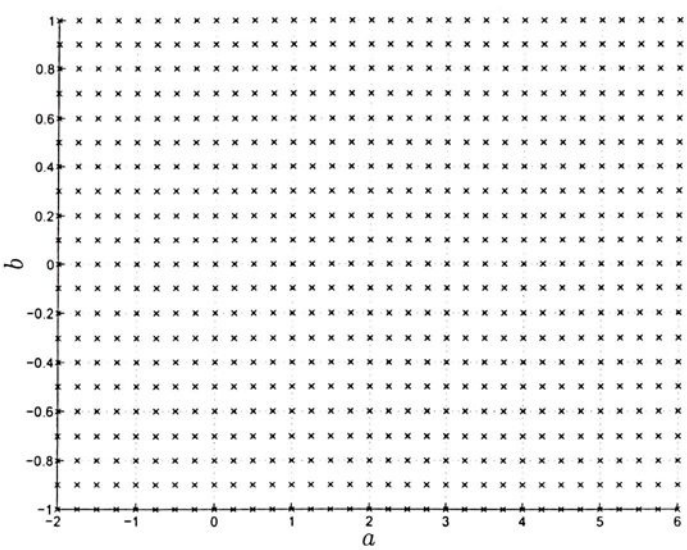


Figura 37: Região de factibilidade do item (viii) do Teorema 13 para o Exemplo 1.

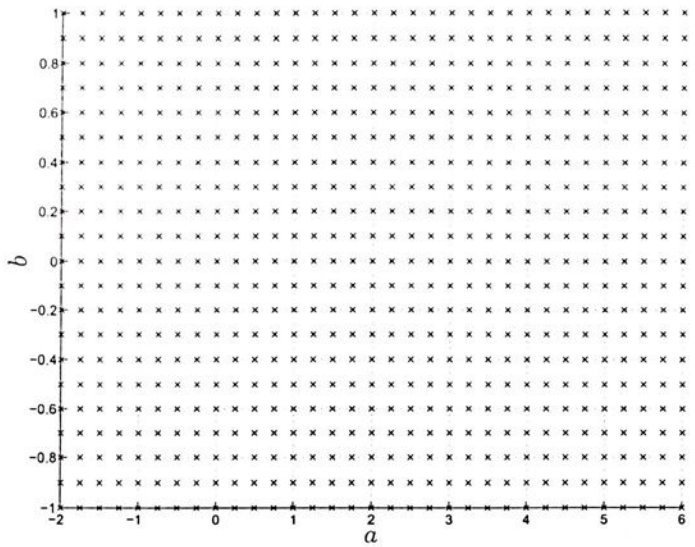


Figura 38: Região de factibilidade do item (ix) do Teorema 13 para o Exemplo 1.

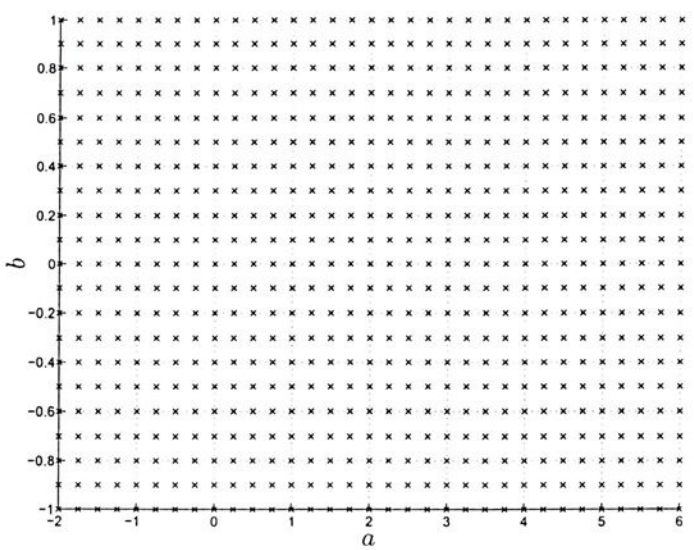


Figura 39: Região de factibilidade do item (x) do Teorema 13 para o Exemplo 1.

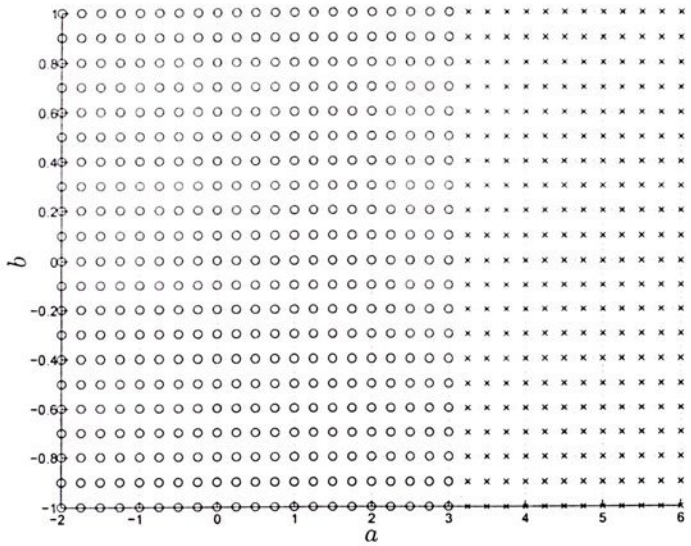


Figura 40: Região de factibilidade do item (xi) do Teorema 13 para o Exemplo 1.

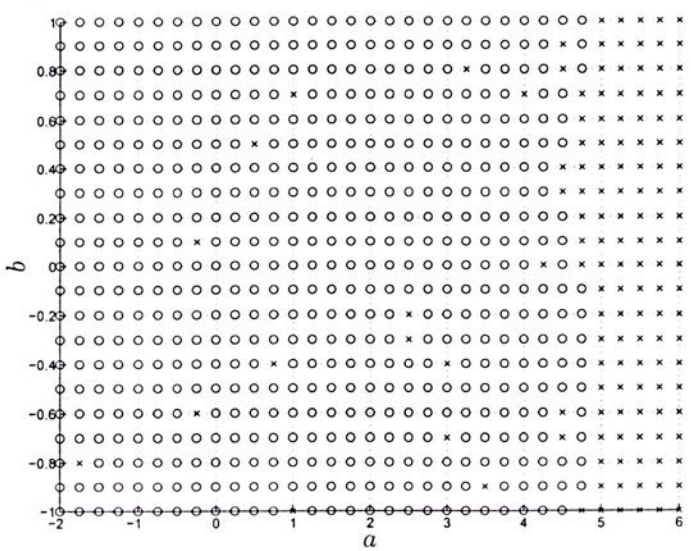


Figura 41: Região de factibilidade do Algoritmo 1 para o Exemplo 1.

A maior área factível foi obtida com o Algoritmo 1. Para o item (xi) do Teorema 13, o programa apresentou uma área factível ligeiramente menor. Para os itens (ii), (iv) e (vi) do Teorema 13, foi apresentada uma área factível menor, embora mais extensa que a área factível apresentada para os itens (i), (iii) e (v) do Teorema 13. Para itens (vii), (viii), (ix) e (x) do Teorema 13, não foram encontradas soluções.

As LMIs do item (xi) do Teorema 13 são factíveis para $a < 3$. De fato, os zeros de transmissão do sistema $\{A, B, B^T\}$ são $s_{o1} = a - 3$ e $s_{o2} = -2$. Então, de acordo com a Observação 6, a região de factibilidade do item (xi) do Teorema 13 é dada por $a < 3$.

A fim de obter uma melhor resposta transitória, procurou-se obter a máxima taxa de decaimento para as LMIs apresentadas na Subseção 2.5.2, através de um programa implementado no *LMISol*, para a planta com $a = b = 0$. Os Teoremas 16, 17 e 19 não foram utilizados, pois o sistema não atende às suas condições, isto é, $B^T \neq (CB)^T C$ e $B \neq [\ 0 \quad 0 \quad 1\ ]^T$. A Tabela 2 apresenta a máxima taxa de decaimento obtida pelos teoremas para os quais o programa encontrou soluções factíveis. Para a apresentação dos resultados, defina os zeros de transmissão do sistema $\{A, B, FC\}$ dados por $\sigma_z + \mathrm{j}\,\omega_z$ e os pólos do sistema $\{A - BK_oC, B, FC\}$ dados por $\sigma_p + \mathrm{j}\,\omega_p$.

Tabela 2: Taxas de decaimento obtidas para o Exemplo 1, com o Teorema 20.

Item	$\gamma_{\max}$	$\sigma_{z\,\max}$	$\sigma_{p\,\max}$
(i)	1.7928	−2.5000	−2.4731
(ii)	1.8029	−2.0000	−2.0000
(v)	1.9999	−2.0000	−2.0000
(vi)	1.9999	−2.0000	−2.0000
(xi)	1.9999	−2.0000	−2.2121

A máxima taxa de decaimento obtida, com o Teorema 20, foi $\gamma_{\max} = 1.9999$, através dos itens (v), (vi) e (xi). Foram encontradas outras soluções para os itens (i) e (ii). Para os outros itens, o programa não encontrou uma taxa de decaimento $\gamma > 0$.

Com o Algoritmo 2, a máxima taxa de decaimento obtida no primeiro passo foi $\gamma_{\max} = 2.4999$, com $F = [\ 0.3047 \quad 0.3555\ ]$. Os zeros de transmissão de $\{A, B, FC\}$, para o valor obtido de F foram $z_1 = -2.5000 + \mathrm{j}\ 0.5371$ e $z_2 = -2.5000 - \mathrm{j}\ 0.5371$. Utilizando os valores obtidos de γ e F, a solução obtida foi $K_o = [\ 2695.8376 \quad 3142.2078\ ]$. Os pólos do sistema de malha fechada foram $p_1 = -2.5000 + \mathrm{j}\ 0.5371$, $p_2 = -2.5000 - \mathrm{j}\ 0.5371$ e $p_3 = -5.8360 \times 10^3$.

cm 1 2 3 4 5 6 unesp 10 11 12 13 14 15 16

6.2 Exemplo 2

Considere a planta apresentada no Exemplo 1, em (6.1), com a matriz de transformação T, dada no Lema 5:

$$T = \begin{bmatrix} B_{o\perp}^T \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, a planta possui uma nova representação:

$$\begin{aligned} \dot{x}_T &= A_T x_T + B_T u, \\ y &= C_T x_T, \end{aligned} \tag{6.2}$$

sendo:

$$A_T = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1+a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1+a & 4-a & -2+a \end{bmatrix}, \quad B_T = TB = \begin{bmatrix} 0 \\ 1+0.5b \\ 1+0.5b \end{bmatrix},$$

$$C_T = CT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

sendo que os parâmetros a e b pertencem aos seguintes intervalos:

$$-2 \leq a \leq 6, \ -1 \leq b \leq 1.$$

Para $a = -1$, a planta possui um zero de transmissão em $s_o = -2$. Para $a \neq -1$, a planta não possui zeros de transmissão.

O objetivo deste exemplo foi obter matrizes K_o e F de modo a tornar o sistema $\{A - BK_oC, B, FC\}$ ERP.

Através de um programa implementado no *Matlab*, foram obtidas as regiões de factibilidade de a e b para as LMIs apresentadas na Subseção 2.4.2. O Teorema 12 não foi utilizado, pois o sistema não atende às suas condições, isto é, $B \neq [\ 0 \ \ 0 \ \ 1\ ]^T$. Para executar as LMEs, foi feita a aproximação definida no Lema 12, com $\epsilon = 10^{-5}$ e foi incluída a LMI $P > I$, equivalente a $X = P^{-1} < I$ e a $P_N > \delta I$. As figuras seguintes apresentam essas regiões de factibilidade. Os pontos factíveis são representados por um círculo ("o") e os pontos em que o programa não encontrou solução são representados por um "×".

cm 1 2 3 4 5 6 unesp 10 11 12 13 14 15 16

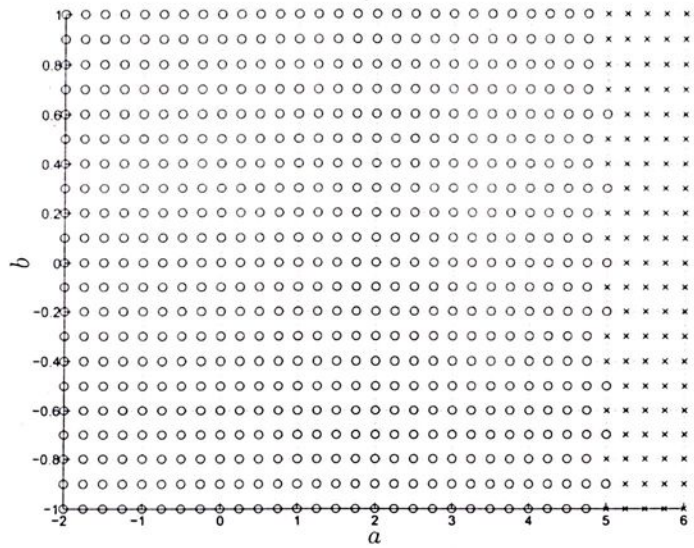


Figura 42: Região de factibilidade do Teorema 9 para o Exemplo 2.

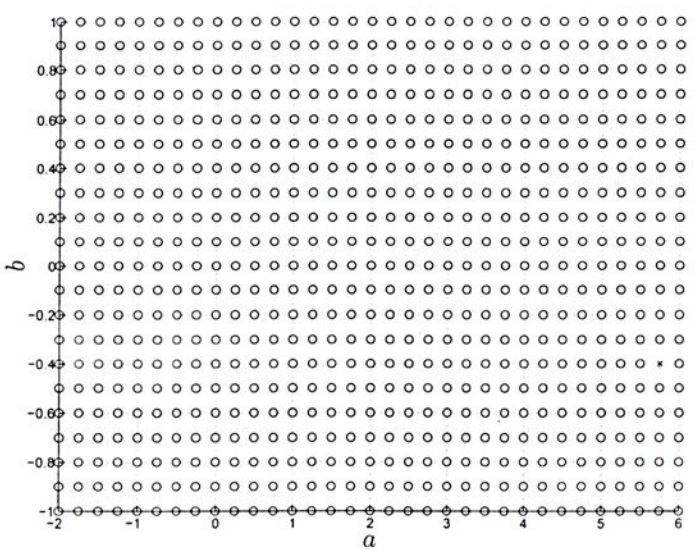


Figura 43: Região de factibilidade do Teorema 10 para o Exemplo 2.

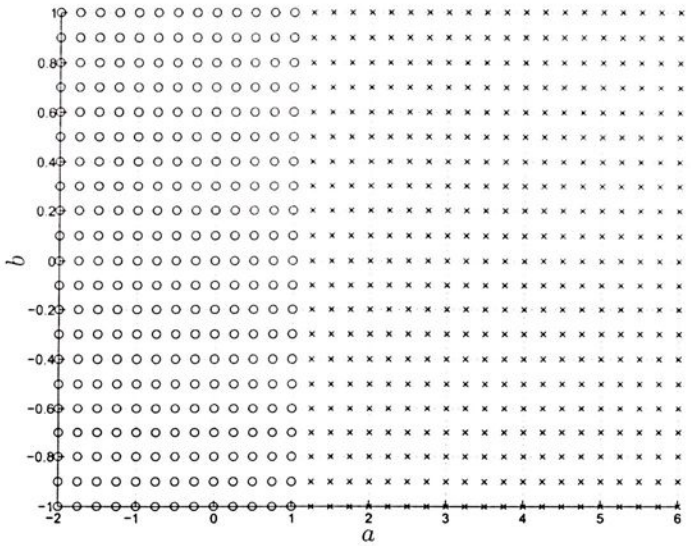


Figura 44: Região de factibilidade do item (i) do Teorema 13 para o Exemplo 2.

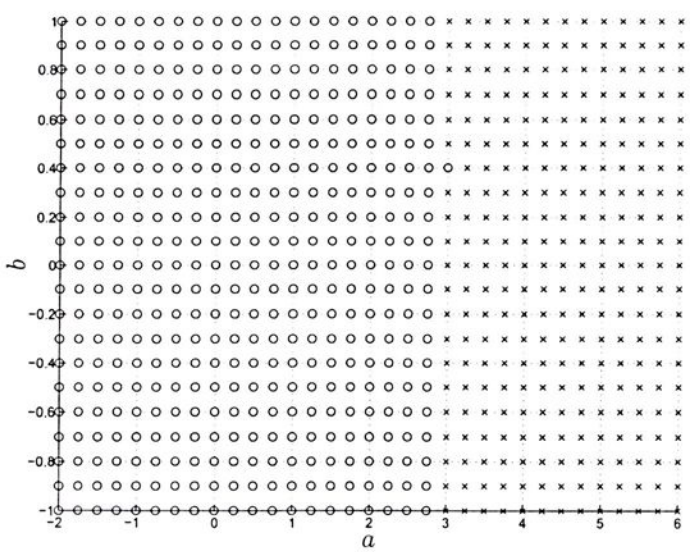


Figura 45: Região de factibilidade do item (ii) do Teorema 13 para o Exemplo 2.

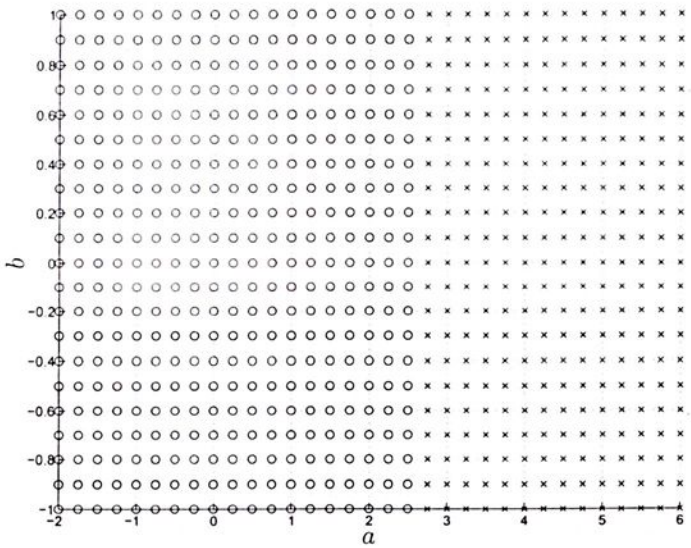


Figura 46: Região de factibilidade do item (iii) do Teorema 13 para o Exemplo 2.

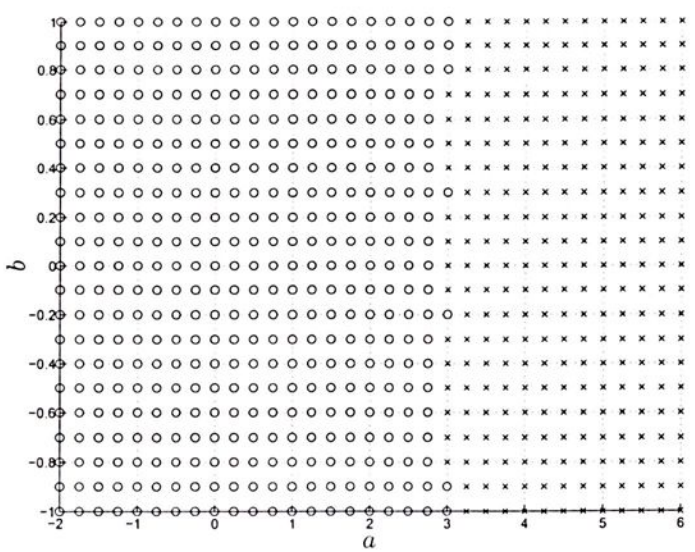


Figura 47: Região de factibilidade do item (iv) do Teorema 13 para o Exemplo 2.

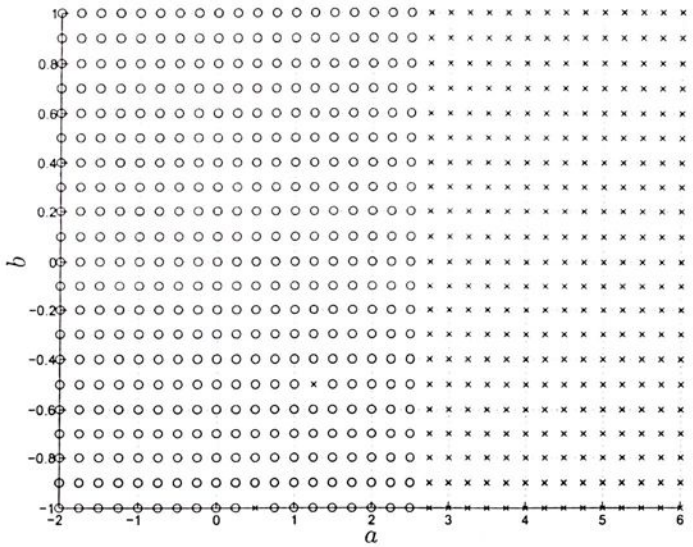


Figura 48: Região de factibilidade do item (v) do Teorema 13 para o Exemplo 2.

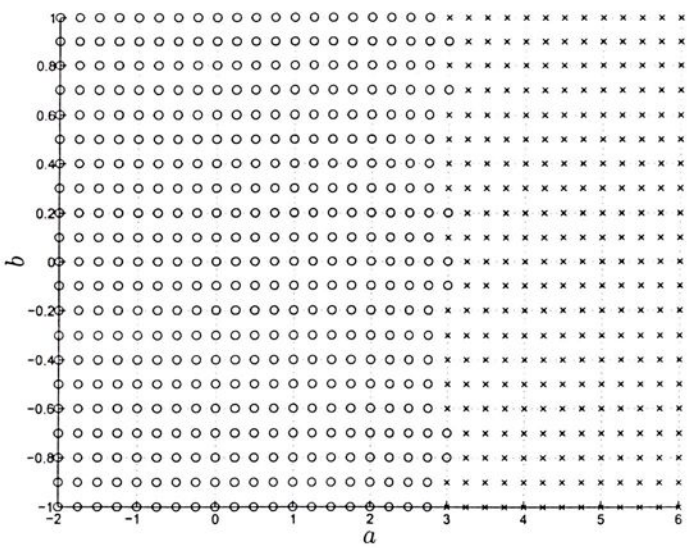


Figura 49: Região de factibilidade do item (vi) do Teorema 13 para o Exemplo 2.

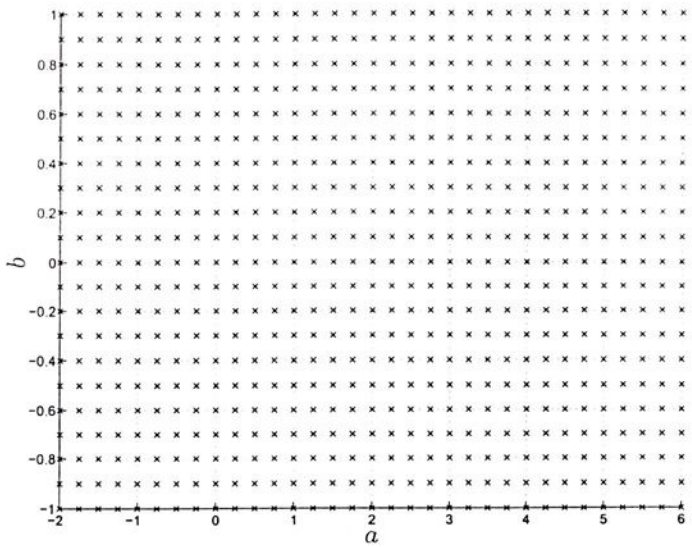


Figura 50: Região de factibilidade do item (vii) do Teorema 13 para o Exemplo 2.

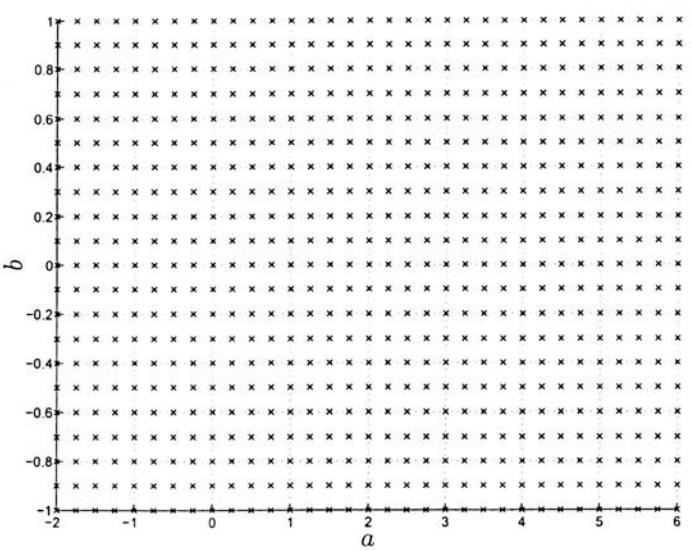


Figura 51: Região de factibilidade do item (viii) do Teorema 13 para o Exemplo 2.

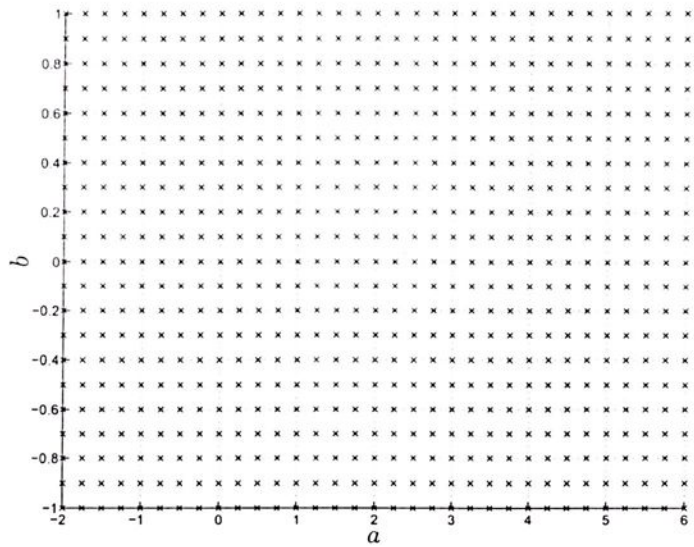


Figura 52: Região de factibilidade do item (ix) do Teorema 13 para o Exemplo 2.

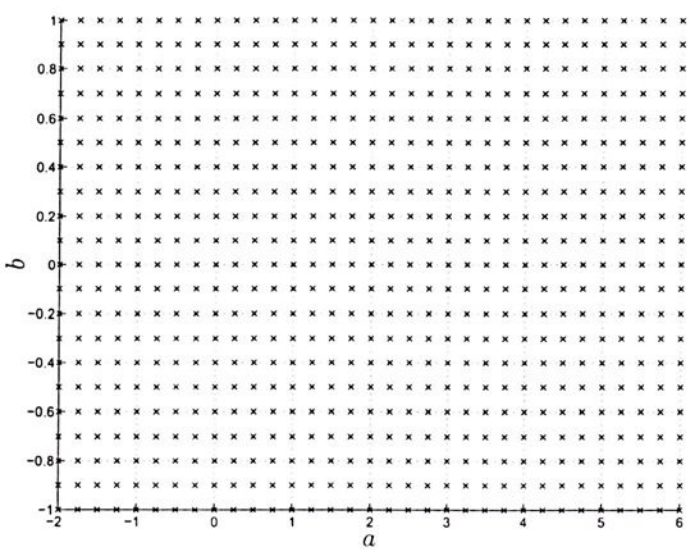


Figura 53: Região de factibilidade do item (x) do Teorema 13 para o Exemplo 2.

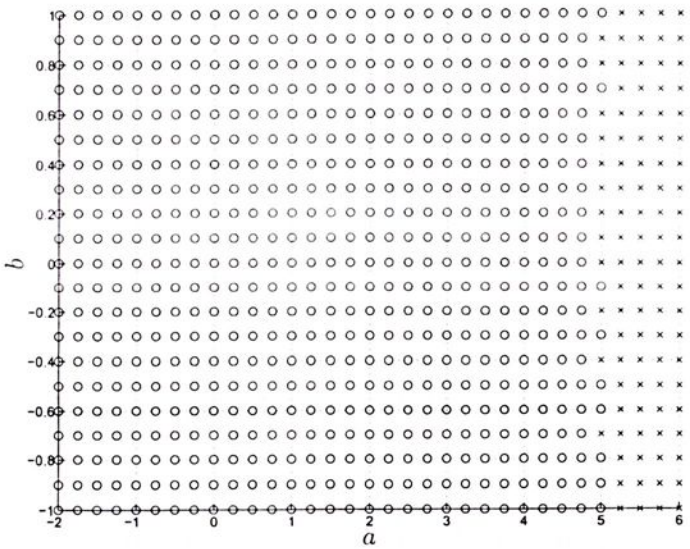


Figura 54: Região de factibilidade do item (xi) do Teorema 13 para o Exemplo 2.

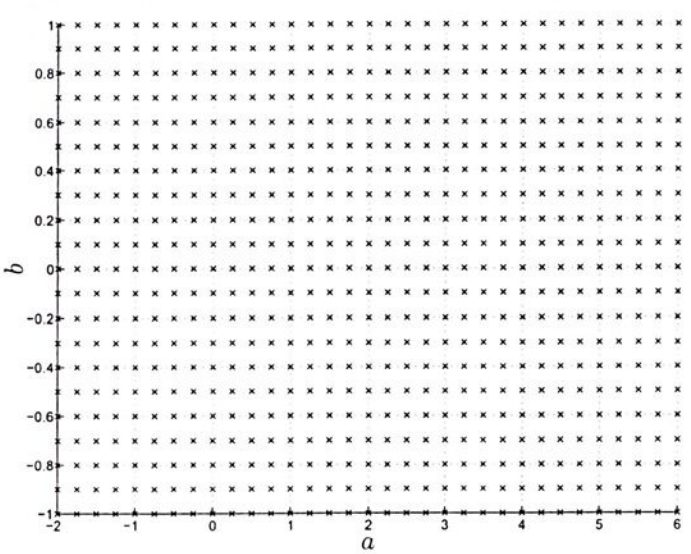


Figura 55: Região de factibilidade do Algoritmo 1 para o Exemplo 2.

Para o Teorema 10, o programa encontrou soluções para toda a área analisada. Para o Teorema 9 e para o item (xi) do Teorema 13, o programa apresentou uma grande área factível. Para os itens (ii), (iv) e (vi) do Teorema 13, foi apresentada uma área factível menor, embora mais extensa que a área factível apresentada para os itens (iii) e (v) do Teorema 13. Para o item (i) do Teorema 13, a área factível foi mais reduzida. Para os itens (vii), (viii), (ix) e (x) do Teorema 13 e para o Algoritmo 1, não foi encontrada nenhuma solução.

Observação 38 *Com o uso da transformação T, todos os teoremas apresentaram uma área de factibilidade maior ou igual à obtida sem a transformação, exceto o Algoritmo 1, que apresentou uma grande área factível sem a transformação e não apresentou nenhuma solução com a transformação.*

As LMIs do Teorema 9 são factíveis para $a < 5$. De fato, os zeros de transmissão do sistema $\{A, B, B^T\}$ são as raízes de $2s^2 + (-2a + 10)s + (a^2 - 6a + 13)$, que possuem parte real negativa se e somente se $a < 5$. Então, de acordo com o Corolário 2, a região de factibilidade do Teorema 13 é dada por $a < 5$.

As LMIs do item (xi) do Teorema 9 são factíveis para $a < 5$. De fato, os zeros de transmissão do sistema $\{A, B, B^T\}$ possuem parte real negativa se e somente se $a < 5$. Então, de acordo com a Observação 6, a região de factibilidade do item (xi) do Teorema 13 é dada por $a < 5$.

As LMIs do Teorema 10 são factíveis para toda a região analisada. De fato, o sistema $\{A, C^T, C\}$ possui um único zero de transmissão em $s = -2$, para quaisquer valores de a e b. Então, de acordo com o Corolário 3, as LMIs do Teorema 10 são factíveis para toda a região analisada.

A fim de obter uma melhor resposta transitória, procurou-se obter a máxima taxa de decaimento para as LMIs apresentadas na Subseção 2.5.2, através de um programa implementado no *LMISol*, para a planta com $a = b = 0$. O Teorema 19 não foi utilizado, pois o sistema não atende às suas condições, isto é, $B^T \neq (CB)^T C$ e $B \neq [\ 0 \quad 0 \quad 1\ ]^T$. A Tabela 3 apresenta a máxima taxa de decaimento obtida pelos teoremas para os quais o programa encontrou soluções factíveis. Os zeros de transmissão do sistema $\{A, B, FC\}$ são dados por $\sigma_z + \mathrm{j}\,\omega_z$ e os pólos do sistema $\{A - BK_oC, B, FC\}$ são dados por $\sigma_p + \mathrm{j}\,\omega_p$.

A máxima taxa de decaimento obtida foi $\gamma_{\max} = 2.4999$, obtida através do Teorema 16 e do item (xi) do Teorema 20. Foram encontradas outras soluções para o Teorema 16 e

Tabela 3: Taxas de decaimento obtidas para o Exemplo 2.

Teorema (item)	$\gamma_{\max}$	$\sigma_{z\,\max}$	$\sigma_{p\,\max}$
Teorema 16	2.4999	-2.5000	-2.5000
Teorema 17	1.9999	-2.5000	-2.5000
Teorema 20 (i)	1.8750	-2.5000	-2.4588
Teorema 20 (ii)	1.9999	-2.5000	-2.5000
Teorema 20 (xi)	2.4999	-2.5000	-2.5000

para os itens (i) e (ii) do Teorema 20. Para os outros teoremas, o programa não encontrou uma taxa de decaimento $\gamma > 0$.

Com o Algoritmo 2, a máxima taxa de decaimento obtida foi $\gamma_{\max} = 2.4999$, com $F = [\ 0.7133 \quad 0.8322\ ]$. Os zeros de transmissão de $\{A, B, FC\}$, para o valor obtido de F foram $z_1 = -2.5000 + \mathrm{j}\,0.5371$ e $z_2 = -2.5000 - \mathrm{j}\,0.5371$. Utilizando os valores obtidos de γ e F, a solução obtida foi $K_o = [\ 2519.4965 \quad 2936.3882\ ]$. Os pólos do sistema de malha fechada foram $p_1 = -2.5000 + \mathrm{j}\,0.5371$, $p_2 = -2.5000 - \mathrm{j}\,0.5371$ e $p_3 = -5.4539 \times 10^3$.

6.3 Exemplo 3

Considere, agora, a planta $G_{ol}(s)$, dada por:

$$G_{ol}(s) = C(sI - A)^{-1}B = N(s)D(s)^{-1}, \tag{6.3}$$

sendo:

$$D(s) = \left[s^3 + 3s^2 - 4s - 13\right],\ N(s) = \begin{bmatrix} n_1(s) \\ n_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^2 + 5s - 6 \\ s^2 + 5s - 7 \end{bmatrix}. \tag{6.4}$$

Uma representação da planta em espaço de estados é dada por:

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$
$$y = Cx,$$

sendo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 13 & 4 & -3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} -6 & 5 & 1 \\ -7 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

O objetivo deste exemplo é a determinação de matrizes K_o e F para que o sistema

$\{A - BK_oC, B, FC\}$ torne-se ERP.

Além da estabilidade, procurou-se obter a máxima taxa de decaimento para as LMIs apresentadas na Subseção 2.5.2, através de um programa implementado no *LMISol*. Os Teoremas 16, 17 e 19 não foram utilizados, pois o sistema não atende às suas condições, isto é, $B^T \neq (CB)^T C$ e $B \neq [\ 0 \quad 0 \quad 1\ ]^T$. Nenhum dos teoremas utilizados apresentou solução. O Algoritmo 2 também não apresentou solução.

Por exemplo, o sistema $\{A, B, B^T\}$ possui dois zeros de transmissão em $s_{o1} = s_{o2} = 0$. Então, de acordo com a Observação 6, as LMIs do item (xi) do Teorema 13 não possuem solução. Entretanto, existem matrizes F e K_o que tornam ERP o sistema $\{A - BK_oC, B, FC\}$, como mostra o método discutido no Capítulo 3.

Considere a matriz de transformação T, dada por:

$$T = \begin{bmatrix} B_{o\perp}^T \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -6 & 5 & 1 \\ -7 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, a planta possui uma nova representação:

$$\begin{aligned} \dot{x}_T &= A_T x_T + B_T u, \\ y &= C_T x_T, \end{aligned} \tag{6.5}$$

sendo:

$$A_T = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 7 & -6 \\ -12 & 27 & -25 \\ -13 & 27 & -25 \end{bmatrix}, \quad B_T = TB = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_T = CT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Além da estabilidade, procurou-se obter a máxima taxa de decaimento para as LMIs apresentadas na Subseção 2.5.2, através de um programa implementado no *LMISol*. O Teorema 19 não foi utilizado, pois o sistema não atende às suas condições, isto é, $B^T \neq [\ 0 \quad 0 \quad 1\ ]^T$. Nenhum dos teoremas utilizados apresentou solução. O Algoritmo 2 também não apresentou solução.

Por exemplo, o sistema $\{A, B, B^T\}$ possui dois zeros de transmissão em $s_{o1} = -6.0707$ e $s_{o2} = 1.0707$. Então, de acordo com a Observação 6, as LMIs do item (xi) do Teorema 13 não possuem solução. Entretanto, existem matrizes F e K_o que tornam ERP o sistema $\{A - BK_oC, B, FC\}$, como mostra o método discutido no Capítulo 3.



As raízes de $n_1(s)$ são -6 e 1, e as raízes de $n_2(s)$ são -6.1401 e 1.1401. Portanto, como $n_1(s)$ e $n_2(s)$ não são de fase mínima, e é necessário encontrar uma matriz $F = [\ f_1 \quad f_2\ ] = f_1[\ 1 \quad f_k\ ]$, sendo $f_k = f_2/f_1$, tal que o sistema $FG_{ol}(s)$ seja de fase mínima. Os zeros do sistema $FG_{ol}(s)$ são as raízes do polinômio:

$$r(s, f_k) = (s^2 + 5s - 6) + f_k(s^2 + 5s - 7) = (f_k + 1)s^2 + (5f_k + 5)s + (-7f_k - 6).$$

De acordo com o método discutido no Capítulo 3, baseado no Critério de Estabilidade de Routh, o sistema $FG_{ol}(s)$ é de fase mínima se e somente se:

$$-1 < f_k < -0.85714.$$

Escolhendo-se $f_k = -0.9$ e $f_1 = 1$, tem-se $F = [\ 1 \quad -0.9\ ]$ e $FN(s) = 0.1s^2+0.5s+0.3$. Os zeros do sistema são: $z_1 = -4.3028$ e $z_2 = -0.6972$. Logo, o sistema $FG_{ol}(s)$ é de fase mínima.

Vamos impor, agora, uma taxa de decaimento $\gamma = 2$. Como foi discutido na Subseção 3.6.1, a faixa de valores de f_k tal que todos os zeros de $FN(s)$ possuem parte real menor que $-\gamma$ pode ser determinada através da substituição de s por $(\hat{s} - 2)$ na expressão de $r(s, f_k)$:

$$d((\hat{s} - 2), f_k) = (f_k + 1)(\hat{s} - 2)^2 + (5f_k + 5)(\hat{s} - 2) + (-7f_k - 6),$$

$$d((\hat{s} - 2), f_k) = (f_k + 1)\hat{s}^2 + (f_k + 1)\hat{s} + (-13f_k - 12).$$

Assim, de acordo com o método discutido no Capítulo 3, os zeros do sistema $FG_{ol}(s)$ possuem parte real menor que $-\gamma = -2$ se e somente se:

$$-1 < f_k < -0.92308.$$

Escolhendo-se $f_k = -0.95$ e $f_1 = 1$, a matriz F é dada por:

$$F = [\ 1 \quad -0.95\ ]$$

e $FN(s) = 0.05s^2 + 0.25s + 0.65$. Os zeros do sistema $FG_{ol}(s)$ são: $z_1 = -2.5 + \mathrm{j}\, 2.5981$ e $z_2 = -2.5 - \mathrm{j}\, 2.5981$.

Como foi discutido na Seção 3.5, dada a matriz F acima, que posiciona os zeros de transmissão de $FG_{ol}(s)$ à esquerda da reta vertical $\sigma < -\gamma$, a matriz K_o que garante a taxa de decaimento especificada e que torna o sistema $\{A - BK_oC, B, FC\}$ ERP é obtida

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

através das LMIs dadas no Teorema 21.

Além da taxa de decaimento $\gamma = 2$, pretende-se obter a matriz K_o que garanta, para a lei de controle $u = -K_o y$, a mínima amplitude dos sinais de entrada e saída da planta, em módulo:

$$||y(t)|| \leq \xi_o, \;\; ||u(t)|| \leq \mu_0.$$

Essas restrições são garantidas através das LMIs $(D.16)$, $(D.19)$ e $(D.26)$.

Assim, definindo-se novas variáveis $\xi_{o2} = \xi_o^2$ e $\mu_{o2} = \mu_o^2$ e utilizando-se o *LMISol*, foi determinado o mínimo valor de $(\xi_{o2} + \mu_{o2})$ que atende às LMIs dadas no Teorema 21 e às LMIs $(D.16)$, $(D.19)$ e $(D.26)$. Para o estado inicial $x(0) = [\;0 \quad 0 \quad 1\;]^T$, a solução obtida foi:

$$\xi_{o\,\min} = 16.1766, \;\; \mu_{o\,\min} = 51.5023,$$

com:

$$P = \begin{bmatrix} 13.7004 & 4.1519 & 0.6500 \\ 4.1519 & 1.6975 & 0.2500 \\ 0.6500 & 0.2500 & 0.0500 \end{bmatrix}, \;\; K_o = \begin{bmatrix} 202.8287 & -191.6099 \end{bmatrix}.$$

Os autovalores de $(A - BK_oC)$ obtidos foram os seguintes: $p_1 = -2.0226 + \mathrm{j}\,2.6170$, $p_2 = -2.0226 - \mathrm{j}\,2.66170$ e $p_3 = -10.1736$. Portanto, o sistema de malha fechada é ERP e possui uma taxa de decaimento menor que $\gamma = 2$.

As Figs. 56 e 57 apresentam a evolução da saída da planta e da lei de controle $u = -K_o y$, respectivamente, em um período de 0 a 3 segundos. Os sinais convergiram para o estado de equilíbrio em menos de 2 segundos, atendendo, portanto, à especificação da taxa de decaimento. Estes sinais atenderam, também, às restrições especificadas.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

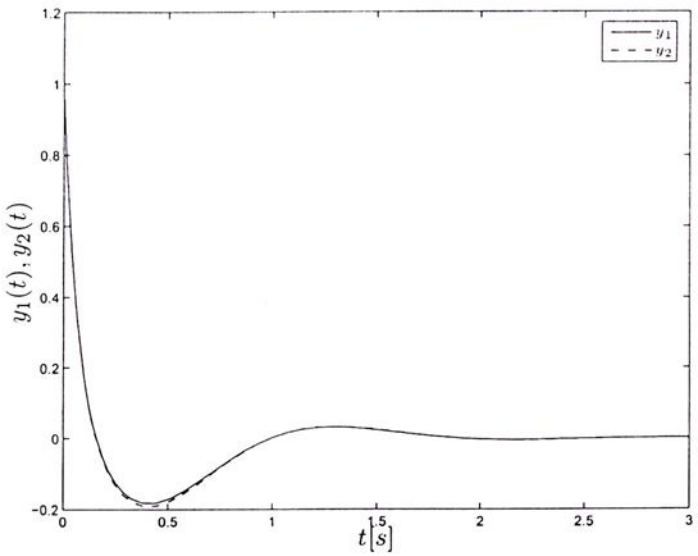


Figura 56: Evolução das variáveis de saída da planta, $y_1(t)$ e $y_2(t)$, do Exemplo 3.

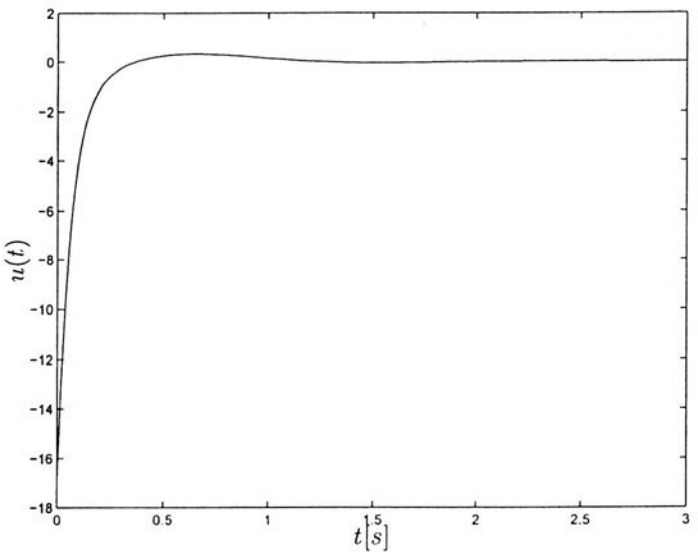


Figura 57: Lei de controle do Exemplo 3.

6.4 Exemplo 4

Considere a planta apresentada em [15], cuja função de transferência $G_{ol}(s)$ é dada por:

$$G_{ol}(s) = C(sI - A)^{-1}B = N(s)D(s)^{-1}, \tag{6.6}$$

sendo:

$$D(s) = \Big[(s+1)(s+2)(s+3)\Big] = \Big[s^3 + 6s^2 + 11s + 6\Big], \tag{6.7}$$

$$N(s) = \begin{bmatrix} n_1(s) \\ n_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (s-1)(s-3) \\ (s-2)(s-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^2 - 4s + 3 \\ s^2 - 6s + 8 \end{bmatrix}. \tag{6.8}$$

O primeiro objetivo deste exemplo é a determinação de uma matriz F de modo que $FG_{ol}(s)$ torne-se um sistema de fase mínima.

As raízes de $n_1(s)$ são 1 e 3, e as raízes de $n_2(s)$ são 2 e 4. Portanto, como $n_1(s)$ e $n_2(s)$ não são de fase mínima, é necessário encontrar uma matriz $F = [\ f_1 \quad f_2\ ] = f_1[\ 1 \quad f_k\ ]$, sendo $f_k = f_2/f_1$, tal que o sistema $FG_{ol}(s)$ seja de fase mínima. Os zeros do sistema $FG_{ol}(s)$ são as raízes do polinômio:

$$r(s, f_k) = (s^2 - 4s + 3) + f_k(s^2 - 6s + 8) = (f_k + 1)s^2 + (-6f_k - 4)s + (8f_k + 3).$$

De acordo com o método discutido na Seção 3.4, baseado no Critério de Estabilidade de Routh, observa-se que não existe uma matriz $F = f_1[\ 1 \quad f_k\ ]$ tal que o sistema $FG_{ol}(s)$ seja de fase mínima. Logo, não existem matrizes K_o e F que tornem o sistema da Fig. 3 ERP.

Para tornar o sistema ERP, é necessário utilizar um compensador dinâmico de ordem $m = 1$. Inicialmente, a planta $G_{ol}(s)$ é representada, em espaço de estados, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= A_p x_p + B_p u, \\ y &= C_p x_p, \end{aligned} \tag{6.9}$$

sendo:

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix},\ B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C_p = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 8 & -6 & 1 \end{bmatrix}. \tag{6.10}$$

O passo seguinte é determinar uma matriz F de maneira que o sistema realimentado $\{A - BFC, B, C\}$ seja estável. A Tabela 4 apresenta as matrizes F obtidas através dos Lemas 6–9, utilizando o *Matlab*, e os autovalores de $(A - BFC)$ para cada matriz F obtida.

Para executar as LMEs, foi feita a aproximação definida no Lema 12, com $\epsilon = 10^{-5}$.

Tabela 4: Matrizes F obtidas para o Exemplo 4.

Lema	F	Autovalores de $(A - BFC)$
Lema 6	$[\ 8.3163 \quad -3.8418\ ]$	$p_1 = -0.0368 + \mathrm{j}\,0.1387 = p_2^*;\ p_3 = -10.4009.$
Lema 7	$[\ 0.5454 \quad -0.2662\ ]$	$p_1 = -1.1209 + \mathrm{j}\,0.3280 = p_2^*;\ p_3 = -4.0375.$
Lema 8	$[\ 4.4668 \quad -2.4251\ ]$	$p_1 = 3.4562 \times 10^{-5};\ p_2 = -1.1082;\ p_3 = -6.9336.$
Lema 9	$[\ 6.6343 \quad -3.0845\ ]$	$p_1 = -0.1535 + \mathrm{j}\,0.3305 = p_2^*;\ p_3 = -9.2429.$

Na Tabela 4, verifica-se que o melhor resultado foi obtido com o Lema 7. Assim, será utilizada a matriz F obtida neste lema:

$$F = [\ 0.5454 \quad -0.2662\ ]. \tag{6.11}$$

A fim de garantir um erro de regime nulo para entrada degrau, será escolhido um compensador $G_c(s)$ com um pólo em $s = 0$, isto é, um integrador, dado por $G_c(s) = 1/s$. Assim, a representação do compensador em espaço de estados é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c w, \\ u &= C_c x_c, \end{aligned} \tag{6.12}$$

sendo:

$$A_c = [0],\ \ B_c = [1],\ \ C_c = [1]. \tag{6.13}$$

Assim, o sistema da Fig. 5, com a planta $G_p(s)$ dada em (6.9), a matriz F dada em (6.11) e o compensador $G_c(s)$ dado em (6.12) é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{6.14}$$

sendo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -11 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -0.4934 & -0.5844 & 0.2792 & 1.0000 \end{bmatrix}.$$

Utilizando o *Matlab*, através do Teorema 29, a matriz K_o obtida, que torna o sistema

da Fig. 7 ERP, foi:

$$K_o = [2.8044].$$

De fato, os autovalores de $(A - BK_oC)$, com a matriz K_o acima são: $p_1 = -3.4149 + \mathrm{j}\,1.5364 = p_2^*$ e $p_3 = -0.9873 + \mathrm{j}\,0.3558 = p_4^*$.

Utilizando o *Matlab*, através do Teorema 30, as matrizes K_o e F_o obtidas, que tornam o sistema da Fig. 8 ERP, foram:

$$K_o = [3.1777], \quad F_o = [0.1240].$$

De fato, os autovalores de $(A - BK_oC)$, com a matriz K_o acima são: $p_1 = -3.5852 + \mathrm{j}\,1.6039 = p_2^*$ e $p_3 = -1.0036 + \mathrm{j}\,0.3565 = p_4^*$.

6.5 Exemplo 5

Considere um avião de alto desempenho com piloto automático, apresentado em [46] e descrito na Fig. 12. A função de transferência da planta é dada por $G_{ol}(s) = n(s)/d(s)$, sendo:

$$n(s) = 1 + s, \;\; d(s) = s(s-1)(s^2 + 10s + 41) = -41s + 31s^2 + 9s^3 + s^4.$$

Deseja-se, inicialmente, determinar a faixa de valores de K_P, se possível, de modo a tornar o sistema da Fig. 12, com um controlador P dado por $G_c(s) = K_P$, seja globalmente assintoticamente estável.

O sistema da Fig. 12, com $G_c(s) = K_P$, possui a seguinte equação característica:

$$d(s, K_P) = d(s) + K_P n(s) = (K_P) + (K_P - 41)s + (31)s^2 + (9)s^3 + (1)s^4.$$

A faixa de estabilidade do polinômio acima foi obtida através do método apresentado no Capítulo 3 e é dada por:

$$59.502 < K_P < 220.5.$$

Portanto, se $59.502 < K_P < 220.5$, o sistema de malha fechada da Fig. 12, com $G_c(s) = K_P$ é estável e o erro em regime estacionário para uma entrada $r(t) = At$, $t \geq 0$,

é igual a $e(\infty) = A/K_v$, sendo:

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G_{ol}(s) = \lim_{s\to 0} sK_P\frac{n(s)}{d(s)} = -\frac{K_P}{41}.$$

Então, $|e(\infty)| = 41A/K_P > 41A/220.5 = 0.1859A$.

Para o mesmo exemplo, é possível obter a região de estabilidade para controladores PD, PI e PID. Para um controlador PD, considere que o valor inicial de K_D é -15, o valor final é 70 e o valor de incremento é 0.05. A região de estabilidade para este controlador é mostrada na Fig. 58.

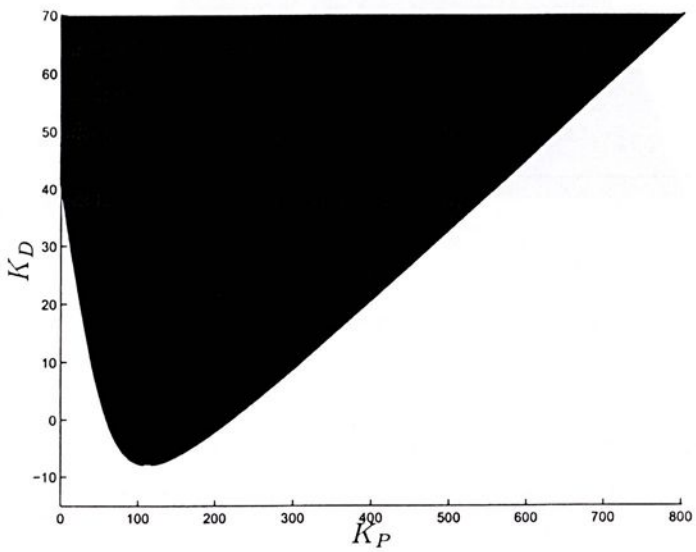


Figura 58: Região de estabilidade para o Exemplo 5 com um controlador PD.

Considere este controlador e qualquer par (K_P, K_D) na região de estabilidade da Fig. 58. Então, para uma entrada $r(t) = At$, $t \geq 0$, segue que $e(\infty) = A/K_v$, sendo:

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G_{ol}(s) = \lim_{s\to 0} s(K_P + K_D s)\frac{n(s)}{d(s)} = -\frac{K_P}{41}.$$

Portanto, $|e(\infty)| = 41A/K_P$. Na Fig. 58, note que, por exemplo, pode-se escolher $(K_P,\ K_D) = (600, 60)$, tal que $|e(\infty)| = 41A/600 = 0.0683A$. Como descrito acima, este valor é menor que $0.1859A$, o limite mínimo para $|e(\infty)|$ somente com o controlador P. Note que, com o controlador PD, é possível reduzir o erro em regime estacionário $|e(\infty)|$ obtido com o controlador P.

Para um controlador PI, considere que o valor inicial de K_I é -5, o valor final é 80 e o valor de incremento é 0.05. A região de estabilidade para este controlador é mostrada

na Fig. 59. Neste caso, para qualquer par (K_P, K_I) com $K_I \neq 0$ na região de estabilidade da Fig. 59, para uma entrada $r(t) = At$, $t \geq 0$, então $e(\infty) = 0$, pois a função de transferência de malha fechada na Fig. 12 possui dois pólos em $s = 0$.

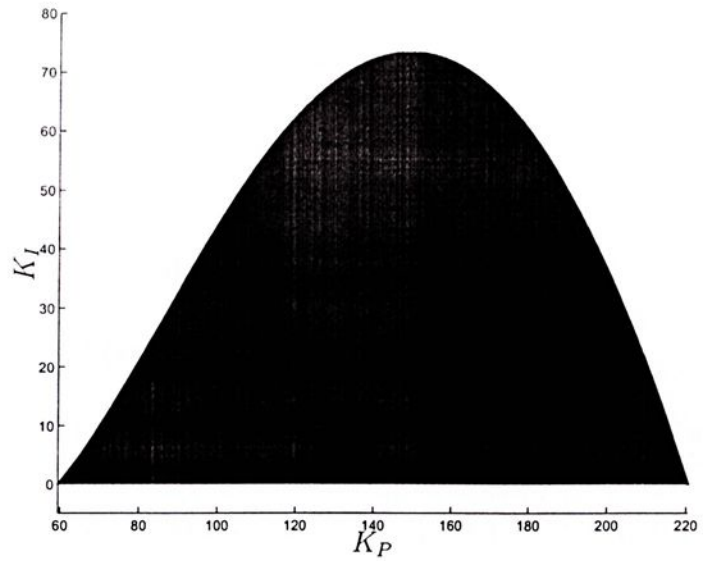


Figura 59: Região de estabilidade para o Exemplo 5 com um controlador PI.

Para um controlador PID, considere que o valor inicial de K_D é -4, o valor final é 8 e o valor de incremento é 0.25. Considere também que o valor inicial de K_I é -1, o valor final é 11 e o valor de incremento é 0.25. A região de estabilidade para este controlador é mostrado na Fig. 60.

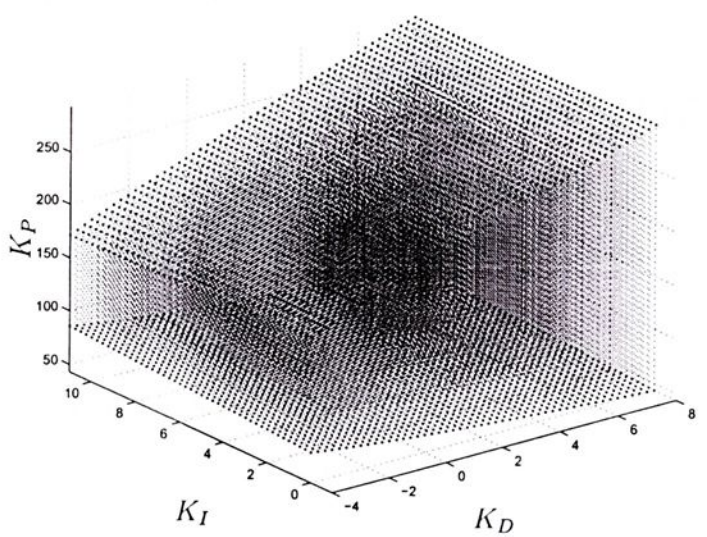


Figura 60: Região de estabilidade para o Exemplo 5 com um controlador PID.

Este exemplo foi apresentado no artigo [62], submetido ao periódico *IEEE Transac-*

tions on Education.

6.6 Exemplo 6

Considere uma planta $G_{ol}(s)$, dada por:

$$G_{ol}(s) = N(s)D(s)^{-1},$$

sendo:

$$D(s) = d(s) = d_0 + d_1 s + d_2 s^2 + d_3 s^3,$$

$$N(s) = \begin{bmatrix} n_1(s) \\ n_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{10} + n_{11}s + n_{12}s^2 \\ n_{20} + n_{21}s + n_{22}s^2 \end{bmatrix},$$

cujos coeficientes n_{ij}, $i = 1, 2$, $j = 0, 1, 2$, e d_l, $l = 0, 1, 2, 3$, pertencem a intervalos, dados por:

$$24.5 \leq n_{10} \leq 25.5, \ -10.5 \leq n_{11} \leq -9.5, \ 0.5 \leq n_{12} \leq 1.5,$$

$$-5.5 \leq n_{20} \leq -4.5, \ 3.5 \leq n_{21} \leq 4.5, \ 0.5 \leq n_{22} \leq 1.5,$$

$$-0.5 \leq d_0 \leq 0.5, \ 1.5 \leq d_1 \leq 2.5, \ -3.5 \leq d_2 \leq -2.5, \ 0.5 \leq d_3 \leq 1.5.$$

O primeiro objetivo deste exemplo é obter uma matriz F de modo a tornar o sistema FG_{ol} de fase mínima.

Seja $F = [\ f_1 \quad f_2\ ] = f_1[\ 1 \quad f_k\ ]$, sendo $f_k = f_2/f_1$. Os zeros do sistema $FG_{ol}(s)$ são as raízes do polinômio:

$$r(s, f_k) = n_1(s) + f_k n_2(s) = (n_{10} + f_k n_{20}) + (n_{11} + f_k n_{21})s + (n_{12} + f_k n_{22})s^2,$$

$$r(s, f_k) = \delta_0(f_k) + \delta_1(f_k)s + \delta_2(f_k)s^2,$$

cujos coeficientes $\delta_i(f_k)$, $i = 0, 1, 2$, pertencem a intervalos, dados por:

$$\delta_{i\,\min}(f_k) \leq \delta_i(f_k) \leq \delta_{i\,\max}(f_k),$$

cujos limites são definidos em (3.28) e (3.29).

Tanto $n_1(s)$ como $n_2(s)$ possuem coeficientes positivos e negativos e, portanto, não são Hurwitz. Logo, $f_k = 0$ e $f_k = \infty$ não resolvem o problema.

Para determinar a faixa de valores de f_k tal que o sistema $FG_{ol}(s)$ é de fase mínima em todo o politopo, são analisados dois casos: $f_k \geq 0$ e $f_k < 0$.

cm 1 2 3 4 5 6 unesp 11 12 13 14 15 16

Para $f_k \geq 0$, de acordo com o Teorema de Kharitonov e a análise efetuada na Subseção 3.8.3, o sistema $FG_{ol}(s)$ é de fase mínima em todo o politopo se e somente se os seguintes polinômios forem Hurwitz:

$$K_1(s, f_k) = (24.5 - 5.5f_k) + (-10.5 + 3.5f_k)s + (1.5 + 1.5k)s^2,$$

$$K_2(s, f_k) = (24.5 - 5.5f_k) + (-9.5 + 4.5f_k)s + (1.5 + 1.5k)s^2,$$

$$K_3(s, f_k) = (25.5 - 4.5f_k) + (-10.5 + 3.5f_k)s + (0.5 + 0.5k)s^2,$$

$$K_4(s, f_k) = (25.5 - 4.5f_k) + (-9.5 + 4.5f_k)s + (0.5 + 0.5k)s^2.$$

As faixas de estabilidade dos polinômios acima foram obtidas através do método apresentado no Capítulo 3, baseado no Critério de Estabilidade de Routh e são apresentados na Tabela 5.

Tabela 5: Faixas de estabilidade para os polinômios $K_i(s, f_k)$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Polinômio	Faixa de estabilidade
$K_1(s, f_k)$	$3 < f_k < 4.4545$
$K_2(s, f_k)$	$2.1111 < f_k < 4.4545$
$K_3(s, f_k)$	$3 < f_k < 5.6667$
$K_4(s, f_k)$	$2.1111 < f_k < 5.6667$

A solução do problema para $f_k \geq 0$ corresponde à intersecção das regiões de estabilidade dos polinômios $K_i(s, f_k)$, $i = 1, 2, 3, 4$:

$$3 < f_k < 4.4545.$$

Para $f_k < 0$, de acordo com o Teorema de Kharitonov e a análise efetuada na Subseção 3.8.3, o sistema $FG_{ol}(s)$ é de fase mínima em todo o politopo se e somente se os seguintes polinômios forem Hurwitz:

$$K_1(s, f_k) = (24.5 - 4.5f_k) + (-10.5 + 4.5f_k)s + (1.5 + 0.5k)s^2,$$

$$K_2(s, f_k) = (24.5 - 4.5f_k) + (-9.5 + 3.5f_k)s + (1.5 + 0.5k)s^2,$$

$$K_3(s, f_k) = (25.5 - 5.5f_k) + (-10.5 + 4.5f_k)s + (0.5 + 1.5k)s^2,$$

$$K_4(s, f_k) = (25.5 - 5.5f_k) + (-9.5 + 3.5f_k)s + (0.5 + 1.5k)s^2.$$

As faixas de estabilidade dos polinômios acima foram obtidas através do método a-

presentado no Capítulo 3, baseado no Critério de Estabilidade de Routh e são apresentados na Tabela 6.

Tabela 6: Faixas de estabilidade para os polinômios $K_i(s, f_k)$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Polinômio	Faixa de estabilidade
$K_1(s, f_k)$	$2.3333 < f_k < 5.4444$
$K_2(s, f_k)$	$2.7143 < f_k < 5.4444$
$K_3(s, f_k)$	$2.3333 < f_k < 4.6364$
$K_4(s, f_k)$	$2.7143 < f_k < 4.6364$

As regiões de estabilidade dos polinômios $K_i(s, f_k)$, $i = 1, 2, 3, 4$, não atendem à hipótese $f_k < 0$. Logo, para qualquer $f_k < 0$, todos os polinômios $K_i(s, f_k)$, $i = 1, 2, 3, 4$, possuem pelo menos uma raiz com parte real não-negativa para qualquer $f_k < 0$. Portanto, o problema não possui solução para $f_k < 0$.

Considerando os dois casos, a solução geral do problema é dada por:

$$3 < f_k < 4.4545.$$

Escolhem-se $f_k = 4$ e $f_1 = 1$. Então, têm-se $F = [\ 1 \quad 4\ ]$ e $n_f(s) = FN(s) = n_1(s) + 4n_2(s) = n_{f0} + n_{f1}s + n_{f2}s^2$, sendo que os coeficientes n_{fi}, $i = 0, 1, 2$ pertencem aos seguintes intervalos:

$$2.5 \leq n_{f0} \leq 7.5,\ \ 3.5 \leq n_{f1} \leq 8.5,\ \ 2.5 \leq n_{f2} \leq 7.5,$$

Dada a matriz F escolhida acima, o segundo objetivo deste exemplo é determinar k, de modo a tornar o sistema incerto da Fig. 10 globalmente assintoticamente estável e, portanto, ERP. O Teorema 4 garante a existência de solução para este problema.

O sistema da Fig. 10 possui a seguinte equação característica:

$$d(s, k) = d(s) + kn_f(s) = (d_0 + kn_{f0}) + (d_1 + kn_{f1})s + (d_2 + kn_{f2})s^2 + (d_3)s^3,$$

$$d(s, k) = \delta_0(k) + \delta_1(k)s + \delta_2(k)s^2 + \delta_3(k)s^3,$$

cujos coeficientes $\delta_i(k)$, $i = 0, 1, 2, 3$, pertencem a intervalos, dados por:

$$\delta_{i\,\min}(k) \leq \delta_i(k) \leq \delta_{i\,\max}(k),$$

cujos limites são definidos em (3.28) e (3.29).

Para determinar a faixa de estabilidade do sistema, são analisados dois casos: $k \geq 0$ e $k < 0$.

Para $k \geq 0$, de acordo com o Teorema de Kharitonov e a análise desenvolvida na Subseção 3.8.2, o sistema da Fig. 10 é estável em todo o politopo se e somente se os seguintes polinômios forem Hurwitz:

$$K_1(s,k) = (-0.5 + 2.5k) + (1.5 + 3.5k)s + (-2.5 + 7.5k)s^2 + (1.5)s^3,$$

$$K_2(s,k) = (-0.5 + 2.5k) + (2.5 + 8.5k)s + (-2.5 + 7.5k)s^2 + (0.5)s^3,$$

$$K_3(s,k) = (0.5 + 7.5k) + (1.5 + 3.5k)s + (-3.5 + 2.5k)s^2 + (1.5)s^3,$$

$$K_4(s,k) = (0.5 + 7.5k) + (2.5 + 8.5k)s + (-3.5 + 2.5k)s^2 + (0.5)s^3.$$

As faixas de estabilidade dos polinômios acima foram obtidas através do método apresentado no Capítulo 3, baseado no Critério de Estabilidade de Routh e são apresentados na Tabela 7.

Tabela 7: Faixas de estabilidade para os polinômios $K_i(s,k)$, $i = 1,2,3,4$.

Polinômio	Faixa de estabilidade
$K_1(s,k)$	$k > 0.36271$
$K_2(s,k)$	$k > 0.3376$
$K_3(s,k)$	$k > 2.5284$
$K_4(s,k)$	$k > 1.5548$

A solução do problema para $k \geq 0$ corresponde à intersecção das regiões de estabilidade dos polinômios $K_i(s,k)$, $i = 1,2,3,4$:

$$k > 2.5284.$$

Para $k < 0$, de acordo com o Teorema de Kharitonov e a análise desenvolvida na Subseção 3.8.2, o sistema da Fig. 10 é estável em todo o politopo se e somente se os seguintes polinômios forem Hurwitz:

$$K_1(s,k) = (-0.5 + 7.5k) + (1.5 + 8.5k)s + (-2.5 + 2.5k)s^2 + (1.5)s^3,$$

$$K_2(s,k) = (-0.5 + 7.5k) + (2.5 + 3.5k)s + (-2.5 + 2.5k)s^2 + (0.5)s^3,$$

$$K_3(s,k) = (0.5 + 2.5k) + (1.5 + 8.5k)s + (-3.5 + 7.5k)s^2 + (1.5)s^3,$$

$$K_4(s,k) = (0.5 + 2.5k) + (2.5 + 3.5k)s + (-3.5 + 7.5k)s^2 + (0.5)s^3.$$

As faixas de estabilidade dos polinômios acima foram obtidas através do método apresentado no Capítulo 3, baseado no Critério de Estabilidade de Routh e são apresentados na Tabela 8.

Tabela 8: Faixas de estabilidade para os polinômios $K_i(s,k)$, $i = 1,2,3,4$.

Polinômio	Faixa de estabilidade
$K_1(s,k)$	$k > 1.4503$
$K_2(s,k)$	$k > 1.2590$
$K_3(s,k)$	$k > 0.52746$
$K_4(s,k)$	$k > 0.49402$

As regiões de estabildade dos polinômios $K_i(s,k)$, $i = 1,2,3,4$, não atendem à hipótese $k < 0$. Logo, todos os polinômios $K_i(s,k)$, $i = 1,2.3,4$, possuem pelo menos uma raiz com parte real não-negativa para qualquer $k < 0$. Portanto, o problema não possui solução para $k < 0$.

Considerando os dois casos, a solução geral do problema é dada por:

$$k > 2.5284.$$

6.7 Exemplo 7

Considere o sistema mostrado na Fig. 10, com $G(s) = n(s)/d(s)$, sendo:

$$n(s) = 1, \;\; d(s) = s^2 + 5s.$$

A função de transferência de malha fechada $G_{cl}(s)$ é dada por:

$$G_{cl}(s) = \frac{k}{s^2 + 5s + k}.$$

Deseja-se determinar a faixa de valores de $k \in \mathbb{R}$ tal que os pólos do sistema de malha fechada estejam dentro da região especificada na Fig. 21, com $\sigma_o = -2$, $a = 3$ e $b = 4$.

A região desejada corresponde à intersecção das regiões especificadas nas Figs. 13, 15 e 16. Assim, para a solução do problema, é necessário aplicar as transformações (3.37), (3.39) e (3.40) ao polinômio característico $d(s,k) = s^2 + 5s + k$.

cm 1 2 3 4 5 6 unesp 11 12 13 14 15 16

Aplicando-se a transformação (3.37) em $d(s,k)$, obtém-se:

$$d_1(\bar{s},k) = \bar{s}^2 + \bar{s} + (k-6).$$

Aplicando-se a transformação (3.39) em $d(s,k)$, obtém-se:

$$d_2(\bar{s},k) = (0.0112 + \mathrm{j}0.0384)\bar{s}^2 + (0.8 + \mathrm{j}\,0.6)\bar{s} + k.$$

Aplicando-se a transformação (3.40) em $d(s,k)$, obtém-se:

$$d_3(\bar{s},k) = (0.0112 - \mathrm{j}0.0384)\bar{s}^2 + (0.8 - \mathrm{j}\,0.6)\bar{s} + k.$$

Assim, de acordo com a Seção 3.9.1, os pólos do sistema de malha fechada encontram-se na região especificada se e somente se todas as raízes dos polinômios $d_1(\bar{s},k)$ e $\bar{d}(\bar{s},k)$, sendo:

$$\bar{d}(\bar{s},k) = d_2(\bar{s},k)d_3(\bar{s},k) = (0.0016)\bar{s}^4 + (0.0640)\bar{s}^3 + (0.0224k+1)\bar{s}^2 + (1.6k)\bar{s} + (k^2)$$

possuírem parte real negativa. De acordo com o método apresentado na Seção 3.2, baseado no Critério de Estabilidade de Routh, o polinômio $d_1(\bar{s},k)$ é Hurwitz se e somente se:

$$k > 6$$

e o polinômio $\bar{d}(\bar{s},k)$ é Hurwitz se e somente se:

$$0 < k < 17.3611.$$

Portanto, a faixa de valores de $k \in \mathbb{R}$ que soluciona o problema é dada por:

$$6 < k < 17.3611.$$

6.8 Exemplo 8

Considere um sistema discreto com um controlador P, cuja função de transferência $G(z)$ é dada por (3.47)–(3.49), sendo $d_d(z) = d_{do}(z) + kn_{do}(z) = z^3 + z^2 + 1.5kz + (-k - 0.5)$ [43]. Para determinar a faixa de valores de $k \in \mathbb{R}$ tal que todas as raízes de $d(z)$ permanecem dentro da circunferência unitária $|z| = 1$ no plano z, inicialmente deve-se

cm 1 2 3 4 5 6 unesp 11 12 13 14 15 16

aplicar a transformação (3.50). Então, de (3.50)–(3.52), segue que:

$$q(v) = (2.5k+0.5)v^3+(-4.5k+0.5)v^2+(1.5k+5.5)v+(0.5k+1.5) = d(v)+kn(v),$$

sendo:

$$n(v) = 2.5v^3 - 4.5v^2 + 1.5v + 0.5, \;\; d(v) = 0.5v^3 + 0.5v^2 + 5.5v + 1.5.$$

Este problema é equivalente a encontrar a faixa de estabilidade do sistema na Fig. 10, cuja função de transferência é dada por $G_{ol}(s) = n(s)/d(s)$.

Assim, a solução do problema é dada por:

$$-0.2 < k < 0.070027.$$

6.9 Exemplo 9

Considere a planta dada em [73], com incertezas, dada por:

$$\dot{x} = A(\alpha)x + B(\alpha)(u + \xi(t,x)),$$
$$y = C(\alpha)x,$$

sendo:

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} -3 + r_1(t) & 0 & 1 + r_2(t) \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 + r_4(t) & -2 \end{bmatrix}, \;\; B(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + 0.5r_5(t) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\xi(t,x) = (1 + 0.5r_5(t))^{-1} \left(r_3(t) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + r_6(t) \right),$$

sendo os parâmetros incertos $r_i(t)$, $i = 1, \ldots, 6$, desconhecidos, mas com amplitude limitada:

$$|r_i(t)| \leq 1.$$

O objetivo deste exemplo é determinar os parâmetros K_o e β, de modo que a lei de controle $u = -K_o y - \beta \text{sign}(Fy)$ torne o sistema incerto acima globalmente assintoticamente estável.

Note que as matrizes $A(\alpha)$ e $C(\alpha)$ podem ser descritas na forma apresentada na

Hipótese B2, no Capítulo 5:

$$A(\alpha) = \sum_{i=1}^{8} \alpha_i A_i \text{ e } C(\alpha) = \sum_{i=1}^{8} \alpha_i C_i,$$

sendo:

$$\alpha_i \in [0,1],\ i = 1, \ldots, 8 \text{ e } \sum_{i=1}^{8} \alpha_i = 1,$$

e as matrizes A_i e C_i dadas por:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix},$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_6 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix},$$

$$A_7 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_8 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \tag{6.15}$$

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C_6 = C_7 = C_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.16}$$

De acordo com a hipótese B5, a norma do distúrbio $\xi(t,x)$ é dada por:

$$|\xi(t,x)| = \left| \frac{\left(r_3(t) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + r_6(t)\right)}{(1 + 0.5 r_5(t))} \right| = \frac{\left| r_3(t) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + r_6(t) \right|}{|1 + 0.5 r_5(t)|},$$

sendo:

$$\left| r_3(t) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + r_6(t) \right| \leq |r_3(t)| \left| \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right| |x(t)| + |r_6(t)| \leq 2|x(t)| + 1,$$

$$|1 + 0.5 r_5(t)| \geq 1 - 0.5|r_5(t)| \geq 0.5.$$

Portanto,

$$|\xi(t,x)| \leq \frac{2|x(t)| + 1}{0.5} = 4|x(t)| + 2 = a|x(t)| + b,$$

sendo $a = 4$ e $b = 2$.

A matriz $B(\alpha)$ pode ser descrita na forma apresentada na hipótese B4, no Capítulo 5:

$$B(\alpha) = B + \Delta B,$$

sendo:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \Delta B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5r_5(t) \\ 0 \end{bmatrix} = B\Delta\tilde{B},$$

com $\Delta\tilde{B} = \left[\Delta\tilde{B}_{11}\right] = [0.5r_5(t)]$. Então, $1 + \Delta\tilde{B}_{11} = 1 + 0.5r_5(t) \geq 0.5 > l_1 = l$ e $|1 + \Delta\tilde{B}| \leq 1.5$.

Através de um programa implementado no *LMISol*, foram solucionadas as LMIs apresentadas na Subseção 2.6.2, utilizando as idéias discutidas no Capítulo 5. O programa apresentou soluções somente para os itens (i), (ii), (v) e (xi) do Teorema 23, com o item (xi) flexibilizado através do Teorema 44. A Tabela 9 apresenta estas soluções.

Tabela 9: Soluções obtidas para o Exemplo 9.

Teorema (item)	K_o	F
Teorema 23 (i)	[3.6897 1.0000]	[1.6897 0]
Teorema 23 (ii)	[4.8411 1.0000]	[1.1682 0]
Teorema 23 (v)	[5.6671 1.0000]	[1.9150 0]
Teorema 23 (xi) (flexibilizado)	[1.5126 1.1027]	[1.0000 0]

A fim de obter uma melhor resposta transitória, procurou-se obter a máxima taxa de decaimento para as LMIs apresentadas na Subseção 2.6.2, através de um programa implementado no *LMISol*. O programa apresentou soluções somente para os itens (i), (ii), (v) e (xi) do Teorema 26, com o item (xi) flexibilizado através do Teorema 44. A Tabela 10 apresenta estas soluções.

Tabela 10: Taxas de decaimento obtidas para o Exemplo 9.

Teorema (item)	$\gamma_{\max}$	$\sigma_{\max}$
Teorema 26 (i)	0.9999	−2.0000
Teorema 26 (ii)	0.9991	−2.0000
Teorema 26 (v)	0.7820	−2.0000
Teorema 26 (xi) (flexibilizado)	1.9999	−2.0000

cm 1 2 3 4 5 6 unesp 11 12 13 14 15 16

A máxima taxa de decaimento obtida foi $\gamma_{\max} = 1.9999$, obtida através do item (xi) do Teorema 26, flexibilizado através do Teorema 44. Foram encontradas outras soluções para os itens (i), (ii) e (v) do Teorema 26. Para os outros teoremas, o programa não encontrou soluções factíveis.

Dadas as condições do sistema, para o projeto do CEV com a lei de controle (5.3), foi especificada uma taxa de decaimento $\gamma = 1$ e restrições na entrada $u_o(t) = -K_o y(t)$ e na saída $s(t) = x(t)$:

$$|u(t)| \leq \mu_o, \;\; |s(t)| = |x(t)| \leq \xi_0.$$

Nos itens (v) e (xi) do Teorema 26, nos quais as restrições na entrada $u_o(t) = -K_o y(t)$ não podem ser expressas diretamente em termos de LMIs, foi especificada uma restrição apenas na saída $y(t)$:

$$|y(t)| \leq \mu_y.$$

De acordo com a Observação 37, as restrições nos vetores de saída foram especificadas para cada elemento desses vetores:

$$|x_1(t)| \leq \xi_{o1}, \;\; |x_2(t)| \leq \xi_{o2}, \;\; |x_3(t)| \leq \xi_{o3}, \;\; |y_1(t)| \leq \mu_{y1}, \;\; |y_2(t)| \leq \mu_{y2}.$$

As restrições nos vetores acima são dadas através das LMIs (5.27), (5.28) e (5.32), aplicadas a estes vetores.

Através de um programa implementado no *LMISol*, procurou-se obter a mínima amplitude dos vetores de entrada e saída, para as LMIs apresentadas na Subseção 2.6.2, com as seguintes condições iniciais:

$$x(0) = [\; x_1(0) \;\; x_2(0) \;\; x_3(0) \;]^T = [\; 1 \;\; 0 \;\; -1 \;]^T.$$

Para $\gamma = 1$, somente o item (xi) do Teorema 26, flexibilizado através do Teorema 44, apresentou solução. Esta solução é dada por:

$$|y_1(t)| \leq \mu_{y1} = 8.1478 \times 10^{-2}, \;\; |y_2(t)| \leq \mu_{y2} = 1.2613,$$

$$|x_1(t)| \leq \xi_{o1} = 1.2587, \;\; |x_2(t)| \leq \xi_{o2} = 8.1478 \times 10^{-2}, \;\; |x_3(t)| \leq \xi_{o3} = 1.0753,$$

$$F = \left[\; 151.7421 \;\; 0 \;\right], \;\; K_o = \left[\; 3.0629 \;\; 1.0206 \;\right].$$

Assim,

$$|y(t)| \leq \mu_y = \mu_{y1} + \mu_{y2} = 1.3428, \;\; |x(t)| \leq \xi_o = \xi_{o1} + \xi_{o2} + \xi_{o3} = 2.4155,$$

cm 1 2 3 4 5 6 unesp 11 12 13 14 15 16

$$|u(t)| \leq \mu_o = |K_o|\,\mu_y = 5.4834.$$

Então, de acordo com (5.11), com $l = 0.495$, o valor de β em (5.3) deve ser tal que:

$$\beta > 40.8779.$$

Escolhendo-se $\beta = 41$ e assumindo que $r_i(t) = \sin t$, $i = 1, \ldots, 6$, foi feita uma simulação do sistema incerto com a lei de controle (5.3), através do *Matlab*. O problema da lei de controle é que a função sinal é descontínua, o que torna a simulação muito lenta e requer muita memória do computador. Para resolver este problema, a função sinal foi substituída pela equação:

$$\text{sign}(a) \approx \frac{a}{|a| + \epsilon},$$

sendo ϵ uma constante real positiva, cujo valor é, geralmente, pequeno. Esta aproximação torna a implementação do sistema mais adequada. Neste exemplo, foi utilizado $\epsilon = 10^{-2}$.

A Fig. 61 apresenta a evolução dos estados em um período de 0 a 4 segundos e a Fig. 62 apresenta o sinal de controle utilizado. Todos os estados convergiram para o estado de equilíbrio em menos de 4 segundos, atendendo, portanto, à especificação da taxa de decaimento.

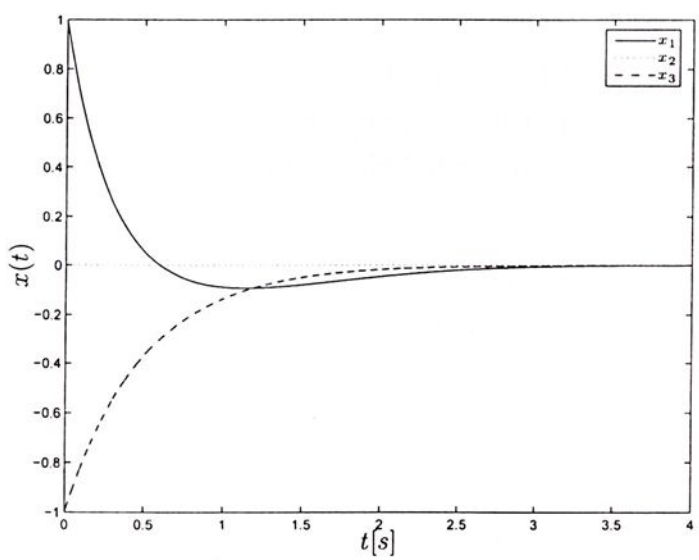


Figura 61: Evolução das variáveis de estado da planta do Exemplo 9.

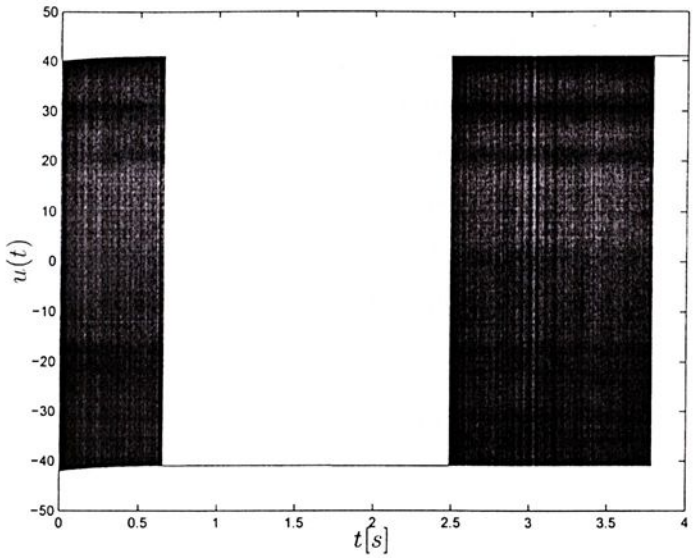


Figura 62: Sinal de controle do Exemplo 9.

6.10 Conclusões Parciais do Capítulo

Neste capítulo, as contribuições apresentadas nesta tese foram aplicadas em alguns exemplos.

Nos Exemplos 1 e 2, que dependem de dois parâmetros, foram determinados os valores destes parâmetros para os quais os teoremas propostos no Capítulo 2, para tornar plantas ERP, apresentam solução, utilizando o *Matlab*. Para executar as LMEs, foi feita uma aproximação.

No Exemplo 1, a região de factibilidade mais extensa foi obtida através do Algoritmo 1. O item (xi) do Teorema 13 apresentou uma área de factibilidade um pouco menor. Esta região de factibilidade está coerente com os zeros de transmissão do sistema $\{A, B, B^T\}$. Os itens (i)–(vi) do Teorema 13 apresentaram soluções para uma área razoável da região pesquisada. Os itens (vii)–(x) do Teorema 13 não apresentaram solução.

No Exemplo 2, o Teorema 10 apresentou soluções em toda a área analisada, o que está coerente com o zero de transmissão do sistema $\{A, C^T, C\}$, que se encontra em $s_o = -2$, independentemente dos valores dos parâmetros. O Teorema 9 e o item (xi) do Teorema 13 apresentaram uma grande área de factibilidade, que está coerente com os zeros de transmissão do sistema $\{A, B, B^T\}$. Os itens (i)–(vi) do Teorema 13 apresentaram soluções para uma área razoável da região pesquisada. Os itens (vii)–(x) do Teorema 13 e o Algoritmo 1 não apresentaram solução.

Para os dois exemplos, procurou-se obter, utilizando o *LMISol*, a máxima taxa de decaimento possível. Para o Exemplo 1, a máxima taxa de decaimento foi obtidas através do Algoritmo 2. Outras soluções foram encontradas através dos itens (i), (ii), (v), (vi) e (xi) do Teorema 20. Os outros itens não apresentaram uma solução factível. Para o Exemplo 2, a máxima taxa de decaimento foi obtidas através do Teorema 16, do item (xi) do Teorema 20 e do Algoritmo 2. Outras soluções foram encontradas através do Teorema 17 e dos itens (i) e (ii) do Teorema 20. Os outros itens do Teorema 20 não apresentaram uma solução factível.

Analisando as regiões de factibilidade e as taxas de decaimento obtidas para os Exemplos 1 e 2, observa-se que a maioria dos teoremas analisados apresentou soluções melhores para o Exemplo 2, indicando que, para este caso, a transformação utilizada no Exemplo 2 melhora os resultados.

Para o Exemplo 3, nenhum dos teoremas propostos no Capítulo 2 encontrou matrizes F e K_o que tornassem ERP o sistema $\{A-BK_oC, B, FC\}$. Entretanto, através do método proposto no Capítulo 3, baseado no Critério de Estabilidade de Routh, foi obtida a faixa de valores de f_k tal que o sistema $\{A, B, FC\}$, com $F = f_1[\ 1 \quad f_k\ ]$, seja de fase mínima, que é uma condição necessária para que um sistema seja ERP. Foi obtida, também, a faixa de valores de f_k que posiciona os zeros de transmissão de $\{A, B, FC\}$ na região do plano complexo que garante uma taxa de decaimento especificada. Dada uma matriz F que atende às especificações, foi obtida, através do Teorema 21, uma matriz K_o que tornasse ERP o sistema $\{A - BK_oC, B, FC\}$ e garantisse a taxa de decaimento especificada. As figuras que mostram as saídas da planta e a lei de controle $u = -K_oy$ mostram que as especificações foram atendidas.

Para o Exemplo 4, através do método proposto no Capítulo 3, observa-se que não existem matrizes F e K_o que tornem ERP o sistema $\{A - BK_oC, B, FC\}$. Para se obter um sistema ERP, foi necessário utilizar um compensador dinâmico de ordem $m = 1$, no caso um integrador. Inicialmente, foi obtida uma matriz F que estabilizasse o sistema $\{A - BFC, B, C\}$, de modo que a planta estendida fosse de fase mínima. Com a planta estendida, foram obtidas matrizes K_o e F_o que tornassem ERP os sistemas das Figs. 7 e 8.

No Exemplo 5, o Critério de Estabilidade de Routh foi aplicado para obter a faixa de estabilidade de um sistema realimentado com uma planta $G_{ol}(s)$ e um controlador proporcional $G_c(s) = K_P$. Posteriormente, para diminuir ou eliminar o erro em regime do sistema para uma entrada degrau, foram utilizados controladores PD, PI e PID. Para

cm 1 2 3 4 5 6 unesp 11 12 13 14 15 16

estes controladores, foram determinadas as regiões de estabilidade através do Critério de Estabilidade de Routh. Este exemplo foi apresentado no artigo [62], submetido ao periódico *IEEE Transactions on Education.*

No Exemplo 6, foi obtido um vetor F para tornar o sistema $FG_{ol}(s)$ de fase mínima para uma planta $G_{ol}(s)$ com uma entrada e duas saídas, cujos coeficientes de $n_1(s)$ e $n_2(s)$ pertencem a determinados intervalos. Posteriormente, foi obtida faixa de estabilidade do sistema realimentado com um ganho K_o de modo que a planta $G_{ol}(s) = C(sI - A)^{-1}B$ realimentada e com o vetor F, dada por $\{A - BK_oC, B, FC\}$ seja ERP.

No Exemplo 7, através de transformações apropriadas, o Critério de Estabilidade de Routh foi utilizado para posicionar os pólos de um sistema de malha fechada em uma determinada região do plano complexo. No Exemplo 8, foi utilizada uma transformação que permitiu o uso do Critério de Estabilidade de Routh para determinar a faixa de estabilidade de um sistema discreto.

No Exemplo 9, para um sistema com incertezas politópicas, foi utilizado o Controle com Estrutura Variável proposto no Capítulo 5, utilizando compensadores estáticos obtidos através dos teoremas propostos no Capítulo 2. No projeto, foram consideradas, além da estabilidade e da robustez, outras especificações, como taxa de decaimento, restrições na entrada e na saída. Através das Figs. 61 e 62, observa-se que o sistema atende às especificações do projeto.

Em quase todos os exemplos, os controladores apresentados são estáticos e constituídos apenas por matrizes constantes, facilmente obtidas através de programas computacionais disponíveis. No Exemplo 4, foi necessário o uso de um integrador, além de outros controladores estáticos.

Os exemplos apresentados demonstram a validade e a importância dos métodos propostos nesta tese, no projeto de sistemas de controle.

cm 1 2 3 4 5 6 unesp 11 12 13 14 15 16

7 Conclusão

Foi apresentado um novo método para o projeto de CEV, baseado em LMIs. O método permite a especificação da taxa de decaimento, restrições nas saídas, rejeição de distúrbios, incertezas e termos não-lineares da planta casados e incertezas paramétricas nos parâmetros da planta não casadas.

A chave destes resultados foi uma nova formulação, em termos de LMIs, de condições suficientes, e um estudo comparativo com os métodos disponíveis, para tornar um sistema ERP, com controladores estáticos. Foram obtidas também novas condições suficientes (Algoritmos 1 e 2) para este problema. As principais contribuições neste trabalho foram a proposta de novos métodos de projeto para plantas com o número de saídas maior que o número de entradas e a generalização dos métodos de projeto para sistemas incertos.

Estes novos métodos foram aplicados em dois exemplos (Exemplos 1 e 2), objetivando tornar ERP uma planta com o uso de controladores estáticos. Inicialmente, foi analisada a região de estabilidade dos sistemas em função de dois parâmetros a e b, com a e b dentro de intervalos, definidos por um valor mínimo e um valor máximo, utilizando o *software Matlab*. Em seguida, com $a = b = 0$, procurou-se obter a máxima taxa de decaimento para os sistemas. Para os dois exemplos, o item (xi) do Teorema 13 apresentou soluções para toda a área analisada. O Algoritmo 1 apresentou uma grande área factível. Entre os outros teoremas, os melhores resultados foram obtidos com os itens (ii), (iv) e (vi) do Teorema 13. Os itens (i), (iii) e (v) do Teorema 13 apresentaram uma área factível menor. Já os itens (vii), (viii), (ix) e (x) do Teorema 13 não apresentaram nenhuma solução. Para o Exemplo 2, que corresponde ao Exemplo 1 com uma transformação T, descrita no Lema 5, os Teoremas 9 e 10 apresentaram soluções para toda a área analisada. Comparando as regiões factíveis obtidas para os dois exemplos, observa-se que os melhores resultados foram obtidos com a transformação T utilizada no Exemplo 2. Quanto à taxa de decaimento, os melhores resultados foram obtidos com os itens (ii), (iv) e (vi) do Teorema 20. Os itens (i), (iii) e (v) do Teorema 20 apresentaram outra solução. Os demais teoremas não apresentaram soluções factíveis.



Os métodos foram aplicados, também, para plantas com incertezas politópicas nos parâmetros, ilustrados no Exemplo 9, considerando a estabilidade, a robustez e a taxa de decaimento e com a solução das LMIs através do *software LMISol*. O melhor resultado foi obtido com o item (xi) do Teorema 26, flexibilizado através do Teorema 44. Os itens (i), (ii) e (v) do Teorema 26 também apresentaram uma taxa de decaimento $\gamma > 0$, embora menor que a obtida com o item (xi). Através da Fig. 61, observa-se que o sistema com CEV projetado no Exemplo 9, com as matrizes K_o e F obtidas através do item (xi) do Teorema 26, flexibilizado através do Teorema 44, atende às especificações do projeto.

Foi desenvolvido, também, um método para a determinação da faixa de estabilidade de plantas com duas entradas e uma saída, com realimentação estática da saída, baseado no Critério de Estabilidade de Routh (Exemplos 3 e 4). O método foi utilizado para definir a faixa de valores de $f_k \in \mathbb{R}$ tal que um sistema $\{A, B, FC\}$, com $F = f_1[\ 1 \quad f_k\ ]$, seja de fase mínima e, com uma matriz F escolhida convenientemente, foi obtida a faixa de valores de $k \in \mathbb{R}$ tal que o sistema realimentado $\{A - BK_oC, B, FC\}$, com $K_o = k$, seja ERP. O método também permite especificar a taxa de decaimento. Para o Exemplo 4, não foi possível tornar o sistema ERP através de controladores estáticos, pois, através do Critério de Estabilidade de Routh, observou-se que não existe uma matriz F que torna o sistema $\{A, B, FC\}$ de fase mínima.

No Exemplo 5, o Critério de Estabilidade de Routh foi aplicado para obter a faixa de estabilidade de um sistema realimentado com uma planta $G_{ol}(s)$ e um controlador proporcional $G_c(s) = K_P$. Posteriormente, para diminuir ou eliminar o erro em regime do sistema para uma entrada degrau, foram utilizados controladores PD, PI e PID. Para estes controladores, foram determinadas as regiões de estabilidade através do Critério de Estabilidade de Routh.

No Exemplo 6, foi obtido um vetor F para tornar o sistema $FG_{ol}(s)$ de fase mínima para uma planta $G_{ol}(s)$ com uma entrada e duas saídas, cujos coeficientes de $n_1(s)$ e $n_2(s)$ pertencem a determinados intervalos. Posteriormente, foi obtida faixa de estabilidade do sistema realimentado com um ganho K_o de modo que a planta $G_{ol}(s) = C(sI - A)^{-1}B$ realimentada e com o vetor F, dada por $\{A - BK_oC, B, FC\}$ seja ERP.

No Exemplo 7, através de transformações apropriadas, o Critério de Estabilidade de Routh foi utilizado para posicionar os pólos de um sistema de malha fechada em uma determinada região do plano complexo. No Exemplo 8, foi utilizada uma transformação que permitiu o uso do Critério de Estabilidade de Routh para determinar a faixa de estabilidade de um sistema discreto.



Outra contribuição foi a utilização de compensadores dinâmicos de ordem igual ao número de entradas da planta, para plantas que não podem ser tornadas ERP através de controladores estáticos. É apresentada uma solução suficiente para esse problema, baseada em LMIs.

No Exemplo 4, pelo Critério de Estabilidade de Routh, observou-se que não é possível tornar a planta ERP através de controladores estáticos. Então, a planta foi estendida através de um compensador dinâmico de ordem igual ao número de entradas da planta, de acordo com a Fig. 5 e foram obtidas matrizes F, K_o e F_o tais que os sistemas realimentados das Figs. 7 e 8 sejam ERP.

Em todos os exemplos, com exceção do Exemplo 4, os controladores apresentados são estáticos e compostos apenas por duas matrizes constantes, que foram facilmente obtidas, utilizando-se programas computacionais disponíveis.

7.1 Sugestões para Pesquisas Futuras

Trabalhos futuros relacionados aos resultados obtidos nesta tese são:

(i) Continuação dos estudos para tornar plantas ERP, baseadas em LMIs, com controladores estáticos e dinâmicos, para plantas com ou sem incertezas nos parâmetros;

(ii) Uso conjunto dos resultados obtidos nesta tese com métodos iterativos para a solução de Inequações Matriciais Bilineares (em inglês, *Bilinear Matrix Inequalities*, BMIs);

(iii) Novas aplicações em CEV, em termos teóricos e práticos;

(iv) Generalização dos estudos descritos nos itens anteriores para plantas não-lineares.

7.2 Artigos Publicados e Artigos Submetidos

- "Design of SPR Systems and Output Variable Structure Controllers Based on LMI", publicado no *7th International Workshop on Variable Structure Systems*, em Sarajevo, Bósnia-Herzegovina, em 2002, como capítulo do livro "Advances in Variable Structure Systems: Analysis, Integration and Applications – Proceedings of the 7th International Workshop on Variable Structure Systems" [74];

cm 1 2 3 4 5 6 unesp 11 12 13 14 15 16

- "Síntese de Sistemas Incertos ERP Baseada em LMI e Controle com Estrutura Variável", apresentado e publicado no *XIV Congresso Brasileiro de Automática*, em Natal-RN, em 2002 [75];

- "Proportional Controllers: Direct Method for Stability Analysis and MATLAB Implementation", submetido ao periódico *IEEE Transactions on Education* [62];

- "Design of SPR Systems with Dynamic Compensators and Output Variable Structure Control", submetido ao *9th International Workshop on Variable Structure Systems*, que será realizado em Alghero, Itália, em 2006 [76].

Outros artigos relacionados aos tópicos abordados nesta tese estão sendo redigidos e serão publicados futuramente.

cm 1 2 3 4 5 6 unesp 11 12 13 14 15 16

Referências

[1] TEIXEIRA, M. C. M. Control of uncertain dynamical systems using strictly positive real systems. In: *Lecture Notes in Control and Information Optimization, 144: Analysis and Optimization of Systems.* Berlin: Springer-Verlag, 1990. p. 900–911.

[2] UTKIN, V. I. Variable structure systems with sliding modes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 22, n. 2, p. 212–222, 1977.

[3] YOUNG, K. K. D. *Variable structure control for robotics and aerospace applications*: Studies in Automation and Control. Amsterdam, The Netherlands: Elsevier Science Publishers B. V., 1993.

[4] UTKIN, V. I. *Sliding modes and their application in variable structure.* Moscow: Mir Publishers, 1978.

[5] ZINOBER, A. S. I. *Deterministic control of uncertain systems.* Peter Peregrinus: London IEEE Control Engineering Series, 1990.

[6] HECK, B. S.; YALLAPRAGADA, S. V.; FAN, M. K. H. Numerical methods to design the reaching phase of output feedback variable structure control. *Automatica*, v. 31, n. 2, p. 275–279, 1995.

[7] CHOI, H. H. A new method for variable structure control system design: a linear matrix inequality approach. *Automatica*, v. 33, n. 11, p. 2089–2092, 1997.

[8] CHOI, H. H. An explicit formula of sliding surfaces for a class of uncertain dynamic systems with mismatched uncertainties. *Automatica*, v. 34, n. 8, p. 1015–1020, 1998.

[9] CHOI, H. H. On the existence of linear sliding surfaces for a class uncertain dynamic systems with mismatched uncertainties. *Automatica*, v. 35, n. 10, p. 1707–1715, 1999.

[10] TAKAHASHI, R. H. C.; PERES, P. L. D. $\mathcal{H}_\infty$ design of switching surfaces for sliding-mode control with nonmatching disturbances. *IEE Proceedings - Control Theory Applications*, v. 145, n. 4, p. 435–441, 1998.

[11] TAKAHASHI, R. H. C.; PERES, P. L. D. $\mathcal{H}_2$ guaranteed cost-swiching surface design for sliding modes with nonmatching disturbances. *IEEE Transaction on Automatic Control*, v. 44, n. 11, p. 2214–2218, 1999.

[12] COVACIC, M. R. *Controle automático com estrutura variável utilizando sistemas ERP e LMI.* Dissertação de Mestrado — FEIS-UNESP, Ilha Solteira-SP, Brasil, 2001.

[13] TEIXEIRA, M. C. M.; LORDELO, A. D. S.; ASSUNÇÃO, E. On LMI based design of SPR systems and output variable structure controllers. In: *Advances in Variable Structure Systems: Analysis, Integration and Applications - Proceedings of the 6th IEEE*



International Workshop on Variable Structure Systems. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2000. p. 199–208.

[14] TEIXEIRA, M. C. M. Condições para tornar um sistema estritamente real positivo e aplicação no controle com EVMD utilizando somente as saídas da planta. In: 8º *Congresso Brasileiro de Automática*. [S.l.: s.n.], 1990. p. 291–296.

[15] TEIXEIRA, M. C. M. Output control with dynamical compensators and strictly positive real systems. *International Journal of Control*, v. 57, n. 5, p. 1101–1105, 1993.

[16] ŻAK, S. H.; HUI, S. On variable structure output feedback controllers for uncertain dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 38, n. 10, p. 1509–1512, 1993.

[17] EDWARDS, C.; SPURGEON, S. K.; AKOACHERE, A. A sliding mode static output feedback controller based on linear matrix inequalities applied to an aircraft system. *Transactions of the ASME*, v. 122, p. 656–662, 2000.

[18] EDWARDS, C.; AKOACHERE, A.; SPURGEON, S. K. Sliding-mode output feedback controller design using linear matrix inequalities. *IEEE Transaction on Automatic Control*, v. 46, n. 1, p. 115–119, 2001.

[19] ANDERSON, B. D. O. A simplified viewpoint of hyperstability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 13, p. 292–294, 1968.

[20] HUANG, C. H. et al. Design of strictly positive real systems using constant output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 44, n. 3, p. 569–573, 1999.

[21] LORDELO, A. D. S. *Controle automático com estrutura variável utilizando sistemas ERP e LMI*. Dissertação de Mestrado — FEIS-UNESP, Ilha Solteira-SP, Brasil, 2000.

[22] BERNUSSOU, J.; GEROMEL, J. C.; DE OLIVEIRA, M. C. On strict positive real systems design: guaranteed cost and robustness issues. *Systems & Control Letters*, v. 36, p. 135–141, 1999.

[23] BLONDEL, V.; LUNDVALL, C. A rational test for strong stabilization. *Automatica*, v. 31, n. 8, p. 1197–1198, 1995.

[24] PEÑA, J. M. Characterizations and stable tests for the Routh-Hurwitz conditions and for total positivity. *Linear Algebra and its Applications*, v. 393, p. 319–332, 2004.

[25] HWANG, C.; YANG, S. F. Comments on the computation of interval routh approximants. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 44, n. 9, p. 1782–1787, 1999.

[26] BOSE, N. K. Tests for Hurwitz and Schur properties of convex combination of complex polynomials. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, v. 36, n. 9, p. 1245–1247, 1989.

[27] YANG, S. F.; HWANG, C. A test for robust Hurwitz stability of convex combination of complex polynomials. *Journal of the Franklin Institute*, v. 339, p. 129–144, 2002.

[28] BARMISH, B. R. Invariance of the strict Hurwitz property for polynomials with perturbed coefficients. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-29, n. 10, p. 935–936, 1984.

cm 1 2 3 4 5 6 unesp 11 12 13 14 15 16

[29] BIALAS, S.; GARLOFF, J. Stability of polynomials under coefficient perturbations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-30, n. 3, p. 310–312, 1985.

[30] GUIVER, J. P.; BOSE, N. K. Strictly Hurwitz property invariance of quartics under coefficient perturbation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-28, n. 1, p. 106–107, 1983.

[31] BANDYOPADHYAY, B.; ISMAIL, O.; GOREZ, R. Routh pade approximation for interval systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 39, n. 12, p. 2454–2456, 1994.

[32] BANDYOPADHYAY, B.; UPADHYE, A.; ISMAIL, O. $\gamma - \delta$ Routh approximation for interval systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 42, n. 8, p. 1127–1130, 1997.

[33] WEI, K. H.; YEDAVALLI, R. K. Invariance of strict Hurwitz property for uncertain polynomials with dependent coefficients. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-32, n. 10, p. 907–909, 1987.

[34] OWENS, D. H.; PRATZEL-WOLTERS, D.; ILCHMANN, A. Positive-real structure and high-gain adaptive stabilization. *IMA Journal of Mathematical Control & Information*, v. 4, n. 2, p. 167–181, 1987.

[35] TEIXEIRA, M. C. M. *Sistemas reais positivos e controle adaptativo.* Tese de Doutorado — PUC-RJ, Rio de Janeiro-RJ, Brasil, 1989.

[36] KAUFMAN, H.; BAR-KANA, I.; SOBEL, K. *Direct adaptive control algorithms: theory and applications.* Berlin, Heidelberg: Communications and Control Engineering Series, Springer Verlag, 1994.

[37] GAHINET, P. et al. *LMI Control Toolbox - For use with Matlab.* [S.l.], 1995.

[38] DE OLIVEIRA, M. C.; FARIAS, D. P.; GEROMEL, J. C. *LMISol, User's Guide.* UNICAMP, Campinas-SP, Brasil, 1997.

[39] THE MATH WORKS, INC. *The Student Edition of Matlab - User's Guide.* [S.l.], 1995.

[40] GOLUB, G. H.; VAN LOAN, C. F. *Matrix computations.* 3rd. ed. Baltimore and London: The Johns Hopkins University Press, 1996.

[41] CRUSIUS, C. A. R.; TROFINO, A. Sufficient LMI conditions for output feedback control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 44, n. 5, p. 1053–1057, 1999.

[42] BOYD, S. et al. *Linear matrix inequalities in systems and control theory.* Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.

[43] KUO, B. C. *Automatic control system.* Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1995.

[44] CHEN, C. T. *Analog and digital control system design.* Orlando, FL: Saunders College Publishing, 1993.

cm 1 2 3 4 5 6 unesp 0 11 12 13 14 15 16

[45] D'AZZO, J. J.; HOUPIS, C. H. *Linear control system analysis and design: conventional and modern.* [S.l.]: McGraw-Hill, 1995.

[46] DORF, R. C.; BISHOP, R. H. *Modern control systems.* Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, 1998.

[47] FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINI, A. *Feedback control of dynamic systems* . Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

[48] OGATA, K. *Modern control enginnering.* Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, Inc., 1997.

[49] ROWLAND, J. *Linear control systems: modeling, analysis and design.* NY: Wiley, 1986.

[50] TAN, N. Computation of stabilizing Lag/Lead controller parameters. *Computers and Electrical Engineering*, v. 29, p. 835–849, 2003.

[51] TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E. On lag controllers: design and implementation. *IEEE Transactions on Education*, v. 45, n. 3, p. 285–288, 2002.

[52] TEIXEIRA, M. C. M. Direct expressions for Ogata's lead-lag design method using root locus. *IEEE Transactions on Education*, v. 37, n. 1, p. 63–64, 1994.

[53] ASTROM, K.; HAGGLUND, T. *PID controllers: theory, design and tuning.* Research Triangle Park, NC: Instrument Society of America, 1995.

[54] BIALKOWSKI, W. L. Control of the pulp and paper making process. In: _____. *The Control Handbook.* New York, NY:: IEEE Press, 1996. p. 1219–1242.

[55] DATTA, A.; HO, M. T.; BHATTACHARYYA, S. P. *Structure and synthesis of PID controllers.* London, U.K.: Springer-Verlag, 2000.

[56] HO, W. K.; LIM, K. W.; XU, W. Optimal gain and phase margin tunning for PID controllers. *Automatica*, v. 34, n. 8, p. 1009–1014, 1998.

[57] KELLY, R.; MORENO, J. Learning PID structures in an introductory course of automatic control. *IEEE Transactions on Education*, v. 44, n. 4, p. 373–376, 2001.

[58] OLIVEIRA, V. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; COSSI, L. Stabilizing a class of time delay systems using the Hermite-Biehler theorem. *Linear Algebra and its Applications*, v. 369, p. 203–216, 2003.

[59] SILVA, G. J.; DATTA, A.; BHATTACHARYYA, S. P. New results on the synthesis of PID controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 47, n. 2, p. 241–252, 2002.

[60] TAN, W.; LIU, J.; TAM, P. K. S. PID tuning based on loop-shaping $\mathcal{H}_\infty$ control. *IEE Proc.-Control Theory Appl.*, v. 145, n. 6, p. 485–490, 1998.

[61] ZHUANG, M.; ATHERTON, D. P. Automatic tunning of optimum PID controllers. *IEE Proceedings-D*, v. 140, n. 3, p. 216–224, 1993.

cm 1 2 3 4 5 6 unesp 0 11 12 13 14 15 16

[62] TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; COVACIC, M. R. Proportional controllers: direct method for stability analysis and MATLAB implementation. Submetido ao periódico IEEE Transactions on Education.

[63] CHEN, C. T. *Linear system theory and design.* 3rd. ed. [S.l.]: Oxford University Press, Inc., 1999.

[64] TEIXEIRA, M. C. M.; MARCHESI, H. F.; ASSUNÇÃO, E. Signal-flow graphs: direct method of reduction and MATLAB implementation. *IEEE Transactions on Education*, v. 44, n. 2, p. 185–190, 2001.

[65] BHATTACHARYYA, S. P.; CHAPELLAT, H.; KEEL, L. H. *Robust control: the parametric approach.* Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1995.

[66] CHAPELLAT, H.; BHATTACHARYYA, S. P. An alternative proof of Kharitonov's theorem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 34, n. 4, p. 448–450, 1989.

[67] HWANG, C.; YANG, S. F. The use of Routh array for testing the Hurwitz property of a segment of polynomials. *Automatica*, v. 37, n. 2, p. 291–296, 2001.

[68] DECARLO, R. A.; ŻAK, S. H.; MATHEWS, G. P. Variable structure control of multivariable systems: a tutorial. *Proceedings of IEEE*, v. 76, n. 3, p. 212–232, 1988.

[69] UTKIN, V. I. *Sliding modes in control optimization.* Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 1992.

[70] WALCOTT, B. L.; ŻAK, S. H. Combined observer-controller synthesis for uncertain dynamical systems with applications. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, v. 18, n. 1, p. 88–104, 1988.

[71] HSU, L.; KASZKUREWICZ, E.; BHAYA, A. Matrix-theoretic conditions for the realizability of sliding manifolds. In: *14th World Congress of IFAC.* Beijing, China: [s.n.], 1999. p. Paper No.E–2c–15–5.

[72] TEIXEIRA, M. C. M.; PIETROBOM, H. C.; ASSUNÇÃO, E. Novos resultados sobre a estabilidade e controle de sistemas não-lineares utilizando modelos Fuzzy e LMI. *Revista Controle & Automação*, v. 11, n. 1, p. 37–48, 2000.

[73] CHOI, H. H. Variable structure output feedback control design for a class of uncertain dynamic systems. *Automatica*, v. 38, p. 335–341, 2002.

[74] TEIXEIRA, M. C. M. et al. Design of SPR systems and output variable structure controllers based on LMI. In: *Advances in Variable Structure Systems: Analysis, Integration and Applications - Proceedings of the 7th IEEE International Workshop on Variable Structure Systems.* Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2002. p. 133–144.

[75] TEIXEIRA, M. C. M. et al. Síntese de sistemas incertos ERP baseada em LMI e controle com estrutura variável. In: 14º *Congresso Brasileiro de Automática.* [S.l.: s.n.], 2002. p. 1022–1030.

cm 1 2 3 4 5 6 unesp 0 11 12 13 14 15 16

[76] TEIXEIRA, M. C. M.; COVACIC, M. R.; ASSUNÇÃO, E. Design of SPR systems with dynamic compensators and output variable structure control. Submetido ao 9th International Workshop on Variable Structure Systems.

[77] VanANTWERP, J. G.; BRAATZ, R. D. A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities. *Journal of Process Control*, v. 10, p. 363–385, 2000.



APÊNDICE A – Zeros de Transmissão de um Sistema

Considere $A(s) = B(s)C(s)$, sendo $A(s)$, $B(s)$ e $C(s)$ polinômios de ordens compatíveis. Assim, $C(s)$ é um *divisor à direita* de $A(s)$ e $A(s)$ é um *múltiplo à esquerda* de $C(s)$. De maneira similar, $B(s)$ é um *divisor à esquerda* de $A(s)$ e $A(s)$ é um *múltiplo à direita* de $B(s)$. Considere, também, duas matrizes polinomiais $D(s)$ e $N(s)$, com o mesmo número de colunas, p. Então, uma matriz polinomial quadrada $R(s) \in \mathbb{R}^{p\times p}$ é um *divisor comum à direita* de $D(s)$ e $N(s)$, desde que existam matrizes polinomiais $\hat{D}(s)$ e $\hat{N}(s)$ tais que:

$$D(s) = \hat{D}(s)R(s) \quad \text{e} \quad N(s) = \hat{N}(s)R(s).$$

Uma matriz polinomial quadrada $M(s)$ é *unimodular* se o seu determinante for diferente de zero e independente de s.

Uma matriz polinomial $R(s)$ é o *maior divisor comum à direita* de $D(s)$ e $N(s)$ se as seguintes condições forem satisfeitas:

(i) $R(s)$ é um divisor à direita de $D(s)$ e $N(s)$;

(ii) $R(s)$ é um múltiplo à esquerda de todos os divisores comuns à direita de $D(s)$ e $N(s)$.

Se um maior divisor comum à direita é uma matriz unimodular, então $D(s)$ e $N(s)$ são ditas *coprimas à direita.*

Considere uma matriz $\hat{G}(s) = N(s)D(s)^{-1}$, $\hat{G}(s) \in \mathbb{R}^{q\times p}$ racional *própria* ($\hat{G}(s)$ é própria $\Leftrightarrow$ grau $D(s) \geq$ grau $N(s) \Leftrightarrow \hat{G}(\infty) = 0$ ou $\hat{G}(\infty)$ é igual a uma constante diferente de zero), sendo que $N(s)$ e $D(s)$ são coprimas à direita. Então, um número $\lambda \in \mathbb{C}$ é um *zero de transmissão* de $\hat{G}(s)$, se o posto de $N(\lambda) < min(p, q)$ [63].

Os zeros de transmissão também podem ser definidos através da realização mínima de $\hat{G}(s)$. Considere $\{A, B, C, D\}$ qualquer realização mínima de dimensão n de uma matriz



própria racional $\hat{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \in \mathbb{R}^{q \times p}$, com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{q \times p}$. Então, os zeros de transmissão são os valores de $s = \lambda \in \mathbb{C}$, tais que:

$$\text{posto} \begin{bmatrix} \lambda I - A & B \\ -C & D \end{bmatrix} < n + \min(p, q).$$

Maiores detalhes sobre a teoria exposta neste apêndice podem ser obtidos em [63].

APÊNDICE B – Demonstração do Lema 3 [1]

Defina $B_\perp = [b_{\perp 1}, \ldots, b_{\perp n-m}] \in \mathbb{R}^{n \times n-m}$ e considere que posto$(B_\perp) = n-m$, $B_\perp^T B = 0$ e $b_{\perp i}^T b_{\perp j} = 0$ para $i \neq j$, i e $j \in \{1, \ldots, n-m\}$. Então, C pode ser considerado igual a:

$$C = M_1 B^T + M_2 B_\perp^T, \tag{B.1}$$

pois, de posto$(CB) = m$, segue que posto$(B) = m$ e, assim, posto$([B \vdots B_\perp]) = n$. Note que, em (B.1), $M_1 \in \mathbb{R}^{p \times m}$ e $CB = M_1 B^T B$. Então, da condição de que posto$(CB) = m$ segue que:

$$\text{posto}(M_1) = m. \tag{B.2}$$

Agora, considere, por hipótese, posto$(C) = p$ e, de (B.1),

$$C = \begin{bmatrix} M_1 & \vdots & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^T \\ B_\perp^T \end{bmatrix} \tag{B.3}$$

e, então, posto$([M_1 \vdots M_2]) = p$. Portanto, de (B.2) e $[M_1 \vdots M_2] \in \mathbb{R}^{p \times n}$, existem $p-m$ colunas de M_2, iguais por definição a $m_1, \ldots, m_{p-m}$, tal que

$$\text{posto} \begin{bmatrix} M_1 & \vdots & m_1 & \vdots & \cdots & \vdots & m_{p-m} \end{bmatrix} = \text{posto} \begin{bmatrix} M_1 & \vdots & M_4 \end{bmatrix} = p. \tag{B.4}$$

Note que:

$$\begin{bmatrix} M_3 & \vdots & M_4 \end{bmatrix} = M_2 N_1 N_2 \ldots N_q = M_2 N, \tag{B.5}$$

sendo $N_i \in \mathbb{R}^{n-m \times n-m}$, $i = 1, \ldots, q$ não singulares e que permutam duas colunas de $M_2 N_0 \ldots N_{i-1}$, sendo $N_0 = I_{n-m}$.

É fácil mostrar que $N_i^{-1} = N_i$ e assim, de (B.5), $N^{-1} = N_q \ldots N_1$. Então, de (B.3) e

cm 1 2 3 4 5 6 unesp 10 11 12 13 14 15 16

(B.5), segue que:

$$C = \left[\begin{array}{c:c} M_1 & M_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} I_m & 0 \\ 0 & NN^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} B^T \\ B_\perp^T \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c:c} M_1 & M_3 & M_4 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} B^T \\ N^{-1}B_\perp^T \end{array}\right]. \tag{B.6}$$

Note que $N^{-1}B_\perp^T$ tem as mesmas linhas de $B_\perp^T$, mas com algumas mudanças de posição. Portanto, de $B_\perp^T B = 0$ e $b_{\perp i}^T b_{\perp j} = 0$, $i \neq j$, defina:

$$N^{-1}B_\perp^T = \left[\begin{array}{c:c} B_{0\perp} & \tilde{B}_{0\perp} \end{array}\right]^T, \tag{B.7}$$

sendo $B_{0\perp}^T \in \mathbb{R}^{n-p\times n}$ e $\tilde{B}_{0\perp}^T \in \mathbb{R}^{p-m\times n}$. Então, $B_{0\perp}^T B = 0$, $\tilde{B}_{0\perp}^T B = 0$ e $B_{0\perp}^T \tilde{B}_{0\perp} = 0$. Portanto, de (B.6) e (B.7), segue que:

$$C = M_1 B^T + M_3 B_{0\perp}^T + M_4 \tilde{B}_{0\perp}^T.$$

Sabendo-se que $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, temos, a partir de (B.4):

$$\text{posto}\left(\left[\begin{array}{c:c} M_1 & M_4 \end{array}\right]\right) = \text{posto}\left(\left[\begin{array}{c:c:c} M_1 & M_3 & M_4 \end{array}\right]\right) = p. \tag{B.8}$$

Agora, considere a matriz:

$$T = \left[\begin{array}{c} B_{0\perp}^T \\ C \end{array}\right]. \tag{B.9}$$

Então:

$$T^{-1} = \left[\begin{array}{c:c} B_{0\perp}\left[B_{0\perp}^T B_{0\perp}\right]^{-1} + BK_1 + \tilde{B}_{0\perp}K_2 & C^T\left[CC^T\right]^{-1} + C_\perp^T K_3 \end{array}\right], \tag{B.10}$$

sendo:

$$C_\perp^T = B\left[B^T B\right]^{-1} K_4 + B_{0\perp}\left[B_{0\perp}^T B_{0\perp}\right]^{-1} + \tilde{B}_{0\perp}\left[\tilde{B}_{0\perp}^T \tilde{B}_{0\perp}\right]^{-1} K_5, \tag{B.11}$$

$$M_3 + M_1 K_4 + M_4 K_5 = M_3 + M_4 \tilde{B}_{0\perp}^T \tilde{B}_{0\perp} K_2 + M_1 B^T B K_1 = 0, \tag{B.12}$$

$$K_3 = -\tilde{B}_{0\perp}^T C\left(CC^T\right)^{-1}. \tag{B.13}$$

Note que $CC_\perp^T = 0$ e, de (B.8), existem K_1, K_2, K_4 e K_5 tais que (B.12) seja satisfeita, pois $\tilde{B}_{0\perp}^T \tilde{B}_{0\perp}$ e $B^T B$ são não-singulares. Portanto, de (2.10), (B.9) e (B.10), é fácil mostrar que:

$$TB = \left[\begin{array}{c} 0 \\ CB \end{array}\right] = B_N, \quad CT^{-1} = \left[\begin{array}{cc} 0 & I_p \end{array}\right] = C_N, \tag{B.14}$$

unesp

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} = A_N, \; Tx = \begin{bmatrix} e_1 \\ \tilde{y} \end{bmatrix}, \tag{B.15}$$

sendo $A_1 \in \mathbb{R}^{n-p \times n-p}$, $A_4 \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $A_3 \in \mathbb{R}^{p \times n-p}$ e $A_2 \in \mathbb{R}^{n-p \times p}$. Então, o Lema 3 está provado.

cm 1 2 3 4 5 6 unesp 0 11 12 13 14 15 16

APÊNDICE C – Obtenção da Faixa de Estabilidade Utilizando o Critério de Routh com o Matlab

Foi implementado um programa, chamado `stabrange.m`, utilizando o *Matlab*, versão 6.5, para determinar a faixa de ganhos do controlador, de modo que o sistema na Fig. 12 seja estável, com o método proposto no Capítulo 3, para controladores P, I, D, PI, PD, ID e PID. O programa também permite a especificação da taxa de decaimento do sistema controlado. O programa está disponível na *Internet*: `http://www.dee.feis.unesp.br/docentes/marcelo/fxestab/index.html`. O programa utiliza apenas o *Matlab* e o *Control System Toolbox* e pode ser empregado como uma nova função para o Critério de Estabilidade de Routh.

Inicialmente, o programa solicita ao usuário os coeficientes dos polinômios $n(s)$ e $d(s)$, na forma de vetor. Por exemplo, se $n(s) = s^2 - 2s + 1$, deve-se digitar `[1 -2 1]`. Então, ele permite que o usuário especifique uma taxa de decaimento, se desejar. Em seguida, o usuário escolhe o tipo de controlador. Suponha que o usuário escolha o controlador P. Como o programa possui um pequeno erro de aproximação na busca das raízes dos termos da primeira coluna da tabela de Routh e, conseqüentemente, algumas raízes repetidas podem ser consideradas como raízes distintas, existe uma margem de tolerância $\epsilon = 10^{-6}$, que pode ser alterada pelo usuário. Então, após possibilitar ao usuário checar a tolerância, o programa executa a função `srrc`, que soluciona o problema principal: determinar a faixa de valores de $k \in \mathbb{R}$, tal que todas as raízes do polinômio característico $d(s,k) = kn(s) + d(s)$ possuem parte real negativa, utilizando o Critério de Estabilidade de Routh, seguindo o método descrito no Capítulo 3.

O primeiro passo executado pela função `srrc` é obter os termos $p_{ij}(k)$ dos numeradores da tabela de Routh (veja a Tabela 1). Depois de calcular as raízes reais dos



termos $p_{j1}(k)$ da primeira coluna, essas raízes reais são dispostas em ordem crescente, sem repetição, como mostra a Fig. 9. Essas raízes determinam os intervalos a serem analisados. Assim, para cada intervalo I_i, um ponto m_i é escolhido de acordo com a Observação 28. Finalmente, seguindo o procedimento descrito no Capítulo 3, a função calcula o polinômio característico $d(s, m_i)$ e determina as raízes deste polinômio. Se todas as raízes de $d(s, m_i)$ possuem parte real negativa, o sistema na Fig. 10 é estável para k em todo o intervalo I_i. Caso contrário, o sistema é instável neste intervalo de k. A função retorna os intervalos de k nos quais o sistema é estável em uma variável tipo *string*, chamada `spe`, e os limites destes intervalos em uma matriz, chamada `sol`. Finalmente, o programa mostra a faixa de estabilidade.

Note que não é necessário obter os termos $q_j(k)$ na tabela de Routh, pois suas raízes estão incluídas nas raízes dos termos $p_{j1}(k)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$, como mencionado no Capítulo 3.

Quando o usuário escolhe um controlador I ou D, o procedimento é o mesmo, exceto pela adição de um pólo ou um zero em $s = 0$, respectivamente, na função de transferência de malha aberta.

Para controladores PI, PD e ID, o programa solicita um conjunto de valores para K_I, K_D e K_D, respectivamente, dado por um valor inicial, um valor final e um valor de incremento. Por exemplo, para controladores PI, o conjunto de valores de K_I é o seguinte: $K_{I\,\text{inicial}}$, $K_{I\,\text{inicial}} + \Delta$, $K_{I\,\text{inicial}} + 2\Delta$,..., $K_{I\,\text{inicial}} + m\Delta$, sendo Δ o valor de incremento, $K_{I\,\text{inicial}} + m\Delta \leq K_{I\,\text{final}}$ e $K_{I\,\text{inicial}} + (m+1)\Delta > K_{I\,\text{final}}$. Então, para cada valor de K_I, K_D e K_D nos conjuntos definidos acima, respectivamente, o programa determina o polinômio característico $d(s, k)$, para $k = K_P$, $k = K_P$ e $k = K_I$, respectivamente, e executa a função `srrc`, que obtém a faixa de estabilidade de K_P, K_P e K_I, respectivamente, para os controladores PI, PD e ID. Finalmente, o programa mostra a região de estabilidade em um gráfico. Os limites dos intervalos de K_P, K_P e K_I, para cada valor de K_I, K_D e K_D, respectivamente, são armazenados em uma matriz, chamada `sol2v`.

Para um controlador PID, o programa solicita um conjunto de valores para K_D e para K_I (valor inicial, valor final e o valor de incremento). Então, para cada par de valores de K_D e K_I, o programa determina o polinômio caracterísitco $d(s, k)$, para $k = K_P$, e executa a função `srrc`, que determina a faixa de estabilidade de K_P. Finalmente, o programa mostra a região de estabilidade em um gráfico. Os limites dos intervalos de K_P, para cada par de valores de K_I e K_D, respectivamente, são armazenados em uma matriz, chamada `sol3v`.

cm 1 2 3 4 5 6 unesp 0 11 12 13 14 15 16

Depois de especificar os coeficientes de $n(s)$ e $d(s)$ e checar a tolerância, se o usuário escolher um controlador P, I ou D, o programa pergunta se o usuário deseja ver todos os passos do processamento ou apenas a faixa de estabilidade. Quando a opção é ver todos os passos, algumas pausas são incluídas na apresentação, para uma melhor visualização. Para controladores PI, PD, ID e PID, somente as faixas de estabilidade e o gráfico contendo a região de estabilidade são mostrados.

Este programa foi apresentado em um artigo, intitulado "Proportional Controllers: Direct Method for Stability Analysis and MATLAB Implementation", que foi submetido ao periódico *IEEE Transactions on Education* [62].

cm 1 2 3 4 5 6 unesp 10 11 12 13 14 15 16

APÊNDICE D – Restrições na Entrada e na Saída

D.1 Restrição no Vetor de Entrada

Admita que um SLIT possua a seguinte representação em variáveis de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{D.1}$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle, $y \in \mathbb{R}^p$ a saída do sistema ($p \geq m$), $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz característica do sistema, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ a matriz de entrada do sistema e $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ a matriz de saída do sistema.

O problema da restrição no vetor de entrada u consiste em especificar LMIs, de modo a assegurar que:

$$\max_{t \geq 0} ||u|| \leq \mu_o,$$

sendo μ_o uma especificação considerada no projeto do controlador. Para a lei de controle $u = -K_o y$, tem-se:

$$\dot{x} = Ax - BK_o y = Ax - BK_o Cx = (A - BK_o C)x.$$

Considera-se, então, uma candidata a função de Lyapunov na forma quadrática $V(x) = x^T P x$, na qual P é uma matriz real simétrica definida positiva. A derivada desta função em relação ao tempo, ao longo de qualquer trajetória, é descrita por:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= x^T (A - BK_o C)^T P x + x^T P (A - BK_o C) x \\ &= x^T (A^T P - C^T K_o^T B^T P) x + x^T (PA - PBK_o C) x \\ &= x^T (PA + A^T P - PBK_o C - C^T K_o^T B^T P) x \end{aligned}$$

cm 1 2 3 4 5 6 unesp 10 11 12 13 14 15 16

$$= x^T P P^{-1}(PA + A^T P - PBK_o C - C^T K_o^T B^T P)P^{-1} P x$$
$$= x^T P(AP^{-1} + P^{-1}A^T - BK_o C P^{-1} - P^{-1} C^T K_o^T B^T) P x. \quad \text{(D.2)}$$

Definindo-se $X = P^{-1}$, tem-se:

$$\dot{V}(x) = x^T P(AX + XA^T - BK_o CX - XC^T K_o^T B^T) P x.$$

Como $V(x)$ foi escolhida sendo definida positiva, para que se tenha estabilidade assintótica, é suficiente que $\dot{V}(x)$ seja definida negativa. Logo, considere que:

$$AX + XA^T - BK_o CX - XC^T K_o^T B^T < 0.$$

Então, as condições para a estabilidade são a existência de X e F, tais que:

$$AX + XA^T - BK_o CX - XC^T K_o^T B^T < 0 \text{ e } X = X^T > 0. \quad \text{(D.3)}$$

Considerando que (D.3) é satisfeita, então quando uma determinada condição inicial $x(0)$ é conhecida, é possível encontrar um limite superior para a norma euclidiana da entrada de controle $u(t) = -K_o y$ [42]. Considera-se, inicialmente, que $X = X^T > 0$ satisfaz:

$$x(0)^T X^{-1} x(0) < 1. \quad \text{(D.4)}$$

Esta condição não restringe a solução de (D.3), pois limita apenas a norma de X^{-1} e (D.3) não impõe outras restrições à matriz X.

Segundo [77], a idéia básica do complemento de Schur diz que a LMI:

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0, \quad \text{(D.5)}$$

sendo que $Q(x) = Q(x)^T$, $R(x) = R(x)^T$ e $S(x)$ têm uma dependência afim de x, é equivalente a:

$$R(x) > 0 \text{ e } Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0,$$

isto é, este conjunto de inequações não-lineares pode ser representado através da LMI (D.5).

cm 1 2 3 4 5 6 unesp 0 11 12 13 14 15 16

Logo, pelo complemento de Schur, (D.4) possui a seguinte equivalência:

$$1 - x(0)^T X^{-1} x(0) > 0 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & X \end{bmatrix} > 0. \tag{D.6}$$

Como $X = X^T > 0$, então é conhecido que existe $X^{\frac{1}{2}} = (X^{\frac{1}{2}})^T > 0$ tal que $X = X^{\frac{1}{2}} X^{\frac{1}{2}}$ e conseqüentemente, $X^{-1} = X^{-\frac{1}{2}} X^{-\frac{1}{2}}$, sendo que $X^{-\frac{1}{2}} = (X^{-\frac{1}{2}})^T > 0$.

Definindo-se $z = X^{-\frac{1}{2}} x$, tem-se:

$$\begin{aligned} \max_{t \geq 0} \|u\|_2 &= \max_{t \geq 0} \| - K_o y\|_2 \\ &= \max_{t \geq 0} \|K_o C x\|_2 \\ &= \max_{t \geq 0} \|K_o C X^{\frac{1}{2}} z\|_2. \end{aligned} \tag{D.7}$$

De (D.4), tem-se:

$$\begin{aligned} \|z(0)\|_2^2 &= \|X^{-\frac{1}{2}} x(0)\|_2^2 \\ &= x(0)^T X^{-\frac{1}{2}} X^{-\frac{1}{2}} x(0) \\ &= x(0)^T X^{-1} x(0) \leq 1. \end{aligned} \tag{D.8}$$

Como para $V(x) = x^T X^{-1} x$, $\dot{V}(x) < 0$, para $x \neq 0$, então (D.8) é satisfeita para todo x, $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|z\|_2^2 &= z^T z \\ &= x^T X^{-\frac{1}{2}} X^{-\frac{1}{2}} x \\ &= x^T X^{-1} x \leq 1. \end{aligned} \tag{D.9}$$

De (D.7)–(D.9),

$$\begin{aligned} \max_{t \geq 0} \|K_o C X^{\frac{1}{2}} z\|_2 &= \max_{t \geq 0} \sqrt{z^T X^{\frac{1}{2}} C^T K_o^T K_o C X^{\frac{1}{2}} z} \\ &\leq \sqrt{\lambda_{max}(X^{\frac{1}{2}} C^T K_o^T K_o C X^{\frac{1}{2}})}. \end{aligned} \tag{D.10}$$

Assim,

$$\max_{t \geq 0} \|K_o C X^{\frac{1}{2}} z\|_2^2 < \mu_0^2 \Longleftarrow \lambda_{max}(X^{\frac{1}{2}} C^T K_o^T K_o C X^{\frac{1}{2}}) < \mu_0^2.$$

cm 1 2 3 4 5 6 unesp 10 11 12 13 14 15 16

Esta condição é equivalente a:

$$X^{\frac{1}{2}}C^T K_o^T K_o C X^{\frac{1}{2}} - \mu_0^2 I < 0, \tag{D.11}$$

pois:

$$z^T(X^{\frac{1}{2}}C^T K_o^T K_o C X^{\frac{1}{2}} - \mu_0^2 I)z \leq z^T z(\lambda_{max}(X^{\frac{1}{2}}C^T K_o^T K_o C X^{\frac{1}{2}}) - \mu_0^2).$$

Multiplicando-se (D.11), em ambos os lados, por $X^{\frac{1}{2}}$, obtém-se:

$$\begin{gathered} X^{\frac{1}{2}}(X^{\frac{1}{2}}C^T K_o^T K_o C X^{\frac{1}{2}})X^{\frac{1}{2}} - X^{\frac{1}{2}}\mu_o^2 I X^{\frac{1}{2}} < 0, \\ XC^T K_o^T K_o C X - \mu_o^2 X < 0, \\ \mu_o^2 X - XC^T K_o^T K_o C X > 0, \\ X - XC^T K_o^T (\mu_o^2 I)^{-1} K_o C X > 0. \end{gathered} \tag{D.12}$$

Logo, pelo complemento de Schur, (D.12) possui a seguinte equivalência:

$$-X^{\frac{1}{2}}C^T K_o^T K_o C X^{\frac{1}{2}} + \mu_0^2 I > 0 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} X & XC^T K_o^T \\ K_o C X & \mu_0^2 I \end{bmatrix} > 0. \tag{D.13}$$

Portanto, as expressões (D.6) e (D.13) solucionam o problema.

Uma solução dual para o problema pode ser obtida a partir de (D.4) e (D.11). A condição (D.4) é equivalente a:

$$x(0)^T X^{-1} x(0) = x(0)^T X^{-1} X X^{-1} x(0) < 1. \tag{D.14}$$

Logo, pelo complemento de Schur, (D.14) possui a seguinte equivalência:

$$1 - x(0)^T X^{-1} X X^{-1} x(0) > 0 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & x(0)^T X^{-1} \\ X^{-1} x(0) & X^{-1} \end{bmatrix} > 0. \tag{D.15}$$

Como $X^{-1} = P$, a condição (D.15) é equivalente a:

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T P \\ P x(0) & P \end{bmatrix} > 0. \tag{D.16}$$

Multiplicando-se (D.11), em ambos os lados, por $X^{-\frac{1}{2}}$, obtém-se:

$$\begin{gathered} X^{-\frac{1}{2}}(X^{\frac{1}{2}}C^T K_o^T K_o C X^{\frac{1}{2}})X^{-\frac{1}{2}} - X^{-\frac{1}{2}}\mu_o^2 I X^{-\frac{1}{2}} < 0, \\ C^T K_o^T K_o C - \mu_o^2 X^{-1} < 0, \end{gathered}$$

cm 1 2 3 4 5 6 unesp 10 11 12 13 14 15 16

$$\mu_o^2 X^{-1} - C^T K_o^T K_o C > 0,$$
$$X^{-1} - C^T K_o^T (\mu_o^2 I)^{-1} K_o C > 0. \tag{D.17}$$

Logo, pelo complemento de Schur, (D.17) possui a seguinte equivalência:

$$-X^{\frac{1}{2}} C^T K_o^T K_o C X^{\frac{1}{2}} + \mu_0^2 I > 0 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} X^{-1} & C^T K_o^T \\ K_o C & \mu_0^2 I \end{bmatrix} > 0. \tag{D.18}$$

Como $X^{-1} = P$, a condição (D.18) é equivalente a:

$$\begin{bmatrix} P & C^T K_o^T \\ K_o C & \mu_0^2 I \end{bmatrix} > 0. \tag{D.19}$$

Portanto, as LMIs (D.16) e (D.19) solucionam o problema.

D.2 Restrição no Vetor de Saída

O problema da restrição no vetor de saída y consiste em especificar LMIs, de modo a assegurar que:

$$\max_{t \geq 0} ||y|| \leq \xi_o,$$

sendo ξ_o uma especificação considerada no projeto do controlador.

A análise a seguir é semelhante àquela efetuada no estudo da restrição no vetor de entrada. Para isso, considera-se, novamente, o SLIT descrito em (D.1), (D.8) e (D.9). Como $x = X^{\frac{1}{2}} z$, tem-se:

$$\begin{aligned} \max_{t \geq 0} \|y\|_2^2 &= \max_{t \geq 0} \|Cx\|_2^2 \\ &= \max_{t \geq 0} \|CX^{\frac{1}{2}} z\|_2^2 \\ &= \max_{t \geq 0} \sqrt{z^T X^{\frac{1}{2}} C^T C X^{\frac{1}{2}} z} \\ &\leq \sqrt{\lambda_{max}(X^{\frac{1}{2}} C^T C X^{\frac{1}{2}})}. \end{aligned} \tag{D.20}$$

Portanto, analogamente ao desenvolvimento realizado anteriormente em (D.11), (D.12)

e (D.13), tem-se que:

$$\max \|CX^{\frac{1}{2}}z\|_2^2 < \xi_0^2 \Longleftarrow \lambda_{max}(X^{\frac{1}{2}}C^TCX^{\frac{1}{2}}) < \xi_0^2.$$

Esta condição é equivalente a:

$$X^{\frac{1}{2}}C^TCX^{\frac{1}{2}} - \xi_0^2 I < 0, \tag{D.21}$$

pois,

$$z^T(X^{\frac{1}{2}}C^TCX^{\frac{1}{2}} - \xi_0^2 I)z \leq z^Tz(\lambda_{max}(X^{\frac{1}{2}}C^TC - \xi^2 X^{\frac{1}{2}}) - \xi_0^2).$$

Multiplicando-se (D.21), em ambos os lados, por $X^{\frac{1}{2}}$, obtém-se:

$$\begin{aligned} XC^TCX - \xi_0^2 X < 0, \\ \xi_0^2 X - XC^TCX > 0, \\ X - XC^T(\xi_0^2 I)^{-1}CX > 0. \end{aligned} \tag{D.22}$$

Logo, pelo complemento de Schur, (D.22) possui a seguinte equivalência:

$$-X^{\frac{1}{2}}C^TCX^{\frac{1}{2}} + \xi_0^2 I > 0 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} X & XC^T \\ CX & \xi_0^2 I \end{bmatrix} > 0. \tag{D.23}$$

Portanto, as LMIs (D.6) e (D.23) solucionam o problema.

Uma solução dual para o problema pode ser obtida a partir de (D.4) e (D.21). Como $X^{-1} = P$, a condição (D.4) é equivalente a (D.16).

Multiplicando-se (D.21), em ambos os lados, por $X^{-\frac{1}{2}}$, obtém-se:

$$\begin{aligned} C^TC - \xi_0^2 X^{-1} < 0, \\ \xi_0^2 X^{-1} - C^TC > 0, \\ X^{-1} - C^T(\xi_0^2 I)^{-1}C > 0. \end{aligned} \tag{D.24}$$

Logo, pelo complemento de Schur, (D.24) possui a seguinte equivalência:

$$-X^{\frac{1}{2}}C^TCX^{\frac{1}{2}} + \xi_0^2 I > 0 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} X^{-1} & C^T \\ C & \xi_0^2 I \end{bmatrix} > 0. \tag{D.25}$$

Como $X^{-1} = P$, a condição (D.25) é equivalente a:

$$\begin{bmatrix} P & C^T \\ C & \xi_0^2 I \end{bmatrix} > 0. \tag{D.26}$$

Portanto, as LMIs (D.16) e (D.26) solucionam o problema.

cm 1 2 3 4 5 6 unesp 10 11 12 13 14 15 16

unesp
UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Ilha Solteira
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Av. Brasil Centro, 56
15385-000 - Ilha Solteira - SP
www.dee.feis.unesp.br