unesp UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS DE COMPUTAÇÃO E ESTATÍSTICA

OPERADOR QUATERNIÔNICO DE KLEIN-GORDON-DIRAC

Alexandre Pitangui Calixto

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada
MAP - 070

Rua Cristovão Colombo, 2265
15054-000 - São José do Rio Preto - SP - Brasil
Telefone: (17) 221-2444
Fax: (17) 221-2445

Operador Quaterniônico de Klein-Gordon-Dirac

Alexandre Pitangui Calixto

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Manoel Ferreira Borges Neto

São José do Rio Preto

18 de dezembro de 2002

Calixto, Alexandre Pitangui.
Operador quaterniônico de Klein-Gordon-Dirac / Alexandre Pitangui Calixto. - São José do Rio Preto : [s.n.], 2003.
66 f.; 30 cm.

Orientador: Manoel Ferreira Borges Neto
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Física matemática. 2. Quatérnios. 3. Funções hipercomplexas. 4. Bicomplexos. I. Borges Neto, Manoel Ferreira. II. Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU - 501

"A Natureza não esconde
seus segredos por
malícia,
mas sim por causa da
sua própria
altivez".

Albert Einstein

À Zezé,

com amor.

Agradecimentos

Uma dissertação não se faz somente com esforço e conhecimento, se faz também com o apoio de grandes amigos. E é com muita alegria que agradeço às pessoas que durante o desenvolvimento deste trabalho, contribuíram de diferentes formas para sua realização. Dentre elas, desejo destacar os colegas de Curso, todos os professores e os funcionários do DCCE que de alguma forma auxiliaram na consecução deste trabalho.

Ao Prof. Dr. José Marcio Machado, pelas contribuições.

À Maria José, minha esposa, meus pais e meus irmãos, que sempre me apoiaram.

À CAPES, pelo auxílio financeiro.

À Rosana Zanelatto, pela revisão lingüística.

De modo especial, ao Prof. Dr. Manoel Ferreira Borges Neto, pela orientação, pelo incentivo, pela paciência e pela confiança na elaboração desta dissertação.

Resumo

Nesta dissertação é apresentada uma aproximação da Teoria de Variáveis Complexas de duas para quatro dimensões. Procura-se definir diferenciabilidade de funções quaterniônicas, a partir da qual se estabelece uma relação com a teoria de regularidade de funções hipercomplexas [9]. Observa-se que após definir o operador quaterniônico Γ, é possível reescrever equações clássicas da Física de forma concisa, utilizando a definição de regularidade, que resulta na decomposição de uma equação diferencial de segunda ordem em duas equações diferenciais lineares de primeira ordem.

Abstract

This dissertation presents an approximation of Complex Variable Theory from two to four dimension. It is attempted to define differentiability of quaternionic functions, from which it is established a relation with hypercomplex functions regularity theory [9]. It is observed that after been defined the quaternionic operator Γ, it is possible to rewrite Physical classical equations in a concise form, utilizing the regularity definition, which results in the decomposition of a second order differential equation in two first order linear differential equations.

Sumário

Resumo ii

Abstract iii

Introdução 1

1 Tópicos de Álgebra 3

1.1 Grupos 3

1.2 Anéis e Corpos 10

1.3 Grupos de Lie 16

1.4 Grupos de Transformação 19

1.5 Transformações Conformes 20

1.6 Grupo Holonômico 23

2 Análise Hipercomplexa 26

2.1 Integração Complexa 26

2.2 Conceitos Topológicos 29

2.3 Teoria de Grupos 32

2.4 Diferenciação de Funções Hipercomplexas 38

3 Operador Quaterniônico do tipo Klein-Gordon-Dirac 49

3.1 Funções Quaterniônicas Regulares 49

3.2 Representação Quaterniônica da Equação de Klein-Gordon 59

3.3 Representação Quaterniônica da Equação de Dirac 61

Conclusão 63

Referências Bibliográficas 64

Introdução

Nesta dissertação busca-se estabelecer uma aproximação em quatro dimensões da Teoria de Variáveis Complexas.

O primeiro a apresentar um esboço para a generalização dessa teoria de duas para quatro dimensões, foi Fueter, na década de 1930, a partir da definição de regularidade à esquerda e à direita de funções hipercomplexas, mostrando uma equação análoga à de Cauchy-Riemann. Entretanto, sua aproximação não tratava da conformidade entre hipersuperfícies, condição importante no estudo de teorias com conteúdo físico.

Na tentativa de resolver esse problema, procurou-se estabelecer uma correspondência entre diferenciabilidade de funções quaterniônicas e aplicações conformes para funções hipercomplexas [16]. Trabalhou-se sobretudo com funções e variáveis quaterniônicas sobre o anel dos quatérnios $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ de onde foi definida a derivada à esquerda e à direita de funções quaterniônicas. A partir daí foi definido o operador quaterniônico Γ, com base no qual foi traçado um paralelo com a regularidade de funções hipercomplexas de Fueter [9], o que permitiu reescrever equações de campo da Física quântica relativista, via o operador quaterniônico Γ_c, induzido por Γ.

Assim, o presente trabalho estrutura-se da seguinte forma:

No Capítulo 1 são introduzidas algumas definições, resultados e exemplos referentes à Teoria de Grupos e Anéis. Destacam-se o Teorema de Lagrange e o Anel dos Quatérnios, alvo de grande interesse neste trabalho. Ainda nesse capítulo, apresentam-se alguns grupos de particular interesse, a saber, grupos de Lie, de transformação e holonômicos.

O principal objetivo no Capítulo 2 é mostrar o porquê da construção dessa aproximação somente sobre o anel bicomplexo $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ e sobre o anel dos quatérnios $(Q_8, +, \cdot)$. Aborda-se também a teoria básica da Análise Hipercomplexa, definindo funções, integrais e diferenciabilidade hipercomplexas. Para tanto, lança-se mão de resultados conhecidos de Análise Complexa, de Topologia e de Álgebra.

Finalmente, no Capítulo 3, procura-se estabelecer uma conexão da diferenciabilidade quaterniônica com a teoria regular de Fueter, por meio de uma versão quaterniônica do Teorema de Divergência de Gauss, e define-se o operador quaterniônico Γ utilizando uma extensão do Teorema de Morera. Essa conexão permite decompor as equações diferenciais parciais de segunda ordem de Klein-Gordon, da Teoria Relativista

$$(\Box + m)\phi = 0, \qquad \text{na qual} \qquad \Box = \overline{\Gamma}_c \Gamma_c = \Gamma_c \overline{\Gamma}_c,$$

e as equações de Dirac, da Teoria Quântica, em equações diferenciais parciais lineares

$$i\,\hbar\,\Gamma_c\,\phi = m\,c\,\psi \qquad \text{e} \qquad i\,\hbar\,\overline{\Gamma}_c\,\psi = m\,c\,\phi,$$

onde ϕ e ψ são os campos de Dirac.

Capítulo 1

Tópicos de Álgebra

O objetivo deste capítulo é introduzir alguns conceitos, resultados e exemplos que utilizaremos adiante. A primeira e a segunda seções estão fortemente baseadas em [10] e [11], onde podem ser encontradas as demonstrações dos resultados aqui enunciados.

1.1 Grupos

Definição 1.1. Sejam G um conjunto não vazio e $*$ uma operação binária em G. Dizemos que o par $(G,*)$ é um *grupo* se valem as seguintes propriedades:

1. $a*(b*c)=(a*b)*c \quad (associativa)$, quaisquer que sejam $a,b,c\in G$;

2. existe $e\in G$, chamado *elemento neutro de* G, tal que $a*e=e*a=a$, para todo $a\in G$;

3. para todo $a\in G$, existe $a'\in G$ tal que $a*a'=a'*a=e$, chamado de *simétrico de* a.

Os elementos e em (2) e a' em (3) são únicos. De fato,

(i) se $e_1,e_2\in G$ são elementos neutros de G, então $e_1=e_1\cdot e_2=e_2$.

(ii) Se $a_1',a_2'\in G$ são tais que

$$a*a_1'=a_1'*a=e \qquad \text{e} \qquad a*a_2'=a_2'*a=e,$$

para todo $a\in G$, então

$$a_1'=e*a_1'=(a*a_2')*a_1'=(a_2'*a)*a_1'=a_2'*(a*a_1')=a_2'*e=a_2'.$$

Se a operação binária $*$ no grupo $(G, *)$ é comutativa, ou seja, se $a * b = b * a$, para quaisquer $a, b \in G$, dizemos que $(G, *)$ é um *grupo abeliano.*

Em geral, usaremos a notação simplificada ab para representar $a * b$ e a^{-1} para representar a'.

Exemplo 1.2. Para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, consideremos a relação de equivalência

$$A_n = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid n \text{ divide } a - b\}.$$

Em geral, A_n produz n classes de equivalência distintas, que denotaremos $[0]_n$, $[1]_n, \ldots,$ $[n-1]_n$ ou, simplesmente, $\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}$. Deste modo,

$$\mathbb{Z}/R_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}\} \doteq \mathbb{Z}_n.$$

Definindo a operação $+$ como

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b},$$

podemos mostrar que $(\mathbb{Z}_n, +)$ é um grupo abeliano, cujo elemento neutro é $\bar{0}$.

Exemplo 1.3. Sejam S um conjunto não vazio e $G = \{f : S \to S \mid f \text{ é bijetora}\}$.

Se $\circ : G \times G \to G$ é uma operação composição de funções dada por $(f, g) \mapsto g \circ f$, então $(G, \circ)$ é um grupo, onde a identidade é a função $I_S : S \to S$, tal que $I_S(x) = x$, para todo $x \in S$.

Esse grupo é chamado *grupo das permutações do conjunto S.*

Se $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, denotamos esse grupo por S_n e temos que o número de elementos de S_n é exatamente $n!$. Os grupos S_n, $n \geq 3$ são exemplos de grupos não abelianos.

Observação 1.4. *Se um grupo G possui no máximo 5 elementos, então G é um grupo abeliano.*

Exemplo 1.5. Definiremos agora o grupo D_4 das simetrias espaciais de um quadrado.

Seja $P_1P_2P_3P_4$ um quadrado. Sejam D_1, D_2 as diagonais, M, N as mediatrizes e 0 o centro de gravidade.

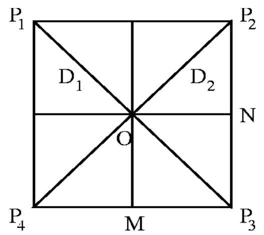

Figura 1.1: *Quadrado*

Consideremos o conjunto das transformações espaciais que preservam o quadrado, com a operação de composição.

Essas transformações consistem em: $Id, R_{\frac{\pi}{2}}, R_{\pi}, R_{\frac{3\pi}{2}}$, as rotações planas centradas em 0, no sentido anti-horário, de ângulos $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ e $\frac{3\pi}{2}$, respectivamente, e A_M, R_N, R_1, R_2, as rotações espaciais de ângulo π com eixos M, N, D_1 e D_2, respectivamente.

É fácil notar que $D_4 = \{Id, R_{\frac{\pi}{2}}, R_{\pi}, R_{\frac{3\pi}{2}}, R_M, R_N, R_1, R_2\}$ com a composição de funções é um grupo.

O grupo não é abeliano, pois

$$A_1 \circ R_M = R_{\frac{\pi}{2}} \quad \text{e} \quad R_M \circ R_1 = R_{\frac{3\pi}{2}}.$$

Os elementos $A_{\frac{\pi}{2}}$ e A_M geram o grupo D_4, isto é, qualquer elemento de D_4 é um produto de algum $A_{\frac{\pi}{2}}$ com algum A_M.

Exemplo 1.6. Sejam G um grupo e $x \in G$. Se $n \in \mathbb{Z}$, definimos

$$x^n = \begin{cases} e \,, & n = 0 \\ x^{n-1} * x \,, & n > 0 \\ (x^{-n})^{-1} \,, & n < 0 \,, \end{cases}$$

com as seguintes propriedades:

(i) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$,

(ii) $(x^m)^n = x^{mn}$,

para $m, n \in \mathbb{Z}$.

O subconjunto $\{x^m | m \in \mathbb{Z}\} \subset G$, denotado por $\langle x \rangle$, é chamado *grupo cíclico gerado por* $x \in G$. Observemos que todo grupo cíclico é abeliano, mas a recíproca nem sempre é verdadeira, veja o (Exemplo 1.8).

Exemplo 1.7. Sejam $(G, \circ)$ e $(H, \diamond)$ dois grupos cujas identidades representaremos por e_G e e_H, respectivamente.

Seja $G \times H = \{(g, h) |\ g \in G \text{ e } h \in H\}$ o conjunto *produto cartesiano* de G e H. Definimos a operação $*$ entre elementos de $G \times H$ por intermédio da regra

$$(g_1, h_1) * (g_2, h_2) = (g_1 \circ g_2, h_1 \diamond h_2),$$

para quaisquer $g_1, g_2 \in G$ e $h_1, h_2 \in H$.

É fácil notar que $e = (e_G, e_H)$ satisfaz

$$(g, h) * e = e * (g, h) = (g, h) \qquad \text{e} \qquad e = (g, h) * (g^{-1}, h^{-1}) = (g^{-1}, h^{-1}) * (g, h),$$

para qualquer $(g, h) \in G \times H$.

Como a transitividade da operação $*$ decorre imediatamente da transitividade das operações $\circ$ e $\diamond$, segue que $(G \times H, *)$ é um grupo, com elemento identidade $e = (e_G, e_H)$.

Observemos que se $(G, \circ)$ e $(H, \diamond)$ são grupos abelianos, então $(G \times H, *)$ também é um grupo abeliano. Se $(G, \circ)$ e $(H, \diamond)$ são grupos aditivos, usaremos também a notação aditiva para $(G \times H, *)$.

Analogamente, podemos considerar o grupo $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$, que é chamado de *produto direto (externo)* dos grupos $G_1, G_2, \ldots, G_n$.

Exemplo 1.8. Seja $G = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$. Os elementos de G são: $(\overline{0}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{1}), (\overline{1}, \overline{0})$ e $(\overline{1}, \overline{1})$. Notemos que $e = (\overline{0}, \overline{0})$ é a identidade desse grupo e podemos verificar que

$$(\overline{a}, \overline{b})^2 = (\overline{a}, \overline{b}) + (\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{0}, \overline{0}) = e,$$

para qualquer $(\overline{a}, \overline{b}) \in G$.

Portanto, $G = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ é um grupo abeliano não cíclico, que contém exatamente quatro elementos.

Definição 1.9. Sejam G um grupo e H um subconjunto não vazio de G. Dizemos que H é um *subgrupo* de G se:

(i) para quaisquer $a, b \in H$, temos $a * b \in H$;

(ii) $(H, *)$ é um grupo.

Neste caso, denotaremos $H < G$.

Se G é um grupo, os subconjuntos de G dados por

$$C_G(x) = \{a \in G|\ a * x = x * a\} \quad \text{e} \quad Z(G) = \{a \in G|\ a * x = x * a,\ \forall x \in G\}$$

são subgrupos de G, chamados respectivamente de *centralizador de x em G* e *centro de G*. Observemos que $Z(G)$ é um subgrupo abeliano do grupo G.

Definição 1.10. Dados dois grupos $(G, *)$ e $(J, \otimes)$, dizemos que a aplicação $f : G \to J$ é um *homomorfismo de grupos* se $f(a * b) = f(a) \otimes f(b)$, para quaisquer $a, b \in G$.

Se o homomorfismo $f : G \to J$ é bijetivo, então f é um *isomorfismo de grupos.* Neste caso, dizemos que G e J são *isomorfos* e denotamos $G \simeq J$.

As definições e os resultados apresentados a seguir visam introduzir um teorema clássico da Álgebra, o Teorema de Lagrange.

Definição 1.11. A *ordem de um grupo G* é a cardinalidade de G, que denotamos por $|G|$.

Definição 1.12. Sejam G um grupo e $a \in G$. A *ordem do elemento $a \in G$* é a ordem do subgrupo gerado por a, e é denotada por $O(a)$, ou seja, $O(a) = |\langle a \rangle|$.

Proposição 1.13. *Sejam G um grupo e $a \in G$, com $O(a) = k < \infty$. Então,*

$$k = \min\{n \in \mathbb{N}^*|\ a^n = e\} \quad e \quad \langle a \rangle = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}.$$

Definição 1.14. Sejam H um subgrupo de um grupo $(G, *)$ e $a \in G$. A *classe lateral à esquerda de H* determinada por a é o seguinte subconjunto de G:

$$a * H = \{a * h|\ h \in H\}.$$

Analogamente, a *classe lateral à direita de H* determinada por a é dada por

$$H * a = \{h * a|\ h \in H\}.$$

Se G é um grupo comutativo, notamos que $a * H = H * a$, para qualquer $a \in G$.

Definição 1.15. Sejam G um grupo e H um subgrupo de G. O *índice de H em G* é a cardinalidade do conjunto das classes laterais à esquerda (direita) de H, e é denotado por $(G : H)$.

Proposição 1.16. *Sejam G um grupo e H um subgrupo de G. Todas as classes laterais têm a mesma cardinalidade, que é a cardinalidade de H.*

Teorema 1.17 (Teorema de Lagrange). *Sejam G um grupo finito e H um subgrupo de G. Então,*

$$|G| = |H| \cdot (G : H).$$

Em particular, a ordem e o índice de um subgrupo dividem a ordem do grupo.

Demonstração. Suponha $(G : H) = r$ e seja $\{a_1H, \ldots, a_rH\}$ o conjunto de todas as classes laterais à esquerda. Então,

$$a_1H \cup \ldots \cup a_rH = G.$$

Como cada elemento de G está em uma, e somente uma, dessas classes e o número de elementos de cada classe é $|H|$ (proposição 1.16), então

$$r \cdot |H| = |G|.$$

Como $r = (G : H)$, o teorema está provado. □

Corolário 1.18. *Sejam G um grupo finito e $a \in G$. Então a ordem de a divide a ordem de G.*

Proposição 1.19. *Sejam G um grupo e H, K subgrupos de G, tais que $K < H < G$. Então,*

$$(G : K) = (G : H) \cdot (H : K).$$

As definições e os resultados que enunciaremos a seguir têm por objetivo apresentar o Primeiro, o Segundo e o Terceiro Teoremas do Isomorfismo.

Definição 1.20. Um subgrupo N de um grupo G é um *subgrupo normal de G* se, e somente se, $aN = Na$, para todo $a \in G$. Neste caso, denotamos $N \lhd G$.

Teorema 1.21. *Seja N um subgrupo normal de G. Então, o conjunto das classes laterais com a operação induzida de G é um grupo, chamado* grupo quociente, *e é denotado por G/N.*

Um grupo quociente também pode ser denotado por $G/\sim$, onde $\sim$ é a relação de equivalência que forma as classes laterais.

Proposição 1.22. *Sejam H, K subgrupos de G. Então, HK é um subgrupo de G se, e somente se, $HK = KH$.*

Corolário 1.23. *Sejam N, N' subgrupos normais de G. Então, NN' é um subgrupo normal de G.*

Proposição 1.24. *Sejam H, K subgrupos de um grupo finito G. Então,*

$$|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}.$$

Definiremos $\ker(f) = \{a \in G \mid f(a) = e\}$, onde e é o elemento neutro de G, chamado *núcleo do homomorfismo de f.*

Assim, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 1.25 (Primeiro Teorema do Isomorfismo). *Seja $f : (G, *) \to (J, \otimes)$ um homomorfismo de grupos. Então, a função*

$$\varphi : \frac{G}{\ker(f)} \to f(G)$$

é um isomorfismo.

Corolário 1.26. *Sejam $f : G \to J$ um homomorfismo de grupos e H um subgrupo de G. Então, a função*

$$\frac{H}{H \cap \ker(f)} \to f(H),$$

definida por $h\Big(H \cap \ker(f)\Big) \mapsto f(h)$, é um isomorfismo, $h \in H$.

Corolário 1.27. *Seja N um subgrupo normal de um grupo G. Temos, então, a seguinte bijeção:*

$$\Big\{\textit{subgrupos (normais) de } G \textit{ que contém } N\Big\} \leftrightarrow \Big\{\textit{subgrupos (normais) de } \frac{G}{N}\Big\}.$$

Teorema 1.28 (Segundo Teorema do Isomorfismo). *Sejam G um grupo, $H < G$ e $N \lhd G$. Então,*

$$\frac{H}{H \cap N} \simeq \frac{HN}{N}.$$

Teorema 1.29 (Terceiro Teorema do Isomorfismo). *Sejam G um grupo e N', N subgrupos normais de G, com $N' \subset N$. Então,*

$$\frac{G/N'}{N/N'} \simeq \frac{G}{N}.$$

Temos agora as ferramentas necessárias para mostrar um resultado, que é uma das metas a ser atingida no próximo capítulo.

Seja G um grupo de ordem 8. Se G é abeliano, então G é isomorfo a um dos seguintes grupos:

(i) $(\mathbb{Z}_8, +)$;

(ii) $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2, +)$;

(iii) $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$.

No caso em que G é não abeliano, ele é isomorfo a um dos grupos abaixo:

(i) $(D_4, \circ)$;

(ii) $(Q_8, \cdot)$.

O grupo não abeliano $(Q_8, \cdot)$ será definido na seção seguinte e é chamado de *grupo do quatérnios.*

1.2 Anéis e Corpos

Definição 1.30. Um conjunto não vazio A, juntamente com duas operações binárias $+$ e $\cdot$, chamadas respectivamente adição e multiplicação, é um *anel* se:

1. $(A, +)$ é um grupo abeliano;
2. a multiplicação é associativa, ou seja, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, para $a, b, c \in A$;
3. valem as leis distributivas, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, quaisquer que sejam $a, b, c \in A$.

Denotaremos um anel A com as operações de adição e multiplicação por $(A, +, \cdot)$.

Um anel $(A, +, \cdot)$ cuja multiplicação é comutativa e onde há a existência de elemento neutro para a multiplicação, é chamado *anel comutativo com unidade* e tal unidade é denotada por 1_A.

Exemplo 1.31. Sejam $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\}$, $n \geq 0$, e as operações de multiplicação e adição em $\mathbb{Z}_n$ dadas por

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b} \quad \text{e} \quad \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b},$$

quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{Z}_n$.

$(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ é um anel onde a multiplicação é comutativa e a unidade do anel é $\overline{1}$. Este anel é chamado *anel dos inteiros módulo n.*

Definição 1.32. Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Um elemento $a \in A$, $a \neq 0$ é um *divisor de zero à esquerda* se existir $b \neq 0$ em A, tal que $a \cdot b = 0$. Analogamente, $a \neq 0$ é *divisor de zero à direita* se existir $b \neq 0$ tal que $b \cdot a = 0$.

Definição 1.33. Um *domínio* (ou um *anel de integridade*) é um anel comutativo com unidade, sem divisores de zero, isto é, $\forall a, b \in A$ com $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

Definição 1.34. Um anel $(A, +, \cdot)$ é um *anel com divisão* (ou um *quase corpo*) se $(A - \{0\}, \cdot)$ é um grupo.

No caso de um anel com divisão, temos $1 \in A$, e para todo $a \in A, a \neq 0$, existe $b \in A$, tal que $a \cdot b = b \cdot a = 1$. O elemento b é o *inverso* de a e é denotado por a^{-1}.

Definição 1.35. Um *corpo* é um anel com divisão comutativo.

Exemplo 1.36 (Anel dos quatérnios). Veremos agora um exemplo de anel não comutativo com unidade.

Seja $\mathbb{R}^4 = \{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, onde

$$(a, b, c, d) = (a', b', c', d') \quad \Leftrightarrow \quad a = a', \quad b = b', \quad c = c' \quad \text{e} \quad d = d'.$$

Definamos as operações de soma e produto em $\mathbb{R}^4$.

Sejam $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{R}$, então a soma será definida como segue:

$$(a, b, c, d) + (a', b', c', d') = (a + a', b + b', c + c', d + d'), \tag{1.1}$$

e o produto como

$$(a, b, c, d) \cdot (a', b', c', d') = (aa' - bb' - cc' - dd', ab' + ba' + cd' - c'd,$$
$$ac' + a'c + db' - d'b, ad' + da' + bc' - b'c). \qquad (1.2)$$

Podemos provar que $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ é um anel cujo zero do anel é $(0, 0, 0, 0)$ e a unidade é $(1, 0, 0, 0)$. Também verificamos que

$$(0, 1, 0, 0) \cdot (0, 0, 1, 0) \neq (0, 0, 1, 0) \cdot (0, 1, 0, 0)$$

e, portanto, $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ é um exemplo de anel não comutativo com unidade.

Faremos agora algumas identificações:

$$\mathbf{1} \leftrightarrow (1, 0, 0, 0),$$
$$\mathbf{i} \leftrightarrow (0, 1, 0, 0),$$
$$\mathbf{j} \leftrightarrow (0, 0, 1, 0),$$
$$\mathbf{k} \leftrightarrow (0, 0, 0, 1),$$

assim, $a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \Leftrightarrow (a, b, c, d)$.

Com essas identificações, chegamos ao conjunto $\{a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, onde

$$a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} = a' + b'\mathbf{i} + c'\mathbf{j} + d'\mathbf{k} \quad \Leftrightarrow \quad a = a', \quad b = b', \quad c = c' \quad \text{e} \quad d = d',$$

que será denotado por $\mathbb{H}$. Além disso, se multiplicarmos $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ como em (1.2), teremos as seguintes relações:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}; \qquad \mathbf{ij} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j};$$
$$\mathbf{ji} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{kj} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{ik} = -\mathbf{j}, \qquad (1.3)$$

Definiremos as operações em $\mathbb{H}$ por: sejam $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{R}$, então a soma

$$(a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) + (a' + b'\mathbf{i} + c'\mathbf{j} + d'\mathbf{k}) = (a + a') + (b + b')\mathbf{i} +$$
$$(c + c')\mathbf{j} + (d + d')\mathbf{k}, \qquad (1.4)$$

e para efetuarmos o produto, é suficiente levarmos em conta as relações (1.3) e usarmos a distributividade. Assim,

$$(a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) \cdot (a' + b'\mathbf{i} + c'\mathbf{j} + d'\mathbf{k}) = (aa' - bb' - cc' - dd') +$$
$$(ab' + ba' + cd' - c'd)\mathbf{i} + (ac' + a'c + db' - d'b)\mathbf{j} + (ad' + da' + bc' - b'c)\mathbf{k}. \qquad (1.5)$$

Portanto, o anel $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ pode ser identificado com o anel $(\mathbb{H}, +, \cdot)$.

$0 = 0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ e $1 = 1 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ são, respectivamente, o zero do anel e a unidade de $(\mathbb{H}, +, \cdot)$.

Como $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} \neq \mathbf{j} \cdot \mathbf{i}$ sabemos que $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ é um exemplo de anel não comutativo com unidade. O anel $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ recebe o nome de *anel dos Quatérnios.*

É fácil provar que se $x = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \neq 0$, então existe um elemento $y = \dfrac{a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ em $(\mathbb{H}, +, \cdot)$, tal que $x \cdot y = y \cdot x = 1$.

Assim, o anel dos Quatérnios, para ser corpo, necessita somente da propriedade comutativa da multiplicação. Por isso dizemos que $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ é um anel com divisão que não é corpo.

Observe que existem três cópias do corpo $\mathbb{C}$ dentro do anel $\mathbb{H}$, que são:

$$\{a + b\mathbf{i} \mid a, b \in \mathbb{R}\}, \quad \{a + c\mathbf{j} \mid a, c \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad \{a + d\mathbf{k} \mid a, d \in \mathbb{R}\}.$$

Consideremos agora $Q_8 = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{i}, -\mathbf{i}, \mathbf{j}, -\mathbf{j}, \mathbf{k}, -\mathbf{k}\} \subset \mathbb{H}$ um subconjunto do anel dos Quatérnios.

É imediato que Q_8 é um grupo com a operação de multiplicação de $\mathbb{H}$, pois

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}; \qquad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j}\,;$$

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = -\mathbf{j}.$$

Além disso,

$$\mathbf{j}^{-1} = \mathbf{j}^3 = -\mathbf{j}, \quad \mathbf{k}^{-1} = \mathbf{k}^3 = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{i}^{-1} = \mathbf{i}^3 = -\mathbf{i}.$$

Assim, $(Q_8, \cdot)$ é um grupo não abeliano, cuja ordem é 8.

Definição 1.37. Um subconjunto $S \neq \varnothing$ de um anel $(A, +, \cdot)$ é um *subanel* de A se S é um anel, com as operações induzidas de A.

Teorema 1.38. *Um subconjunto $S \neq \varnothing$ de um anel $(A, +, \cdot)$ é um subanel de A se, e somente se, valem as seguintes afirmações:*

(i) *para quaisquer $a, b \in S$, temos $a - b = a + (-b) \in S$;*

(ii) *para quaisquer $a, b \in S$, o produto $a \cdot b \in S$.*

Exemplo 1.39. Os subconjuntos $n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ são subanéis de $\mathbb{Z}$ para todo $n \geq 0$.

Exemplo 1.40. Se $(A, +, \cdot)$ é um anel, então o *centro de* A é o conjunto

$$C(A) = \{a \in A \mid ab = ba, \forall\, b \in A\}.$$

Se A é um anel comutativo, temos $C(A) = A$.

Definição 1.41. Sejam $(A, +, \cdot)$ e $(S, \oplus, \odot)$ anéis. Uma função $\varphi : A \to S$ é um *homomorfismo de anéis* se, para quaisquer $a, b \in A$, temos:

(i) $\varphi(a + b) = \varphi(a) \oplus \varphi(b)$;

(ii) $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \odot \varphi(b)$.

Se, além disso, φ é bijetora, dizemos que φ é um *isomorfismo de anéis* e, neste caso, dizemos também que os anéis A e S são *isomorfos* e denotamos $A \cong S$.

Definição 1.42. Um subanel I de um anel A é um *ideal* de A se, para todo $a \in I$ e $r \in A$, temos $a \cdot r \in I$ e $r \cdot a \in I$.

Teorema 1.43. *Sejam A um anel e $I \neq \varnothing$ um subconjunto de A. I é um ideal de A se, e somente se, para quaisquer $a, b \in I$ e $r \in A$, temos:*

(i) *$a - b \in I$;*

(ii) *$a \cdot r \in I$ e $r \cdot a \in I$.*

Exemplo 1.44. Para $A = \mathbb{Z}$, $I = n\mathbb{Z}$, $n \geq 0$, são todos os ideais de $\mathbb{Z}$. Mais ainda, estes ideais são núcleos de homomorfismo de anéis.

De fato, se $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ é o homomorfismo canônico dado por $\varphi(a) = \overline{a}$, para todo $a \in \mathbb{Z}$, segue que $ker(\varphi) = \{a \in \mathbb{Z} \mid \overline{a} = \overline{0}\} = n\mathbb{Z}$.

Definição 1.45. Sejam A um anel comutativo e $a \in A$. A intersecção de todos os ideais de A que contém a é o *ideal principal gerado por* a e é denotado por (a).

Definição 1.46. Seja A um anel. Um ideal M de A é um *ideal maximal* de A se:

(i) $M \neq A$;

(ii) se I é um ideal de A com $M \subseteq I \subseteq A$, então $I = M$ ou $I = A$.

Exemplo 1.47. Os ideais $p\mathbb{Z}$, com p primo, são todos os ideais maximais de $\mathbb{Z}$.

De fato, se p é um número primo, então $p\mathbb{Z}$ é maximal, pois

(i) $p\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$;

(ii) se I é um ideal de $\mathbb{Z}$, então $I = n\mathbb{Z}$, para algum $n \geq 0$. Logo, se $p\mathbb{Z} \subseteq I \subseteq \mathbb{Z}$, então $p\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z}$ implica que $p = \alpha n$, para algum $\alpha \in \mathbb{Z}$. Assim, $I = \mathbb{Z}$ ou $I = p\mathbb{Z}$, o que mostra que $p\mathbb{Z}$ é maximal.

Por outro lado, estes são todos os ideais maximais de $\mathbb{Z}$. Com efeito, se $n\mathbb{Z}$ é um ideal de $\mathbb{Z}$ e n não é primo, então $n = n_1 \cdot n_2$, com $1 \leq n_1$, $n_2 \leq n$ e, neste caso, $n\mathbb{Z} \subsetneq n_1\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}$, o que implica que $n\mathbb{Z}$ não é maximal.

Definição 1.48. Um ideal P de um anel comutativo A é um *ideal primo* de A se:

(i) $P \neq A$;

(ii) para quaisquer $a, b \in A$, se $ab \in P$, então $a \in P$ ou $b \in P$.

Exemplo 1.49. Os ideais $p\mathbb{Z}$, com p primo, são ideais primos de $\mathbb{Z}$.

Definição 1.50. Um domínio A é um *domínio de ideais principais* se cada ideal I de A é principal, isto é, gerado por um único elemento. Neste caso, $I = (a) = aA$.

Definição 1.51. Sejam A um domínio e $a, b \in A$.

(i) Dizemos que a divide b $(a \mid b)$ se existe $x \in A$, tal que $b = ax$. Caso contrário, denotamos $a \nmid b$.

(ii) $u \in A$ é uma *unidade de* A se $u \mid 1$.

(iii) a e b são *associados* $(a \sim b)$ se existe $u \in R^* = \{a \in R : a \mid 1\}$, tal que $a = bu$.

(iv) $q \in A$ é um *elemento irredutível de* A se $q \neq 0$, $q \notin R^*$ e q não têm divisores próprios em A, ou seja, se $a \mid q$, então $a \in R^*$ ou $a \sim q$.

(v) $p \in A$ é um *elemento primo de* A se $p \neq 0$, $p \notin R^*$, e se $p \mid ab$, então $p \mid a$ ou $p \mid b$. Outra maneira é dizer que se $a \mid p$ então $a = \pm 1$ ou $a = \pm p$.

Definição 1.52. Um domínio A é um *domínio de fatoração única* se todo elemento não irredutível de A se escreve de maneira única como produto de elementos irredutíveis de A, isto é:

(i) todo elemento não irredutível de A é um produto finito de fatores irredutíveis;

(ii) se $\{p_i\}_{1 \leq i \leq s}$ e $\{q_j\}_{1 \leq j \leq t}$ são famílias finitas de elementos irredutíveis de A, tais que $p_1 \dots p_s = q_1 \dots q_t$, então $s = t$ ou, a menos da ordenação, p_i é associado a q_i, $\forall i = 1, \dots, s$.

Teorema 1.53. *Em um domínio de fatoração única, todo elemento irredutível é primo.*

Teorema 1.54. *Todo domínio de ideais principais é um domínio de fatoração única.*

Nas seções de 1.3 a 1.6, os resultados estão fortemente baseados em [5], [6] e [18], onde podem ser encontradas as demonstrações dos resultados enunciados.

1.3 Grupos de Lie

O conceito de variedade generaliza o conceito de uma superfície ou uma curva em $\mathbb{R}^3$.

Definição 1.55. Uma *variedade* (topológica) é um espaço de Hausdorff [1] em que todo ponto tem uma vizinhança homeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

Da mesma forma, o conceito de uma variedade diferenciável generaliza o conceito de uma superfície diferenciável em $\mathbb{R}^3$, que é uma superfície com um plano tangente em cada ponto.

Definição 1.56. Uma *variedade diferenciável de dimensão* n é um espaço topológico M e uma família de aplicações biunívocas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em M, tais que:

[1] Um espaço de Hausdorff é um espaço topológico X, onde dado $x, y \in X$ existem vizinhanças U de x e V de y, tal que $U \cap V = \varnothing$.

(i) $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$;

(ii) para todo par α, β, com $x_\alpha(U_\alpha) \bigcap x_\beta(U_\beta) = W \neq \varnothing$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$, e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ são diferenciáveis.

Para uma melhor compreensão, na figura 1.2 fazemos um esboço dessa aplicação.

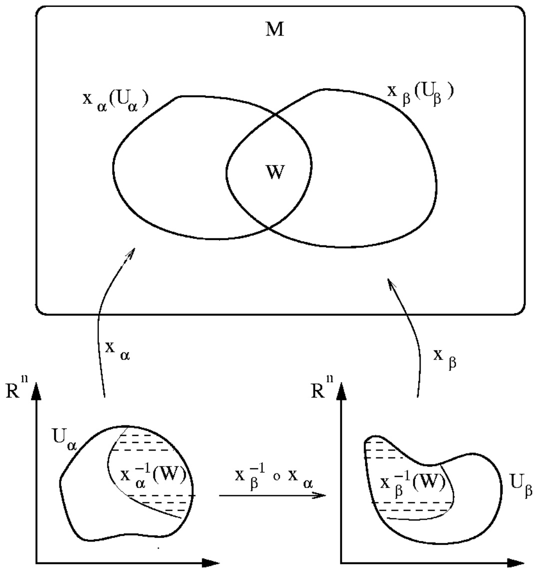

Figura 1.2: *Variedade diferenciável*

O par (U_α, x_α), com $p \in x_\alpha(U_\alpha)$, é uma *parametrização* (ou *sistema de coordenadas*) de M em p, onde $x_\alpha(U_\alpha)$ é chamada uma *vizinhança coordenada* em p.

Quando indicarmos uma variedade por M^n, estaremos nos referindo a uma variedade M, de dimensão n.

Definição 1.57. Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M_1 \to M_2$ é *diferenciável em* $p \in M_1$ se, dada uma parametrização $y : V \subset \mathbb{R}^m \to M_2$ em $\varphi(p)$, existe uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M_1$ em p, tal que $\varphi(x(U)) \subset y(V)$, e a aplicação

$$y^{-1} \circ \varphi \circ x : x^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

é diferenciável em $x^{-1}(p)$. Dizemos que φ é *diferenciável em um aberto de* M_1 se é diferenciável em todos os pontos desse aberto.

Definição 1.58. Um *grupo de Lie* G é um grupo que é também uma variedade diferenciável, tal que a estrutura diferenciável é compatível com a estrutura de grupo, isto é, a operação

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (x, y) &\mapsto xy^{-1} \end{aligned}$$

é uma aplicação diferenciável para quaisquer $x, y \in G$.

O elemento unitário de um grupo de Lie G é denotado por e, e a dimensão do grupo G é definida como sendo a dimensão de G como uma variedade.

Exemplo 1.59. Seja $S^1 = \{e^{i\theta} |\ \theta \in \mathbb{R}(\text{mod } 2\pi)\}$ o círculo unitário no plano complexo. Definiremos as operações do grupo como

$$e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)} \qquad \text{e} \qquad (e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta}.$$

Para que S^1 seja um grupo de Lie, mostremos que a aplicação

$$\begin{aligned} \psi : S^1 \times S^1 &\rightarrow S^1 \\ (e^{i\theta}, e^{i\varphi}) &\mapsto e^{i\theta} \cdot (e^{i\varphi})^{-1} = e^{i(\theta-\varphi)} \end{aligned}$$

seja diferenciável, quaisquer que sejam $\theta, \varphi \in \mathbb{R}(\text{mod } 2\pi)$.

De fato, seja $\psi(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) = e^{i(\theta-\varphi)}$, então

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cdot d\theta + \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \cdot d\varphi = e^{i(\theta-\psi)} i \cdot d\theta + e^{i(\theta-\psi)}(-i) \cdot d\varphi = ie^{i(\theta-\psi)} \cdot (d\theta - d\varphi).$$

Como $d\psi$ existe para quaisquer θ, $\varphi \in \mathbb{R}(mod\, 2\pi)$, então ψ é diferenciável.

Portanto, S^1 é um grupo de Lie, que chamaremos de $U(1)$.

Exemplo 1.60. São de particular interesse em aplicações físicas os grupos de matrizes, subgrupos dos espaços $GL(n, \mathbb{R})$ (ou $GL(n, \mathbb{C})$), conhecidos como espaços das aplicações lineares bijetivas de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^n$), que munidos com a operação composição de funções, tornam-se um grupo de Lie, ou seja, a aplicação

$$\begin{aligned} \phi : GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) &\rightarrow GL(n, \mathbb{R}) \\ (M, N) &\mapsto M \cdot N^{-1} \end{aligned}$$

é diferenciável, quaisquer que sejam $M, N \in GL(n, \mathbb{R})$.

De fato, sabemos que o produto dos elementos é simplesmente a multiplicação de matrizes, e a inversa é dado pela matriz inversa. As coordenadas de $GL(n, \mathbb{R})$ são dadas por n^2 inteiros, então, seja $M = \{a_{ij}\}$ e $N = \{b_{ij}\}$, temos $N^{-1} = \{c_{ij}\}$. Portanto, $MN^{-1} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} \right\}$. Assim,

$$d\phi = \sum_j \sum_i \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} \right) da_{ij} + \sum_j \sum_i \frac{\partial}{\partial b_{ij}} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} \right) db_{ij} = \sum_j \sum_i c_{ij}\, da_{ij}.$$

Como ϕ é diferenciável, então $GL(n, \mathbb{R})$ é um grupo de Lie.

Exemplo 1.61. A rotação em torno da origem em um espaço tridimensional forma um grupo de Lie. Este grupo pode ser representado pelas matrizes ortogonais

$$O(3) = \{M \in GL(3, \mathbb{R}) |\ MM^t = M^t M = \mathbb{I}\},$$

onde M^t é a transposta de M, que é um subgrupo de $GL(3, \mathbb{R})$. Portanto, $O(3)$ com a operação composição é um grupo de Lie.

1.4 Grupos de Transformação

Quando usarmos o termo *suave*, estaremos nos referindo a uma diferenciabilidade de classe C^k, sendo k muito grande.

Definição 1.62. Sejam M_1 e M_2 variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M_1 \to M_2$ é um *difeomorfismo* se ela é diferenciável, biunívoca, sobrejetiva e sua inversa φ^{-1} é diferenciável.

Definição 1.63. Sejam M uma variedade suave de dimensão n, com $x \in M$, e W um campo vetorial em M. Um *fluxo* de um campo vetorial W é uma aplicação

$$\begin{aligned} \sigma : M \times I(x) &\to M \\ (x, t) &\mapsto \sigma(x, t), \end{aligned}$$

onde $I(x)$ é um intervalo da reta.

O conjunto de pares (x, t) é um subconjunto aberto de $M \times \mathbb{R}$ e, portanto, uma variedade suave de dimensão $n + 1$.

Para $t \in \mathbb{R}$ fixo, um fluxo $\sigma(x, t)$ é um difeomorfismo de M em M denotado por

$$\begin{aligned} \sigma_t : M &\rightarrow M \\ x &\mapsto \sigma_t(x). \end{aligned}$$

É importante notarmos que σ_t é um elemento de um grupo comutativo, tal que:

(i) $\sigma_t(\sigma_s(x)) = \sigma_{t+s}(x)$, isto é, $\sigma_t \cdot \sigma_s = \sigma_{t+s}$;

(ii) σ_0 é o elemento neutro;

(iii) $\sigma_{-t} = (\sigma_t)^{-1}$ é o elemento inverso,

para quaisquer $s, t \in \mathbb{R}$ e $x \in M$.

Definição 1.64. O grupo mencionado acima, cujo elementos são σ_t, é chamado *grupo de transformações a um-parâmetro.*

Podemos ainda considerar o grupo de transformações de dimensão finita

$$\{\sigma_g \mid g \text{ é um elemento de um grupo de Lie } G \text{ de dimensão } p\}.$$

O conjunto σ_g é um *grupo de transformação de Lie* se a aplicação

$$\begin{aligned} \sigma : M \times G &\rightarrow M \\ (x, g) &\mapsto \sigma(x, g) \end{aligned}$$

é diferenciável e se, além disso, o conjunto de transformações

$$\{\sigma_g : M \rightarrow M \mid \sigma_g(x) = \sigma(x, g)\},$$

juntamente com a aplicação composição, satisfizerem as seguintes propriedades de grupo:

(i) $\sigma_g \circ \sigma_h = \sigma_{gh}$;

(ii) σ_e é a identidade;

(iii) $\sigma_{g^{-1}} = (\sigma_g)^{-1}$.

1.5 Transformações Conformes

Nesta seção nos limitaremos a mostrar que transformações conformes são funções que preservam o ângulo entre dois vetores tangentes, em um ponto onde duas curvas se interceptam. Para isso, precisamos definir uma métrica em uma variedade M, que chamaremos de *métrica Riemanniana.*

Definição 1.65. Sejam M uma variedade diferenciável e $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \to M$ uma curva diferenciável em M. Um *vetor tangente em* $p \in M$ é o vetor tangente em t de alguma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, com $\alpha(t) = p$. O conjunto dos vetores tangentes a M em p será indicado por T_pM, que, com as operações usuais de função, torna-se um espaço vetorial de dimensão n, chamado o *espaço tangente a* M *em* p (T_pM).

Definição 1.66. Uma *métrica Riemanniana* em uma variedade diferenciável M é uma lei que faz corresponder a cada ponto $p \in M$ um produto interno $\langle\ ,\ \rangle_p$ no espaço tangente T_pM, que varia diferencialmente no seguinte sentido: se $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p, com $x(x_1, \ldots, x_n) = q \in x(U)$ e $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, então $\left\langle \dfrac{\partial}{\partial x_i}(q), \dfrac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_p = g_{ij}(x_1, \ldots, x_n)$ é uma função diferenciável em U.

Outra maneira de exprimir a diferenciabilidade da métrica Riemanniana é dizer que, para quaisquer pares X e Y de campos vetoriais diferenciáveis em uma vizinhança V de M, a função $\langle X, Y \rangle$ é diferenciável em V.

Uma variedade diferenciável M, com uma dada métrica Riemanniana g, chama-se *variedade Riemanniana* e é denotada por (M, g).

Definição 1.67. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Uma aplicação suave

$$\sigma : (M, g) \to (M, g)$$

é uma *transformação conforme* se satisfaz a equação

$$\left(\sigma^{-1} \circ g \circ \sigma\right)(x) = e^{2\Phi(x)} \cdot g(x),$$

onde $x \in M$ e Φ é uma função suave em M.

A seguir mostraremos um exemplo de uma transformação conforme no espaço Euclidiano.

Exemplo 1.68. A projeção estereográfica é uma transformação conforme.

Sejam $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} |\ \langle x, x\rangle = 1\}$ a esfera unitária n-dimensional e $p = (0, \dots, 0, 1) \in S^n$ seu pólo norte. A *projeção estereográfica*

$$\varphi : S^n - \{p\} \to \mathbb{R}^n$$

é um homeomorfismo entre a esfera menos o seu pólo norte e o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, que é definido como

$$\varphi(x) = \frac{(\xi_1, \dots, \xi_n)}{(1 - \xi_{n+1})},$$

para todo $x = (\xi_1, \cdots, \xi_{n+1}) \in S^n$.

Geometricamente, $\varphi(x)$ é o ponto em que a semi-reta $px \subset \mathbb{R}^{n+1}$ corta o hiperplano $\xi_{n+1} = 0$, o qual identificamos como $\mathbb{R}^n$. A representação para o $\mathbb{R}^3$ será da seguinte forma:

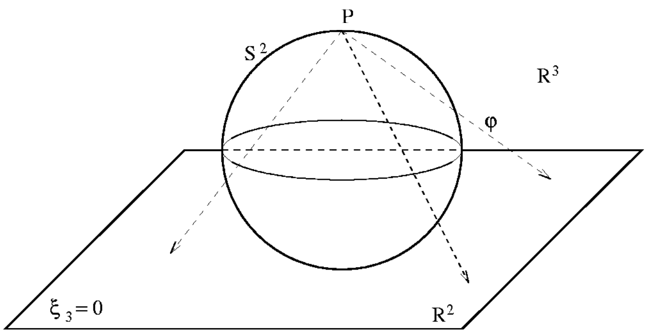

Figura 1.3: *Projeção estereográfica*

Mostremos agora que φ é uma aplicação que preserva o ângulo, isto é, φ é uma transformação conforme. Antes, recapitularemos alguns resultados de Análise Funcional (Kreyszig [13]) que facilmente podem ser demonstrados.

Por definição de funcional linear limitado, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, existe $\lambda(x) > 0$ real, tal que

$$||d\varphi(v)|| = \lambda(x) \cdot ||v||, \tag{1.6}$$

qualquer que seja $v \in \mathbb{R}^n$.

Usaremos também o seguinte resultado. Dado $u, v \in \mathbb{R}^n$, é verdade que

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4} \cdot \Big(||u + v||^2 - ||u - v||^2\Big). \tag{1.7}$$

Assim, para todo $x, u, v \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\Big\langle d\varphi(u), d\varphi(v)\Big\rangle = \frac{1}{4}\cdot\Big(||d\varphi(u)+d\varphi(v)||^2 - ||d\varphi(u)-d\varphi(v)||^2\Big) =$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\Big(||d\varphi(u+v)||^2 - ||d\varphi(u-v)||^2\Big) =$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\Big(\lambda^2(x)\cdot||u+v||^2 - \lambda^2(x)\cdot||u-v||^2\Big) =$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\lambda^2(x)\cdot\Big(||u+v||^2 - ||u-v||^2\Big) =$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\lambda^2(x)\cdot 4\cdot\langle u, v\rangle = \lambda^2(x)\cdot\langle u, v\rangle.$$

Portanto,

$$\Big\langle d\varphi(u), d\varphi(v)\Big\rangle = \lambda^2(x)\cdot\langle u, v\rangle. \tag{1.8}$$

Mas dados α e β os ângulos entre os vetores $d\varphi(u)$, $d\varphi(v)$ e u, v, respectivamente, temos que $\Big\langle d\varphi(u), d\varphi(v)\Big\rangle = ||d\varphi(u)||\cdot||d\varphi(v)||\cdot\cos\alpha$ e $\langle u, v\rangle = ||u||\cdot||v||\cdot\cos\beta$.

Deste modo, concluímos que

$$||d\varphi(u)||\cdot||d\varphi(v)||\cdot\cos\alpha = \lambda^2(x)\cdot||u||\cdot||v||\cdot\cos\beta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda(x)\cdot||u||\cdot\lambda(x)\cdot||v||\cdot\cos\alpha = \lambda^2(x)\cdot||u||\cdot||v||\cdot\cos\beta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cos\alpha = \cos\beta,$$

ou seja, para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^n$, a função φ preserva o ângulo entre vetores.

1.6 Grupo Holonômico

Seja M uma variedade diferenciável, denotaremos por $\aleph(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M e por $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M.

Definição 1.69. Uma *conexão afim* ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\begin{aligned} \nabla : \aleph(M)\times\aleph(M) &\rightarrow \aleph(M) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

e que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;

(ii) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;

(iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

onde $X, Y, Z \in \aleph(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Procuraremos esclarecer melhor esta definição por intermédio da seguinte proposição:

Proposição 1.70. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Então, existe uma única lei que associa a um campo vetorial X ao longo da curva diferenciável $c : I \to M$ um outro campo vetorial $\dfrac{DX}{dt}$ ao longo de c, denominado* derivada covariante de X ao longo de c, *tal que:*

(a) $\dfrac{D}{dt}(X+W) = \dfrac{DX}{dt} + \dfrac{DW}{dt}$.

(b) $\dfrac{D}{dt}(fX) = \dfrac{Df}{dt}X + f\dfrac{DX}{dt}$, *onde W é um campo de vetores ao longo de c e $f \in \mathcal{D}(M)$.*

(c) *Se X é induzido por um campo de vetores $Y \in \aleph(M)$, isto é, $X(t) = Y(c(t))$, então $\dfrac{DX}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}}Y$.*

A noção de conexão fornece, portanto, uma maneira de derivar vetores ao longo de curvas. Em particular, podemos falar em aceleração de uma curva em M.

Definição 1.71. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Um campo vetorial W ao longo de uma curva $c : I \to M$ é chamado *paralelo* quando $\dfrac{DW}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.

Proposição 1.72. *Sejam M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇, $c : I \to M$ uma curva diferenciável em M e W_0 um vetor tangente a M em $c(t_0)$, com $t_0 \in I$ $\Big($isto é, $W_0 \in T_{c(t_o)}M\Big)$. Então, existe um único campo de vetores paralelo W ao longo de c tal que, $W(t_0) = W_0$.*
$\Big($*$W(t)$ é chamado o* transporte paralelo de $W(t_0)$ *ao longo de c*$\Big)$.

Um *caminho fechado baseado em* p é uma curva c, iniciando e terminando em um mesmo ponto p.

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana m-dimensional, com uma conexão afim ∇. A conexão naturalmente define um grupo de transformação para cada espaço tangente T_pM, como segue.

Sejam $p \in (M, g)$ e $\{c(t) \mid 0 \leq t \leq 1,\ c(0) = c(1) = p\}$ o conjunto de curvas fechadas baseados em p.

Se transportarmos paralelamente o vetor $W \in T_pM$ ao longo da curva $c(t)$, ao fim de uma volta completa obtemos um novo vetor $W_c \in T_pM$.

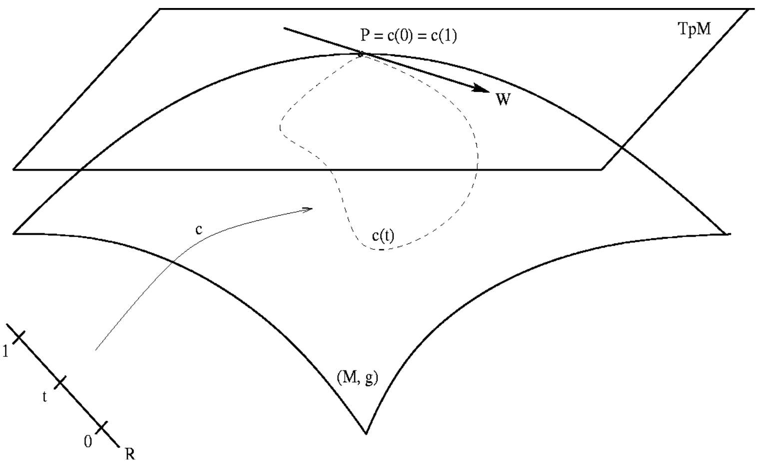

Figura 1.4: *Transporte paralelo*

A curva fechada $c(t)$ e a conexão ∇ induzem uma transformação linear

$$\begin{aligned} P_c : T_pM &\to T_pM \\ W &\mapsto W_c\,. \end{aligned}$$

Definição 1.73. O conjunto das transformações definidas acima é chamado de *grupo holonômico* em p e é denotado por $H(p)$.

Assumimos que $H(p)$ age sobre T_pM pela direita, $P_cX = Xh$, $h \in H(p)$. Em componentes, isto torna-se $P_cX = X^\mu h_\mu^\nu e_\nu$, onde $\{e_\nu\}$ é a base de T_pM.

É fácil ver que $H(p)$ é um grupo. O produto $P_{c'}P_c$ corresponde ao transporte paralelo primeiramente ao longo de c, e então, de c'. Se escrevermos $P_d = P_{c'}P_c$, a curva fechada d é dada por

$$d(t) = \begin{cases} c(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ c'(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

A unidade corresponde à aplicação constante $c_p(t) = p$, $0 \leq t \leq 1$, e o inverso de P_c é dado por $P_{c^{-1}}$, onde $c^{-1}(t) = c(1-t)$.

Notemos que $H(p)$ é um subgrupo de $GL(m, \mathbb{R})$, o conjunto das matrizes $m \times m$ inversíveis, que é o máximo grupo holonômico possível. O grupo $H(p)$ é *trivial* se, e somente se, o tensor de Riemann se anula. Em particular, se (M, g) é paralelizável, podemos dizer que $H(p)$ é trivial.

Exemplo 1.74. Sejam S uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^{n+1}$ e $p \in S$. Denotaremos por G_p o grupo das transformações lineares não-singulares de S_p em S_p, onde S_p é uma hipersuperfície em p. Seja

$$H_p = \Big\{ T \in G_p \mid T = P_\alpha \Big\},$$

para alguma curva suave $\alpha : [a, b] \to S$, com $\alpha(a) = \alpha(b) = p$ um subconjunto de G_p.

Para cada par de curvas suaves α e β de p em p, existe uma curva suave γ de p em p, tal que

$$P_\gamma = P_\beta \circ P_\alpha$$

e, além disso, para cada $\alpha \in S$ de p em p, existe $\beta \in S$ de p em p, tal que $P_\beta = P_\alpha^{-1}$.

O grupo H_p é o grupo holonômico de S em p.

Capítulo 2

Análise Hipercomplexa

Iniciaremos este capítulo tecendo um breve comentário a respeito de alguns resultados de análise complexa (Ahlfors [1]), que mais adiante serão generalizados para um espaço hipercomplexo.

2.1 Integração Complexa

Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um conjunto não vazio, aberto e conexo. Uma função $f(z)$ de uma variável complexa $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ que possui uma derivada contínua em toda a região Ω é chamada *analítica* em Ω.

É equivalente dizermos que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ é analítica em z se na expressão da derivada

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \,, \tag{2.1}$$

o limite independe do caminho pelo qual $z + \Delta z$ se aproxima de z.

Se fizermos $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ tender a zero pela reta real, ou seja, se tomarmos $\Delta z = \Delta x$, obtemos

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \,. \tag{2.2}$$

Por outro lado, se fizermos Δz tender a zero pela reta imaginária, isto é, tomarmos $\Delta z = i\Delta y$, obtemos

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \,. \tag{2.3}$$

Como o limite independe do caminho em que Δz se aproxima de zero, em outras palavras, f é analítica, então

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \,, \tag{2.4}$$

ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}\,. \tag{2.5}$$

As relações em (2.5) são conhecidas como equações de Cauchy-Riemann.

Então, uma condição necessária para que a função $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ tenha derivadas em z é que esta obedeça às relações de Cauchy-Riemann.

A suficiência segue do fato de as funções $u(x,y)$, $v(x,y)$ e suas derivadas parciais serem contínuas; isto equivale a dizer que a função $f(z)$ é analítica.

Observação 2.1. *Seja* $f'(z) = \dfrac{\partial f(z)}{\partial z}$. *Então, somando a equação (2.2) com a equação (2.3), obtemos a seguinte igualdade:*

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{\partial f(z)}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial f(z)}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\,. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Muitas propriedades importantes de funções analíticas são difíceis de se provar sem o auxílio da integração complexa. Se uma função $f(t) = u(t) + iv(t)$ definida em um intervalo (a,b) é contínua, definimos

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt. \tag{2.7}$$

Definição 2.2. Consideremos dois pontos z_1 e z_2 ligados por um caminho γ, dado na forma paramétrica por $z = z(t)$, $t \in \mathbb{R}$, e sejam $z_1 = z(t_1)$ e $z_2 = z(t_2)$. Então,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z(t)) \cdot z'(t)\,dt$$

é chamada *integral de linha* ao longo de γ.

Como $f = u + iv$ e $dz = dx + idy$, a integral de linha pode ser escrita na forma

$$\int_\gamma (udx - vdy) + i(udy + vdx), \tag{2.8}$$

que separa a parte real da parte imaginária. Podemos reescrever a integral (2.8) de forma mais compacta, ou seja,

$$\int_\gamma pdx + qdy, \tag{2.9}$$

onde $p = (u + iv)$ e $q = (-v + iu)$.

Uma importante classe de integrais são as caracterizadas pela propriedade de não depender do caminho dado, ou seja, a integral sobre uma curva depende unicamente dos pontos final e inicial. Assim, se γ_1 e γ_2 têm os mesmos pontos iniciais e finais, então necessitamos que

$$\int_{\gamma_1} pdx + qdy = \int_{\gamma_2} pdx + qdy. \tag{2.10}$$

Dizer que uma integral não depende do caminho equivale a dizer que o valor da integral sobre qualquer curva fechada vale zero.

Teorema 2.3. *A integral de linha $\int_\gamma pdx + qdy$, definida em Ω, não depende do caminho dado se, e somente se, existe uma função $U(x,y)$ em Ω satisfazendo*

$$\frac{\partial U}{\partial x} = p \qquad e \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = q$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad e \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Demonstração. A suficiência é imediata. Se a condição está satisfeita, podemos escrever a integral de linha da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int_\gamma pdx + qdy &= \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \cdot x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot y'(t) \right) dt = \int_{z_1}^{z_2} \frac{d}{dt}\, U\Big(x(t), y(t)\Big)\, dt \\ &= U\Big(x(z_2), y(z_2)\Big) - U\Big(x(z_1), y(z_1)\Big), \end{aligned}$$

e o valor dessa diferença depende unicamente dos pontos extremos.

Reciprocamente, escolhamos um ponto fixo $(x_0, y_0) \in \Omega$, ligado ao ponto (x,y) por um caminho poligonal γ, contido em Ω, cujos lados sejam paralelos aos eixos coordenados, e definamos a função

$$U(x,y) = \int_\gamma pdx + qdy.$$

Como a integral depende apenas dos pontos inicial e final, a função é bem definida. Se escolhermos o último segmento horizontal de γ, podemos manter y constante e variar x sem mudar o outro segmento. Assim, podemos escolher x como parâmetro no último segmento e obter

$$U(x,y) = \int^x p(x,y)dx + \text{const.}$$

Desta expressão segue que $\frac{\partial U}{\partial x} = p$. Usando raciocínio análogo e escolhendo o último segmento vertical, podemos mostrar que $\frac{\partial U}{\partial y} = q$. $\square$

É comum escrevermos

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) dy$$

e dizer que uma expressão $pdx + qdy$, que pode ser escrita desta forma, é uma *diferencial exata.*

Assim, a integral independe do caminho se, e somente se, a integral é uma diferencial exata.

2.2 Conceitos Topológicos

Nesta seção introduziremos alguns conceitos e resultados de topologia (Munkres [17]). Por se tratarem de resultados bem conhecidos, omitiremos suas demonstrações.

Definição 2.4. Seja X um espaço topológico. Uma *separação de* X é um par de subconjuntos abertos, não vazios e disjuntos U, V de X, cuja união é X. O conjunto X é *conexo* se não existe uma separação de X.

Um critério útil para verificar se um espaço X é conexo é mostrar que todo par de pontos de X pode ser ligado por um caminho em X.

Definição 2.5. Dados dois pontos x e y de um espaço topológico X, um *caminho ligando* x *a* y *em* X é uma aplicação contínua $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \to X$, tal que $\alpha(a) = x$ e $\alpha(b) = y$.

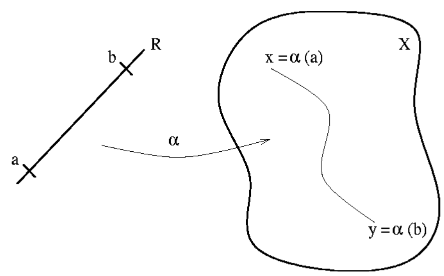

Figura 2.1: *Caminho*

Um espaço X é *conexo por caminho* se todo par de pontos de X pode ser ligado por um caminho.

Dados um espaço topológico X e um ponto $x_0 \in X$, associaremos através de caminhos fechados em X, um grupo, denotado por $\pi_1(X, x_0)$, denominado *grupo fundamental de* X. Para isso, definiremos uma relação de equivalência entre caminhos de X chamada *caminhos homotópicos.*

Definição 2.6. Dois caminhos $\alpha, \beta : [0,1] \to X$, com os mesmos pontos iniciais x_0 e finais x_1, são *homotópicos* se existe uma aplicação contínua $H : I \times I \to X$, tal que

$$H(s,0) = \alpha(s) \quad \text{e} \quad H(s,1) = \beta(s),$$

$$H(0,t) = x_0 \quad \text{e} \quad H(1,t) = x_1,$$

quaisquer que sejam $s, t \in I = [0,1]$.

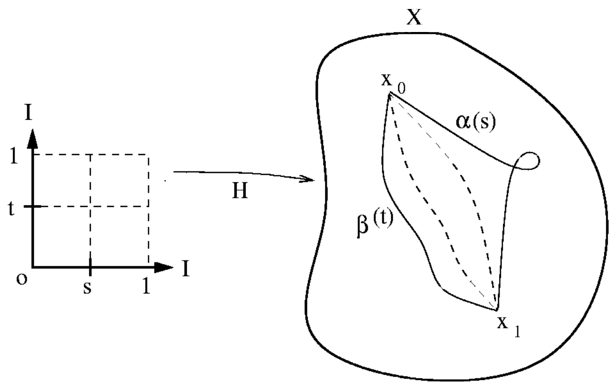

Figura 2.2: *Caminho homotópico*

A aplicação H é chamada *caminho homotópico* entre α e β, e será denotada por $H : \alpha \simeq_x \beta$, ou, simplesmente, $\alpha \simeq_x \beta$.

Uma condição para que o conjunto das classes de caminhos homotópicos forme um grupo com a operação $*$, é que os caminhos sejam fechados, ou seja, que o caminho inicie e termine em um mesmo ponto x_0. Chamaremos este caminho de *caminho fechado com um ponto base* x_0.

Teorema 2.7. *A aplicação* $\simeq_{x_0}$ *é uma relação de equivalência no conjunto formado pelos caminhos fechados em* X *baseados em* x_0. *Denotaremos este conjunto por* $\Omega(X, x_0)$.

Vale observar que, dados $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega(X, x_0)$, em geral temos $(\alpha*\beta)*\gamma \neq \alpha*(\beta*\gamma)$. Logo, o produto de caminhos não é associativo, e a operação $*$ não define uma estrutura de grupo em $\Omega(X, x_0)$.

Para cada $\alpha \in \Omega(X, x_0)$, denotaremos por $[\alpha]$ a classe de equivalência da curva fechada α pela relação $\simeq_{x_0}$, isto é,

$$[\alpha] = \{\beta \in \Omega(X, x_0) |\ \alpha \simeq_{x_0} \beta\}.$$

Denotaremos por $\pi_1(X, x_0)$ o conjunto quociente $\frac{\Omega(X,x_0)}{\simeq_{x_0}}$, ou seja,

$$\pi_1(X, x_0) = \{[\alpha] \mid \alpha \in \Omega(X, x_0)\}.$$

Temos por objetivo definir uma operação em $\pi_1(X, x_0)$, induzida de $*$, tal que $\pi_1(X, x_0)$ tenha uma estrutura de grupo.

Teorema 2.8. *O conjunto $\pi_1(X, x_0)$ é um grupo com a operação $[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta]$, chamado grupo fundamental.*

Se na Definição 2.6 ao invés de tomarmos dois caminhos, considerarmos duas funções contínuas f e g entre espaços topológicos X e Y, temos que f é homotópica a g se existe uma função contínua $H : X \times [0,1] \to Y$, com $H(x,0) = f(x)$ e $H(x,1) = g(x)$, para todo $x \in X$, e $H(a,t) = f(a) = g(a)$, quaisquer que sejam $a \in A \subset X$, e $t \in [0,1]$. Observemos que uma homotopia mostra essencialmente como "deformar" continuamente a função f até a função g.

Definição 2.9. Um espaço topológico X é *contrátil* se existem $x_0 \in X$ e uma homotopia $H : X \times I \to X$, tais que

$$H(x,0) = x \qquad \text{e} \qquad H(x,1) = x_0,\ \forall\, x \in X,$$

$$H(x_0, t) = x_0,\ \forall\, t \in I.$$

A homotopia H é chamada *contração do espaço* X para o ponto x_0.

Exemplo 2.10. O disco unitário $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ é contrátil.

De fato, seja $x_0 = (0,0) \in D$. Definimos a homotopia $H : D \times I \to D$ por

$$H\Big((x,y),t\Big) = \Big((1-t)x, (1-t)y\Big).$$

Definição 2.11. Um espaço topológico X conexo por caminho é *simplesmente conexo* se $\pi_1(X, x_0)$ é o grupo trivial, isto é, $\pi_1(X, x_0) = \{0\}$, onde 0 denota $[c_{x_0}]$ (a classe do caminho constante x_0).

Em variáveis complexas, a definição acima se reduz a: uma região Ω é simplesmente conexa se qualquer curva γ contido em Ω pode ser reduzida a um ponto, permanecendo em Ω.

Intuitivamente, uma região simplesmente conexa é aquela que não possui buracos.

Teorema 2.12. *Todo espaço contrátil é simplesmente conexo.*

Observemos que a recíproca do teorema nem sempre é verdadeira, isto é, podemos ter um espaço não contrátil X, com $\pi_1(X, x_0) = 0$. Por exemplo, a esfera S^n, $n > 1$ é simplesmente conexa, mas não é contrátil. Analisaremos intuitivamente o caso $n = 2$. Todo caminho fechado em S^2 pode ser deformado continuamente em um ponto, mas o espaço todo (S^2) não pode ser deformado continuamente em um ponto.

Observação 2.13. *Todo espaço contrátil é conexo por caminho, mas a recíproca não é verdadeira. Por exemplo, S^1 é conexo por caminho, mas não é contrátil.*

2.3 Teoria de Grupos

Nesta seção abordaremos o assunto de maior interesse neste capítulo. Vimos no Capítulo 1 que dado um grupo abeliano G de ordem 8, ele é isomorfo a $(\mathbb{Z}_8, +)$, $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2, +)$, $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$, e se G é não abeliano, este é isomorfo ao grupo $(D_4, \circ)$ ou ao grupo $(Q_8, \cdot)$.

Primeiramente, demonstraremos o caso em que G é abeliano. Para isto, necessitaremos de alguns resultados que podem ser encontrados em (Garcia [10]) e (Bhattacharya [2]).

É conhecido o fato de que se G é um grupo abeliano finitamente gerado, então G pode ser decomposto como uma soma direta de um número finito de grupos cíclicos C_i, isto é,

$$G = C_1 \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_k,$$

onde cada C_i é infinito, ou, para algum $j \leq k$, $C_1, \ldots, C_j$ são de ordens $m_1, \ldots, m_j$, respectivamente, com $m_1 | m_2 | \cdots | m_j$ e $C_{j+1}, \ldots, C_k$ infinitos. Podemos também denotar G como um produto cartesiano desses grupos cíclicos, ou seja, $G = C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_k$.

Proposição 2.14. *Seja G um grupo cíclico finito de ordem k. Então, G é isomorfo ao grupo aditivo $\mathbb{Z}_k$.*

Demonstração: Se a é gerador de G, então $G = \{e, a, a^2, \cdots, a^{k-1}\}$. Consideremos a correspondência

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z}_k &\longrightarrow G \\ \overline{s} &\longmapsto a^s \end{aligned}$$

Está claro que a aplicação φ é sobrejetora, mostremos então que ela é injetora. De fato,

$$\overline{s} = \overline{t} \Leftrightarrow s \equiv t \pmod k \Leftrightarrow \exists\, q \in \mathbb{Z} \mid s - t = kq \Leftrightarrow a^{s-t} = a^{kq} = e \Leftrightarrow a^s = a^t.$$

Basta agora mostrar que φ é um homomorfismo. Para todo $\overline{s}, \overline{t} \in \mathbb{Z}_k$, temos

$$f(\overline{s} + \overline{t}) = f(\overline{s+t}) = a^{s+t} = a^s \cdot a^t = f(\overline{s}) \cdot f(\overline{t}).$$

□

Com estes resultados, enunciaremos o seguinte teorema:

Teorema 2.15. *Seja G um grupo abeliano finito. Então, existe uma única lista de inteiros $m_1, \ldots, m_k$, maiores que 1, de tal maneira que*

$$|G| = m_1 \ldots m_k\,, \qquad m_1 | m_2 | \ldots | m_k$$

e

$$G = C_1 \oplus \ldots \oplus C_k,$$

onde $C_1, \ldots, C_k$ são subgrupos cíclicos de G de ordem $m_1, \ldots, m_k$, respectivamente. Conseqüentemente,

$$G \simeq \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{m_k}.$$

Demonstração. Sabemos que $G = C_1 \oplus \ldots \oplus C_k$, onde $C_1, \ldots, C_k$ são grupos cíclicos de ordem $m_1, \ldots, m_k$, respectivamente, com $m_1 | m_2 | \ldots | m_k$. Desde que $|S \times T| = |S| \cdot |T|$, para quaisquer conjuntos finitos S e T, segue que

$$|G| = |C_1| \ldots |C_k| = m_1 \ldots m_k.$$

Além disso, qualquer grupo cíclico de ordem m é isomorfo a $\mathbb{Z}_m$. Portanto,

$$G \simeq \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{m_k}.$$

Para provar a unicidade da lista $m_1, \ldots, m_k$, suponhamos que

$$G = C_1 \oplus \ldots \oplus C_k = D_1 \oplus \ldots \oplus D_l,$$

onde C_i e D_j são subgrupos cíclicos de G, com $|C_i| = m_i$, $m_1|m_2|\ldots|m_k$ e $|D_j| = n_j$, $n_1|n_2|\ldots|n_l$.

Como D_l é cíclico, este possui um elemento de ordem n_l. Mas todo elemento em G tem ordem menor ou igual a m_k, de modo que $n_l \leq m_k$. Pelo mesmo argumento, $m_k \leq n_l$. Portanto, $m_k = n_l$.

Consideremos agora $m_{k-1}G = \{m_{k-1}a \mid a \in G\}$. Das duas decomposições de G assumidas acima, obtemos

$$\begin{aligned} m_{k-1}G &= (m_{k-1}C_1) \oplus \ldots \oplus (m_{k-1}C_{k-1}) \oplus (m_{k-1}C_k) \\ &= (m_{k-1}D_1) \oplus \ldots \oplus (m_{k-1}D_{l-1}) \oplus (m_{k-1}D_l). \end{aligned}$$

Pelo fato de $m_i|m_{k-1}$, segue que $m_{k-1}C_i$ é um subgrupo trivial, para $i = 1, \ldots, k-1$. Portanto, $|m_{k-1}G| = |m_{k-1}C_k| = |m_{k-1}D_l|$ e concluímos que $|m_{k-1}D_j| = 1$, para $j = 1, \ldots, l-1$. Logo, $n_{l-1}|m_{k-1}$.

Pelo argumento simétrico, $m_{k-1}|n_{l-1}$ e então $m_{k-1} = n_{l-1}$.

Procedendo dessa maneira, podemos mostrar que $m_{k-r} = n_{l-r}$, com $r = 0, 1, \ldots$, mas $m_1 \ldots m_k = |G| = n_1 \ldots n_l$, de modo que $k = l$ e $m_i = n_i$, para $i = 1, 2, \ldots, k$. □

Uma *partição de um inteiro positivo* k é uma r-upla $(k_1, \cdots, k_r)$ de inteiros positivos, tal que $k = \sum_i k_i$ e cada $k_i \leq k_{i+1}$

Lema 2.16. *Existe uma correspondência injetora entre a família de grupos abelianos não isomorfos de ordem p^e, p primo, e o conjunto $P(e)$ de partições de e.*

Demonstração. Seja F uma família de grupos abelianos não isomorfos de ordem p^e. Se $G \in F$, então G determina um único tipo $(p^{e_1}, \ldots, p^{e_k})$, onde $e_1 \leq \ldots \leq e_k$ e $e_1 + \ldots + e_k = e$.

Definamos a aplicação $\sigma : F \to P(e)$ por $\sigma(G) = (e_1, \ldots, e_k)$. Usando o Teorema 2.15, podemos verificar que σ é injetora. Para mostrar que σ é sobrejetora, seja $(e_1, \ldots, e_s) \in P(e)$. Então, o grupo $\mathbb{Z}_{p^{e_1}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p^{e_s}}$ é uma pré-imagem de $(e_1, \ldots, e_s)$. $\square$

Lema 2.17. *Seja G um grupo abeliano finito de ordem $p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \ldots p_k^{e_k}$, p_i primos distintos, $e_i > 0$. Então,*

$$G = S(p_1) \oplus S(p_2) \oplus \ldots \oplus S(p_k),$$

onde $|S(p_i)| = p_i^{e_i}$. Esta decomposição de G é única, isto é, se $G = H_1 \oplus \ldots \oplus H_k$, com $|H_i| = p_i^{e_i}$, então $H_i = S(p_i)$.

Demonstração. Temos que $|G| = p_1^{e_1} \ldots p_k^{e_k}$, $e_i \geq 0$. Pelo teorema anterior, $G = C_1 \oplus \ldots \oplus C_n$, onde C_i são grupos cíclicos de ordem, $p_1^{e_{1_i}} \ldots p_k^{e_{k_i}}$, $e_{j_i} \geq 0$. Pelo fato de C_1 ser cíclico, C_i contém subgrupos únicos $C_{1_i}, \ldots, C_{k_i}$ de ordem $p_1^{e_{1_i}} \cdots p_k^{e_{k_i}}$, respectivamente. Segue do Teorema de Lagrange que

$$C_{j_i} \cap C_{1_i} \oplus \ldots \oplus C_{j-1_i} \oplus C_{j+1_i} \ldots \oplus C_{k_i} = e,$$

para todo $j = 1, \ldots, k$. Portanto, $C_i = C_{1_i} \oplus \ldots \oplus C_{k_i}$. Logo,

$$G = [C_{1_1} \oplus \ldots \oplus C_{k_1}] \oplus \ldots \oplus [C_{1_n} \oplus \ldots \oplus C_{k_n}].$$

Denotando $S(p_1) = [C_{1_1} \oplus \ldots \oplus C_{1_n}], \ldots, S(p_k) = [C_{k_1} \oplus \ldots \oplus C_{k_n}]$, temos $|S(p_1)| = p_1^{s_1}, \ldots, |S(p_k)| = p_k^{s_k}$ e $G = S(p_1) \oplus \ldots \oplus S(p_k)$. Comparando a ordem em ambos os lados, segue que $|S(p_1)| = p_1^{e_1}, \ldots, |S(p_k)| = p_k^{e_k}$. A última afirmação do lema pode ser provada observando que cada subgrupo $S(p_i)$ e H_i é simplesmente o subgrupo $\{a \in G \mid o(a)$ é uma potência de $p_i\}$. $\square$

Teorema 2.18. *Seja $n = p_1^{f_1} \cdot p_2^{f_2} \ldots p_k^{f_k}$, onde p_j são primos distintos, $j = 1, \ldots, k$. Então, o número de grupos abelianos não isomorfos de ordem n é*

$$|P(f_1)| \cdot |P(f_2)| \ldots |P(f_k)|.$$

Demonstração. Sejam F uma família de grupos abelianos não isomorfos de ordem n e $G \in F$. Segue do Lema 2.17 que

$$G = S(p_1) \oplus \ldots \oplus S(p_k).$$

O número de grupos abelianos não isomorfos $S(p_i)$ é $|P(f_i)|$ pelo Lema 2.16.

Portanto, $|F| = |P(f_1)| \cdot |P(f_2)| \ldots |P(f_k)|$. $\square$

Com relação aos grupos de ordem 8, temos $n = 8 = 2^3$, ou seja, $p = 2$ e $f = 3$, e a ordem do conjunto das partes de f é $|P(f)| = |P(3)| = 3$. Portanto, temos três grupos abelianos não isomorfos de ordem 8, a saber:

$$(\mathbb{Z}_8, +)\ , \quad (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2, +)\ , \quad (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +).$$

Teremos como propósito daqui em diante mostrar que existem somente dois grupos não abelianos de ordem 8, qualquer outro será isomorfo a um deles.

De fato, consideremos um grupo G qualquer, não abeliano, de ordem 8. Pelo Corolário 1.18, as possíveis ordens dos elementos em G são 2, 4 e 8.

Suponhamos que G possua um elemento de ordem 8, por exemplo, $a \in G$. Então $G = \langle a \rangle$ e, portanto, pela Proposição 2.14, $G \simeq \mathbb{Z}_8$, uma contradição.

Deste modo, as possíveis ordens dos elementos de G (distintos de e) são 2 ou 4.

Suponhamos que todos os elementos de G tenham ordem 2. Então, G é um grupo abeliano.

Com efeito, seja $a \in G$, $a \neq e$. Como $O(a) = 2$, temos que $H = \{e, a\}$ é um subgrupo de G. Consideremos $b \in \frac{G}{H}$. Então, $K = \{e, a, b, ab\}$ é um subgrupo de G. Seja agora $c \in \frac{G}{K}$. Então, $G = \{e, a, b, ab, c, ac, bc, abc\} = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \{0, 1\}\}$. Portanto, $G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, que é abeliano. Absurdo.

Se considerarmos a seguinte aplicação

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 & \to & G \\ (\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}) & \mapsto & a^i b^j c^k \end{array}$$

obteremos o isomorfismo acima.

Logo, G possui um elemento de ordem 4. Sejam $a \in G$ tal elemento e $H = \langle a \rangle$. Tomemos $b \in \frac{G}{H}$ e consideremos o subgrupo K de G gerado por a e b, isto é, $K = \langle a, b \rangle$. Como $b \notin H$, temos que $|K| > 4$ e, pelo Corolário 1.18, $|K|$ divide 8. Portanto, $K = G = \langle a, b \rangle$, ou seja,

$$G = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}.$$

Como o índice $(G : H) = 2$, temos $H \lhd G$.

Com efeito, se $a \notin H$, então $G = H \cup aH$ e $aH \cap H = \varnothing$. Da mesma forma, temos $G = H \cup Ha$ e $Ha \cap H = \varnothing$. Assim, temos $aH = Ha$, $a \notin H$. Mas, claramente, $\alpha H = H\alpha$, $\forall \alpha \in H$. Portanto, para todo $g \in G$, $gH = Hg$, provando que $H \lhd G$.

Logo, podemos considerar o grupo quociente $\frac{G}{H}$.

Primeiramente, $b^{-1}ab \in H$, pois $H \lhd G$. Como $O(b^{-1}ab) = O(a) = 4$, segue que $b^{-1}ab = a$ ou $b^{-1}ab = a^3$. Observemos que $b^{-1}ab = a \Rightarrow ab = ba$, ou seja, temos um grupo abeliano.

Como $|\frac{G}{H}| = 2$, pois $(G : H) = 2$, temos $(bH) \cdot (bH) = b^2H = e_{G/H}$, ou seja, $b^2 \in H$. Suponhamos que $b^2 = a$ ou $b^2 = a^3$. Em ambos os casos, $O(b^2) = 4$ e, portanto, $O(b) = 8$. Isto mostra que G é abeliano, pois será gerado por b. Absurdo.

Assim, devemos ter $b^2 = e$ ou $b^2 = a^2$.

Por fim, se G é um grupo qualquer de ordem 8, temos:

1. G gerado por a e b que define as relações:

$$a^4 = e, \quad b^2 = e \quad \text{e} \quad b^{-1}ab = a \quad \text{(abeliano)}, \tag{2.11}$$

$$a^4 = e, \quad b^2 = e \quad \text{e} \quad b^{-1}ab = a^3, \tag{2.12}$$

onde em (2.11), $(G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2, +)$ e em (2.12), $G = (D_4, \circ)$.

2. G gerado por a e b que define as relações:

$$a^4 = e, \quad b^2 = a^2 \quad \text{e} \quad b^{-1}ab = a \quad \text{(abeliano)}, \tag{2.13}$$

$$a^4 = e, \quad b^2 = a^2 \quad \text{e} \quad b^{-1}ab = a^3, \tag{2.14}$$

onde em (2.13), $(G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2, +)$ e em (2.14), $G = (Q_8, \cdot)$.

Observemos, nos casos (2.11) e (2.13) acima, que um mesmo grupo pode ser apresentado, por meios de geradores e de relações, de formas distintas. O que acontece é que mudando a escolha dos geradores, podemos alterar as relações entre eles.

Sejam $\overline{0}, \overline{1} \in \mathbb{Z}_4$ e $\overline{\overline{0}}, \overline{\overline{1}} \in \mathbb{Z}_2$. No caso (2.11), os geradores escolhidos para $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ são $a = (\overline{1}, \overline{\overline{0}})$ e $b = (\overline{0}, \overline{\overline{1}})$. No caso (2.13), os geradores escolhidos são $a = (\overline{1}, \overline{\overline{0}})$ e $b = (\overline{1}, \overline{\overline{1}})$.

É claro que D_4 e Q_8 não são isomorfos a $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Resta-nos somente verificar que D_4 não é isomorfo a Q_8. Para tanto, é suficiente observarmos que D_4 possui cinco elementos de ordem 2, enquanto Q_8 possui um único elemento de ordem 2.

Portanto, se G é um grupo não abeliano qualquer de ordem 8, então ele é isomorfo a D_4 ou a Q_8.

Consideremos agora o conjunto $G = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{i}, -\mathbf{i}, \mathbf{j}, -\mathbf{j}, \mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$. Vimos no capítulo anterior (Exemplo 1.36) que este conjunto forma um grupo com a operação multiplicação induzida de $\mathbb{H}$ (anel dos Quatérnios). Podemos verificar que este grupo é gerado pelos elementos $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$. Assim, usando as relações (2.11), (2.12), (2.13) e (2.14), respectivamente, obtemos

$$\begin{gathered} \mathbf{ij} = \mathbf{ji} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{kj} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{ik} = -\mathbf{j} \\ \mathbf{i}^2 = -\mathbf{1}, \quad \mathbf{j}^2 = \mathbf{1}, \quad \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}, \end{gathered} \tag{2.15}$$

$$\begin{gathered} \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j} \\ \mathbf{i}^2 = -\mathbf{1}, \quad \mathbf{j}^2 = \mathbf{1}, \quad \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}, \end{gathered} \tag{2.16}$$

$$\begin{gathered} \mathbf{ij} = \mathbf{ji} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{kj} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{ik} = -\mathbf{j} \\ \mathbf{i}^2 = -\mathbf{1}, \quad \mathbf{j}^2 = -\mathbf{1}, \quad \mathbf{k}^2 = \mathbf{1}, \end{gathered} \tag{2.17}$$

$$\begin{gathered} \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j} \\ \mathbf{i}^2 = -\mathbf{1}, \quad \mathbf{j}^2 = -\mathbf{1}, \quad \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}. \end{gathered} \tag{2.18}$$

Como já dissemos anteriormente, o grupo G é gerado por $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e para nossos propósitos, pelo menos esses dois elementos devem obedecer à propriedade $(e_i)^2 = -\mathbf{1}$, ou seja, $\mathbf{i}^2 = -\mathbf{1}$ e $\mathbf{j}^2 = -\mathbf{1}$. O elemento $\mathbf{k}$ não necessita obedecer à propriedade, uma vez que ele surge da multiplicação de $\mathbf{i}$ por $\mathbf{j}$, em outras palavras, $\mathbf{k}$ é gerado por $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$. Dessa forma, as relações (2.15) e (2.16) não nos interessam, ficando somente duas possibilidades de construirmos o anel hipercomplexo sobre o grupo multiplicativo: um grupo isomorfo a $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$, chamado de *anel bicomplexo*, e o grupo dos quatérnios.

Neste capítulo, por conveniência, denotaremos o grupo $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ por $G_{4\times 2}$. Também, ao escrevermos $(Q_8, +, \cdot)$ e $(G_{4\times 2}, +, \cdot)$, estaremos nos referindo ao anel dos Quatérnios e ao anel gerado por $G_{4\times 2}$, respectivamente.

2.4 Diferenciação de Funções Hipercomplexas

Como comentamos no início deste capítulo, procuraremos generalizar para o espaço hipercomplexo alguns dos resultados mais conhecidos em análise complexa, seguindo alguns dos resultados obtidos recentemente em (Borges e Machado [15],[16]).

Seja $f(z)$ uma função de variáveis hipercomplexas, onde z é dado por

$$z = x_1 + \mathbf{i}x_2 + \mathbf{j}x_3 + \mathbf{k}x_4, \tag{2.19}$$

com $x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, 4$.

Seja E^4 um espaço Euclidiano quadridimensional. Definimos a função f sobre o anel bicomplexo $(G_{4\times 2}, +, \cdot)$ como

$$\begin{aligned} f : E^4 &\rightarrow \mathbb{H} \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) &\mapsto f(x_1, x_2, x_3, x_4), \end{aligned}$$

onde $f = f_1 + \mathbf{i}f_2 + \mathbf{j}f_3 + \mathbf{k}f_4$, e $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ obedecem às relações dadas em (2.17).

Seja $dz = dx_1 + \mathbf{i}dx_2 + \mathbf{j}dx_3 + \mathbf{k}dx_4$; desta forma, a integral $\int f dz$ será definida como

$$\begin{aligned} \int f dz = & \int (f_1 + \mathbf{i}f_2 + \mathbf{j}f_3 + \mathbf{k}f_4) \cdot (dx_1 + \mathbf{i}dx_2 + \mathbf{j}dx_3 + \mathbf{k}dx_4) = \\ = & \int (f_1 dx_1 + \mathbf{i}f_1 dx_2 + \mathbf{j}f_1 dx_3 + \mathbf{k}f_1 dx_4 + \mathbf{i}f_2 dx_1 - f_2 dx_2 + \mathbf{k}f_2 dx_3 - \mathbf{j}f_2 dx_4 + \\ & + \mathbf{j}f_3 dx_1 + \mathbf{k}f_3 dx_2 - f_3 dx_3 - \mathbf{i}f_3 dx_4 + \mathbf{k}f_4 dx_1 - \mathbf{j}f_4 dx_2 - \mathbf{i}f_4 dx_3 + f_4 dx_4) = \\ = & \int (f_1 dx_1 - f_2 dx_2 - f_3 dx_3 + f_4 dx_4) + \mathbf{i}\int (f_1 dx_2 + f_2 dx_1 - f_3 dx_4 - f_4 dx_3) + \\ & + \mathbf{j}\int (f_1 dx_3 + f_3 dx_1 - f_2 dx_4 - f_4 dx_2) + \mathbf{k}\int (f_1 dx_4 + f_4 dx_1 + f_3 dx_2 + f_2 dx_3). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Suponhamos primeiramente que as funções coordenadas $f_i : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaçam as condições de existência de toda integral, ou seja, f_i deve ser contínua, e dado um caminho de um ponto $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ até um ponto $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$, em um domínio simplesmente conexo de um espaço de quatro dimensões, a integral $\int_a^b f dz$ independe do caminho de integração sob as condições do seguinte teorema:

Teorema 2.19. *Para todo par de pontos a e b, e qualquer caminho ligando-os em um espaço simplesmente conexo de quatro dimensões, a integral* $\int_a^b f dz$ *não depende do caminho dado se, e somente se, existe uma função* $F = F_1 + \mathbf{i}F_2 + \mathbf{j}F_3 + \mathbf{k}F_4$, *com* $\int_a^b f dz = F(b) - F(a)$, *e que satisfaz as seguintes relações:*

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = \frac{\partial F_3}{\partial x_3} = \frac{\partial F_4}{\partial x_4} \quad , \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial F_3}{\partial x_4} = \frac{\partial F_4}{\partial x_3},$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x_1} = -\frac{\partial F_1}{\partial x_3} = -\frac{\partial F_2}{\partial x_4} = \frac{\partial F_4}{\partial x_2} \quad , \quad \frac{\partial F_4}{\partial x_1} = \frac{\partial F_1}{\partial x_4} = -\frac{\partial F_2}{\partial x_3} = -\frac{\partial F_3}{\partial x_2}.$$

Chamaremos essas relações de relações de Cauchy-Riemann generalizadas *para o anel bicomplexo.*

Demonstração. Sabemos que a integral $\int_a^b f dz$, que se escreve como (2.20), independe do caminho se, para uma certa função F,

$$\int_a^b f dz = \int_a^b dF = \int_a^b d(F_1 + \mathbf{i}F_2 + \mathbf{j}F_3 + \mathbf{k}F_4) = F(b) - F(a)$$

, tal que o valor dessa diferença dependa unicamente dos pontos extremos.

Suponhamos que exista tal F. A diferencial total das funções coordenadas é dada por:

$$dF_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial F_1}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial F_1}{\partial x_4} dx_4 = f_1 dx_1 - f_2 dx_2 - f_3 dx_3 + f_4 dx_4,$$

$$dF_2 = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial F_2}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial F_2}{\partial x_4} dx_4 = f_2 dx_1 + f_1 dx_2 - f_4 dx_3 - f_3 dx_4,$$

$$dF_3 = \frac{\partial F_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial F_3}{\partial x_4} dx_4 = f_3 dx_1 - f_4 dx_2 + f_1 dx_3 - f_2 dx_4,$$

$$dF_4 = \frac{\partial F_4}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F_4}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial F_4}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial F_4}{\partial x_4} dx_4 = f_4 dx_1 + f_3 dx_2 + f_2 dx_3 + f_1 dx_4.$$

Portanto, as relações são imediatas:

$$f_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} = \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = \frac{\partial F_3}{\partial x_3} = \frac{\partial F_4}{\partial x_4}, \quad f_2 = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial F_3}{\partial x_4} = \frac{\partial F_4}{\partial x_3},$$

$$f_3 = \frac{\partial F_3}{\partial x_1} = -\frac{\partial F_1}{\partial x_3} = -\frac{\partial F_2}{\partial x_4} = \frac{\partial F_4}{\partial x_2}, \quad f_4 = \frac{\partial F_4}{\partial x_1} = \frac{\partial F_1}{\partial x_4} = -\frac{\partial F_2}{\partial x_3} = -\frac{\partial F_3}{\partial x_2}.$$

□

Fazendo uma analogia com o espaço complexo, o Teorema 2.19 equivale ao Teorema 2.3 visto na Seção 1 deste capítulo, e a condição exigida na hipótese deste teorema de que o domínio seja um espaço simplesmente conexo, generaliza a exigência de uma função analítica em Ω, exigida em 2.3. Observemos também que as relações usadas no teorema anterior nada mais são do que as relações de Cauchy-Riemann generalizadas para um espaço de quatro dimensões.

O próximo exemplo, no espaço complexo, nos dà uma idéia mais concreta do que referimos no Teorema 2.19.

Exemplo 2.20. Calcule $\int_\gamma e^{z^2} z\, dz$, onde $\gamma(t) = (1 + \cos t)\, e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$.

Usando o Teorema 2.19, a integral $\int_\gamma e^{z^2} z\ dz$ não depende do caminho γ se existir uma $F = F_1 + iF_2$, tal que $\int_\gamma e^{z^2} z\ dz = F(b) - F(a)$ e satisfaça as relações de Cauchy-Riemann.

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial y}\,, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{\partial F_2}{\partial x}\,.$$

Primeiramente, encontremos os pontos a e b.

$$a = \gamma(0) = (1 + \cos 0)\, e^{i0} = (1 + 1) \cdot 1 = 2 \Rightarrow a = 2,$$

$$b = \gamma(\pi) = (1 + \cos \pi)\, e^{i\pi} = (1 + (-1))\, e^{i\pi} = 0 \Rightarrow b = 0.$$

Agora, calculemos o valor da $F(z)$. Como $\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{1}{2}\, e^{z^2}\right) = e^{z^2} z$, temos que $F(z) = \frac{1}{2}\, e^{z^2}$ é uma primitiva de $f(z) = e^{z^2} z$.

Então,

$$\int_2^0 e^{z^2} z\, dz = \frac{1}{2}\, e^{z^2}\Big|_2^0 = \frac{1 - e^4}{2}.$$

Além disso, temos que

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2} \cdot e^{z^2} = \frac{1}{2} \cdot e^{(x+y)^2} = \frac{1}{2} \cdot e^{x^2 - y^2 + i2xy} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot e^{x^2-y^2} (\cos(2xy) + i \operatorname{sen}(2xy)) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot e^{x^2-y^2} \cos(2xy) + i\, \frac{1}{2} \cdot e^{x^2-y^2} \operatorname{sen}(2xy) = F_1(x,y) + iF_2(x,y), \end{aligned}$$

ou seja,

$$F_1(x,y) = \frac{1}{2} \cdot e^{x^2-y^2} \cos(2xy),$$

$$F_2(x,y) = \frac{1}{2} \cdot e^{x^2-y^2} \operatorname{sen}(2xy).$$

Então,

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot e^{x^2-y^2} 2x \cdot \cos(2xy) - \frac{1}{2} \cdot e^{x^2-y^2} \operatorname{sen}(2xy) \cdot 2y =$$
$$= e^{x^2-y^2} (x \cdot \cos(2xy) - y \cdot \operatorname{sen}(2xy)),$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{1}{2} \cdot e^{x^2-y^2} 2y \cdot \cos(2xy) - \frac{1}{2} \cdot e^{x^2-y^2} \operatorname{sen}(2xy) \cdot 2x =$$
$$= -e^{x^2-y^2} (y \cdot \cos(2xy) + x \cdot \operatorname{sen}(2xy)),$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot e^{x^2-y^2} 2x \cdot \operatorname{sen}(2xy) + \frac{1}{2} \cdot e^{x^2-y^2} \cos(2xy) \cdot 2y =$$
$$= e^{x^2-y^2} (x \cdot \operatorname{sen}(2xy) + y \cdot \cos(2xy)),$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = -\frac{1}{2} \cdot e^{x^2-y^2} 2y \cdot \operatorname{sen}(2xy) + \frac{1}{2} \cdot e^{x^2-y^2} \cos(2xy) \cdot 2x =$$
$$= e^{x^2-y^2} (-y \cdot \operatorname{sen}(2xy) + x \cdot \cos(2xy)).$$

Portanto, concluímos que

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial y}, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Vejamos agora o seguinte lema.

Lema 2.21. *Dadas uma função $f(z)$ sobre o anel bicomplexo $(G_{4\times 2}, +, \cdot)$, com funções coordenadas diferenciáveis satisfazendo as relações do Teorema 2.19, e uma função $h(z)$, definida em termos de $f(z)$ por*

$$h(z) = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} + \frac{\partial f_4}{\partial x_4}\right) + \mathbf{i}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{\partial f_3}{\partial x_4} + \frac{\partial f_4}{\partial x_3}\right) + \right.$$
$$\left. + \mathbf{j}\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_2}{\partial x_4} + \frac{\partial f_4}{\partial x_2}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial f_4}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_4} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right)\right],$$

então $\int h(z)dz = f(z)$. A função $h(z)$ é conhecida como a derivada bicomplexa de *$f(z)$ e é denotada por $h(z) = \dfrac{df(z)}{dz}$.*

Demonstração. Com o intuito de facilitar nossos cálculos, adotaremos a seguinte notação:

$$h(z) = \frac{1}{4}\,[h_1 + \mathbf{i}h_2 + \mathbf{j}h_3 + \mathbf{k}h_4].$$

Utilizando as relações (2.17) e sabendo que $dz = dx_1 + \mathbf{i}dx_2 + \mathbf{j}dx_3 + \mathbf{k}dx_4$, temos

$$\int h(z)dz = \int \frac{1}{4}\left[h_1 + \mathbf{i}h_2 + \mathbf{j}h_3 + \mathbf{k}h_4\right] \cdot (dx_1 + \mathbf{i}dx_2 + \mathbf{j}dx_3 + \mathbf{k}dx_4) =$$

$$= \frac{1}{4}\int (h_1dx_1 + \mathbf{i}h_1dx_2 + \mathbf{j}h_1dx_3 + \mathbf{k}h_1dx_4 + \mathbf{i}h_2dx_1 - h_2dx_2 + \mathbf{k}h_2dx_3 - \mathbf{j}h_2dx_4 +$$

$$+\mathbf{j}h_3dx_1 + \mathbf{k}h_3dx_2 - h_3dx_3 - \mathbf{i}h_3dx_4 + \mathbf{k}h_4dx_1 - \mathbf{j}h_4dx_2 - \mathbf{i}h_4dx_3 + h_4dx_4) =$$

$$= \frac{1}{4}\int (h_1dx_1 - h_2dx_2 - h_3dx_3 + h_4dx_4) + \mathbf{i}(h_1dx_2 + h_2dx_1 - h_3dx_4 - h_4dx_3) +$$

$$\mathbf{j}(h_1dx_3 - h_2dx_4 + h_3dx_1 - h_4dx_2) + \mathbf{k}(h_1dx_4 + h_2dx_3 + h_3dx_2 + h_4dx_1).$$

Substituindo as relações do Teorema 2.19 em h_1, h_2, h_3 e h_4, obtemos

$$\int h(z)dz = \frac{1}{4}\int 4\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\,dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\,dx_3 + \frac{\partial f_1}{\partial x_4}\,dx_4\right) +$$

$$+\mathbf{i}\,4\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\,dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_4}\,dx_4 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\,dx_3\right) +$$

$$+\mathbf{j}\,4\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_3}\,dx_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_4}\,dx_4 + \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\,dx_2\right) +$$

$$+\mathbf{k}\,4\left(\frac{\partial f_4}{\partial x_4}\,dx_4 + \frac{\partial f_4}{\partial x_3}\,dx_3 + \frac{\partial f_4}{\partial x_2}\,dx_2 + \frac{\partial f_4}{\partial x_1}\,dx_1\right).$$

Aplicando a regra da cadeia acima, chegamos a diferenciais totais das funções coordenadas, ou seja,

$$\int h(z)dz = \int (df_1 + \mathbf{i}df_2 + \mathbf{j}df_3 + \mathbf{k}df_4) = \int d(f_1 + \mathbf{i}f_2 + \mathbf{j}f_3 + \mathbf{k}f_4) = \int df = f(z).$$

Portanto, $\int h(z)dz = f(z)$, como queríamos demonstrar. □

Notemos que, para o espaço complexo, o correspondente deste teorema é o seguinte:

Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}$ uma região e $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ uma função analítica em Ω. Então, existem as derivadas parciais $u(x,y)$ e $v(x,y)$ em Ω e elas satisfazem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\,.$$

Além disso, como visto na observação (2.1),

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\,,$$

então $\displaystyle\int \frac{\partial f(z)}{\partial z}\,dz = f(z).$

Agora definiremos a função f sobre o anel dos Quatérnios $(Q_8, +, \cdot)$. Seja E^4 um espaço Euclidiano de quatro dimensões. Então,

$$\begin{aligned} f : E^4 &\to \mathbb{H} \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) &\mapsto f(x_1, x_2, x_3, x_4), \end{aligned}$$

onde $f = f_1 + \mathbf{i}f_2 + \mathbf{j}f_3 + \mathbf{k}f_4$, e $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ obedecem às relações dadas em (2.18).

Como o grupo dos Quatérnios é não abeliano, somos motivados a definir as integrais à direita $\int f dz$ e à esquerda também $\int dz f$.

Assim,

$$\begin{aligned} \int f dz = \int (f_1 + \mathbf{i}f_2 + \mathbf{j}f_3 + \mathbf{k}f_4) \cdot (dx_1 + \mathbf{i}dx_2 + \mathbf{j}dx_3 + \mathbf{k}dx_4) = \qquad (2.21) \\ = \int (f_1dx_1 + \mathbf{i}f_1dx_2 + \mathbf{j}f_1dx_3 + \mathbf{k}f_1dx_4 + \mathbf{i}f_2dx_1 - f_2dx_2 + \mathbf{k}f_2dx_3 - \mathbf{j}f_2dx_4 + \\ + \mathbf{j}f_3dx_1 - \mathbf{k}f_3dx_2 - f_3dx_3 + \mathbf{i}f_3dx_4 + \mathbf{k}f_4dx_1 + \mathbf{j}f_4dx_2 - \mathbf{i}f_4dx_3 - f_4dx_4) = \\ = \int (f_1dx_1 - f_2dx_2 - f_3dx_3 - f_4dx_4) + \mathbf{i}\int (f_1dx_2 + f_2dx_1 + f_3dx_4 - f_4dx_3) + \\ + \mathbf{j}\int (f_1dx_3 - f_2dx_4 + f_3dx_1 + f_4dx_2) + \mathbf{k}\int (f_1dx_4 + f_2dx_3 - f_3dx_2 + f_4dx_1). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int dz f = \int (dx_1 + \mathbf{i}dx_2 + \mathbf{j}dx_3 + \mathbf{k}dx_4) \cdot (f_1 + \mathbf{i}f_2 + \mathbf{j}f_3 + \mathbf{k}f_4) = \qquad (2.22) \\ = \int (dx_1f_1 + \mathbf{i}dx_1f_2 + \mathbf{j}dx_1f_3 + \mathbf{k}dx_1f_4 + \mathbf{i}dx_2f_1 - dx_2f_2 + \mathbf{k}dx_2f_3 - \mathbf{j}dx_2f_4 + \\ + \mathbf{j}dx_3f_1 - \mathbf{k}dx_3f_2 - dx_3f_3 + \mathbf{i}dx_3f_4 + \mathbf{k}dx_4f_1 + \mathbf{j}dx_4f_2 - \mathbf{i}dx_4f_3 - dx_4f_4) = \\ = \int (dx_1f_1 - dx_2f_2 - dx_3f_3 - dx_4f_4) + \mathbf{i}\int (dx_1f_2 + dx_2f_1 + dx_3f_4 - dx_4f_3) + \\ + \mathbf{j}\int (dx_1f_3 - dx_2f_4 + dx_3f_1 + dx_4f_2) + \mathbf{k}\int (dx_1f_4 + dx_2f_3 - dx_3f_2 + dx_4f_1). \end{aligned}$$

Com isso, podemos enunciar os seguintes lemas:

Lema 2.22. *Para todo par de pontos a e b, e qualquer caminho ligando-os em um espaço simplesmente conexo quadridimensional, a integral* $\int_a^b dzf$ *sobre o anel dos Quatérnios* $(Q_8, +, \cdot)$ *independe do caminho dado se, e somente se, existe uma função* $G = G_1 + iG_2 + jG_3 + kG_4$*, com* $\int_a^b dzf = G(b) - G(a)$ *e que satisfaz as seguintes* *relações:*

$$\frac{\partial G_1}{\partial x_1} = \frac{\partial G_2}{\partial x_2} = \frac{\partial G_3}{\partial x_3} = \frac{\partial G_4}{\partial x_4} \quad , \quad \frac{\partial G_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial G_1}{\partial x_2} = \frac{\partial G_3}{\partial x_4} = -\frac{\partial G_4}{\partial x_3},$$
$$\frac{\partial G_3}{\partial x_1} = -\frac{\partial G_1}{\partial x_3} = -\frac{\partial G_2}{\partial x_4} = \frac{\partial G_4}{\partial x_2} \quad , \quad \frac{\partial G_4}{\partial x_1} = -\frac{\partial G_1}{\partial x_4} = \frac{\partial G_2}{\partial x_3} = -\frac{\partial G_3}{\partial x_2}.$$

Demonstração. Sabemos que a integral $\int_a^b dzf$, que se escreve como (2.22), independe do caminho se para uma dada função G

$$\int_a^b dzf = \int_a^b dG = \int_a^b d(G_1 + \mathbf{i}G_2 + \mathbf{j}G_3 + \mathbf{k}G_4) = G(b) - G(a),$$

tal que o valor dessa diferença dependa somente dos pontos extremos.

Suponhamos que exista essa G. A diferencial total das funções coordenadas é dada por:

$$dG_1 = \frac{\partial G_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial G_1}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial G_1}{\partial x_3}dx_3 + \frac{\partial G_1}{\partial x_4}dx_4 = f_1dx_1 - f_2dx_2 - f_3dx_3 - f_4dx_4,$$
$$dG_2 = \frac{\partial G_2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial G_2}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial G_2}{\partial x_3}dx_3 + \frac{\partial G_2}{\partial x_4}dx_4 = f_2dx_1 + f_1dx_2 + f_4dx_3 - f_3dx_4,$$
$$dG_3 = \frac{\partial G_3}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial G_3}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial G_3}{\partial x_3}dx_3 + \frac{\partial G_3}{\partial x_4}dx_4 = f_3dx_1 - f_4dx_2 + f_1dx_3 + f_2dx_4,$$
$$dG_4 = \frac{\partial G_4}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial G_4}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial G_4}{\partial x_3}dx_3 + \frac{\partial G_4}{\partial x_4}dx_4 = f_4dx_1 + f_3dx_2 - f_2dx_3 + f_1dx_4.$$

Portanto, as relações são imediatas:

$$f_1 = \frac{\partial G_1}{\partial x_1} = \frac{\partial G_2}{\partial x_2} = \frac{\partial G_3}{\partial x_3} = \frac{\partial G_4}{\partial x_4}, \quad f_2 = \frac{\partial G_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial G_1}{\partial x_2} = \frac{\partial G_3}{\partial x_4} = -\frac{\partial G_4}{\partial x_3},$$
$$f_3 = \frac{\partial G_3}{\partial x_1} = -\frac{\partial G_1}{\partial x_3} = -\frac{\partial G_2}{\partial x_4} = \frac{\partial G_4}{\partial x_2}, \quad f_4 = \frac{\partial G_4}{\partial x_1} = -\frac{\partial G_1}{\partial x_4} = \frac{\partial G_2}{\partial x_3} = -\frac{\partial G_3}{\partial x_2}.$$

□

Lema 2.23. *Para todo par de pontos a e b, e qualquer caminho ligando-os em um espaço simplesmente conexo de quatro dimensões, a integral* $\int_a^b fdz$ *sobre o anel dos Quatérnios* $(Q_8, +, \cdot)$ *independe do caminho dado se, e somente se, existe uma função* $F = F_1 + iF_2 + jF_3 + kF_4$, *com* $\int_a^b fdz = F(b) - F(a)$ *e que satisfaz as seguintes relações:*

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = \frac{\partial F_3}{\partial x_3} = \frac{\partial F_4}{\partial x_4} \quad , \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial F_3}{\partial x_4} = \frac{\partial F_4}{\partial x_3},$$
$$\frac{\partial F_3}{\partial x_1} = -\frac{\partial F_1}{\partial x_3} = \frac{\partial F_2}{\partial x_4} = -\frac{\partial F_4}{\partial x_2} \quad , \quad \frac{\partial F_4}{\partial x_1} = -\frac{\partial F_1}{\partial x_4} = -\frac{\partial F_2}{\partial x_3} = \frac{\partial F_3}{\partial x_2}.$$

Demonstração. Sabemos que a integral $\int_a^b f dz$, que se escreve como (2.21), independe do caminho se para uma dada função F

$$\int_a^b f dz = \int_a^b dF = \int_a^b d(F_1 + \mathbf{i}F_2 + \mathbf{j}F_3 + \mathbf{k}F_4) = F(b) - F(a),$$

tal que o valor dessa diferença independa do caminho dado.

Suponhamos que exista tal F. A diferencial total das funções coordenadas é dada por:

$$dF_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial F_1}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial F_1}{\partial x_4} dx_4 = f_1 dx_1 - f_2 dx_2 - f_3 dx_3 - f_4 dx_4,$$

$$dF_2 1 = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial F_2}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial F_2}{\partial x_4} dx_4 = f_2 dx_1 + f_1 dx_2 - f_4 dx_3 + f_3 dx_4,$$

$$dF_3 = \frac{\partial F_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial F_3}{\partial x_4} dx_4 = f_3 dx_1 + f_4 dx_2 + f_1 dx_3 - f_2 dx_4,$$

$$dF_4 = \frac{\partial F_4}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F_4}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial F_4}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial F_4}{\partial x_4} dx_4 = f_4 dx_1 - f_3 dx_2 + f_2 dx_3 + f_1 dx_4.$$

Portanto, as relações são imediatas:

$$f_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} = \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = \frac{\partial F_3}{\partial x_3} = \frac{\partial F_4}{\partial x_4}, \quad f_2 = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial F_3}{\partial x_4} = \frac{\partial F_4}{\partial x_3},$$

$$f_3 = \frac{\partial F_3}{\partial x_1} = -\frac{\partial F_1}{\partial x_3} = \frac{\partial F_2}{\partial x_4} = -\frac{\partial F_4}{\partial x_2}, \quad f_4 = \frac{\partial F_4}{\partial x_1} = -\frac{\partial F_1}{\partial x_4} = -\frac{\partial F_2}{\partial x_3} = \frac{\partial F_3}{\partial x_2}.$$

□

Lema 2.24. *Dadas uma função $f(z)$ sobre o anel dos Quatérnios $(Q_8, +, \cdot)$, com funções coordenadas diferenciáveis satisfazendo as relações do Lema 2.23, e uma função $h(z)$, definida em termos de $f(z)$ por*

$$h(z) = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} + \frac{\partial f_4}{\partial x_4}\right) + \mathbf{i}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{\partial f_3}{\partial x_4} + \frac{\partial f_4}{\partial x_3}\right) + \right.$$
$$\left. + \mathbf{j}\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3} + \frac{\partial f_2}{\partial x_4} - \frac{\partial f_4}{\partial x_2}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial f_4}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_4} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right)\right],$$

então $\int h(z)dz = f(z)$. A função $h(z)$ é conhecida como a derivada quaterniônica à esquerda de *$f(z)$ e é denotada por $h(z) = \dfrac{df_l(z)}{dz}$.*

Demonstração. Usaremos o mesmo artifício da demonstração do Lema 2.21, ou seja, denotaremos

$$h(z) = \frac{1}{4}[h_1 + \mathbf{i}h_2 + \mathbf{j}h_3 + \mathbf{k}h_4].$$

Assim, tomando $dz = dx_1 + \mathbf{i}dx_2 + \mathbf{j}dx_3 + \mathbf{k}dx_4$ e utilizando as relações (2.18), obtemos

$$\int h(z)dz = \int \frac{1}{4}[h_1 + \mathbf{i}h_2 + \mathbf{j}h_3 + \mathbf{k}h_4] \cdot (dx_1 + \mathbf{i}dx_2 + \mathbf{j}dx_3 + \mathbf{k}dx_4) =$$

$$= \frac{1}{4}\int (h_1dx_1 + \mathbf{i}h_1dx_2 + \mathbf{j}h_1dx_3 + \mathbf{k}h_1dx_4 + \mathbf{i}h_2dx_1 - h_2dx_2 + \mathbf{k}h_2dx_3 - \mathbf{j}h_2dx_4 +$$

$$+\mathbf{j}h_3dx_1 - \mathbf{k}h_3dx_2 - h_3dx_3 + \mathbf{i}h_3dx_4 + \mathbf{k}h_4dx_1 + \mathbf{j}h_4dx_2 - \mathbf{i}h_4dx_3 - h_4dx_4) =$$

$$= \frac{1}{4}\int (h_1dx_1 - h_2dx_2 - h_3dx_3 - h_4dx_4) + \mathbf{i}(h_1dx_2 + h_2dx_1 + h_3dx_4 - h_4dx_3) +$$

$$\mathbf{j}(h_1dx_3 - h_2dx_4 + h_3dx_1 + h_4dx_2) + \mathbf{k}(h_1dx_4 + h_2dx_3 - h_3dx_2 + h_4dx_1).$$

Substituindo convenientemente as relações do Lema 2.23 em h_1, h_2, h_3 e h_4, temos

$$\int h(z)dz = \frac{1}{4}\int 4\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3}dx_3 + \frac{\partial f_1}{\partial x_4}dx_4\right) +$$

$$+4\,\mathbf{i}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_4}dx_4 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3}dx_3\right) +$$

$$+4\,\mathbf{j}\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_3}dx_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_4}dx_4 + \frac{\partial f_3}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2}dx_2\right) +$$

$$+4\,\mathbf{k}\left(\frac{\partial f_4}{\partial x_4}dx_4 + \frac{\partial f_4}{\partial x_3}dx_3 + \frac{\partial f_4}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f_4}{\partial x_1}dx_1\right).$$

Utilizando a regra da cadeia, obtemos as diferenciais totais das funções coordenadas; desta forma,

$$\int h(z)dz = \int (df_1 + \mathbf{i}df_2 + \mathbf{j}df_3 + \mathbf{k}df_4) = f_1 + \mathbf{i}f_2 + \mathbf{j}f_3 + \mathbf{k}f_4 = f(z),$$

provando assim o lema. □

Lema 2.25. *Dadas uma função $f(z)$ sobre o anel dos Quatérnios $(Q_8, +, \cdot)$, com funções coordenadas diferenciáveis satisfazendo as relações do Lema 2.22, e uma função $g(z)$, definida em termos de $f(z)$ por*

$$g(z) = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} + \frac{\partial f_4}{\partial x_4}\right) + \mathbf{i}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_4} - \frac{\partial f_4}{\partial x_3}\right) +\right.$$

$$\left.+\mathbf{j}\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_2}{\partial x_4} + \frac{\partial f_4}{\partial x_2}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial f_4}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_4} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right)\right],$$

então $\int dzg(z) = f(z)$. *A função* $g(z)$ *é conhecida como a derivada* quaterniõnica à direita de $f(z)$ *e é denotada por* $g(z) = \dfrac{df_r(z)}{dz}$.

Demonstração. Novamente utilizando o artifício de denotarmos

$$g(z) = \frac{1}{4}[g_1 + \mathbf{i}g_2 + \mathbf{j}g_3 + \mathbf{k}g_4]$$

e utilizando as relações (2.18), procedemos analogamente como no Lema 2.25:

$$\int dz\, g(z) = \int (dx_1 + \mathbf{i}dx_2 + \mathbf{j}dx_3 + \mathbf{k}dx_4) \cdot \frac{1}{4}[g_1 + \mathbf{i}g_2 + \mathbf{j}g_3 + \mathbf{k}g_4] =$$

$$= \frac{1}{4}\int (dx_1g_1 + \mathbf{i}dx_1g_2 + \mathbf{j}dx_1g_3 + \mathbf{k}dx_1g_4 + \mathbf{i}dx_2g_1 - dx_2g_2 + \mathbf{k}dx_2g_3 - \mathbf{j}dx_2g_4 +$$

$$+\mathbf{j}dx_3g_1 - \mathbf{k}dx_3g_2 - dx_3g_3 + \mathbf{i}dx_3g_4 + \mathbf{k}dx_4g_1 + \mathbf{j}dx_4g_2 - \mathbf{i}dx_4g_3 - dx_4g_4) =$$

$$= \frac{1}{4}\int (dx_1g_1 - dx_2g_2 - dx_3g_3 - dx_4g_4) + \mathbf{i}(dx_1g_2 + dx_2g_1 + dx_3g_4 - dx_4g_3) +$$

$$\mathbf{j}(dx_1g_3 - dx_2g_4 + dx_3g_1 + dx_4g_2) + \mathbf{k}(dx_1g_4 + dx_2g_3 - dx_3g_2 + dx_4g_1).$$

Substituindo convenientemente as relações do Lema 2.22 em $dz\, g(z)$, obtemos

$$\int dz\, g(z) = \frac{1}{4}\int 4\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3}dx_3 + \frac{\partial f_1}{\partial x_4}dx_4\right) +$$

$$+\mathbf{i}\ 4\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_4}dx_4 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3}dx_3\right) +$$

$$+\mathbf{j}\ 4\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_3}dx_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_4}dx_4 + \frac{\partial f_3}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2}dx_2\right) +$$

$$+\mathbf{k}\ 4\left(\frac{\partial f_4}{\partial x_4}dx_4 + \frac{\partial f_4}{\partial x_3}dx_3 + \frac{\partial f_4}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f_4}{\partial x_1}dx_1\right).$$

Então, aplicando a regra da cadeia, chegamos às diferenciais totais das funções coordenadas, isto é,

$$\int dzg(z) = \int (df_1 + \mathbf{i}df_2 + \mathbf{j}df_3 + \mathbf{k}df_4) = f_1 + \mathbf{i}f_2 + \mathbf{j}f_3 + \mathbf{k}f_4 = f(z).$$

Portanto,

$$\int dzg(z) = f(z).$$

□

Capítulo 3

Operador Quaterniônico do tipo Klein-Gordon-Dirac

3.1 Funções Quaterniônicas Regulares

Recordemos que, se $z \in \mathbb{H}$, então

$$z = x_1 + \mathbf{i}x_2 + \mathbf{j}x_3 + \mathbf{k}x_4, \tag{3.1}$$

onde $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Podemos também representar $\mathbb{H}$ como a soma direta

$$\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus V,$$

sendo $\mathbb{R}$ o corpo dos reais e V um espaço vetorial Euclidiano tridimensional. Assim, dado $z \in \mathbb{H}$, existem $r \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{w} \in V$, tais que $z = r + \mathbf{w}$. As componentes r e $\mathbf{w}$ são chamadas, respectivamente, de *parte escalar* e *parte vetorial* de z. Para todo quatérnio $z = r + \mathbf{w}$ existe um *quatérnio conjugado*, $\overline{z} = r - \mathbf{w}$, satisfazendo $z\overline{z} = \overline{z}z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = |z|^2$, em que $|z|$ é a norma de z.

De modo análogo, podemos decompor funções f de variáveis quaterniônicas em uma parte escalar e outra vetorial, ou seja,

$$f(z) = \phi + \boldsymbol{\psi}, \tag{3.2}$$

onde $\boldsymbol{\psi}$, que representa a parte vetorial, se decompõe como $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{i}\psi_1 + \mathbf{j}\psi_2 + \mathbf{k}\psi_3$.

O produto de quatérnios admite também uma interessante representação. Usando a tabela de multiplicação para as unidades quatérniônicas e escrevendo

$$a = a_1 + \mathbf{i}a_2 + \mathbf{j}a_3 + \mathbf{k}a_4 = a_1 + \mathbf{A}\ ,$$

$$b = b_1 + \mathbf{i}b_2 + \mathbf{j}b_3 + \mathbf{k}b_4 = b_1 + \mathbf{B} \;,$$

resulta

$$ab = (a_1 + \mathbf{A}) \cdot (b_1 + \mathbf{B}) = a_1 b_1 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + a_1 \mathbf{B} + b_1 \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{B}.$$

Os quatérnios são isomorfos a certos subconjuntos de matrizes. De fato, se fizermos as identificações

$$\mathbf{1} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{i} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{j} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{k} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e se $z = x_1 + \mathbf{i}x_2 + \mathbf{j}x_3 + \mathbf{k}x_4$, temos

$$z \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 \\ -x_3 & x_4 & x_1 & -x_2 \\ -x_4 & -x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Consideremos Ω um domínio simplesmente conexo em E^4, γ uma curva fechada em Ω com interior R. Denotaremos por dV o elemento de volume em R e por $d\mathbf{Q}$ o elemento de superfície em γ orientado para fora da curva. Podemos definir também o *operador gradiente quaterniônico* Γ por

$$\Gamma = \frac{\partial}{\partial x_1} + \nabla = \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial x_3} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial x_4}, \tag{3.3}$$

e com isso podemos enunciar a forma quaterniônica do Teorema da Divergência de Gauss para quatro dimensões.

Teorema 3.1. *Se $f = \phi + \boldsymbol{\psi}$ é uma função de variáveis quaterniônicas $q = r + \mathbf{w}$ em Ω, então*

$$\int_\gamma d\boldsymbol{Q}\, f = \int_R \Gamma f\, dV.$$

Demonstração. Seja $d\mathbf{Q} = dQ_0 + \mathbf{i}dQ_1 + \mathbf{j}dQ_2 + \mathbf{k}dQ_3$. Se M é a matriz

$$\begin{pmatrix} \phi & \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \\ -\psi_1 & \phi & -\psi_3 & \psi_2 \\ -\psi_2 & \psi_3 & \phi & -\psi_1 \\ -\psi_3 & -\psi_2 & \psi_1 & \phi \end{pmatrix}$$

e $[dq] = (dQ_0, dQ_1, dQ_2, dQ_3)$ é um vetor linha tendo as mesmas componentes do vetor $d\mathbf{Q}$, então o produto matricial $[dq]\ M$ é um vetor linha com as componentes do produto quaterniônico $d\mathbf{Q}\ f$, ou seja,

$$\begin{aligned} [dq]\ M = (&\phi dQ_0 - \psi_1 dQ_1 - \psi_2 dQ_2 - \psi_3 dQ_3\ ,\ \psi_1 dQ_0 + \phi dQ_1 + \phi_3 dQ_2 - \psi_2 dQ_3\ , \\ &\psi_2 dQ_0 - \psi_3 dQ_1 + \phi dQ_2 + \psi_3 dQ_0\ ,\ \psi_3 dQ_0 + \psi_2 dQ_1 - \psi_1 dQ_2 + \phi dQ_3) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Pelo Teorema de Gauss,

$$\int_\gamma [dq]\ M = \int_R div(M)\ dV.$$

Integrando (3.4) e aplicando o Teorema de Gauss a cada componente, temos

$$\begin{aligned} \int_\gamma [dq]\ M = \int_\gamma (&\phi dQ_0 - \psi_1 dQ_1 - \psi_2 dQ_2 - \psi_3 dQ_3\ ,\ \psi_1 dQ_0 + \phi dQ_1 + \phi_3 dQ_2 - \psi_2 dQ_3\ , \\ &\psi_2 dQ_0 - \psi_3 dQ_1 + \phi dQ_2 + \psi_3 dQ_0\ ,\ \psi_3 dQ_0 + \psi_2 dQ_1 - \psi_1 dQ_2 + \phi dQ_3) = \\ = \int_R \Bigg(&\frac{\partial \phi}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x_4}\ ,\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_4}\ , \\ &\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi}{\partial x_3} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_4}\ ,\ \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \phi}{\partial x_4} \Bigg) dV. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Podemos verificar sem dificuldade que $div(M)$ é um vetor linha cujas quatro componentes são as mesmas do quatérnio

$$\Gamma f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \nabla \right)(\phi + \boldsymbol{\psi}) = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \nabla \phi + \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial x_1} - \nabla \boldsymbol{\psi} + \nabla \times \boldsymbol{\psi}.$$

De fato,

$$\Gamma f = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \nabla\phi + \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial x_1} - \nabla\boldsymbol{\psi} + \nabla\times\boldsymbol{\psi} \;=\; \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial x_3} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial x_4}\right)\phi +$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathbf{i}\psi_1 + \mathbf{j}\psi_2 + \mathbf{k}\psi_3) - \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial x_3} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial x_4}\right)(\mathbf{i}\psi_1 + \mathbf{j}\psi_2 + \mathbf{k}\psi_3) +$$
$$+\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial x_3} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial x_4}\right)\times(\mathbf{i}\psi_1 + \mathbf{j}\psi_2 + \mathbf{k}\psi_3) \;=\; \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \mathbf{i}\frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \mathbf{j}\frac{\partial \phi}{\partial x_3} +$$
$$+\mathbf{k}\frac{\partial \phi}{\partial x_4} + \mathbf{i}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \mathbf{j}\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + \mathbf{k}\frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x_4} + \mathbf{i}\frac{\partial \psi_3}{\partial x_3} + \mathbf{k}\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} +$$
$$+\mathbf{j}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_4} - \mathbf{k}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} - \mathbf{i}\frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} - \mathbf{j}\frac{\partial \psi_3}{\partial x_2}.$$

Reescrevendo a equação acima como um vetor, temos

$$\Gamma f = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x_4},\, \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_4},\right.$$
$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial x_3} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_4} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2},\, \frac{\partial \phi}{\partial x_4} + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3}\right).$$

Portanto, $div(M) = \Gamma f$, determinando assim o resultado.

Similarmente, podemos demonstrar que

$$\int_\gamma f\, d\mathbf{Q} = \int_R f\Gamma\, dV,$$

onde o operador Γ age com a função f pela direita. □

Muitos associam a regularidade de uma função quaterniônica ao conceito de analiticidade de função em variáveis complexas. No entanto, como não existe ainda uma teoria analítica completa de quatérnios em quatro dimensões, ao contrário do que ocorre em duas dimensões, não faremos tal associação.

Na seqüencia recordaremos alguns resultados de análise complexa (Ahlfors [1]), com a finalidade de enunciarmos um teorema clássico, o Teorema de Morera, que nos conduzirá à regularidade da função f em Ω.

Definição 3.2. Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Dizemos que $F : \Omega \to \mathbb{C}$ é uma *primitiva de* f se $F'(z) = f(z)$, para todo $z \in \Omega$.

Teorema 3.3. *Se Ω é um conjunto simplesmente conexo e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é uma função analítica em Ω então, fixando $z_0 \in \Omega$, a função*

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi\,, \qquad z \in \Omega$$

é uma primitiva de f.

Demonstração. Como Ω é simplesmente conexo e f é analítica, a função F está bem definida, pois a integral de f independe do caminho devido ao Teorema 2.3.

Queremos mostrar que, para cada $z \in \Omega$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z).$$

Fixemos $z_0 \in \Omega$ e tomemos $h \in \mathbb{C}$ de maneira que o segmento ligando z até $z+h$ esteja contido em Ω. Temos

$$F(z+h) - F(z) = \int_z^{z+h} f(\xi) d\xi.$$

Como a integral acima independe do caminho, é conveniente escolhermos o segmento que liga z até $z+h$, isto é,

$$\gamma(t) = z + th\ , \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Como

$$\int_z^{z+h} d\xi = h,$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &= \frac{1}{|h|} \cdot \Big| F(z+h) - F(z) - hf(z) \Big| = \\
&= \frac{1}{|h|} \cdot \left| \int_z^{z+h} f(\xi)\, d\xi - \int_z^{z+h} f(z)\, d\xi \right| = \frac{1}{|h|} \cdot \left| \int_z^{z+h} [f(\xi) - f(z)]\, d\xi \right| = \\
&= \frac{1}{|h|} \cdot \left| \int_\gamma [f(\xi) - f(z)]\, d\xi \right| \leq \frac{1}{|h|} \cdot \int_\gamma |f(\xi) - f(z)|\, d\xi \leq \\
&\leq \frac{1}{|h|} \cdot \int_\gamma \max_{0 \leq t \leq 1} \Big| f(\gamma(t)) - f(z) \Big|\, d\xi = \frac{1}{|h|} \cdot \max_{0 \leq t \leq 1} \Big| f(\gamma(t)) - f(z) \Big| \cdot \int_\gamma d\xi = \\
&= \frac{1}{|h|} \cdot \max_{0 \leq t \leq 1} \Big| f(\gamma(t)) - f(z) \Big| \cdot l(\gamma) = \max_{0 \leq t \leq 1} \Big| f(\gamma(t)) - f(z) \Big|, \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

pois $l(\gamma) = |\gamma| = |h|$.

Como f é contínua, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $|w| < \delta$, temos $|f(z+w) - f(z)| < \varepsilon$.

Assim, se tomarmos h tal que $|h| < \delta$, então $w = th$, $0 \leq t \leq 1$, satisfaz $|w| = |th| \leq |h| \leq \delta$ e, portanto, $|f(z+w) - f(z)| < \varepsilon$.

Assim, segue de (3.6) que

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| < \varepsilon,$$

sempre que $|h| < \delta$, ou seja,

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z).$$

□

Corolário 3.4. *Sejam Ω um conjunto simplesmente conexo e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função analítica. Então, fixando $z_0 \in \Omega$, a função $F : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por*

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\, d\xi\,, \qquad z \in \Omega$$

é analítica.

Demonstração. Pelo teorema (3.3), a derivada de F existe em todo Ω e é igual a f. Logo, F é analítica em Ω. □

Corolário 3.5. *A derivada de uma função analítica é também analítica.*

Teorema 3.6 (Teorema de Morera). *Sejam $f : \Omega \to \mathbb{C}$ contínua e Ω simplesmente conexo. Se a integral de f independe do caminho ou, equivalentemente, a integral de f se anula sobre qualquer caminho fechado contínuo em Ω, então f é analítica (regular).*

Demonstração. Fixando z_0, segue que a função

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\, d\xi\,, \qquad z \in \Omega,$$

é analítica em Ω e satisfaz $F'(z) = f(z)$.

Pelo corolário (3.5), $F'(z) = f(z)$ também é analítica em Ω. □

Desta forma, podemos definir função regular à esquerda e à direita.

Definição 3.7. Dada uma função f de variáveis quaterniônicas $z = r + \mathbf{w}$ com $r \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{w} \in V$, f é *regular à esquerda em Ω* se

$$\int_{\gamma} d\mathbf{Q}\; f(z) = 0, \tag{3.7}$$

para toda hipersuperfície fechada γ em Ω.

Uma *função regular à direita* é definida de maneira similar, ou seja,

$$\int_\gamma f(z)\, d\mathbf{Q} = 0 \tag{3.8}$$

sob as mesmas circunstâncias.

Segue do Teorema 3.1 que $\int_\gamma d\mathbf{Q}\, f = \int_R \Gamma f\, dV$. Além disso, sendo γ uma curva fechada e arbitrária, e f uma função contínua com derivadas contínuas, concluímos que

$$\int_\gamma d\mathbf{Q}\, f = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_R \Gamma f\, dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma f = 0, \tag{3.9}$$

ou seja, se f é regular à esquerda, então $\Gamma f = 0$.

Da mesma maneira, se f é regular à direita, então $f\Gamma = 0$.

O conceito de regularidade pode ser estendido para incluir funções quaterniônicas regulares em $\overline{z}$.

Definição 3.8. Uma função $f = \phi + \psi$ é *regular à esquerda para* $\overline{z}$ em um domínio Ω se

$$\int_\gamma d\overline{\mathbf{Q}} f = 0\ ,$$

para toda hipersuperfície fechada γ em Ω.

A *regularidade à direita* para $\overline{z}$ é definida de maneira análoga em Ω, ou seja,

$$\int_\gamma f d\overline{\mathbf{Q}} = 0.$$

O conjugado do operador gradiente quaterniônico Γ é definido como

$$\overline{\Gamma} = \frac{\partial}{\partial x_1} - \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x_2} - \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial x_3} - \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial x_4} = \frac{\partial}{\partial x_1} - \nabla. \tag{3.10}$$

Assim, uma condição necessária e suficiente para que f seja regular à esquerda (direita) para $\overline{z}$ em Ω é que

$$\overline{\Gamma} f = 0 \quad (f\overline{\Gamma} = 0). \tag{3.11}$$

Uma função f é regular à esquerda (direita) em $\overline{z}$ somente se seu conjugado $\overline{f}$ for regular à esquerda (direita) em z. De fato, seja $\overline{f}$ regular à esquerda em z, então

$$\Gamma\overline{f} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{\Gamma}\,\overline{\overline{f}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{\Gamma}\, f = 0,$$

portanto, f é regular à esquerda em $\overline{z}$. Além disso, as únicas funções simultaneamente regulares em z e $\overline{z}$ são as constantes.

Vamos agora considerar uma função $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ sobre os quatérnios,

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = f_1(x_1,x_2,x_3,x_4) + \mathbf{i}f_2(x_1,x_2,x_3,x_4) + \\ + \mathbf{j}f_3(x_1,x_2,x_3,x_4) + \mathbf{k}f_4(x_1,x_2,x_3,x_4),$$

onde

$$\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j} \\ \mathbf{i}^2 = -\mathbf{1}, \quad \mathbf{j}^2 = -\mathbf{1}, \quad \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1},$$

e as funções coordenadas $f_i : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, são parcialmente diferenciáveis.

Uma função quaterniônica f é *regular à esquerda* sempre que

$$\Gamma f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial x_3} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial x_4}\right)(f_1 + \mathbf{i}f_2 + \mathbf{j}f_3 + \mathbf{k}f_4) =$$

$$= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_3}{\partial x_3} - \frac{\partial f_4}{\partial x_4}\right) + \mathbf{i}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_4}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_4}\right) +$$

$$+\mathbf{j}\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} + \frac{\partial f_2}{\partial x_4} - \frac{\partial f_4}{\partial x_2}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial f_4}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_4} + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) = 0,$$

e é *regular à direita* se

$$f\Gamma = (f_1 + \mathbf{i}f_2 + \mathbf{j}f_3 + \mathbf{k}f_4)\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial x_3} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial x_4}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_3}{\partial x_3} - \frac{\partial f_4}{\partial x_4}\right) + \mathbf{i}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_4} - \frac{\partial f_4}{\partial x_3}\right) +$$

$$+\mathbf{j}\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} + \frac{\partial f_4}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_4}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial f_4}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_4} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right) = 0.$$

Uma conclusão direta desses cálculos é que o operador $\overline{\Gamma}$ age com qualquer função quaterniônica f como o operador diferencial apresentado no Capítulo 2. Em outras palavras,

$$\overline{\Gamma} f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x_2} - \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial x_3} - \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial x_4}\right)(f_1 + \mathbf{i}f_2 + \mathbf{j}f_3 + \mathbf{k}f_4) =$$

$$= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \mathbf{i}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \mathbf{j}\frac{\partial f_3}{\partial x_1} + \mathbf{k}\frac{\partial f_4}{\partial x_1} - \mathbf{i}\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \mathbf{k}\frac{\partial f_3}{\partial x_2} + \mathbf{j}\frac{\partial f_4}{\partial x_2} -$$

$$-\mathbf{j}\frac{\partial f_1}{\partial x_3}+\mathbf{k}\frac{\partial f_2}{\partial x_3}+\frac{\partial f_3}{\partial x_3}-\mathbf{i}\frac{\partial f_4}{\partial x_3}-\mathbf{k}\frac{\partial f_1}{\partial x_4}-\mathbf{j}\frac{\partial f_2}{\partial x_4}+\mathbf{i}\frac{\partial f_3}{\partial x_4}+\frac{\partial f_4}{\partial x_4}=$$

$$=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}+\frac{\partial f_3}{\partial x_3}+\frac{\partial f_4}{\partial x_4}\right)+\mathbf{i}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}+\frac{\partial f_3}{\partial x_4}-\frac{\partial f_4}{\partial x_3}\right)+$$

$$+\mathbf{j}\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1}-\frac{\partial f_1}{\partial x_3}-\frac{\partial f_2}{\partial x_4}+\frac{\partial f_4}{\partial x_2}\right)+\mathbf{k}\left(\frac{\partial f_4}{\partial x_1}-\frac{\partial f_1}{\partial x_4}+\frac{\partial f_2}{\partial x_3}-\frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right)=4\,g(z),$$

bem como

$$f\overline{\Gamma}=(f_1+\mathbf{i}f_2+\mathbf{j}f_3+\mathbf{k}f_4)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}-\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x_2}-\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial x_3}-\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial x_4}\right)=$$

$$=\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\mathbf{i}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}+\mathbf{j}\frac{\partial f_3}{\partial x_1}+\mathbf{k}\frac{\partial f_4}{\partial x_1}-\mathbf{i}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}+\mathbf{k}\frac{\partial f_3}{\partial x_2}-\mathbf{j}\frac{\partial f_4}{\partial x_2}-$$

$$-\mathbf{j}\frac{\partial f_1}{\partial x_3}-\mathbf{k}\frac{\partial f_2}{\partial x_3}+\frac{\partial f_3}{\partial x_3}+\mathbf{i}\frac{\partial f_4}{\partial x_3}-\mathbf{k}\frac{\partial f_1}{\partial x_4}+\mathbf{j}\frac{\partial f_2}{\partial x_4}-\mathbf{i}\frac{\partial f_3}{\partial x_4}+\frac{\partial f_4}{\partial x_4}=$$

$$=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}+\frac{\partial f_3}{\partial x_3}+\frac{\partial f_4}{\partial x_4}\right)+\mathbf{i}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}+\frac{\partial f_4}{\partial x_3}-\frac{\partial f_3}{\partial x_4}\right)+$$

$$+\mathbf{j}\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1}-\frac{\partial f_1}{\partial x_3}+\frac{\partial f_2}{\partial x_4}-\frac{\partial f_4}{\partial x_2}\right)+\mathbf{k}\left(\frac{\partial f_4}{\partial x_1}-\frac{\partial f_1}{\partial x_4}-\frac{\partial f_2}{\partial x_3}+\frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right)=4\,h(z),$$

sendo $g(z)$ e $h(z)$ as derivadas quaterniônicas introduzidas nos Lemas (2.24) e (2.25) do Capítulo 2. Porém, o mais importante a ser observado aqui é que, anteriormente estes operadores diferenciais eram obtidos considerando a condição de independência de caminhos integráveis no espaço Euclidiano de quatro dimensões, e agora são obtidos através do operador conjugado $\overline{\Gamma}$. Em particular, mostramos que se $dz=dx_1+\mathbf{i}dx_2+\mathbf{j}dx_3+\mathbf{k}dx_4$, então

$$\int dz\; g(z)=\frac{1}{4}\int dz\;\overline{\Gamma}f=f, \tag{3.12}$$

sob as condições

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}=\frac{\partial f_2}{\partial x_2}=\frac{\partial f_3}{\partial x_3}=\frac{\partial f_4}{\partial x_4}\quad,\quad\frac{\partial f_2}{\partial x_1}=-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}=\frac{\partial f_3}{\partial x_4}=-\frac{\partial f_4}{\partial x_3},$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1}=-\frac{\partial f_1}{\partial x_3}=-\frac{\partial f_2}{\partial x_4}=\frac{\partial f_4}{\partial x_2}\quad,\quad\frac{\partial f_4}{\partial x_1}=-\frac{\partial f_1}{\partial x_4}=\frac{\partial f_2}{\partial x_3}=-\frac{\partial f_3}{\partial x_2},$$

e também

$$\int h(z)\;dz=\frac{1}{4}\int f\overline{\Gamma}\;dz=f, \tag{3.13}$$

sob outro conjunto de condições,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \quad , \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial f_3}{\partial x_4} = \frac{\partial f_4}{\partial x_3},$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} = -\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_2}{\partial x_4} = -\frac{\partial f_4}{\partial x_2} \quad , \quad \frac{\partial f_4}{\partial x_1} = -\frac{\partial f_1}{\partial x_4} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_2}.$$

Uma simples derivada pode ser construída no anel comutativo bicomplexo (Lema 2.21). Além disso, as duas condições acima induzem a aplicação conforme em um espaço Euclidiano de quatro dimensões (op. cit. [16]), e têm em comum a equação de Cauchy-Riemann da teoria de Variáveis Complexas. Para que possamos determinar uma conexão com a teoria clássica de Fueter, começaremos admitindo que

$$\Gamma\overline{\Gamma} = \overline{\Gamma}\Gamma = \sum_{j=1}^{4} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \nabla^2, \tag{3.14}$$

e o seguinte resultado pode ser demonstrado.

Teorema 3.9. *Seja f uma função quaterniônica arbitrária com funções coordenadas reais, e seja h uma outra função quaterniônica arbitrária tal que $h = \overline{\Gamma} f$. Se h é uma função regular à esquerda da teoria de Fueter, então f é uma solução da equação quadriharmônica $\nabla^2 f = 0$.*

Demonstração. Segue da hipótese que $h = \overline{\Gamma} f$, e então, aplicando o operador Γ em ambos os lados dessa equação, obtemos

$$\Gamma\overline{\Gamma} f = \nabla^2 f = \Gamma h.$$

Sendo h regular à esquerda, temos $\Gamma h = 0$, concluindo a demonstração. □

Corolário 3.10. *Seja f uma função quaterniônica arbitrária com funções coordenadas reais, e seja h uma outra função quaterniônica arbitrária tal que $h = f\overline{\Gamma}$. Se h é uma função regular à direita da teoria de Fueter, então f é uma solução da equação quadriharmônica $\nabla^2 f = 0$.*

Demonstração. Da mesma forma, como $h = f\overline{\Gamma}$, aplicamos o operador Γ em ambos os lados dessa equação, obtendo

$$f\overline{\Gamma}\Gamma = \nabla^2 f = h\Gamma.$$

Desde que h é regular a direita por hipótese, $h\Gamma = 0$, provando assim o corolário.

$\square$

Corolário 3.11. *Seja f uma função quaterniônica arbitrária com funções coordenadas reais. Se f é quadriharmônica, então ela é regular.*

Demonstração. Novamente, $\nabla^2 f = 0$ implica que $\Gamma\overline{\Gamma}f = f\overline{\Gamma}\Gamma = 0$, como queríamos demonstrar. $\square$

O Corolário 3.11 já foi, de fato, determinado por Sudbery usando formas diferenciais, mas não foi feita uma identificação direta com os métodos de construção por nós apresentados. Da discussão anterior fica bem claro a possibilidade de definir o conceito de regularidade adjunta, usando o operador $\overline{\Gamma}$, resultando numa teoria equivalente. O operador Γ será claramente chamado de *operador de Klein-Gordon-Dirac*, uma vez que as bem conhecidas equações de Klein-Gordon e Dirac podem ser reescritas a partir de Γ.

3.2 Representação Quaterniônica da Equação de Klein-Gordon

Em uma Teoria Relativista espera-se que a equação para o campo escalar ϕ, que representa uma partícula de massa m, satisfaça a chamada equação de Klein-Gordon (Lord [14]),

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + m^2\right)\phi = 0, \tag{3.15}$$

onde c é a velocidade da luz e t é a variável dinâmica do tempo.

A equação (3.15) pode ser escrita de forma compacta, ou seja,

$$(\square + m^2)\phi = 0, \tag{3.16}$$

onde $\square = -\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x_4^2} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ é chamado de *operador de Klein Gordon.*

Esta equação pode ser obtida, diretamente, através de um princípio geral da Mecânica Quântica, que afirma que qualquer operador é associado a variáveis dinâmicas em quatro dimensões. Por exemplo, a variável momentum P^μ será escrita como

$$P^\mu = i\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \qquad \mu = 1, 2, 3, 4. \tag{3.17}$$

Considerando a relação relativista $E^2 = P^2 + m^2$ entre energia, momentum e massa, temos

$$P_\mu P^\mu = m^2. \tag{3.18}$$

Em (3.17) e (3.18) consideramos as unidades absolutas como $c = 1$ e $\hbar$[1]$= 1$. Aplicando as equações (3.17) e (3.18), segue que qualquer corpo que representa a partícula de massa m satisfaz a equação (3.16).

Para uma massa de repouso zero, que representa um campo escalar sem massa, obtemos de (3.15) a seguinte equação homogênea

$$\Box\phi = 0.$$

Recapitulando alguns resultados clássicos da equação de Klein-Gordon, que motivou o estudo sobre diferenciabilidade hipercomplexa, vamos introduzir uma complexificação dos dois operadores Γ e $\overline{\Gamma}$ discutidos na seção anterior, através das seguintes definições:

$$\Gamma_c = i\frac{\partial}{\partial(ct)} + \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\overline{\Gamma}_c = i\frac{\partial}{\partial(ct)} - \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} - \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} - \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Deste modo, seguindo a tabela de multiplicação das unidades quaterniônicas $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, temos

$$\Box = \overline{\Gamma}_c\Gamma_c = \Gamma_c\overline{\Gamma}_c = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

e, portanto, o operador de Klein-Gordon $\Box$ pode ser dado como um produto de Γ_c e $\overline{\Gamma}_c$.

O conceito de complexificação aparece como uma ferramenta que decompõe a equação quaterniônica homogênea $\Box f = 0$ em um conjunto de dois sistemas de equações diferenciais parciais lineares. Uma decomposição similar também é possível

[1] Definimos $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, sendo h a constante de Planck. Esta constante recebe esse nome pois foi Planck quem a utilizou em seu artigo publicado em 1900, quando tentava explicar as propriedades observadas da radiação térmica. Da mesma forma que a velocidade da luz c é uma constante universal de significação fundamental que caracteriza a relatividade, a constante de Planck h, também é uma constante universal de significação fundamental que caracteriza a Física quântica.

para uma equação quaterniônica não homogênea do tipo $\square f = g$. Tomando por hora $\Gamma_c \overline{\Gamma}_c\, f = g$, e colocando $\Gamma_c\, \overline{g} = g$, o sistema equivalente será

$$\begin{cases} \Gamma_c\, \overline{g} = g, \\ \overline{\Gamma}_c\, f = \overline{g}. \end{cases} \tag{3.19}$$

Teorema 3.12. *Seja Γ o operador quaterniônico definido anteriormente. Então Γ pode ser tratado como um operador quaterniônico Klein-Gordon, posto que o produto $\overline{\Gamma}_c \Gamma_c$ conduz à equação de campo escalar sem massa de Klein-Gordon.*

Demonstração. Consideremos os operadores Γ_c e $\overline{\Gamma}_c$ definidos por

$$\Gamma_c = i\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial x_3} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial x_4} \qquad \text{e} \qquad \overline{\Gamma}_c = i\frac{\partial}{\partial x_1} - \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x_2} - \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial x_3} - \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial x_4}.$$

Então

$$\overline{\Gamma}_c \Gamma_c = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}.$$

Considerando $x_1 = ct$, segue que

$$\Gamma_c \overline{\Gamma}_c = \overline{\Gamma}_c \Gamma_c = \square,$$

o que nos leva a

$$(\Gamma_c \overline{\Gamma}_c)\phi = 0,$$

que é a equação de campo escalar sem massa, ou como é chamada, equação de Klein-Gordon. □

3.3 Representação Quaterniônica da Equação de Dirac

Consideremos as equações quaterniônicas não homogêneas do sistema (3.19) da Seção 3.2, e ainda as funções quaterniônicas $\overline{\phi}$ e ν, que são introduzidas como quatérnios indefinidos e na seqüência identificados como geradores dos campos de Dirac.

De acordo com o sistema de equações diferenciais parciais (3.19), podemos afirmar que

$$\Gamma_D \phi = \overline{\phi}, \tag{3.20}$$

$$\Gamma_D \overline{\Gamma}_D \nu = \overline{\phi}, \tag{3.21}$$

$$\overline{\Gamma}_D \nu = \phi. \tag{3.22}$$

O operador Γ_D é identificado como

$$\Gamma_D = i\,\hbar\,m\,c\,\Gamma_c,$$

onde $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ e h é a constante de Planck, c á velocidade da luz e m é a massa da partícula que representa o campo escalar ϕ.

Seja ψ uma outra função quaterniônica, a ser identificada. Se

$$\overline{\phi} = m^2 c^2 \psi,$$

então, de acordo com (3.20), temos

$$i\,\hbar\,m\,c\,\Gamma_c\,\phi = m^2c^2\psi \quad \Rightarrow \quad i\,\hbar\,\Gamma_c\,\phi = m\,c\,\psi. \tag{3.23}$$

Se considerarmos agora em (3.22)

$$\nu = \frac{\psi}{m^2c^2},$$

então

$$i\,\hbar\,m\,c\,\overline{\Gamma}_c\,\frac{\psi}{m^2c^2} = \phi \quad \Rightarrow \quad i\,\hbar\,\overline{\Gamma}_c\,\psi = m\,c\,\phi. \tag{3.24}$$

As equações (3.23) e (3.24) nos são familiares. São as bem conhecidas equações de Dirac da Mecânica Quântica Relativista. Os campos ψ e ϕ, chamados também de campos de Dirac, representam as soluções destas equações. Para um campo escalar associado a uma partícula sem massa, teremos

$$\Gamma_c\phi = 0,$$

$$\overline{\Gamma}_c\psi = 0,$$

que representam as equações de Dirac para este campo.

Observe que o operador quaterniônico Γ_c, obtido a partir de definições de regularidade de funções hipercomplexas, induz duas das mais importantes equações de campo da Física Teórica, as equações de Klein-Gordon e de Dirac, nos proporcionando uma decomposição em equações diferenciais parciais.

Conclusão

Uma primeira tentativa de se estender a Teoria de Variáveis Complexas de duas para quatro dimensões, foi realizada por Fueter, no entanto ele não definiu uma aplicação conforme entre hipersuperfícies, fato importante no estudo de teorias com conteúdo físico.

Nesta dissertação, procurou-se realizar uma aproximação do que foi apresentado por Fueter, a partir da construção de uma estrutura similar às equações de Cauchy-Riemann, definindo derivadas hipercomplexas e calculando o conceito de integrabilidade de caminhos independentes em um espaço Euclidiano quadridimensional. Dessa forma, conseguiu-se definir aplicações conformes em hipersuperfícies deste espaço.

Foi possível ainda traçar uma correspondência entre derivadas quaterniônicas e a definição de regularidade de Fueter. Assim, pode-se reescrever equações de campo da Física, como as equações de Klein-Gordon e de Dirac, de forma concisa e utilizando conceitos de regularidade. Estas equações podem ser induzidas pelo operador quaterniônico Γ_c, permitindo uma decomposição em equações diferenciais parciais lineares.

Referências Bibliográficas

[1] AHLFORS, Lars V., *Complex analysis*, McGraw-Hill Kogakusha, Harvard University, 1966.

[2] BHATTACHARYA, Phani B., *Basic abstract algebra*, Cambridge University Press, University of Delhi, 1986.

[3] BORGES, M. F., CALIXTO, A. P., MACHADO, J. M., *On a Klein-Gordon-Dirac Operator*, XXV CNMAC, Nova Friburgo, pp. 69 (2002).

[4] BORGES, M. F., LEAL, J. M., MACHADO, J. M., *Liouville Theorem and Hypercomplex Conformal Mappings*, XXV CNMAC, Nova Friburgo, pp. 68 (2002).

[5] CARMO, Manfredo Perdigão do, *Geometria Riemanniana*, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[6] CHOQUET-BRUHAT, Yvonne, DEWITT-MORETTE, Cécile, *Analysis, manifolds and physics*, Elsevier Science Publishers B. V., North-Holland, 1982.

[7] DEAVOURS, C. A., *The quaternion calculus*, American Mathematical Montly, vol. **80**, pp. 995-1008 (1973).

[8] DOMINGUES, Hygino Huguero, *Álgebra moderna*, Editora Atual, São Paulo, 1982.

[9] FUETER R., *Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen* $\Delta\phi = 0$ *und* $\Delta\Delta\phi = 0$ *mit vier Variablen*, Comment. Math. Helv., vol. **7**, pp. 307-330 (1935).

[10] GARCIA, Arnaldo, LEQUAIN, Yves, *Álgebra: um curso de introdução*, IMPA, Rio de Janeiro, 1988.

[11] GONÇALVES, Adilson, *Introdução à Álgebra*, IMPA, Rio de Janeiro, 1978.

[12] HUNGERFORD, Thomas W., *Algebra*, Department of Mathematics, Cleveland State University, Ohio, Springer-Verlag New York Inc., 1974.

[13] KREYSZIG, Erwin, *Introductory functional analysis with applications*, Wiley Classics Library Edition Publiched, Unversity of Windsor, 1989.

[14] LORD, E., *Tensors, Relativity and Cosmology*, McGraw-Hill Publishing Co., 1976.

[15] MACHADO, J. M., BORGES, M. F. *New remarks on the differentiablility of hypercomplex functions*, International Journal of Applied Mathematics, vol. **8**:(1), pp. 85-101 (2002).

[16] MACHADO, J. M., BORGES, M. F. *Hypercomplex functions and conformal mappings*, International Journal of Applied Mathematics, vol. **9**:(1), pp. 27-38 (2002).

[17] MUNKRES, James R., *Topology: a first course*, Prentice-Hall, Inc, Engleewood Cliffs, New Jersey, 1975.

[18] NAKAHARA, Mikio, *Geometry, topology and physics*, Institute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia, 1990.

[19] THORPE, John A., *Elementary topics in differential geometry*, Springer-Verlag New York Inc., 1979.