O PAPEL DAS TECNOLOGIAS INFORMÁTICAS NA INVESTIGAÇÃO DO CONCEITO DE SOMA DE RIEMANN

Ricardo Scucuglia (The University of Western Ontario – Canada, CAPES, GPIMEM)

Andriceli Richit (Unesp/Rio Claro, SP)

Eixo temático: 10 - Tecnologias de informação e comunicação - TIC no processo de ensinar e aprender e na formação docente.

Introdução e Objetivos

Neste artigo nós compramos e contrastamos dois estudos nos quais estudantes e professores investigaram Soma de Riemann utilizando tecnologias informáticas (SCUCUGLIA, 2006; RICHIT, 2010). Resumidamente, Scucuglia (2006) conduziu experimentos de ensino com duplas de estudantes de graduação em matemática (licenciandos) para introduzir o teorema fundamental do cálculo através da experimentação com calculadoras gráficas. Richit (2010) conduziu um curso online para professores de Cálculo para introduzir atividades investigativas a partir do uso do software GeoGebra.

Primeiramente, vamos definir Soma de Riemann. Seja $f : \Re_+ \bullet \Re$ uma função contínua definida em um intervalo [a, b] e seja P = { x_0 , x_1, … x_n} um conjunto finito de pontos tais que $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. A Soma de Riemann de f sobre [a, b] com relação a partição P é dada por $S = \sum_{i=1}^{n} f(y_i)(x_i - x_{i-1})$, onde y_i é um ponto arbitrário do intervalo[$x_{i\bullet 1}$, x_i]. Geometricamente, utiliza-se Soma de Riemann para calcular o valor da área de uma região R limitada pela curva y = f(x), pelo eixo-x, e pelas retas x = a e x = b. Pode-se calcular uma aproximação, por exemplo, a partir de retângulos de mesma base e altura $y = f(y_i)$.

Um dos aspectos mais importantes de nossa discussão neste artigo diz respeito ao processo de "escolha" do ponto arbitrário y_i de cada partição no cálculo da Soma de Riemann. Nós enfatizamos nesta discussão questões sobre ensino e aprendizagem matemática, bem como sobre formação de professores. Por um lado, pode-se considerar o supremo e o ínfimo de cada sub-intervalo. Neste caso, trabalha-se com somas à direita e somas à esquerda. Por outro lado, pode-se considerar o ponto y_i que determina, através da altura f (y_i), se os retângulos estão abaixo da curva (y_i é o ponto de mínimo local) ou se os retângulos estão acima da curva (y_i é o ponto de máximo local). O teorema do valor extremo garante a existência destes pontos em [$x_{i\bullet 1}$, x_i]. Neste caso, trabalha-se com somas inferiores e somas superiores. Além disso, existe a possibilidade de se considerar tanto "pontos médios do intervalo" (isto é, $y_i = |x_i - x_{i-1}|/2$) como uma soma a partir de trapézios.

Estas variedades de opções e abordagens têm um impacto sobre ambos (a) os modos como estudantes e professores de Cálculo entendem Soma de Riemann e (b) o modo como as tecnologias da informação são criadas (o modo como a interface é construída). Neste artigo, nós apresentamos uma interlocução entre (a) e (b) considerando parte dos resultados emergentes em nossas pesquisas de mestrado (SCUCUGLIA, 2006; RICHIT, 2010). Em síntese, nós enfatizamos questões sobre o pensamento matemático de estudantes e professores com tecnologias, sugerindo que o design dos programas utilizados oferece meios específicos para a produção de significados e conhecimentos considerando a investigação do conceito de Soma de Riemann.

Quadro Teórico

Existe um denso mosaico de estudos que tratam de questões sobre ensino e aprendizagem de Cálculo com tecnologias (CONFREY; SMITH, 1992; KAPUT, 1992; TAKK, 1994). Desde os anos 1990's, calculadoras gráficas e CAS (Computer Algrebra Systems) tem se popularizado enquando tecnologias da informação no âmbito da educação. Recentemente, ferramentas online tem também se tornado atores neste cenário, e os estudos vem se multiplicando. Nós vemos como um desafio apresentar um "estado da arte" sobre esta temática. Mesmo se limitarmos nosso foco especificamente a questão do ensino e aprendizagem de Soma de Riemann com tecnologias, nós encontramos um grande número de estudos (e.g., HEID, 1988; DUBINSKY, SCHWINGENDORF, MATHEUS, 1995; GUYER, 2008).

Neste contexto, nós consideramos as tecnologias informáticas como atores no processo de aprendizagem matemática (SCUCUGLIA, 2008). Lévy (1993) não vê a tecnologia simplesmente como uma ferramenta usada por humanos, mas como um componente integral da *ecologia cognitiva*. Lévy (193) enfatiza as dimensões tecnológicas e coletivas da cognição. Ainda, Lévy (1998) afirma que "nós, seres humanos, jamais pensamos sozinhos ou sem ferramentas. As instituições, as línguas, os sistemas de signos, as técnicas de comunicação, de representação e de registro informam profundamente nossas atividades cognitivas" (p. 95). Lévy (1993) usa o termo *coletivos pensantes* para discutir a colaboração entre atores humanos e não-humanos na ecologia cognitiva. Este mesmo autor argumenta que coletivos pensantes formados por humanos-tecnologias constituem uma *inteligência coletiva* na ecologia cognitiva.

Papert (1980) propõe o construcionismo como uma teoria de aprendizagem destacando o impacto de materiais culturais (como os programas de computador) na cognição de estudantes. Por um lado, Papert utiliza o modelo Piagetiano de "crianças como construtoras de suas próprias estruturas cognitivas" (p. 7). Por outro lado, Papert considera os computadores, lápis e papel, calculadoras, materiais manipulativos, e outras tecnologias como objetos-culturais-para-se-pensar-com, isto é, como artefatos que (re)organizam o pensamento matemático (SCUCUGLIA, 2010).

Borba e Villarreal (2005) argumentam que as tecnologias não são neutras na produção de conhecimentos matemáticos. Assim como Lévy (1993), Borba e Villarreal não consideram uma separação ou uma dicotomia entre sujeito e objeto em termos de cognição. As mídias são atores que (re)organizam o pensamento matemático. Borba e Villarreal propõem a noção de seres-humanos-com-mídias como uma metáfora para teorizar a moldagem cognitiva recíproca entre humanos e tecnologias considerando a produção de conhecimentos matemáticos.

Neste artigo, nós revisitamos nossos dados de pesquisa (SCUCUGLIA, 2006; RICHIT, 2010) tendo agora como lentes teóricas as noções de coletivos pensantes (LÉVY, 1993), construcionismo (PAPERT, 1980) e seres-humanos-com-mídias (BORBA; VILLARREAL, 2005). Estas perspectivas nos ajudarão a interpretar a produção de significados dentro dos cenários pedagógicos de nossas pesquisas. Enfatizaremos, portanto, o papel das tecnologias informáticas, como elas podem delinear a produção de conhecimentos e (re)organizar o pensamento matemático.

Metodologia

Neste artigo nós comparamos e contrastamos parte dos resultados de nossas pesquisas. Ambos os estudos foram conduzidos dentro de paradigmas da pesquisa qualitativa (DENZIN; LINCOLN, 2005).

Scucuglia (2006) conduziu quatro sessões de experimentos de ensino (STEFFE; THOMPSON, 2000) com duração de duas horas cada uma. Participaram das sessões três duplas de estudantes do primeiro ano da graduação em matemática da Universidade Estadual Paulista (Unesp, campus de Rio Claro, SP). Todas as sessões foram gravadas em vídeo e o pesquisador também elaborou notas de campo. Scucuglia (2006) utilizou o modelo analítico proposto por Powell, Francisco e Maher (2004) para analisar as gravações em vídeo. Este modelo é composto pelos seguintes procedimentos não-lineares: observação e descrição, indentificação de momentos críticos, transcrição, codificação, construção de episódios, e composição da narrativa.

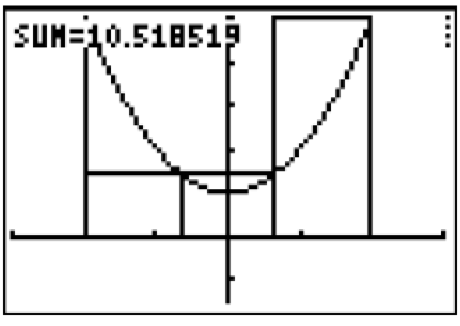
Richit (2010), a partir de sua colaboração com duas professoras do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Unesp de Rio Claro, conduziu um curso de extensão online (quatorze sessões) oferecido à dezesseis professores de Cálculo de diversos estados brasileiros e de outros países. Richit (2010) conduziu uma análise de conteúdos a partir de (a) registros de sessões de chats (síncronas) e fóruns (assíncronas); (b) anotações criadas pelos professores; (c) notas de campo dos pesquisadores e (d) projeto final dos professores. Em seu estudo, Richit (2010) discutiu questões sobre formação de professores enfatizando a noção de *conhecimento da prática* de professores de matemática proposta por Cochran-Smith e Lytle (1999). Baseada em sua análise, Richit (2010) sugeriu que o curso online contribuiu (1) para que os professores re-interpretassem conceitos de Cálculo com o software GeoGebra e (2) para que se formasse um lócus de discussão pedagógica envolvendo Cálculo e o uso de tecnologias informáticas, contribuindo com a construção do *conhecimento da prática* dos professores.

Neste artigo, nós utilizanos a noção de *estudo de casos* (STAKE, 2005) para apresentar dois episódios (um proveniente de cada pesquisa) que consideramos pertinentes a partir da perspectiva teórica que apresentamos.

Resultados e Discussão

Primeiro Episódio. Scucuglia (2006) propos aos estudantes explorarem uma atividade baseada no uso de um programa da Calculadora TI-83chamado AREA. Os estudantes foram engajados em uma investigação que visava estimar o valor da área da região delimitada pelo eixo-x e pela curva da função $f(x) = x^2 + 1$ no intervalo [-2; 2]. Primeiramente, os estudantes selecionaram a opção “retângulo superior” no programa AREA, considerando N = 3. O AREA exibiu a seguinte representação gráfica (Figura 1):

Figura 1. Programa AREA: “Retângulo superior”.



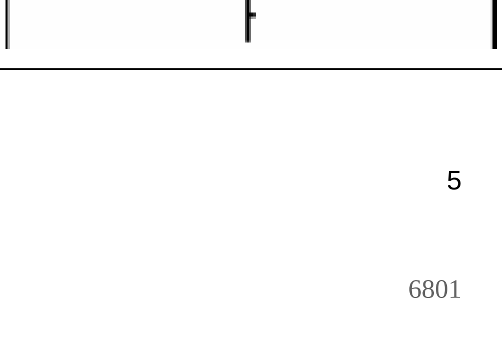
As duplas de estudantes ficaram surpresas com a representação visualizada. Um dos estudantes disse: “Há tanto retângulos superiores como inferiores. O primeiro é inferior, mas o segundo e terceiro são superiores”. Vemos então, que os estudantes estavam considerando a posição de cada retângulo em relação a curva $f(x) = x^2 + 1$, ou seja, se o retângulo se localizava acima ou abaixo da curva.

Buscando viabilizar possibilidades para que estudantes-com-calculadoras (BORBA; VILLARREAL, 2005) se engajassem em um processo de pensar-com-o-AREA (PAPERT, 1980), Scucuglia direcionou o foco dos estudantes aos sub-intervalos, isto é, um enfoque pautado na visualização envolvendo a relação entre a altura e a base de cada retângulo, principalmente com relação ao ponto y_i de cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Os estudantes então conjecturaram que, para o programa AREA, “retângulo superior” não significava “retângulos acima da curva da função”. Significava que “a altura dos retângulos eram determinadas pelo supremo”. Scucuglia também buscou deixar claro aos estudantes que, na realidade, os livros de Cálculo utilizam o termo *soma a direita* para descrever esse tipo de soma que o AREA se refere como “retângulo superior”. Ou seja, os pontos “a direita de cada sub-intervalo” (os supremos) determinam a *soma a direita*.

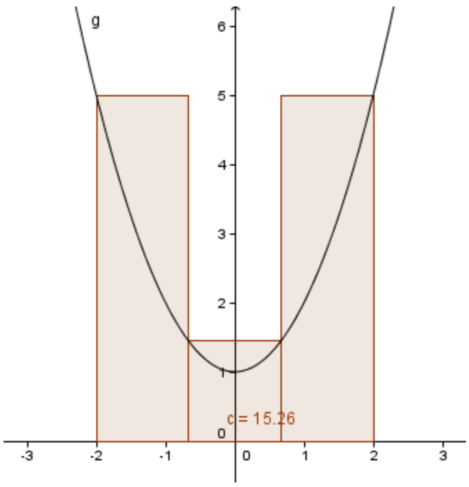
Após a experimentação e visualização considerando-se “retângulos inferiores” (ver Figura 2), os estudantes também relacionaram o tipo de aproximações aos intervalos nos quais a função é crescente ou decrescente. Os estudantes claramente expressaram conjecturas como: “usando ‘retângulos inferiores’ com o AREA, se a curva for descrescente, então o retângulo estará acima da curva. Se a curva for crescente, o retângulo estará abaixo da curva”. Por fim, os estudantes concordaram que os termos *soma a direita* e *soma a esquerda* seriam mais apropriados para descrever este tipo de soma realizada pelo AREA. Os termos “retângulo superior” e “retângulo inferior” podem condicionar confusões conceituais no processo investigativo.

Figura 2. Programa AREA: “Retângulos Inferiores”



Segundo Episódio. Richit (2010) propôs uma investigação similar a professores de Cálculo, mas considerando a utilização do software GeoGebra. Através de interações síncronas de chat utilizando o ambiente virtual (TelEduc), os professores discutiram possíveis significados para o termo *soma superior* quando investigaram o conceito de Soma de Riemann. Pensando-com-o-GeoGebra, os professores conjecturaram que o termo soma superior se refere àqueles retângulos acima da curva, ou seja, os pontos y_i de cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, que determinam a altura de cada retângulo, são pontos de *máximo local* (ver Figura 3).

Figura 3. *GeoGebra*. Soma Superior.



Através das discussões via chat, professores e instrutores discutiram um paralelo entre *soma superior* e *soma a direita* baseados no estudo de Scucuglia (2006), visto que este estudo era uma das referências para discussão no curso online. Inicialmente, um dos professores sugeriu que o design do programa AREA seria limitado em comparação ao GeoGebra.

> *Professor: Sim, fiz o teste, no Geogebra: somainferior, no intervalo de -4 a 4. Na parte decrescente os rectângulos tem altura à direita, na parte crescente os rectângulos tem altura à esquerda. Para dizer o programa já dá conta disso. Provavelmente a calculadora não tem essa opção por digo seja o problema de eficiência da calculadora.*

Em contraste, outro professor sugeriu que soma superior e soma inferior executada pelo GeoGebra não seriam abordagens tradicionais no ensino e aprendizagem de Cálculo.

> *Professor: Mas a soma inferior que fazemos usualmente não é essa que o geogebra faz. Porque usamos sempre o mesmo extremo. Se começar com o esquerdo então faz tudo com o esquerdo. Não misturamos como ocorre no GeoGebra.*

Os instrutores buscaram esclarecer esta questão proposta pelo professor. Eles argumentaram que o conceito de Soma de Riemann toma um ponto y_i *arbitrário* no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Ou seja, os instrutores buscaram deixar claro que *soma superior* e *soma inferior* estão relacionadas a y_i ser ponto de máximo ou mínimo local, e que soma a esquerda e soma a direita estão relacionadas a y_i ser ínfimo ou extremo de cada sub-intervalo. No entanto, professores e instrutores concordaram que muitos livros de introdução ao Cálculo Diferencial e Integral fazem uso apenas das somas a direita ou das somas superiores, o que pode causar confusões conceituais com relação a y_i ser um ponto arbitrário nos sub-intervalos $[x_{i-1}, x_i]$. Portanto, o GeoGebra não apresenta erro conceitual algum neste sentido.

Além disso, por um lado, alguns professores argumentaram que as Somas de Riemann são ordinariamente utilizadas para calcular integrais definidas considerando-se $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(y_i)(x_i - x_{i-1})$. Eles disseram: "o tipo de aproximação não importa, na verdade, pois o objetivo principal é calcular a integral". Por outro lado, os instrutores e alguns professores enfatizaram que "é muito importante investigar o processo de soma por que isto revela tanto detalhes sobre a aprendizagem do conceito como links a outros teoremas e conceitos". Portanto, tecnologias informáticas e colaboração online foram significantes na superação de algumas confusões conceituais de professores e na ampliação sobre a reflexão do *conhecimento da prática* destes professores.

Conclusões

Neste artigo nós sugerimos que o design das tecnologias informáticas tem uma influência significante sobre o pensamento matemático (BORBA, VILLARREAL, 2005). Nós apresentamos dois episódios nos quais estudantes e professores discutiram Soma de Riemann através de um processo investigativo. Tanto o design do programa AREA da calculadora gráfica como o design do GeoGebra tiveram um influência direta sobre o processo de comunicação e aprendizagem dos estudantes e professores. Pensando-com-tecnologias, estudantes e professores coordenaram vários tipos de representações e isto foi fundamental para produção de significados e conhecimentos.

No estudo de Scucuglia (2006), o processo de investigação de Soma de Riemann foi muito significante para que os estudantes pudessem entender o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC). A natureza da relação entre integração e derivação está diretamente associada a Soma de Riemann. Além disso, visualização e experimentação-com-tecnologias foram processos importantes. Pensando-com-calculadoras-gráficas, estudantes se familiarizaram com símbolos e notações matemáticas, coordenaram representações e visualizaram aspectos dinâmicos envolvendo uma abordagem gráfica e algébrica do conceito de Soma de Riemann. Esta familiarização e coordenação de representações foi relevante para a investigação e demonstração do TFC realizada pelos estudantes. Nós sugerimos que a experimentação-com-tecnologias contribui para o entendimento dos estudantes sobre as provas. Inicialmente, Scucuglia propôs um modo simples de se demonstrar o TFC. Então, gradualmente, os estudantes foram investigando outros modos de se provar o TFC, focando em abordagens matemáticas mais rigorosas. Ao escrever uma demonstração inicial para o TFC nas sessões de experimentos de ensino, os símbolos visualizados na calculadora gráfica foram usados e o seguinte diálogo ocorreu:

> *Estudante: Que legal! Assim é muito mais fácil! Esta é a primeira vez que eu provo algo.*
>
> *Estudante: A demonstração que nós vimos antes[em nossa aula de Cálculo] não era assim. Esta demonstração é mais fácil de entender.*

A partir do estudo de Richit (2010), nós sugerimos que professores reconhecem que o uso de software e ambientes virtuais são ferramentas importantes para a interação entre professores e para a aprendizagem de estudantes. Para os professores participantes do curso online aqui discutido, as tecnologias informáticas possibilitam diferentes representações matemáticas, as quais são fundamentais para compreensão de conceitos. Então, investigando conceitos de Cálculo com tecnologias é um aspecto importante do *conhecimento da prática* dos professores (COCHRAN-SMITH; LYTLE, 1999). Utilizando o fórum de discussão do ambiente online, um dos professores disse:

Professor: Vejo as Tecnologias, em especial os softwares, como ferramentas que podem se tornar instrumentos de aprendizagem. Dessa forma, se tornam mais uma estratégia que pode ser utilizada pelo professor em seu trabalho diário. E sendo esse trabalho bem planejado com o uso das tecnologias poderá auxiliar no desenvolvimento da aprendizagem e no interesse do estudante (Fórum de Discussão).

Finalmente, nós argumentamos que os termos “retângulo superior” e “retângulo inferior” não são apropriados na investigação do conceito de Soma de Riemann. Nós sugerimos que o design do programa AREA poderia ser re-configurado utilizando os termos *soma a direita* e *soma a esquerda*. Nós acreditamos que o design do GeoGebra é apropriado para a investigação do conceito de Soma de Riemann em termos de *soma superior* e *soma inferior*. Entretanto, nós sugerimos que professores podem explorar e enfatizar a noção de que, investigando Soma de Riemann, pode-se considerar um ponto y_i arbitrário nos sub-intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, não somente os supremos, os ínfimos, os máximos e mínimos locais. Baseado nos casos apresentados, nós sugerimos que o processo de experimentação-com-tecnologias é significante para o aprendizado de estudantes e para que professores re-organizem algumas confusões conceituais.

Referências

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking.* New York: Springer, 2005.

COCHRAN-SMITH, M.; LYTLE, S. Relationship of Knowledge and Practice: Teacher Learning in Communities. In A. IRAN-NEJAD & C. D. PEARSON (Orgs.), *Review of research in education* (Vol. 24, pp. 249-306). Washington, DC: American Educational Research Association, 1999.

CONFREY, J.; SMITH, E. Function Probe: Multi-Representational Software for Learning about Functions. *New York State Association for Computers and Technology in Education, 6*,p. 60-64, 1992.

DENZIN, N.; LINCOLN, Y. Introduction: the discipline and practice of qualitative research. In N.K. Denzin, & Y.S Lincoln, (Orgs). *The Sage Handbook of Qualitative Research*. (pp.1-32). 3ed. Thousand Oaks, CA: Sage, 2005.

DUBINSKY, E.; SCHWINGENDORF, K. E.; MATHEWS, D. M. *Calculus, Concepts & Computers* (2nd edition). New York: McGraw-Hill, 1995.

GÜYER, T. Computer Algebra Systems as the Mathematics Teaching Tool. *World Applied Sciences Journal,* v. 3, n.1, p. 132-139, 2008.

HEID, M. K. Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. *Journal for Research in Mathematics Education,* v. 19, n.1, p.3-25, 1988.

KAPUT, J. Technology and mathematics education. In D. GROUWS (Org.), *A handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan, 1992.

LÉVY, P. *Tecnologias da Inteligência: O futuro do pensamento na era da informática*. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.

LÉVY, P. *Becoming Virtual: Reality in the Digital Age*. New York: Plenum Press, 1998.

PAPERT, S. *Mindstorms. Children, Computers and Powerful Ideas.* New York: Basic books, 1980.

POWELL, A. B., FRANCISCO, J., & MAHER, C. Uma abordagem à análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento das idéias matemáticas e do raciocínio de estudantes, v. 21, p. 81–140, 2004.

RICHIT, Andriceli. *Aspectos Conceituais e Instrumentais do Conhecimento da Prática do Professor de Cálculo Diferencial e Integral no Contexto das Tecnologias Digitais.* 243 f. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010.

SCUCUGLIA, R. *A Investigação do Teorema Fundamental do Cálculo com Calculadoras Gráficas.* 145 f. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

STEFFE, L. P.; THOMPSON, P. W. Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. LESH & A. E. KELLY (Orgs.), *Research design in mathematics and science education*. (pp. 267-307). The Netherlands: Kluwer, 2000.

TALL, D. Computer environments for the learning of mathematics. In BIEHLER ROLF, et.al, (Org.). *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. London: Kluwer Academic Publishers, 1994.