

VANESSA BERTONI

UMA CLASSE DE POLINÔMIOS UNIVALENTES



1910001148



Uma Classe de Polinômios Univalentes

VANESSA BERTONI

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga



T. 1148/03

São José do Rio Preto

14 de fevereiro de 2003



518.7
B547C

10104020

Uma Classe de Polinômios Univalentes

VANESSA BERTONI

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática

Bertoni, Vanessa.

Uma classe de polinômios univalentes / Vanessa Bertoni. – São José do Rio Preto : [s.n.], 2003
79 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Alagacone Sri Ranga

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Análise numérica. 2. Funções univalentes. 3. Polinômios univalentes. I. Ranga, Alagacone Sri. II. Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 517.53



“O mais importante da vida não é a situação em que estamos, mas a
direção para a qual nos movemos.”

Oliver Wendell Holmes



Agradecimentos

A todos os professores e funcionários, que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho. Em especial, agradeço ao Prof. Dr. Alagooze Sri Ranga pela orientação e paciência.

A todos os amigos e amigas pós-graduandos, pela força e companheirismo.

A toda minha família, pelo amor e incentivo.

A meus pais,
Hugo e Adolfinia.

Aos meus irmãos,
Eduardo, Isabel e Raul.

A todos que amo.
Dedico.

Abstract

Agradecimentos

A todos os professores e funcionários, que de alguma forma contribuíram
para a realização deste trabalho. Em especial, agradeço
ao Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga
pela orientação e paciência.

A todos os amigos e amigas pós-graduandos,
pela força e companheirismo.

A toda minha família,
pelo amor e incentivo.

Ao CNPq, pelo auxílio financeiro.



Abstract

In this dissertation we study some general properties of univalent functions and, in more details, a specific class of algebraic univalent polynomials. We solve, at least asymptotically, two interesting extremal problems for the polynomials under discussion. The first of them describes the largest possible area surrounded by the image of the unit disc under the transformations via the polynomials from the class under consideration. The solution of the second extremal problem shows that the univalent polynomials obey, in an asymptotic sense, the celebrated Koebe $1/4$ theorem. Recall that the latter states that all the images of the unit disc, by all properly normalized univalent function, contain the disc centered at the origin, with radius $1/4$, and that this is the largest possible disc with this property. Finally we discuss some properties of the zeros of these univalent polynomials.



Resumo

Nesta dissertação, estudamos algumas propriedades gerais de funções univalentes e, em mais detalhes, uma classe específica de polinômios algébricos univalentes. Resolvemos, pelo menos assintoticamente, dois problemas extremos para os polinômios em questão. O primeiro desses problemas descreve a maior área possível cercada pela imagem do disco unitário através dos polinômios da classe considerada. A solução do segundo problema extremo mostra que os polinômios satisfazem, num sentido assintótico, o famoso Teorema $1/4$ de Koebe. Vale lembrar que este teorema afirma que todas as imagens do disco unitário, por todas as funções univalentes adequadamente normalizadas, contém o disco centrado na origem, com raio $1/4$, e que esse é o maior disco possível com esta propriedade. Finalmente, discutimos algumas propriedades dos zeros desses polinômios.

2.4 Singularidade	27
2.4.1 Zeros	27
2.4.2 Teorema de Leiman e Classificação das singularidades	28
3 Funções Univalentes	30
3.1 Propriedades das funções univalentes	31
4 Uma Classe de Polinômios Univalentes	42
4.1 Classe $\mathcal{Q}_n$	42
4.2 Propriedades de $P(z, n, \gamma)$	48
4.3 Propriedades Extremas	53
5 Problemas Extremos	58
5.1 Os polinômios com maior área	58



Sumário

1	Introdução	1
2	Preliminares	12
2.1	Domínios e caminhos no plano complexo	12
2.2	Funções Analíticas	15
2.2.1	Funções Complexas, Continuidade e Diferenciabilidade . .	15
2.2.2	Funções Analíticas	17
2.2.3	Série de Potências	18
2.2.4	Exponencial, Logaritmo e Potências arbitrárias	20
2.3	Teoria de Cauchy	24
2.3.1	Integração, Teoremas de Cauchy	24
2.4	Singularidade	27
2.4.1	Zeros	27
2.4.2	Série de Laurent e Classificação das singularidades	28
3	Funções Univalentes	30
3.1	Propriedades das funções univalentes	31
4	Uma Classe de Polinômios Univalentes	42
4.1	Classe $\mathcal{Q}_n$	42
4.2	Propriedades de $P(z; n, j)$	48
4.3	Propriedades Extremas	53
5	Problemas Extremos	58
5.1	Os polinômios com maior área	58



5.2	Menor Raio	67
5.3	Desigualdade sobre os zeros dos polinômios em $\mathcal{Q}_n$	73
Referências Bibliográficas		78

Capítulo 1

Introdução

Uma função f é univalente no disco unitário $D = \{z : |z| < 1\}$ ou, simplesmente, univalente se f é analítica em D e para todo $w \in f(D)$, onde $f(D) = \{f(z) : z \in D\}$, existe um único ponto z em D tal que $w = f(z)$. Formalmente, a propriedade anterior pode ser representada como segue: Se $f(z_1) = f(z_2)$ para $z_1, z_2 \in D$, então $z_1 = z_2$. Obviamente, sempre que $f(z)$ é univalente, então $\alpha + f(z)$ e $\beta f(z)$ também o serão para quaisquer constantes não nulas α e β . Vamos considerar as funções univalentes cuja expansão em série de Maclaurin tem a forma

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots, \quad (1.1)$$

e a classe de todas as funções univalentes em D que possuem a forma acima denotaremos por $\mathcal{L}$.

Em geral, o estudo das funções univalentes e suas propriedades extremas tornaram-se o objeto de pesquisa de muitos matemáticos famosos durante todo o século XX. Sem dúvida, esta foi a subárea mais fértil da análise complexa, pois, principalmente, a uma conjectura extremamente desafiante que foi proposta por Bieberbach em 1914. Essa conjectura afirma que se $f \in \mathcal{L}$, então

$$|a_n| \leq n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (1.2)$$

A beleza desta problemática está no fato de que existe uma função univalente unival que é extrema para todo n , isto é, seus coeficientes tornam todas as desigualdades da conjectura (1.2) em igualdades. O exemplo é dado pela função de

Capítulo 1

Introdução

Uma função f é univalente no disco unitário $D = \{z : |z| < 1\}$ ou, simplesmente, univalente se f é analítica em D e para todo $w \in f(D)$, onde $f(D) = \{f(z) : z \in D\}$, existe um único ponto z em D tal que $w = f(z)$. Formalmente, a propriedade anterior pode ser representada como segue : Se $f(z_1) = f(z_2)$ para $z_1, z_2 \in D$, então $z_1 = z_2$. Obviamente, sempre que $f(z)$ é univalente, então $\alpha + f(z)$ e $\beta f(z)$ também o serão para quaisquer constantes não nulas α e β . Vamos considerar as funções univalentes cuja expansão em série de Maclaurin tem a forma

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots, \quad (1.1)$$

e a classe de todas as funções univalentes em D que possuem a forma acima denotaremos por $\mathcal{U}$.

Em geral, o estudo das funções univalentes e suas propriedades extremas tornaram-se o objeto de pesquisa de muitos matemáticos famosos durante todo o século XX. Sem dúvida, esta foi a subárea mais fértil da análise complexa devido, principalmente, a uma conjectura extremamente desafiante que foi proposta por Bieberbach em 1914. Esta conjectura afirma que se $f \in \mathcal{U}$, então

$$|a_n| \leq n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (1.2)$$

A beleza deste problema está no fato de que existe uma função univalente universal que é extrema para todo n , isto é, seus coeficientes tornam todas as desigualdades da conjectura (1.2) em igualdades. O exemplo é dado pela função de



Koebe

$$k(z) := \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k z^k. \quad (1.3)$$

Em 1984, Louis de Branges da Universidade de Purdue apresentou um resultado que surpreendeu o mundo da matemática, fornecendo uma demonstração fascinante da conjectura de Bieberbach. A idéia ingênua foi estender o raciocínio de Loewner, que foi usado muito anteriormente para a demonstração da desigualdade $|a_4| \leq 4$. L. de Branges utilizou uma teoria de Caratheodory, reduzindo o problema a uma seqüência de desigualdades para alguns polinômios específicos. Depois de uma pesquisa para verificação numérica da veracidade destas desigualdades, executada pela equipe liderada por Walter Gautschi, e uma consulta ao líder especialista em funções especiais Richard Askey, descobriram que as desigualdades não eram nada mais que certas afirmações sobre a positividade de somas de polinômios de Jacobi e estas já haviam sido provadas antes, em 1976, por Askey e Gasper [3]. A fascinante história desta descoberta matemática foi descrita detalhadamente pelos participantes no livro “The Bieberbach Conjecture: Proceedings of the Symposium on the Occasion of the Proof”, (A. Baernstein II et al., Eds.), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986. O resultado de L. de Branges foi publicado em [5] e a demonstração da conjectura de Bieberbach foi reconhecida pela comunidade matemática como a contribuição mais importante desta ciência durante os anos 80, no século XX.

Contudo, durante todo o tempo de procura da “demonstração”, que durou por volta de 70 anos, vários problemas extremo semelhantes envolvendo funções univalentes foram investigados. Um dos ramos que atraíram o interesse de muitos matemáticos foi a subclasse de polinômios algébricos univalentes de um certo grau n . Ao que tudo indica, a primeira contribuição neste sentido foi dada por Alexander [1] em 1915, que provou que os polinômios

$$\sum_{k=1}^n a_k \frac{z^k}{k}$$

e

$$\sum_{k=1}^n a_{2k-1} \frac{z^{2k-1}}{2k-1}$$

são univalentes no disco unitário do plano complexo com coeficientes satisfazendo $a_1 \geq \dots \geq a_n > 0$.

Em 1931, Dieudonné [7] revelou a conexão entre o resultado dado por Alexander e uma desigualdade para certos polinômios trigonométricos, devido a Fejér, Jackson e Gronwall. Ele provou que o polinômio

$$\sum_{k=1}^n a_k z^k$$

é univalente no disco unitário se, e somente se,

$$\sum_{k=1}^n a_k z^{k-1} \frac{\sin k\theta}{\sin \theta} \neq 0, \quad \text{para } |z| < 1, 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Em dois artigos consecutivos, [8] de 1934 e [9] de 1936, Fejér estendeu as idéias de Alexander iniciando o estudo da classe de funções denominadas “verticalmente convexas”. A abordagem dada por ele forneceu uma conexão a mais entre polinômios trigonométricos não negativos e polinômios algébricos univalentes. Esta idéia finalizada surgiu no artigo de Fejér e Szegő [10] em 1951. O principal resultado apresentado neste artigo foi que uma função $f(z) = u(z) + iv(z)$, cuja expansão em série tem coeficientes de Maclaurin reais, é univalente no disco unitário se $\partial u(\theta)/\partial \theta \leq 0$ para $0 \leq \theta \leq \pi$.

Outro resultado que relaciona polinômios trigonométricos e funções univalentes foi obtido por Pólya e Schoenberg [15] em 1958. Para formularmos o resultado, lembremos que a função $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ é chamada convexa no disco unitário $D = \{z : |z| < 1\}$ se a imagem de D através de $f(z)$ é um conjunto convexo. Pólya e Schoenberg provaram que se $f(z)$ é univalente e convexa no disco D , então, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, o polinômio

$$p_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_n(\theta - \xi) f(re^{i\xi}) d\xi, \quad z = re^{i\theta},$$

é também convexo, onde

$$V_n(\theta) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n!)^2}{(n-k)!(n+k)!} \cos(k\theta) \geq 0$$

é o núcleo de de la Vallée Poussin.

Referimo-nos a uma recente e minuciosa visão de Gluchoff e Hartmann [11] para estes e outros resultados interessantes na interação de funções univalentes e séries trigonométricas não-negativas.

O resultado de Fejér e Szegő dado acima pode ser reformulado como segue:

Teorema 1.1. *Se os polinômios senos com coeficientes reais*

$$\sin \theta + b_2 \sin 2\theta + \cdots + b_n \sin n\theta$$

são não negativos em $[0, \pi]$, então o polinômio

$$z + \frac{b_2}{2}z^2 + \cdots + \frac{b_n}{n}z^n$$

é univalente em D .

Tendo em mente a importância do Teorema de Bieberbach-de Branges, enquanto ainda era a conjectura de Bieberbach, muitos autores tentaram estabelecer um limite superior para os coeficientes dos polinômios univalentes de grau n . Surpreendentemente, estes problemas ainda não foram resolvidos na sua totalidade. Tudo indica que o primeiro resultado interessante desta natureza foi obtido por Dieudonné [7]. Ele encontrou alguns limites superiores para o módulo dos coeficientes dos polinômios da classe $\mathcal{U}_n$ definida por $\mathcal{U}_n = \{p_n \in \mathcal{U} : p_n(z) = z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n, a_k \in \mathbb{C}\}$. Entre todas as desigualdades, a mais interessante é $|a_n| \leq 1/n$ para o módulo do maior coeficiente. É importante ressaltar que o limite superior para esta desigualdade é obtido para o último coeficiente de vários polinômios univalentes.

Nesta dissertação, discutimos em detalhes uma subclasse de polinômios algébricos, para os quais os maiores coeficientes têm o maior módulo possível. Em outras palavras, consideramos polinômios com $|a_n| = 1/n$. Desde que a maioria das propriedades em que estamos interessados são invariantes com respeito a rotação e a função de Koebe tem de fato somente coeficientes reais, vamos exigir uma propriedade adicional para a classe dos polinômios considerados. Vamos restringir a classe de polinômios impondo que os coeficientes dos mesmos sejam

reais. Resumindo, estaremos interessados na subclasse $\mathcal{Q}_n$ de $\mathcal{U}_n$, definida por

$$\mathcal{Q}_n = \{ q_n(z) \in \mathcal{U}_n : q_n(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n, \ a_k \in \mathbb{R}, \ k = 2, \dots, n, \ |a_n| = 1/n \}.$$

Como observaremos durante a nossa apresentação, as subclasses

$$\mathcal{Q}_n^+ = \{ q_n \in \mathcal{Q}_n : a_n = 1/n \}$$

e

$$\mathcal{Q}_n^- = \{ q_n \in \mathcal{Q}_n : a_n = -1/n \},$$

do mesmo modo que,

$$\mathcal{Q}_n^1 = \{ q_n \in \mathcal{Q}_n : n \text{ é par ou } n \text{ é ímpar e } q_n \in \mathcal{Q}_n^+ \}$$

e

$$\mathcal{Q}_n^2 = \{ q_n \in \mathcal{Q}_n : n \text{ é ímpar e } q_n \in \mathcal{Q}_n^- \},$$

farão papéis importantes na solução dos problemas que vamos investigar. Nesses problemas, alguns polinômios pertencentes à classe $\mathcal{Q}_n$ serão fundamentais. Vamos definir esses polinômios para n fixo,

$$A_{k,j} = \frac{n-k+1}{n} \frac{\sin kj\pi/(n+1)}{\sin j\pi/(n+1)}, \quad j, k = 1, 2, \dots, n, \quad (1.4)$$

$$P(z) = P(z; n, j) = \sum_{k=1}^n A_{k,j} z^k \quad (1.5)$$

e, estudaremos detalhadamente suas propriedades no Capítulo 4.

Com exceção do estudo das propriedades gerais das funções univalentes e das propriedades específicas dos polinômios de $\mathcal{Q}_n$, que é feito no terceiro e quarto capítulos, respectivamente, no Capítulo 5 resolvemos alguns problemas extremos interessantes para os polinômios pertencentes à classe citada anteriormente.

Desde que a imagem do disco unitário através de quaisquer desses polinômios é um domínio limitado no plano complexo, então a área dessa imagem é um número fixo. Denotemos por $A(p(D))$ a área da imagem de D através de $p(z)$. É interessante conhecer primeiramente qual seria a maior $A(p(D))$ possível com $p \in \mathcal{Q}_n$, e como a maior área, que depende de n , se comporta à medida que n varia. Assim, formulamos o seguinte problema.



Problema 1. Entre todos os polinômios de $\mathcal{Q}_n$, encontre aquele que descreve a maior área possível, i.e., determine $\max\{A(p(D)) : p \in \mathcal{Q}_n\}$.

Resolvemos este problema completamente mostrando que a maior área se comporta como n^2 . Este fato era esperado, pois a imagem da função univalente mais famosa é ilimitada. De fato, a imagem da função de Koebe $k(z)$ é todo o plano complexo a menos do intervalo $(-\infty, -1/4]$.

Para qualquer n inteiro e positivo, queremos determinar as quantidades

$$\bar{A}(\mathcal{Q}_n^1) = \max\{A(p(D)) : p \in \mathcal{Q}_n^1\}$$

e

$$\bar{A}(\mathcal{Q}_n^2) = \max\{A(p(D)) : p \in \mathcal{Q}_n^2\},$$

bem como encontrar os correspondentes polinômios para os quais o valor máximo da área é atingido. Nosso principal resultado baseado no Problema 1 está estabelecido no próximo teorema. Na seqüência, para formulá-lo, precisaremos de duas definições adicionais. Para todo número natural n as somas S_n e $\tilde{S}_n$ são dadas por

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin^2 k\pi/(n+1)}{k} \quad (1.6)$$

e

$$\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin^2 2k\pi/(n+1)}{k}. \quad (1.7)$$

Com a função integral cosseno $Ci(x)$ definida por

$$Ci(x) = \int_x^\infty \cos t/t \, dt$$

e $\gamma \approx 0.577216$ a constante de Euler, temos o seguinte teorema.

Teorema 1.2. Seja $n \in \mathbb{N}$. Então,

i) a maior área

$$\bar{A}(\mathcal{Q}_n^1) = \frac{\pi(n+1)^2}{n^2 \sin^2 \frac{\pi}{n+1}} \left(S_n - \frac{3}{4} \right) \quad (1.8)$$

é cercada somente pelas imagens de $P(e^{i\theta}; n, 1)$ e $P(e^{i\theta}; n, n)$.

ii) a maior área

$$\bar{A}(\mathcal{Q}_n^2) = \frac{\pi(n+1)^2}{n^2 \sin^2 \frac{2\pi}{n+1}} \left(\tilde{S}_n - \frac{3}{4} \right) \quad (1.9)$$

é cercada somente pela imagem de $P(e^{i\theta}; n, 2)$. Além disso, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, as desigualdades

$$\bar{A}(\mathcal{Q}_n^1) < \frac{(n+1)^2}{2\pi} \left(\gamma + \log(2\pi) - Ci(2\pi) - \frac{3}{2} \right) \quad (1.10)$$

e

$$\bar{A}(\mathcal{Q}_n^2) < \frac{(n+1)^2}{8\pi} \left(\gamma + \log(4\pi) - Ci(4\pi) - \frac{3}{2} \right) \quad (1.11)$$

são válidas.

Outrossim, os quocientes $\bar{A}(\mathcal{Q}_n^1)/(n+1)^2$ e $\bar{A}(\mathcal{Q}_n^2)/(n+1)^2$ convergem quando n tende a ∞ , e os limites são dados por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{A}(\mathcal{Q}_n^1)}{(n+1)^2} = \frac{1}{2\pi} \left(\gamma + \log(2\pi) - Ci(2\pi) - \frac{3}{2} \right) \approx 0.149232, \quad (1.12)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{A}(\mathcal{Q}_n^2)}{(n+1)^2} = \frac{1}{8\pi} \left(\gamma + \log(4\pi) - Ci(4\pi) - \frac{3}{2} \right) \approx 0.0642332. \quad (1.13)$$

Como já mencionamos, as razões pelas quais o problema acima é natural, é dado pelo comportamento da função de Koebe. Outro resultado muito bonito sobre as imagens das funções univalentes é o famoso Teorema 1/4 de Koebe, que afirma que a imagem do círculo unitário através de uma função univalente, da forma (1.1), sempre contém o disco de raio 1/4. Além disso, este resultado é exato, pois para a função de Koebe $k(z)$ temos que $k(-1) = -1/4$. Outra questão interessante que surge dessa ligação com o Teorema 1/4 de Koebe é dado pelo próximo problema.

Problema 2. Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ encontrar o polinômio $p_n(z) \in \mathcal{Q}_n$, para o qual o

$$\inf\{|p_n(z)| : z = e^{i\theta}, 0 \leq \theta < 2\pi\} \quad (1.14)$$

é atingido.

Obviamente os ínfimos são limitados inferiormente por 1/4. Contudo, é interessante saber se existe uma seqüência de polinômios $\{p_n(z)\}$ para os quais (1.14) tende a 1/4 quando n tende ao infinito. Nossa pesquisa mostrou que a

resposta a esta questão é afirmativa. Encontramos alguns polinômios da classe $\mathcal{Q}_n$ que satisfazem assintoticamente o Teorema 1/4 de Koebe. Antes de formular nossa contribuição sobre o Problema 2, gostaríamos de justificar o motivo pelo qual consideramos este resultado assintótico bem interessante, mesmo que a solução completa deste problema ainda não tenha sido encontrada. Considere o funcional

$$R(f) = \inf\{|f(z)| : z = e^{i\theta}, 0 \leq \theta < 2\pi\},$$

sobre a classe de todas as funções univalentes $\mathcal{U}$. Este funcional relaciona toda função univalente com o raio do maior disco que está contido completamente na imagem de D através de $f(z)$. Então, o Teorema 1/4 de Koebe é equivalente a afirmar que

$$R(\mathcal{U}) := \inf\{R(f) : f \in \mathcal{U}\} = 1/4.$$

Observe que nosso problema é considerar o mesmo funcional $R(f)$, mas quando f percorre a classe $\mathcal{U}_n$ que é muito menor que $\mathcal{U}$. Em outras palavras, queremos determinar, para todo n fixo, $n \in \mathbb{N}$, o valor de

$$R(\mathcal{U}_n) := \inf\{R(p_n) : p_n \in \mathcal{U}_n\}. \quad (1.15)$$

Obviamente, para todos os naturais n , temos que $R(\mathcal{U}_n) \geq 1/4$. Demonstramos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(\mathcal{U}_n) = 1/4$$

e este resultado chamamos de Teorema 1/4 Assintótico de Koebe. Definimos

$$R(\mathcal{Q}_n) := \inf\{R(p_n) : p_n \in \mathcal{Q}_n\}, \quad (1.16)$$

$$R(\mathcal{Q}_n^+) := \inf\{R(p_n) : p_n \in \mathcal{Q}_n^+\}, \quad (1.17)$$

e

$$R(\mathcal{Q}_n^-) := \inf\{R(p_n) : p_n \in \mathcal{Q}_n^-\}. \quad (1.18)$$

Nossa contribuição, através da solução do Problema 2, pode ser dada como segue:

Teorema 1.3. *Para todo número natural n , as desigualdades*

$$R(Q_n^+) \leq \frac{(n+1)}{4n \cos^2 \frac{\pi}{2(n+1)}} \quad (1.19)$$

e

$$R(Q_n^-) \leq \frac{(n+1)}{4n \cos^2 \frac{\pi}{n+1}} \quad (1.20)$$

são válidas.

Então, obtemos imediatamente,

Corolário 1.1. *A desigualdade*

$$R(U_n) \leq \frac{(n+1)}{4n \cos^2 \frac{\pi}{2(n+1)}} \quad (1.21)$$

é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(U_n) = 1/4. \quad (1.22)$$

As afirmações deste corolário são exatamente o Teorema 1/4 Assintótico de Koebe.

Infelizmente, não foi possível resolver rigorosamente o correspondente problema extremo de forma geral, mas uma grande quantidade de experimentos computacionais indicaram como é o comportamento dos polinômios com “menor raio”. Contudo, o intensivo trabalho computacional nos ajudou a propor uma conjectura, cuja demonstração é uma proposta para futura pesquisa.

Obviamente nenhum dos polinômios de U_n se anulam em D , exceto para o zero simples na origem. De fato, sejam $z_0 = 0, z_1, \dots, z_{n-1}$ os zeros de $p_n(z)$. Desde que $p_n(0) = 0$, $p_n(z)$ não se anula em qualquer outro ponto no disco unitário. Isto significa que $z_k \notin D$, $k = 1, \dots, n-1$. Como isto é equivalente a $|z_k| \geq 1$, então é interessante investigar a que distância da origem estarão os zeros de $p_n(z)$. Provamos algumas desigualdades simples para algumas médias dos zeros, em princípio para as médias geométrica e aritmética. Obviamente, a média aritmética dos zeros coincide com o centro de suas massas se considerarmos

os zeros de $p_n(z)$ como pontos no plano complexo com massa unitária cada. Provamos também uma desigualdade no mesmo sentido, mas para os inversos $1/z_1, \dots, 1/z_{n-1}$ dos zeros $z_1, \dots, z_{n-1}$. Algumas propriedades simples dos zeros $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ de $p'_n(z)$ são também consideradas.

Demonstramos o seguinte:

Teorema 1.4. *Seja $p_n(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$ um polinômio univalente e sejam $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ os zeros não-nulos e $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$ os zeros de $p'_n(z)$. Então, valem as seguintes desigualdades:*

$$|z_1 z_2 \dots z_{n-1}| \geq n \quad (1.23)$$

e

$$|\xi_1 \xi_2 \dots \xi_{n-1}| \geq 1. \quad (1.24)$$

Além disso, $p_n(z)$ tem pelo menos uma raiz z_k , tal que $|z_k| \geq n^{1/(n-1)}$ e $p'_n(z)$ tem pelo menos uma raiz ξ_j , tal que $|\xi_j| \geq 1$.

Vale observar que as desigualdades (1.23) e (1.24) valem para os zeros de qualquer polinômio da classe $\mathcal{U}_n$. Considerando somente a classe $\mathcal{Q}_n$ podemos obter algumas desigualdades a mais sobre os zeros dos polinômios desta classe.

Teorema 1.5. *Sejam $p_n(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n \in \mathcal{Q}_n$ e p'_n a sua derivada. Se $p_n \in \mathcal{Q}_n^1$, então as seguintes desigualdades valem*

$$|z_1 + z_2 \dots + z_{n-1}| \leq 4 \cos \frac{\pi}{n+1}, \quad (1.25)$$

$$\left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \dots + \frac{1}{z_{n-1}} \right| \leq 2 \frac{(n-1)}{n} \cos \frac{\pi}{n+1}, \quad (1.26)$$

$$|\xi_1 + \xi_2 \dots + \xi_{n-1}| \leq 4 \frac{(n-1)}{n} \cos \frac{\pi}{n+1}, \quad (1.27)$$

$$\left| \frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_2} \dots + \frac{1}{\xi_{n-1}} \right| \leq 4 \frac{(n-1)}{n} \cos \frac{\pi}{n+1}. \quad (1.28)$$

Se $p_n \in \mathcal{Q}_n^2$, então

$$|z_1 + z_2 \dots + z_{n-1}| \leq 4 \cos \frac{2\pi}{n+1}. \quad (1.29)$$

$$\left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \dots + \frac{1}{z_{n-1}} \right| \leq 2 \frac{(n-1)}{n} \cos \frac{2\pi}{n+1}, \quad (1.30)$$

$$|\xi_1 + \xi_2 \cdots + \xi_{n-1}| \leq 4 \frac{(n-1)}{n} \cos \frac{2\pi}{n+1}, \quad (1.31)$$

$$\left| \frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_2} \cdots + \frac{1}{\xi_{n-1}} \right| \leq 4 \frac{(n-1)}{n} \cos \frac{2\pi}{n+1}. \quad (1.32)$$

Além disso, as desigualdades de (1.25) a (1.28) para os zeros $z_1, \dots, z_{n-1}$ de p_n e $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ de p'_n , tornam-se igualdades somente para os zeros dos polinômios $P(z; n, 1)$ e $P(z; n, n)$ e de suas derivadas. As igualdades de (1.29) a (1.32) são atingidas somente para os zeros do polinômio $P(z; n, 2)$ e de sua derivada.

Preliminares

Neste capítulo damos algumas definições importantes da análise complexa. Para este propósito utilizamos as notações (1.7), (1.4) e (1.8).

2.1 Domínios e caminhos no plano complexo

Damos algumas definições para caracterizar os curvas no plano complexo.

Definição 2.1. Um caminho aberto em $\mathbb{C}$ é uma aplicação

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

cuja derivada satisfaz em $[a, b]$

Consideramos que este caminho é dado por $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = x(t) + iy(t)$, e a medida que t percorre $[a, b]$ o vetor $\gamma'(t)$ descreve o caminho. Os pontos $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ são chamados ponto inicial e ponto final do caminho γ , respectivamente. Se $\gamma(a) = \gamma(b)$ dizemos que o caminho é fechado.

Observamos que as definições de caminho, subentendem a noção de sentido ou orientação de percurso do caminho, mais precisamente, o caminho é percorrido do ponto inicial ao ponto final e sentido que $t \in [a, b]$. Podemos também o sentido do percurso definido e sentido reverso de γ , γ^* , por

$$\gamma^*(t) = \gamma(a+b-t), \quad a \leq t \leq b.$$

Consideremos, agora, uma classe mais ampla de caminhos em $\mathbb{C}$.

Definição 2.2. Um caminho suave por partes em $\mathbb{C}$ é uma coleção finita de caminhos suaves $\Gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\Gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{C}$, ..., $\Gamma_n : [a_n, b_n] \rightarrow \mathbb{C}$, satisfazendo $\Gamma_i(b_i) = \Gamma_{i+1}(a_{i+1})$ para $1 \leq i \leq n-1$.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo daremos algumas definições importantes da análise complexa. Para este propósito utilizamos as referências [12], [14] e [18].

2.1 Domínios e caminhos no plano complexo

Daremos algumas definições para caracterizar as curvas no plano complexo.

Definição 2.1. Um caminho suave em $\mathbb{C}$ é uma aplicação

$$\Gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

com derivada contínua em $[a, b]$.

Lembremos que esta aplicação é dada por $\Gamma(t) = (\phi(t), \psi(t)) = x(t) + iy(t)$ e, a medida que t percorre $[a, b]$, o vetor $\Gamma(t)$ descreve o caminho. Os pontos $\Gamma(a)$ e $\Gamma(b)$ são chamados ponto inicial e ponto final do caminho Γ , respectivamente. Se $\Gamma(a) = \Gamma(b)$ dizemos que o caminho é fechado.

Observemos que, na definição de caminho, subentende-se a noção de sentido ou orientação de percurso do caminho, mais precisamente, o caminho é percorrido do ponto inicial ao ponto final a medida que $t \in [a, b]$. Podemos inverter o sentido do percurso definindo o caminho reverso de Γ , Γ^- , por

$$\Gamma^-(t) = \Gamma(a + b - t), \quad a \leq t \leq b.$$

Consideremos, agora, uma classe mais ampla de caminhos em $\mathbb{C}$.

Definição 2.2. *Um caminho suave por partes em $\mathbb{C}$ é uma coleção finita de caminhos suaves $\Gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\Gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{C}, \dots, \Gamma_n : [a_n, b_n] \rightarrow \mathbb{C}$, satisfazendo : $\Gamma_i(b_i) = \Gamma_{i+1}(a_{i+1})$ para $1 \leq i \leq n - 1$.*

Como para caminhos suaves, dizemos que um caminho suave por partes é fechado se $\Gamma_1(a_1) = \Gamma_n(b_n)$, isto é, o ponto inicial do primeiro caminho coincide com o ponto final do último caminho.

Podemos normalizar um caminho suave por partes Γ e vê-lo como um caminho $\Gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$. Para fazer isso, dividimos o intervalo $[0, 1]$ em n intervalos,

$$\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \dots, \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right], \dots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$$

e, para cada um deles, definimos uma bijeção suave

$$r_j : \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right] \rightarrow [a_j, b_j]$$

por

$$r_j(t) = n(b_j - a_j)t - j(b_j - a_j) + b_j.$$

Os caminhos $\Gamma_j(r_j(t))$, $1 \leq j \leq n$, são suaves e o ponto inicial de $\Gamma_j(r_j(t))$ coincide com o ponto final de $\Gamma_{j-1}(r_{j-1}(t))$. Dessa maneira, o caminho original Γ pode ser visto como definido no intervalo $[0, 1]$.

Definição 2.3. *Um caminho suave por partes e fechado é simples, se a aplicação $\Gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ que o define é injetiva, exceto nos pontos 0 e 1, ou seja, $\Gamma(0) = \Gamma(1)$, $\Gamma(t) \neq \Gamma(0)$ se $0 < t < 1$ e $\Gamma(t_1) \neq \Gamma(t_2)$ se $0 < t_1 \neq t_2 < 1$.*

A definição acima quer dizer, em outras palavras, que o caminho não possui auto-intersecções. Apresentaremos, agora, um conceito muito importante.

Definição 2.4. (Curva de Jordan) *Uma curva de Jordan suave por partes é um caminho suave por partes, fechado e simples.*

Definição 2.5. *Um subconjunto não vazio $U \subset \mathbb{C}$ é chamado domínio se U é aberto e se, dados dois pontos quaisquer p e q em U , existe um caminho suave por partes inteiramente contido em U , cujos pontos inicial e final são, respectivamente, p e q .*



Alguns exemplos de domínio são $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^* = \{\mathbb{C}/\{0\}\}$, qualquer disco aberto $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z_0 - z| < r\}$ e qualquer anel $A(z_0, a, b) = \{z \in \mathbb{C} : a < |z - z_0| < b\}$.

Definição 2.6. *Seja $U \subset \mathbb{C}$ um domínio. Dizemos que U é estrelado se existe um ponto $z_0 \in U$ satisfazendo à seguinte propriedade: dado qualquer ponto $z \in U$, o segmento de reta unindo z_0 a z está inteiramente contido em U . O ponto z_0 é chamado um centro do domínio U .*

Daremos, agora, um conceito importante. Se $\alpha' < \beta'$ e $\phi(\sigma)$ é qualquer função contínua e monótona estritamente crescente em $[\alpha', \beta']$ tal que $\phi(\alpha') = \alpha$ e $\phi(\beta') = \beta$, então o caminho Γ' definido por $z = z(\phi(\sigma))$, $\alpha' \leq \sigma \leq \beta'$, tem a mesma extensão e os mesmos pontos inicial e final que o caminho Γ . Dois caminhos que podem ser transformados cada um em outro, de forma que tal transformação preserve o sentido do parâmetro, assim como Γ e Γ' citados acima, são chamados **geometricamente equivalentes**.

Definição 2.7. *Os caminhos Γ_0 e Γ_1 que vão de z_0 a z_1 são ditos **homotópicos com respeito a um conjunto** S se existe uma função $f = f(u, v)$ definida no quadrado unitário $K : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$ e contínua em K , tal que*

- a) $f(u, v) \in S$ para todo $(u, v) \in K$;
- b) $f(0, v) = z_0, f(1, v) = z_1, \forall v \in [0, 1]$;
- c) Os caminhos $f = f(u, 0)$ e $f = f(u, 1)$ ($0 \leq u \leq 1$) são geometricamente equivalentes aos arcos Γ_0 e Γ_1 , respectivamente.

Definição 2.8. *Uma região do plano complexo S é simplesmente conexa se, para quaisquer dois pontos z_0 e z_1 de S , quaisquer dois caminhos que vão de z_0 a z_1 e estão inteiramente contidos em S são homotópicos com respeito a S .*

2.2 Funções Analíticas

2.2.1 Funções Complexas, Continuidade e Diferenciabilidade

Denotando por $z = x + iy$ a variável complexa, a expressão $f(z) = u(z) + iv(z)$ é chamada de função de variável complexa se, para todo valor de z numa certa região, temos um valor correspondente a $f(z)$. Consideremos $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, onde $A \subset \mathbb{C}$ é um conjunto aberto.

Definição 2.9. (Continuidade) *Seja $f(z)$ uma função em z . Dizemos que f é contínua em $z_0 \in A$ se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $z \in A$ a seguinte propriedade é satisfeita*

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon.$$

Uma função contínua de z é meramente uma função complexa em duas variáveis x e y . Se,

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad e \quad z_0 = x_0 + iy_0,$$

então

$$|u(x, y) - u(x_0, y_0)| \leq |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$$

se $|z - z_0| < \delta$, o qual é verdadeiro se

$$|x - x_0| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}, \quad |y - y_0| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}.$$

Por isso $u(x, y)$ é contínua. Analogamente $v(x, y)$ é contínua. Reciprocamente, podemos provar que, se u e v são contínuas, $f(z)$ é contínua.

Definição 2.10. (Diferenciabilidade) *Uma função $f(z)$ é considerada diferenciável em $z_0 \in A$ se o limite*

$$f'(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (2.1)$$

existe e não depende do caminho pelo qual $z \rightarrow z_0$. Chamamos o limite (2.1) de derivada de $f(z)$.

Discutiremos como a propriedade de diferenciabilidade de uma função $f(z)$ afeta as correspondentes funções $u(z)$ e $v(z)$, que são as partes real e imaginária, respectivamente, de $f(z)$.

Consideramos, primeiramente, que $z - z_0$ é real puro, tal que

$$z_0 = x_0 + iy_0, \quad z = x + iy_0.$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{\{u(x, y) + iv(x, y_0)\} - \{u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)\}}{x - x_0} \\ &= \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Fazendo $x \rightarrow x_0$ em (2.2), uma vez que as derivadas $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ existem em (x_0, y_0) , chegaremos a

$$f'(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_0, y=y_0}. \quad (2.3)$$

Analogamente, se tomarmos $z_0 = x_0 + iy_0$ e $z = x_0 + iy$, isto é, $z - z_0$ como imaginário puro, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{\{u(x_0, y) + iv(x_0, y)\} - \{u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)\}}{iy - iy_0} \\ &= \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0} - i \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{y - y_0} \end{aligned} \quad (2.4)$$

e, da mesma forma,

$$f'(z_0) = \left(\frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{x=x_0, y=y_0}. \quad (2.5)$$

Comparando (2.3) e (2.5), obtemos as seguintes equações,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (x = x_0, \quad y = y_0). \quad (2.6)$$

Logo, afirmar a diferenciabilidade de uma função de variáveis complexas, não é somente exigir que as derivadas parciais de $u(x, y)$ e $v(x, y)$ existam, mas também que satisfaçam às equações em (2.6). As equações em (2.6) são conhecidas como equações de Cauchy-Riemann e são condições necessárias para a diferenciabilidade de f . Deste modo, se u e v são funções de x e y cujas derivadas parciais existem, $u + iv$ nem sempre será uma função diferenciável de z .



2.2.2 Funções Analíticas

As funções que são diferenciáveis numa certa região recebem um nome especial, são chamadas *funções analíticas*. Não podemos afirmar que uma função é analítica se soubermos apenas que $\{f(z) - f(z_0)\}/(z - z_0)$ tende a um limite ao longo de um caminho. Daremos então, no próximo teorema, condições necessárias e suficientes para que uma função seja analítica.

Teorema 2.1. *Uma função $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é analítica num aberto A se, e somente se, as derivadas parciais $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ existem e são contínuas em A , e satisfazem às equações de Cauchy-Riemann.*

A demonstração desse teorema encontra-se em [18, pág. 68].

Vamos precisar de outro conceito importante. Sejam $f(z)$ uma função analítica com domínio D e imagem W , z_0 um ponto de D e $\Gamma : \tau \rightarrow z(\tau)$, $\alpha \leq \tau \leq \beta$, uma curva em D passando por z_0 . Suponhamos que $z'(\tau)$ existe e é diferente de zero. Se $z_0 = z(\tau_0)$, então o número complexo $z'(\tau_0)$, interpretado como um vetor, é um vetor tangente a Γ em z_0 .

A imagem de Γ através da função f é uma curva

$$\Gamma^* : \tau \rightarrow w(\tau) := f(z(\tau)), \quad \alpha \leq \tau \leq \beta.$$

Como a diferencial de f em z_0 possui uma forma especial,

$$df = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz,$$

segue que um vetor tangente a Γ^* na imagem $w_0 = f(z_0)$ de z_0 é dado por

$$w'(\tau_0) = f'(z_0) \cdot z'(\tau_0).$$

Supondo que $f'(z_0) \neq 0$, concluímos que

$$\arg w'(\tau_0) = \arg f'(z_0) + \arg z'(\tau_0).$$

Esta relação implica que o ângulo entre os vetores tangentes a Γ em z_0 e a Γ^* em w_0 é igual ao $\arg f'(z_0)$. Por isso o ângulo é independente de Γ . Segue, então, que as imagens de quaisquer duas curvas passando por z_0 e que forma um

ângulo γ em z_0 são também duas curvas que formam um ângulo γ (medido na mesma direção) em w_0 . Uma aplicação com esta propriedade, ou seja, os ângulos entre as curvas são preservados no tamanho e no sentido, é chamada **conforme**.

As funções analíticas possuem propriedades interessantes dependendo do domínio considerado. O próximo teorema mostra uma relação entre uma região de Jordan, que nada mais é do que um domínio limitado por uma curva de Jordan, e uma função analítica.

Teorema 2.2. (Princípio da Imagem Limitada) *Seja D uma região de Jordan com fronteira Γ e seja f uma função analítica em D e contínua no fecho $D \cup \Gamma$ de D . Seja $\Gamma^* := f(\Gamma)$ uma curva de Jordan com orientação positiva. Então, a aplicação de D através de f é conforme e bijetiva no interior D^* de Γ^* .*

A demonstração deste teorema encontra-se em [12, pág. 383].

2.2.3 Série de Potências

Na seção anterior, destacamos uma classe especial de funções que são diferenciáveis. Uma das propriedades das funções analíticas é que elas possuem derivadas de todas as ordens num aberto A e essas funções podem ser expandidas em séries de potências. Daremos a seguir alguns exemplos de funções analíticas.

Definição 2.11. *Dada uma sequência $\{a_n(z - z_0)^n\}$, a série por ela gerada é chamada uma série de potências de centro em z_0 e notada por $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$.*

Teorema 2.1 *Seja $a_0, a_1, a_2, \dots$ uma sequência de números complexos. Se $a_0 \neq 0$, então a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge absolutamente para algum $r > 0$.*

Lema 2.1. *Dada uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, existe um disco fechado de centro em z_0 tal que a série converge absolutamente em todos os pontos z no interior desse disco e diverge em todos os pontos z exteriores a ele.*

Definição 2.12. *O raio R do disco dado pelo lema acima é chamado de raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$.*

As demonstrações do teorema e corolário seguintes encontram-se em [14, pág. 88].



Teorema 2.3. *Seja $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ uma série de potências com raio de convergência $R > 0$. Então,*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

para todo z tal que $|z| < R$, isto é, podemos derivar termo a termo uma série de potências no interior de seu disco de convergência.

O Teorema 2.3 nos diz que uma série de potências define uma função analítica no seu disco de convergência.

Corolário 2.1. *Seja $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ uma série de potências com raio de convergência $R > 0$. Então, $f(z)$ é dada por sua série de Taylor de centro em z_0 ,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

e essa série converge absolutamente em qualquer ponto de $D(z_0, R)$.

Definição 2.13. *Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um domínio e $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função. f é analítica em U se, para todo ponto $z_0 \in U$, f se expressa como uma série de potências de centro em z_0 e raio de convergência $R_{z_0} > 0$.*

Vamos considerar o espaço normado $\mathcal{A}$. Se ϵ é qualquer número positivo, o conjunto de todos os $x \in \mathcal{A}$ tal que $\|x - x_0\| < \epsilon$ é chamado de ϵ - vizinhança de x_0 . Denotamos por $N(x_0, \epsilon)$ essa vizinhança de x_0 .

Teorema 2.4. *Num espaço de Banach $\mathcal{B}$, sejam f analítica em 0 com $f(0) = 0$ e F uma série de potências representando f numa vizinhança de 0 . Então, para $\rho_1 > 0$ suficientemente pequeno, existe $\sigma_1 > 0$ tal que,*

- (a) f é analítica no conjunto $S_{\rho_1} := N(0, \rho_1)$;
- (b) $f(S_{\rho_1})$ contém o conjunto $S_{\sigma_1} := N(0, \sigma_1)$;
- (c) $f^{-1}(w) = F^{-1}(w)$ para todo $w \in S_{\sigma_1}$.

A demonstração do teorema anterior encontra-se em [12, pág.100].

2.2.4 Exponencial, Logaritmo e Potências arbitrárias

A Exponencial

Definição 2.14. A função exponencial é dada por

$$\exp(z) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) \quad (2.7)$$

e está definida para todo $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$.

Usando a representação polar também obtemos

$$i) \quad \exp(z_1) \exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2);$$

$$ii) \quad \frac{1}{\exp(z)} = \exp(-z);$$

$$iii) \quad [\exp(z)]^n = \exp(nz), \quad \forall \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Até aqui, verificamos que a exponencial complexa tem comportamento semelhante à exponencial real, mas através da próxima propriedade encontraremos as diferenças.

$$iv) \quad (\exp z)^{\frac{1}{n}} = [e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)]^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{x}{n}}[\cos y + i \operatorname{sen} y] = \exp\left(\frac{z+2\pi j}{n}\right), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Outra diferença é dada por:

$$v) \quad \exp(z + 2\pi i) = e^x(\cos(y + 2\pi) + i \operatorname{sen}(y + 2\pi)) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = \exp(z),$$

isto é, a função exponencial tem período imaginário $2\pi i$.

Apesar dessas diferenças é comum denotá-la por e^z para z complexo. O próximo teorema dará uma propriedade importante dessa função.

Teorema 2.5. A função exponencial e^z é analítica em todo $z_0 \in \mathbb{C}$.

Demonstração: Basta mostrarmos que, para todo ponto z_0 , existe $\rho > 0$ tal que e^z pode ser representada por série de potências em $h = z - z_0$, quando $|h| < \rho$. Podemos escrever

$$e^z = e^{z_0+h} = e^{z_0}e^h.$$

Assim, a expansão em série é dada por

$$e^z = e^{z_0} + \frac{1}{1!}e^{z_0}h + \frac{1}{2!}e^{z_0}h^2 + \dots, \quad (2.8)$$

onde h é um número complexo arbitrário. ■



Outra propriedade é que a $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ é sobrejetiva. Para verificar isso, seja $w = w_1 + iw_2 \neq 0$ e considere a equação

$$\exp(z) = e^x(\cos y + i \sin y) = w_1 + iw_2. \quad (2.9)$$

Concluimos, então, que $x = \log |z|$ e que y é o argumento de w , ou seja, (2.7) é representação polar de w .

Usando o fato de que

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \quad (2.10)$$

somando e subtraindo (2.10) da mesma relação após substituir y por $-y$, obtemos as *fórmulas de Euler*

$$\cos y = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy}), \quad \sin y = \frac{1}{2i}(e^{iy} - e^{-iy}), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Podemos também definir as funções seno e cosseno para o número complexo z , por

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

O Logaritmo

A função exponencial complexa não assume o valor zero, mas assume todos os valores complexos $w \neq 0$. Pelo fato de $\exp(z)$ ser periódica, ela assume todos os outros valores complexos w um número infinito de vezes.

A função exponencial real é bijetiva, isto é, para $u > 0$ a equação $e^x = u$ tem exatamente uma solução, chamada o logaritmo (real) de u . Denotaremos, então, esta solução por $\text{Log } u$. Vamos determinar todas as soluções da equação

$$e^z = w, \quad w \neq 0, \quad (2.11)$$

se $w \neq 0$. Fazendo $z = x + iy$ e $w = |w|e^{i\phi}$ então, $e^x = |w|$. Isto é, $x = \text{Log } |w|$ e $y = \phi + 2\pi k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Assim, as soluções da equação são todos os números

$$z = \text{Log } |w| + i(\arg w + 2k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



Este conjunto de números é chamado *logaritmo* de w e é denotado por $\{\log w\}$.

Lembramos que para dois conjuntos A e B , a soma $A + B$ é definida por $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

Teorema 2.6. *Se w_1 e w_2 são dois números complexos diferentes de zero,*

$$\{\log w_1 w_2\} = \{\log w_1\} + \{\log w_2\}. \quad (2.12)$$

Em outras palavras (2.12) quer dizer:

- a) *Se $z_1 \in \{\log w_1\}$ e $z_2 \in \{\log w_2\}$, então $z_1 + z_2 \in \{\log w_1 w_2\}$;*
- b) *Se $z_3 \in \{\log w_1 w_2\}$, então existem números $z_1 \in \{\log w_1\}$ e $z_2 \in \{\log w_2\}$ tais que $z_3 = z_1 + z_2$.*

A demonstração desse último teorema encontra-se em [12, pág. 113].

Como a função e^z não é injetiva e, portanto, não é inversível, podemos restringir seu domínio de definição da seguinte forma: tome uma semi-reta fechada partindo da origem, $L_\phi = \{(t \cos \phi, t \sin \phi) : t \in \mathbb{R}, t \leq 0\}$ onde $0 \leq \phi < 2\pi$ e coloque

$$\mathcal{D}_\phi = \mathbb{C} \setminus L_\phi.$$

Para todo $z \in \mathcal{D}_\phi$ temos precisamente um único valor $\arg_\phi z$ satisfazendo $\phi - \pi < \arg_\phi z < \phi + \pi$. Portanto, podemos definir uma função chamada *ramo simples do logaritmo*

$$\log : \mathcal{D}_\phi \longrightarrow \mathbb{C}$$

por

$$\log z = \log |z| + i \arg_\phi z.$$

O ramo do logaritmo definido no domínio $\mathcal{D}_0$, obtido retirando-se de $\mathbb{C}$ o semi-eixo $(x, 0)$, $x \leq 0$, é chamado de *ramo principal*.

Teorema 2.7. *Um ramo simples de $\{\log z\}$ é uma função analítica em todos os pontos onde é definido.*

Demonstração: Seja $\log w$ um ramo simples definido para todo número ϕ e seja w_0 qualquer ponto do domínio $\mathcal{D}_\phi$ de $\log w$. Seja $S_\phi : \phi - \pi < \operatorname{Im} z <$

$\phi + \pi$ uma faixa, na qual e^z assume cada $0 \neq w$ em $\mathbb{C}$ apenas uma vez, e seja $z_0 = x_0 + iy_0$ em S_ϕ tal que $e^{z_0} = w_0$. Sabemos que e^z é injetiva em $|z - z_0| < \rho_1 = \min(\phi + \pi - y_0, y_0 - \phi + \pi)$. Como o coeficiente de h não é zero na expansão de e^z em série de potências (ver a demonstração do Teorema 2.5), pelo Teorema 2.4 existe um número $\sigma_1 > 0$ tal que para todo $w \in N(w_0, \sigma_1)$ existe $z \in N(z_0, \rho_1)$ satisfazendo $e^z = w$. Além disso, a inversa da função é analítica em w_0 . Mas em $N(w_0, \sigma_1)$ a função inversa coincide com $\log w$. Por isso, $\log w$ é uma função analítica em w_0 . ■

Teorema 2.8. *Seja f analítica e diferente de zero numa região simplesmente conexa D . Então um ramo de $\{\log f\}$ analítico e injetivo pode ser definido em D .*

A demonstração deste teorema encontra-se em [12, pág. 114]

Potências Arbitrárias

Usando as definições dadas para as funções exponencial e logaritmo podemos introduzir a

Definição 2.15. *Dados um domínio $\mathcal{D}_\phi$, como acima, e um número $\lambda \in \mathbb{C}$, a função $z \rightarrow z^\lambda$ é definida por*

$$z^\lambda = \exp(\lambda \log z),$$

onde $z \in \mathcal{D}_\phi$ e $\log$ é o ramo do logaritmo definido em $\mathcal{D}_\phi$.

O ramo principal da função z^λ é obtido tomando-se o ramo principal do logaritmo na expressão que o define.

Denotando f esse ramo, temos que

$$f : \begin{cases} \mathcal{D}_0 & \longrightarrow \mathbb{C} \\ z & \longmapsto z^\lambda \end{cases}$$

é analítica em $\mathcal{D}_0$ e sua derivada é (usando a regra da cadeia)

$$f'(z) = \exp(\lambda \log z) \frac{\lambda}{z} = \lambda \frac{\exp(\lambda \log z)}{\exp(\log z)} = \lambda \exp((\lambda - 1) \log z) = \lambda z^{\lambda-1}.$$



Essa função generaliza a noção usual de potência pois, se n é um inteiro positivo,

$$z^n = \exp(n \log z) = \exp(\log z) \dots \exp(\log z) = \underbrace{z z \dots z}_{n \text{ vezes}}.$$

Assim, uma vez que estamos considerando o ramo principal

$$\exp \left[\frac{1}{n} \log z \right] = \exp \left[\log \sqrt[n]{z} + i \frac{\arg_0 z}{n} \right] = \sqrt[n]{r} \exp \left[i \frac{\arg_0 z}{n} \right] = \sqrt[n]{z},$$

onde $z = r e^{i \arg_0 z}$. Portanto,

$$\exp \left(\frac{1}{n} \log z \right)$$

fornece uma raiz n -ésima de z .

2.3 Teoria de Cauchy

2.3.1 Integração, Teoremas de Cauchy

Seja Γ um arco de uma curva definida pelas equações $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, onde ϕ e ψ são funções de t com derivadas contínuas $\phi'(t)$ e $\psi'(t)$, e suponhamos que quando t varia de t_A a t_B , o ponto (x, y) move-se ao longo da curva de A para B .

Seja $f(z)$ uma função complexa de z , contínua ao longo de Γ . Seja

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y).$$

Assim, a integral de $f(z)$ ao longo do arco Γ é dada por

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{t_A}^{t_B} (u + iv) \{ \phi'(t) + i \psi'(t) \} dt. \quad (2.13)$$

Em particular, para as funções analíticas numa região que inclui o caminho Γ , a propriedade (2.13) é válida.

Algumas propriedades da integral real estendem-se para a integral complexa. Por exemplo,

$$\int_{\Gamma} \{ f(z) + g(z) \} dz = \int_{\Gamma} f(z) dz + \int_{\Gamma} g(z) dz$$

e, se k é constante,

$$\int_{\Gamma} k f(z) dz = k \int_{\Gamma} f(z) dz.$$

Também se Γ^- denota o caminho Γ no sentido contrário,

$$\int_{\Gamma^-} f(z) dz = - \int_{\Gamma} f(z) dz.$$

Definição 2.16. Se $\Gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ é um caminho suave, seu comprimento é definido por

$$\mathcal{L}(\Gamma) = \int_a^b |\Gamma'(t)| dt.$$

Se $\Gamma(t) = (\phi'(t), \psi'(t))$ então a expressão do comprimento de Γ torna-se

$$\mathcal{L}(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{\phi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

Daremos, agora, uma desigualdade para a integral complexa.

Teorema 2.9. Se M é o limite superior de $|f(z)|$ em uma curva Γ e $\mathcal{L}$ é o comprimento de Γ , então

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq M \mathcal{L}(\Gamma).$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_{t_A}^{t_B} (u + iv) \{\phi'(t) + \psi'(t)\} dt \right| \leq \int_{t_A}^{t_B} M [\phi'^2(t) + \psi'^2(t)]^{1/2} dt \\ &= M \mathcal{L}(\Gamma). \end{aligned}$$

■

Teorema 2.10. (Teorema de Cauchy) Seja $U \subset \mathbb{C}$ um domínio e sejam $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica e Γ uma curva de Jordan em D . Então,

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

A demonstração desse último teorema encontra-se em [12, pág. 330]. O teorema de Cauchy pode ser estendido a qualquer tipo de caminho, como os que foram definidos anteriormente. Vamos denotar o disco fechado de centro z_0 por $D[z_0, r_0] = \{z \in \mathbb{C} : |z_0 - z| \leq r_0\}$.



Teorema 2.11. (Fórmula integral de Cauchy) *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica definida em $U \subset \mathbb{C}$. Sejam $D[z_0, r_0] \subset U$ e Γ sua fronteira orientada no sentido anti-horário. Se z é um ponto qualquer no interior de $D[z_0, r_0]$, então*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Corolário 2.2. *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analítica, onde U é um domínio. Então f tem derivadas de todas as ordens em todos os pontos de U e*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw,$$

onde Γ é qualquer circunferência centrada em z , percorrido no sentido anti-horário e que limita um disco fechado contido em U .

As demonstrações do Teorema 2.11 e do Corolário 2.2 encontram-se em [14, pág. 124 e pág. 127], respectivamente.

Antes de enunciarmos o Teorema da Curva de Jordan, vamos definir alguns resultados importantes.

Seja $\Gamma := z(\tau)$, $\alpha \leq \tau \leq \beta$, um arco (não necessariamente fechado ou suave, com ou sem pontos múltiplos) e seja c um ponto fora desta curva. Para todo $\tau \in [\alpha, \beta]$ o número complexo $z(\tau) - c$ tem um número infinito de argumentos. Um argumento contínuo de $z - c$ em Γ é uma função real ϕ definida em $[\alpha, \beta]$ tal que, para todo $\tau \in [\alpha, \beta]$, $\phi(\tau)$ é igual a um dos valores de $\arg(z(\tau) - c)$.

Um caso especial é quando Γ é uma curva fechada, isto é, $z(\beta) = z(\alpha)$. Se c é qualquer ponto que não está em Γ e $\phi(\tau)$ é um argumento contínuo de $z - c$ em Γ , então, devido a ambos $\phi(\alpha)$ e $\phi(\beta)$ serem valores do $\arg(z(\alpha) - c)$, o crescimento no argumento de $z - c$ ao longo de Γ é uma integral múltipla de 2π . Consequentemente, o número

$$n(\Gamma, c) = \frac{1}{2\pi} [\arg(z(\tau) - c)]$$

é um inteiro. Este inteiro é chamado o **número de voltas** de Γ em torno de c .

As demonstrações dos próximos teoremas encontram-se em [12, pág. 233 e pág. 235], respectivamente.



Teorema 2.12. *Se Γ é uma curva suave por partes fechada e $c \notin \Gamma$, então*

$$n(\Gamma, c) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{z - c} dz. \quad (2.14)$$

Teorema 2.13. *Seja Γ uma curva de Jordan suave por partes. O complemento de Γ tem apenas uma das duas componentes, cada uma com Γ como fronteira. Apenas uma das duas componentes é ilimitada. O número de voltas $n(\Gamma, c)$ é igual a zero na componente ilimitada e $+1$ ou -1 , ao longo da fronteira da componente limitada.*

2.4 Singularidade

2.4.1 Zeros

Definição 2.17. *Um número complexo z é chamado zero da função f se $f(z) = 0$.*

Se $f(z)$ é analítica numa vizinhança do ponto z_0 , então

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (2.15)$$

para valores suficientemente pequenos de $|z - z_0|$.

Se z_0 é um zero de f , um ou mais coeficientes $a_0, a_1, \dots$ se anularão. Se $a_n = 0$ para $n < m$, onde m é inteiro, mas $a_m \neq 0$, então $f(z)$ possui um zero de ordem m em z_0 .

Em um zero de ordem m , temos

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0,$$

enquanto $f^{(m)}(z_0) \neq 0$. Isto segue da série de Taylor.

As demonstrações do teorema e dos dois corolários seguintes encontram-se em [18, pág. 88 e 89]

Teorema 2.14. *Os zeros de uma função analítica são pontos isolados, isto é, se a função $f(z)$ não é identicamente nula e é analítica numa região que contém z_0 ,*



então existe um círculo $|z - z_0| = R$ ($R > 0$) no interior do qual $f(z)$ não possui zeros, exceto no ponto z_0 .

Os seguintes corolários seguem imediatamente do teorema.

Corolário 2.3. Se uma função é analítica em U e se anula em todos os pontos de uma subregião $U' \subset U$, ou ao longo de qualquer caminho Γ de uma curva contínua em U , então $f(z) \equiv 0$.

Corolário 2.4. Se f e g são analíticas em U e assumem o mesmo valor em um número infinito de pontos z_n , $n = 1, 2, \dots$, onde $z_n \rightarrow z_0 \in U$, então $f(z) \equiv g(z)$ para todo $z \in U$.

2.4.2 Série de Laurent e Classificação das singularidades

Seja a região no plano complexo em forma de anel $A(z_0, \rho', \rho) = \{z \in \mathbb{C} : \rho' < |z - z_0| < \rho\}$. Enunciaremos, agora, o teorema de Laurent.

Teorema 2.15. Seja f uma função analítica no anel $A(z_0, \rho', \rho)$. Então, $f(z)$ pode ser expandida na forma,

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m (z - z_0)^{-m} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (2.15)$$

e é convergente em todos os pontos de $A(z_0, \rho', \rho)$. Além disso, essa expansão é única e os coeficientes b_m e a_n são dados por

$$b_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) (z - z_0)^{n-1} dz, \quad m \geq 1,$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(w) (w - z_0)^{n+1} dw, \quad n \geq 0,$$

onde Γ é um círculo de centro z_0 orientado no sentido anti-horário e contido em $A(z_0, \rho', \rho)$.

A expansão dada acima é chamada série de Laurent de f .

Suponhamos que $f(z)$ é analítica em $0 < |z - z_0| < \rho$, exceto no ponto z_0 . Então, dizemos que $f(z)$ possui uma singularidade isolada em z_0 . Suponhamos que $f(z)$ é analítica no anel $A(z_0, 0, \rho)$ e consideremos a série de Laurent de f dada por (2.15).



Definição 2.18. Usando a série (2.15) classificaremos as singularidades de f em três categorias distintas:

- 1) z_0 é singularidade removível de f se $b_m = 0$ para $m \geq 1$;
- 2) z_0 é polo de ordem k de f se $b_k \neq 0$ e $b_m = 0$ para $m \geq k$;
- 3) z_0 é singularidade essencial de f se $b_m \neq 0$ para um número infinito de valores de m .

3.1 Propriedades das funções univalentes

Uma função é univalente se, para $z_1, z_2 \in D$ tal que $f(z_1) = f(z_2)$, tivermos $z_1 = z_2$. As funções analíticas e univalentes serão divididas em duas classes:

(a) $\mathcal{U}$ é a classe de funções analíticas e univalentes no domínio $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Capítulo 3

Funções Univalentes

A área que estuda as funções univalentes é considerada uma das áreas mais clássicas da análise complexa. Isso se deve ao interesse de muitos matemáticos famosos e a tradição que se mantém ao longo dos anos.

Neste capítulo, vamos comentar várias propriedades das funções univalentes, para este propósito utilizamos as referências [13] e [16]. Dividimos essas funções em duas classes, $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}^\infty$. Na primeira parte deste capítulo, daremos alguns resultados sobre transformações entre funções dessas classes. A seguir, apresentaremos alguns resultados que darão características relevantes sobre os coeficientes das funções univalentes. Assim, será possível obter propriedades geométricas interessantes sobre a imagem dessas funções. O primeiro resultado importante neste sentido envolve funções pertencentes à classe $\mathcal{U}^\infty$ e é dado pelo Teorema da Área. Através de algumas transformações esse resultado foi estendido para funções em $\mathcal{U}$. Apresentaremos o Teorema 1/4 de Koebe e, no Capítulo 5, vamos formular um problema que envolve este teorema. A seguir, enunciaremos os teoremas do Crescimento e da Distorção. Esses dois teoremas fornecerão limitantes para o módulo de uma função univalente e sua derivada.



3.1 Propriedades das funções univalentes

Uma função é univalente se, para $z_1, z_2 \in D$ tal que $f(z_1) = f(z_2)$, tivermos $z_1 = z_2$. As funções analíticas e univalentes foram divididas em duas classes:

(a) $\mathcal{U}$ é a classe de funções analíticas e univalentes no domínio $D = \{z : |z| < 1\}$, e a expansão em série de Taylor em torno de zero é dada por

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n; \quad (3.1)$$

(b) $\mathcal{U}^\infty$ é a classe de funções analíticas e univalentes no domínio $D^\circ = \{z : |z| > 1\}$, e a expansão em série de Laurent em torno do ∞ é dada por

$$g(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_{-n} z^{-n} \quad (3.2)$$

Lema 3.1. Se $f \in \mathcal{U}$ então a função

$$g(z) = \frac{1}{f(1/z)} + w_0 \in \mathcal{U}^\infty. \quad (3.3)$$

para valores arbitrários da constante w_0 .

Demonstração: A função g não possui ponto singular em D° , uma vez que f não assume o valor zero em D° . Para provar que g é analítica em D° , basta mostrarmos que o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(z) - g(z+h)}{h}$$

existe. Mas,

$$\begin{aligned} \frac{g(z) - g(z+h)}{h} &= \frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{z+h}}{h} \left(\frac{\frac{1}{f(\frac{1}{z})} - \frac{1}{f(\frac{1}{z+h})}}{\frac{1}{z} - \frac{1}{z+h}} \right) \\ &= \frac{1}{z(z+h)f(\frac{1}{z})f(\frac{1}{z+h})} \left(\frac{f(\frac{1}{z}) - f(\frac{1}{z+h})}{\frac{1}{z} - \frac{1}{z+h}} \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Fazendo $h \rightarrow 0$ em (3.4), obtemos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(z) - g(z+h)}{h} = \frac{f'(1/z)}{z^2 f^2(1/z)}. \quad (3.5)$$

O limite em (3.5) existe, pois $|z^{-1}| < 1$ e $z \neq 0$ em D° .

Se $g(z_1) = g(z_2)$, então $f(z_1^{-1}) = f(z_2^{-1})$ e, por isso, $z_1 = z_2$, o que implica que

g é univalente em D° . Logo, $g(z)$ pode ser expandida em série de Laurent no ∞ e possui a forma (3.2). ■

Neste capítulo, vamos denotar por A^c o conjunto complementar de um certo conjunto A .

Lema 3.2. *Seja $g \in \mathcal{U}^\infty$ e $w_1 \in g(D^\circ)^c$. Então, a função*

$$f(z) = \frac{1}{g(1/z) - w_1} \in \mathcal{U}. \quad (3.6)$$

Demonstração: Como no lema anterior, f não possui singularidade em D , uma vez que a função g não assume o valor w_1 . Assim, a função f é analítica e univalente, admitindo a expansão em série de Taylor em torno de $z = 0$. ■

Para ilustrar as transformações entre funções de $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}^\infty$ citadas nos lemas anteriores, consideremos a função de Joukowski

$$j : z \rightarrow w = z + \frac{1}{z}$$

que pertence a $\mathcal{U}^\infty$. Observe que a região descrita por esta função no plano complexo pode ser escrita como

$$j(\rho e^{i\theta}) = \frac{(1 + \rho^2)\cos\theta + i(\rho^2 - 1)\sin\theta}{\rho}.$$

Para $\theta = 0$ e $1 < \rho < \infty$, a função j cobre a semi-reta $(2, \infty)$. Para $\theta = \pi$ e $1 < \rho < \infty$, a função j cobre a semi-reta $(-\infty, -2)$ e, para este e outros valores de θ , podemos observar que a região total é o complemento do intervalo $[-2, 2]$. Se considerarmos

$$g(z) = j(z) - 2 = \frac{z^2 - 2z + 1}{z} = \frac{(z - 1)^2}{z},$$

que também pertence a $\mathcal{U}^\infty$, sua imagem é o complemento do intervalo $[-4, 0]$. Como $0 \notin g(D^\circ)$, pelo Lema 3.2 a função

$$k(z) = \frac{1}{g(1/z)} = \frac{z}{(1 - z)^2}$$

pertence a $\mathcal{U}$ e é conhecida como função de Koebe. A imagem dessa função é o complemento da semi-reta $[-\infty, -1/4]$.

Vamos comentar, agora, algumas transformações entre funções de $\mathcal{U}$. Seja $f \in \mathcal{U}$. Considerando $z^{-1}f(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1}$ podemos notar que se $z^{-1}f(z) = 0$, temos $f(z) = 0$. Mas, o único ponto em que f se anula em D é o ponto 0 e, portanto, $z^{-1}f(z)$ não se anula em D . Pelo Teorema 2.8 podemos definir $s(z) = [z^{-1}f(z)]^{1/2}$ como uma função analítica em D , uma vez que $z^{-1}f(z)$ satisfaz às condições do teorema citado e s pode ser escrita como o ramo do logaritmo $\log(\exp([z^{-1}f(z)]^{1/2}))$. Além disso, esta função satisfaz $s(0) = 1$.

Lema 3.3. *Se $f \in \mathcal{U}$, então a função*

$$h(z) = [f(z^2)]^{1/2} = zs(z^2) \quad (3.7)$$

está em $\mathcal{U}$ e, além disso, h é ímpar.

Demonstração: Como s é uma função analítica em D , então h também o é. Além disso, h satisfaz $h(-z) = -h(z)$. Se $h(z_1) = h(z_2)$ então $f(z_1^2) = f(z_2^2)$. Como f é univalente em D , temos que $z_1^2 = z_2^2$. Por outro lado, também vale que $s(z_1^2) = s(z_2^2)$. Logo, $z_1 s(z_1^2) = z_2 s(z_2^2)$, o que implica que $z_1 = z_2$. Portanto, h é ímpar e univalente em D . ■

A passagem de f para h em (3.7) é chamada transformação de Faber. Esta transformação pode ser feita para qualquer valor inteiro m por

$$h(z) = [f(z^m)]^{1/m}.$$

Uma pergunta que surge é: toda função ímpar $h \in \mathcal{U}$ é a transformação de Faber de alguma $f \in \mathcal{U}$? A resposta a esta questão é dada através do seguinte lema:

Lema 3.4. *Toda função $h \in \mathcal{U}$ ímpar é a transformação de Faber de alguma $f \in \mathcal{U}$.*

Demonstração: Seja $h \in \mathcal{U}$ ímpar tal que $h(z) = zq(z^2)$, onde q é analítica e $q(0) = 1$. Fazendo de forma inversa a transformação de Faber para f , obtemos

$$f(z) = [h(\sqrt{z})]^2 = zq(z).$$



Como q é ser analítica em D e $f(0) = 0$, então f é analítica em D . Suponhamos que $f(z_1) = f(z_2)$. Logo, $h(\sqrt{z_1}) = h(\sqrt{z_2})$ e, como h é univalente e ímpar, $\sqrt{z_1} = \pm\sqrt{z_2}$, o que implica que $z_1 = z_2$.

Lema 3.5. Se $f \in \mathcal{U}$ e $w \in f(D^\circ)^c$ então a função

$$h(z) = \frac{f(z)}{1 - w^{-1}f(z)} \in \mathcal{U}. \quad (3.8)$$

Demonstração: A função h está bem definida, pois f não assume o valor w . Como no Lema 3.2, segue que h é analítica. Seja $h(z_1) = h(z_2)$. Dessa igualdade podemos obter $f(z_1) = f(z_2)$ e, desde que $f(z)$ é univalente em D , concluímos que $z_1 = z_2$. Portanto, $h(z)$ é univalente. Provaremos que $h \in \mathcal{U}$. Seja z um ponto de D . Então, podemos escolher um número complexo arbitrário w de tal forma que $u = w^{-1}f(z)$ e $|u| < 1$. Usando o resultado da soma geométrica, obtemos

$$h(z) = f(z) \frac{1}{1 - w^{-1}f(z)} = \left(z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} u^n \right) = z + \dots$$

Assim, $h(z)$ tem a forma (3.1). ■

Lema 3.6. Seja $f \in \mathcal{U}$ e $|t| < 1$. Então, a função

$$h(z) = \frac{1}{(1 - |t|^2)f'(t)} \left\{ f\left(\frac{z+t}{1+\bar{t}z}\right) - f(t) \right\} \in \mathcal{U}. \quad (3.9)$$

Demonstração: A transformação da forma $z \rightarrow \frac{z+t}{1+\bar{t}z}$ é chamada transformação de Moebius e é injetiva de D em D . Portanto,

$$z \rightarrow f\left(\frac{z+t}{1+\bar{t}z}\right)$$

é a composição de duas funções injetivas em D ou, equivalentemente, univalente em D . Logo, a função h , como foi definida, se anula no ponto $z = 0$ e sua derivada, dada por

$$h'(z) = \frac{1}{(1 - |t|^2)f'(t)} \left\{ f' \left(\frac{z+t}{1+\bar{t}z} \right) \frac{1 - |t|^2}{(1 + \bar{t}z)^2} \right\},$$

assume o valor 1 em $z = 0$. Assim, h cumpre todas as exigências de funções pertencentes a $\mathcal{U}$. ■

Teorema 3.1. (Teorema da Área) Para qualquer função $g \in \mathcal{U}^\infty$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_{-n}|^2 \leq 1. \quad (3.10)$$

Demonstração: Para $\rho > 1$, seja Γ_ρ a curva

$$\Gamma_\rho = \{w = g(\rho e^{i\tau}), 0 \leq \tau \leq 2\pi\}.$$

Como g é univalente, Γ_ρ é uma curva de Jordan orientada positivamente. Um resultado bem conhecido do cálculo é que

$$A(\rho) = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_\rho} \bar{w} dw = \frac{1}{2} \int (v du - u dv)$$

é a área da região cercada pela curva Γ_ρ . Como $\rho > 1$, então $A(\rho) \geq 0$. Calculando explicitamente a área

$$\int_{\Gamma_\rho} \bar{w} dw = \int_0^{2\pi} \overline{g(\rho e^{i\tau})} g'(\rho e^{i\tau}) \rho i e^{i\tau} d\tau,$$

obtemos

$$\begin{aligned} A(\rho) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\rho e^{-i\tau} + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{b}_{-n} \rho^{-n} e^{in\tau} \right) \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} n b_{-n} \rho^{-(n+1)} e^{-i(n+1)\tau} \right) \rho e^{i\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\rho^2 - \rho e^{i\tau} \sum_{n=0}^{\infty} n b_{-n} \rho^{-n} e^{-in\tau} + \rho e^{i\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{b}_{-n} \rho^{-n} e^{-in\tau} \right. \\ &\quad \left. - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \bar{b}_{-n} \rho^{-n} e^{in\tau} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} n b_{-n} \rho^{-n} e^{-in\tau} \right) \right) d\tau. \end{aligned}$$

Sabendo que $\int_0^{2\pi} e^{ik\tau} d\tau = 0$ para valores de $k \in \mathbb{Z}$, devido ao fato da função exponencial ter período imaginário $2\pi i$, muitos termos da integral se anulam e, então,

$$A(\rho) = \pi \left(\rho^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_{-n}|^2 \rho^{-2n} \right).$$

Como $A(\rho) \geq 0$, se fizermos $\rho \rightarrow 1$, a área cercada por Γ_ρ se manterá não negativa. Assim,

$$0 \leq \pi \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} n |b_{-n}|^2 \right) \text{ e, portanto, } \sum_{n=1}^{\infty} n |b_{-n}|^2 \leq 1.$$

■

Observando a desigualdade (3.10), cada termo da soma deve ser inferior a 1, e uma consequência do teorema da área é que

$$|b_{-n}| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.11)$$

Em particular,

$$|b_{-1}| \leq 1 \quad (3.12)$$

A função que satisfaz a igualdade em (3.12) é a função de Joukowski $z \rightarrow z + z^{-1}$.

Lema 3.7. *Seja $f \in \mathcal{U}$ dada por (3.2). Então,*

$$|a_2| \leq 2. \quad (3.13)$$

Demonstração: Como não podemos fazer a passagem direta de $\mathcal{U}$ a $\mathcal{U}^\infty$ através do Lema 3.1, devemos aplicar primeiramente a transformação de Faber em f ,

$$[f(z^2)]^{1/2} = zs(z^2).$$

Vamos obter o desenvolvimento em série de Taylor de s em torno de $z^2 = 0$, onde a variável a ser considerada é z^2 . Mas,

$$\begin{aligned} s(z^2) &= [z^{-2}f(z^2)]^{1/2} = [(z^2)^{-1}f(z^2)]^{1/2}, \\ s'(z^2) &= \frac{1}{2}(z^{-2}f(z^2))^{-1/2}\{z^{-2}f'(z^2) - z^{-4}f(z^2)\} = \\ &= \frac{1}{2}s^{-1}(z^2)\{z^{-2}f'(z^2) - z^{-4}f(z^2)\}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Substituindo em (3.14) as séries

$$f(z^2) = z^2 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z^2)^n,$$

e

$$f'(z^2) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z^2)^{n-1},$$

obtemos

$$s'(z^2) = \frac{1}{2} s^{-1}(z^2) \{-z^2 - a_2 - a_3 z^3 - \dots + z^{-2} + 2a_2 + 3a_3 z^2 + \dots\}.$$

Logo,

$$s(z^2) = s(0) + s'(0)z^2 + \dots = 1 + \frac{1}{2}a_2 z^2 + \dots.$$

Assim,

$$[f(z^2)]^{1/2} = z \left(1 + \frac{1}{2}a_2 z^2 + \dots \right).$$

Aplicando o Lema 3.5 com $w = 0$ e fazendo o desenvolvimento em série de Laurent no ∞ , teremos

$$g(z) = [f(z^2)]^{-1/2} = z \left(1 - \frac{1}{2}a_2 z^{-2} + \dots \right). \quad (3.15)$$

O coeficiente de z^{-1} em (3.15) é $-\frac{1}{2}a_2$ e, por (3.12), temos que $|a_2| \leq 2$. ■

O limite do Teorema 3.7 é atingido para a função de Koebe

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots.$$

Além disso, se $|a_2| = 2$ para alguma $f \in \mathcal{U}$, então o coeficiente b_{-1} na correspondente função g satisfaz $|b_{-1}| = 1$. Isto significa que, para a desigualdade em (3.10) se manter, todos os b_{-n} devem ser zero. Consequentemente,

$$g(z) = z + e^{i\alpha} z^{-1}.$$

Deste modo,

$$f(z) = \frac{1}{g(1/\sqrt{z})} = \frac{z}{(1 + e^{i\alpha} z)^2}$$



é a rotação da função de Koebe.

No ano de 1916, a conjectura de Biberbach afirmava que para qualquer função $f \in \mathcal{U}$, $f(z) = z + \sum a_n z^n$, $|a_n| \leq n$, $\forall n$. Ao longo dos anos, muitos resultados parciais foram obtidos baseado nesta conjectura, até que foi finalmente demonstrada em 1986 por L. de Branges e este foi considerado o melhor resultado obtido na análise complexa da época. Aqui mencionamos parte deste resultado no Lema 3.7. Enunciaremos, a seguir, uma das conseqüências do Lema 3.7.

Teorema 3.2. (Teorema 1/4 de Koebe) *Seja $f \in \mathcal{U}$. Então, $f(D)$ contém o disco $D(0, 1/4) = \{z : |z| < 1/4\}$.*

Demonstração: Seja $w \in f(D)^c$. Mostramos, no Lema 3.5, que a função

$$h(z) = \frac{f(z)}{1 - w^{-1}f(z)} \in \mathcal{U}.$$

Uma vez que $|w^{-1}f(z)| < 1$, o resultado da soma geométrica é dado por $\frac{1}{1 - w^{-1}f(z)}$. Logo, a função h tem a forma

$$\begin{aligned} h(z) &= f(z) \frac{1}{1 - w^{-1}f(z)} = (z + a_2 z^2 + \dots) \left(1 + \frac{1}{w} z + \dots \right) \\ &= z + \left(a_2 + \frac{1}{w} \right) z^2 + \dots \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.7, temos que $|a_2 + 1/w| \leq 2$. Mas, $|a_2| \leq 2$. Assim,

$$|w^{-1}| = |a_2 + w^{-1} - a_2| \leq |a_2 + w^{-1}| + |a_2| \leq 2 + 2 = 4$$

ou, equivalentemente, $|w| \geq 1/4$. ■

O disco $D(0, 1/4)$ no Teorema 3.2 é o maior possível, pois a imagem do disco unitário através da função de Koebe é $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1/4]$. Chegamos, então, ao seguinte resultado.

Teorema 3.3. *Sejam $g \in \mathcal{U}^\infty$ e $g(D^\circ)^c$. Então, o diâmetro de $g(D^\circ)^c$ é no máximo 4.*

A demonstração deste teorema encontra-se em [13, pag. 576].



Para função de Joukowski $z \rightarrow z + z^{-1}$, $g(D^\circ)^c$ é o segmento $[-2, 2]$ e tem exatamente diâmetro 4.

A seguir veremos alguns resultados para funções de quaisquer uma das classes $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}^\infty$, onde são estabelecidos limites para o crescimento dessas funções e suas derivadas.

Teorema 3.4. (Teorema da Distorção) Para qualquer $f \in \mathcal{U}$, se $|z| = \rho$,

$$\frac{1-\rho}{(1+\rho)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+\rho}{(1-\rho)^3}, \quad 0 \leq \rho \leq 1. \quad (3.16)$$

Demonstração: Sejam $f \in \mathcal{U}$, $t \in D$ e h relacionada a f como no Lema 3.6. Fazendo o desenvolvimento em série de Taylor de h em torno de zero, cujas derivadas de primeira e segunda ordem são

$$\begin{aligned} h'(z) &= \frac{1}{(1-|t|^2)f'(t)} f' \left(\frac{z+t}{1+\bar{t}z} \right) \frac{1-|t|^2}{(1+\bar{t}z)^2}, \\ h''(z) &= \frac{1}{(1-|t|^2)f'(t)} \left(f'' \left(\frac{z+t}{1+\bar{t}z} \right) \frac{(1-|t|^2)^2}{(1+\bar{t}z)^4} - 2f' \left(\frac{z+t}{1+\bar{t}z} \right) \frac{\bar{t}(1-|t|^2)}{1+\bar{t}z} \right), \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} h(z) &= h(0) + h'(0)z + \frac{1}{2}h''(0)z^2 + \dots \\ &= 0 + z + \frac{1}{2} \left(\frac{f''(t)}{f'(t)}(1-|t|^2) - 2\bar{t} \right) z^2 + \dots \\ &= z + a_2^*(t)z^2 + \dots \end{aligned} \quad (3.17)$$

Desde que $h \in \mathcal{U}$, sabemos, pelo Lema 3.7, que $|a_2^*(t)| \leq 2$. Fazendo a mudança de t para z , e substituindo a_2^* nesta desigualdade, ficamos com

$$\frac{1}{2} \left| \left(\frac{f''(z)}{f'(z)}(1-|z|^2) - 2\bar{z} \right) \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{1-\rho^2}{z} \right| \left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} - 2 \frac{|z|^2}{(1-|z|^2)} \right| \leq 2.$$

Denotando $\rho = |z|$, a desigualdade acima pode ser dada por

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} - 2 \frac{\rho^2}{(1-\rho^2)} \right| \leq \frac{4\rho}{1-\rho^2}.$$

Para todo número complexo é válido que $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$. Logo,

$$\frac{2\rho^2 - 4\rho}{1-\rho^2} \leq \operatorname{Re} z \frac{f''(z)}{f'(z)} \leq \frac{2\rho^2 + 4\rho}{1-\rho^2}, \quad 0 < |z| = \rho < 1. \quad (3.18)$$



A derivada de f é analítica em D onde $f'(z) \neq 0$ e $f'(0) = 1$. Assim, $\log f'(z)$ é a composição de duas funções analíticas em D que se anula em zero e sua derivada com relação a z é $f''(z)/f'(z)$. Se fizermos a transformação $z = \rho e^{i\theta}$, a derivada parcial com relação a ρ é

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \log f'(z) = \frac{f''(\rho e^{i\theta})}{f'(\rho e^{i\theta})} e^{i\theta} = \frac{z}{|z|} \frac{f''(z)}{f'(z)}.$$

Considerando apenas a parte real da igualdade acima, obtemos

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \operatorname{Re} \log f'(z) = \operatorname{Re} z \frac{f''(z)}{f'(z)}.$$

Usando a desigualdade em (3.18) e sabendo que a parte real do ramo simples é igual à parte real do ramo principal $\operatorname{Re} \log z = \operatorname{Re} \operatorname{Log} z = \operatorname{Log}|z|$, chegamos a

$$\frac{2\rho - 4}{1 - \rho^2} \leq \operatorname{Log}|f'(\rho e^{i\theta})| \leq \frac{2\rho + 4}{1 - \rho^2}.$$

Integrando cada membro desta desigualdade entre 0 e ρ , com θ fixo, segue que

$$\operatorname{Log} \frac{1 - \rho}{(1 + \rho)^3} \leq \operatorname{Log}|f'(\rho e^{i\theta})| \leq \operatorname{Log} \frac{1 + \rho}{(1 - \rho)^3}.$$

Aplicando a função exponencial à desigualdade acima, chegaremos ao resultado desejado. ■

O limite do Teorema 3.4 é atingido, novamente, pela função de Koebe.

Teorema 3.5. (Teorema do Crescimento) Para qualquer $f \in \mathcal{U}$, se $|z| = \rho$,

$$\frac{\rho}{(1 + \rho)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{\rho}{(1 - \rho)^2}, \quad 0 \leq \rho < 1. \quad (3.19)$$

Demonstração: Pela integração da desigualdade no Teorema 3.4, vamos obter a respectiva desigualdade para $f(z)$. Seja $z = \rho e^{i\theta}$, $0 \leq \rho \leq 1$. Como $f(0) = 0$,

$$f(z) = \int_0^\rho f'(\rho e^{i\theta}) e^{i\theta} d\sigma.$$

e, então,

$$|f(z)| \leq \int_0^\rho |f'(\rho e^{i\theta})| d\sigma = \int_0^\rho \frac{1 + \sigma}{(1 - \sigma)^3} d\sigma = \frac{\sigma}{(1 - \sigma)^2}.$$



Para obter o limite inferior em (3.19), não podemos dizer nada a respeito de z para o qual $|f(z)| \geq 1/4$, pois $\sigma(1 + \sigma^{-2}) < 1/4$ para $0 \leq \rho < 1$. Se $|f(z)| < 1/4$. Então, pelo Teorema 1/4 de Koebe, o segmento de 0 a $w = f(z)$ está inteiramente contido em $f(D)$. Seja Γ a imagem deste segmento. Então, Γ é um arco simples de 0 a z através do qual $\arg f'(z) dz = \arg w = \text{constante}$. Então,

$$|f(z)| = \left| \int_{\Gamma} f'(z) dz \right| = \int_{\Gamma} |f'(z)| |dz|.$$

Usando o Teorema da Distorção e o fato de que $|dz| \geq d|z|$, a última expressão é limitada por

$$\int_0^{\rho} \frac{1 - \sigma}{(1 + \sigma)^3} d\sigma = \frac{\rho}{(1 + \rho)^2},$$

o que completa a prova do Teorema do Crescimento. ■

Novamente, os limites do teorema anterior são atingidos pela função de Koebe para valores positivos e negativos de z , respectivamente.

Capítulo 4

Uma Classe de Polinômios Univalentes

Neste capítulo, vamos considerar uma classe específica de polinômios univalentes. Estudaremos vários resultados obtidos por Suffridge em [17].

4.1 Classe $\mathcal{Q}_n$

Consideremos a classe dos polinômios da forma $q_n(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ que são univalentes no disco unitário e cujos coeficientes a_k são reais e $|a_n| = 1/n$. Denotemos por $\mathcal{Q}_n$ a classe formada por esses polinômios. Consideremos $\mathcal{Q}_n^+$ e $\mathcal{Q}_n^-$ subclasses da classe $\mathcal{Q}_n$, cujos polinômios têm o último coeficiente $a_n = 1/n$ e $a_n = -1/n$, respectivamente.

Para n fixo, definimos

$$A_{k,j} = \frac{n-k+1}{n} \frac{\sin kj\pi/(n+1)}{\sin j\pi/(n+1)}, \quad j, k = 1, 2, \dots, n \quad (4.1)$$

e

$$P(z) = P(z; n, j) = \sum_{k=1}^n A_{k,j} z^k. \quad (4.2)$$

De (4.1) obtemos facilmente a seguinte propriedade

$$(k+1)A_{k+1,j} = -(-1)^j(n-k)A_{n-k,j}. \quad (4.3)$$

O próximo lema nos dará uma representação mais simplificada do polinômio (4.2). Desta forma, será possível obter mais informações sobre o comportamento desse polinômio em alguns pontos específicos.

Lema 4.1. *Seja $P(z)$ dado por (4.2) e seja $\alpha = j\pi/(n+1)$. Então,*

$$P(e^{i\theta}) = \frac{n+1}{2n(\cos \theta - \cos \alpha)} + i \frac{\sin \theta (1 - (-1)^j e^{i(n+1)\theta})}{2n(\cos \theta - \cos \alpha)^2}, \quad (4.4)$$

com $\cos \theta \neq \cos \alpha$.

Demonstração: Vamos escrever $\sin kj\pi/(n+1) = \sin k\alpha$ na forma exponencial

$$\sin k\alpha = \frac{1}{2i}(e^{ik\alpha} - e^{-ik\alpha}).$$

Primeiramente, calculemos a soma

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{\sin k\alpha}{\sin \alpha} e^{ik\theta} &= \frac{1}{2i \sin \alpha} \sum_{k=1}^n (e^{ik(\alpha+\theta)} - e^{ik(\alpha-\theta)}) + 1 - 1 \\ &= \frac{1}{2i \sin \alpha} \sum_{k=0}^n (e^{ik(\alpha+\theta)} - e^{ik(\alpha-\theta)}) \\ &= \frac{1}{2i \sin \alpha} \left(\frac{1 - e^{i(n+1)(\alpha+\theta)}}{1 - e^{i(\theta+\alpha)}} - \frac{1 - e^{i(n+1)(\alpha-\theta)}}{1 - e^{i(\theta-\alpha)}} \right) \\ &= \frac{(1 - (-1)^j e^{i(n+1)\theta})((1 - e^{i(\theta-\alpha)}) - (1 - e^{i(\theta+\alpha)}))}{2i \sin \alpha (1 - e^{i(\theta+\alpha)})(1 - e^{i(\theta-\alpha)})}. \quad (4.5) \end{aligned}$$

Desenvolvendo o numerador em (4.5), obtemos

$$(e^{i(\theta+\alpha)} - e^{i(\theta-\alpha)})(1 - (-1)^j e^{i(n+1)\theta}) = 2i \sin \alpha (\cos \theta + i \sin \theta)(1 - (-1)^j e^{i(n+1)\theta}).$$

Analogamente, para o denominador teremos

$$\begin{aligned} 2i \sin \alpha (1 - e^{i(\theta+\alpha)})(1 - e^{i(\theta-\alpha)}) &= 2i \sin \alpha (1 - e^{i(\theta+\alpha)} - e^{i(\theta-\alpha)} + e^{2i\theta}) \\ &= 4i \sin \alpha (\cos \theta - \cos \alpha)(\cos \theta + i \sin \theta). \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sin k\alpha}{\sin \alpha} e^{ik\theta} = \frac{1 - (-1)^j e^{i(n+1)\theta}}{2(\cos \theta - \cos \alpha)}. \quad (4.6)$$

Precisamos ainda calcular a soma

$$i \frac{d}{d\theta} \sum_{k=1}^n \frac{\sin k\alpha}{\sin \alpha} e^{ik\theta}.$$

Usando o resultado obtido em (4.6), chegamos a

$$-\sum_{k=1}^n \frac{k \sin k\alpha}{\sin \alpha} e^{ik\theta} = \frac{(-1)^j (n+1) e^{i(n+1)\theta}}{2(\cos \theta - \cos \alpha)} + i \frac{\sin \theta (1 - (-1)^j e^{i(n+1)\theta})^2}{2(\cos \theta - \cos \alpha)}. \quad (4.7)$$

Substituindo os resultados das somas (4.6) e (4.7) no polinômio dado em (4.2), obtemos

$$\begin{aligned} P(e^{i\theta}) &= \sum_{k=1}^n \frac{\sin k\alpha}{\sin \alpha} e^{ik\theta} + \sum_{k=1}^n \frac{-k}{n} \frac{\sin k\alpha}{\sin \alpha} e^{ik\theta} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \frac{\sin k\alpha}{\sin \alpha} e^{ik\theta} \\ &= \frac{(n+1)(1 - (-1)^j e^{i(n+1)\theta})}{2n(\cos \theta - \cos \alpha)} + \frac{(-1)^j e^{i(n+1)\theta}}{2n(\cos \theta - \cos \alpha)} + i \sin \theta \frac{1 - (-1)^j e^{i(n+1)\theta}}{2(\cos \theta - \cos \alpha)^2} \\ &= \frac{n+1}{2n(\cos \theta - \cos \alpha)} + i \frac{1 - (-1)^j e^{i(n+1)\theta}}{2n(\cos \theta - \cos \alpha)^2}. \end{aligned}$$

■

A forma fechada (4.4) do polinômio $P(z)$ e o fato de que $\cos \alpha$ é decrescente em $[0, \pi]$ implicam em alguns resultados que serão formulados através do seguinte lema.

Lema 4.2. *I) Sejam j ímpar e m um número inteiro com $0 \leq m \leq n/2$, $j \neq 2m+1$ e $\alpha = j\pi/(n+1)$. Então,*

$$P(e^{i(2m+1)\pi/(n+1)}) = \frac{n+1}{2n(\cos(2m+1)\pi/(n+1) - \cos \alpha)}$$

é real. Além disso,

i) *se $j > 2m+1$, então*

$P(e^{i(2m+1)\pi/(n+1)})$ *é uma sequência positiva e crescente;*

ii) se $j < 2m + 1$, então

$P(e^{i(2m+1)\pi/(n+1)})$ é uma seqüência negativa e crescente.

II) Sejam j par e m um número inteiro com $0 \leq m \leq n/2$, $j \neq 2m$ e $\alpha = j\pi/(n+1)$. Então,

$$P(e^{i2m\pi/(n+1)}) = \frac{n+1}{2n(\cos 2m\pi/(n+1) - \cos \alpha)}$$

é real. Além disso,

i) se $j > 2m$, então

$P(e^{i2m\pi/(n+1)})$ é uma seqüência positiva e crescente;

ii) se $j < 2m$

$P(e^{i2m\pi/(n+1)})$ é uma seqüência negativa e crescente.

Também podemos verificar que

$$P(e^{i\alpha}) = \frac{(n+1)\cos \alpha}{4n \sin^2 \alpha} + i \frac{(n+1)^2}{4n \sin \alpha}.$$

A demonstração desta igualdade é análoga à do Lema 4.1.

Da representação de P no Lema 4.1 e da igualdade em (4.3) segue que

$$\begin{aligned} e^{i\theta} P(e^{i\theta}) &= \sum_{k=1}^n k A_{k,j} e^{ik\theta} \\ &= \begin{cases} A_{1,j} e^{i\theta} + 2A_{2,j} e^{2i\theta} + \dots + \frac{(n+3)}{2} A_{\frac{n+3}{2},j} e^{i\frac{(n+3)\theta}{2}} + \dots + n A_{n,j} e^{in\theta}, \\ \text{se } n \text{ par} \\ A_{1,j} e^{i\theta} + 2A_{2,j} e^{2i\theta} + \dots + \frac{(n+2)}{2} A_{\frac{n+2}{2},j} e^{i\frac{(n+2)\theta}{2}} + \dots + n A_{n,j} e^{in\theta}, \\ \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases} \\ &= e^{i(n+1)\theta/2} \left[A_{1,j} (e^{-i(n-1)\theta/2} - (-1)^j e^{i(n-1)\theta/2}) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \begin{cases} \frac{n}{2} A_{\frac{n}{2},j} (e^{-i\theta/2} - (-1)^j e^{i\theta/2}) \right], & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{n+1}{2} A_{\frac{n+1}{2},j}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \right]. \end{aligned}$$

Podemos, então, escrever

$$e^{i\theta} P'(e^{i\theta}) = e^{i(n+1)\theta/2} \begin{cases} iR(\theta; n, j), & \text{se } j \text{ é par} \\ R(\theta; n, j), & \text{se } j \text{ é ímpar} \end{cases}. \quad (4.8)$$

Os polinômios R podem ser representados de quatro formas diferentes.

i) Para n par e j par,

$$R(\theta; n, j) = -2i(A_{1,j} \sin \frac{(n-1)\theta}{2} + 2A_{2,j} \sin \frac{(n-3)\theta}{2} + \dots + \frac{n}{2} A_{\frac{n}{2},j} \sin \frac{\theta}{2});$$

ii) Para n par e j ímpar,

$$R(\theta; n, j) = 2(A_{1,j} \sin \frac{(n-1)\theta}{2} + 2A_{2,j} \cos \frac{(n-3)\theta}{2} + \dots + \frac{n}{2} A_{\frac{n}{2},j} \cos \frac{\theta}{2});$$

iii) Para n ímpar e j par,

$$R(\theta; n, j) = -2i(A_{1,j} \sin \frac{(n-1)\theta}{2} + 2A_{2,j} \sin \frac{(n-3)\theta}{2} + \dots + \frac{(n-1)}{2} A_{\frac{n-1}{2},j} \sin \frac{(n-1)\theta}{2});$$

iv) Para n ímpar e j ímpar,

$$R(\theta; n, j) = 2(A_{1,j} \cos \frac{(n-1)\theta}{2} + 2A_{2,j} \cos \frac{(n-3)\theta}{2} + \dots + \frac{(n+1)}{2} A_{\frac{n+1}{2},j}).$$

Logo,

- No caso ii) temos que $R(\pi) = 0$;
- Nos casos i) e iii) temos que $R(0) = 0$;
- No caso iii) temos que $R(\pi) = 0$.

Agora, seja $P(e^{i\theta}) = u(\theta) + iv(\theta)$. Do Lema 4.1 temos que

$$u(\theta) = \frac{n+1}{2n(\cos \theta - \cos \alpha)} + (-1)^j \frac{\sin \theta \sin(n+1)\theta}{2n(\cos \theta - \cos \alpha)^2} \quad (4.9)$$

e

$$v(\theta) = \frac{\sin \theta (1 - (-1)^j \cos(n+1)\theta)}{2n(\cos \theta - \cos \alpha)^2}. \quad (4.10)$$

Portanto, $v'(\theta) - iu'(\theta) = e^{i\theta}P'(e^{i\theta})$. De (4.4) obtemos

$$\sin \theta \, v(\theta) = \frac{\sin^2 \theta (1 - (-1)^j \cos(n+1)\theta)}{2n(\cos \theta - \cos \alpha)^2} \geq 0.$$

Esta desigualdade somente é atingida para valores de θ tais que $\sin \theta = 0$ ou $v(\theta) = 0$. Como observamos no Lema 4.2, podemos obter algumas informações sobre os zeros de $v(\theta)$. Desde que $P(e^{i(2m+1)\pi/(n+1)})$ é um polinômio real para $0 \leq m \leq n/2$ e $j \neq 2m+1$, então $v(e^{i(2m+1)\pi/(n+1)}) = 0$ para os mesmos valores m e j . Portanto, podemos concluir que, se n é par $v(\theta)$ tem $\frac{n}{2}$ zeros em $[0, \pi]$ e, se n é ímpar, $v(\theta)$ tem $\frac{n+1}{2}$ zeros em $[0, \pi]$.

O seguinte lema é uma consequência de (4.7).

Lema 4.3. *Suponhamos j ímpar.*

- i) *Se n é ímpar, então existem $(n-1)/2$ zeros de $R(\theta)$ no intervalo $(0, \pi)$.*
- ii) *Se n é par, então $R(\pi) = 0$ e existem $(n-2)/2$ zeros de $R(\theta)$ no intervalo $(0, \pi)$.*

Suponhamos j par. Então, $R(0) = 0$. Além disso,

- i) *se n é ímpar, $R(\pi) = 0$ e existem $(n-3)/2$ zeros de $R(\theta)$ no intervalo $(0, \pi)$.*
- ii) *se n é par existem $(n-2)/2$ zeros de $R(\theta)$ no intervalo $(0, \pi)$.*

Em todos os casos, os zeros de R juntamente com o ponto $\alpha = j\pi/(n+1)$, onde $v'(\alpha) = 0$ e $v(\alpha) \neq 0$, separam os zeros de v .

Demonstração: Se considerarmos $e^{i\theta}P'(e^{i\theta}) = v'(\theta) - iu'(\theta) = 0$, então $v'(\theta) = 0$ e $u'(\theta) = 0$. Por outro lado, quando n e j são fixos para valores de $\alpha = \frac{j\pi}{n+1}$, tem-se

$$e^{i\alpha}P'(e^{i\alpha}) = \begin{cases} -iR(\frac{j\pi}{n+1}; n, j), & \text{se } j \text{ é ímpar} \\ i(-1)^{j/2}R(\frac{j\pi}{n+1}; n, j), & \text{se } j \text{ é par} \end{cases}.$$

Desta última igualdade concluímos que $e^{i\theta}P'(e^{i\theta})$ é imaginário puro para qualquer valor de j , pois o polinômio $R(\theta)$ é um polinômio com valores reais para valores reais da variável θ . Isto implica que $v'(\theta) = 0$.



Então, os zeros de $e^{i\theta}P'(e^{i\theta})$ são os zeros de $R(\theta)$ e, conseqüentemente, são os zeros de $v'(\theta)$. Ainda temos que $\alpha = \frac{j\pi}{n+1}$ é zero de v' . Pelo Teorema de Rolle, entre dois zeros consecutivos de v existe pelo menos um zero de v' . Assim, os zeros de $R(\theta)$ juntamente com o ponto $\alpha = \frac{j\pi}{n+1}$ separam os zeros de v . ■

4.2 Propriedades de $P(z; n, j)$

O seguinte resultado surpreendente é uma conseqüência imediata de (4.7).

Lema 4.4. *Seja $P(z)$ dado por (4.2). Então, se $P'(e^{i\theta}) \neq 0$,*

$$\operatorname{Re} \left[\frac{e^{i\theta}P''(e^{i\theta})}{P'(e^{i\theta})} + 1 \right] = \frac{n+1}{2}. \quad (4.11)$$

Demonstração: Derivando (4.7), obtemos

$$ie^{2i\theta}P''(e^{i\theta}) + ie^{i\theta}P'(e^{i\theta}) = e^{i(n+1)\theta/2} \begin{cases} i\frac{(n+1)}{2}R(\theta) + R'(\theta), & \text{se } j \text{ é ímpar} \\ -\frac{(n+1)}{2}R(\theta) + iR'(\theta), & \text{se } j \text{ é par} \end{cases}.$$

Substituindo $e^{i(n+1)\theta/2}R(\theta)$ por $e^{i\theta}P'(e^{i\theta})$, a equação acima se torna

$$ie^{i\theta}P'(e^{i\theta}) + ie^{2i\theta}P''(e^{i\theta}) = \begin{cases} \frac{(n+1)}{2}ie^{i\theta}P'(\theta) + R'(\theta)e^{i(n+1)\theta/2}, & \text{se } j \text{ é ímpar} \\ \frac{(n+1)}{2}ie^{i\theta}P'(\theta) + iR'(\theta)e^{i(n+1)\theta/2}, & \text{se } j \text{ é par} \end{cases}.$$

Agora, dividindo esta equação por $ie^{i\theta}P'(\theta)$, obtemos

$$1 + \frac{ie^{i\theta}P''(e^{i\theta})}{P'(\theta)} = \begin{cases} \frac{(n+1)}{2} + \frac{e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}R'(\theta)}{ie^{i\theta}P'(\theta)}, & \text{se } j \text{ é ímpar} \\ \frac{(n+1)}{2} + \frac{e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}iR'(\theta)}{ie^{i\theta}P'(\theta)}, & \text{se } j \text{ é par} \end{cases}.$$

Usando novamente a igualdade $e^{i\theta}P'(e^{i\theta}) = e^{i(n+1)\theta/2}R(\theta)$ e cancelando os termos iguais desta última equação, chegaremos a

$$1 + \frac{ie^{i\theta}P''(e^{i\theta})}{P'(\theta)} = \begin{cases} \frac{(n+1)}{2} - i\frac{R'(\theta)}{R(\theta)}, & \text{se } j \text{ é ímpar} \\ \frac{(n+1)}{2} - i\frac{iR'(\theta)}{R(\theta)}, & \text{se } j \text{ é par} \end{cases}.$$

Como o polinômio $R(\theta)$ é real, concluímos que

$$\operatorname{Re} \left[1 + \frac{ie^{i\theta} P''(e^{i\theta})}{P'(\theta)} \right] = \frac{(n+1)}{2}, \text{ se } P'(e^{i\theta}) \neq 0. \quad (4.11)$$

■

Pelo Lema 4.5 podemos afirmar que a reta tangente à curva $\Gamma : P(e^{i\theta})$ com $-\pi \leq \theta \leq \pi$, torna-se constante no sentido anti-horário, com θ variando de $-\pi$ a π . Esta conclusão segue do fato de que a taxa de variação do ângulo da reta tangente dessas funções satisfaz

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \arg \frac{\partial f(e^{i\theta})}{\partial \theta} = \operatorname{Re} \left[1 + \frac{e^{i\theta} f''(e^{i\theta})}{f'(e^{i\theta})} \right]. \quad (4.12)$$

Para mostrarmos que a igualdade acima é válida, vamos considerar um ramo simples de $\{\log w\}$ (ver a definição de logaritmo na seção 2.2.4), com a seguinte representação

$$z = \operatorname{Log}|w| + i \arg w = \operatorname{Log}|w| + i \operatorname{Im} w.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \operatorname{Im} \log \left(\frac{\partial f(e^{i\theta})}{\partial \theta} \right) &= \frac{\partial}{\partial \theta} \operatorname{Im} \log(ie^{i\theta} f'(e^{i\theta})) = \operatorname{Im} \frac{\partial}{\partial \theta} \log(ie^{i\theta} f'(e^{i\theta})) \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{-e^{i2\theta} f''(e^{i\theta}) - e^{i\theta} f'(e^{i\theta})}{ie^{i\theta} f'(e^{i\theta})} \right) = \operatorname{Im} \left[i \left(\frac{e^{i\theta} f''(e^{i\theta})}{f'(e^{i\theta})} + 1 \right) \right]. \end{aligned}$$

Mas $\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Im}(i(x + iy)) = \operatorname{Im}(-y + ix) = x = \operatorname{Re}(z)$. Portanto, a taxa de variação do ângulo da reta tangente é dada pela igualdade (4.12), como tínhamos afirmado.

A reta tangente não tem este comportamento nas cúspides, onde $R(\theta) = P'(e^{i\theta}) = 0$ e a direção se inverte. Essas cúspides ocorrem em todos os zeros de $P'(z)$. Deste modo, se β é complexo e $\beta \notin \Gamma$ então $\Delta \arg[P(e^{i\theta}) - \beta] < 2\pi$, com θ variando entre zeros consecutivos de $v(\theta)$.

O Lema 4.5 vale para qualquer polinômio $P(z) = \sum_{k=1}^n a_k z^k$ cujos coeficientes satisfazem

$$(k-1)a_{k+1} = (n-k)\bar{a}_{n-k} \quad (4.13)$$



ou

$$(k-1)a_{k+1} = -(n-k)\bar{a}_{n-k}, \quad (4.14)$$

para cada k tal que $0 \leq k \leq n-1$ e $a_n \neq 0$.

Teorema 4.1. Para $n = 1, 2, 3, \dots$ e $1 \leq j \leq n$, $P(z; n, j) \in \mathcal{Q}_n$.

Demonstração: Seja $\Gamma = \{w = P(e^{i\theta}) : \theta \in [-\pi, \pi]\}$ a imagem da circunferência unitária através do polinômio P . Obviamente Γ é uma curva no plano complexo. Usando a fórmula (2.14) e escolhendo a origem, que é sempre interior à curva Γ , o número de voltas de Γ em torno de 0 é

$$n(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} P'(e^{i\theta})}{P(e^{i\theta})} d\theta.$$

Fazendo o desenvolvimento em série de Taylor da função $\frac{e^{i\theta} P'(e^{i\theta})}{P(e^{i\theta})}$ em torno de zero obtemos

$$\frac{e^{i\theta} P'(e^{i\theta})}{P(e^{i\theta})} = 1 + \text{potências positivas de } e^{i\theta}.$$

Portanto,

$$n(0) = 1. \quad (4.15)$$

Seja β um número complexo, $\beta \notin \Gamma$. Vamos mostrar que $\Delta \arg[P(e^{i\theta}) - \beta] \leq 2\pi$ quando θ percorre o intervalo $[-\pi, \pi]$. Por simetria, podemos supor que $\text{Im } \beta \geq 0$. Sejam, $-\pi = \psi_0 < 0 = \psi_1 < \psi_2 < \dots < \psi_l = \pi$, onde $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_l$ são valores de θ em $[0, \pi]$ e $0 = v(\theta) = \text{Im } P(e^{i\theta})$. Sejam L_k os segmentos de reta unindo β a $P(e^{i\psi_k})$. Para qualquer $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq l$, seja S_k o ângulo de rotação necessário para rotacionar L_{k-1} , sobre β , para L_k . Pelo Lema 4.2, segue que $\sum_{k=1}^l S_k = 2\pi$. Claramente $\Delta \arg[P(e^{i\theta}) - \beta] = S_k + 2m_k\pi$, $m_k \in \mathbb{Z}$ com θ crescendo entre dois zeros consecutivos ψ_{k-1} e ψ_k de $v(\theta)$. Pelo Lema 4.3, $m_k \leq 0$ pois $\Delta \arg[P(e^{i\theta}) - \beta] \leq \sum_{k=1}^l S_k = 2\pi$ com θ crescendo de $-\pi$ a π . Assim, a variação total do ângulo da reta tangente com relação a Γ é 2π . Portanto, Γ pode dar no máximo uma volta em torno de qualquer ponto interior à curva e a curva considerada é uma curva de Jordan. Por (4.15) e usando o Teorema 2.13, concluímos que a mudança total no ângulo da reta tangente é também 2π e que

a orientação da curva é positiva. Usando o Teorema 2.2, podemos afirmar que P assume cada ponto no interior de Γ apenas uma única vez. Portanto, $P(z; n, j)$ é univalente. ■

Algumas propriedades sobre a curva $P(e^{i\theta})$ ficam agora evidentes.

(1) Sejam j ímpar, $j = 2m + 1$, $m \in \mathbb{N}$, e $e^{i\theta} P'(e^{i\theta}) = e^{i(n+1)\theta/2} R(\theta; n, j)$ a reta tangente à curva Γ .

a) Se $\tilde{\theta} = \frac{(2m+1)\pi}{n+1}$, então $e^{i\tilde{\theta}} P'(e^{i\tilde{\theta}}) = -iR(\tilde{\theta}; n, j)$ é imaginário puro.

Logo, a reta tangente neste caso será horizontal.

b) Se $\tilde{\theta} = \frac{(2m)\pi}{n+1}$, logo $e^{i\tilde{\theta}} P'(e^{i\tilde{\theta}}) = (-1)^m R(\tilde{\theta}; n, j)$ é real e, então, a reta tangente será vertical.

c) $\text{Im}(P(e^{i\theta})) = 0$ quando $\theta = \frac{(2m+1)\pi}{n+1}$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $\theta \neq \frac{j\pi}{n+1} = \alpha$, onde α é o valor que maximiza a $\text{Im}(P(e^{i\theta}))$.

(2) Para valores pares de j as regras para os múltiplos pares e ímpares de $\pi/(n+1)$ são intercalados.

Investigaremos, agora, como se comporta a curva perto das cúspides. Lembremos que as cúspides são exatamente os pontos da curva Γ onde $e^{i\theta} P'(e^{i\theta}) = 0$. Isto equivale a

$$P'(e^{i\theta}) = e^{-i\theta}(v'(\theta) - iu'(\theta)) = 0. \quad (4.16)$$

Obviamente a igualdade (4.16) ocorre se, e somente se, $v'(\theta) = u'(\theta) = 0$, pois $e^{-i\theta}$ não se anula para $\theta \in [-\pi, \pi]$. Usando agora as formas explícitas de $u(\theta)$ e $v(\theta)$, dadas através de (4.9) e (4.10), calculemos as derivadas $v'(\theta)$ e $u'(\theta)$:

$$\begin{aligned} u'(\theta) = & \frac{1}{2n(\cos \theta - \cos \alpha)^3} [-(n+1) \sin \theta (\cos \theta - \cos \alpha) \\ & -(-1)^j \sin(n+1)\theta (\cos \theta (\cos \theta - \cos \alpha) + 2 \sin^2 \theta) \\ & -(-1)^j (n+1) \cos(n+1)\theta \sin \theta (\cos \theta - \cos \alpha)] \end{aligned}$$

e



$$v'(\theta) = \frac{1}{2n(\cos \theta - \cos \alpha)^3} [\cos \theta (1 - (-1)^j \cos(n+1)\theta) + (n+1)(-1)^j \sin \theta \sin(n+1)\theta (\cos \theta - \cos \alpha) + 2 \sin^2 \theta (1 - (-1)^j \cos(n+1)\theta)].$$

Se $u'(\theta) = 0$, então

$$\sin \theta (n+1)(\cos \theta - \cos \alpha)(1 + (-1)^j \cos(n+1)\theta) = -(-1)^j \sin(n+1)\theta (2 - \cos^2 \theta - \cos \theta \cos \alpha),$$

o que implica em

$$\frac{2 - \cos^2 \theta - \cos \alpha}{(n+1) \sin \theta (\cos \theta - \cos \alpha)} = \frac{(1 + (-1)^j \cos(n+1)\theta)}{-(-1)^j \sin(n+1)\theta}. \quad (4.17)$$

Usando, em (4.17), a igualdade trigonométrica

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{\sin A} = \frac{\sin A}{1 + \cos A},$$

obtemos

$$\frac{2 - \cos^2 \theta - \cos \theta \cos \alpha}{(n+1) \sin \theta (\cos \theta - \cos \alpha)} = \begin{cases} \tan \frac{(n+1)\theta}{2}, & j \text{ é ímpar} \\ -\cot \frac{(n+1)\theta}{2}, & j \text{ é par} \end{cases}. \quad (4.18)$$

Surpreendentemente, se $v'(\theta) = 0$ obtemos o mesmo resultado de (4.18).

Usando agora (4.8) e considerando $u'(\theta) \neq 0$, temos

$$e^{i\theta} P'(e^{i\theta}) = (\cos(n+1)\theta/2 + i \sin(n+1)\theta/2) \begin{cases} R(\theta; n, j), & \text{se } j \text{ é ímpar} \\ iR(\theta; n, j), & \text{se } j \text{ é par} \end{cases}.$$

Da igualdade acima obtemos v' e u' . Assim,

$$\frac{dv}{du} = \begin{cases} -\cot(n+1)\theta/2, & j \text{ ímpar} \\ \tan(n+1)\theta/2, & j \text{ par} \end{cases}.$$

Isto implica que $dv/du < 0$ perto das cúspides no primeiro quadrante e $dv/du > 0$ no segundo quadrante.

4.3 Propriedades Extremas

Provaremos, primeiramente, que $\mathcal{Q}_n$ é subconjunto do fecho convexo dos polinômios $P(z; n, m)$, $m = 1, \dots, n$.

Teorema 4.2. Se $q_n(z) = \sum_{k=1}^n a_k z^k \in \mathcal{Q}_n$, existem $\alpha_m \geq 0$, $m = 1, 2, \dots, n$ com $\sum_{m=1}^n \alpha_m = 1$ tais que $q_n(z) = \sum_{m=1}^n \alpha_m P(z; n, m)$. Outrossim,

- se $q_n \in \mathcal{Q}_n^+$, então $\alpha_m = 0$ para valores pares de m .
- se $q_n \in \mathcal{Q}_n^-$, então $\alpha_m = 0$ para valores ímpares de m .

Demonstração: Suponhamos $q_n \in \mathcal{Q}_n^+$ e definamos $\alpha_m = 0$ quando m é par e

$$\alpha_m = \frac{\operatorname{Im}[q_n(e^{im\pi/(n+1)})]}{\operatorname{Im}[P(e^{im\pi/(n+1)}; n, m)]} \text{ quando } m \text{ é ímpar.}$$

Seja

$$g(z) = \sum_{m=1}^n \alpha_m P(z; n, m) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{m=1}^n \alpha_m A_{k,m} \right) z^k = \sum_{k=1}^n b_k z^k.$$

Primeiramente, precisamos mostrar que, para $\theta_k = \frac{k\pi}{n+1}$ onde k é ímpar, vale

$$\operatorname{Im}[g(e^{i\theta_k}) - q_n(e^{i\theta_k})] = 0. \quad (4.19)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}[g(e^{i\theta_k}) - q_n(e^{i\theta_k})] &= \operatorname{Im}\left[\sum_{m=1}^n \alpha_m P(e^{i\theta_k}; n, m) - q_n(e^{i\theta_k})\right] \\ &= \sum_{m=1}^n \alpha_m \operatorname{Im}[P(e^{i\theta_k}; n, m)] - \operatorname{Im}[q_n(e^{i\theta_k})]. \end{aligned}$$

Nesta última equação, tirando o k -ésimo termo da primeira soma e substituindo o valor de α_k , teremos

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n \alpha_m \operatorname{Im}[P(e^{i\theta_k}; n, m)] + \frac{\operatorname{Im}[q_n(e^{i\theta_k})]}{\operatorname{Im}[P(e^{i\theta_k}; n, k)]} \operatorname{Im}[P(e^{i\theta_k}; n, k)] - \operatorname{Im}[q_n(e^{i\theta_k})] \\ = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n \alpha_m \operatorname{Im}[P(e^{i\theta_k}; n, m)]. \end{aligned}$$



Desde que $\alpha_m = 0$ para m par, na soma acima teremos apenas os termos para m ímpar. Mas, pelo Lema 4.2, $P(e^{i\theta_k}; n, m)$ é real quando k e m são ímpares. Portanto, $\text{Im}[P(e^{i\theta_k}; n, m)] = 0$ quando $k \neq m$ e $1 \leq m \leq n$. Logo, (4.19) é verdadeiro.

Assim, pelas equações (4.3), (4.13) e (4.14), sabemos que $(k+1)a_{k+1} = (n-k)a_{n-k}$ e $(k+1)A_{k+1,m} = (n-k)A_{n-k,m}$ para m ímpar. Por (4.19) e procedendo como na obtenção de (4.8), podemos mostrar que

$$\frac{d}{d\theta} \text{Im}[g(e^{i\theta}) - q_n(e^{i\theta})] = 0, \quad (4.20)$$

quando $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{n+1}$. Para este propósito, basta derivar os polinômios g e q_n com relação a θ e a equação anterior se torna

$$\sum_{m=1}^n \alpha_m \text{Im}[ie^{i\theta} P'(e^{i\theta_k}; n, m)] + \text{Im}[ie^{i\theta} q'_n(e^{i\theta})]. \quad (4.21)$$

Usando as propriedades dos coeficientes de q_n chegaremos a uma derivada parecida com a de P em (4.8). Substituindo θ_k , da mesma forma como definido acima, em (4.21) concluímos que (4.20) é verdadeira.

Contudo,

$$\text{Im}[g(e^{i\theta}) - q_n(e^{i\theta})] = \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) \text{sen } k\theta r_{n-1}(\cos \theta),$$

onde r_{n-1} é um polinômio de grau $(n-1)$. Além disso, (4.19) e (4.20) implicam que $r_{n-1}(x)$ tem $n/2$ ou $(n+1)/2$ zeros duplos em $-1 < x < 1$. Consequentemente, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, $r_{n-1} \equiv 0$. Assim, mostramos que $b_k = a_k$, $k = 1, 2, \dots, n$. Agora, escrevendo o polinômio $g(z)$ como definido acima, e utilizando a representação de P dado em (4.2), temos a igualdade

$$\begin{aligned} g(z) &= \alpha_1 P(z; n, 1) + \alpha_2 P(z; n, 2) + \dots + \alpha_n P(z; n, n) \\ &= (\alpha_1 + \dots + \alpha_n)z + \dots + \alpha_n z^n \\ &= \sum_{k=1}^n b_k z^k. \end{aligned}$$

Desta igualdade obtemos a seguinte relação entre os coeficientes de $q_n(z)$ e $g(z)$:

$$\sum_{m=1}^n \alpha_m = b_1 = a_1 = 1.$$

■



Corolário 4.1. Se $q_n \in \mathcal{Q}_n$, então

$$0 \leq \operatorname{Im}[q_n(e^{im\pi/(n+1)})] \leq \operatorname{Im}[P(e^{im\pi/(n+1)}; n, m)], \quad (4.22)$$

onde m é ímpar se $q_n \in \mathcal{Q}_n^+$ e m é par se $q_n \in \mathcal{Q}_n^-$. A igualdade é atingida quando $q_n(z) \equiv P(z; n, m)$.

Demonstração: Suponhamos que $q_n \in \mathcal{Q}_n^+$ e definimos $\alpha_m = 0$ se m é par e

$$\alpha_m = \frac{\operatorname{Im}[q_n(e^{im\pi/(n+1)})]}{\operatorname{Im}[P(e^{im\pi/(n+1)}; n, m)]}$$

se m é ímpar.

Então, $\alpha_m \geq 0$ e $\sum_{m=1}^n \alpha_m = 1$. Portanto, $0 \leq \alpha_m \leq 1$, o que implica que $0 \leq \operatorname{Im}[q_n(e^{im\pi/(n+1)})] \leq \operatorname{Im}[P(e^{im\pi/(n+1)}; n, m)]$. A igualdade só é atingida quando $\alpha_m = 1$ onde teremos $q_n(z) \equiv P(z; n, m)$. ■

Usando o Teorema 4.2 é fácil mostrar que se $q_n(z) = z + \sum_{k=1}^n a_k z^k$ os valores máximos e mínimos de a_k para $q_n \in \mathcal{Q}_n^+$ e $q_n \in \mathcal{Q}_n^-$ serão atingidos por um dos polinômios $P(z; n, j)$. Vamos agora determinar para qual valor de j $|A_{k,j}|$ é máximo.

Lema 4.5. Sejam j e k inteiros com $1 \leq k, j \leq n$. Então,

$$\left| \frac{\operatorname{sen} kj\pi/(n+1)}{\operatorname{sen} j\pi/(n+1)} \right| \leq \frac{\operatorname{sen} k\pi/(n+1)}{\operatorname{sen} \pi/(n+1)}. \quad (4.23)$$

Além disso, se n é ímpar e j é par,

$$\left| \frac{\operatorname{sen} kj\pi/(n+1)}{\operatorname{sen} j\pi/(n+1)} \right| \leq \frac{|\operatorname{sen} 2k\pi/(n+1)|}{\operatorname{sen} 2\pi/(n+1)}. \quad (4.24)$$

Demonstração: Podemos escrever

$$\left| \operatorname{sen} \frac{(k+1)j\pi}{n+1} \right| = \left| \operatorname{sen} j \left(\frac{(n+1)\pi - (k+1)\pi}{n+1} \right) \right| = \left| \operatorname{sen} \frac{j(n-k)\pi}{n+1} \right|$$

e, analogamente,

$$\left| \operatorname{sen} \frac{(n-j)k\pi}{n+1} \right| = \left| \operatorname{sen} \frac{k(j+1)\pi}{n+1} \right|.$$

Das igualdades acima, podemos supor que $k \leq (n+1)/2$ e $j \leq (n+1)/2$.

Independentemente dessas restrições sobre k e j , sempre existem números inteiros l e m , com $0 \leq l \leq \frac{n+1}{2}$, tais que $kj = m(n+1) \pm l$. De fato, vamos considerar o conjunto de pontos $\kappa = \{0, (n+1), 2(n+1), \dots, m(n+1), \dots\}$ que particionam a semi-reta positiva em intervalos de comprimento $(n+1)$. Portanto, qualquer número inteiro, inclusive kj , se encontra a uma distância no máximo $(n+1)/2$ até o ponto mais próximo do conjunto κ . Então, $\frac{kj\pi}{n+1} = m\pi \pm \frac{l\pi}{n+1}$ o que implica em

$$\operatorname{sen} \frac{kj\pi}{n+1} = \operatorname{sen} m\pi \cos \frac{l\pi}{n+1} \pm \operatorname{sen} \frac{l\pi}{n+1} \cos m\pi.$$

Portanto,

$$\left| \operatorname{sen} \frac{kj\pi}{n+1} \right| = \operatorname{sen} \frac{l\pi}{n+1}.$$

Provaremos (4.23) para vários casos possíveis de j . Se $j \geq l$, desde que a função seno é crescente em $[0, \frac{\pi}{2}]$, então

$$\operatorname{sen} \frac{j\pi}{n+1} \geq \operatorname{sen} \frac{l\pi}{n+1}.$$

Além disso, $\operatorname{sen} x$ é par em relação a $\pi/2$. Portanto,

$$\operatorname{sen} \frac{k\pi}{n+1} \geq \operatorname{sen} \frac{j\pi}{n+1}$$

quando $1 \leq k \leq n$. Isto prova que (4.23) vale para $j \geq l$.

Seja agora j ímpar com $l \leq j < \frac{n+1}{2}$. Vamos utilizar o fato de que

$$1 + 2 \sum_{m=1}^p \cos 2m\theta = \frac{\operatorname{sen} (2p+1)\theta}{\operatorname{sen} \theta}. \quad (4.25)$$

Considerando que $\theta_1 = \frac{\pi}{n+1} \leq \frac{l\pi}{j(n+1)} = \theta_2$, vemos que $\cos 2m\theta_1 \geq \cos 2m\theta_2$ quando $j = 2p+1$, $p \geq m$. Então,

$$\pi/2 \geq l\pi/(n+1) \geq 2pl\pi/[j(n+1)] \geq 2ml\pi/[j(n+1)] > 2m\pi/(n+1) > 0.$$

Portanto, (4.25) implica que $\frac{\operatorname{sen} j\theta_2}{\operatorname{sen} \theta_2} \leq \frac{\operatorname{sen} j\theta_1}{\operatorname{sen} \theta_1}$ e, por isso,

$$\frac{\operatorname{sen} l\pi/(n+1)}{\operatorname{sen} j\pi/(n+1)} \leq \frac{\operatorname{sen} l\pi/j(n+1)}{\operatorname{sen} \pi/(n+1)} \leq \frac{\operatorname{sen} k\pi/(n+1)}{\operatorname{sen} \pi/(n+1)}.$$

A última desigualdade segue do fato que $(n+1)/2 \geq k > l/j$. Assim, (4.23) fica demonstrado para j ímpar.

Se n e j são pares, teremos

$$\left| \frac{\sin kj\pi/(n+1)}{\sin j\pi/(n+1)} \right| = \left| \frac{\sin k(n+1-j)\pi/(n+1)}{\sin (n+1-j)\pi/(n+1)} \right|$$

e (4.23) segue da mesma forma que a prova anterior, pois $n+1-j$ é ímpar.

Se n é ímpar e j é par, (4.23) seguirá de (4.24), pois

$$\left| \frac{\sin 2k\pi/(n+1)}{\sin 2\pi/(n+1)} \right| = \left| \frac{\sin k\pi/(n+1)}{\sin \pi/(n+1)} \right| \left| \frac{\cos k\pi/(n+1)}{\cos \pi/(n+1)} \right| \leq \frac{\sin k\pi/(n+1)}{\sin \pi/(n+1)}.$$

A desigualdade (4.24) pode ser provada por indução. Para $n=1$ a desigualdade (4.24) é verdadeira. Se (4.24) vale para todos os valores, menos n , devemos substituir $n+1$ por $(n+1)/2$ e j por $j/2$ e aplicarmos (4.23) para obter (4.24).

Teorema 4.3. *Seja $q_n(z) = \sum_{k=1}^n a_k z^k \in \mathcal{Q}_n$. Então,*

$$|a_k| \leq \frac{n-k+1}{n} \frac{\sin k\pi/(n+1)}{\sin \pi/(n+1)} \quad (4.26)$$

se $q_n \in \mathcal{Q}_n^1$. Se $q_n \in \mathcal{Q}_n^2$, então a_k satisfaz à desigualdade

$$|a_k| \leq \frac{n-k+1}{n} \frac{|\sin 2k\pi/(n+1)|}{\sin 2\pi/(n+1)}. \quad (4.27)$$

Além disso, a igualdade em (4.26) é atingida para os coeficientes dos polinômios $P(z; n, 1)$ e $P(z; n, n)$ e, em (4.27), para os coeficientes do polinômio $P(z; n, 2)$.

Demonstração: Como na demonstração do Teorema 4.2, pelo Lema 4.5 teremos

$$a_k = \sum_{m=1}^n \alpha_m A_{k,m}$$

tal que

$$|a_k| \leq \max_{1 \leq m \leq n} |A_{k,m}| \sum_{m=1}^n \alpha_m = \max_{1 \leq m \leq n} |A_{k,m}| = |A_{k,1}|.$$

Para $q_n \in \mathcal{Q}_n^1$ a desigualdade é atingida para $P(z; n, 1)$ e $P(z; n, n)$. Se $q_n \in \mathcal{Q}_n^2$ então j é par e $\alpha_m = 0$ para m ímpar. Por isso, pelo Lema 4.5,

$$|a_k| \leq \max_{1 \leq m \leq n} |A_{k,m}| \sum_{m=1}^n \alpha_m = |A_{k,2}|.$$

A desigualdade é atingida por $P(z; n, 2)$. ■

Capítulo 5

Problemas Extremos

Vamos elaborar, neste capítulo, alguns problemas extremos sobre os polinômios e resultados que foram estudados no Capítulo 4

5.1 Os polinômios com maior área

Inicialmente, vamos considerar o primeiro problema formulado na introdução. A saber, provaremos o Teorema 1.2. Nesta seqüência, precisamos estabelecer alguns resultados técnicos preliminares com respeito ao comportamento da seqüência dada em (1.6). Começaremos com um lema simples, cuja demonstração é intuitivamente clara.

Lema 5.1. *Seja δ uma partição da reta real, isto é $\delta := \{k\alpha : k \in \mathbb{Z}\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $I = (r, s)$ e $J = (t, u)$ são dois intervalos da reta real com a propriedade $(u - t) - (s - r) > m\alpha$, então J contém pelo menos $m - 1$ pontos da partição δ a mais que o intervalo I .*

Demonstração: Sem perda de generalidade, suponhamos que I contém l pontos da partição δ na semi-reta positiva, começando do ponto α . Isto significa que $0 < s < \alpha$, $0 < r < \alpha$, $l\alpha < r < (l + 1)\alpha$. Suponhamos, novamente sem perda de generalidade, que o ponto limite à esquerda de J está no mesmo intervalo determinado por δ , assim como o limite de I . Isto significa que $0 < t < \alpha$. Então,



como $(u - t) - (s - r) > m\alpha$ obtemos

$$u > t + (s - r) + m\alpha > (l - 1)\alpha + m\alpha = (l + m - 1)\alpha.$$

Isto mostra que J deverá conter pelo menos $l + m - 1$ pontos da partição α . ■

Nosso próximo resultado diz respeito ao comportamento da sequência S_n mencionada em (1.6).

Lema 5.2. *Seja a sequência S_n definida por*

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin^2 k\pi/(n+1)}{k}.$$

Então, S_n é convergente e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S := \int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{x} dx \approx 1.21883. \quad (5.1)$$

Além disso, $S_n < S$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Escrevemos S_n da forma

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{n+1} \frac{\sin^2 k\pi/(n+1)}{k\pi/(n+1)}.$$

Considere a função

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{x}, \quad x \in [0, \pi].$$

que é contínua e possui derivada contínua até ordem dois inclusive. Observe que S_n é uma soma de Riemann para a integral

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{x} dx$$

para a partição $k\pi/(n+1)$, $k = 0, \dots, n$, onde os pontos em que o integrando é avaliado são os limites à direita ou à esquerda dos subintervalos dessa partição. Assim, como já mencionamos, o integrando é uma função contínua e, portanto, integrável. A soma de Riemann converge para a integral porque o comprimento do maior intervalo das partições é $1/(n+1)$ e tende a zero. Vale a pena mencionar

que $f(x)$ não é integrável em funções transcendentais, mas somente através de funções como a função integral cosseno definida por $Ci(x) = \int_x^\infty \cos t/t dt$. O valor da integral foi calculado pelo software "Mathematica" e é dado por

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2}(\gamma + \log(2\pi) - Ci(2\pi)) \approx 1.21883, \quad (5.2)$$

onde $\gamma \approx .577216$ é a constante de Euler. A demonstração das desigualdades $S_n < S$ requer muito mais esforço. Observe primeiro que, de fato, a soma em discussão pode ser interpretada como uma aproximação da integral acima através da regra de quadratura trapezoidal composta. Essa fórmula de quadratura para o cálculo de $F(x)$ em $[a, b]$ é dada por

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x) dx &\approx \frac{b-a}{2(n+1)} \left\{ F(a) + 2 \sum_{k=1}^n F(a + k(b-a)/(n+1)) + F(b) \right\} \\ &=: Q_{T,n+1}(F; [0, \pi]). \end{aligned}$$

Se $F \in C^2[a, b]$, então existe um ponto $\eta \in (a, b)$ tal que o erro é dado por

$$\int_a^b F(x) dx - Q_{T,n+1}(F; [a, b]) = -\frac{(b-a)^3}{12(n+1)^2} F''(\eta).$$

Aplicando a última fórmula para $F(x) = f(x) = \sin^2 x/x$ obtemos exatamente

$$S - S_n = \frac{\pi^3}{12(n+1)^2} f''(\eta).$$

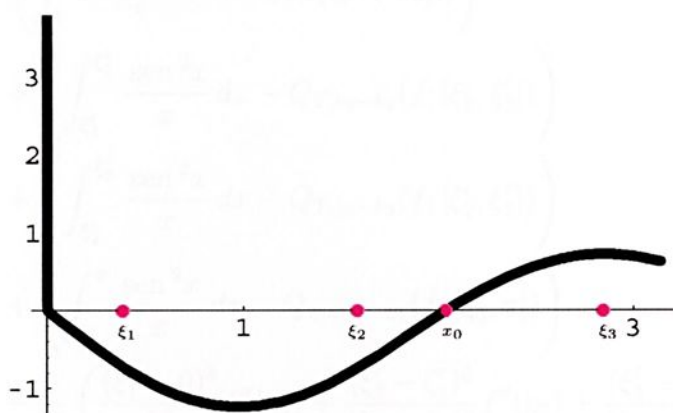
Contudo,

$$f''(x) = \frac{1 + (2x^2 - 1) \cos 2x - 2x \sin 2x}{x^3}$$

que se anula em zero e em π e, também, em alguns pontos de $(0, \pi)$. Usando alguns cálculos básicos devemos provar que existe uma única raiz x_0 da equação $f''(x) = 0$ no intervalo $(0, \pi)$. O método de Newton foi usado e obtivemos que esta raiz é aproximadamente 2.0427869428066585. Repetindo um tipo semelhante de análise podemos provar que

$$f'''(x) = \frac{-3 + 3(1 - 2x^2) \cos 2x + 2x(3 - 2x^2) \sin 2x}{x^4}$$

muda de sinal duas vezes em $(0, \pi)$ e o segundo zero será $\xi_3 \approx 2.852574845813496$. No início do intervalo, f''' é negativa, passando a positiva e, depois de ξ_3 até π , esta função torna-se negativa de novo. Então, $f''(x)$ decresce de zero a um certo valor negativo, depois cresce até anular-se em $x_0 \approx 2.0427869428066585$ e continua a crescer até atingir seu valor máximo absoluto em $[0, \pi]$ em $\xi_3 \approx 2.852574845813496$ e este valor é $f''(\xi_3) \approx 0.728506$. Os dois zeros de $f''(\xi) = -0.728506$ são $\xi_1 \approx 0.390028$ e $\xi_2 = 1.59046$ e esses, obviamente, pertencem à região onde $f''(x) < 0$. Assim, $f''(x) < -0.728506$ para $x \in (0.390028, 1.59046)$.

Gráfico de f'' em $[0, \pi]$

Agora, aplicaremos o lema anterior para os intervalos $I = [x_0, \pi]$ e $J = [\xi_1, \xi_2]$, com $m = 2$ e $\alpha = \pi/(n+1)$. Concluimos que, sempre que n é suficientemente grande de modo que $(\xi_2 - \xi_1) - (\pi - x_0) = 0.10162949192696535 > 2\pi/(n+1)$, o intervalo $[\xi_1, \xi_2]$ contém pelo menos um ponto a mais da partição $k\pi/(n+1)$, $k = 0, \dots, n+1$, que o intervalo $J = [x_0, \pi]$. Mais precisamente, a afirmação acima vale sempre que $n > 60$. No que segue, até o final desta demonstração, vamos supor que $n > 60$. Chegamos, então, à conclusão de que existem índices k_1, k_2 e k_3 tais que as seguintes afirmações valem simultaneamente:

- $\xi'_1 = k_1\pi/(n+1)$, $\xi'_2 = k_2\pi/(n+1)$ e $\xi'_3 = k_3\pi/(n+1)$;

- $\xi'_2 - \xi'_1 \geq \pi - \xi'_3$;
- $\xi_1 < \xi'_1$, $\xi'_2 < \xi_2$ e $\xi'_3 < \xi_3$.

Logo, aplicamos a fórmula para o erro nos intervalos $[0, \xi'_1]$, $[\xi'_1, \xi'_2]$, $[\xi'_2, \xi'_3]$ e $[\xi'_3, \pi]$ nesta ordem, e obtemos

$$\begin{aligned}
 S - S_n &= \int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{x} dx - Q_{T, n+1}(f; [0, \pi]) \\
 &= \left(\int_0^{\xi'_1} \frac{\sin^2 x}{x} dx - Q_{T, k_1}(f; [0, \xi'_1]) \right) \\
 &\quad + \left(\int_{\xi'_1}^{\xi'_2} \frac{\sin^2 x}{x} dx - Q_{T, k_2 - k_1}(f; [\xi'_1, \xi'_2]) \right) \\
 &\quad + \left(\int_{\xi'_2}^{\xi'_3} \frac{\sin^2 x}{x} dx - Q_{T, k_3 - k_2}(f; [\xi'_2, \xi'_3]) \right) \\
 &\quad + \left(\int_{\xi'_3}^\pi \frac{\sin^2 x}{x} dx - Q_{T, n+1 - k_3}(f; [\xi'_3, \pi]) \right) \\
 &= -\frac{1}{12} \left(\frac{(\xi'_1 - 0)^3}{k_1^2} f''(\eta_1) + \frac{(\xi'_2 - \xi'_1)^3}{(k_2 - k_1)^2} f''(\eta_2) + \frac{(\xi'_3 - \xi'_2)^3}{(k_3 - k_2)^2} f''(\eta_3) \right) \\
 &\quad - \frac{1}{12} \frac{(\pi - \xi'_3)^3}{(n+1 - k_3)^2} f''(\eta_4),
 \end{aligned}$$

onde $\eta_1 \in (0, \xi'_1)$, $\eta_2 \in (\xi'_1, \xi'_2)$, $\eta_3 \in (\xi'_2, \xi'_3)$, $\eta_4 \in (\xi'_3, \pi)$. Assim, devido ao comportamento de $f''(x)$ e da escolha dos pontos $\xi'_k = k\pi/(n+1)$, $k = 1, 2, 3$, o último termo é negativo e os três primeiros termos na última expressão são positivos. Considere a soma do segundo e quarto termos :

$$\begin{aligned}
 -\frac{(\xi'_2 - \xi'_1)^3}{(k_2 - k_1)^2} f''(\eta_2) - \frac{(\pi - \xi'_3)^3}{(n+1 - k_3)^2} f''(\eta_4) \\
 = -\frac{\pi^3}{(n+1)^3} \{ (k_2 - k_1) f''(\eta_2) + (n+1 - k_3) f''(\eta_4) \}.
 \end{aligned}$$

Devido à escolha dos pontos k_i , as seguintes propriedades valem:

- $k_2 - k_1 > n+1 - k_3$ e
- $f''(\eta) < -0.728506$ para $\eta \in (\xi'_1, \xi'_2)$ e $f''(\eta) < 0.728506$ para $\eta \in (\xi'_3, \pi)$.



Estas propriedades indicam imediatamente que a expressão entre chaves é negativa. Portanto,

$$-\frac{1}{12} \left\{ \frac{(\xi'_1 - 0)^3}{k_1^2} f''(\eta_1) + \frac{(\xi'_3 - \xi'_2)^3}{(k_3 - k_2)^2} f''(\eta_3) \right\} - \frac{1}{12} \left\{ \frac{(\xi'_2 - \xi'_1)^3}{(k_2 - k_1)^2} f''(\eta_2) + \frac{(\pi - \xi'_3)^3}{(n+1 - k_3)^2} f''(\eta_4) \right\} > 0$$

e, então, $S_n < S$ para todo $n > 60$.

Cálculos numéricos mostram que essas desigualdades valem também para os primeiros 59 números naturais. ■

Lema 5.3. *Seja a sequência $\tilde{S}_n$ definida por*

$$\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin^2 2k\pi/(n+1)}{k}.$$

Então, $\tilde{S}_n$ é convergente e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{S}_n = \tilde{S} := \int_0^\pi \frac{\sin^2 2x}{x} dx \approx 1.55718. \quad (5.3)$$

Além disso, $\tilde{S}_n < \tilde{S}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vamos utilizar os resultados desses dois lemas na próxima seção. A demonstração do último lema é muito trabalhosa e foge ao contexto deste trabalho. Por isso vamos omiti-la.

Demonstração do Teorema 1.2

Seja $q_n(z) = \sum_{k=1}^n a_k z^k$ um polinômio de grau n de $\mathcal{Q}_n$. Sabemos, da análise complexa, que a área da região cercada pela imagem do polinômio $q_n(e^{i\theta})$ é dada por

$$A(q_n) = \iint_D |q'_n(z)|^2 dz = \pi \left(a_1^2 + \frac{a_2^2}{2} + \frac{a_3^2}{3} + \dots + \frac{a_n^2}{n} \right). \quad (5.4)$$

Primeiramente, vamos resolver o problema da maior área para os polinômios $q_n \in \mathcal{Q}_n^1$. Depois, para os polinômios $q_n \in \mathcal{Q}_n^2$.

Precisamos encontrar o polinômio $q_n \in \mathcal{Q}_n^1$ cuja área, isto é, a área da imagem de D através de $q_n(e^{i\theta})$, é a maior possível. Em outras palavras, temos

que determinar o polinômio da classe $\mathcal{Q}_n^1$ com a seguinte propriedade extrema:

$$\max\{A(q_n) : q_n \in \mathcal{Q}_n^1\} =: \bar{A}(\mathcal{Q}_n^1) \quad (5.5)$$

e também encontrar o valor exato de $\bar{A}(\mathcal{Q}_n^1)$. Para este propósito, utilizaremos as desigualdades (4.26) na fórmula dada em (5.4). Então, para qualquer $q_n \in \mathcal{Q}_n^1$, temos

$$A(q_n) \leq \frac{\pi}{n^2 \sin^2 \frac{\pi}{n+1}} \sum_{k=1}^n \frac{(n-k+1)^2}{k} \sin^2 \frac{k\pi}{(n+1)}. \quad (5.6)$$

Além disso, as desigualdades (5.6) se tornam igualdades simultaneamente se, e somente se, $q_n \equiv P(z; n, 1)$ e $q_n \equiv P(z; n, n)$.

Calculando a soma dada em (5.6) obtemos,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \frac{(n-k+1)^2}{k} \sin^2 \frac{k\pi}{(n+1)} \\ &= (n+1)^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sin^2 \frac{k\pi}{(n+1)} - 2(n+1) \sum_{k=1}^n \sin^2 \frac{k\pi}{(n+1)} + \sum_{k=1}^n k \sin^2 \frac{k\pi}{(n+1)} \\ &= (n+1)^2 S_n - 2(n+1) \frac{n+1}{2} + \frac{(n+1)^2}{4} \\ &= (n+1)^2 \left(S_n - \frac{3}{4} \right). \end{aligned}$$

Assim, a maior área, entre todas as áreas das imagens do disco unitário, através de polinômios de $\mathcal{Q}_n^1$ é dada por

$$\bar{A}(\mathcal{Q}_n^1) = \max_{q_n \in \mathcal{Q}_n^1} A(q_n) = A(P(z; n, 1)) = A(P(z; n, n)) = \frac{\pi(n+1)^2}{n^2 \sin^2 \frac{\pi}{n+1}} \left(S_n - \frac{3}{4} \right).$$

As propriedades da sequência S_n , estabelecidas no Lema 5.2, garantem que

$$\bar{A}(\mathcal{Q}_n) \leq \frac{\pi(n+1)^2}{n^2 \sin^2 \frac{\pi}{n+1}} \left(S - \frac{3}{4} \right).$$

Além disso, como

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1,$$

temos

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{A}(\mathcal{Q}_n^1)}{(n+1)^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n^2 \sin^2 \frac{\pi}{n+1}} \left(\frac{1}{2} (\gamma + \log(2\pi) - Ci(2\pi)) - \frac{3}{4} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\gamma + \log(2\pi) - Ci(2\pi) - \frac{3}{2} \right) \\ &\approx 0.149232.\end{aligned}$$

O comportamento de $\max\{A(q_n) : q_n \in \mathcal{Q}_n^1\}$ é semelhante a $(n+1)^2$ à medida que $n \rightarrow \infty$.

Logo, as soluções para o problema dado em (5.5) são os seguintes polinômios:

- $P(z; n, 1)$ e $P(z; n, n)$, se n é par.
- $P(z; n, n)$, se n é ímpar.

Vamos considerar o mesmo problema para a classe $\mathcal{Q}_n^2$. Determinaremos o polinômio desta classe que será a solução do problema

$$\max_{q_n \in \mathcal{Q}_n^2} A(q_n) = \bar{A}(\mathcal{Q}_n^2). \quad (5.7)$$

Usando a desigualdade (4.27), obtemos

$$A(q_n) \leq \frac{\pi}{n^2 \sin^2 2\pi/(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{(n-k+1)^2}{k} \sin^2 2k\pi/(n+1). \quad (5.8)$$

Essa desigualdade é válida para qualquer $q_n \in \mathcal{Q}_n^2$.

Calculando a soma dada em (5.8), obtemos

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^n \frac{(n-k+1)^2}{k} \sin^2 \frac{2k\pi}{(n+1)} \\ &= (n+1)^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sin^2 \frac{2k\pi}{(n+1)} - 2(n+1) \sum_{k=1}^n \sin^2 \frac{2k\pi}{(n+1)} + \sum_{k=1}^n k \sin^2 \frac{2k\pi}{(n+1)} \\ &= (n+1)^2 \tilde{S}_n - 2(n+1) \frac{n+1}{2} + \frac{(n+1)^2}{4} \\ &= (n+1)^2 \left(\tilde{S}_n - \frac{3}{4} \right).\end{aligned}$$



Assim, a maior área, entre todas as áreas das imagens do disco unitário, através de polinômios de $\mathcal{Q}_n^2$, é dada por

$$\bar{A}(\mathcal{Q}_n^2) = \max_{q_n \in \mathcal{Q}_n^2} A(q_n) = A(P(z; n, 2)) = \frac{\pi(n+1)^2}{n^2 \sin^2 \frac{2\pi}{n+1}} \left(\tilde{S}_n - \frac{3}{4} \right).$$

As propriedades da sequência $\tilde{S}_n$ do Lema 5.2 garantem que

$$\bar{A}(\mathcal{Q}_n^2) \leq \frac{\pi(n+1)^2}{n^2 \sin^2 \frac{2\pi}{n+1}} \left(\tilde{S} - \frac{3}{4} \right).$$

Vamos usar os resultados que foram dados no Lema 5.3 para a sequência $\tilde{S}_n$ dada em (1.7). A soma em (5.8) se comporta de forma semelhante à soma em (5.5). Mais precisamente, temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{A}(\mathcal{Q}_n^2)}{(n+1)^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n^2 \sin^2 \frac{2\pi}{n+1}} \left(\frac{1}{2}(\gamma + \log(4\pi) - Ci(4\pi)) - \frac{3}{4} \right) \\ &= \frac{1}{8\pi} \left(\gamma + \log(4\pi) - Ci(4\pi) - \frac{3}{2} \right) \\ &\approx 0.0642332. \end{aligned}$$

O comportamento de $\max\{A(q_n) : q_n \in \mathcal{Q}_n^2\}$ é semelhante a $(n+1)^2$ a medida que $n \rightarrow \infty$. A solução para o problema (5.7) é o seguinte polinômio:

- $P(z; n, 2)$, se n é ímpar.



5.2 Menor Raio

Nesta seção, provaremos o Teorema 1.3 e o Corolário 1.1.

Demonstração do Teorema 1.3.

Primeiramente, vamos considerar a classe $\mathcal{Q}_n^+$. Pelo Lema 4.1 temos

$$\begin{aligned} P(-1; n, 2j+1) &= \frac{n+1}{2n(\cos \pi - \cos((2j+1)\pi/(n+1)))} \\ &= \frac{-(n+1)}{2n(1 + \cos \frac{(2j+1)\pi}{n+1})} \\ &= \frac{-(n+1)}{4n \cos^2 \frac{(2j+1)\pi}{2(n+1)}}. \end{aligned}$$

Desde que a seqüência

$$|P(-1; n, 2j+1)| = \frac{(n+1)}{4n \cos^2 \frac{(2j+1)\pi}{2(n+1)}}, \quad j = 0, 1, \dots, \frac{n-1}{2},$$

é crescente, então $|P(-1; n, 1)|$ é o menor termo desta seqüência.

Portanto,

$$R(\mathcal{Q}_n^+) \leq |P(-1; n, 1)| = \frac{(n+1)}{4n \cos^2 \frac{\pi}{2(n+1)}}.$$

Para a classe $\mathcal{Q}_n^-$ obtemos

$$\begin{aligned} P(-1; n, 2j) &= \frac{n+1}{2n(\cos \pi - \cos(2j\pi/(n+1)))} \\ &= \frac{-(n+1)}{2n(1 + \cos \frac{2j\pi}{n+1})} \\ &= \frac{-(n+1)}{4n \cos^2 \frac{j\pi}{n+1}}. \end{aligned}$$

Como a seqüência

$$|P(-1; n, 2j)| = \frac{(n+1)}{4n \cos^2 \frac{j\pi}{n+1}}, \quad j = 1, \dots, \frac{n}{2},$$

é crescente, então $|P(-1; n, 2)|$ é seu menor termo.

Portanto,

$$R(\mathcal{Q}_n^-) \leq |P(-1; n, 2)| = \frac{(n+1)}{4n \cos^2 \frac{2\pi}{n+1}}.$$



Desde que $\mathcal{Q}_n^+$ e $\mathcal{Q}_n^-$ são subclasses de $\mathcal{U}_n$, então

$$R(\mathcal{U}_n) \leq R(\mathcal{Q}_n^+) \leq \frac{(n+1)}{4n \cos^2 \frac{\pi}{2(n+1)}}. \quad (5.9)$$

Por outro lado, pelo Teorema 1/4 de Koebe, obviamente

$$R(\mathcal{U}_n) \geq 1/4. \quad (5.10)$$

Assim, a afirmação do Corolário 1.1 é consequência imediata de (5.9), (5.10) e do Teorema do Confronto.

Como mencionamos na introdução não foi possível determinar os ínfimos $R(\mathcal{Q}_n)$ para todo número natural n . Entretanto, nossos esforços nesta direção e o trabalho computacional feito, indicam que o seguinte comportamento provavelmente ocorra.

Conjectura 5.1. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Então,*

I)

$$R(\mathcal{Q}_n^+) = \inf_{q_n \in \mathcal{Q}_n^+} \inf_{|z|=1} \{|q_n(z)|\} = \frac{(n+1)}{4n \cos^2 \frac{\pi}{2(n+1)}} \quad (5.11)$$

Além disso, o ínfimo em (5.11) é atingido somente nos seguintes casos:

- i) para $q_n(z) \equiv P(z; n, 1)$ e no ponto $z = -1$, quando n é par.
- ii) para $q_n(z) \equiv P(z; n, 1)$ e nos pontos z_1 e z_2 mais próximos a -1 , onde $P'(z_1) = P'(z_2) = 0$ (cúspides), quando n é ímpar.
- iii) $q_n(z) \equiv P(z; n, n)$ e nos pontos $\tilde{z}_1$ e $\tilde{z}_2$ mais próximos a 1 , onde $P'(z_1) = P'(z_2) = 0$ (cúspides), quando n é ímpar.

II)

$$R(\mathcal{Q}_n^-) = \inf_{q_n \in \mathcal{Q}_n^-} \inf_{|z|=1} \{|q_n(z)|\} = \frac{(n+1)}{4n \cos^2 \frac{\pi}{n+1}} \quad (5.12)$$

Além disso, o ínfimo em (5.12) é atingido somente nos seguintes casos:

- i) para $q_n(z) \equiv P(z; n, n)$ e no ponto $z = 1$, quando n é par.
- ii) para $q_n(z) \equiv P(z; n, 2)$ e no ponto $z = -1$, quando n é ímpar.



iii) para $q_n(z) \equiv P(z; n, n - 1)$ e no ponto $z = 1$, quando n é ímpar.

Os seguintes gráficos mostram as imagens da circunferência unitária através dos polinômios $P(z; n, j)$ para $n=4$ e $n=5$. A região, onde o menor raio é atingido, está destacada apenas nas imagens dos polinômios que conjecturamos como sendo os extremos para o problema de menor raio.

Classe Q_4^+

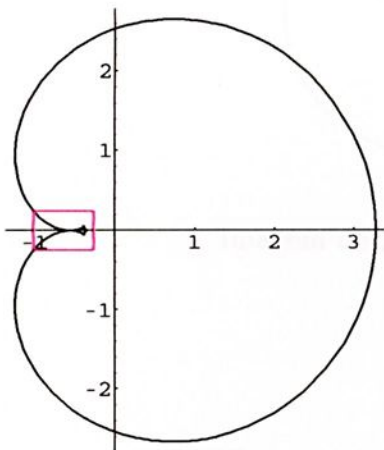
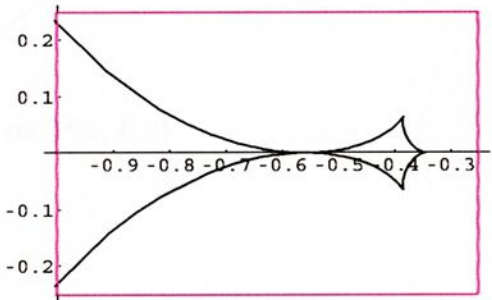


Imagem de D através de $P(z; 4, 1)$.



Região destacada da imagem ao lado.

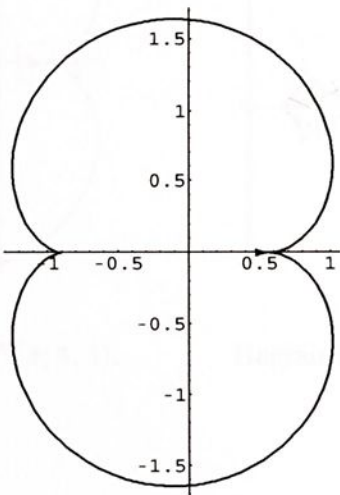


Imagem de D através de $P(z; 4, 3)$

Classe Q_4^-

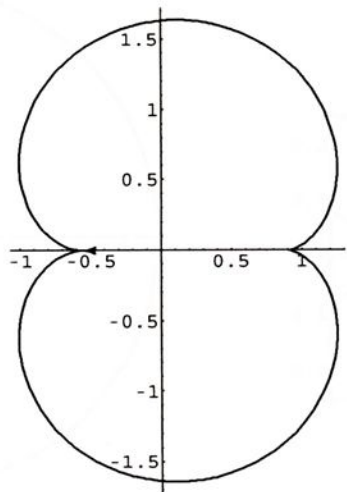


Imagem de D através de $P(z; 4, 2)$

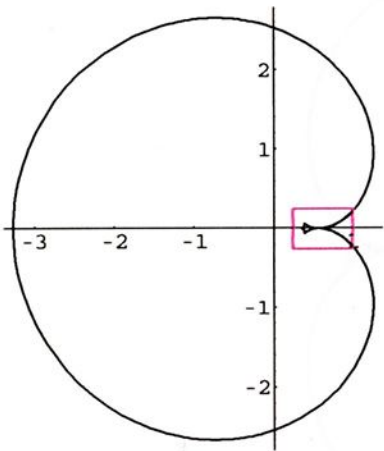
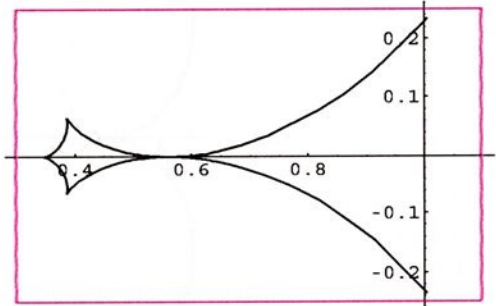


Imagem de D através de $P(z; 4, 4)$.



Região destacada da imagem ao lado.

Classe Q_5^+

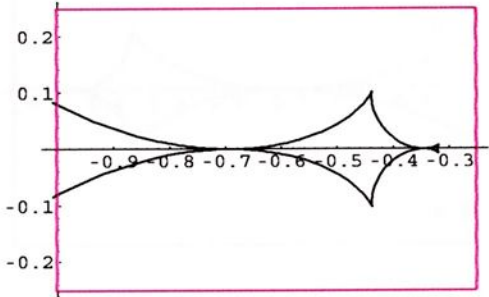
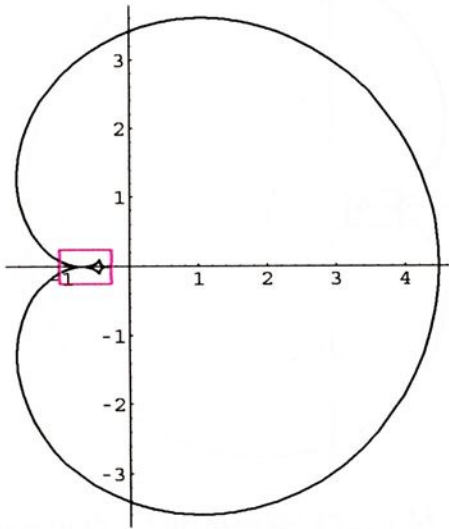


Imagem de D através de $P(z; 5, 1)$.

Região destacada da imagem ao lado.

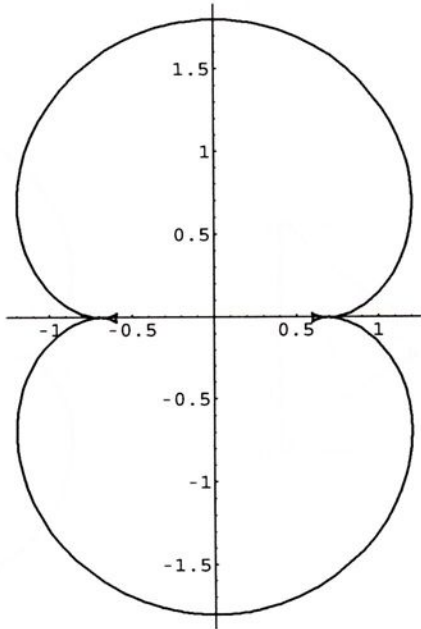


Imagem de D através de $P(z; 5, 3)$

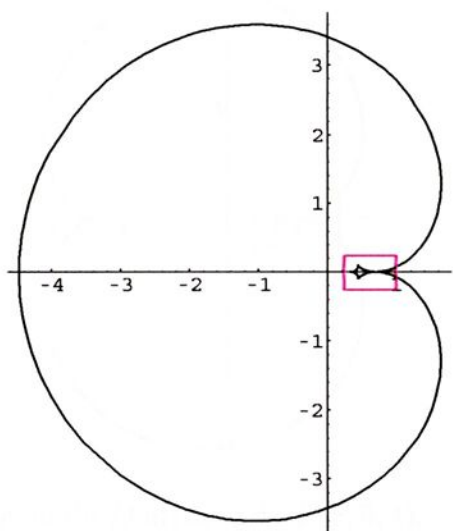
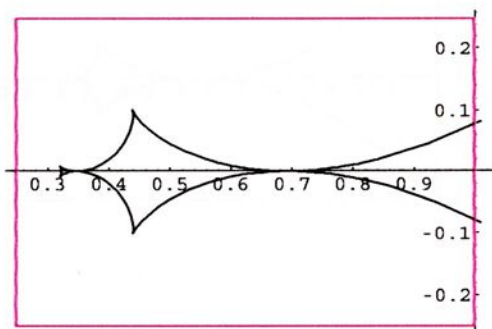


Imagem de D através de $P(z; 5, 5)$.



Região destacada da imagem ao lado.

Classe Q_5^-

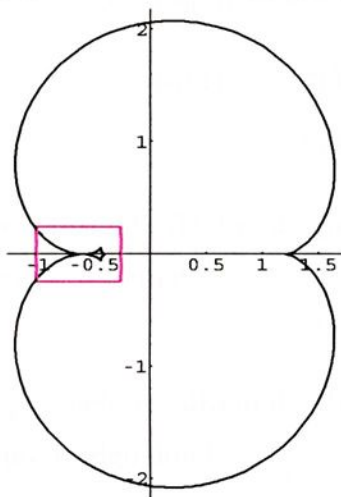
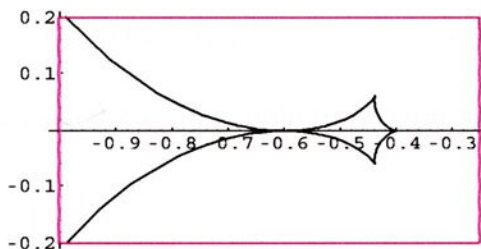


Imagem de D através de $P(z; 5, 2)$.



Região destacada da imagem ao lado.

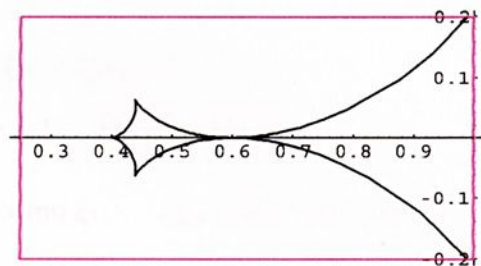
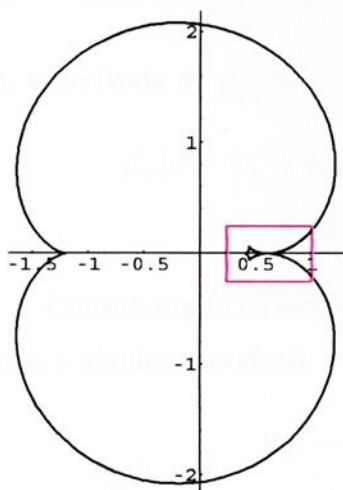


Imagem de D através de $P(z; 5, 4)$.

Região destacada da imagem ao lado.

5.3 Desigualdade sobre os zeros dos polinômios em $\mathcal{Q}_n$

Demonstração do Teorema 1.4

Considerando $p_n(z)$ com representação dada no teorema e os seus zeros não nulos $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$, vamos escrever este polinômio da seguinte forma

$$p_n(z) = z(1 + a_2 z^2 + \dots + a_n z^{n-1}) \quad (5.13)$$

$$= a_n z(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_{n-1}). \quad (5.14)$$

Usando a fórmula de Vieta, que relaciona os zeros de um polinômio com seus coeficientes, obtemos

$$|z_1 \dots z_{n-1}| = \left| -\frac{1}{a_n} \right|.$$

Desde que, pelo resultado de Dieudonné, $|a_n| \leq 1/n$, a igualdade acima torna-se a seguinte desigualdade,

$$|z_1 \dots z_{n-1}| \geq \frac{1}{\frac{1}{n}} = n.$$

Assim, verifica-se a desigualdade em (1.23) para toda função em $\mathcal{U}_n$. Além disso, podemos afirmar que, para algum k , $|z_k| \geq n^{1/(n-1)}$. Calculemos,

agora, a derivada de $p_n(z)$:

$$\begin{aligned} p'_n(z) &= 1 + 2a_2 + \cdots + (n-1)a_{n-1}z^{n-2} + a_n z^{n-1} \\ &= na_n(z - \xi_1)(z - \xi_2) \cdots (z - \xi_{n-1}). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Considerando os zeros de $p'_n(z)$ como $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$, de forma análoga calculamos o seguinte produto,

$$|\xi_1 \cdots \xi_{n-1}| = \left| -\frac{1}{na_n} \right| = \frac{1}{n|a_n|}.$$

Pelo mesmo motivo da desigualdade anterior, concluímos que

$$|\xi_1 \cdots \xi_{n-1}| \geq 1.$$

Este fato implica que, para algum k , $|\xi_k| \geq 1$. ■

Demonstração do Teorema 1.5

Analogamente ao teorema anterior, obtemos a seguinte soma:

$$|z_1 + \cdots + z_{n-1}| = \left| -\frac{a_{n-1}}{a_n} \right| = \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|}.$$

Para os polinômios em $\mathcal{Q}_n$ o último coeficiente satisfaz $|a_n| = 1/n$. Substituindo este valor e usando as desigualdades (4.26) e (4.27) do Teorema 4.3, obtemos

$$|z_1 + \cdots + z_{n-1}| \leq \begin{cases} 4 \cos \frac{\pi}{n+1}, & \text{se } q_n \in \mathcal{Q}_n^1 \\ 4 \cos \frac{2\pi}{n+1}, & \text{se } q_n \in \mathcal{Q}_n^2 \end{cases}. \quad (5.16)$$

Para a soma dos inversos de $z_1, \dots, z_{n-1}$, vamos considerar o seguinte polinômio

$$\begin{aligned} z^n p_n(1/z) &= z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n \\ &= \left(z - \frac{1}{z_1} \right) \left(z - \frac{1}{z_2} \right) \cdots \left(z - \frac{1}{z_{n-1}} \right). \end{aligned}$$

Então, a soma dos inversos torna-se

$$\left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \cdots + \frac{1}{z_{n-1}} \right| = \left| -\frac{a_2}{1} \right| = |a_2|.$$



Assim,

$$\left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \cdots + \frac{1}{z_{n-1}} \right| \leq \begin{cases} 2 \frac{(n-1)}{n} \cos \frac{\pi}{n+1}, & \text{se } q_n \in \mathcal{Q}_n^1 \\ 2 \frac{(n-1)}{n} \cos \frac{2\pi}{n+1}, & \text{se } q_n \in \mathcal{Q}_n^2 \end{cases}. \quad (5.17)$$

Para a soma de $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$, consideraremos $p'(z)$ dado em (5.15) e usando o mesmo procedimento para obtenção de (5.16) obteremos

$$|\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{n-1}| = \left| -\frac{(n-1)a_{n-1}}{na_n} \right| = \frac{|(n-1)a_{n-1}|}{|a_n|}.$$

Para os polinômios em $\mathcal{Q}_n$ o último coeficiente satisfaz $|a_n| = 1/n$. Substituindo este valor e usando as desigualdades (4.26) e (4.27) do Teorema 4.3, obtemos

$$|\xi_1 + \cdots + \xi_{n-1}| \leq \begin{cases} \frac{4(n-1)}{n} \cos \frac{\pi}{n+1}, & \text{se } q_n \in \mathcal{Q}_n^1 \\ \frac{4(n-1)}{n} \cos \frac{2\pi}{n+1}, & \text{se } q_n \in \mathcal{Q}_n^2 \end{cases}. \quad (5.18)$$

Para a soma dos inversos de $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$, consideraremos

$$\begin{aligned} z^{n-1}p'_n(1/z) &= z^{n-1} + 2a_2z^{n-2} + \cdots + (n+1)a_{n-1}z + na_n \\ &= \left(z - \frac{1}{\xi_1}\right) \left(z - \frac{1}{\xi_2}\right) \cdots \left(z - \frac{1}{\xi_{n-1}}\right). \end{aligned}$$

Com raciocínio análogo ao das somas anteriores, teremos

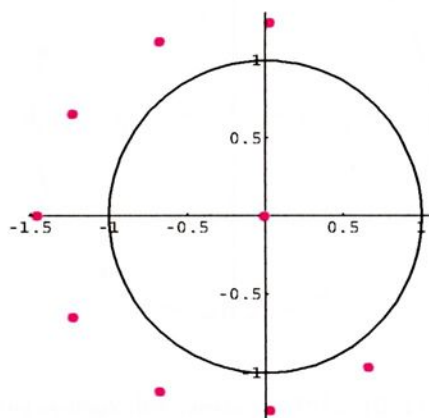
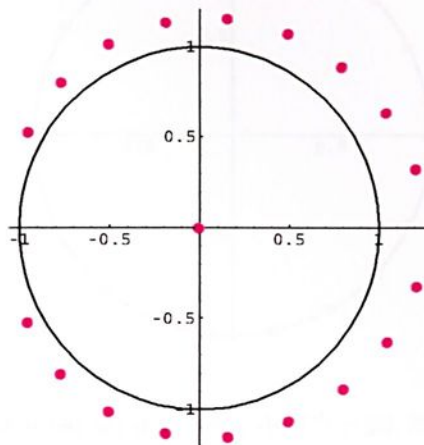
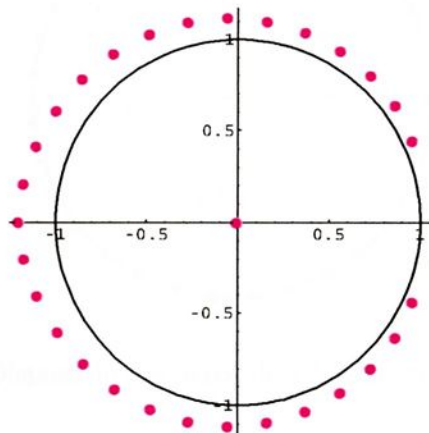
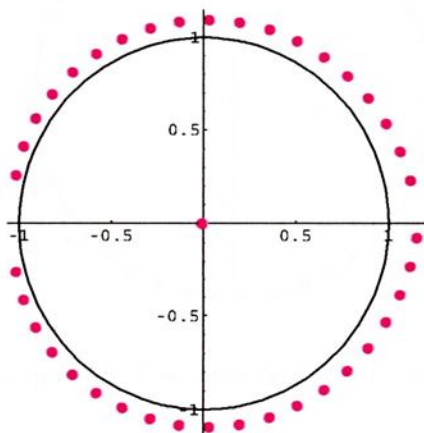
$$\left| \frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_2} + \cdots + \frac{1}{\xi_{n-1}} \right| \leq \begin{cases} 4 \frac{(n-1)}{n} \cos \frac{\pi}{n+1}, & \text{se } q_n \in \mathcal{Q}_n^1 \\ 4 \frac{(n-1)}{n} \cos \frac{2\pi}{n+1}, & \text{se } q_n \in \mathcal{Q}_n^2 \end{cases}. \quad (5.19)$$

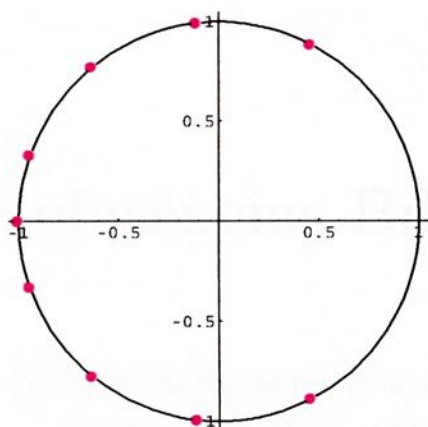
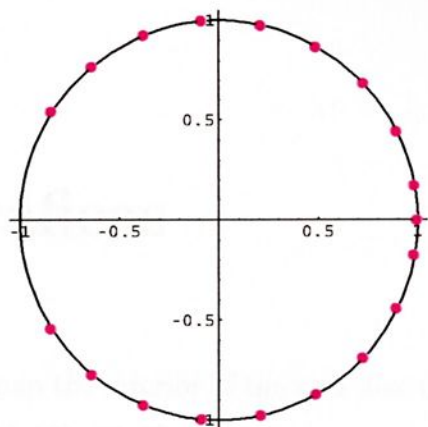
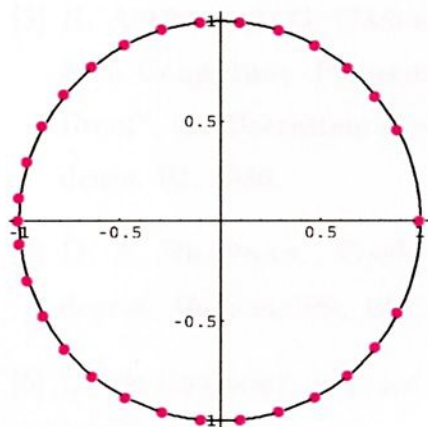
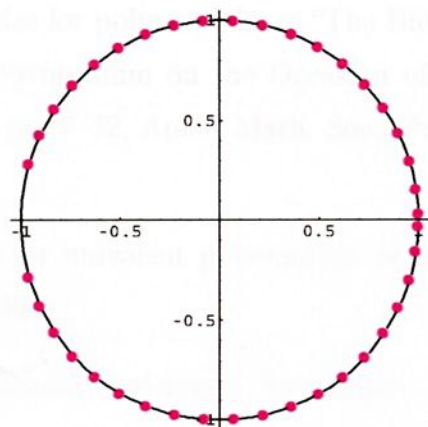
Os polinômios que atingem a igualdade em (5.16), (5.17), (5.18) e (5.19) são:

- $P(z; n, 1)$ e $P(z; n, n)$, se $q_n \in \mathcal{Q}_n^1$,
- $P(z; n, 2)$, se $q_n \in \mathcal{Q}_n^2$.

■

Vamos mostrar alguns gráficos de zeros dos polinômios P e suas derivadas. Nesses gráficos podemos observar como os zeros se distribuem no plano complexo.

Disposição dos zeros de $P(z; 10, 1)$.Disposição dos zeros de $P(z; 20, 20)$.Disposição dos zeros de $P(z; 31, 2)$.Disposição dos zeros de $P(z; 41, 41)$.

Disposição dos zeros de $P'(z; 10, 1)$.Disposição dos zeros de $P'(z; 20, 20)$.Disposição dos zeros de $P'(z; 31, 2)$.Disposição dos zeros de $P'(z; 41, 41)$.

Referências Bibliográficas

- [1] J. W. ALEXANDER, Functions which map the interior of the unit disc upon simple regions, *Ann. of Math.*, **17** (1915-16), 12-22.
- [2] R. ASKEY AND G. GASPER, Positive quadrature methods and positive polynomial sums, in "Approximation Theory, V", pp. 1-29, Academic Press, Boston, 1986.
- [3] R. ASKEY AND G. GASPER, Inequalities for polynomials, in "The Bieberbach Conjecture: Proceedings of the Symposium on the Occasion of the Proof", (A. Baernstein II et al., Eds.), pp. 7-32, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.
- [4] D. A. BRANNAN, Coefficient regions for univalent polynomials of small degree, *Mathematika*, **14** (1967), 165-169.
- [5] L. DE BRANGES, A proof of the Bieberbach conjecture, *Acta Math.*, **154** (1985), 137-152.
- [6] DE LA VALLÉE POUSSIN, Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée, *Mem. Acad. Royal Sci. Lett. Beaux-Arts Belg.*, **59** (1899), 1-74.
- [7] J. DIEUDONÉ, Recherches sur quelques problèmes relatifs aux polynômes et aux fonctions bornées d'une variable complexe, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), **48** (1931), 247-358.
- [8] L. FEJÉR, On new properties of the arithmetical means of the partial sums of Fourier series, *J. Math. Physics*, **13** (1934), 83-88.



- [9] L. FEJÉR, Untersuchungen über Potenzreihen mit mehrfach monotoren Koeffizientenfolge, *Litt. Acad. Sci. Szeged*, **8** (1936), 89–115.
- [10] L. FEJÉR AND G. SZEGÖ, Special conformal maps, *Duke Math. J.*, **18** (1951), 535–548.
- [11] A. GLUCHOFF AND F. HARTMANN, Univalent Polynomials and Non-Negative Trigonometric Sums, 1998.
- [12] P. HENRICI, Applied an Computational Complex Analysis, Volum 1, Wiley Interscience, 1988.
- [13] P. HENRICI, Applied an Computational Complex Analysis, Volum 3, Wiley Interscience, 1993.
- [14] M. G. SOARES, Cálculo em uma variável complexa, *Coleção Matemática Universitária* (1999).
- [15] G. PÓLYA AND I. J. SCHOENBERG, Remarks on de la Vallée Poussin means and convex conformal maps of the circle, *Pacific J. Math.*, **8** (1958), 295–334.
- [16] G. SCHÖBER, Univalent Functions-Selected Topics, Lectures Notes in Mathematics, Department of Mathematics, University of Maryland, College Park, 1995.
- [17] T. J. SUFFRIDGE, On Univalente Polynomials, *J. London Math. Soc.*, **44** (1969), 469-504.
- [18] E. C. TITCHMARSH, The theory of functions, Oxford Univ. Press, London, 1939.



