

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

Sistemas dissipativos e um
estudo sobre curvas extremas

Julia Gabriele de Souza Rocha

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO - SP

2022

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

“Júlio de Mesquita Filho”

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Câmpus de Rio Claro

Julia Gabriele de Souza Rocha

Sistemas dissipativos e um estudo sobre curvas extremas

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Diogo Ricardo da Costa

**Rio Claro - SP
2023**

R672s Rocha, Julia Gabriele de Souza
 Sistemas dissipativos e um estudo sobre curvas
 extremas / Julia Gabriele de Souza Rocha. -- Rio Claro,
 2022
 53 p. : il.

 Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista
 (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio
 Claro
 Orientador: Prof. Dr. Diogo Ricardo da Costa

 1. Caos. 2. Dinâmica não linear. 3. Mapeamentos. 4.
 Sistemas dissipativos. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo
autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Julia Gabriele de Souza Rocha

Sistemas dissipativos e um estudo sobre curvas extremas

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Diogo Ricardo da Costa

Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas

Prof. Dr. Rene Orlando Medrano Torricos

Resultado: APROVADO

Rio Claro - SP, 24 de Outubro de 2022

*Dedico este trabalho à minha família e amigos que tornaram esta conquista possível, amo
você.*

Agradecimentos

Agradeço inicialmente à Deus e à Nossa Senhora Aparecida, por me concederem sabedoria e permitirem que todos os obstáculos encontrados ao longo do caminho se tornassem apenas degraus que viriam a ser necessário subir para alcançar o êxito de meu trabalho.

Ao meu orientador, o professor Diogo Ricardo da Costa, pela enorme ajuda e também por acreditar e confiar em mim.

Aos meus pais e irmãos, por acreditarem em mim e por incentivarem meus estudos, estando ao meu lado diante todas as dificuldades, não medindo esforços para que este sonho se tornasse possível.

Ao meu namorado, Luam, por compartilhar desse momento especial na minha vida, se fazendo presente nos momentos bons e ruins, tornando a caminhada mais leve.

Aos professores de graduação por todos os conselhos e ajuda concedida.

Aos amigos que estiveram presentes em toda minha caminhada, que vibraram junto comigo a cada conquista obtida, me mostrando o real valor que uma amizade tem. Aos amigos do grupo de pesquisa em sistemas complexos e dinâmica não linear da UNESP - Rio Claro, por todas as contribuições e pela amizade construída, levarei vocês em meu coração.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Neste trabalho, estudaremos o mapeamento *Logistic-Gauss*. Nosso objetivo é investigar o espaço de parâmetros, que considera a variação de dois parâmetros de controle, enquanto um terceiro parâmetro permanece constante. Nossa intenção é estudar as chamadas curvas extremas. Tais curvas mostram como se dá a organização no espaço de parâmetros de estruturas CSPs (conjuntos complexos de periodicidade), que são estruturas de periodicidade imersas em caos. Essas estruturas têm o corpo principal contendo curvas superestáveis, que correspondem a curvas onde o expoente de Lyapunov tende a menos infinito. É importante enfatizar que o cruzamento de duas curvas extremas sempre ocorre em regiões periódicas. Ao aumentar o valor do terceiro parâmetro de controle, observamos o surgimento de estruturas periódicas com alta estabilidade. Mostramos também a existência de algumas curvas cíclicas superestáveis e extremas. Investigamos o espaço de parâmetros, as curvas extremas e superestáveis, explorando o diagrama de bifurcação, analisando o mapa de retorno e tentando entender a fundo o que acontece com tais sistemas, para isso utilizaremos ferramentas como o expoente de Lyapunov para caracterizar as órbitas.

Palavras-chave: caos, dinâmica não linear, mapeamentos, sistemas dissipativos.

Abstract

In this work, we study the *Logistic-Gauss* mapping. Our objective is to investigate the parameter space, which considers the variation of two control parameters, while a third parameter remains constant. Our intention is to study the so-called extreme curves. Such curves show how CSPs (complex sets of periodicities) are organized in the parameter space, which are periodic structures immersed in chaos. These structures have the main body containing superstable curves, which correspond to curves where the Lyapunov exponent tends to minus infinity. It is important to emphasize that the intersection of two extreme curves always occurs in periodic regions. By increasing the value of the third control parameter, we observed the emergence of periodic structures with high stability. We also show the existence of some superstable and extreme cyclic curves. We will investigate the parameter space, extreme and superstable curves, exploring the bifurcation diagram, analyzing the return map and trying to understand in depth what happens with such systems, for this we will use tools such as the Lyapunov exponent to characterize the orbits.

Keywords: chaos, nonlinear dynamics, mappings, dissipative systems.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Diagrama de bifurcação determinado analiticamente para os pontos fixos encontrados.	15
1.2	Mapa de retorno X_1 vs. X_0 mostrando a convergência para o ponto fixo x_2^*	16
1.3	Gráfico de bifurcação determinado numericamente.	17
1.4	Esquema da estabilidade do ponto fixo assintoticamente estável.	18
1.5	Esquema da estabilidade do ponto fixo estável.	19
1.6	Esquema da estabilidade do ponto fixo instável.	19
1.7	(a) Diagrama analítico. (b) Diagrama analítico juntamente com o numérico.	21
1.8	(a) Diagrama de bifurcação do mapa logístico (b) Expoente de Lyapunov.	24
2.1	Mapa de retorno X_1 vs. X_0 mostrando a convergência para o ponto fixo x_2^*	28
2.2	Diagrama de bifurcação para $\gamma = 2$, com bifurcação do tipo forquilha e duplicação de período.	29
2.3	Diagrama de bifurcação para $\gamma = 2$ juntamente com o expoente de Lyapunov.	30
3.1	Diagrama de bifurcação para o mapa Gauss com $\alpha = 4.9$	32
3.2	Diagrama de bifurcação para o mapa Gauss juntamente com o expoente de Lyapunov.	34
4.1	Diagrama de bifurcação para o mapa <i>Logistic-Gauss</i> , com $\gamma = 2$ e $\delta = 1.2$	36

4.2	Diagrama de bifurcação para o mapa <i>Logistic-Gauss</i> , com $\gamma = 2$ e $\delta = 1.2$ juntamente com o expoente de Lyapunov para os respectivos parâmetros. .	37
4.3	Espaço de parâmetros para γ vs. β com um valor fixo de $\delta = 0.2$. As linhas tracejadas em (a) representam as curvas de superestabilidade, enquanto que as linhas contínuas em (b) representam as curvas extremas.	39
4.4	Mapa de retorno para valor constante de $\delta = 0.2$ e diferentes combinações de β e γ . Sendo (a,b) correspondente ao ponto verde, (c,d) ao ponto azul e (e,f) ao ponto magenta, que podem ser observados na figura 4.3.	41
4.5	Espaço de parâmetros para γ vs. β com um valor fixo de $\delta = 1.5$, em que (a) temos as curvas superestáveis e em (b) temos as curvas extremas. . . .	43
4.6	Espaço de parâmetros para γ vs. β com um valor fixo de $\delta = 1.8$, em que (a) as linhas tracejadas representam as curvas superestáveis e em (b) as curvas contínuas representam as curvas extremas.	44
4.7	Diagrama de bifurcação γ vs. X para a curva extrema $(1)^{m \rightarrow r}$ mostrada na Fig. 4.6(b).	45
4.8	Espaço de parâmetros γ vs. β para $\delta = 3$, em que (a) as linhas tracejadas representam as curvas superestáveis, e em (b) as curvas contínuas representam as curvas extremas.	46
4.9	Ampliação do retângulo mostrado na Fig. 4.8(b), onde (a) representa as curvas superestáveis e em (b) as curvas contínuas representam as curvas extremas. Aqui temos várias curvas cíclicas extremas e superestáveis emergindo.	47

SUMÁRIO

Introdução	10
1 Mapa Logístico	13
1.1 Contexto histórico	13
1.2 Pontos fixos	14
1.3 Análise de estabilidade	18
1.3.1 Ponto fixo assintoticamente estável	18
1.3.2 Ponto fixo estável	19
1.3.3 Ponto fixo instável	19
1.4 Bifurcações	21
1.4.1 Bifurcação transcítica	21
1.4.2 Bifurcação de duplicação de período	22
1.4.3 Bifurcação tangente	22
1.5 Expoente de Lyapunov	22
2 Mapa <i>Logistic-like</i>	25
2.1 O mapeamento	25
2.2 Pontos fixos	25
2.3 Análise de estabilidade	26

2.4	Expoente de Lyapunov	29
3	Mapa Gauss	31
3.1	O mapeamento	31
3.1.1	Pontos fixos	31
3.1.2	Expoente de Lyapunov	33
4	Mapa <i>Logistic-Gauss</i>	35
4.1	O modelo e o mapeamento	35
4.2	Expoente de Lyapunov	36
4.3	Pontos de máximos e mínimos	38
4.4	Resultados numéricos	38
4.4.1	Resultados numéricos para $\delta = 0,2$	38
4.4.2	Resultados numéricos para $\delta = 1,5$	42
4.4.3	Resultados numéricos para $\delta = 1,8$	42
4.4.4	Resultados numéricos para $\delta = 3$	43
	Considerações Finais e Perspectivas	48
	Referências Bibliográficas	49

INTRODUÇÃO

Diversos estudos sobre sistemas dinâmicos são e foram feitos ao longo dos anos, alguns registros datam dos séculos XV e XVI, e estão ligados à mecânica celeste, entretanto, a modelagem matemática de um sistema evoluindo no tempo teve um progresso significativo com Isaac Newton e a descoberta das leis de movimentos. No campo da física, sistemas dinâmicos são descritos como uma "partícula ou conjunto de partículas", cujo estado varia ao longo do tempo, ou seja, são sistemas que obedecem a equações diferenciais envolvendo derivadas de tempo, e são utilizados para modelar e fazer previsões de sistemas físicos, biológicos, financeiros, entre outros, [1, 2, 3, 4].

Com o avanço da ciência ao longo do tempo, a busca pela compreensão de alguns fenômenos da natureza aumentou. Com este avanço tornou-se possível prever fenômenos que ocorrerão em um futuro próximo, ou ainda, resgatar eventos ocorridos no passado através de dados colhidos no presente. Nas décadas de 1970 e 1980, o meteorologista americano Edward Lorenz realizou estudos e experimentos relacionados à Teoria do Caos, o que ajudou no desenvolvimento de áreas como meteorologia, geologia e biologia. Utilizando um computador primitivo e um conjunto simples de equações que visavam a modelagem atmosférica, Lorenz esboçou os contornos de um dos primeiros reconhecidos atratores caóticos. Foi Lorenz também quem verificou a sensível dependência nas condições iniciais em sistemas dessa natureza. Após realizar seus estudos e experimentos computacionais, Lorenz obteve algumas conclusões, que resultaram no famoso efeito borboleta, o qual deu

origem à famosa frase: "*O bater de asas de uma borboleta no Brasil causaria um tornado em Texas?*"[5]

Desde então, a Teoria do Caos tem sido usada para dar explicações nos campos da física, matemática, biologia, medicina, economia, astronomia dentre diversas outras áreas [6].

Nos últimos anos, os sistemas dinâmicos tiveram vários avanços [7, 8, 9]. Em parte, o sucesso desta área está ligado ao avanço do poder computacional. Nos dias atuais, é possível simular alguns sistemas dinâmicos, que no passado eram muito difíceis de lidar. A teoria dos sistemas dinâmicos pode ser aplicada para descrever diversos tipos de problemas dos nossos dias, como fenômenos meteorológicos [10, 11], crescimento populacional [12], variações no mercado financeiro, entre outras aplicações [13, 14, 15].

Sistemas dinâmicos dissipativos tem atraído bastante atenção dos pesquisadores ao longo dos últimos anos [16, 17, 18, 19, 20, 21, 22]. Dissipações nestes sistemas podem ser introduzidas através de atrito, arrasto viscoso, colisões inelásticas, entre outros [17, 18]. Como exemplo, estudaremos alguns mapeamentos, que nada mais são do que sistemas discretos no tempo, o mais popular é o mapa logístico, que é usado para descrever a dinâmica de populações [17].

Quando trabalhamos com sistemas dissipativos, podemos, por exemplo, caracterizar crises de fronteira, duplicações de período e muitos outros fenômenos que levam ao surgimento de caos. Uma importante ferramenta que é utilizada para caracterizar caos e estruturas periódicas é o expoente de Lyapunov [23, 24, 17, 25]. Com o expoente de Lyapunov podemos variar dois parâmetros de controle do sistema e dessa forma obter o espaço de parâmetros, que mostra onde estão as estruturas periódicas. Com isso, podemos ver os famosos *shrimps* (estruturas periódicas imersas em mares caóticos). Como foi mostrado na Ref. [16], foi possível mostrar, para sistemas unidimensionais, como é a organização destes *shrimps* quando obtemos as chamadas órbitas extremas e curvas extremas.

Um comportamento típico no espaço de parâmetro são as janelas de periodicidade, onde as primeiras evidências de estudos referentes à janelas de periodicidade surgiram por volta dos anos 60 com o matemático russo Arnold. No artigo de Arnold, foi possível

observar como essas janelas periódicas são interessantes e organizadas quando tratamos de sistemas dinâmicos não lineares. Algumas estruturas tinham nomes específicos, de acordo com cada estudioso. Na década de 1980, por exemplo, a estrutura estudada por Fraser e Kapral foi denominada anzol [26], porém, hoje em dia tal estrutura é conhecida como camarão ou área de encruzilhada. Neste trabalho, adotaremos a nomenclatura adotada em [27], ou seja, chamaremos qualquer estrutura periódica imersa em caos de CSP (conjunto complexo de periodicidade).

Para estudar a organização desses CSPs, usaremos curvas extremas e superestáveis, pois através das intersecções das curvas extremas é possível obter informações sobre a dinâmica do sistema. Também podemos determinar o período da estrutura onde ocorreu tal cruzamento. As curvas superestáveis são obtidas quando o expoente de Lyapunov tende a $-\infty$ e, para saber como estas se organizarão no espaço de parâmetros, estudaremos a intersecção das extremas [16].

No capítulo 1, o intuito é explanar o mapa Logístico e suas principais características, evidenciando suas propriedades, tais como pontos fixos, análise de estabilidade e expoente de Lyapunov. Nos capítulos 2 e 3, abordaremos uma generalização do mapa Logístico, conhecido como mapa *Logistic-like* em que descrevemos o estudo de algumas propriedades dinâmicas do mesmo e o mapa Gauss respectivamente. O último capítulo, apresenta um novo mapeamento unidimensional dissipativo, o qual denominamos como mapa *Logistic-Gauss*. Analisaremos o espaço de parâmetro do novo mapeamento obtido, que mostra algumas propriedades que são bastante interessantes. Neste mapeamento, é possível visualizar o nascimento de algumas cascatas de adicionamento de período no espaço de parâmetros que considera a variação de dois parâmetros de controle β e γ , enquanto um terceiro parâmetro δ permanece constante. Por fim, apresentamos as conclusões finais e as perspectivas futuras referentes a pesquisa.

CAPÍTULO 1

MAPA LOGÍSTICO

Discutiremos, neste capítulo, o contexto histórico da construção do mapa Logístico e algumas de suas propriedades, tais como ponto fixo, bifurcações, análise de estabilidade e a caracterização do conceito de caos e regularidade do sistema por meio do cálculo do expoente de Lyapunov.

1.1 Contexto histórico

A sociedade vive uma busca insaciável pela compreensão de fenômenos da natureza, e isto é um fato antigo. Em 1798 uma dessas tentativas de previsibilidade foi realizada por Thomas Robert Malthus. O economista desenvolveu um modelo, conhecido como modelo malthusiano, no qual o mesmo afirmava que a população iria crescer tanto que seria impossível produzir alimentos suficientes para alimentar todo o planeta. Tratava-se de um modelo não linear, em que o total da população dependia unicamente das taxas de natalidade A , de mortalidade B e do número de indivíduos N [11]. A expressão matemática, que expressa tal modelo, é dada por

$$\frac{dN}{dt} = (A - B)N. \quad (1.1)$$

Posteriormente, já em 1845, surge uma nova proposta de modelo não linear, na qual a mortalidade seria proporcional ao quadrado do número de indivíduos, este modelo foi criado pelo matemático Pierre François Verhulst. Este modelo pode ser expresso pela equação diferencial

$$\frac{dN}{dt} = AN - BN^2, \quad (1.2)$$

onde N é o número de indivíduos, A é a taxa de natalidade e B a de mortalidade. Aparentemente o modelo de Verhulst surtiu mais efeito no campo desses estudos.

Em 1976, o biólogo Robert May, com o intuito de modelar o crescimento populacional anual de algumas espécies, retoma o modelo de Verhulst em forma de mapa, onde cada valor é obtido a partir do valor anterior [28]. Tal mapeamento adotado por Robert May, apresenta o crescimento de uma determinada espécie, deste modo, diversas condições poderiam interferir neste crescimento populacional, este estudo, prevê que, à medida que a população se tornasse maior, os insetos iriam esgotar seus alimentos, acarretando assim na morte de alguns deles, o que por sua vez, diminuiria no crescimento populacional desta espécie.

O mapa logístico é um mapa discreto não linear representado pela equação

$$x_{n+1} = Rx_n(1 - x_n). \quad (1.3)$$

Tal equação determina que a variável x_{n+1} é encontrada a partir de x_n , e sua evolução depende do parâmetro de controle R . O valor máximo no qual x_n pode assumir é 1, quando este se aproxima de 1, x_{n+1} será muito pequeno, entretanto quando $x_n \approx 0$, x_{n+1} se torna proporcional ao parâmetro R . Dessa forma, se x_n é o número de indivíduos da n -ésima geração, o parâmetro de controle R pode estar vinculado à quantidade de alimento, condições climáticas ou quaisquer outros parâmetros em que tal população está inserida.

1.2 Pontos fixos

O comportamento da dinâmica de um sistema geralmente tende para um ponto específico ou se afasta desse ponto após sucessivas iterações, onde estes são os chamados pontos fixos de um sistema dinâmico. Iniciaremos analisando a convergência para o ponto fixo nas bifurcações e em suas vizinhanças. Os pontos fixos são encontrados resolvendo a equação:

$$f(x^*) = x^*, \quad (1.4)$$

logo,

$$x_{n+1} = Rx_n(1 - x_n) = F(x_n, R). \quad (1.5)$$

Para calcular um ponto fixo, fazemos $x_{n+1} = x_n = x$, portanto

$$Rx(1 - x) = x, \quad (1.6)$$

então,

$$x - Rx(1 - x) = 0, \quad (1.7)$$

assim,

$$x[1 - R(1 - x)] = 0, \quad (1.8)$$

que resulta em

$$x = 0. \quad (1.9)$$

Deste modo, o primeiro ponto fixo encontrado é $x_1^* = 0$.

Resolvendo a equação a seguir, encontraremos o segundo ponto fixo

$$1 - R(1 - x) = 0, \quad (1.10)$$

resolvendo temos

$$1 = R(1 - x), \quad (1.11)$$

o que nos induz a concluir que

$$x = 1 - \frac{1}{R}. \quad (1.12)$$

Logo o segundo ponto fixo é $x_2^* = \left[1 - \frac{1}{R}\right]$.

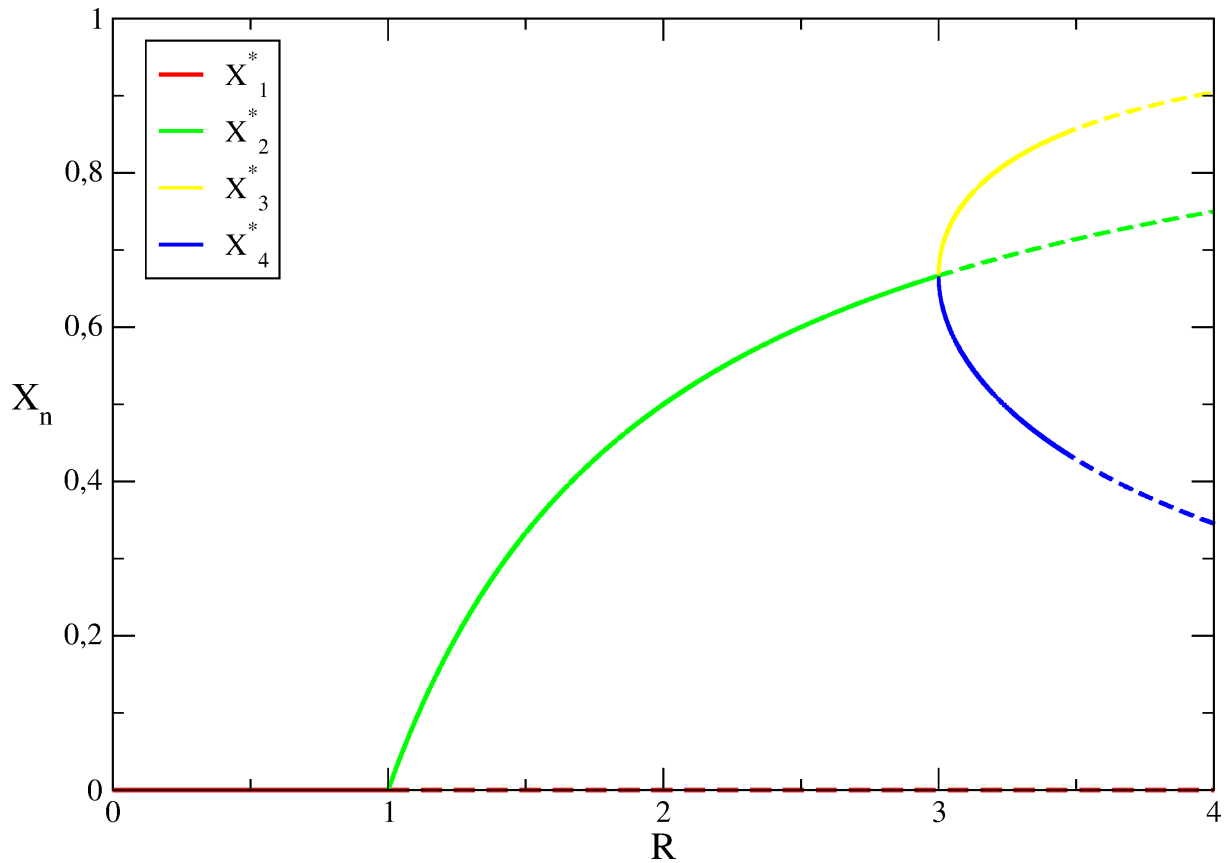


Figura 1.1: Diagrama de bifurcação determinado analiticamente para os pontos fixos encontrados.

A figura 1.2 mostra um mapa de retorno que exemplifica a convergência do ponto fixo x_2^* , em que ao escolhermos um valor de $R = 1,5$, e realizar o cálculo através da expressão 1.12 ele irá convergir para o valor de $x = 0,333$, como indica a figura.

Para determinarmos os pontos periódicos x_3^* e x_4^* , devemos obter a função $F^2(x_n)$ e

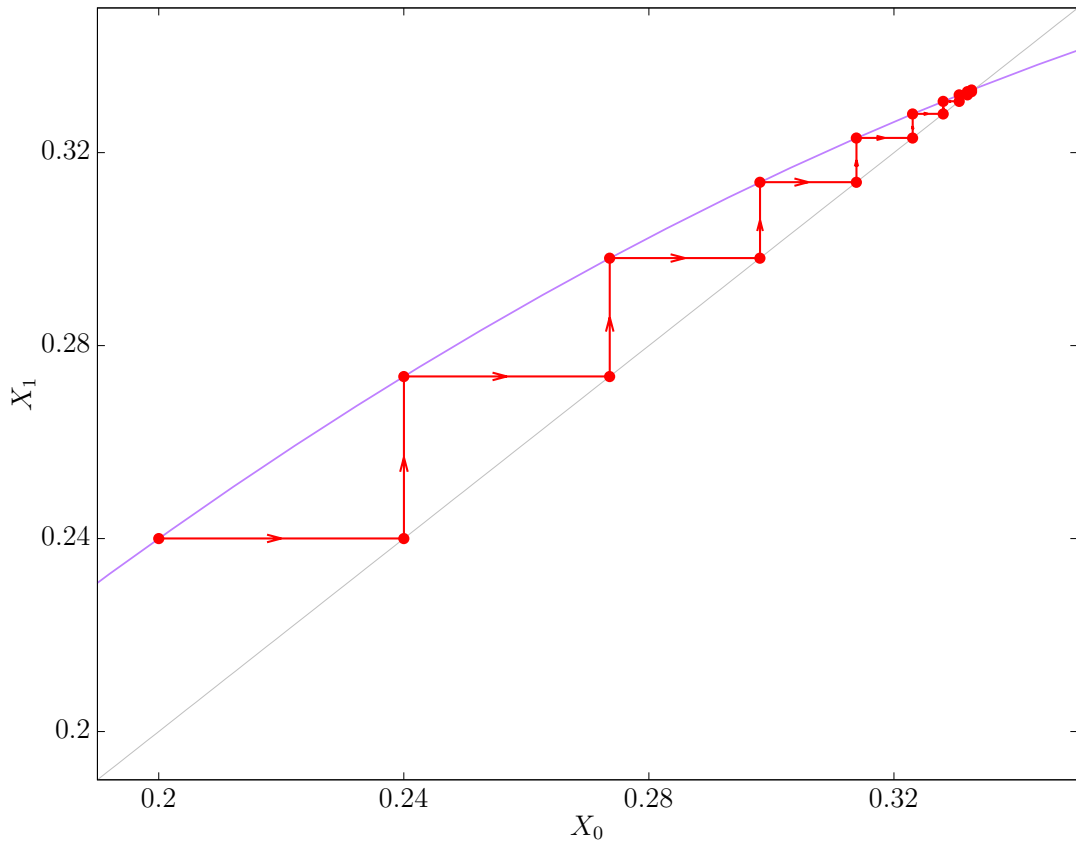


Figura 1.2: Mapa de retorno X_1 vs. X_0 mostrando a convergência para o ponto fixo x_2^* .

fazer o mesmo procedimento realizado anteriormente, o que nos leva ao seguinte resultado

$$x_{n+2} = R[Rx_n(1 - x_n)] - R[Rx_n(1 - x_n)]^2 \quad (1.13)$$

$$R^2x_n(1 - x_n) - R[R^2x_n^2(1 - x_n)^2] \quad (1.14)$$

$$R^2x_n - R^2x_n^2 - R^3x_n^2(1 - 2x_n + x_n^2) \quad (1.15)$$

$$R^2x_n - R^2x_n^2 - R^3x_n^2 + 2R^3x_n^3 + R^3x_n^4. \quad (1.16)$$

Sendo assim, para o ponto fixo temos:

$$x_{n+2} = x_{n+1} = x_n = x, \quad (1.17)$$

logo, a equação (1.16) pode ser reescrita como:

$$x[R^3x^3 - 2R^3x^2 + (R^3 + R^2)x - R^2 + 1] = 0. \quad (1.18)$$

Ao analisarmos, esta equação, é notório que os pontos fixos x_1^* e x_2^* são raízes da equação (1.16), dessa forma ela pode ser reduzida à uma equação do segundo grau:

$$R^2x^2 - (R^2 + R)x + R + 1 = 0. \quad (1.19)$$

Solucionando a equação (1.19), encontramos os pontos fixos x_3^* e x_4^* , sendo eles:

$$x_3^* = \frac{R + 1 + \sqrt{(R^2 - 2R - 3)}}{2R}, \quad (1.20)$$

e

$$x_4^* = \frac{R + 1 - \sqrt{(R^2 - 2R - 3)}}{2R}. \quad (1.21)$$

Os pontos fixos encontrados para o mapa logístico estão representados na Fig. 1.1, a qual ilustra o diagrama de bifurcações determinado analiticamente.

Uma observação que pode ser realizada após encontrar os pontos fixos para os dois primeiros períodos, foi que para os pontos fixos de período superior a abordagem analítica é bastante trabalhosa, surgindo então a necessidade de usarmos o método numérico. Para o tratamento numérico utilizamos um algoritmo em FORTRAN, através do qual foi possível traçar o diagrama de bifurcação mostrado na Fig. 1.3.

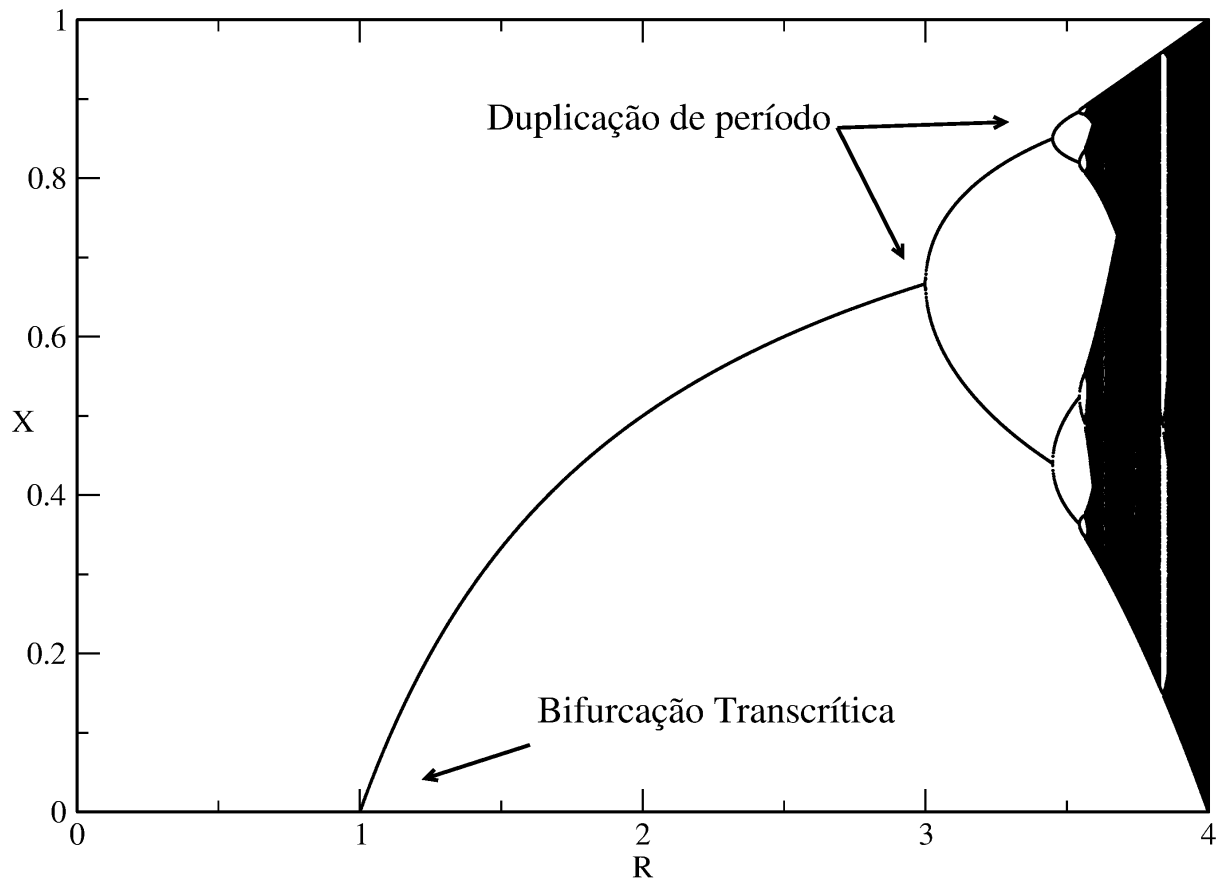


Figura 1.3: Gráfico de bifurcação determinado numericamente.

Pelo diagrama de bifurcação, é possível perceber que até um valor crítico de R o sistema possui um comportamento periódico e, a partir desse valor, o sistema passa a exibir um comportamento caótico. Em meio a região caótica é possível perceber que uma órbita completamente caótica colapsa para uma órbita periódica e que depois o sistema

evolui para uma cascata de duplicação de período, seguindo novamente para o caos. Tal comportamento se deve à perda de estabilidade do ponto fixo como veremos na próxima seção.

1.3 Análise de estabilidade

Na seção 1.3, encontramos os pontos fixos, e a partir disso, realizaremos um estudo sobre a estabilidade dos mesmos, isto é, podemos verificar se após uma dada condição inicial, a sequência de pontos se aproxima ou se afasta do ponto fixo, ou seja, deve existir um valor x^* que ao ser substituído na função $f(x^*)$, tenha como resultado o próprio valor de x^* em sucessivas aplicações. Sendo assim, a caracterização da estabilidade depende exclusivamente da sequência de pontos $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \dots$.

Os critérios de estabilidade estão divididos em pelo menos três tipos de classificação, sendo elas:

- assintoticamente estável;
- estável;
- instável.

1.3.1 Ponto fixo assintoticamente estável

Um ponto fixo é denominado assintoticamente estável quando temos $\left| \frac{df}{dx} \Big|_{x^*} \right| < 1$. Podem existir dois tipos de convergência nessa condição, monotônica ou alternada. Dizemos que uma convergência é monotônica quando temos que $0 < \frac{df}{dx} \Big|_{x^*} < 1$, ou seja, a distância entre as sucessivas iterações e o ponto fixo x^* diminui monotonicamente.

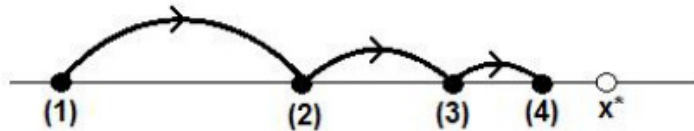


Figura 1.4: Esquema da estabilidade do ponto fixo assintoticamente estável.

Em contrapartida, a convergência alternada é determinada quando $-1 < \frac{df}{dx} \Big|_{x^*} < 0$, ou seja, essa distância também diminui, mas dessa vez de modo oscilante, uma vez para o lado direito e outra para o lado esquerdo do ponto fixo x^* .

1.3.2 Ponto fixo estável

Ao analisarmos a estabilidade de um ponto fixo estável temos duas situações críticas que devem ter uma devida atenção. A primeira está associada ao caso em que $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x^*} = 1$, pois tal condição indica que o ponto fixo x^* é estável. Afirmar que o ponto em questão pode ser assintoticamente estável ou não é inviável, portanto, se o mapa é linear, x^* é um centro; porém, se o mapa não é linear, devemos considerar termos de ordem superior na expansão de Taylor, em especial $\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x^*}$ para concluir qual a estabilidade de x^* .

A segunda é quando $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x^*} = -1$ ocorre. Tal caso é idêntico ao anterior em termos de estabilidade, porém dizemos que o sistema está num estado de *flip* incipiente, e isto ocorre quando pontos fixos estão a caminho de sofrer uma bifurcação.

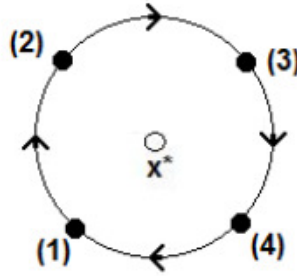


Figura 1.5: Esquema da estabilidade do ponto fixo estável.

1.3.3 Ponto fixo instável

O ponto fixo é considerado instável quando $\left|\left.\frac{df}{dx}\right|_{x^*}\right| > 1$, ou seja, as condições iniciais próximas ao ponto fixo se afastam dele após sucessivas iterações. Assim como no ponto fixo assintoticamente estável, temos dois tipos de afastamento, o primeiro ocorre quando $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x^*} > 1$. Tal condição não diz que o afastamento ocorre de forma monotônica e sempre crescente.

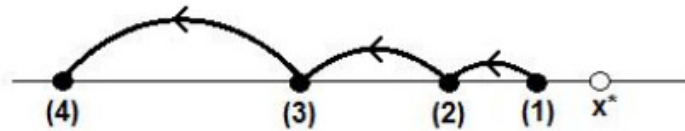


Figura 1.6: Esquema da estabilidade do ponto fixo instável.

Por outro lado, quando $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x^*} < -1$, as condições iniciais próximas ao ponto fixo se afastam dele com o decorrer do tempo de modo alternado e de forma crescente também.

Conhecendo as classificações de um ponto fixo, analisaremos os pontos fixos encontrados em (1.9), (1.12), (1.20) e (1.21). Se $|F'(x^*)| < 1$, o ponto fixo é estável, e se $|F'(x^*)| > 1$

o ponto fixo é instável. Seja o mapeamento descrito da seguinte forma:

$$F(x) = Rx - Rx^2. \quad (1.22)$$

Derivando $F(x)$, temos:

$$F'(x) = R - 2Rx. \quad (1.23)$$

Aplicando o ponto fixo x_1^* na equação (1.23), obtemos

$$F'(x_1^*) = R. \quad (1.24)$$

Desta maneira, temos que

$$|R| < 1 \quad (1.25)$$

ou, de forma semelhante, temos que

$$-1 < R < 1. \quad (1.26)$$

Como sabemos que $R \in [0, 4]$, logo não estamos interessados em valores menores que 0, portanto o primeiro ponto fixo encontrado $x_1^* = 0$ é estável para $0 < R < 1$, e instável para valores de $R > 1$.

Para o segundo ponto fixo faremos a mesma análise, onde a derivada $F(x)$ já foi encontrada, logo:

$$F'(x) = R - 2Rx. \quad (1.27)$$

Aplicando o ponto fixo x_2^* na equação (1.27), obtemos

$$F'(x_2^*) = -R + 2. \quad (1.28)$$

Desta forma, temos:

$$|-R + 2| < 1 \quad (1.29)$$

o que implica em

$$1 < R < 3. \quad (1.30)$$

Portanto o ponto fixo $x_2^* = 1 - \frac{1}{R}$ é estável para $1 < R < 3$ e instável para $R > 3$. Por fim, os pontos fixos x_3^* e x_4^* são assintoticamente estáveis para $3 < R < 1 + \sqrt{6}$.

A Fig. 1.7 (a) mostra os pontos fixos x_1^* , x_2^* , x_3^* e x_4^* , onde as linhas cheias indicam que

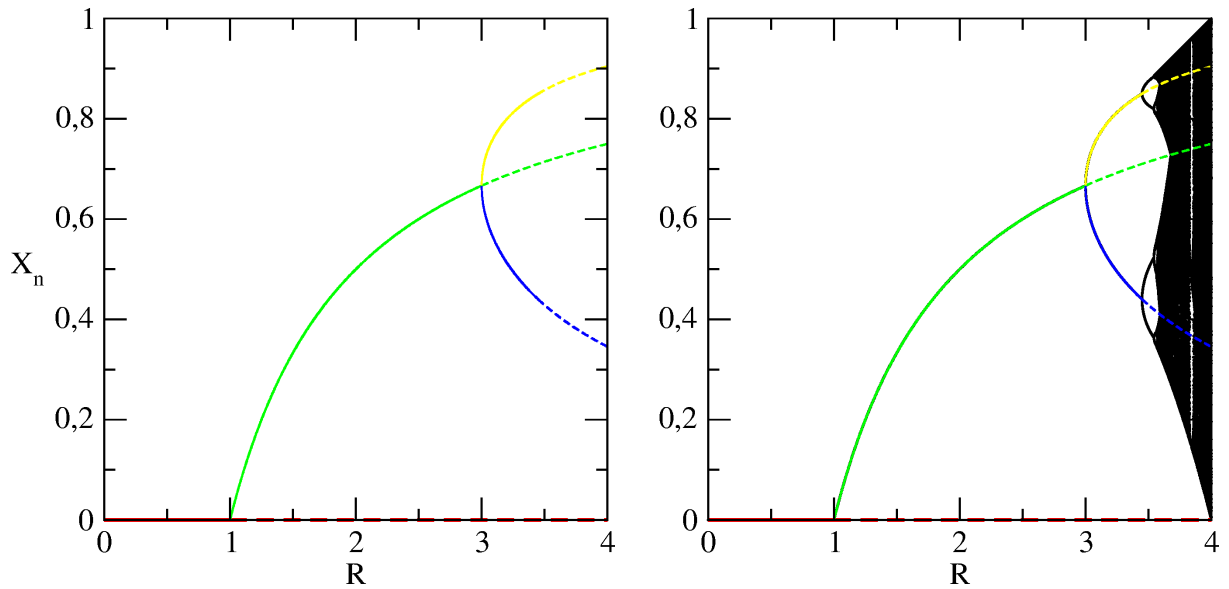


Figura 1.7: (a) Diagrama analítico. (b) Diagrama analítico juntamente com o numérico.

o ponto fixo é assintoticamente estável naquele intervalo. As linhas tracejadas indicam que o ponto fixo é instável. Algo interessante, e que vale a pena ser ressaltado, é que para $R = 1$ o mapeamento apresenta uma bifurcação transcritical e para $R = 3$ acontece uma bifurcação de duplicação de período.

A Fig. 1.7 (b) mostra o diagrama analítico juntamente com o encontrado numericamente, assim é possível notar que os resultados numéricos confirmam bem os resultados encontrados analiticamente, uma vez que o gráfico das duas abordagens se sobrepõem de maneira satisfatória.

1.4 Bifurcações

Abordaremos, nesta seção, os três tipos de bifurcações que podem ser observadas no mapa logístico, sendo estas:

- bifurcação transcritical;
- bifurcação de duplicação de período;
- bifurcação tangente.

1.4.1 Bifurcação transcritical

Uma bifurcação transcritical é caracterizada pela troca de estabilidades entre os pontos fixos, em outras palavras, antes do ponto de bifurcação temos dois pontos fixos, $x_1^* = 0$ e $x_2^* = 1 - \frac{1}{R}$. Sabemos que o ponto fixo x_1^* é assintoticamente estável para $R \in [0,1)$ e instável para $R \in (1,4]$ e o ponto fixo x_2^* é assintoticamente estável para $R \in (1,3)$ e

instável para $R < 1$ e $R > 3$. Podemos observar que os pontos fixos x_1^* e x_2^* coexistem para o intervalo $R \in [0, 4]$, no entanto, o ponto fixo x_1^* torna-se instável em $R = 1$, ao mesmo tempo que x_2^* torna-se assintoticamente estável. Portanto, satisfazendo nossa teoria, em $R = 1$ ocorre uma troca de estabilidade, e tal fato define a bifurcação transcítica.

1.4.2 Bifurcação de duplicação de período

A bifurcação que ocorre em $R = 3$, chamada de duplicação de período, ou ainda, de *flip*, ocorre quando uma órbita de período n estável torna-se instável no ponto de bifurcação, de modo que surge uma nova órbita estável de período $2n$ a partir do ponto de bifurcação. Tal acontecimento pode ser observado no ponto fixo x_2^* , de ordem n , pois o mesmo dá origem à uma órbita de período $2n$, sendo eles os pontos fixos x_3^* e x_4^* . Com a variação do parâmetro R , os pontos fixos x_3^* e x_4^* também perdem suas respectivas estabilidade, o que ocasiona novas bifurcações de duplicação de período sucessivamente, onde isto ocorre até a sequência de bifurcações atingirem ao caos.

1.4.3 Bifurcação tangente

A bifurcação tangente é outra que está presente no mapa logístico. Também conhecida como bifurcação sela-nó, está relacionada ao aparecimento de janelas periódicas e ocorre quando, antes do ponto de bifurcação, não há órbita periódica (ou ponto fixo) e depois do ponto de bifurcação surge um par de pontos fixos (ou órbitas periódicas), um estável e outro instável.

1.5 Expoente de Lyapunov

Para medirmos o quão sensível é o sistema dinâmico, é necessário medirmos a taxa com a qual dois pontos muito próximos se distanciam mediante a evolução do sistema. Esse procedimento pode ser utilizado em qualquer mapeamento discreto unidimensional. Tal ferramenta é conhecida como expoente de Lyapunov, e é utilizada para medir a taxa de divergência das trajetórias e quantificar a dependência sensível das condições iniciais.

Para ilustrar como obtemos o expoente de Lyapunov, considere o seguinte mapeamento unidimensional:

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (1.31)$$

em que f é uma função não linear qualquer. Consideremos dois pontos iniciais a_0 e b_0 e a distância entre eles igual a:

$$\delta = b_0 - a_0. \quad (1.32)$$

Ao iterarmos o mapa uma vez, a nova distância será:

$$\delta_1 = b_1 - a_1, \quad (1.33)$$

tal que

$$\delta_1 = e^L \delta, \quad (1.34)$$

em que L mede a taxa exponencial de expansão da distância de δ até a distância δ_1 como resultado após uma iteração. Sabemos que $a_1 = F(a_0)$ e $b_1 = F(b_0)$, então a equação (1.33), pode ser reescrita como

$$\delta_1 = F(b_0) - F(a_0), \quad (1.35)$$

utilizando a equação (1.32) temos que

$$\delta_1 = F(a_0 + \delta) - F(a_0). \quad (1.36)$$

Portanto

$$|F(a_0 + \delta) - F(a_0)| = |\delta|e^L. \quad (1.37)$$

Após iterarmos o mapa N vezes temos:

$$|F^N(a_0 + \delta) - F^N(a_0)| = |\delta|e^{LN}. \quad (1.38)$$

Tomando o logaritmo natural dos dois lados da equação anterior podemos reescrever a eq. 1.38 como:

$$L = \frac{1}{N} \ln \left| \frac{F^N(a_0 + \delta) - F^N(a_0)}{\delta} \right|. \quad (1.39)$$

Sabemos que L depende de N e δ , consideremos então uma distância inicial infinitesimal $\delta \rightarrow 0$ depois de um número infinito de iterações $N \rightarrow \infty$. Portanto temos que

$$\lambda(a_0) \equiv L(a_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{F^N(a_0 + \delta) - F^N(a_0)}{\delta} \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{dF^N(a_0)}{da_0} \right| \quad (1.40)$$

Utilizando a regra da cadeia podemos reescrever a eq. 1.40 como:

$$\frac{d}{da_0} F^N(a_0) = \frac{d}{da_0} F(a_{N-1}) \frac{d}{da_0} F \left(a_{N-2} \dots \frac{d}{da_0} F(a_0) \right) \quad (1.41)$$

onde $a_i = F^i(a_0)$ é o resultado da i -ésima iteração do mapa. Simplificando esta última

equação, chegamos em

$$\lambda(a_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \prod_{i=0}^{N-1} \frac{d}{da_0} F(a_i) \right|, \quad (1.42)$$

que pode ser escrito como

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |F'(a_i)|. \quad (1.43)$$

A eq. (1.43) é, por definição, o expoente de Lyapunov característico para um mapeamento unidimensional. Analisando os sinais, podemos dizer que a divergência exponencial é caracterizada por um $\lambda > 0$ positivo e a contração por um $\lambda < 0$ negativo, enquanto um $\lambda = 0$ ocorre quando temos um ponto de bifurcação. A figura 1.8 a seguir mostra o diagrama de bifurcação juntamente com o expoente de Lyapunov para o mapa Logístico. Analisando a Fig. 1.8 percebemos que: (1) nos pontos de bifurcação o expoente de Lyapunov é nulo; (2) é negativo nas regiões periódicas, incluindo as janelas de periodicidade; (3) positivo nas regiões caóticas.

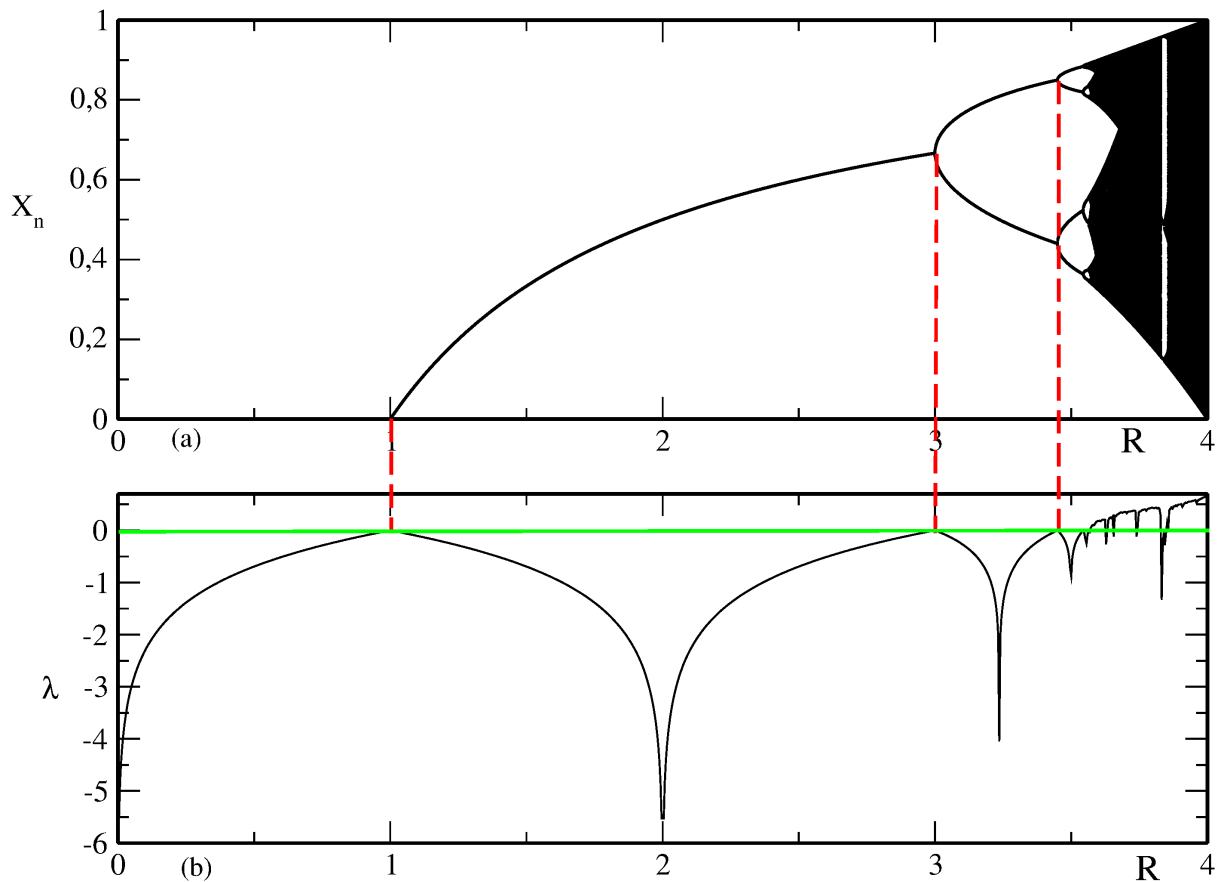


Figura 1.8: (a) Diagrama de bifurcação do mapa logístico (b) Expoente de Lyapunov.

CAPÍTULO 2

MAPA *LOGISTIC-LIKE*

Abordaremos, neste capítulo, uma versão generalizada do mapa Logístico discutido no capítulo anterior, o qual é nomeado *Logistic-like*. Discutiremos as principais propriedades do mapeamento tais como pontos fixos e suas classificações, os tipos de bifurcações e o expoente de Lyapunov para caracterizar as regiões caótica e periódicas do mapeamento.

2.1 O mapeamento

O mapa *Logistic-like* é escrito como uma versão generalizada do mapa Logístico e é dado por

$$x_{n+1} = f(x_n) = Rx_n(1 - x_n^\gamma), \quad (2.1)$$

em que $R \in \mathbb{R} \geq 0$, $\gamma \geq 1$ e x é a variável dinâmica. Para $\gamma = 1$ retornamos para o mapa Logístico.

2.2 Pontos fixos

Para encontrarmos os pontos fixos da eq. (2.2), realizamos o mesmo procedimento usado para encontrar os pontos fixos do mapa Logístico, ou seja, considerando a condição:

$$x_{n+1} = x_n = x^*, \quad (2.2)$$

portanto

$$Rx(1 - x^\gamma) = x, \quad (2.3)$$

logo,

$$x - Rx(1 - x^\gamma) = 0, \quad (2.4)$$

que nos leva ao resultado

$$x[1 - R(1 - x^\gamma)] = 0. \quad (2.5)$$

Então, o primeiro ponto fixo é $x_1^* = 0$.

Para acharmos o segundo ponto fixo, solucionamos a seguinte equação:

$$1 - R(1 - x^\gamma) = 0, \quad (2.6)$$

logo

$$x^\gamma = 1 - \frac{1}{R}, \quad (2.7)$$

sendo assim, o segundo ponto fixo é $x_2^* = \left[1 - \frac{1}{R}\right]^{\frac{1}{\gamma}}$ para γ par.

2.3 Análise de estabilidade

Tendo definidos os pontos fixos na seção anterior, abordaremos agora sua estabilidade. Se $|F'(x^*)| < 1$, o ponto fixo é estável, e se $|F'(x^*)| > 1$ o ponto fixo é instável. Seja o mapeamento descrito da seguinte forma:

$$x_{n+1} = f(x_n) = Rx_n(1 - x_n^\gamma). \quad (2.8)$$

Derivando, temos

$$f'(x) = R[1 - (\gamma + 1)x^\gamma]. \quad (2.9)$$

Aplicando o primeiro ponto fixo $x_1^* = 0$, na equação (2.9) temos

$$f'(x_1^*) = R, \quad (2.10)$$

sendo assim

$$|R| < 1 \quad (2.11)$$

$$-1 < R < 1. \quad (2.12)$$

Como sabemos que $R \geq 0$, desconsideramos os valores negativos, tendo portanto que $0 \leq R < 1$, o que nos leva a dizer que o ponto fixo $x_1^* = 0$ é assintoticamente estável para

$R \in [0,1)$.

Para o segundo ponto fixo, $x_2^* = \left[1 - \frac{1}{R}\right]^{\frac{1}{\gamma}}$, faremos a mesma análise, porém tal análise exigirá que separemos em dois casos, quando γ for par e quando o mesmo for ímpar. Para γ par, temos:

$$x_2^* = \pm \left[1 - \frac{1}{R}\right]^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (2.13)$$

assim, teremos dois pontos fixos. Analisando a estabilidade para estes pontos temos:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = R - R(\gamma + 1)x^\gamma, \quad (2.14)$$

logo

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_2^* = \pm \left[1 - \frac{1}{R}\right]^{\frac{1}{\gamma}}} = R - R(\gamma + 1) \left[\pm \left(1 - \frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \right]^\gamma. \quad (2.15)$$

Sendo γ par, temos

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_2^* = \pm \left[1 - \frac{1}{R}\right]^{\frac{1}{\gamma}}} = 1 + \gamma - \gamma R, \quad (2.16)$$

e para ser assintoticamente estável devemos ter

$$\left| \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=x^*} \right| < 1. \quad (2.17)$$

Consequentemente

$$-1 < 1 + \gamma - \gamma R < 1, \quad (2.18)$$

que resulta em

$$\frac{2 + \gamma}{\gamma} > R > 1. \quad (2.19)$$

A figura 2.1 nos mostra através do mapa de retorno, a convergência do ponto fixo x_2^* , em que ao escolhermos uma valor de $R = 1,5$, e realizar o cálculo através da expressão 2.13 ele irá convergir para o valor de $x = 0,577$, como indica a figura. Dessa forma, $x_2^* = \pm \left[1 - \frac{1}{R}\right]^{\frac{1}{\gamma}}$ é assintoticamente estável para $R \in \left(1, \frac{2+\gamma}{\gamma}\right)$. Em $R = 1$ temos uma bifurcação do tipo forquilha. Analisando agora para γ ímpar, temos apenas um ponto fixo dado por $x_2^* = \left[1 - \frac{1}{R}\right]^{\frac{1}{\gamma}}$. Da mesma maneira

$$\frac{\partial F}{\partial x} = R - R(\gamma + 1)x^\gamma. \quad (2.20)$$

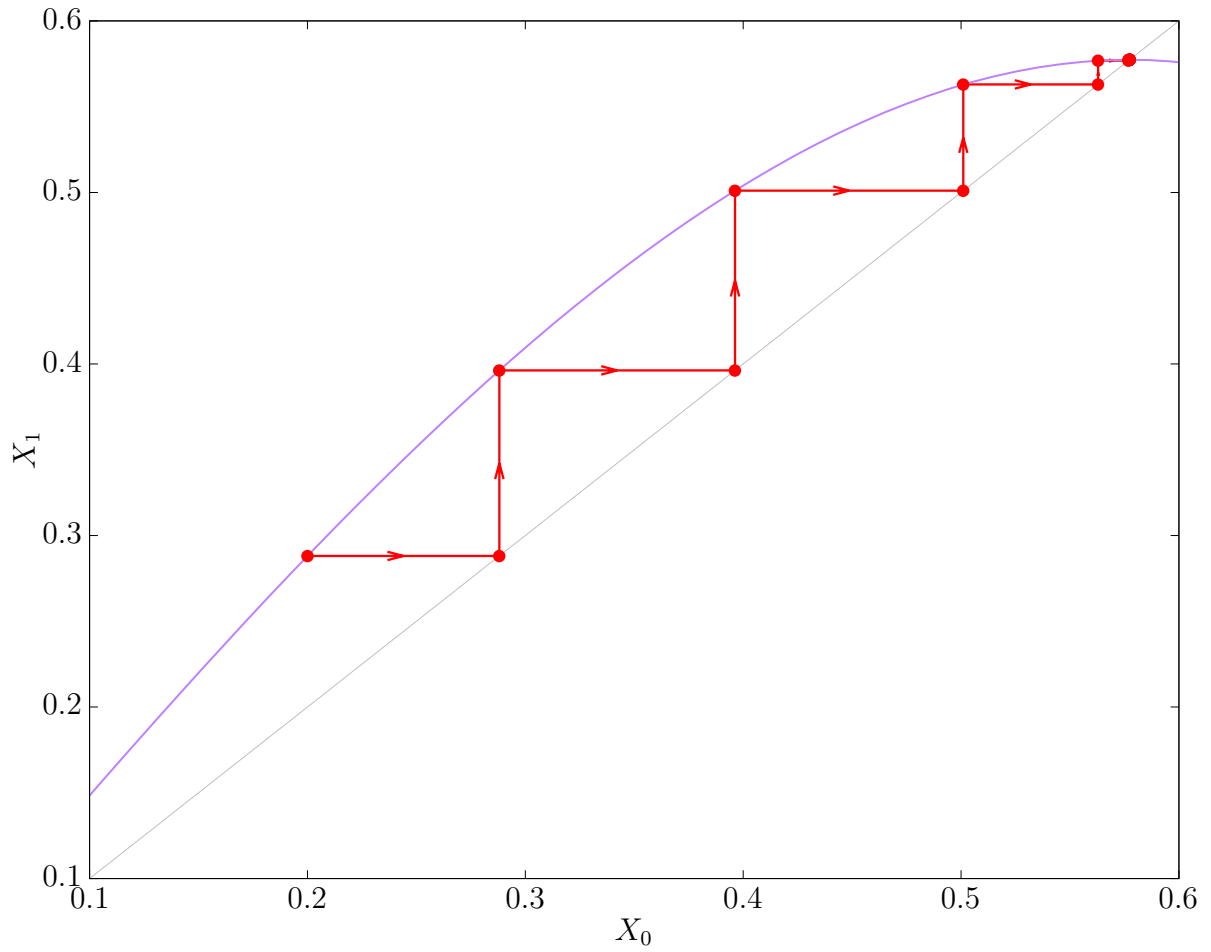


Figura 2.1: Mapa de retorno X_1 vs. X_0 mostrando a convergência para o ponto fixo x_2^* .

Portanto

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_2^* = [1 - \frac{1}{R}]^{\frac{1}{\gamma}}} = 1 + \gamma - \gamma R. \quad (2.21)$$

Para este ponto fixo ser assintoticamente estável devemos ter:

$$\left| \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=x^*} \right| < 1. \quad (2.22)$$

logo

$$-1 < 1 + \gamma - \gamma R < 1, \quad (2.23)$$

que implica em

$$\frac{2 + \gamma}{\gamma} > R > 1. \quad (2.24)$$

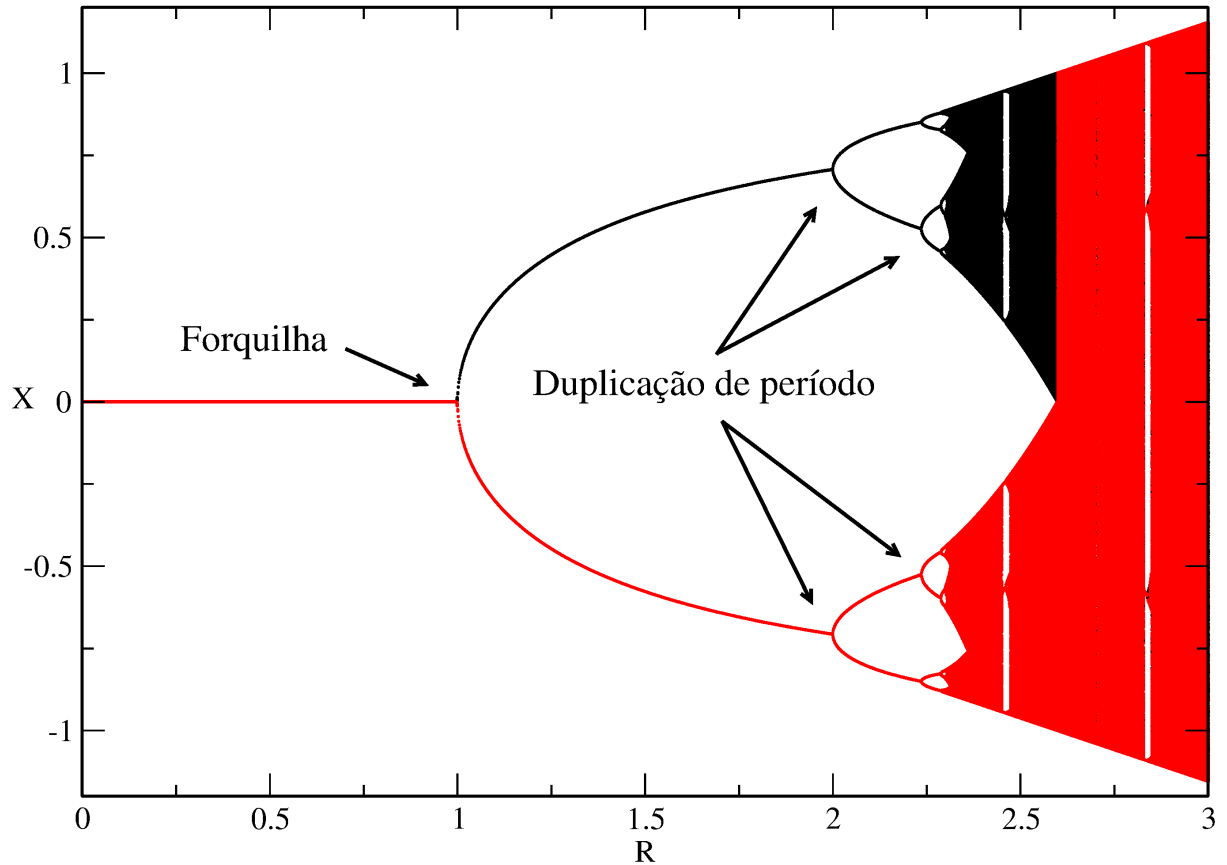


Figura 2.2: Diagrama de bifurcação para $\gamma = 2$, com bifurcação do tipo forquilha e duplicação de período.

Temos então que $x = \left[1 - \frac{1}{R}\right]^{\frac{1}{\gamma}}$ é assintoticamente estável para $R \in \left(1, \frac{2+\gamma}{\gamma}\right)$.

2.4 Expoente de Lyapunov

Assim como no Cap. 1, caracterizaremos o mapeamento por meio do expoente de Lyapunov, com o objetivo de determinar e analisar o comportamento caótico do mapa *Logistic-like*.

A figura 2.3 mostra o diagrama de bifurcação, juntamente com o expoente de Lyapunov, para o mapa *Logistic-like*, onde foi considerado $\gamma = 2$. Observando a figura 2.3, e analisando os intervalos em que λ é menor que zero o sistema tem um comportamento periódico, quando λ é maior que zero o sistema tem um comportamento caótico, e quando o expoente de Lyapunov é igual a zero, estamos nas bifurcações do mapeamento.

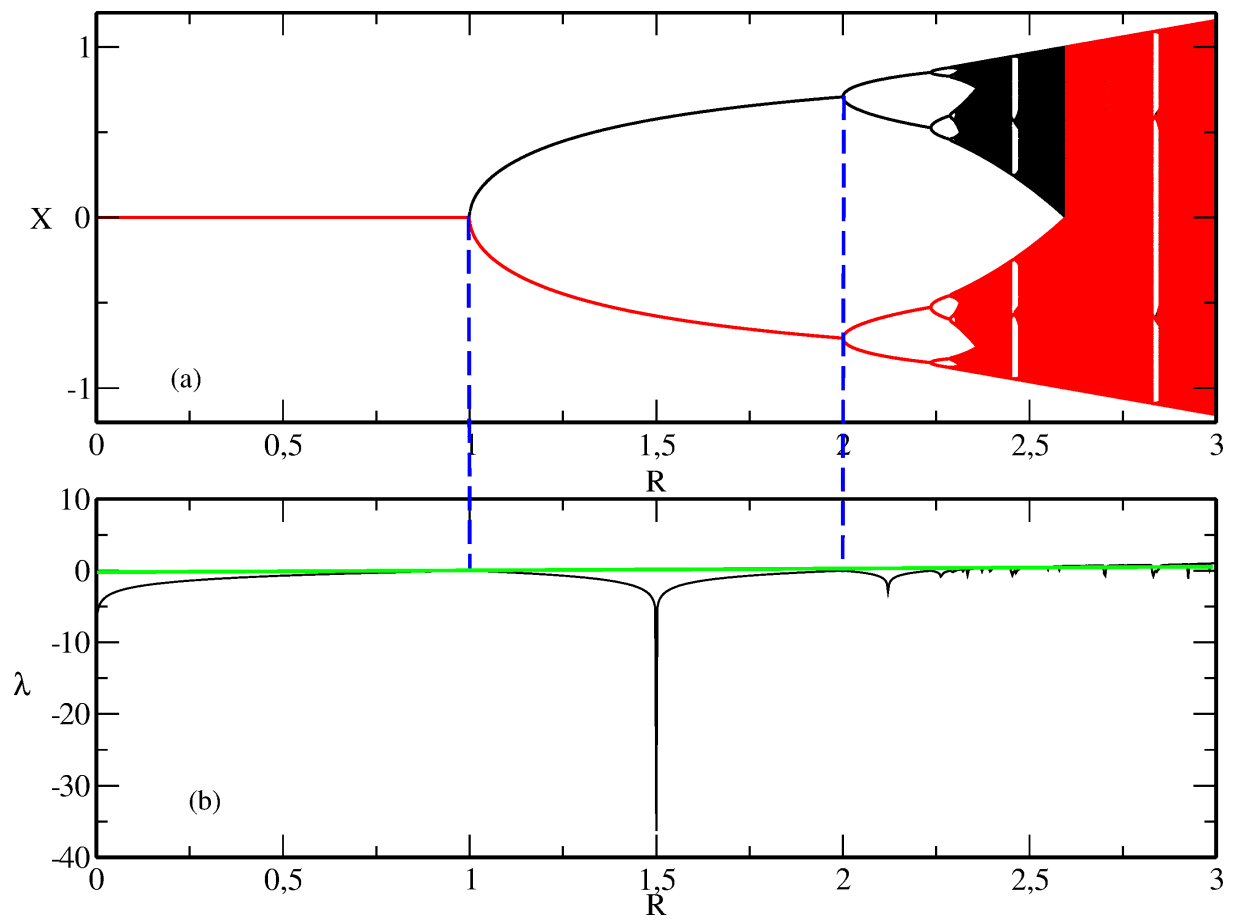


Figura 2.3: Diagrama de bifurcação para $\gamma = 2$ juntamente com o expoente de Lyapunov.

CAPÍTULO 3

MAPA GAUSS

Abordaremos neste capítulo algumas propriedades do mapa Gauss, sendo elas, o diagrama de bifurcação, os pontos fixos e o expoente de Lyapunov.

3.1 O mapeamento

Nesta seção, consideramos uma família de mapas unidimensionais, dada pela seguinte forma:

$$x_{n+1} = e^{-\alpha x_n^\xi} + \beta, \quad (3.1)$$

sendo α , ξ e β parâmetros de controle, x uma variável dinâmica e n o termo de recorrência do sistema. Para o estudo em questão utilizaremos $\xi = 2$ para recuperarmos o mapa Gauss que é definido por

$$x_{n+1} = e^{-\alpha x_n^2} + \beta, \quad (3.2)$$

que é utilizado para estudar uma rede neural recorrente de um ciclo que é composta por um único neurônio caótico com auto-interação [29].

3.1.1 Pontos fixos

Para obtermos os pontos fixos deste mapeamento, fazemos os mesmos procedimentos realizados anteriormente para os mapas Logístico e *Logistic-like* onde iniciamos fazendo

$$x^* = F(x^*). \quad (3.3)$$

Utilizando a eq. (3.3), podemos encontrar os pontos fixos do mapeamento considerando que $x_{n+1} = x_n = x$, logo:

$$x = e^{-\alpha x^2} + \beta, \quad (3.4)$$

que pode ser reescrito como

$$e^{-\alpha x^2} + \beta - x = 0. \quad (3.5)$$

Analisando a equação (3.5), concluímos que se trata de uma equação transcendental e uma solução analítica não existe. Desta forma, para encontrarmos os pontos fixos das bifurcações relacionados ao parâmetro β , derivaremos o mapa (3.2), de modo que $\alpha = 4,9$ e utilizaremos a seguinte equação:

$$\left(\frac{dx_{n+1}}{dx_n} \right)_{x_n=x^*} = 1. \quad (3.6)$$

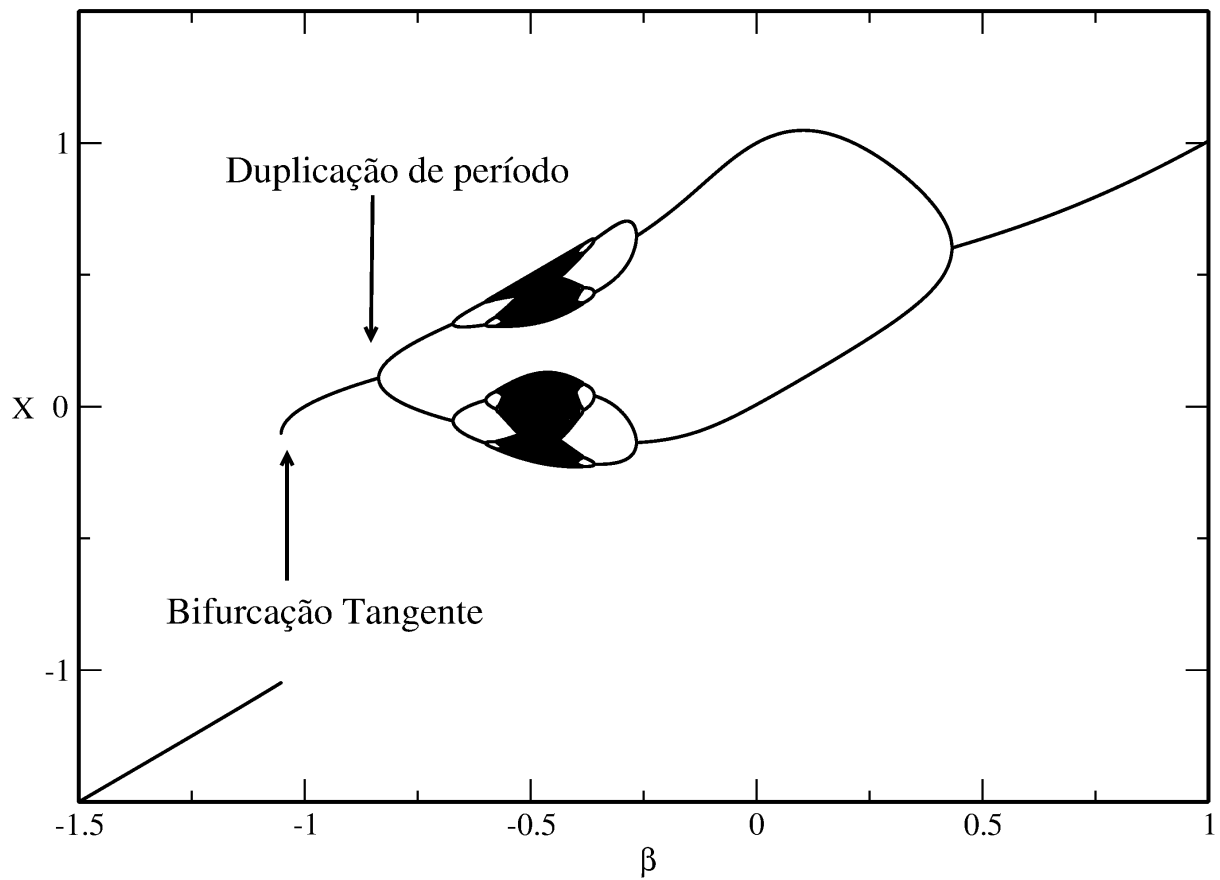


Figura 3.1: Diagrama de bifurcação para o mapa Gauss com $\alpha = 4.9$.

Realizando os cálculos da derivada da equação (3.6), temos que

$$g(x) = -2\alpha x e^{-\alpha x^2} - 1. \quad (3.7)$$

Para encontrarmos os pontos fixos a partir da equação (3.7) utilizaremos o método numérico de Newton Raphson, desta forma, temos que $x_1^* \approx -0,108$.

Após encontrarmos o ponto fixo x_1^* , isolaremos o β na equação (3.5), a partir disso, encontraremos onde temos a primeira bifurcação do mapeamento. Utilizando tal manipulação algébrica, encontramos $\beta_1 \approx -1,05$, o que indica que estamos na primeira bifurcação do sistema, conhecida como bifurcação tangente.

O ponto fixo x_2^* é encontrado ao igualarmos a equação (3.6) à -1 , de modo que $x_2^* \approx 0,108$. Realizando novas manipulações, temos que $\beta_2 \approx -0,83$, o que indica que estamos na segunda bifurcação da figura 3.1, sendo a mesma denominada como duplicação de período.

3.1.2 Expoente de Lyapunov

Para analisarmos o comportamento do sistema e verificar suas regiões caóticas ou periódicas, construímos o gráfico do expoente de Lyapunov para o mapa Gauss. A Fig. 3.2(a) mostra o diagrama de bifurcação para o mapa Gauss com $\alpha = 4,9$. Já a Fig. 3.2(b) mostra o expoente de Lyapunov para o mapeamento. Podemos observar os expoentes positivos e negativos do sistema, λ positivo nos fornece a parte caótica do mapa e λ negativo nos mostra a parte periódica do mapa. A linha verde ($\lambda = 0$) na figura 3.2(b) mostra onde ocorre os pontos de bifurcações.

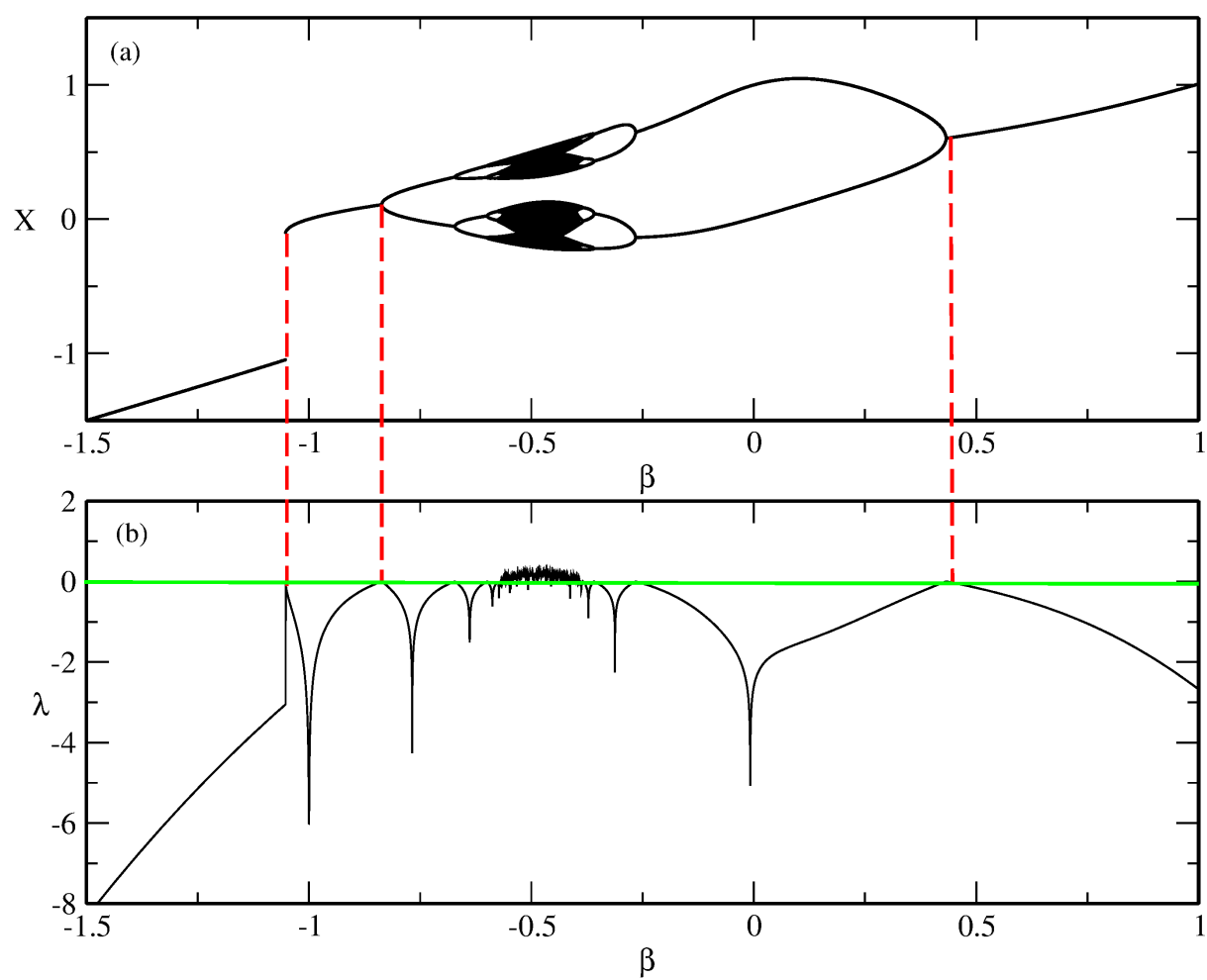


Figura 3.2: Diagrama de bifurcação para o mapa Gauss juntamente com o expoente de Lyapunov.

CAPÍTULO 4

MAPA *LOGISTIC-GAUSS*

Neste capítulo, abordaremos o mapeamento do tipo *Logistic-Gauss*. Nosso objetivo é investigar o espaço de parâmetro deste novo mapeamento, onde podemos estudar órbitas extremas e verificar o que está ocorrendo e como é a organização das estruturas de periodicidade no espaço de parâmetros.

4.1 O modelo e o mapeamento

Usualmente, o estudo sobre mapeamento unidimensional nos leva ao conhecido mapa Logístico, já abordado no Cap. 1, que foi proposto por Robert May [28] para modelar o crescimento populacional de insetos. Uma generalização do mapa logístico, conhecido como mapa *Logistic-like*, abordado no Cap. 2 é descrito pela seguinte equação

$$X_c = RX_n(1 - X_n^\gamma), \quad (4.1)$$

onde R e γ são parâmetros de controle e X_c é a variável de composição. Observe que é possível recuperar o mapa Logístico tradicional quando $\gamma = 1$.

Outro sistema importante é o mapa de Gauss abordado no Cap. 3 e descrito como

$$X_{n+1} = e^{-\alpha X_c^2} + \beta, \quad (4.2)$$

com α e β sendo parâmetros de controle. Este mapeamento recebeu este nome após os estudos de Johann Carl Friedrich Gauss, onde esta função mapeia a função gaussiana em forma de seno [29, 30].

Propomos agora um novo mapeamento unidimensional modificado, que assume o valor de X_c , obtido na Eq. (4.1), e colocamos na Eq. (4.2). O mapeamento resultante é descrito

como

$$X_{n+1} = e^{-\delta[X_n(1-X_n^\gamma)]^2} + \beta \equiv F(X_n), \quad (4.3)$$

onde $\delta = \alpha R^2$ é um novo parâmetro de controle [27].

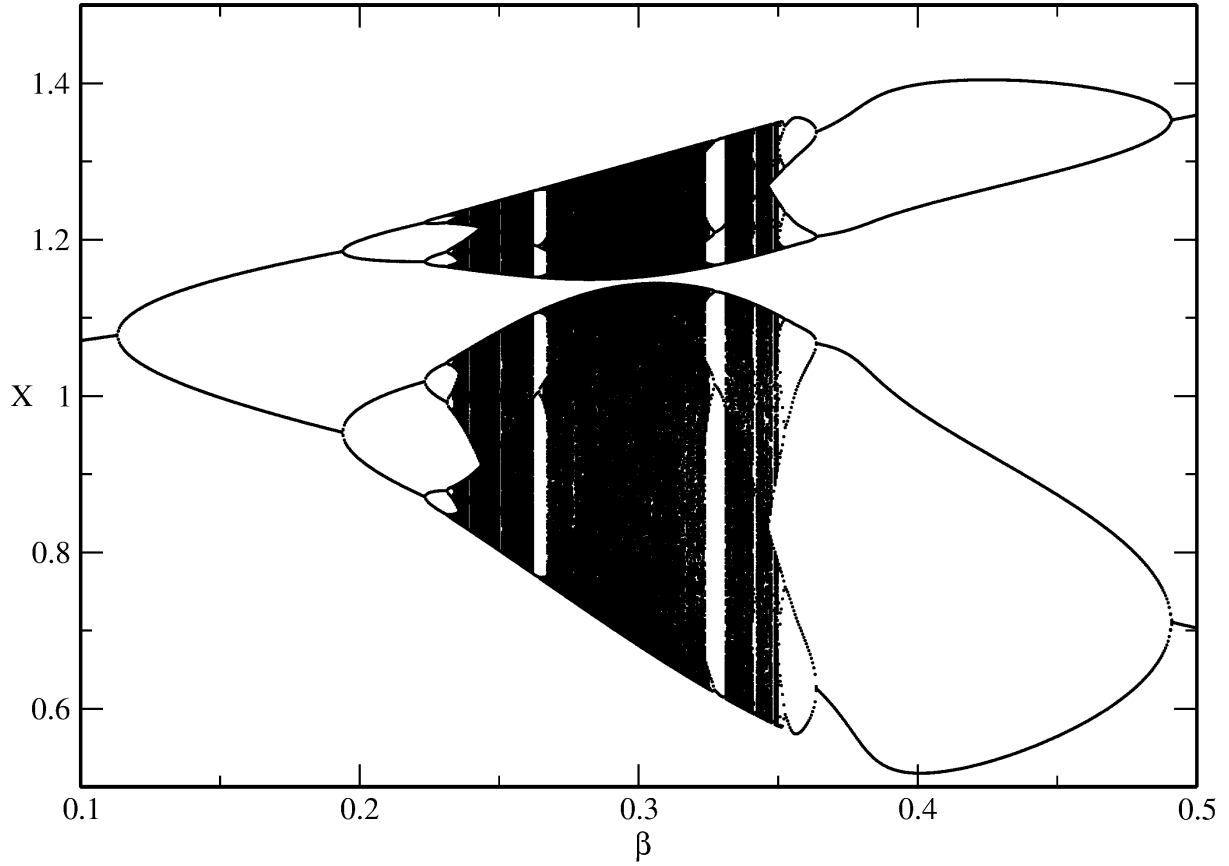


Figura 4.1: Diagrama de bifurcação para o mapa *Logistic-Gauss*, com $\gamma = 2$ e $\delta = 1.2$.

Na figura 4.1 temos o diagrama de bifurcação para o mapa *Logistic-Gauss*, utilizando os seguintes parâmetros de controle $\gamma = 2$ e $\delta = 1.2$. Podemos observar que a composição dos mapas *Logistic-like* e Gauss mantém características originais dos respectivos mapeamentos, ou seja, o mapa *Logistic-Gauss* possui ainda algumas áreas caóticas e janelas de periodicidade dos mapeamentos utilizados na construção do mesmo.

4.2 Expoente de Lyapunov

Ao fazermos a composição dos mapas *Logistic-like* e Gauss, continuamos com um mapa unidimensional, e para caracterizarmos as regiões caóticas e periódicas deste sistema, utilizaremos o expoente de Lyapunov.

Na figura 4.2(a) temos o diagrama de bifurcação para $\gamma = 2$ e $\delta = 1.2$, e na figura 4.2(b) temos o expoente de Lyapunov para o mapeamento. As linhas pontilhadas em vermelho demarcam onde está ocorrendo algumas das bifurcações no diagrama. A linha

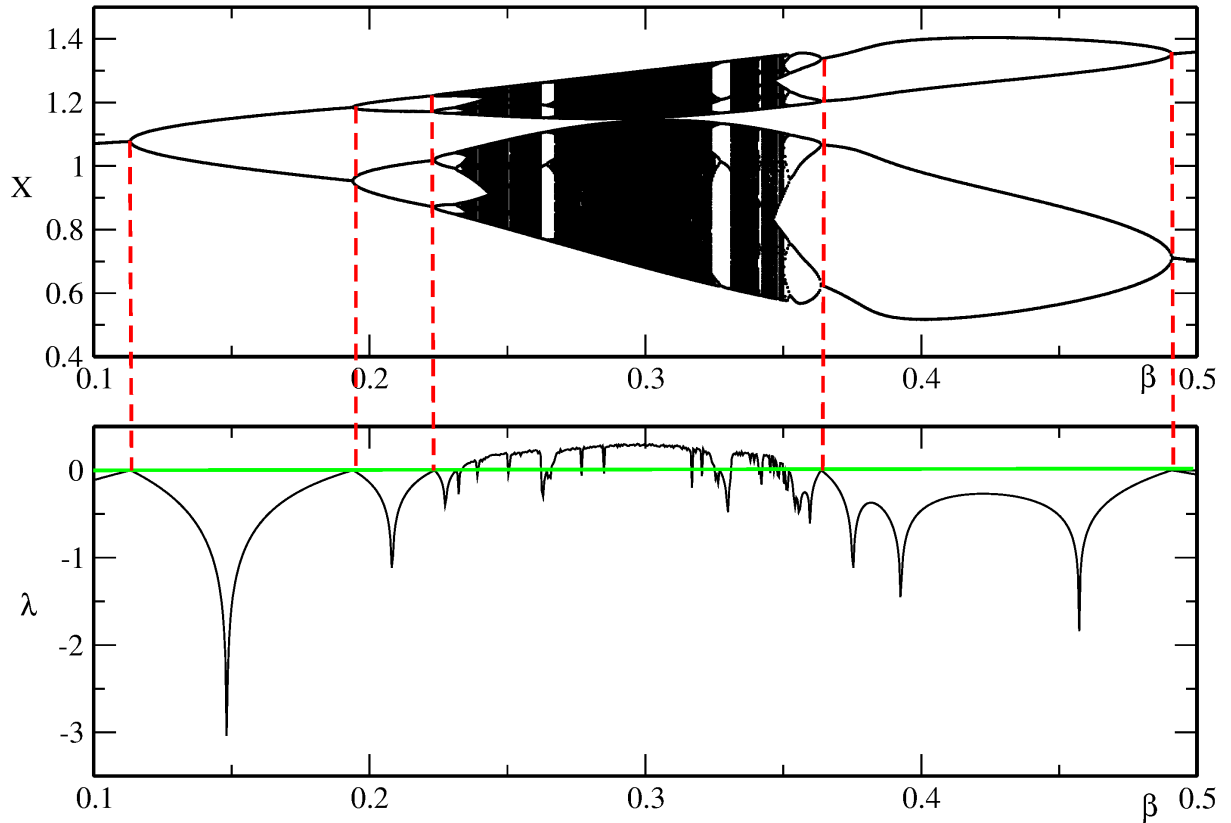


Figura 4.2: Diagrama de bifurcação para o mapa *Logistic-Gauss*, com $\gamma = 2$ e $\delta = 1.2$ juntamente com o expoente de Lyapunov para os respectivos parâmetros.

verde representa onde λ é nulo, ou seja, quando estamos num ponto de bifurcação. Quando $\lambda < 0$ temos as regiões periódicas, e em $\lambda > 0$ temos as regiões caóticas.

O novo mapeamento torna-se relevante devido à variedade de estruturas que aparecem no espaço de parâmetros. Chamamos as estruturas de periodicidade no espaço de parâmetros CSP (Conjuntos Complexos de Periodicidade). Na Ref. [27], os autores mostram o surgimento de curvas cíclicas superestáveis e extremas que revelam como nasceram as sequências de adicionamento de período das estruturas CSP.

Consideramos X_n como uma condição inicial, que também é chamada de X_0 (com $n = 0$). Uma órbita é então o conjunto de pontos $X_0, X_1, X_2, \dots, X_m$, correspondentes à evolução da variável X para um dado X_0 .

No espaço de parâmetros, estruturas periódicas aparecem cercadas por atratores caóticos. Essa classificação é feita através dos expoentes de Lyapunov, abordado na Seção 1.5. Esses expoentes medem a distância da taxa de divergência na qual evoluem duas condições iniciais muito próximas [17, 25].

4.3 Pontos de máximos e mínimos

Para melhor analisar o espaço de parâmetros, é necessário encontrar os máximos e mínimos locais do mapeamento F . Para obter tais pontos, calculamos a primeira derivada da Eq. (4.4), resultando em

$$F'(X) = -2\delta X (1 - X^\gamma) [1 - (\gamma + 1) X^\gamma] e^{-\delta[X(1-X^\gamma)]^2}. \quad (4.4)$$

Depois disso, definimos a primeira derivada igual a zero, o que nos dá três soluções possíveis:

$$X_{(l)} = 0, \quad X_{(m)} = (1 + \gamma)^{-1/\gamma}, \quad \text{e} \quad X_{(r)} = 1, \quad (4.5)$$

onde $X_{(i)}$, com $i = l, m, r$, são os valores de X para os extremos locais. Observe que l , m e r fazem referência aos termos em inglês *left* (esquerda), *middle* (meio) e *right* (direita). Essas três soluções são possíveis para $\delta \neq 0$ e $\gamma \neq 0$. Os valores críticos $X_{(l)}$, $X_{(m)}$ e $X_{(r)}$ desempenham um papel importante nos estudos de estruturas CSPs, uma vez que tais pontos estão intimamente ligados aos conceitos de superestáveis e curvas extremas, como veremos na próxima seção.

4.4 Resultados numéricos

Nesta seção, mostramos como obter o espaço de parâmetros do mapeamento (4.3). Pretendemos compreender a organização das estruturas periódicas no espaço de parâmetros. Para isso, explicaremos a diferença entre curvas superestáveis e extremas, destacando a importância de tais curvas para a compreensão do espaço de parâmetros. Analisaremos o espaço de parâmetros para diferentes valores fixos de δ , para ver o que acontece com essas estruturas à medida que esse parâmetro é variado.

4.4.1 Resultados numéricos para $\delta = 0,2$

Na Fig. 4.3(a), mostramos um exemplo de espaço de parâmetros. Para obter esta figura, consideramos uma grade de 1000 por 1000 diferentes valores de γ e β . Após ignorar um tempo transitório de 10^3 iterações, calculamos o respectivo expoente de Lyapunov (λ) para cada combinação de parâmetros de controle. Observe que o expoente de Lyapunov é calculado com

$$\lambda = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \ln |F'(X)|, \quad (4.6)$$

onde $M = 10^3$ representa o número de iterações.

A paleta de cores na Fig. 4.3(a) muda, de vermelho para amarelo (expoente Lyapunov negativo) em regiões periódicas, em contraste, muda, de verde para azul (expoente

Lyapunov positivo), em regiões caóticas. As linhas tracejadas são chamadas de curvas de superestabilidade. Elas representam os pontos em que os expoentes de Lyapunov tendem a $-\infty$. Observe que as curvas de superestabilidade recebem uma cor vermelha na Fig. 4.3(a).

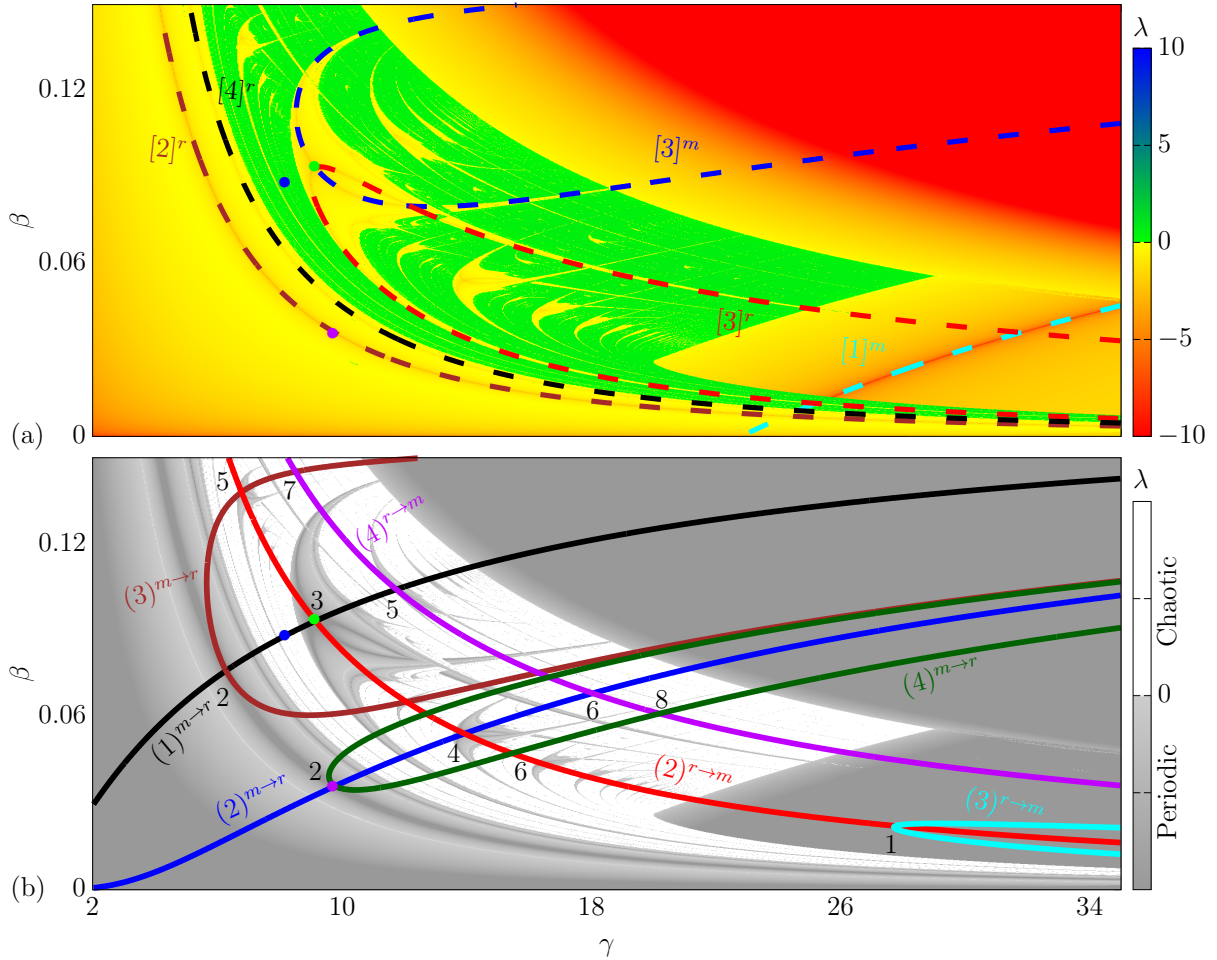


Figura 4.3: Espaço de parâmetros para γ vs. β com um valor fixo de $\delta = 0,2$. As linhas tracejadas em (a) representam as curvas de superestabilidade, enquanto que as linhas contínuas em (b) representam as curvas extremas.

Neste trabalho, as curvas ou órbitas superestáveis são definidas da seguinte forma:

Definição 1. $[u]^i$ é uma órbita periódica superestável que conecta $X_{(i)}$ a si mesmo após u iterações, com $i = l, m, r$ e $u \in \mathbb{Z}^+$. Para todos os pontos em uma curva superestável, temos $\lambda \rightarrow -\infty$.

Usando **Definição 1**, podemos ver que a curva $[2]^r$ na Fig. 4.3 (a) é uma curva superestável com período $u = 2$ que conecta $X_{(r)}$ a si mesmo após duas iterações, correspondente a curva $[4]^r$. Aqui temos uma sequência de duplicações do período, levando ao caos através do cenário de Feigenbaum [31, 32]. Observe que a curva superestável $[3]^m$ intercepta a curva $[3]^r$ no ponto verde. É correto dizer que ambas as curvas pertencem à mesma estrutura CSP, que tem período 3.

A Figura 4.3 (b) considera uma mudança na paleta de cores, onde as estruturas periódicas recebem uma coloração cinza quando $\lambda < 0$, enquanto as regiões caóticas têm a cor branca ($\lambda > 0$). Na Fig 4.3 (b), chamamos as linhas contínuas de curvas extremas, definidas da seguinte forma:

Definição 2. $(u)^{i \rightarrow j}$ é uma órbita extrema que conecta $X_{(i)}$ a $X_{(j)}$ após u iterações, com $i, j = l, m, r$, $u \in \mathbb{Z}^+$ e $i \neq j$.

Em termos práticos, uma órbita extrema conecta dois extremos da função do mapa após u iterações. Como exemplo, vamos considerar a curva extrema correspondente a $(2)^{r \rightarrow m}$ na Fig. 4.3(b). Esta curva é um extremo que conecta $X_0 = X_{(r)}$ (máximo local) a $X_2 = X_{(m)}$ (mínimo local) após $u = 2$ iterações. Ao seguir esta curva, podemos ver várias estruturas periódicas. Na verdade, essa curva mostra uma sequência de CSPs de adição de período começando no período 3 e seguido pelos períodos 4, 5, 6, $\dots$, ∞ , que se acumulam em uma estrutura de período 1 (canto inferior direito da figura).

A Figura 4.3(b) mostra um resultado importante que precisa ser destacado. Observe que a curva $(1)^{m \rightarrow r}$ intercepta a curva $(2)^{r \rightarrow m}$ em um período 3 da CSP. Essa interseção, marcada como o ponto verde, também marca a interseção das curvas superestáveis $[3]^m$ e $[3]^r$ mostradas na Fig. 4.3(a). Com esta observação, declaramos a seguinte propriedade:

Propriedade 1. Sejam $(u)^{i \rightarrow j}$ e $(v)^{j \rightarrow i}$ duas curvas extremas, com $i \in \{l, m, r\}$, $j \in \{l, m, r\}$, $u \in \mathbb{Z}^+$, $v \in \mathbb{Z}^+$ e $i \neq j$. Se essas curvas extremas coexistem para uma determinada combinação de parâmetros de controle, é correto dizer que essas curvas também coexistem com duas outras curvas superestáveis $[u+v]^i$ e $[u+v]^j$. A seguinte expressão pode resumir essa propriedade:

$$(u)^{i \rightarrow j} \cap (v)^{j \rightarrow i} = [u+v]^i \cap [u+v]^j. \quad (4.7)$$

Observe que o período das duas curvas superestáveis é a soma de ambos os extremos.

Em nosso exemplo anterior, declaramos que a curva extrema $(1)^{m \rightarrow r}$ intercepta a curva $(2)^{r \rightarrow m}$ (ponto verde nas Figs. 4.3(a,b)), ao mesmo tempo em que as curvas superestáveis $[3]^r$ e $[3]^m$ se cruzam. Para visualizar melhor o que acontece, obtivemos o gráfico de X_1 vs. X_0 , conforme mostrado na Fig. 4.4(a). Esta figura considera $\beta = 0,08769271$, $\delta = 0,2$ e $\gamma = 8,087141$, que são as coordenadas do ponto verde na Fig. 4.3(b). Como se pode ver, a curva vermelha é uma órbita extrema que conecta $X_0 = X_{(r)}$ (máximo local) a $X_2 = X_{(m)}$ (mínimo local) após duas iterações, recebendo a nomeação de $(2)^{r \rightarrow m}$. Na Fig. 4.4(b) mostramos as linhas azuis, que é um exemplo de órbita que começa em $X_0 = X_m$. Esta órbita conecta o mínimo local ao máximo local ($X_1 = X_r$) após uma iteração, que é denominada $(1)^{m \rightarrow r}$. Observe que as duas curvas extremas (vermelha e azul) juntas representam um polígono fechado. Pode-se notar que, após três iterações a partir do mínimo local $X_{(m)}$, a órbita retorna à mesma posição, representando uma curva superestável $[3]^m$. O mesmo ocorre ao partir do máximo local $X_{(r)}$, onde temos a curva superestável $[3]^r$. Este comportamento está de acordo com a **Propriedade 1**.

Agora mostramos detalhes sobre o ponto azul na Fig. 4.3(b), que tem coordenadas $(\beta, \gamma, \delta) = (0,03602805, 9,776271, 0,2)$. Observe que pegamos o ponto azul no extremo da curva $(1)^{m \rightarrow r}$, mas como veremos, ele está dentro de uma região caótica. A Figura 4.4(c) mostra o resultado de X_1 vs. X_0 , onde temos uma curva extrema que conecta o mínimo local em $X_0 = X_{(m)}$ ao máximo local em $X_1 = X_{(r)}$ após uma iteração. Observe que, ao iterar o mapeamento a partir do máximo local (veja a Fig. 4.4(d)), a órbita leva à um atrator caótico (linhas azuis).

Se considerarmos o ponto magenta na Fig. 4.3(b), com coordenadas $(\beta, \gamma, \delta) = (0,03602805, 9,776271, 0,2)$, vemos que a curva $(2)^{m \rightarrow r}$ intercepta a curva $(4)^{m \rightarrow r}$. Observe que esta interseção é diferente da mostrada pela **Propriedade 1**. Para esta intersecção, precisamos considerar uma nova propriedade:

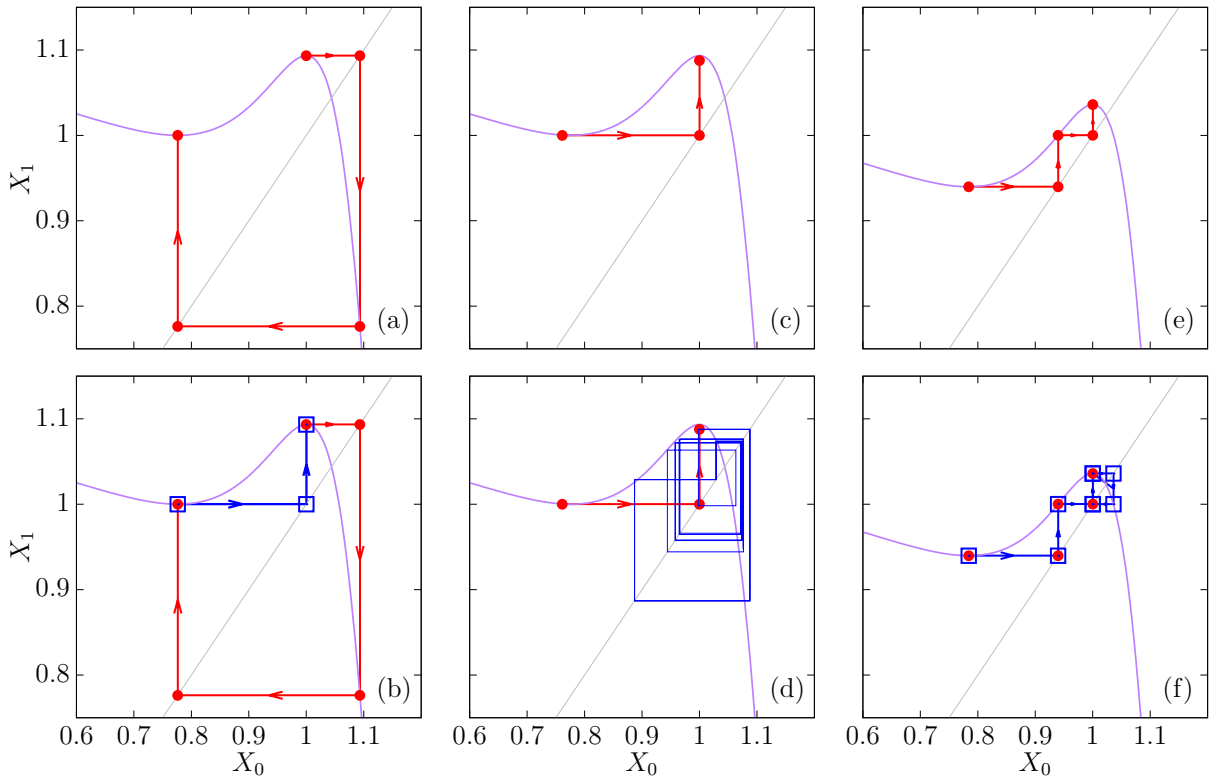


Figura 4.4: Mapa de retorno para valor constante de $\delta = 0.2$ e diferentes combinações de β e γ . Sendo (a,b) correspondente ao ponto verde, (c,d) ao ponto azul e (e,f) ao ponto magenta, que podem ser observados na figura 4.3.

Propriedade 2. Sejam $(u)^{i \rightarrow j}$ e $(v)^{i \rightarrow j}$ duas curvas extremas, com $i \in \{l, m, r\}$, $j \in \{l, m, r\}$, $u \in \mathbb{Z}^+$, $v \in \mathbb{Z}^+$ e $i \neq j$. Se essas curvas extremas coexistem para uma determinada combinação de parâmetros de controle, é correto dizer que essas curvas também coexistem com outra curva superestável $[u - v]^j$. A seguinte expressão pode resumir essa propriedade:

$$(u)^{i \rightarrow j} \cap (v)^{i \rightarrow j} \in \begin{cases} [u - v]^i \\ \text{ou} \\ [u - v]^j \end{cases} \quad (4.8)$$

Observe que o período da curva superestável é o resultado da subtração do período de ambos os extremos.

De acordo com a **Propriedade 2.**, a interseção das curvas $(2)^{m \rightarrow r}$ e $(4)^{m \rightarrow r}$ precisa ocorrer na mesma posição onde uma superestável a curva $[2]^r$ coexiste. Provamos isso na Fig. 4.3(a), onde o ponto magenta está na curva superestável $[2]^r$.

4.4.2 Resultados numéricos para $\delta = 1,5$

A Figura 4.5 considera o espaço de parâmetros para $\delta = 1,5$. Aumentar o valor de δ resulta em mudanças na organização do espaço de parâmetros. Na Fig. 4.5(a) temos o gráfico das curvas superestáveis (linhas tracejadas) $[2]^r$, $[2]^m$, $[3]^r$, $[3]^m$, $[4]^r$ e $[4]^m$.

Na Fig. 4.5(b), mostramos as curvas extremas como linhas contínuas. Observe que a interseção entre as curvas $[2]^{r \rightarrow m}$ e $[1]^{m \rightarrow r}$ ocorre na mesma posição onde as curvas superestáveis $[3]^r$ e $[3]^m$ se cruzam, o que concorda com a **Propriedade 1**. Temos outra interseção entre as curvas $(2)^{r \rightarrow m}$ e $(2)^{m \rightarrow r}$ em uma região com periodicidade 4 (ponto ciano nas figuras). Essa interseção ocorre novamente em uma região onde as curvas superestáveis $[4]^r$ e $[4]^m$ coexistem. Finalmente, ao analisar a curva extrema $(2)^{r \rightarrow m}$ e $(1)^{m \rightarrow r}$, vemos que essas curvas organizam várias estruturas CSP.

4.4.3 Resultados numéricos para $\delta = 1,8$

Na Fig. 4.6 (a), alteramos o valor δ para 1,8. Podemos observar o surgimento de estruturas CSP com alta estabilidade ($\lambda \ll 0$), com coloração vermelha. Destacamos algumas curvas superestáveis. Dentre eles, destacamos a região 3 do período que contém a interseção dos extremos $[3]^r$ e $[3]^m$, caracterizada pelo ponto ciano. Outra interseção, que merece atenção, ocorre entre as curvas $[5]^r$ e $[5]^m$.

Na Fig. 4.6 (b) apresentamos as curvas extremas. O ponto ciano marca a interseção entre os extremos $(1)^{m \rightarrow r}$ e $(2)^{r \rightarrow m}$, que novamente concorda com a **Propriedade 1**. Os números em preto marcam o período dos CSPs. Seguindo essa ideia, na Fig. 4.6(b) temos a interseção dos extremos $(1)^{m \rightarrow r}$ e $(4)^{r \rightarrow m}$ caracterizado pelo ponto laranja, que ocorre em uma estrutura de período 5, destacamos também a interseção dos extremos $(1)^{m \rightarrow r}$ e $(3)^{m \rightarrow r}$, que ocorre em uma estrutura de período 2, ilustrada pelo ponto vermelho. Nesse cruzamento, temos as curvas superestáveis $[5]^r$ e $[5]^m$ coexistindo com os extremos.

A Figura 4.7 mostra o diagrama de bifurcação γ vs. X ao seguir a curva extrema $(1)^{m \rightarrow r}$ na Fig. 4.6(b). Neste diagrama, podemos ver, da esquerda para a direita, uma duplicação do período, levando a uma região de período 2. A linha vermelha tracejada corresponde à parâmetros de controle usados para traçar o ponto vermelho na Fig. 4.6(b). Seguindo essa ideia, as linhas ciano e laranja tracejadas na Fig. 4.7 correspondem aos pontos ciano e laranja na Fig. 4.6(b), que têm período 3 e 5 respectivamente. As janelas

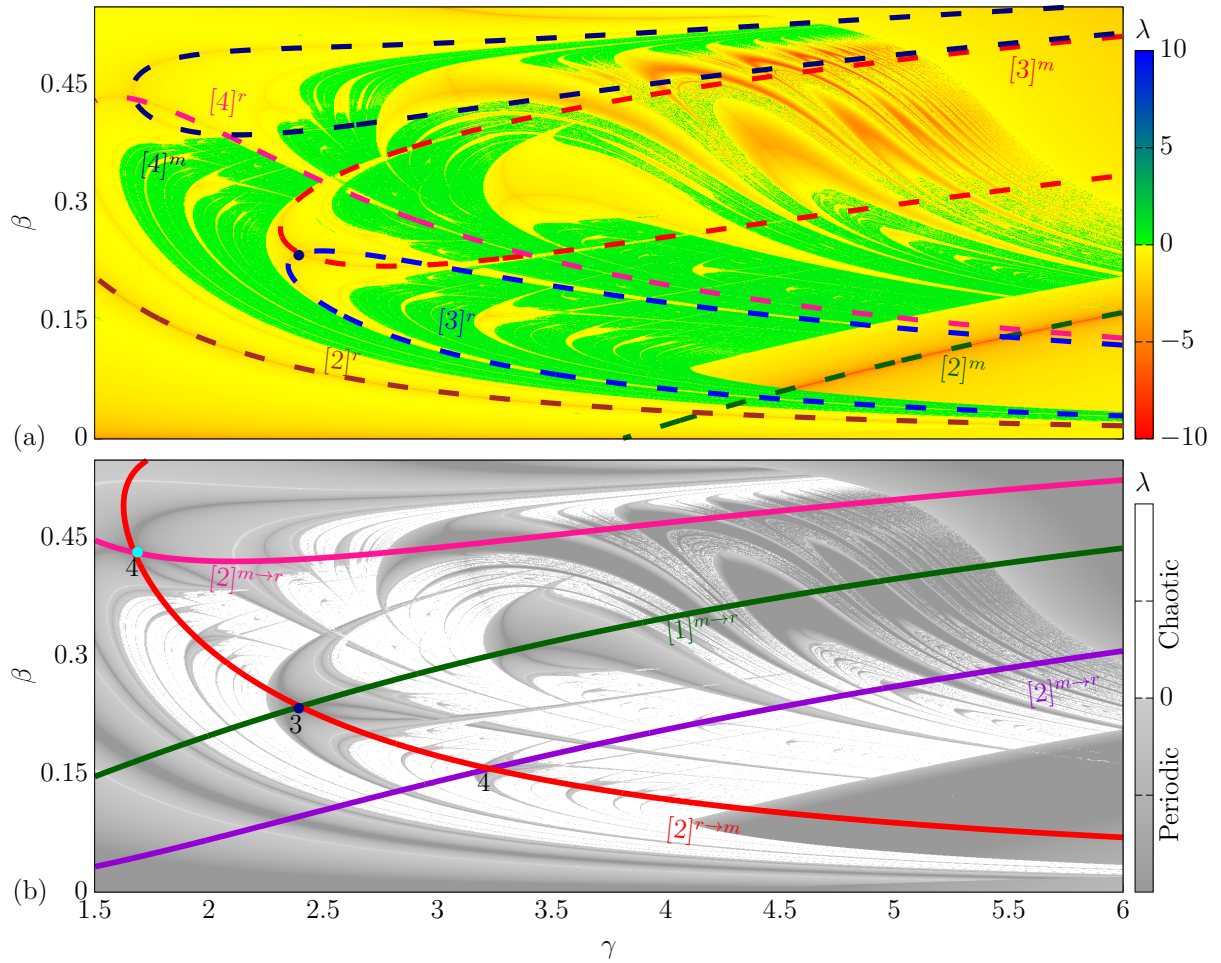


Figura 4.5: Espaço de parâmetros para γ vs. β com um valor fixo de $\delta = 1,5$, em que (a) temos as curvas superestáveis e em (b) temos as curvas extremas.

periódicas entre os atratores caóticos correspondem às estruturas CSPs observadas ao seguir a curva extrema $(1)^{m \rightarrow r}$.

4.4.4 Resultados numéricos para $\delta = 3$

Agora, alteramos o valor de δ , considerando que é igual a 3. O resultado é mostrado na Fig. 4.8(a), onde temos o gráfico das curvas superestáveis $[2]^r$, $[2]^m$, $[3]^r$, $[3]^m$, $[4]^r$ e $[4]^m$. Aqui, destacamos a interseção entre as curvas superestáveis $[4]^r$ e $[4]^m$. Outra interseção que gostaríamos de mostrar ocorre entre as curvas $[3]^m$ e $[3]^r$, que ocorre em uma estrutura CSP de período 3, caracterizada pelo ponto preto.

Na Fig. 4.8(b) mostramos as curvas extremas $(1)^{m \rightarrow r}$, $(2)^{m \rightarrow r}$, $(2)^{r \rightarrow m}$, $(3)^{m \rightarrow r}$ e $(4)^{r \rightarrow m}$. Podemos confirmar que a interseção entre as curvas extremas $(1)^{m \rightarrow r}$ e $(2)^{r \rightarrow m}$ ocorre no ponto preto.

Por fim, ao considerar a Fig. 4.8(b), notamos o aparecimento de algumas estruturas não encontradas nos gráficos anteriores. Para melhor visualizar essas estruturas, consideramos uma ampliação no retângulo tracejado da Fig. 4.8(b). O resultado é mostrado na Fig. 4.9.

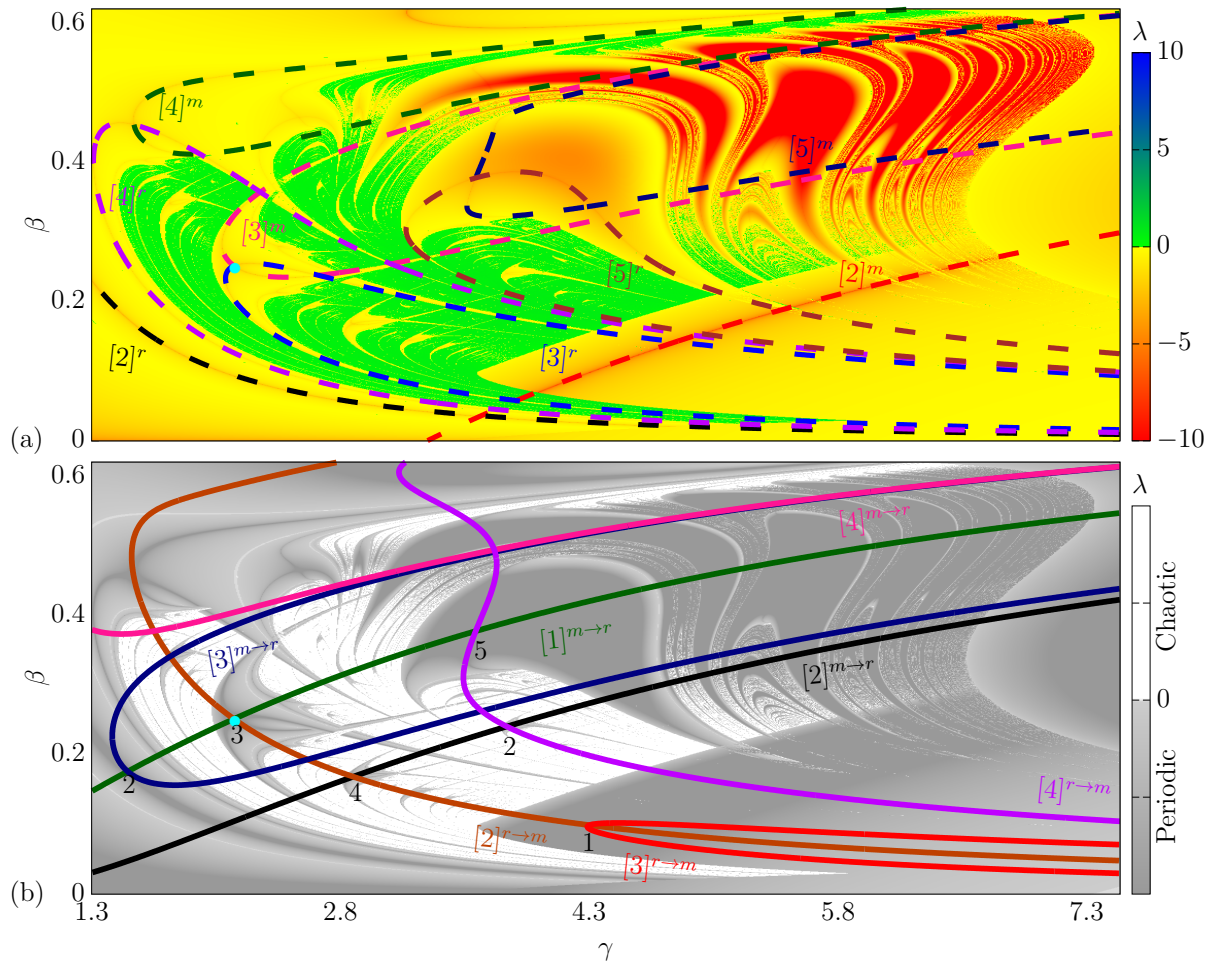


Figura 4.6: Espaço de parâmetros para γ vs. β com um valor fixo de $\delta = 1,8$, em que (a) as linhas tracejadas representam as curvas superestáveis e em (b) as curvas contínuas representam as curvas extremas.

Observe que temos algumas curvas superestáveis cíclicas (curvas fechadas), nomeadas como $[6]^m$ e $[6]^r$. Ao analisar as curvas extremas, notamos também algumas curvas extremas cíclicas. Várias outras curvas extremas também estão presentes, mas destacamos apenas algumas delas para evitar confusão. Estas curvas cíclicas são importantes porque de acordo com a Ref. [27] tais curvas podem explicar como surgem as sequências de adicionamento de período das estruturas CSPs.

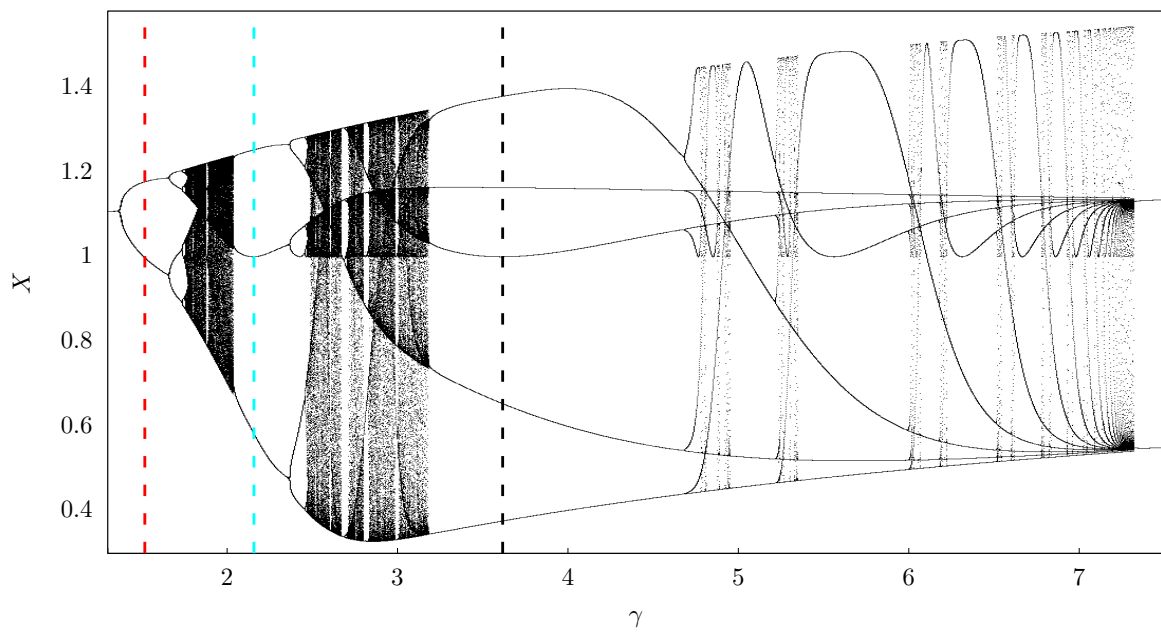


Figura 4.7: Diagrama de bifurcação γ vs. X para a curva extrema $(1)^{m \rightarrow r}$ mostrada na Fig. 4.6(b).

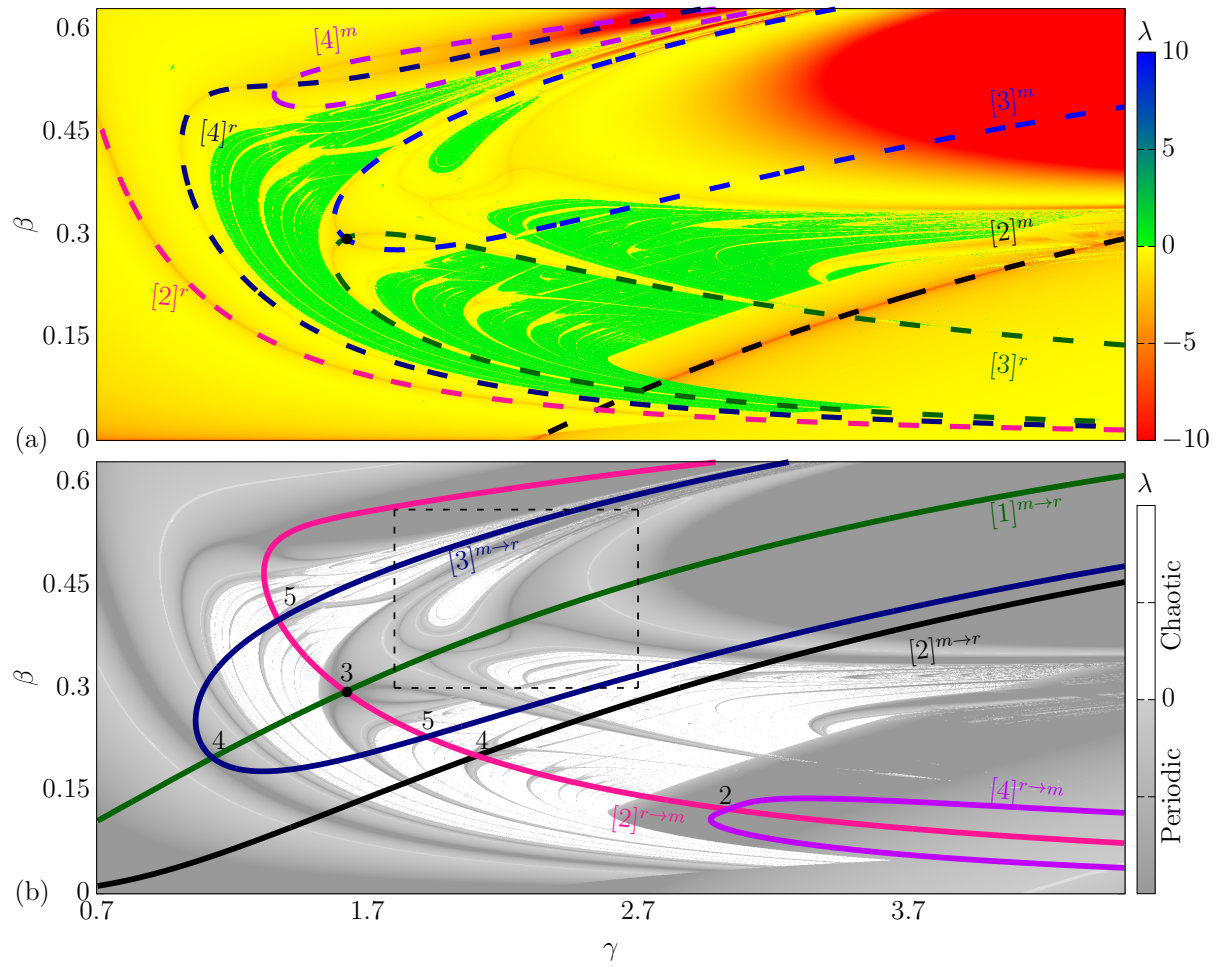


Figura 4.8: Espaço de parâmetros γ vs. β para $\delta = 3$, em que (a) as linhas tracejadas representam as curvas superestáveis, e em (b) as curvas contínuas representam as curvas extremas.

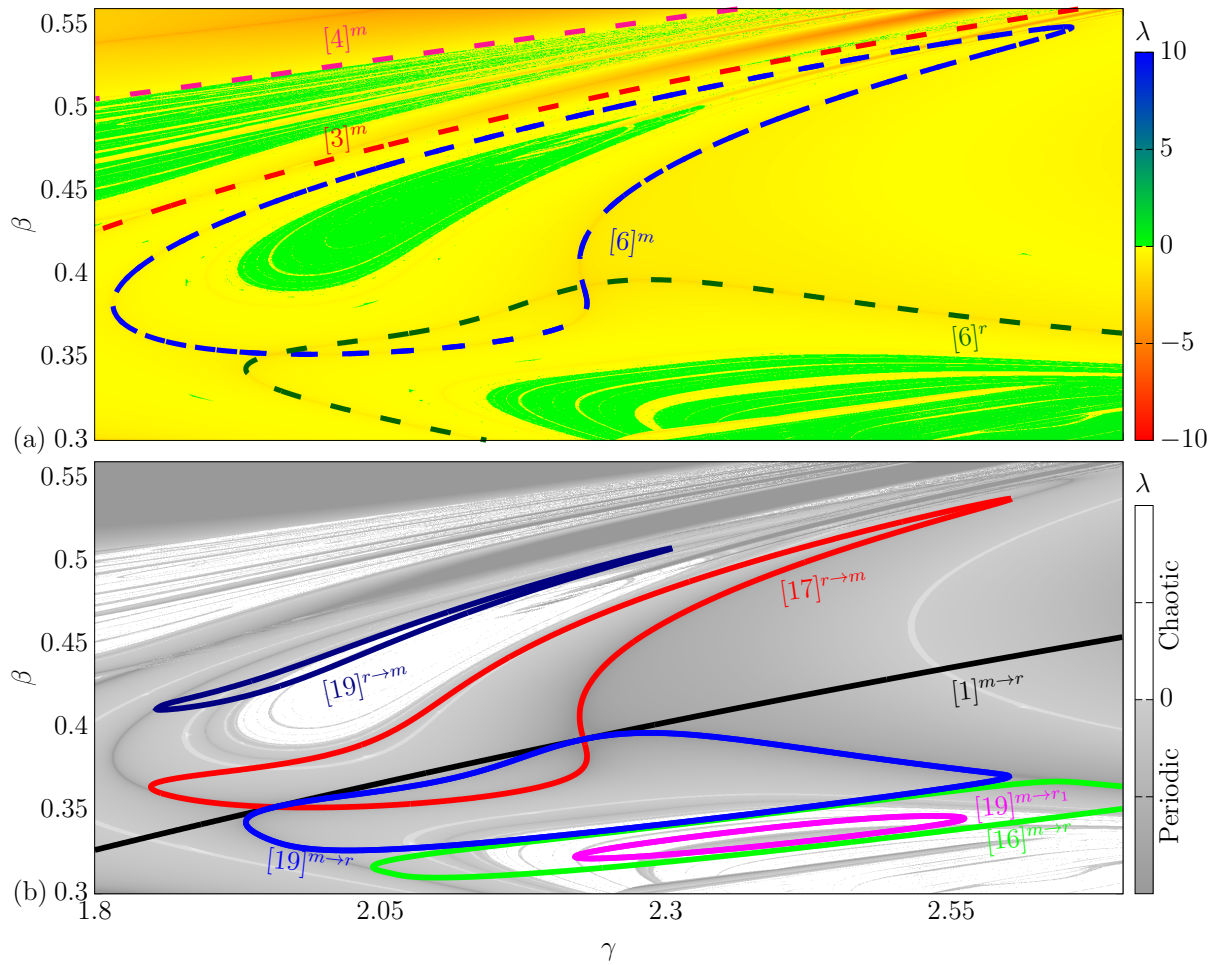


Figura 4.9: Ampliação do retângulo mostrado na Fig. 4.8(b), onde (a) representa as curvas superestáveis e em (b) as curvas contínuas representam as curvas extremas. Aqui temos várias curvas cíclicas extremas e superestáveis emergindo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS

Nesta dissertação, estudamos três mapas unidimensionais. Inicialmente estudamos algumas propriedades do mapa Logístico, analisando algumas características, tais como: pontos fixos, análise de estabilidade, diagrama de bifurcação e caracterizamos a dinâmica do sistema com o auxílio do cálculo do expoente de Lyapunov.

No capítulo 2, estudamos uma generalização do mapa Logístico, conhecido como mapa *Logistic-Gauss*, onde explanamos neste capítulo as propriedades dinâmicas de tal mapeamento. Em seguida, no Cap. 3, abordamos o mapa Gauss, evidenciamos algumas propriedades importantes do mesmo, para isso, utilizamos do método numérico Newton Raphson para encontrarmos os pontos fixos e assim, obter informações referentes as bifurcações do mapeamento.

No Cap. 4 mostramos algumas propriedades de um novo mapa unidimensional capaz de mostrar como surgem as cascatas de adicionamento de período dentro do espaço de parâmetros. Evidenciamos como este mapa é descrito, utilizamos o mapa de retorno e o espaço de parâmetros para explicar o comportamento de algumas curvas extremas e superestáveis. Mostramos a importância das curvas extremas para o estudo, uma vez que essas curvas mostram como é a organização e distribuição de todas as estruturas periódicas (CSPs) dentro do espaço de parâmetros. Por fim, através da análise do espaço de parâmetros, mostramos que o cruzamento de duas curvas extremas sempre ocorre em uma região periódica.

Como perspectiva futura pretendemos estender esses estudos para outras dimensões.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] *Aplicação de técnica de reconhecimento padrão a sinais aleatórios para monitoração automática de sistemas dinâmicos com ênfase em reatores nucleares, author=Holland, Orientador Dr Lao, year=1981, school=Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares.* PhD thesis.
- [2] Giovani Guimaraes Rodrigues. Identificação de sistemas dinâmicos não-lineares utilizando modelos de máxima polinomial: aplicação a sistemas reais. 1996.
- [3] Moisés dos Santos Ceconello. Modelagem alternativa para dinâmica populacional: Sistemas dinâmicos fuzzy. 2006.
- [4] M Kesmia, S Boughaba, and Sabir Jacquir. Nonlinear dynamics of two-dimensional cardiac action potential duration mapping model with memory. *Journal of Mathematical Biology*, 78(5):1529–1552, 2019.
- [5] Edward N Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of atmospheric sciences*, 20(2):130–141, 1963.
- [6] Ilya Prigogine. As leis do caos. *São Paulo: UNESP*, 2002.
- [7] Igor Klioutchnikov, Mariia Sigova, and Nikita Beizerov. Chaos theory in finance. *Procedia computer science*, 119:368–375, 2017.
- [8] Varun Gupta, Monika Mittal, and Vikas Mittal. Chaos theory: an emerging tool for arrhythmia detection. *Sensing and Imaging*, 21(1):1–22, 2020.
- [9] Sylvain Mangiarotti, Marisa Peyre, Yan Zhang, Mireille Huc, François Roger, and Yann Kerr. Chaos theory applied to the outbreak of covid-19: an ancillary approach to decision making in pandemic context. *Epidemiology & Infection*, 148, 2020.

- [10] Wesley Heleno Prieto et al. Aplicação da teoria do caos na identificação da dinâmica e previsão de séries temporais de poluição atmosférica: Application of chaos theory in the identification of the dynamics and prediction of atmospheric pollution time series. 2018.
- [11] Heury Sousa Ferreira. Dinâmica caótica em ecologia: avanços teóricos e metodológicos. *Neotropical Biology and Conservation*, 4(3):125–132, 2009.
- [12] W Figueroa, D Prada, P Vera, J Gomez, E Montes, and G Bautista. Analysis of population dynamics and chaos theory. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 1448, page 012001. IOP Publishing, 2020.
- [13] Tales Renato Cugler França et al. Instabilidades e não-linearidades no mercado financeiro: Um estudo da teoria do caos aplicada ao mercado de câmbio. 2015.
- [14] Shoma Tanabe and Naoki Masuda. Complex dynamics of a nonlinear voter model with contrarian agents. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 23(4):043136, 2013.
- [15] Adriane S Reis, Kelly C Iarosz, Fabiano AS Ferrari, Iberê L Caldas, Antonio M Batista, and Ricardo L Viana. Bursting synchronization in neuronal assemblies of scale-free networks. *Chaos, Solitons & Fractals*, 142:110395, 2021.
- [16] Diogo Ricardo Da Costa, Matheus Hansen, Gustavo Guarise, Rene O Medrano-T, and Edson D Leonel. The role of extreme orbits in the global organization of periodic regions in parameter space for one dimensional maps. *Physics Letters A*, 380(18-19):1610–1614, 2016.
- [17] Nelson Fiedler-Ferrara and Carmen P Cintra do Prado. *Caos: uma introdução*. Editora Blucher, 1994.
- [18] Matheus Hansen, Diogo R da Costa, Diego FM Oliveira, and Edson D Leonel. Statistical properties for a dissipative model of relativistic particles in a wave packet: A parameter space investigation. *Applied Mathematics and Computation*, 238:387–392, 2014.
- [19] CH Miwadinou, AV Monwanou, and JB Chabi Orou. Effect of nonlinear dissipation on the basin boundaries of a driven two-well modified rayleigh–duffing oscillator. *International Journal of bifurcation and Chaos*, 25(02):1550024, 2015.
- [20] Diogo Ricardo da Costa. A dissipative fermi–ulam model under two different kinds of dissipation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 22(1-3):1263–1274, 2015.

- [21] Roberto Barrio, Fernando Blesa, Angeles Dena, and Sergio Serrano. Qualitative and numerical analysis of the rössler model: Bifurcations of equilibria. *Computers & Mathematics with Applications*, 62(11):4140–4150, 2011.
- [22] Andre Luis Prando Livorati, Denis Gouvêa Ladeira, and Edson D Leonel. Scaling investigation of fermi acceleration on a dissipative bouncer model. *Physical Review E*, 78(5):056205, 2008.
- [23] Ronilson Rocha and Rene Orlando Medrano-T. Stability analysis and mapping of multiple dynamics of chua’s circuit in full four-parameter spaces. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 25(13):1530037, 2015.
- [24] Joelson D Veloso Hermes and Edson D Leonel. Characteristic times for the fermi–ulam model. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 31(02):2130004, 2021.
- [25] Edson Denis Leonel. *Invariância de Escala em Sistemas Dinâmicos Não Lineares*. Editora Blucher, 2019.
- [26] S. Fraser and R. Kapral. Analysis of flow hysteresis by a one-dimensional map. *Phys. Rev. A*, 25:3223, 1982.
- [27] Diogo Ricardo da Costa, Julia GS Rocha, Luam S de Paiva, and Rene O Medrano-T. Logistic-like and gauss coupled maps: The born of period-adding cascades. *Chaos, Solitons & Fractals*, 144:110688, 2021.
- [28] Robert M May. Simple mathematical models with very complicated dynamics. In *The Theory of Chaotic Attractors*, pages 85–93. Springer, 2004.
- [29] Zuohan Zhou, Weifeng Shi, Yan Bao, and Ming Yang. A gaussian function based chaotic neural network. In *2010 International Conference on Computer Application and System Modeling (ICCASM 2010)*, volume 4, pages V4–203. IEEE, 2010.
- [30] Juliano A de Oliveira, Hans MJ de Mendonça, Anderson AA da Silva, and Edson D Leonel. Critical slowing down at a fold and a period doubling bifurcations for a gauss map. *Brazilian Journal of Physics*, 49(6):923–927, 2019.
- [31] MP Hantias, Z Avgerinos, and GS Tombras. Period doubling, feigenbaum constant and time series prediction in an experimental chaotic rld circuit. *Chaos, Solitons & Fractals*, 40(3):1050–1059, 2009.
- [32] Keith Briggs. A precise calculation of the feigenbaum constants. *Mathematics of computation*, 57(195):435–439, 1991.