

unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

***DISSERTAÇÃO DE MESTRADO
EM
ENGENHARIA ELÉTRICA***

1210001154



Nº 50

***Despacho de Reativos em Sistemas de
Energia Elétrica: Uma Abordagem Através
de Programação Não-Linear***

Aluna: Célia Regina Nugoli

Orientador: José Roberto Sanches Mantovani

Te.1154

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "Júlio de Mesquita Filho"
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**DESPACHO DE REATIVOS EM SISTEMAS DE ENERGIA
ELÉTRICA: Uma abordagem através de programação
não linear**

Candidata : Celia Regina Nugoli

Orientador: José Roberto Sanches Mantovani

Dissertação submetida à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira
como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de
mestre em Engenharia Elétrica.

Ilha Solteira-SP, março de 2000



CELIA REGINA NUGOLI

**DESPACHO DE REATIVOS EM SISTEMAS DE ENERGIA
ELÉTRICA: Uma abordagem através de programação
não linear**



“Despacho de Reativos em Sistemas de Energia Elétrica: Uma Abordagem Através de Programação Não - Linear”

CÉLIA REGINA NUGOLI

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA – UNESP – COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA (ME).

1210001154

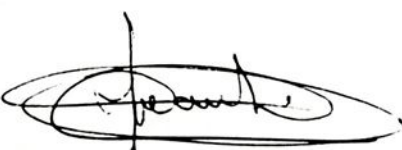


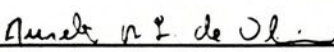

Prof. Dr. Carlos Roberto Minussi – Coordenador

COMISSÃO EXAMINADORA:

Proc. 017/2000 - NAD 099 - CISA

UNESP - "CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA"	
SERVIÇO TÉCN. DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO	
DATA DE CHEGADA	DATA DE TOMBO
13.09.00	29.09.00
RECEBIDA	TOMBO
Ailza	Te. 1154
ACQUISIÇÃO	CLASSIFICAÇÃO
Wlson Auréli R# 1000	N968d


Prof. Dr. José Roberto Sanches Mantovani - orientador


Prof. Dr. Aurélio Ribeiro Leite de Oliveira


Prof. Dr. Rubén Augusto Romero Lázaro

3040000 ENGA. ELÉTRICA

Ilha Solteira – SP, março de 2000

BCpIS - FEIS - UNESP



Dedicatória

À vocês que, além de me darem a vida, iluminaram meu
caminho com afeto e dedicação, ensinaram-me o valor
de consciência e dignidade, renunciaram aos seus
sonhos em favor dos meus, compartilharam
minhas preocupações...

não foram apenas meus pais,
mas também amigos.

"A mente que se abre a uma nova idéia,
jamais volta ao seu tamanho natural."

Albert Einstein

BCpIS - FEIS - UNESP



Agradecimentos

À Deus, por estar sempre ao meu lado, me dando forças e me agradando com muita saúde.

Aos melhores pais do mundo, Regina M. Cussioli Nugoli e João Alberto Nugoli, pela confiança, apoio e amor imprescindíveis para tornar este trabalho uma realidade.

A minha irmã Elaine C. Nugoli, pelo seu incentivo.

Ao meu namorado Giuliano Pierre Estevam, que esteve sempre presente, por sua paciência nas horas mais difíceis e pelo seu amor.

Ao Professor José Roberto Sanches Mantovani, um agradecimento especial, pela orientação, incentivo e dedicação. Por partilhar de suas descobertas e pesquisas que deram origem ao meu trabalho.

Aos professores Anna Diva P. Lotufo, Antônio Padilha Feltrin, Rubén Romero, pelas valiosas ajudas para a contribuição deste trabalho.

A minha prima Selma Helena Marchiori que esteve presente em todos os momentos, tanto nas horas de estudo quanto nas horas de descontração.

Aos grandes amigos que acabei conquistando, James Cambuhy e Thiago Cambuhy por todos os bons momentos que passamos juntos.

Aos amigos Marilene, Mara, Sandra, Lilian, karla, Tânia, Iara, Adenice, Raquel, Marcelo (Cilin), Giovani, Marco Arthur (Tuca), Viana, Edmarcio (Porco), Fernando Casari, Roger Akio, Fábio Toshiaki, Valmir, Wendel, Marcos (Marcão), Uender, Lorival, Edmilson, Eduardo, Gilberto (Carcará), Jeferson (Baby), Samuel (Samuca), Ruberlei (Ruber) e José Eduardo Bahia pela amizade e colaboração em várias ocasiões.

Aos funcionários do Departamento de Engenharia Elétrica - FEIS/UNESP, em especial à Deoclécio Mitsuiti Kosaka e Carlos Alex Sander pelo suporte técnico no laboratório de informática.

Aos funcionários da pós-graduação, Arlido e Fátima (Fafá), que estiveram sempre prontos a ajudar.

À UNESP, Universidade Estadual Paulista, que possibilitou a realização deste trabalho.

À FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo) pelo apoio financeiro.



Simbologia

$\underline{f}, \underline{h}:$	$f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; h_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; i=1, \dots, N$
$\underline{l}, \underline{u}, :$	Vetores de dimensão correspondentes aos limites inferior e superior das variáveis, respectivamente;
$\underline{s}_1:$	Variável de folga;
$\underline{s}_2:$	Variável de excesso;
$\underline{\mu}:$	Parâmetro de barreira;
$\nabla f(\underline{z}):$	Gradiente de $f(\underline{z})$;
$\nabla h(\underline{z}):$	Gradiente de $h(\underline{z})$;
$J(\underline{z}):$	Jacobiano de $f(\underline{z})$;
$\underline{\lambda}:$	Multiplicadores de Lagrange;
$\underline{\pi}_1, \underline{\pi}_2:$	Multiplicadores das restrições;
$S_1, S_2:$	Matrizes diagonais em $\mathbb{R}^{n \times n}$ cujos elementos das diagonais são $\underline{s}_{1j}, \underline{s}_{2j}$;

γ_1, γ_2 :	Multiplicadores de Lagrange das restrições de desigualdades;
α_p :	Tamanho do passo no espaço das variáveis primais;
α_d :	Tamanho do passo no espaço das variáveis duais;
$*$:	Complexo conjugado;
$H(.)$:	Hessiana do Lagrangeano;
$H_\mu(.)$:	Hessiana do Lagrangeano - Problema Perturbado;
$F(\underline{y}_k)$:	Gradiente do Lagrangeano;
$F_\mu(\underline{y}_k)$:	Gradiente do Lagrangeano - Problema Perturbado;
$\nabla L(.)$:	Gradiente do Lagrangeano de $\underline{s}$
σ :	Parâmetro de centragem;
$\ \cdot\ _2^2$:	Norma Euclidiana ao quadrado;
G_{kk}, B_{kk} :	Elementos da diagonal da matriz admitância de barra $[Y]=[G]+j[B]$;
G_{km}, B_{km} :	Elementos fora da diagonal da matriz admitância de barra $[Y]=[G]+j[B]$;
Ω_k :	Conjunto formado pela barra k e toda sua vizinhança.
NB:	Número de barras do sistema;
NPQ:	Número de barras PQ;
NPV:	Número de barras PV;
ΔP_k :	Variação de potência ativa;
ΔQ_k :	Variação de potência reativa;
$\underline{g}(x)$:	Função vetorial;
$\underline{g}(\underline{x}^v)$:	Sistema de equações não lineares;
$\partial \underline{g}(\underline{x}^v)$:	Derivada da função vetorial $\underline{g}(x)$ calculada no ponto $\underline{x}^v$;
H, N, M, L :	Submatrizes do Jacobiano;
ε :	Tolerância pré-especificada;
a_{km}, a_{mk} :	"taps" do transformador entre as barras k e m ;
b_{km}^{sh} :	Susceptância shunt da linha $k-m$ no modelo;
$V_k \angle \theta_k, V_m \angle \theta_m$:	Tensão fasorial da barra k e m , respectivamente;

Y_{km} :	Admitância da linha k-m;
G_{km} :	Condutância da linha k-m;
r_{km} :	Resistência da linha k-m;
Y_{km} :	Módulo da admitância da linha k-m;
x_{km} :	Reatância da linha k-m;
α_{km} :	Ângulo de perda da linha k-m;
$\text{sen } \alpha_{km}$:	Abertura angular da linha entre as barras k e m.
$\cdot \cdot$ S_{km} :	Fluxo de potência conjugado;
E_k :	Tensão na barra k;
E_m :	Tensão na barra m;
$\cdot \cdot$ I_{km} :	Corrente conjugada na barra k-m;
P_{km} :	Fluxo de potência ativa entre as barras k e m;
I :	Conjunto de barras (nós elétricos) que possuem dispositivos de controle e compensação de reativos (barras de tensão controlada);
$C1, C2$:	Custos;
$y1_i, y2_i$:	Injeções reativas fictícias, do tipo capacitiva e indutiva;
esp	Especificado;
P :	Vetor das injeções de potência ativa nas barras PQ e PV;
Q :	Vetor das injeções de potência reativa nas barras PQ;
V, θ :	Magnitudes e ângulos das tensões em todas as barras do sistema;
QG :	Potência reativa gerada;
QC :	Potência reativa consumida;
$QG^{\min}, QG^{\max}$:	Limites inferior e superior de geração de fontes reativas contínuas (compensadores síncronos ou estáticos, geradores);
$V^{\min}, V^{\max}$:	Limites inferior e superior para as magnitudes das tensões em todas as barras do sistema;
$y1_i^{\max}, y2_i^{\max}$:	Injeções reativas fictícias capacitivas e indutivas máximas;



$PG_k, QG_k:$	Potência ativa e reativa gerada na barra k , respectivamente;
$PL_k, QL_k:$	Carga ativa e reativa na barra k ;
$P_k(\theta, V, T):$	Injeção líquida de potência ativa na barra k ;
$Q_k(\theta, V, T):$	Injeção líquida de potência reativa na barra k ;
$VQ1_i:$	Variáveis de excesso referentes às potências reativas geradas, injeções reativas fictícias do tipo capacitivas e indutivas, nas barras de tensão controlada;
$VQ2_i, Vy1_i, Vy2_i:$	Variáveis de folga referentes às potências reativas geradas, injeções reativas fictícias do tipo capacitivas e indutivas, nas barras de tensão controlada;
$VV1, VV2:$	Variáveis de excesso e de folga das magnitudes de tensão em todas as barras do sistema;
$\mu V, \mu Q:$	Parâmetros de barreira que tendem a zero na solução ótima (convergência) do problema;
$L:$	Lagrangeano para o problema de despacho ótimo de reativos;
$\pi P, \pi Q:$	Multiplicadores de Lagrange ;
$\pi QG1, \pi QG2_i:$	Multiplicadores de Lagrange;
$\pi v1, \pi v2:$	Multiplicadores de Lagrange;
$\pi vy1_i, \pi vy2_i:$	Multiplicadores de Lagrange;
$k, m:$	Barras do sistema, interligadas por linha de transmissão;
$\gamma VV1, \gamma VQ1:$	Multiplicadores das variáveis de excesso;
$\gamma VV2, \gamma VQ2:$	Multiplicadores das variáveis de folga;
$\gamma vy1, \gamma vy2:$	Multiplicadores das variáveis de folga;
$\Delta VV1, \Delta VQ1:$	Variação das variáveis de excesso;
$\Delta VV2, \Delta VQ2:$	Variação das variáveis de folga;
$\Delta vy1, \Delta vy2:$	Variação das variáveis de folga;
$\Delta y:$	Vetor que representa a variação nas magnitudes das tensões;



ΔQG :	Variação de potência reativa gerada;
$\Delta \pi_v1, \Delta \pi_v2$	Variações incrementais dos multiplicadores de lagrange;
$\Delta \pi_{QG1_i}, \Delta \pi_{QG2_i}$:	Variação dos multiplicadores de Lagrange;
$\Delta \pi_{vy1_i}, \Delta \pi_{vy2_i}$:	Variação dos multiplicadores de Lagrange;
$H4, H1$:	Parcelas da matriz H correspondente as variáveis associadas a potência ativa e reativa, respectivamente;
$J3, J2$:	Jacobianos do balanço de equações de potência ativa e reativa correspondente as variações de potência ativa e reativa, respectivamente;
n :	Número de variáveis de folga primais;
NC :	Número de barras de tensão controlada;



<i>Capítulo I</i>	<i>1</i>
INTRODUÇÃO	1
 <i>Capítulo II</i>	 <i>10</i>
CONCEITOS TEÓRICOS BÁSICOS PARA FORMULAÇÃO E SOLUÇÃO DO DESPACHO DE REATIVOS	10
II.1. Algoritmo Primal-Dual	11
II.2. O Problema de Fluxo de Carga e o Desacoplamento $P\theta$ -QV	20
II.2.1. Solução de Fluxo de Carga pelo Método de Newton	23
II.3. Desacoplamento $P\theta$ -QV	25
II.4. Princípios do Método CRIC para Fluxo de Carga Convencional	27
II.4.1. Equações Básicas do Fluxo de Carga CRIC	28
 <i>Capítulo III</i>	 <i>31</i>
FORMULAÇÃO E SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE DESPACHO DE REATIVOS	31
III.1. Formulação	32
III.2. Técnicas de Solução Através de um Algoritmo Primal-Dual Acoplado	33
III.3. Fluxo de Carga Ótimo Desacoplado Utilizando as Equações Básicas do CRIC	45
III.4. Algoritmo Proposto para Solução do Despacho de Reativos e Diagrama de Blocos	49
 <i>Capítulo IV</i>	 <i>52</i>
TESTES E RESULTADOS	52
IV.1. Sistema de 3 Barras	53
IV.2. Sistema de 30 Barras	55

<i>Capítulo V</i>	58
CONCLUSÕES	58
 <i>Anexo I</i>	 61
EXEMPLO HIPOTÉTICO	61
 <i>Anexo II</i>	 69
ELEMENTOS DA MATRIZ HESSIANA ACOPLADA E DESACOPLADA	69
II.1. Estrutura da matriz Hessiana	70
II.2 Elementos da Matriz Hessiana Acoplada	71
II.2.1. Elementos da Submatriz H1	71
II.2.2. Elementos da Submatriz H4	71
II.2.3. Elementos da Submatriz H2, H3	71
II.2.4. Elementos da Submatriz J1	72
II.2.5. Elementos da Submatriz J2	72
II.2.6. Elementos da Submatriz J3	72
II.2.7. Elementos da Submatriz J4	72
II.3 Elementos da Matriz Hessiana Desacoplada	73
II.3.1. Elementos da Submatriz H1	73
II.3.2. Elementos da Submatriz H4	73
II.3.3. Elementos da Submatriz J2	74
II.3.4. Elementos da Submatriz J3	74
 <i>Apêndice I</i>	 75
ARTIGO PUBLICADO	75
 <i>Referências Bibliográficas</i>	 76
 <i>Bibliografia</i>	 79

Resumo

Neste trabalho propõe-se um algoritmo baseado na técnica de otimização de pontos interiores para resolver o despacho ótimo de reativos em sistemas de energia elétrica que é um problema de programação não linear de grande porte, em que a função objetivo reflete os aspectos operacionais do sistema. A partir de uma topologia previamente definida para o sistema, define-se o conjunto de restrições, o qual se refere ao atendimento das demandas ativa e reativa, a qualidade do fornecimento de energia e manter as condições de operações seguras e confiáveis.

Para solução do problema, adotou-se o método de segunda ordem de Newton e técnicas do tipo barreiras logarítmicas para tratar as restrições de desigualdade juntamente com um algoritmo do tipo primal-dual, em que se considera o acoplamento implícito entre os subproblemas ativo e reativo através das equações do fluxo de carga CRIC ("Constrained Reactive Implicit Coupling"). O Lagrangeano é formulado incorporando as restrições de igualdade à função objetivo através dos multiplicadores de Lagrange. Para a convergência do algoritmo utiliza-se o conceito de "gap" de dualidade em que os multiplicadores das variáveis de folga e de excesso estão relacionados com os multiplicadores das respectivas restrições através das condições de KKT ("Karush-Kuhn-Tucker"), desta forma, o parâmetro de barreira é atualizado em cada iteração do método de Newton.

Apresentam-se resultados para sistemas de pequeno e médio porte.



Abstract

This work presents an algorithm based on the interior point optimization technique to solve the reactive optimal dispatch in electric power system. Which is a large nonlinear programming problem. The objective function of such problem reflects some system operating aspects. Having a predefined topology for the system, it is defined a constraint set, which is referred to the active and reactive demand requirements to maintain a secure and reliable system.

To solve the programming problem, the second order Newton method is adapted, along with logarithm barrier techniques, to solve the inequality constraints. The primal-dual algorithm is also used and the implicit coupling between active and reactive subproblem is considered by using the load flow CRIC ("Constrained Reactive Implicit Coupling") equations. The Lagrangean is formulated by incorporating the inequality constraints to the objective function using the Lagrange multipliers. To achieve the algorithm convergence, the duality gap concept is used, where the slack and surplus variable multipliers are, respectively, related to their constraints by KKT ("Karush-Kuhn-Tucker") conditions. In this way, the barrier parameter is updated in each iteration of the Newton method.

Results to small and medium size electric power systems are presented.

Capítulo I

Introdução

O problema de despacho de reativos é um subproblema do fluxo de potência ótimo. Constitui em um importante subproblema da solução do problema de planejamento de reativos em sistemas de energia elétrica. A solução do despacho de reativos consiste em determinar os ajustes dos dispositivos de controle das magnitudes das tensões existentes no sistema (banco de capacitores e reatores, "taps" de transformadores, capacidades próprias de geração de reativos de geradores, compensadores síncronos e estáticos), com vista a obter um perfil pré determinado das magnitudes das tensões em todas as barras do sistema.

Trata-se de um problema de programação não linear de grande porte em que a função objetivo pode ter várias componentes, sendo as mais comuns a minimização de perdas do sistema de transmissão; redução das infactibilidades das magnitudes das tensões; minimização das necessidades reativas

para o sistema. As restrições consideradas no problema, adotando-se uma topologia previamente definida para o sistema de geração e transmissão, referem-se ao atendimento das demandas ativa e reativa; qualidade do serviço prestado, mantendo-se as magnitudes das tensões dentro de limites considerados satisfatórios; restrições físicas e operacionais dos equipamentos instalados no sistema, tais como limites térmicos de linhas de transmissão, limites nas capacidades de geradores, compensadores síncronos e estáticos. Dessa forma o despacho ótimo de reativos apresenta vários níveis de dificuldades para sua solução, devendo-se adotar soluções para contornar problemas relativos à natureza não linear em redes que estão sob severas condições de operação, tornando o subproblema reativo excessivamente mal comportado, o que pode causar sérios problemas de instabilidade numérica.

Nos últimos anos foram publicados na literatura especializada diversos trabalhos envolvendo o tema fluxo de potência ótimo e despacho de reativos em sistemas de energia elétrica que são dois problemas na área de planejamento da operação de sistemas elétricos que estão inter-relacionados. Dentre os inúmeros trabalhos envolvendo a formulação e solução do problema de fluxo de potência ótimo, está o de Dommel e Tinney [5], que deu origem e serviu de base à maioria dos trabalhos envolvendo este tema. Neste trabalho, Dommel e Tinney, incorporam à solução do problema de fluxo de potência calculado pelo método de Newton tradicional, uma função objetivo que visa refletir as perdas no sistema de geração e transmissão, propondo para a solução do problema de otimização resultante técnicas tradicionais de programação não linear. As restrições de desigualdades referentes às variáveis dependentes foram consideradas através do método das penalidades quadráticas, ou seja, à medida que as variáveis violam os seus limites, as restrições são incorporadas à função objetivo através de um termo de penalidade. A técnica de solução proposta para resolver o problema consiste numa proposta inicial do método do gradiente reduzido generalizado. Além do método do gradiente ótimo para obter a direção e o tamanho do passo para atualização das



variáveis de controle, foram testadas outras metodologias comumente utilizadas na solução de problemas não lineares de otimização - sensibilidade de segunda ordem da função lagrangeano com relações às variáveis de controle, método das tangentes paralelas e uma técnica mista que utiliza informações desses dois métodos.

D. Sun et al. [18] propõem técnicas de solução para o problema de Fluxo de Potência Ótimo, com ênfase no problema reativo, baseado no método de Newton tradicional [14] para a solução do problema de fluxo de carga, efetuando os ajustes de certas variáveis de controle para minimizar uma função objetivo que envolve, normalmente, o custo de geração de potência ativa ou a minimização de perdas, satisfazendo critérios tais como limites físicos para operação de certos equipamentos do sistema e limites operacionais que consideram a qualidade dos serviços prestados aos consumidores. A metodologia básica desenvolvida é o emprego de técnicas de esparsidade na solução do sistema de equações que se obtém quando da aplicação das condições de otimalidade em uma aproximação quadrática do Lagrangeano em cada iteração. No método de Newton, conforme desenvolvido no artigo D. Sun et al, não há necessidade do particionamento de variáveis em variáveis de controle (super básica), variáveis de estado dependentes (básicas) e variáveis que atingiram seus limites e que devem ser fixadas no limite atingido e tornaram-se constantes (não básicas). As restrições de desigualdade são consideradas por funções de penalidades do tipo quadráticas. A solução do problema de fluxo de potência ótimo só acontece quando as condições de otimalidade de KKT(Karush-Khun-Tucker) são satisfeitas [10], sendo apresentadas algumas condições numéricas e de natureza computacional que devem ser obtidas para a existência do mínimo, e também as matrizes envolvidas na solução do fluxo de carga ótimo pelo Método de Newton e a estrutura de cada uma delas: Jacobiana e Hessiana. Apresentam as versões acoplada e desacoplada do fluxo de carga ótimo pelo método de Newton e alguns algoritmos para verificar a factibilidade das restrições de desigualdades e quais devem ser efetivamente consideradas na estrutura matricial,



que é a principal dificuldade do método proposto. Utilizando-se a metodologia proposta neste artigo é possível encontrar um ponto adequado (quando existir) de operação para o sistema, através de um planejamento de operação em que se priorize as variáveis (controle) que não podem ser violadas, deixando livres outras variáveis e/ou parâmetros que podem apresentar pequenas violações sem comprometer seriamente a qualidade do serviço e a segurança do sistema. A função objetivo considerada foi a minimização de perdas no sistema de geração e transmissão.

Na linha de pesquisa envolvendo o problema de despacho ótimo de reativos, V.H. Quintana [15], propôs em seu artigo um algoritmo de Barreira Primal-Dual com uma seqüência de subproblemas linearizados - Programação Linear Sucessiva (PLS), para resolver o problema que é excessivamente não linear e adota como função objetivo a minimização das perdas de potência ativa. Apresenta todo o equacionamento matemático e a técnica de solução quando é usado o método das barreiras logarítmicas na solução de problemas de otimização com restrições de desigualdades, aplicando-se o método de Newton. Também discute alguns aspectos práticos referentes à implementação dos algoritmos de pontos interiores tais como, a determinação do parâmetro de barreira, ponto inicial a ser adotado para o algoritmo, e a solução eficiente do conjunto de equações originário da aplicação das condições de otimalidade, pelo método do vetor esparso. Uma aplicação direta de um algoritmo de Barreira Primal- Dual ao problema não linear é também discutida, propondo um algoritmo de Barreira Primal- Dual diretamente para resolver o problema não linear referente à minimização de perdas no sistema de transmissão.

Na linha de pesquisa que utiliza programação linear para resolver o despacho de reativos, está o trabalho de Garcia e Mantovani [9] que propõem para solução do problema uma seqüência de cálculos de fluxos de potência (não linear) e programação linear, ou seja, a técnica de programação linear sucessiva proposta inicialmente por Stott e Alsac [17], e utilizam para representar o modelo linear da rede - sensibilidades entre



potência ativa e reativa, a matriz Jacobiana reativa desenvolvida por J. L. Carpentier [4].

S. Granville [10], faz uma implementação do método de pontos interiores para o problema de Despacho Ótimo de Reativos, que foi formulado e resolvido como um caso particular do problema de fluxo de potência ótimo, que consiste em determinar o estado de um sistema elétrico que otimize uma determinada função objetivo e satisfaça um conjunto de restrições de operações que atendam requisitos de segurança e da qualidade do serviço prestado pela concessionária aos consumidores. A técnica proposta para resolução do problema foi um método de pontos interiores do tipo primal dual, originalmente formulado para problemas lineares e adaptado à solução do Despacho Ótimo de Reativos. A metodologia foi desenvolvida considerando-se duas funções objetivo: a minimização das necessidades de injeções reativas (indutivas e capacitivas) para o sistema; e a minimização das perdas no sistema de geração e transmissão e as necessidades de injeções reativas capacitivas e indutivas no sistema. A técnica de solução adotada para a solução do sistema de equações, devido a aplicação das condições de otimalidade de primeira ordem, é o Método de Newton do tipo desacoplado. Para a aplicação deste método são feitas algumas aproximações semelhantes às que são feitas nos métodos de fluxo de carga desacoplado tradicionais nas matrizes Jacobiana e Hessiana envolvidas no método de Newton, referentes à parte ativa do problema. As principais características da metodologia apresentada são a facilidade de simular sistemas reais de grande porte, estabilidade numérica, não necessidade de identificar o conjunto de restrições ativas a cada iteração e apresentar-se eficiente tanto para solução do problema de minimização de perdas quanto para solução do despacho ótimo de reativos. O fator crítico que se apresenta é identificar o parâmetro de barreira inicial e a seqüência de parâmetros a ser gerada para resolver o problema de fluxo de carga ótimo, principalmente considerando-se sistemas com condições de carga pesada o que provoca o mau condicionamento das matrizes envolvidas e problemas de instabilidade de tensão.



Y. C. Wu et al. [20] apresentam o problema de Fluxo de Potência Ótimo baseado nas condições de KKT e propõem para sua solução resolver o sistema de equações não lineares resultantes das condições de KKT duas formulações baseadas no Método de Newton de Pontos Interiores Primal-Dual: O Algoritmo de Pontos Interiores Primal-Dual Puro e o Preditor-Corretor do Algoritmo de Pontos Interiores Primal-Dual. O Algoritmo do Pontos Interiores Primal-Dual Puro tratado neste trabalho é o mesmo desenvolvido por Granville [10]. Os aspectos referentes à implementação dos dois algoritmos são cuidadosamente discutidos, sendo o principal deles o ajuste do parâmetro de barreira, que foi baseado nos teoremas Fiacco & McCormick's [8], fazendo com que este parâmetro tenda a zero a cada iteração. O maior esforço computacional do algoritmo é resolver um sistema simétrico de equações cuja estrutura de esparsidade é fixa. Assim, apenas uma ordenação ótima e uma fatorização simbólica estão envolvidas. Os resultados mostram que o Preditor-Corretor do Algoritmo de Pontos Interiores Primal-Dual para o Fluxo de Potência Ótimo é computacionalmente mais atrativo que o Algoritmo de Pontos Interiores Primal-Dual Puro em relação à velocidade e ao número da iterações.

H. Wei et al. [19] apresentam uma abordagem teórica do algoritmo do Método de Pontos Interiores aplicado à solução de problemas não lineares perturbados devido o uso das técnicas das barreiras, levando em consideração aspectos referentes à restrições funcionais de desigualdade e as variáveis de folga e excesso envolvidas. Na proposta de atualização do parâmetro de barreira usando o "gap" de dualidade, definem um parâmetro de centragem entre zero e um, que multiplicado pelo "gap" de dualidade permite uma melhor convergência do algoritmo. O conceito do parâmetro de centragem permite que o algoritmo de fluxo de potência ótimo, baseado nas condições de KKT do problema primal perturbado, seja estendido tanto para os problema de fluxo de potência ótimo como para o fluxo de potência tradicional. Propõem também um arranjo especial para as variáveis envolvidas no problema, o que permite a obtenção de uma estrutura matricial que facilita a fatoração, ordenação e solução dos sistemas



lineares necessários para solução tanto dos problemas de fluxo de potência tradicional como de fluxo de potência ótimo. A função objetivo considerada refere-se à minimização das perdas no sistema de geração e transmissão e custo de geração.

Outros artigos que apresentam um estudo sobre a aplicação do Método de Pontos Interiores ao problema de Fluxo de Potência Ótimo são os L.V. Barboza et al. [1,2], que analisam o problema do máximo carregamento de um sistema de energia elétrica considerando limitações tanto operacionais como de equipamento. A formulação do problema de otimização determina o máximo carregamento como um problema de Fluxo de Potência Ótimo, sendo a função objetivo o parâmetro de incremento da carga, considerado uma variável de otimização. As restrições de igualdade que são satisfeitas ao final do processo iterativo tratam-se do balanço de potência de cada barra do sistema, parametrizado com o fator de carga e as restrições de desigualdade podem ser divididas em dois grupos: restrições nas variáveis de decisão e restrições funcionais. Para resolver este problema, propõem o Algoritmo de Pontos Interiores não lineares nas suas versões Primal-Dual e Preditor-Corretor, dando enfoque à influência das restrições operativas na solução das equações da rede elétrica correspondente ao máximo carregamento e os Algoritmos Primal-Dual Puro e Preditor-Corretor sob o ponto de vista de desempenho operacional. Na versão Primal-Dual Pura do Algoritmo, obtém-se um sistema linear que é resolvido de forma iterativa para valores cada vez menores do parâmetro de barreira, mantendo-se sempre a condição de interioridade das estimativas calculadas no processo iterativo. Assim, quando o parâmetro de barreira tende a zero tem-se a solução do problema original. Já no Algoritmo do Preditor-Corretor Primal Dual, o cálculo da nova estimativa é obtida em duas etapas. Na primeira são obtidos os valores preditos para os incrementos nas variáveis primais e duais resolvendo o sistema linear obtido pelo Método de Newton para o parâmetro de barreira igual a zero da mesma maneira apresentada por Wu et al. [20]. Após a obtenção dos termos de segunda ordem e o parâmetro de barreira, é realizada a segunda etapa, que

consiste em uma etapa de correção. Nesta etapa as equações do sistema obtidas pelo Método de Newton são modificadas através das correções feitas para as condições de primeira ordem. Assim, os incrementos em todas as variáveis são obtidos. Em seguida, determina o comprimento do passo nos espaços primal-dual e faz a atualização de todas as variáveis.

Neste trabalho, o problema de despacho ótimo de reativos será analisado e estudado, utilizando-se um método clássico de programação não linear, em que as restrições de desigualdades serão apresentadas através do método das barreiras logarítmicas semelhante ao proposto por Granville [10]. O principal enfoque da pesquisa será no estudo do desacoplamento $P-\theta$ e $Q-V$ na solução do problema. A metodologia que será investigada para resolver o despacho de reativos baseia-se na aplicação do método das barreiras e no desacoplamento implícito potência ativa (P) - potência reativa (Q) proposto através do modelo de fluxo de carga CRIC desenvolvido por Carpentier [4,12,16].

O Lagrangeano é formulado incorporando as restrições de igualdade à função objetivo através dos multiplicadores de Lagrange. Para a convergência do algoritmo, utiliza-se o conceito de "gap" de dualidade em que os multiplicadores das variáveis de folga e de excesso estão relacionados com os multiplicadores das respectivas restrições através das condições de KKT.

No capítulo II são apresentados os conceitos teóricos básicos para formulação e solução do Despacho de Reativos, dentre os quais a aplicação do algoritmo primal-dual na solução de problemas não lineares de otimização sujeitos a restrições de desigualdades [7], o problema de fluxo de carga e a sua solução pelo método de Newton, os fundamentos teóricos e práticos para efetuar o desacoplamento $P\theta-QV$ e a solução do problema de fluxo de carga desacoplado, os princípios do método CRIC para fluxo de carga convencional, proposto por Carpentier [4].

No capítulo III, apresentam-se a formulação, solução do problema de Despacho de Reativos e técnicas de solução através de um algoritmo primal-dual acoplado, o fluxo de carga ótimo



desacoplado utilizando as equações básicas do CRIC, um algoritmo e um diagrama de blocos.

No capítulo IV são apresentados os resultados obtidos com os testes realizados com um sistema teste de três barras e o sistema teste IEEE30.

As conclusões obtidas relacionadas com a metodologia desenvolvida e o programa computacional estão apresentadas no capítulo V.

Apresenta-se no anexo I um exemplo hipotético que ilustra com razoável fidelidade as características do despacho ótimo de reativos, conforme formulado neste trabalho, e no anexo II apresenta-se as equações utilizadas para formar as submatrizes da matriz Hessiana.



Capítulo II

Conceitos Teóricos Básicos para Formulação e Solução do Despacho de Reativos

Este capítulo apresenta o conceito e a estrutura de um algoritmo primal-dual baseado no artigo de Bakry et al [7]. Também é descrito o problema de fluxo de carga e a solução pelo método de Newton. Descreve-se os fundamentos teóricos e os conceitos básicos para formulação e solução dos métodos desacoplados para cálculo de fluxo de carga [14]. Descreve-se também neste capítulo os princípios do método CRIC para fluxo de carga convencional, sendo apresentadas suas equações básicas.

II.1. Algoritmo Primal-Dual

O método primal-dual baseia na aplicação dos métodos que utilizam o conceito de Lagrangeano para solução de problemas de otimização com restrições, em que as variáveis primais estejam entre os seus limites pré-estabelecido e as variáveis duais sejam factíveis. Essa solução inicial não necessita que as restrições sejam factíveis, correspondendo a uma relaxação do problema.

A seguir serão discutidos os principais aspectos envolvidos na aplicação do algoritmo do tipo primal-dual na solução de problemas não lineares de otimização sujeitos a restrições de desigualdades do tipo:

$$\begin{aligned} &\text{Min } f(\underline{z}) \\ &\text{s.a.} \\ &\quad \underline{h}(\underline{z}) = 0 \\ &\quad \underline{l} \leq \underline{z} \leq \underline{u} \end{aligned} \tag{II.1.1}$$

Seja o Lagrangeano para o problema (II.1.1):

$$L(\underline{z}, \underline{\lambda}, \underline{\pi}_1, \underline{\pi}_2) = f(\underline{z}) + \underline{\lambda}' \underline{h}(\underline{z}) + \underline{\pi}_1' (\underline{z} - \underline{u}) - \underline{\pi}_2' (\underline{z} - \underline{l}) \tag{II.1.2}$$

As condições de karush-Kuhn-Tucker (KKT) para o problema são:

$$\nabla f(\underline{z}) + \nabla h(\underline{z})' \underline{\lambda} + \underline{\pi}_1 - \underline{\pi}_2 = 0 \tag{II.1.3}$$

$$\underline{h}(\underline{z}) = 0 \tag{II.1.4}$$

$$\underline{\pi}_1' (\underline{z} - \underline{u}) = 0 \tag{II.1.5}$$

$$\underline{\pi}_2' (\underline{z} - \underline{l}) = 0 \tag{II.1.6}$$

$$\underline{\pi}_1 \geq 0 \tag{II.1.7}$$

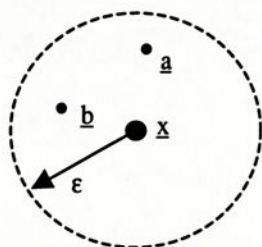
$$\underline{\pi}_2 \leq 0 \tag{II.1.8}$$

$$\underline{z} \leq \underline{u} \tag{II.1.9}$$

$$\underline{z} \geq \underline{l} \tag{II.1.10}$$

Definição: Dado $x \in \mathbb{R}^n$, uma função $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ diz-se Lipschitziana quando existe $k > 0$ (constante de Lipschitz de f) tal que, para quaisquer $\underline{x}, \underline{y} \in X$, tem-se $\|f(\underline{x}) - f(\underline{y})\| \leq k \|\underline{x} - \underline{y}\|$.

Definição: Uma aplicação $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ chama-se localmente Lipschitziana quando para todo $\underline{x} \in X$, existe uma bola aberta B , de centro em $\underline{x}$ $[N_\epsilon(\underline{x}) = \{\underline{y} \mid \|\underline{y} - \underline{x}\| < \epsilon\}]$, tal que $f|_{N_\epsilon(\underline{x}) \cap X}$ (f restrita à $N_\epsilon(\underline{x}) \cap X$) é Lipschitziana.



$$\underline{a}, \underline{b}, \underline{x} \in N_\epsilon(\underline{x}) \Rightarrow \|f(\underline{a}) - f(\underline{b})\| \leq k \|\underline{a} - \underline{b}\|$$

Para aplicar o método de Newton padrão para resolver o conjunto de equações não lineares (II.1.3)-(II.1.10), são estabelecidas as seguintes hipóteses:

(A1) Existência: Existem $(\underline{z}^*, \underline{\lambda}^*, \underline{\pi}_1^*, \underline{\pi}_2^*)$ solução para o problema (II.1.1), satisfazendo as condições de KKT (II.1.3)-(II.1.10);

(A2) Diferenciabilidade: As matrizes Hessianas $\nabla^2 f(\underline{z})$ e $\nabla^2 h(\underline{z})$ existem e são localmente Lipschitz contínuas em $\underline{z}^*$;

(A3) Regularidade: O conjunto $\{\nabla h_1(\underline{z}^*), \dots, \nabla h_m(\underline{z}^*)\}$ é linearmente independente;

(A4) Suficiência de Segunda Ordem: Para $\forall \underline{\eta} \neq 0$, satisfazendo $\nabla h_i(\underline{z}^*)' \underline{\eta} = 0$ $i=1, \dots, m$ tem-se:

$$\underline{\eta}' \nabla_z^2 L(\underline{z}^*, \underline{\lambda}^*, \underline{\pi}_1^*, \underline{\pi}_2^*) \underline{\eta} > 0$$

(A5) Complementaridade Restrita: para $\forall i=1, \dots, n$,

$$\pi_{1i}^* + (\underline{z}^* - \underline{l}) > 0$$

$$\pi_{2i}^* + (\underline{z}^* - \underline{u}) > 0$$

Considere o problema (II.1.1) transformando as restrições de desigualdades em igualdades, adicionando variáveis de folga ou de excesso:

$$\begin{aligned} & \text{Min } f(\underline{z}) \\ & \text{s.a} \\ & \quad \underline{h}(\underline{z}) = 0 \\ & \quad \underline{z} - \underline{s}_1 = \underline{l} \\ & \quad \underline{z} + \underline{s}_2 = \underline{u} \\ & \quad \underline{s}_1 \geq 0, \underline{s}_2 \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{II.1.11})$$

Montando o Lagrangeano para o problema formulado em (II.1.11), tem-se:

$$L(\underline{z}, \underline{s}_1, \underline{s}_2, \underline{\lambda}, \underline{\pi}_1, \underline{\pi}_2, \underline{\gamma}_1, \underline{\gamma}_2) = f(\underline{z}) - \underline{\lambda}' \underline{h}(\underline{z}) - \underline{\pi}_1' (\underline{z} - \underline{s}_1 - \underline{l}) - \underline{\pi}_2' (\underline{z} + \underline{s}_2 - \underline{u}) - \underline{\gamma}_1' \underline{s}_1 - \underline{\gamma}_2' \underline{s}_2 \quad (\text{II.1.12})$$

assim as condições de otimalidade de KKT para o problema são:

$$\nabla f(\underline{z}) - \underline{J}_z' \underline{\lambda} - \underline{\pi}_1 - \underline{\pi}_2 = 0 \quad (\text{II.1.13})$$

$$-\underline{h}(\underline{z}) = 0 \quad (\text{II.1.14})$$

$$\underline{\pi}_1 = \underline{\gamma}_1 \quad (\text{II.1.15})$$

$$\underline{\pi}_2 = -\underline{\gamma}_2 \quad (\text{II.1.16})$$

$$\underline{z} - \underline{s}_1 - \underline{l} = 0 \quad (\text{II.1.17})$$

$$\underline{z} + \underline{s}_2 - \underline{u} = 0 \quad (\text{II.1.18})$$

$$\underline{\gamma}_1' \underline{s}_1 = 0 \quad (\text{II.1.19})$$

$$\underline{\gamma}_2' \underline{s}_2 = 0 \quad (\text{II.1.20})$$

$$\underline{\gamma}_1, \underline{\gamma}_2, \underline{\pi}_1 \geq 0 \quad (\text{II.1.21})$$

$$\underline{\pi}_2 \leq 0 \quad (\text{II.1.22})$$

$$\underline{s}_1, \underline{s}_2 \geq 0 \quad (\text{II.1.23})$$

As equações $\underline{\pi}_1 = \underline{\gamma}_1$ e $\underline{\pi}_2 = -\underline{\gamma}_2$, fornecem informações que na solução do problema, os multiplicadores de Lagrange associados às

restrições de igualdade $\underline{z} - \underline{s}_1 - \underline{l} = 0$ são iguais aos multiplicadores associados às restrições $\underline{s}_1 \geq 0$ e os multiplicadores associados às restrições de igualdade $\underline{z} + \underline{s}_2 - \underline{u} = 0$ são iguais aos multiplicadores associados às restrições $\underline{s}_2 \geq 0$ com o sinal trocado. Observe que as equações $\pi_1 = \gamma_1$ e $\pi_2 = -\gamma_2$ são lineares e as correções dentro do processo iterativo para solução do sistema não linear devido as condições de primeira ordem para π_1 e γ_1 são iguais $\Delta\pi_1 = \Delta\gamma_1$ e para π_2 e γ_2 iguais a $\Delta\pi_2 = \Delta\gamma_2$.

Os sistemas de equações (II.1.3)-(II.1.10) e (II.1.13)-(II.1.23) são equivalentes [7], e a seguinte proposição garante esta equivalência.

Proposição: Sejam as condições (A1) e (A2), anteriormente estabelecidas, asseguradas. Seja também $\underline{s}_1^* = \underline{z}^* - \underline{l}$; $\underline{s}_2^* = \underline{u} - \underline{z}^*$. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) As condições (A3)-(A5) são asseguradas. Observe que para esse problema a condição (A3) sempre será verdadeira, uma vez que as restrições de desigualdade do problema original são lineares.
- (ii) A matriz Hessiana associada ao lagrangeano $L(\underline{z}^*, \underline{s}_1^*, \underline{s}_2^*, \pi_1^*, \pi_2^*, \gamma_1^*, \gamma_2^*)$ é não singular.

Considere o problema (II.1.11) em que as restrições de desigualdade podem ser eliminadas incorporando-as à função objetivo através da técnica das barreiras logarítmicas [3]:

$$\text{Min} \left\{ f(\underline{z}) - \mu \sum_{j=1}^n \log(\underline{s}_{1j}) - \mu \sum_{j=1}^n \log(\underline{s}_{2j}) \right\} \quad (\text{II.1.24})$$

s.a

$$\underline{h}(\underline{z}) = 0 \quad (\text{II.1.24.1})$$

$$\underline{z} - \underline{s}_1 = \underline{l} \quad (\text{II.1.24.2})$$

$$\underline{z} + \underline{s}_2 = \underline{u} \quad (\text{II.1.24.3})$$

O Lagrangeano para o problema com barreiras, referenciado na literatura como *problema perturbado* é dado por:

$$L(\underline{z}, \underline{s}_1, \underline{s}_2, \underline{\lambda}, \underline{\pi}_1, \underline{\pi}_2) = f(\underline{z}) - \mu \sum_{j=1}^n \ln s_{1j} - \mu \sum_{j=1}^n \ln s_{2j} - \lambda' h(\underline{z}) - \pi_1' (\underline{z} - \underline{s}_1 - \underline{l}) - \pi_2' (\underline{z} + \underline{s}_2 - \underline{u}) \quad (\text{II.1.25})$$

As condições de KKT para o problema (II.1.1) perturbado, são assumidas como:

$$\nabla f(\underline{z}) - \underline{\lambda}' \nabla h(\underline{z}) - \underline{\pi}_1 - \underline{\pi}_2 = 0 \quad (\text{II.1.26})$$

$$h(\underline{z}) = 0 \quad (\text{II.1.27})$$

$$\underline{\mu} - \underline{S}_1 \underline{\pi}_1 = 0 \quad (\text{II.1.28})$$

$$\underline{\mu} + \underline{S}_2 \underline{\pi}_2 = 0 \quad (\text{II.1.29})$$

$$\underline{z} - \underline{s}_1 = \underline{l} \quad (\text{II.1.30})$$

$$\underline{z} + \underline{s}_2 = \underline{u} \quad (\text{II.1.31})$$

$$\underline{\pi}_1 \leq 0 \quad (\text{II.1.32})$$

$$\underline{\pi}_2 \geq 0 \quad (\text{II.1.33})$$

Considerando asseguradas as hipóteses (A1)-(A5) através da proposição previamente estabelecida, o método iterativo de Newton para solução do sistema de equações (II.1.26)-(II.1.33) apresenta a seguinte estrutura:

$$H(\underline{s}_k)(\Delta \underline{s}) = -\nabla L(\underline{s}_k) \quad (\text{II.1.34})$$

$$\underline{s}^{k+1} = \underline{s}^k + \sigma \alpha \Delta \underline{s} \quad \sigma \in (0,1) \quad (\text{II.1.35})$$

em que $\Delta \underline{s} = (\Delta \underline{z}, \Delta \underline{s}_1, \Delta \underline{s}_2, \Delta \underline{\lambda}, \Delta \underline{\pi}_1, \Delta \underline{\pi}_2)$

$$H(\underline{s}_0) = \begin{bmatrix} \left(\nabla^2 F(\underline{z}) - \sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla^2 h_i(\underline{x}) \right) & 0 & 0 & -J_z' & -I & -I \\ 0 & -\pi_1 & 0 & 0 & -S_1 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_2 & 0 & 0 & S_2 \\ J_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.1.36})$$

$$\Delta L(\underline{s}) = \begin{bmatrix} -\nabla f(\underline{z}) + J_z' \underline{\lambda} + \underline{\pi}_1 + \underline{\pi}_2 \\ -\underline{u} + S_1 \underline{\pi}_1 \\ -\underline{u} - S_2 \underline{\pi}_2 \\ -\underline{h}(\underline{z}) \\ -\underline{z} + S_1 + \underline{l} \\ -\underline{z} + S_2 + \underline{u} \end{bmatrix} \quad (\text{II.1.37})$$

A solução do problema de minimização da função Lagrangeano pelo método de Newton, pode ser executada trabalhando com o sistema de equações (II.1.34), obtendo-se as correções nos conjuntos de variáveis, e em seguida calculando-se o valor de cada uma destas variáveis, para realizar uma próxima iteração no processo iterativo. Uma outra forma para abordar a solução do problema, é efetuar manipulações algébricas no conjunto de equações (II.1.26)-(II.1.33) e proceder-se a uma redução do número de variáveis, no sistema linear resolvido iterativamente pelo método de Newton. Esse procedimento será adotado, e detalhado em seguida. Escrevendo-se o conjunto de equações (II.1.34), sem considerar a forma matricial e a notação compacta:

$$\left(\nabla^2 F(\underline{z}) - \sum_{i=1}^n \underline{\lambda}_i \nabla^2 \underline{h}_i(\underline{z}) \right) \nabla \underline{z} - J_z' \nabla \underline{\lambda} - \nabla \underline{\pi}_1 - \nabla \underline{\pi}_2 = -\nabla f(\underline{z}) + J_z' \underline{\lambda} + \underline{\pi}_1 + \underline{\pi}_2 \quad (\text{II.1.38})$$

$$-\underline{\pi}_1' \nabla S_1 - S_1 \nabla \underline{\pi}_1 = -\underline{u} + S_1 \underline{\pi}_1 \quad (\text{II.1.39})$$

$$-\underline{\pi}_2' \nabla S_2 - S_2 \nabla \underline{\pi}_2 = -\underline{u} + S_2 \underline{\pi}_2 \quad (\text{II.1.40})$$

$$J_z \nabla \underline{z} = -\underline{h}(\underline{z}) \quad (\text{II.1.41})$$

$$\text{IV} \underline{z} - \text{IV} S_1 = 0 \Rightarrow \nabla S_1 = \nabla \underline{z} \quad (\text{II.1.42})$$

$$\nabla \underline{z} + \nabla S_2 = 0 \Rightarrow \nabla S_2 = -\nabla \underline{z} \quad (\text{II.1.43})$$

Para determinar $\nabla \underline{\pi}_1$ e $\nabla \underline{\pi}_2$, substituem-se as equações (II.1.42) e (II.1.43) em (II.1.39) e (II.1.40):

$$\nabla \pi_1 = -S_1^{-1} \pi_1 \nabla \underline{z} + \underline{u} S_1^{-1} - \pi_1 \quad (\text{II.1.39}')$$

$$\nabla \pi_2 = S_2^{-1} \pi_2 \nabla \underline{z} - \underline{u} S_2^{-1} - \pi_2 \quad (\text{II.1.40}')$$

Substituindo (II.1.39') e (II.1.40') em (II.1.38), tem-se:

$$\left(\nabla^2 F(\underline{z}) - \sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla^2 \underline{h}_i(\underline{z}) \right) \nabla \underline{z} - J_z^T \nabla \underline{\lambda} + S_1^{-1} \pi_1 \nabla \underline{z} - \mu S_1^{-1} + \pi_1 - S_2^{-1} \pi_2 \nabla \underline{z} + \mu S_2^{-1} + \pi_2 = -\nabla f(\underline{z}) + J_z^T \underline{\lambda} + \pi_1 + \pi_2$$

Considerando $\nabla^2 F(\underline{z}) - \sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla^2 \underline{h}_i(\underline{z}) = H(\underline{z}, \underline{\lambda})$ e simplificando a equação acima, tem-se:

$$[H(\underline{z}, \underline{\lambda}) + S_1^{-1} \pi_1 - S_2^{-1} \pi_2] \nabla \underline{z} - J_z^T \nabla \underline{\lambda} = [-\nabla f(\underline{z}) + J_z^T \underline{\lambda} + \mu S_1^{-1} - \mu S_2^{-1}] \quad (\text{II.1.44})$$

Deste modo, o sistema de equações (II.1.44) e (II.1.41) constituem a estrutura matricial do Método de Newton:

$$\begin{bmatrix} H(\underline{z}, \underline{\lambda}) + S_1^{-1} \pi_1 - S_2^{-1} \pi_2 & -J_z^T \underline{z} \\ -J_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \underline{z} \\ \Delta \underline{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla \underline{z} + J_z^T \underline{\lambda} + \mu S_1^{-1} - \mu S_2^{-1} \\ -\underline{h}(\underline{z}) \end{bmatrix} \quad (\text{II.1.45})$$

em que o sistema apresenta a correção nos conjuntos de variáveis primais e duais associadas às restrições de igualdade. As correções para as demais variáveis podem ser obtidas diretamente das equações (II.1.42), (II.1.43), (II.1.39'), (II.1.40').

A próxima etapa na metodologia do método de Newton é a determinação do tamanho do passo que deve ser dado no espaço das variáveis primais e duais para atualização das mesmas. Este procedimento é realizado considerando-se que as variáveis de folga, tanto primais como duais, têm sempre que ser positivas. Dessa forma, considerando que o tamanho do passo será o mesmo para cada conjunto de variáveis - primal e dual, tem-se:

$$\alpha_p = \min \left\{ \min_{\Delta s_{1j} < 0} \frac{s_{1j}}{|\Delta s_{1j}|}, \min_{\Delta s_{2j} < 0} \frac{s_{2j}}{|\Delta s_{2j}|}, 1, 0 \right\} \quad (\text{II.1.46})$$

$$\alpha_d = \min \left\{ \min_{\Delta \pi_{1j} > 0} \frac{-\pi_{1j}}{|\Delta \pi_{1j}|}, \min_{\Delta \pi_{2j} < 0} \frac{+\pi_{2j}}{|\Delta \pi_{2j}|}, 1, 0 \right\} \quad (\text{II.1.47})$$

Determinando o tamanho do passo, calcula-se o valor que todas as variáveis vão assumir na iteração seguinte:

$$\underline{z}^{k+1} := \underline{z}^k + \sigma \alpha_p \Delta \underline{z}^k \quad (\text{II.1.48})$$

$$\underline{s}_1^{k+1} := \underline{s}_1^k + \sigma \alpha_p \Delta \underline{s}_1^k \quad (\text{II.1.49})$$

$$\underline{s}_2^{k+1} := \underline{s}_2^k + \sigma \alpha_p \Delta \underline{s}_2^k \quad (\text{II.1.50})$$

$$\underline{\lambda}^{k+1} := \underline{\lambda}^k + \sigma \alpha_d \Delta \underline{\lambda}^k \quad (\text{II.1.51})$$

$$\underline{\pi}_1^{k+1} := \underline{\pi}_1^k + \sigma \alpha_d \Delta \underline{\pi}_1^k \quad (\text{II.1.52})$$

$$\underline{\pi}_2^{k+1} := \underline{\pi}_2^k + \sigma \alpha_d \Delta \underline{\pi}_2^k \quad (\text{ii.1.53})$$

em que $\sigma \in [1, 0]$, e tem por objetivo evitar que as variáveis envolvidas atinjam qualquer um de seus limites. Alguns autores definem σ como parâmetro de centragem [19].

Para analisar a convergência do algoritmo, considere as condições de KKT (II.1.13)-(II.1.23) em que foram consideradas as variáveis de folga, ou seja:

$$F(\underline{z}, \underline{s}_1, \underline{s}_2, \underline{\lambda}, \underline{\pi}_1, \underline{\pi}_2, \underline{\gamma}_1, \underline{\gamma}_2) = \begin{bmatrix} \nabla_{\underline{z}} L(\underline{z}, \underline{s}_1, \underline{s}_2, \underline{\lambda}, \underline{\pi}_1, \underline{\pi}_2, \underline{\gamma}_1, \underline{\gamma}_2) \\ \underline{h}(\underline{z}) \\ \underline{z} - \underline{s}_1 - \underline{l} \\ \underline{z} + \underline{s}_2 - \underline{u} \\ \underline{\gamma}_1' \underline{S}_1 \\ \underline{\gamma}_2' \underline{S}_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{II.1.54})$$

$$\underline{s}_1, \underline{s}_2, \underline{\pi}_1, \underline{\pi}_2, \underline{\gamma}_1, \underline{\gamma}_2 \geq 0$$

$$\underline{\pi}_2 \leq 0$$

Usando a notação $\underline{s} = (\underline{z}, \underline{s}_1, \underline{s}_2, \underline{\lambda}, \underline{\pi}_1, \underline{\pi}_2, \underline{\gamma}_1, \underline{\gamma}_2)$, uma função de mérito, pode ser utilizada para verificar a convergência do algoritmo, e a sua capacidade para buscar uma solução ótima. Define-se uma função de mérito dada por:

$$\phi(\underline{s}) = \|F(\underline{s})\|_2^2 \quad (\text{II.1.55})$$

Conforme estabelecido no sistema de equações (II.1.44), a correção do tamanho do passo para o método iterativo de Newton é dado por:

$$\Delta \underline{s} = -H_{\mu}(\underline{s}_k)^{-1} F_{\mu}(\underline{s}_k) \quad (\text{II.1.56})$$

e a condição para que este problema perturbado forneça uma direção de melhoria [3] para o problema em estudo é que:

$$\nabla [\phi(\underline{s})]^t \Delta \underline{s} < 0 \quad (\text{II.1.57})$$

Desta forma, considerando:

$$\underline{s}^{k+1} = \underline{s}^k + \alpha \Delta \underline{s}^k \quad (\text{II.1.58})$$

então

$$\phi(\alpha) = \phi(\underline{s}^{k+1}) = \phi(\underline{s}^k + \alpha \Delta \underline{s}^k) \quad (\text{II.1.59})$$

e portanto

$$\phi(0) = \phi(\underline{s}^k) \quad (\text{II.1.60})$$

Com $\phi(\underline{s})$ definido conforme (II.1.55) então

$$\nabla [\phi(\underline{s})]^t \Delta \underline{s} = 2 [F'(\underline{s})^t F(\underline{s})]^t [F'(\underline{s})^{-1} (-F(\underline{s}) + \mu \underline{e})] \quad (\text{II.1.61})$$

$$= 2 F(\underline{s})^t (-F(\underline{s}) + \mu \underline{e}) \quad (\text{II.1.62})$$

$$= 2 (-\|F(\underline{s})\|_2^2 + \mu F(\underline{s})^t \underline{e}) \quad (\text{II.1.63})$$

e para que seja atendida a condição

$$\nabla[\phi(\underline{s})]^t \Delta \underline{s} < 0 \quad (\text{II.1.64})$$

então, deve ser atendida a relação

$$2(-\|F(\underline{s})\|_2^2 + \mu F(\underline{s})^t \underline{e}) < 0 \Leftrightarrow \mu < \frac{\|F(\underline{s})\|_2^2}{\gamma_1^t \underline{s}_1 + \gamma_2^t \underline{s}_2} \quad (\text{II.1.65})$$

Então para que o método de Newton forneça uma direção de melhoria para o problema é necessário que o parâmetro de barreira em cada iteração atenda a condição dada pela inequação (II.1.65), sendo que maiores detalhes dessa demonstração podem ser encontrados em [7].

Outro aspecto problemático na solução do problema usando o parâmetro de barreira, refere-se à atualização do mesmo dentro do processo iterativo do método de Newton. Propõem-se na literatura [7,10,20] a atualização em que se considera o gap de dualidade dado pelo par de variáveis primal-dual associada com as variáveis de folga ou de excesso. Dessa forma, escolhe-se $\sigma_k \in (0,1)$; para $\underline{v} = \underline{v}_k$, e calcula-se o parâmetro de barreira pela relação:

$$\mu_k = \sigma_k \frac{\underline{\gamma}_1^t \underline{s}_1 + \underline{\gamma}_2^t \underline{s}_2}{2n} \quad (\text{II.1.66})$$

em que o numerador da fração em (II.1.66) é o gap de dualidade do problema.

II.2. O Problema de Fluxo de Carga e o Desacoplamento P θ -QV

O cálculo de fluxo de carga em uma rede de energia elétrica consiste essencialmente na determinação do estado da rede, da distribuição dos fluxos e de algumas outras grandezas de

interesse. O problema de fluxo de carga pode ser formulado por um sistema de equações e inequações algébricas não lineares que correspondem, respectivamente, às leis de Kirchhoff e a um conjunto de restrições operacionais da rede elétrica e seu componentes.

Na formulação básica do problema de fluxo de carga, a cada barra da rede são associadas quatro parâmetros, sendo que dois deles entram no problema como dados e dois como variáveis [14]:

V_k : magnitude da tensão nodal.

θ_k : ângulo da tensão nodal.

P_k : geração líquida (geração menos carga) de potência ativa.

Q_k : injeção líquida da potência reativa.

Dependendo de quais parâmetros nodais entram como dados e quais são consideradas como incógnitas, definem-se três tipos de barras:

PQ: são dados P_k e Q_k e calculados V_k e θ_k .

PV: são dados P_k e V_k e calculados θ_k e Q_k .

Referência: são dados V_k e θ_k e calculados P_k e Q_k . Funciona como folga para fechar o balanço de potência entre geração, carga e perdas de transmissão.

O conjunto de equações do problema de fluxo de carga é formado por duas equações para cada barra, obtidas pela aplicação das leis de Kirchhoff, resultando:

$$P_k(\underline{\theta}, \underline{V}) = V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) \quad (\text{II.2.1})$$

$$Q_k(\underline{\theta}, \underline{V}) = V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \quad (\text{II.2.2})$$

Considere inicialmente um problema no qual são dadas P_k e Q_k para as barras PQ; P_k e V_k para as barras PV; V_k e θ_k para a barra V0; e pede-se para calcular V_k e θ_k nas barras PQ; θ_k e Q_k nas barras PV; e P_k e Q_k na barra de referência. Uma vez resolvido este problema será conhecido o estado (V_k, θ_k) para todas as barras da rede ($K=1, NB$), o que torna possível o cálculo de outras variáveis de interesse. Sejam NPQ e NPV, respectivamente, o número de barras PQ e PV da rede.

Este problema pode ser decomposto em dois sistemas de equações algébricas:

Subsistema 1: (dimensão: $2NPQ+NPV$)

$$\Delta P_k = P_k^{esp} - P_k(\underline{\theta}, \underline{V}) = 0 \quad k \in \{PQ + PV\} \quad (II.2.3)$$

$$\Delta Q_k = Q_k^{esp} - Q_k(\underline{\theta}, \underline{V}) = 0 \quad k \in \{PQ\} \quad (II.2.4)$$

Subsistema 2: (dimensão: $NPV+2$)

Trata-se de um sistema com $(NPV+2)$ equações algébricas não-lineares com o mesmo número de incógnitas, no qual todas as incógnitas aparecem explicitamente, o que não ocorre no subsistema 1 que exige um processo iterativo de solução.

$$P_k = P_k(\underline{\theta}, \underline{V}) \quad \text{para a barra de referência} \quad (II.2.5)$$

$$Q_k = Q_k(\underline{\theta}, \underline{V}) \quad k \in \{PV + ref\} \quad (II.2.6)$$

Definindo-se o vetor $\underline{x}$ como as incógnitas do subsistema 1:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \theta_k, & k \in \{PQ\} \cup \{PV\} \\ V_k, & k \in \{PQ\} \end{bmatrix} \quad (II.2.7)$$

As funções ΔP_k e ΔQ_k do subsistema 1, podem ser colocadas na forma vetorial:

$$\Delta \underline{P} = \underline{P}^{esp} - \underline{P}(\underline{\theta}, \underline{V}) \quad (\text{II.2.8})$$

$$\Delta \underline{Q} = \underline{Q}^{esp} - \underline{Q}(\underline{\theta}, \underline{V}) \quad (\text{II.2.9})$$

Seja $\underline{g}(\underline{x})$ a função vetorial dada por:

$$\underline{g}(\underline{x}) = \left\{ \begin{array}{l} \Delta \underline{P} \\ \Delta \underline{Q} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{NPQ} + \text{NPV} \\ \text{NPQ} \end{array} \right. \quad (\text{II.2.10})$$

Por meio dessa função, o subsistema 1 pode ser colocado na forma:

$$\underline{g}(\underline{x}) = 0 \quad (\text{II.2.11})$$

Este sistema de equações algébricas não lineares pode ser resolvido por um número muito grande de métodos.

II.2.1. Solução de Fluxo de Carga pelo Método de Newton

O problema de fluxo de carga pode ser resolvido por um número muito grande de métodos, sendo os mais comuns o método de Newton e suas versões desacopladas. O ponto central do processo de resolução do sistema de equações (II.2.2), consiste em determinar o vetor de correção $\Delta \underline{x}$, o que exige a resolução do sistema linear:

$$\underline{g}(\underline{x}^v) = - \left[\frac{\partial \underline{g}(\underline{x}^v)}{\partial \underline{x}} \right] \Delta \underline{x}^v \quad (\text{II.2.1.1})$$

$$J(\underline{x}^v) \Delta \underline{x} = - \left[\frac{\partial \underline{g}(\underline{x}^v)}{\partial \underline{x}} \right] \quad (\text{II.2.1.2})$$

No caso que o sistema de equações a ser resolvido é o subsistema 1, tem-se:

$$\underline{g}(\underline{x}^v) = \begin{array}{c} \boxed{\Delta \underline{P}^v} \\ \boxed{\Delta \underline{Q}^v} \end{array} \left. \begin{array}{l} \} \text{NPQ + NPV} \\ \} \text{NPQ} \end{array} \right\} \quad (\text{II.2.1.3})$$

$$\Delta(\underline{x}^v) = \begin{array}{c} \boxed{\Delta \underline{\theta}^v} \\ \boxed{\Delta \underline{V}^v} \end{array} \left. \begin{array}{l} \} \text{NPQ + NPV} \\ \} \text{NPQ} \end{array} \right\} \quad (\text{II.2.1.4})$$

$$J(\underline{x}^v) = \begin{array}{cc} \frac{\partial(\Delta \underline{P})}{\partial \underline{\theta}} & \frac{\partial(\Delta \underline{P})}{\partial \underline{V}} \\ \frac{\partial(\Delta \underline{Q})}{\partial \underline{\theta}} & \frac{\partial(\Delta \underline{Q})}{\partial \underline{V}} \end{array} = \begin{array}{cc} \boxed{H(\underline{\theta}, \underline{V})} & \boxed{N(\underline{\theta}, \underline{V})} \\ \boxed{M(\underline{\theta}, \underline{V})} & \boxed{L(\underline{\theta}, \underline{V})} \end{array} \left. \begin{array}{l} \} \text{NPQ + NPV} \\ \} \text{NPQ} \end{array} \right\} \quad (\text{II.2.1.5})$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{NPQ + NPV}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{NPQ}}$

Uma vez determinado o vetor de correção $\Delta \underline{x}$, pela equação (II.2.1.1), atualiza-se o estado $\underline{x}^v$:

$$\underline{x}^{v+1} = \underline{x}^v + \Delta \underline{x}^v \quad (\text{II.2.1.6})$$

o processo é inicializado num ponto $\underline{x}^0$ e repetido até que:

$$\text{Max}_j \left\{ \left\| \underline{g}_j(\underline{x}^v) \right\| \right\} \leq \varepsilon \quad (\text{II.2.1.7})$$

II.3. Desacoplamento P θ - QV

A partir da metodologia original de Newton apareceram os chamados métodos desacoplados de Newton [14]. Estes métodos introduzem simplificações na matriz Jacobiana, isto é, conceitualmente podemos dizer que estes métodos determinam a derivada de $g(x)$ de maneira aproximada. Os métodos desacoplados aproximam o cálculo das derivadas mas mantêm a integridade do modelo da rede e, por isso, não afetam a solução final do fluxo de carga.

Assim, o desacoplamento P θ -QV são obtidos considerando-se o fato de as sensibilidades $\frac{\partial P}{\partial \theta}$ e $\frac{\partial Q}{\partial V}$ serem mais intensas que as sensibilidades $\frac{\partial P}{\partial V}$ e $\frac{\partial Q}{\partial \theta}$. Esse tipo de relação em geral é verificado para redes de transmissão em extra-alta tensão (EAT; >230 kV) e ultra-alta tensão (UAT; >750 kV).

O método de Newton e suas versões desacopladas são os métodos de iteração mais sofisticados, pois para a resolução do problema de fluxo de potência, na maioria dos casos eles não oferecem riscos de divergência e como regra geral, a convergência por eles proporcionada é muito mais rápida de que em outros métodos.

A grande vantagem decorrente do desacoplamento consiste na economia de tempo computacional obtida em virtude da resolução de dois sistemas de equações lineares de ordem $(n-1)$, ao invés da resolução de um sistema de ordem $(2n-2)$, em que n é o número de barras do sistema. Isso reduz, em torno de 50% o tempo de cálculo correspondente a cada iteração. Devido à imprecisão das correções introduzidas pelo desacoplamento, o número de iterações cresce e o tempo total de cálculo fica reduzido, em média, a apenas 70% do tempo correspondente a um cálculo Newton-Raphson.

Pesquisas anteriores demonstram, entretanto, que as hipóteses de desacoplamento desse método são válidas para redes aéreas de transmissão, mas não para redes de distribuição, nem para redes de cabos subterrâneos. Nesses dois últimos casos, o

método desacoplado original apresenta grandes dificuldades de convergência.

Em 1972, B. Stott e Alsac [17] propuseram o modelo Newton desacoplado com solução alternada, que consiste basicamente em uma versão do método Gauss-Seidel aplicado por blocos, onde se resolvem duas equações matriciais: os sub-problemas ativo e reativo.

O algoritmo de Newton resolve iterativamente o seguinte sistema:

$$\Delta P(\underline{V}^v, \underline{\theta}^v) = H(\underline{V}^v, \underline{\theta}^v) \Delta \underline{\theta}^v + N(\underline{V}^v, \underline{\theta}^v) \Delta \underline{V}^v \quad (\text{II.3.2.1})$$

$$\Delta Q(\underline{V}^v, \underline{\theta}^v) = M(\underline{V}^v, \underline{\theta}^v) \Delta \underline{\theta}^v + L(\underline{V}^v, \underline{\theta}^v) \Delta \underline{V}^v \quad (\text{II.3.2.2})$$

$$\underline{\theta}^{v+1} = \underline{\theta}^v + \Delta \underline{\theta}^v \quad (\text{II.3.2.3})$$

$$\underline{V}^{v+1} = \underline{V}^v + \Delta \underline{V}^v \quad (\text{II.3.2.4})$$

Usando a análise de sensibilidade, sabe-se que a variação de P depende fundamentalmente da variação de θ e que a variação de Q depende fundamentalmente da variação de V , podemos considerar o efeito das outras variações desprezíveis, assim:

$$N(\underline{V}^v, \underline{\theta}^v) \approx M(\underline{V}^v, \underline{\theta}^v) \approx \text{desprezível} \approx 0$$

então temos a primeira tentativa de desacoplamento das equações (II.3.2.1)-(II.3.2.4), sendo θ, V atualizados ao mesmo tempo.

$$\Delta P(\underline{V}^v, \underline{\theta}^v) = H(\underline{V}^v, \underline{\theta}^v) \Delta \underline{\theta}^v \quad (\text{II.3.2.5})$$

$$\Delta Q(\underline{V}^v, \underline{\theta}^v) = L(\underline{V}^v, \underline{\theta}^v) \Delta \underline{V}^v \quad (\text{II.3.2.6})$$

$$\underline{\theta}^{v+1} = \underline{\theta}^v + \Delta \underline{\theta}^v \quad (\text{II.3.2.7})$$

$$\underline{V}^{v+1} = \underline{V}^v + \Delta \underline{V}^v \quad (\text{II.3.2.8})$$

A forma definitiva do método de Newton desacoplado é obtida usando um esquema alternado de redução do sistema (II.3.2.5) - (II.3.2.8) assim:

$$\text{subproblema } P\theta \quad \begin{cases} \Delta P(\underline{V}^v, \underline{\theta}^v) = H(\underline{V}^v, \underline{\theta}^v) \Delta \underline{\theta}^v \\ \underline{\theta}^{v+1} = \underline{\theta}^v + \Delta \underline{\theta}^v \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(II.3.2.9)} \\ \text{(II.3.2.10)} \end{matrix}$$

$$\text{subproblema } PQ \quad \begin{cases} \Delta Q(\underline{V}^v, \underline{\theta}^v) = L(\underline{V}^v, \underline{\theta}^{v+1}) \Delta \underline{V}^v \\ \underline{V}^{v+1} = \underline{V}^v + \Delta \underline{V}^v \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(II.3.2.11)} \\ \text{(II.3.2.12)} \end{matrix}$$

Note-se que, a aproximação introduzida com o desacoplamento para obter (II.3.2.5) - (II.3.2.8) é parcialmente compensada ao usar os valores atualizados de V e θ em cada ponto do sistema. Os subproblemas $P\theta$ e QV podem ter velocidades de convergência diferentes e nesse caso somente tem processo o subproblema que ainda não convergiu.

O método de Newton desacoplado, pode também ser aplicado em uma versão ligeiramente diferente, conhecida como método desacoplado rápido, a qual pode apresentar, para alguns sistemas, uma convergência um pouco mais rápida que a versão do método de Newton desacoplado. É conceitualmente parecido ao método de Newton desacoplado, com a diferença de que no método desacoplado rápido é usada uma matriz Jacobiana constante e, independente do estado $\{V, \theta\}$, que depende unicamente dos parâmetros do sistema $\{Y\}$.

II.4. Princípios do Método CRIC para Fluxo de Carga Convencional

O fluxo de carga CRIC ("Constrained Reactive Implicit Coupling"), proposto por Carpentier [4] se fundamenta em dois critérios, um de natureza teórica e outro prática. O primeiro consiste em manter a potência ativa constante ao invés dos ângulos durante a iteração reativa e o segundo critério consiste

em que, quando os módulos das tensões são alterados, o fator que mantém constante as injeções de potência ativa é equivalente a manter constante o fluxo de potência ativa em cada bipolo do sistema. O erro introduzido com esta aproximação é muito pequeno, mesmo considerando condições de carga pesada como em sistemas de baixa tensão, permitindo estabelecer uma nova matriz L_C para o sub-problema reativo, com um grau de esparsidade igual ao do método desacoplado tradicional.

II.4.1. Equações Básicas do Fluxo de Carga CRIC [4,12]

Seja o bipolo generalizado da figura (II.4.1) representando o modelo π da linha de transmissão, ligada às barras k e m por transformadores em fase,

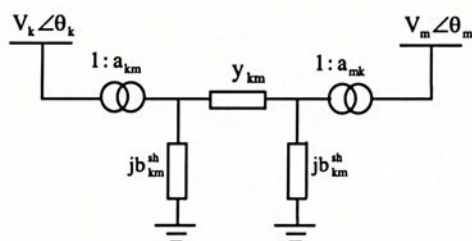


Figura II.4.1 – Bipolo Generalizado

e sejam as seguintes equações que relacionam os elementos deste circuito:

$$y_{km} = g_{km} + jb_{km} \quad (\text{II.4.1.1})$$

$$g_{km} = \frac{r_{km}}{(r_{km}^2 + x_{km}^2)} = Y_{km} \text{Sen}\alpha_{km} \quad (\text{II.4.1.2})$$

$$b_{km} = \frac{-x_{km}}{(r_{km}^2 + x_{km}^2)} = -Y_{km} \text{Cos}\alpha_{km} \quad (\text{II.4.1.3})$$

$$\alpha_{km} = \text{tg}^{-1}(r_{km}/x_{km}); \quad (\text{II.4.1.4})$$

$$Y_{km} = |g_{km} + jb_{km}|; \quad (\text{II.4.1.5})$$

$$\operatorname{sen} \alpha_{km} = \frac{r_{km}}{\left(r_{km}^2 + x_{km}^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{II.4.1.6})$$

$$\cos \alpha_{km} = \frac{x_{km}}{\left(r_{km}^2 + x_{km}^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{II.4.1.7})$$

O fluxo de potência aparente no bipolo é dado por:

$$\dot{S}_{km}^* = P_{km} - jQ_{km} = \dot{E}_{km}^* \dot{I}_{km} \quad (\text{II.4.1.8})$$

em que:

$$\dot{I}_{km} = a_{km} y_{km} \left(a_{km} \dot{E}_k - \dot{E}_m \right) + j b_{km}^{\text{sh}} \dot{E}_k \quad (\text{II.4.1.9})$$

$$\dot{E}_k = V_k e^{j\theta_k} \quad (\text{II.4.1.10})$$

$$\dot{E}_m = V_m e^{j\theta_m} \quad (\text{II.4.1.11})$$

Desenvolvendo a equação (II.4.1.9), obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{S}_{km}^* = & a_{km}^2 V_k^2 g_{km} + j a_{km}^2 V_k^2 b_{km} - a V_k V_m g_{km} \cos(\theta_k - \theta_m) - j a_{km} V_k V_m b_{km} \cos(\theta_k - \theta_m) \\ & + j a_{km} V_k V_m g_{km} \operatorname{sen}(\theta_k - \theta_m) - a_{km} V_k V_m b_{km} \operatorname{sen}(\theta_k - \theta_m) + j b_{km}^{\text{sh}} V_k^2 \end{aligned} \quad (\text{II.4.1.12})$$

Separando as partes real e imaginária da expressão anterior, obtém-se as expressões que fornecem os fluxos de potências ativa e reativa no bipolo da Fig. (II.4.1):

$$P_{km} = a_{km}^2 V_k^2 g_{km} - a_{km} V_k V_m g_{km} \cos(\theta_k - \theta_m) - a_{km} V_k V_m b_{km} \operatorname{sen}(\theta_k - \theta_m) \quad (\text{II.4.1.13})$$

$$Q_{km} = -a_{km}^2 V_k^2 b_{km} - b_{km}^{\text{sh}} V_k^2 + a_{km} V_k V_m b_{km} \cos(\theta_k - \theta_m) - a_{km} V_k V_m g_{km} \operatorname{sen}(\theta_k - \theta_m) \quad (\text{II.4.1.14})$$

Substituindo as relações:

$$g_{km} = y_{km} \operatorname{sen} \alpha_{km} \quad (\text{II.4.1.15})$$

$$b_{km} = -y_{km} \cos \alpha_{km} \quad (\text{II.4.1.16})$$

tem-se:

$$P_{km} = (a_{km} V_k)^2 Y_{km} \text{Sen} \alpha_{km} + (a_{km} V_k) \cdot (a_{mk} V_m) Y_{km} \text{Sen}(\theta_{km} - \alpha_{km}) \quad (\text{II.4.1.17})$$

$$Q_{km} = (a_{km} V_k)^2 (Y_{km} \text{Cos} \alpha_{km} - b_{km}^{sh}) - (a_{km} V_k) \cdot (a_{mk} V_m) Y_{km} \text{Cos}(\theta_{km} - \alpha_{km}) \quad (\text{II.4.1.18})$$

As injeções líquidas de potência ativa e reativa em cada barra do sistema são dadas por:

$$P_k = \sum_{k \neq m} P_{km} \quad (\text{II.4.1.19})$$

$$P_k = \sum_{k \neq m} Y_{km} a_{km} V_k V_m \text{sen}(\theta_{km} - \alpha_{km}) + V_k^2 \sum_{k \neq m} a_{km}^2 Y_{km} \text{sen} \alpha_{km} \quad (\text{II.4.1.20})$$

$$Q_k = \sum_{k \neq m} Q_{km} \quad (\text{II.4.1.21})$$

$$Q_k = -V_k \sum_{k \neq m} a_{km} V_m Y_{km} \text{cos}(\theta_{km} - \alpha_{km}) + V_k^2 \sum_{k \neq m} a_{km}^2 Y_{km} \text{cos} \alpha_{km} - b_k^{sh} \quad (\text{II.4.1.22})$$

Considerando constante o fluxo de potência ativa P_{km} , no bipolo da Fig.(II.4.1), quando a parte reativa está sob consideração, conclui-se em (II.4.1.18) que $\text{Sen}(\theta_{km} - \alpha_{km})$ é apenas função de V_k e V_m , ou seja:

$$\text{sen}(\theta_{km} - \alpha_{km}) = \frac{P_{km} - a_{km}^2 Y_{km} V_k^2 \text{sen} \alpha_{km}}{a_{km} Y_{km} V_k V_m} \quad (\text{II.4.1.23})$$

$$\text{sen}^2(\theta_{km} - \alpha_{km}) + \text{cos}^2(\theta_{km} - \alpha_{km}) = 1 \quad (\text{II.4.1.24})$$

$$Q_k = V_k^2 \sum_{k \neq m} (a_{km}^2 Y_{km} \text{cos} \alpha_{km} - b_k^{sh}) - V_k \sum_{k \neq m} a_{km} Y_{km} V_m \sqrt{1 - \left(\frac{P_{km} - a_{km}^2 Y_{km} V_k^2 \text{sen} \alpha_{km}}{a_{km} Y_{km} V_k V_m} \right)^2} \quad (\text{II.4.1.25})$$

A expressão (II.4.1.25) é função de V_k e V_m mantendo P_{km} constante. Esta expressão permite estabelecer um *Jacobiano Reativo - LCRIC*, válido para cada iteração Q-V.

Capítulo III

Formulação e Solução do Problema de Despacho de Reativos

O despacho de reativos é um caso particular de um problema muito mais genérico, o fluxo de potência ótimo [4,5,11,18], que consiste em determinar um ponto de operação para o sistema que otimiza uma função objetivo sujeita a um conjunto de restrições de operação e limitações físicas do sistema. Neste capítulo formula-se o problema de despacho ótimo de reativos e propõe-se, para resolvê-lo, uma técnica baseada no desacoplamento implícito e no método das barreiras logarítmicas.

III.1. Formulação

O sistema de energia elétrica planejado, considerando determinadas condições de carga e topologia, tem reservas reativas necessárias para operar atendendo às restrições de segurança e operação, sendo necessário nesses casos apenas, que se efetue os ajustes dos dispositivos de controle de tensão existentes no sistema, ou seja, deve ser realizado o despacho ótimo de reativos para o sistema em análise.

Para cada cenário de operação o problema de despacho de reativos pode ser formulado como:

$$\text{Min} W = \sum_{i \in I} (C1_i y1_i + C2_i y2_i) \quad (\text{III.1.1})$$

s. a.

$$\underline{P}^{\text{esp}} - \underline{P}(\underline{\theta}, \underline{V}) = 0 \quad (\text{III.1.2})$$

$$QG_i - QC_i - Q_i(\underline{\theta}, \underline{V}) + y1_i - y2_i = 0 \quad i \in I \quad (\text{III.1.3})$$

$$Q_k^{\text{esp}} - Q_k(\underline{\theta}, \underline{V}) = 0 \quad k \in \{NB - I\} \quad (\text{III.1.4})$$

$$QG_i^{\text{min}} \leq QG_i \leq QG_i^{\text{max}} \quad i \in I \quad (\text{III.1.5})$$

$$\underline{V}^{\text{min}} \leq \underline{V} \leq \underline{V}^{\text{max}} \quad (\text{III.1.6})$$

$$0 \leq y1_i \leq y1_i^{\text{max}} \quad i \in I \quad (\text{III.1.7})$$

$$0 \leq y2_i \leq y2_i^{\text{max}} \quad i \in I \quad (\text{III.1.8})$$

Os conjuntos de equações (III.1.2)-(III.1.4) são as equações estáticas do fluxo de carga, que representam o balanço de potências ativa e reativa do sistema e relacionam as condições de operação da rede elétrica, com capacidade de geração e o atendimento das demandas ativa (P) e reativas (Q), que são dadas por:

$$PG_k - PL_k - P_k(\underline{\theta}, \underline{V}) = 0 \quad (\text{III.1.9})$$

$$QG_k - QL_k - Q_k(\underline{\theta}, \underline{V}) = 0 \quad (\text{III.1.10})$$

$k = 1, \dots, NB$

O problema (III.1.1)-(III.1.8) é um problema de otimização de grande porte e fornece informações, caso existam, das regiões com falta de suporte de reativos, através dos valores das injeções reativas fictícias y_{1i}, y_{2i} e se, a razão de uma possível solução inviável do problema for a falta de suporte reativo, essas injeções permitirão a obtenção de uma solução. Outro aspecto interessante na solução do despacho de reativos refere-se às barras onde alocar variáveis de folga ($y_{1i}, y_{2i}, i \in I$) - elas podem ser alocadas em todas as barras do sistema ou apenas em um conjunto mais crítico de barras sob o aspecto reativo.

Neste trabalho a solução do problema de despacho ótimo de reativos está sendo abordada, pelo Método de Newton [5] e técnicas do tipo barreiras logarítmicas para tratar as restrições de desigualdades juntamente com um algoritmo do tipo primal-dual para solução de problemas não lineares de otimização.

O objetivo é o desenvolvimento e implementação de um algoritmo em que se consideram as equações básicas do fluxo de carga CRIC desenvolvido por Carpentier e o desacoplamento P- θ e Q-V.

III.2. Técnicas de Solução Através de um Algoritmo Primal-Dual Acoplado

A solução do problema de despacho ótimo de reativos, está sendo abordada através do método das barreiras logarítmicas. Dessa forma considera-se o problema (III.1.1)-(III.1.8), em que as restrições de desigualdades são transformadas em restrições de igualdade através do uso de variáveis de folga ou de excesso, obtendo-se o seguinte problema equivalente:

$$\text{Min } W = \sum_{i \in I} (C_{1i} y_{1i} + C_{2i} y_{2i}) \quad (\text{III.2.1})$$

s. a.

$$\underline{P}^{\text{esp}} - \underline{P}(\underline{\theta}, \underline{V}) = 0 \quad (\text{III.2.2})$$

$$QG_i - QC_i - Q_i(\theta, \underline{V}) + y1_i - y2_i = 0 \quad i \in I \quad (\text{III.2.3})$$

$$Q_k^{esp} - Q_k(\theta, V) = 0 \quad k \in \{NB-I\} \quad (\text{III.2.4})$$

$$QG_i - VQ1_i = QG_i^{\min} \quad i \in I \quad (\text{III.2.5})$$

$$QG_i + VQ2_i = QG_i^{\max} \quad i \in I \quad (\text{III.2.6})$$

$$\underline{V} - \underline{VV1} = \underline{V}^{\min} \quad (\text{III.2.7})$$

$$\underline{V} + \underline{VV2} = \underline{V}^{\max} \quad (\text{III.2.8})$$

$$y1_i + vy1_i = y1_i^{\max} \quad i \in I \quad (\text{III.2.9})$$

$$y2_i + vy2_i = y2_i^{\max} \quad i \in I \quad (\text{III.2.10})$$

$$VQ1_i \geq 0, VQ2_i \geq 0, vy1_i \geq 0, vy2_i \geq 0 \quad i \in I \quad (\text{III.2.11})$$

$$\underline{VV1} \geq 0, \underline{VV2} \geq 0, y1_i \geq 0, y2_i \geq 0 \quad i \in I \quad (\text{III.2.12})$$

Incorporando as restrições de desigualdade (III.2.11) e (III.2.12) à função objetivo (III.2.1), através da técnica das barreiras logarítmicas, obtém-se o seguinte problema perturbado.

$$\begin{aligned} \text{Min } w = & \sum_{i \in I} (C1_i y1_i + C2_i y2_i) - \mu Q \sum_{i \in I} \ln y1_i - \mu Q \sum_{i \in I} \ln y2_i - \mu Q \sum_{i \in I} \ln VQ1_i - \mu Q \sum_{i \in I} \ln VQ2_i - \mu V \sum_{i=1}^{NB} \ln VV1_i - \\ & - \mu V \sum_{i=1}^{NB} \ln VV2_i - \mu Q \sum_{i \in I} \ln vy1_i - \mu Q \sum_{i \in I} \ln vy2_i \end{aligned} \quad (\text{III.2.13})$$

s.a.

$$\underline{P}^{esp} - \underline{P}(\theta, \underline{V}) = 0 \quad (\text{III.2.14})$$

$$QG_i - QC_i - Q_i(\theta, \underline{V}) + y1_i - y2_i = 0 \quad i \in I \quad (\text{III.2.15})$$

$$Q_k^{esp} - Q_k(\theta, V) = 0 \quad k \in \{NB-I\} \quad (\text{III.2.16})$$

$$QG_i - VQ1_i = QG_i^{\min} \quad i \in I \quad (\text{III.2.17})$$

$$QG_i + VQ2_i = QG_i^{\max} \quad i \in I \quad (\text{III.2.18})$$

$$\underline{V} - \underline{VV1} = \underline{V}^{\min} \quad (\text{III.2.19})$$

$$\underline{V} + \underline{VV2} = \underline{V}^{\max} \quad (\text{III.2.20})$$

$$y1_i + vy1_i = y1_i^{\max} \quad i \in I \quad (\text{III.2.21})$$

$$y2_i + vy2_i = y2_i^{\max} \quad i \in I \quad (\text{III.2.22})$$

Dessa forma o problema de despacho de reativos passou a ser formulado como um problema com restrições apenas de igualdade. Esta técnica para abordar problemas com restrições de desigualdade é amplamente discutida na literatura, provando-se que o algoritmo converge para a solução ótima quando o parâmetro de barreira μ , tende para zero [3]. Para solução do problema, adotou-se neste trabalho o método de segunda ordem de Newton [3,18] que foi detalhado no capítulo anterior. Com as equações (III.2.13)-(III.2.22), formula-se o problema Lagrangeano [3], que incorpora as restrições de igualdade à função objetivo através dos multiplicadores de Lagrange.

$$\begin{aligned}
 L(s) = & \sum_{i \in I} (C1_i y1_i + C2_i y2_i) - \mu Q \sum_{i \in I} \ln y1_i - \mu Q \sum_{i \in I} \ln y2_i - \mu Q \sum_{i \in I} \ln VQ1_i - \mu Q \sum_{i \in I} VQ2_i - \mu v \sum_{i=1}^{NB} \ln vv1_i - \mu v \sum_{i=1}^{NB} \ln vv2_i \\
 & - \mu Q \sum_{i \in I} \ln vyl_i - \mu Q \sum_{i \in I} \ln vy2_i - \sum_{i=1}^{NB} \pi P_i (P_i^{esp} - P_i(\theta, V)) - \sum_{i \in I} \pi Q_i (QG_i - QC_i - Q_i(\theta, V) + y1_i - y2_i) \\
 & - \sum_{k \in K} \pi Q_k (Q_k^{esp} - Q_k(\theta, V)) - \sum_{i \in I} \pi QG1_i (QG_i - VQ1_i - QG_i^{min}) - \sum_{i \in I} \pi QG2_i (QG_i + VQ2_i - QG_i^{max}) \\
 & - \sum_{i=1}^{NB} \pi v1_i (V_i - VV1_i - V_i^{min}) - \sum_{i=1}^{NB} \pi v2_i (V_i + VV2_i - V_i^{max}) - \sum_{i \in I} \pi vyl_i (y1_i + vyl_i - y1_i^{max}) - \sum_{i \in I} \pi vy2_i (y2_i + vy2_i - y2_i^{max})
 \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
 s = & (V_K, \theta_K, y1_i, y2_i, QG_i, VQ1_i, VQ2_i, VV1_i, VV2_i, vyl_i, vy2_i, \pi P_K, \pi Q_K, \\
 & \pi QG1_i, \pi QG2_i, \pi v1_K, \pi v2_K, \pi vyl_i, \pi vy2_i) \quad i \in I, k=1, \dots, NB
 \end{aligned}$$

Considerando-se a condição de otimalidade de primeira ordem para o problema perturbado (III.2.13)-(III.2.22), tem-se as condições de KKT:

$$C1_i - \pi Q_i - \pi vyl_i - \gamma y1_i = 0 \quad i \in I \quad (III.2.23)$$

$$C2_i - \pi Q_i - \pi vy2_i - \gamma y2_i = 0 \quad i \in I \quad (III.2.24)$$

$$\sum_{k=1}^{NB} \pi P_k \frac{\partial P_k(\theta, V)}{\partial V_m} + \sum_{i \in I} \pi Q_i \frac{\partial Q_i(\theta, V)}{\partial V_m} - \pi V1_m - \pi V2_m = 0 \quad m=1, \dots, NB \quad (III.2.25)$$

$$\sum_{k=1}^{NB} \pi P_k \frac{\partial P_k(\theta, V)}{\partial \theta_m} + \sum_{i \in I} \pi Q_i \frac{\partial Q_i(\theta, V)}{\partial \theta_m} = 0 \quad m=1, \dots, NB \quad (III.2.26)$$

$$\pi V1_i - \gamma VV1_i = 0 \quad i=1, \dots, NB \quad (III.2.27)$$

$$\begin{aligned}
 -\pi V2_i - \gamma VV2_i &= 0 & i=1, \dots, NB & \quad (III.2.28) \\
 \pi QG1_i - \gamma VQ1_i &= 0 & i \in I & \quad (III.2.29) \\
 -\pi QG2_i - \gamma VQ2_i &= 0 & i \in I & \quad (III.2.30) \\
 -\pi vy1_i - \gamma vy1_i &= 0 & i \in I & \quad (III.2.31) \\
 -\pi vy2_i - \gamma vy2_i &= 0 & i \in I & \quad (III.2.32) \\
 -\pi Q_i - \pi QG1_i - \pi QG2_i &= 0 & i \in I & \quad (III.2.33) \\
 P_k^{esp} - P_k(\underline{\theta}, \underline{V}) &= 0 & k=1, \dots, NB & \quad (III.2.34) \\
 -QC_k - Q_k(\underline{\theta}, \underline{V}) &= 0 & k \in K & \quad (III.2.35) \\
 QG_i - QC_i - Q_i(\underline{\theta}, \underline{V}) + y1_i - y2_i &= 0 & i \in I & \quad (III.2.36) \\
 V_i - VV1_i - V_i^{min} &= 0 & i \in I & \quad (III.2.37) \\
 V_i + VV2_i - V_i^{max} &= 0 & i \in I & \quad (III.2.38) \\
 QG_i - VQ1_i - QG_i^{min} &= 0 & i \in I & \quad (III.2.39) \\
 QG_i + VQ2_i - QG_i^{max} &= 0 & i \in I & \quad (III.2.40) \\
 y1_i + vy1_i - y1_i^{max} &= 0 & i \in I & \quad (III.2.41) \\
 y2_i + vy2_i - y2_i^{max} &= 0 & i \in I & \quad (III.2.42)
 \end{aligned}$$

Aplicando o método de Newton padrão para resolver o sistema não linear de segunda ordem (III.2.23)-(III.2.42), obtém-se o seguinte sistema matricial:

	V	θ	y_1	y_2	QG	VV1	VV2	VQ1	VQ2	Vy1	Vy2	πP	πQ	πv_1	πv_2	πQG_1	πQG_2	$\pi v y_1$	$\pi v y_2$
V	H1	H2										J1	J2	-1	-1				
θ	H3	H4										J3	J4						
y_1			$\frac{\mu Q}{y_1^2} - \pi V$										-1					-1	
y_2				$\frac{\mu Q}{y_2^2} - \pi V$								1							-1
QG													-1			-1	-1		
VV1						$\frac{\mu V}{VV_1^2}$								1					
VV2							$\frac{\mu V}{VV_2^2}$								-1				
VQ1								$\frac{\mu Q}{VQ_1^2}$											
VQ2									$\frac{\mu Q}{VQ_2^2}$								-1		
Vy1										$\frac{\mu Q}{Vy_1^2}$								-1	
Vy2											$\frac{\mu Q}{Vy_2^2}$								-1
πP	J1	J3																	
πQ	J2	J4	-1	1	-1														
πv_1	-1					1													
πv_2	-1						-1												
πQG_1					-1			1											
πQG_2					-1				-1										
$\pi v y_1$			-1							-1									
$\pi v y_2$				-1							-1								

ΔV	$-\pi P' \frac{\partial P(\theta, V)}{\partial V} - \pi Q' \frac{\partial Q(\theta, V)}{\partial V} + \pi V_1 + \pi V_2 = 0$	(III.2.43)
$\Delta \theta$	$-\pi P' \frac{\partial P(\theta, V)}{\partial \theta} - \pi Q' \frac{\partial Q(\theta, V)}{\partial \theta} = 0$	(III.2.44)
Δy_1	$-C_1 + \frac{\mu Q}{y_{1i}} + \pi Q_i + \pi v y_{1i} = 0$	(III.2.45)
Δy_2	$-C_1 + \frac{\mu Q}{y_{2i}} + \pi Q_i + \pi v y_{2i} = 0$	(III.2.46)
ΔQG	$\pi Q_i + \pi QG_{1i} + \pi QG_{2i} = 0$	(III.2.47)
ΔVV_1	$\frac{\mu v}{VV_{1i}} - \pi V_{1i} = 0$	(III.2.48)
ΔVV_2	$\frac{\mu v}{VV_{2i}} - \pi V_{2i} = 0$	(III.2.49)
ΔVQ_1	$\frac{\mu Q}{VQ_{1i}} - \pi QG_{1i} = 0$	(III.2.50)
ΔVQ_2	$\frac{\mu Q}{VQ_{2i}} - \pi QG_{2i} = 0$	(III.2.51)
ΔVy_1	$\frac{\mu Q}{Vy_{1i}} - \pi Vy_{1i} = 0$	(III.2.52)
ΔVy_2	$\frac{\mu Q}{Vy_{2i}} - \pi Vy_{2i} = 0$	(III.2.53)
$\Delta \pi P$	$P^{exp} - P(\theta, V) = 0$	
$\Delta \pi Q$	$QG_i - QC_i - Q_i(\theta, V) + y_{1i} - y_{2i} = 0$	
$\Delta \pi v_1$	$v_i - vv_{1i} - v_i^{min} = 0$	(III.2.54)
$\Delta \pi v_2$	$v_i - vv_{2i} - v_i^{max} = 0$	(III.2.55)
$\Delta \pi QG_1$	$QG_i - VQ_{1i} - QG_i^{min} = 0$	(III.2.56)
$\Delta \pi QG_2$	$QG_i - VQ_{2i} - QG_i^{max} = 0$	(III.2.57)
$\Delta \pi v y_1$	$y_{1i} + v y_{1i} - y_{1i}^{max} = 0$	(III.2.58)
$\Delta \pi v y_2$	$y_{2i} + v y_{2i} - y_{2i}^{max} = 0$	(III.2.59)

Figura III.2.1: Sistema de Equações - Método de Newton

Resolvendo-se o sistema de equações da figura III.2.1, obtém-se as correções na iteração atual das variáveis envolvidas no problema que está sendo resolvido pelo método de Newton. Conforme detalhado no capítulo II, através de manipulações algébricas é possível reduzir o número de equações neste sistema, sem perder as características de esparsidade.

Considerando o conjunto de equações da Figura III.2.1, trabalhando com as equações de (III.2.54)-(III.2.59), temos as seguintes equações auxiliares:

$$\Delta V - \Delta VV1 = V_i - VV1_i - V_i^{\min} = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta VV1 = \Delta V \quad (\text{III.2.60})$$

$$\Delta V - \Delta VV2 = V_i - VV2_i - V_i^{\min} = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta VV2 = -\Delta V \quad (\text{III.2.61})$$

$$\Delta QG_i - \Delta VQ1_i = QG_i - VQ1_i - QG_i^{\min} = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta VQ1_i = \Delta QG_i \quad (\text{III.2.62})$$

$$\Delta QG_i + \Delta VQ2_i = QG_i - VQ2_i - QG_i^{\max} = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta VQ2_i = -\Delta QG_i \quad (\text{III.2.63})$$

$$\Delta y1_i + \Delta vy1_i = y1_i - vy1_i - y1_i^{\max} = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta vy1_i = -\Delta y1_i \quad (\text{III.2.64})$$

$$\Delta y2_i + \Delta vy2_i = y2_i - vy2_i - y2_i^{\max} = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta vy2_i = -\Delta y2_i \quad (\text{III.2.65})$$

Trabalhando com as equações de (III.2.48)-(III.2.53) da matriz anterior e substituindo (III.2.60) a (III.2.65) nestas equações, tem-se:

$$\Delta \pi V1 = \frac{\mu V}{VV1_i} - \pi V1_i - \left[\frac{\mu V}{VV1_i^2} \right] \Delta V \quad (\text{III.2.66})$$

$$\Delta \pi V2 = \frac{\mu V}{VV2_i} - \pi V2_i - \left[\frac{\mu V}{VV2_i^2} \right] \Delta V \quad (\text{III.2.67})$$

$$\Delta \pi QG1 = \frac{\mu Q}{VQ1_i} - \pi QG1_i - \left[\frac{\mu Q}{VQ1_i^2} \right] \Delta \pi G \quad (\text{III.2.68})$$

$$\Delta \pi QG2 = -\frac{\mu Q}{VQ2_i} - \pi QG2_i - \left[\frac{\mu Q}{VQ2_i^2} \right] \Delta \pi G \quad (\text{III.2.69})$$

$$\Delta \pi vy1 = -\frac{\mu Q}{vy1_i} - \pi vy1_i - \left[\frac{\mu Q}{vy1_i^2} \right] \Delta y1_i \quad (\text{III.2.70})$$

$$\Delta \pi vy2 = -\frac{\mu Q}{vy2_i} - \pi vy2_i - \left[\frac{\mu Q}{vy2_i^2} \right] \Delta y2_i \quad (\text{III.2.71})$$

Sejam as equações (III.2.43)-(III.2.47) do sistema matricial apresentado anteriormente, e as equações (III.2.66)-(III.2.71), através de manipulações algébricas, obtém-se as seguintes equações:

$$\left(H1 + \frac{\mu V}{VV1^2} + \frac{\mu V}{VV2^2}\right)\Delta V + H2\Delta\theta + J1\Delta\pi P + J2\Delta\pi Q = -\pi P' \frac{\partial P(\theta, v)}{\partial \theta} - \pi Q' \frac{\partial Q(\theta, v)}{\partial \theta} + \frac{\mu V}{VV1} - \frac{\mu V}{VV2}$$

(III.2.72)

$$H3\Delta V + H4\Delta\theta + J3\Delta\pi P + J4\Delta\pi Q = -\pi P' \frac{\partial P(\theta, v)}{\partial \theta} - \pi Q' \frac{\partial Q(\theta, v)}{\partial \theta}$$

(III.2.73)

$$\left(\frac{\mu Q}{y1^2} + \frac{\mu Q}{vy1^2}\right)\Delta y1 - \Delta\pi Q = -C1 + \frac{\mu Q}{y1_i} + \pi Q_i - \frac{\mu Q}{vy1_i}$$

(III.2.74)

$$\left(\frac{\mu Q}{y2^2} + \frac{\mu Q}{vy2^2}\right)\Delta y2 + \Delta\pi Q = -C1 + \frac{\mu Q}{y2_i} + \pi Q_i - \frac{\mu Q}{vy2_i}$$

(III.2.75)

$$\left(\frac{\mu Q}{VQ1^2} + \frac{\mu Q}{VQ2^2}\right)\Delta yQG - \Delta\pi Q = \pi Q_i + \frac{\mu Q}{VQ1_i} - \frac{\mu Q}{VQ2_i}$$

(III.2.76)

Através das equações (III.2.72)-(III.2.76) chega-se ao sistema matricial da Figura III.2.2 que juntamente com as equações auxiliares (III.2.60)-(III.2.71) deve ser resolvido iterativamente até a convergência.

$H1 + \mu V[VV1]^{-2} + \mu V[VV2]^{-2}$	H2				J1	J2	ΔV	$-\pi P' \frac{\partial P}{\partial V} - \pi Q' \frac{\partial Q}{\partial V} + \frac{\mu V}{VV1} - \frac{\mu V}{VV2}$
H3	H4				J3	J4	$\Delta \theta$	$-\pi P' \frac{\partial P}{\partial \theta} - \pi Q' \frac{\partial Q}{\partial \theta}$
		$\frac{\mu Q}{y1^2} + \frac{\mu Q}{vy1^2}$				-1	$\Delta y1$	$-C1 + \frac{\mu Q}{y1_i} + \pi Q_i - \frac{\mu Q}{vy1_i}$
			$\frac{\mu Q}{y2^2} + \frac{\mu Q}{vy2^2}$			1	$\Delta y2$	$-C1 + \frac{\mu Q}{y2_i} + \pi Q_i - \frac{\mu Q}{vy2_i}$
				$\frac{\mu Q}{VQ1^2} + \frac{\mu Q}{VQ2^2}$		-1	ΔQG	$\pi Q + \frac{\mu Q}{VQ1_i} - \frac{\mu Q}{VQ2_i}$
J1	J3						$\Delta \pi P$	$P^{esp} - P(\theta, V)$
J2	J4	-1	1	-1			$\Delta \pi Q$	$QG_i - QC_i - Q(\theta, V) + y1_i + y2_i$

Figura III.2.2: Sistema Matricial da versão Acoplada - Potência Ativa/Reativa

O termo independente que aparece na Figura III.2.2 é parte da condição de otimalidade de primeira ordem, ou seja, o gradiente do Lagrangeano associado ao problema (III.2.1). Genericamente as equações que fornecem os elementos das duas primeiras linhas do termo independente são dadas por:

$$\underline{\pi P'} \cdot \frac{\partial P}{\partial \underline{V}} = \sum_{i=1}^{NB} \pi P_i \cdot \frac{\partial P_i(\underline{\theta}, \underline{V})}{\partial V_k}$$

$$\underline{\pi Q'} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \underline{V}} = \sum_{i=1}^{NB} \pi Q_i \cdot \frac{\partial Q_i(\underline{\theta}, \underline{V})}{\partial V_k}$$

$$\underline{\pi P'} \cdot \frac{\partial P}{\partial \underline{\theta}} = \sum_{i=1}^{NB} \pi P_i \cdot \frac{\partial P_i(\underline{\theta}, \underline{V})}{\partial \theta_k}$$

$$\underline{\pi Q'} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \underline{\theta}} = \sum_{i=1}^{NB} \pi Q_i \cdot \frac{\partial Q_i(\underline{\theta}, \underline{V})}{\partial \theta_k}$$

para cada $k=1,...,NB$

As equações que fornecem os elementos H1, H2, H3, H4, J1, J2, J3, J4 da Figura III.2.2, derivadas segundas do Lagrangeano são dadas no anexo II. As submatrizes J1, J2, J3 e J4 são equivalentes ao Jacobiano referente ao conjunto de equações algébricas do problema de fluxo de carga pelo Método de Newton.

A cada passo do processo iterativo para solução do problema perturbado para obtenção da direção de atualização das variáveis, deve ser resolvido o sistema matricial da Figura III.2.2 e o conjunto de equações auxiliares (III.2.60)-(III.2.71). Uma vez obtido o tamanho do passo, calculam-se os valores que as variáveis irão assumir na iteração seguinte:

$$\underline{V}^{k+1} = \underline{V}^k + \sigma \alpha_p \Delta \underline{V}^k$$

$$\underline{\theta}^{k+1} = \underline{\theta}^k + \sigma \alpha_p \Delta \underline{\theta}^k$$

$$\underline{y1}^{k+1} = \underline{y1}^k + \sigma \alpha_p \Delta \underline{y1}^k$$

$$\underline{y2}^{k+1} = \underline{y2}^k + \sigma \alpha_p \Delta \underline{y2}^k$$

$$\underline{VQ1}^{k+1} = \underline{VQ1}^k + \sigma \alpha_p \Delta \underline{VQ1}^k$$

$$\underline{VQ2}^{k+1} = \underline{VQ2}^k + \sigma \alpha_p \Delta \underline{VQ2}^k$$

$$\underline{VVI}^{k+1} = \underline{VVI}^k + \sigma \alpha_p \Delta \underline{VVI}^k$$

$$\begin{aligned}
\underline{VV2}^{k+1} &= \underline{VV2}^k + \sigma\alpha_p \Delta\underline{VV2}^k \\
\underline{vy1}^{k+1} &= \underline{vy1}^k + \sigma\alpha_p \Delta\underline{vy1}^k \\
\underline{vy2}^{k+1} &= \underline{vy2}^k + \sigma\alpha_p \Delta\underline{vy2}^k \\
\underline{\pi P}^{k+1} &= \underline{\pi P}^k + \sigma\alpha_d \Delta\underline{\pi P}^k \\
\underline{\pi Q}^{k+1} &= \underline{\pi Q}^k + \sigma\alpha_d \Delta\underline{\pi Q}^k \\
\underline{\pi QG1}^{k+1} &= \underline{\pi QG1}^k + \sigma\alpha_d \Delta\underline{\pi QG1}^k \\
\underline{\pi QG2}^{k+1} &= \underline{\pi QG2}^k + \sigma\alpha_d \Delta\underline{\pi QG2}^k \\
\underline{\pi V1}^{k+1} &= \underline{\pi V1}^k + \sigma\alpha_d \Delta\underline{\pi V1}^k \\
\underline{\pi V2}^{k+1} &= \underline{\pi V2}^k + \sigma\alpha_d \Delta\underline{\pi V2}^k \\
\underline{\pi vy1}^{k+1} &= \underline{\pi vy1}^k + \sigma\alpha_d \Delta\underline{\pi vy1}^k \\
\underline{\pi vy2}^{k+1} &= \underline{\pi vy2}^k + \sigma\alpha_d \Delta\underline{\pi vy2}^k
\end{aligned}$$

Os parâmetros α_p e α_d , são obtidos com vista a manter factibilidade primal e dual, podendo ser iguais para os conjuntos de variáveis primais e duais, ou diferentes em função do intervalo de definição de qualquer variável. Neste trabalho esses dois parâmetros foram considerados iguais em cada conjunto de variáveis - primais e duais, sendo dados por:

$$\begin{aligned}
\alpha_p^1 &= \min \left\{ \min_{\Delta\underline{y1} > 0} \frac{\underline{y1}}{|\Delta\underline{y1}|}, \min_{\Delta\underline{y2} > 0} \frac{\underline{y2}}{|\Delta\underline{y2}|} \right\} \\
\alpha_p^2 &= \min \left\{ \min_{\Delta\underline{VQ1} > 0} \frac{\underline{VQ1}}{|\Delta\underline{VQ1}|}, \min_{\Delta\underline{VQ2} > 0} \frac{\underline{VQ2}}{|\Delta\underline{VQ2}|} \right\} \\
\alpha_p^3 &= \min \left\{ \min_{\Delta\underline{VV1} > 0} \frac{\underline{VV1}}{|\Delta\underline{VV1}|}, \min_{\Delta\underline{VV2} > 0} \frac{\underline{VV2}}{|\Delta\underline{VV2}|} \right\} \\
\alpha_p^4 &= \min \left\{ \min_{\Delta\underline{vy1} > 0} \frac{\underline{vy1}}{|\Delta\underline{vy1}|}, \min_{\Delta\underline{vy2} > 0} \frac{\underline{vy2}}{|\Delta\underline{vy2}|} \right\} \\
\alpha_p &= \min \{ \alpha_p^1, \alpha_p^2, \alpha_p^3, \alpha_p^4 \} \\
\alpha_d^1 &= \min \left\{ \min_{\Delta\underline{\pi QG1} > 0} \frac{\underline{\pi QG1}}{|\Delta\underline{\pi QG1}|}, \min_{\Delta\underline{\pi QG2} < 0} \frac{-\underline{\pi QG2}}{|\Delta\underline{\pi QG2}|} \right\} \\
\alpha_d^2 &= \min \left\{ \min_{\Delta\underline{\pi V1} > 0} \frac{\underline{\pi V1}}{|\Delta\underline{\pi V1}|}, \min_{\Delta\underline{\pi V2} < 0} \frac{-\underline{\pi V2}}{|\Delta\underline{\pi V2}|} \right\}
\end{aligned}$$

$$\alpha_d^3 = \min \left\{ \min_{\Delta \pi v y 1 > 0} \frac{\pi v y 1}{|\Delta \pi v y 1|}, \min_{\Delta \pi v y 2 < 0} \frac{-\pi v y 2}{|\Delta \pi v y 2|} \right\}$$

$$\alpha_p = \min\{\alpha_d^1, \alpha_d^2, \alpha_d^3, 1\}$$

Para análise da atualização do parâmetro de barreira de modo a garantir a convergência do algoritmo, considerando que para cada valor do mesmo, será dada apenas uma iteração do método de Newton para obter a direção de caminhada, utiliza-se o conceito de "gap" de dualidade. Seja o Lagrangeano para o problema (III.2.1)-(III.2.12) em que se utilizou variáveis de folga e de excesso:

$$\begin{aligned} L(s) = & \sum_{i \in I} (C1y1_i + C2y2_i) - \sum_{k=1}^{NB} \pi P_k (P_k^{esp} - P_k(\theta, \underline{V})) - \sum_{i \in I} \pi Q_i (QG_i - QC_i - Q_i(\theta, \underline{V}) + y1_i - y2_i) - \\ & - \sum_{k \in K} \pi Q_k (-QC_k - Q_k(\theta, \underline{V})) - \sum_{i \in I} \pi QG1_i (QG_i - VQ1_i - QG_i^{min}) - \sum_{i \in I} \pi QG2_i (QG_i + VQ2_i - QG_i^{max}) - \\ & - \sum_{i=1}^{NB} \pi V1_i (V_i - VV1_i - V_i^{min}) - \sum_{i=1}^{NB} \pi V2_i (V_i + VV2_i - V_i^{max}) - \sum_{i \in I} \pi v y 1_i (y1_i + v y 1_i - y1_i^{max}) - \\ & - \sum_{i \in I} \pi v y 2_i (y2_i + v y 2_i - y2_i^{max}) - \sum_{i \in I} \gamma VQ1_i \cdot VQ1_i - \sum_{i \in I} \gamma VQ2_i \cdot VQ2_i - \sum_{i \in I} \gamma v y 1_i \cdot v y 1_i - \\ & - \sum_{i \in I} \gamma v y 2_i \cdot v y 2_i - \sum_{i=1}^{NB} \gamma VV1_i \cdot VV1_i - \sum_{i=1}^{NB} \gamma VV2_i \cdot VV2_i - \sum_{i \in I} \gamma y 1_i \cdot y1_i - \sum_{i \in I} \gamma y 2_i \cdot y2_i \end{aligned}$$

as condições de KKT para o problema (III.2.1)-(III.2.12), são equivalentes às condições de KKT para o problema perturbado (III.2.13)-(III.2.22), sendo dadas por:

$$C1_i - \pi Q_i - \pi v y 1_i - \gamma y 1_i = 0 \quad i \in I \quad (III.2.77)$$

$$C2_i - \pi Q_i - \pi v y 2_i - \gamma y 2_i = 0 \quad i \in I \quad (III.2.78)$$

$$\sum_{k=1}^{NB} \pi P_k \frac{\partial P_k(\theta, \underline{V})}{\partial V_m} + \sum_{i \in I} \pi Q_i \frac{\partial Q_i(\theta, \underline{V})}{\partial V_m} - \pi V1_m - \pi V2_m = 0 \quad m=1, \dots, NB \quad (III.2.79)$$

$$\sum_{k=1}^{NB} \pi P_k \frac{\partial P_k(\theta, \underline{V})}{\partial \theta_m} + \sum_{i \in I} \pi Q_i \frac{\partial Q_i(\theta, \underline{V})}{\partial \theta_m} = 0 \quad m=1, \dots, NB \quad (III.2.80)$$

$$\pi V1_i - \gamma VV1_i = 0 \quad i=1, \dots, NB \quad (III.2.81)$$

$$-\pi V2_i - \gamma VV2_i = 0 \quad i=1, \dots, NB \quad (III.2.82)$$

$$\pi QG1_i - \gamma VQ1_i = 0 \quad i \in I \quad (III.2.83)$$

$-\pi QG2_i - \gamma VQ2_i = 0$	$i \in I$	(III.2.84)
$-\pi vy1_i - \gamma vy1_i = 0$	$i \in I$	(III.2.85)
$-\pi vy2_i - \gamma vy2_i = 0$	$i \in I$	(III.2.86)
$-\pi Q_i - \pi QG1_i - \pi QG2_i = 0$	$i \in I$	(III.2.87)
$P_k^{esp} - P_k(\underline{\theta}, \underline{V}) = 0$	$k=1, \dots, NB$	(III.2.88)
$-QC_k - Q_k(\underline{\theta}, \underline{V}) = 0$	$k \in K$	(III.2.89)
$QG_i - QC_i - Q_i(\underline{\theta}, \underline{V}) + y1_i - y2_i = 0$	$i \in I$	(III.2.90)
$V_i - VV1_i - V_i^{min} = 0$	$i \in I$	(III.2.91)
$V_i + VV2_i - V_i^{max} = 0$	$i \in I$	(III.2.92)
$QG_i - VQ1_i - QG_i^{min} = 0$	$i \in I$	(III.2.93)
$QG_i + VQ2_i - QG_i^{max} = 0$	$i \in I$	(III.2.94)
$y1_i + vy1_i - y1_i^{max} = 0$	$i \in I$	(III.2.95)
$y2_i + vy2_i - y2_i^{max} = 0$	$i \in I$	(III.2.96)
$\gamma VQ1_i \cdot VQ1_i = 0$	$i \in I$	(III.2.97)
$\gamma VQ2_i \cdot VQ2_i = 0$	$i \in I$	(III.2.98)
$\gamma vy1_i \cdot vy1_i = 0$	$i \in I$	(III.2.99)
$\gamma vy2_i \cdot vy2_i = 0$	$i \in I$	(III.2.100)
$\gamma VV1_i \cdot VV1_i = 0$	$i \in I$	(III.2.101)
$\gamma VV2_i \cdot VV2_i = 0$	$i \in I$	(III.2.102)
$\gamma y1_i \cdot y1_i = 0$	$i \in I$	(III.2.103)
$\gamma y2_i \cdot y2_i = 0$	$i \in I$	(III.2.104)
$\pi Q_i > 0; \pi P_i > 0$	$i=1, \dots, NB$	(III.2.105)
$\pi Q_i < 0; \pi P_i < 0$	$i=1, \dots, NB$	(III.2.106)
$\pi QG1_i \geq 0$	$i \in I$	(III.2.107)
$\pi QG2_i \geq 0, \pi vy1_i \leq 0, \pi vy2_i \leq 0$	$i \in I$	(III.2.108)
$\pi V1_i \geq 0$	$i=1, \dots, NB$	(III.2.109)
$\pi V2_i \geq 0$	$i=1, \dots, NB$	(III.2.110)

$$\gamma VQ1_i, \gamma VQ2_i, \gamma vy1_i, \gamma vy2_i, \gamma y1_i, \gamma y2_i \geq 0 \quad i \in I \quad (\text{III.2.111})$$

$$\gamma VV1_i, \gamma VV2_i \geq 0 \quad i=1, \dots, NB \quad (\text{III.2.112})$$

As condições (III.2.97)–(III.2.104) representam as chamadas condições de folga complementar, e o “gap” de dualidade neste tralho será definido, com base nessas condições da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{gap} = & \sum_{i \in I} (\gamma VQ1_i \cdot VQ1_i + \gamma VQ2_i \cdot VQ2_i + \gamma vy1_i \cdot vy1_i + \gamma vy2_i \cdot vy2_i + \gamma y1_i \cdot y1_i + \gamma y2_i \cdot y2_i) + \\ & + \sum_{i=1}^{NB} (\gamma VV1_i \cdot VV1_i + \gamma VV2_i \cdot VV2_i) \end{aligned} \quad (\text{III.2.113})$$

em que os multiplicadores das variáveis de folga, e de excesso estão relacionados com os multiplicadores das respectivas restrições através das condições de KKT:

$$\gamma VV1_i = \pi V1_i \quad i=1, \dots, NB$$

$$\gamma VV2_i = \pi V2_i \quad i=1, \dots, NB$$

$$\pi VQ1_i = \pi QG1_i \quad i \in I$$

$$\pi VQ2_i = \pi QG2_i \quad i \in I$$

$$\gamma vy1_i = -\pi vy1_i \quad i \in I$$

$$\gamma vy2_i = -\pi vy2_i \quad i \in I$$

$$\gamma y1_i = -C1_i + \pi Q_i + \pi vy1_i \quad i \in I$$

$$\gamma y2_i = -C2_i - \pi Q_i + \pi vy2_i \quad i \in I$$

Com a definição de “gap” de dualidade dada através da equação (III.2.113) o parâmetro de barreira é atualizado em cada iteração do método de Newton, através da seguinte relação:

$$\mu^{K+1} = \sigma \frac{\text{gap}}{(6NC + 2NB)^2} \quad (\text{III.2.114})$$

em que σ é um parâmetro definido entre 0 e 1.

Para analisar a convergência do algoritmo, define-se, da mesma forma que no capítulo anterior, uma função de mérito dada por:

$$\phi = \nabla_s L(s) \quad (\text{III.2.115})$$

e considera-se que o processo iterativo convergiu quando:

$$\|\nabla_s L(s)\| \leq \varepsilon \quad (\text{III.2.116})$$

em que ε é uma tolerância pré-especificada.

Por se tratar da solução de um problema de fluxo de potência ótimo reativa, outro critério estabelecido para verificar a convergência foi:

$$\|P_k^{esp} - P_k(\theta, \underline{V})\| \leq \varepsilon \quad \forall k=1, \dots, NB \quad (\text{III.2.117})$$

$$\|QG_i - QC_i - Q_i(\theta, \underline{V}) + y1_i - y2_i\| \leq \varepsilon \quad \forall i \in I \quad (\text{III.2.118})$$

$$\| -QC_k - Q_k(\theta, \underline{V}) \| \leq \varepsilon \quad \forall k \in K \quad (\text{III.2.119})$$

III.3. Fluxo de Carga Ótimo Desacoplado Utilizando as Equações Básicas do CRIC

O sistema matricial (Figura III.2.2) reúne as vantagens de ser esparso e apresentar as sensibilidades entre as potências ativas e reativas e todas as variáveis do sistema. O inconveniente desta formulação é apresentar um grande número de submatrizes de acoplamento entre os problemas ativo e reativo, o que dificulta a solução do problema. Neste trabalho, buscando um algoritmo mais eficiente sob os aspectos computacionais para a solução do problema de despacho de reativos, propõe-se a solução do problema, através do desacoplamento potência ativa (P)- ângulo

das tensões (θ) e potência reativa (Q)- magnitude das tensões (V).

Baseado nas hipóteses do desacoplamento apresentadas e discutidas no capítulo anterior alguns autores [10,18] propõem para solução do problema de despacho ótimo de reativos o desacoplamento $p\theta$ - qv , transformando o sistema matricial (Figura III.2.2), nos subproblemas ativo ($p-\theta$) e reativo ($q-v$), apresentados a seguir, desprezando-se as submatrizes de acoplamento. O tratamento separado destes subproblemas não altera a solução final, já que o problema a resolver continuará o mesmo, mudando apenas a trajetória do processo de convergência.

H4	J3
J3	

$\Delta \theta$

$\Delta \pi P$

=

$-\pi P' \frac{\partial P}{\partial \theta} - \pi Q' \frac{\partial Q}{\partial \theta}$

$P^{esp} - P(\theta, V)$

Figura III.3.1: Subproblema Ativo

$H1 + \mu V[VV1]^{-2} + \mu V[VV2]^{-2}$				J2
	$\frac{\mu Q}{y1^2} + \frac{\mu Q}{Vy1^2}$			-1
		$\frac{\mu Q}{y2^2} + \frac{\mu Q}{Vy2^2}$		1
			$\frac{\mu Q}{VQ1^2} + \frac{\mu Q}{VQ2^2}$	-1
J2	-1	1	-1	

ΔV

$\Delta y1$

$\Delta y2$

ΔQG

$\Delta \pi Q$

=

$-\pi P' \frac{\partial P}{\partial V} - \pi Q' \frac{\partial Q}{\partial V} + \frac{\mu V}{VV1} - \frac{\mu V}{VV2}$

$-C1 + \frac{\mu Q}{y1_i} + \pi Q_i - \frac{\mu Q}{Vy1_i}$

$-C1 + \frac{\mu Q}{y2_i} + \pi Q_i - \frac{\mu Q}{Vy2_i}$

$\pi Q + \frac{\mu Q}{VQ1_i} - \frac{\mu Q}{VQ2_i}$

$QG_i - QC_i - Q(\theta, V) + y1_i + y2_i$

Figura III.3.2: Subproblema Reativo

As equações necessárias para formar a submatriz relacionada com as equações de balanço da potência ativa e as variáveis envolvidas, são as mesmas desenvolvidas para a versão acoplada do algoritmo.

No despacho de reativos, utilizando-se as sensibilidades obtidas a partir das equações que fornecem as injeções de potência ativa e reativa do fluxo de carga tradicional, os

maiores problemas referentes ao desacoplamento entre as partes ativa e reativa estão nas condições de carregamento da rede e nos níveis de tensão. Buscando contornar esse tipo de problema e propor novas alternativas na solução do problema de despacho de reativos, propõe-se neste trabalho o uso das equações do fluxo de carga CRIC. O fluxo de carga CRIC, e as matrizes de sensibilidades obtidas a partir de suas equações, já foram utilizadas com sucesso por outros autores na solução do problema de fluxo de carga tradicional [16] e no despacho ótimo de reativos utilizando programação linear (algoritmo primal) sucessiva [9,12]. Conforme ressaltado no capítulo anterior, o método CRIC para cálculo do fluxo de carga se fundamenta em dois critérios, um de natureza teórica e o outro prática [4]:

- O primeiro consiste em preservar as injeções ativas durante a iteração reativa (os ângulos das tensões se combinam de forma a manter constante as injeções de potência ativa);
- O segundo leva em conta que quando os módulos das tensões são alterados, uma maneira de manter constante a injeção de potência ativa, é manter constante o fluxo de potência ativa através de cada bipolo do sistema.

Estes critérios são um caso particular do que se deseja de uma técnica em que se estabeleça o desacoplamento no problema de despacho ótimo de reativos, ou seja, manter $\Delta P = 0$ quando a parte reativa (tensões ou injeções de potências reativa) sofre alterações. A aplicação dos conceitos anteriormente descritos a um bipolo qualquer do sistema, leva às equações de injeção de potências ativa e reativa na barra k dadas por:

$$Q_k = -V_k \sum_{k \neq m} a_{km} V_m Y_{km} \cos(\theta_{km} - \alpha_{km}) + V_k^2 \sum_{k \neq m} a_{km}^2 Y_{km} \cos \alpha_{km} - b_k^{sh} \quad (\text{III.3.1})$$

$$P_k = \sum_{m \neq k} Y_{km} a_{km} V_k V_m \sin(\theta_{km} - \alpha_{km}) + V_k^2 \sum_{k \neq m} a_{km}^2 Y_{km} \sin \alpha_{km} \quad (\text{III.3.2})$$

Na versão desacoplada proposta neste trabalho a injeção de potência reativa que faz parte da formulação do problema de

despacho de reativos nas equações (III.1.3) e (III.1.4) foi alterada pela equação (III.3.1).

No modelo desacoplado, os elementos que fazem parte das submatrizes H_4 , J_3 e o primeiro termo do lado direito no sistema matricial do subsistema ativo, permanecem os mesmos definidos anteriormente. É evidente que essa proposta constitui uma aproximação, uma vez que está se considerando duas equações para cálculo das sensibilidades da potência reativa, uma com o ângulo e outra com a tensão.

Uma outra aproximação no modelo de subsistema ativo, está com relação à injeção de potência ativa, que também foi considerada no fluxo de carga convencional, em vez da equação (III.3.2). No subproblema reativo as submatrizes H_1 e J_2 e o termo independente são formados, calculando-se as sensibilidades de primeira e segunda ordem das injeções de potência ativa e reativa (III.3.1) e (III.3.2) com relação às magnitudes das tensões. Note que de acordo com as hipóteses do fluxo de carga CRIC, a variação da injeção de potência ativa com relação às magnitudes das tensões é nula.

A equação (III.3.2) é função de V_k e V_m mantendo P_{km} constante. Esta expressão permite estabelecer um Jacobiano reativo - LCRIC, válido para cada iteração Q-V. Desta forma os elementos da submatriz J_3 passam a ser dados pelo seguinte conjunto de equações:

Elementos da diagonal:

$$2N_k V_k - \sum_{m \in \Omega_k} \xi_{km} \left[\frac{V_m + 2V_k \beta_{km} \sin(\theta_{km} - \alpha_{km})}{\cos(\theta_{km} - \alpha_{km})} \right] \quad (\text{III.3.3})$$

Elementos fora da diagonal:

$$\frac{-\xi_{km} V_k}{\cos(\theta_{km} - \alpha_{km})} \quad (\text{III.3.4})$$



Nas equações (III.3.1)-(III.3.4), as equações $\sin(\theta_{km} - \alpha_{km})$ e $\cos(\theta_{km} - \alpha_{km})$ estão inter-relacionadas através das equações:

$$\sin(\theta_{km} - \alpha_{km}) = \frac{P_{km} - a_{km}^2 Y_{km} V_k^2 \sin \alpha_{km}}{a Y_{km} V_k V_m} \quad (\text{III.3.5})$$

$$\sin^2(\theta_{km} - \alpha_{km}) + \cos^2(\theta_{km} - \alpha_{km}) = 1 \quad (\text{III.3.6})$$

Nos cálculos dos elementos da matriz H1, propõe-se, não considerar a interdependência de $\sin(\theta_{km} - \alpha_{km})$ com V_k e V_m . Desta forma, os elementos da submatriz H1, estão sendo calculados como as derivadas com relação a V_k e V_m das equações (III.3.3) e (III.3.4) sendo dados por:

Elementos da diagonal:

$$\pi Q_k \left(2N_k - \sum_{m \in \Omega_k} \xi_{km} \left[\frac{2\beta_{km} \sin(\theta_{km} - \alpha_{km})}{\cos(\theta_{km} - \alpha_{km})} \right] \right) \quad (\text{III.3.7})$$

Elementos fora da diagonal:

$$\pi Q_k \left(\frac{-\xi_{km}}{\cos(\theta_{km} - \alpha_{km})} \right) + \pi Q_m \left(\frac{-\xi_{mk}}{\cos(\theta_{mk} - \alpha_{mk})} \right) \quad (\text{III.3.8})$$

III.4. Algoritmo Proposto para Solução do Problema de Despacho de Reativos e Diagrama de Blocos.

No algoritmo proposto neste trabalho, a inicialização do procedimento iterativo é realizada com a ajuda de um programa para cálculo de fluxo de carga pelo método de Newton. Ressalta-se que esse procedimento é desnecessário para o algoritmo primal-dual que necessita apenas de uma solução em que as variáveis duais sejam factíveis e que as variáveis de inicialização estejam entre os limites pré-estabelecidos. No decorrer das pesquisas e testes realizados não se verificou nenhuma melhoria significativa, no uso do fluxo de carga convencional para

inicializar o processo, e o mesmo foi mantido no trabalho final, como um dado adicional e informar outros pesquisadores da área.

Algoritmo:

- i. Leitura dos dados de barras e linhas do sistema; parâmetro de controle; limites das variáveis; custos;
- ii. Inicializar conjunto de variáveis duais - Manter a factibilidade do dual; definir o conjunto de barras de tensão controlada;
- iii. Processar fluxo de carga convencional e ajustar as variáveis dentro dos limites pré-estabelecidos;
- iv. Solução do subproblema ativo (Figura III.3.1) e equações auxiliares;
- v. Atualizar as variáveis primais e duais do subproblema ativo;
- vi. Solução do subproblema reativo (Figura III.3.2) e equações auxiliares;
- vii. Atualizar variáveis primais e duais do subproblema reativo;
- viii. Testar convergência. Se convergiu, Fim. Se não convergiu, atualizar $k \leftarrow k+1$ e parâmetro de barreira μ_{k+1} e voltar para iv.

Na Figura III.3.3 apresenta-se o diagrama de blocos do algoritmo proposto e implementado nesse trabalho.

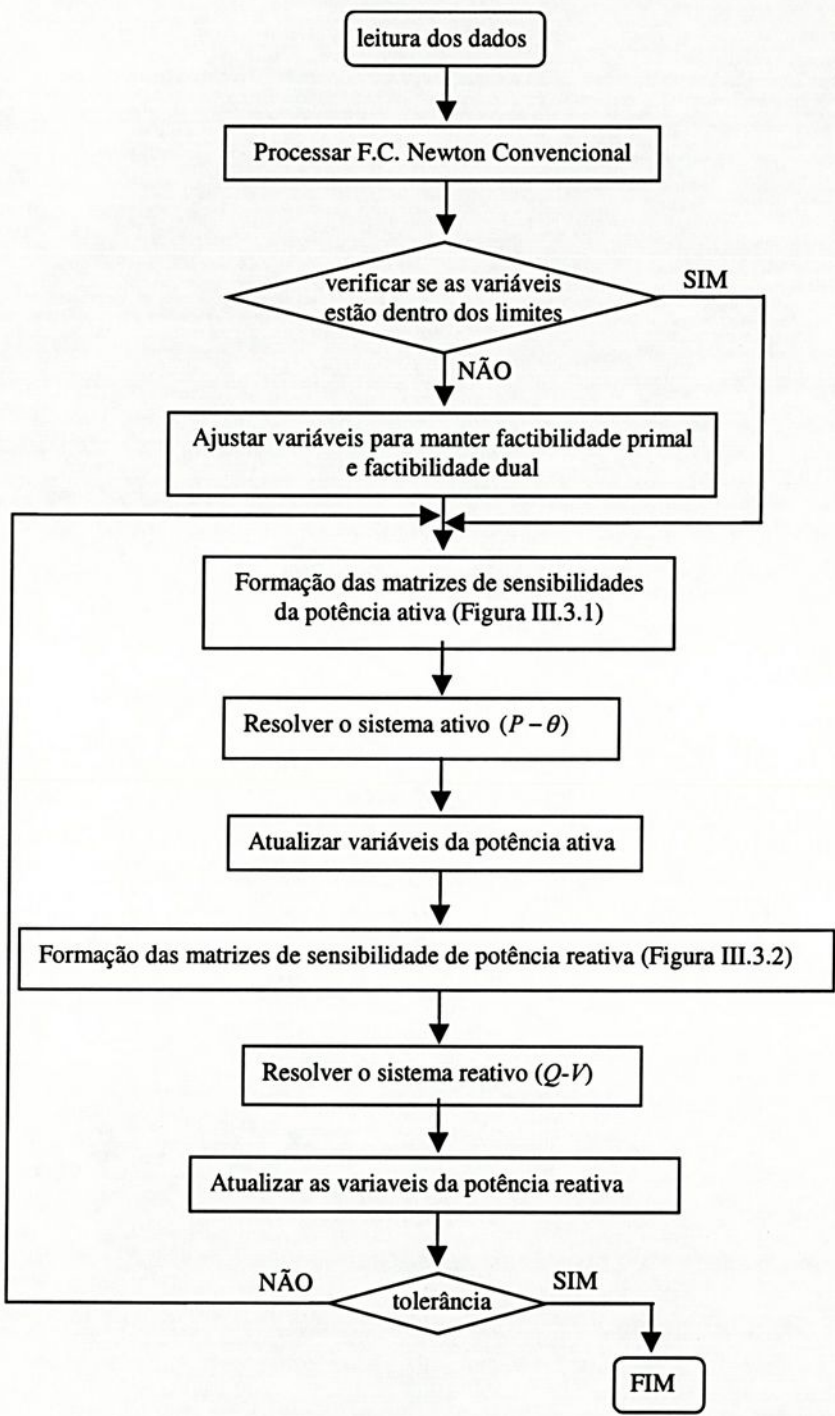


Figura III.3.3: Diagrama de Blocos do desacoplamento P-θ e Q-V

Capítulo IV

Testes e Resultados

Neste capítulo são apresentados os resultados dos testes realizados para o problema de Despacho Ótimo de Reativos Desacoplado, formulado e desenvolvido no capítulo III.

Foram realizados testes com sistemas de três barras e três linhas de transmissão, cujos dados são fornecidos nas tabelas IV.1.1 e IV.1.2. Também foram realizados testes com o sistema bastante conhecido na área de sistemas de energia elétrica, trata-se da rede IEEE30 que é constituído de 30 barras, 37 linhas de transmissão e 4 transformadores com mudança automática de "tap" sob a carga, sendo seus dados apresentados nas tabelas IV.2.1 e IV.2.2. O valor de sigma foi de 0,8 para todos os testes.

Para a realização dos testes foi implementado um programa em FORTRAN, e utilizou-se a subrotina MA28AD [6] para a fatoração LU.

IV.1. Sistema de 3 Barras

Tabela IV.1.1: Dados das barras usadas nas simulações do sistema teste de 3 barras.

barra	tipo	QC(pu)	QG ^{min} (pu)	QG ^{max} (pu)
1	referência	-	-0,100	0,100
2	PV	0,550	-0,100	0,100
3	PQ	0,509	-0,100	0,100

Tabela IV.1.2: Dados das linhas usadas nas simulações do sistema teste de 3 barras.

linha	NI	NF	R(Ω)	X(Ω)
1	1	2	5,70	17,37
2	2	3	1,32	3,79
3	1	3		25,60

Tabela IV.1.3: Resultados obtidos com o sistema de 3 barras considerando-se dois perfis para as magnitudes das tensões nas barras.

barra	0.95 ≤ V ≤ 1.05			0.97 ≤ V ≤ 1.03		
	V(pu)	QG(pu)	yl(pu)	V(pu)	QG(pu)	yl(pu)
1	1,049999	0,099999	-	1,029999	0,099999	-
2	1,029693	0,099999	1,027240	1,009659	0,099999	1,034316
3	1,014316	-	-	0,993875	-	-

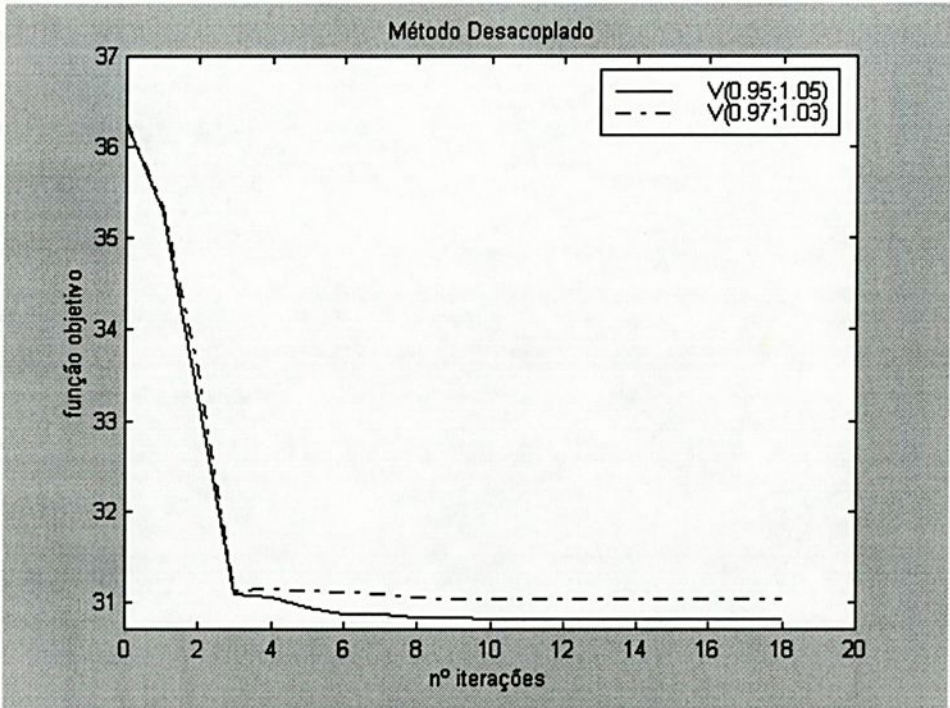


Figura IV.1.1: Gráfico do sistema de 3 barras

Comentários:

Nos testes realizados, o algoritmo apresentou resultados satisfatórios e coerentes. No sistema teste de 3 barras, quando se solicitou uma condição mais rígida nos limites das tensões, houve uma maior necessidade de injeção reativa capacitiva (y_1). Em todos os casos, conforme se pode verificar na Tabela IV.1.3, antes de alocar injeções reativas, o algoritmo utilizou toda a capacidade de geração (QG).

O gráfico da Figura IV.1.1 ilustra a função objetivo pelo número de iterações. Os custos utilizados na simulação ($C1_i, i \in I$) foram iguais a 30,0 e o parâmetro de barreira inicial $\mu Q = \mu V = 15,0$. A convergência foi obtida, com uma precisão $\epsilon = 10^{-6}$, $|P^{esp} - P(\theta, V)| \leq \epsilon$, $|Q^{esp} - Q(\theta, V)| \leq \epsilon$. Foram considerados dois perfis para as magnitudes das tensões nas barras do sistema: ($0,95 \leq V \leq 1,05$ e $0,97 \leq V \leq 1,03$).



IV.2. Sistema de 30 Barras

Tabela IV.2.1: Dados das barras usadas nas simulações do sistema teste de 30 barras.

barra	tipo	QC(pu)	QG ^{min} (pu)	QG ^{max} (pu)
1	referência	-	-0,2000	0,3000
2	PV	0,2170	-0,4000	0,5000
3	PV	0,0240		
4	PV	0,0760		
5	PV	0,9420	-0,4000	0,4000
6	PV	-		
7	PV	0,2280		
8	PV	0,3000	-0,1000	0,4000
9	PV	-		
10	PV	0,0580		
11	PV	-	-0,0600	0,2400
12	PV	0,1120		
13	PV	-	-0,0600	0,2400
14	PV	0,0620		
15	PV	0,0820		
16	PV	0,0350		
17	PV	0,0900		
18	PV	0,0320		
19	PV	0,0950		
20	PV	0,0220		
21	PV	0,1750		
22	PV	-		
23	PV	0,0320		
24	PV	0,0870		
25	PV	-		
26	PV	0,0350		
27	PV	-		
28	PV	-		
29	PV	0,0240		
30	PV	0,106		

Tabela IV.2.2: Dados das linhas usadas nas simulações do sistema teste de 30 barras.

NI	NF	R(Ω)	X(pu)	YSH(pu)	PAP
1	2	1,92	5,75	5,28	não
1	3	4,52	18,52	4,08	não
2	4	5,70	17,37	3,68	não
3	4	1,32	3,79	0,84	não
2	5	4,72	19,83	4,18	não
2	6	5,81	17,63	3,74	não
4	6	1,19	4,14	9,90	não
5	7	4,60	11,60	2,04	não
6	7	2,67	8,20	1,70	não
6	8	1,20	4,20	0,90	não
6	9	-	20,,80	-	sim
6	10	-	55,,60	-	sim
9	11	-	20,80	-	não
9	10	-	11,00	-	não
4	12	-	25,60	-	sim
12	13	-	14,00	-	não
12	14	12,31	25,59	-	não
12	15	6,62	13,04	-	não
12	16	9,45	19,87	-	não
14	15	22,10	19,97	-	não
16	17	8,24	19,23	-	não
15	18	10,70	21,85	-	não
18	19	6,39	12,92	-	não
19	20	3,40	6,80	-	não
10	20	9,36	20,90	-	não
10	17	3,24	8,45	-	não
10	21	3,48	7,49	-	não
10	22	7,27	14,99	-	não
21	22	1,16	2,36	-	não
15	23	10,00	20,20	-	não
22	24	11,50	17,90	-	não
23	24	13,20	27,00	-	não
24	25	18,85	32,92	-	não
25	26	25,44	38,00	-	não
25	27	10,93	20,87	-	não
27	28	-	39,60	-	sim
27	29	21,98	41,53	-	não
27	30	32,02	60,27	-	não
29	30	23,99	45,33	-	não
8	28	6,36	20,00	-	não
6	28	1,69	5,99	-	não

Tabela IV.2.3: Resultados obtidos com o sistema de 30 barras considerando-se as magnitudes das tensões $0,95 \leq V \leq 1,05$ (pu) para o caso base e simulando a contingência como sendo a retirada da linha 1-2 (#1).

barra	0.95 ≤ V ≤ 1.05 (pu)					
	Caso base			#1		
	V(pu)	QG(pu)	y1(pu)	V(pu)	QG(pu)	y1(pu)
1	1,049999	-0,199999	-	1,049999	0,299999	-
2	1,031928	0,293350	-	1,028386	0,499999	-
3	1,020083	-	-	1,005596	-	0,484134
4	1,013319	-	-	1,003727	-	0,177240
5	1,008237	0,399999	-	1,002498	0,399999	-
6	1,012256	-	-	1,008122	-	-
7	1,002837	-	-	0,997714	-	-
8	1,013728	0,399999	-	1,009865	0,399999	-
9	0,986470	-	-	0,994036	-	-
10	0,997332	-	-	1,010803	-	-
11	1,034715	0,239999	-	1,041946	0,239999	-
12	1,009842	-	-	1,017999	-	-
13	1,042085	0,239999	-	1,049999	0,239999	-
14	0,993997	-	-	1,004726	-	-
15	0,989038	-	-	1,001229	-	-
16	0,997024	-	-	1,007624	-	-
17	0,991666	-	-	1,004933	-	0,016133
18	0,979207	-	-	0,995109	-	0,001280
19	0,976675	-	-	0,994598	-	0,030227
20	0,981016	-	-	0,997834	-	-
21	0,837953	-	-	1,001634	-	0,060832
22	0,984189	-	-	1,001894	-	0,000021
23	0,977018	-	-	0,994196	-	0,007145
24	0,969807	-	-	0,991703	-	0,057125
25	0,961531	-	-	0,976274	-	0,003012
26	0,950000	-	0,017810	0,967163	-	0,023493
27	0,961539	-	-	0,969915	-	0,022834
28	1,013145	-	-	1,010598	-	0,000001
29	0,950728	-	-	0,957785	-	0,011461
30	0,950000	-	0,058198	0,950000	-	0,029650

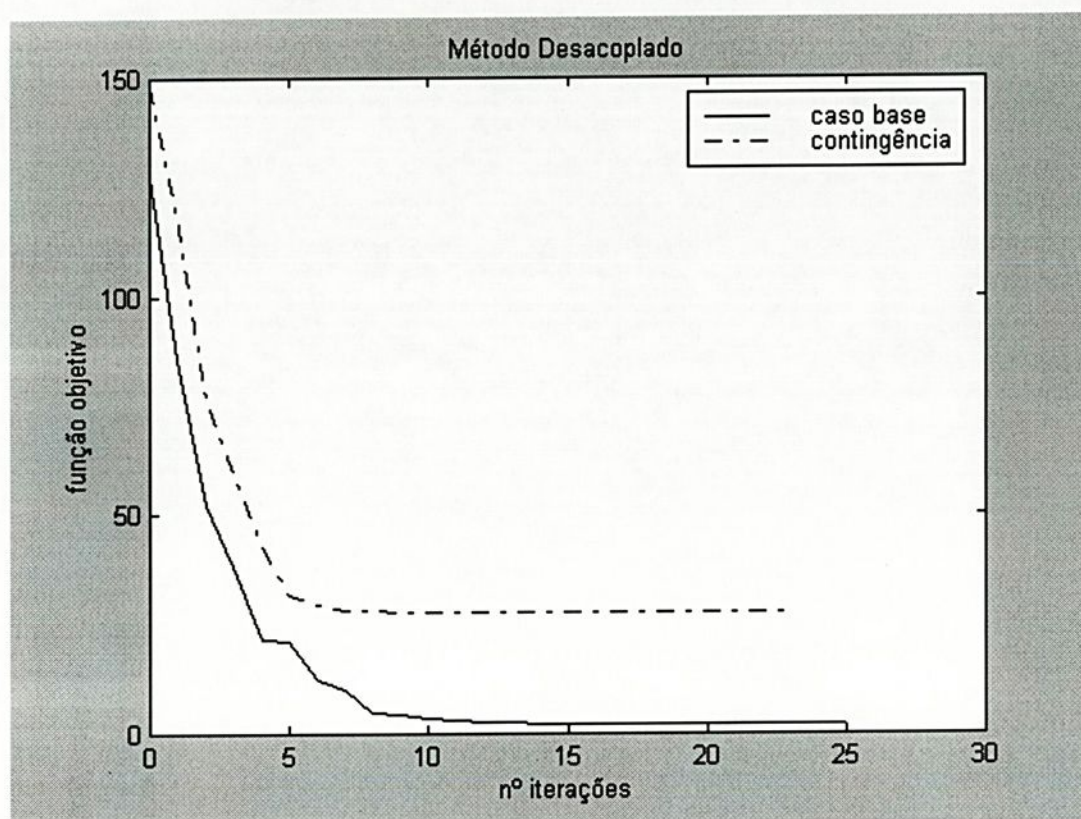


Figura IV.2.1. Gráfico do sistema de 30 barras

Comentários:

Nos testes com o sistema IEEE30, os resultados refletem a capacidade do algoritmo em apresentar resultados compatíveis com as condições de operação do sistema. Com a contingência, o sistema passou a necessitar de um suporte de reativos, o que pode ser verificado na Tabela IV.2.3 e no gráfico da Figura IV.2.1, o que não ocorre na simulação do caso base. As magnitudes das tensões no sistema foram mantidas entre 0,95 e 1,05 pu. Na Tabela IV.2.3 verifica-se também que antes de alocar injeções reativas, o algoritmo utiliza todas as reservas reativas disponíveis (QG). Em todos os testes adotou os parâmetros de barreira $\mu Q = \mu V = 15,0$ e $Cl_i = 30,0$ sendo $i \in I$. A convergência para as injeções de potência ativa e reativa nas barras também foi obtida com excelente precisão, $\epsilon = 10^{-7}$.

Capítulo V

Conclusões

O problema de despacho de reativos tratados neste trabalho, é um problema não linear, não convexo, mal condicionado e de difícil solução, o qual tem sido abordado por diversos autores. Apresentou-se um algoritmo computacional baseado no desacoplamento $P-\theta$, $Q-V$ e nas equações do fluxo de carga CRIC desenvolvido por Carpentier para solução do problema de despacho ótimo de reativos em Sistemas Elétricos de Potência. A técnica de otimização utilizada foi um algoritmo de ponto interior do tipo não linear. Os resultados obtidos são promissores. O desempenho de convergência do algoritmo é dependente dos valores dos parâmetros de barreira iniciais $\mu Q, \mu V$, da equação utilizada para atualização desses parâmetros e das condições de simulação do sistema (níveis de tensão, carga, contingência). Nos testes realizados, os melhores resultados foram encontrados usando equações aproximadas para a correspondente submatriz da Hessiana

que utiliza a derivada segunda das injeções de potência reativa com relação às magnitudes das tensões.

O desempenho do algoritmo apresentado independe de inicializar o despacho de reativos através do método de Newton convencional, conforme o algoritmo proposto neste trabalho, ou inicializar num ponto dual factível e com as variáveis primais dentro de seus limites de definição.

Os coeficientes de custos na função objetivo, referentes às variáveis que representam as infactibilidades das injeções de potência reativa, possibilitam nos sistemas que têm necessidades de suportes de potência reativa para atender as restrições de operação pré-estabelecidas, priorizar regiões ou conjunto de barras, permitindo que se estabeleçam no despacho de reativos condições de operação em que algumas barras ou regiões operem com pouca deficiência de reativos (barras com custos elevados) ou uma maior necessidade de reativos (barras com custos pequenos).

O parâmetro de barreira inicial pode ser calculado, em função das variáveis primais e duais através da equação (III.2.153) ou ser atribuído ao mesmo um valor inicial dependente do sistema em estudo.

No algoritmo desenvolvido e implementado, permite-se utilizar valores iguais ou diferentes para os parâmetros de barreira relativo às variáveis de tensão (μV) e potência reativa (μQ). Nos testes realizados constatou-se que a diferença de comportamento do algoritmo, ao se utilizar valores iguais ou diferentes para esse parâmetro, está no número de iterações necessários para se obter resultados praticamente iguais; ou seja, ao se utilizar o parâmetro de barreira referente à potência reativa um valor menor que o parâmetro de barreira da tensão (cerca de 10% desse valor), o algoritmo converge mais rápido.

A proposta de futuras pesquisas que se faz a partir da experiência com os algoritmos de ponto interior é resolver o problema linearizado de planejamento de reativos usando as equações básicas do CRIC e utilizando-se um método de pontos interiores para problemas lineares. A partir da análise da eficiência dos resultados obtidos com essa metodologia, propõem-

se desenvolver um algoritmo especializado do tipo branch-and-bound que utiliza o algoritmo de pontos interiores para resolver os subproblemas resultantes do desdobramento das variáveis discretas - taps de transformadores, barras reativas.



Anexo I

Exemplo Hipotético

Para ilustrar os aspectos envolvidos na aplicação do algoritmo tipo primal-dual a problemas não lineares de otimização, será utilizado um exemplo hipotético que ilustra com razoável fidelidade as características do despacho ótimo de reativos, conforme formulado neste trabalho, a função objetivo é linear, formada pela somatória das possíveis variáveis de folga da restrição não linear e apresenta restrições não lineares e lineares.

Foram feitas duas formulações para o problema hipotético. Na primeira formulação não foram feitas simplificações no gradiente do Lagrangeano e na segunda foram feitas estas simplificações. Desta forma, considere o problema hipotético:

$$\text{Min } x_3 + x_4$$

s.a.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3 + x_4 = 7$$

$$x_1 \leq 1$$

(a)

$$x_2 \leq 2$$

(b)

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

Acrescentando as variáveis de folga v_1 e v_2 em (a) e (b), obtemos:

$$\text{Min } x_3 + x_4$$

s.a.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3 + x_4 = 7$$

$$x_1 + v_1 = 1$$

(a)

$$x_2 + v_2 = 2$$

(b)

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, v_1 \geq 0, v_2 \geq 0$$

Incorporando as restrições de desigualdades à função objetivo:

$$\text{Min } x_3 + x_4 - \mu \ln x_1 - \mu \ln x_2 - \mu \ln x_3 - \mu \ln x_4 - \mu \ln v_1 - \mu \ln v_2$$

s.a.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3 + x_4 = 7$$

$$x_1 + v_1 = 1$$

$$x_2 + v_2 = 2$$

O Lagrangeano associado ao problema é escrito da seguinte forma:

$$L = x_3 + x_4 - \mu \ln x_1 - \mu \ln x_2 - \mu \ln x_3 - \mu \ln x_4 - \mu \ln v_1 - \mu \ln v_2 - \pi_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3 + x_4 - 7) - \pi_2(x_1 + v_1 - 1) - \pi_3(x_2 + v_2 - 2)$$

O gradiente do lagrangeano para a primeira formulação:

$$\nabla_{x_1} L = -\frac{\mu}{x_1} - 2\pi_1 x_1 - \pi_2 = 0$$

$$\nabla_{x_2} L = -\frac{\mu}{x_2} - 2\pi_1 x_2 - \pi_3 = 0$$

$$\nabla_{x_3} L = -\frac{\mu}{x_3} - \pi_1 + 1 = 0$$

$$\nabla x_4 L = -\frac{\mu}{x_4} - \pi_1 + 1 = 0$$
$$\nabla \pi_1 L = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3 + x_4 - 7) = 0$$
$$\nabla \pi_2 = -(x_1 + v_1 - 1) = 0$$
$$\nabla \pi_3 L = -(x_2 + v_2 - 1) = 0$$
$$\nabla v_1 L = -\frac{\mu}{v_1} - \pi_2 = 0$$
$$\nabla v_2 L = -\frac{\mu}{v_2} - \pi_3 = 0$$

	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	π ₁	π ₂	π ₃	V ₁	V ₂			
x ₁	$\frac{\mu}{x_1^2} - 2\pi_1$				-2x ₁	-1				Δx ₁	(1.1)	$\frac{\mu}{x_1} + 2\pi_1 x_1 + \pi_2$
x ₂		$\frac{\mu}{x_2^2} - 2\pi_1$			-2x ₂		-1			Δx ₂	(1.2)	$\frac{\mu}{x_2} + 2\pi_1 x_2 + \pi_3$
x ₃			$\frac{\mu}{x_3^2}$		-1					Δx ₃		$\frac{\mu}{x_3} + \pi_1 - 1$
x ₄				$\frac{\mu}{x_4^2}$	-1					Δx ₄		$\frac{\mu}{x_4} + \pi_1 - 1$
π ₁	-2x ₁	-2x ₂	-1	-1						Δπ ₁	=	$x_1^2 + x_2^2 + x_3 + x_4 - 7$
π ₂	-1							-1		Δπ ₂	(1.3)	$x_1 + v_1 - 1$
π ₃		-1							-1	Δπ ₃	(1.4)	$x_2 + v_2 - 1$
v ₁						-1		$\frac{\mu}{v_1^2}$		Δv ₁	(1.5)	$\frac{\mu}{v_1} + \pi_2$
v ₂							-1		$\frac{\mu}{v_2^2}$	Δv ₂	(1.6)	$\frac{\mu}{v_2} + \pi_3$

Figura 1: Matriz completa da primeira formulação para o exemplo hipotético.

Trabalhando com as equações (1.3) e (1.4) da figura 1:

$$-\Delta x_1 - \Delta v_1 = x_1 + v_1 - 1 = 0 \qquad \rightarrow \qquad \Delta v_1 = -\Delta x_1$$
$$-\Delta x_2 - \Delta v_2 = x_2 + v_2 - 1 = 0 \qquad \rightarrow \qquad \Delta v_2 = -\Delta x_2$$

Trabalhando com as equações (1.5) e (1.6) da figura 1:

$$\begin{aligned}
-\Delta\pi_2 + \frac{\mu}{v_1^2} \Delta v_1 &= \frac{\mu}{v_1} + \pi_2 \\
-\Delta\pi_2 + \frac{\mu}{v_1^2} (-\Delta x_1) &= \frac{\mu}{v_1} + \pi_2 \\
-\Delta\pi_2 &= \frac{\mu}{v_1} + \pi_2 + \frac{\mu}{v_1^2} \Delta x_1 \\
\Delta\pi_2 &= -\frac{\mu}{v_1} - \pi_2 - \frac{\mu}{v_1^2} \Delta x_1
\end{aligned} \tag{1.5.1}$$

$$\begin{aligned}
-\Delta\pi_3 + \frac{\mu}{v_2^2} \Delta v_2 &= \frac{\mu}{v_2} + \pi_3 \\
-\Delta\pi_3 + \frac{\mu}{v_2^2} (-\Delta x_2) &= \frac{\mu}{v_2} + \pi_3 \\
-\Delta\pi_3 &= \frac{\mu}{v_2} + \pi_3 + \frac{\mu}{v_2^2} \Delta x_2 \\
\Delta\pi_3 &= -\frac{\mu}{v_2} - \pi_3 - \frac{\mu}{v_2^2} \Delta x_2
\end{aligned} \tag{1.6.1}$$

Temos pela equação (1.1) da figura 1 que:

$$\left(\frac{\mu}{x_1^2} - 2\pi_1 \right) \Delta x_1 - 2x_1 \Delta\pi_1 - \Delta\pi_2 = \frac{\mu}{x_1} + 2\pi_1 x_1 + \pi_2$$

Substituindo (1.5.1) na equação acima, temos:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\mu}{x_1^2} - 2\pi_1 \right) \Delta x_1 - 2x_1 \Delta\pi_1 - \left(-\frac{\mu}{v_1} - \pi_2 - \frac{\mu}{v_1^2} \Delta x_1 \right) &= \frac{\mu}{x_1} + 2\pi_1 x_1 + \pi_2 \\
\frac{\mu}{x_1^2} \Delta x_1 - 2\pi_1 \Delta x_1 - 2x_1 \Delta\pi_1 + \frac{\mu}{v_1} + \pi_2 + \frac{\mu}{v_1^2} \Delta x_1 &= \frac{\mu}{x_1} + 2\pi_1 x_1 + \pi_2 \\
\left(\frac{\mu}{x_1^2} - 2\pi_1 + \frac{\mu}{v_1^2} \right) \Delta x_1 - 2x_1 \Delta\pi_1 &= \frac{\mu}{x_1} + 2\pi_1 x_1 - \frac{\mu}{v_1}
\end{aligned}$$

Temos pela equação (1.2) da figura 1 que:

$$\left(\frac{\mu}{x_2^2} - 2\pi_1 \right) \Delta x_2 - 2x_2 \Delta\pi_1 - \Delta\pi_3 = \frac{\mu}{x_2} + 2\pi_1 x_2 + \pi_3$$

Substituindo (1.6.1) na equação acima, temos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mu}{x_2^2}-2\pi1\right)\Delta x_2-2x_2\Delta\pi1-\left(-\frac{\mu}{v2}-\pi3-\frac{\mu}{v_2^2}\Delta x_2\right)&=\frac{\mu}{x_2}+2\pi1x_2+\pi3 \\ \frac{\mu}{x_2^2}\Delta x_2-2\pi1\Delta x_2-2x_2\Delta\pi1+\frac{\mu}{v2}+\pi3+\frac{\mu}{v_2^2}\Delta x_2&=\frac{\mu}{x_2}+2\pi1x_2+\pi3 \\ \left(\frac{\mu}{x_2^2}-2\pi1+\frac{\mu}{v_2^2}\right)\Delta x_2-2x_2\Delta\pi1&=\frac{\mu}{x_2}+2\pi1x_2-\frac{\mu}{v2} \end{aligned}$$

Desta forma, chega-se ao seguinte sistema de equações que deve ser resolvido de forma iterativa.

$\frac{\mu}{x_1^2}-2\pi1+\frac{\mu}{v_1^2}$				$-2x_1$	Δx_1	$\frac{\mu}{x_1}+2\pi1x_1-\frac{\mu}{v1}$
	$\frac{\mu}{x_2^2}-2\pi1+\frac{\mu}{v_2^2}$			$-2x_2$	Δx_2	$\frac{\mu}{x_2}+2\pi1x_2-\frac{\mu}{v2}$
		$\frac{\mu}{x_3^2}$		-1	Δx_3	$\frac{\mu}{x_3}+\pi1-1$
			$\frac{\mu}{x_4^2}$	-1	Δx_4	$\frac{\mu}{x_4}+\pi1-1$
$-2x_1$	$-2x_2$	-1	-1		$\Delta\pi1$	$x_1^2+x_2^2+x_3+x_4-7$

Figura 2: Matriz reduzida da primeira formulação para o exemplo hipotético

Para a segunda formulação, o gradiente do Lagrangeano foi simplificado, obtendo a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \nabla_{x_1}L &= -\mu-2\pi1x_1^2-\pi2x_1=0 \\ \nabla_{x_2}L &= -\mu-2\pi1x_2^2-\pi3x_2=0 \\ \nabla_{x_3}L &= -\mu-\pi1x_3+x_3=0 \\ \nabla_{x_4}L &= -\mu-\pi1x_4+x_4=0 \\ \nabla_{\pi1}L &= -(x_1^2+x_2^2+x_3+x_4-7)=0 \\ \nabla_{\pi2}L &= -(x_1+v1-1)=0 \\ \nabla_{\pi3}L &= -(x_2+v2-1)=0 \\ \nabla_{v1}L &= -\mu-\pi2v1=0 \\ \nabla_{v2}L &= -\mu-\pi3v2=0 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	π_1	π_2	π_3	v_1	v_2			
x_1	$-4\pi x_1 - \pi_2$				$-2x_1^2$	$-x_1$				Δx_1	(2.1)	$\mu + 2\pi_1 x_1^2 + \pi_2 x_1$
x_2		$-4\pi x_2 - \pi_3$			$-2x_2^2$		$-x_2$			Δx_2	(2.2)	$\mu + 2\pi_1 x_2^2 + \pi_3 x_2$
x_3			$-\pi_1 + 1$		$-x_3$					Δx_3		$\mu + \pi_1 x_3 - x_3$
x_4				$-\pi_1 + 1$	$-x_4$					Δx_4		$\mu + \pi_1 x_4 - x_4$
π_1	$-2x_1$	$-2x_2$	-1	-1						$\Delta \pi_1$	=	$x_1^2 + x_2^2 + x_3 + x_4 - 7$
π_2	-1							-1		$\Delta \pi_2$	(2.3)	$x_1 + v_1 - 1$
π_3		-1							-1	$\Delta \pi_3$	(2.4)	$x_2 + v_2 - 1$
v_1						$-v_1$		$-\pi_2$		Δv_1	(2.5)	$\mu + \pi_2 v_1$
v_2							$-v_2$		$-\pi_3$	Δv_2	(2.6)	$\mu + \pi_3 v_2$

Figura 3: Matriz completa da segunda formulação para o exemplo hipotético.

As expressões de $\Delta \pi_2$ e $\Delta \pi_3$ para esta formulação é igual a:

$$\Delta \pi_2 = -\frac{\mu}{v_1} - \pi_2 + \frac{\pi_2}{v_1} \Delta x_1 \quad (2.5.1)$$

$$\Delta \pi_3 = -\frac{\mu}{v_2} - \pi_3 + \frac{\pi_3}{v_2} \Delta x_2 \quad (2.6.1)$$

Temos pela equação (2.1) da figura (2) que:

$$(-4\pi_1 x_1 - \pi_2) \Delta x_1 - 2x_1^2 \Delta \pi_1 - x_1 \Delta \pi_2 = \mu + 2\pi_1 x_1^2 + \pi_2 x_1$$

Substituindo (2.5.1) na equação acima, temos:

$$\left(-4\pi_1 x_1 - \pi_2 - \frac{\pi_2 x_1}{v_1}\right) \Delta x_1 - 2x_1^2 \Delta \pi_1 = \mu + 2\pi_1 x_1^2 - \frac{\mu x_1}{v_1}$$

Temos pela equação (2.2) da figura (2) que:

$$(-4\pi_1 x_2 - \pi_3) \Delta x_2 - 2x_2^2 \Delta \pi_1 - x_2 \Delta \pi_3 = \mu + 2\pi_1 x_2^2 + \pi_3 x_2$$

Substituindo (2.6.1) na equação acima, temos:

$$\left(-4\pi l x_2 - \pi 3 - \frac{\pi 3 x_2}{v2}\right) \Delta x_2 - 2x_2^2 \Delta \pi l = \mu + 2\pi l x_2^2 - \frac{\mu x_2}{v2}$$

Desta forma, chega-se ao seguinte sistema de equações que deve ser resolvido de forma iterativa:

$-4\pi l x_1 - \pi 2 - \frac{\pi 2 x_1}{v1}$				$-2x_1^2$	Δx_1	$\mu + 2\pi l x_1^2 - \frac{\mu x_1}{v1}$
	$-4\pi l x_2 - \pi 3 - \frac{\pi 3 x_2}{v2}$			$-2x_2^2$	Δx_2	$\mu + 2\pi l x_2^2 + \frac{\mu x_2}{v2}$
		$-\pi l + 1$		$-x_3$	Δx_3	$\mu + \pi l x_3 - x_3$
			$-\pi l + 1$	$-x_4$	Δx_4	$\mu + \pi l x_4 - x_4$
$-2x_1$	$-2x_2$	-1	-1		$\Delta \pi l$	$x_1^2 + x_2^2 + x_3 + x_4 - 7$

Figura 4: Matriz reduzida da segunda formulação para o exemplo hipotético

Testes e Resultados

Foi implementado um programa em FORTRAN para calcular a solução de um sistema do tipo $Ax=b$, para este exemplo hipotético.

Usou-se a subrotina MA28AD [6], para a fatoração LU.

Existem duas formulações para o programa, em uma formulação o gradiente do Lagrangeano foi simplificado e na outra formulação, o gradiente não foi simplificado, como foi mostrado anteriormente.

A partir destas duas formulações, variamos o fator de penalidade e encontramos os resultados que serão apresentados nas tabelas a seguir.

x_1	x_2	x_3	x_4	π_1	π_2	π_3	σ
0.6	0.5	0.8	0.5	0.5	-0.8	-0.9	0.95

Tabela 1: Dados iniciais do problema

μ_0	x_1^*	x_2^*	x_3^*	x_4^*	Niter
1.0	.99994	1.99997	.82132	1.17890	51
5.0	.99994	1.99997	.81479	1.18542	60
10.0	.99994	1.99997	.80173	1.19847	64
20.0	.99994	1.99997	.80039	1.19985	67
50.0	.99994	1.99997	.80039	1.19985	72
100.0	.99994	1.99997	.80039	1.19984	76
200.0	.99994	1.99997	-171.6705	173.6707	80

Tabela 2: Resultados finais do problema com a simplificação feita no gradiente do lagrangiano.

μ_0	x_1^*	x_2^*	x_3^*	x_4^*	Niter
1.0	.99994	1.99997	1.00010	1.00010	51
5.0	.99994	1.99997	1.00010	1.00010	60
10.0	.99994	1.99997	1.00010	1.00010	64
20.0	.99994	1.99997	1.00010	1.00010	67
50.0	.99994	1.99997	1.00010	1.00010	72
100.0	.99994	1.99997	1.00010	1.00010	76
200.0	.99994	1.99997	1.00010	1.00010	80

Tabela 3: Resultados finais do problema sem a simplificação feita no gradiente do lagrangiano.

Sendo:

μ_0 : parâmetro de barreira inicial;

x^* : valor ótimo obtido ;

Niter: Número de iterações até a convergência.

Observando as tabelas apresentadas anteriormente, podemos concluir que o número de iterações para cada fator de penalidade foi o mesmo para os dois tipos de formulação, mas os melhores resultados foram obtidos sem efetuar as devidas simplificações no gradiente do Lagrangeano, mostrando assim que estas simplificações influenciam bastante nos resultados.

Anexo II

Elementos das Matriz Hessiana Acoplada e Desacoplada

Neste anexo apresenta-se a estrutura das submatrizes H1, H2, H3, H4, J1, J2, J3, J4 referentes à matriz hessiana associada ao problema Lagrangeano e as equações que foram posteriormente implementadas no programa em FORTRAN, desenvolvido neste trabalho.

II.1. Estrutura da Matriz Hessiana.

$H1 + \mu V[VV1]^{-2} + \mu V[VV2]^{-2}$	H2				J1	J2	ΔV	$-\pi P' \frac{\partial P}{\partial V} - \pi Q' \frac{\partial Q}{\partial V} + \frac{\mu V}{VV1} - \frac{\mu V}{VV2}$
H3	H4				J3	J4	$\Delta \theta$	$-\pi P' \frac{\partial P}{\partial \theta} - \pi Q' \frac{\partial Q}{\partial \theta}$
		$\frac{\mu Q}{y1^2} + \frac{\mu Q}{Vy1^2}$				-1	$\Delta y1$	$-C1 + \frac{\mu Q}{y1_i} + \pi Q_i - \frac{\mu Q}{Vy1_i}$
			$\frac{\mu Q}{y2^2} + \frac{\mu Q}{Vy2^2}$			1	$\Delta y2$	$-C1 + \frac{\mu Q}{y2_i} + \pi Q_i - \frac{\mu Q}{Vy2_i}$
				$\frac{\mu Q}{VQ1^2} + \frac{\mu Q}{VQ2^2}$		-1	ΔQG	$\pi Q + \frac{\mu Q}{VQ1_i} - \frac{\mu Q}{VQ2_i}$
J1	J3						$\Delta \pi P$	$P^{esp} - P(\theta, V)$
J2	J4	-1	1	-1			$\Delta \pi Q$	$QG_i - QC_i - Q(\theta, V) + y1_i + y2_i$

$H' =$

H1	H2
H3	H4

 $=$

$\frac{\partial^2 Q}{\partial V_k^2}$	$\frac{\partial^2 Q}{\partial V_k \partial V_m}$	$\frac{\partial^2 Q}{\partial V_k \partial \theta_k}$	$\frac{\partial^2 Q}{\partial V_k \partial \theta_m}$
$\frac{\partial^2 Q}{\partial V_m \partial V_k}$	$\frac{\partial^2 Q}{\partial V_m^2}$	$\frac{\partial^2 Q}{\partial V_m \partial \theta_k}$	$\frac{\partial^2 Q}{\partial V_m \partial \theta_m}$
$\frac{\partial^2 P}{\partial \theta_k \partial V_k}$	$\frac{\partial^2 P}{\partial \theta_k \partial V_m}$	$\frac{\partial^2 P}{\partial \theta_k^2}$	$\frac{\partial^2 P}{\partial \theta_k \partial \theta_m}$
$\frac{\partial^2 P}{\partial \theta_m \partial V_k}$	$\frac{\partial^2 P}{\partial \theta_m \partial V_m}$	$\frac{\partial^2 P}{\partial \theta_m \partial \theta_k}$	$\frac{\partial^2 P}{\partial \theta_m^2}$

$J' =$

J1	J2
J3	J4

 $=$

$\frac{\partial^2 P}{\partial \pi_k \partial V_k}$	$\frac{\partial^2 P}{\partial \pi_k \partial V_m}$	$\frac{\partial^2 P}{\partial \pi_k \partial \theta_k}$	$\frac{\partial^2 P}{\partial \pi_k \partial \theta_m}$
$\frac{\partial^2 P}{\partial \pi_m \partial V_k}$	$\frac{\partial^2 P}{\partial \pi_m \partial V_m}$	$\frac{\partial^2 P}{\partial \pi_m \partial \theta_k}$	$\frac{\partial^2 P}{\partial \pi_m \partial \theta_m}$
$\frac{\partial^2 Q}{\partial \theta_k \partial \pi_k}$	$\frac{\partial^2 Q}{\partial \theta_k \partial \pi_m}$	$\frac{\partial^2 Q}{\partial \pi_k \partial \theta_k}$	$\frac{\partial^2 Q}{\partial \pi_k \partial \theta_m}$
$\frac{\partial^2 Q}{\partial \theta_m \partial \pi_k}$	$\frac{\partial^2 Q}{\partial \theta_m \partial \pi_m}$	$\frac{\partial^2 Q}{\partial \pi_m \partial \theta_k}$	$\frac{\partial^2 Q}{\partial \pi_m \partial \theta_m}$

II.2. Elementos da Matriz Hessiana Acoplada.

II.2.1. Elementos da Submatriz H1.

Elementos da diagonal:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial V_k^2} = \pi P_k (2V_k G_{kk}) - \pi Q_k (2B_{kk}) \quad (\text{II.2.1.1})$$

Elementos fora da diagonal:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial V_k \partial V_m} = & \pi P_k (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) + \pi P_m (G_{mk} \cos \theta_{mk} + B_{mk} \sin \theta_{mk}) + \\ & + \pi Q_k (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) + \pi Q_m (G_{mk} \sin \theta_{mk} - B_{mk} \cos \theta_{mk}) \end{aligned} \quad (\text{II.2.2.2})$$

II.2.2. Elementos da Submatriz H4.

Elementos da diagonal:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_k^2} = & -\pi P_k [-V_k^2 G_{kk} + P_k(\theta, V)] - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}} \pi P_m V_k V_m (G_{km} \cos \theta_{mk} - B_{km} \sin \theta_{mk}) \\ & - \pi Q_k [V_k^2 B_{kk} + Q_k(\theta, V)] + \sum \pi Q_m V_k V_m (G_{km} \sin \theta_{mk} + B_{km} \sin \theta_{mk}) \end{aligned} \quad (\text{II.2.2.1})$$

Elementos fora da diagonal:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_k \partial \theta_m} = & \pi P_k [V_k V_m (-G_{km} \cos \theta_{km} - B_{km} \sin \theta_{km})] + \pi P_m [V_k V_m (-G_{km} \cos \theta_{mk} - B_{km} \sin \theta_{mk})] + \\ & + \pi Q_k [V_k V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km})] - \pi Q_m [V_k V_m (G_{km} \sin \theta_{km} + B_{km} \cos \theta_{km})] \end{aligned} \quad (\text{II.2.2.2})$$

II.2.3. Elementos das Submatrizes H2, H3.

Elementos da diagonal:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial V_k \partial \theta_k} = & -\pi P_k \left[\frac{V_k^2 B_{kk} + Q_k(\theta, V)}{V_k} \right] - \sum_{l \neq k} \pi P_m V_m (G_{km} \sin \theta_{km} + B_{km} \cos \theta_{km}) + \\ & + \pi Q_k \left[\frac{P_k(\theta, V) - V_k^2 G_{kk}}{V_k} \right] + \sum_{l \neq k} \pi Q_m V_m (-G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) \end{aligned} \quad (\text{II.2.3.1})$$

Elementos fora da diagonal:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial V_m \partial \theta_k} = \pi P_k [V_k (-G_{km} \sin \theta_{km} + B_{km} \cos \theta_{km})] - \pi P_m [V_k (G_{km} \sin \theta_{km} + B_{km} \cos \theta_{km})] + \pi Q_k [V_k (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km})] - \pi Q_m [V_k (-G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km})] \quad (\text{II.2.3.2})$$

Os elementos das submatrizes H1, H2, H3 e H4 são simétricos.

II.2.4. Elementos da Submatriz J1.

$$\text{Elementos da diagonal:} \quad V_k^{-1} (P_k(\theta, V) + V_k^2 G_{kk}) \quad (\text{II.2.4.1})$$

$$\text{Elementos fora da diagonal:} \quad V_k (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) \quad (\text{II.2.4.2})$$

II.2.5. Elementos da Submatriz J2.

$$\text{Elementos da diagonal:} \quad (Q_k(\theta, V) + V_k^2 B_{kk}) V_k^{-1} \quad (\text{II.2.5.1})$$

$$\text{Elementos fora da diagonal:} \quad V_k (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \quad (\text{II.2.5.2})$$

II.2.6. Elementos da Submatriz J3.

$$\text{Elementos da diagonal:} \quad -G_k(\theta, V) - V_k^2 G_{kk} \quad (\text{II.2.6.1})$$

$$\text{Elementos fora da diagonal:} \quad V_k V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \quad (\text{II.2.6.2})$$

II.2.7. Elementos da Submatriz J4.

$$\text{Elementos da diagonal:} \quad P_k(\theta, V) - V_k^2 G_{kk} \quad (\text{II.2.7.1})$$

$$\text{Elemento fora da diagonal:} \quad -V_k V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) \quad (\text{II.2.7.2})$$



II.3. Elementos da Matriz Hessiana Desacoplada.

II.3.1. Elementos da Submatriz H1.

Elementos da diagonal principal:

$$h1_{ii} = \pi Q \cdot (-2B_{ik}) + \frac{\mu V}{VV1^2} + \frac{\mu V}{VV2^2} \quad (\text{II.3.1.1})$$

Elementos da diagonal secundária:

$$h1_{ii} = \pi Q \cdot \left(a_{jkm} \cdot \frac{2 \cdot b_m \cdot \sin(\theta_{kl} - \text{alf})}{\cos(\theta_{kl} - \text{alf})} \right) \quad (\text{II.3.1.2})$$

Elementos fora da diagonal:

$$h1_{ij} = \pi Q_k \left(\frac{-a_{jkm}}{\cos(\theta_{kl} - \text{alf})} \right) + \pi Q_l \left(\frac{-a_{jkm}}{\cos(\theta_{lk} - \text{alf})} \right) \quad (\text{II.3.1.3})$$

$$h1_{ji} = \pi Q_l \left(\frac{-a_{jkm}}{\cos(\theta_{lk} - \text{alf})} \right) + \pi Q_k \left(\frac{-a_{jkm}}{\cos(\theta_{kl} - \text{alf})} \right) \quad (\text{III.3.1.4})$$

II.3.2. Elementos da Submatriz H4.

Elementos da diagonal principal:

$$h4_{ii} = \pi P_k (V_k^2 G_{kk} - P_k(\theta, V)) + \pi Q_k (-V_k^2 B_{kk} - Q_k(\theta, V)) \quad (\text{II.3.2.1})$$

Elementos da diagonal secundária:

$$h4_{ji} = \pi P_m [V_m V_k (G_{km} \cos \theta_{mk} + B_{km} \sin \theta_{mk})] + \pi Q_m [V_m V_k (G_{km} \sin \theta_{mk} - B_{km} \cos \theta_{mk})] \quad (\text{II.3.2.2})$$

$$h4_{ij} = \pi P_k [V_k V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km})] + \pi Q_k [V_k V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km})] \quad (\text{II.3.2.3})$$

Elementos fora da diagonal:

$$h4_{ij} = \pi P_k [V_k V_m (-G_{km} \cos \theta_{km} - B_{km} \sin \theta_{km})] + \pi P_m [V_m V_k (-G_{km} \cos \theta_{mk} - B_{km} \sin \theta_{mk})] \quad (\text{II.3.2.4})$$

II.3.3. Elementos da submatriz J2.*Elementos da diagonal:*

$$j2_{ii} = -ajkm \cdot \left(\frac{V_i + 2V_k \cdot bm \cdot \sin(\theta_{ki} - \text{alf})}{\cos(\theta_{ki} - \text{alf})} \right) \quad (\text{II.3.3.1})$$

$$j2_{ii} = -ajkm \cdot \left(\frac{V_k + 2V_i \cdot bm \cdot \sin(-\theta_{ki} - \text{alf})}{\cos(-\theta_{ki} - \text{alf})} \right) \quad (\text{II.3.3.2})$$

Elementos fora da diagonal:

$$j2_{ij} = \frac{-ajkm \cdot V_k}{\cos(\theta_{ki} - \text{alf})} \quad (\text{II.3.3.3})$$

$$j2_{ji} = \frac{-ajkm \cdot V_i}{\cos(\theta_{ki} + \text{alf})} \quad (\text{II.3.3.4})$$

II.3.4. Elementos da submatriz J3.*Elementos da diagonal:*

$$j3_{ii} = -Q_k - V_k^2 B_{kk} \quad (\text{II.3.4.1})$$

Elementos fora da diagonal:

$$j3_{ij} = V_k V_m (G_{km} \sin \theta_{km} + B_{km} \cos \theta_{km}) \quad (\text{II.3.4.2})$$

$$j3_{ji} = V_k V_m (-G_{km} \sin \theta_{km} + B_{km} \cos \theta_{km}) \quad (\text{II.3.4.3})$$



Apêndice I

Artigo Publicado

Neste apêndice apresenta-se o Artigo "DESPACHO DE REATIVOS EM SISTEMAS DE ENERGIA ELÉTRICA: Uma abordagem através de programação não linear", que foi publicado no XXXI SBPO (Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional) e encontra-se nas páginas 305 a 316.



Universidade Federal de Juiz de Fora

XXXI SBPO

Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional

**A PESQUISA OPERACIONAL NA
SOCIEDADE DE CONHECIMENTO**

ANAIS DO SIMPÓSIO

**UFJF - UNIVERSIDADE FEDERAL
DE JUIZ DE FORA**

**20 A 22 DE OUTUBRO DE 1999
JUIZ DE FORA - MG**



DESPACHO DE REATIVOS EM SISTEMAS DE ENERGIA ELÉTRICA: Uma abordagem através de programação não linear

C. R. Nugoli

J. R. S. Mantovani

R. Romero

Universidade Estadual Paulista – UNESP

Departamento de Engenharia Elétrica – DEE

Caixa Postal: 031 CEP: 15385-000 Ilha Solteira – SP

e-mail: celia@dee.feis.unesp.br

Resumo: Neste trabalho propõe-se um algoritmo baseado na técnica de otimização de pontos interiores para resolver o despacho ótimo de reativos em sistemas de energia elétrica que é um problema de programação não linear de grande porte, com uma função objetivo que reflete os aspectos operacionais do sistema. Adotou-se uma topologia previamente definida para as restrições, na qual se referem ao atendimento das demandas ativa e reativa, a qualidade do fornecimento de energia e manter as condições de operações seguras e confiáveis.

O problema Lagrangeano é formulado considerando as restrições de desigualdade através do método das barreiras logarítmicas e o sistema de equações não linear, procedente da aplicação das condições de KKT ("karush-Kuhn-Tucker"), e resolvido através do método de Newton, em que se considera o despacho implícito entre os subproblemas ativo e reativo através das equações do fluxo de carga CRIC ("Constrained Reactive Implicit Coupling"). Apresentam-se resultados para um sistema teste de pequeno porte.

Abstract: This work proposes an algorithm based on interior point optimization techniques to solve the reactive optimal dispatch in electric energy systems, which is a robust non linear programming problem, with an objective function incorporating the operational system aspects. It has been adopted a predefined topology for the constraints, referred to the active and reactive demand providing, the quality of energy providing and maintaining the operation condition in a secure and reliable form.

The lagrangian problem is formulated considering the inequality constraints using the logarithmic barriers-methods and the non linear equation system, derived from the KKT ("Karush-Kuhn-Tucker") conditions. It is solved using the Newton method considering the implicit dispatch with the active and reactive, subproblems, and the CRIC("Constrained Reactive Implicit Coupling") load flow equations. Results for a short test system are presented.

Palavras Chave: Algoritmo de Pontos Interiores, Desacoplamento Implícito Potências Ativa e Reativa, Equações do Fluxo de carga CRIC.

I - Introdução

O despacho de reativos é um subproblema do fluxo de potência ótimo, constituindo-se uma importante etapa dentro da solução de planejamento de reativos em sistemas de energia elétrica. A solução do despacho de reativos consiste em determinar os ajustes dos dispositivos de controle das magnitude das tensões existentes no sistema (bancos de capacitores e reatores, "taps" de transformadores, capacidade própria de geração de reativos de geradores, compensadores síncronos e estáticos), com vista a obter um perfil pré-determinado das magnitudes das tensões em todas as barras do sistema.

Trata-se de um problema de programação não linear de grande porte em que a função objetivo pode assumir várias componentes, sendo as mais comuns a minimização de perdas do sistema de transmissão, redução das infactibilidades das magnitudes das tensões; minimização das necessidades



reativas para o sistema. As restrições consideradas no problema, adotando-se uma topologia previamente definida para o sistema de geração e transmissão, referem-se ao atendimento das demandas ativas e reativas, qualidade de serviço prestado, mantendo-se as magnitudes das tensões dentro de limites considerados satisfatórios, restrições físicas e operacionais dos equipamentos instalados no sistema, tais como limites térmicos de linha de transmissão, limites nas capacidades de geradores, compensadores síncronos e estáticos.

Neste artigo considera-se para resolver o problema do despacho ótimo de reativos um método de otimização clássico de programação não linear, em que as restrições de desigualdades são consideradas através do método das barreiras logarítmicas, semelhante ao proposto por Granville [1], devendo-se adotar soluções para contornar problemas relativos à natureza não linear em redes que estão sob severas condições de operação, tornando o subproblema reativo excessivamente mal comportado, o que por sua vez dificulta a solução numérica do sistema de equações não lineares resultantes da aplicação do método de Newton e das condições de otimalidade de primeira ordem, o que podem causar sérios problemas de instabilidade numérica.

O principal enfoque deste artigo é o desacoplamento $P-\theta$ e $Q-V$ na solução do problema. A metodologia utilizada para resolver o despacho de reativos baseia-se na aplicação do método das barreiras e no desacoplamento implícito potência ativa (P) – potência reativa (Q) proposto através do modelo de fluxo de carga CRIC por Carpentier [4,8,10].

As versão desacopladas melhoram o desempenho computacional possibilitando a adoção de um esquema de resolução segundo o qual os subproblemas $P\theta$ e QV são resolvidos alternadamente: na solução do subproblema $P\theta$ são utilizados os valores atualizados de V , na resolução do subproblema QV são utilizados os valores atualizados de θ .

O método de Newton e suas versões desacopladas são os métodos adequados para solução de problemas na área de sistemas elétricos de potência, pois para a resolução do problema de fluxo de potência, na maioria dos casos eles não oferecem riscos de divergência e como regra geral a divergência por eles proporcionada é muito mais rápida de que em outros métodos.

II – Formulação Geral do Problema de Despacho de Reativos

O despacho de reativos é um caso particular de um problema muito mais genérico, o fluxo de potência ótimo [2,3,5,7], que consiste em determinar um ponto de operação para o sistema que otimiza uma função objetivo sujeita a um conjunto de restrições de operação e limitações físicas do sistema, podendo ser formulado como:

$$\text{Min } W = \sum_{i \in I} (C1_i y1_i + C2_i y2_i) \quad (\text{II.1})$$

s.a.

$$\underline{P}^{sp} - P(\theta, V) = 0 \quad (\text{II.1.a})$$

$$QG_i - QC_i - Q_i(\theta, V) + y1_i - y2_i = 0 \quad i \in I \quad (\text{II.1.b})$$

$$Q_k^{sp} - Q_k(\theta, V) = 0 \quad k \in \{NB - I\} \quad (\text{II.1.c})$$

$$QG_i^{\min} \leq QG_i \leq QG_i^{\max} \quad i \in I \quad (\text{II.1.d})$$

$$\underline{V}^{\min} \leq V \leq \underline{V}^{\max} \quad (\text{II.1.e})$$

$$0 \leq y1_i \leq y1_i^{\max} \quad i \in I \quad (\text{II.1.f})$$

$$0 \leq y2_i \leq y2_i^{\max} \quad i \in I \quad (\text{II.1.g})$$

Em que:

- I : Conjunto de barras (nós elétricos) que possuem dispositivos de controle e compensação de reativos (barras de tensão controlada);
- $y1_i, y2_i$: Injeções reativas fictícias, dos tipos capacitiva e indutiva;
- V, θ : Magnitudes e ângulos das tensões em todas as barras do sistema;
- $V^{\min}, V^{\max}$: Limites inferior e superior para as magnitudes das tensões em todas as barras do sistema;
- $y1_i^{\max}, y2_i^{\max}$: Idem para as injeções reativas fictícias capacitivas e indutivas mínimas e máximas;
- $QG_i^{\min}, QG_i^{\max}$: Limites inferior e superior de geração de fontes reativa contínuas (compensadores síncronos ou estáticos, geradores).
- NB : Número de barras do sistema elétrico.

Os conjuntos de equações (II.1.a) - (II.1.d) são as equações estáticas do fluxo de carga, que representam o balanço de potências ativa e reativa do sistema e relacionam as condições de operação da rede elétrica, com a capacidade de geração e o atendimento das demandas ativa (P) e reativa (Q). $P_k(\theta, V)$ e $Q_k(\theta, V)$ são as injeções de potência ativa e reativa na barra, dadas pelas equação:

$$P_k = V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) \quad (\text{II.2})$$

$$Q_k = V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \quad (\text{II.3})$$

A solução do problema (II.1.a) - (II.1.g) fornece informações, caso existam, das regiões com falta de suporte de reativos, através dos valores das injeções reativas fictícias $y1_i, y2_i$ e se a razão de uma possível solução inviável do problema for a falta de suporte reativo, essas injeções permitirão a obtenção de uma solução. Outro aspecto interessante na solução do despacho de reativos refere-se às barras onde alocar variáveis de folga ($y1, y2, i \in I$) - elas podem ser alocadas em todas as barras do sistema ou apenas em um conjunto mais crítico de barras sob o aspecto reativo.

III – Técnicas de Solução para o Problema de Despacho de Reativos

A solução do problema de despacho ótimo de reativos neste trabalho, esta sendo abordada através dos métodos das barreiras logarítmicas. Dessa forma considera-se o problema (II.1) - (II.1.g), em que as restrições de desigualdade são transformadas em restrições de igualdade através do uso de variáveis de folga ou de excesso, obtendo-se o seguinte problema equivalente:

$$\text{Min } W = \sum_{i \in I} (C1_i y1_i + C1_i y2_i) \quad (\text{III.1})$$

s. a.

$$\underline{P}^{sp} - \underline{P}(\theta, V) = 0 \quad (\text{III.1.a})$$

$$QG_i - QC_i - Q_i(\theta, V) + y1_i - y2_i = 0 \quad i \in I \quad (\text{III.1.b})$$

$$Q_k^{sp} - Q_k(\theta, V) = 0 \quad k \in \{NB-I\} \quad (\text{III.1.c})$$

$$QG_i - VQ1_i = QG_i^{\min} \quad i \in I \quad (\text{III.1.d})$$

$$QG_i + VQ2_i = QG_i^{\max} \quad i \in I \quad (\text{III.1.e})$$

$$\begin{aligned} \underline{V} - \underline{VV1} &= \underline{V}^{\min} & \text{(III.1.f)} \\ \underline{V} + \underline{VV2} &= \underline{V}^{\max} & \text{(III.1.g)} \\ y1_i + Vy1_i &= y1_i^{\max} & i \in I \quad \text{(III.1.h)} \\ y2_i + Vy2_i &= y2_i^{\max} & i \in I \quad \text{(III.1.i)} \\ VQ1_i \geq 0, VQ2_i \geq 0, Vy1_i \geq 0, Vy2_i \geq 0 & & \text{(III.1.j)} \\ \underline{VV1} \geq 0; \underline{VV2} \geq 0 & & \text{(III.1.l)} \end{aligned}$$

Em que:
 $\underline{VV1}, \underline{VV2}$: variáveis de excesso e de folga das magnitudes de tensão em todas as barras do sistema;
 $VQ1_i$: variáveis de excesso referentes às potências reativas geradas, injeções reativas fictícias do tipo capacitivas e indutivas, nas barras de tensão controlada;
 $VQ2_i, Vy1_i, Vy2_i$: idem, variáveis de folga.

Para solução do problema (III), adotou-se neste trabalho o método de segunda ordem de Newton [3,9]. Usando a técnica da penalidade logarítmica – ponto interior, formula-se o problema Lagrangeano relativo ao problema (III.1) [9], que incorpora as restrições de igualdade à função objetivo através dos multiplicadores de Lagrange. A partir da expansão em série de Taylor do Lagrangeano, geram-se as direções de busca nos espaços das variáveis primais e duais, considerando-se a condição de otimalidade de primeira ordem para o Lagrangeano (Derivada primeira do Lagrangeano com relação às variáveis envolvidas igual a zero). Efetuando as devidas manipulações algébricas ao Lagrangeano e considerando-se as condições de otimalidade de primeira ordem, chega-se ao seguinte sistema de equações, que deve ser resolvido de forma iterativa até a convergência:

$H1 + \mu V[VV1]^{-2} + \mu V[VV2]^{-2}$	H2				J1	J2	ΔV	$-\pi P' \frac{\partial P}{\partial V} - \pi Q' \frac{\partial Q}{\partial V} + \frac{\mu V}{VV1} - \frac{\mu V}{VV2}$
H3	H4				J3	J4	$\Delta \theta$	$-\pi P' \frac{\partial P}{\partial \theta} - \pi Q' \frac{\partial Q}{\partial \theta}$
		$\frac{\mu Q}{y1^2} + \frac{\mu Q}{Vy1^2}$					$\Delta y1$	$-C1 + \frac{\mu Q}{y1_i} + \pi Q_i - \frac{\mu Q}{Vy1_i}$
			$\frac{\mu Q}{y2^2} + \frac{\mu Q}{Vy2^2}$				$\Delta y2$	$-C1 + \frac{\mu Q}{y2_i} + \pi Q_i - \frac{\mu Q}{Vy2_i}$
				$\frac{\mu Q}{VQ1^2} + \frac{\mu Q}{VQ2^2}$			ΔQG	$\pi Q + \frac{\mu Q}{VQ1_i} - \frac{\mu Q}{VQ2_i}$
J1	J3						$\Delta \pi P$	$P^{exp} - P(\theta, V)$
J2	J4	-1	1	-1			$\Delta \pi Q$	$QG_i - QC_i - Q(\theta, V) + y1_i + y2_i$

(III.2)

O termo independente que aparece no sistema matricial (III.2) é a condição de otimalidade de primeira ordem, ou seja, o gradiente do lagrangeano associado ao problema (III.1). Genericamente as equações que fornecem os elementos das duas primeiras linhas do termo independente são dadas por:

$$\underline{\pi P'} \cdot \frac{\partial P}{\partial \underline{V}} = \sum_{i=1}^{NB} \pi P_i \cdot \frac{\partial P_i(\theta, V)}{\partial V_k} \tag{III.3}$$

$$\underline{\pi Q'} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \underline{V}} = \sum_{i=1}^{NB} \pi Q_i \cdot \frac{\partial Q_i(\theta, V)}{\partial V_k} \tag{III.4}$$

$$\underline{\pi P'} \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^{NB} \pi P \cdot \frac{\partial P_i(\theta, V)}{\partial \theta_k} \quad (\text{III.5})$$

$$\underline{\pi Q'} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^{NB} \pi Q_i \cdot \frac{\partial Q_i(\theta, V)}{\partial \theta_k} \quad (\text{III.6})$$

para cada $k = 1, \dots, NB$

μV e μQ são parâmetros de barreiras que tendem a zero na solução ótima (convergência) do problema. $\pi P_i, \pi Q_i, i = 1, \dots, NB$, são os multiplicadores de Lagrange associados às equações (III.1.a)-(III.1.c). As equações que fornecem os elementos $H_1, H_2, H_3, H_4, J_1, J_2, J_3, J_4$ do sistema matricial (III.2), são apresentadas no Apêndice A.

No desenvolvimento da técnica de solução do problema, além do sistema matricial (III.2), tem-se um sistema de equações auxiliares, que é apresentado a seguir:

$$\Delta V V 1 = \Delta V \quad (\text{III.7})$$

$$\Delta V V 2 = -\Delta V \quad (\text{III.8})$$

$$\Delta V Q 1_i = \Delta Q G_i \quad i \in I \quad (\text{III.9})$$

$$\Delta V Q 2_i = -\Delta Q G_i \quad i \in I \quad (\text{III.10})$$

$$\Delta V y 1_i = -\Delta y 1_i \quad i \in I \quad (\text{III.11})$$

$$\Delta V y 2_i = -\Delta y 2_i \quad i \in I \quad (\text{III.12})$$

$$\Delta \pi V 1 = \mu V [V V 1]^{-1} - \pi V 1 - \mu V [V V 1]^{-1} \Delta V \quad (\text{III.13})$$

$$\Delta \pi V 2 = \mu [V V 2]^{-1} - \pi V 2 - \mu V [V V 2]^{-1} \Delta V \quad (\text{III.14})$$

$\pi V 1, \Delta \pi V 1$: representam respectivamente os multiplicadores de Lagrange e as variações incrementais dos multiplicadores de Lagrange associadas ao conjunto de restrições (III.1.f).

$\pi V 2, \Delta \pi V 2$: idem, restrições (III.1.g).

$[V V 1]^{-1}$: Inversa da matriz diagonal formada pelas variáveis de excesso dos módulos das tensões;

$[V V 2]^{-2}$: idem, variáveis de folga

ΔV : Vetor que representa a variação nas magnitudes das tensões.

$$\Delta \pi Q G 1_i = \frac{\mu Q}{V Q 1_i} - \pi Q G 1_i - \frac{\mu Q}{V Q 1^2} \Delta \pi Q_i \quad i \in I \quad (\text{III.15})$$

$$\Delta \pi Q G 2_i = -\frac{\mu Q}{V Q 2_i} - \pi Q G 2_i - \frac{\mu Q}{V Q 2^2} \Delta Q G_i \quad i \in I \quad (\text{III.16})$$

$\Delta \pi Q G 1_i$: variação dos multiplicadores de Lagrange associados às restrições (III.d);

$\Delta \pi Q G 2_i$: idem, restrições (III.e);

$$\Delta \pi V y 1_i = -\frac{\mu Q}{V y 1_i} - \pi V y 1_i - \frac{\mu Q}{V y 1^2} \Delta y 1_i \quad i \in I \quad (\text{III.17})$$

$$\Delta \pi V y 2_i = -\frac{\mu Q}{V y 2_i} - \pi V y 2_i - \frac{\mu Q}{V y 2^2} \Delta y 2_i \quad i \in I \quad (\text{III.18})$$

$\Delta \pi y 1_i, \Delta \pi y 2_i$: Variação dos multiplicadores de Lagrange associados às restrições (III.l)

A etapa seguinte na solução do problema consiste em calcular o tamanho do passo para atualização das variáveis nos espaços primal e dual, conforme apresentado na referência [10]. Uma vez determinados esses passos, procede-se à atualização das variáveis nos espaços primal e dual. O diagrama de blocos da Figura V.1 ilustra o procedimento iterativo do método acoplado.

IV – Fluxo de Carga Ótimo Desacoplado

O sistema matricial (III.2) reúne as vantagens de ser esparso e apresentar as sensibilidades entre as potências ativas e reativas e todas as variáveis do sistema. O inconveniente desta formulação é apresentar um grande número de submatrizes de acoplamento entre os problemas ativo e reativo, o que dificulta a solução do problema. Neste trabalho, buscando um algorítmico mais eficiente sob os aspectos computacionais para a solução do problema de despacho de reativos, propõe-se a solução do problema, através do desacoplamento potência ativa (P) – ângulo das tensões (θ) e potência reativa (Q) – magnitude das tensões (V).

A idéia do desacoplamento surge das características inerentes de um sistema elétrico prático operando em regime permanente. Nele se verifica a forte interdependência entre as potências ativas e os ângulos das tensões das barras e entre as potências reativas e as magnitudes dessas tensões. Esse fenômeno é conhecido como acoplamento $P-\theta$ e acoplamento $Q-V$ respectivamente. Por outro lado, as sensibilidades entre potência ativa vs. magnitude de tensão e potência reativa vs. ângulo de tensão, são comparativamente pequenas as anteriores. Isto em geral se verifica em redes de extra-alta-tensão (maior que 230 KV) e ultra-alta-tensão (maior que 750 KV), considerando-se estas condições, o conjunto de equações (III.2), está operando com dois conjuntos de equações praticamente independentes, o que sugere um tratamento individual de resolução para cada um deles. Dessa forma, é possível executar o desacoplamento $P\theta-QV$, transformando o sistema matricial (III.2), nos subproblemas ativo ($P-\theta$) e reativo ($Q-V$), apresentados a seguir, desprezando-se as submatrizes de acoplamento. O tratamento separado destes subproblemas não altera a solução final, já que o problema a resolver continuará o mesmo, mudando apenas a trajetória do processo de convergência.

Subproblema Ativo:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline H4 & J3 \\ \hline J3 & \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \Delta\theta \\ \hline \Delta\pi P \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline -\pi P' \frac{\partial P}{\partial Q} \\ \hline P^{esp} - P(\theta, V) \\ \hline \end{array} \quad (IV.1)$$

$$\theta^{v+1} = \theta^v + 0,9995 \cdot \alpha \cdot \Delta\theta$$

$$\pi P^{v+1} = \pi P^v + 0,9995 \cdot \alpha \cdot \Delta\theta$$

Subproblema Reativo:

$H1 + \mu V [VV1]^{-2}$ $+ \mu V [VV2]^{-2}$				J2
	$\frac{\mu Q}{y1^2} + \frac{\mu Q}{Vy1^2}$			-1
		$\frac{\mu Q}{y2^2} + \frac{\mu Q}{Vy2^2}$		1
			$\frac{\mu Q}{VQ1^2} + \frac{\mu Q}{VQ2^2}$	-1
J2	-1	1	-1	

ΔV
$\Delta y1$
$\Delta y2$
ΔQG
$\Delta \pi Q$

 $=$

$-\pi P' \frac{\partial P}{\partial V} - \pi Q' \frac{\partial Q}{\partial V} + \frac{\mu V}{VV1} - \frac{\mu V}{VV2}$
$-C1 + \frac{\mu Q}{y1_i} + \pi Q_i - \frac{\mu Q}{Vy1_i}$
$-C1 + \frac{\mu Q}{y2_i} + \pi Q_i - \frac{\mu Q}{Vy2_i}$
$\pi Q + \frac{\mu Q}{VQ1_i} - \frac{\mu Q}{VQ2_i}$
$QG_i - QCi - Q(\theta, V) + y1_i + y2_i$

(IV.2)

Sendo que:

H4 e H1: são submatrizes da matriz H correspondente as variáveis associadas a potência ativa e reativa, respectivamente;

J3 e J2: são jacobianos do balanço de equações de potência ativa/reativa correspondente as variáveis de potência ativa/reativa

As equações necessárias para formar a submatriz relacionada com as equações de balanço de potência ativa e as variáveis envolvidas, são as mesmas desenvolvidas para a versão acoplada do algoritmo.

Visando a eficiência computacional do algoritmo que esta sendo desenvolvido, propõe-se neste trabalho, utilizar como sensibilidade de primeira e Segunda ordem entre potência reativa e tensão, as equações do fluxo de carga CRIC (“Constrained Reactive Implicit Coupling”) desenvolvidas por J. L. Carpentier [8], que se fundamenta em dois critérios, um de natureza teórica e o outro prática:

- O primeiro consiste em preservar as injeções ativas durante a iteração reativa (os ângulos das tensões se combinam de forma a manter constante as injeções de potência ativa);
- O segundo leva em conta que quando os módulos das tensões são alterados, uma maneira de manter constante a injeção de potência ativa, é manter constante o fluxo de potência ativa através de cada bipolo do sistema.

Estes critérios são um caso particular do que se deseja de uma técnica em que se estabeleça o desacoplamento do despacho ótimo de reativos, $P-\theta$ e $Q-V$ ou seja, manter $\Delta P = 0$ quando a parte reativa (tensões ou injeções de potências reativa) sofre alterações. A aplicação dos conceitos anteriormente descritos a um bipolo qualquer do sistema, leva a uma equação de injeção de potência reativa na barra k dada por:

$$Q_k = N_k V_k^2 - \sum_{m \in \Omega_k} \xi_{km} V_k V_m [1 - \sin^2(\theta_{km} - \alpha_{km})]^{\frac{1}{2}}$$

(IV.3)

e as equações das sensibilidades de primeira e segunda ordem do subproblema reativo devem ser totalmente reescritas.

A equação (III.1) é função de V_k e V_m mantendo P_{km} constante. Esta expressão permite estabelecer um jacobiano reativo – LCRIC, válido para cada iteração $Q-V$. Desta forma os elementos da submatriz J3 passam a ser dados pelo seguintes conjunto de equações:

Elementos da diagonal:

$$2N_k V_k - \sum_{m \in \Omega_k} \xi_{km} \left[\frac{V_m + 2V_k \beta_{km} \sin(\theta_{km} - \alpha_{km})}{\cos(\theta_{km} - \alpha_{km})} \right]$$

(IV.4)

Elementos fora da diagonal: $\frac{-\xi_{km} V_k}{\cos(\theta_{km} - \alpha_{km})}$ (IV.5)

Os elementos da submatriz H1 passam a ser dados por:

Elementos da diagonal: $2N_k - \sum_{m \in \Omega_k} \xi_{km} \left[\frac{2\beta_{km} \text{sen}(\theta_{km} - \alpha_{km})}{\cos(\theta_{km} - \alpha_{km})} \right]$ (IV.6)

Elementos fora da diagonal: $\frac{-\xi_{km}}{\cos(\theta_{km} - \alpha_{km})}$ (IV.7)

V – Detalhes da Implementação Computacional

Para a obtenção dos resultados dos testes, foram elaborados dois programas computacionais em FORTRAN para o cálculo de fluxo de potência ótimo reativo utilizando as duas versões do algoritmo primal-dual: potência ativa e reativa acopladas, e outra em que elas aparecem desacopladas utilizando-se o modelo CRIC. Em ambos os programas, para tratar da esparsidade da matriz, foi utilizado o conjunto de subrotinas MA28 [12].

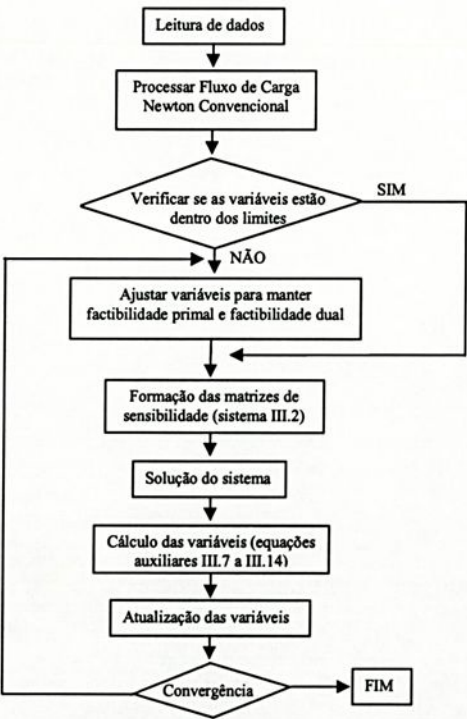


Figura V.1: Diagrama de Blocos da versão Acoplada

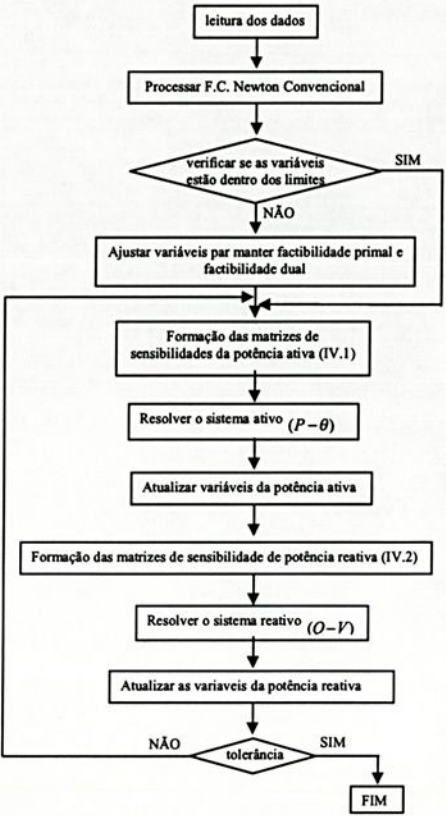


Figura V.2: Diagrama de Blocos da versão Desacoplada

Nas implementações acopladas e desacoplada para o problema o critério de convergência adotada foi o cálculo do parâmetro de barreira com base no menor gap de dualidade entre a solução nos espaços das variáveis primais e duais. Desta maneira o parâmetro de barreira em cada iteração principal do método de Newton é dado genericamente pela seguinte equação

$$\mu = \frac{gap^*}{4(n+m)^2} \tag{V.1}$$

em que gap^* é o gap de dualidade, dado por:

$$gap^* = \sum_{i=1}^{NB} (VV1_i \cdot \pi V1_i - VV2_i \cdot \pi V2_i) + \sum_{i \in I} (VQ1_i \cdot \pi QG1_i - VQ2_i \cdot \pi QG2_i - VY1_i \cdot \pi VY1_i - VY2_i \cdot \pi VY2_i) \tag{V.2}$$

em que n é o número de variáveis de folga primais e m é o número de variáveis duais.

VI – Testes e Resultados

Foram realizados testes com o sistema de três barras e três linhas de transmissão, cujos dados são fornecidos nas tabelas VI.1 e VI.2, para as versões acoplada e desacoplada do programa computacional que utiliza as equações obtidas considerando-se o acoplamento e o desacoplamento potência ativa e reativa.

Foi zerado a linha a coluna do ângulo da barra de referência e também a linha e a coluna referente a potência ativa da barra de referência.

Tabela VI.1: Dados das barras usados nas simulações do sistema teste de 3 barras.

barra	tipo	$QC(pu)$	$QG^{min}(pu)$	$QG^{max}(pu)$
1	referência	,000	-0,100	0,100
2	PV	0,550	-0,100	0,100
3	PQ	0,509	-0,100	0,100

Tabela VI.2: Dados das linhas usados nas simulações do sistema teste de 3 barras.

linha	NI	NF	$R(\Omega)$	$X(\Omega)$
1	1	2	5,70	17,37
2	2	3	1,32	3,79
3	1	3		25,60

Tabela VI.3: Método obtidos pelo algoritmo Acoplado considerando-se três perfis para as magnitudes das tensões de barra.

barra	$0.9 \leq V \leq 1.1 (pu)$				$0.95 \leq V \leq 1.05 (pu)$				$0.97 \leq V \leq 1.03 (pu)$			
	$V(pu)$	$y1(pu)$	$y2(pu)$	QGE	$V(pu)$	$y1(pu)$	$y2(pu)$	QGE	$V(pu)$	$y1(pu)$	$y2(pu)$	QGE
1	1,0999	0,0000	0,0000	0,0999	1,0499	0,0000	0,0000	0,0999	1,0299	0,0000	0,0000	0,0999
2	1,0798	1,0113	0,0000	0,0999	1,0296	1,0272	0,0000	0,0999	1,0096	1,0343	0,0000	0,0999
3	1,0654	0,0000	0,0000	0,0000	1,0143	0,0000	0,0000	0,0000	0,9938	0,0000	0,0000	0,0000

Tabela VI.4: Método obtidos pelo algoritmo Desacoplado considerando-se três perfis para as magnitudes das tensões de barra.

barra	$0.9 \leq V \leq 1.1$				$0.95 \leq V \leq 1.05$				$0.97 \leq V \leq 1.03$			
	$V(pu)$	$y1(pu)$	$y2(pu)$	QGE	$V(pu)$	$y1(pu)$	$y2(pu)$	QGE	$V(pu)$	$y1(pu)$	$y2(pu)$	QGE
1	1,0999	0,0000	0,0000	-0,0974	1,0499	0,0000	0,0000	-0,0899	1,0299	0,0000	0,0000	-0,0866
2	1,0999	1,2113	0,0000	0,0999	1,0499	1,2197	0,0000	0,0999	1,0299	1,2235	0,0000	0,0999
3	1,0833	0,0000	0,0000	0,0000	1,0324	0,0000	0,0000	0,0000	1,0120	0,0000	0,0000	0,0000

Analisando-se os resultados obtidos com os programas computacionais implementados a partir das versões acoplada e desacoplada do algoritmo – Tabelas V.3 e V.4, verifica-se que os resultados – magnitudes das tensões, potência reativa gerada e injeções reativas fictícias em todas as barras do sistema estão coerentes e compatíveis com os resultados teóricos esperados. O critério de convergência adotado em todos os testes foi o parâmetro de barreira calculado através do “gap” de dualidade ser, $\mu Q < 5 \times 10^{-6}$ ou $\mu V < 5 \times 10^{-9}$. O número de iterações necessário para convergência, para o método acoplado foi igual a 8 e para o método desacoplado igual a 12, mas de qualquer forma houve um ganho em termos do tempo computacional para a versão desacoplada, já que o número de operações e dimensões do problema são sensivelmente menores. Em todos os testes o parâmetro de barreira inicial adotado foi $\mu Q = \mu V = 10$

VII. Conclusões

Neste trabalho apresentou-se um algoritmo computacional baseado no desacoplamento $P - \theta$, $Q - V$ e nas equações do fluxo de carga CRIC desenvolvido por Carpentier para solução do problema de despacho ótimo de reativos em Sistemas Elétricos de Potência. A técnica de otimização utilizada foi um algoritmo de ponto interior do tipo não linear. Os resultados preliminares obtidos, são bastante promissores.

Estudos complementares da teoria do desacoplamento $P - \theta$ e $Q - V$ e ajustes do algoritmo desacoplado estão sendo efetuados com vista a tornar esta versão desacoplada mais precisa e robusta visando a simulação de sistemas elétricos de médio e grande porte.

Referências

- [1] Granville, S. "Optimal Reactive Dispatch Trough Interior Points Methods", **IEEE Transactions on Power Systems**, Vol. 9, nº 1, pp. 136-146, February, 1994.
- [2] Dommel, H.W. & Tinney, W.F. "Optimal Power Flow Solutions", **IEEE Transactions on PAS**, Vol. PAS-87, nº 10, pp. 1866-1876, October 1968.
- [3] Sum, D.I. et al. "Optimal Power Flow by Newton Approach", **IEEE Transactions on Power Systems**, nº 10, pp. 2854-2880, October 1984.
- [4] Mantovani, J.R.S. "Planejamento de Reativos em Sistemas de Energia Elétrica: Solução Via Programação Linear Sucessiva Utilizando um Modelo Implicitamente Acoplado, **Tese de Mestrado, Unicamp**, 1987.
- [5] Lebow, W.M. et al. "Optimization of Reactive Volt-Ampere (VAR) Sources in System Planning", **Vol. 1: Solution Techniques, Computing Methods and Results**, EL-3279, Vol. 1, Final Report, November 1984.
- [6] Granville, S. et al. "An Integrated Methodology for Var Sources Planning", **IEEE Transactions on Power Systems**, nº 3, pp.549-557, May 1988.
- [7] Iba, K. "Practical Reactive Power Allocation / Operation Using Sucessive Linear Programming", **IEEE Transactions on Power Systems**, nº 2, pp.558-566, May 1988.
- [8] Carpentier, J.L. "CRIC, a New Active Reactive Decoupling Process in Load Flows, Optimal Power Flow and System Control", **Proc. IFAC Conference on Power Systems and Power Plan Control**, pp. 65-70, August 1986.
- [9] Bazaraa, M. S. et al. "Nonlinear Programming - Theory and Algorithms", John Wiley & Sons, Second Edition.
- [10] Saavedra, O.R. "Cálculo de Fluxo de carga Desacoplado: Modelo de matrizes Constantes Baseado na Filosofia do Acoplamento Implícito", **Tese de Mestrado, Unicamp**, 1988.
- [11] A.S.El-Bakry, R.A.Tapia, T. Tsuchiya, Y.Zhang "On the Formulation and Theory of the Newton Interior-Point Method for Nonlinear Programming" **Journal of Optimization Theory and Applications**, Vol. 89, nº 3, pp.505-541, June 1996.
- [12] Duff, I. S. "MA28-A Set of Fortran Subroutines for Sparse Unsymmetric Linear Equations" **AERE Report R8730, HMSO London**, 1977.

Apêndice A

Neste apêndice são apresentados os elementos das submatrizes que aparecem no sistema matricial (III.2).

H1:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial V_{\kappa}^2} = \pi P_{\kappa} (2V_{\kappa} G_{\kappa\kappa}) - \pi Q_{\kappa} (2B_{\kappa\kappa}) \quad (\text{A.1})$$

πP_{κ} : Multiplicador de Lagrange associado à restrição (III.1.a), na barra κ .

G_{kk}, B_{kk} : Elementos da diagonal da matriz admitância de Barra $[Y] = [G] + j[B]$

L : Representa o Lagrangeano para o problema de despacho ótimo de reativos (III.1)-(III.1.1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial V_{\kappa} \partial V_m} = & \pi P_{\kappa} (G_{\kappa m} \cos \theta_{\kappa m} + B_{\kappa m} \sin \theta_{\kappa m}) + \pi P_m (G_{m\kappa} \cos \theta_{m\kappa} + B_{m\kappa} \sin \theta_{m\kappa}) + \\ & + \pi Q_{\kappa} (G_{\kappa m} \sin \theta_{\kappa m} - B_{\kappa m} \cos \theta_{\kappa m}) + \pi Q_m (G_{m\kappa} \sin \theta_{m\kappa} - B_{m\kappa} \cos \theta_{m\kappa}) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

- πQ_k : Multiplicador de Lagrange associado às restrições (III.1.b) ou (III.1.c)
 k, m : Barras do sistema, interligadas por linhas de transmissão.
 G_{km}, B_{km} : Elementos fora da diagonal da matriz admitância de barra $[Y] = [G] + j[B]$

H_4 :

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_k^2} = -\pi P_k [-V_k^2 G_{kk} + P_k(\theta, V)] - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}} \pi P_m V_k V_m (G_{km} \cos \theta_{km} - B_{km} \sin \theta_{km}) - \pi Q_k [V_k^2 B_{kk} + Q_k(\theta, V)] + \sum \pi Q_m V_k V_m (G_{km} \sin \theta_{km} + B_{km} \cos \theta_{km}) \quad (A.3)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_k \partial \theta_m} = \pi P_k [V_k V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km})] + \pi P_m [V_k V_m (G_{km} \cos \theta_{km} - B_{km} \sin \theta_{km})] + \pi Q_k [V_k V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km})] - \pi Q_m [V_k V_m (G_{km} \sin \theta_{km} + B_{km} \cos \theta_{km})] \quad (A.4)$$

H_2, H_3 :

$$\frac{\partial^2 L}{\partial V_k \partial \theta_k} = -\pi P_k \left[\frac{V_k^2 B_{kk} + Q_k(\theta, V)}{V_k} \right] - \sum_{m \neq k} \pi P_m V_m (G_{km} \sin \theta_{km} + B_{km} \cos \theta_{km}) + \pi Q_k \left[\frac{P_k(\theta, V) - V_k^2 G_{kk}}{V_k} \right] + \sum_{m \neq k} \pi Q_m V_m (-G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) \quad (A.5)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial V_m \partial \theta_k} = \pi P_k [V_k (-G_{km} \sin \theta_{km} + B_{km} \cos \theta_{km})] - \pi P_m [V_k (G_{km} \sin \theta_{km} + B_{km} \cos \theta_{km})] + \pi Q_k [V_k (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km})] - \pi Q_m [V_k (-G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km})] \quad (A.6)$$

Os elementos das submatrizes H_1, H_2, H_3 e H_4 são simétricos.

J_1 :

Elementos da diagonal: $V_k^{-1} (P_k(\theta, V) + V_k^2 G_{kk}) \quad (A.7)$

Elementos fora da diagonal: $V_k (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) \quad (A.8)$

J_2 :

Elementos da diagonal: $(Q_k(\theta, V) + V_k^2 B_{kk}) V_k^{-1} \quad (A.9)$

Elementos fora da diagonal: $V_k (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \quad (A.10)$

J_3 :

Elementos da diagonal: $-G_k(\theta, V) - V_k^2 G_{kk} \quad (A.11)$

Elementos fora da diagonal: $V_k V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \quad (A.12)$

J_4 :

Elementos da diagonal: $P_k(\theta, V) - V_k^2 G_{kk} \quad (A.13)$

Elemento fora da diagonal: $-V_k V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) \quad (A.14)$

Referências Bibliográficas

- [1] Barboza, L.V. "Análise do Máximo Carregamento de Sistemas de Potência via Métodos de Pontos Interiores", **Tese de Mestrado**, Federal de Santa Catarina, 1997.
- [2] Barbosa, L.V. & Salgado, R. & Almeida, K.C. "Estudo do Máximo Carregamento de Sistemas de Potência via Algoritmos de Pontos Interiores", **XII Brazilian Automatic Control Conference - XII CBA**, Vol. VI, pp.2005-2010, September 14-18, 1998 - Uberlândia, MG, Brasil.
- [3] Bazaraa, M.S. & Sherali, H.D. & Shetty, C.M. "Nonlinear Programming - Theory and Algorithms", John Wiley & Sons, Second Edition.
- [4] Carpentier, J.L. "CRIC, a New Active Reactive Decoupling Process in Load Flows, Optimal Power Flow and System Control", **Proc. IFAC Conference on Power Systems and Power Plan Control**, pp. 65-70, August 1986.

- [5] Dommel, H.W. & Tinney, W.F. "Optimal Power Flow Solutions", **IEEE Transactions on PAS**, Vol. PAS-87, nº 10, pp. 1866-1876, October 1968.
- [6] Duff, I.S. "MA28-A Set of Fortran Subroutines for Sparse Unsymmetric Linear Equations" **AERE Report** R8730, HMSO London, 1977.
- [7] El-Bakry, A.S. & Tapia, R.A. & Tsuchiya, T. & Zhang, Y. "On the Formulation and Theory of the Newton Interior-Point Method for Nonlinear Programming" **Journal of Optimization Theory and Applications**, Vol. 89, nº 3, pp. 505-541, June 1996.
- [8] Fiacco, A.C. & McCormick, G.P. "Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques", John Wiley & Sons, New York, 1968.
- [9] Garcia, A.V. & Mantovani, J.R.S. "Planejamento de Reativos em Sistema de Energia Elétrica Utilizando um Modelo Implicitamente Acoplado", **Anais do 7º Congresso Brasileiro de Automática**, 1988, São José dos Campos, SP.
- [10] Granville, S. "Optimal Reactive Dispatch Through Interior Points Methods", **IEEE Transactions on Power Systems**, Vol. 9, nº 1, pp. 136-146, February, 1994.
- [11] Iba, K. "Practical Reactive Power Allocation / Operation Using Successive Linear Programming", **IEEE Transactions on Power Systems**, nº 2, pp. 558-566, May 1988.
- [12] Mantovani, J.R.S. "Planejamento de Reativos em Sistemas de Energia Elétrica: Solução Via Programação Linear Sucessiva Utilizando um Modelo Implicitamente Acoplado", **Tese de Mestrado, Unicamp**, 1987.
- [13] Méndez, O.R.S. "Cálculo de Fluxo de Carga Desacoplado: Modelo de Matrizes Constantes baseado na filosofia de Acoplamento Implícito", **Tese de Mestrado, Unicamp**, 1988.
- [14] Monticelli, A.J. "Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica", Editora Edgard Blücher Ltda, 1983.
- [15] Quintana, V.H. "A Log-Barrier Primal-Dual Algorithm for Optimal Reactive-Power Dispatch", **Electro'95: XI Congresso Chileno de Ingenieria Electrica**, Punta Arena, novembro 1995.



- [16] Saavedra, O.R. "Cálculo de Fluxo de carga Desacoplado: Modelo de matrizes Constantes Baseado na Filosofia do Acoplamento Implícito", **Tese de Mestrado, Unicamp**, 1988.
- [17] Stott, B. & Alsac, O. "Experience With Successive Linear Programming for Optimal Rescheduling of Active and Reactive Power", **CIGRE / IFAC Syniposuim on Control Applications to Power System Security**, Florença, 1983.
- [18] Sun, D.I. & Ashley, B. & Brewer, B. & Hughes, A. & Tinney, W.F. "Optimal Power Flow by Newton Approach", **IEEE Transactions on Power Systems**, n^o 10, pp. 2854-2880, October 1984.
- [19] Wei, H. & Sasaki, H. & Kubokawa, J. & Yokoyama, R. "An Interior Point Nonlinear Programming for Optimal Power Flow Problems with A Novel Data Structure", **IEEE Transactions on Power Systems**, Vol.13, No.3, August 1998.
- [20] Wu, Y.C. & Debs, A.S. & Marsten, R.E. "A Direct Nonlinear Predictor-Corrector Primal-Dual Interior Point Algorithm for Optimal Power Flows", **IEEE Transactions on Power Systems**, Vol.9, No.2, May 1994.



Bibliografia

- [1] Lebow, W.M. & Rouhani, R. & Nadira, R. & Usoro, P.B. & Mehra, R.K, & Sbieski, D.W. & Pal, M.K. & Bhavaraju, M.P. "Optimization of Reactive Volt-Ampere (VAR) Sources in System Planning", **Vol. 1: Solution Techniques, Computing Methods and Results**, EL-3279, Vol. 1, Final Report, November 1984.
- [2] Granville, S. & Pereira, M.V.F. & Monticelli, A.J. "An Integrated Methodology for Var Sources Planning", **IEEE Transactions on Power Systems**, nº 3, pp.549-557, May 1988.
- [3] Iba, K. "Reactive Power Optimization by Genetic Algorithm", **IEEE Transactions on Power Systems**, nº 2, pp. 685-692, May 1994.
- [4] Hsiao, Y. & Chiang, H. & Liu, C. & Chen, Y. "A Computer Package for Optimal Multi-Objective Var Planning in Large Scale Power Systems", **IEEE Transactions on Power Systems**, nº 2, pp. 668-678, May 1994.

- [5] Dornellas, C.R.R. & Falcão, D.M. & Bomfim, A.L.B. "Otimização do Despacho de Reativos Utilizando Algoritmos Genéticos", **In: Congresso Brasileiro de Automática 11^o**, Anais da Sociedade Brasileira de Automática, São Paulo-SP, pp. 155-160, 1996.
- [6] Geoffrion, A.M. "Generalized Benders Decomposition", **JOTA**, n^o4, pp.237-260, 1972.
- [7] Lin, W.E. & Papalexopoulos, A.D & Tinney, W.F. "Discrete Shunt Control in a Newton Optimal Power Flow", **IEEE / PES Winter Meeting**, New York - NY, 1991.
- [8] Yan, Z. & Xiang, N.D. & Zhang, B.M. & Wang, S.Y. & Chung, T.S. "A Hybrid Decoupled Approach to Optimal Power Flow", **IEEE Transactions on Power Systems**, n^o2, pp. 947-953, May 1996.
- [9] "Optimal Power Flow: Solution Techniques, Requirements and Challenges" **IEEE Power Engineering Society-Tutorial Course**, PES 96 TP 111-0, 1996.
- [10] Duff, I. S. "MA28-A Set of Fortran Subroutines for Sparse Unsymmetric Linear Equations" **AERE Report R8730**, HMSO London, 1977.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA
AV. BRASIL, 56 - CAIXA POSTAL 31
15385-000 - ILHA SOLTEIRA - SP**

