



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Aspectos teórico-numéricos dos métodos SPH e MPS

Adriano Sueke Takata

Orientador: Prof. Dr. Messias Meneguette Junior

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente,

Março, 2015

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Aspectos teórico-numéricos dos métodos SPH e MPS

Adriano Sueke Takata

Orientador: Prof. Dr. Messias Meneguette Junior

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente,

Março, 2015

FICHA CATALOGRÁFICA

Takata, Adriano Sueke.
T142a Aspectos teórico-numéricos dos métodos SPH e MPS / Adriano Sueke
Takata. - Presidente Prudente : [s.n.], 2015
121 p. : il.

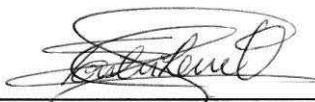
Orientador: Messias Meneguette Junior
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de
Ciências e Tecnologia.
Inclui bibliografia

1. Métodos de partículas. 2. SPH. 3. MPS. 4. Matemática aplicada e
computacional. I. Meneguette Junior, Messias. II. Universidade Estadual
Paulista. Faculdade de Ciências e Tecnologia. III. Título.

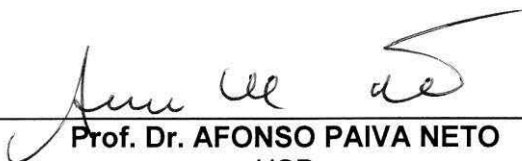
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. MESSIAS MENEGUETTE JUNIOR
ORIENTADOR



Profa. Dra. GILCILENE SANCHEZ DE PAULO
UNESP/FCT



Prof. Dr. AFONSO PAIVA NETO
USP



ADRIANO SUEKE TAKATA

Presidente Prudente (SP), 10 de março de 2015.

Resultado:

aprovado

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus.

A minha mãe Rosa Tomiko Yamada pelo seu amor imensurável.

Agradeço toda a minha família (avôs(ás), tios(as) e primos(as)) em especial, meu pai Luiz Hirokatsu Takata, aos meu irmãos Anderson Takeshi Takata e Alessandro Akihiro Takata, a minha avó Novoko Nakano Takata, aos meus padrinhos José Tadashi Takata e Mirian Takata e aos meu tios Miguel Uno e Lurdes Uno.

Ao Prof. Dr. Messias Meneguetti Júnior pela orientação, paciência, incentivo e contribuição para o meu crescimento científico e pessoal.

Aos professores do DMC-FCT/UNESP e funcionários pelos ensinamentos dentro e fora de sala de aula. Em especial aos professores Cássio Machiaveli Oishi, Márcio Ricardo Alves Gouveia, Alyton Pagamisse, José Roberto Nogueira, José Carlos Rodrigues (Biroca), Gilcilene Sanches, Marcos Tadeu Pimenta, Analice Costacurta Brandi.

Aos todos meu amigos do curso do mestrado do PosMAC: Crislaine, Joyce, Bruno, Jonas, Cintia, Gustavo, Carol, Junior, Heloísa, Paola, Rafael Castanha, Eduardo, Alisson, Daiane, Hemily, Irineu, José Vanterler, Luciene, Marília, Patrícia, Rafael Paulino, Renata Imada, Wesley, Camila, Clovís, Juliano, Larissa, Pedro Othechar, Reginaldo Merejolli, Vinicius, Leonardo e Eloiza.

Aos amigos de graduação: Patrícia Sato, Gregório Nosaki, Douglas Yugi, Juliane Santos e Karina Silvia.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Namu Amida Butsu.

*“Se você quer ser bem
sucedido, precisa ter
dedicação total,
buscar seu último limite
e dar o melhor de si mesmo.”*
Ayrton Senna da Silva

Resumo

Atualmente, devido ao grande avanço tecnológico o uso dos métodos de partículas vêm ganhando espaço nas simulações de escoamento de fluido. O primeiro método de partículas a ser desenvolvido foi o *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH) que se mostrou bastante eficiente para problemas de escoamento compressível, mas ineficiente para escoamento incompressível. Desta forma, surgiu algumas estratégias para resolver problemas de escoamento incompressível como o *Incompressible Smoothed Particle Hydrodynamics* (ISPH) e o *Moving Particle Semi-Implicit* (MPS); em ambos os métodos a pressão é atualizada por um equação de Poisson. Portanto para obter uma boa aproximação das equações de Navier-Stokes é necessário antes ter uma boa aproximação da equação de Poisson.

Neste trabalho são abordados os métodos de partículas *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH) e *Moving Particle Semi-Implicit* (MPS). A discretização dos operadores diferenciais por esses métodos é feita por meio da aproximação do núcleo e também por partículas. Um estudo comparativo entre discretização foram efetuadas. Afim de saber se os parâmetros utilizados na literatura dos métodos de partículas SPH e MPS dão uma boa solução para equação de Poisson foram realizados vários testes variando os parâmetros com e sem o tratamento de fronteira. Neste trabalho também foi proposta uma estratégia para resolver o problema de oscilação na solução da equação de advecção com descontinuidade nas condições iniciais e os resultados foram bem satisfatório.

Palavras-Chave: *Simulação, Método de partículas, Smoothed Particle Hydrodynamics, Moving Particle Semi-Implicit.*

Abstract

Currently, due to the technological advances the use of particle methods is gaining ground in the simulations of fluid flow. The first particle method to be developed was the Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) that was very efficient for compressible flow problems, but inefficient for incompressible ones. Thus, there was some strategy to solve incompressible flow problems as the incompressible Smoothed Particle Hydrodynamics (ISPH) and the Moving Particle Semi-Implicit (MPS); in both methods the pressure is updated by a Poisson equation. For an approximation of the Navier-Stokes equations it is first needed a good approximation for the Poisson equation.

This paper discusses the following particles methods: Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) and Moving Particle Semi-Implicit (MPS). The discretization of differential operators by these methods is done through the approximation of the kernel and also by particles. A comparative study of different discretizations were made. In order to know if the parameters used in the literature for the SPH and MPS methods provide a good solution for Poisson equation, have been performed several tests by varying the parameters with and without the borders treatment. This work also proposed a strategy to solve the oscillation problem in advection equation with discontinuity in the initial conditions and the results were very satisfactory.

Keywords: *Simulation, Meshfree Particle Method, Smoothed Particle Hydrodynamics, Moving Particle Semi-Implicit.*

Lista de Figuras

2.1	A linha tracejada mostra a deformação de um fluido que originalmente estava em repouso (linha cheia), o efeito de uma tensão de cisalhamento τ . Fonte [10].	22
3.1	Escoamento através de um elemento de fluido com volume ΔV : (a) O elemento de fluido se movendo ao longo de uma linha de corrente com uma velocidade $\mathbf{v}$ tangente a trajetória. (b) O elemento de fluido está fixo no espaço com o escoamento passando através dele. Fonte [28].	24
3.2	Deslocamento do elemento de fluido em um tempo δt . Fonte [28].	24
3.3	Discretização de um domínio com malha cartesiana (a) e generalizada (b). Fonte [30].	25
3.4	Discretização de um domínio por uma malha não-estruturada. Fonte [30].	26
4.1	Domínio de influência sobre uma partícula por meio da função núcleo.	29
4.2	As partículas são representada pelos pontos e a linha tracejada representa a fronteira. Amostragem densa de partículas no suporte compacto (a); O suporte compacto intersepta a fronteira do domínio (b); uma distribuição irregular de partículas no suporte compacto. Fonte [28]	37
5.1	A função núcleo (5.34) usada por Lucy (1977) e suas duas primeiras derivadas.	46
5.2	O núcleo gaussiano (5.35) usado por Monaghan (1977) e suas duas primeiras derivadas.	47
5.3	O núcleo spline cúbica (5.36) usado por Monaghan e Lattanzio (1985) e suas duas primeiras derivadas.	48
5.4	O núcleo Spline quártico (5.37) usado por Morris (1994) e suas duas primeiras derivadas.	49
5.5	O núcleo spline quártica (5.38) usado também por Morris (1996) e suas duas primeiras derivadas.	49
5.6	O núcleo quártico (5.39) usado por Liu e Liu (2003) e suas duas primeiras derivadas.	50
6.1	Função peso usados por Koshizuka e Oka (1996).	54
6.2	Função peso usados por Yoon et.al (1999).	55
6.3	Modelo operador gradiente. Fonte [1].	56
6.4	Modelo do operador laplaciano. Fonte[1].	57
7.1	Busca de partículas vizinhas utilizando uma malha uniforme. A área em cinza representa o espaço onde será realizada a busca. Fonte [28]	62
7.2	Esquema de partículas fantasmas do tipo I e tipo II.	63
7.3	Esquema de partículas <i>dummy</i>	64
7.4	Esquema de partículas <i>dummy</i> nas quinas (a) externa, e (b) interna.	64

8.1	Discretização do domínio Ω .	65
8.2	Histogramas de erros dos operadores divergente SPH II e MPS da função-teste (8.1).	67
8.3	Gráficos das aproximações dos operadores divergente SPH II e MPS da função-teste (8.1).	68
8.4	Histogramas de erros dos operadores divergente SPH II e MPS da função-teste (8.2).	68
8.5	Gráficos das aproximações dos operadores divergente SPH II e MPS da função-teste (8.2).	68
8.6	Histogramas de erros dos operadores divergente SPH II e MPS da função-teste (8.3).	69
8.7	Gráficos dos divergente da função-teste (8.3).	70
8.8	Histogramas de erros dos operador divergente SPH II e MPS da função-teste (8.4).	71
8.9	Gráficos das aproximações dos operadores SPH II e MPS da função-teste (8.4).	71
8.10	(a) campo do gradiente analítico da função-teste (8.5). (b) gráfico da função-teste (8.5).	72
8.11	Gráficos da aproximação do campo gradiente dos operadores SPH II e MPS da função-teste (8.5).	73
8.12	Histogramas de erros dos operadores gradiente SPH II e MPS da função-teste (8.5).	73
8.13	(a) campo do gradiente analítico da função-teste (8.6). (b) gráfico da função-teste (8.6).	74
8.14	Gráficos das aproximações dos campos gradiente dos operadores SPH II e MPS da função-teste (8.6).	74
8.15	Histogramas de erros dos operadores gradiente SPH II e MPS da função-teste (8.6).	74
8.16	(a) campo do gradiente analítico da função-teste (8.7). (b) gráfico da função-teste (8.7).	75
8.17	Gráficos das aproximações dos campos gradiente dos operadores SPH II (a) e do MPS (b) da função-teste (8.7).	76
8.18	Histogramas de erros dos operadores gradiente SPH II e do MPS da função-teste (8.7).	76
8.19	Gráficos das aproximações dos operadores laplaciano SPH III (a) e MPS (b) da função-teste (8.9).	78
8.20	Histogramas de erros dos operadores laplaciano SPH III e do MPS da função-teste (8.9).	78
8.21	Gráficos das aproximações dos operadores laplaciano SPH III (a) e do MPS (b) da função-teste 8.10.	79
8.22	Histogramas de erros dos operadores laplaciano SPH III (a) e do MPS (b) da função-teste 8.10.	79
8.23	Gráfico da solução da equação de Poisson (8.18) com 40 partículas.	83
8.24	Gráfico da solução da equação de Poisson (8.19) com 40 partículas.	84
8.25	Gráfico da solução da equação de Poisson (8.20) com 40 partículas.	85
8.26	Gráfico da solução da equação de Poisson (8.21) com 40 partículas.	86
8.27	Em (a) tem-se que $\sigma \leq 0.5$ e $\theta \leq 0.5$. Em (b) tem-se que $\sigma > 0.5$ e $\theta > 0.5$.	92
8.28	Gráfico das soluções aproximada do problema (8.36) em $t=1s$. Em (a) método de integração Euler regressivo e (b) método de integração Crank-Nicolson.	93

8.29	Gráfico das soluções numérica do problema (8.38) dos métodos SPH e MPS.	95
8.30	Gráficos do perfil das soluções numérica do problema (8.38) em $t = 3$	96
8.31	Gráficos do perfil das soluções numérica do problema (8.39) em $t = 0.125$	97
8.32	Gráficos do perfil das soluções numérica do problema (8.42) variando o parâmetro ϵ	98
8.33	Gráficos da solução numérica do problema (8.44) no tempo $t = 2$	101
8.34	Gráficos da solução numérica do problema (8.45) variando o parâmetro ϵ	102
8.35	Gráficos da solução numérica do problema (8.46) variando o parâmetro ϵ	103
8.36	Em (a) tem-se o gráfico da solução exata do problema (8.47) e em (b) é apresentado a solução numérica pela função núcleo new quártico com $h = 1.3dx$	104
8.37	Gráficos das soluções do problema (8.48).	106
8.38	Gráficos das soluções do problema (8.49) variando o parâmetro r_e	107
8.39	Gráficos das soluções do problema (8.50) variando o parâmetro r_e	108
8.40	Gráficos das soluções do problema (8.51) variando o parâmetro r_e	109
8.41	Gráficos das soluções do problema (8.52) sem e com o tratamento de fronteira.	110
8.42	Gráficos das soluções do problema (8.53) utilizando os métodos SPH e MPS.	111

Lista de Tabelas

8.1	Erros máximo e mínimo das funções-teste (8.1) e (8.2).	69
8.2	Erros máximo e mínimo da função-teste (8.3).	70
8.3	Erros máximo e mínimo da função-teste (8.4).	71
8.4	Erros máximo e mínimo da função-teste (8.5).	73
8.5	Erros máximo e mínimo da função-teste (8.6).	75
8.6	Erros máximo e mínimo da função-teste (8.7).	76
8.7	Erros máximo e mínimo da função-teste (8.9).	78
8.8	Erros máximo e mínimo da função-teste (8.10).	79
8.9	Erros dos métodos SPH e MPS para a equação de Poisson (8.18).	83
8.10	Erros dos métodos SPH e MPS para a equação de Poisson (8.19).	84
8.11	Erros dos métodos SPH e MPS para a equação de Poisson (8.20).	85
8.12	Erros dos métodos SPH e MPS para a equação de Poisson (8.21).	86
8.13	Erros dos métodos SPH e MPS para a equação do calor (8.36).	93
8.14	Erros dos métodos SPH e MPS para a equação de advecção (8.41).	97
8.15	Erros dos métodos SPH e MPS para a equação de advecção (8.44).	101
8.16	Erros dos métodos SPH e MPS para a equação de advecção (8.46).	103
8.17	Erros do método SPH utilizando as funções núcleo spline cúbica e new quártico com os parâmetros $k = 2$ e $h = 1.2dx$.	104
8.18	Erros do método SPH utilizando as funções núcleo spline cúbica e new quártico com os parâmetros $k = 2$ e $h = 1.3dx$.	104
8.19	Erros do método SPH utilizando as funções núcleo spline cúbica e new quártico com os parâmetros $k = 2$ e $h = 1.4dx$.	105
8.20	Erros do método SPH.	105
8.21	Erros do método MPS variando o parâmetro r_e .	107
8.22	Erros do método MPS variando o parâmetro r_e .	108
8.23	Erros do método MPS variando o parâmetro r_e .	109
8.24	Erros do método MPS sem e com o tratamento de fronteira.	110
8.25	Erros dos métodos SPH e MPS.	111

Lista de Siglas

EDO: Equações Diferenciais Ordinárias.

EDP: Equações Diferenciais Parciais.

ISPH: *Incompressible Smoothed Particle Hydrodynamics*.

MDF: Método de Diferenças Finitas.

MEF: Métodos de Elementos Finitos.

MPM: *Meshfree Particle Method*.

MPS: *Moving Particle Semi-Implicit*.

SPH: *Smoothed Particle Hydrodynamics*.

WCSPH: *Weakly Compressible Smoothed Particle Hydrodynamics*.

Sumário

Resumo	3
Abstract	5
Lista de Figuras	6
Lista de Tabelas	9
Lista de Siglas	13
Capítulos	
1 Introdução	17
2 Aspectos Básicos de Mecânica dos Fluidos	19
2.1 Tipos de Escoamentos	19
2.2 Equações de Navier-Stokes	20
2.3 Fluido Compressível e Incompressível	21
2.4 Fluidos Newtoniano e Não-Newtoniano	21
3 Abordagens Euleriana e Lagrangiana	23
3.1 Descrições Euleriana e Lagrangiana	23
3.2 Métodos que utilizam a descrição Euleriana	25
3.3 Métodos que utilizam a descrição Lagrangiana	25
3.3.1 Métodos com malha	26
3.3.2 Métodos sem malha	26
4 Formalismo básico para os MPMs	27
4.1 Aproximação pela função núcleo	27
4.2 Aproximação por partículas	28
4.3 Função Núcleo	29
4.4 Consistência do Núcleo	31
4.4.1 Aproximação de uma função	31
4.4.2 Aproximação das derivadas de uma função	32
4.4.3 Primeira derivada	32
4.4.4 Segunda derivada	34
4.5 Consistência da aproximação por partículas	36
5 Smoothed Particle Hydrodynamics	39
5.1 Método SPH	39
5.2 Operadores SPH	40
5.2.1 Operador Divergente	40

5.2.2	Operador Gradiente	42
5.2.3	Operador Laplaciano	43
5.3	Funções Núcleos SPH	45
5.4	Integração temporal	50
5.4.1	Método de Euler	51
5.4.2	Método Leap-Frog	51
6	<i>Moving Particle Semi-Implicit</i>	53
6.1	Equações Governantes	53
6.2	Discretização MPS	53
6.2.1	Função Peso	54
6.2.2	Densidade do Número de Partículas	54
6.2.3	Gradiente e Divergente	55
6.2.4	Laplaciano	56
6.2.5	Incompressibilidade	57
6.2.6	Algoritmo	58
7	Aspecto Numérico dos MPMs	61
7.1	Busca de Partículas Vizinhas	61
7.1.1	Busca de partículas vizinhas por força bruta	61
7.1.2	Busca de partículas vizinhas por malha uniforme	61
7.2	Tratamento de Fronteira	62
7.2.1	Partículas fantasmas	62
7.2.2	Partículas <i>dummy</i>	63
8	Resultados	65
8.1	Operadores	65
8.1.1	Operador Divergente	66
8.1.2	Operador Gradiente	72
8.1.3	Operador Laplaciano	77
8.2	Equações Clássicas Unidimensionais	80
8.2.1	Equação de Poisson	80
8.2.2	Equação do Calor	86
8.2.3	Equação de Advecção Linear	93
8.2.4	Condição CFL	94
8.2.5	Equação de Burgers	100
8.3	Equação de Poisson Bidimensional	103
	Referências	113

Introdução

Na Matemática alguns problemas são modelados por equações diferenciais parciais (EDPs) como por exemplos, o potencial gerado por cargas elétricas é modelado pela equação de Poisson, a distribuição de calor em uma barra é modelada pela equação do calor, escoamento de fluidos é modela pelas equações de Navier-Stokes, entre outras. No entanto, encontrar uma solução analítica para estes modelos matemáticos nem sempre é possível. Desta forma, recorre-se a uma solução numérica do modelo.

Para obter uma solução numérica é preciso aproximar as derivadas parciais. Conforme o tipo de aproximação das derivadas espaciais pode-se classificar os métodos numéricos de duas maneiras: as que utilizam a descrição Lagrangiana e as que utilizam a descrição Euleriana. Dentre estas duas descrições existem algumas subdivisões, por exemplo, no caso das que utilizando a descrição Lagrangiana tem-se as que utilizam malha e os sem malha (*meshfree*).

Atualmente, devido ao grande avanço tecnológico o uso dos métodos de partículas vêm ganhando espaço nas simulações de escoamento de fluido. O primeiro método de partículas desenvolvido foi o *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH) para simular problemas astrofísicos e deste então tem sido estudado e melhor entendido para ser aplicado em uma variedade de problemas incluindo as equações de Navier-Stokes.

Quando o escoamento é compressível o método SPH se mostrou bastante eficiente, mas para escoamento incompressível o método se mostrou ineficiente [28]. Desta forma o método SPH foi sendo aperfeiçoado para resolver problemas de escoamentos incompressíveis. Uma das estratégias adotada é baseada no método da projeção onde o cálculo da pressão é feito através de uma equação de Poisson; esta estratégia é chamada de ISPH (*Incompressible Smoothed Particle Hydrodynamics*). Um outro método que surgiu para resolver o problema de escoamento incompressível é o *Moving Particle Semi-Implicit* (MPS) sendo que a pressão também é calculada através de uma equação de Poisson. Portanto para obter uma boa aproximação das equações de Navier-Stokes é necessário antes ter uma boa aproximação da equação de Poisson.

Na literatura dos métodos de partículas, há pouco estudo sobre a equação de Poisson. O intuito desse trabalho é verificar quais são os melhores parâmetros para que se possa obter uma boa aproximação da solução numérica, além disso serão verificados alguns tratamentos de fronteira propostos na literatura. Foram também estudadas a equação do calor, a equação de advecção linear e a equação de Burgers.

A importância do trabalho está em analisar alguns conceitos ainda não feitos para algumas equações utilizando os métodos SPH e MPS. Estas equações são mais simples do que a equação de Navier-Stokes, mas não menos importante, delas podem surgir algumas

soluções em relação às oscilações não físicas e conceitos sobre a estabilidade dos métodos SPH e MPS.

O presente trabalho, está dividido em 7 capítulos excluindo a introdução sendo eles:

- o capítulo 2 tem como objetivo motivar e apresentar os aspectos básicos da mecânica dos fluidos, tais como as classificações dos escoamentos e dos fluidos. Nele é encontrado também as equações de Navier-Stokes.
- No capítulo 3 são apresentadas as abordagens Euleriana e Lagrangiana e como elas se relacionam; também são discutidos alguns métodos que utilizam tais descrições.
- O formalismo dos MPMs que tem como base a representação integral de uma função é abordado no capítulo 4. A partir dessa representação duas aproximações são realizadas: a aproximação pela função núcleo e a aproximação por partículas. São abordadas também algumas propriedades da função núcleo, a consistência da função núcleo e a consistência da aproximação por partículas.
- A descrição do método *Smoothed Particle Hydrodynamics* é abordada no capítulo 5, onde se encontra o desenvolvimento das aproximações dos operadores divergente, gradiente e laplaciano utilizados pelo método. Encontra-se também algumas funções núcleo utilizadas pelo método e algumas integrações temporais.
- A descrição do método *Moving Particle Semi-Implicit* é abordada no capítulo 6. Nele se encontra as aproximações dos operadores divergente, gradiente e laplaciano utilizados pelo método. Encontra-se também algumas funções peso e conceitos que o método utiliza como, a densidade do número de partículas e a incompressibilidade.
- No capítulo 7 são apresentadas duas estratégias para a busca de partículas vizinhas que são: a por força bruta e a por malha uniforme. Encontra-se também dois tipos de tratamento de fronteira que são: por partículas fantasmas e por partículas *dummy*.
- No capítulo 8 estão os resultados numéricos obtidos. Inicialmente é analisada a equação de Poisson unidimensional com as condições de contorno do tipo Dirichlet e do tipo Neumann. Em seguida, é estudado o conceito de estabilidade dos métodos SPH e MPS para a equação do calor. Na equação de advecção é analisada a estratégia proposta para não ocorrer oscilações na solução numérica, e em seguida a mesma estratégia proposta é aplicada para resolver a equação de Burgers. Por fim, é estudada a equação de Poisson bidimensional com condição de contorno de Dirichlet.

Aspectos Básicos de Mecânica dos Fluidos

Para a mecânica Newtoniana, fluidos são meios contínuos que tem a característica de se deformar continuamente quando são submetidos a uma tensão de cisalhamento. Por não resistir à deformação, os fluidos apresentam a capacidade de escoar, tomando a forma de seus recipientes. Chama-se de elemento de fluido o menor “corpo” a ser estudado.

O principal objetivo é então a procura do entendimento de como os elementos de fluido se deslocam com seus vizinhos e influenciam tanto o comportamento local, quanto global. A resistência ao escoamento determina em boa parte o comportamento do fluido.

2.1 Tipos de Escoamentos

Existem diversos modelos que descrevem o comportamento dos fluidos relacionando-os com suas propriedades físicas. Alguns desses modelos foram concebidos de acordo com as características do escoamento a ser tratado, de tal modo que são restritos à tipos específicos de escoamentos, como é o caso das equações de Burgers; equações de águas-rasas; equações de Euler; entre outras (uma abordagem didática a qual foi estudada pode ser encontrada em [7]). A classificação dos escoamentos pode ser definida da seguinte maneira:

- **Escoamento laminar e turbulento:** Escoamento laminar é ordenado com o fluxo movendo-se suavemente em camadas de fluidos e mantendo suas posições relativas uma em relação as outras. O escoamento turbulento não apresenta um padrão específico, caracterizando um movimento aleatório do fluido. Exemplo: Quando se apaga uma vela sai do pavio uma fumaça. Observa-se, inicialmente, que a fumaça sobe de uma forma ordenada, caracterizando um escoamento laminar. Após uma certa distância, a fumaça apresenta movimento aparentemente aleatório, caracterizando um escoamento turbulento.
- **Escoamento incompressível e compressível:** O escoamento é dito ser incompressível, quando a densidade de um fluido não muda ao longo do escoamento, ou pode-se desprezar qualquer alteração em seu valor, caso contrário, o escoamento é dito ser compressível.

- **Escoamentos multifásico e monofásico:** O escoamento é dito ser multifásico quando existem dois ou mais fluidos imiscíveis (não se misturam) separados por uma interface. Quando há um único fluido o escoamento é chamado de monofásico.

Escoamentos mais complexos exigem modelos matemáticos mais sofisticados, ou seja, baseados nas equações de Navier-Stokes.

2.2 Equações de Navier-Stokes

As equações de Navier-Stokes foram propostas no século XIX, elas descrevem o fluxo e determinadas propriedades de um escoamento, tais como velocidade e pressão. Modelos simplificados são muitas vezes usados para simplificar o processo de solução (analítica ou numérica).

Estes modelos matemáticos geralmente são descritos por um conjunto de equações diferenciais parciais (EDPs) que são deduzidas a partir das seguintes leis físicas:

- **Conservação de massa:** a massa do fluido deve ser invariante com o tempo, ou seja, não pode ter aumento nem diminuição da massa.
- **Conservação do momento (Segunda lei de Newton):** a taxa de variação temporal do momento de um elemento de fluido é igual à resultante das forças que atuam sobre o elemento.
- **Conservação da energia (Primeira lei da termodinâmica):** a taxa de variação temporal da energia em um elemento de fluido é igual a soma do fluxo líquido, ou resultante, de calor para dentro do elemento com o trabalho realizado por forças que agem sobre o elemento.

As equações de Navier-Stokes em um modelo que não considera a conservação de energia, podem ser escritas como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{g}, \quad (2.2)$$

sendo t o tempo, $\mathbf{v}$ o vetor velocidade, ρ a densidade, p a pressão, $\mathbf{g}$ o vetor de aceleração da gravidade e $\mathbf{S}$ tensor extra-tensão. A equação (2.1) é denominada equação da continuidade enquanto que (2.2) é a equação do momento. Para mais detalhes ver [10].

Os três principais conceitos do escoamento dos fluidos são [28]:

- A convecção é um dos principais modos de transferência de calor e massa; na convecção ocorre tanto à difusão quanto à advecção. A difusão vem do movimento aleatório de partículas individuais no fluido, ou seja, em escalas muito pequenas. Por outro lado, na advecção o calor e a massa são transportados pelo movimento de grande escala.
- O gradiente da pressão é a variação espacial de forças transversais ao fluido por unidade de área.

- A viscosidade é um fator desafiador nas simulações numéricas; na prática é mais comum considerar a seguinte relação:

$$R_e = \frac{\rho U L}{\mu}, \quad (2.3)$$

sendo U a velocidade média, L a largura do fluxo e μ a viscosidade dinâmica do fluido. Esta relação é conhecida como o número de Reynolds.

2.3 Fluido Compressível e Incompressível

A densidade de qualquer material (sólido ou fluido), é definida como sendo a razão da massa pelo seu volume:

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad (2.4)$$

sendo ρ a densidade, m a massa e V o volume. A densidade de um fluido real raramente é constante, pois diversos fatores como a temperatura e forças externas influenciam no valor da densidade em um ponto do fluido. Entretanto, quando a variação da densidade é suficientemente pequena, pode-se desconsiderar essa variação tornando a densidade constante.

Os fluidos podem ser classificados de acordo com sua compressibilidade da seguinte forma:

- **Fluidos compressíveis** são aqueles que apresentam uma variação de seu volume ligada a variação da pressão e conseqüentemente uma alteração no valor da densidade.
- **Fluidos incompressíveis** são aqueles que não apresentam variação em seu volume devido a alterações na pressão e, portanto não apresentam alteração no valor da densidade.

Portanto, os fluidos incompressíveis possuem densidade constante, o que permite concluir que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (2.5)$$

Observação: O conceito de fluido compressível e incompressível é diferente do conceito do escoamento compressível e incompressível. O ar é um fluido compressível, mas o seu escoamento pode ser compressível ou incompressível dependendo da aplicação, por exemplo, em problemas nos quais não existe gradiente elevados de pressão ou de temperatura, o escoamento é incompressível, independente do fluido [10].

2.4 Fluidos Newtoniano e Não-Newtoniano

Os fluidos apresentam diversas particularidades relacionadas as suas propriedades físicas, as quais podem influenciar de maneira direta fatores como o fluxo do material e a taxa de deformação.

Considera-se um escoamento laminar entre duas placas paralelas conforme a Figura 2.1

As placas são separadas por uma distância Δy . A chapa inferior permanece em repouso enquanto que uma força tangencial F traciona a chapa superior que se desloca da esquerda

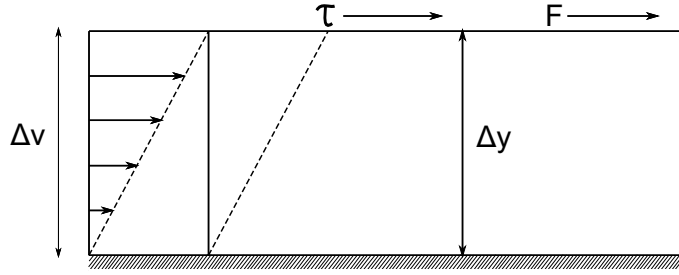


Figura 2.1: A linha tracejada mostra a deformação de um fluido que originalmente estava em repouso (linha cheia), o efeito de uma tensão de cisalhamento τ . Fonte [10].

para a direita com velocidade v . A força tangencial F gera uma tensão de cisalhamento τ entre a chapa superior e o bloco de fluido adjacente a ela. Inicialmente o bloco de fluido que estava em repouso, será acelerado e se deformará. Para muitos fluidos há uma relação linear entre a tensão de cisalhamento τ e a taxa de deformação das laminas de fluidos:

$$\tau \propto \frac{\Delta v}{\Delta y},$$

quando $\Delta t \rightarrow 0$ tem-se

$$\tau \propto \frac{dv}{dy}.$$

A constante de proporcionalidade entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação é a viscosidade dinâmica (μ). Assim defini-se a tensão de cisalhamento como:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}. \quad (2.6)$$

Portanto, pode-se classificar os fluidos de acordo com a taxa de deformação da seguinte forma:

- **Fluidos Newtonianos** são fluidos que em uma determinada temperatura, a taxa de deformação é proporcional à tensão de cisalhamento, ou seja, o valor de μ na equação (2.6) é constante e diferente de zero. Um exemplo de fluido Newtoniano é a água.
- **Fluidos Não-Newtonianos** são os fluidos que não apresentam uma linearidade entre a taxa de deformação e a tensão de cisalhamento, ou seja, o valor da viscosidade dinâmica (μ) não é constante, variando de acordo com a taxa de deformação aplicada. Neste tipo de fluido não existe um comportamento padrão da variação da taxa de deformação. Estas diferenças sugerem várias subclassificações dos fluidos não-newtonianos, por exemplo: fluidos viscoelásticos, fluidos inelásticos, entre outros, para mais detalhes consultar [4].

Abordagens Euleriana e Lagrangiana

Existem vários métodos que foram desenvolvidos para resolver EDPs que modelam matematicamente um sistema dinâmico. Esses métodos se diferem de acordo com a discretização das derivadas espaciais das equações diferenciais, e são tradicionalmente classificados nas descrições Euleriana e Lagrangiana. Neste capítulo serão apresentadas as equações de Navier-Stokes de acordo com cada descrição [28].

As abordagens Euleriana e Lagrangiana são também uma parte básica da mecânica dos fluidos, mas por ser fundamental aos métodos SPH e MPS serão tratadas em específico neste capítulo.

3.1 Descrições Euleriana e Lagrangiana

As quantidades físicas associadas aos elementos de fluido variam com o tempo. Essas variações podem ser descritas das seguintes formas:

- **Descrição Lagrangiana:** o fluido é representado por uma coleção de elementos de fluido onde cada elemento de fluido se move com o escoamento. Nessa descrição o referencial desloca-se simultaneamente com o elemento, veja a Figura 3.1(a).
- **Descrição Euleriana:** ao invés de acompanhar o movimento ao longo do escoamento, fixa-se pontos $\mathbf{x}$ no espaço e em seguida calcula-se as variações das quantidades físicas do fluido nesses pontos (veja a Figura 3.1(b)). Os pontos $\mathbf{x}$ são chamados de coordenadas espaciais.

Para relacionar estas descrições, é preciso primeiramente entender o movimento de um elemento de fluido que ocupa um volume finito no espaço $\Delta V \subset \mathbb{R}^3$ no instante $t = 0$. Dado um ponto $A \in \Delta V$, o movimento do elemento de fluido é descrito através da equação

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(A, t) \quad \text{com} \quad A = \mathbf{x}(A, 0).$$

Assim, um elemento de fluido se move ao longo da curva $t \mapsto \mathbf{x}(A, t)$. Derivando a equação que descreve a trajetória do elemento de fluido tem-se a sua velocidade que é expressa da seguinte maneira:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}(A, t), t) = \frac{\partial \mathbf{x}(A, t)}{\partial t}.$$

O ponto A é chamada de coordenada material e a trajetória descrita pelo elemento de fluido é chamado de linha de corrente.

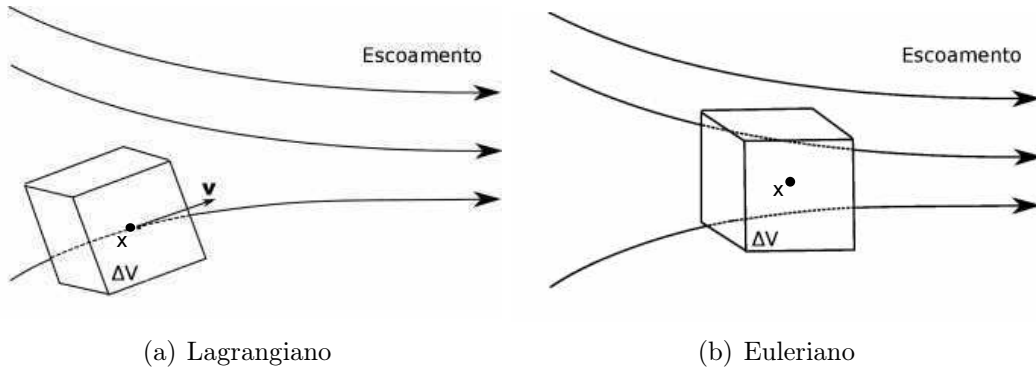


Figura 3.1: Escoamento através de um elemento de fluido com volume ΔV : (a) O elemento de fluido se movendo ao longo de uma linha de corrente com uma velocidade $\mathbf{v}$ tangente a trajetória. (b) O elemento de fluido está fixo no espaço com o escoamento passando através dele. Fonte [28].

Seja $q(\mathbf{x}, t)$ o valor de uma quantidade genérica em um elemento de fluido que ocupa uma posição $\mathbf{x}$ em um instante t . A questão é como calcular a variação temporal dessa quantidade quando o elemento de fluido se desloca entre os pontos 1 e 2 (Figura 3.2) em um intervalo de tempo Δt ? Para responder a essa pergunta calcula-se a derivada da função $q(\mathbf{x}, t)$ em relação ao tempo.

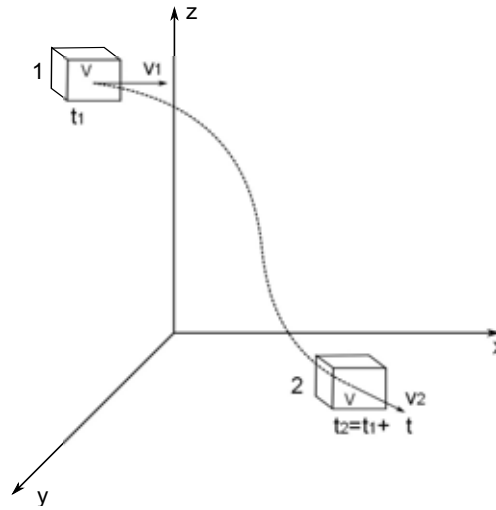


Figura 3.2: Deslocamento do elemento de fluido em um tempo δt . Fonte [28].

Primeiramente $\mathbf{x} = (x, y, z)$, sendo $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$. Usando a regra da cadeia para $q(\mathbf{x}, t)$ tem-se:

$$\frac{Dq}{Dt} = \frac{\partial q}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial q}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial q}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial q}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla q.$$

Portanto, define-se a derivada material ou total de $q(\mathbf{x}, t)$ através da seguinte expressão:

$$\frac{Dq}{Dt} := \frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla q,$$

desta forma a derivada total é a derivada local $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ mais a derivada convectiva $(\mathbf{v} \cdot \nabla)$.

A derivada local é responsável pela variação da quantidade física em relação ao tempo num ponto fixo no espaço, já a derivada convectiva mede a variação da quantidade física de um elemento de fluido que se move de um ponto para outro.

3.2 Métodos que utilizam a descrição Euleriana

As equações (2.1) e (2.2) apresentadas no capítulo 2 são as equações de Navier-Stokes para os métodos que utilizam a descrição Euleriana.

A representação do fluido é feita no interior das células em uma malha estruturada. Diz-se que uma malha é estruturada quando as células possuem uma determinada lei de construção, apresentando sempre o mesmo número de vizinhos, ver Figuras 3.3(a) e 3.3(b). A desvantagem da malha estruturada é que ela não consegue descrever adequadamente geometrias complexa [30].

A malha além de representar o domínio computacional da simulação auxilia na estimativa das derivadas espaciais dessas equações usando por exemplo o método de diferenças finitas (MDF) [10].

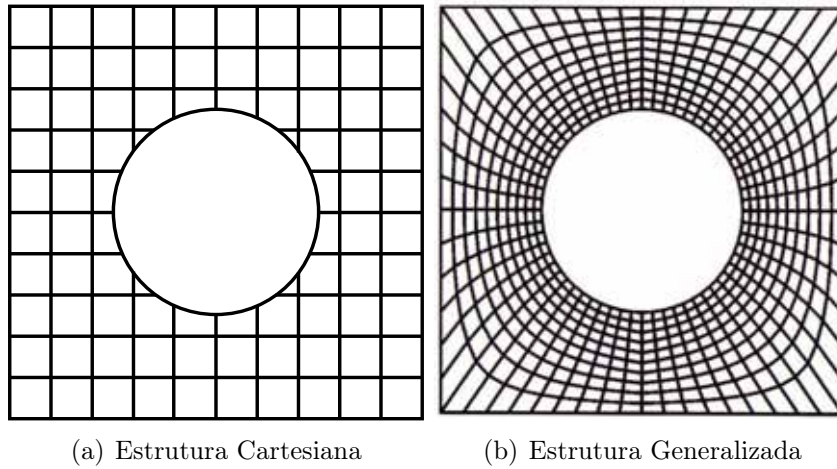


Figura 3.3: Discretização de um domínio com malha cartesiana(a) e generalizada (b). Fonte [30].

3.3 Métodos que utilizam a descrição Lagrangiana

A descrição Lagrangiana para as equações de Navier-Stokes apresenta o comportamento de um fluido do ponto de vista de uma partícula que se move com o fluxo. Então, lembrando que a ligação das duas descrições é a derivada material pode-se reescrever as equações (2.1) e (2.2).

Abrindo o termo do lado direito da equação (2.1) obtêm-se:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \rho - \rho \nabla \cdot \mathbf{v},$$

agora passando o primeiro termo do lado direito para o lado esquerdo da igualdade tem-se:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}.$$

Note que, do lado esquerdo tem-se a derivada material, então a equação da continuidade pode ser escrita como:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (3.1)$$

Na equação (2.2) substitui-se todo o lado esquerdo pela respectiva derivada material, assim obtêm-se:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{\rho}\nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{g}. \quad (3.2)$$

Note que, cada partícula possui uma advecção própria, logo não é necessário o cálculo explícito da derivada convectiva ($\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$). Os métodos que utilizam a descrição Lagrangiana se dividem em duas categorias: métodos com malha e métodos sem malha (*meshfree*).

3.3.1 Métodos com malha

Nessa categoria, o domínio computacional é constituído por um conjunto de células (ou elementos) que podem ser irregulares conectados através de um mapa topológico formando uma malha não-estruturada. Diz-se que uma malha é não-estruturada quando as células não possuem uma determinada lei de construção, apresentando um número de vizinhos diferentes. Essas malhas são mais adequadas para discretizar geometrias complexas, ver Figura 3.4. Diferentemente dos métodos que usam a formulação Euleriana, a malha não estruturada se movimenta dinamicamente com o fluido e consequentemente, se o fluido sofrer alguma mudança topológica a malha também sofrerá tal mudança. Um dos métodos com malha que utiliza a formulação Lagrangiana mais conhecido é o método de elementos finitos (MEF) [35].

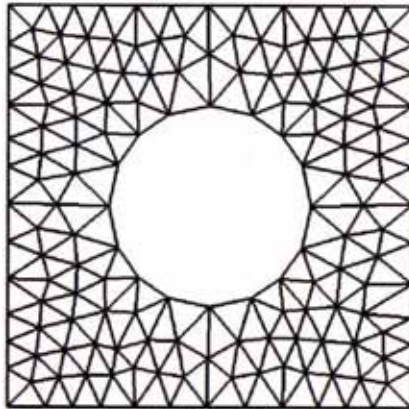


Figura 3.4: Discretização de um domínio por uma malha não-estruturada. Fonte [30].

3.3.2 Métodos sem malha

Geralmente essa categoria se refere a uma classe de métodos que utilizam um conjunto de partículas para discretizar o estado e a dinâmica de um sistema. Nos problemas de dinâmica dos fluidos, cada partícula está diretamente associada a atributos físicos do fluido e sua evolução é determinada por meio das leis de conservação de massa e momento. Pode-se destacar dois métodos que utilizam esta categoria o SPH (*Smoothed Particle Hydrodynamics*) [19] e o MPS (*Moving Particle Semi-implicit*) [14]. Essa categoria também é chamada de métodos de partículas livres (*Meshfree Particle Methods* (MPMs)).

Formalismo básico para os MPMs

Neste capítulo será apresentada a ideia principal dos MPMs, que é a aproximação pela função núcleo seguida da aproximação por partículas, também discutiremos sobre a função núcleo e suas principais propriedades que são citadas na literatura, e por fim a consistência do núcleo e da aproximação por partículas.

4.1 Aproximação pela função núcleo

Antes de falar da ideia principal dos MPMs, será definido o conceito de convolução, tal conceito matemático é muito utilizado nesse capítulo. Para mais detalhes ver [5].

Suponha que $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tais que, para quase todo ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, a função $u \mapsto f(\mathbf{x} - \mathbf{y})g(\mathbf{y})$ seja integrável em $\mathbb{R}^n$. Então defini a convolução de f com g como sendo a função

$$(f * g)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x} - \mathbf{y})g(\mathbf{y})d\mathbf{y}.$$

A ideia principal dos MPMs é o conceito da representação integral de uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida num domínio aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{x} \in \Omega$, e f é contínua em Ω . Essa representação é feita através da convolução de f com a distribuição Delta de Dirac. Então:

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}')\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')d\mathbf{x}', \quad (4.1)$$

com

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \begin{cases} \infty, & \mathbf{x} = \mathbf{x}' \\ 0, & \mathbf{x} \neq \mathbf{x}' \end{cases}.$$

Observações:

1. Na convolução a distribuição Delta de Dirac é o elemento neutro, ou seja,

$$f(\mathbf{x}) * \delta(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}).$$

2. Em particular tomando $f \equiv c$, sendo $c \neq 0$ e constante em (4.1), tem-se a seguinte propriedade:

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')d\mathbf{x}' = 1. \quad (4.2)$$

Portanto, em outras palavras, a distribuição Delta de Dirac é nula em qualquer ponto exceto em $\mathbf{x}'$, onde seu valor é “infinito o suficiente” para que a área sob seu gráfico seja exatamente 1.

Embora não seja possível exibir uma função que satisfaça as propriedades da distribuição Delta de Dirac, a Análise Funcional [15] nos permite defini-la como sendo o limite de funções suaves.

A equação (4.1) indica que uma função pode ser representada em uma forma integral, conhecida como representação integral da função.

Se a distribuição Delta de Dirac for substituída por uma função núcleo do tipo $W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h)$, a representação integral da função f é dada por:

$$f(\mathbf{x}) \cong \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' \quad (4.3)$$

sendo h o comprimento de suavização (*smoothing length*).

Note que como W não é a distribuição Delta de Dirac, então a equação (4.3) é uma aproximação e será representada pelo operador $\langle \rangle$. Portanto, a equação é reescrita na seguinte forma:

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}'. \quad (4.4)$$

Assim tem-se uma aproximação da função f pela representação integral da função utilizando uma função suave W .

4.2 Aproximação por partículas

Nos MPMs, o sistema é representado por um número finito de partículas que possuem massa e ocupam um volume no espaço. A integral da equação (4.4) aplicada em um ponto do domínio pode ser discretizada através de um somatório sobre as partículas que se encontram contidas no domínio.

Uma das propriedades exigida da função núcleo é que tenha um suporte compacto, então a aproximação é feita apenas sobre a subregião referente ao suporte do núcleo. Define-se o suporte compacto da função núcleo ao conjunto V_i , onde:

$$V_i = \{\mathbf{x}_j, |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| \leq kh\}$$

sendo $V_i \subset \Omega$ e k um fator de escala.

Substituindo o volume infinitesimal $d\mathbf{x}'$ da equação (4.4) na posição da j -ésima partícula pelo volume ocupado pela partícula Δv_j obtêm-se:

$$\langle f(\mathbf{x}_i) \rangle = \sum_{j \in V_i} f(\mathbf{x}_j) W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j; h) \Delta v_j \quad (4.5)$$

Lembrando da equação (2.4) do capítulo 2, pode-se reescrever a equação (4.5) da seguinte forma:

$$\langle f(\mathbf{x}_i) \rangle = \sum_{j \in V_i} f(\mathbf{x}_j) W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j; h) \frac{m_j}{\rho_j}. \quad (4.6)$$

Portanto, a equação (4.6) nos dá uma aproximação da função f por meio de um conjunto de partículas.

Observação: Note que no somatório $j \in V_i$ é um abuso de notação.

4.3 Função Núcleo

Para os MPMs a função núcleo W é de grande importância, pois através desta função são determinadas importantes características deste modelo de aproximação. A função núcleo também atua como uma forma de definição do domínio de influência (V_i) sobre uma determinada partícula i , isto é, define o conjunto de partículas que efetivamente influenciarão na aproximação referente à partícula em análise como pode ser observado na Figura 4.1.

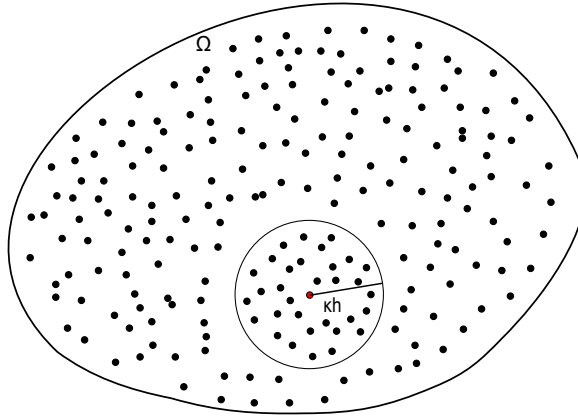


Figura 4.1: Domínio de influência sobre uma partícula por meio da função núcleo.

Diferentes núcleos são utilizados nos MPMs, e várias propriedades são discutidas na literatura para que uma função possa ser usada como um núcleo. As principais propriedades são listadas abaixo [1].

1. O núcleo deve ser **suficientemente suave**

$$W \in C^k, \quad k > 1.$$

2. O núcleo deve ser **normalizado**

$$\int_{\mathbb{R}^k} W(\mathbf{x}, h) d\mathbf{x} = 1.$$

3. O núcleo deve ter **suporte compacto**

$$W(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{quando} \quad \|\mathbf{x}\| > kh,$$

sendo k um fator de escala.

4. O núcleo deve ser **positivo**

$$W(\mathbf{x}) \geq 0.$$

5. O núcleo deve ser **decrecente**

$$W(\mathbf{x}) < W(\mathbf{u}), \quad \text{se} \quad \|\mathbf{x}\| > \|\mathbf{u}\|.$$

6. O núcleo deve ser **simétrico radial**

$$W(\mathbf{x}) = W(\|\mathbf{x}\|).$$

7. O núcleo deve satisfazer à distribuição Delta de Dirac quando $h \rightarrow 0$, ou seja:

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(\mathbf{x}, h) = \delta(\mathbf{x}).$$

A primeira propriedade tem como objetivo obter uma melhor aproximação. Para a aproximação de uma função e de suas derivadas, a função núcleo precisa ser contínua para obter bons resultados, pois de acordo com Monaghan [21] e Fulk [11] a função núcleo não será sensível à desordem das partículas, e os erros da aproximação são pequenos, desde que o distúrbio de partículas não seja muito extremo.

A segunda propriedade garante que a integral da função núcleo dentro do domínio do suporte compacto é unitário (propriedade herdada da distribuição Delta de Dirac equação (4.2)).

A terceira propriedade transforma a aproximação da função f de uma operação global em uma operação local.

A quarta propriedade mostra que a função núcleo deve ser não negativa no suporte. Essa propriedade não é necessária para a convergência, mas é importante para assegurar aproximações coerentes para a propriedade física envolvida em um dado problema. Por exemplo, valores negativos para o núcleo podem resultar em densidades negativas.

A quinta propriedade é baseada na consideração física de que as partículas mais próximas de uma dada partícula na posição $\mathbf{x}$ exercem uma maior influência do que as partículas mais afastadas de $\mathbf{x}$.

A sexta propriedade determina que partículas de diferentes posições mas com a mesma distância tenham a mesma influência.

A sétima propriedade assegura que, quando o comprimento de suavização tende a zero, o valor da aproximação se aproxima ao valor da função, ou seja, $\langle f(\mathbf{x}) \rangle = f(\mathbf{x})$.

Se a função núcleo satisfizer as propriedades listadas acima, pode-se garantir que o erro de aproximação da função é de segunda ordem. Admitindo que $f(\mathbf{x})$ é diferenciável e usando a expansão em série de Taylor de $f(\mathbf{x}')$ em torno de $\mathbf{x}$, obtêm-se:

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} [f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + O((\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2)] W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' \quad (4.7)$$

sendo $O((\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2)$ o resíduo da série de Taylor.

Aplicando a distributiva do lado direito da equação (4.7) e sabendo que a integral da soma é a soma das integrais pode-se reescrevê-la da seguinte forma:

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = f(\mathbf{x}) \int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' + f'(\mathbf{x}) \int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' + O((\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2). \quad (4.8)$$

Usando a segunda e a sexta propriedades na equação (4.8) tem-se:

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = f(\mathbf{x}) + O((\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2).$$

Assim conclui-se que o erro de aproximação é de segunda ordem.

4.4 Consistência do Núcleo

Uma maneira de verificar a consistência do MPM é usando a expansão em série de Taylor como se faz no MDF. Esta análise é considerada sobre as aproximações contínuas, obtidas pelas representações integrais de uma função e de suas derivadas. Para que o núcleo seja consistente, algumas propriedades devem ser satisfeitas de tal forma que as aproximações tenham certa ordem de precisão.

4.4.1 Aproximação de uma função

Dada uma função f , a convolução dessa função por um núcleo W define a representação integral da função f .

$$f(\mathbf{x}) := \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}'. \quad (4.9)$$

Supondo que f é de classe C^∞ , a expansão da serie de Taylor em torno do ponto $\mathbf{x}$ é dada por:

$$f(\mathbf{x}') = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k h^k f^{(k)}(\mathbf{x})}{k!} \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{h} \right)^k + O \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{h} \right)^{n+1}. \quad (4.10)$$

Substituindo a serie de Taylor (4.10) na representação integral (4.9), obtêm-se:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k h^k f^{(k)}(\mathbf{x})}{k!} \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{h} \right)^k + O \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{h} \right)^{n+1} \right) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' \\ \Rightarrow f(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k h^k f^{(k)}(\mathbf{x})}{k!} \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{h} \right)^k \right) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' + O \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{h} \right)^{n+1} \\ \Rightarrow f(\mathbf{x}) &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k h^k f^{(k)}(\mathbf{x})}{k!} \int_{\Omega} \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{h} \right)^k W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' + O \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{h} \right)^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^n A_k f^{(k)}(\mathbf{x}) + O \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{h} \right)^{n+1}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

sendo

$$A_k = \frac{(-1)^k h^k}{k!} \int_{\Omega} \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{h} \right)^k W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}'. \quad (4.12)$$

Comparando o lado esquerdo com o lado direito da equação (4.11), para $f(\mathbf{x})$ ter uma aproximação de ordem n , os coeficientes A_k devem ser iguais as contra partes de $f^{(k)}(\mathbf{x})$ do lado esquerdo da equação (4.11). Portanto, as seguintes condições para a função núcleo W são obtidas.

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = \int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' = 1 \\ A_1 = -h \int_{\Omega} \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{h} \right) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' = 0 \\ A_2 = \frac{h^2}{2!} \int_{\Omega} \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{h} \right)^2 W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' = 0 \\ \vdots \\ A_n = \frac{(-1)^n h^n}{n!} \int_{\Omega} \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{h} \right)^n W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' = 0 \end{array} \right. \quad (4.13)$$

As condições da equação (4.13) podem ser reescritas nas seguintes expressões em termos de momentos M_k da função núcleo

$$\left\{ \begin{array}{l} M_0 = \int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' = 1 \\ M_1 = \int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' = 0 \\ M_2 = \int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' = 0 \\ \vdots \\ M_n = \int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^n W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' = 0 \end{array} \right. \quad (4.14)$$

Note que na equação (4.14) o M_0 é a propriedade de normalização e o M_1 é satisfeito pela propriedade de simetria da função núcleo. Se os dois primeiros momentos ocorrem então será garantida a propriedade que $f(\mathbf{x})$ é recuperada com ordem 2.

4.4.2 Aproximação das derivadas de uma função

Nas equações de Navier-Stokes tem-se que a derivada de maior ordem é de segunda ordem. Assim, serão discutidas as aproximações da primeira e segunda derivadas de uma função. Mas esta abordagem pode ser facilmente estendida para aproximar derivada de ordem superior.

O teorema da divergência (teorema de Gauss) será muito utilizado a partir de agora, sendo assim o enunciado na sua forma mais geral cuja a demonstração pode ser encontrada em [13] é:

Teorema 1 *Seja $v = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$ um campo de vetores num domínio D do espaço; suponha que L, M e N são contínuas, com derivadas contínuas em D . Seja S uma superfície suave por partes em D , formando toda a fronteira de uma região fechada limitada R contida em D . Seja $\mathbf{n}$ o vetor normal exterior de S em relação a R . Nessas condições, vale*

$$\iint_S v \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_R \nabla \cdot v dx dy dz.$$

4.4.3 Primeira derivada

A representação integral da primeira derivada pode ser obtida através da convolução da derivada da função f com a função núcleo W .

$$f'(\mathbf{x}) := \int_{\Omega} f'(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}'. \quad (4.15)$$

Aplicando a integração por partes na equação (4.15), obtêm-se:

$$\begin{aligned} f'(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}')W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) - \int_{\Omega} f(\mathbf{x}')W'(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h)d\mathbf{x}' \\ \Rightarrow f'(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} \frac{d}{d\mathbf{x}'}(f(\mathbf{x}')W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h))d\mathbf{x}' - \int_{\Omega} f(\mathbf{x}')W'(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h)d\mathbf{x}'. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Aplicando o teorema da divergência no primeiro termo da equação 4.16 tem-se:

$$f'(\mathbf{x}) = \int_S f(\mathbf{x}')W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) \cdot \mathbf{n}dS - \int_{\Omega} f(\mathbf{x}')W'(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h)d\mathbf{x}'. \quad (4.17)$$

Portanto, no primeiro termo do lado direito da equação (4.17) obtêm uma integral de superfície, sendo $S = \partial\Omega$ a superfície e $\mathbf{n}$ o vetor normal unitário a superfície S . Substituindo a equação (4.10) na segunda integral da equação (4.17) tem-se:

$$\begin{aligned} f'(\mathbf{x}) &= \int_S f(\mathbf{x}')W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) \cdot \mathbf{n}dS - \int_{\Omega} \left[\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k h^k f^{(k)}(\mathbf{x})}{k!} \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{h} \right)^k \right. \\ &\quad \left. + O\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{h} \right)^{n+1} \right] W'(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h)d\mathbf{x}' \\ \Rightarrow f'(\mathbf{x}) &= \int_S f(\mathbf{x}')W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) \cdot \mathbf{n}dS \\ &\quad - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k h^k f^{(k)}(\mathbf{x})}{k!} \int_{\Omega} \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{h} \right)^k W'(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h)d\mathbf{x}' \\ &\quad + O\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{h} \right)^{n+1} \\ \Rightarrow f'(\mathbf{x}) &= \int_S f(\mathbf{x}')W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) \cdot \mathbf{n}dS - \sum_{k=0}^n \bar{A}_k f^{(k)}(\mathbf{x}) + O\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{h} \right)^{n+1}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

sendo

$$\bar{A}_k = \frac{(-1)^k h^k}{k!} \int_{\Omega} \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{h} \right)^k W'(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h)d\mathbf{x}'. \quad (4.19)$$

Os momentos da derivada do núcleo são dados por $\bar{M}_k$ e se as relações (4.20) e (4.21) são satisfeitas, então $f'(\mathbf{x})$ é recuperada com ordem n .

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{M}_0 = \int_{\Omega} W'(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h)d\mathbf{x}' = 0 \\ \bar{M}_1 = \int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')W'(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h)d\mathbf{x}' = 1 \\ \bar{M}_2 = \int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 W'(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h)d\mathbf{x}' = 0 \\ \vdots \\ \bar{M}_n = \int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^n W'(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h)d\mathbf{x}' = 0 \end{array} \right. \quad (4.20)$$

e

$$W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h)|_S = 0. \quad (4.21)$$

A restrição (4.21) implica que a integral de superfície é nula para qualquer função.

$$\int_S f(\mathbf{x}) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

A primeira expressão da equação (4.20) é na verdade uma outra forma da representação de (4.21) como pode se confirmar pelo seguinte desenvolvimento.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (1) W'(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' &= \int_S 1 W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\Omega} (1)' W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' \\ \Rightarrow \int_{\Omega} (1) W'(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' &= \int_S 1 W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) \cdot \mathbf{n} dS = 0. \end{aligned}$$

As demais relações podem ser escrita da seguinte forma:

$$\overline{M}_k = k M_{k-1} \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n.$$

De fato,

$$\begin{aligned} M_k &= \int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^k W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' = -\frac{1}{(k+1)} \int_{\Omega} [(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^{k+1}]' W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' \\ &= -\frac{1}{(k+1)} \int_S (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^{k+1} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) \cdot \mathbf{n} dS \\ &\quad + \frac{1}{(k+1)} \int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^{k+1} W'(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' = \frac{1}{k+1} \overline{M}_{k+1}. \end{aligned}$$

Desse modo pode-se verificar as demais relações. Sabendo que a condição M_0 é satisfeita tem-se $\overline{M}_1$ também é satisfeita. Portanto, pode-se concluir que $f'(\mathbf{x})$ é recuperada com ordem 2.

4.4.4 Segunda derivada

A representação integral da segunda derivada pode ser obtida através da convolução da segunda derivada da função f com a função núcleo W .

$$f''(\mathbf{x}) := \int_{\Omega} f''(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}'. \quad (4.22)$$

Aplicando a integração por partes na equação (4.22) e fazendo algumas manipulações, obtêm-se:

$$f''(\mathbf{x}) = \int_S f'(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\Omega} f'(\mathbf{x}') W'(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}'. \quad (4.23)$$

Aplicando novamente a integração por partes no segundo termo do lado direito da equação (4.23) e fazendo algumas manipulações, tem-se:

$$f''(\mathbf{x}) = \int_S f'(\mathbf{x}')W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) \cdot \mathbf{n} dS - \left[\int_S f(\mathbf{x}')W'(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) \cdot \mathbf{n} dS - \int_\Omega f'(\mathbf{x}')W'(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' \right]. \quad (4.24)$$

Substituindo (4.10) no terceiro termo do lado direito da equação (4.24) resulta em:

$$f''(\mathbf{x}) = \int_S f'(\mathbf{x}')W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) \cdot \mathbf{n} dS - \int_S f(\mathbf{x}')W'(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) \cdot \mathbf{n} dS + \sum_{k=0}^n \bar{\bar{A}}_k f^{(k)}(\mathbf{x}) + O\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{h}\right)^{n+1}, \quad (4.25)$$

sendo

$$\bar{\bar{A}}_k = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k h^k f^{(k)}(\mathbf{x})}{k!} \int_\Omega \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{h}\right)^k W''(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}'. \quad (4.26)$$

Os momentos da segunda derivada do núcleo são dados por $\bar{\bar{M}}_k$. Se as relações (4.27), (4.28) e (4.29) são satisfeitas, então $f''(\mathbf{x})$ é recuperada com ordem n .

$$\begin{cases} \bar{\bar{M}}_0 &= \int_\Omega W''(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' = 0 \\ \bar{\bar{M}}_1 &= \int_\Omega (\mathbf{x} - \mathbf{x}') W''(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' = 0 \\ \bar{\bar{M}}_2 &= \int_\Omega (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 W''(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' = 2, \\ &\vdots \\ \bar{\bar{M}}_n &= \int_\Omega (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^n W'(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' = 0 \end{cases} \quad (4.27)$$

$$W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h)|_S = 0 \quad (4.28)$$

e

$$W'(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h)|_S = 0 \quad (4.29)$$

As condições (4.28) e (4.29) determinam que as integrais de superfície da equação (4.25) sejam nulas para qualquer função arbitrária. A primeira expressão da equação (4.27) é na verdade outra forma da representação de (4.29) como pode ser confirmado da seguinte forma.

$$\begin{aligned} \int_\Omega 1 W''(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' &= \int_S 1 W'(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) \cdot \mathbf{n} dS - \int_\Omega (1)' W'(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' \\ &= \int_S 1 W'(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) \cdot \mathbf{n} dS = 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

As demais relações da equação (4.27) podem ser reescritas como:

$$\bar{\bar{M}}_k = k \bar{\bar{M}}_{k-1} \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n. \quad (4.31)$$

De fato,

$$\begin{aligned}
M_k &= \int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^k W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' = -\frac{1}{(k+1)} \int_{\Omega} [(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^{k+1}]' W'(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' \\
&= -\frac{1}{(k+1)} \left[\int_S (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^{k+1} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^{k+1} W'(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' \right] \\
&= \frac{1}{(k+1)} \int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^{k+1} W'(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' \\
&= -\frac{1}{(k+1)(k+2)} \int_{\Omega} [(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^{k+2}]' W'(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' \\
&= -\frac{1}{(k+1)(k+2)} \left[\int_S (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^{k+2} W'(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) \cdot \mathbf{n} dS \right. \\
&\quad \left. - \int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^{k+2} W''(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' \right] \\
&= \frac{1}{(k+1)(k+2)} \int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^{k+2} W''(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' = \frac{1}{(k+1)(k+2)} \overline{\overline{M}}_{k+2}.
\end{aligned}$$

Portanto, pode-se verificar as demais relações através da equação (4.29). Os momentos $\overline{\overline{M}}_0$, $\overline{\overline{M}}_1$ e $\overline{\overline{M}}_2$ são satisfeitos, conclui-se que $f''(\mathbf{x})$ é recuperada com ordem 3.

Em resumo, para que a função e suas duas primeiras derivadas obtenham uma precisão de ordem n , a função núcleo deve satisfazer as equações (4.14), (4.26) e (4.27). Note que, estas condições podem ser utilizadas para construir as funções núcleo.

O conceito de consistência dos métodos de elementos finitos (MEF) também pode ser aplicado ao método de partículas. Para garantir a convergência, a função na forma MDF deve satisfazer um certo grau de consistência. É conhecido que o grau de consistência é frequentemente caracterizado pela maior ordem polinomial que pode ser exatamente reproduzida usando uma função base [16]. Pode-se mostrar que a representação integral reproduz exatamente polinômios de grau menor ou igual a n desde que as condições (4.13) sejam satisfeitas pela função núcleo. Para mais detalhes ver [19].

4.5 Consistência da aproximação por partículas

Na seção anterior foi apresentado o conceito de consistência para as representações integrais. No entanto, os MPMs além de ter a aproximação pela função núcleo, possuem também a aproximação por partículas, dessa forma não se pode utilizar somente a consistência do núcleo dada pela seção anterior.

O problema de acordo com Morris [26] e Belytschko et. al. [3] é que nas aproximações por partículas os momentos da equação (4.14) não são satisfeitos. Esse problema é conhecido como inconsistência de partículas. A versão discreta da equação (4.14) é dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^N W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j; h) \Delta v_j = 1 \\ \sum_{j=1}^N (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j; h) \Delta v_j = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^N (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)^n W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j; h) \Delta v_j = 0 \end{array} \right. \quad (4.32)$$

sendo N o número de partículas que pertencem ao suporte compacto da partícula localizada em $\mathbf{x}$.

Estas condições de consistência nem sempre são satisfeitas, pois nem sempre há uma distribuição uniforme das partículas e livre da fronteira Figura 4.2(a). Um exemplo simples que ocorre é quando há intersecção entre o suporte compacto e a fronteira do domínio, mesmo para uma distribuição uniforme de partículas Figura 4.2(b). Isso ocorre pois há apenas a influência das partículas que estão dentro do domínio do problema, logo a primeira expressão da equação (4.32) é diferente de 1, e as demais expressões da equação não serão zero, devido ao truncamento da função núcleo no contorno.

Um outro exemplo é quando as partículas são distribuídas irregularmente. Neste caso, até as partículas cujo o suporte compacto não intercepta a fronteira do domínio, podem não satisfazer a condição de consistência, Figura 4.2(c).

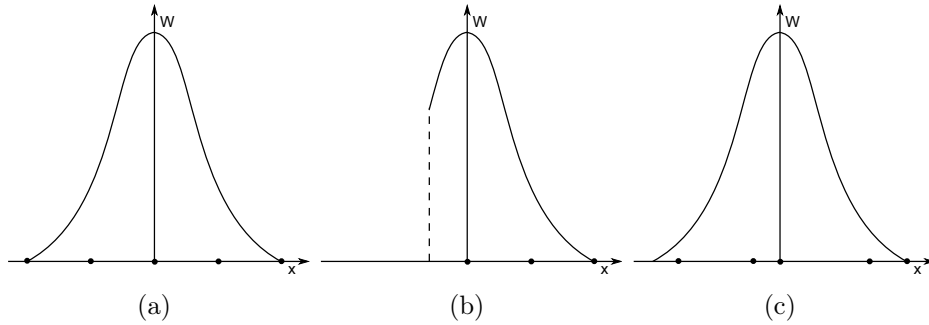


Figura 4.2: As partículas são representada pelos pontos e a linha tracejada representa a fronteira. Amostragem densa de partículas no suporte compacto (a); O suporte compacto intercepta a fronteira do domínio (b); uma distribuição irregular de partículas no suporte compacto. Fonte [28]

Existem diversas maneiras para restaurar a condição de consistência para a forma discreta. Liu, Liu e Lam [18] propõem uma construção de uma função núcleo polinomial de grau n da seguinte forma:

$$\begin{aligned} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) &= b_0(\mathbf{x}, h) + b_1(\mathbf{x}, h) \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_j}{h} \right) + b_2(\mathbf{x}, h) \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_j}{h} \right)^2 + \dots \\ \Rightarrow W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) &= \sum_{I=0}^k b_I(\mathbf{x}, h) \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_j}{h} \right)^I. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Depois de algumas transformações, a forma discreta dos momentos da função (4.32) pode ser escrita como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^N b_I(\mathbf{x}, h) \left[\sum_{I=0}^k \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_k}{h} \right)^I \right] \Delta v_j = 1 \\ \sum_{j=1}^N b_I(\mathbf{x}, h) \left[\sum_{I=0}^k \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_k}{h} \right)^{I+1} \right] \Delta v_j = 0, \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^N b_I(\mathbf{x}, h) \left[\sum_{I=0}^k \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_k}{h} \right)^{I+n} \right] \Delta v_j = 0 \end{array} \right. \quad (4.34)$$

deixando

$$m_k(\mathbf{x}, h) = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_j}{h} \right)^k \Delta v_j, \quad (4.35)$$

os coeficientes $b_I(\mathbf{x}, h)$ podem ser então determinados resolvendo o seguinte sistema

$$\begin{bmatrix} m_0(\mathbf{x}, h) & m_1(\mathbf{x}, h) & \cdots & m_k(\mathbf{x}, h) \\ m_1(\mathbf{x}, h) & m_2(\mathbf{x}, h) & \cdots & m_{k+1}(\mathbf{x}, h) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_k(\mathbf{x}, h) & m_{k+1}(\mathbf{x}, h) & \cdots & m_{k+k}(\mathbf{x}, h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0(\mathbf{x}, h) \\ b_1(\mathbf{x}, h) \\ \vdots \\ b_k(\mathbf{x}, h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Depois de determinar os coeficientes $b_I(\mathbf{x}, h)$, o núcleo polinomial da equação (4.33) determina uma aproximação com consistência de ordem k . No entanto, alguns problemas podem surgir tais como:

- A função núcleo resultante pode ser negativa em algumas partes da região, o que pode conduzir a representação não física de algumas variáveis, tais como densidade e energia negativa, o que não faz sentido.
- A função núcleo pode não ser decrescente com o aumento da distância das partículas.
- A função pode não ser simétrica.

Smoothed Particle Hydrodynamics

As soluções de EDPs são de extrema importância em diversas áreas, tais como engenharia, meteorologia, oceanografia entre outras áreas, pois auxiliam na compreensão de fenômenos naturais modelados matematicamente por um conjunto de EDPs. Devido a complexidade destas equações raramente encontra-se uma solução analítica para os modelos matemáticos, sendo assim recorre-se a uma solução numérica para compreender os fenômenos modelados.

Para se obter uma solução numérica precisa-se aproximar as operações diferenciais presentes no modelo matemático, em representações discretas. Assim, o modelo é aproximado por um conjunto de equações algébricas ou de equações diferenciais ordinárias (EDOs), as quais podem ser resolvidas usando algum método já conhecido.

Neste capítulo será apresentado o *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH) [19] [29] [28].

5.1 Método SPH

O método SPH foi desenvolvido em 1977 por Gigold e Monaghan [12] e independentemente por Lucy [20], para resolver problemas astrofísicos e desde então tem sido estudado e melhor entendido para ser aplicado em uma variedade de problemas incluindo as equações de Navier-Stokes.

Originalmente o SPH mostrou-se bastante adequado para simulação de escoamentos de fluidos compressíveis, mas para fluidos incompressíveis o método se mostrou ineficiente. Neste sentido, o método SPH foi sendo aperfeiçoado para resolver problemas de fluidos incompressíveis. A primeira estratégia adotada por Monaghan [22] foi considerar fluidos quase-incompressíveis, o método foi denominado de WCSPH (*Weakly Compressible Smoothed Particle Hydrodynamics*). Uma outra estratégia adotada por Cummins e Rudman [9] baseia-se no método da projeção. Eles introduziram uma nova estratégia no cálculo da pressão através de uma equação de Poisson e considera a densidade fixa das partículas, tal método é chamado de ISPH (*Incompressible Smoothed Particle Hydrodynamics*).

A discretização do método se dá por meio de um conjunto de partículas, definidas como pontos do espaço, aos quais também são associadas outras propriedades individuais relacionadas à física do fenômeno simulado, tais como temperatura, densidade, massa, etc. Como o método é discretizado por um conjunto de partículas, a massa do sistema é trivialmente conservada, ou seja, não ocorre o problema de difusão numérica. Outro ponto positivo é que as partículas da discretização não possuem conectividade; outras

vantagens são a boa captura de superfície livre ou interface entre dois fluidos, tarefa esta bastante difícil para os métodos que utilizam malhas [19].

5.2 Operadores SPH

Para se obter uma solução aproximada das EDPs é preciso aproximar alguns operadores como: o divergente, o gradiente e o laplaciano. Nesta seção serão desenvolvidos alguns operadores do método SPH encontrados na literatura. Alguns operadores são apresentados em [29].

5.2.1 Operador Divergente

A primeira aproximação do divergente de uma função $\mathbf{f}$ é obtida da seguinte forma:

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} [\nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}')] W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}'. \quad (5.1)$$

Substituindo a identidade $W \nabla \cdot \mathbf{f} = \nabla \cdot [\mathbf{f}W] - \mathbf{f} \cdot \nabla W$ na equação (5.1) tem-se:

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle &= \int_{\Omega} [\nabla \cdot [\mathbf{f}(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h)] - \mathbf{f}(\mathbf{x}') \cdot \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h)] d\mathbf{x}' \\ \Rightarrow \langle \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle &= \int_{\Omega} \nabla \cdot [\mathbf{f}(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h)] d\mathbf{x}' - \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}') \cdot \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}'. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Aplicando o teorema da divergência no primeiro termo do lado direito da equação (5.2) obtêm-se:

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}') \rangle = \int_S \mathbf{f}(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}') \cdot \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' \quad (5.3)$$

onde $\mathbf{n}$ é o vetor unitário normal a superfície S .

Quando o domínio de suporte da função núcleo W situa-se dentro do domínio do problema, a integral de superfície da equação (5.3) é zero. Se o domínio do suporte excede o domínio do problema a função núcleo W é truncada na fronteira e a integral de superfície já não é zero. Sob tais circunstâncias, modificações devem ser feitas para remediar os efeitos da fronteira, se a integral de superfície é tratada como zero na equação (5.3).

Portanto para os pontos cujo domínio de suporte está dentro do domínio do problema (5.3) é simplificado da seguinte forma:

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle = - \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}') \cdot \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}'. \quad (5.4)$$

Pode-se observar que a operação diferencial na função $\mathbf{f}$ é transmitida para uma operação diferencial sobre a função núcleo. A equação (5.4) será chamada de operador divergente SPH I.

O operador divergente SPH I na sua forma discreta é:

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) \rangle = - \sum_{j \in V_i} \frac{m_j}{\rho_j} \mathbf{f}(\mathbf{x}_j) \cdot \nabla_j W_{ij}, \quad (5.5)$$

sendo $W_{ij} = W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j; h)$.

Observe que na equação (5.5) o gradiente do núcleo ∇W está em relação a partícula j , então usando a propriedade de simetria no núcleo tem-se:

$$\nabla_i W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j; h) = \frac{\mathbf{x}_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} = - \left(-\frac{\mathbf{x}_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \right) = -\nabla_j W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j; h),$$

sendo $\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ e $r_{ij} = |\mathbf{x}_{ij}|$. Portanto, a equação (5.5) pode ser reescrita como:

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) \rangle = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \mathbf{f}(\mathbf{x}_j) \cdot \nabla_i W_{ij}. \quad (5.6)$$

Monaghan [23] utilizou as identidades:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{f}) = \rho \nabla \cdot \mathbf{f} + \mathbf{f} \cdot \nabla \rho, \quad (5.7)$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{f}}{\rho} \right) = \frac{\rho \nabla \cdot \mathbf{f} - \mathbf{f} \cdot \nabla \rho}{\rho^2} \quad (5.8)$$

para obter novas aproximações para o operador divergente do método SPH. Estas duas identidades podem ser reescritas como:

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{1}{\rho} [\nabla \cdot (\rho \mathbf{f}) - \mathbf{f} \cdot \nabla \rho] \quad (5.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \rho \left[\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{f}}{\rho} \right) + \frac{\mathbf{f}}{\rho^2} \cdot \nabla \rho \right]. \quad (5.10)$$

Substituindo as identidades (5.9) e (5.10) na equação (5.1) obtêm-se, respectivamente:

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) \rangle &= \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \int_{\Omega} [\nabla \cdot (\rho \mathbf{f}(\mathbf{x}'))] W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' \\ &\quad - \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x})}{\rho(\mathbf{x})} \cdot \int_{\Omega} [\nabla \rho] W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (5.11)$$

e

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) \rangle &= \rho(\mathbf{x}') \left[\int_{\Omega} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}')}{\rho(\mathbf{x}')} \right) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}')}{\rho(\mathbf{x})^2} \cdot \int_{\Omega} \nabla \rho(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' \right]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Logo o mesmo procedimento para obter a equação (5.6) é aplicado no termo do divergente e do gradiente do lado direito das equações (5.11) e (5.12). Note que, a aproximação do operador gradiente ainda não foi desenvolvida, mas tal resultado é encontrada na próxima seção. Assim, tem-se respectivamente:

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle = -\frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}') [\mathbf{f}(\mathbf{x}') - \mathbf{f}(\mathbf{x})] \cdot \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' \quad (5.13)$$

e

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle = -\rho(\mathbf{x}) \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}') \left[\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}')}{\rho(\mathbf{x}')^2} + \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x})}{\rho(\mathbf{x})^2} \right] \cdot \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}'. \quad (5.14)$$

As formas discretas de (5.13) e (5.14) após algumas manipulações são dadas respectivamente por:

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) \rangle = \frac{1}{\rho_i} \left[\sum_{j \in V_i} m_j (f(\mathbf{x}_j) - f(\mathbf{x}_i)) \cdot \nabla_i W_{ij} \right], \quad (5.15)$$

e

$$\langle \nabla \cdot f(\mathbf{x}_i) \rangle = \rho_i \left[\sum_{j \in V_i} m_j \left(\frac{f(\mathbf{x}_j)}{\rho_j^2} + \frac{f(\mathbf{x}_i)}{\rho_i^2} \right) \cdot \nabla_i W_{ij} \right]. \quad (5.16)$$

A equação (5.15) será chamada de operador divergente SPH II e a equação (5.16) de operador divergente SPH III. Uma característica desses dois operadores discretos é que a interação entre partículas aparecem explicitamente.

5.2.2 Operador Gradiente

A primeira aproximação do gradiente de uma função f é obtida da seguinte forma:

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} [\nabla f(\mathbf{x}')] W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}'. \quad (5.17)$$

Integrando por partes o lado direito da equação (5.17) tem-se:

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(\mathbf{x}) \rangle &= f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' \\ \Rightarrow \langle \nabla f(\mathbf{x}) \rangle &= \int_{\Omega} \nabla \cdot [f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h)] d\mathbf{x}' - \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}'. \end{aligned} \quad (5.18)$$

A partir disso, pode-se aplicar o teorema da divergência para representar a primeira integral do lado direito da equação (5.18), de modo que se torne uma integral de superfície.

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}) \rangle = \int_S f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}'. \quad (5.19)$$

Análogo ao caso do operador divergente, quando o suporte da função núcleo W situa-se dentro do domínio do problema, a integral de superfície da equação (5.19) é zero. Se o domínio do suporte excede o domínio do problema a função núcleo W é truncada na fronteira e a integral de superfície já não é zero. Sob tais circunstâncias as modificações devem ser feitas para remediar os feitos da fronteira, de tal modo que devemos tomar operador gradiente SPH como:

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}) \rangle = - \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}'. \quad (5.20)$$

A equação (5.20) é o operador gradiente SPH I, sendo sua forma discreta dada por:

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}_i) \rangle = \sum_{j \in V_i} \frac{m_j}{\rho_j} f(\mathbf{x}_j) \nabla_i W_{ij}. \quad (5.21)$$

De uma forma análoga ao operador divergente tem-se as seguintes identidades para o gradiente.

$$\begin{aligned} \nabla f &= \frac{1}{\rho} [\nabla(\rho f) - f \nabla \rho], \\ \nabla f &= \rho \left[\nabla \left(\frac{f}{\rho} \right) + \frac{f}{\rho^2} \nabla \rho \right]. \end{aligned}$$

Com o mesmo raciocínio utilizado para obter os operadores divergentes, obtêm-se os seguintes operadores gradiente:

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}_i) \rangle = \frac{1}{\rho_i} \left[\sum_{j \in V_i} m_j (f(\mathbf{x}_j) - f(\mathbf{x}_i)) \nabla_i W_{ij} \right], \quad (5.22)$$

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}_i) \rangle = \rho_i \left[\sum_{j \in V_i} m_j \left(\frac{f(\mathbf{x}_j)}{\rho_j^2} + \frac{f(\mathbf{x}_i)}{\rho_i^2} \right) \nabla_i W_{ij} \right]. \quad (5.23)$$

A equação (5.22) será chamada de operador gradiente SPH II e a equação (5.23) de operador gradiente SPH III.

5.2.3 Operador Laplaciano

A primeira aproximação do Laplaciano de uma função f em SPH é obtida da seguinte forma:

$$\langle \nabla^2 f(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} [\nabla^2 f(\mathbf{x}')] W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}'. \quad (5.24)$$

Aplicando duas vezes a integração por partes têm-se:

$$\begin{aligned} \langle \nabla^2 f(\mathbf{x}) \rangle &= W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) \nabla f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}') \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) + \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \nabla^2 W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' \\ \langle \nabla^2 f(\mathbf{x}') \rangle &= \int_{\Omega} [\nabla \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) \nabla f(\mathbf{x}')] d\mathbf{x}' - \int_{\Omega} \nabla \cdot [f(\mathbf{x}') \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h)] d\mathbf{x}' \\ &\quad + \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \nabla^2 W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}'. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Aplicando o teorema da divergência para representar a primeira e a segunda integral do lado direito da equação (5.25), de modo que as torne em integrais de superfície, obtêm-se

$$\begin{aligned} \langle \nabla^2 f(\mathbf{x}) \rangle &= \int_S W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) \nabla f(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{n} dS - \int_S f(\mathbf{x}') \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) \cdot \mathbf{n} dS \\ &\quad + \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \nabla^2 W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}'. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Neste caso será exigido não só que o suporte da função núcleo seja compacto, mas que o gradiente da função núcleo também tenha suporte compacto, então se o suporte está dentro do domínio do problema, as integrais de superfície da equação (5.26) são zero. De modo análogo aos operadores gradiente e divergente se o suporte excede o domínio do problema a função núcleo é truncada na fronteira e a integral de superfície já não é zero.

Portanto, para os pontos, cujo domínio de suporte está dentro do domínio do problema a equação (5.26) é simplificado da seguinte forma:

$$\langle \nabla^2 f(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \nabla^2 W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}'. \quad (5.27)$$

A equação (5.27) será chamado de operador laplaciano SPH I, sendo sua forma discreta dada por:

$$\langle \nabla^2 f(\mathbf{x}) \rangle = \sum_{j \in V_i} \frac{m_j}{\rho_j} f(\mathbf{x}') \nabla_i^2 W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h). \quad (5.28)$$

Lembrando que o operador laplaciano é o divergente do gradiente ($\nabla^2 = \nabla \cdot (\nabla f)$), pode-se obter uma aproximação para o laplaciano definindo uma propriedade $g = \nabla f$.

Para isso utiliza-se um dos operadores divergente SPH e obtêm-se uma aproximação para $\nabla \cdot g$, depois utiliza-se uma das aproximações do operador gradiente SPH para aproximar g . Como exemplo, pode-se usar os operadores gradiente e divergente SPH (5.22) e (5.15). Desta forma, obtêm-se o seguinte operador laplaciano SPH II dado pela seguinte expressão:

$$\langle \nabla^2 f(\mathbf{x}_i) \rangle = \frac{1}{\rho_i} \left[\sum_{j \in V_i} m_j (\nabla f(\mathbf{x}_j) - (\nabla f(\mathbf{x}_i))) \cdot \nabla_i W_{ij} \right] \quad (5.29)$$

sendo,

$$(\nabla f(\mathbf{x}_k)) = \frac{1}{\rho_k} \left[\sum_{l \in V_k} m_l (f(\mathbf{x}_l) - f(\mathbf{x}_k)) \nabla_k W_{kl} \right].$$

Uma desvantagem dessa aproximação é a necessidade de realizar para cada partícula dois somatórios para obter a aproximação do operador laplaciano. Uma maneira de contornar esse problema é usar aproximação baseada na série de Taylor. Para uma função $f(\mathbf{x}')$, sendo $\mathbf{x}' = (x, y)$, a série de Taylor, até os termos de segunda ordem, sobre um ponto $\mathbf{x} = (a, b)$, é dada por:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(a, b) + (x - a) \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y - b) \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \\ &+ \frac{1}{2} \left((x - a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + (y - b)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \right) \\ &+ (x - a)(y - b) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + O(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Da equação (5.30), desprezando os termos de ordem superior a dois, obtêm-se uma aproximação para a função f , dada por:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(a, b) + (x - a) \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y - b) \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \\ &+ \frac{1}{2} \left((x - a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + (y - b)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \right) \\ &+ (x - a)(y - b) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Utilizando as propriedades de simetria e normalização do núcleo W , Monaghan e Cleary [25] mostraram em seu artigo os seguintes resultados:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' = 0$$

e

$$\int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')_i (\mathbf{x} - \mathbf{x}')_j \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}' = \delta_{ij},$$

sendo δ_{ij} o *Delta de Kronecher*, definido por:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

Portanto, multiplicando a expressão (5.27) por:

$$\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h),$$

integrando-a e aplicando os resultados de Monaghan e Cleary, obtêm-se o seguinte operador laplaciano:

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = 2 \int_{\Omega} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) d\mathbf{x}'. \quad (5.32)$$

A equação (5.32) será chamada de operador laplaciano SPH III, sendo a sua forma discreta dada pela seguinte expressão:

$$\langle \nabla^2 f(\mathbf{x}_i) \rangle = 2 \sum_{j \in V_i} \frac{m_j}{\rho_j} \frac{f(\mathbf{x}_i) - f(\mathbf{x}_j)}{r_{ij}^2} \mathbf{x}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}. \quad (5.33)$$

Uma das vantagens dessa aproximação é o cálculo direto do operador laplaciano, isto é, não há necessidade de calcular outras aproximações.

5.3 Funções Núcleos SPH

As funções núcleos são de extrema importância, pois não somente determinam o padrão da aproximação, como também definem a dimensão do suporte de influência, a consistência e a precisão. Como a função núcleo é simétrica tem-se a seguinte relação:

$$\nabla W(\bar{\mathbf{x}}) = W'(\tilde{x}) \frac{\bar{\mathbf{x}}}{\tilde{x}} = -W'(|-\bar{\mathbf{x}}|) \frac{-\bar{\mathbf{x}}}{|-\bar{\mathbf{x}}|} = -\nabla W(-\bar{\mathbf{x}}),$$

sendo $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$, $\tilde{x} = |\bar{\mathbf{x}}|$ e $W'(\tilde{x})$ é a derivada de W em relação a $\tilde{x}$.

Na prática é mais útil usar a mudança de variável

$$R = \frac{\tilde{x}}{h} = \frac{|\bar{\mathbf{x}}|}{h} = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{h}.$$

Defini-se então a função núcleo da seguinte forma:

$$W(\tilde{x}) = \frac{\alpha_{w,n}}{h^n} w(R),$$

sendo w uma função definida sobre $\mathbb{R}^+$, suficientemente regular e que seja continuamente derivável e $\alpha_{w,n}$ é uma constante de normalização, que é claro depende de W e n , (ver [32]).

O gradiente da função núcleo passa a ser expresso em relação a derivada de w , assim tem-se:

$$\nabla W(\tilde{x}) = \frac{\alpha_{w,n}}{h^n} \frac{\partial w(R)}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\alpha_{w,n}}{h^n} \frac{dw(R)}{dR} \frac{1}{h} \frac{\partial |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\alpha_{w,n}}{h^{n+1}} w'(R) \frac{\bar{\mathbf{x}}}{\tilde{x}}.$$

Em uma dimensão, a primeira derivada da função núcleo é:

$$W'(\tilde{x}) = \frac{\alpha_{w,n}}{h^{n+1}} w'(R).$$

As derivadas de ordem superior obedecem a uma lei idêntica:

$$W^{(k)}(\tilde{x}) = \frac{\alpha_{w,n}}{h^{n+k}} w^{(k)}(R).$$

Diferentes núcleos são encontrados em diversos trabalhos que utilizam o método SPH.

- Lucy em seu artigo utilizou a seguinte função núcleo:

$$W(\tilde{x}) = \frac{\alpha_{L,n}}{h^n} \begin{cases} (1+3R)(1-R)^3 & 0 \leq R < 1 \\ 0 & R \geq 1 \end{cases} \quad (5.34)$$

sendo as constantes de normalização iguais a:

$$\alpha_{L,1} = 5/4; \quad \alpha_{L,2} = 5/\pi \text{ e } \alpha_{L,3} = 105/16,$$

em uma-, duas- e três-dimensões respectivamente. Sua primeira e segunda derivadas são dadas respectivamente por:

$$W'(\tilde{x}) = \frac{\alpha_{L,n}}{h^{n+1}} \begin{cases} -12R(R-1)^2 & 0 \leq R < 1 \\ 0 & R \geq 1 \end{cases}$$

e

$$W''(\tilde{x}) = \frac{\alpha_{L,n}}{h^{n+2}} \begin{cases} -36R^2 + 48R - 12 & 0 \leq R < 1 \\ 0 & R \geq 1 \end{cases}.$$

O comportamento da função núcleo e de suas duas primeiras derivadas é mostrado na Figura 5.1.

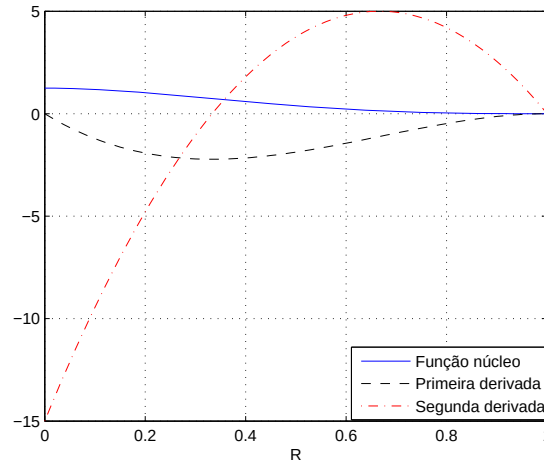


Figura 5.1: A função núcleo (5.34) usada por Lucy (1977) e suas duas primeiras derivadas.

- A função que Monaghan usou no seu trabalho em astrofísica foi a gaussiana que é dada por:

$$W(\tilde{x}) = \frac{\alpha_{G,n}}{h^n} e^{-R^2}. \quad (5.35)$$

As constantes de normalização são dadas por:

$$\alpha_{G,1} = 1/\pi^{1/2}; \quad \alpha_{G,2} = 1/\pi \text{ e } \alpha_{G,3} = 1/\pi^{3/2},$$

em uma-, duas- e três-dimensões respectivamente. Suas primeira e segunda derivadas são dadas respectivamente por:

$$W'(\tilde{x}) = \frac{\alpha_{G,n}}{h^{n+1}} (-2Re^{-R^2})$$

e

$$W''(\tilde{x}) = \frac{\alpha_{G,n}}{h^{n+2}}(-2e^{-R^2} + 4R^2e^{-R^2}).$$

Note que a função gaussiana não tem suporte compacto, mas se aproxima rapidamente de zero quando a distância entre duas partículas aumenta. O comportamento do núcleo gaussiano e de suas derivadas são mostrado pela Figura 5.2.

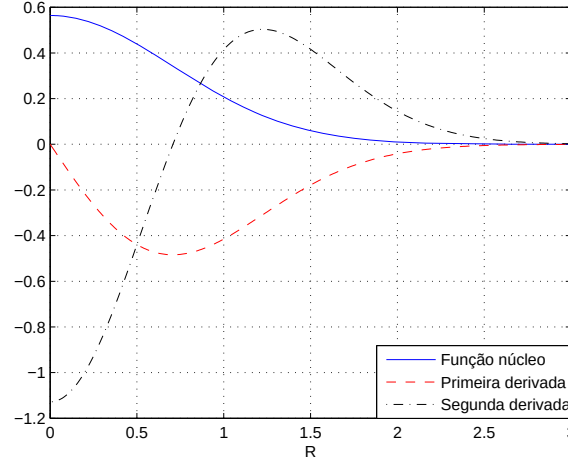


Figura 5.2: O núcleo gaussiano (5.35) usado por Monaghan (1977) e suas duas primeiras derivadas.

Outra classe de funções núcleos muito importante são os núcleos dados por funções splines. Essa classe tem sido utilizada com maior frequência como núcleos em SPH e as funções são dadas por:

- A função núcleo baseada na spline cúbica foi proposto por Monaghan e Lattanzio em (1985) [24].

$$W(\tilde{x}) = \frac{\alpha_{III,n}}{h^n} \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}R^2 + \frac{3}{4}R^3 & 0 \leq R < 1 \\ \frac{1}{4}(2-R)^3 & 1 \leq R < 2 \\ 0 & R \geq 2 \end{cases} . \quad (5.36)$$

As constantes de normalização são iguais a:

$$\alpha_{III,1} = 2/3; \quad \alpha_{III,2} = 10/7\pi \text{ e } \alpha_{III,3} = 1/\pi,$$

em uma-, duas- e três-dimensões respectivamente. Suas primeira e segunda derivadas são dadas respectivamente por:

$$W'(\tilde{x}) = \frac{\alpha_{III,n}}{h^{n+1}} \begin{cases} -3R^2 + \frac{9}{4}R^2 & 0 \leq R < 1 \\ -\frac{3}{4}(2-R)^2 & 1 \leq R < 2 \\ 0 & R \geq 2 \end{cases}$$

e

$$W''(\tilde{x}) = \frac{\alpha_{III,n}}{h^{n+2}} \begin{cases} -3 + \frac{9}{2}R & 0 \leq R < 1 \\ \frac{3}{2}(2-R) & 1 \leq R < 2 \\ 0 & R \geq 2 \end{cases} .$$

O núcleo spline cúbica tem sido bastante utilizado na literatura SPH, pois se assemelha ao núcleo gaussiano, tendo um suporte compacto. No entanto, a segunda derivada é uma função linear por partes como pode ser vista na Figura 5.3 e consequentemente as propriedades de estabilidade podem ser inferiores às que tem um núcleo mais suave.

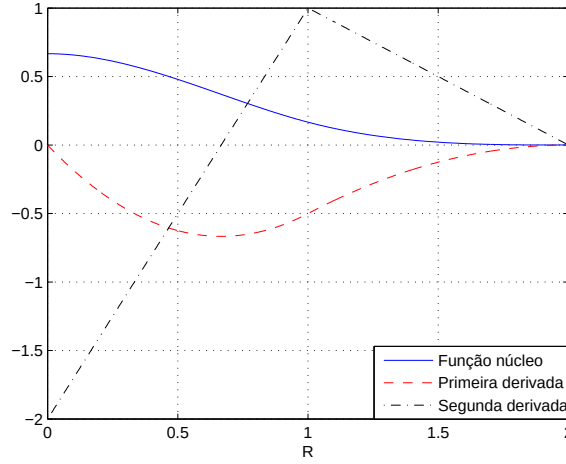


Figura 5.3: O núcleo spline cúbica (5.36) usado por Monaghan e Lattanzio (1985) e suas duas primeiras derivadas.

- A função núcleo baseada na spline quártica foi proposto por Morris (1994) [27].

$$W(\tilde{x}) = \frac{\alpha_{IV,n}}{h^n} \begin{cases} (2.5 - R)^4 - 5(1.5 - R)^4 + 10(0.5 - R)^4 & 0 \leq R < 0.5 \\ (2.5 - R)^4 - 5(1.5 - R)^4 & 0.5 \leq R < 1.5 \\ (2.5 - R)^4 & 1.5 \leq R < 2.5 \\ 0 & R \geq 2.5 \end{cases}, \quad (5.37)$$

sendo as constantes de normalização iguais a:

$$\alpha_{IV,1} = 1/24; \quad \alpha_{IV,2} = 96/1199\pi \text{ e } \alpha_{IV,3} = 1/20\pi,$$

em uma-, duas- e três-dimensões respectivamente. Suas primeira e segunda derivadas são dadas respectivamente por:

$$W'(\tilde{x}) = -4 \frac{\alpha_{IV,n}}{h^{n+1}} \begin{cases} (2.5 - R)^3 - 5(1.5 - R)^3 + 10(0.5 - R)^3 & 0 \leq R < 0.5 \\ (2.5 - R)^3 - 5(1.5 - R)^3 & 0.5 \leq R < 1.5 \\ (2.5 - R)^3 & 1.5 \leq R < 2.5 \\ 0 & R \geq 2.5 \end{cases}$$

e

$$W''(\tilde{x}) = 12 \frac{\alpha_{IV,n}}{h^{n+2}} \begin{cases} (2.5 - R)^2 - 5(1.5 - R)^2 + 10(0.5 - R)^2 & 0 \leq R < 0.5 \\ (2.5 - R)^2 - 5(1.5 - R)^2 & 0.5 \leq R < 1.5 \\ (2.5 - R)^2 & 1.5 \leq R < 2.5 \\ 0 & R \geq 2.5 \end{cases}.$$

A Figura 5.4 mostra o comportamento do núcleo spline quártica e de suas duas primeiras derivadas.

- A função núcleo baseada na spline quártica foi proposto por Morris (1996) [26].

$$W(\tilde{x}) = \frac{\alpha_{V,n}}{h^n} \begin{cases} (3 - R)^5 - 6(2 - R)^5 + 15(1 - R)^5 & 0 \leq R < 1 \\ (3 - R)^5 - 6(2 - R)^5 & 1 \leq R < 2 \\ (3 - R)^5 & 2 \leq R < 3 \\ 0 & R \geq 3 \end{cases}. \quad (5.38)$$

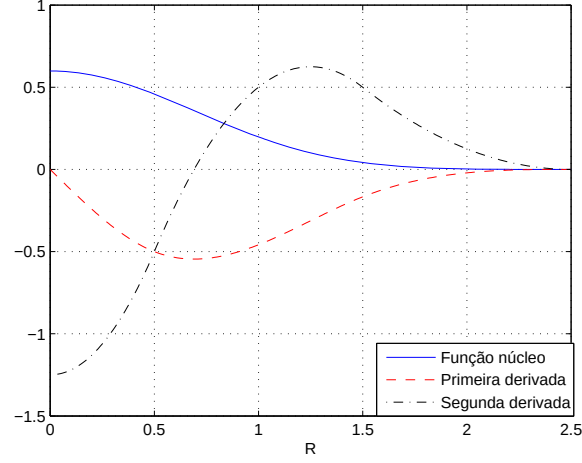


Figura 5.4: O núcleo Spline quártico (5.37) usado por Morris (1994) e suas duas primeiras derivadas.

As constantes de normalização dadas por:

$$\alpha_{V,1} = 1/120; \quad \alpha_{V,2} = 7/478\pi \text{ e } \alpha_{V,3} = 1/120\pi,$$

em uma-, duas- e três-dimensões respectivamente. Suas primeira e segunda derivadas são dadas respectivamente por:

$$W'(\tilde{x}) = -5 \frac{\alpha_{V,n}}{h^{n+1}} \begin{cases} (3-R)^4 - 6(2-R)^4 + 15(1-R)^4 & 0 \leq R < 1 \\ (3-R)^4 - 6(2-R)^4 & 1 \leq R < 2 \\ (3-R)^4 & 2 \leq R < 3 \\ 0 & R \geq 3 \end{cases}$$

e

$$W''(\tilde{x}) = 20 \frac{\alpha_{V,n}}{h^{n+2}} \begin{cases} (3-R)^3 - 6(2-R)^3 + 15(1-R)^3 & 0 \leq R < 1 \\ (3-R)^3 - 6(2-R)^3 & 1 \leq R < 2 \\ (3-R)^3 & 2 \leq R < 3 \\ 0 & R \geq 3 \end{cases}.$$

A Figura 5.5 mostra o comportamento do núcleo spline quártica e de suas duas primeiras derivadas.

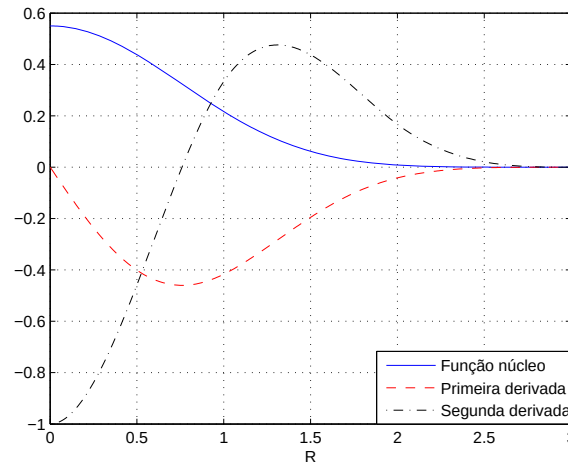


Figura 5.5: O núcleo spline quártica (5.38) usado também por Morris (1996) e suas duas primeiras derivadas.

- Liu, Liu e Lam [18] propõem uma pequena alteração no núcleo proposto por Lucy (5.29), assegurando resultados mais precisos e estáveis. A nova função núcleo de quarta ordem é dada pela seguinte expressão:

$$W(\tilde{x}) = \frac{\alpha_{N,n}}{h^n} \begin{cases} \frac{2}{3} - \frac{9}{8}R^2 + \frac{19}{24}R^3 - \frac{5}{32}R^4 & 0 \leq R < 2 \\ 0 & R \geq 2 \end{cases} \quad (5.39)$$

e as constantes de normalização são dadas por:

$$\alpha_{N,1} = 1; \quad \alpha_{N,2} = 15/7\pi \text{ e } \alpha_{N,3} = 315/208\pi,$$

em uma-, duas- e três-dimensões respectivamente. Suas primeira e segunda derivadas são dadas respectivamente por:

$$W'(\tilde{x}) = \frac{\alpha_{N,n}}{h^{n+1}} \begin{cases} -\frac{9}{4}R + \frac{19}{8}R^2 - \frac{5}{8}R^3 & 0 \leq R < 2 \\ 0 & R \geq 2 \end{cases}$$

e

$$W''(\tilde{x}) = \frac{\alpha_{N,n}}{h^{n+2}} \begin{cases} -\frac{9}{4} + \frac{19}{4}R - \frac{15}{8}R^2 & 0 \leq R < 2 \\ 0 & R \geq 2 \end{cases}.$$

Segundo os autores, esta função núcleo quártico tem resultados mais precisos que a função núcleo spline cubico, mas uma desvantagem é que a segunda derivada não é zero na fronteira do suporte como pode ver visto na Figura 5.6.

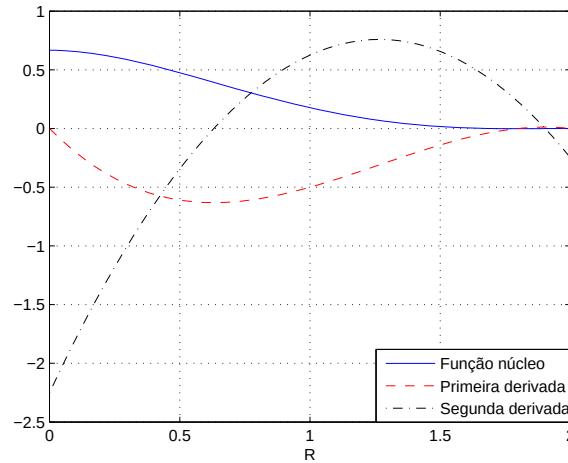


Figura 5.6: O núcleo quártico (5.39) usado por Liu e Liu (2003) e suas duas primeiras derivadas.

5.4 Integração temporal

O método SPH quando é aplicado para aproximações de problemas transientes, isto é, quando o problema é dependente do tempo, como no caso das equações de Navier-Stokes, precisa da utilização de esquemas de integração temporal para obter valores de determinadas propriedades em consecutivos passos de tempo. Na literatura existem diversos métodos, os quais podem ser citados: os métodos de Euler, Leap-Frog, Runge-Kutta entre outros. Os métodos são classificados em métodos explícitos ou implícitos. A principal diferença entre os métodos explícitos e implícitos é que os métodos explícitos utilizam apenas o estado atual e, em alguns casos estados anteriores, para o cálculo do novo estado, enquanto o implícito utiliza tanto o estado atual quanto o novo estado, formando assim um sistema de equações.

5.4.1 Método de Euler

O método mais simples é conhecido como método de Euler. Ele corresponde à primeira aproximação da derivada, e sua forma vem da própria definição de derivada dada por:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \delta t) - \mathbf{v}(t)}{\delta t} \approx \frac{\mathbf{v}(t + \delta t) - \mathbf{v}(t)}{\delta t}.$$

Esta aproximação envolve apenas dois pontos de tempo: t e $t + \delta t$, o que permite calcular o instante a seguir diretamente a partir do instante atual, tornando assim um integrador eficiente e simples. Basta calcular e armazenar apenas um instante para realizar o próximo cálculo.

Na prática, nas equações de Navier-Stokes, a velocidade $\mathbf{v}_i$ e a posição $\mathbf{x}_i$ são atualizadas a partir da aproximação anterior:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_i(t + \delta t) &= \mathbf{v}_i(t) + \delta t \mathbf{a}_i(t), \\ \mathbf{x}_i(t + \delta t) &= \mathbf{x}_i(t) + \delta t \mathbf{v}_i(t + \delta t).\end{aligned}$$

A precisão do método pode ser calculada utilizando a expansão em série de Taylor, assim tem-se:

$$\mathbf{v}(t + \delta t) = \mathbf{v}(t) + \delta t \frac{d\mathbf{v}}{dt}(t) + O(\delta t^2).$$

Logo a aproximação do método de Euler pode ser escrita como:

$$\frac{\mathbf{v}(t + \delta t) - \mathbf{v}(t)}{\delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} + O(\delta t).$$

Por causa dessa análise, o método de Euler é dito ser de primeira ordem.

5.4.2 Método Leap-Frog

Um método mais atraente e tão simples quando o método de Euler é o método Leap-Frog. Ele é baseado na estimativa de derivada como diferenças centradas:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \frac{1}{2}\delta t) - \mathbf{v}(t - \frac{1}{2}\delta t)}{\delta t} \approx \frac{\mathbf{v}(t + \frac{1}{2}\delta t) - \mathbf{v}(t - \frac{1}{2}\delta t)}{\delta t}.$$

A aproximação da derivada envolve dois pontos de tempo: $t - \frac{1}{2}\delta t$ e $t + \frac{1}{2}\delta t$.

Na prática, a velocidade $\mathbf{v}_i$ de cada partícula é calculada nos pontos médio dos intervalos de tempo e a posição $\mathbf{x}_i$ das partículas nos pontos inteiros. Logo, a velocidade e a posição são calculadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_i(t + \frac{1}{2}\delta t) &= \mathbf{v}_i(t - \frac{1}{2}\delta t) + \delta t \mathbf{a}_i(t), \\ \mathbf{x}_i(t + \delta t) &= \mathbf{x}_i(t) + \delta t \mathbf{v}_i(t + \frac{1}{2}\delta t).\end{aligned}$$

Quando é preciso calcular a velocidade em um passo de tempo inteiro, ela pode ser interpolada a partir dos passos intermediários. A forma mais simples faz uma média entre as velocidades anterior e posterior:

$$\mathbf{v}_i(t) = \frac{1}{2} \left[\mathbf{v}_i(t + \frac{1}{2}\delta t) + \mathbf{v}_i(t - \frac{1}{2}\delta t) \right].$$

Além disso, para calcular o primeiro passo, o método requer uma etapa adicional, pois precisa-se saber a velocidade $\mathbf{v}_i(-\frac{1}{2})$, então utilizando o método de Euler tem-se a seguinte expressão:

$$\mathbf{v}_i\left(-\frac{1}{2}\right) = \mathbf{v}_i(0) - \frac{1}{2}\delta t \mathbf{a}_i(0).$$

A precisão do método Leap-Frog é calculada expandindo em série de Taylor a velocidade no ponto $t - \frac{1}{2}\delta t$ e $t + \frac{1}{2}\delta t$, assim obtêm-se:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t - \frac{1}{2}\delta t) &= \mathbf{v}(t) - \frac{\delta t}{2} \frac{d\mathbf{v}}{dt}(t) + \frac{\delta t^2}{4} \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} + O(\delta t^3), \\ \mathbf{v}(t + \frac{1}{2}\delta t) &= \mathbf{v}(t) + \frac{\delta t}{2} \frac{d\mathbf{v}}{dt}(t) + \frac{\delta t^2}{4} \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} + O(\delta t^3)\end{aligned}$$

Fazendo a diferença entre as duas expansões e dividindo por δt tem-se:

$$\frac{\mathbf{v}(t + \frac{1}{2}\delta t) - \mathbf{v}(t - \frac{1}{2}\delta t)}{\delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}(t) + O(\delta t^2).$$

Portanto, o método Leap-Frog é um integrador de segunda ordem.

A vantagem em usar o integrador Leap-frog, é que ele é reversível no tempo devido a sua forma simétrica, o que garante a conservação de energia do sistema [28].

Moving Particle Semi-Implicit

O método “Moving Particle Semi-Implicit” (MPS) foi apresentado pela primeira vez por Koshizuka e Oka em 1996 [14] para resolver as equações de Navier-Stokes incompressíveis. Ele se baseia em uma discretização finita de partícula para aproximar os operadores diferenciais como no método SPH. Para obter as propriedades de um fluxo incompressível, uma abordagem de passo de tempo fracionada (*fractional time step*) é utilizada [6]. Essa abordagem requer a solução de uma equação de Poisson para obter o campo de pressão em cada passo de tempo, o que consequentemente exige uma boa aproximação numérica do operador Laplaciano.

6.1 Equações Governantes

As equações de Navier-Stokes incompressíveis para fluido Newtoniano na descrição Lagrangiana é dado por:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (6.1)$$

e

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2\mathbf{v} + f. \quad (6.2)$$

O método MPS apresentado por Koshizuka e Oka utiliza uma forma simplificada da equação (6.2) chamada de equação de Euler.

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + f. \quad (6.3)$$

6.2 Discretização MPS

A fim de se obter uma solução aproximada as equações (6.1) e (6.3) têm que ser discretizadas. O domínio deve ser discretizado por um conjunto finito de partículas. Análogo ao SPH, o MPS utiliza uma função W com suporte compacto cujo o argumento é a distância entre as partículas $|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i| = |\mathbf{x}_{ji}|$. Na literatura essa função é chamada de função peso. A função peso pode ser singular na origem em algumas formulações [14] e regular em outras [33].

6.2.1 Função Peso

No método MPS, as interações entre as partículas são determinadas pela *função peso* $W(\mathbf{x}; r_e)$, sendo $\mathbf{x}$ a distância entre as partículas. A função peso denominada na literatura do MPS tem o mesmo papel da função do núcleo no SPH.

- A função peso utilizada por Koshizuka e Oka [14] é dada por:

$$W(\mathbf{x}_{ji}; r_e) = \begin{cases} \frac{r_e}{\mathbf{x}_{ji}} - 1 & \text{se } 0 \leq \mathbf{x}_{ji} \leq r_e \\ 0 & \text{se } r_e \leq r \end{cases}, \quad (6.4)$$

sendo $\mathbf{x}_{ji} = |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|$, e r_e o raio da região de interação entre partículas.

A Figura 6.1 mostra o comportamento da função peso (6.4).

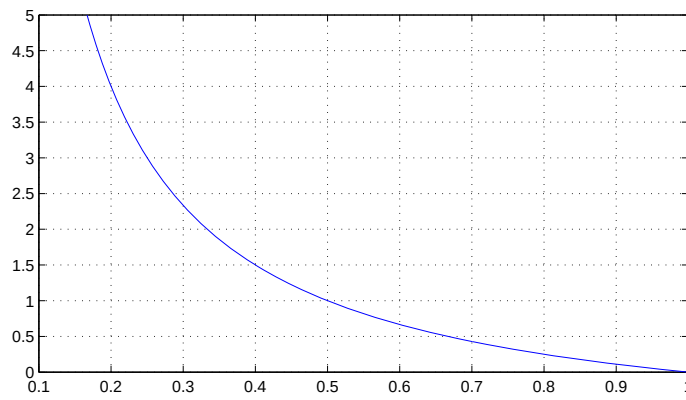


Figura 6.1: Função peso usados por Koshizuka e Oka (1996).

A função peso é infinita para $x_{ji} = 0$, o que de acordo com os autores Koshizuka e Oka é bom para a estabilidade numérica no modelo de incompressibilidade.

- Outra função peso utilizada na literatura foi proposta por Yoon et. al [33] e é da seguinte forma:

$$W(\mathbf{x}_{ji}; r_e) = \begin{cases} -\left(\frac{2\mathbf{x}_{ji}}{r_e}\right)^2 + 2 & \text{se } 0 \leq \mathbf{x}_{ji} \leq 0.5r_e \\ \left(\frac{2\mathbf{x}_{ji}}{r_2} - 2\right)^2 & \text{se } 0.5r_e \leq \mathbf{x}_{ji} \leq r_e \\ 0 & \text{para } r_e \leq r \end{cases}. \quad (6.5)$$

A Figura 6.2 mostra o comportamento da função peso (6.5), que é semelhante as funções núcleo do SPH.

6.2.2 Densidade do Número de Partículas

O método utiliza um conceito de densidade do número de partículas (*particle number density (pnd)*). Esse conceito é utilizado no lugar da densidade para garantir a propriedade de incompressibilidade, ou seja, para assegurar que a densidade do fluido seja contínua ao longo do tempo, a densidade do número de partículas deve permanecer constante.

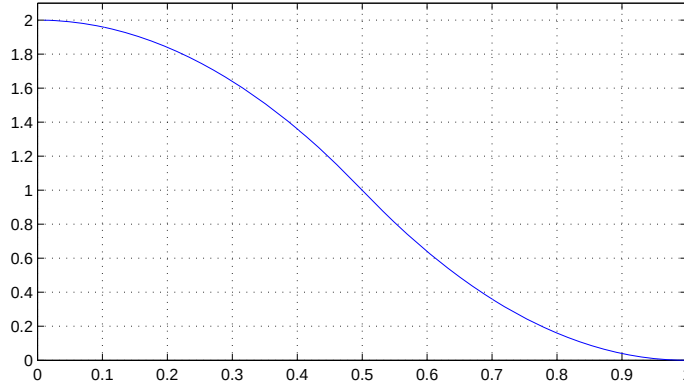


Figura 6.2: Função peso usados por Yoon et.al (1999).

A densidade do número de partículas associada a uma partícula com coordenada $\mathbf{x}_i$ é definida como:

$$\langle pnd \rangle_i := \sum_{j \in V_i} W(\mathbf{x}_{ji}; r_e). \quad (6.6)$$

Assumindo que as partículas possuem a mesma massa m , pode-se escrever a densidade do fluido da seguinte forma:

$$\rho = \frac{mN}{V} \quad (6.7)$$

sendo N o número de partículas e V o volume.

O número de partículas em uma unidade de volume δV é definida por:

$$\langle N \rangle_i := \frac{\langle pnd \rangle_i}{\int_{\delta V} W(\mathbf{x}_{ji}; r_e) d\delta V}. \quad (6.8)$$

O denominador da equação (6.8) é a integral da função peso em toda a vizinhança da partícula i . Combinando as equações (6.6) e (6.8), pode-se observar que a densidade do fluido é proporcional à densidade do número de partículas:

$$\langle \rho \rangle_i = m \langle N \rangle_i = \frac{m \langle pnd \rangle_i}{\int_{\delta V} W(\mathbf{x}_{ji}; r_e) d\delta V}. \quad (6.9)$$

Portanto, para que a equação da continuidade seja satisfeita, ou seja, para que a densidade seja constante, o número de partículas deve ser constante. Este valor é denominado pnd^0 e representa o valor da densidade do número de partículas no instante inicial.

6.2.3 Gradiente e Divergente

O vetor gradiente entre duas partículas i e j nas posições $\mathbf{x}_i$ e $\mathbf{x}_j$ de uma função escalar genérica f_i e f_j é definido por $\frac{(f_j - f_i)(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^2}$, ver Figura 6.3.

O vetor gradiente entre a partícula i e suas partículas vizinhas j é definido da seguinte forma:

$$\langle \nabla f \rangle_i = \frac{d}{pnd^0} \sum_{j \in V_i} \left[\frac{f_j - f_i}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^2} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) W(|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|; r_e) \right] \quad (6.10)$$

sendo d o número de dimensões do espaço.

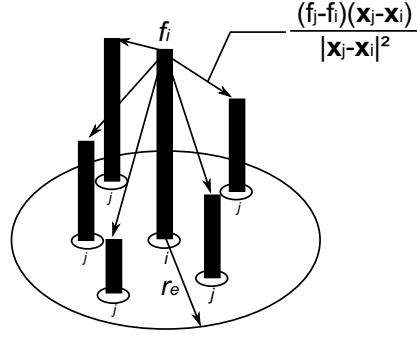


Figura 6.3: Modelo operador gradiente. Fonte [1].

A equação (6.10) produz forças de grande magnitude para pequenas distâncias entre partículas, que é uma boa propriedade para evitar a sobreposição de partículas.

Koshizuka e Oka substituem f_i pelo máximo f'_i na equação (6.10) para melhorar a estabilidade. A f'_i é determinada da seguinte forma:

$$f'_i = \min_{j \in V_i}(f_j). \quad (6.11)$$

Portanto, o vetor gradiente pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\langle \nabla f \rangle_i = \frac{d}{pnd^0} \sum_{j \in V_i} \left[\frac{f_j - f'_i}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^2} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) W(|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|; r_e) \right]. \quad (6.12)$$

Na equação (6.12) forças entre partículas são sempre repulsivas por que $f_j - f'_i$ é sempre positivo.

De forma análoga o operador divergente pode ser escrito:

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{f} \rangle_i = \frac{d}{pnd^0} \sum_{j \in V_i} \left[\frac{\mathbf{f}_j - \mathbf{f}_i}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^2} \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) W(|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|; r_e) \right]. \quad (6.13)$$

6.2.4 Laplaciano

Um problema de difusão dependente do tempo em relação a f é representado pelo Laplaciano como:

$$\frac{df}{dt} = \nu \nabla^2 f, \quad (6.14)$$

sendo ν o coeficiente de difusão. A variação da distribuição de f aumenta em $2d\nu\Delta t$ durante o passo de tempo. No problema (6.14) parte da quantidade de f_i é distribuída para as partículas vizinhas de acordo com W de forma que o aumento da variância é igual $2d\nu\Delta t$. Assim a quantidade transferida da partícula i a partícula j é:

$$\Delta f_{i \rightarrow j} = \frac{2d\nu\Delta t}{pnd^0\lambda} f_i W(|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|; r_e),$$

sendo

$$\lambda = \frac{\int_{\delta V} W(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|; r_e) |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 d\delta V}{\int_{\delta V} W(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|; r_e) d\delta V}.$$

A aproximação do operador Laplaciano é:

$$\langle \nabla^2 f \rangle_i = \frac{2d}{pnd^0\lambda} \sum_{j \in V_i} (f_j - f_i) W(|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|; r_e). \quad (6.15)$$

O modelo (6.15) é conservativo, pois a quantidade perdida por uma partícula i é distribuída para suas partículas vizinhas Figura 6.4. O parâmetro λ é introduzido para assegurar que o aumento da variância da distribuição seja igual ao da solução analítica do problema (6.14) [14].

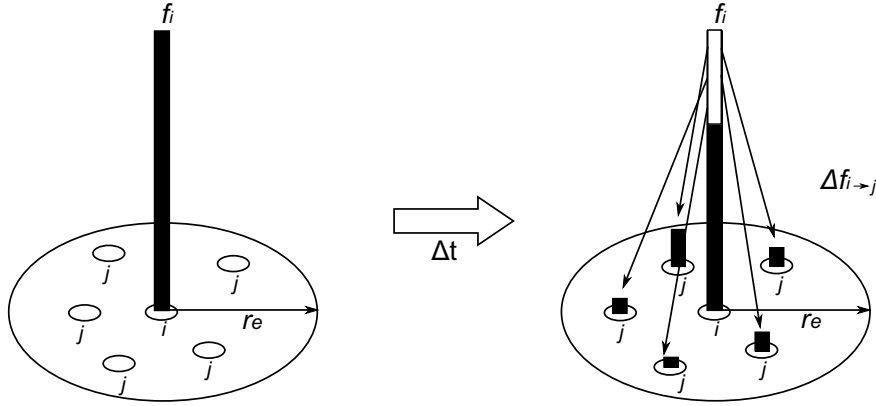


Figura 6.4: Modelo do operador laplaciano. Fonte[1].

6.2.5 Incompressibilidade

A equação da continuidade estabelece que a densidade do fluido deve ser constante, ou seja, a densidade do número de partículas deve ser constante e igual a pnd^0 . Quando a densidade do número de partículas pnd^* é diferente de pnd^0 , se faz uma correção de pnd^* para pnd^0 pela seguinte expressão:

$$pnd^* + pnd' = pnd^0 \quad (6.16)$$

sendo pnd^* a densidade do número de partículas resultante dos cálculos explícitos e pnd' é o valor da correção da densidade do número de partículas.

A integração do tempo das equações (6.1) e (6.3) apresentam algumas dificuldades quando o fluido é incompressível ou quase incompressível. Zienkiewicz e Codina [34] propõem um método de passo fracionado que consiste em dividir cada intervalo de tempo em 2 passos como se segue:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\delta t} = \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^* + \mathbf{v}^* - \mathbf{v}^n}{\delta t} = \frac{\delta\mathbf{v}' + \delta\mathbf{v}^*}{\delta t}, \quad (6.17)$$

e

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\delta t} = \frac{\rho^{n+1} - \rho^* + \rho^* - \rho^n}{\delta t} = \frac{\delta\rho' + \delta\rho^*}{\delta t}, \quad (6.18)$$

sendo $\delta t = t^{n+1} - t^n$ o passo temporal, $\mathbf{v}^n = \mathbf{v}(t^n, \mathbf{x}^n)$, $\rho^n = \rho(t^n, \mathbf{x}^n)$ e $\mathbf{v}^*$ e ρ^* são variáveis fictícias definidas.

A partir das equações (6.3) e (6.17) tem-se:

$$\frac{\delta\mathbf{v}'}{\delta t} + \frac{\delta\mathbf{v}^*}{\delta t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + f. \quad (6.19)$$

Supondo que $\frac{\delta\mathbf{v}^*}{\delta t} = f$, obtêm-se:

$$\frac{\delta\mathbf{v}'}{\delta t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p. \quad (6.20)$$

A partir das equações (6.1) e (6.18) tem-se:

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\delta \rho'}{\delta t} + \frac{\Delta \rho^*}{\delta t} \right) = -\nabla \cdot [\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^* + \mathbf{v}^*]. \quad (6.21)$$

Supondo que $\frac{1}{\rho} \frac{\delta \rho^*}{\delta t} = -\nabla \cdot \mathbf{v}^*$ obtêm-se:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\delta \rho'}{\delta t} = -\nabla \cdot \delta \mathbf{v}'. \quad (6.22)$$

Das equações (6.16) e (6.22) segue que:

$$\frac{1}{pnd^0} \frac{pnd'}{\delta t} = -\nabla \cdot \delta \mathbf{v}'. \quad (6.23)$$

Então da equação (6.20) pode-se reescrever a equação (6.23) da seguinte forma:

$$\frac{1}{pnd^0} \frac{pnd'}{\delta t} = \frac{\delta t}{\rho} \nabla^2 p^{n+1}. \quad (6.24)$$

Agora substituindo $pnd' = pnd^0 - pnd^*$ na equação (6.21) tem-se:

$$\nabla^2 p^{n+1} = -\frac{1}{\rho} \frac{\langle pnd^* \rangle_i - pnd^0}{pnd^0}. \quad (6.25)$$

E a forma discreta de (6.25) é:

$$\langle \nabla^2 p^{n+1} \rangle_i = -\frac{1}{\rho} \frac{\langle pnd^* \rangle_i - pnd^0}{pnd^0}. \quad (6.26)$$

Substituindo o lado esquerda da equação (6.25) pelo operador laplaciano (6.15) obtêm-se

$$\sum_{j \in V_i} (p_j^{n+1} - p_i^{n+1}) W(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i; r_e) = -\frac{\rho \lambda (\langle pnd^* \rangle_i - pnd^0)}{2d\delta t^2}. \quad (6.27)$$

A equação (6.27) forma um sistema de equações do tipo $Ax = b$ da ordem do número de partículas. Para obter a correção da velocidade, substitui-se o gradiente da (6.20) pelo operador gradiente (6.12), assim tem-se:

$$\delta \mathbf{v}' = \frac{d\delta t}{pnd^0 \rho} \sum_{j \in V_i} \left[\frac{p_j^{n+1} - p_i^{n+1}}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^2} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) W(|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|; r_e) \right]. \quad (6.28)$$

6.2.6 Algoritmo

O algoritmo do MPS é:

1. Valores iniciais da velocidades, posições, densidade e pressão.
2. Através de $\frac{\delta \mathbf{v}^*}{\delta t} = f$ o cálculo da velocidade fictícia ($\mathbf{v}^*$) é feito explicitamente por:

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v}^n + f\delta t \quad (6.29)$$

e o calculo da posição fictícia ($\mathbf{r}^*$) é atualizada da seguinte maneira

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r}^n + \mathbf{v}^* \delta t. \quad (6.30)$$

3. Calcular o pnd^* dada pela equação (6.5) utilizando os valores de $\mathbf{v}^*$ e $\mathbf{x}^*$.
4. Montar o sistema de equações (6.27) para obter a pressão no tempo $n + 1$.
5. Resolver o sistema linear.
6. Calcular a correção da velocidade pela equação (6.28).
7. Atualizar a velocidade pela seguinte expressão:

$$\mathbf{v}^{n+1} = \delta \mathbf{v}' + \mathbf{v}^* \quad (6.31)$$

e a posição é atualizada por:

$$\mathbf{r}^{n+1} = \delta \mathbf{r} + \delta \mathbf{v}' \delta t. \quad (6.32)$$

Aspecto Numérico dos MPMs

7.1 Busca de Partículas Vizinhas

Uma característica do MPMs é o domínio de influência que a função núcleo determina. Este domínio possui um número finito de partículas em seu interior, as quais são denominadas de partículas vizinhas, essas partículas são de fundamental importância na aproximação de uma determinada partícula em questão.

Os métodos *meshfree* têm como característica o movimento de partículas em função do tempo, o que evidentemente provoca uma alteração no cenário de vizinhança de uma partícula de referência, ou seja, o conjunto de partículas vizinhas em relação à partícula de referência pode mudar em instantes de tempo diferente, então é necessária a aplicação de técnicas de busca de partículas vizinhas. Existem algumas estratégias na busca das partículas vizinhas, dentre as quais podem ser citadas as busca através de força bruta, por malha uniforme e através de árvore. Serão abordadas as duas primeiras estratégias de busca de partículas vizinhas.

7.1.1 Busca de partículas vizinhas por força bruta

A primeira ideia que surge em relação ao desenvolvimento da busca de partículas vizinhas é desenvolver uma análise sobre todo o domínio, verificando a distância entre cada par de partículas, assim analisando-se a ocorrência das partículas dentro do domínio de influência de uma determinada partícula em questão: esta busca é denominada por força bruta, pois todas as partículas do domínio são verificadas. Esta estratégia de busca é computacionalmente cara, tendo uma complexidade de $O(N^2)$, sendo N o número de partículas do domínio discretizado.

7.1.2 Busca de partículas vizinhas por malha uniforme

Uma estratégia mais adequada que a utilização do esquema de busca por força bruta é o de busca por uma malha uniforme. Neste método uma malha uniforme é associada ao domínio do problema a ser resolvido, os espaçamento entre as células é de kh devido ao domínio de influência, as partículas vizinhas de uma partícula em questão só pode estar na mesma célula ocupada pela partícula ou em suas células diretamente adjacentes veja na Figura 7.1. Assim, a busca por partículas que possuem uma distância menor do que kh a partir da partícula de referência é restrita a 3^d células, onde d é a dimensão do espaço. A busca por malha uniforme tem complexidade $O(N)$ e é muito utilizada quando o h é constante em toda a simulação [28].

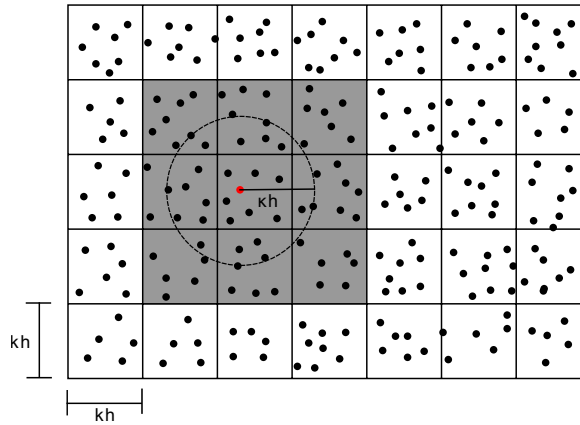


Figura 7.1: Busca de partículas vizinhas utilizando uma malha uniforme. A área em cinza representa o espaço onde será realizada a busca. Fonte [28]

Observação: Quando houver movimento das partículas, tem-se que atualizar as partículas na célula em cada passo de tempo.

7.2 Tratamento de Fronteira

Um ponto de grande importância no método de partículas é o tratamento de fronteira, pois pode haver uma deficiência de partículas próxima do contorno. Para partículas perto ou sobre o contorno, apenas as partículas dentro do contorno contribuem para a soma da interação de partículas e não há contribuição do exterior, uma vez que não há partículas além do contorno. Esta contribuição parcial não dá soluções corretas, pois na fronteira embora, por exemplo, a velocidade seja zero, outras propriedades físicas pode não ser zero.

Diferentes de outros métodos numéricos, o tratamento de fronteira nos métodos de partículas é uma tarefa bastante delicada. Na literatura são apresentadas algumas estratégias do tratamento de fronteira através de partículas, sendo elas denominadas de tratamento de fronteiras por partículas fantasmas e tratamento de fronteira através de partículas *dummy*.

7.2.1 Partículas fantasmas

No tratamento de fronteira por partículas fantasmas são introduzidas partículas na região externa e sobre a fronteira do domínio. Há dois tipos de partículas fantasmas que são: partículas fantasmas do tipo I utilizadas por Monaghan [22] e partículas fantasmas do tipo II utilizadas por Libersky e Petscheck [17].

As partículas fantasmas do tipo I exercem uma força repulsiva nas partículas internas do domínio quando estas se aproximam da fronteira; elas estão localizadas na fronteira do domínio e participam das aproximações das partículas internas do domínio. No entanto a posição e as propriedades físicas não evoluem no processo de simulação. Sua principal função é impedir que as partículas do interior do domínio penetrem a fronteira. A força de repulsão das partículas fantasmas do tipo I é calculada usando uma expressão matemática semelhante à do potencial de Lennard-Jones utilizado em dinâmica molecular [2]. A força de repulsão sobre uma partícula interna i e uma partícula fantasma do tipo I g é dada

pela seguinte expressão:

$$\Gamma_{ig} = \begin{cases} D \left[\left(\frac{r_0}{r_{ig}} \right)^{n_1} - \left(\frac{r_0}{r_{ig}} \right)^{n_2} \right] \frac{\mathbf{x}_{ig}}{r_{ig}^2}, & \frac{r_0}{r_{ig}} \leq 1 \\ 0, & \frac{r_0}{r_{ig}} > 1 \end{cases},$$

sendo $\mathbf{x}_{ig} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_g$, $r_{ig} = |\mathbf{x}_{ig}|$. Os parâmetros n_1 e n_2 são usualmente tomados como 12 e 4 respectivamente e D é um parâmetro dependente do problema e deve ser da mesma ordem de grandeza do quadrado da maior velocidade esperada do escoamento. O parâmetro r_0 é o raio de interação de uma partícula fantasma do tipo I com as partículas do interior, e é normalmente definido como sendo um valor próximo a distância inicial entre as partículas interiores.

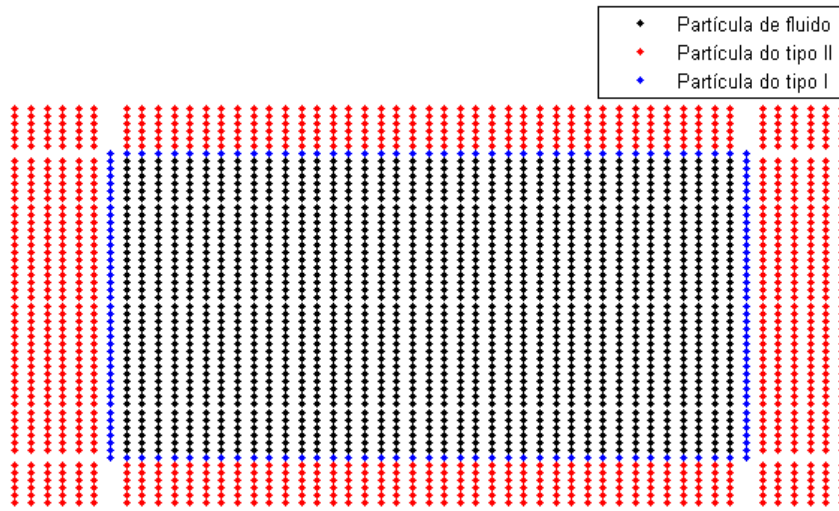


Figura 7.2: Esquema de partículas fantasmas do tipo I e tipo II.

As partículas fantasmas do tipo II também não evoluem com a simulação. Elas são construídas da seguinte forma. Para cada partícula i que está localizada dentro de uma faixa de distância κh , a partir da fronteira, uma partícula fantasma é colocada simetricamente na parte externa do domínio. Elas têm a mesma densidade e pressão que as partículas internas correspondentes, mas a velocidade é oposta. As partículas fantasmas do tipo II podem ser aplicadas tanto para tratar fronteiras sólidas como para superfícies livres. Uma ilustração do esquema das partículas fantasmas é dada na Figura 7.2 .

7.2.2 Partículas *dummy*

A estratégia do tratamento de fronteira através de partículas *dummy* é definir camadas de partículas fixas, sendo a primeira localizada exatamente sobre a fronteira, e as demais espaçadas conforme a configuração inicial do problema. A partir disso são definidos os valores de pressão e velocidade nas partículas *dummy* que estão sobre a fronteira, sendo então repetidos nas demais partículas *dummy*, seguindo a direção normal de cada partícula veja a Figura 7.3, esse tratamento foi proposto por Koshizuka e Oka [14] para o método MPS.

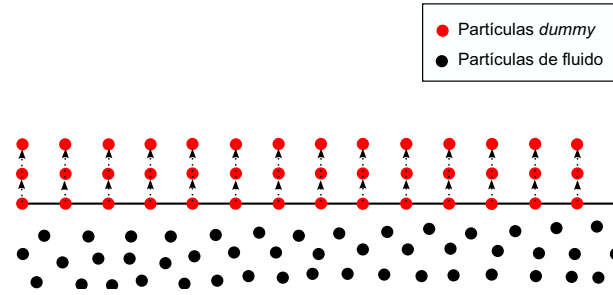


Figura 7.3: Esquema de partículas *dummy*.

Algumas particularidades do tratamento aparecem quando há quinas. Quando o fluido encontra-se interno a quina, as propriedades das partículas *dummy* que estão sobre a quina são repetidas para as partículas *dummy* na região da quina, (veja a Figura 7.4(a)). No entanto, quando o fluido encontra-se na parte externa da quina, as partículas *dummy* que estão na diagonal relativa à partícula *dummy* de quina tem valor definido como a média das quatro partículas vizinhas, veja a figura 7.4(b).

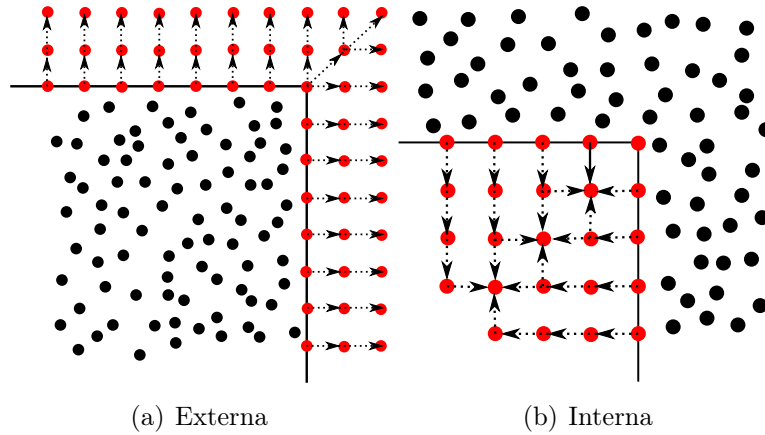


Figura 7.4: Esquema de partículas *dummy* nas quinas (a) externa, e (b) interna.

Resultados

Neste capítulo será apresentado alguns resultados numéricos. Primeiramente serão analisados os operadores divergente, gradiente e laplaciano dos métodos SPH e MPS. O intuito dessa análise é verificar algumas propriedades e se as aproximações dos operadores são satisfatórias, ou seja, se reproduzem uma boa aproximação numérica. Em seguida serão resolvidas algumas equação clássicas em uma dimensão e por fim, serão apresentados alguns resultados sobre a equação de Poisson em duas dimensões.

8.1 Operadores

Nesta seção serão analisados e comparados os operadores divergente, gradiente e laplaciano dos métodos SPH e MPS. A análise será feita por funções que obedecem certas propriedades as quais são chamadas de funções-teste. Os testes serão feitos no caso bidimensional cujo domínio é:

$$\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1].$$

O domínio Ω será representado por um conjunto de 1600 partículas distribuídas uniformemente conforme Figura 8.1.

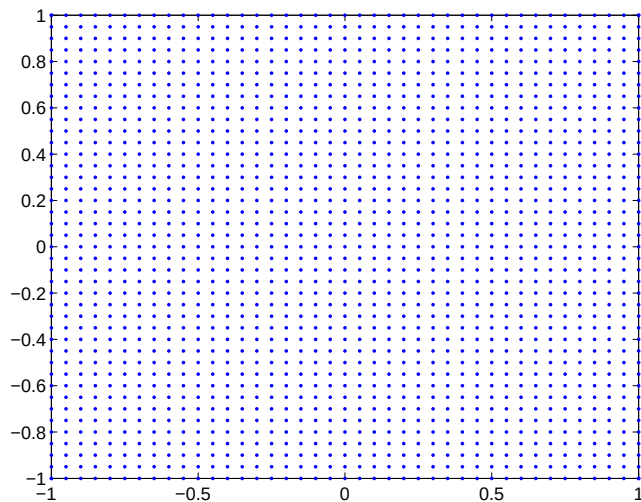


Figura 8.1: Discretização do domínio Ω .

Dada uma partícula i , uma função-teste definirá a propriedade $f_i = f(\mathbf{x}_i)$ da partícula. As aproximações dos operadores SPH e MPS serão comparadas com a solução analítica da função-teste. Para medir qualitativamente os resultados obtido pelos operadores SPH e MPS foi utilizado o erro absoluto dado por:

$$Erro = \|Aproximada - Exata\|_2.$$

Geralmente duas figuras serão apresentadas para cada função-teste, uma é o gráfico das aproximações dos operadores SPH e MPS e a outra é um histograma que tem como finalidade mostrar quantitativamente o número de vezes que o erro absoluto de cada partícula aparece dentro de um intervalo, será apresentada também uma tabela contendo a informação do erro máximo e do erro mínimo facilitando assim o entendimento do histograma.

8.1.1 Operador Divergente

De acordo com Petronetto [29] o operador divergente que apresentou melhores resultados é operador divergente SPH II, tal operador será comparado com operador divergente MPS. Lembrando do capítulo 5 e do capítulo 6, os operadores divergente SPH II e MPS são dados respectivamente por:

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) \rangle = \frac{1}{\rho_i} \left[\sum_{j \in V_i} m_j (\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_j)) \cdot \nabla_i W_{ij} \right] \quad (\text{SPH II})$$

e

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) \rangle = \frac{d}{pnd^0} \sum_{j \in V_i} \left[\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_j) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^2} \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) W_{ji} \right]. \quad (\text{MPS})$$

Nos testes realizados para o operador divergente SPH II foi utilizado a função kernel spline quíntica (5.38) com os parâmetros $k = 3$ e $h = 0.83dx$, sendo dx o espaçamento entre as partículas. Para operador divergente MPS foi utilizado a função peso proposta por Yoon (6.5) com $r_e = 2.1dx$.

Função Constante

A primeira função-teste utilizada é a função vetorial constante

$$\mathbf{C}(x, y) = (1, 1) \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{C}(x, y) = 0.$$

Esta função tem como finalidade mostrar a seguinte propriedade:

Propriedade 1 : *Se a função-teste é uma função vetorial constante, o resultado obtido pelos operadores divergente (5.15) e (6.13) é igual ao valor exato do divergente desta função. Em outras palavras se $\mathbf{C}$ é constante, então os operadores divergente (5.15) e (6.13) são iguais:*

$$(\nabla \cdot \mathbf{C})_A = 0.$$

De fato, basta observar que o termo $(\mathbf{C}_j - \mathbf{C}_i)$ dos operadores divergente (5.15) e (6.10) se anulam quando $\mathbf{C}$ é uma função vetorial constante.

Os operadores divergentes SPH I (5.6) e SPH III (5.16) não apresentam essa propriedade.

Funções que diferem por constante

Neste exemplo, utiliza-se as funções-teste

$$\mathbf{F}(x, y) = (x + 1, 2y + 1) \quad (8.1)$$

e

$$\mathbf{G}(x, y) = (x + 2, 2y + 2). \quad (8.2)$$

Note que, elas tem o mesmo divergente

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y) = \nabla \cdot \mathbf{G}(x, y) = 3.$$

Este exemplo tem como finalidade mostrar que os operadores divergente (5.15) e (6.13) produzem os mesmos resultados para as funções $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$, logo tem a seguinte propriedade:

Propriedade 2 *Dadas duas funções que diferem por uma constante, os resultados obtidos pelos operadores divergente (5.15) e (6.13) são iguais, isto é, se as propriedades $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ são tais que $\mathbf{F} = \mathbf{G} + \mathbf{C}$, sendo o vetor $\mathbf{C}$ constante, então os operadores divergente (5.15) e (6.13) são tais que:*

$$(\nabla \cdot \mathbf{F})_A = (\nabla \cdot \mathbf{G})_A.$$

De fato, basta observar que pode-se escrever o termo $(\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_i)$ dos operadores divergente (5.15) e (6.13) da seguinte forma:

$$\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_i = (\mathbf{F}_j + \mathbf{C}) - (\mathbf{F}_i + \mathbf{C}) = \mathbf{G}_j - \mathbf{G}_i,$$

para qualquer vetor $\mathbf{C}$ constante.

Os operadores divergentes SPH I (5.6) e SPH III (5.16) não apresentam essa propriedade.

Pode-se observar através dos histogramas da Figura 8.2 e da Figura 8.4 que o erro das funções $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ dos operadores divergentes (5.15) e (6.13) são os mesmos, ou seja,

$$(\nabla \cdot \mathbf{F})_A = (\nabla \cdot \mathbf{G})_A.$$

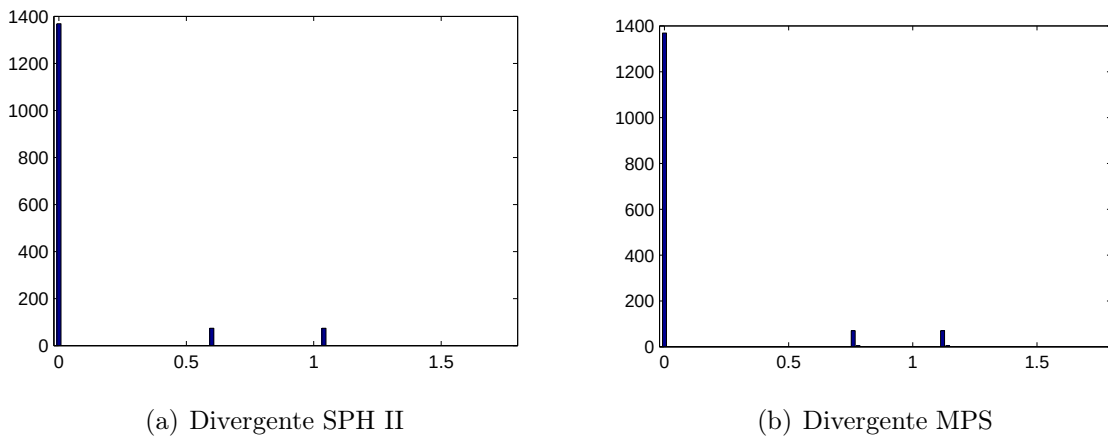
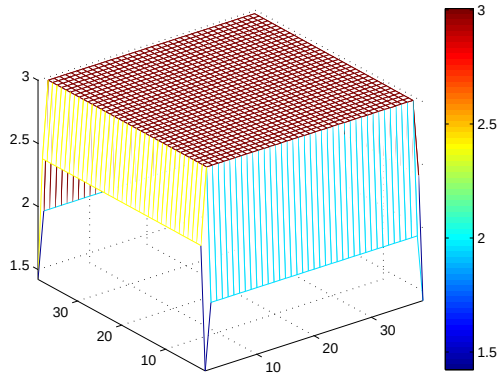
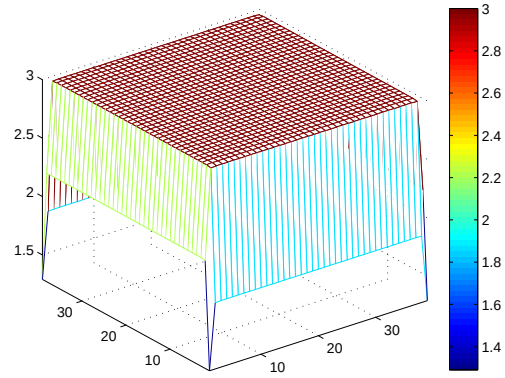


Figura 8.2: Histogramas de erros dos operadores divergente SPH II e MPS da função-teste (8.1).

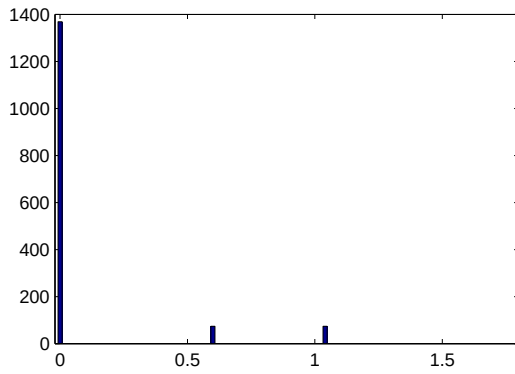


(a) Divergente SPH II

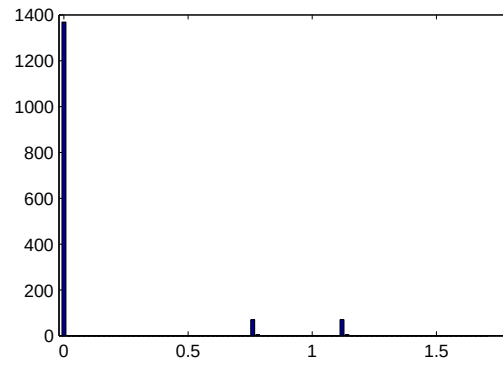


(b) Divergente MPS

Figura 8.3: Gráficos das aproximações dos operadores divergente SPH II e MPS da função-teste (8.1)

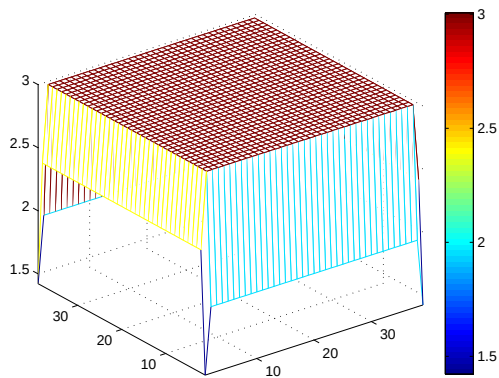


(a) Divergente SPH II

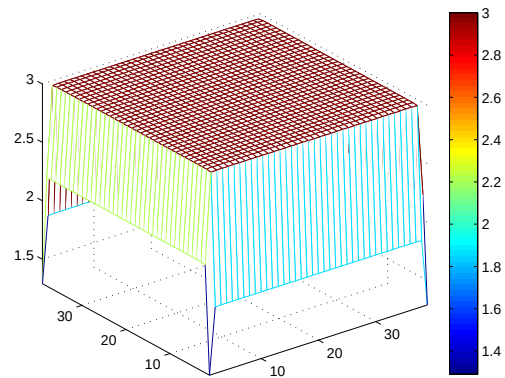


(b) Divergente MPS

Figura 8.4: Histogramas de erros dos operadores divergente SPH II e MPS da função-teste (8.2).



(a) Divergente SPH II



(b) Divergente MPS

Figura 8.5: Gráficos das aproximações dos operadores divergente SPH II e MPS da função-teste (8.2).

As Figuras 8.3 e 8.5 mostram os gráficos do divergente das funções $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$, respectivamente. Note que, na fronteira os resultados obtidos não são satisfatórios devido a influência da fronteira. A Tabela 8.1 mostra os erros máximo e mínimo dos operadores divergentes SPH II e MPS.

Tabela 8.1: Erros máximo e mínimo das funções-teste (8.1) e (8.2).

	Erro máximo	Erro mínimo
SPH	1.5777	0.0061
MPS	1.7093	$1.4717e - 16$

Conclusão

Através dos gráficos, dos histogramas e Tabela 8.1 pode-se observar que há pouca diferença nos resultados entre os operadores (5.15) e (6.13), sendo o menor erro mínimo dado pelo operador divergente MPS.

Divergente Polinomial

A função-teste usada é dada por:

$$\mathbf{P}(x, y) = \left(\frac{1}{3}x^3, \frac{1}{2}y^2 \right), \quad (8.3)$$

que tem como divergente a função polinomial,

$$\nabla \cdot \mathbf{P}(x, y) = x^2 + y.$$

Os histogramas apresentados na Figura 8.6 oferecem poucas informações em relação aos operadores, desta forma na Tabela 8.2 são apresentado os erros máximo e mínimo dos operadores divergente SPH II e MPS. Na Figura 8.7 pode-se observar que os comportamentos dos operadores divergente SPH II e MPS estão de acordo com a solução analítica da função-teste.

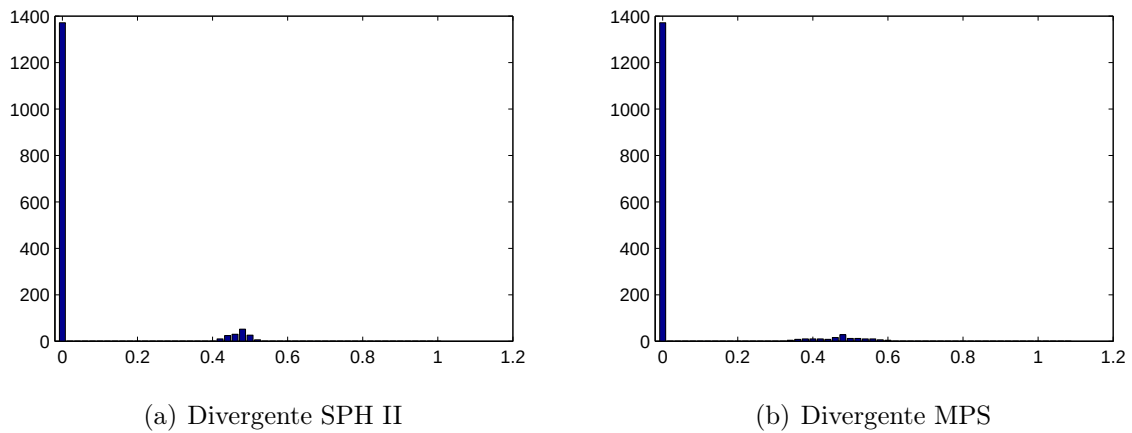


Figura 8.6: Histogramas de erros dos operadores divergente SPH II e MPS da função-teste (8.3).

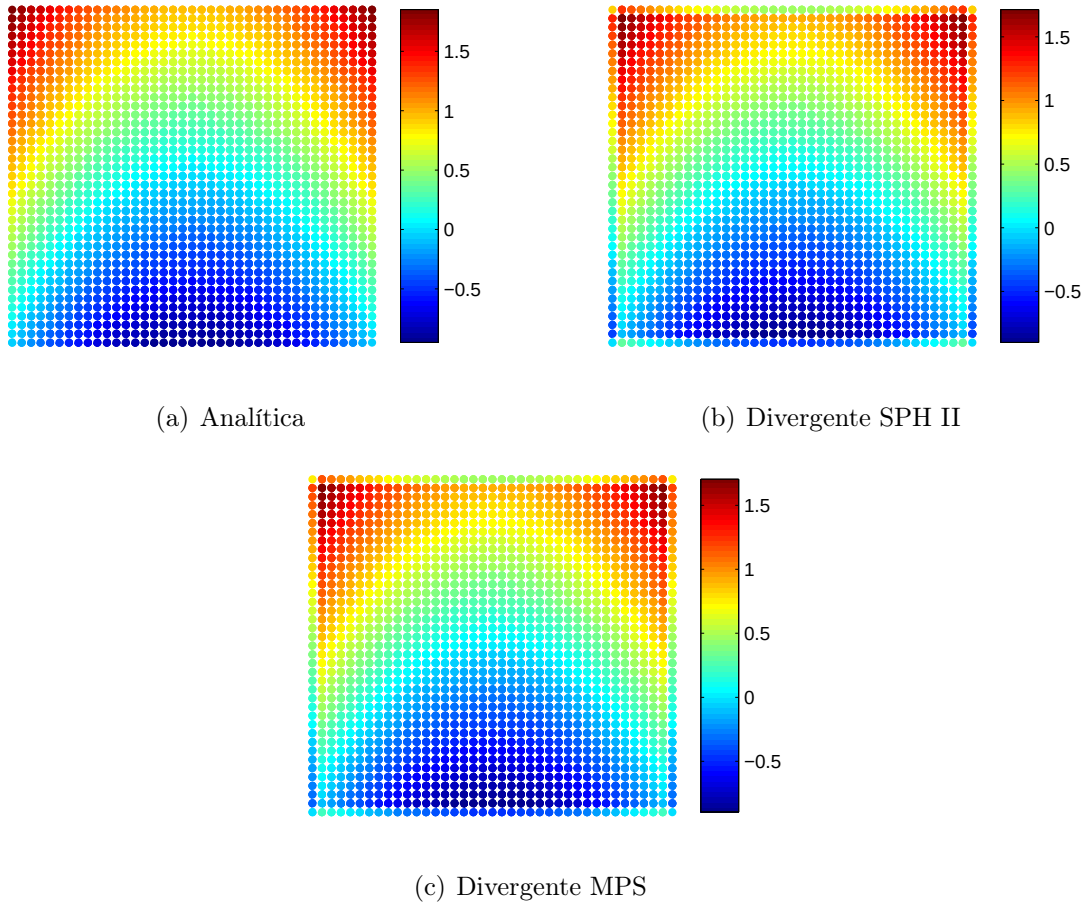


Figura 8.7: Gráficos dos divergente da função-teste (8.3).

Tabela 8.2: Erros máximo e mínimo da função-teste (8.3).

	Erro máximo	Erro mínimo
SPH	1.0082	$4.6384e - 06$
MPS	1.0865	$8.4817e - 04$

Conclusão

Através dos gráficos da Figura 8.7, dos histogramas da Figura 8.6 e Tabela 8.2 pode-se observar que há pouca diferença nos resultados entre os operadores (5.15) e (6.13), sendo o menor erro mínimo dado pelo operador divergente SPH II.

Divergente Nulo

A próxima função-teste, embora não seja constante, também tem divergente nulo. A propriedade 1 não pode ser utilizada para assegurar que o operador divergente (5.15) e (6.13) obtêm a solução exata.

A função-teste utilizada será:

$$\mathbf{T}(x, y) = (-\sin(\pi x) \cos(\pi y), \cos(\pi x) \sin(\pi y)). \quad (8.4)$$

A comparação do erro entre os métodos pode ser feita através do histograma apresentado na Figura 8.8 com auxílio da Tabela 8.3. Os gráficos da aproximação dos operadores divergente SPH II e MPS são mostrados na Figura 8.9.

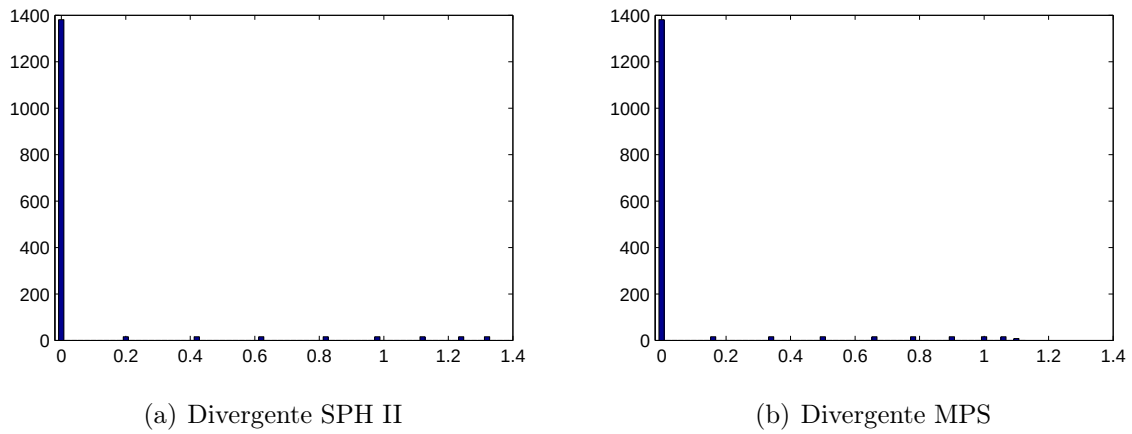


Figura 8.8: Histogramas de erros dos operador divergente SPH II e MPS da função-teste (8.4).

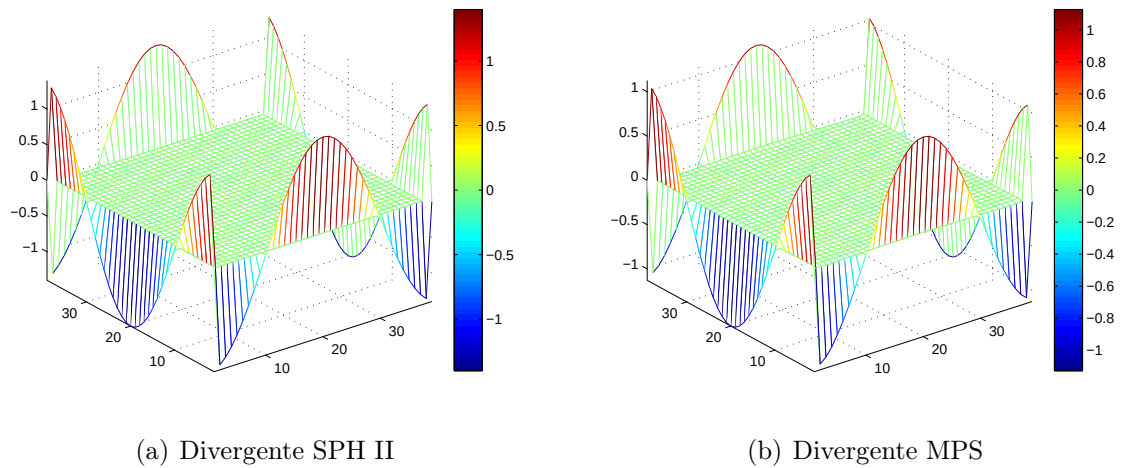


Figura 8.9: Gráficos das aproximações dos operadores SPH II e MPS da função-teste (8.4).

Tabela 8.3: Erros máximo e mínimo da função-teste (8.4).

	Erro máximo	Erro mínimo
SPH	1.3992	$2.5816e - 16$
MPS	1.1278	$1.4717e - 16$

Conclusão

Novamente pode-se observar através dos gráficos da Figura 8.9, dos histogramas da Figura 8.8 e da Tabela 8.3 que os operadores divergente (5.15) e (6.13) são satisfatórios.

Conclusão Final

Tanto o operador divergente SPH II (5.15) quanto o operador divergente MPS (6.13) foram bem satisfatórios em relação as funções-teste, mas o operador divergente MPS se mostrou um pouco melhor em relação ao erro mínimo. Portanto, ela é a melhor escolha para aproximar o operador divergente.

8.1.2 Operador Gradiente

De acordo com Petronetto [29] o operador gradiente que apresentou melhores resultados em sua análise é operador gradiente SPH II (5.22), tal operador será comparado com operador gradiente MPS (6.10). Lembrando do capítulo 5 e do capítulo 6 os operadores gradiente SPH II e MPS são dados respectivamente por:

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}_i) \rangle = \frac{1}{\rho_i} \left[\sum_{j \in V_i} m_j (f(\mathbf{x}_i) - f(\mathbf{x}_j)) \nabla_i W_{ij} \right] \quad (\text{SPH II})$$

e

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}_i) \rangle = \frac{d}{pnd^0} \sum_{j \in V_i} \left[\frac{f(\mathbf{x}_j) - f(\mathbf{x}_i)}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^2} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) W_{ji} \right]. \quad (\text{MPS})$$

Nos testes realizados para o operador gradiente SPH II foi utilizada a função kernel baseado na spline quíntica (5.38) com os parâmetros $k = 3$ e $h = 0.83dx$, sendo dx o espaçamento entre as partículas. Para o operador gradiente MPS foi utilizada a função peso proposta por Yoon (6.5) com $r_e = 2.1dx$.

Observação: Note que, as propriedades 1 e 2 da seção anterior, também são validas para o operador gradiente SPH II e para o operador gradiente MPS.

Gradiente Constante

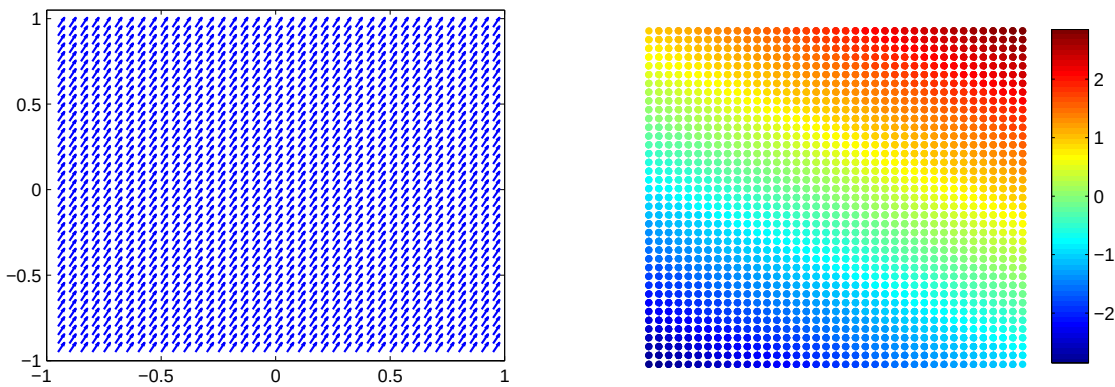
A primeira função-teste é dada por:

$$C(x, y) = x + 2y, \quad (8.5)$$

cujo gradiente é:

$$\nabla C(x, y) = (1, 2).$$

A Figura 8.10 apresenta no seu lado esquerdo o campo vetorial do gradiente analítico, e do lado direito o gráfico da função-teste C .



(a) Campo Vetorial do Gradiente Analítico

(b) Função-teste C

Figura 8.10: (a) campo do gradiente analítico da função-teste (8.5). (b) gráfico da função-teste (8.5).

A Figura 8.11 mostra a aproximação do campo gradiente através dos operadores SPH II e do MPS, respectivamente. Pode-se observar que as aproximações dos operadores SPH II e do operador MPS são semelhantes ao campo gradiente analítico. A Figura 8.12 mostra o histograma do erro de cada vetor.

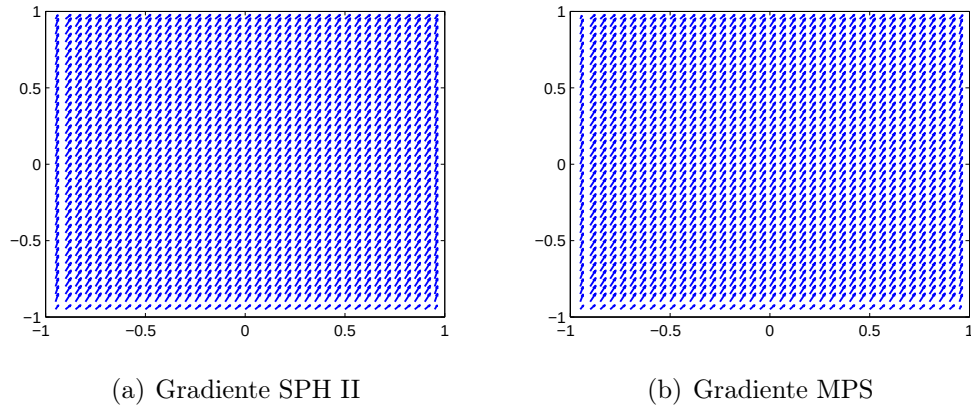


Figura 8.11: Gráficos da aproximação do campo gradiente dos operadores SPH II e MPS da função-teste (8.5).

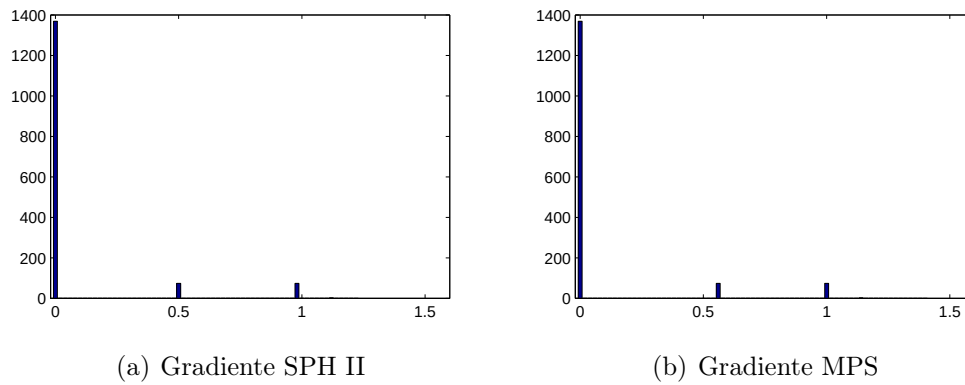


Figura 8.12: Histogramas de erros dos operadores gradiente SPH II e MPS da função-teste (8.5).

Tabela 8.4: Erros máximo e mínimo da função-teste (8.5).

	Erro máximo	Erro mínimo
SPH	1.1284	0.0045
MPS	1.4020	$1.4871e - 16$

Conclusão

Através dos histogramas apresentado na Figura 8.12 e na Tabela 8.4, nota-se pouca diferença entre os dois operadores gradiente, mas devido ao erro mínimo do operador gradiente MPS, conclui-se que para esta função-teste o operador gradiente MPS é melhor.

Gradiente Polinômio

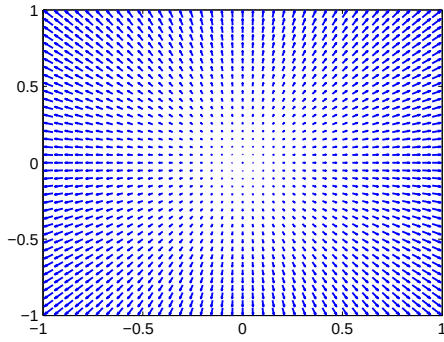
A segunda função-teste é dada por:

$$P(x, y) = x^2 + y^2, \quad (8.6)$$

cujos gradiente é:

$$\nabla P(x, y) = (2x, 2y).$$

O campo vetorial do gradiente da função P é dado na Figura 8.13(a) e o seu gráfico é apresentado na Figura 8.13(b).



(a) Campo Vetorial do Gradiente Analítico

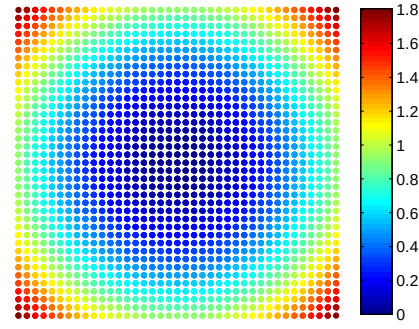
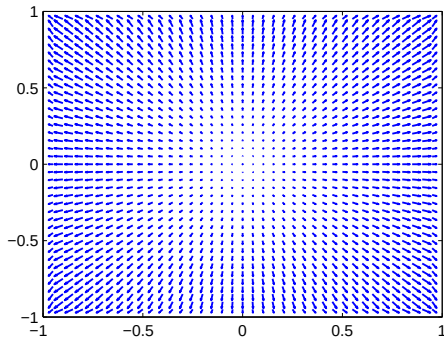
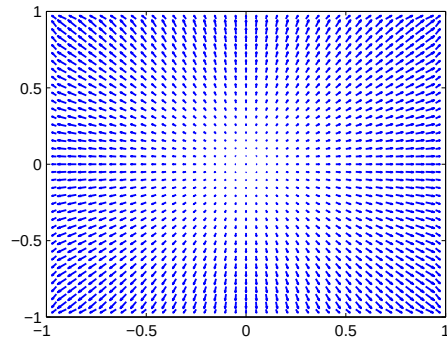
(b) Função-teste P

Figura 8.13: (a) campo do gradiente analítico da função-teste (8.6). (b) gráfico da função-teste (8.6).

Na Figura 8.14 são apresentados os campos vetoriais obtido pelos operadores gradiente (5.22) e (6.10). Note que, as aproximações dos operadores SPH II e MPS são semelhantes ao campo gradiente analítico.

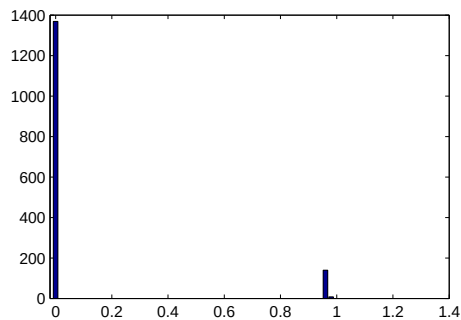


(a) Gradiente SPH II

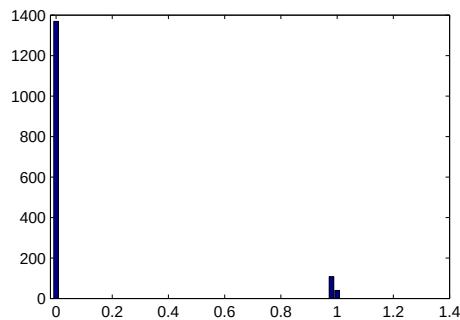


(b) Gradiente MPS

Figura 8.14: Gráficos das aproximações dos campos gradiente dos operadores SPH II e MPS da função-teste (8.6).



(a) Gradiente SPH II



(b) Gradiente MPS

Figura 8.15: Histogramas de erros dos operadores gradiente SPH II e MPS da função-teste (8.6).

Tabela 8.5: Erros máximo e mínimo da função-teste (8.6).

	Erro máximo	Erro mínimo
SPH	1.3762	$1.7347e - 18$
MPS	1.3791	$1.8724e - 18$

Conclusão

Através do histograma apresentado na Figura 8.15 e da Tabela 8.5, nota-se pouca diferença entre os dois operadores gradiente, mas analisando o histograma nota-se uma pequena vantagem do operador SPH II. Portanto, conclui-se para esta função-teste o operador SPH II obteve melhores resultados.

Gradiente Trigonométrico

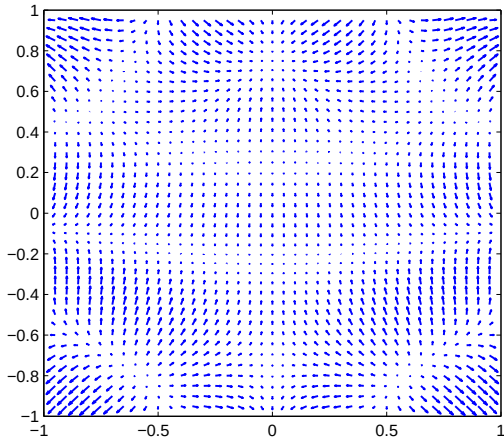
A última função-teste é dada por:

$$T(x, y) = \cos(2\pi xy) + x^2 - \frac{1}{2} \sin(2\pi y), \quad (8.7)$$

cujos gradiente é:

$$\nabla T(x, y) = (2x - 2\pi y \sin(2\pi xy), -\pi \cos(2\pi y) - 2\pi x \sin(2\pi xy)).$$

Na Figura 8.16(a) tem-se o campo vetorial do gradiente analítico e na Figura 8.16(b) é apresentado o gráfico da função-teste T .



(a) Campo Vetorial do Gradiente Analítico

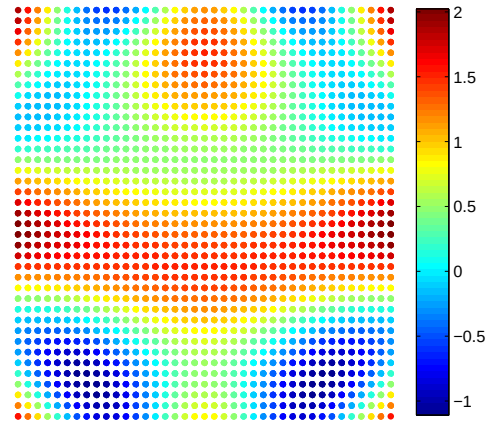
(b) Função-teste T

Figura 8.16: (a) campo do gradiente analítico da função-teste (8.7). (b) gráfico da função-teste (8.7).

A Figura 8.17 mostra a aproximação do campo gradiente através dos operadores gradiente SPH II e do MPS respectivamente. Pode-se observar que as aproximações dos operadores SPH II e MPS são semelhante ao campo gradiente analítico.

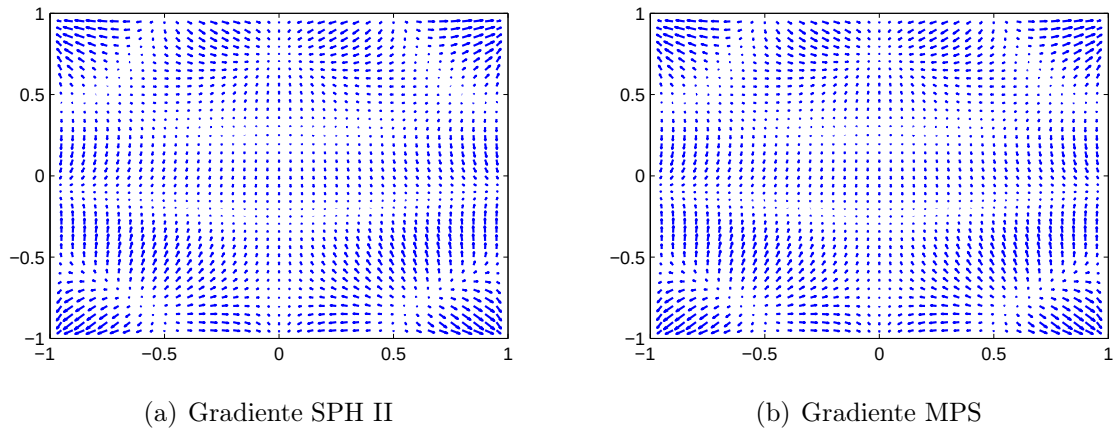


Figura 8.17: Gráficos das aproximações dos campos gradiente dos operadores SPH II (a) e do MPS (b) da função-teste (8.7).

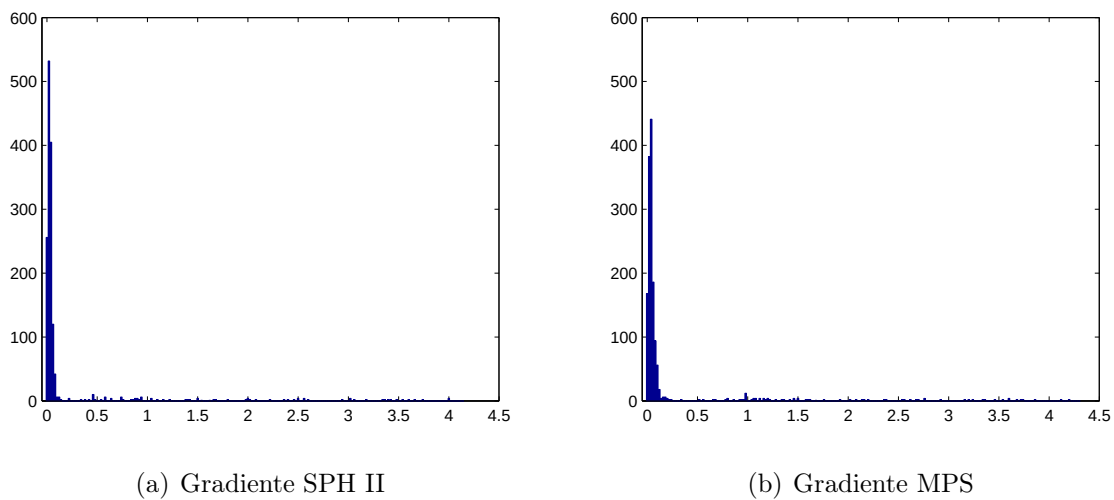


Figura 8.18: Histogramas de erros dos operadores gradiente SPH II e do MPS da função-teste (8.7).

Tabela 8.6: Erros máximo e mínimo da função-teste (8.7).

	Erro máximo	Erro mínimo
SPH	4.1415	0.0012
MPS	4.3044	0.0022

Conclusão

Através dos histogramas apresentados na Figura 8.18 e da Tabela 8.6, nota-se pouca diferença entre os dois operadores gradiente, mas pode-se concluir que o operador SPH II é um pouco melhor que o operador MPS.

Conclusão Final

Tanto o operador gradiente SPH II (5.22) quanto o operador gradiente MPS (6.10) se mostraram satisfatórios em relação as funções-teste, mas o operador gradiente SPH II

se mostrou um pouco melhor. Portanto, ele parece ser a melhor opção para aproximar o operador gradiente.

8.1.3 Operador Laplaciano

De acordo com Petronetto [29] o operador laplaciano que apresentou melhores resultados foi o operador laplaciano SPH III (5.33). Tal operador será comparado com operador laplaciano MPS (6.15). Lembrando do capítulo 5 e do capítulo 6 os operadores laplacianos são:

$$\langle \Delta f(\mathbf{x}_i) \rangle = 2 \sum_{j \in V_i} \frac{m_j}{\rho_j} \frac{f(\mathbf{x}_i) - f(\mathbf{x}_j)}{r_{ij}^2} \mathbf{x}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (\text{SPH III})$$

e

$$\langle \Delta f(\mathbf{x}_i) \rangle = \frac{2d}{pnd^0 \lambda} \sum_{j \neq i} (f(\mathbf{x}_j) - f(\mathbf{x}_i)) W_{ji}. \quad (\text{MPS})$$

Nos testes realizados para o operador laplaciano SPH III foi utilizada a função kernel new quártico (5.39) com os parâmetros $k = 2$ e $h = 1.3dx$, sendo dx o espaçamento entre as partículas. Para operador laplaciano MPS foi utilizada a função peso proposta por Koshizuka e Oka (6.4) com $r_e = 2.1dx$. para o cálculo do pnd^0 e $r_e = 1.495dx$ para o cálculo do laplaciano.

Observações:

1. O parâmetro λ para o caso bidimensional é facilmente calculado. Sabendo que $\delta V = \pi r^2$ e que $d\delta V = 2\pi r dr$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \int_{\delta V} W(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|; r_e) r^2 d\delta V &= \int_0^{r_e} \left(\frac{r_e}{r} - 1 \right) r^2 2\pi r dr = 2\pi \int_0^{r_e} (r_e r^2 - r^3) dr = \\ &= 2\pi \left(\frac{r_e r^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right)_0^{r_e} = 2\pi \left(\frac{r_e^4}{3} - \frac{r_e^4}{4} \right) = 2\pi \frac{r_e^4}{12} = \pi \frac{r_e^4}{6} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\delta V} W(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|; r_e) d\delta V &= \int_0^{r_e} \left(\frac{r_e}{r} - 1 \right) 2\pi r dr = 2\pi \int_0^{r_e} (r_e - r) dr = \\ &= 2\pi \left(r_e r - \frac{r^2}{2} \right)_0^{r_e} = 2\pi \left(r_e^2 - \frac{r_e^2}{2} \right) = 2\pi \frac{r_e^2}{2} = \pi r_e. \end{aligned}$$

Portanto, λ é dada pela seguinte expressão:

$$\lambda = \frac{r_e^2}{6}. \quad (8.8)$$

2. A equação (8.8) está de acordo com a função peso de Koshizuka e Oka; ela teria uma outra expressão para a função peso proposta por Yoon.

Função Quadrática

As comparações dos operadores laplaciano SPH iniciam-se com a seguinte função-teste:

$$P(x, y) = x^2 + y^2, \quad (8.9)$$

cujo laplaciano da função $C(x, y)$ é constante

$$\nabla^2 P(x, y) = 4.$$

A Figura 8.19 mostra os gráficos das aproximações através dos operadores laplaciano SPH III e do MPS respectivamente.

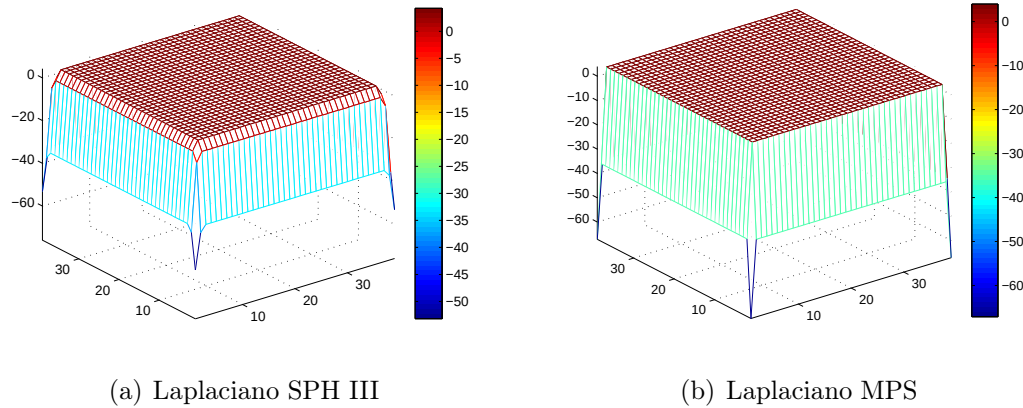


Figura 8.19: Gráficos das aproximações dos operadores laplaciano SPH III (a) e MPS (b) da função-teste (8.9).

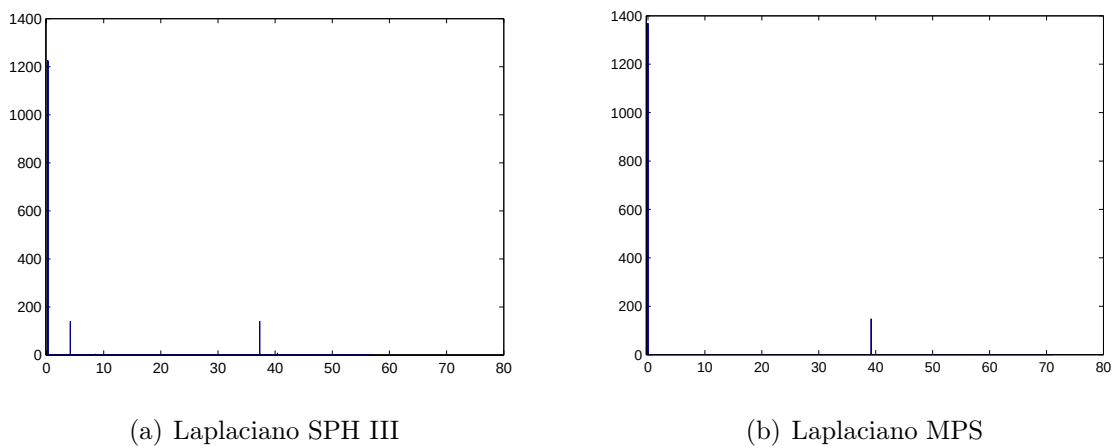


Figura 8.20: Histogramas de erros dos operadores laplaciano SPH III e do MPS da função-teste (8.9).

Tabela 8.7: Erros máximo e mínimo da função-teste (8.9).

	Erro máximo	Erro mínimo
SPH	57.1836	0.2521
MPS	71.0873	0.0015

8.1.3.1 Conclusão

Através dos histogramas da Figura 8.20 e da Tabela 8.7, pode-se observar pouca diferença entre os dois operadores laplaciano, mas devido ao erro mínimo do operador MPS, conclui-se para esta função-teste que operador MPS obteve melhores resultados.

Função Exponencial

E por fim, a última função-teste a se analisar será

$$E(x, y) = -e^x \sin(y), \quad (8.10)$$

cujo laplaciano é nulo.

A Figura 8.21 mostra os gráficos da aproximação através dos operadores laplaciano (5.33) e (6.15).

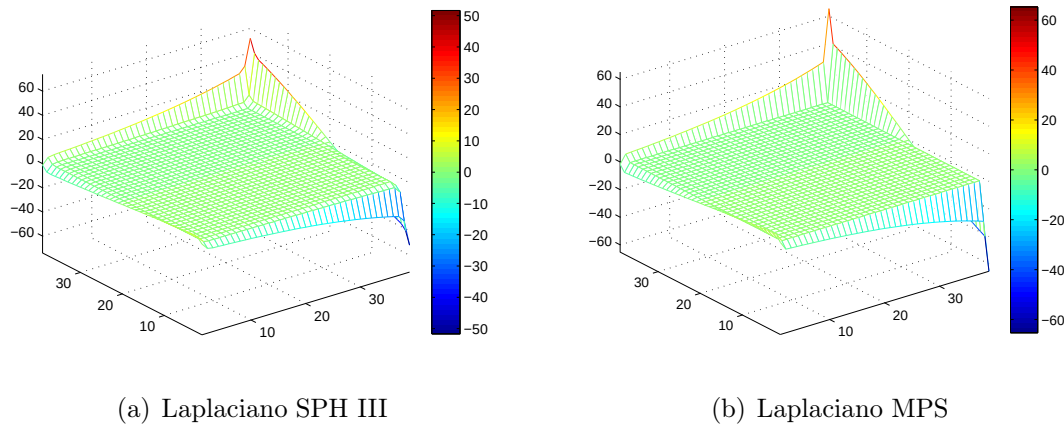


Figura 8.21: Gráficos das aproximações dos operadores laplaciano SPH III (a) e do MPS (b) da função-teste 8.10.

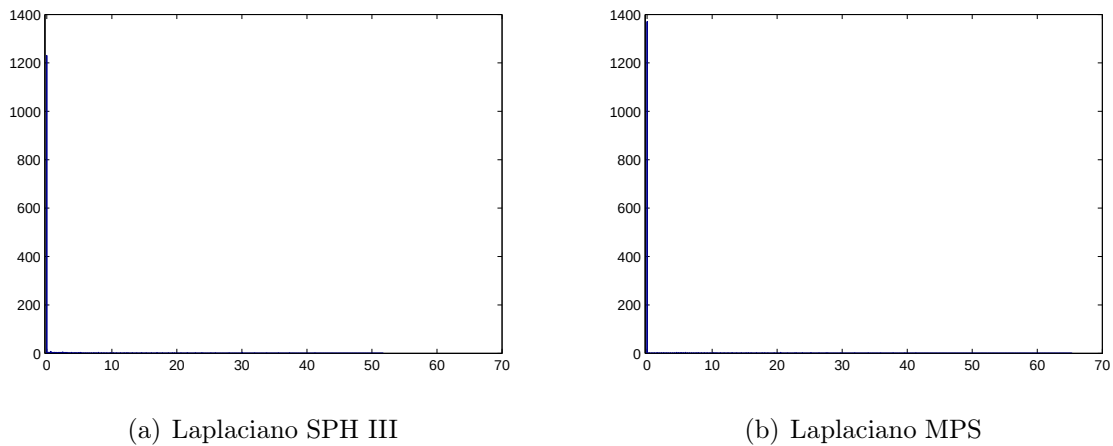


Figura 8.22: Histogramas de erros dos operadores laplaciano SPH III (a) e do MPS (b) da função-teste 8.10.

Tabela 8.8: Erros máximo e mínimo da função-teste (8.10).

	Erro máximo	Erro mínimo
SPH	51.6747	$2.4519e - 18$
MPS	65.2686	$1.0408e - 17$

Conclusão

Através do histograma da Figura 8.22 e da Tabela 8.8, observa-se nenhuma diferença entre os operadores.

Conclusão Final

Tanto o operador laplaciano SPH III (5.33) quanto o operador laplaciano MPS (6.15) foram bem satisfatórios em relação as funções-teste, mas o operador laplaciano MPS obteve melhores resultados.

8.2 Equações Clássicas Unidimensionais

8.2.1 Equação de Poisson

Seja Ω uma região em $\mathbb{R}^3$ limitada por uma superfície fechada $S = \partial\Omega$. A equação de Poisson representa a classe de EDPs do tipo elíptica e é dada por:

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}). \quad (8.11)$$

No caso de $f(\mathbf{x}) = 0$, é comum chamá-la de equação de Laplace. Funções que satisfazem a equação de Laplace são chamados de funções harmônicas.

Para que a equação de Poisson (8.11) esteja bem-posta, deve-se impor condições de contorno na região S . Quando a função $u(\mathbf{x})$ é explicitamente definida em todo o contorno, tem-se a condição de contorno de *Dirichlet*.

$$u(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in S.$$

No entanto, quando se tem variação da u na direção normal $\mathbf{n}$ à fronteira, a condição de contorno é dita ser do tipo *Neumann*.

$$\nabla u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in S.$$

A equação de Poisson ou equação do potencial é o modelo matemático de diversas aplicações tais como: distribuição de tensão em placas carregadas, distribuição de temperatura no caso estacionário, potencial gerado por cargas elétricas, entre outros.

Em dinâmica dos fluidos, quando se quer simular um escoamento incompressível geralmente a pressão $p(\mathbf{x})$ é atualizada através de equação de Poisson.

Como já mencionado, encontrar uma solução analítica para uma equação de Poisson é em geral uma tarefa difícil e nem sempre possível, portanto, recorre-se a métodos numéricos.

Tal equação está presente tanto no método ISPH quanto no método MPS. Portanto, para assegurar uma boa aproximação para ambos os métodos deve-se obter antes uma boa aproximação da equação de Poisson.

8.2.1.1 Discretizando a equação de Poisson usando o SPH

Considerando o problema (8.11), no método SPH, o domínio é discretizado por um conjunto finito de partículas. Substituindo o operador laplaciano SPH III (5.33) no problema (8.11) tem-se:

$$\sum_{j \in V_i} 2 \frac{m_j}{\rho_j} \frac{(u(\mathbf{x}_i) - u(\mathbf{x}_j))}{r_{ij}^2} \mathbf{x}_{ij} \cdot \nabla_i W(\mathbf{x}_{ij}; h) = f(\mathbf{x}_i). \quad (8.12)$$

Pode-se reescrever o gradiente da função núcleo como

$$\nabla_i W(\mathbf{x}_{ij}, h) = \frac{\alpha_{w,n} \mathbf{x}_{ij}}{h r_{ij}} \frac{\partial w_{ij}}{\partial R},$$

e consequentemente, a equação (8.10) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\sum_{j \in V_i} 2 \frac{m_j}{\rho_j} (u(\mathbf{x}_i) - u(\mathbf{x}_j)) \frac{\alpha_{w,n}}{hr_{ij}} \frac{\partial w}{\partial R} = f(\mathbf{x}_i).$$

Uma maneira mais simplificada de reescrever a equação acima é

$$\sum_{j \in V_i} 2 \frac{m_j}{\rho_j} (u(\mathbf{x}_i) - u(\mathbf{x}_j)) F(\mathbf{x}_{ij}) = f(\mathbf{x}_i), \quad (8.13)$$

sendo

$$F(\mathbf{x}_{ij}) = \frac{\alpha_{w,n}}{hr_{ij}} \frac{\partial w_{ij}}{\partial R}.$$

A equação (8.13) aplicada a cada partícula i do domínio do problema resulta no seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j \in V_1} 2 \frac{m_j}{\rho_j} (u(\mathbf{x}_1) - u(\mathbf{x}_j)) F(\mathbf{x}_{1j}) = f(\mathbf{x}_1) \\ \sum_{j \in V_2} 2 \frac{m_j}{\rho_j} (u(\mathbf{x}_2) - u(\mathbf{x}_j)) F(\mathbf{x}_{2j}) = f(\mathbf{x}_2) \\ \vdots \\ \sum_{j \in V_n} 2 \frac{m_j}{\rho_j} (u(\mathbf{x}_n) - u(\mathbf{x}_j)) F(\mathbf{x}_{nj}) = f(\mathbf{x}_n) \end{array} \right. , \quad (8.14)$$

sendo n o número de partículas que discretizam o domínio. O sistema linear de equações (8.14) é representado matricialmente por

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{b}.$$

A matriz $\mathbf{A}$ tem dimensão $n \times n$ e é representada pelos seguinte coeficientes

$$a_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\},$$

cujos valores são:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{ij} = -2 \frac{m_j}{\rho_j} F(\mathbf{x}_{ij}), \quad j \neq i \\ a_{ii} = -\sum_{k \neq i} a_{ik} \end{array} \right. . \quad (8.15)$$

O vetor $\mathbf{u}$ é de dimensão n e é conhecido como vetor solução, as entradas do vetor são dadas por:

$$u_i = u(\mathbf{x}_i).$$

O vetor $\mathbf{b}$ também de dimensão n é chamado de vetor independente cuja as entradas do vetor são:

$$b_i = f(\mathbf{x}_i).$$

8.2.1.2 Discretizando a equação de Poisson usando o MPS

De forma análoga ao método SPH, no método MPS o domínio é discretizado por um conjunto finito de partículas. Substituindo o operador laplaciano MPS (6.15) ao problema (8.11) tem-se:

$$\frac{2d}{n_0\lambda} \sum_{j \neq i} (u(\mathbf{x}_j) - u(\mathbf{x}_i)) W_{ji} = f(\mathbf{x}_i). \quad (8.16)$$

A equação (8.16) aplicada a cada partícula i do domínio resulta no seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j \neq 1} \frac{2d}{n_0\lambda} (u(\mathbf{x}_j) - u(\mathbf{x}_1)) W_{j1} = f(\mathbf{x}_1). \\ \sum_{j \neq 2} \frac{2d}{n_0\lambda} (u(\mathbf{x}_j) - u(\mathbf{x}_2)) W_{j2} = f(\mathbf{x}_2). \\ \vdots \\ \sum_{j \neq n} \frac{2d}{n_0\lambda} (u(\mathbf{x}_j) - u(\mathbf{x}_n)) W_{jn} = f(\mathbf{x}_n). \end{array} \right. , \quad (8.17)$$

sendo n o número de partículas que discretizam o domínio. O sistema linear de equações (8.17) é representado matricialmente por

$$A \cdot \mathbf{u} = \mathbf{b}.$$

De forma análoga ao método SPH a matriz A tem dimensão $n \times n$ e é representada pelos seguintes coeficientes

$$a_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\},$$

cujos valores dos coeficientes são:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{ij} = \frac{2d}{n_0\lambda} W_{ji}, \quad j \neq i \\ a_{ii} = -\sum_{k \neq i} a_{ik} \end{array} \right.$$

Os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{b}$ são o vetor solução e o vetor independente respectivamente; eles são análogo ao do método SPH.

8.2.1.3 Exemplos de equação de Poisson com condição de Dirichlet

Exemplo 1 Considere o seguinte problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x) &= -\cos(x), \quad 0 \leq x \leq \pi \\ u(0) &= 1 \quad e \quad u(\pi) = -1, \end{aligned} \quad (8.18)$$

cujas soluções são $u(x) = \cos(x)$.

Na Figura 8.23 tem-se o gráfico das soluções aproximadas do problema (8.18). Nas soluções aproximadas usando o método SPH foram utilizados os seguintes parâmetros $k = 2$ e $h = 0.9999dx$ para os núcleos spline cúbica e new quártico e $k = 3$ e $h = 0.666dx$

para o núcleo spline quártico. Para o método MPS foi utilizada a função peso de Yoon (6.5) com o parâmetro $r_e = 1.1dx$.

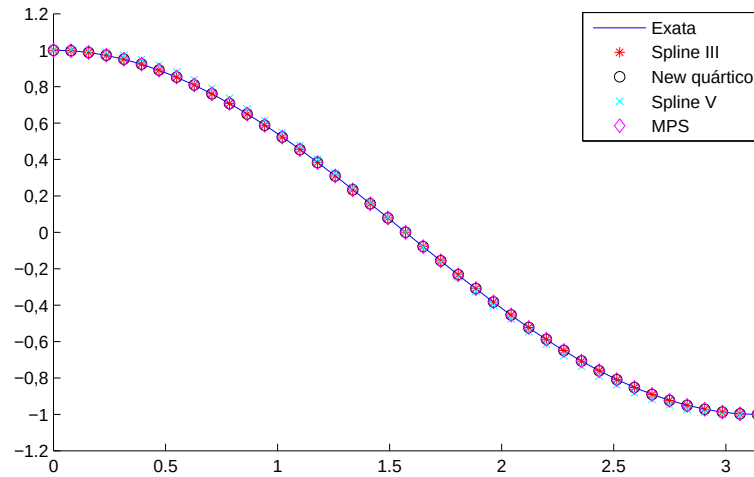


Figura 8.23: Gráfico da solução da equação de Poisson (8.18) com 40 partículas.

Na Tabela 8.9 são apresentados os erros absolutos dos métodos SPH e MPS e a ordem de convergência dos métodos. Note que, os erros produzidos pelo método MPS e pelo método SPH utilizando a spline cúbica foram os mesmos.

Tabela 8.9: Erros dos métodos SPH e MPS para a equação de Poisson (8.18).

	Spline III	$\mathcal{O}$	New quártico	$\mathcal{O}$	Spline V	$\mathcal{O}$	MPS
10	0.0039	-	0.0039	-	0.0709	-	0.0039
20	0.0014	1.4780	0.0014	1.4780	0.0956	-0.4312	0.0014
40	$4.906e-04$	1.5126	$4.835e-04$	1.5338	0.1335	-0.4818	$4.906e-04$
80	$1.734e-04$	1.5003	$1.633e-04$	1.5659	0.1882	-0.4954	$1.734e-04$
160	$6.131e-05$	1.5001	$4.700e-05$	1.7968	0.2660	-0.4992	$6.131e-05$

Exemplo 2 Considere o seguinte problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2e^x \cos(x), \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (8.19)$$

$$u(0) = 0 \quad e \quad u(\pi) = 0,$$

cujas soluções são $u(x) = e^x \sin(x)$.

Na Figura 8.24 mostra-se o gráfico das soluções aproximadas do problema (8.19). As mesmas funções núcleo com os mesmos parâmetros foram utilizadas nas simulações desse problema para o método SPH e para o método MPS também.

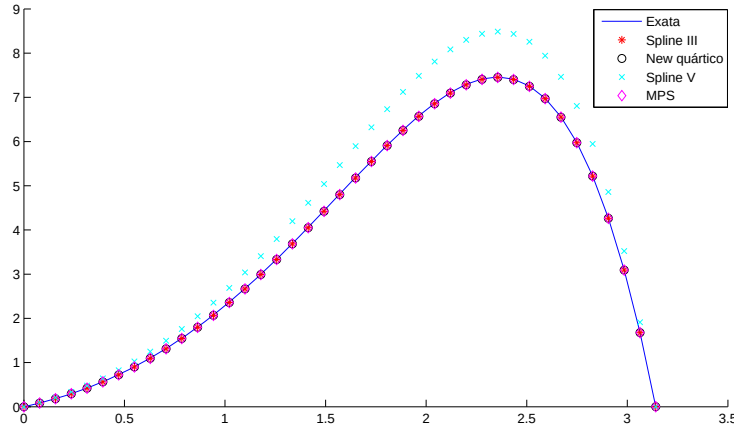


Figura 8.24: Gráfico da solução da equação de Poisson (8.19) com 40 partículas.

Na Tabela 8.10 são apresentados os erros absolutos dos métodos SPH e MPS e a ordem de convergência dos métodos. Note que, os erros produzidos pelo método MPS e pelo método SPH utilizando a spline cúbica foram os mesmos.

Tabela 8.10: Erros dos métodos SPH e MPS para a equação de Poisson (8.19).

	Spline III	$\mathcal{O}$	New quártico	$\mathcal{O}$	Spline V	$\mathcal{O}$	MPS
10	0.4208	-	0.4218	-	1.5978	-	0.4208
20	0.1482	1.5056	0.1496	1.4954	2.7182	-0.7666	0.1482
40	0.0524	1.4999	0.0544	1.4594	4.0088	-0.5605	0.0524
80	0.0185	1.5020	0.0214	1.3460	5.7276	-0.5148	0.0185
160	0.0065	1.5090	0.0107	1.000	8.1208	-0.5037	0.0065

Observações:

1. Foram utilizadas apenas duas partículas vizinhas, ou seja, $V_i = \{x_{i-1}, x_{i+1}\}$.
2. A matriz A do sistema linear é uma matriz tridiagonal, definida positiva, semelhante ao do método de diferenças finitas.
3. No método SPH, para funções núcleo spline cúbica e new quártico quanto mais próximo h estava de dx melhor era aproximação.
4. A função proposta por Koshikuza e Oka (6.4) e a proposta por Yoon (6.5) obtiveram os mesmo resultados.
5. Supondo que $h_2 < h_1$ pode-se calcular a ordem de convergência pela seguinte expressão:

$$p = \frac{\log(E(h_2)/E(h_1))}{\log(h_2/h_1)},$$

sendo $E(h_1)$ e $E(h_2)$ a norma do erro nas malhas com espaçamento h_1 e h_2 , respectivamente.

8.2.1.4 Exemplos de equação de Poisson com condição de Neumann

Exemplo 3 Considere o seguinte problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x) &= -\cos(x), \quad 0 \leq x \leq \pi \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0) &= 0 \quad e \quad u(\pi) = -1, \end{aligned} \quad (8.20)$$

cuja a solução é $u(x) = \cos(x)$.

Na Figura 8.25 tem-se o gráfico das soluções aproximadas do problema (8.20). Nas soluções aproximadas usando o método SPH foram utilizados os seguintes parâmetros $k = 2$ e $h = 0.99999dx$ para os núcleos spline cúbica e new quártico e $k = 3$ e $h = 0.666dx$ para o núcleo spline quártico. Para o método MPS foi utilizada a função peso de Yoon (6.5) com o parâmetro $r_e = 1.1dx$.

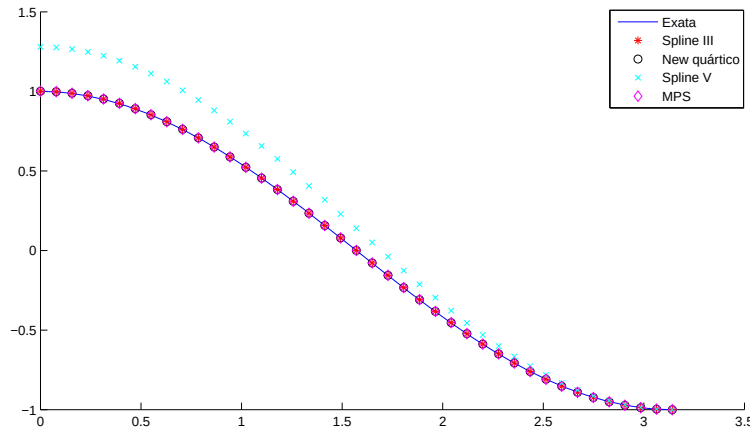


Figura 8.25: Gráfico da solução da equação de Poisson (8.20) com 40 partículas.

Na Tabela 8.11 tem-se o erro absoluto dos métodos SPH e MPS e a ordem de convergência dos métodos.

Tabela 8.11: Erros dos métodos SPH e MPS para a equação de Poisson (8.20).

	Spline III	$\mathcal{O}$	New quártico	$\mathcal{O}$	Spline V	$\mathcal{O}$	MPS
10	0.0341	-	0.0340	-	0.6075	-	0.0341
20	0.0116	1.5556	0.0116	1.5514	0.7935	-0.3853	0.0116
40	0.0040	1.5361	0.0040	1.5361	1.0907	-0.4590	0.0040
80	0.0014	1.5146	0.0013	1.6215	1.5251	-0.4836	0.0014
160	$4.99e - 04$	1.4851	$3.83e - 04$	1.7626	2.1463	-0.4929	$4.99e - 04$

Exemplo 4 Considere o seguinte problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 2e^x \cos(x), \quad 0 \leq x \leq \pi \\ u(0) &= 0 \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi) = -e^\pi, \end{aligned} \quad (8.21)$$

cuja a solução é $u(x) = e^x \sin(x)$.

Na Figura 8.26 tem-se o gráfico das soluções aproximadas do problema (8.21). As mesmas funções núcleo com os mesmos parâmetros foram utilizadas nas simulações desse problema para o método SPH e para o método MPS também.

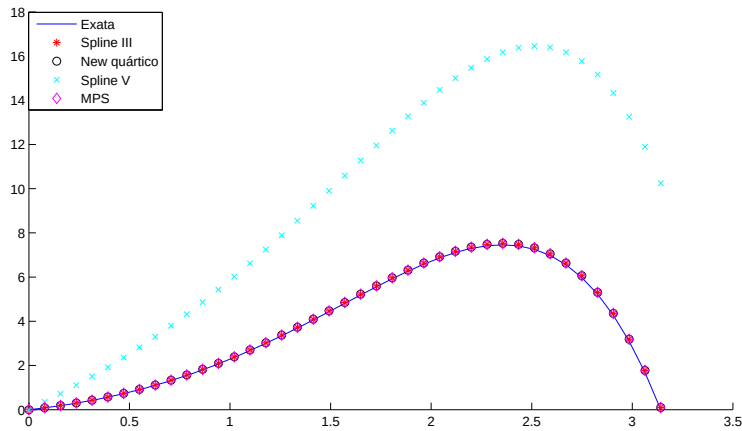


Figura 8.26: Gráfico da solução da equação de Poisson (8.21) com 40 partículas.

Na Tabela 8.12 são apresentados os erros absolutos dos métodos SPH e MPS e a ordem de convergência dos métodos.

Tabela 8.12: Erros dos métodos SPH e MPS para a equação de Poisson (8.21).

	Spline III	$\mathcal{O}$	New quártico	$\mathcal{O}$	Spline V	$\mathcal{O}$	MPS
10	2.8237	-	2.8225	-	24.7970	-	2.8237
20	0.9530	1.5670	0.9514	1.5688	30.7829	-0.3120	0.9530
40	0.3291	1.5340	0.3269	1.5412	41.7677	-0.4403	0.3291
80	0.1150	1.5169	0.1119	1.5466	58.2326	-0.4794	0.1150
160	0.0404	1.5092	0.0360	1.6361	81.9024	-0.4921	0.0404

Observações:

1. Foi usado o conceito de partículas *dummy* para representar a condição de Contorno de Neumann. Tais partículas foram aproximadas utilizando diferenças centrais.
2. A matriz A não é mais simétrica, mas continua sendo definida positiva.

Conclusão

Os resultados obtidos pelo método MPS e pelo método SPH utilizando as funções núcleo spline III e new quártico foram satisfatórios, tanto nos problemas de condição de contorno do tipo Dirichlet quanto as do tipo Neumann.

8.2.2 Equação do Calor

As EDPs do tipo parabólica modelam fenômenos que evoluem com o tempo. A equação fundamental das EDPs do tipo parabólica é a equação do calor dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad \alpha(x, t) > 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq t \leq T \quad (8.22)$$

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad \text{condição inicial.}$$

As condições de contorno para a equação do calor, podem ser ou tipo Dirichlet ou do tipo Neumann ou uma combinação dos dois quando é chamada condição de contorno mista.

8.2.2.1 Métodos de integração temporal

Para se obter a solução aproximada da equação do calor, além de utilizar as aproximações dos operadores laplaciano dos Métodos SPH e do MPS, tem que se aproximar o termo temporal da equação. Esse termo pode ser aproximado de diversas maneiras, nesta seção serão apresentados o método Euler progressivo, método Euler regressivo e o método de Crank-Nicolson, para mais detalhes ver [8].

Método de Euler progressivo

O método de Euler progressivo já foi apresentado no capítulo 5 e o termo temporal é aproximado por:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) \approx \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\delta t}. \quad (8.23)$$

Método SPH

Substituindo (8.23) e (5.33) na equação do calor (8.22) obtêm-se:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\delta t} = 2\alpha \sum_{j \in V_i} \frac{m_j}{\rho_j} \frac{U_i^n - U_j^n}{r_{ij}^2} \mathbf{x}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}. \quad (8.24)$$

No caso unidimensional, toma-se o domínio de influência de tal forma que $V_i = \{x_{i-1}, x_{i+1}\}$, ou seja, a aproximação da partícula i depende apenas das partículas x_{i-1} e x_{i+1} , então reescrevendo a equação (8.24) tem-se:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \sigma(U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n), \quad (8.25)$$

sendo

$$\sigma = 2\alpha \frac{m_j}{\rho_j} \frac{\delta t}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial R}.$$

Método MPS

De forma análoga, pode-se substituir na equação do calor (8.22) o operador laplaciano MPS (6.15) e a derivada temporal pela equação (8.23), assim tem-se:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\delta t} = \alpha \frac{2d}{n_0 \lambda} \sum_{j \in V_i} (U_j^n - U_i^n) W_{ji}. \quad (8.26)$$

Da mesma forma, toma-se o domínio de influência $V_i = \{x_{i-1}, x_{i+1}\}$, então após algumas manipulações pode-se reescrever a equação (8.26) como:

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \theta(U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n), \quad (8.27)$$

sendo

$$\theta = \alpha \frac{2\delta t}{n_0 \lambda} W_{ji}.$$

Critério de Von Neumann

Este critério é utilizado para determinar a estabilidade de um método numérico. Ele é baseado no princípio da superposição, isto é, o erro global é a soma de erros mais simples também chamados de harmônicos. Tendo representado o erro no passo inicial, para analisar a sua propagação ao longo dos passos subsequentes, basta analisar a propagação de um harmônico genérico dado por:

$$e^{\lambda n} e^{I\beta i},$$

sendo $I = \sqrt{-1}$, β um número real, λ um número complexo, ambos arbitrários. A estratégia do critério de Von Neumann é examinar o resultado da propagação em uma linha ou estágio subsequente. Se houver ampliação desse harmônico o método é dito ser instável, se houver um amortecimento ele é dito ser estável.

Observações:

1. O critério de Von Neumann só deve ser usado quando a equação for linear com coeficientes constantes.
2. O critério ignora completamente qualquer influência das condições de contorno.
3. O critério só produz uma condição necessária para a estabilidade.
4. Na prática tem-se que $U_i^n = e^{\lambda n} e^{I\beta i}$.

Método SPH

Aplicando o critério de Von Neumann na equação (8.25) obtêm-se:

$$\begin{aligned} e^{\lambda(n+1)} e^{I\beta i} &= e^{\lambda n} e^{I\beta i} - \sigma e^{\lambda n} e^{I\beta(i-1)} + 2\sigma e^{\lambda n} e^{I\beta i} - \sigma e^{\lambda n} e^{I\beta(i+1)} \\ \Rightarrow e^{\lambda n} e^{I\beta i} e^{\lambda} &= e^{\lambda n} e^{I\beta i} - \sigma e^{\lambda n} e^{I\beta i} e^{-I\beta} + 2\sigma e^{\lambda n} e^{I\beta i} - \sigma e^{\lambda n} e^{I\beta i} e^{I\beta} \\ &\Rightarrow e^{\lambda} = 1 + 2\sigma - \sigma(e^{I\beta} + e^{-I\beta}) \\ &\Rightarrow e^{\lambda} = 1 + 2\sigma - 2\sigma \cos(\beta) \\ &\Rightarrow e^{\lambda} = 1 - 2\sigma(\cos(\beta) - 1) \\ &\Rightarrow e^{\lambda} = 1 + 4\sigma \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right). \end{aligned}$$

Para que o método seja estável $|e^{\lambda}| \leq 1$. Note que, $e^{\lambda} \leq 1$ sempre, pois $\sigma \leq 0$, devido a derivada da função núcleo ser negativa ou igual a zero. Para o caso $-1 \leq e^{\lambda}$ tem-se:

$$\begin{aligned} -1 \leq e^{\lambda} &\Rightarrow -1 \leq 1 + 4\sigma \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \Rightarrow -2 \leq 4\sigma \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ &\Rightarrow -\frac{1}{2 \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)} \leq \sigma \Rightarrow -\sigma \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, para que a equação (8.16) possa ser estável $-\sigma \leq \frac{1}{2}$, esta condição nos dá uma restrição para o passo temporal que é:

$$\delta t \leq -\frac{1}{4\alpha} \frac{\partial W_{ij}}{\partial R}.$$

Método MPS

Aplicando o critério de Von Neumann na equação (8.27) obtêm-se:

$$\begin{aligned}
e^{\lambda(n+1)} e^{I\beta i} &= e^{\lambda n} e^{I\beta i} + \theta e^{\lambda n} e^{I\beta(i-1)} - 2\theta e^{\lambda n} e^{I\beta i} + \theta e^{\lambda n} e^{I\beta(i+1)} \\
\Rightarrow e^{\lambda n} e^{I\beta i} e^\lambda &= e^{\lambda n} e^{I\beta i} + \theta e^{\lambda n} e^{I\beta i} e^{-I\beta} - 2\theta e^{\lambda n} e^{I\beta i} + \theta e^{\lambda n} e^{I\beta i} e^{I\beta} \\
&\Rightarrow e^\lambda = 1 - 2\theta + \theta(e^{I\beta} + e^{-I\beta}) \\
&\Rightarrow e^\lambda = 1 - 2\theta + 2\theta \cos(\beta) \\
&\Rightarrow e^\lambda = 1 + 2\theta(\cos(\beta) - 1) \\
&\Rightarrow e^\lambda = 1 - 4\theta \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right).
\end{aligned}$$

De forma análoga, para que o método possa estável $|e^\lambda| \leq 1$. Note que, $e^\lambda \leq 1$ sempre, pois $\sigma \geq 0$. Para o caso $-1 \leq e^\lambda$ tem-se:

$$\begin{aligned}
-1 \leq e^\lambda &\Rightarrow -1 \leq 1 - 4\theta \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \Rightarrow -2 \leq -4\theta \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \\
4\theta \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) &\leq 2 \Rightarrow \theta \leq \frac{1}{2 \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)} \Rightarrow \theta \leq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto, para que a equação (8.27) possa ser estável $\theta \leq \frac{1}{2}$, esta condição nos dá uma restrição para o passo temporal que é:

$$\delta t \leq \frac{n^0 \lambda}{4\alpha W_{ji}}.$$

Método Implícito

O método Euler regressivo é um método implícito cujo o termo temporal é aproximado por:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) \approx \frac{U_i^n - U_i^{n-1}}{\delta t} \quad (8.28)$$

Método SPH

Substituindo as equações (8.28) e (5.33) na equação do calor (8.22) obtêm-se:

$$\frac{U_i^n - U_i^{n-1}}{\delta t} = 2\alpha \sum_{j \in V_i} \frac{m_j}{\rho_j} \frac{U_i^n - U_j^n}{r_{ij}^2} \mathbf{x}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (8.29)$$

De forma análoga ao método explícito, toma-se o domínio de influência $V_i = \{x_{i-1}, x_{i+1}\}$, então após algumas manipulações pode-se reescrever a (8.29) como:

$$\sigma U_{i-1}^n + U_i^n (1 - 2\sigma) + \sigma U_{i+1}^n = U_i^{n-1}. \quad (8.30)$$

Aplicando o critério de Von Neumann na equação (8.30) tem-se:

$$\begin{aligned}
\sigma e^{\lambda n} e^{I\beta(i-1)} + (1 - 2\sigma) e^{\lambda n} e^{I\beta i} + \sigma e^{\lambda n} e^{I\beta(i+1)} &= e^{\lambda(n-1)} e^{I\beta i} \\
\Rightarrow \sigma e^{\lambda n} e^{I\beta i} e^{-I\beta} + (1 - 2\sigma) e^{\lambda n} e^{I\beta i} + \sigma e^{\lambda n} e^{I\beta i} e^{I\beta} &= e^{\lambda n} e^{-\lambda} e^{I\beta i} \\
\Rightarrow 1 - 2\sigma + \sigma(e^{I\beta} + e^{-I\beta}) &= e^{-\lambda} \\
\Rightarrow 1 - 2\sigma + 2\sigma \cos(\beta) &= e^{-\lambda} \\
\Rightarrow 1 + 2\sigma(\cos(\beta) - 1) &= e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 1 - 4\sigma \sin^2 \left(\frac{\beta}{2} \right) = e^{-\lambda}$$

$$e^{\lambda} = \frac{1}{1 - 4\sigma \sin^2 \left(\frac{\beta}{2} \right)}.$$

Lembrando que $\sigma \leq 0$, a condição de estabilidade ($|e^{\lambda}| \leq 1$) é satisfeita para todo σ , quando isso acontece diz que o método é incondicionalmente estável.

Método MPS

Substituindo as equações (8.28) e (6.15) na equação do calor (8.22) obtêm-se:

$$\frac{U_i^n - U_i^{n-1}}{\delta t} = \alpha \frac{2d}{n_0 \lambda} \sum_{j \in V_i} (U_j^n - U_i^n) W_{ji}. \quad (8.31)$$

Considerando $V_i = \{x_{i-1}, x_{i+1}\}$ e após algumas manipulações pode-se reescrever a equação (8.31) da seguinte maneira

$$-\theta U_{i+1}^n + (1 + 2\theta)U_i^n - \theta U_{i-1}^n = U_i^{n-1} \quad (8.32)$$

Aplicando o critério de Von Neumann na equação (8.25) tem-se:

$$\begin{aligned} -\theta e^{\lambda n} e^{I\beta(i-1)} + (1 + 2\theta)e^{\lambda n} e^{I\beta i} + \theta e^{\lambda n} e^{I\beta(i+1)} &= e^{\lambda(n-1)} e^{I\beta i} \\ \Rightarrow -\theta e^{\lambda n} e^{I\beta i} e^{-I\beta} + (1 + 2\theta)e^{\lambda n} e^{I\beta i} - \theta e^{\lambda n} e^{I\beta i} e^{I\beta} &= e^{\lambda n} e^{-\lambda} e^{I\beta i} \\ \Rightarrow 1 + 2\theta - \theta(e^{I\beta} + e^{-I\beta}) &= e^{-\lambda} \\ \Rightarrow 1 + 2\theta - 2\theta \cos(\beta) &= e^{-\lambda} \\ \Rightarrow 1 - 2\theta(\cos(\beta) - 1) &= e^{-\lambda} \\ \Rightarrow 1 + 4\theta \sin^2 \left(\frac{\beta}{2} \right) &= e^{-\lambda} \\ e^{\lambda} &= \frac{1}{1 + 4\theta \sin^2 \left(\frac{\beta}{2} \right)}. \end{aligned}$$

A condição de estabilidade $|e^{\lambda}| \leq 1$ é satisfeita para todo θ , portanto o método é incondicionalmente estável.

Método de Crank-Nicolson para o SPH

No método de Crank-Nicolson a derivada segunda de u é dado por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{1}{2} \left[2 \sum_{j \in V_i} \frac{m_j}{\rho_j} \frac{U_i^n - U_j^n}{r_{ij}^2} \mathbf{x}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij} + 2 \sum_{j \in V_i} \frac{m_j}{\rho_j} \frac{U_i^{n+1} - U_j^{n+1}}{r_{ij}^2} \mathbf{x}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij} \right]$$

e a derivada temporal é aproximada pelo método de Euler progressivo (8.23), mas como a derivada segunda de u é uma média tem-se um sistema de equações caracterizando assim um método implícito. Considerando $V_i = \{x_{i-1}, x_{i+1}\}$ e após algumas manipulações tem-se:

$$\sigma U_{i-1}^{n+1} + (2 - 2\sigma)U_i^{n+1} + \sigma U_{i+1}^{n+1} = -\sigma U_{i-1}^n + (2 + 2\sigma)U_i^n - \sigma U_{i+1}^n. \quad (8.33)$$

Aplicando o critério de Von Neumann na equação (8.33) obtêm-se:

$$\begin{aligned}
\sigma e^\lambda e^{\lambda n} e^{I\beta i} e^{-I\beta} + (2 - 2\sigma) e^\lambda e^{\lambda n} + \sigma e^\lambda e^{\lambda n} e^{I\beta i} e^{I\beta} &= -\sigma e^{\lambda n} e^{I\beta i} e^{-I\beta} + (2 + 2\sigma) e^{\lambda n} - \sigma e^{\lambda n} e^{I\beta i} e^{I\beta} \\
\Rightarrow e^\lambda (\sigma e^{-I\beta} + (2 - 2\sigma) + \sigma e^{I\beta}) &= -\sigma e^{-I\beta} + (2 + 2\sigma) - \sigma e^{I\beta} \\
\Rightarrow e^\lambda (2 - 2\sigma + 2\sigma \cos(\beta)) &= 2 + 2\sigma - 2\sigma \cos(\beta) \\
\Rightarrow e^\lambda (2 + 2\sigma (\cos(\beta) - 1)) &= 2 - 2\sigma (\cos(\beta) - 1) \\
\Rightarrow e^\lambda (2 - 4\sigma \sin^2 \left(\frac{\beta}{2} \right)) &= 2 + 4\sigma \sin^2 \left(\frac{\beta}{2} \right) \\
\Rightarrow e^\lambda &= \frac{2 + 4\sigma \sin^2 \left(\frac{\beta}{2} \right)}{2 - 4\sigma \sin^2 \left(\frac{\beta}{2} \right)}.
\end{aligned}$$

Lembrando que $\sigma \leq 0$, pode-se concluir que o método de Crank-Nicolson para o SPH é incondicionalmente estável, pois $|e^\lambda| \leq 1$ sempre é satisfeita para todo σ .

Método de Crank-Nicolson para o MPS

No método de Crank-Nicolson a derivada segunda de u é dado por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{1}{2} \left[\frac{2d}{n^0 \lambda} \sum_{j \in V_i} (U_j^n - U_i^n) W_{ji} + \frac{2d}{n^0 \lambda} \sum_{j \in V_i} (U_j^{n+1} - U_i^{n+1}) W_{ji} \right]$$

e a derivada temporal é aproximado pelo método de Euler progressivo (8.23). Considerando $V_i = \{x_{i-1}, x_{i+1}\}$ e após algumas manipulações tem-se:

$$-\theta U_{i-1}^{n+1} + (2 + 2\theta) U_i^{n+1} - \theta U_{i+1}^{n+1} = \theta U_{i-1}^n + (2 - 2\theta) U_i^n + \theta U_{i+1}^n. \quad (8.34)$$

Aplicando o critério de Von Neumann na equação (8.34) obtêm-se:

$$\begin{aligned}
-\theta e^\lambda e^{\lambda n} e^{I\beta i} e^{-I\beta} + (2 + 2\theta) e^\lambda e^{\lambda n} - \theta e^\lambda e^{\lambda n} e^{I\beta i} e^{I\beta} &= \theta e^{\lambda n} e^{I\beta i} e^{-I\beta} + (2 - 2\theta) e^{\lambda n} + \theta e^{\lambda n} e^{I\beta i} e^{I\beta} \\
\Rightarrow e^\lambda (-\theta e^{-I\beta} + (2 + 2\theta) - \theta e^{I\beta}) &= \theta e^{-I\beta} + (2 - 2\theta) - \theta e^{I\beta} \\
\Rightarrow e^\lambda (2 + 2\theta - 2\theta \cos(\beta)) &= 2 - 2\theta + 2\theta \cos(\beta) \\
\Rightarrow e^\lambda (2 - 2\theta (\cos(\beta) - 1)) &= 2 + 2\theta (\cos(\beta) - 1) \\
\Rightarrow e^\lambda (2 + 4\theta \sin^2 \left(\frac{\beta}{2} \right)) &= 2 - 4\theta \sin^2 \left(\frac{\beta}{2} \right) \\
\Rightarrow e^\lambda &= \frac{2 - 4\theta \sin^2 \left(\frac{\beta}{2} \right)}{2 + 4\theta \sin^2 \left(\frac{\beta}{2} \right)}.
\end{aligned}$$

Assim, pode-se concluir que o método de Crank-Nicolson para o MPS é incondicionalmente estável.

8.2.2.2 Exemplos da equação do calor

Exemplo 5 Considere o seguinte problema

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= e^x \\ u(0, t) &= e^{2t} \quad e \quad u(1, t) = e^{2t+1}\end{aligned}\tag{8.35}$$

cujas soluções são $u(x, t) = e^{2t+x}$.

Neste primeiro problema será analisado o conceito de estabilidade dos métodos SPH e MPS usando o método de integração de Euler progressivo. Na primeira simulação feita com o operador SPH foram utilizados a função núcleo new quártico (5.39) com os parâmetros $k = 2$ e $h = 0.99dx$, o domínio foi discretizado por 20 partículas e o $\delta t = 0.00062$, para obter $\sigma \leq 0.5$. Na simulação feita com o operador MPS foi utilizada a função peso (6.4) com o parâmetro $r_e = 1.1dx$, analogamente o domínio é discretizado por 20 partículas e o $\delta t = 0.00062$, assim obtêm-se $\sigma \leq 0.5$. Os gráficos das duas simulações podem ser observados através da Figura 8.27(a). Na segunda simulação feita com os operadores SPH e MPS foram utilizados os mesmos dados mudando apenas o passo temporal para $\delta t = 0.00065$. Os resultados estão na Figura 8.27(b)

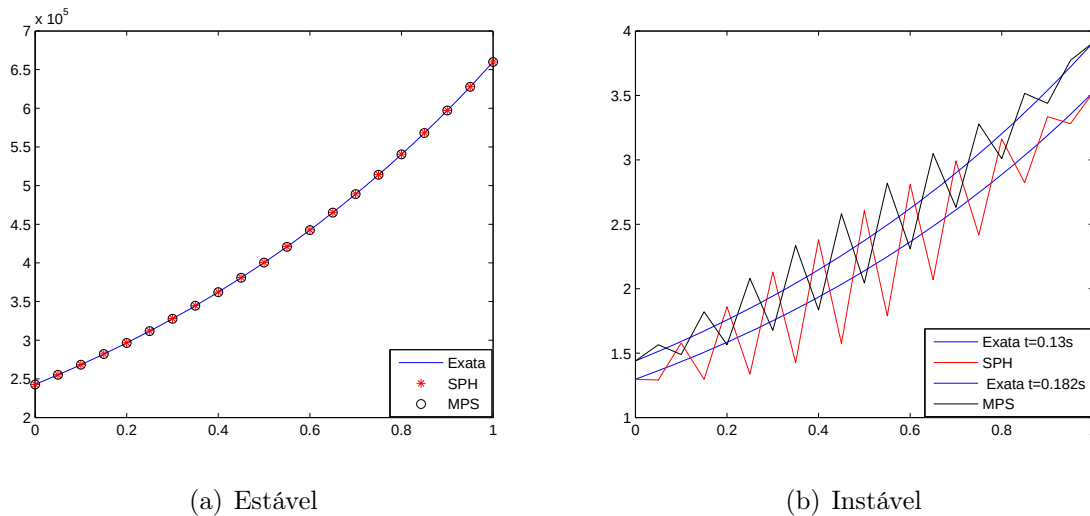


Figura 8.27: Em (a) tem-se que $\sigma \leq 0.5$ e $\theta \leq 0.5$. Em (b) tem-se que $\sigma > 0.5$ e $\theta > 0.5$.

Exemplo 6 Considere o seguinte problema

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= \sin(\pi x) + x(1 - x) \\ u(0, t) &= 0 \quad e \quad u(1, t) = 0\end{aligned}\tag{8.36}$$

cujas soluções são $u(x, t) = \sin(\pi x)e^{-\pi^2 t} + x(1 - x)$.

Neste segundo problema o método de integração implícita será explorado com os operadores dos métodos SPH e MPS. Tendo o método de Euler regressivo quanto o método de

Crank-Nicolson são incondicionalmente estáveis, o passo temporal utilizado será $dt = 0.01$ e o domínio será discretizado com 50 partículas. Os dados da função núcleo e da função peso são os mesmos utilizados no método de integração Euler progressivo. Na Figura 8.28(a) está o gráfico do método de integração Euler regressivo e na Figura 8.28(b) a do método de integração de Crank-Nicolson. Na Tabela 8.13 são apresentados os erros dos métodos SPH e MPS com os métodos de integração Euler regressivo e Crank-Nicolson.

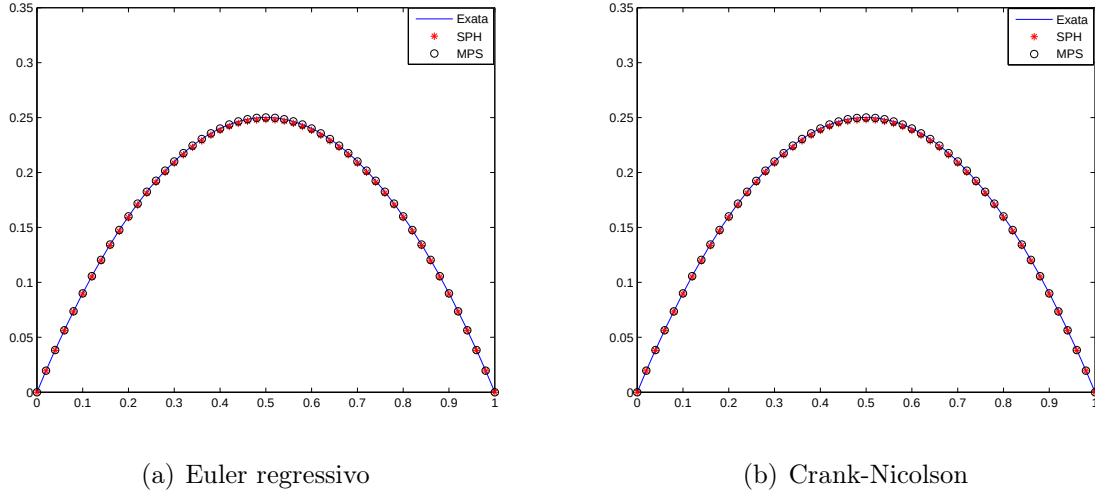


Figura 8.28: Gráfico das soluções aproximada do problema (8.36) em $t=1s$. Em (a) método de integração Euler regressivo e (b) método de integração Crank-Nicolson.

Tabela 8.13: Erros dos métodos SPH e MPS para a equação do calor (8.36).

	SPH E-R	MPS E-R	SPH C-N	MPS C-N
Erro	0.0072	$1.1703e - 04$	0.0073	$9.5284e - 07$

Observações:

1. Os métodos SPH e MPS apresentaram resultados satisfatórios.
2. O erro mostrado na Tabela 8.13 é o erro relativo dado pela seguinte expressão:

$$\text{Erro}_R = \frac{\|Exata - Aproximada\|_2}{\|Exata\|_2}.$$

3. O critério de Von Neumann se mostrou bem satisfatório com respeito a estabilidade dos operadores SPH e MPS.

8.2.3 Equação de Advecção Linear

A equação de advecção linear, faz parte da classe de EDP hiperbólica.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad -\infty \leq x \leq +\infty, \quad t > 0 \quad (8.37)$$

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

A dedução da solução analítica para a equação (8.37) pode ser encontrada em [8]. Nesta seção serão tratados problemas que tem descontinuidade na condição inicial também conhecidos como problemas de Riemann.

8.2.4 Condição CFL

A condição de Courant, Friedrichs e Lewys (CFL) é uma exigência mínima necessária que devemos impor a um esquema numérico voltado a equações hiperbólicas para que ele seja estável.

O principal objetivo desse critério está em permitir que a solução numérica possa se propagar com a velocidade física correta. Em outras palavras, a condição CFL procura estipular uma proporção entre os passos da malha de modo que todos os seus pontos estejam na região de dependência da solução exata. Isso se dá porque se existir um ponto da malha na região de dependência da solução em um ponto P que não contribua para a solução numérica corre-se o risco da solução pelo método não convergir para a solução exata em P quando refina-se a malha mantendo a razão entre os passos constantes.

Uma maneira simples de descobrir as condições que devemos impor para que a condição CFL seja satisfeita consiste em observar a molécula de cálculo para $U(P)$ e a construção do “cone” de pontos que se forma a partir da condição inicial, pelo repetido uso do esquema, até chegar na solução numérica em P . Como esse critério estipula que a região de dependência analítica, na “base” desse cone deverá estar a condição inicial que se propaga pela curva característica até chegar em P . (Vide por exemplo [8].)

Considerando o conjunto $V_i = \{x_{i-1}, x_{i+1}\}$, tanto o operador gradiente SPH II (5.22) quanto o operador gradiente MPS (6.10) utilizam 3 pontos (u_{i-1}^n , u_i^n e u_{i+1}^n) para calcular U_i^{n+1} , então condição CFL exige que a curva característica que passa por $P = (i\delta x, (n+1)\delta t)$ corte a linha $t = n\delta t$, entre os pontos $((i-1)\delta x, n\delta t)$ e $((i+1)\delta x, n\delta t)$, ou seja:

$$\begin{aligned} x_{i-1} &\leq x_i - a\delta t \leq x_{i+1} \\ \Rightarrow (i-1)\delta x &\leq i\delta x - a\delta t \leq (i+1)\delta x \\ \Rightarrow -1 &\leq -\frac{a\delta t}{\delta x} \leq 1. \end{aligned}$$

Portanto, conclui-se que a condição CFL para os operadores SPH II e MPS são:

$$\nu = |a| \frac{\delta t}{\delta x} \leq 1.$$

Exemplo 7 Considere o seguinte problema de Riemann

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ u(x, 0) &= \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0 \\ 1, & \text{se } x > 0 \end{cases}, \end{aligned} \tag{8.38}$$

cujas a solução é dada por

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq t \\ 1, & \text{se } x > t \end{cases}$$

Adotando uma malha com passo temporal $\delta t = 0.01$ e passo espacial $\delta x = 0.06$, o perfil da solução em $t = 0.1$ produzida pelos métodos SPH e MPS é apresentado na Figura 8.29.

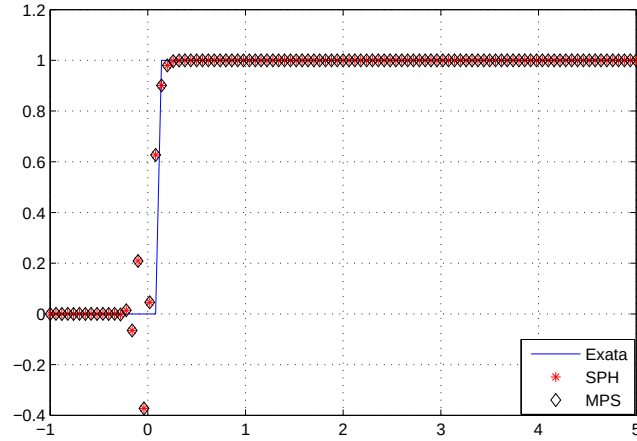


Figura 8.29: Gráfico das soluções numéricas do problema (8.38) dos métodos SPH e MPS.

Observa-se na Figura 8.29 que as soluções numéricas apresentam oscilações próximo a descontinuidade. Para resolver esse problema de oscilação é introduzido um termo viscoso $\left(\epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$ na equação (8.37), desta forma será resolvido o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} &= \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty \leq x \leq +\infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{aligned} \quad (8.39)$$

sendo ϵ dado por:

$$\epsilon = a \frac{\delta x}{2}. \quad (8.40)$$

Note que, a condição CFL e o parâmetro ϵ estão conectadas pelo passo temporal δx . Adotando o passo temporal $\delta t = 0.001$ observe através da Figura 8.30 a influência da condição CFL.

Conclusão

Como pode ser observado na Figura 8.30, se $\nu \rightarrow 1$ a solução numérica de ambos os métodos tende para a solução exata do problema, mas se $\nu > 1$ a solução numérica apresenta oscilações.

Exemplo 8 Considere o seguinte problema de Riemann

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ u(x, 0) &= \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x \leq 0.2 \\ 4x - \frac{3}{5}, & \text{se } 0.2 \leq x \leq 0.4 \\ -4x + \frac{13}{5}, & \text{se } 0.4 \leq x \leq 0.6 \\ 1, & \text{se } 0.6 \leq x \leq 0.8 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \end{aligned} \quad (8.41)$$

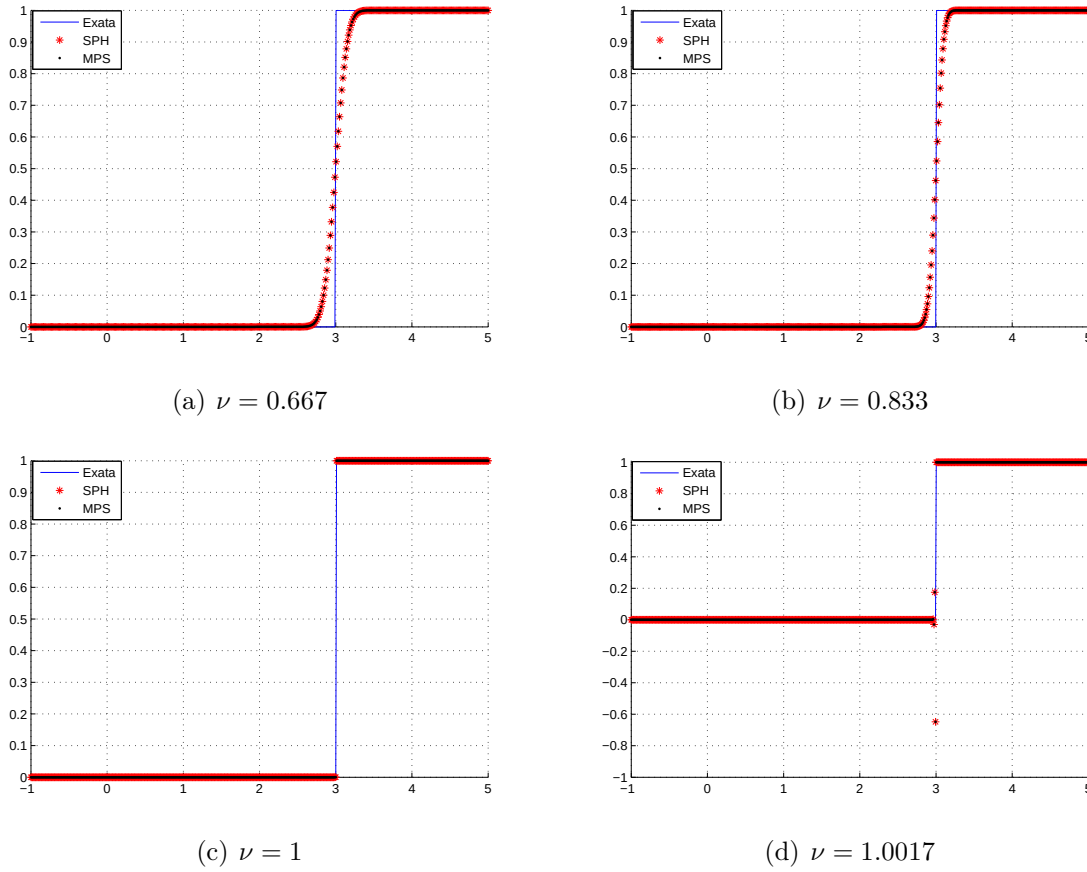


Figura 8.30: Gráficos do perfil das soluções numérica do problema (8.38) em $t = 3$.

cuja a solução é dada por

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 2t \leq x \leq 0.2 + 2t \\ 4(x - 2t) - \frac{3}{5}, & \text{se } 0.2 + 2t \leq x \leq 0.4 + 2t \\ -4(x - 2t) + \frac{13}{5}, & \text{se } 0.4 + 2t \leq x \leq 0.6 + 2t \\ 1, & \text{se } 0.6 + 2t \leq x \leq 0.8 + 2t \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Este exemplo tem como objetivo verificar qual é a melhor função núcleo e a melhor função peso para os métodos SPH e MPS respectivamente. Primeiramente adotado uma malha com passo temporal $\delta t = 0.005$ e passo espacial $\delta x = 0.01$, tem-se que $\nu = 1$. A Figura 8.31 mostra o perfil das soluções no tempo $t = 0.125$.

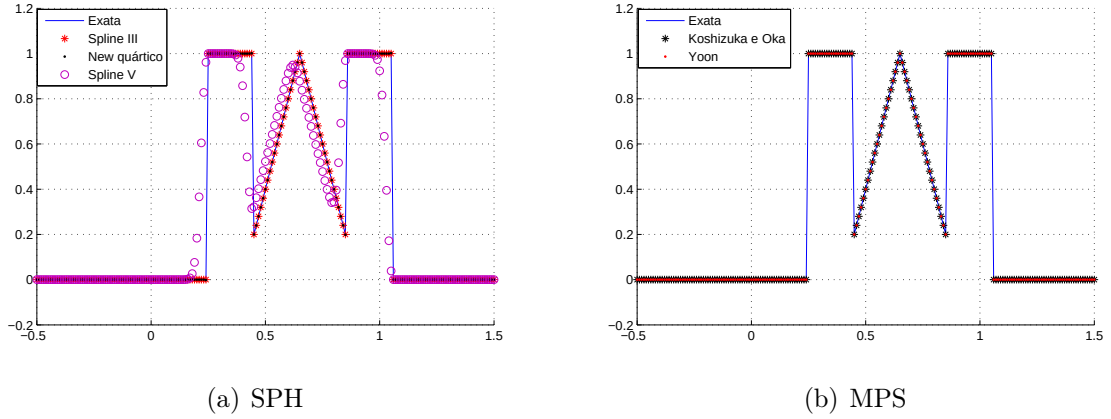


Figura 8.31: Gráficos do perfil das soluções numérica do problema (8.39) em $t = 0.125$.

Observações:

1. No método SPH os parâmetros utilizados para as funções spline cúbica e new quártico são $k = 2$ e $h = 0.9999dx$, já para a função spline quíntico são $k = 3$ e $h = 0.666dx$.
2. No método MPS o parâmetro utilizado para a função peso de Koshizuka e Oka e para a função peso de Yoon é $r_e = 1.1dx$.
3. Note que no problema (8.41) não colocamos a viscosidade artificial, pois ela só faz parte da formulação numérica.

Conclusão

Visualmente, pode-se observar pouca diferença entre as soluções numéricas com exceção da função spline quíntica, desta forma para uma maior compreensão dos resultados obtidos pelos métodos com suas respectivas funções núcleo ou peso foram calculados o erro absoluto como segue na Tabela 8.14.

Tabela 8.14: Erros dos métodos SPH e MPS para a equação de advecção (8.41).

	Spline III	New quártico	Spline V	Koshizuka	Yoon
Erro	$9.1451e - 07$	0.0034	2.6688	$5.2114e - 12$	$9.4688e - 12$

Portanto, conclui-se que a melhor aproximação é dada pelo método MPS utilizando a função peso de Koshizuka e Oka.

Exemplo 9 Considere o seguinte problema de Riemann

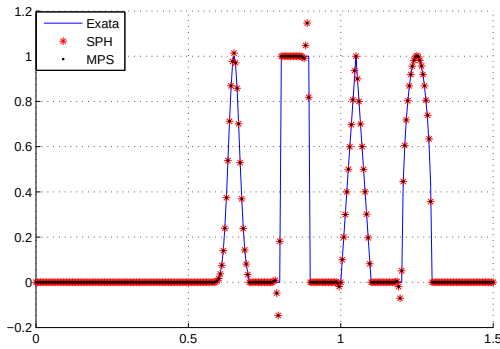
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \exp[-\log(50)(\frac{x-0.15}{0.05})^2], & \text{se } 0 \leq x \leq 0.2 \\ 1, & \text{se } 0.3 \leq x \leq 0.4 \\ 20x - 10, & \text{se } 0.5 \leq x \leq 0.55 \\ 12 - 20x, & \text{se } 0.55 \leq x \leq 0.6 \\ \sqrt{1 - (\frac{x-0.75}{0.05})^2} & \text{se } 0.7 < x < 0.8 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (8.42)$$

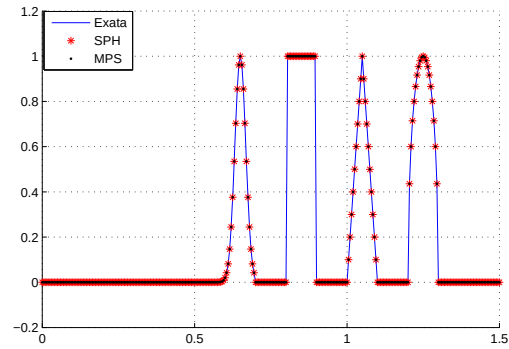
cuja a solução é dada por

$$u(x, t) = \begin{cases} \exp[-\log(50)(\frac{x-t-0.15}{0.05})^2], & \text{se } t \leq x \leq 0.2 + t \\ 1, & \text{se } 0.3 + t \leq x \leq 0.4 + t \\ 20(x - t) - 10, & \text{se } 0.5 + t \leq x \leq 0.55 + t \\ 12 - 20(x - t), & \text{se } 0.55 + t \leq x \leq 0.6 + t \\ \sqrt{1 - (\frac{x-t-0.75}{0.05})^2} & \text{se } 0.7 + t < x < 0.8 + t \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

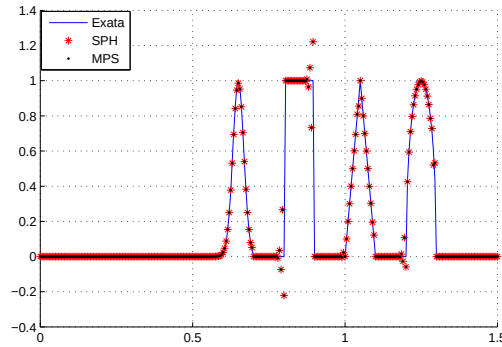
Esta será a última equação de advecção linear a ser trabalhada. O seu objetivo é verificar a influência do parâmetro ϵ na solução numérica. Adotando um malha com passo temporal $\delta t = 0.005$ e com passo espacial $\delta x = 0.005$, tem-se que $\nu = 1$ e que $\epsilon = 0.0025$ calculado pela equação (8.40). Na Figura 8.32 são apresentadas os perfis das soluções numéricas no tempo $t = 0.5$ com diferente valores de ϵ .



(a) $\epsilon = 0.00249$



(b) $\epsilon = 0.00250$



(c) $\epsilon = 0.00251$

Figura 8.32: Gráficos do perfil das soluções numérica do problema (8.42) variando o parâmetro ϵ .

Conclusão

Pode-se observar através da Figura 8.32 que quando ϵ sofre uma pequena perturbação a solução numérica apresenta oscilações próximo as descontinuidades, desta forma parece que a equação (8.40) fornece o melhor valor para ϵ .

Conclusão Final

A estratégia proposta em conjunto com a equação (8.40) se mostrou eficiente para resolver o problema de oscilações próximo as descontinuidade.

8.2.5 Equação de Burgers

A equação de Burgers é uma equação diferencial não linear. Ela serve como um modelo simplificado para o entendimento da turbulência, combinando convecção não linear e difusão linear, como pode ser visto através na equação (8.43)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad x_L \leq x \leq x_R \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{aligned} \quad (8.43)$$

$$u(x_L, t) = f(x_L, t) \quad \text{e} \quad u(x_R, t) = g(x_R, t).$$

Quando $\nu = 0$ a equação de Burgers é dita ser invíscida e se assemelha a equação de advecção linear, a menos do fato de que agora tem-se uma velocidade de convecção não constante, então as retas característica não serão mais retas paralelas, sendo assim em um certo momento elas podem se interceptar, levando à formação de choques mesmo quando tem a condição inicial suave, este fenômeno é característico dos problemas não lineares.

Da mesma forma que na equação de advecção linear a equação de Burgers invíscida também apresenta oscilações próximo a descontinuidade, então de forma análoga a equação de advecção linear é introduzido um termo viscoso $\left(\epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$ na equação. Considera-se também a equação na sua forma conservativa, portanto tem-se a seguinte equação:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad x_L \leq x \leq x_R \quad t \geq 0$$

sendo $f(x, t) = \frac{u(x, t)^2}{2}$ e ϵ é dado pela equação (8.40).

Exemplo 10 considere o seguinte problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) &= 0 \quad 0 \leq x \leq 0.6 \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) &= \begin{cases} 0.5, & \text{se } x = 0 \\ 0, & \text{se } x > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (8.44)$$

$$u(x_L, t) = 0.5 \quad \text{e} \quad u(x_R, t) = 0$$

cujas soluções são dadas por

$$u(x, t) = \begin{cases} 0.5, & \text{se } x < \frac{1}{4}t \\ 0, & \text{se } x > \frac{1}{4}t \end{cases}.$$

Este problema tem como objetivo verificar qual é a melhor função núcleo e a melhor função peso dos métodos SPH e MPS respectivamente. Na Figura 8.35 pode-se observar os resultados da simulação adotando uma malha com passo temporal $\delta t = 0.004$ e passo espacial $\delta x = 0.002$ e desta forma tem-se que $\nu \leq 1$.

Observação:

1. Os parâmetros utilizados neste problema são iguais a do problema (8.41).
2. Na condição CFL toma-se $|a| = |u_{max}|$.
3. Observe na Tabela 8.15 que o erro do método SPH usando a função spline III é o mesmo que a do método MPS. No método SPH utilizando a função new quártico quando $h \rightarrow \delta x$ a solução do SPH tende para a solução do MPS.

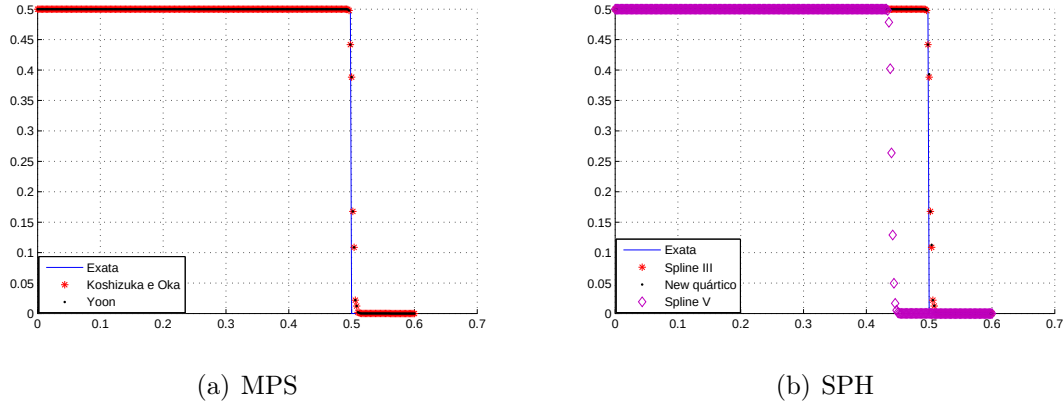


Figura 8.33: Gráficos da solução numérica do problema (8.44) no tempo $t = 2$.

Conclusão

Visualmente observa-se pouca diferença entre as soluções numéricas com exceção da função spline quintica, desta forma foi construído a Tabela 8.15 onde apresenta o erro absoluto dos métodos com suas respectivas funções.

Tabela 8.15: Erros dos métodos SPH e MPS para a equação de advecção (8.44).

	Spline III	New quártico	Spline V	Koshizuka	Yoon
Erro	0.4412	0.4464	2.6706	0.4412	0.4412

Portanto, pode se observar que com exceção do método SPH utilizando a função spline quintica, que ambos os métodos são equivalentes.

Exemplo 11 considere o seguinte problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = 0 \quad 1 \leq x \leq 3.5 \quad t \geq 0$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 1.5 \\ 2.5 - x, & \text{se } 1.5 < x \leq 2.5 \\ 0, & \text{se } x > 2.5 \end{cases} \quad (8.45)$$

$$u(x_L, t) = 1 \quad e \quad u(x_R, t) = 0$$

cuj a solução exata é:

- Para $t < 1$:

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq 1.5 - t \\ \frac{2.5-x}{1-t}, & \text{se } 1.5 + t < x < 2.5 \\ 0, & \text{se } x > 2.5 \end{cases}$$

- Para $t > 1$:

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq 2 + 0.5t \\ 0, & \text{se } x > 2 + 0.5t \end{cases}$$

Neste problema tem-se duas situações, a primeira é quando $t < 1$ e a segunda é quando $t > 1$. Quando $t < 1$ a função u tem um certo comportamento e quando $t > 1$ a função u tem outro comportamento, isso ocorre por causa dos choques das curvas característica. O objetivo desse problema é verificar a condição CFL, então adotando o passo temporal $\delta t = 0.01$ observe através da Figura 8.34 a influência da condição CFL.

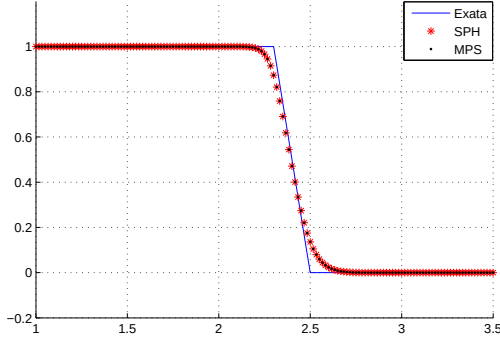
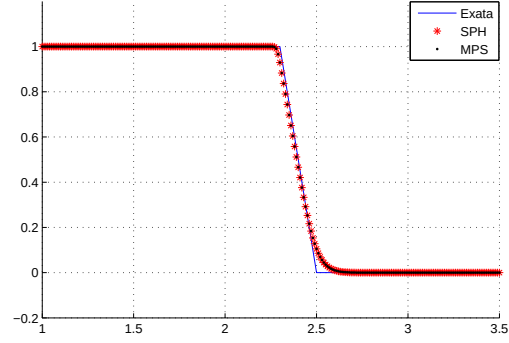
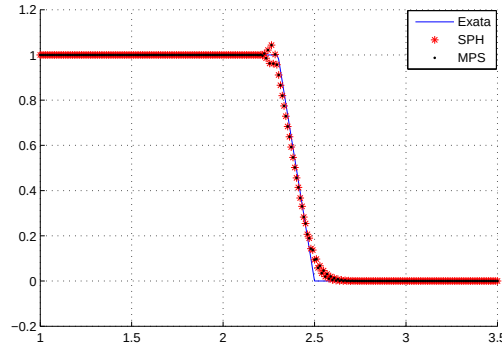
(a) $C_{CFL} = 0.600$ (b) $C_{CFL} = 1$ (c) $C_{CFL} = 1.0598$

Figura 8.34: Gráficos da solução numérica do problema (8.45) variando o parâmetro ϵ .

Conclusão

Pode-se observar através da Figura 8.34 que quando $\nu \leq 1$ não ocorreram oscilações próximo a descontinuidade diferentemente de quando $\nu > 1$. Portanto, para se obter uma solução sem oscilações a condição CFL deve ser satisfeita.

Exemplo 12 considere o seguinte problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) &= 0 \quad -1 \leq x \leq 1 \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) &= \begin{cases} 1, & \text{se } |x| < \frac{1}{3} \\ -1, & \text{se } \frac{1}{3} < |x| \leq 1 \end{cases} \\ u(x_L, t) &= -1 \quad e \quad u(x_R, t) = -1 \end{aligned} \quad (8.46)$$

cuja a solução é dada por

$$u(x, t) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < -t - \frac{1}{3} \\ \frac{x + \frac{1}{3}}{t}, & \text{se } -t - \frac{1}{3} < x < t - \frac{1}{3} \\ 1, & \text{se } t - \frac{1}{3} < x < \frac{1}{3} \\ -1, & \text{se } x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

Este problema tem como objetivo mostrar a influência do parâmetro ϵ . Adotando o uma malha com passo temporal $\delta t = 0.01$ e $\delta x = 0.01$ a condição $\nu \leq 1$ é sempre satisfeita e o valor calculado pela equação (8.40) é $\epsilon = 0.005$. Na Figura 8.35 são apresentadas os perfis das soluções numéricas no tempo $t = 0.5$.

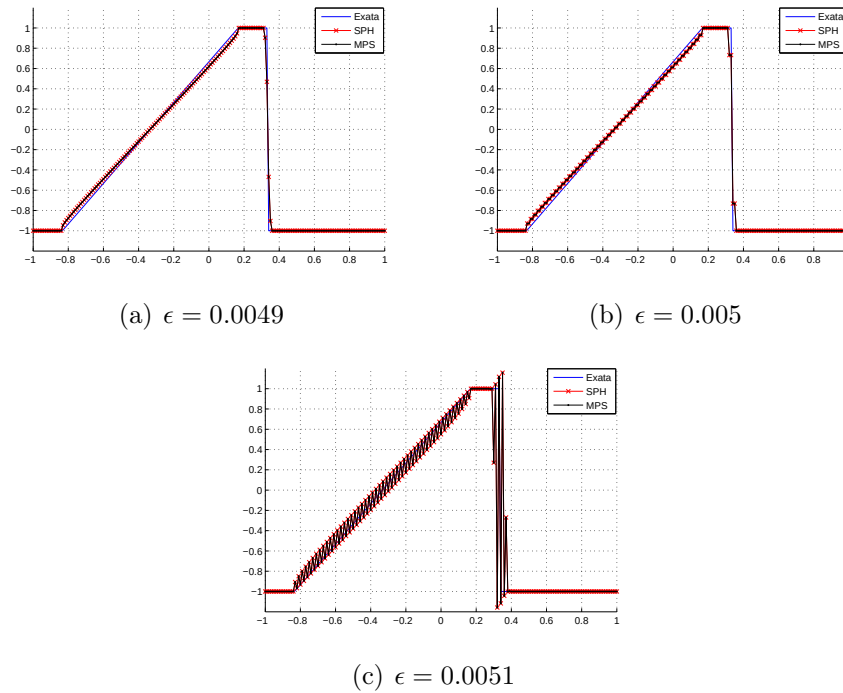


Figura 8.35: Gráficos da solução numérica do problema (8.46) variando o parâmetro ϵ .

Conclusão

Pode observar através da Figura 8.35 que quando $\epsilon = 0.0049$ obtêm-se uma solução suave ao contrário dos outros. Quando $\epsilon = 0.005$ houve uma pequena oscilação na solução, mas por outro lado foi a que obteve o melhor erro absoluto como mostra a Tabela 8.16.

Tabela 8.16: Erros dos métodos SPH e MPS para a equação de advecção (8.46).

	$\epsilon = 0.0049$	$\epsilon = 0.005$	$\epsilon = 0.0051$
SPH	0.8590	0.6747	3.3273
MPS	0.8590	0.6747	3.3273

Portanto, o valor do ϵ dada pela equação (8.40) é satisfatório.

Conclusão Final

A estratégia adotada, não se mostrou tão satisfatória como para a equação de advecção linear da Seção 8.2.3, pois em alguns problemas ainda ocorreram pequenas perturbações.

8.3 Equação de Poisson Bidimensional

Nesta seção está o principal objetivo deste trabalho, pois como já mencionado ter uma boa aproximação da equação de Poisson é de extrema importância para garantir uma boa aproximação das equações de Navier-Stokes.

Exemplo 13 Considere o seguinte problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 4, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1; \\ u(0, y) &= x^2, \quad u(1, y) = (x - 1)^2, \quad 0 \leq y \leq 1; \\ u(x, 0) &= y^2, \quad u(x, 1) = (1 - y)^2, \quad 0 \leq x \leq 1. \end{aligned} \quad (8.47)$$

Primeiramente, de acordo com a literatura os parâmetros utilizados pelas funções núcleo spline cúbica e new quártico são $k = 2$ e $h = 1.3dx$ [28]. Este problema tem com objetivo, verificar se o parâmetro $h = 1.3dx$ é a melhor opção para resolver a equação de Poisson. Neste problema não foi considerado nenhum tratamento de fronteira.

Visualmente pode-se observar através da Figura 8.36 que a solução numérica está de acordo com a solução analítica. Uma análise quantitativa é mostrada nas Tabelas 8.17, 8.18 e 8.19 onde são apresentados os erros relativos de cada função núcleo variando o parâmetro r_e .

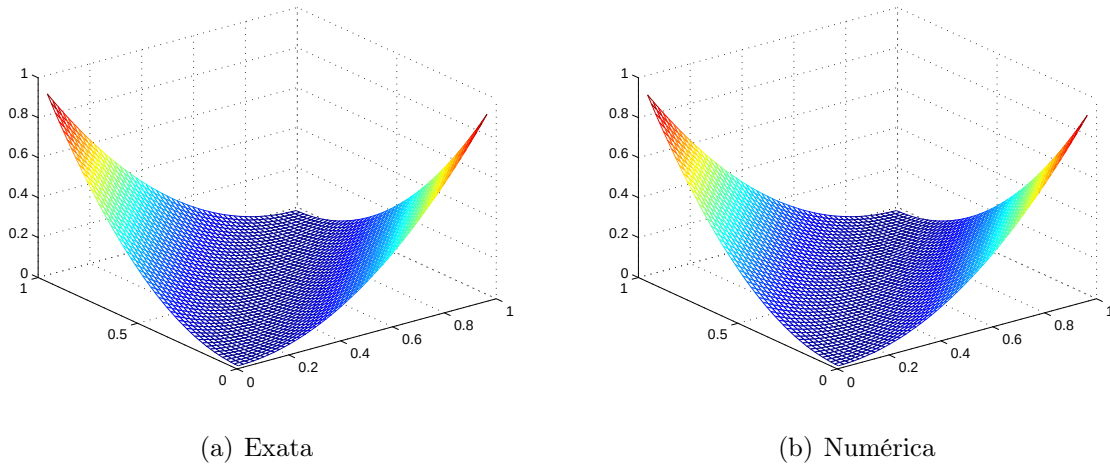


Figura 8.36: Em (a) tem-se o gráfico da solução exata do problema (8.47) e em (b) é apresentado a solução numérica pela função núcleo new quártico com $h = 1.3dx$.

Tabela 8.17: Erros do método SPH utilizando as funções núcleo spline cúbica e new quártico com os parâmetros $k = 2$ e $h = 1.2dx$.

Partículas	400	900	1600	2500	3600	4900	6400	8100
Spline III	0.0745	0.0444	0.0304	0.0223	0.0170	0.0134	0.0106	0.0085
New quártico	0.0142	0.0178	0.0324	0.0408	0.0463	0.0502	0.0531	0.0553

Tabela 8.18: Erros do método SPH utilizando as funções núcleo spline cúbica e new quártico com os parâmetros $k = 2$ e $h = 1.3dx$.

Partículas	400	900	1600	2500	3600	4900	6400	8100
Spline III	0.0794	0.0533	0.0413	0.0344	0.0299	0.0267	0.0244	0.0226
New quártico	0.0512	0.0255	0.0138	0.0073	0.0038	0.0046	0.0057	0.0069

Tabela 8.19: Erros do método SPH utilizando as funções núcleo spline cúbica e new quártico com os parâmetros $k = 2$ e $h = 1.4dx$.

Partículas	400	900	1600	2500	3600	4900	6400	8100
Spline III	0.0737	0.0514	0.0412	0.0353	0.0315	0.0288	0.0269	0.0253
New quártico	0.0789	0.0574	0.0476	0.0420	0.0384	0.0358	0.0340	0.0325

Através das Tabelas 8.17, 8.18 e 8.19 pode-se observar:

1. Quando $h = 1.2dx$ os erros obtido pela função new quártico vão aumentando quando aumenta o número de partículas.
2. Quando $h = 1.3dx$ os erros obtido pela função new quártico vão diminuindo até o número de partículas 3600, depois o erros vão aumentando.
3. Na função spline cúbica os erros obtidos vão diminuindo quando refina-se a malha independente do parâmetro h .

Conclusão

Os parâmetros que apresentaram os melhores resultados para a função spline cúbica são $k = 2$ e $h = 1.2dx$ e para a função new quártico os parâmetros são $k = 2$ e $h = 1.3dx$.

Exemplo 14 Considere o seguinte problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -2 \cos(x) \cos(y), \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi; \\ u(0, y) &= \cos(y), \quad u(\pi, y) = -\cos(y), \quad 0 \leq y \leq \pi; \\ u(x, 0) &= \cos(x), \quad u(x, \pi) = -\cos(x), \quad 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned} \quad (8.48)$$

Neste problema será usada a função núcleo new quártico com os parâmetros $k = 2$ e $h = 1.3dx$. O seu objetivo é verificar se a solução numérica da equação de Poisson melhora com algum tipo de tratamento de fronteira proposto no capítulo 7.

Visualmente os gráficos das soluções numéricas estão semelhante ao da solução exata como pode ser observado através da Figura 8.37, mas para saber qual obteve os melhores resultados foi calculado o erro relativo de cada estratégia e o resultado é mostrado na Tabela 8.20.

Tabela 8.20: Erros do método SPH.

	Normal	$\mathcal{O}$	Dummy	$\mathcal{O}$	Fantasma	$\mathcal{O}$
400	0.0217	-	0.0145	-	0.0757	-
1600	0.0115	0.4580	0.0050	0.7680	0.0681	0.0763
6400	0.0067	0.3897	$3.56e - 4$	1.9060	0.0647	0.0369

Conclusão

Como pode ser observado através da Tabela 8.20 os melhores resultados, foram obtidos aplicando o tratamento de fronteira pelas partículas *dummy* e a ordem de convergência também aumentou.

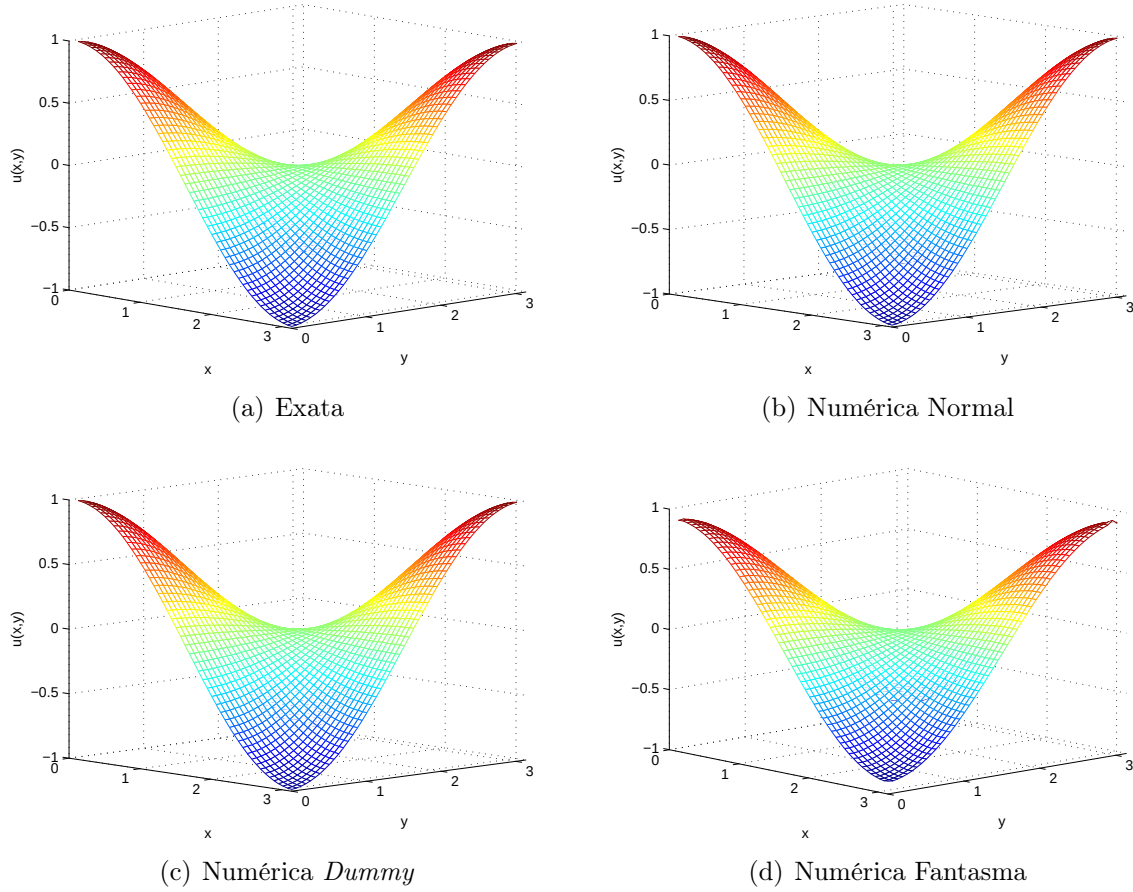


Figura 8.37: Gráficos das soluções do problema (8.48).

Exemplo 15 Considere o seguinte problema:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \sin(\pi x) \cos(\pi y), \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi;$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = \frac{\sin(\pi^2) \cos(\pi y)}{\pi^2}, \quad 0 \leq y \leq \pi; \quad (8.49)$$

$$u(x, 0) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi^2}, \quad u(x, \pi) = -\frac{\sin(\pi x)}{\pi^2}, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

cuja a solução é $u(x, y) = \frac{\sin(\pi x) \cos(\pi y)}{\pi^2}$.

Na literatura do método MPS os parâmetro utilizados pelas funções peso são $r_e = 2.1$ para o cálculo do pnd^0 e $r_e = 4.0dx$ para o cálculo do operador laplaciano MPS (6.15) em duas dimensões [31]. A função peso utilizada é a proposta por Koshizuka e Oka (6.4).

A primeira a análise a ser realizada será fixando o valor do parâmetro $r_e = 2.1$ para o cálculo do pnd^0 e variando o r_e para o cálculo do operador laplaciano. Na simulação não foi utilizado nenhum tratamento de fronteira, desta forma só será usada a equação (8.8) para o cálculo de λ quando $r_e < 2dx$. Os resultados são mostrados na Figura 8.37.

Na Tabela 8.21 são apresentados os erros das soluções numéricas conforme o parâmetro r_e .

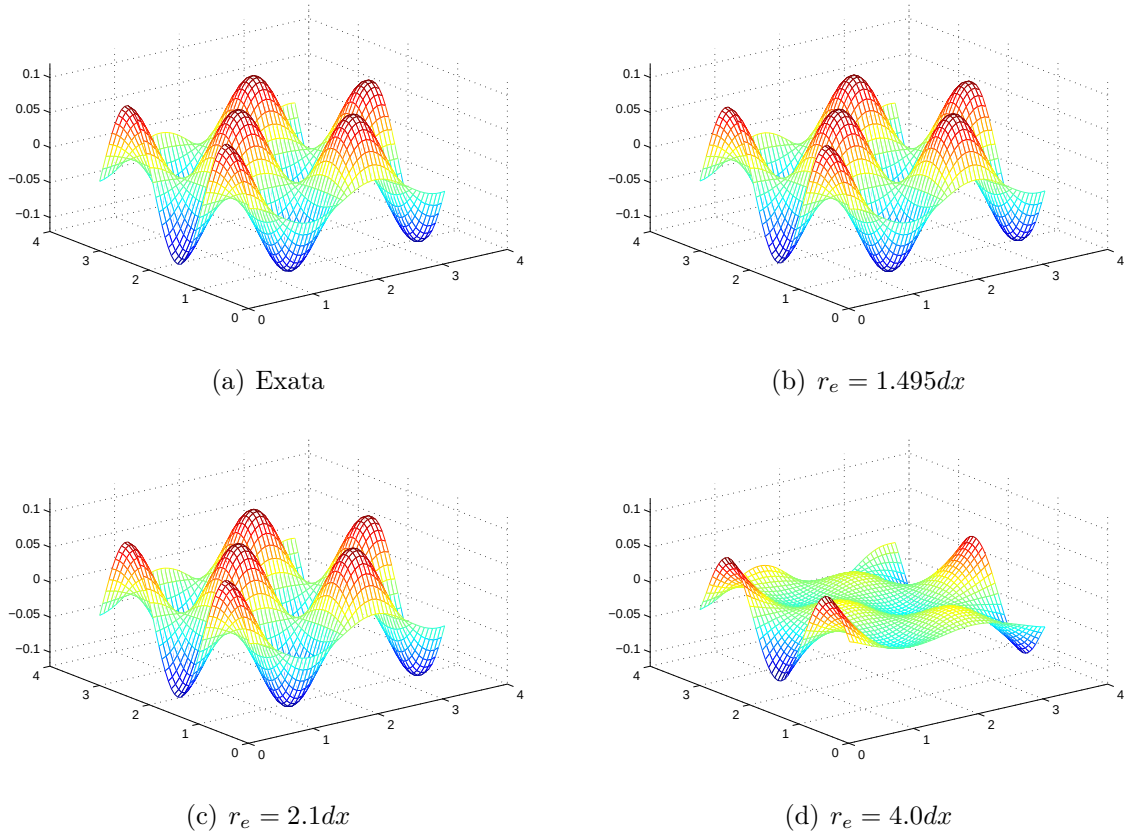


Figura 8.38: Gráficos das soluções do problema (8.49) variando o parâmetro r_e .

Tabela 8.21: Erros do método MPS variando o parâmetro r_e .

Partículas	400	900	1600	2500	3600	4900	6400	8100
$r_e = 1.495dx$	0.0612	0.0297	0.0174	0.0114	0.0080	0.0059	0.0045	0.0036
$r_e = 2.1dx$	0.0776	0.0382	0.0228	0.0152	0.0110	0.0083	0.0066	0.0053
$r_e = 4.0dx$	0.7416	0.7428	0.7412	0.7397	0.7386	0.7377	0.7369	0.7363

Conclusão

Visualmente pode-se observar através da Figura 8.37 que as soluções numéricas quando $r_e = 1.495dx$ e $r_e = 2.1dx$ são semelhantes ao da solução exata do problema. Quando se aumenta o parâmetro r_e há uma grande suavização na solução numérica como também pode ser observado. Portanto, quando não se faz nenhum tratamento no contorno o parâmetro $r_e = 4.0dx$ não é uma boa opção.

Exemplo 16 Considere o seguinte problema:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 6x - 2, \quad -1 < x < 1, \quad -1 < y < 1; \\
 u(-1, y) &= -y^2 + 9, \quad u(1, y) = -y^2 + 11, \quad -1 \leq y \leq 1; \\
 u(x, -1) &= x^3 + 9, \quad u(x, 1) = x^3 + 9, \quad -1 \leq x \leq 1.
 \end{aligned}
 \tag{8.50}$$

cuj a solução é $u(x, y) = x^3 - y^2 + 10$.

A segunda análise será feita fixando o parâmetro $r_e = 2.1dx$ para o cálculo do pnd^0 , mas desta vez será utilizado o tratamento de fronteira por partículas *dummy* para o seu

cálculo. Para o cálculo do laplaciano não será utilizado nenhum tratamento de fronteira, desta forma só será usada a equação (8.8) para o cálculo de λ quando $r_e < 2dx$. Os resultados são apresentados na Figura 8.39 e na Tabela 8.22.

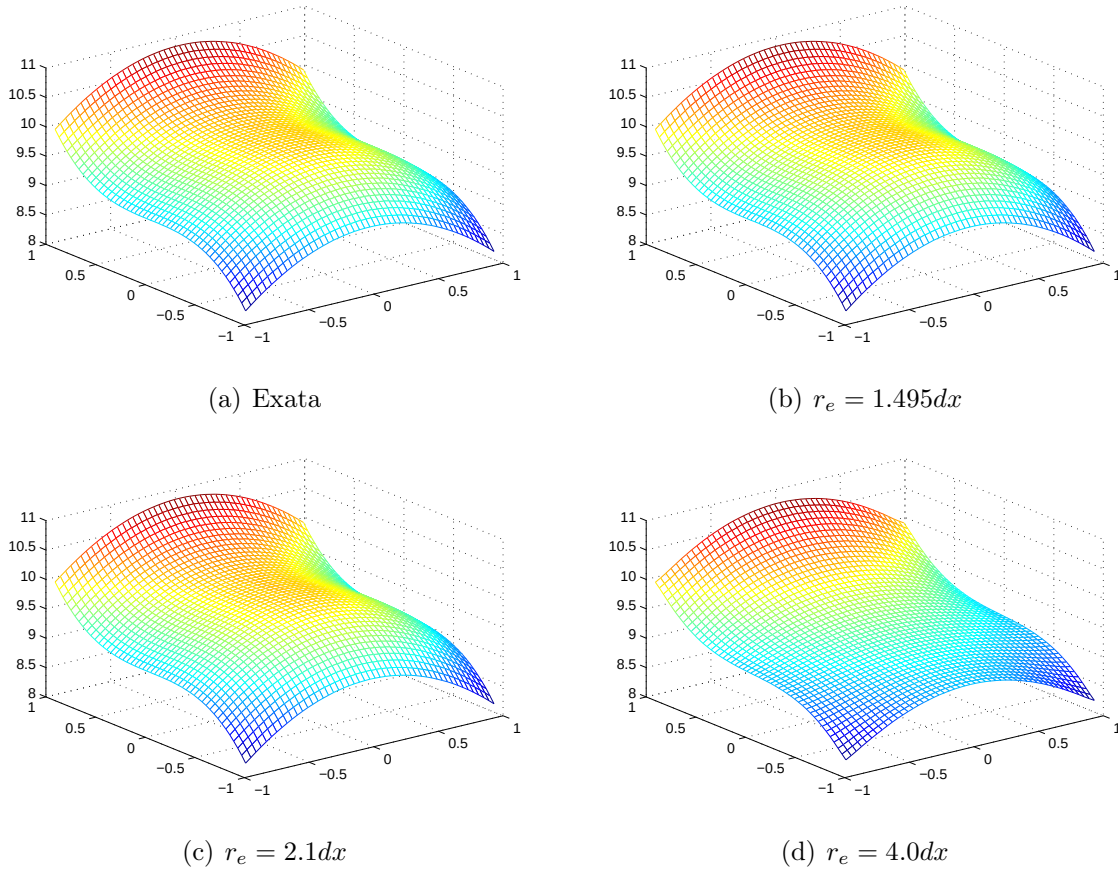


Figura 8.39: Gráficos das soluções do problema (8.50) variando o parâmetro r_e .

Tabela 8.22: Erros do método MPS variando o parâmetro r_e .

Partículas	$r_e = 1.495dx$	$r_e = 2.1dx$	$r_e = 4.1dx$
400	$1.6019e - 05$	$5.2262e - 04$	0.0319
900	$1.5769e - 05$	$4.0670e - 04$	0.0321
1600	$1.5646e - 05$	$3.2878e - 04$	0.0322
2500	$1.5572e - 05$	$2.7495e - 04$	0.0322
3600	$1.5524e - 05$	$2.3594e - 04$	0.0323
4900	$1.5489e - 05$	$2.0649e - 04$	0.0323
6400	$1.5463e - 05$	$1.8352e - 04$	0.0324
8100	$1.5443e - 05$	$1.6511e - 04$	0.0324

Conclusão

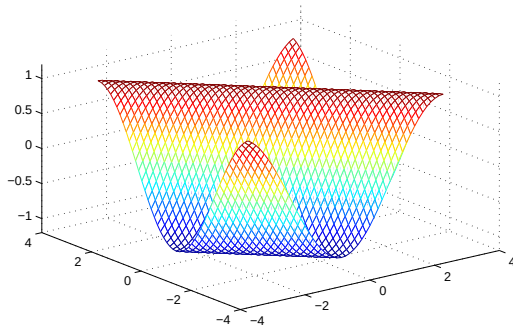
Na Figura 8.39 pode-se observar que as soluções numéricas com os parâmetros $r_e = 1.495dx$ e $r_e = 2.1dx$ são semelhantes a da solução exata, já a solução numérica com o parâmetro $r_e = 4.0dx$ apresenta o gráfico mais suavizado. Portanto, quando só se faz o tratamento de fronteira para o cálculo do pnd^0 a melhor opção é tomar $r_e = 1.495dx$.

Exemplo 17 Considere o seguinte problema

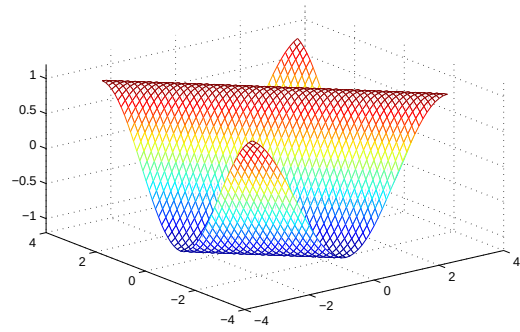
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -2 \cos(x + y), \quad -\pi < x < \pi, \quad -\pi < y < \pi; \\ u(-\pi, y) &= \cos(-\pi + y), \quad u(\pi, y) = \cos(\pi + y), \quad -\pi \leq y \leq \pi; \\ u(x, -\pi) &= \cos(x - \pi), \quad u(x, \pi) = \cos(x + \pi), \quad -\pi \leq x \leq \pi. \end{aligned} \quad (8.51)$$

cujas soluções são $u(x, y) = \cos(x + y)$.

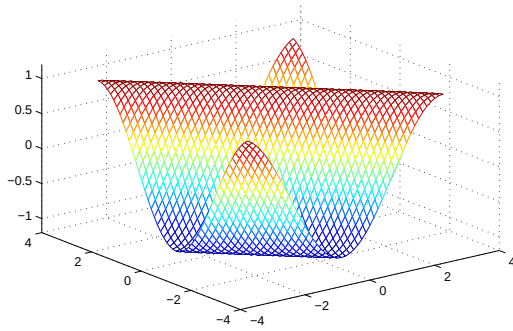
Neste problema, será realizado o tratamento de fronteira por partículas *dummy* tanto para o cálculo do pnd^0 quanto para o cálculo do laplaciano. Os resultados são mostrados através da Figura 8.40 e da Tabela 8.23.



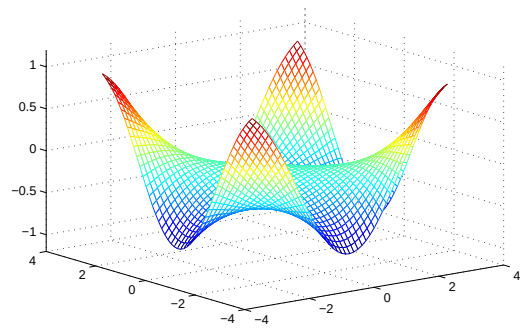
(a) Exata



(b) $r_e = 1.495dx$



(c) $r_e = 2.1dx$



(d) $r_e = 4.0dx$

Figura 8.40: Gráficos das soluções do problema (8.51) variando o parâmetro r_e .

Tabela 8.23: Erros do método MPS variando o parâmetro r_e .

Partículas	$r_e = 1.495dx$	$r_e = 2.1dx$	$r_e = 4.0dx$
400	0.0125	0.0259	0.7902
900	0.0053	0.0126	0.8023
1600	0.0028	0.0078	0.8070
2500	0.0017	0.0054	0.8095
3600	0.0010	0.0041	0.8109
4900	$6.6639e - 04$	0.0032	0.8119
6400	$4.2042e - 04$	0.0027	0.8126
8100	$2.5182e - 04$	0.0022	0.8131

Conclusão

Como pode ser observado na Figura 8.40 para os valores $r_e = 1.495$ e $r_e = 2.1dx$ os gráficos são semelhante a da solução exata. Quando $r_e = 4.0dx$ há uma grande suavização na solução, mas esta suavização não está no contorno, logo o problema é o grande número de partículas que o parâmetro $r_e = 4.0dx$ utiliza para aproximar uma determinada partícula.

O valor do parâmetro que obteve melhores resultados é $r_e = 1.495dx$ conforme mostra a Tabela 8.23.

Exemplo 18 Considere o seguinte problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= (x^2 + y^2)e^{xy}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1; \\ u(0, y) &= 1, \quad u(1, y) = e^x, \quad 0 \leq y \leq 1; \\ u(x, 0) &= 1, \quad u(x, 1) = e^y, \quad 0 \leq x \leq 1. \end{aligned} \quad (8.52)$$

cuja a solução é $u(x, y) = e^{xy}$.

Como pode ser observado nos problemas anteriores o parâmetro que obteve melhores resultados foi $r_e = 1.495dx$, desta forma será analisada a solução numérica com e sem o tratamento de fronteira por partículas *dummy* para o cálculo do pnd^0 . Os resultados são apresentados através da Figura 8.41 e da Tabela 8.24.

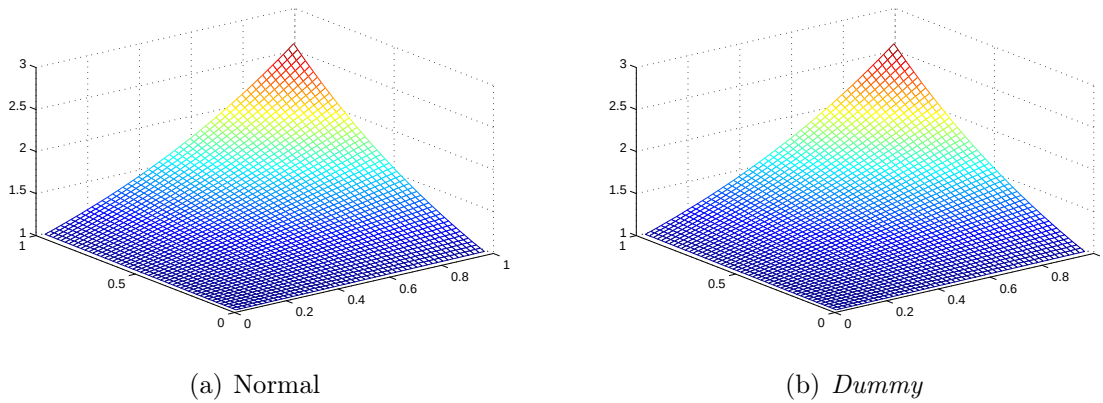


Figura 8.41: Gráficos das soluções do problema (8.52) sem e com o tratamento de fronteira.

Tabela 8.24: Erros do método MPS sem e com o tratamento de fronteira.

Partículas	Normal	$\mathcal{O}$	<i>Dummy</i>	$\mathcal{O}$
400	$9.2514e - 004$	-	$4.6131e - 005$	-
1600	$2.5199e - 004$	0.9382	$1.9178e - 005$	0.6331
6400	$7.1520e - 005$	0.9085	$1.2589e - 005$	0.3036

Conclusão

Através dos resultados da Figura 8.41 e da Tabela 8.24, pode se concluir que a solução numérica sem e com o tratamento de fronteira por partículas *dummy* são satisfatórias, mas a que apresentou melhores resultados foi a com o tratamento de fronteira.

Exemplo 19 Considere o seguinte problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, \quad 1 < x < 2, \quad 1 < y < 2; \\ u(1, y) &= x \log(x), \quad u(2, y) = x \log(4x^2), \quad 1 \leq y \leq 2; \\ u(x, 1) &= y \log(y), \quad u(x, 2) = y \log(4y^2), \quad 1 \leq x \leq 2. \end{aligned} \quad (8.53)$$

cujas soluções são $u(x, y) = xy \log(xy)$.

Neste último problema serão comparados os métodos SPH e MPS. No método SPH será utilizada a função núcleo new quártico com os parâmetros $k = 2$ e $h = 1.3dx$, já no método MPS será utilizada a função proposta por Koshizuka e Oka com o parâmetro $r_e = 1.495dx$. Em ambos os métodos será utilizado o tratamento de fronteira por partículas *dummy*. Os resultados são apresentados na Figura 8.42 e na Tabela 8.25.

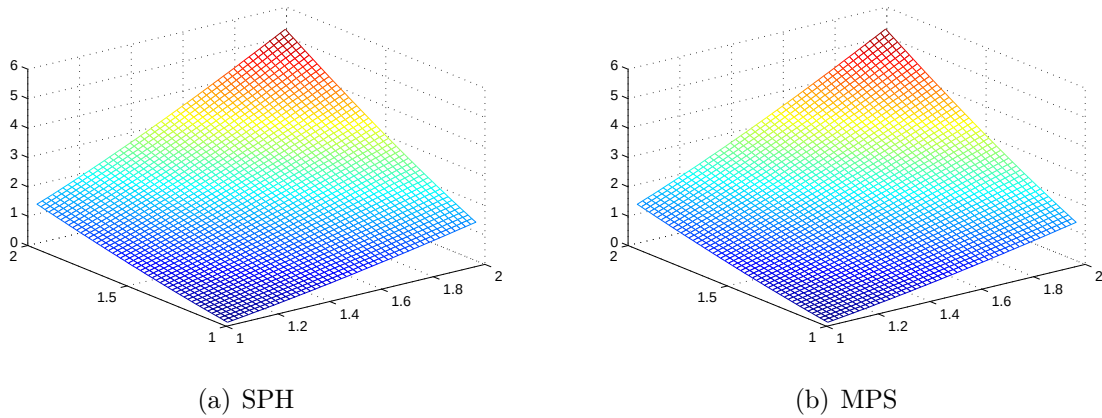


Figura 8.42: Gráficos das soluções do problema (8.53) utilizando os métodos SPH e MPS.

Tabela 8.25: Erros dos métodos SPH e MPS.

Partículas	SPH	$\mathcal{O}$	MPS	$\mathcal{O}$
400	0.0032	-	$2.3993e - 005$	-
1600	0.0012	0.7075	$1.7074e - 005$	0.2454
6400	$4.7299e - 004$	0.6716	$1.5285e - 005$	0.0798

Conclusão

Através dos resultados da Figura 8.42 e da Tabela 8.25, pode se concluir que a solução numérica dos métodos SPH e MPS são satisfatórias, mas a que apresentou melhores resultados foi a obtida pelo método MPS.

Conclusão Final

Os métodos SPH e MPS se mostraram satisfatórios para resolver numericamente a equação de Poisson bidimensional.

No método SPH utilizando a função núcleo new quártico os parâmetros que melhor apresentaram a solução numérica são $k = 2$ e $h = 1.3dx$, já quando se utiliza a função

spline cúbica os parâmetros são $k = 2$ e $h = 1.2dx$. Dentre os tratamento de fronteira apresentadas no capítulo 7 aquele que apresentou melhores resultados foi o tratamento de fronteira por partículas *dummy*.

No método MPS o parâmetro que apresentou melhor resultado foi $r_e = 1.495dx$ muito diferente do que é apresentado na literatura [31], já o tratamento de fronteira por partículas *dummy* para o cálculo do pnd^0 é uma boa estratégia para melhorar a solução numérica.

Considerações Finais

1. Para a equação de Poisson unidimensional com condições de contorno de Dirichlet, os métodos SPH e MPS se mostraram semelhante ao método de diferenças finitas quando o domínio de influência era $V_i = \{x_{i-1}, x_{i+1}\}$. A matriz resultante do sistema linear dos Métodos SPH e MPS tem as mesmas propriedades da matriz resultante do MDF, ou seja, é tridiagonal, simétrica e definida positiva. Já para a equação de Poisson unidimensional com condições de contorno de Neumann há perda de simetria o que também acontece no método de diferenças finitas.
2. Para a equação do calor quando o domínio de influência era $V_i = \{x_{i-1}, x_{i+1}\}$ os métodos SPH e MPS obtiveram as mesmas restrições de estabilidade que a do método de diferenças finitas em relação a integração temporal.
3. Em relação a equação de advecção a estratégia de adicionar uma viscosidade artificial $\left(\epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$, sendo ϵ dada pela equação (8.40) se mostrou bem eficiente em relação as oscilações próximas a descontinuidade e a condição CFL.
4. Para a equação de Burgers a estratégia de adicionar a mesma viscosidade artificial da equação de advecção não se mostrou tão eficiente como para a equação de advecção, pois em alguns problemas ocorreram pequenas oscilações.
5. Para a equação de Poisson bidimensional com condições de contorno de Dirichlet, os valores dos parâmetros k e h sugeridos na literatura do SPH se mostram os mais eficientes, já em relação ao tratamento da fronteira o que apresentou melhores resultados foi o tratamento de fronteira por partículas *dummy*. O valor do parâmetro r_e sugerido na literatura para o cálculo do operador laplaciano não apresentou resultados satisfatórios, pois devido ao grande número de partículas a solução era bastante suavizada. O valor que apresentou melhores resultados foi $r_e = 1.495dx$ com o tratamento de fronteira por partículas *dummy* para o cálculo do pnd^0 . Tanto o método SPH quanto o método MPS apresentaram resultados satisfatórios na solução da equação de Poisson.

Referências

- [1] J. F. B. Alves. Uma análise comparativa dos principais métodos baseados em partículas para simulações de escoamentos. Master's thesis, PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2008.
- [2] P. Balbuena; J. Seminario. *Molecular Dynamics: From Classical to Quantum Methods*. Butterworth-Heinemann, 1999.
- [3] T. Belytschko; Y. Krongauz; D. Organ; M. Fleming; P. Krysl,. Meshless methods: an overview and recent developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:3–47, 1996.
- [4] R. E. S. Bretas; M. A. D. Avila. *Reologia de Polímeros Fundidos*. Editora da UFSCar, 2000.
- [5] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 1th edition, 2010.
- [6] A. J. Chorin. Numerical solution of the Navier-Stokes equations. *Mathematics of Computation*, 22:745–762, 1968.
- [7] L. Corrêa; R. A. G. Lima; V. G. Ferreira. *Metodologia para desenvolvimento de esquemas UPWIND de alta resolução*. SBMAC, 2011.
- [8] J. A. Cuminato; M. Meneguette,. *Discretização de Equações Diferenciais Parciais: Técnicas de Diferenças Finitas*. SBM, 1 edition, 2013.
- [9] S. Cummins; M. Rudman. An SPH projection method. *Journal of Computational Physics*, 152:584–607, 1999.
- [10] A. O. Fortuna. *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos e Aplicações*. EDUSP, 2009.
- [11] D. A. Fulk. *A numerical analysis of smoothed particle hydrodynamics*. PhD thesis, Air Force Institute of Technology, 1994.
- [12] R. A. Gingold; J. J. Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics - theory and application to non-spherical stars. *Royal Astronomical Society*, 181:375–389, 1977.
- [13] W. Kaplan. *Cálculo Avançado*, volume 1. Blucher, 1th edition, 1972.
- [14] S. Koshizuka; Y. Oka. Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid. *Nuclear Science and Engineering*, 123:421–434, 1996.
- [15] E. Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*. John Wiley & Sons. Inc, 1978.

- [16] G. R. Li; S. Quek. *Finite Element Method: A Practical Course*. Butterworth-Heinemann, 2003.
- [17] L. D. Libersky; A. G. Petscheck. High strain lagrangian hydrodynamics - a three-dimensional SPH code for dynamic material response. *Journal of Computational Physics*, 109:67–75, 1993.
- [18] M. B. Liu; G. Liu; K. Lam. Construing smoothed functions in smoothed particle hydrodynamics with applications. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 155:263–284, 2003.
- [19] G. R. Liu; M. B. Liu,. *Smoothed Particle Hydrodynamics: a meshfree particle method*. World Scientific Publishing, 1 edition, 2003.
- [20] L. B. Lucy. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *Astron. Journal*, 82:1013–1024, 1977.
- [21] J. J. Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics. *Annual Review of Astronomical and Astrophysics.*, 30:543–574, 1992.
- [22] J. J. Monaghan. Simulating free surface flow with SPH. *Journal of Computational Physics*, 110:339–406, 1994.
- [23] J. J. Monaghan; A. Kowharyan. SPH simulating of multi-phase flow. *Computer Physics Communications*, 87:225–235, 1995.
- [24] J. J. Monaghan; J. C. Lattanzio. A refined particle method for astrophysical problems. *Astronomy and Astrophysics*, 149:135–143, 1985.
- [25] J. J. Monaghan; P. Cleary. Conduction modelling using smoothed particle hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 148:227–264, 1999.
- [26] J. Morris. *Analysis of smoothed particle hydrodynamics with applications*. PhD thesis, Monash University, 1996.
- [27] J. P. Morris. A study of the stability properties of SPH. *Applied Mathematics Reports and Preprints*, 1994. Monash University.
- [28] A. Paiva; F. Petronetto; G. Tavares; T. Lewiner. *Simulação de Fluidos sem Malha: Uma introdução ao método SPH*. IMPA, 2009.
- [29] F. Petronetto. *A Equação de Poisson e a Decomposição de Helmholtz-Hodge com Operadores SPH*. PhD thesis, PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2008.
- [30] C. R. Raimundo. *Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional*. LTC, 2th edition, 2010.
- [31] K. Shibata; S. Koshizuka. Numerical analysis of jet breakup behavior using particle method. *Journal of Nuclear Science and Technology*, 41:715–722, 2004.
- [32] D. Violeau. *Fluid Mechanics and the SPH Method: Theory and Applications*. Oxford University Press, 2012.
- [33] H. Y. Yoon; S. Koshizuka; Y. Oka . A mesh-free numerical method for direct simulation of gas-liquid phase interface. *Nuclear-Science-and-Engineering*, 4:407–424, 1999.

-
- [34] O. C. Zienkiewics; R. Codina. A general algorithm for compressible and incompressible flow, part i: the split characteristic-based scheme. *International Journal Numerical Methods in Fluids*, 20:869–885, 2005.
 - [35] O. C. Zienkiewicz; R. L. Taylo; J. Zhu. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Butterworth-Heinemann, 6th edition, 2005.