

IFT

**Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.001/98

**Integração em Dimensão Negativa em Teoria Quântica
de Campos ao Nível de 1 e 2-loops**

Alexandre Grezzi de Miranda Schmidt

Orientador

Prof. Dr. Alfredo Takashi Suzuki



Fevereiro 1998

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador, o Prof. Alfredo Suzuki, por ter me recebido, pela liberdade com que pude realizar este e os nossos outros trabalhos.

Aos colegas do IFT: Abel, André, Cláudio e Fabiano, pela amizade.

Aos meus pais, Flamar e Alzira, e à minha irmã, Gabriela, por tudo.

À Viviane, minha querida, pelos meus dias mais bonitos.

Ao IFT e à UNESP pela infra-estrutura.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

RESUMO

O sucesso da Teoria Quântica de Campos deve-se quase que exclusivamente ao método perturbativo, leia-se o cálculo de diagramas de Feynman. Neste contexto, o desenvolvimento de técnicas que possibilitem que estes cálculos sejam realizados rápida e facilmente é fundamental. Neste trabalho aplicamos e desenvolvemos a técnica da integração em dimensões negativas (NDIM) para integrais de Feynman ao nível de um e dois-loops. A grande vantagem desta abordagem é que por meio de uma continuação analítica conseguimos transformar estas integrais com estrutura complicada em integrais polinomiais. Resolvemos o problema em dimensão negativa e depois voltamos para dimensão positiva, novamente com uma continuação analítica. Estudamos duas integrais escalares, uma que contribui para o espalhamento fóton-fóton em QED, 1-loop, e a outra para um vértice na teoria ϕ^3 sem massa ao nível de 2 loops. Para a primeira obtivemos, além das duas representações em termos de funções hipergeométricas, seis novas soluções; usando NDIM resolvemos de maneira direta a segunda integral para expoentes arbitrários dos propagadores e dimensão par, sendo este também um resultado original.

ABSTRACT

The success of Quantum Field Theory is mostly due to the perturbative approach, read the calculation of Feynman diagrams. In this context, developing techniques to perform such calculations becomes basic. In this work we apply the negative dimensional integration method (NDIM) to Feynman loop integrals at one and two-loop level. By means of an analytic continuation we raise the propagators to positive powers, so the rather complicated integrals become polynomial ones. We then solve them in negative dimension and bring the result back to our real physical world, that of positive integer D . We study two scalar integrals, one contributing to photon-photon scattering in QED to 1-loop level and the other to a two-loop three-point vertex in massless ϕ^3 theory at 2-loop level. For the former we get eight hypergeometric representations – where six are novel ones – and for the latter we get a completely general results for arbitrary exponents of propagators and space-time dimension.

The success of the perturbative approach depends to a large measure on the accurate evaluation of multiloop Feynman integrals. - G.Leibbrandt

Nature laughs at the difficulties of integration - Laplace.

Que oráculos leio neste espelho opaco? Vamos encarar os fatos de frente. Que são os acordes da lira de Orfeu se comparados com um rosto que se mira e remira? – P.Leminski.

Conteúdo

1	Introdução.	8
1.1	Motivação.	8
1.2	Objetivo.	9
1.3	Regularização Dimensional.	9
1.4	Continuação Analítica.	10
1.5	Discussão.	15
1.5.1	Equivalência Fermiônica.	16
2	Integração em $D < 0$: Exemplos Simples em QED e em ϕ^3.	18
2.1	Integrais para a Polarização do Vácuo em QED.	18
2.2	Integrais para a Correção de Vértice em ϕ^3	24
3	Diagramas do tipo Caixa: Um Loop.	27
3.1	Introdução.	27
3.2	Integração do Diagrama tipo Caixa.	28
3.3	Funções Hipergeométricas.	31
3.4	Casos Particulares.	37
3.5	Limite sem massa.	39
3.6	Conclusão e Comparação.	41
4	Resultados Originais para o Diagrama do tipo Caixa.	44

4.1	Introdução.	44
4.2	As Novas Soluções.	46
4.3	Regularização.	49
4.4	Discussão.	60
4.4.1	O Parâmetro de Massa μ	64
4.5	Limite sem massa.	65
4.6	Conclusão.	66
5	Perspectivas Futuras: Diagramas com Dois Loops.	68
5.1	Integral Escalar para uma Função de Três Pontos.	68
5.2	As Demais Soluções.	74
5.3	Conclusão.	76
6	Conclusão.	77
6.1	Epílogo.	77
6.2	Novas Aplicações.	79
A	Funções Hipergeométricas.	80
B	O Caso Logarítmico da Continuação Analítica.	82
C	Integrais Escalares.	84
D	Parte Computacional.	86

Capítulo 1

Introdução.

Neste capítulo discutimos a motivação e o objetivo do nosso trabalho assim como a técnica da regularização dimensional e a sua continuação analítica originando desta maneira o conceito de integração em dimensão negativa.

1.1 Motivação.

O estudo perturbativo de teoria quântica de campos se baseia principalmente no cálculo de diagramas de Feynman. Ou seja, se estamos interessados em um determinado processo, o que fazemos, basicamente, é escrevê-lo em termos de uma série de potências de alguma constante de acoplamento, e então, dependendo da precisão que desejamos, calculamos tais termos da série. A eles associamos um conjunto de regras mnemônicas, as chamadas regras de Feynman. Este procedimento ainda é o melhor que possuímos para investigar toda a Física de altas energias (observando sempre quando é possível utilizar tal abordagem).

O cálculo de amplitudes de espalhamento, funções beta e a dimensão anômala do grupo de renormalização e de correções radiativas, por exemplo, exige que tenhamos a habilidade de resolver integrais de Feynman. Com a crescente precisão das medidas previstas pelo modelo padrão e a sua provável extensão é importante que tenhamos técnicas adequadas para trabalharmos com loops em teoria de campos – tanto para partículas com massa como quanto sem massa nos estados intermediários.

1.2 Objetivo.

A importância de se calcular integrais de Feynman implica na necessidade de se desenvolver novas técnicas para realizar o seu cálculo, visto que as primeiras abordagens são extremamente trabalhosas e para diagramas complicados elas se mostram praticamente inviáveis. Estamos nos referindo à abordagem usual, acadêmica, da conhecida parametrização de Feynman. Se pudermos então criar um método que seja de fácil utilização e que possibilite, rapidamente, a obtenção de resultados, melhor. Mais ainda: se tal resultado for dado de maneira simples – em termos de funções conhecidas, bem estudadas e com ampla coleção de referências – podemos desvendar, talvez, propriedades até então desconhecidas das integrais de Feynman, e, portanto, conhecer mais profundamente a teoria que as origina.

1.3 Regularização Dimensional.

A dimensionalidade do espaço-tempo é de importância fundamental em todas as áreas da Física. De fato, o estudo de modelos com baixa dimensão, ou seja, menor do que quatro, proporcionou grandes "insights" e produção científica[1] assim como o estudo em dimensões maiores que quatro. Com o desenvolvimento da regularização dimensional[2] 't Hooft e colaboradores promoveram-na de um mero número inteiro a uma variável complexa, i.e., a dimensão D nesta abordagem pode assumir qualquer valor – com a vantagem de preservar todas as simetrias de gauge da teoria. Em outras palavras, a integral de Feynman passa a ser uma função analítica de D . Esta idéia pode ser representada de uma forma muito simples,

$$\int \frac{d^4 q}{P_1 P_2 P_3 P_4 \dots} \xrightarrow{CA} \int \frac{d^D q}{P_1 P_2 P_3 P_4 \dots}, \quad (1.1)$$

onde P_j são os propagadores e o símbolo "CA" quer dizer continuação analítica. A regularização desta maneira é feita tomando-se $D = 4 - \epsilon$ e expandindo-se todo o resultado em torno de $\epsilon = 0$, as divergências aparecem então como polos desta função analítica (da integral).

É importante verificar que estas integrais D -dimensionais satisfazem um conjunto de propriedades[3, 4, 5] as quais justificam a sua utilização. São elas: a linearidade, a invariância translacional e a de escala ("scaling law"), respectivamente

$$\int d^D q [a f_1(q) + b f_2(q)] = a \int d^D q f_1(q) + b \int d^D q f_2(q), \quad (1.2)$$

onde f_1 e f_2 são funções arbitrárias e a e b são constantes também arbitrárias.

$$\int d^D q f(q + p) = \int d^D q f(q), \quad (1.3)$$

onde p é um vetor constante arbitrário. A terceira propriedade é,

$$\int d^D q f(sq) = s^{-D} \int d^D q f(q), \quad (1.4)$$

onde s é uma constante arbitrária positiva. Estas três propriedades definem univocamente a integração em um espaço D -dimensional

$$\int d^D q \exp(-\lambda q^2) = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{D/2},$$

a menos de uma constante de normalização[3].

1.4 Continuação Analítica.

A teoria das funções analíticas é amplamente utilizada em Teoria Quântica de Campos, assim como em diversas áreas da Física. Um dos conceitos mais interessantes e bonitos que ela originou foi o da continuação analítica: considere uma função $f(z)$ – por simplicidade vamos trabalhar com uma variável neste exemplo – que é analítica por exemplo em z_0 . Ora, se f é analítica em z_0 as suas derivadas também o são e, portanto, podemos expandi-la em série de Taylor. Esta série por sua vez possui um raio de convergência bem definido e por esta razão define uma região $\mathcal{D}_1$ de analiticidade. Agora se escolhermos um outro ponto, digamos z_1 , que

também pertença a $\mathcal{D}_1$ e tomarmos a expansão em série de Taylor de f não mais em torno de z_0 mas em torno de z_1 e chamarmos esta série de $g(z)$ então, possivelmente, esta segunda série tenha um raio de convergência – o qual define uma nova região $\mathcal{D}_2$ que possua uma parte que não seja comum a $\mathcal{D}_1$, veja figura 1. Conseguimos desta maneira aumentar a região de validade da nossa função original $f(z)$ e obviamente podemos aumentá-la ainda mais aplicando este processo repetidas vezes. Dizemos agora que[6],

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & \text{se } z \in \mathcal{D}_1 \\ g(z), & \text{se } z \in \mathcal{D}_2 \end{cases}, \quad (1.5)$$

a função g é chamada de continuação analítica direta de f na região $\mathcal{D}_2$. Por outro lado f é a continuação analítica direta de g na região $\mathcal{D}_1$.

É importante observar[7] que nem sempre a continuação analítica é única. Se existir entre as regiões $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ um ponto de ramificação (branch point) a continuação analítica não será unívoca (veja também Churchill[8])¹. Esta propriedade será utilizada mais tarde, no capítulo 4, quando discutirmos os novos resultados que obtivemos para uma certa integral de Feynman.

Outra propriedade muito importante é que se f satisfaz uma equação diferencial ou se possui certas propriedades, g também vai satisfazer a mesma equação e possuir as mesmas propriedades[9]. Isso é um tanto quanto previsível, veja eq.(1.5), mas é uma das propriedades mais importantes resultantes do processo de continuação analítica conhecida como a permanência da forma funcional.

Conhecendo bem a teoria das funções de variáveis complexas e o princípio da continuação analítica, Halliday² e Ricotta[10] em 1987 propuseram a seguinte idéia: considere a integral gaussiana,

$$\int d^D q \exp(-\lambda q^2) = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{D/2}, \quad (1.6)$$

¹Churchill ilustra este fato com um exemplo muito simples envolvendo $\sqrt{z}$.

²I.G.Halliday .

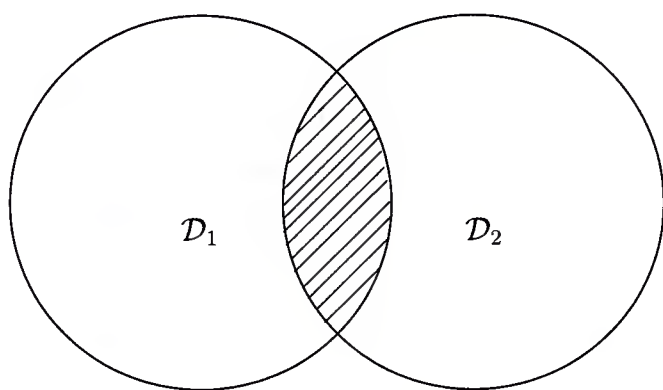


Figura 1.1: Continuação analítica de uma região $\mathcal{D}_1$ para outra $\mathcal{D}_2$.

que possui um resultado bem conhecido. Mas agora expanda a exponencial em série de Taylor e inverta a ordem da somatória com a integração,

$$\int d^D q \exp(-\lambda q^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int d^D q (q^2)^n = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{D/2}, \quad (1.7)$$

e como partimos da mesma integral gaussiana podemos impor a igualdade; *concluimos* que,

$$\int d^D q (q^2)^n = (-1)^n \pi^{D/2} \Gamma(1+n) \delta_{D/2, -n}, \quad (1.8)$$

e como o índice de soma n é sempre positivo necessariamente D deve ser negativo e mais: como o lado direito de (1.6) é uma função analítica de D , a integral em $D < 0$ também o será [11, 12, 13]. Esta expressão pode ser usada para definirmos o delta de Kronecker em dimensão negativa. O próximo passo de Halliday e Ricotta foi calcular³,

$$\mathcal{H} = \int d^D q \exp[-\alpha q^2 - \beta(q-p)^2] = \sum_{j,l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+l} \alpha^j \beta^l}{j!l!} \int d^D q (q^2)^j (q-p)^{2l}. \quad (1.9)$$

Lembramos agora da integral escalar do gráfico de auto-energia para o caso não-massivo, no qual temos a integral,

$$\int \frac{d^D q}{(q^2)^j (q-p)^{2l}}, \quad (1.10)$$

Halliday e Ricotta então notaram que a integral no lado direito de (1.9) poderia ser considerada como a contraparte em dimensão negativa da integral de auto-energia acima. Desta maneira, se fosse possível fazer a volta para dimensão positiva teriam descoberto um método muito simples de se calcular loops em Teoria Quântica de Campos, visto que integrais gaussianas são muito fáceis de se calcular.

Continuando com o cálculo acima o próximo passo é integrar a gaussiana que resulta em,

³Na verdade Halliday tem uma abordagem um pouco diferente da nossa, mas completamente equivalente devido a invariância translacional da integral gaussiana, pois ele expande diretamente a gaussiana e nós integramos primeiro.

$$\mathcal{H} = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{D/2} \exp\left(-\frac{\alpha\beta p^2}{\lambda}\right), \quad (1.11)$$

onde $\lambda = \alpha + \beta$. Expandindo a exponencial restante em série de potências,

$$\mathcal{H} = \pi^{D/2} \sum_{n_1, n_2, n_3=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n_1+n_2} \beta^{n_1+n_3} (-n_2 - n_3)!}{n_1! n_2! n_3!} (-p^2)^{n_1}, \quad (1.12)$$

onde os índices de soma devem satisfazer $n_1 + n_2 + n_3 = -\frac{1}{2}D$, porque usamos uma expansão multinomial⁴ em λ .

Comparando as duas expressões igualamos os expoentes de α e β resultando em,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(D < 0) &\equiv \int d^D q (q^2)^j (q-p)^{2l} = \pi^{D/2} \Gamma(1+j) \Gamma(1+l) (-1)^{j+l} \\ &\times \sum_{n_1, n_2, n_3=0}^{\infty} (-p^2)^{n_1} \frac{\Gamma(1 - n_1 - \frac{1}{2}D) \delta_{n_1+n_2, j} \delta_{n_1+n_3, l} \delta_{n_2+n_3, -n_1-D/2}}{n_1! n_2! n_3!}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Temos assim definido um sistema de equações algébricas lineares,

$$\begin{cases} n_1 + n_2 = j \\ n_1 + n_3 = l \\ n_2 + n_3 = -n_1 - \frac{1}{2}D \end{cases}, \quad (1.14)$$

que possui uma única solução,

$$n_1 = \rho, \quad n_2 = j - \rho, \quad n_3 = l - \rho, \quad (1.15)$$

onde $\rho = j + l + D/2$. Substituindo este resultado em (1.13),

⁴A expansão multinomial que utilizamos foi,

$$(\alpha + \beta)^{-n_1 - \frac{1}{2}D} = \sum_{n_2, n_3=0}^{-n_1 - \frac{1}{2}D} \frac{\alpha^{n_2} \beta^{n_3} (-n_1 - \frac{1}{2}D)!}{n_2! n_3!},$$

onde a relação $n_2 + n_3 = -n_1 - \frac{1}{2}D$ deve ser satisfeita. Note que podemos[14] estender a soma até o infinito pois quando os índices de soma assumem valores maiores que $-n_1 - D/2$ uma das funções gama do denominador, que vem dos fatoriais, se torna divergente e portanto, cancela estes termos extras que introduzimos.

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(D < 0) &= (-\pi)^{D/2} (p^2)^\rho \frac{\Gamma(1+j)\Gamma(1+l)\Gamma(1-\rho-\frac{1}{2}D)}{\Gamma(1+\rho)\Gamma(1+j-\rho)\Gamma(1+l-\rho)} \\
&= \frac{\pi^{D/2} (p^2)^\rho}{(1+j|-\rho)(1+l|-\rho)(1-\rho-\frac{1}{2}D|2\rho+\frac{1}{2}D)}, \tag{1.16}
\end{aligned}$$

onde o símbolo de Pochhammer é definido como,

$$(a|k) \equiv (a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}. \tag{1.17}$$

O resultado (1.16) ainda não foi trazido de volta ao mundo real, $D > 0$. Para realizar esta continuação analítica[15] vamos usar uma das propriedades do símbolo de Pochhammer[16, 17],

$$(a|-k) = \frac{(-1)^k}{(1-a|k)}, \tag{1.18}$$

com isso conseguimos escrever o nosso resultado em $D > 0$ que é o que interessa de fato,

$$\mathcal{H}^{AC} = \pi^{D/2} (\rho + \frac{1}{2}D| - 2\rho - \frac{1}{2}D)(-j|\rho)(-l|\rho)(q^2)^\rho. \tag{1.19}$$

Este é o cálculo mais simples de um loop em Teoria Quântica de Campos. Vimos então que o método da integração em dimensões negativas nos proporciona chegar ao resultado correto[18] de uma maneira muito simples e rápida.

1.5 Discussão.

Devemos a esta altura do trabalho esclarecer uma questão: qual o significado de um espaço com dimensão negativa? Bem, à primeira vista pode parecer que estamos trabalhando com algo que só poderia ser produto de ficção. Mas, podemos deixar este preconceito um pouco de lado e lembrar que em regularização dimensional o parâmetro D é uma variável complexa. Qual a interpretação física de um espaço com dimensão complexa? Esta resposta simplesmente

não nos interessa⁵. O que temos em mente quando usamos a regularização dimensional é sempre o mundo real, ou seja, valores inteiros do parâmetro D , já que todas as grandezas físicas – com uma única exceção: as funções de Green – perdem o significado neste espaço [20].

Continuamos analiticamente D para valores complexos mas o objetivo final é estudar o mundo real, ou seja, tomar D inteiro. Além de ser elegante calcular as integrais de Feynman em um número arbitrário de dimensões também é importante porque as propriedades de analiticidade assim como as singularidades dependem de D . Wilson[3] discute claramente o significado da integração em D -dimensões e conclui que ela não é real literalmente, é como se fosse. Ela apenas parece ser.

Tendo isso claro podemos explorar esta nova técnica que simplesmente coloca os propagadores no numerador, resolve a integral de Feynman e faz a volta. Até agora todos os diagramas que calculamos, que possuíam alguma resposta conhecida, estavam corretos[14, 15, 21]. Devemos encarar NDIM desta maneira – sem procurar interpretações nem significado sobre este “mundo” ($D < 0$) – D é um número inteiro positivo. Este é um fato que devemos ter sempre claro em mente.

1.5.1 Equivalência Fermiônica.

Logo após a publicação do primeiro trabalho sobre integração em dimensões negativas Halliday e Dunne mostraram que é possível identificá-la com a integração sobre variáveis grassmannianas. Em outras palavras uma integral em $D < 0$ corresponde a uma integral fermiônica N -dimensional, N sendo um número par.

Em outras palavras, Halliday *et al* mostraram, usando apenas a propriedade de invariância translacional da integral em $D < 0$, ou seja,

⁵Apesar de haver uma área da Matemática que trata deste assunto, o chamado Cálculo Fracionário. Veja por exemplo o interessante trabalho de Woon[19].

$$\int d^D q \frac{(q^2)^r (2qp)^s (2qk)^t}{\Gamma(1+r)\Gamma(1+s)\Gamma(1+t)} = \pi^{D/2} (-1)^r \delta_{2r+s+t+D,0} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(p^2)^{(s-j)/2} (2pk)^z (k^2)^{(t-j)/2}}{\Gamma[\frac{1}{2}(s-j)]\Gamma(1+j)\Gamma[\frac{1}{2}(t-j)]}, \quad (1.20)$$

possui a mesma forma⁶ que a sua "contraparte" fermiônica,

$$\int d^{2n}\theta \frac{(\theta^2)^r (2\theta\Lambda)^s (2\theta\Omega)^t}{\Gamma(1+r)\Gamma(1+s)\Gamma(1+t)}, \quad (1.21)$$

onde $\theta = (\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^{2n})$ é uma variável de Grassmann e

$$\int d^{2n}\theta = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d\theta^1 d\theta^2 \dots d\theta^{2n}.$$

A nossa intenção aqui não é apresentar uma discussão completa sobre integrais de Grassmann, por isso o leitor interessado deve consultar o trabalho de Halliday e Dunne[22].

⁶Isto significa simplesmente a substituição $D \leftrightarrow -2n$

Capítulo 2

Integração em $D < 0$: Exemplos Simples em QED e em ϕ^3 .

Para ilustrarmos melhor esta abordagem vamos calcular neste capítulo algumas integrais escalares com um loop que aparecem muito em Teoria Quântica de Campos: a que contribui para a polarização do vácuo e a que contribui para a correção de vértice na teoria ϕ^3 sem massa.

2.1 Integrais para a Polarização do Vácuo em QED.

Em QED a primeira correção ao propagador do fóton é representada pelo diagrama da figura abaixo. Por sua vez este gráfico é representado pela integral,

$$-e^2 \mu^{4-D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{\text{Tr} [\gamma^\mu (\gamma p - \gamma q - m) \gamma^\nu (\gamma q - m)]}{(q^2 - m^2) [(q - p)^2 - m^2]}, \quad (2.1)$$

onde e é a carga do elétron, m a sua massa, μ é uma escala de massa, o sinal menos aparece devido ao loop de fermions e γ^μ são as matrizes de Dirac[23, 24, 25]. Note agora que o numerador será

$$-4 [q^\mu p^\nu + q^\nu p^\mu + 2q^\mu q^\nu - \eta^{\mu\nu} (q^2 - m^2 + pq)],$$

porque termos que contém um número ímpar de matrizes gama se cancelam pois o seu traço é nulo. Integrais que possuem um 4-vetor no numerador podem ser calculadas facilmente a partir

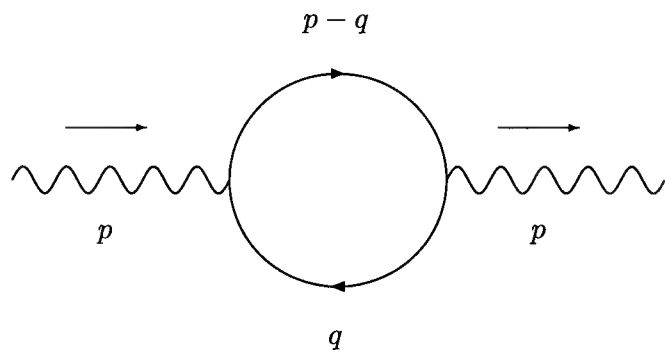


Figura 2.1: Polarização do vácuo em ordem mais baixa em QED.

de integrais escalares se usarmos a relação[26]

$$\int \frac{d^D q(qp)}{(q^2 - m_1^2)^{\nu_1+1} [(q-p)^2 - m_2^2]^{\nu_2}} = i\nu_2 \pi^{D/2} p^2 \int \frac{d^{D'} q}{(q^2 - m_1^2)^{\nu_1+1} [(q-p)^2 - m_2^2]^{\nu_2+1}}, \quad (2.2)$$

onde $D' = D + 2$. Já as que possuem q^2 podem ser transformadas ainda mais facilmente em integrais escalares se somarmos e subtrairmos m^2 . E, finalmente, as que no numerador aparece o produto $q^\mu q^\nu$ podem ser escritas em termos de escalares usando as fórmulas do apêndice C[27]. Com estes argumentos podemos nos concentrar em calcular somente integrais da forma,

$$\int d^D q \frac{1}{(q^2 - m^2)^i [(q-p)^2 - m^2]^j}, \quad (2.3)$$

pois desta maneira, usando as relações acima teremos calculado todas elas. Por esta razão, daqui em diante iremos desconsiderar todos os fatores do numerador inclusive a escala de massa μ . Vamos nos preocupar somente com a parte mais difícil da tarefa de calcular loops em Teoria Quântica de Campos, o cálculo das integrais¹.

Partimos portanto da integral gaussiana

$$\mathcal{I}_{VP}(p^2, m^2; D) = \int d^D q \exp \left\{ -\alpha(q^2 - m^2) - \beta [(q-p)^2 - m^2] \right\}, \quad (2.4)$$

ou seja, construímos a exponencial com os propagadores. Integrando obtemos,

$$\mathcal{I}_{VP}(p^2, m^2; D) = \left(\frac{\pi}{\lambda} \right)^{D/2} \exp \left(\lambda m^2 - \frac{\alpha\beta}{\lambda} p^2 \right), \quad (2.5)$$

onde $\lambda = \alpha + \beta$. Note que o resultado possui a forma (com massa) $\times$ (sem massa). O primeiro passo então para calcularmos gráficos complicados com massa é conhecer primeiramente o resultado sem massa².

Por outro lado, expandindo (2.4) em série de Taylor temos a contraparte de (2.3) em dimensão negativa,

¹Obviamente em um estudo completo de algum processo físico é preciso manter o parâmetro μ . Mas, como vamos ver no capítulo 4 é muito simples incluir este fator nos nossos resultados finais.

²Isso é importante quando estudamos diagramas de dois loops onde alguns deles são realmente complicados.

$$\mathcal{I}_{VP}(p^2, m^2; D) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+j} \alpha^i \beta^j}{i!j!} \mathcal{J}_{VP}(p^2, m^2; D), \quad (2.6)$$

onde definimos,

$$\mathcal{J}_{VP}(p^2, m^2; D) = \int d^D q (q^2 - m^2)^i [(q - p)^2 - m^2]^j, \quad (2.7)$$

agora devemos expandir (2.5) em série de Taylor para compararmos com (2.7) e assim obter uma expressão para $\mathcal{J}_{VP}(p^2, m^2; D)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{VP}(p^2, m^2; D) &= \pi^{D/2} \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4=0}^{\infty} \frac{(m^2)^{n_1} (-p^2)^{n_2} (\alpha)^{n_2+n_3} (\beta)^{n_2+n_4} (n_1 - n_2 - \frac{1}{2}D)!}{n_1! n_2! n_3! n_4!} \\ &= \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+j} \alpha^i \beta^j}{i!j!} \mathcal{J}_{VP}(p^2, m^2; D), \end{aligned} \quad (2.8)$$

como os parâmetros α e β são arbitrários devemos impor a igualdade de seus expoentes, temos então um sistema de equações algébricas lineares,

$$\begin{cases} n_2 + n_3 = i \\ n_2 + n_4 = j \\ n_1 + n_2 = \sigma = i + j + \frac{1}{2}D \end{cases}, \quad (2.9)$$

pois para que a igualdade acima seja verdadeira,

$$\mathcal{J}_{VP}(p^2, m^2; D) = \frac{\pi^{D/2} \Gamma(1+i) \Gamma(1+j)}{(-1)^{i+j}} \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4=0}^{\infty} \frac{(m^2)^{n_1} (-p^2)^{n_2} (n_1 - n_2 - \frac{1}{2}D)! \delta_{n_2+n_3, i} \delta_{n_2+n_4, j}}{n_1! n_2! n_3! n_4!}. \quad (2.10)$$

Concluimos, a partir da análise do sistema acima, que existem $C_3^4 = 4!/(3!1!) = 4$ soluções possíveis e que elas serão expressas em termos de uma série de potências.

Resolvendo para o índice n_2 , substituindo em (2.10) e escrevendo as funções gama em termos de símbolos de Pochhammer obtemos,

$$\mathcal{J}_{VP}(p^2, m^2; D) = \frac{\pi^{D/2}(m^2)^\sigma(1 + \sigma| - \frac{1}{2}D)}{(-1)^{i+j}} \sum_{n_2=0}^{\infty} \left(\frac{-p^2}{m^2}\right)^{n_2} \frac{(-i|n_2)(-j|n_2)(-\sigma|n_2)}{(-\sigma + \frac{1}{2}D|2n_2)}, \quad (2.11)$$

que é o resultado em dimensão negativa. É importante deixá-lo explícito porque quando quisermos estudar um resultado particular, e.g., $i = 0$ é dele que precisamos. Usando agora a propriedade (1.18) realizamos a continuação analítica para dimensão positiva,

$$\mathcal{J}_{VP}^{AC}(p^2, m^2; D) = \frac{\pi^{D/2}(-m^2)^\sigma \Gamma(-\sigma)}{\Gamma(-i-j)} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -i, & -j, & -\sigma, \\ & \frac{-i-j}{2}, & \frac{1-i-j}{2} \end{matrix} \middle| \frac{p^2}{4m^2} \right), \quad (2.12)$$

onde ${}_3F_2(\dots|z)$ é uma função hipergeométrica de uma variável - veja apêndice A - que converge absolutamente se $|z| < 1$. Usamos também a relação,

$$(a|2b) = 2^{2b}(\frac{1}{2}a|b)(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a|b),$$

no caso de interesse, $i = j = -1$, esta função se reduz a uma ${}_2F_1$,

$$\mathcal{J}_{VP}^{AC}(p^2, m^2; D) = \pi^{D/2}(-m^2)^{D/2-2} \Gamma(2 - \frac{1}{2}D) {}_2F_1 \left(1, 2 - \frac{1}{2}D; \frac{3}{2} \middle| \frac{-p^2}{4m^2} \right) \Big|_{i=j=-1}, \quad (2.13)$$

que é o resultado conhecido [28].

Além desta solução o sistema acima possui outras três. Desta vez todas elas possuem como variável $4m^2/p^2$, devemos portanto somar os resultados *se eles forem linearmente independentes*. Não somamos resultados degenerados[29, 30].

Temos como resultado, em $D < 0$,

$$VP_1 = \frac{\pi^{D/2}(m^2)^{\sigma-i}(-p^2)^i(1 + \sigma - i| - i - \frac{1}{2}D)}{(1 + j| - i)(-1)^{i+j}} {}_3F_2(a, b, -i; 1 + j - i, 1 + \sigma - i|z), \quad (2.14)$$

onde $a = \frac{1}{2}(1 + \sigma - 2i - \frac{1}{2}D)$, $b = 1 + a$, $z = 4m^2/p^2$. A segunda solução é tal que $VP_1 = VP_2(i \leftrightarrow j)$. Enquanto que a terceira,

$$VP_3 = \frac{(-\pi)^{D/2}(p^2)^\sigma \Gamma(1 - \sigma - \frac{1}{2}D) \Gamma(1 + i) \Gamma(1 + j)}{\Gamma(1 + \sigma) \Gamma(1 + i - \sigma) \Gamma(1 + j - \sigma)} {}_3F_2(c, d, -\sigma; 1 + i - \sigma, 1 + j - \sigma|z), \quad (2.15)$$

onde definimos $c = \frac{1}{2}(1 - \sigma - \frac{1}{2}D)$, $d = \frac{1}{2} + c$. Continuando analiticamente este resultado para o mundo real obtemos finalmente,

$$\mathcal{J}_{VP}^{AC}(p^2, m^2; D) = C_1 {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -i, & \frac{1}{2}(-i - j), & \frac{1}{2}(1 - i + j), & \left| \frac{4m^2}{p^2} \right| \\ 1 - i + j, & 1 + j + \frac{1}{2}D & & \end{matrix} \right) \\ + (i \leftrightarrow j) + C_3 {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -\sigma, & \frac{1}{2}(1 - \sigma - D/2), & 1 - \frac{1}{2}(\sigma + D/2), & \left| \frac{4m^2}{p^2} \right| \\ 1 + i - \sigma, & 1 + j - \sigma & & \end{matrix} \right) \quad (2.16)$$

onde

$$C_1 = \pi^{D/2} \frac{(m^2)^{\sigma-i} (-p^2)^i}{(-1)^\sigma} \frac{(-j|i)}{(i - \sigma|i + \frac{1}{2}D)},$$

e

$$C_3 = \pi^{D/2} (p^2)^\sigma (-i|\sigma) (-j|\sigma) (\sigma + \frac{1}{2}D | -2\sigma - \frac{1}{2}D),$$

o segundo termo é obtido a partir do primeiro fazendo-se a substituição indicada.

Com estas duas séries de potências temos resultados válidos nas duas regiões

$$\left| \frac{p^2}{4m^2} \right| > 1, \quad \left| \frac{4m^2}{p^2} \right| > 1, \quad (2.17)$$

note que se estivermos interessados no caso sem massa somente o segundo resultado nos permite estudá-lo.

A questão que se coloca agora é: *como ou a partir de que ponto podemos tomar o caso particular de $i = 0$?* A resposta é simples: devemos considerar os casos particulares no resultado em $D < 0$ e depois fazer a continuação analítica. Para o caso de um propagador com massa teremos³,

$$VP_1(i = 0) = \frac{\pi^{D/2} (m^2)^{D/2+j} (1 + j + D/2 | - \frac{1}{2}D)}{(-1)^j}, \quad (2.18)$$

$$VP_2(i = 0) = \frac{\pi^{D/2} (m^2)^{D/2} (-p^2)^j (1 + D/2 | - j - \frac{1}{2}D) (1 | - j)}{(-1)^j}, \quad (2.19)$$

³Lembrando que quando a variável de uma função hipergeométrica é zero resta apenas o seu primeiro termo, ou seja, 1.

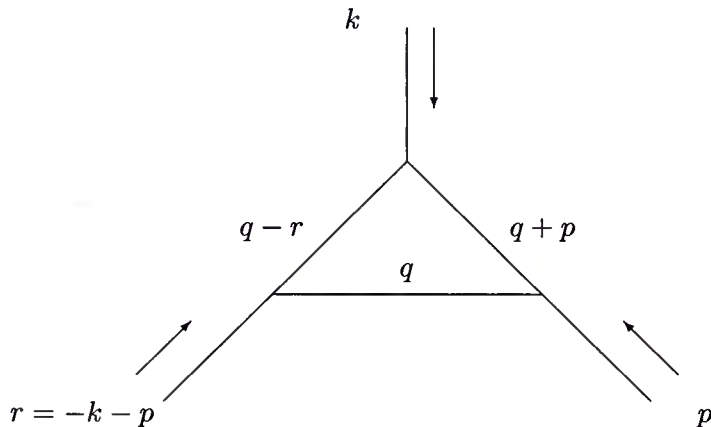


Figura 2.2: Gráfico para a correção de vértice na teoria ϕ^3 (1-loop).

$$VP_3(i=0) = \frac{(-\pi)^{D/2} (p^2)^{D/2+j} \Gamma(1-j-D) \Gamma(1+j)}{\Gamma(1+j+\frac{1}{2}D) \Gamma(1-j-\frac{1}{2}D) \Gamma(1-\frac{1}{2}D)}, \quad (2.20)$$

e o resultado é a soma das três expressões acima. No caso especial de $m \rightarrow 0$ verificamos imediatamente que os dois primeiros termos se anulam pois são diretamente proporcionais a m .

2.2 Integrais para a Correção de Vértice em ϕ^3 .

Vamos calcular uma integral escalar que contribui para a correção de vértice na teoria ϕ^3 sem massa. A qual representamos diagramaticamente pelo gráfico acima.

Começamos com a integral gaussiana,

$$\mathcal{G}_{\phi^3} = \int d^D q \exp \left[-\alpha q^2 - \beta (q+p)^2 - \gamma (q-r)^2 \right], \quad (2.21)$$

que após completarmos o quadrado pode ser facilmente integrada, dando

$$\mathcal{G}_{\phi^3} = \left(\frac{\pi}{\alpha + \beta + \gamma} \right)^{D/2} \exp \left[\frac{-1}{\alpha + \beta + \gamma} \left(\alpha \beta p^2 + \alpha \gamma r^2 + \beta \gamma k^2 \right) \right]. \quad (2.22)$$

No caso em questão, i.e., ϕ^3 onde todas as partículas externas não possuem massa podemos particularizar fazendo,

$$p^2 = r^2 = 0.$$

Logo, na exponencial acima resta somente o termo em k^2 . Expandindo-a em série de Taylor teremos,

$$\mathcal{G}_{\phi^3} = \pi^{D/2} \sum_{\{n_j\}=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n_2} \beta^{n_1+n_3} \gamma^{n_1+n_4} (-n_1 - D/2)! (-k^2)^{n_1}}{n_1! n_2! n_3! n_4!}, \quad (2.23)$$

agora usando a idéia de Halliday e Ricotta,

$$\mathcal{G}_{\phi^3} = \sum_{i,j,l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+j+l} \alpha^i \beta^j \gamma^l}{i! j! l!} \mathcal{V}(i, j, l; D), \quad (2.24)$$

onde $\mathcal{V}$ representa a integral em dimensão negativa,

$$\mathcal{V}(i, j, l; D) = \int d^D q \, (q^2)^i (q + p)^{2j} (q - r)^{2l}, \quad (2.25)$$

da comparação entre as duas séries provenientes de $\mathcal{G}_{\phi^3}$ podemos obter uma expressão para a integral acima,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(i, j, l; D) &= \frac{\pi^{D/2} \Gamma(1+i) \Gamma(1+j) \Gamma(1+l)}{(-1)^{i+j+l}} \sum_{n_1 \dots = 0}^{\infty} \frac{\Gamma(1 - n_1 - \frac{1}{2}D)}{n_1! n_2! n_3! n_4!} (-k^2)^{n_1} \delta_{n_2, i} \\ &\quad \times \delta_{n_1+n_3, j} \delta_{n_2+n_3+n_4, -n_1-D/2}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

observamos que existem três equações que vieram da comparação entre os resultados da integração da gaussiana e da expansão de Taylor e mais uma que veio justamente da expansão multinomial. Ao todo então temos 4 equações e quatro incógnitas (n_1, n_2, n_3, n_4) , tal sistema nos fornecerá uma única solução,

$$n_1 = \rho, \quad n_2 = i, \quad n_3 = j - \rho, \quad n_4 = l - \rho, \quad , \quad (2.27)$$

onde agora $\rho = i + j + l + D/2$. É preciso não confundir com as grandezas desta seção com as da anterior. Substituindo este resultado em (2.26) obtemos,

$$\mathcal{V}(i, j, l; D) = \frac{(-\pi)^{D/2} \Gamma(1+j) \Gamma(1+l) \Gamma(1-\rho-D/2)}{(-1)^{i+j+l} \Gamma(1+j-\rho) \Gamma(1+l-\rho) \Gamma(1+\rho)} (-k^2)^\rho, \quad (2.28)$$

escrevendo as funções gama duas a duas em termos do símbolos de Pochhammer,

$$\mathcal{V}(i, j, l; D) = \frac{(-\pi)^{D/2} (k^2)^\rho}{(1+j|-\rho)(1+l|-\rho)(1-\rho-D/2|2\rho+D/2)}, \quad (2.29)$$

este é o resultado em dimensão negativa e expoentes dos propagadores positivos. Devemos agora usar novamente o princípio da continuação analítica para trazê-lo ao mundo real,

$$\mathcal{V}^{AC}(i, j, l; D) = \pi^{D/2} (-j|\rho) (-l|\rho) (\rho + D/2| -2\rho - D/2) (k^2)^\rho, \quad (2.30)$$

no caso particular em que a integral é a que aparece em Teoria Quântica de Campos, i.e., $i = j = l = -1$ este resultado fica,

$$\mathcal{V}^{AC}(\{-1\}; D) = \frac{\pi^{D/2} (k^2)^{D/2-3} \Gamma^2(\frac{1}{2}D-2) \Gamma(3-\frac{1}{2}D)}{\Gamma(D-3)}. \quad (2.31)$$

Capítulo 3

Diagramas do tipo Caixa: Um Loop.

Neste capítulo vamos aplicar a técnica da integração em dimensão negativa a um diagrama que contribui para o espalhamento fóton-fóton em QED em ordem mais baixa. Além dos resultados já conhecidos anteriormente – dados em termos de funções hipergeométricas – e calculados de maneira diferente¹ obtemos seis novas representações em termos de séries hipergeométricas (que serão discutidas no próximo capítulo), discutimos a sua aplicação e ilustramos a suas respectivas regiões de convergência.

Mostramos também que tais resultados estão ligados corretamente tanto entre si quanto com os conhecidos via continuação analítica, seja direta ou indireta. Mais ainda, NDIM nos permite determinar os pontos de ramificação (branch-points) de tal integral de Feynman. Este é um sub-produto, digamos assim, inesperado do método.

3.1 Introdução.

O método usual, acadêmico de se resolver integrais de Feynman utiliza integrais paramétricas. Para cada propagador introduzimos uma destas integrais: a parametrização de Feynman tem por objetivo combinar o denominador da integral em um só fator, o que permite que a integração sobre o momento seja realizada de maneira direta, o problema é resolver as integrais restantes; existe também um outro tipo de parametrização – a chamada representação

¹Através da representação de Mellin-Barnes para os propagadores com massa.

de Schwinger dos propagadores – para cada propagador escrevemos uma integral gaussiana, esta uma abordagem um pouco melhor mas não, digamos assim, satisfatória do problema.

Para o cálculo de integrais do tipo auto-energia e correção de vértice estas técnicas ainda funcionam bem, mas quando o número de propagadores aumenta e além disso, quando existem partículas com massa nos estados intermediários as integrais paramétricas se tornam muito difíceis de se resolver. É o caso dos diagramas do tipo caixa que são convergentes e que em primeira aproximação ilustram a interação entre dois fótons.

Nosso objetivo neste capítulo é mostrar que com a continuação analítica para dimensão negativa podemos calcular facilmente este tipo de integral e mais, obter resultados originais.

3.2 Integração do Diagrama tipo Caixa.

Vamos calcular novamente uma integral escalar – contendo quatro propagadores com massa – já que em QED é sempre possível decompor a integral original em integrais escalares. Partimos como sempre de uma integral gaussiana,

$$\mathcal{G}_{BOX} = \int d^D q \exp \left\{ -\alpha(q^2 - m^2) - \beta[(q - p)^2 - m^2] - \gamma[(q - k_1)^2 - m^2] - \omega[(q - k_2)^2 - m^2] \right\}, \quad (3.1)$$

onde simplesmente consideramos a exponencial dos propagadores. Note que na abordagem de integrais paramétricas (de Schwinger) teríamos quatro integrais e não uma só. resultado é uma exponencial que depende dos momentos externos. Expandindo-a em série de Taylor,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{BOX} = & \pi^{D/2} \sum_{n_i=0}^{\infty} \frac{(-s)^{n_1} (-t)^{n_2} (-m^2)^{n_3} \alpha^{n_2+n_4} \beta^{n_2+n_5} \gamma^{n_1+n_6} \omega^{n_1+n_7}}{n_1! n_2! n_3! n_4! n_5! n_6! n_7!} \\ & \times \Gamma \left(1 + n_3 - n_1 - n_2 - \frac{1}{2} D \right), \end{aligned} \quad (3.2)$$

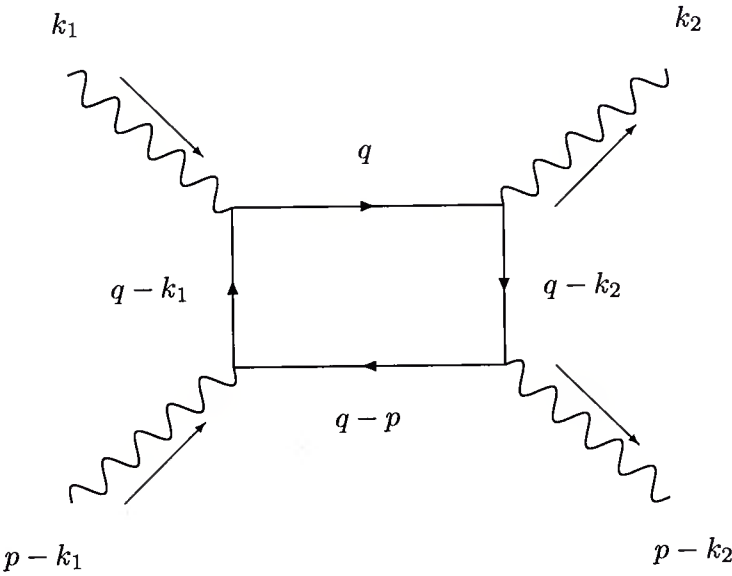


Figura 3.1: Diagrama para o espalhamento fóton-fóton no canal-s.

onde s e t são as variáveis de Mandelstam e m é a massa do elétron pois estamos tratando de QED. E, como usamos uma expansão multinomial os índices de soma devem satisfazer a equação,

$$n_4 + n_5 + n_6 + n_7 = n_3 - n_1 - n_2 - \frac{1}{2}D,$$

Por outro lado, expandindo a integral (3.1) em série de Taylor obtemos,

$$I = \sum_{i,j,k,l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+j+k+l} \alpha^i \beta^j \gamma^k \omega^l}{\Gamma(1+i)\Gamma(1+j)\Gamma(1+k)\Gamma(1+l)} \mathcal{J}_{BOX}(i, j, k, l; m) \quad (3.3)$$

onde $\mathcal{J}_{BOX}(i, j, k, l; m)$ é a integral escalar escrita em dimensão negativa²,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{BOX}(i, j, k, l; m) &= \int d^D q \left(q^2 - m^2 \right)^i \left[(q - p)^2 - m^2 \right]^j \left[(q - k_1)^2 - m^2 \right]^k \\ &\quad \times \left[(q - k_2)^2 - m^2 \right]^l \end{aligned} \quad (3.5)$$

comparando as duas expressões, dadas por (3.2) e (3.3), obtemos uma relação geral para a integral em questão,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{BOX}(i, j, k, l; m) &= g \pi^{D/2} \sum_{n_i=0}^{\infty} \frac{(-s)^{n_1} (-t)^{n_2} (-m^2)^{n_3} \Gamma\left(1 + n_3 - n_1 - n_2 - \frac{1}{2}D\right)}{n_1! n_2! n_3! n_4! n_5! n_6! n_7!} \delta_{n_2+n_4, i} \\ &\quad \times \delta_{n_2+n_5, j} \delta_{n_1+n_6, k} \delta_{n_1+n_7, l}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde

$$g = \Gamma(1+i)\Gamma(1+j)\Gamma(1+k)\Gamma(1+l).$$

concluimos portanto que dos deltas de Kronecker e da expansão multinomial os índices de soma devem satisfazer um sistema de equações algébricas lineares,

²Cuja contraparte em dimensão positiva é

$$\mathcal{K}_{BOX}(i, j, k, l; m) = \int \frac{d^D q}{(q^2 - m^2)^i [(q - p)^2 - m^2]^j [(q - k_1)^2 - m^2]^k [(q - k_2)^2 - m^2]^l}, \quad (3.4)$$

que é a integral de Feynman obtida a partir das regras usuais[23, 24].

$$\left\{ \begin{array}{l} n_2 + n_4 = i \\ n_2 + n_5 = j \\ n_1 + n_6 = k \\ n_1 + n_7 = l \\ n_1 + n_2 + n_3 = \sigma = i + j + k + l + \frac{1}{2}D \end{array} \right. . \quad (3.7)$$

Na abordagem usual a nossa tarefa principal, e mais difícil certamente, seria resolver as integrais paramétricas. Por outro lado, continuando analiticamente a integral de Feynman para $D < 0$ temos apenas que resolver um sistema de equações algébricas lineares, o que é muito mais simples.

3.3 Funções Hipergeométricas.

Resolvendo o sistema (3.7), substituindo as soluções na expressão (3.6) e reescrevendo os fatoriais como funções gama em (3.6) vamos obter sempre séries duplas de potências. Destas, cinco nos fornecerão os resultados conhecidos anteriormente na literatura[31]. Vamos denotar $\mathcal{B}_i$ cada uma destas séries de potências,

$$\mathcal{B}_1, \quad \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_5.$$

Estas definem duas bases de funções,

$$\{\mathcal{B}_1\}, \quad \{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_5\},$$

após a continuação analítica para dimensão positiva obtemos,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1^{AC} = & \left(\frac{-\pi}{2} \right)^{D/2} \frac{2\sqrt{\pi}(-2m^2)^\sigma \Gamma(-\sigma)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{\sigma}{2} + \frac{D}{4}) \Gamma(-\frac{\sigma}{2} + \frac{D}{4})} \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} \left(\frac{s}{4m^2} \right)^{n_1} \\ & \times \left(\frac{t}{4m^2} \right)^{n_2} \frac{(-i|n_1)(-j|n_1)(-k|n_2)(-l|n_2)(-\sigma|n_1 + n_2)}{n_1!n_2!(-\frac{\sigma}{2} + \frac{D}{4}|n_1 + n_2)(\frac{1}{2} - \frac{\sigma}{2} + \frac{D}{4}|n_1 + n_2)} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_2^{AC} &= \frac{2\pi^{D/2}(-t)^l(-s)^j(-m^2)^{D/2+i+k}(-i|j)(-k|l)}{(1+i-j+k-l|\frac{D}{2}+j+l)} \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} \frac{1}{n_1!n_2!} \left(\frac{4m^2}{s}\right)^{n_1} \\
&\times \left(\frac{4m^2}{t}\right)^{n_2} \frac{(-j|n_1)(-l|n_2) \left(\frac{1+i-j+k-l}{2}\right|n_1+n_2)}{(1+i-j|n_1)(1+k-l|n_2)(1+i+k+\frac{D}{2}|n_1+n_2)} \\
&\times \left(1 + \frac{1}{2}(i-j+k-l)\right|n_1+n_2), \tag{3.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_3^{AC} &= \frac{2\pi^{D/2}(-t)^k(-s)^j(-m^2)^{\frac{D}{2}+i+l}(-i|j)(-l|k)}{(1+i+j-k-l|\frac{D}{2}+j+k)} \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} \frac{1}{n_1!n_2!} \left(\frac{4m^2}{s}\right)^{n_1} \\
&\times \left(\frac{4m^2}{t}\right)^{n_2} \frac{(-j|n_1)(-k|n_2) \left(\frac{1+i-j-k+l}{2}\right|n_1+n_2)}{(1+i-j|n_1)(1-k+l|n_2)(1+i+l+\frac{D}{2}|n_1+n_2)} \\
&\times \left(1 + \frac{1}{2}(i-j-k+l)\right|n_1+n_2), \tag{3.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_4^{AC} &= \frac{2\pi^{D/2}(-t)^k(-s)^i(-m^2)^{\frac{D}{2}+j+l}(-j|i)(-l|k)}{(1-i+j-k+l|\frac{D}{2}+i+k)} \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} \frac{1}{n_1!n_2!} \left(\frac{4m^2}{s}\right)^{n_1} \\
&\times \left(\frac{4m^2}{t}\right)^{n_2} \frac{(-i|n_1)(-k|n_2) \left(\frac{1-i+j-k+l}{2}\right|n_1+n_2)}{(1-i+j|n_1)(1-k+l|n_2)(1+j+l+\frac{D}{2}|n_1+n_2)} \\
&\times \left(1 + \frac{1}{2}(-i+j-k+l)\right|n_1+n_2), \tag{3.11}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_5^{AC} &= \frac{2\pi^{D/2}(-t)^l(-s)^i(-m^2)^{\frac{D}{2}+j+k}(-j|i)(-k|l)}{(1-i+j+k-l|\frac{D}{2}+i+l)} \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} \frac{1}{n_1!n_2!} \left(\frac{4m^2}{s}\right)^{n_1} \\
&\times \left(\frac{4m^2}{t}\right)^{n_2} \frac{(-i|n_1)(-l|n_2) \left(\frac{1-i+j+k-l}{2}\right|n_1+n_2)}{(1-i+j|n_1)(1+k-l|n_2)(1+j+k+\frac{1}{2}D|n_1+n_2)} \\
&\times \left(1 + \frac{1}{2}(-i+j+k-l)\right|n_1+n_2) \tag{3.12}
\end{aligned}$$

onde σ é definido na última equação de (3.7). Observando então as variáveis verificamos que há dois tipos distintos,

$$\left\{ \frac{s}{4m^2}, \frac{t}{4m^2} \right\}, \left\{ \frac{4m^2}{s}, \frac{4m^2}{t} \right\},$$

referente ao primeiro conjunto há apenas uma série, a primeira ($\mathcal{B}_1$). Ao segundo temos quatro, portanto a integral de Feynman será dada por,

$$\mathcal{J}_{BOX}^{AC}(i, j, k, l; m) = \mathcal{B}_1^{AC} \quad (3.13)$$

$$= \mathcal{B}_2^{AC} + \mathcal{B}_3^{AC} + \mathcal{B}_4^{AC} + \mathcal{B}_5^{AC}, \quad (3.14)$$

estes são resultados válidos para expoentes dos propagadores com valores arbitrários e dimensão do espaço-tempo par³ e estão relacionados através de continuação analítica. Observe que foi importante considerarmos expoentes com valores arbitrários desde o começo pois no segundo conjunto existem fatores da forma,

$$(-l|k) = \frac{\Gamma(-l+k)}{\Gamma(-l)},$$

e, como estamos interessados no caso particular de $i = j = k = l = -1$ teríamos encontrado problemas por causa destes fatores. Podemos então com esta abordagem mais geral regularizar analiticamente este tipo de "divergência".⁴

Substitutindo $i = j = k = l = -1$ em (3.8) obtemos,

$$\mathcal{J}_1(D) = \frac{8}{3} \left(\frac{-\pi}{2} \right)^{D/2} \frac{\Gamma(4 - \frac{1}{2}D)}{(-2m^2)^{4-D/2}} \mathcal{S}_1 \left(1, 1, 1, 1, 4 - \frac{1}{2}D; \frac{5}{2}, 2 \left| \frac{s}{4m^2}, \frac{t}{4m^2} \right. \right), \quad (3.15)$$

onde por simplicidade retiramos os rótulos "BOX" e "AC" e deixamos indicada ainda a dependência na dimensão D . A função $\mathcal{S}_1$ é uma generalização da função F_3 , veja eq.(4.13) no próximo capítulo. Em $D = 4$ esta expressão se reduz a,

³Pois estamos assumindo o propagador da forma $(p^2 - m^2)^{-1}$. Em três dimensões haveria ainda mais um termo, o famoso termo de Chern-Simons.

⁴Escrevemos entre aspas porque, na verdade, estes fatores irão se cancelar mutuamente.

$$\mathcal{J}_1(\{-1\}; m) = \frac{\pi^2}{6m^4} F_3 \left(1, 1, 1, 1; \frac{5}{2} \left| \frac{s}{4m^2}, \frac{t}{4m^2} \right. \right), \quad (3.16)$$

resultado esse obtido por Davydychev usando a representação de Mellin-Barnes para propagadores com massa a menos de um fator imaginário i . Observe no entanto que estamos trabalhando no espaço euclidiano e Davydychev no de Minkowski. Verifique ainda que esta expressão é simétrica em s e t e que não se anula para $s = t = 0$. Se estivermos interessados em calcular a amplitude para o espalhamento fóton-fóton devemos preservar a invariância de gauge, e portanto, subtrair um termo para que quando as pernas externas forem amputadas o resultado seja nulo[32]. Esta expressão é válida na região de convergência da série que define a função F_3 [16, 33],

$$F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta'; \gamma | x, y) = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{x^j y^k}{j!k!} \frac{(\alpha|j)(\alpha'|k)(\beta|j)(\beta'|k)}{(\gamma|j+k)} \quad (3.17)$$

onde $|x| < 1$ e $|y| < 1$. Em outras palavras ela vale abaixo do limiar de produção de pares, sendo então adequada para estudarmos o limite não relativístico do espalhamento fóton-fóton. Note também que quando $s = 4m^2$, no canal-s, existe a possibilidade da criação de um par e a amplitude como um todo deve manifestar este fato através de um ponto de ramificação[13, 24]. A função hipergeométrica F_3 (3.17) possui pontos de ramificação em $x = 1$ e $y = 1$, i.e., quando $s = 4m^2$ e quando $t = 4m^2$.

Esta função pode ainda ser escrita na forma usual de dilogaritmos e logaritmos[32, 34]. É necessário considerar a sua representação integral[16], maiores detalhes deste exercício algébrico pode ser encontrado em [31].

O segundo conjunto de soluções nos possibilita a construção de mais uma representação em série de potências para a integral de Feynman,

$$\mathcal{J}_2(i, j, k, l; m) = 2\pi^{D/2} \sum_{\{a,b,c,d\}} \frac{\Gamma(c-a)\Gamma(d-b)\Gamma(1+a+b-c-d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)\Gamma(1-c-d+\frac{1}{2}D)(-s)^a(-t)^b} \quad (3.18)$$

$$\times (-m^2)^{D/2-c-d} \mathcal{A} \left(\frac{1}{2}[1+a+b-c-d], a, b, 1 + \frac{1}{2}[a+b-c-d]; \right. \\ \left. 1+a-c, 1+b-d, 1-c-d + \frac{1}{2}D \left| \frac{4m^2}{s}, \frac{4m^2}{t} \right. \right)$$

o conjunto $\{a, b, c, d\}$ assume os valores $\{-j, -l, -i, -k\}$, $\{-j, -k, -i, -l\}$, $\{-i, -k, -j, -l\}$, $\{-i, -l, -j, -k\}$ e $\mathcal{A}$ é uma função hipergeométrica que *definimos* como,

$$\mathcal{A}(\alpha, \beta, \beta', \phi; \gamma, \gamma', \phi' | x, y) = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{x^j y^k (\alpha|j+k)(\beta|j)(\beta'|k)(\phi|j+k)}{j!k!(\gamma|j)(\gamma'|k)(\phi'|j+k)}. \quad (3.19)$$

Para o caso especial onde $\phi = \phi'$ ela se reduz à função hipergeométrica de Appel F_2 [16, 33]. Observe que $\mathcal{J}_2$ é a continuação analítica de $\mathcal{J}_1$ [16]. Enquanto $\mathcal{J}_1$ é válida no regime não-relativístico $\mathcal{J}_2$ o é no relativístico. Entretanto, estas duas funções hipergeométricas não cobrem todos os valores possíveis das variáveis de Mandelstam.

Como mencionamos acima existem singularidades no lado direito da equação (3.18) quando consideramos o limite $i = j = k = l = -1$. Este é o chamado caso logarítmico da continuação analítica. Seguindo a lição de Davydychev, o fato de aparecerem singularidades em alguns termos de fórmula de continuação analítica não significa que ela seja singular como um todo. Devemos aplicar algum tipo de regularização, neste caso a chamada regularização analítica.

Vamos empregar a mesma técnica utilizada por Davydychev: introduzimos pequenas correções nos parâmetros β e β' da função hipergeométrica $F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta'; \gamma | x, y)$ [35]. É como se estivéssemos corrigindo os expoentes do propagadores[36]. Seja então,

$$\beta \rightarrow 1 + \delta, \quad \beta' \rightarrow 1 + \delta',$$

onde δ e δ' são independentes.

Tendo introduzido os deltas expandimos todos os fatores em torno de $\delta = 0$ e $\delta' = 0$. Fazemos o mesmo para a função $\mathcal{A}$. Como há dois fatores "singulares" em cada termo devemos expandir a função até segunda ordem, i.e., teremos uma expressão com a forma,

$$\left(\frac{A}{\delta\delta'} + \frac{B}{\delta} + \frac{C}{\delta'} + \mathcal{O}(1)\right) \left[1 + \delta\partial + \delta'\partial + \frac{1}{2}\delta^2\partial^2 + \frac{1}{2}\delta'^2\partial^2 + \delta\delta'\partial^2\right] F_2(\dots). \quad (3.20)$$

Fazendo então a multiplicação e considerando a soma dos quatro termos, no final tomamos o limite dos deltas tendendo a zero. Verificamos desta maneira que as singularidades se cancelam.⁵ Assim como o resultado anterior este só é definido dentro de uma certa região em que a função hipergeométrica converge. Por definição[16, 33],

$$F_2(\alpha, \beta, \beta'; \gamma, \gamma' | z_1, z_2) = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{z_1^j z_2^k (\alpha|j+k)(\beta|j)(\beta'|k)}{j!k! (\gamma|j)(\gamma'|k)}, \quad |z_1| + |z_2| < 1.$$

Seguindo este procedimento obtemos[31] uma expressão um tanto complicada se comparada com a primeira,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{BOX}^{AC}(\{-1\}; m) &= \frac{2\pi^2}{st} \left\{ \frac{-\pi^2}{2} + \log(-4x) \log(-4y) - [\log(-4x) + \log(-4y)] \partial_\alpha \right. \\ &\quad \left. - \log(-4x) \partial_{\gamma'} - \log(-4y) \partial_\gamma + \partial_\alpha^2 + \partial_\alpha \partial_{\gamma'} + \partial_\gamma \partial_{\gamma'} \right\} \\ &\quad \times F_2 \left(\alpha, \beta, \beta'; \gamma, \gamma' \left| \frac{4m^2}{s}, \frac{4m^2}{t} \right. \right), \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde $x = s/4m^2$ e $y = t/4m^2$ e introduzimos a notação usual para as derivadas paramétricas,

$$\partial_\gamma F_2 \equiv \frac{\partial}{\partial \gamma} F_2 \left(\alpha, \beta, \beta'; \gamma, \gamma' \left| \frac{4m^2}{s}, \frac{4m^2}{t} \right. \right) \Big|_{\alpha=1/2, \beta=\beta'=\gamma=\gamma'=1}. \quad (3.22)$$

É importante observar que o cálculo destas derivadas nos leva aos logaritmos e dilogaritmos usuais mas tal cálculo não é fácil. Podemos proceder de duas maneiras: ou somar a série – este método no entanto é muito trabalhoso – usando

$$\partial_a(a|k) = (a|k)[\psi(a+k) - \psi(a)], \quad (3.23)$$

onde a função ψ é a derivada logarítmica da função gama,

$$\psi(z) = \frac{d \log \Gamma(z)}{dz},$$

⁵A ajuda do Prof.Davydychev neste ponto foi crucial.

ou seguindo Davydychev que por outro lado calculou todas estas derivadas paramétricas usando representações integrais[31].

Ressaltamos que este resultado *não* é válido para $|s| < 4m^2$ e para $|t| < 4m^2$. Veja também que usando o método de integração em $D < 0$ obtemos imediatamente duas séries duplas que representam a integral de Feynman. Além disso elas estão relacionadas por continuação analítica, como não poderia deixar de ser pois elas representam a mesma função, a integral de Feynman.

Poderíamos esperar, baseados na teoria das funções hipergeométricas e análise complexa, que aparecessem outras funções hipergeométricas relacionadas através de continuação analítica com as duas que acabamos de obter. Erdelyi *et al*[16] registram três destas relações sem restrição aos valores dos parâmetros,

$$F_3(\dots|x, y) \longrightarrow F_2(\dots|x^{-1}, y^{-1}).$$

De fato, acabamos de trabalhar com esta relação. Além dela temos,

$$F_3(\dots|x, y) \longrightarrow H_2(\dots|x^{-1}, -y)$$

e

$$H_2(\dots|x, y) \longrightarrow F_2(\dots|x^{-1}, -y)$$

seria razoável portanto – pois NDIM nos fornece vários resultados simultâneos – que como resultado obtivéssemos também, pelo menos, funções H_2 . Poderíamos então esperar que estes novos resultados cobrissem todos os valores possíveis das variáveis de Mandelstam.

3.4 Casos Particulares.

Se colocarmos na integral original qualquer dos expoentes igual a zero obtemos uma outra integral escalar mas só que com três propagadores. Como NDIM deve se mostrar consistente para qualquer valor escolhido, podemos fazer $i = 0$. A partir de (3.8) obtemos

$$\mathcal{J}_1(0, j, k, l; m) = C^{(1)} \times {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -k, & -l, & -j - k - l - \frac{D}{2}, \\ \frac{-j-k-l}{2}, & \frac{1-j-k-l}{2} \end{matrix} \middle| \frac{t}{4m^2} \right) \quad (3.24)$$

onde ${}_3F_2$ é a função hipergeométrica generalizada de uma variável[16] e,

$$C^{(1)} = \left(\frac{-\pi}{2} \right)^{D/2} \frac{2\sqrt{\pi}(-2m^2)^{j+k+l+\frac{D}{2}} \Gamma(-j - k - l - \frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{-j-k-l}{2}) \Gamma(\frac{1-j-k-l}{2})},$$

obtemos o mesmo resultado se fizermos $j = 0$. Para $k = 0$ o que ocorre é simplesmente $s \leftrightarrow t$

$$\mathcal{J}_1(i, j, 0, l; m) = C^{(2)} \times {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -i, & -l, & -i - j - l - \frac{D}{2}, \\ \frac{-i-j-l}{2}, & \frac{1-i-j-l}{2} \end{matrix} \middle| \frac{s}{4m^2} \right) \quad (3.25)$$

onde

$$C^{(2)} = \left(\frac{-\pi}{2} \right)^{D/2} \frac{2\sqrt{\pi}(-2m^2)^{i+j+l+\frac{D}{2}} \Gamma(-i - j - l - \frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{-i-j-l}{2}) \Gamma(\frac{1-i-j-l}{2})},$$

e em virtude da simetria ($k \leftrightarrow l$) na equação (3.8), se $l = 0$ obtemos o mesmo resultado.

Desta expressão podemos também obter resultados para integrais com dois propagadores com massa, ou seja, para integrais escalares do tipo auto-energia. Em (3.24) colocando por exemplo $j = 0$, teremos

$$\mathcal{J}_1(0, 0, k, l; m) = C^{(3)} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -k, & -l, & -k - l - \frac{D}{2}, \\ \frac{-k-l}{2}, & \frac{1-k-l}{2} \end{matrix} \middle| \frac{t}{4m^2} \right),$$

onde

$$C^{(3)} = \left(\frac{-\pi}{2} \right)^{D/2} \frac{2\sqrt{\pi} \Gamma(-k - l - \frac{D}{2})}{(-2m^2)^{-k-l-\frac{D}{2}} \Gamma(\frac{-k-l}{2}) \Gamma(\frac{1-k-l}{2})}$$

Analogamente para $l = 0$ em (3.25),

$$\mathcal{J}_1(i, j, 0, 0; m) = C^{(4)} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -i, & -j, & -i - j - \frac{D}{2}, \\ \frac{-i-j}{2}, & \frac{1-i-j}{2} \end{matrix} \middle| \frac{t}{4m^2} \right),$$

onde

$$C^{(4)} = \left(\frac{-\pi}{2}\right)^{D/2} \frac{2\sqrt{\pi}\Gamma(-i-j-\frac{D}{2})}{(-2m^2)^{-i-j-\frac{D}{2}}\Gamma(\frac{-i-j}{2})\Gamma(\frac{1-i-j}{2})}$$

No caso particular onde os expoentes dos propagadores são todos iguais a menos um obtemos,

$$\mathcal{J}_1(-1, -1, 0, -1; m) = \frac{-\pi^2}{2m^2} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} 1, & 1, & 1, \\ 2, & \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| \frac{s}{4m^2} \right) \quad (3.26)$$

o qual pode ser escrito em termos de funções elementares[28]. Observe também que colocamos $D = 4$, pois o resultado é finito. Já para a integral escalar com dois propagadores,

$$\mathcal{J}_1(0, 0, -1, -1; m) = \pi^2(m^2)^{2-\frac{1}{2}D}\Gamma(2-\frac{D}{2}) {}_2F_1 \left(\begin{matrix} 1, & 2-\frac{D}{2} \\ \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| \frac{s}{4m^2} \right) \quad (3.27)$$

há um polo simples em $D = 4$, obviamente.

Se estivermos interessados em resultados para estas integrais particulares acima em outras regiões dos momentos externos devemos continuar analiticamente este resultado[37]. É importante relembrar uma propriedade das funções analíticas: qualquer propriedade funcional de uma função analítica é compartilhada por outras funções que são geradas a partir dela[9] (veja cap.1).

3.5 Limite sem massa.

Podemos agora facilmente escrever o resultado para o caso particular onde as partículas virtuais não possuem massa. O gráfico da próxima página ilustra uma possível aplicação⁶.

Antes de tudo é preciso identificar entre as nossas soluções qual admite que façamos $m \rightarrow 0$ porque nem todas as séries são definidas neste limite. Verificamos que a primeira solução, $\mathcal{J}_1$ é convergente na região

⁶Em Eletrodinâmica escalar também podemos ter um diagrama parecido com este.

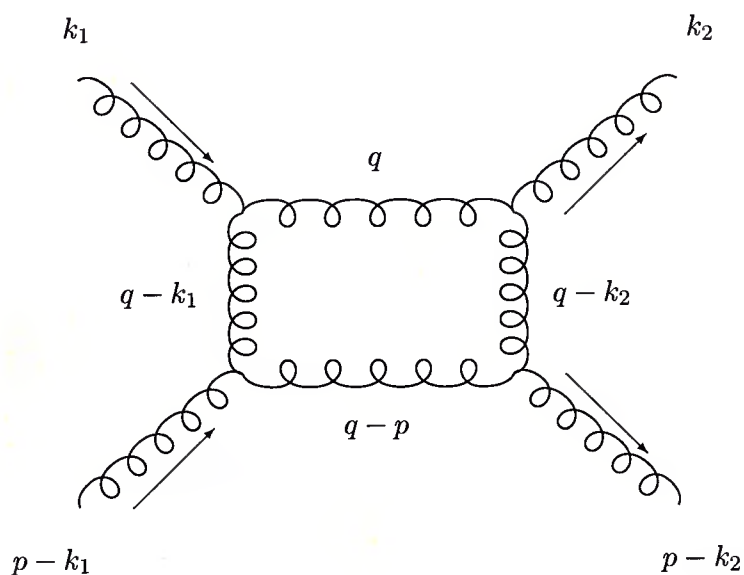


Figura 3.2: Um dos diagramas que contribui para o espalhamento gluon-gluon em QCD.

$$\left| \frac{s}{4m^2} \right| < 1, \left| \frac{t}{4m^2} \right| < 1,$$

e portanto concluímos que ela não é adequada para estudarmos o limite de massa nula.

Já a segunda solução, $\mathcal{J}_2$, é definida apenas em

$$\left| \frac{4m^2}{s} \right| + \left| \frac{4m^2}{t} \right| < 1,$$

quando fazemos $m \rightarrow 0$ esta desigualdade é sempre satisfeita. Na expressão (3.21) os termos que não contém derivadas paramétricas se reduzem a 1 pois,

$$\lim_{m \rightarrow 0} F_2 \left(\alpha, \beta, \beta'; \gamma, \gamma' \left| \frac{4m^2}{s}, \frac{4m^2}{t} \right. \right) = 1,$$

somente o primeiro termo de ambas as séries é não-nulo. Mas note que temos também logaritmos de $s/4m^2$ que "explodem" quando $m \rightarrow 0$. Concluímos que este resultado também não é adequado para tomarmos o limite de massa nula.

3.6 Conclusão e Comparação.

Com a técnica da integração em dimensão negativa consideramos o diagrama do tipo caixa para o espalhamento fóton-fóton em QED. As duas representações conhecidas na literatura, em termos de funções hipergeométricas, foram obtidas facilmente neste contexto como um caso particular em que a integral (3.5) é a integral de Feynman para o processo em questão, i.e., quando $i = j = k = l = -1$ e $D = 4$. As linhas de corte em $s = 4m^2$, no canal-s, ou $t = 4m^2$ no canal-t surgem de forma muito simples pois estes pontos correspondem a pontos de ramificação das funções hipergeométricas. Além disso fomos capazes de mostrar que estas duas funções hipergeométricas estão relacionadas corretamente por meio de continuação analítica. Como casos particulares calculamos também integrais escalares com três e dois propagadores.

Tendo visto em detalhes todos os passos do método podemos agora compará-lo com a técnica usual, acadêmica, das integrais paramétricas.

Para NDIM usamos um círculo e para as integrais paramétricas um quadrado. As duas abordagens partem da mesma integral de Feynman.

- Para NDIM escrevemos uma integral gaussiana D -dimensional para cada loop. Os propagadores são os seus argumentos. Resolvemos facilmente tal integral - uma das poucas que sabemos calcular.
- O método da parametrização de Feynman nos leva a introduzir uma integral paramétrica para cada propagador. No caso do diagrama do tipo caixa teríamos *cinco* integrais, enquanto que com NDIM apenas *uma*.
- Expandimos a gaussiana e o resultado da integração em série de Taylor.
- Com um "shift" adequado no momento eliminamos o termo linear para podermos escrever o denominador como $l^2 + \Delta$, onde este Δ é uma função complicada dos momentos externos e dos parâmetros de Feynman, além de ser positiva definida na região de integração dos parâmetros.
- Comparamos as duas expressões e resolvemos para a integral em $D < 0$ que é expressa então como uma série múltipla. Surgem vários deltas de Kronecker.
- Euclidianizamos a integral, i.e., fazemos a chamada rotação de Wick.
- Dos deltas de Kronecker tiramos um conjunto de sistemas de equações algébricas lineares. Devemos resolver todos.
- Com o truque de Feynman[38] conseguimos integrar facilmente sobre o momento do "loop". Restam ainda as integrais sobre os parâmetros.
- Com as soluções dos sistemas em mãos temos o resultado da integral de Feynman *em dimensão negativa*.
- Pelo menos uma das integrais paramétricas pode ser resolvida imediatamente devido a presença de uma delta de Dirac.

- Realizamos a continuação analítica para o mundo real. A integral está resolvida. Em geral ela será escrita em termos de funções hipergeométricas.
- Se for possível resolver as integrais restantes temos o resultado da integral em questão, em geral em termos de polilogaritmos.

Capítulo 4

Resultados Originais para o Diagrama do tipo Caixa.

Dedicamos este capítulo para apresentar e discutir os seis resultados originais obtidos por nós usando NDIM.

4.1 Introdução.

No capítulo anterior estudamos uma integral escalar que contribui para o espalhamento fóton-fóton em QED. Verificamos que com a técnica proposta por Halliday e Ricotta é possível resolver integrais de Feynman facilmente. As dificuldades que surgem devido à introdução de integrais paramétricas não existem. O que exige a nossa atenção são integrais gaussianas, séries múltiplas de potências e sistemas de equações algébricas lineares. Além disso NDIM nos possibilita obter *simultaneamente* vários resultados para as integrais de Feynman. Não conhecemos técnica alguma que possua esta propriedade.

Quando comparamos NDIM a métodos consagrados como a representação de Mellin-Barnes para propagadores com massa – que também é uma técnica poderosa e que fornece, como NDIM, funções hipergeométricas como resultado – podemos observar algumas vantagens de NDIM. Naquela abordagem só há dois tipos possíveis de resultados: ou p^2/m^2 ou m^2/p^2 . Isso depende se fechamos o contorno de integração pela direita ou pela esquerda. Mas, se o

diagrama em questão possuir mais de uma perna externa existem outras combinações possíveis de variáveis adimensionais. A representação de Mellin-Barnes possui uma limitação neste ponto: não fornece resultados para todas as regiões possíveis dos momentos externos. Por outro lado, poderíamos pensar em usar o princípio da continuação analítica para levar estes resultados para outras regiões. Acontece que fórmulas de continuação analítica são conhecidas para funções hipergeométricas de uma e duas variáveis. À medida que o número de variáveis aumenta o número destas fórmulas diminui enormemente.

O leitor poderia perguntar: *por que razão necessitamos de tantos resultados distintos ao mesmo tempo?* A nossa resposta é a seguinte:

- Se possuírmos apenas dois tipos de resultados, como na representação de Mellin-Barnes não poderemos estudar o processo em questão em qualquer região. Para tanto se faz necessária a utilização de fórmulas de continuação analítica, o que nos casos mais complicados é inviável pois nem mesmo conhecemos tais relações. Nos casos mais simples, por outro lado, não temos este problema.
- O caso particular de espalhamento a ângulo nulo, $\theta = 0$, conhecido como "forward scattering", espalhamento frontal, não pode ser estudado com as representações conhecidas na literatura. O mesmo se aplica para quando $\theta = \pi$, conhecido como "backward scattering". O teorema ótico não pode ser usado.
- Nossos resultados são expressos de forma compacta em termos de funções hipergeométricas, as quais possuem uma grande coleção bibliográfica e são de fácil manuseio, o que não acontece por exemplo com os polilogaritmos. No entanto, se quisermos somos capazes de transformar nosso resultado compacto no usual por meio de representações integrais.
- Podemos identificar os pontos de ramificação e as singularidades da integral de Feynman diretamente da sua representação em termos de funções hipergeométricas.

- Além disso, como as funções hipergeométricas provém da mesma integral de Feynman duas soluções distintas estão relacionadas através de continuação analítica. Concluimos portanto que mesmo que não conheçamos tais fórmulas podemos deduzí-las facilmente com NDIM. Temos aqui um método poderoso para obter estas relações.
- Finalmente, podemos, se quisermos, relacionar diagramas de Feynman com equações diferenciais ou sistemas de equações diferenciais visto que toda função hipergeométrica satisfaz uma equação ou sistema de equações diferenciais.

4.2 As Novas Soluções.

No capítulo anterior estudamos a integral escalar,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(i, j, k, l; m) = & \int d^D q \left(q^2 - m^2 \right)^i \left[(q - p)^2 - m^2 \right]^j \left[(q - k_1)^2 - m^2 \right]^k \\ & \times \left[(q - k_2)^2 - m^2 \right]^l, \end{aligned} \quad (4.1)$$

cujos análogo em dimensão positiva é,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(i, j, k, l; m) = & \int \frac{d^D q}{(q^2 - m^2)^i [(q - p)^2 - m^2]^j [(q - k_1)^2 - m^2]^k} \\ & \times \frac{1}{[(q - k_2)^2 - m^2]^l}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

que contribui para o espalhamento fóton-fóton em QED, no caso especial em que $i = j = k = l = -1$.

Devemos lembrar que os resultados de (4.2) vem das soluções de um sistema de equações algébricas lineares. Tal sistema possui 21 soluções distintas, dentre as quais 6 são triviais restando assim 15. No capítulo anterior consideramos 5 delas e escrevemos duas representações em termos de funções hipergeométricas, $\mathcal{J}_1$ e $\mathcal{J}_2$, eq. (3.8) e (3.18) respectivamente.

Listamos abaixo as soluções restantes,

$$I_6 = f_6 \mathcal{S}_1 \left(\alpha_6, \alpha'_6, \beta_6, \beta'_6, \theta_6; \gamma_6, \theta'_6 \left| \frac{-t}{s}, \frac{4m^2}{s} \right. \right) \quad (4.3)$$

$$I_7 = I_6(i \leftrightarrow k, j \leftrightarrow l \mid s \leftrightarrow t) \quad (4.4)$$

$$I_8 = f_8 \mathcal{S}_2 \left(\alpha_8, \beta_8, \gamma_8, \delta_8, \phi_8; \rho_8, \phi'_8 \left| \frac{-t}{s}, \frac{-4m^2}{t} \right. \right) \quad (4.5)$$

$$I_9 = I_8(k \leftrightarrow l) \quad (4.6)$$

$$I_{10} = f_{10} \mathcal{S}_2 \left(\alpha_{10}, \beta_{10}, \gamma_{10}, \delta_{10}, \phi_{10}; \rho_{10}, \phi'_{10} \left| \frac{-s}{t}, \frac{-4m^2}{s} \right. \right) \quad (4.7)$$

$$I_{11} = I_{10}(i \leftrightarrow j) \quad (4.8)$$

$$I_{12} = f_{12} \mathcal{S}_2 \left(\alpha_{12}, \beta_{12}, \gamma_{12}, \delta_{12}, \phi_{12}; \rho_{12}, \phi'_{12} \left| \frac{4m^2}{s}, \frac{-t}{4m^2} \right. \right) \quad (4.9)$$

$$I_{13} = I_{12}(k \leftrightarrow l) \quad (4.10)$$

$$I_{14} = f_{14} \mathcal{S}_2 \left(\alpha_{14}, \beta_{14}, \gamma_{14}, \delta_{14}, \phi_{14}; \rho_{14}, \phi'_{14} \left| \frac{4m^2}{t}, \frac{-s}{4m^2} \right. \right) \quad (4.11)$$

$$I_{15} = I_{14}(i \leftrightarrow j), \quad (4.12)$$

onde *definimos* duas séries hipergeométricas

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \theta; \gamma, \theta' | z_1, z_2) &= \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{z_1^j z_2^k}{j!k!} \frac{(\alpha|j)(\alpha'|k)(\beta|j)(\beta'|k)}{(\gamma|j+k)} \\ &\times \frac{(\theta|j+k)}{(\theta'|j+k)}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \phi; \rho, \phi' | z_1, z_2) &= \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{z_1^j z_2^k}{j!k!} \frac{(\alpha|j-k)(\beta|j)(\gamma|k)(\delta|k)}{(\rho|j)} \\ &\times \frac{(\phi|k-j)}{(\phi'|k-j)}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

com

$$f_6 = (-\pi)^{D/2} \left(\frac{s}{4} \right)^{\sigma} \frac{(-i|\sigma)(-j|\sigma)}{(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sigma|\sigma + \frac{1}{4}D)(-\frac{1}{2}\sigma|\sigma + \frac{1}{4}D)},$$

$$\begin{aligned}
f_8 &= (-\pi)^{D/2} s^l t^{\sigma-l} \frac{(-k|-i-j-\frac{1}{2}D)(-i|i-k+l)(-j|\sigma-l)}{(-i-l+\sigma|i+l+\frac{1}{2}D)}, \\
f_{10} &= (-\pi)^{D/2} s^j t^{\sigma-j} \frac{(-l|-i-j-\frac{1}{2}D)(-i|i+k-l)(-j|\sigma-k)}{(-i-k+\sigma|i+k+\frac{1}{2}D)}, \\
f_{12} &= (-\pi)^{D/2} s^l (-m^2)^{\sigma-l} \frac{(-k|l)(\sigma+\frac{1}{2}D|l-2\sigma-\frac{1}{2}D)}{(\sigma+\frac{1}{2}D|2l-2\sigma)}, \\
f_{14} &= (-\pi)^{D/2} s^j (-m^2)^{\sigma-j} \frac{(-i|j)(\sigma+\frac{1}{2}D|j-2\sigma-\frac{1}{2}D)}{(\sigma+\frac{1}{2}D|2j-2\sigma)},
\end{aligned}$$

e cujos parâmetros para a função $\mathcal{S}_1$ são os seguintes,

$$\begin{aligned}
\alpha_6 &= -k, \\
\alpha'_6 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{4}D, \\
\beta_6 &= -l, \\
\beta'_6 &= 1 - \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{4}D, \\
\theta_6 &= -\sigma, \\
\gamma_6 &= 1 + i - \sigma, \\
\theta'_6 &= 1 + j - \sigma,
\end{aligned}$$

e para $\mathcal{S}_2$:

$$\begin{aligned}
\alpha_8 &= j + k + \frac{1}{2}D, & \alpha_{10} &= i + k + \frac{1}{2}D, \\
\beta_8 &= -l, & \beta_{10} &= -j, \\
\gamma_8 &= 1 - \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{4}D, & \gamma_{10} &= 1 - \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{4}D, \\
\delta_8 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{4}D, & \delta_{10} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{4}D, \\
\phi_8 &= -i - j - k - \frac{1}{2}D, & \phi_{10} &= -i - k - l - \frac{1}{2}D, \\
\rho_8 &= 1 + k - l, & \rho_{10} &= 1 + i - j, \\
\phi'_8 &= 1 - i - k - \frac{1}{2}D, & \phi'_{10} &= 1 - i - l - \frac{1}{2}D,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{12} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}l, & \alpha_{14} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}l, \\
\beta_{12} &= -l, & \beta_{14} &= -j, \\
\gamma_{12} &= -i, & \gamma_{14} &= -k, \\
\delta_{12} &= -j, & \delta_{14} &= -l, \\
\phi_{12} &= -i - j - k - \frac{1}{2}D, & \phi_{14} &= -i - k - l - \frac{1}{2}D, \\
\rho_{12} &= 1 + k - l, & \rho_{14} &= 1 + i - j, \\
\phi'_{12} &= -\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j - \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}l, & \phi'_{14} &= -\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j - \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}l.
\end{aligned}$$

Observe que as funções definidas acima, $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ tem como caso particular as funções hipergeométricas de Appel F_3 , quando $\theta = \theta'$, e H_2 quando $\phi = \phi'$. Veja também que há simetrias entre elas, e.g., substituindo $s \leftrightarrow t$, $i \leftrightarrow k$ e $j \leftrightarrow l$ em (4.3) obtemos (4.4). Analogamente, em (4.5) a substituição $k \leftrightarrow l$ a transforma em (4.6) e fazendo $s \leftrightarrow t$, $j \leftrightarrow k$, $i \leftrightarrow l$ leva (4.6) $\leftrightarrow$ (4.7)¹.

Tendo resolvido o sistema (3.7) podemos construir os resultados finais. Seguindo a prescrição vamos somar as soluções distintas que possuem as mesmas variáveis,

$$\mathcal{J}_3 = I_6, \quad \mathcal{J}_4 = I_7, \quad (4.15)$$

$$\mathcal{J}_5 = I_8 + I_9, \quad \mathcal{J}_6 = I_{10} + I_{11}, \quad (4.16)$$

$$\mathcal{J}_7 = I_{12} + I_{13}, \quad \mathcal{J}_8 = I_{14} + I_{15}. \quad (4.17)$$

4.3 Regularização.

Nesta seção vamos considerar o caso particular onde a integral (4.2) é a que contribui para o espalhamento fóton-fóton em QED, isto é, quando $i = j = k = l = -1$ e $D = 4$. Mas,

¹Obviamente há muitas outras simetrias.

por outro lado, algumas delas são divergentes quando consideramos este(s) limite(s) assim como aconteceu no capítulo anterior ($\mathcal{J}_2$).

Para as duas primeiras podemos seguir as idéias usuais da regularização dimensional. Introduzimos uma correção na dimensão do espaço-tempo, i.e., fazemos $D = 4 - \epsilon$ e expandimos toda a expressão em torno de $\epsilon = 0$,

$$I_6 = \frac{8\pi^2}{s^2} \left[\frac{-2}{\epsilon} + \log(-2\pi s) + \gamma_E \right] F_3\left(1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\epsilon, 1, 1 + \frac{1}{2}\epsilon; 2 + \frac{1}{2}\epsilon | x, y\right), \quad (4.18)$$

onde $x = -t/s$, $y = 4m^2/s$ e γ_E é a constante de Euler[16]. Podemos tornar a expressão mais simples usando uma fórmula de redução das funções hipergeométricas[16, 33, 39],

$$F_3(\alpha, \alpha', \beta, \gamma - \beta; \gamma | x, y) = \frac{1}{(1 - y)^{\alpha'}} F_1(\beta, \alpha, \alpha'; \gamma | x, z), \quad (4.19)$$

onde $z = y/(y - 1)$ e F_1 é uma função hipergeométrica mais simples e que converge absolutamente na mesma região que F_3 . Esta função possui uma representação integral simples[16],

$$F_1(\alpha, \beta, \beta'; \gamma | z_1, z_2) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)} \int_0^1 du \frac{u^{\alpha-1}(1 - u)^{\gamma-\alpha-1}}{(1 - uz_1)^\beta(1 - uz_2)^{\beta'}}, \quad (4.20)$$

onde os parâmetros devem satisfazer $\text{Re}(\alpha) > 0$ e $\text{Re}(\gamma - \alpha) > 0$. Com os valores dos parâmetros em questão podemos integrar facilmente esta expressão. Substituindo (4.20) e (4.19) em (4.18) e expandindo a função hipergeométrica em série de Taylor temos,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_3(\{-1\}; m) &= \frac{8\pi^2}{s(s - 4m^2)} \left[\frac{-2}{\epsilon} - \partial_{\beta'} - \partial_\gamma + \log(-2\pi s) \right. \\ &\quad \left. + \gamma_E + \log\left(1 - \frac{4m^2}{s}\right) \right] F_1(1, 1, \beta'; \gamma | x, z), \end{aligned} \quad (4.21)$$

as derivadas paramétricas devem ser tomadas no ponto $\beta' = 1$ e $\gamma = 2$.

Note que há um polo simples que não esperávamos se empregássemos a contagem de potências. Iremos discutir esta e as outras singularidades na próxima seção. Primeramente deve-

mos calcular as derivadas paramétricas em (4.20) e então substituímos os valores dos parâmetros e integramos. Para os outros termos a integração de (4.20) resulta em,

$$F_1(1, 1, \frac{1}{2}; 2|x, z) = -\frac{s}{t} \frac{1}{R_{st}} \log \left(\frac{1 + R_{st} R_s - R_{st}}{1 - R_{st} R_s + R_{st}} \right), \quad (4.22)$$

onde

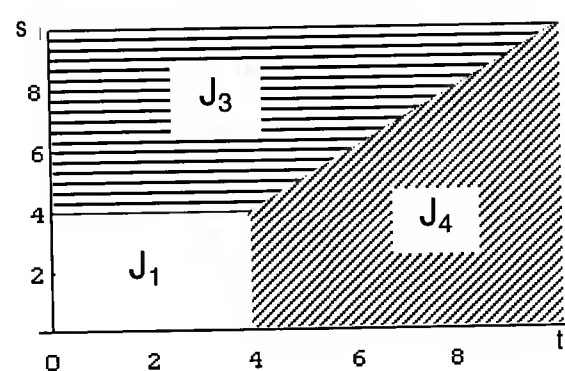
$$R_s = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}, \quad R_{st} = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{t} - \frac{4m^2}{s}}. \quad (4.23)$$

Observe que o limite $t \rightarrow 0$ é bem-definido.

Podemos escrever imediatamente o resultado para $\mathcal{J}_4$ substituindo $i \leftrightarrow k$, $j \leftrightarrow l$ e $s \leftrightarrow t$ em $\mathcal{J}_3$,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_4(\{-1\}; m) &= \frac{8\pi^2}{t(t-4m^2)} \left[\frac{-2}{\epsilon} - \partial_{\beta'} - \partial_{\gamma} + \log(-2\pi t) \right. \\ &\quad \left. + \gamma_E + \log \left(1 - \frac{4m^2}{t} \right) \right] F_1(\alpha, \beta, \beta'; \gamma|w, w'). \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde $w = -s/t$ e $w' = 4m^2/(4m^2 - t)$. Para a região de convergência veja a figura 1.



A técnica da regularização dimensional não é adequada para regularizar as soluções restantes. Considere por exemplo (4.5). Há um fator $(-i|i - k + l)$ que é divergente no caso particular em que estamos interessados, ou seja, quando $i = j = k = l = -1$. Este fator não possui dependência em D e por esta razão não é possível usar a prescrição $D = 4 - \epsilon$. Devemos usar um procedimento diferente, regularizar os expoentes de alguns dos propagadores[31, 36, 40]. Vamos empregar portanto a regularização analítica.

Considere a série de potências proveniente da quinta solução, $\mathcal{J}_5$ dada pela eq.(4.25). Esta solução apresenta divergências tanto para $D = 4$ quanto para $k = -1$ (ou $l = -1$). Como fizemos no capítulo anterior devemos introduzir uma pequena correção, $k = -1 - \delta$, por exemplo. Se escolhêssemos o expoente l o resultado final seria o mesmo, obviamente. Com isso podemos tomar o limite $i = j = l = -1$ sem problemas. Teremos então,

$$I_8 = (-\pi)^{D/2} \frac{1}{st^{3-D/2}} \frac{\Gamma(3 - \frac{1}{2}D + \delta) \Gamma(\delta) \Gamma^2(\frac{1}{2}D - 2 - \delta)}{t^\delta \Gamma(1 + \delta) \Gamma(D - 4 - \delta)} \times H_2 \left(\frac{1}{2}D - 2 - \delta, 1, 3 - \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}\delta, \frac{1}{2}(5 - D + \delta), 1 - \delta \left| \frac{-t}{s}, \frac{-4m^2}{t} \right. \right), \quad (4.25)$$

e

$$I_9 = (-\pi)^{D/2} \frac{\Gamma(3 - \frac{1}{2}D) \Gamma^2(\frac{1}{2}D - 2)}{st^{3-D/2}} \frac{\Gamma(-\delta)}{s^\delta \Gamma(D - 4 - \delta)} \times H_2 \left(\frac{1}{2}D - 2, 1 + \delta, 3 - \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}\delta, \frac{1}{2}(5 - D + \delta), 1 + \delta \left| \frac{-t}{s}, \frac{-4m^2}{t} \right. \right). \quad (4.26)$$

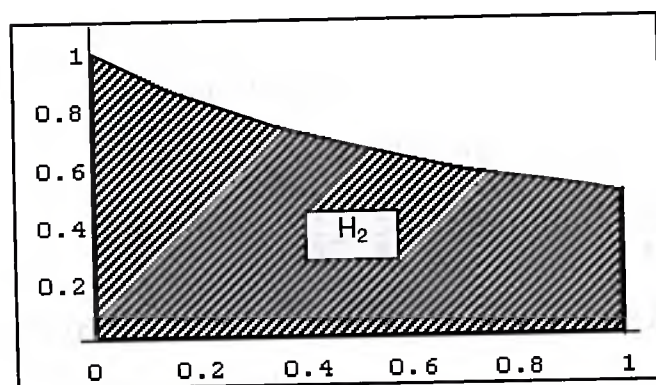
Onde H_2 é uma função hipergeométrica de duas variáveis definida pela série dupla infinita[16],

$$H_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta; \rho|x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha|m-n)(\beta|m)(\gamma|n)(\delta|n)}{(\rho|m)} \frac{x^m y^n}{m!n!}, \quad (4.27)$$

a sua região de convergência absoluta é limitada pelas curvas[16],

$$|y| < \frac{1}{1 + |x|}, \quad |x| < 1, \quad |y| < 1, \quad (4.28)$$

veja a figura 2.



Expandindo agora toda a expressão acima em torno de $\delta = 0$ e mantendo termos até primeira ordem – pois o polo proveniente do expoente do propagador é também de primeira ordem,

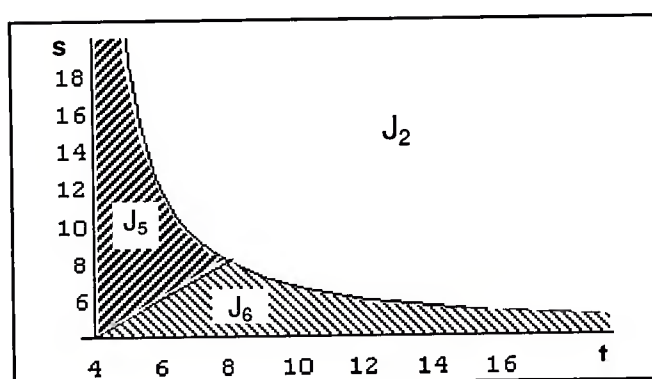
$$\begin{aligned} \mathcal{J}_5(\{-1\}; m) = & \frac{(-\pi)^{D/2} \Gamma(3 - \frac{1}{2}D) \Gamma^2(\frac{1}{2}D - 2)}{st^{3-D/2} \Gamma(D - 4)} \left[-\gamma_E + \log\left(\frac{s}{t}\right) \right. \\ & + \psi\left(3 - \frac{1}{2}D\right) - 2\psi(D - 4) - 2\psi\left(\frac{1}{2}D - 2\right) - \partial_\alpha - \partial_\rho \Big] \\ & \times H_2\left(\alpha, 1, 3 - \frac{1}{2}D, \frac{1}{2}(5 - D); \rho \left| \frac{-t}{s}, \frac{-4m^2}{t} \right. \right), \end{aligned} \quad (4.29)$$

onde as derivadas paramétricas devem ser tomadas no ponto $\alpha = \frac{1}{2}D - 2$; $\rho = 1$. A natureza e o significado destes polos serão discutidos na próxima seção.

Regularizamos $\mathcal{J}_6$ da mesma maneira que fizemos com a solução anterior, mas agora fazemos $i = -1 - \delta$. Obtemos como resultado final,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_6(\{-1\}; m) = & \frac{(-\pi)^{D/2} \Gamma(3 - \frac{1}{2}D) \Gamma^2(\frac{1}{2}D - 2)}{ts^{3-D/2} \Gamma(D - 4)} \left[-\gamma_E + \log\left(\frac{t}{s}\right) \right. \\ & + \psi\left(3 - \frac{1}{2}D\right) - 2\psi(D - 4) - 2\psi\left(\frac{1}{2}D - 2\right) - \partial_\alpha - \partial_\rho \Big] \\ & \times H_2\left(\alpha, 1, 3 - \frac{1}{2}D, \frac{1}{2}(5 - D); \rho \left| \frac{-s}{t}, \frac{-4m^2}{s} \right. \right), \end{aligned} \quad (4.30)$$

como iremos mostrar estes resultados que possuem polos em $D = 4$ estão relacionadas por meio de continuação analítica com as funções F_3 que obtivemos anteriormente, $\mathcal{J}_3$ e $\mathcal{J}_4$. Construimos a região de convergência deste resultado assim como fizemos para a função H_2 (veja figura 3).



A sétima série de potências, $\mathcal{J}_7$, que representa a integral de Feynman, como aconteceu nos casos anteriores também possui um polo simples nos expoentes dos propagadores mas não na dimensão. Precisamos então introduzir $l = -1 - \delta$. Fazendo $i = j = k = -1$ obtemos em D -dimensões,

$$I_{12} = \frac{-\pi^2}{m^2 s} \left(-\frac{1}{\delta} - 1 + \log s + O(\delta) \right) \times \mathcal{S}_2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta, 1 + \delta, 1, 1, 3 - \frac{1}{2}D; 1 + \delta, 1 - \frac{1}{2}\delta \left| \frac{4m^2}{s}, \frac{-t}{4m^2} \right. \right), \quad (4.31)$$

e

$$I_{13} = \frac{-\pi^2}{m^2 s} \left(\frac{1}{\delta} - 1 - \gamma_E - \log(-m^2) + O(\delta) \right) \times \mathcal{S}_2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\delta, 1, 1, 1, 3 - \frac{1}{2}D + \delta; 1 - \delta, 1 + \frac{1}{2}\delta \left| \frac{4m^2}{s}, \frac{-t}{4m^2} \right. \right), \quad (4.32)$$

expandindo os fatores de (4.31), (4.32) e a série (4.14) em torno de $\delta = 0$ e substituindo os valores $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \gamma = \delta = \rho = \phi = \phi' = 1$. Usando ainda o fato de que,

$$\partial_\beta + \partial_\rho = 0,$$

quando os parâmetros assumem o mesmo valor. E uma relação análoga entre ϕ e ϕ' , obtemos em $D = 4$,

$$\mathcal{J}_7(\{-1\}; m) = \frac{\pi^2}{m^2 s} \left[2 + \gamma_E + \partial_\alpha + \partial_\rho - \log \left(\frac{-s}{m^2} \right) \right] \times H_2 \left(\alpha, 1, 1, 1; \rho \left| \frac{4m^2}{s}, \frac{-t}{4m^2} \right. \right), \quad (4.33)$$

observe que o resultado é finito e que a dependência em ϕ e ϕ' não existe mais portanto; $\mathcal{S}_2$ se reduziu a H_2 . O polo se cancela e podemos tomar o limite de $\delta = 0$.

Seguindo as mesmas idéias obtemos,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_8(\{-1\}; m) &= \frac{\pi^2}{m^2 t} \left[2 + \gamma_E + \partial_\alpha + \partial_\rho - \log \left(\frac{-t}{m^2} \right) \right] \\ &\times H_2 \left(\alpha, 1, 1, 1; \rho \left| \frac{4m^2}{t}, \frac{-s}{4m^2} \right. \right), \end{aligned} \quad (4.34)$$

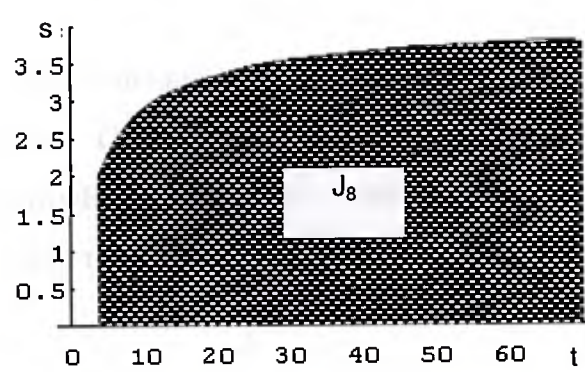
que também é finita. A região de convergência absoluta está plotada na figura 4. Não precisamos nos preocupar com o cálculo das derivadas paramétricas pois Davydychev as calculou em [31]. Usando a fórmula de transformação entre H_2 e F_2 [39],

$$\begin{aligned} H_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta; \rho | x, y) &= h_1 F_2 \left(\alpha + \gamma, \beta, \gamma; \rho, 1 + \gamma - \delta \left| x, \frac{-1}{y} \right. \right) \\ &+ h_2 F_2 \left(\alpha + \delta, \beta, \delta; \rho, 1 + \delta - \gamma \left| x, \frac{-1}{y} \right. \right), \end{aligned} \quad (4.35)$$

onde

$$h_1 = \frac{\Gamma(1 - \alpha)\Gamma(\delta - \gamma)}{\Gamma(\delta)\Gamma(1 - \alpha - \gamma)} y^{-\gamma}, \quad h_2 = h_1(\gamma \leftrightarrow \delta), \quad (4.36)$$

podemos identificar as derivadas paramétricas de H_2 com as de F_2 , que foram calculadas por Davydychev. É preciso ter cuidado com esta expressão, (4.35), pois neste caso particular os parâmetros da função hipergeométrica assumem valores tais que alguns fatores no lado direito se tornam singulares. Empregando o mesmo procedimento utilizado acima podemos mostrar que elas se cancelam.



4.4 Discussão.

Como mencionamos nas seções anteriores existem algumas soluções da integral de Feynman que possuem polos. Vamos examiná-las de modo a entender por que razão elas apareceram e qual a sua natureza. Primeiramente iremos fornecer alguns argumentos para mostrar que o nosso resultado está correto. Como conjecturamos em [40] conseguimos obter funções hipergeométricas H_2 como resultado da integral de Feynman.

Considere o primeiro resultado, $\mathcal{J}_1$,

$$\mathcal{J}_1(\{-1\}; m) = \frac{\pi^2}{6m^4} F_3 \left(1, 1, 1, 1; \frac{5}{2} \left| \frac{s}{4m^2}, \frac{t}{4m^2} \right. \right). \quad (4.37)$$

A função hipergeométrica F_3 que aparece aqui pode ser transformada sempre, ou seja, sem que os parâmetros tenham valores especiais, em uma função H_2 por meio de continuação analítica[39]),

$$\begin{aligned} F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta'; \gamma | x, y) &= b_1 H_2 \left(1 + \alpha - \gamma, \alpha, \alpha', \beta'; 1 + \alpha - \beta \left| \frac{1}{x}, -y \right. \right) \\ &+ b_2 H_2 \left(1 + \beta - \gamma, \beta, \alpha', \beta'; 1 + \beta - \alpha \left| \frac{1}{x}, -y \right. \right), \end{aligned} \quad (4.38)$$

onde os dois fatores são dados por,

$$b_1 = \frac{\Gamma(\beta - \alpha)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \alpha)} (-x)^{-\alpha}, \quad b_2 = b_1(\alpha \leftrightarrow \beta). \quad (4.39)$$

Assim, usando a eq.(4.38) reescrevemos F_3 em termos de H_2 . Note que novamente este é um caso especial da continuação analítica, mas não vamos nos preocupar com os fatores singulares pois eles se cancelam no resultado final. Temos então,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &\sim F_3 \left(1, 1, 1, 1; \frac{5}{2} \left| \frac{s}{4m^2}, \frac{t}{4m^2} \right. \right) = C_1 H_2 \left(-\frac{1}{2}, 1, 1, 1; 1 \left| \frac{4m^2}{s}, \frac{-t}{4m^2} \right. \right) + \\ &+ C_2 H_2 \left(-\frac{1}{2}, 1, 1, 1; 1 \left| \frac{4m^2}{s}, \frac{-t}{4m^2} \right. \right), \end{aligned} \quad (4.40)$$

de modo que podemos verificar claramente que a função hipergeométrica que aparece em $\mathcal{J}_7$ está relacionada com $\mathcal{J}_1^2$. Mesmo que não conhecêssemos o trabalho de Erdelyi[39], em particular a eq.(4.38), poderíamos deduzir a fórmula de continuação analítica entre F_3 e H_2 . Na verdade seríamos capazes de escrever uma relação mais geral, entre as funções $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ que conteria como caso particular a fórmula de Erdelyi. NDIM é um método poderoso para obtermos fórmulas de continuação analítica.

De modo a verificar que existem de fato pontos de ramificação na integral de Feynman podemos proceder da seguinte maneira. Considere a definição da função H_2 , eq.(4.27). Substituindo os valores dos parâmetros — e lembrando que as derivadas de uma função analítica também o são e possuem a mesma região de convergência — dois deles se cancelam (β e ρ)

$$H_2\left(-\frac{1}{2}, 1, 1, 1; 1|x, y\right) = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{(1|k)(1|k)}{(\frac{1}{2}|k)} \frac{(-y)^k}{k!} \left(-\frac{1}{2} - k|j\right) \frac{x^j}{j!}, \quad (4.41)$$

onde usamos a propriedade $(a|-k) = (-1)^k/(1-a|k)$. Identificamos a série em j com uma função hipergeométrica ${}_1F_0$ [41] a qual pode ser somada e escrita como uma função elementar. Com isso temos,

$$H_2\left(-\frac{1}{2}, 1, 1, 1; 1|x, y\right) = \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1|k)(1|k)}{(\frac{1}{2}|k)} \frac{[-y(1-x)]^k}{k!}, \quad (4.42)$$

com as variáveis x e y sendo as de $\mathcal{J}_7$ ou $\mathcal{J}_8$. A série restante, em k , é uma função hipergeométrica de Gauss ${}_2F_1$ que também pode ser escrita em termos de funções elementares³,

$${}_2F_1(1, 1; 1/2|z) = \frac{1}{1-z} \left(1 + \frac{\sqrt{z} \arcsin \sqrt{z}}{\sqrt{1-z}}\right),$$

que possui obviamente pontos de ramificação em $z = 0, 1$.

Podemos aplicar a mesma idéia para $\mathcal{J}_3$. Usando (4.38) para F_3 , temos

$$\mathcal{J}_3 \sim F_3\left(1, 1, 1, \frac{1}{2}; 2 \left| \frac{-t}{s}, \frac{4m^2}{s} \right.\right) = C_3 H_2\left(0, 1, 1, \frac{1}{2}; 1 \left| \frac{-s}{t}, \frac{-4m^2}{s} \right.\right) +$$

²É possível relacionar também $\mathcal{J}_8$ com $\mathcal{J}_1$ pois Erdelyi menciona em seu trabalho que há uma relação similar à (4.38) para a variável y .

³Veja (4.46) abaixo.

$$+C_4 H_2 \left(0, 1, 1, \frac{1}{2}; 1 \left| \frac{-s}{t}, \frac{-4m^2}{s} \right. \right), \quad (4.43)$$

o que resulta em $\mathcal{J}_3 \rightarrow \mathcal{J}_6$. Há também uma transformação análoga na variável y de F_3 que faz $\mathcal{J}_3 \rightarrow \mathcal{J}_5$.

A próxima função H_2 também pode ser expressa em termos de funções elementares, desta vez de uma raiz quadrada. Considerando a sua definição – os parâmetros β e ρ se cancelam novamente – e somando a série em k ,

$$H_2 \left(0, 1, 1, \frac{1}{2}; 1 | x, y \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[-y(1-x)]^k (\frac{1}{2}|k)}{k!} = \frac{1}{\sqrt{1+y(1-x)}}, \quad (4.44)$$

note que a raiz é igual a R_{st} , veja eq.(4.23). Um ponto importante a ressaltar é que ainda que o resultado seja singular ele ainda está relacionado com um outro por continuação analítica. Devemos agora responder algumas perguntas: *Qual o significado destas singularidades?* e *Qual a sua natureza?*

Primeiramente devemos lembrar[13] que um gráfico com quatro pernas externas como o que estamos estudando não possui singularidades na região física. Um gráfico com este número de patas só possui singularidades físicas se as duas partículas incidentes entrarem no mesmo vértice e saírem também de um mesmo vértice (veja figura 5). Este com certeza não é o nosso caso⁴.

Segundo, quando realizamos a continuação analítica de uma dada função de uma região $\mathcal{R}_1$ para outra, digamos, $\mathcal{R}_2$ é importante que não haja polos entre as regiões, porque neste caso o resultado da continuação analítica pode não ser único[7, 8]. Esta não-unicidade se manifesta quando a singularidade existente é um ponto de ramificação. Sabemos que o processo de espalhamento fóton-fóton possui, no canal-s, um ponto deste tipo em $s = 4m^2$. Observe que

⁴Pois sabemos que o processo de espalhamento fóton-fóton é finito[42]. Devemos lembrar que esta integral escalar é apenas uma das que contribui para o processo todo, i.e., devem aparecer outras singularidades que cancelem estas aqui.

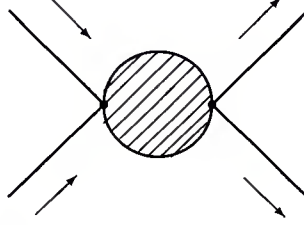


Figura 4.5: O gráfico geral 2-partículas $\rightarrow$ 2-partículas que possui singularidade(s) na região física.

quando realizamos a continuação analítica de $\mathcal{J}_6 \rightarrow \mathcal{J}_3$ cruzamos a linha de corte e por esta razão o resultado não é único, ou seja, obtivemos dois resultados distintos (veja figuras).

Esta argumentação revela mais uma das poderosas características de NDIM. Conseguimos reproduzir três fórmulas de transformação entre funções hipergeométricas que de modo algum são triviais de se obter pelos métodos usuais[39]. Além disso conseguimos determinar a localização de um ponto de ramificação da integral de Feynman⁵.

Eden[43] desenvolveu uma técnica para achar as singularidades de integrais de Feynman (escalares). Em [13] ele e seus colaboradores a aplicaram, entre outros gráficos, a um diagrama do tipo caixa geral: massas diferentes e pernas externas "off-shell". O resultado é um determinante 4×4 . Para o nosso caso, partículas virtuais de mesma massa e fótons "on-shell" temos a equação[13, 24, 44]⁶

$$\frac{st}{4m^6} \left(\frac{st}{4m^2} - s - t \right) = 0, \quad (4.45)$$

⁵Veja a análise que se segue.

⁶Esta equação descreve a chamada superfície de Landau na qual estão localizadas as possíveis singularidades de uma representação integral.

tal que as suas soluções são um total de quatro,

$$s = 0, \quad t = 0, \quad s = \frac{4m^2 t}{t - 4m^2}, \quad t = \frac{4m^2 s}{s - 4m^2}, \quad (4.46)$$

note que as duas últimas soluções fazem a função H_2 em (4.44) e em (4.42) singular. São pontos de ramificação da integral de Feynman. Os dois primeiros são os chamados "pseudo-threshold" [13, 24, 44, 45] — singularidades que não ocorrem na região física (physical sheet). Uma possível explicação para o seu surgimento é a chamada singularidade do tipo "pinch" [13, 24, 44]. Podemos verificar ainda que com uma análise baseada em parâmetros de Feynman, Itzykson e Zuber[24], calculam a descontinuidade na integral do tipo caixa. As duas últimas soluções são de fato pontos de ramificação de (4.2).

4.4.1 O Parâmetro de Massa μ .

Como mencionamos anteriormente, para realizar um cálculo de algum processo físico é preciso introduzir um parâmetro de massa μ nas integrais de Feynman para a constante de acoplamento independente da dimensão do espaço-tempo[24, 46]. Neste trabalho no entanto desconsideramos este tipo de parâmetro mas, por outro lado, argumentamos que seria fácil introduzi-lo corretamente nos nossos resultados.

Considere por exemplo o resultado $\mathcal{J}_7$,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_7(\{-1\}; m) &= \frac{\pi^2}{m^2 s} \left[2 + \gamma_E + \partial_\alpha + \partial_\rho - \log \left(\frac{-s}{m^2} \right) \right] \\ &\times H_2 \left(\alpha, 1, 1, 1; \rho \left| \frac{4m^2}{s}, \frac{-t}{4m^2} \right. \right), \end{aligned} \quad (4.47)$$

aqui a técnica da regularização dimensional não foi necessária para regularizarmos as divergências. Portanto, podemos desconsiderar simplesmente o fator μ^{4-D} , pois fizemos $D = 4$ e não $D = 4 - \epsilon$.

Já a solução $\mathcal{J}_3$,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_3(\{-1\}; m) = & \frac{8\pi^2}{s(s-4m^2)} \left[\frac{-2}{\epsilon} - \partial_{\beta'} - \partial_\gamma + \log(-2\pi s) \right. \\ & \left. + \gamma_E + \log\left(1 - \frac{4m^2}{s}\right) \right] F_1(\alpha, \beta, \beta'; \gamma|x, z), \end{aligned} \quad (4.48)$$

foi regularizada dimensionalmente e por isso não podemos fazer $D = 4$ diretamente. Aqui devemos tomar o limite $D \rightarrow 4 - \epsilon$. Esta expressão tem portanto um fator multiplicativo μ^{4-D} , que em torno de $D = 4$ fica,

$$\mu^{4-D} = 1 - (4 - D) \log \mu + \frac{1}{2}(4 - D)^2 \log^2 \mu + \mathcal{O}(\epsilon^3),$$

multiplicando então as duas expressões acima e escrevendo $4 - D = \epsilon$ introduzimos corretamente a escala de massa μ .

4.5 Limite sem massa.

Podemos considerar, como fizemos no capítulo anterior, o caso limite em que $m \rightarrow 0$. Novamente nem todas as $\mathcal{J}$ o admitem pois algumas delas não são definidas para $m = 0$, assim como $\mathcal{J}_1$.

Estudando a região de convergência das funções hipergeométricas que aparecem nos $\mathcal{J}$ verificamos que em

$$\mathcal{J}_3, \quad \mathcal{J}_4, \quad \mathcal{J}_5, \quad \mathcal{J}_6,$$

é possível tomarmos $m = 0$.

$$\mathcal{J}_3(\{-1\}; m) = \frac{8\pi^2}{s^2} \left[\frac{-2}{\epsilon} - \partial_\gamma + \log(-2\pi s) + \gamma_E \right] {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma|x), \quad (4.49)$$

onde $x = -t/s$, $\alpha = \beta = 1$ e $\gamma = 2$. Para o resultado de $\mathcal{J}_4$ basta substituírmos s por t e vice-versa. A derivada paramétrica neste caso é fácil de ser calculada. Usando a representação integral[16, 17, 31],

$${}_2F_1(a, b; c|z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 dw \frac{w^{b-1}(1-w)^{c-b-1}}{(1-wz)^a}, \quad (4.50)$$

calculando a derivada acima, substituindo $a = b = 1, c = 2$ e lembrando[41] que $\psi(2) = 1 + \psi(1)$, obtemos,

$$\partial_\gamma {}_2F_1 = \frac{1}{x} \left[Li_2 \left(\frac{x}{x-1} \right) - \log(1-x) \right], \quad (4.51)$$

onde Li_2 é a função dilogarítimo e utilizamos ainda o resultado[17],

$${}_2F_1(1, 1; 2|z) = -\frac{1}{z} \log(1-z).$$

O caso de $\mathcal{J}_5$ também é simples, a função H_2 se reduz a uma função hipergeométrica de Gauss,

$$\lim_{m \rightarrow 0} H_2 \left(\alpha, 1, 3 - \frac{1}{2}D, \frac{1}{2}(5-D); \rho \left| \frac{-t}{s}, \frac{-4m^2}{t} \right. \right) = {}_2F_1(\alpha, \beta; \rho|x), \quad (4.52)$$

onde $x = -t/s$, $\alpha = D/2 - 2$ e $\beta = \rho = 1$. Note que para os termos que não possuem derivadas podemos reduzir ainda mais a ${}_2F_1$. As derivadas devem ser calculadas como fizemos acima. Para $\mathcal{J}_6$ fazemos simplesmente a troca s por t .

4.6 Conclusão.

A característica única do método da integração em dimensão negativa de fornecer várias respostas simultâneas para integrais de Feynman nos permitiu descobrir resultados originais para uma dada integral. É importante observar que as duas representações em termos de funções hipergeométricas conhecidas na literatura não nos permitiam estudar, por exemplo, o caso de "forward scattering" no regime relativístico. O teorema ótico então não poderia ser aplicado pois não seríamos capazes de calcular a amplitude para o espalhamento frontal. Além disso mostramos que NDIM é uma técnica poderosa também para descobrir pontos de

ramificação de representações integrais, baseados simplesmente nas propriedades de funções analíticas quando submetidas ao processo de continuação analítica[7].

Capítulo 5

Perspectivas Futuras: Diagramas com Dois Loops.

É importante que com a técnica que estamos estudando e ajudando a desenvolver sejamos capazes de realizar cálculos mais complicados. Seria realmente lamentável que ela fosse viável apenas ao nível de um loop. Testamos então NDIM calculando alguns diagramas com dois loops. Vamos discutir aqui neste capítulo um cálculo muito simples mas que considera integrais escalares para gráficos para um certo vértice com dois loops[29].

5.1 Integral Escalar para uma Função de Três Pontos.

Vamos mostrar as grandes possibilidades da técnica da integração em dimensão negativa calculando uma integral escalar que contribui para a correção de vértice ao nível de dois loops(veja figura).

Como sempre partimos de integrais gaussianas, neste caso são duas porque o gráfico possui dois loops, considere então como ponto de partida para este "lab-test" a integral,

$$\mathcal{G}_{VERT} = \int \int d^D r \, d^D q \, \exp \left[-\alpha q^2 - \beta (q - p)^2 - \gamma r^2 - \omega (q - r - k)^2 \right], \quad (5.1)$$

onde por simplicidade vamos considerar que duas das partículas externas são reais, ou seja, que

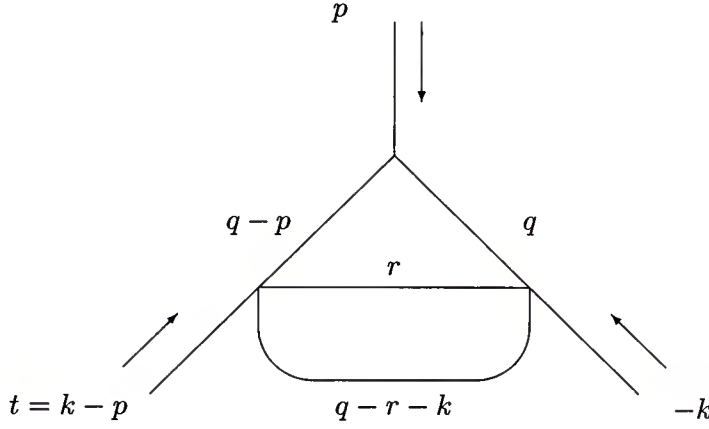


Figura 5.1: Vértice com dois loops. Momentos externos $k^2 = t^2 = 0$.

elas estão "on-shell". O que significa,

$$k^2 = 0, \quad p^2 = 2pk, \quad t^2 = 0.$$

Completando o quadrado na variável q podemos integrar,

$$\mathcal{G}_{VERT} = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}D} e^{-\beta p^2 + \frac{\beta^2 p^2}{\lambda} + \frac{2\beta\omega pk}{\lambda}} \int d^D r \exp(-\theta r^2 - 2\omega rk) \exp\left[\frac{1}{\lambda}(\omega^2 r^2 + 2\beta\omega pr + 2\omega^2 rk)\right], \quad (5.2)$$

onde $\theta = \gamma + \omega$ e $\lambda = \alpha + \beta + \omega$. Seguindo o mesmo procedimento podemos integrar novamente,

$$\mathcal{G}_{VERT} = \left(\frac{\pi^2}{\phi}\right)^{\frac{1}{2}D} \exp\left[\frac{-1}{\phi}(\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\omega)p^2\right], \quad (5.3)$$

onde $\phi = \alpha\gamma + \alpha\omega + \beta\gamma + \beta\omega + \gamma\omega$. Expandindo a exponencial em série de Taylor a expansão multinomial para ϕ teremos,

$$\mathcal{G}_{VERT} = \pi^D \sum_{\{n_i=0\}}^{\infty} \frac{(-p^2)^{n_1+n_2} (-n_1 - n_2 - \frac{1}{2}D)!}{n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!n_7!} \times \alpha^{n_1+n_2+n_3+n_4} \beta^{n_1+n_2+n_5+n_6} \gamma^{n_1+n_3+n_5+n_7} \omega^{n_2+n_4+n_6+n_7}, \quad (5.4)$$

onde os índices de soma devem satisfazer $-n_1 - n_2 - \frac{1}{2}D = n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7$ devido a expansão multinomial já mencionada.

Agora, como já fizemos anteriormente, utilizamos a idéia de Halliday e Ricotta: expandir a gaussiana (5.1) antes da integração

$$\mathcal{G}_{VERT} = \sum_{i,j,l,m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+j+l+m} \alpha^i \beta^j \gamma^l \omega^m}{i!j!l!m!} \times \int \int d^D q d^D r (q^2)^i [(q-p)^2]^j (r^2)^l [(r-q+k)^2]^m, \quad (5.5)$$

onde definimos a integral em $D < 0$ da maneira usual,

$$J_{NDIM} = \int d^D q \int d^D r (q^2)^i [(q-p)^2]^j (r^2)^l [(r-q+k)^2]^m. \quad (5.6)$$

Comparando as equações (5.4) e (5.5) concluímos que

$$J_{NDIM} = \frac{\pi^D g(i, j, l, m)}{(-1)^{i+j+l+m}} \sum_{\{n_i=0\}}^{\infty} \frac{(-p^2)^{n_1+n_2} \Gamma(1 - n_1 - n_2 - \frac{1}{2}D)}{n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!n_7!} \times \delta_{n_1+n_2+n_3+n_4, i} \delta_{n_1+n_2+n_5+n_6, j} \delta_{n_1+n_3+n_5+n_7, l} \delta_{n_2+n_4+n_6+n_7, m}, \quad (5.7)$$

onde

$$g(i, j, l, m) = \Gamma(1+i)\Gamma(1+j)\Gamma(1+l)\Gamma(1+m).$$

Examinando esta expressão verificamos imediatamente que conseguiremos, resolvendo o sistema de equações algébricas, eliminar cinco índices de soma. Restarão ao final apenas dois, portanto. Mas, no total, teremos 21 sistemas de equações. Destes, nove possuem solução trivial.

Voltamos nossa atenção para as doze soluções não-triviais que, em princípio, não sabemos se fornecerão resultados equivalentes[40, 47, 48].

Após uma álgebra simples obtemos,

$$J_{NDIM} = (-\pi)^D (p^2)^\sigma g(i, j, l, m) \Gamma(1 - \sigma - \frac{1}{2}D) \times \sum_{\{n_i=0\}}^{\infty} \frac{\delta_{n_1+n_2+n_3+n_4,i} \delta_{n_1+n_2+n_5+n_6,j} \delta_{n_1+n_3+n_5+n_7,l} \delta_{n_2+n_4+n_6+n_7,m}}{n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!n_7!}, \quad (5.8)$$

onde definimos $\sigma = i + j + l + m + D$.

Novamente recorreremos à ajuda do microcomputador(veja apêndice D) para resolver estes sistemas. Não nos interessa de forma alguma soluções numéricas. Uma destas soluções, a que possui como índices livres n_2 e n_6 por exemplo,

$$S_1 = \frac{(-\pi)^D (p^2)^\sigma \Gamma(1+i) \Gamma(1+j) \Gamma(1+l) \Gamma(1+m) \Gamma(1-\sigma-\frac{1}{2}D)}{\Gamma(1+\sigma) \Gamma(1-j-m-\frac{1}{2}D) \Gamma(1-l-\frac{1}{2}D) \Gamma(1+j-\sigma)} \times \frac{1}{\Gamma(1+l+m+\frac{1}{2}D)} \sum_{n_2, n_6=0}^{\infty} \frac{(-\sigma|n_2)(\frac{1}{2}D+l|n_2+n_6)(\sigma-j|n_6)}{n_2!n_6!(1-j-m-\frac{1}{2}D|n_2+n_6)}, \quad (5.9)$$

observe que esta soma pode ser reescrita em termos de função hipergeométricas ${}_2F_1$ se usarmos a propriedade

$$(a|b+c) = (a+b|c)(a|b),$$

dos símbolos de Pochhammer. Mas, uma função hipergeométrica deste tipo com argumento 1 pode ser somada[16, 17, 49],

$${}_2F_1(a, b; c|1) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)}. \quad (5.10)$$

Rearranjando a soma em n_6 ,

$$S_1 = \frac{(-\pi)^D (p^2)^\sigma \Gamma(1+i) \Gamma(1+j) \Gamma(1+l) \Gamma(1+m) \Gamma(1-\sigma-\frac{1}{2}D)}{\Gamma(1+\sigma) \Gamma(1-j-m-\frac{1}{2}D) \Gamma(1-l-\frac{1}{2}D) \Gamma(1+j-\sigma)} \sum_{n_2=0}^{\infty}$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{(-\sigma|n_2)(\frac{1}{2}D + l|n_2)}{n_2!(1 - j - m - \frac{1}{2}D|n_2)} \sum_{n_6=0}^{\infty} \frac{(\sigma - j|n_6)(\frac{1}{2}D + l + n_2|n_6)}{n_6!(1 - j - m - \frac{1}{2}D + n_2|n_6)} \\ & \times \frac{1}{\Gamma(1 + l + m + \frac{1}{2}D)}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

a segunda série é por definição uma função hipergeométrica gaussiana. Usando (5.10) podemos somá-la e aplicar o mesmo procedimento novamente para a série restante em n_2 ,

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{(-\pi)^D (p^2)^\sigma \Gamma(1+i)\Gamma(1+j)\Gamma(1+l)\Gamma(1+m)\Gamma(1-\sigma-\frac{1}{2}D)}{\Gamma(1+\sigma)\Gamma(1-l-\frac{1}{2}D)\Gamma(1+j-\sigma)\Gamma(1+l+m+\frac{1}{2}D)} \\ & \times \frac{\Gamma(1-l-m-D)}{\Gamma(1+i-\sigma)\Gamma(1-m-\frac{1}{2}D)}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Seguindo o procedimento usual podemos continuar analiticamente o resultado para dimensão positiva

$$\begin{aligned} S_1^{AC} &= \pi^D (p^2)^\sigma (-i|\sigma)(-j|\sigma)(-l-m-\frac{1}{2}D)(-m|\sigma-i-j-\frac{1}{2}D) \\ & \times (\sigma + \frac{1}{2}D| - 2\sigma - \frac{1}{2}D)(D+l+m| - l - \frac{1}{2}D), \end{aligned} \quad (5.13)$$

este é o resultado geral, no espaço euclidiano, para a integral em questão.

No caso especial onde $i = j = l = m = -1$, temos como resultado,

$$S_1^{AC} = \frac{\pi^D (p^2)^{D-4} \Gamma^2(D-3) \Gamma^2(\frac{1}{2}D-1) \Gamma(2-\frac{1}{2}D) \Gamma(4-D)}{\Gamma(D-2) \Gamma(\frac{3}{2}D-4)}, \quad (5.14)$$

que é o resultado conhecido na literatura em D -dimensões[50], obtido através de outra técnica.

Mas agora o leitor atento deve perguntar: quais os resultados que as outras soluções possíveis fornecem? A resposta é surpreendente: *todas as doze soluções não-triviais, apesar de serem distintas,*¹ *levam ao mesmo resultado final, eq.(5.13).*

Qual a razão? Por que NDIM possui esta característica? Como podemos provar, sem precisar somar uma por uma, que os resultados são os mesmos? Quando o argumento é igual a

¹Veja a seção 2 deste capítulo.

um a resposta será degenerada? Estas são perguntas para as quais ainda não temos resposta², mas apenas conjecturas para algumas delas[29].

Para tentar convencer o leitor³ vamos realizar outra soma, desta vez a que possui índices n_2 e n_5 ,

$$\begin{aligned}
 S_2 &= \frac{(-\pi)^D (p^2)^\sigma \Gamma(1+i) \Gamma(1+j) \Gamma(1+l) \Gamma(1+m) \Gamma(1-\sigma-\frac{1}{2}D)}{\Gamma(1+\sigma) \Gamma(1-\sigma-m-\frac{1}{2}D) \Gamma(1+j-\sigma) \Gamma(1+l+m+\frac{1}{2}D)} \\
 &\times \frac{1}{\Gamma(1+i+m+\frac{1}{2}D)} \sum_{n_2, n_5=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n_2+n_5} (-\sigma|n_2) (-j+\sigma|n_5)}{n_2! n_5! (1-\sigma-m-\frac{1}{2}D|n_2-n_5)} \\
 &\times \frac{1}{(1+i+m+\frac{1}{2}D|n_5-n_2)}. \tag{5.15}
 \end{aligned}$$

como no caso anterior podemos somar ambas as séries. Usando (1.18) reescrevemos a série em n_5 e a identificamos com uma função hipergeométrica gaussiana ${}_2F_1$,

$$\begin{aligned}
 S_2 &= (-\pi)^D (p^2)^\sigma P_2(i, j, l, m; D) \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n_2} (-\sigma|n_2)}{n_2! (1-\sigma-m-\frac{1}{2}D|n_2)} \\
 &\times \frac{1}{(1+i+m+\frac{1}{2}D|-n_2)} \sum_{n_5=0}^{\infty} \frac{(\sigma-j|n_5) (\sigma+m+\frac{1}{2}D-n_2|n_5)}{n_5! (1+i+m+\frac{1}{2}D-n_2|n_5)}, \tag{5.16}
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 P_2(i, j, l, m; D) &= \frac{\Gamma(1+i) \Gamma(1+j) \Gamma(1+l) \Gamma(1+m) \Gamma(1-\sigma-\frac{1}{2}D)}{\Gamma(1+\sigma) \Gamma(1-\sigma-m-\frac{1}{2}D) \Gamma(1+j-\sigma)} \\
 &\times \frac{1}{\Gamma(1+l+m+\frac{1}{2}D) \Gamma(1+i+m+\frac{1}{2}D)},
 \end{aligned}$$

somando a série hipergeométrica por meio de (5.10) e aplicando novamente (1.18),

$$\begin{aligned}
 S_2 &= (-\pi)^D (p^2)^\sigma P_2(i, j, l, m; D) \frac{\Gamma(1+i+m+\frac{1}{2}D) \Gamma(1+i+j-2\sigma)}{\Gamma(1+i-\sigma) \Gamma(1-l-\frac{1}{2}D)} \\
 &\times \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{(-\sigma|n_2) (\frac{1}{2}D+l|n_2)}{n_2! (1-\sigma-m-\frac{1}{2}D|n_2)}. \tag{5.17}
 \end{aligned}$$

²Mas que obviamente nos incentiva a continuar pesquisando NDIM.

³Na verdade nós somamos todas as séries.

Obtemos uma função ${}_2F_1$ que somada, com a ajuda de (5.10), obtemos (5.12) a qual leva ao resultado correto em dimensão positiva (5.13).

5.2 As Demais Soluções.

Por motivo de completeza listamos nesta seção todas as demais soluções para o sistema de equações algébricas. Todas elas, como verificamos, podem ser somadas e trazidas de volta ao mundo real, por meio do procedimento de continuação analítica já explicado anteriormente.

$$S_3 = \frac{(-\pi)^D (p^2)^\sigma \Gamma(1+i) \Gamma(1+j) \Gamma(1+l) \Gamma(1+m) \Gamma(1-\sigma-\frac{1}{2}D)}{\Gamma(1+\sigma+l+\frac{1}{2}D) \Gamma(1-l-\frac{1}{2}D) \Gamma(1+i-\sigma) \Gamma(1+j-\sigma)} \quad (5.18)$$

$$\times \frac{1}{\Gamma(1+l+m+\frac{1}{2}D)} \sum_{n_4, n_6=0}^{\infty} \frac{(-j+\sigma|n_6)(\frac{1}{2}D+l|n_4+n_6)(-i+\sigma|n_4)}{n_4! n_6! (1+l+\frac{1}{2}D+\sigma|n_4+n_6)},$$

$$S_4 = \frac{(-\pi)^D (p^2)^\sigma \Gamma(1+i) \Gamma(1+j) \Gamma(1+l) \Gamma(1+m) \Gamma(1-\sigma-\frac{1}{2}D)}{\Gamma(1+j+l+\frac{1}{2}D) \Gamma(1+i+m+\frac{1}{2}D) \Gamma(1+j-\sigma) \Gamma(1+l+m+\frac{1}{2}D)} \quad (5.19)$$

$$\times \frac{1}{\Gamma(1+i-\sigma)} \sum_{n_4, n_5=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n_4+n_5} (-i+\sigma|n_4)(-j+\sigma|n_5)}{n_4! n_5! (1+j+l+\frac{1}{2}D|n_4-n_5)(1+i+m+\frac{1}{2}D|n_5-n_4)},$$

$$S_5 = \frac{(-\pi)^D (p^2)^\sigma \Gamma(1+i) \Gamma(1+j) \Gamma(1+l) \Gamma(1+m) \Gamma(1-\sigma-\frac{1}{2}D)}{\Gamma(1+i+l+\frac{1}{2}D) \Gamma(1+j+m+\frac{1}{2}D) \Gamma(1+j-\sigma) \Gamma(1+l+m+\frac{1}{2}D)} \quad (5.20)$$

$$\times \frac{1}{\Gamma(1+i-\sigma)} \sum_{n_3, n_6=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n_3+n_6} (-i+\sigma|n_3)(-j+\sigma|n_6)}{n_3! n_6! (1+i+l+\frac{1}{2}D|n_6-n_3)(1+j+m+\frac{1}{2}D|n_3-n_6)},$$

$$S_6 = \frac{(-\pi)^D (p^2)^\sigma \Gamma(1+i) \Gamma(1+j) \Gamma(1+l) \Gamma(1+m) \Gamma(1-\sigma-\frac{1}{2}D)}{\Gamma(1+\sigma+m+\frac{1}{2}D) \Gamma(1-m-\frac{1}{2}D) \Gamma(1+i-\sigma) \Gamma(1+j-\sigma)} \quad (5.21)$$

$$\times \frac{1}{\Gamma(1+l+m+\frac{1}{2}D)} \sum_{n_3, n_5=0}^{\infty} \frac{(-i+\sigma|n_3)(-j+\sigma|n_5)(\frac{1}{2}D+m|n_3+n_5)}{n_3! n_5! (1+m+\frac{1}{2}D+\sigma|n_3+n_5)},$$

$$S_7 = \frac{(-\pi)^D (p^2)^\sigma \Gamma(1+i) \Gamma(1+j) \Gamma(1+l) \Gamma(1+m) \Gamma(1-\sigma-\frac{1}{2}D)}{\Gamma(1+\sigma) \Gamma(1-i-m-\frac{1}{2}D) \Gamma(1+i-\sigma) \Gamma(1-l-\frac{1}{2}D)} \quad (5.22)$$

$$\times \frac{1}{\Gamma(1+l+m+\frac{1}{2}D)} \sum_{n_2, n_4=0}^{\infty} \frac{(-\sigma|n_2)(-i+\sigma|n_4)(\frac{1}{2}D+l|n_2+n_4)}{n_2!n_4!(1-i-m-\frac{1}{2}D|n_2+n_4)},$$

$$S_8 = \frac{(-\pi)^D (p^2)^\sigma \Gamma(1+i) \Gamma(1+j) \Gamma(1+l) \Gamma(1+m) \Gamma(1-\sigma-\frac{1}{2}D)}{\Gamma(1+\sigma) \Gamma(1+j+m+\frac{1}{2}D) \Gamma(1+i-\sigma) \Gamma(1-m-\frac{1}{2}D-\sigma) \Gamma(1+l+m+\frac{1}{2}D)} \quad (5.23)$$

$$\times \sum_{n_2, n_3=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n_2+n_3} (-\sigma|n_2)(-i+\sigma|n_3)}{n_2!n_3!(1+j+m+\frac{1}{2}D|n_3-n_2)(1-m-\frac{1}{2}D-\sigma|n_2-n_3)},$$

$$S_9 = \frac{(-\pi)^D (p^2)^\sigma \Gamma(1+i) \Gamma(1+j) \Gamma(1+l) \Gamma(1+m) \Gamma(1-\sigma-\frac{1}{2}D)}{\Gamma(1+\sigma) \Gamma(1+i+l+\frac{1}{2}D) \Gamma(1+j-\sigma) \Gamma(1-l-\frac{1}{2}D-\sigma) \Gamma(1+l+m+\frac{1}{2}D)} \quad (5.24)$$

$$\times \sum_{n_1, n_6=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n_1+n_6} (-\sigma|n_1)(-j+\sigma|n_6)}{n_1!n_6!(1+i+l+\frac{1}{2}D|n_6-n_1)(1-l-\frac{1}{2}D-\sigma|n_1-n_6)},$$

$$S_{10} = \frac{(-\pi)^D (p^2)^\sigma \Gamma(1+i) \Gamma(1+j) \Gamma(1+l) \Gamma(1+m) \Gamma(1-\sigma-\frac{1}{2}D)}{\Gamma(1+\sigma) \Gamma(1-m-\frac{1}{2}D) \Gamma(1+j-\sigma) \Gamma(1-j-l-\frac{1}{2}D)} \quad (5.25)$$

$$\times \frac{1}{\Gamma(1+l+m+\frac{1}{2}D)} \sum_{n_1, n_5=0}^{\infty} \frac{(-\sigma|n_1)(-j+\sigma|n_5)(\frac{1}{2}D+m|n_1+n_5)}{n_1!n_5!(1-j-l-\frac{1}{2}D|n_1+n_5)},$$

$$S_{11} = \frac{(-\pi)^D (p^2)^\sigma \Gamma(1+i) \Gamma(1+j) \Gamma(1+l) \Gamma(1+m) \Gamma(1-\sigma-\frac{1}{2}D)}{\Gamma(1+\sigma) \Gamma(1+j+l+\frac{1}{2}D) \Gamma(1+i-\sigma) \Gamma(1-l-\frac{1}{2}D-\sigma) \Gamma(1+l+m+\frac{1}{2}D)} \quad (5.26)$$

$$\times \sum_{n_1, n_4=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n_1+n_4} (-\sigma|n_1)(-i+\sigma|n_4)}{n_1!n_4!(1+j+l+\frac{1}{2}D|n_4-n_1)(1-l-\frac{1}{2}D-\sigma|n_1-n_4)},$$

$$S_{12} = \frac{(-\pi)^D (p^2)^\sigma \Gamma(1+i) \Gamma(1+j) \Gamma(1+l) \Gamma(1+m) \Gamma(1-\sigma-\frac{1}{2}D)}{\Gamma(1+\sigma) \Gamma(1-i-l-\frac{1}{2}D) \Gamma(1+i-\sigma) \Gamma(1-m-\frac{1}{2}D)} \quad (5.27)$$

$$\times \frac{1}{\Gamma(1+l+m+\frac{1}{2}D)} \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} \frac{(-\sigma|n_1)(-i+\sigma|n_2)(\frac{1}{2}D+m|n_1+n_2)}{n_1!n_2!(1-i-l-\frac{1}{2}D|n_1+n_2)},$$

5.3 Conclusão.

Como um primeiro teste podemos concluir que a técnica da integração em dimensão negativa é de fato promissora. Resolvemos uma integral escalar para um gráfico com dois loops de maneira quase direta. Podemos começar a pensar então em introduzir partículas com massa nos loops – que é o que nos interessa de fato. Mais ainda: este cálculo simples pode ser generalizado facilmente para o caso em que as partículas externas estão "*off-shell*". Se conseguirmos resultados simples para gráficos "*off-shell*" podemos talvez começar a pensar em gráficos com três loops.

Capítulo 6

Conclusão.

How far we can draw these similarities? The answer is quite simple: ones tries till one finds a problem. So, let us move ahead. – M.Veltman[51]

6.1 Epílogo.

O objetivo do nosso trabalho foi estudar e ajudar a desenvolver uma técnica de resolver integrais de Feynman em Teoria Quântica de Campos, ou seja, tentar facilitar o cálculo de loops. Halliday e colaboradores, em 1987, propuseram tal método, conhecido como integração em dimensões negativas (NDIM). A idéia não poderia ser mais simples. Poderíamos nos perguntar: *por que razão não conseguimos resolver as integrais de Feynman?* Uma das muitas respostas que podemos dar a esta questão é: *porque a estrutura do denominador é muito complicada.* Mas, se nos lembrarmos do princípio da continuação analítica podemos pensar na hipótese de escrever os propagadores no numerador, resolver a integral e, se possível, fazer o caminho de volta.

A idéia inicial é de fato muito simples e os cálculos necessários para fazê-la "funcionar" são ainda mais simples: integrar gaussianas, resolver sistemas de equações algébricas lineares e trabalhar com séries múltiplas de potências¹.

¹Para alguns casos, normalmente quando existem partículas sem massa devemos ainda ser capazes de somar séries hipergeométricas, tarefa esta não muito fácil em alguns casos.

Com NDIM cálculos ao nível de 1-loop são muito simples, quase diretos. Para ilustrar bem este fato calculamos no capítulo 2 as integrais escalares que contribuem para o tensor de polarização do vácuo da QED e uma integral escalar para a correção de vértice na teoria ϕ^3 sem massa[5].

Uma das grandes vantagens que NDIM possui sobre outras técnicas de se calcular loops em Teoria Quântica de Campos é que ela nos fornece simultaneamente várias respostas para uma mesma integral. Mais ainda, como estes resultados representam a mesma função analítica eles estão ligados por meio de continuação analítica. Ilustramos esta propriedade nos capítulos 3 e 4, onde estudamos o diagrama do tipo caixa que contribui para o espalhamento fóton-fóton em QED, ao nível de 1-loop. Obtivemos as duas representações conhecidas anteriormente na literatura, para expoentes arbitrários dos propagadores e dimensão par; mostramos ainda que eles estão corretamente relacionados (continuação analítica). Devido a esta característica única fomos capazes de obter seis resultados originais para a mesma integral, como "sub-produtos" conseguimos mostrar que os resultados novos são corretos e além disso identificamos os pontos de ramificação da integral de Feynman diretamente das suas representações em termos de funções hipergeométricas.

O passo seguinte foi estudar gráficos ao nível de 2-loops. Escolhemos para este fim uma integral escalar com quatro propagadores sem massa e com três pernas externas, sendo duas "on-shell". Conseguimos executar este cálculo com extrema facilidade e sem tomar o caso particular dos expoentes dos propagadores iguais a menos um. Nos deparamos aqui com mais uma das características inesperadas de NDIM: quando a variável da somatória que representa a integral em $D < 0$ é igual a um o resultado é degenerado, por este motivo não devemos tomar a combinação linear destas soluções. *Por quê?* Esta é uma questão para a qual ainda não temos resposta²

²Temos apenas algumas idéias a respeito: sabemos que toda função hipergeométrica satisfaz a uma equação diferencial o a um sistema de ED. Perguntamos agora: *é possível a partir desta equação ou sistema de equações provar a conjectura acima?*

6.2 Novas Aplicações.

Nosso trabalho não pára por aqui. Ainda temos muitas dificuldades pela frente, e.g., o gráfico conhecido como "two-loop master" é um desafio para NDIM pois existem ao todo 8008 sistemas de equações 6×6 e os índices de soma são ao todo 16. Restam portanto dez somatórias infinitas que, em princípio, devem poder ser somadas, i.e., ser escritas somente em termos de funções gama. Até o presente momento conseguimos somar apenas 5 delas. Para superar esta dificuldade intrínseca de NDIM pretendemos usar algumas outras técnicas de cálculo de loops para facilitar o processo de soma de séries. O método conhecido como integração por partes, junto com os polinômios de Gegenbauer, é sem dúvida um dos mais poderosos para se resolver integrais de Feynman sem massa³. Integrando por partes no espaço de momento é possível relacionar o gráfico "two-loop master" com dois outros muito mais simples. Então, impondo a igualdade da somatória com dez índices com resultado obtido a partir da integração por partes podemos obter uma fórmula para esta soma complicada. Tendo esta regra de soma em mãos podemos considerar gráficos cada vez mais complicados, como se tivéssemos regras de recorrência. Este é o primeiro passo para estudarmos diagramas com dois loops com massa.

Além de melhorar NDIM pensamos também em outras aplicações como por exemplo, entre muitas outras, somar séries, especialmente as que aparecem quando estudamos Teoria Quântica de Campos à temperatura finita, ou ainda, resolver integrais de loops em teorias de gauge, mas para gauges não-covariantes como o axial e o do cone de luz.

³Esta técnica é de fato muito poderosa, mas apenas para gráficos com duas pernas externas.

Apêndice A

Funções Hipergeométricas.

Por motivo de completeza vamos listar as funções hipergeométricas usadas, suas respectivas regiões de convergência e algumas de suas representações integrais¹.

A nossa notação para o símbolo de Pochhammer é,

$$(a|k) \equiv (a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}.$$

A função hipergeométrica de Gauss é a mais simples delas, e é representada por ${}_2F_1$,

$${}_2F_1(a, b; c|z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \frac{(a|j)(b|j)}{(c|j)} \quad (\text{A.1})$$

quando a variável z toma o valor 1 a série pode ser somada²

$${}_2F_1(a, b; c|1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}. \quad (\text{A.2})$$

Usamos muitas vezes esta expressão para somar séries provenientes de diagramas com dois loops. A função hipergeométrica de Gauss possui várias representações integrais, neste trabalho uma delas foi particularmente útil quando calculamos derivadas paramétricas,

$${}_2F_1(a, b; c|z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 dw \frac{w^{b-1}(1-w)^{c-b-1}}{(1-wz)^a}. \quad (\text{A.3})$$

¹Há pelos menos três textos que tratam bem este assunto: Erdélyi[16], Appel[33] e Gradshteyn[17]

²A fórmula de soma pode ser obtida a partir a continuação analítica ${}_2F_1(\dots|z) \rightarrow {}_2F_1(\dots|1-z)$.

Mantendo ainda o mesmo número de variáveis (uma) esta função pode ser generalizada. É quando surge a função ${}_3F_2$ que é um caso particular de,

$${}_pF_q(\{a_p\}; \{b_q\}|z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \frac{\prod_{m=1}^{m=p}(a_m|j)}{\prod_{n=1}^{n=q}(b_n|j)}, \quad (\text{A.4})$$

sendo que estas funções apareceram no nosso trabalho quando consideramos casos particulares do diagrama do tipo caixa.

Funções Hipergeométricas com duas Variáveis.

As função hipergeométricas de duas variáveis são definidas por séries duplas. A maioria dos textos trata apenas as chamadas funções hipergeométricas de Appel,

$$F_1(\alpha, \beta, |x, y) = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{x^j y^k (\alpha|j+k)(\beta|j)(\beta'|k)}{j!k!(\gamma|j+k)}, \quad |x| < 1, |y| < 1, \quad (\text{A.5})$$

$$F_2(\alpha, \beta, \beta'; \gamma, \gamma'|x, y) = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{x^j y^k (\alpha|j+k)(\beta|j)(\beta'|k)}{j!k!(\gamma|j)(\gamma'|k)}, \quad |x| + |y| < 1, \quad (\text{A.6})$$

$$F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta'; \gamma|x, y) = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{x^j y^k (\alpha|j)(\alpha'|k)(\beta|j)(\beta'|k)}{j!k!(\gamma|j+k)}, \quad |x| < 1, |y| < 1, \quad (\text{A.7})$$

$$F_4(\alpha, \beta; \gamma, \gamma'|x, y) = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{x^j y^k (\alpha|j+k)(\beta|j+k)}{j!k!(\gamma|j)(\gamma'|k)}, \quad |\sqrt{x}| + |\sqrt{y}| < 1, \quad (\text{A.8})$$

mas, além destas existem muitas outras[16]. Dentre elas a que apareceu neste trabalho é uma das que possui relação com F_3 e F_2 , é a função H_2 ,

$$H_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta; \rho|x, y) = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{x^j y^k (\alpha|j-k)(\beta|j)(\gamma|k)(\delta|k)}{j!k!(\rho|j)}, \quad |x| < 1, |y| < 1, \quad (\text{A.9})$$

e esta região deve ser tal que,

$$\left| \frac{1}{y} \right| - |x| < 1,$$

Apêndice B

O Caso Logarítmico da Continuação Analítica.

Neste apêndice vamos mostrar em detalhe como regularizar os expoentes dos propagadores, i.e., como chegar a equação (3.21). A dificuldade surge quando particularizamos as nossas expressões gerais para o caso de expoentes dos propagadores iguais a menos um. Aparecem fatores da forma,

$$\Gamma(i - k)\Gamma(l - j) \longrightarrow \Gamma(0)\Gamma(0),$$

que obviamente precisam ser regularizados. O que devemos fazer é introduzir um parâmetro δ para cada uma destas funções gama singulares, aqui teremos portanto,

$$i = -1 + \delta, \quad k = -1 + \delta,$$

poderíamos ter escolhido também j e l que teríamos o mesmo resultado¹.

Por simplicidade vamos considerar um caso mais simples, o de F_3 indo para F_2 . Introduzindo estas correções em

$$F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta'; \gamma|x, y) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\rho - \lambda)\Gamma(\sigma - \mu)}{\Gamma(\rho)\Gamma(\sigma)\Gamma(\gamma - \lambda - \mu)}(-x)^{-\lambda}(-y)^{-\mu}F_2(\alpha, \beta, \beta'; \gamma, \gamma'|x, y), \quad (\text{B.1})$$

¹A escolha i e j , por exemplo, não é adequada porque ainda resta(m) fator(es) singular(es) do tipo $\Gamma(0)$.

e denotando os termos desta soma por F_2^I , F_2^{II} , F_2^{III} e F_2^{IV} . Temos para o primeiro deles,

$$F_2^I = \left(\frac{3}{4xy\delta^2} + \mathcal{O}(\delta) \right) \left[1 - \delta(\partial_\gamma + \partial_{\gamma'}) + \frac{\delta^2}{2} (\partial_\gamma + \partial_{\gamma'})^2 \right] F_2, \quad (\text{B.2})$$

No segundo já aparecem os logaritmos,

$$F_2^{II} = f_2 \left[1 + \delta(\partial_\alpha - \partial_\gamma) + \frac{\delta^2}{2} (\partial_\alpha + \partial_\gamma)^2 \right] F_2, \quad (\text{B.3})$$

onde

$$f_2 = \frac{-3}{4xy} \left[\frac{1}{\delta^2} - \frac{\log(-4y)}{\delta} - \frac{1}{24xy} \left(\pi^2 - 12 \log^2 2 - 12 \log 2 \log(-y) - 3 \log^2(-y) \right) \right],$$

e simplificamos expressões da forma $\partial_\beta + \partial_\gamma$. O terceiro é análogo ao segundo, basta fazermos $x \leftrightarrow y$ e $\gamma \leftrightarrow \gamma'$,

$$F_2^{III} = f_2(x \leftrightarrow y, \gamma \leftrightarrow \gamma') F_2, \quad (\text{B.4})$$

o quarto termo é o mais complicado deles,

$$F_2^{IV} = f_4 \left(1 + 2\delta\partial_\alpha + 2\delta^2\partial_\alpha^2 \right) F_2, \quad (\text{B.5})$$

onde

$$f_4 = \frac{3}{4xy} \left[\frac{1}{\delta^2} - \frac{\log(-4x) + \log(-4y)}{\delta} + \frac{1}{8xy} \left(-5\pi^2 + 48 \log^2 2 + 24 \log 2 \log(-x) \right. \right. \\ \left. \left. + 3 \log^2(-x) + 24 \log 2 \log(-y) + 6 \log(-x) \log(-y) + 3 \log^2(-y) \right) \right]. \quad (\text{B.6})$$

Agora devemos fazer as multiplicações. Verificamos imediatamente que os polos duplos e simples se cancelam. Somando com cuidado os quatro termos vamos obter exatamente a equação (3.21).

Apêndice C

Integrais Escalares.

No cálculo da polarização do vácuo utilizamos algumas regras para transformar integrais com vetores e tensores no numerador em integrais escalares. Vamos simplesmente listá-las neste apêndice. Observe que estas identidades são válidas no espaço de Minkowski e nós trabalhamos sempre no espaço euclidiano.

Para integrais com dois propagadores e com um vetor no integrando usamos uma relação obtida por Tarasov[26],

$$\int \frac{d^D q (qp)}{(q^2 - m_1^2)^{\nu_1+1} [(q-p)^2 - m_2^2]^{\nu_2}} = i\nu_2 \pi^{D/2} p^2 \int \frac{d^{D'} q}{(q^2 - m_1^2)^{\nu_1+1} [(q-p)^2 - m_2^2]^{\nu_2+1}}, \quad (\text{C.1})$$

onde $D' = D + 2$.

Para integrais também com dois propagadores mas com um tensor de segunda ordem no numerador usamos[27]

$$\mu^{4-D} \int \frac{d^D q q_\mu q_\nu}{(2\pi)^D (q^2 - m_1^2)^{\nu_1+1} [(q+p)^2 - m_2^2]^{\nu_2}} = \frac{i}{16\pi^2} B_{\mu\nu}, \quad (\text{C.2})$$

$$B_{22} = \frac{1}{6} \left[A + 2m^2 B_0 + p^2 B_1 + 2m^2 - \frac{1}{3} p^2 \right], \quad (\text{C.3})$$

$$B_1 = \frac{-1}{2} B_0, \quad (\text{C.4})$$

$$B_0 = \frac{16\pi^2}{i} \mu^{4-D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{(q^2 - m^2)[(q + p)^2 - m^2]}, \quad (\text{C.5})$$

com estas regras conseguimos calcular todas as integrais necessárias para a polarizaao do vácuo ao nível de 1-loop em QED.

Apêndice D

Parte Computacional.

Como o nosso método exige que calculemos um grande número de sistemas de equações algébricas a ajuda de um microcomputador é conveniente pois existem programas capazes de resolver exatamente qualquer tipo de sistema de equações algébricas lineares. Desenvolvemos então um programa simples que faz este trabalho. Por motivo de completeza apresentamos abaixo a sua listagem,

```
CLEAR[A,M,V,B,I,J,K,L,D,X1,X2,X3,X4,X5,X6,X7,X8,X9,z,A2,A,w];
A={{1,1,1,1,0,0,0},{1,1,0,0,1,1,0},{1,0,1,0,1,0,1},{0,1,0,1,0,1,1},{1,1,0,0,0,0,0}}
M={{0,0,0,0,0},{0,0,0,0,0},{0,0,0,0,0},{0,0,0,0,0},{0,0,0,0,0}}
B={I,J,L,M,I+J+L+M+D}
v={X1,X2,X5,X6,X7,X8,X9}
z=0;w=0;
FOR[i1=1,i1<=3,i1=i1+1,
M[[1,1]]:=A[[1,i1]];M[[2,1]]:=A[[2,i1]];
M[[3,1]]:=A[[3,i1]];M[[4,1]]:=A[[4,i1]];
M[[5,1]]:=A[[5,i1]];
FOR[j1=2,j1<=4,j1++,
IF[j1<=i1,j1:=i1+1];
M[[1,2]]:=A[[1,j1]];M[[2,2]]:=A[[2,j1]];
```

```

M[[3,2]]:=A[[3,J1]];M[[4,2]]:=A[[4,J1]];
M[[5,2]]:=A[[5,J1]];
FOR[K1=3,K1<=5,K1++,
IF[K1<=J1,K1:=J1+1];
M[[1,3]]:=A[[1,K1]];M[[2,3]]:=A[[2,K1]];
M[[3,3]]:=A[[3,K1]];M[[4,3]]:=A[[4,K1]];
M[[5,3]]:=A[[5,K1]];
FOR[L1=4,L1<=6,L1++,
IF[L1<=K1,L1:=K1+1];
M[[1,4]]:=A[[1,L1]];M[[2,4]]:=A[[2,L1]];
M[[3,4]]:=A[[3,L1]];M[[4,4]]:=A[[4,L1]];
M[[5,4]]:=A[[5,L1]];
FOR[L2=5,L2<=7,L2++,
IF[L2<=L1,L2:=L1+1];
M[[1,5]]:=A[[1,L2]];M[[2,5]]:=A[[2,L2]];
M[[3,5]]:=A[[3,L2]];M[[4,5]]:=A[[4,L2]];
M[[5,5]]:=A[[5,L2]];
B={I,J,L,M,I+J+L+M+D};
FOR[A=1,A<=7,A++,
IF[A!=I1 && A!=J1 && A!=K1 && A!=L1 &&
A!=L2 ,
FOR[A2=1,A2<=5,A2++,
B[[A2]]=B[[A2]]-A[[A2,A]]*V[[A]]
]];
PRINT["SISTEMA",V[[I1]],V[[J1]],V[[K1]],V[[L1]],V[[L2]]];
IF[DET[M]==0,PRINT["SISTEMA SEM SOLUÇÃO"];
Z++,

```

```
PRINT["SOLUÇÃO",  
SIMPLIFY[LINEARSOLVE[M,B]]];  
]]]]];  
PRINT["NUMERO DE SISTEMAS SEM SOLUCAO=",z];
```

este programa roda na versão 2.2(ou superior) do Mathematica (seja para PC, Mac ou estações de trabalho).

A idéia é "cortar" a matriz que temos inicialmente para deixá-la quadrada. Como temos ainda várias escolhas possíveis de sistemas o programa calcula um por um. Primeiramente ele verifica se o sistema em questão é ou não trivial, pelo simples cálculo do determinante da matriz dos coeficientes. Se ele é zero passa-se ao próximo, senão o sistema é resolvido. Quando termina o loop o programa informa-nos qual o número de sistemas triviais.

A matriz "A" representa todos os sistemas, veja que ela não é quadrada. Depois de "cortar" a matriz "A" passamos os seus coeficientes para "M", que é uma matriz quadrada. As variáveis que ficaram livres são transferidas para o lado direito, para a matriz coluna "b". Assim o programa consegue resolver o sistema,

$$Mx = b,$$

o resultado x fica em função das variáveis que deixamos livres.

Bibliografia

- [1] S.Coleman, *Aspects of Symmetry* (Cambridge Univ.Press, 1985).
- [2] G.'t Hooft, M.Veltman, Nucl.Phys.**B44** (1972)189; C.G. Bollini, J.J. Giambiagi, Nuovo Cim. **B12** (1972)20; G.Leibbrandt, Rev.Mod.Phys.**47** (1975)849.
- [3] K.G.Wilson, Phys.Rev.**D7**,10(1973)2911.
- [4] J.Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Clarendon Press, Oxford 1990).
- [5] J.C.Collins, *Renormalization* (Cambridge Univ.Press, 1984).
- [6] A.A.Hauser Jr., *Complex Variables with Physical Applications* (Simon and Schuster, 1971).
- [7] P.M.Morse, H.Feshbach, *Methods of Theoretical Physics* (McGraw-Hill, 1953).
- [8] R.V.Churchill, *Complex Variables and Applications* (McGraw-Hill, 1960).
- [9] W.Kaplan, *Introduction to Analytic Functions* (Addison-Wesley, 1966).
- [10] I.G.Halliday, R.M.Ricotta, Phys.Lett.**B193**, 2(1987)241. R.M.Ricotta, *Topics in Field Theory*, (Ph.D. Thesis, Imperial College, 1987).
- [11] A.I.Markushevich, *Theory of Functions of a Complex Variable* (Chelsea Pub.Co, 1977).
- [12] E.T.Whittaker, G.N.Watson, *A Course of Modern Analysis* (Cambridge Univ.Press, 1966).

- [13] R.J.Eden, P.V.Landshoff, D.I.Olive and J.C.Polkinghorne, *The Analytic S-Matrix* (Cambridge Univ.Press, 1966).
- [14] A.T.Suzuki, R.M.Ricotta, *Topics on Theoretical Physics - Festschrift for P.L.Ferreira*, (1995)219, V.C.Aguilera-Navarro *et al* (Ed.)
- [15] A.T.Suzuki, R.M.Ricotta, *XVI Brazilian Meeting on Particles and Fields*, (1995) 386, C.O. Escobar (Ed.).
- [16] A.Erdélyi, W.Magnus, F.Oberhettinger and F.Tricomi, *Higher Transcendental Functions* (McGraw-Hill, 1953).
- [17] I.S.Gradshteyn, I.M.Rhyzik, *Table of Integrals, Series and Products* (Academic Press, 1994).
- [18] P.Ramond, *Field Theory: A Modern Primer* (Addison-Wesley, 1990).
- [19] S.C.Woon, *Analytic Continuation of Operators – Operators acting Complex s-times*, hep-th/9707206.
- [20] L.D.Faddeev, A.A.Slavnov, *Gauge Fields: An Introduction to Quantum Theory* (Addison-Wesley, 1991).
- [21] I.G.Halliday, R.M.Ricotta, A.T.Suzuki, *XVII Brazilian Meeting on Particles and Fields*, (1996)495, A.J. da Silva *et al* (Ed.).
- [22] G.V.Dunne, I.G.Halliday, Phys.Lett.**B193**,2(1987)247.
- [23] M.E.Peskin, D.V.Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Addison-Wesley, 1995).
- [24] C.Itzykson, J-B.Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, 1980).
- [25] C.Nash,*Relativistic Quantum Fields* (Academic Press, 1978).

- [26] O.V.Tarasov, *Connection between Feynman integrals having different values of the space-time dimension*, hep-th/9606018.
- [27] W.Hollik, *Precision Tests of Standard Model*, pag.37, (World Scientific, 1995) Ed.
- [28] E.E.Boos, A.I.Davydychev, *Theor.Math.Phys.* **89**,1,(1991)1052. A.I.Davydychev, *J.Math.Phys.* **32**,4(1991)1052; *J.Math.Phys.* **33**,1 (1991) 358.
- [29] A.T.Suzuki, A.G.M.Schmidt, *JHEP* **09** (1997)002.
- [30] A.T.Suzuki, A.G.M.Schmidt, a ser publicado no *European Physical Journal C* (1998) (antigo *Z.Phys.C*).
- [31] A.I.Davydychev, *Proc. International Conference "Quarks-92"* (World Scientific, 1993); hep-ph/9307323.
- [32] L.D.Landau, E.M.Lifschitz, *Relativistic Quantum Theory* (Pergamon Press, 1971).
- [33] P.Appel, J. Kampé de Fériet, *Fonctions Hypergéométriques et Hypersphériques. Polynomes D'Hermite* (Gauthiers-Villars, Paris 1926).
- [34] B. de Tollis, *Nuovo Cim.***32**, (1964)757; **35**, (1965)1182.
- [35] A.I.Davydychev, *International Symposium on Radiative Corrections CRAD96* (Cracow, 1996); hep-ph/9710510.
- [36] N.I.Ussyukina, A.I.Davydychev, *Phys.Lett.***B332** (1994)159.
- [37] Y.L.Luke, *Special Functions and Their Approximations* (Vol.I, Academic Press, 1969).
- [38] L.M.Brown, R.P.Feynman, *Phys.Rev.***85** (1952) 231.
- [39] A.Erdélyi, *Proc.Roy.Soc.Edinburgh*, **A 62**(1948)378.
- [40] A.T.Suzuki,A.G.M.Schmidt, submetido ao *J.Math.Phys.* (1997);hep-th/9707187.

- [41] N.N.Lebedev, *Special Functions and Applications* (Pretience-Hall, 1965).
- [42] F.J.Dyson, Phys.Rev.**75** (1949) 1736.
- [43] R.J.Eden, Proc.Roy.Soc.**A210**(1952)388.
- [44] I.T.Todorov, *Analytic Properties of Feynman Diagrams in Quantum Field Theory* (Pergamon Press, 1971).
- [45] D.B.Fairlie,P.V.Landshoff,J.Nutall,J.C.Polkinghorne, J.Math.Phys.**3**,4(1962)594.
- [46] L.Ryder, *Quantum Field Theory* (Cambridge Univ.Press, 1985).
- [47] A.T.Suzuki, A.G.M.Schmidt, submetido ao Phys.Lett.**B** (1997).
- [48] A.T.Suzuki, A.G.M.Schmidt, in preparation (1997).
- [49] E.D.Rainville, *Special Functions* (Chelsea Pub.Co., 1960).
- [50] S.J.Hathrell, Ann.Phys.(N.Y.)**139** (1982)136.
- [51] M.Veltman, *Diagrammatica* (Cambridge Univ.Press., 1995).

