

DANIEL JOSÉ LAPORTE

REDUÇÃO DE VIBRAÇÕES E SUPRESSÃO DE SHIMMY DE TRENS DE POUSO
POR DESIGNAÇÃO DE MODOS VIA PSEUDO REALIMENTAÇÃO

ILHA SOLTEIRA
2021



DANIEL JOSÉ LAPORTE

**REDUÇÃO DE VIBRAÇÕES E SUPRESSÃO DE SHIMMY DE TRENS DE
POUSO POR DESIGNAÇÃO DE MODOS VIA PSEUDO REALIMENTAÇÃO**

Tese de Doutorado submetida à Faculdade
de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP
como parte dos requisitos para obtenção do
título de Doutor em Engenharia Mecânica.
Área: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Douglas Domingues
Bueno
Coorientador: Prof. Dr. Vicente Lopes
Júnior

ILHA SOLTEIRA

2021



FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

L315r Laporte, Daniel José.
Redução de vibrações e supressão de shimmy de trens de pouso por designação de modos via pseudo realimentação / Daniel José Laporte. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2021
108 f. : il.


Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Mecânica dos Sólidos, 2021

Orientador: Douglas Domingues Bueno

Coorientador: Vicente Lopes Júnior

Inclui bibliografia

1. Designação de parâmetros modais. 2. Modos de vibrar de trens de pouso. 3. Shimmy em trens de pouso. 4. Redução de vibrações. 5. Problemas inversos.


Raiane da Silva Santos

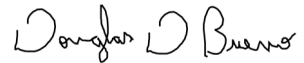
CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA TESE: Redução de vibrações e supressão de shimmy de trens de pouso por designação de modos via pseudo realimentação

AUTOR: DANIEL JOSÉ LAPORTE
ORIENTADOR: DOUGLAS DOMINGUES BUENO
COORIENTADOR: DOUGLAS DOMINGUES BUENO
COORIENTADOR: VICENTE LOPES JUNIOR

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Doutor em ENGENHARIA MECÂNICA, área: Mecânica dos Sólidos pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. DOUGLAS DOMINGUES BUENO (Participação Virtual)
Departamento de Matemática / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

A handwritten signature in black ink that reads 'Douglas D Bueno'.

Prof. Dr. RODRIGO NICOLETTI (Participação Virtual)
Departamento de Engenharia Mecânica / Escola de Engenharia de São Carlos - USP

Prof. Dr. MARCO HIROSHI NAKA (Participação Virtual)
Pró-reitoria de Pesquisa, Inovação e Pós-graduação / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso do Sul - IFMS

Prof. Dr. TOBIAS SOUZA MORAIS (Participação Virtual)
Departamento de Engenharia Mecânica / Universidade Federal de Uberlândia - UFU

Prof. Dr. PAULO JOSÉ PAUPITZ GONÇALVES (Participação Virtual)
Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Bauru - UNESP

Ilha Solteira, 16 de julho de 2021

Dedico esta tese de doutorado aos meus queridos pais, Vera e José (in memoriam). À minha querida mãe, meus mais sinceros agradecimentos por ter feito de tudo por mim, com todo o carinho e amor. Por ter sido minha primeira professora, por me levar à escola de circular todos os dias, ou por me fazer companhia, enquanto esperávamos o ônibus em frente ao Borba, para que eu pudesse dar meus primeiros passos rumo ao conhecimento. Por ter sempre me incentivado em todas as minhas escolhas na vida e por ser esta pessoa tão doce e maravilhosa. Ao meu querido pai, de quem eu herdei a profissão de Engenheiro Mecânico, e de quem eu sempre tive muito orgulho e admiração, certamente o maior engenheiro que eu já conheci. Dedico esta tese a ele, por ter sido esse grande exemplo de pai, de ser humano digno e sobretudo, honesto. Por ter sido um exemplo de garra, dedicação, luta e amor pela profissão. Se eu cheguei até aqui, foi porque sempre estive no colo de gigantes! Obrigado minha mãe e meu pai!

Agradecimentos

Primeiramente à Deus, por sempre colocar em meu caminho pessoas maravilhosas.

Ao meu orientador, professor Dr. Douglas Domingues Bueno pela sua dedicação e apoio, fundamentais para este trabalho. E também por me ajudar a evoluir como pesquisador.

Ao professor Dr. Vicente Lopes Jr., pela confiança e por ter aceitado a orientação. Também por ter me apresentado ao professor Dr. Douglas Domingues Bueno, um ser humano incrível e pesquisador brilhante.

Ao professor Dr. Álvaro Costa Neto, pela orientação no trabalho que precedeu e embasou esta tese e pelas sempre valiosas discussões. E é claro, pelo grande amigo que sempre foi.

Ao então acadêmico de engenharia mecânica, da faculdade de engenharia de Ilha Solteira da UNESP, hoje engenheiro mecânico, Renan Cavenaghi, pela ajuda na construção da bancada de ensaios experimentais, na configuração do aparato de instrumentação, e pela companhia durante a fase de construção e ensaios com a bancada.

Ao Programa de Pós graduação em Engenharia Mecânica da UNESP-Ilha Solteira, pelo apoio institucional.

À Universidade Católica Dom Bosco (UCDB) por ceder a estrutura física do laboratório de metal mecânica para a construção da bancada experimental. E por fomentar, por meio de projeto de iniciação científica, custos com peças e mão-de-obra de técnico mecânico para a fabricação da bancada.

Ao técnico mecânico da UCDB, Edson Arguelho, pela usinagem das peças componentes da bancada experimental.

Aos acadêmicos de PIBIC da UCDB, João Menegas, Raphael Flôres, Caio Dias e Lucas Previtali pela ajuda na construção e ensaios com a bancada experimental.

Aos colegas professores da UCDB, em especial ao Dr. Mauro Conti Pereira, a quem sou muito grato por ter confiado em mim, e dado a oportunidade de compor o corpo docente da universidade.

Ao amigo Sérgio Vasconcelos (O Lampião), companheiro de ciclismo, por ter cedido sua esteira ergométrica, que serviu de base para a concepção da bancada experimental.

Aos meus pais, Vera e José (*in memoriam*), cuja a existência em minha vida é uma bênção divina, agradeço a Deus por tê-los colocado em minha vida. Vocês são os melhores pais que Deus poderia ter escolhido para mim. Obrigado por me dar muito mais do que dinheiro, mas que, por terem sido grandes exemplos de genitores e de seres humanos, dignos e honestos, me permitiram evoluir moralmente, profissionalmente e espiritualmente, e chegar até aqui. Um agradecimento especial ao meu querido pai, José Laporte, que certamente está junto ao Pai e de tudo que há de mais nobre e sagrado no mundo. Obrigado por sua companhia em todos esses 36 anos, por todos os ensinamentos, pelas grandes alegrias e por compartilhar algumas tristezas. Certamente o senhor está presente neste momento em minha vida, como sempre estive e sempre estará.

Aos meus queridos irmãos, Gisele e Marcel, vocês são fundamentais em minha vida, e tenham plena certeza que fizeram parte deste trabalho de doutorado. Obrigado por compartilharem os momentos mais felizes e recentemente o mais triste de nossas vidas, inerente à existência humana. Seguiremos nossas vidas juntos, unidos e felizes, como sempre fomos e sempre seremos para toda a eternidade. Como escreveu o poeta Vinícius de Moraes, em seu Poema de Natal:

“...De repente nunca mais esperaremos...

Hoje a noite é jovem; da morte, apenas

Nascemos, imensamente.”

À minha esposa amada, Denise, cuja admiração pela brilhante pesquisadora que é, me inspirou neste trabalho. Obrigado pelo apoio, principalmente nos momentos mais difíceis.

Ao meu querido filho Otto, agradeço pela sua existência e alegria contagiante, alimenta nossa alma e nos permite ir além.

*“ É junto dos bão que a gente fica mió”
(João Guimarães Rosa, Grande Sertão: Veredas)*

Resumo

Shimmy em trens de pouso é uma vibração autoexcitada e instável que deve ser evitada devido ao seu potencial catastrófico, gerando falhas estruturais ou mudança da trajetória de aeronaves durante pousos e decolagens. Além de atender diferentes requisitos de projeto, a especificação preliminar de um trem de pouso deve também implicar em dinâmica livre de shimmy. No entanto, comumente as equipes de engenharia precisam atualizar especificações iniciais, especialmente alterando distribuição de rigidez e amortecimento, para assegurar o projeto de um sistema estável. Neste sentido, o presente trabalho apresenta uma metodologia de projeto de trens de pouso baseada em designação de parâmetros modais. Em particular, a partir de uma especificação preliminar das propriedades mecânicas, a abordagem proposta permite calcular incrementos ou decrementos de rigidez e amortecimento locais do trem de pouso para se obter um modo de vibrar de interesse, além de frequência natural e fator de amortecimento, previamente especificados pelo analista. Assim, a estratégia permite redefinir propriedades mecânicas e, com isto, melhorar resposta vibratória e também tornar estável um trem de pouso em projeto. Os resultados demonstram que a metodologia é conveniente e prática para o projeto deste tipo de sistema.

Palavras-chave: Designação de Parâmetros Modais. Modos de Vibrar de Trens de Pouso. Shimmy em Trens de Pouso. Redução de Vibrações. Problemas inversos.

Abstract

Shimmy in landing gears is a self-excited and unstable vibration to be avoided due to its catastrophic potential, which can generate structural failures or change aircraft trajectory during the landing. The landing gear design must consider this phenomenon to design a shimmy free landing gear. However, usually engineers need to update a preliminary specification, mainly to change stiffness and damping spatial distribution to obtain a final stable final system. In this context, the present work introduces a new approach to design landing gears based on the modal parameters assignment. In particular, based on a preliminary design on the mechanical properties, the proposed approach allows one to compute increment of stiffness and damping coefficient to obtain a desired vibration mode, besides natural frequency and damping ratios previously defined by an analyst. The proposed strategy allows one to redesign the mechanical properties to improve vibration responses and stabilize the system. Numerical and experimental results demonstrate that the proposed approach is convenient and easy to be applied for designing this type of system

Keywords: Modal parameters assignment, Vibration modes of landing gears, Shimmy in landing gears, vibration reduction, inverse problems.

Lista de Figuras

1	Modelo de braço arrastado (vista superior), sendo c_y coeficiente de amortecimento lateral, k_y a rigidez lateral, c_ψ coeficiente de amortecimento em guinada e k_ψ rigidez de guinada.	25
2	Modelo de trem de pouso de Thota, sendo ϕ o grau de liberdade de rolagem, ψ o grau de liberdade de guinada e θ o grau de liberdade de arfagem, mantido fixo e igual a zero neste estudo	27
3	Representação do modelo de pneu de Von Schlippe, sendo $F_{k\lambda}$ a força lateral e $M_{k\alpha}$ o torque auto alinhante. Indicação do pneu não deformado (linha tracejada verde) e deformado (linha sólida vermelha).	28
4	Representação do contato pneu/pavimento para o modelo de pneu de Von Schlippe indicando em mais detalhes os parâmetros do modelo, como a deformação lateral λ_T , rigidez de deriva α e comprimento de relaxação σ	28
5	Modelo de Thota com do amortecedor de massa, sendo R é raio do pneu, l_g é a distância do solo à fixação do trem de pouso na fuselagem e k_m é rigidez da mola do amortecedor de massa.	30
6	Modelo geral de trem de pouso de nariz. Entradas e saídas.	34
7	Ilustração esquemática do subespaço vetorial \mathbb{V} (quadrilátero) com base geradora associada à especificação inicial do trem de pouso. Destaque para os autovetores desejado \mathbf{v}_i^d e sua projeção \mathbf{v}_i^p entre os possíveis autovetores de serem designados.	39
8	Ilustração de uma representação polar associada ao subespaço que contém os autovetores possíveis de serem designados.	47
9	Mapa de estabilidade do sistema do trem de pouso de braço arrastado, considerando $k_\psi = 1,0 \times 10^5$ (N/m)rad, $c_y = 520$ Ns/m, $c_\psi = 520$ Nms/rad, $m = 200$ kg, $I_z = 81$ kg m ² e $\sigma = 1,2$ m.	49
10	Resposta modal do trem de pouso de braço arrasto para configuração de projeto inicial, considerando uma condição inicial de ângulo de guinada de $0,1$ rad.	51

11	Ilustração associada ao subespaço que contém os autovetores possíveis de serem designados para o modelo de braço arrastado se $\lambda_1^d = -\Re(\lambda_1) + j\Im(\lambda_1)$. Resultado obtido para 2500 vetores do subespaço.	53
12	Comportamento de η_2 (associado ao modo 2) em termos de η_1 (associado ao modo 1) para o trem de pouso de braço arrastado.	54
13	Resposta modal do sistema reprojetoado, para condição inicial de ângulo de guinada de 0.1 rad.	56
14	Resposta modal do sistema inicial vs. sistema final, a uma condição inicial de ângulo de guinada de 0.1 rad.	57
15	Movimento de guinada para o trem de pouso de braço arrastado para uma condição inicial.	58
16	Valores máximos da força normal do pneu F_z para assegurar estabilidade em cada uma das velocidades do trem de pouso. Acima da curva o sistema é instável.	60
17	Resposta modal do sistema a uma condição inicial de ângulo de guinada de 0.1 rad	61
18	Ilustração associada ao subespaço que contém os autovetores possíveis de serem designados para o modelo de Thota se $\lambda_1^d = -\Re(\lambda_1) + j\Im(\lambda_1)$. Resultado obtido para 8000 vetores do subespaço.	62
19	Comportamento de η_2 (associado ao modo 2) em termos de η_1 (associado ao modo 1) para o trem de pouso de Thota.	63
20	Resposta modal do trem de pouso de Thota reprojetoado, para condição inicial de ângulo de guinada de 0.1 rad	64
21	Resposta modal do trem de pouso de Thota nas condições original e reprojetoado, para condição inicial de ângulo de guinada de 0.1 rad.	65
22	Resposta total de guinada para o trem de pouso de Thota, para condição inicial em ângulo de guinada.	66
23	Resposta modal do trem de pouso de Thota com inclusão de amortecedor de massa, para condição inicial em ângulo de guinada de 0.1 rad.	67
24	Ilustração associada ao subespaço que contém os autovetores possíveis de serem designados para o modelo de Thota com amortecedor de massa se $\lambda_2^d = -\Re(\lambda_2) + j\Im(\lambda_2)$. Resultado obtido para 8000 vetores do subespaço.	68
25	Comportamento de η_3 (associado ao modo 3) em termos de η_2 (do modo 2) para diferentes valores de η_1 (associado ao modo 1).	69
26	Resposta modal do trem de pouso de Thota com amortecedor, reprojetoado, para condição inicial em ângulo de guinada de 0.1 rad.	71

27	Resposta total de guinada do sistema a uma condição inicial de ângulo de guinada.	72
28	Comparação de força normal F_z dos modelos de Thota inicial (linha contínua) e reprojetoado (linha tracejada).	72
29	Fotografia do aparato de ensaios experimentais do trem de pouso.	73
30	Vista dos três principais corpos que compõem o trem de pouso.	74
31	Fotografias de componentes do sistema empregados para alteração da dinâmica estrutural: 1) barra de torção, 2) barra de flexão, 3) braços de articulação, 4) braço arrastado.	75
32	Indicação de coordenada da posição do CG do carro principal do trem de pouso em relação ao eixo de articulação para rolagem.	78
33	Posição do CG do carro principal em relação à haste de articulação em guinada.	79
34	Resposta do trem de pouso em movimento pendular em relação ao eixo de articulação de rolamento.	79
35	Fotografia do carro principal em posição de pêndulo para obtenção do momento de inércia em torno da haste de articulação.	81
36	Resposta da vibração livre do carro principal para um movimento pendular em torno de um eixo na direção da haste.	82
37	Resposta de rolagem ϕ ao impulso, com movimentos em guinada restringidos.	83
38	Resposta ao impulso nos GDL de Guinada ψ_1 e ψ_2 unidos, formando um único GDL.	84
39	Resposta ao impulso no GDL de Guinada ψ_2 do carro principal.	85
40	Modo dianteiro - vista superior esquemática do trem de pouso com ilustração do movimento dominante e da posição nodal.	86
41	Modo traseiro - vista superior esquemática do trem de pouso com ilustração do movimento dominante e da posição nodal.	87
42	Resposta temporal em rolagem ϕ (linha contínua com círculos), guinada ψ_1 (linha contínua) e guinada ψ_2 (linha tracejada) para dinâmica do modo dianteiro.	88
43	Espectro em frequência do movimento de rolagem no modo dianteiro.	88
44	Resposta temporal em rolagem ϕ (linha contínua com círculos), guinada ψ_1 (linha contínua) e guinada ψ_2 (linha pontilhada) para dinâmica do modo traseiro.	89
45	Espectro em frequência do movimento de rolagem no modo traseiro.	89

46	Respostas normalizadas do trem de pouso estável - experimentais (superior) e numéricas (inferior).	93
47	Análise de estabilidade do modelo numérico - parte real do autovalor para diferentes valores de rigidez de k_{ψ_1}	94
48	Resposta no tempo a um impulso após a troca da barra de flexão.	94
49	Fotografia do aparato experimental em detalhe da alteração da barra de flexão para exibir shimmy.	95
50	Respostas normalizadas do trem de pouso instável - experimentais (superior) e numéricas (inferior). Rolagem (linha contínua com círculos), guinada ψ_1 (linha contínua) e guinada ψ_2 (linha tracejada).	96
51	Ilustração associada ao subespaço que contém os autovetores possíveis de serem designados para o modelo numérico do aparato experimental se $\lambda_1^d = -0.06435 + j39.65638$	98
52	Ilustração associada ao subespaço que contém os autovetores possíveis de serem designados para o modelo numérico do aparato experimental para diferentes autovalores.	98
53	Resposta temporal dos modos do trem de pouso - modelo numérico - antes (inicial) de depois (final) da designação, para $V_e = 12 \text{ km/h}$	99
54	Resposta temporal do trem de pouso - modelo numérico: rolagem ϕ (linha contínua azul), guinadas ψ_1 (linha vermelha contínua fina) e ψ_2 (linha tracejada) para $V_e = 12 \text{ km/h}$	100

Lista de Tabelas

1	Dois autovetores da base \mathbf{L}_2 do subespaço para o trem de pouso de braço arrastado.	52
2	Autovetores desejado e designado para o trem de pouso de braço arrastado, normalizados em relação ao deslocamento lateral y para comparação.	55
3	Autovalores associados à dinâmica do trem de pouso de braço arrastado para os sistemas original e designado. Não são exibidos na mesma ordem.	55
4	Propriedades físicas do trem de pouso de braço arrastado para os sistemas original e reprojetoado.	58
5	Propriedades físicas e geométricas iniciais para o modelo de trem de pouso de Thota.	59
6	Autovetores desejado e designado, normalizados em relação ao ângulo de guinada ψ	64
7	Propriedades físicas do trem de pouso de Thota, para os sistemas original e reprojetoado.	65
8	Autovetores da base $\mathbf{L}_i = [\mathbf{L}_{(1)i} \ \mathbf{L}_{(2)i} \ \mathbf{L}_{(3)i}] = \mathbf{L}_2$ que gera o subespaço \mathbb{V} para o trem de pouso de Thota com amortecedor de massa, para $\lambda_2^d = -\Re(\lambda_2) + j\Im(\lambda_2)$	68
9	Autovetores desejado e designado para o trem de pouso de Thota com amortecedor de massa, normalizados em relação elemento associado ao ângulo de guinada ψ para simplicidade de visualização.	70
10	Propriedades físicas para o trem de pouso de Thota com amortecedor de massa para os sistemas original e reprojetoado.	71
11	Propriedades físicas e geométricas preliminares obtidas para o modelo de trem de pouso do aparato experimental.	85
12	Comparação de frequências modais para o trem de pouso suspenso: numérico e experimental - valores preliminares.	90
13	Coeficientes modais do modelo para guinada em relação à rolagem: numérico e experimental - valores preliminares.	90
14	Propriedades físicas e geométricas para o modelo correlacionado do trem de pouso ensaiado.	91

15	Comparação de frequências modais para o trem de pouso suspenso: numérico e experimental - valores finais.	91
16	Coefficientes modais do modelo para guinada em relação à rolagem: numérico e experimental - valores finais.	91
17	Propriedades físicas e geométricas para a dinâmica do pneu.	92

Conteúdo

1	Introdução	17
1.1	Shimmy em Trem de Pouso	17
1.2	Influência da Dinâmica de Pneus no Shimmy	18
1.3	Estratégias de Projeto de Trens de Pouso	20
1.4	Objetivos do Trabalho	22
1.5	Contribuições Alcançadas	22
1.6	Organização do Trabalho	23
2	Modelos Dinâmicos de Trem de Pouso	24
2.1	Trem de Pouso de Braço Arrastado	24
2.2	Trem de Pouso de Thota	26
2.2.1	Modelo de Thota com Inclusão de absorvedor dinâmico	29
3	Designação de Modos de Trem de Pouso	33
3.1	Pseudo Controle por Retroação de Saídas	33
3.1.1	Designação de Modos de Vibrar via Pseudo Realimentação de Saídas	35
3.1.2	Pseudos Ganhos de Controle	41
3.1.3	Designação Exata e Inexata	44
3.2	Especificação do Autovetor e Ilustração Associada ao Subespaço	45
3.2.1	Ilustração Associada ao Subespaço	46
4	Resultados Numéricos e Discussões	48
4.1	Modelo de Braço Arrastado	48
4.2	Modelo de Thota	58
4.3	Modelo de Thota com Amortecedor de Massa	67
5	Resultados Experimentais	73
5.1	Modelagem do Aparato Experimental	75
5.2	Modelo Dinâmico e Aparato Experimental	77
5.2.1	Inércias, Rigidezes e Coeficientes de Amortecimento	78
5.2.2	Teste de Vibrações com o Trem de Pouso Suspenso	86

5.3	Aplicação da Metodologia Proposta	91
6	Considerações Finais	101
6.1	Sugestões para Trabalhos Futuros	102
	REFERENCES	104

1 Introdução

Neste capítulo apresenta-se uma breve descrição do contexto da tese, um histórico de pesquisas prévias envolvendo shimmy, além de aplicações da teoria de designação de modos de vibrar, permitindo-se definir os modos mais adequados para o desempenho de vibração de determinado sistema. Ainda, o capítulo apresenta os objetivos, as contribuições alcançadas, e uma sucinta descrição da organização deste texto.

1.1 Shimmy em Trem de Pousos

Segundo [Hartog \(1985\)](#), a percepção e descoberta do fenômeno de shimmy em sistemas de direção ocorreu na década de 1930, notadamente em veículos de passeio, quando ao longo dos anos os fabricantes reduziram a rigidez vertical dos pneus e, conseqüentemente, a lateral, visando melhoria de conforto. Desde então, são investigadas e desenvolvidas diferentes soluções para eliminação ou atenuação do fenômeno, especialmente nas etapas de desenvolvimento de novos veículos de transporte.

Em particular para o transporte aéreo, de acordo com [Xue et al. \(2012\)](#), cerca de 60% dos acidentes com aeronaves são devidos a problemas com trens de pousos, principalmente envolvendo fadiga de elementos. Além da vibração em translado, esforços mecânicos envolvidos na dinâmica de pousos e decolagens, especialmente com incidência de escorregamento lateral, são também determinantes na operação destes dispositivos ([LOK; PAUL; UPENDRANATH, 2014](#)). Neste contexto, [Xue et al. \(2012\)](#) discutem as cargas durante pousos e decolagens empregando um modelo em dinâmica de multicorpos para obter condições de contorno que são aplicadas para modelos numéricos de limites à fadiga, descritos pelo método do Elementos Finitos.

Além da dinâmica de resposta vibratória, o shimmy tem importante responsabilidade na falha de componentes mecânicos de trens de pousos, pois trata-se de um fenômeno de vibração autoexcitada, definindo uma condição de instabilidade, conforme destacam [Valk and Pacejka \(1993\)](#). Os autores discutem relatos do acidente ocorrido com uma aeronave Fokker 100, no ano de 1989. As informações dos tripulantes do veículo indicam que o trem de pousos principal quebrou após intensa vibração sentida na cabine. Assim, considerando os relatos com indícios da ocorrência de shimmy, os autores elaboraram um modelo dinâmico daquele trem de pousos para investigar a ocorrência. No trabalho verificam que o modo de vibrar de torção em guinada foi responsável pelo acidente no

aeroporto de Genebra, na Suíça. Os resultados indicaram que a estabilidade do sistema apresentava significativa sensibilidade ao amortecimento, tornando o sistema dependente da capacidade do pneu dissipar a energia do movimento. No entanto, a partir de 70 m/s, a capacidade de dissipação tornava-se insuficiente para suprimir o fenômeno. Neste sentido, [Kewley et al. \(2016\)](#) discutem que a predição da capacidade dissipativa de trens de pouso pode depender de fatores adicionais, como por exemplo a fuselagem. Os autores consideram um modelo dinâmico com um grau de liberdade para descrever o movimento da fuselagem, e concluem através de análises de bifurcações que existe influência na estabilidade de um trem de pouso de nariz.

Por tratar-se de um fenômeno indesejável na operação de veículos aéreos, diferentes estratégias podem ser adotadas para supressão do shimmy em trens de pouso. A mais comum é a aplicação de amortecedores viscosos, com a finalidade de dissipar a energia do movimento e manter o sistema estável. No trabalho de [Arreaza, Behdian and Zu \(2016\)](#) tem-se respostas temporais e análises de estabilidade para duas aeronaves comerciais e uma proposta de amortecedor de shimmy formulado com uma modelagem linear. Além de aplicações envolvendo este tipo de amortecedor, verifica-se comumente na literatura a utilização de amortecimento de Coulomb, visando aumentar a dissipação de energia mecânica, como destaca [Inoue \(2017\)](#). Uma estratégia alternativa, também investigada por pesquisadores para supressão de shimmy, envolve utilização de dispositivos *inerters*, que basicamente são dispositivos com capacidade dissipativa proporcional a aceleração do sistema, em vez de velocidade, como tipicamente funcionam os amortecedores viscosos ([Liu; Chen; Tian, 2015](#); [LI; JIANG; NEILD, 2017a](#); [LI et al., 2017b](#); [Zhang et al., 2018](#)).

1.2 Influência da Dinâmica de Pneus no Shimmy

Desde a década de 1950 é consenso entre os pesquisadores a importância do entendimento do comportamento dinâmico do pneu, e o estudo de sua influência no fenômeno de shimmy ([MORELAND, 1954](#)). Naqueles anos foram propostos os principais modelos de pneus que estão em uso até a atualidade. Por exemplo, [Schilippe and Dietrich \(1941\)](#), que representam o comportamento do contato do pneu com o pavimento através de uma corda esticada, com a rigidez lateral do pneu também representada. [Pacejka \(1966\)](#) mostra uma revisão detalhada de modelos de pneu publicados até aquele ano, e que são considerados como os mais relevantes, conforme esclarecido na literatura ([BESSELINK, 2000](#)).

[Besselink \(2000\)](#) mostra um estudo de estabilidade com a aplicação de alguns modelos de pneu. O autor mostra a sensibilidade da dinâmica do sistema, considerando separadamente cada modelo, para representar a instabilidade. Ele mostra, por exemplo, que

o uso do modelo simples de tangente gera predição dinâmica tipicamente conservadora, indicando instabilidades mesmo quando outros modelos predizem.

Diversos outros trabalhos têm discutido análise de shimmy em trens de pouso. [Pacejka and Besselink \(1997\)](#) mostram uma maneira alternativa para o comprimento de relaxação visando a representação da resposta transiente do pneu. Para isto, incluem uma massa no contato do pneu com o pavimento, adicionando-se, assim, mais um grau de liberdade ao sistema.

Em um estudo relativamente recente, [Thota et al. \(2010\)](#) mostram, através de dados empíricos, a relação entre a pressão do pneu e cada parâmetro que influencia no shimmy, como o comprimento de relaxação, rigidez de deriva, torque autoalinhante e amortecimentos lateral e de guinada. Os autores apresentam análises da bifurcação de Hopf para o parâmetro da velocidade de translação do trem de pouso, a força vertical e a pressão no pneu. Como principal conclusão do estudo, tem-se que para maior pressão no pneu, mais estáveis se tornam os modos de vibrar.

Em outro trabalho, [Thota, Krauskopf and Lowenberg \(2012\)](#) mostra estudos de bifurcações utilizando dois parâmetros no plano de bifurcação, sendo a velocidade e força normal nos pneus. São analisados a influência da distância de separação entre os pneus e os efeitos giroscópicos, modificando-se a inércia dos elementos rotativos. A conclusão é que existe bastante influência destes parâmetros no formato dos modos de vibrar, particularmente os lateral e de torção. Ainda em relação a estudos de bifurcação, há que se ressaltar os trabalhos de [Tartaruga et al. \(2017\)](#), [Tartaruga et al. \(2016\)](#). No trabalho de 2017, os autores utilizam um modelo analítico de três graus de liberdade. Neste trabalho, também se avalia a probabilidade de ocorrência de shimmy, baseado no mapa de parâmetros dado pelo estudo de bifurcação de Hopf. No segundo trabalho, publicado um ano antes, utilizam um modelo de multicorpos. Em ambos os trabalhos analisam a influência de parâmetros considerados mais relevantes, como a velocidade da aeronave e força vertical no pneu, bem como a análise de sensibilidade de cada parâmetro em induzir a instabilidade.

[Beckers et al. \(2019\)](#) realiza análises de bifurcação de Hopf através de um modelo de multicorpos, com a representação da estrutura via método dos Elementos Finitos. Os autores utilizam como parâmetros de bifurcação a velocidade e força normal nos pneus. Eles discutem a sensibilidade de parâmetros de projeto, como rigidezes amortecimentos e comprimento de braço arrastado, com a curva de bifurcação e, conseqüentemente, a estabilidade do trem de pouso.

Outro importante trabalho encontrado na literatura sobre análises de bifurcação foi desenvolvido por [Howcroft et al. \(2015\)](#). Os autores consideram um modelo similar ao apresentado por [Tartaruga et al. \(2017\)](#), e apresentam análises diferentes tipos de

bifurcação, como nó-sela (*Saddle-node*), *Periodic doubling* e Torus e, também, de Hopf. Ainda, avaliam a dinâmica do sistema considerando não linearidades tipo folga mecânica.

1.3 Estratégias de Projeto de Trens de Pouso

O procedimento comum em projetos de trens de pouso de aeronaves é se estabelecer um conjunto de parâmetros físicos e geométricos para atender requisitos de pouso de decolagem, visto a função principal destes sistemas (RAHMANI; BEHDIAN, 2018; THOTA; KRAUSKOPF; LOWENBERG, 2009). Esta definição inicial compõe o que pode ser nomeado como projeto preliminar, ou mesmo, pré-projeto. No entanto, para se evitar o aparecimento de shimmy, modelos físico-matemáticos são utilizados já nestas etapas iniciais de projeto, a fim de se definir propriedades estruturais, como rigidezes e amortecimentos, que resultem em sistemas robustos em termos de shimmy, ou seja, livre da ocorrência deste fenômeno no envelope operacional de pouso e decolagem. Por exemplo, tem-se modelos simplificados, que consideram ângulos de inclinação e cáster, que permitem a predição da instabilidade, auxiliando o projetista definir um sistema seguro (TOURAJIZADEH; ZARE, 2016; ORLANDO; ALAIMO, 2017). Não obstante, sob o ponto de vista prático de engenharia, tipicamente não é tarefa trivial se estabelecer quais alterações devem ser feitas, e em quais regiões do trem de pouso, para eliminar a instabilidade se por acaso o sistema apresenta shimmy nas condições de sua especificação preliminar.

Para simplificar o processo de reprojeto de um trem de pouso que preliminarmente apresenta shimmy, visando se redefinir propriedades físicas como rigidez e amortecimento para tornar o sistema estável, tem-se tipicamente um problema inverso. Assim, neste trabalho se apresenta uma nova abordagem a partir da adaptação de uma formulação de controle por realimentação de saídas, comumente usada para se calcular forças de controle, para modificar propriedades estruturais de trens de pouso. A estratégia é de uso conveniente predominantemente em fases iniciais de projeto, a partir de uma definição inicial que apresente shimmy, pois permite obter sistemas livres do fenômeno. A técnica, conforme se esclarece neste texto, é baseada na especificação de parâmetros modais desejados, através de autovalores e autovetores associados à dinâmica do sistema. Este tipo de abordagem é denominada na literatura como designação de modos de vibrar, ou EAT, do inglês *Eigenstructure Assignment Theory*.

Técnicas de EAT têm sido profundamente estudadas desde a segunda metade do século XX, resultando em trabalhos memoráveis em designação de estruturas próprias por retroalimentação completa de estados, como pode ser visto no importante trabalho de Moore (1976), sendo o primeiro a demonstrar a liberdade de se escolher um arbitrário

arranjo de autovetores desejados, além da formulação para se encontrar uma matriz de ganhos de controle que permite se calcular forças de controle capazes de gerar um comportamento no sistema compatível com a configuração desejada, a partir da realimentação da planta. Na mesma década, importantes contribuições em OEAT (do inglês *Output-based EAT*) foram publicadas, como por exemplo [Srinathkumar \(1978\)](#), que mostra o subespaço que contém os autovetores possíveis de se designar, e que estão relacionados ao autovalor escolhido para ser designado. O autor também mostra o número de estruturas próprias e a dimensão do autovetor que podem ser designados para determinado vetor de entradas. OEAT é comumente aplicada em projetos de sistemas de controle de aeronaves, como mostram os trabalhos de [Sobel and Shapiro \(1985a\)](#), [Andry, Shapiro and Chung \(1983\)](#), entre outros.

EAT aplicado a sistemas de controle é um tema relevante e objeto de debate na comunidade científica. [Albostan and Gokasan \(2018\)](#) introduzem a aplicação de projeto robusto do controle de voo para a dinâmica lateral de um caça F-16. Nesta linha, EAT tem sido adaptada para se desenvolver metodologias de solução de problemas inversos em sistemas lineares. Neste sentido, e de forma semelhante à abordagem desenvolvida nesta tese, [Zhang, Ouyang and Yang \(2014\)](#) e [Zhang, Ye and Ouyang \(2016\)](#) desenvolvem uma método limitado a designar modos de vibrar de sistemas não amortecidos e pouco amortecidos. Os autores consideram um algoritmo para modificação as propriedades através de alterações nas matrizes de rigidez e massa. Assim, tem-se que os trabalhos destes autores, que avaliam sistemas massa mola, validam conceitualmente o uso adaptado da EAT para alterar características de um sistema, como é particularmente discutido para trens de pouso neste presente trabalho.

Diante deste contexto, o presente trabalho apresenta uma adaptação da teoria de designação de modos de vibrar para se redefinir propriedades locais de rigidez e amortecimento de trens de pouso, visando reduzir vibrações e estabilizar o sistema. Para isto, realiza-se designação de autovalor e autovetores, associados à dinâmica vibratória, usando um conceito de pseudo realimentação. A formulação é desenvolvida para uma designação exata, que consiste em designar de maneira exata 2 modos de vibrar reais (modos super amortecidos), ou 1 modo de vibrar complexo (modo sub amortecido). Também, desenvolve-se a formulação para uma designação inexata, permitindo a designação aproximada de um número maior de modos (autovetores) e amplitudes modais (elementos nos autovetores), limitados pelo Teorema de [Srinathkumar \(1978\)](#).

A metodologia apresentada permite modificar as propriedades de trens de pouso nas fases iniciais do projeto, a partir de uma especificação preliminar do sistema, através da definição de parâmetros modais definidos pelo projetista. Pode-se definir frequências e fatores de amortecimento (a partir da designação de autovalores), além de modos de vibrar (a partir da designação de autovetores), de interesse, que permitem reconfigurar o

sistema para apresentar menor nível de vibrações (especialmente em velocidades próximas do shimmy) e, também, suprimir o shimmy. A abordagem determina novos valores de propriedades físicas locais do trem de pouso, alterando rigidezes e coeficientes de amortecimento, designando então a dinâmica modal escolhida pelo projetista. A solução da técnica proposta envolve o conceito de pseudo realimentação de saídas, conforme discutido neste texto.

1.4 Objetivos do Trabalho

O principal objetivo deste trabalho é apresentar uma formulação de designação de modos de vibrar para se alterar localmente rigidez e amortecimento estruturais de trens de pouso visando supressão de shimmy e redução de níveis de vibração.

Destacam-se entre os objetivos secundários:

- Definição dos modos de vibrar mais adequados para a supressão do shimmy e redução dos níveis de vibração em trens de pouso;
- Comprovar a metodologia de pseudo realimentação proposta a partir de ensaios experimentais.

1.5 Contribuições Alcançadas

A principal contribuição desta tese é adaptação da teoria de designação de modos de vibrar, que originalmente é aplicada em sistemas em malha fechada, para se obter incrementos ou decrementos em parâmetros físicos de um modelo de trem de pouso, visando à redução de vibrações e supressão de shimmy, segundo a designação de modos de vibrar mais adequados para a dinâmica do trem de pouso.

Exemplos numéricos e experimentais comprovam a eficácia do método proposto nesta tese, e evidenciam sua importância como uma ferramenta auxiliar para o projeto de trens de pouso.

Vale destacar que a metodologia desenvolvida neste trabalho de doutoramento pode ser estendida a outros problemas lineares, ou passíveis de linearização, porquanto basta a definição de modos de vibrar mais adequados para a dinâmica de determinado sistema e sua designação baseada no método proposto.

A partir dos resultados obtidos foi publicado o artigo científico citado a seguir:

Laporte, D.J., Lopes Jr., V. e Bueno, D.D., **An approach to Reduce Vibration and Avoid Shimmy on Landing Gears based on an Adapted Eigestructure**

Assignment Theory, *Meccanica*, 55, 7-17, 2020.

<https://link.springer.com/article/10.1007/s11012-019-01101-4>.

1.6 Organização do Trabalho

Este documento está organizado na seguinte forma:

- **Capítulo 1:** introdução com breve revisão bibliográfica, objetivo, contribuições e organização do trabalho;
- **Capítulo 2:** principais modelos de trens de pouso, com apresentação das equações de movimento.
- **Capítulo 3:** metodologia proposta para projeto de shimmy via designação inexata e exata de modos, com introdução do conceito de pseudo realimentação.
- **Capítulo 4:** simulações computacionais para a metodologia proposta para o caso linear. Resultados para análises com modelos linearizados e resultados experimentais devem ser incluídos na versão final da tese.
- **Capítulo 5:** apresenta resultados experimentais obtidos com um aparato desenvolvido para representar a configuração de um trem de pouso típico, em escala de laboratório.
- **Capítulo 6:** apresenta as considerações finais e sugestões para trabalhos futuros.

2 Modelos Dinâmicos de Trem de Pouso

Este capítulo apresenta alguns modelos típicos de trens de pouso, com destaque para a análise de estabilidade, também discutindo os principais parâmetros que afetam a dinâmica destes sistemas.

Os sistemas investigados nesta tese são descritos por representações no espaço de estados, conforme apresenta a Eq. (1), na qual \mathbf{x} é o vetor de estados, \mathbf{F} é a matriz dinâmica, \mathbf{G} é a matriz de entradas, \mathbf{u} é o vetor de entradas, \mathbf{y} é o vetor de saídas e \mathbf{H} é a matriz de saídas.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{H}\mathbf{x}(t)\end{aligned}\tag{1}$$

Também, conforme se discute no Capítulo 3, o vetor de entradas é escrito em termos das saídas através de uma matriz de pseudos ganhos de controle, ou seja,

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{y}(t)\tag{2}$$

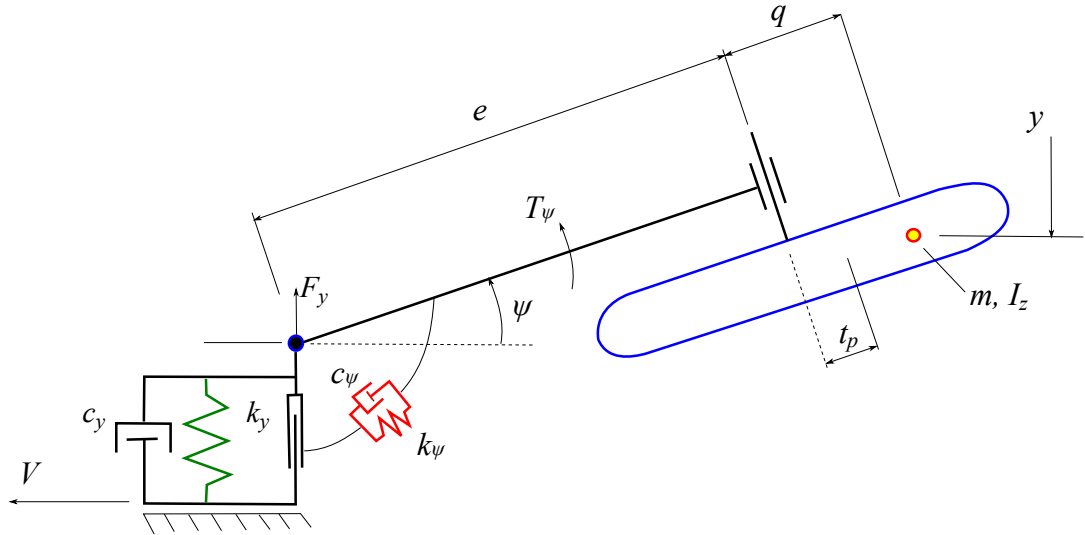
Esta matriz \mathbf{K} de pseudos ganhos é similar a matriz convencional de controle (OGATA, 1990). No entanto, em vez de valores que combinados aos estados (ou saídas) do sistema geram forças de controle, contêm incrementos e decrementos de propriedades mecânicas, conforme se discute no Capítulo 3.

2.1 Trem de Pouso de Braço Arrastado

Nesta seção apresenta-se sucintamente as equações de movimento para um modelo de trem de pouso de braço arrastado, ilustrado pela vista superior de um diagrama esquemático mostrado na Fig. 1. Neste modelo, V é a velocidade de translação do trem de pouso, F_y é pseudo força lateral de controle, T_ψ é o pseudo torque de controle aplicado no sentido de guinada, e é comprimento do braço arrastado, q a posição longitudinal do centro de massa do conjunto pneu, roda, freio e parte da suspensão em relação ao centro do pneu, t_p é a distância do centro do pneu até o ponto em que a força lateral é aplicada no pneu (do inglês *pneumatic trail*), m é a massa do conjunto roda, pneu, freio e parte da suspensão, I_z o momento de inércia deste conjunto citado anteriormente, em relação ao seu centro de massa. O modelo é definido pelos graus de liberdade y e ψ , que descrevem respectivamente deslocamento lateral e ângulo de guinada, além de uma terceira equação

em termos do parâmetro α , que descreve a deriva no pneu (do inglês *slip angle*). A deriva no pneu corresponde ao ângulo de deriva, e trata-se do ângulo entre as trajetórias da roda e a do pneu.

Figura 1 – Modelo de braço arrastado (vista superior), sendo c_y coeficiente de amortecimento lateral, k_y a rigidez lateral, c_ψ coeficiente de amortecimento em guinada e k_ψ rigidez de guinada.



Fonte: Adaptado de [Besselink \(2000\)](#)

O vetor de estados para este modelo é definido pela Eq. (3). A matriz dinâmica 5×5 (Eq. 4) é escrita em termos do sistema físico de coordenadas, que torna mais simples a definição da matriz de pseudo ganhos de controle. As matrizes de entrada e saída são apresentadas na Eq. 5, e detalhes adicionais da modelagem podem ser encontrados na referência [Besselink \(2000\)](#).

$$\mathbf{x}(t) = \{\dot{y}(t) \ y(t) \ \dot{\psi}(t) \ \psi(t) \ \alpha\}^T \quad (3)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{-c_y}{m} & \frac{-k_y}{m} & \frac{-c_y e_t}{m} & \frac{-k_y e_t}{m} & \frac{C_{f\alpha}}{m} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-c_y e_t}{I_z} & \frac{-k_y e_t}{I_z} & \frac{(-c_y e_t^2 + c_\psi)}{I_z} & \frac{(-k_y e_t^2 + k_\psi)}{I_z} & \frac{C_{f\alpha}(q - t_p)}{I_z} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{\sigma} & 0 & \frac{-(q + a)}{\sigma} & \frac{V}{\sigma} & \frac{-V}{\sigma} \end{bmatrix} \quad (4)$$

sendo σ é o comprimento de relaxação e $C_{f\alpha}$ a rigidez de deriva e $e_t = e + q$.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{I_t} & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & \frac{1}{I_t} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & e_t & 0 \\ 1 & 0 & e_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

2.2 Trem de Pouso de Thota

O modelo de trem de pouso de Thota é ilustrado pela Fig. 2. Nesta representação o deslocamento lateral y do modelo de braço arrastado é substituído pelo ângulo de rolagem $\phi(t)$. Também, a formulação é dependente do parâmetro λ_T , que representa um deslocamento lateral do contato do pneu com o solo e, então, o vetor de estados do sistema é definido pela Eq. (6).

$$\mathbf{x}(t) = \{\psi(t) \quad \dot{\psi}(t) \quad \phi(t) \quad \dot{\phi}(t) \quad \lambda_T(t)\}^T \quad (6)$$

Este modelo é a base da formulação empregada em diversos trabalhos, como por exemplo (THOTA; KRAUSKOPF; LOWENBERG, 2012; TARTARUGA *et al.*, 2016; TARTARUGA *et al.*, 2017; RAHMANI; BEHDIAN, 2018; RAHMANI; BEHDINAN, 2019a; RAHMANI; BEHDINAN, 2019b), que apresentam pequenas diferenças entre si, como por exemplo o modelo de pneu, inclusão do ângulo de ataque ou inclusão de amortecedor de shimmy.

As equações de movimento do sistema são apresentadas no trabalho de Thota, Krauskopf and Lowenberg (2012).:

$$I_z \ddot{\psi} + k_\psi \psi + c_\psi \dot{\psi} + M_{T_\psi} + M_{Z_\psi} = 0$$

$$I_x \ddot{\phi} + k_\phi \phi + c_\phi \dot{\phi} + M_{T_\phi} + M_{Z_\phi} = 0 \quad (7)$$

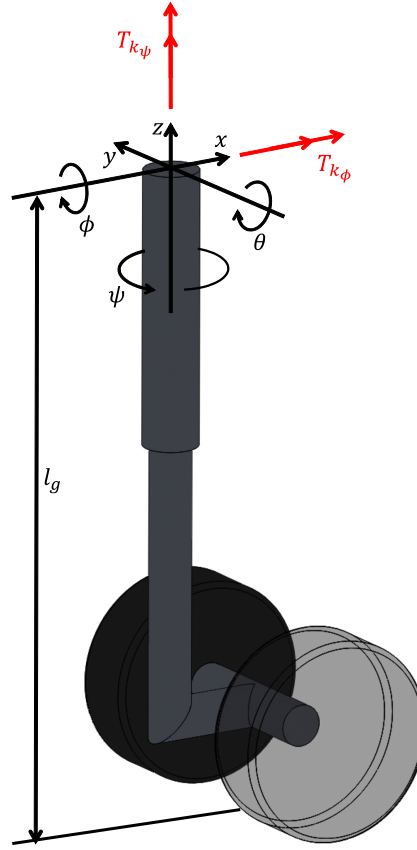
$$\dot{\lambda} + \frac{V}{L} \lambda - V \psi \cos \theta - l_g \dot{\phi} - (e_t - h) \dot{\psi} \cos \theta = 0$$

sendo os momentos dados por:

$$M_{T_\psi} = [k_\alpha F_z \frac{\lambda}{L} + e_t (7k_\lambda F_z \frac{\lambda}{L}) + \frac{c_\lambda}{V} \dot{\psi}] \cos \theta \quad (8)$$

$$M_{Z_\psi} = -F_z e_t \psi \cos \theta \sin \theta \quad (9)$$

Figura 2 – Modelo de trem de pouso de Thota, sendo ϕ o grau de liberdade de rolagem, ψ o grau de liberdade de guinada e θ o grau de liberdade de arfagem, mantido fixo e igual a zero neste estudo



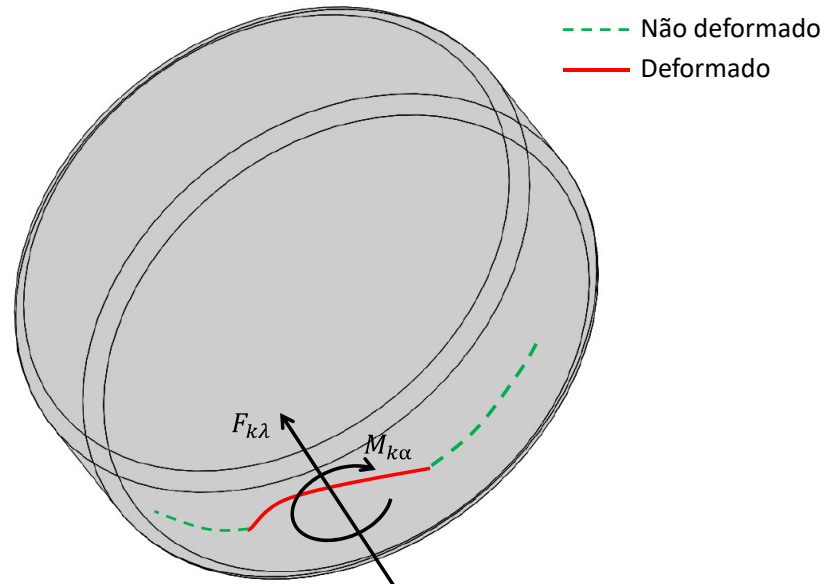
Fonte: Adaptado de [Rahmani and Behdian \(2018\)](#)

$$M_{T_\phi} = \left[k_\alpha F_z \frac{\lambda}{L} + e_t (7k_\lambda F_z \frac{\lambda}{L}) + \frac{c_\lambda}{V} \dot{\psi} \right] \sin\theta + l_g F_{k_\lambda} \cos\theta \quad (10)$$

$$M_{Z_\phi} = -F_z e_t \psi \cos^2\theta \quad (11)$$

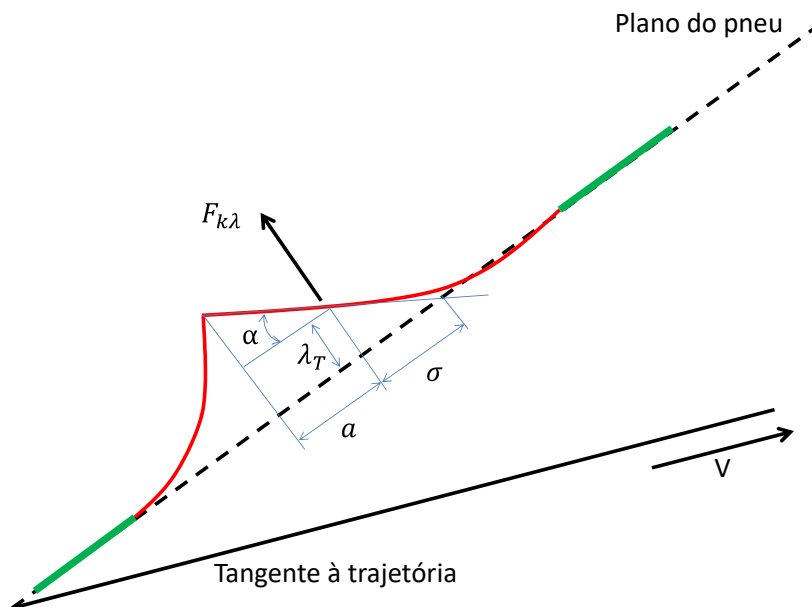
Esta formulação considera a representação do pneu de Von Schlippe, descrita por [Rahmani and Behdian \(2018\)](#). Neste modelo, conforme ilustra a Fig. 3, mostra os esforços no ponto de contato do pneu com o solo, força lateral F_{k_λ} e torque auto alinhante M_{k_α} . Informações adicionais são apresentadas na Fig. 4, que ilustram os outros parâmetros envolvidos na modelagem do pneu, como o comprimento de relaxação σ , deslocamento lateral λ_T e deriva lateral α .

Figura 3 – Representação do modelo de pneu de Von Schlippe, sendo $F_{k\lambda}$ a força lateral e $M_{k\alpha}$ o torque auto alinhante. Indicação do pneu não deformado (linha tracejada verde) e deformado (linha sólida vermelha).



Fonte: Adaptado de [Rahmani and Behdian \(2018\)](#)

Figura 4 – Representação do contato pneu/pavimento para o modelo de pneu de Von Schlippe indicando em mais detalhes os parâmetros do modelo, como a deformação lateral λ_T , rigidez de deriva α e comprimento de relaxação σ .



Fonte: Adaptado de [Rahmani and Behdian \(2018\)](#)

A partir das Eqs. (7) a (11), o modelo de Thota pode ser representado pela realização no espaço de estados tal que as matrizes dinâmica \mathbf{F}_T e de pseudo entradas \mathbf{G}_T são respectivamente apresentadas nas Eqs. (12) e (13). Também, a matriz de saídas \mathbf{G}_T (Eq. 14) é convenientemente definida para ser possível aplicar a metodologia proposta e apresentada no Capítulo 3.

$$\mathbf{F}_T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-k_\psi + F_z e_t \cos\theta \sin\theta}{I_z} & \frac{-c_\psi - (\frac{c_\lambda}{V}) \cos\theta}{I_z} & 0 & 0 & \frac{-F_z (k_\alpha + 7e_t k_\lambda) \cos\theta}{I_z \sigma} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{F_z e_t \cos^2\theta}{I_x} & \frac{-c_\lambda \sin\theta}{I_x V} & \frac{-k_\phi}{I_x} & \frac{-c_\phi}{I_x} & \frac{-F_z [k_\alpha \sin\theta + 7k_\lambda (\sin\theta + l_g \cos\theta)]}{I_x \sigma} \\ V \cos\theta & (e_t - a) \cos\theta & 0 & l_g & \frac{-V}{\sigma} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{G}_T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{I_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_x} & 0 \end{bmatrix}^T \quad (13)$$

$$\mathbf{H}_T = [\mathbf{I}_4 \quad \mathbf{0}_{4 \times 1}] \quad (14)$$

onde \mathbf{I}_4 é uma matriz identidade de ordem 4 e uma matriz coluna 4×1 de zeros.

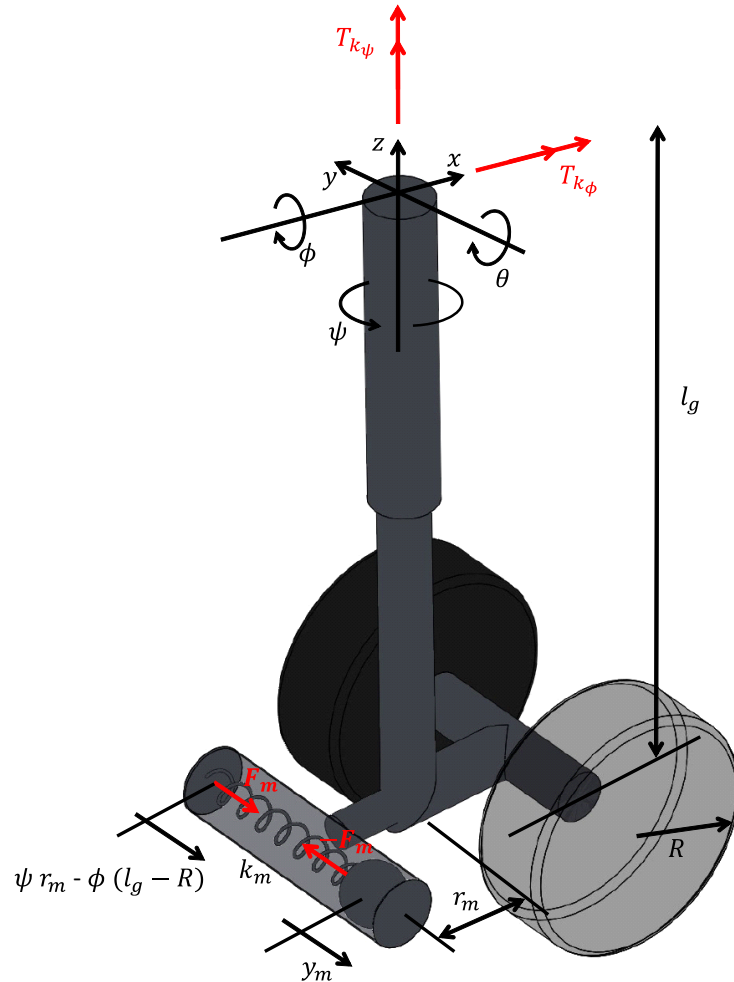
2.2.1 Modelo de Thota com Inclusão de absorvedor dinâmico

O modelo de Thota é também investigado com a inclusão de um absorvedor dinâmico ao modelo de haste, como mostra a Figura 5. Esta alteração adiciona mais um grau de liberdade (GDL) ao sistema, que é especialmente interessante para o método proposto, pois permite que mais duas propriedades físicas possam ser alteradas. Assim, aumenta-se a quantidade possível de pseudo entradas e, conseqüentemente, a dimensão do subespaço vetorial que contém os autovetores possíveis de serem designados para um mesmo autovalor definido, elevando então as possibilidades de soluções que resultam em melhorias nas características vibratórias e de estabilidade do trem de pouso.

As novas equações do movimento para o trem de pouso de Thota, considerando o amortecedor, são tais que

$$\begin{aligned} I_z \ddot{\psi} + k_\psi \psi + c_\psi \dot{\psi} + M_{T_\psi} + M_{Z_\psi} + M_{m_\psi} &= 0 \\ I_x \ddot{\phi} + k_\phi \phi + c_\phi \dot{\phi} + M_{T_\phi} + M_{Z_\phi} + M_{m_\phi} &= 0 \\ m \ddot{y}_m + k_m y_m - k_m r_m \psi + k_m (l_g - R) \phi + c_m \dot{y}_m - c_m r_m \dot{\psi} + c_m (l_g - R) \dot{\phi} &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Figura 5 – Modelo de Thota com do amortecedor de massa, sendo R é raio do pneu, l_g é a distância do solo à fixação do trem de pouso na fuselagem e k_m é rigidez da mola do amortecedor de massa.



Para estas equações, os momentos M_{T_ψ} , M_{Z_ϕ} , M_{T_ϕ} e M_{Z_ψ} permanecem conforme apresentados nas Eqs. (8) a (11). A equação que descreve o modelo matemático do pneu também se mantém conforme a terceira equação na Eq. (7). Também, os momentos em torno da fixação do trem de pouso à fuselagem na direção de guinada e rolagem são respectivamente definidos nas Eqs. (16) e (17), e são apresentadas nos trabalhos de Felício (1990), FRANKLIN, POWELL and EMAMI-NAEINI (2009).

$$M_{m_\psi} = -k_m r_m^2 \psi + k_m (l_g - R) r_m \phi + k_m r_m y_m - c_m r_m^2 \dot{\psi} + c_m (l_g - R) r_m \dot{\phi} + c_m r_m \dot{y}_m \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
M_{m_\phi} &= k_m r_m (l_g - R) \psi - k_m (l_g - R)^2 \phi - k_m (l_g - R) y_m \\
&+ c_m r_m (l_g - R) \dot{\psi} - c_m (l_g - R)^2 \dot{\phi} - c_m (l_g - R) \dot{y}_m
\end{aligned} \tag{17}$$

Assim, o vetor de estados para o modelo de Thota com inclusão de amortecedor de massa é dado por

$$\mathbf{x}(t) = \{\psi(t) \ \dot{\psi}(t) \ \phi(t) \ \dot{\phi}(t) \ y_m(t) \ \dot{y}_m(t) \ \lambda_T(t)\}^T \tag{18}$$

e, a partir das Eqs. (16) e (17), tem-se a representação no espaço de estados tal que as matrizes dinâmica \mathbf{F}_{TM} , de pseudo entradas e de saídas são apresentadas respectivamente nas Eqs. (19) a Eq. (22).

$$\mathbf{F}_{TM} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{21} & F_{22} & \frac{k_m(l_g-R)r_m}{I_z} & \frac{c_m(l_g-R)r_m}{I_z} & \frac{k_m r_m}{I_z} & \frac{c_m r_m}{I_z} & F_{27} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} & \frac{-k_m(l_g-R)}{I_x} & \frac{-c_m(l_g-R)}{I_x} & F_{37} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{k_m r_m}{m} & \frac{c_m r_m}{m} & \frac{-k_m(l_g-R)}{m} & \frac{-c_m(l_g-R)}{m} & \frac{-k_m}{m} & \frac{-c_m}{m} & 0 \\ V \cos \theta & F_{72} & 0 & l_g & 0 & 0 & \frac{-V}{\sigma} \end{bmatrix} \tag{19}$$

onde

$$\begin{aligned}
F_{21} &= \frac{-k_\psi + F_z e_t \cos \theta \sin \theta - k_m r_m^2}{I_z} & F_{22} &= \frac{-c_\psi - (\frac{c_\lambda}{V}) \cos \theta - c_m r_m^2}{I_z} \\
F_{27} &= \frac{-F_z (k_\alpha + 7e_t k_\lambda) \cos \theta}{I_z \sigma} & F_{31} &= \frac{F_z e_t \cos^2 \theta + k_m r_m (l_g - R)}{I_x} \\
F_{32} &= \frac{-c_\lambda \sin \theta}{I_x V} + \frac{c_m r_m (l_g - R)}{I_x} & F_{33} &= \frac{-k_\phi - k_m (l_g - R)^2}{I_x} \\
F_{34} &= \frac{-c_\phi - c_m (l_g - R)^2}{I_x} & F_{37} &= \frac{-F_z [k_\alpha \sin \theta + 7k_\lambda (\sin \theta + l_g \cos \theta)]}{I_x \sigma} \\
F_{72} &= (e_t - a) \cos \theta
\end{aligned} \tag{20}$$

e, ainda,

$$\mathbf{G}_{TM} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{I_z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r_m}{I_z} & 0 & \frac{-(l_g - R)}{I_x} & 0 & \frac{-1}{m} & 0 \end{bmatrix}^T \tag{21}$$

$$\mathbf{H}_{TM} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ r_m & 0 & -(l_g - R) & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & r_m & 0 & -(l_g - R) & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

3 Designação de Modos de Trem de Pouso

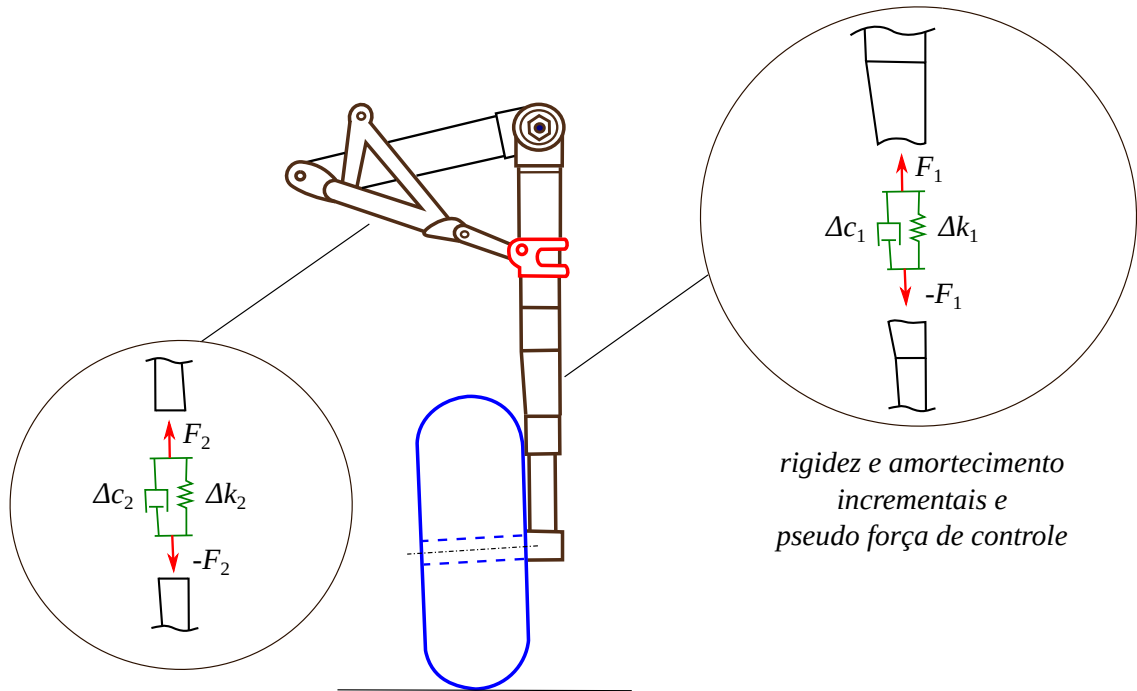
Este capítulo apresenta como se pode designar modos de vibração de trens de pouso para redução de vibrações, bem como supressão de shimmy. A metodologia proposta considera uma adaptação da formulação de controle por realimentação para se calcular, via uma pseudo força de controle, as alterações estruturais necessárias, em termos de rigidez ou amortecimento, para se obter um trem de pouso com menor nível de vibrações, ou livre de shimmy.

3.1 Pseudo Controle por Retroação de Saídas

Para a formulação da EAT adaptada para o projeto da dinâmica do trem de pouso, é considerada a representação do sistema no espaço de estados $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t)$, mostradas na Eq. (1), nas quais o vetor de estados é $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^{N \times 1}$, o vetor de pseudo entradas é $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^{m \times 1}$, \mathbf{F} é $N \times N$, \mathbf{G} é $N \times m$, \mathbf{H} é $r \times N$, e $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^{r \times 1}$. N é tal que $N = 2N_f + 1$, sendo N_f o número de graus de liberdade associados aos modos flexíveis, m e r são os números de entradas e saídas, respectivamente. Uma das equações do modelo descreve a translação do trem de pouso e, portanto, N é tipicamente um número ímpar, sendo $N - 1 = 2N_f$ o número de autovetores associados ao modelo, presentes em N_f pares conjugados.

O primeiro passo na pseudo retro-alimentação de saídas é definir as matrizes de entradas e saídas (\mathbf{G} e \mathbf{H}) de maneira que a relação entre entradas e saídas sejam parâmetros físicos do sistema. O método proposto considera a pseudo força de controle $F_n(t)$ entre dois nós estruturais (dois graus de liberdade particulares, isto é, n e $n - 1$) escritos em termos de rigidezes incrementais k_n de maneira que $F_n(t) = k_n \Delta x_n(t)$, em que $\Delta x_n = x_n - x_{(n-1)}$. Pseudo forças de controle podem ser consideradas localmente no trem de pouso para se determinar alterações de rigidez. Estas pseudo forças, ao serem calculadas, permitem se conhecer incrementos locais, ou decrementos, das rigidezes $\Delta k_{(\)}$, conforme ilustrado pela Figura 6.

Figura 6 – Modelo geral de trem de pouso de nariz. Entradas e saídas.



De maneira similar a ideia previamente estabelecida, é possível considerar pseudo forças de controle envolvendo as velocidades relativas entre dois nós estruturais do modelo, então, considerar quantidades incrementais de amortecimento estrutural. Por simplicidade, assumindo m pseudo forças $F_i(t) = \Delta k_i \Delta x_i(t) + \Delta c_i \Delta \dot{x}_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, os vetores de saídas e pseudo entradas $\mathbf{y}(t)$ e $\mathbf{u}(t)$ são convenientemente definidos por:

$$\mathbf{y}(t) = \{\Delta x_1(t) \quad \Delta \dot{x}_1(t) \quad \dots \quad \Delta x_m(t) \quad \Delta \dot{x}_m(t)\}^T \in \mathbf{R}^{2m \times 1} \quad (23)$$

$$\mathbf{u}(t) = \{F_1(t) \quad \dots \quad F_m(t)\}^T \in \mathbf{R}^{m \times 1} \quad (24)$$

Denotando $\mathbf{K} \in \mathbf{R}^{m \times 2m}$ uma matriz de pseudos ganhos de controle para realimentação das saídas, conforme previamente estabelecido, é possível escrever a relação linear $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{y}(t)$. Entretanto, para se calcular os valores incrementais, ou decrementais, de rigidezes (e amortecimentos) estruturais e, então, obter os modos de vibrar estruturais desejados (e especificados), é preciso assegurar que a matriz de pseudos ganhos de controle seja convenientemente preenchida com zeros nas posições que não têm significado físico na modelagem proposta. Note que cada força F_i (que está relacionada com a i -ésima linha de \mathbf{K}) deve depender apenas das saídas $(2i - 1)$ e i do vetor \mathbf{y} (relacionadas as colunas $(2i - 1)$ e i de \mathbf{K}) e, então, as demais $(2m - 2)$ colunas da i -ésima linha de \mathbf{K} devem ter zeros. Esta estratégia é fundamental para a metodologia adotada, pois assegura o significado físico desejado para a matriz de pseudos ganhos de controle (ver seção 3.1.3).

Assim, a matriz \mathbf{K} é tal que

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \Delta k_1 & \Delta c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta k_2 & \Delta c_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \Delta k_m & \Delta c_m \end{bmatrix} \quad (25)$$

sendo Δk_i e Δc_i os valores incrementais (ou decrementais) das rigidezes e amortecimentos locais a serem calculados. A seguir, apresenta-se como se calcular os valores Δk_i e Δc_i , $i = 1, \dots, m$, a partir de designação (ou especificação) dos parâmetros modais. Na prática, o analista deve definir um (ou mais) modo(s) de vibração desejado para o trem de pouso (a partir de um autovetor associado) e, similarmente, definir um (ou mais) par (pares) de frequência(s) natural(is) amortecida(s) e fator(es) de amortecimento(s) associados ao modo desejado.

3.1.1 Designação de Modos de Vibrar via Pseudo Realimentação de Saídas

Conforme previamente destacado neste texto, a designação (ou especificação) dos parâmetros modais é, na prática, a imposição de modos, frequências naturais e fatores de amortecimento. O analista impõe a dinâmica desejada, através da especificação destes parâmetros modais, e a solução da metodologia proposta determina incrementos e decrementos locais de rigidez e coeficientes de amortecimento que, ao serem considerados no projeto do trem de pouso, permitem alterar as especificações iniciais de projeto para se obter os parâmetros modais especificados. Na prática, a especificação do modo de vibrar é feita pela imposição de um autovetor Φ_i que descreve o modo e, similarmente, frequência natural amortecida $\omega_{d(i)}$ e fator de amortecimento ζ_i podem respectivamente ser especificados pela imposição das partes imaginária e real do autovalor λ_i associado ao i -ésimo modo. Assim, da teoria clássica de vibrações, conforme pode ser verificado em (HARTOG, 1985), tem-se que:

$$\lambda_i = \zeta_i + j\omega_{d(i)} \quad (26)$$

Sabe-se que o modo de vibração do trem de pouso pode ser obtido resolvendo o problema de autovalor para entrada nula. Neste caso, aplicando uma transformada de Laplace na equação do espaço de estados, e considerando a variável de Laplace tal que $s = \lambda_i$, tem-se que

$$(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{F}) \Psi_i = \mathbf{0} \quad (27)$$

sendo $\mathbf{0}$ um vetor nulo e Ψ_i o autovetor associado ao autovalor λ_i . Para os modelos de

trens de pouso descritos conforme se apresenta neste texto, tem-se que, dos N autovetores ($i = 1, \dots, N$) de \mathbf{F} , apenas $(N - 1)/2 = N_f$ contém s modos flexíveis do trem de pouso, na forma de subvetores. Para estes N_f autovetores Ψ_i , sendo cada um $N \times 1$, os N_f coeficientes do vetor $\Phi_i \in N_f \times 1$ (que descreve o i -ésimo modo de vibrar) são elementos posicionados no autovetor Ψ_i de forma dependente de como está escrito o vetor de estados \mathbf{x} . Para clareza de entendimento, considere por simplicidade que o vetor de estados é tal que $\mathbf{x} = \{\mathbf{u} \quad \dot{\mathbf{u}} \quad x_N\}^T$, sendo \mathbf{u} o vetor dos deslocamentos (isto é, que contém os deslocamentos de todos graus de liberdade), $\dot{\mathbf{u}}$ o vetor de velocidades, e x_N o estado relacionado a equação de translação do trem de pouso (a equação que apresenta a velocidade V de translação do sistema). Para este caso, o autovetor Ψ_i é tal que:

$$\Psi_i = \{\Phi_i \quad \lambda_i \Phi_i \quad \psi_{N(i)}\}^T \quad (28)$$

sendo $\psi_{N(i)}$ um escalar. Por outro lado, se \mathbf{x} não contém todos deslocamentos (e velocidades) posicionados como elementos consecutivos no vetor, cada um dos N_f elementos ϕ_j de $\Phi_i = \{\phi_{i1} \dots \phi_{ij} \dots \phi_{iN_f}\}^T$ estão igualmente de forma distribuída no autovetor Ψ_i . Note que esta compreensão é de significativa importância para aplicação da técnica proposta neste trabalho. Então, em particular para os modelos apresentados, tem-se os modos flexíveis de cada trem de pouso dados por:

$$\begin{aligned} \text{braço arrastado:} \quad \Phi_i^{(a)} &= \{\phi_{y(i)}^{(a)} \quad \phi_{\psi(i)}^{(a)}\}^T \\ \text{Thota:} \quad \Phi_i^{(T)} &= \{\phi_{\psi(i)}^{(T)} \quad \phi_{\phi(i)}^{(T)}\}^T \end{aligned} \quad (29)$$

$$\text{Thota c/ amortec.:} \quad \Phi_i^{(TM)} = \{\phi_{\psi(i)}^{(TM)} \quad \phi_{\phi(i)}^{(TM)} \quad \phi_{y_m(i)}^{(TM)}\}^T$$

e, então, os vetores de deslocamentos físicos $\mathbf{u}(t)$ são dados por:

$$\begin{aligned} \text{braço arrastado:} \quad \mathbf{u}_a &= \{y \quad \psi\}^T = \begin{bmatrix} \Phi_1^{(a)} & \Phi_2^{(a)} \end{bmatrix} \mathbf{u}_\phi^{(a)} \\ \text{Thota:} \quad \mathbf{u}_T &= \{\psi \quad \phi\}^T = \begin{bmatrix} \Phi_1^{(T)} & \Phi_2^{(T)} \end{bmatrix} \mathbf{u}_\phi^{(T)} \end{aligned} \quad (30)$$

$$\text{Thota c/ amortec.:} \quad \mathbf{u}_T = \{\psi \quad \phi \quad y_m\}^T = \begin{bmatrix} \Phi_1^{(TM)} & \Phi_2^{(TM)} & \Phi_3^{(TM)} \end{bmatrix} \mathbf{u}_\phi^{(TM)}$$

Note que $\Phi^{(a)} = \begin{bmatrix} \Phi_1^{(a)} & \Phi_2^{(a)} \end{bmatrix}$, $\Phi^{(T)} = \begin{bmatrix} \Phi_1^{(T)} & \Phi_2^{(T)} \end{bmatrix}$ e $\Phi^{(TM)} = \begin{bmatrix} \Phi_1^{(TM)} & \Phi_2^{(TM)} & \Phi_3^{(TM)} \end{bmatrix}$ definem as matrizes de modos estruturais para os modelos de braço arrastado, Thota e Thota com amortecedor, respectivamente, com dimensões 2×2 , 2×2 e 3×3 , respectivamente. Também, $\mathbf{u}_\phi^{(a)}$, $\mathbf{u}_\phi^{(T)}$ e $\mathbf{u}_\phi^{(TM)}$ são os respectivos vetores de deslocamentos modais. Ainda, baseados nos respectivos vetores de estados (Eqs. 3, 6 e 18), os autovetores Ψ_i

associados às plantas no espaço de estados são tais que:

$$\begin{aligned}
 \text{braço} \quad \Psi_i &= \{\lambda_i \phi_{y(i)}^{(a)} \quad \phi_{y(i)}^{(a)} \quad \lambda_i \phi_{\psi(i)}^{(a)} \quad \phi_{\psi(i)}^{(a)} \quad v_{\alpha(i)}\}^T \\
 \text{arrastado} & \\
 \text{Thota} \quad \Psi_i &= \{\phi_{\psi(i)}^{(T)} \quad \lambda_i \phi_{\psi(i)}^{(T)} \quad \phi_{\phi(i)}^{(T)} \quad \lambda_i \phi_{\phi(i)}^{(T)} \quad v_{\lambda_T(i)}\}^T \tag{31} \\
 \text{Thota} \quad \Psi_i &= \{\phi_{\psi(i)}^{(TM)} \quad \lambda_i \phi_{\psi(i)}^{(TM)} \quad \phi_{\phi(i)}^{(TM)} \quad \lambda_i \phi_{\phi(i)}^{(TM)} \quad \phi_{y_m(i)}^{(TM)} \quad \lambda_i \phi_{y_m(i)}^{(TM)} \quad v_{\lambda_T(i)}\}^T \\
 & \text{c/ amort.}
 \end{aligned}$$

Além de compreender claramente como os coeficientes dos autovetores que representam os modos flexíveis de vibração estão posicionados nos autovetores associados a representação dos sistemas no espaço de estados, o emprego da técnica proposta é também baseado no entendimento do subespaço vetorial associado a planta inicial do sistema $S = (\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H})$, isto é, do sistema à malha fechada. Para isto, sendo $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{y}$ e $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x}$, pode-se escrever $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{H}\mathbf{x}$ e, substituindo esta última equação na representação no espaço espaço de estados à malha fechada, tem-se:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{K}\mathbf{H}\mathbf{x} \tag{32}$$

Aplicando a transformada de Laplace, para condições iniciais nulas, e considerando $s = \lambda_i$ como previamente descrito, tem-se que

$$(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{F}) \mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{K}\mathbf{H}\mathbf{x} \tag{33}$$

na qual $(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{F})$ tem determinante nulo, conforme estabelece Eq. (27) para admitir solução não trivial, se um autovalor λ_i do sistema inicial é considerado. No entanto, ao se considerar um autovalor desejado $\lambda_i^d \neq \lambda_i$, a matriz inversa $(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}$ pode ser obtida. Ainda, considerando o vetor de estados do sistema a malha fechada escrito tal que $\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{x}_V$, sendo $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_i \dots \mathbf{v}_N]$, e \mathbf{v}_i a i -ésima coluna de \mathbf{V} , que representa um i -ésimo autovetor, a Eq. (33) pode ser reescrita tal que

$$(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{F}) \mathbf{V}\mathbf{x}_V = \mathbf{G}\mathbf{K}\mathbf{H}\mathbf{V}\mathbf{x}_V \tag{34}$$

e, com isto, a dependência temporal, implícita em $\mathbf{x}_V = \mathbf{x}_V(t)$ pode ser eliminada, o que permite escrever

$$\mathbf{V} = (\lambda_i^d \mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \mathbf{G}\mathbf{K}\mathbf{H}\mathbf{V} \tag{35}$$

Para $(\lambda_i^d \mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \mathbf{G}\mathbf{K}\mathbf{H} = \mathbf{S}$ tal que $\mathbf{V} = \mathbf{S}\mathbf{V}$, pode-se convenientemente escrever

$$[\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_i \dots \mathbf{v}_N] = [\mathbf{S}\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{S}\mathbf{v}_i \dots \mathbf{S}\mathbf{v}_N] \tag{36}$$

e, a partir desta igualdade matricial, ao se considerar uma i -ésima coluna de ambas matrizes, tem-se a seguinte relação:

$$\mathbf{v}_i = (\lambda_i^d \mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \mathbf{GKH} \mathbf{v}_i \quad (37)$$

$i = 1, \dots, N$, sendo esta equação também apresentada por [Andry, Shapiro and Chung \(1983\)](#). Embora os autores não incluam naquele trabalho esta demonstração algébrica, destacam que $(\lambda_i^d \mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \mathbf{G} = \mathbf{L}_i$ é uma matriz cujas colunas formam a base do subespaço vetorial \mathbb{V} que contém os autovetores possíveis de serem designados, isto é, $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^p$. Assim, tal subespaço contém, na prática, os modos possíveis de serem obtidos. No entanto, estes modos possíveis podem não corresponder exatamente aos modos desejados pelo analista - o que significa que autovetores desejáveis¹ \mathbf{v}_i^d podem ser tais que $\mathbf{v}_i^d \notin \mathbb{V}$. Nestes casos, a técnica permite se designar o modo de vibrar (logo, então, um autovetor possível) mais próximo do desejável. Estas ideias são discutidas neste capítulo.

Para especificar um modo desejado (ou seja, impor um autovetor \mathbf{v}_i^d na Eq. 37), a partir de uma especificação inicial $\mathbb{S} = (\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H})$ de trem de pouso, utiliza-se a base \mathbf{L}_i do subespaço vetorial \mathbb{V} que contém as possibilidades de modos a partir das propriedades físicas e geométricas. Assim, sabe-se que cada autovetor \mathbf{v}_i^p possível de ser designado pode ser obtido por $\mathbf{v}_i^p = \mathbf{L}_i \mathbf{z}_i$, em que $\mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^{m \times 1}$. Note que se trata de uma combinação dos elementos da base para escrever um autovetor do subespaço. Ainda, como ideia geral, tem-se que o objetivo da solução é encontrar um autovetor que pertença a este subespaço vetorial \mathbb{V} gerado \mathbf{L}_i , e que satisfaça os requisitos dinâmicos do sistema. Entretanto, em alguns casos práticos pode não ser possível obter precisamente um autovetor desejado \mathbf{v}_i^d a partir deste subespaço.

Para estes casos acima descritos, assumindo $\mathbf{v}_i^d \neq \mathbf{v}_i^p$ tal que $\mathbf{v}_i^d \notin \mathbb{V}$, considera-se a projeção de \mathbf{v}_i^d sobre o subespaço \mathbb{V} , ou seja,

$$\mathbf{v}_i^p = \text{proj}_{\mathbb{V}}(\mathbf{v}_i^d) \quad (38)$$

o que, para a base $\mathbf{L}_i = [\mathbf{L}_{1(i)} \dots \mathbf{L}_{k(i)} \dots \mathbf{L}_{N(i)}]$, corresponde a

$$\text{proj}_{\mathbb{V}}(\mathbf{v}_i^d) = \text{proj}_{\mathbf{L}_{1(i)}}(\mathbf{v}_i^d) + \dots + \text{proj}_{\mathbf{L}_{k(i)}}(\mathbf{v}_i^d) + \dots + \text{proj}_{\mathbf{L}_{N(i)}}(\mathbf{v}_i^d) \quad (39)$$

sendo

$$\text{proj}_{\mathbf{L}_{k(i)}}(\mathbf{v}_i^d) = \frac{\mathbf{v}_i^d \bullet \mathbf{L}_{k(i)}}{\mathbf{L}_{k(i)} \bullet \mathbf{L}_{k(i)}} \mathbf{L}_{k(i)} \quad (40)$$

na qual o símbolo \bullet indica o produto escalar. Então, alternativamente, $\mathbf{L}_{k(i)} \bullet \mathbf{L}_{k(i)}$ pode

¹Note que a notação considera os superescritos p e d para indicar os autovetores *possível* e *desejado*, respectivamente.

ser reescrito como $\mathbf{L}_{k(i)}^T \mathbf{L}_{k(i)}$ e, também,

$$\mathbf{v}_i^d \bullet \mathbf{L}_{k(i)} = (\mathbf{v}_i^d)^T \mathbf{L}_{k(i)} = (\mathbf{L}_{k(i)})^T \mathbf{v}_i^d \quad (41)$$

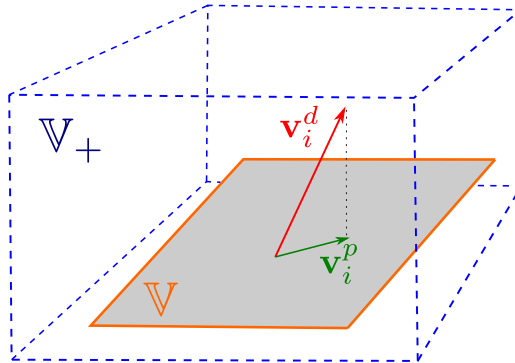
já que o produto escalar é uma operação comutativa. Assim, considerando as Eqs. (40) e (41), a Eq. (39) pode ser reescrita na forma compacta tal que a Eq. (38) é finalmente reescrita por

$$\mathbf{v}_i^p = \left[\mathbf{L}_i (\mathbf{L}_i^T \mathbf{L}_i)^{-1} \mathbf{L}_i^T \right] \mathbf{v}_i^d \quad (42)$$

visto que $\frac{\mathbf{v}_i^d \bullet \mathbf{L}_{k(i)}}{\mathbf{L}_{k(i)} \bullet \mathbf{L}_{k(i)}} \mathbf{L}_{k(i)} = \mathbf{L}_{k(i)} \frac{\mathbf{v}_i^d \bullet \mathbf{L}_{k(i)}}{\mathbf{L}_{k(i)} \bullet \mathbf{L}_{k(i)}}$ uma vez que $\left(\frac{\mathbf{v}_i^d \bullet \mathbf{L}_{k(i)}}{\mathbf{L}_{k(i)} \bullet \mathbf{L}_{k(i)}} \right)$ é um escalar.

A Eq. (42) tem importante relevância para aplicações práticas, principalmente para sistemas de trens de pouso com modos com elevada complexidade geométrica, pois permite obter modo possível de ser designado a partir de um modo desejado.

Figura 7 – Ilustração esquemática do subespaço vetorial \mathbb{V} (quadrilátero) com base geradora associada à especificação inicial do trem de pouso. Destaque para os autovetores desejado \mathbf{v}_i^d e sua projeção \mathbf{v}_i^p entre os possíveis autovetores de serem designados.



Uma estratégia conveniente de ser adotada, especialmente para casos nos quais o modo desejado não pode ser precisamente obtido (ou seja, quando se precisa considerar a projeção do autovetor desejado), consiste em se utilizar um subespaço vetorial \mathbb{V}_+ tal que $\mathbb{V} \subset \mathbb{V}_+$ visando se obter uma nova base vetorial \mathbf{L}_i^+ que possa gerar o autovetor desejado \mathbf{v}_i^d a partir de coeficientes $\mathbf{z}_i^+ = \{z_1^+ \dots z_m^+\}^T$, ou seja, $\mathbf{v}_i^d = \mathbf{L}_i^+ \mathbf{z}_i^+$. Para isto, considerando $m^+ > m$ entradas, tem-se que a nova base vetorial \mathbf{L}_i^+ pode gerar todos os vetores \mathbf{v}_i^p anteriores, além de vetores adicionais \mathbf{v}_i^{p+} tal que $\mathbf{v}_i^d = \mathbf{v}_i^{p+}$. Assim, tem-se que este princípio é de relevante importância para este trabalho, pois o número de entradas corresponde ao número de pseudo forças e, conseqüentemente, o número de locais do trem de pouso para os quais são calculados os incrementos (ou decrementos) das propriedades mecânicas. O subespaço \mathbb{V}_+ também é ilustrado na Fig. 7, de forma conceitual, através de um paralelepípedo.

Deve-se notar que a Eq. (42) é aplicada em casos em que se deseja designar todos os elementos do autovetor \mathbf{v}_i . Entretanto, conforme se destaca na Eq. (31), não são todos os elementos de \mathbf{v}_i que correspondem compõem as amplitudes de vibrações do trem de pouso (ver ilustrativamente a Eq. 30). Ainda, especialmente para sistemas com múltiplos graus de liberdade, eventualmente nem todos os coeficientes do autovetor $\Phi_i^{(\cdot)}$ que representa o i -ésimo modo flexível do trem de pouso tem alta relevância em um mecanismo de shimmy. Então, do ponto de vista prático, alguns elementos dentro do autovetor \mathbf{v}_i podem ser desconsiderados e, por isto, apenas alguns elementos do vetor precisam ser designados.

Sobel and Shapiro (1985b) mostram como é possível designar somente alguns dos elementos de um autovetor desejado $\mathbf{v}_i^d = \{v_{1(i)} \dots v_{j(i)} \dots v_{N(i)}\}^T$. Para isto, rearranja-se o autovetor em dois subvetores tais que o primeiro (\mathbf{l}_i) contenha os elementos que se pretende designar e, portanto, o segundo subvetor (\mathbf{d}_i) contenha os demais elementos. Assim, o novo vetor desejado é dado por

$$(\mathbf{v}_i^d)^{R_i} = \{\mathbf{l}_i \ \mathbf{d}_i\}^T \quad (43)$$

sendo o superescrito R_i a indicação do vetor rearranjado. Este rearranjo algébrico é facilmente obtido e permite a aplicação do método envolvendo solução com matrizes de menores dimensões. Então, similarmente, a matriz \mathbf{L}_i é reescrita como $\mathbf{L}_i^{R_i} = [\bar{\mathbf{L}}_i \ \mathbf{D}_i]^T$, que permite escrever

$$\left[(\lambda_i^d \mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \mathbf{G} \right]^{R_i} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{L}}_i \\ \mathbf{D}_i \end{bmatrix} \quad (44)$$

note que $\mathbf{L}_i^{R_i}$ contém as mesmas informações que \mathbf{L}_i , porém com suas linhas em posições alteradas, pois $\mathbf{v}_i = \mathbf{L}_i \mathbf{z}_i$ e $\mathbf{v}_i^{R_i} = \mathbf{L}_i^{R_i} \mathbf{z}_i$. Assim, o rearranjo deve satisfazer a seguinte relação

$$[\mathbf{L}_i]^{-1} \mathbf{v}_i = [\mathbf{L}_i^{R_i}]^{-1} \mathbf{v}_i^{R_i} \quad (45)$$

Portanto, a partir da Eq. (44), [Sobel and Shapiro \(1985b\)](#) mostram que o autovetor possível mais adequado de ser designado é obtido a partir do subvetor $\mathbf{v}_i^p|_p$, formado pelos elementos de \mathbf{v}_i que de fato se deseja designar, é dado por $(\mathbf{v}_i^d)^{R_i} = \{\mathbf{v}_i^p|_p \quad \mathbf{d}_i\}^T$, tal que

$$\mathbf{v}_i^p|_p = \bar{\mathbf{L}}_i (\bar{\mathbf{L}}_i^T \bar{\mathbf{L}}_i)^{-1} \bar{\mathbf{L}}_i^T \mathbf{I}_i^d \quad (46)$$

A implementação deste rearranjo nos vetores e matriz pode ser facilmente alcançada definindo uma matriz $\mathbf{T}_{(i|j)}$ de transformação de comutação de linhas, cujos subscritos (i, j) indicam que a linha i é trocada de posição com a linha j . Para isto, considere que se pretende designar $\underline{N} < N$ coeficientes do autovetor \mathbf{v}_i . A matriz \mathbf{T}_{ij} pode ser obtida a partir de uma matriz identidade \mathbf{I} de dimensão N . Para cada k -ésimo elemento de \mathbf{v}_i , a linha L_k de \mathbf{I} , $k = 1, \dots, \underline{N}$, é trocada de posição respectivamente as linhas 1 a \underline{N} . Por exemplo, considere que se pretende designar apenas os elementos três e cinco de um vetor hipotético $\mathbf{v}_i = \{v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5\}$, as linhas 3 e 5 de uma matriz identidade de dimensão 5 são trocadas para as posições das linhas 1 e 2. Também, por sua vez, os elementos das linhas 1 e 2 são reposicionados nas linhas 3 e 5. Então, a matriz \mathbf{T}_{ij} deste caso é denotada neste texto como $\mathbf{T}_{(1,2|3,5)}$, e é dada por:

$$\mathbf{T}_{(1,2|3,5)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (47)$$

na qual os subscritos indicam que as linhas 1 e 2 de uma matriz identidade são reposicionadas nas linhas 3 e 5, e vice-versa. Por simplicidade de notação, a matriz de transformação

$\mathbf{T}_{(1, \dots, \underline{N}|L_1, \dots, L_k, \dots, L_{\underline{N}})}$ é indicada apenas por $\mathbf{T}_{\underline{N}}$ e, a partir dela, pode-se escrever:

$$(\mathbf{v}_i^d)^{R_i} = \mathbf{T}_{\underline{N}} \mathbf{v}_i^d \quad (48)$$

$$\mathbf{L}_i^{R_i} = \mathbf{T}_{\underline{N}} \mathbf{L}_i$$

3.1.2 Pseudos Ganhos de Controle

Para a determinação da matriz que contém os pseudos ganhos de controle, inicialmente deve-se realizar uma transformação conveniente de coordenadas, que é apresentada em

detalhes no trabalhos de [Andry, Shapiro and Chung \(1983\)](#) e [Sobel and Shapiro \(1985b\)](#). A matriz \mathbf{G} é transformada em uma matriz $\tilde{\mathbf{G}}$ tal que esta apresente uma submatriz identidade de dimensão m , e com elementos nulos nas linhas $(m + 1)$ a N . O modelo do trem de pouso, representado no espaço de estado, neste novo sistema de coordenadas, é dado tal que:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{T}}^{-1}\mathbf{F}\tilde{\mathbf{T}} \quad \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H}\tilde{\mathbf{T}} \quad (49)$$

$$\tilde{\mathbf{G}} = \tilde{\mathbf{T}}^{-1}\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{0}_{(N-m) \times N} \end{bmatrix} \quad (50)$$

sendo $\mathbf{0}_{(N-m) \times N}$ uma matriz de zeros de dimensão $(N - m) \times N$ e $\tilde{\mathbf{T}}$ uma matriz de posto completo dada por

$$\tilde{\mathbf{T}} = [\mathbf{G} \quad \mathbf{C}_c] \quad (51)$$

onde \mathbf{C}_c é qualquer matriz $N \times (N - m)$ que assegure posto completo na matriz $\tilde{\mathbf{T}}$, conforme descreve [Andry, Shapiro and Chung \(1983\)](#). Note que, desta forma, pode assegurar o cálculo da matriz inversa $\tilde{\mathbf{T}}^{-1}$, requerida na mudança de coordenadas, pois uma matriz quadrada é singular¹ se seu posto não é completo. Também, note que admite-se diferentes matrizes \mathbf{C}_c , pois, se $\tilde{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G}$ (ver Eq. 50), tem-se $\mathbf{G} = [\mathbf{G} \quad \mathbf{C}_c][\mathbf{I}_m \quad \mathbf{0}_{(N-m) \times N}]^T$, que resulta em $\mathbf{G} = \mathbf{G}\mathbf{I}_m + \mathbf{C}_c(\mathbf{0}_{(N-m) \times N})^T$, sendo nulo, portanto, o produto $\mathbf{C}_c(\mathbf{0}_{(N-m) \times N})^T$ para qualquer que seja \mathbf{C}_c . Em particular para este trabalho, define-se esta matriz complementar para cada um dos modelos em análise da seguinte forma

$$\mathbf{C}_c^{(a)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$\mathbf{C}_c^{(T)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (53)$$

¹Ou seja, tem determinando nulo.

$$\mathbf{C}_c^{(TM)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (54)$$

Assim, a partir desta transformação de coordenadas, os autovetores possíveis de serem designados são dados por

$$\tilde{\mathbf{v}}_i = \tilde{\mathbf{T}}^{-1} \mathbf{v}_i \quad (55)$$

Finalmente, de acordo com [Andry, Shapiro and Chung \(1983\)](#) e [Sobel and Shapiro \(1985b\)](#), a matriz de pseudos ganhos de controle pode ser obtida por:

$$\mathbf{K} = (\tilde{\mathbf{Z}} - \tilde{\mathbf{F}}_1 \tilde{\mathbf{V}}) (\tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{V}})^{-1} \quad (56)$$

sendo $\tilde{\mathbf{V}} = [\tilde{\mathbf{v}}_1 \ \dots \ \tilde{\mathbf{v}}_r]$ e $\tilde{\mathbf{Z}} = [\tilde{\lambda}_1 \tilde{\mathbf{z}}_1 \ \dots \ \tilde{\lambda}_r \tilde{\mathbf{z}}_r]$, nas quais $\tilde{\mathbf{v}}_i$ é o i -ésimo autovetor possível mais adequado, $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i^d$ (ou seja, um dos $\tilde{\lambda}_i$ corresponde ao autovalor designado), \mathbf{z}_i , são os primeiros m elementos do autovetor possível \mathbf{v}_i^p , e $\tilde{\mathbf{F}}_1$ corresponde às primeiras m linhas da matriz $\tilde{\mathbf{F}}$.

O cálculo da matriz de pseudos ganhos deve considerar a restrição que assegura significado físico (de incrementos e decrementos de rigidez e amortecimento), conforme discutido ao se introduzir a Eq. (25). Então, são impostos zeros para alguns dos elementos da matriz para restringir existência das pseudo forças de realimentação associadas a estes elementos. Para isto, é preciso escrever a Eq. (57).

$$\begin{bmatrix} \Omega^T & \mathbf{0}_r & \dots & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_r & \Omega^T & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_r & \dots & \mathbf{0}_r & \Omega^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{k}_1^T \\ \mathbf{k}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{k}_m^T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \psi_1^T \\ \psi_2^T \\ \vdots \\ \psi_m^T \end{Bmatrix} \quad (57)$$

em que,

$$\Omega = \tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{V}} \quad (58)$$

$$\Psi = [\psi_1 \ \dots \ \psi_m] = \tilde{\mathbf{Z}} - \tilde{\mathbf{F}}_1 \tilde{\mathbf{V}} \quad (59)$$

sendo cada subvetor \mathbf{k}_i^T , $i = 1, \dots, m$, definido pela i -ésima linha da matriz de pseudos ganhos de controle \mathbf{K} . Ainda, considerado um total de m subvetores \mathbf{k}_i^T , tendo cada um contém r elementos, para simplificar a notação é utilizado o produto de Kronecker na Eq. (57), que permite escrever

$$(\Omega^T \otimes \mathbf{I}_r) \mathbf{k}^T = \psi^T \quad (60)$$

em que \mathbf{I}_r é uma matriz identidade $r \times r$, $\mathbf{k}^T = \{\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_m\}^T$, e $\psi^T = \{\psi_1 \dots \psi_m\}^T$, de maneira que

$$\mathbf{k}^T = (\Omega^T \otimes \mathbf{I}_r)^{-1} \psi^T \quad (61)$$

Em particular, se é nulo um elemento que ocupa a j -ésima coluna de \mathbf{k}_i (ou j -ésima linha de \mathbf{k}_i^T), é necessário eliminar a correspondente j -ésima coluna de Ω_{ij}^T e, similarmente, a j -ésima linha de ψ_i^T . Neste caso, observando que $(\Omega^T \otimes \mathbf{I}_r) \mathbf{k}^T$ é uma matriz em blocos diagonais, na qual cada i -ésimo bloco é dado por $\Omega^T \mathbf{k}_i^T$, o imposição do elemento nulo na j -ésima coluna da i -ésima linha de \mathbf{K} implica no i -ésimo bloco diagonal

$$\mathbf{k}_i|_{-j} = [\Omega^T|_{-j}]^{-1} \psi_i^T|_{-j} \quad (62)$$

na qual a notação $|_{-j}$ indica a ausência da j -ésima coluna na matriz Ω^T .

3.1.3 Designação Exata e Inexata

Como estabelecido neste trabalho, cada i -ésima linha de $\mathbf{K} \in m \times r$ tem elementos não nulos apenas nas colunas $(2i - 1)$ e $2i$. Também, tem-se que a matriz Ω^T é quadrada de dimensão $r \times r$ (lembre-se que r é o número de saídas). Assim, o i -ésimo subvetor \mathbf{k}_i^T formado pela i -ésima linha de \mathbf{K} tem apenas dois elementos não nulos. Então, aplicando o procedimento descrito pela Eq. (62), a matriz $\Omega^T|_{-j}$ tem dimensão $r \times 2$ e, portanto, $[\Omega^T|_{-j}]^{-1}$ requer uma estratégia numérica para pseudoinversão de matriz retangular.

Designação Inexata

Considerando $r \neq 2$, conforme descrito acima, a aplicação da metodologia proposta requer o cálculo de matriz pseudoinversa e, portanto, consiste em uma designação inexata. Esta solução será melhor investigada para conclusão do trabalho de tese. Em princípio, será empregada a pseudoinversa de More-Penrose, tal que

$$\mathbf{k}_i|_{-j} = [(\Omega^T|_{-j})^T \Omega^T|_{-j}]^{-1} (\Omega^T|_{-j})^T \psi_i^T|_{-j} \quad (63)$$

sendo $\mathbf{k}_i|_{-j}$ um subvetor 2×1 .

Designação Exata

Em particular, considerando duas saídas, tem-se $r = 2$, que implica em uma matriz $\Omega^T|_{-j}$ quadrada, de dimensão 2×2 . Assim, pode-se obter $\mathbf{k}_i|_{-j} \in 2 \times 1$ aplicando diretamente a Eq. (62).

3.2 Especificação do Autovetor e Ilustração Associada ao Subespaço

A estratégia de solução apresentada neste capítulo é baseada em duas escolhas fundamentais: *i*) do autovalor desejado λ_i^d e; *ii*) do autovetor desejado \mathbf{v}_i^d . A especificação do autovalor é tipicamente mais simples, pois na prática consiste em definir a frequência e fator de amortecimento desejados para o modo de vibrar que está sendo designado. Tal escolha é fundamentalmente baseada na frequência original do modo (aquela obtida para a configuração inicial do trem de pouso), e no nível de amortecimento estrutural desejado. Sabe-se que é mais factível designar um baixo nível de amortecimento, uma vez que é mais prático alterar a rigidez das partes do trem de pouso (por exemplo, aumentando dimensões de peças).

Para a designação do autovetor, é possível definir os parâmetros η_i e ξ_i que representam respectivamente a razão entre os módulos e os ângulos de fase dos elementos, do autovetor desejado, que estão associados aos dois graus de liberdade de maior interesse na análise. Tipicamente, conforme destaca (BESSELINK, 2000), um destes GDL é do movimento de guinada por ser fundamental para a formação do shimmy, sendo o outro dependente do tipo de trem de pouso. Em particular, por exemplo, no caso do trem de pouso de braço arrastado, este segundo grau de liberdade é o deslocamento lateral. De maneira geral, sejam os j -ésimo e k -ésimo elementos de \mathbf{v}_i^d associados aos dois GDL de mais contribuição para shimmy. Então,

$$\eta_i = \frac{|\mathbf{v}_{(j)i}^d|}{|\mathbf{v}_{(k)i}^d|} \quad (64)$$

este parâmetro é denominado neste trabalho para razão de amplitudes. Por outro lado, define-se como razão de fase para o i -ésimo modo desejado

$$\xi_i = \frac{\arctan \left[\Im(\mathbf{v}_{(j)i}^d) / \Re(\mathbf{v}_{(j)i}^d) \right]}{\arctan \left[\Im(\mathbf{v}_{(k)i}^d) / \Re(\mathbf{v}_{(k)i}^d) \right]} \quad (65)$$

na qual $\arctan(\)$ é o arcotangente, e $\Im(\)$ e $\Re(\)$ são respectivamente as partes imaginária e real do autovetor. A razão de fase corresponde à uma medida do atraso da posição de

um grau de liberdade em relação a posição do outro, no ciclo do movimento modal.

Note que a razão de amplitudes η_i , para um i -ésimo autovetor, permite verificar como o movimento de dois entre os GDL contribuem no i -ésimo modo para a resposta do sistema. Assim, adotando-se convenientemente $|\mathbf{v}_{(k)i}^d|$ correspondente ao movimento de guinada, a ideia central do uso deste parâmetro é designar modos (ou, de forma equivalente, o autovetor) com elevado η_i - o que implica em menor contribuição (relativa) do movimento de guinada. No entanto, ao selecionar elevado η_i , para o i -ésimo modo, o projetista deve avaliar os demais $(N_f - 1)$ modos, ou seja, os η_z , $z \neq i$.

A etapa de avaliação dos η_z também é de importante relevância para o reprojeto do trem de pouso, pois os benefícios obtidos por um elevado η_i (ou seja, devido baixa contribuição relativa do movimento de guinada no i -ésimo modo) podem ser reduzidos se o efeito contrário for gerado em um z -ésimo modo ($z \neq i$). Na prática, isto significa que a especificação do modo a ser designado deve também considerar se o reprojeto gera outro modo com alta contribuição relativa do movimento de guinada. Assim, tipicamente o analista deve definir uma solução de compromisso.

3.2.1 Ilustração Associada ao Subespaço

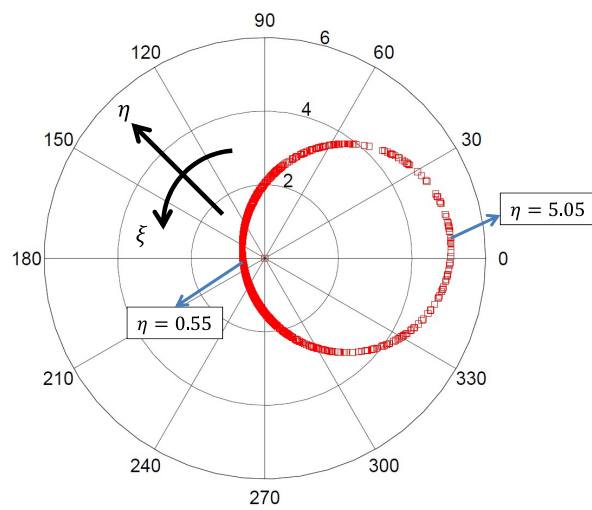
Sabe-se que os vetores do subespaço \mathbb{V} podem ser obtidos pela combinação linear dos autovetores de \mathbf{L}_i . Assim, para m entradas, tem-se cada z -ésimo vetor $\mathbf{v}_{(z)i}$ dado por

$$\mathbf{v}_{(z)i} = \chi_{(1)i} \mathbf{L}_{(1)i} + \dots + \chi_{(m)i} \mathbf{L}_{(m)i} \quad (66)$$

na qual $\chi_{(z)i} \in \mathbb{R}$ é o z -ésimo escalar associado ao z -ésimo autovetor de \mathbf{L}_i (ou seja, sua z -ésima coluna). Então, definindo-se N_χ conjuntos $S_\chi = \{\chi_{(1)i}, \dots, \chi_{(m)i}\}$, com valores arbitrários, pode-se construir N_χ vetores $\mathbf{v}_{(z)i}$ do subespaço \mathbb{V} .

Uma ilustração associada ao subespaço \mathbb{V} pode ser construída a partir de um diagrama polar para o par (η_z, ξ_z) obtido para cada vetor $\mathbf{v}_{(z)i}$, $z = 1, \dots, N_\chi$, construídos, conforme ilustrado na Figura 8. Trata-se de uma representação conveniente, especialmente para se comparar diferentes subespaços obtidos a partir de diferentes autovalores desejados λ_i^d . Tem-se, então, que ao se definir dois ou mais autovalores desejados, o diagrama polar associado a cada subespaço permite se conhecer os níveis de desacoplamento do movimento de guinada, com o segundo modo definido como mais relevante (através da composição do η_i), no modo (ou autovetor) possível. Note que uma melhor ilustração é possível para N_χ tão grande quanto possível. Na ilustração da Figura 8, considerando valores arbitrários, $\eta = 5.05$ é mais adequado que $\eta = 0.55$ e, conforme destaca [Besselink \(2000\)](#), um trem de pouso hipotético com modo com dinâmica puramente lateral, que portanto corresponde a $\eta \rightarrow \infty$, não apresente shimmy.

Figura 8 – Ilustração de uma representação polar associada ao subespaço que contém os autovetores possíveis de serem designados.



4 Resultados Numéricos e Discussões

Este capítulo apresenta resultados de simulações numéricas computacionais realizadas para demonstrar a metodologia desenvolvida. São discutidas aplicações com cada um dos três modelos de trem de pouso apresentados neste texto. Os parâmetros físico geométricos considerados são representativos de trens de pouso típicos, e previamente empregados por [Besselink \(2000\)](#), [Thota, Krauskopf and Lowenberg \(2009\)](#), [Thota et al. \(2010\)](#) e [Rahmani and Behdinan \(2019a\)](#).

4.1 Modelo de Braço Arrastado

A metodologia proposta é inicialmente demonstrada em um modelo de trem de pouso do tipo de braço arrastado, com a inclusão do grau de liberdade lateral, como ilustrado na Fig. 1. Para calcular a matriz de pseudo ganhos de controle, em termos dos valores incrementais de rigidezes e amortecimentos, para designar os novos modos de vibrar estruturais desejados é necessário incluir os elementos nulos na matriz \mathbf{K} de maneira apropriada. Em particular, para este sistema em questão, essas variáveis incrementais podem ser representadas através da seguinte matriz

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \Delta k_y & \Delta c_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta k_\psi & \Delta c_\psi \end{bmatrix} \quad (67)$$

que implica em considerar duas pseudo entradas $\mathbf{u}(t) = \{F_y \ T_\psi\}^T$ e saídas

$$\mathbf{y}(t) = \{y_0(t) \ \dot{y}_0(t) \ \psi(t) \ \dot{\psi}(t)\}^T$$

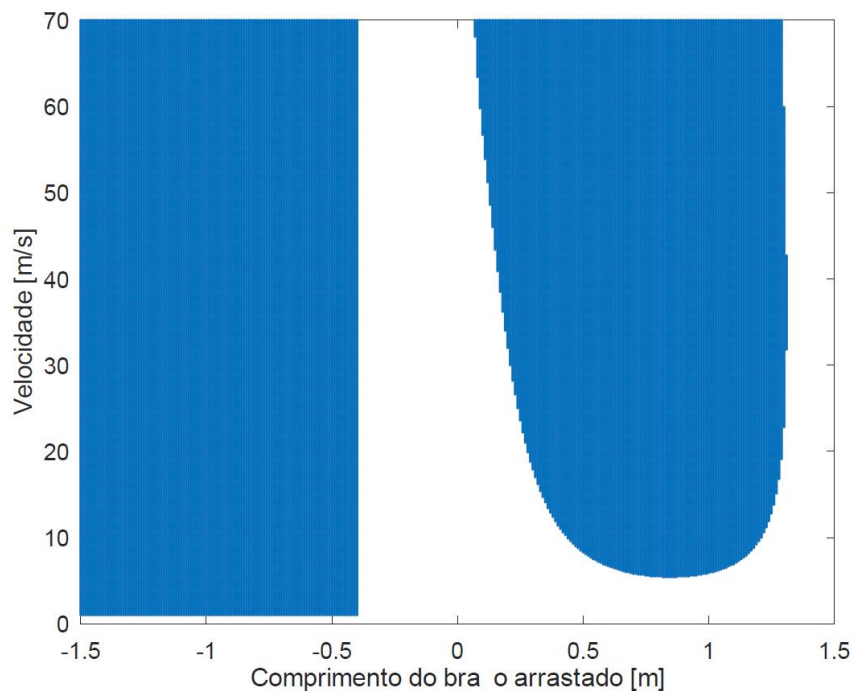
de maneira que $F_y(t) = \Delta k_y y(t) + \Delta c_y \dot{y}(t)$ e $T_\psi = \Delta k_\psi \psi(t) + \Delta c_\psi \dot{\psi}(t)$, que na prática permite calcular os incrementos e decrementos de propriedades físicas (rigidezes e amortecimentos incrementais) para designar os modos de vibrar desejados.

Considerando uma designação exata, tem-se que é possível considerar um modo de vibrar, visto que sua representação na dinâmica no espaço de estados contempla um par de autovetores (par conjugado). Neste contexto, para reprojeter um trem de pouso, a metodologia proposta também pode ser aplicada para duas finalidades distintas: *i*) reduzir o nível de vibração do trem de pouso, especialmente em condição de quase shimmy; e *ii*) eliminar o fenômeno shimmy (tornar o sistema estável). Para o caso *i*), especificamente

para sistemas com baixo amortecimento interno, a resposta de um trem de pouso estável pode conter alto nível de vibração. Nestes casos, o reprojeto através da modificação de propriedades estruturais a fim de se designar modos de vibrar mais adequados para o sistema, permite melhorar o comportamento dinâmico. Já para o caso *ii*), a estabilidade é garantida com a designação de autovalor que tenha parte real seja negativa.

Para ilustrar esta idéia, é considerado um modelo inicial de trem de pouso (Fig. 1) preliminarmente definido através dos seguintes valores dos propriedades físico geométricas: rigidez lateral $k_y = 1,5 \times 10^6$ N/m, rigidez de guinada $k_\psi = 1,0 \times 10^5$ (N/m)rad, amortecimento lateral $c_y = 520$ Ns/m, amortecimento de guinada $c_\psi = 520$ Nms/rad, massa $m = 200$ kg, momento de inércia $I_z = 81$ kg m², comprimento de relaxação do pneu $\sigma = 1,2$ m, comprimento do braço arrastado $e_t = 0,6$ m. Uma análise de estabilidade, em função da velocidade da aeronave, avaliando a influência do comprimento do braço arrastado do trem de pouso, pode ser obtida pela análise dos autovalores do sistema, e resulta em um mapa de estabilidade do sistema, conforme apresenta a Figura 9. Na figura, a cor branca do diagrama indica a região estável, sendo, portanto, a cor escura (azul) a indicação das condições de shimmy. Nota-se claramente que $e_t > -0,55$ gera condições estáveis, embora o sistema apresente shimmy para condições de $e_t > 0$, especialmente para $V > 8$ m/s.

Figura 9 – Mapa de estabilidade do sistema do trem de pouso de braço arrastado, considerando $k_\psi = 1,0 \times 10^5$ (N/m)rad, $c_y = 520$ Ns/m, $c_\psi = 520$ Nms/rad, $m = 200$ kg, $I_z = 81$ kg m² e $\sigma = 1,2$ m.

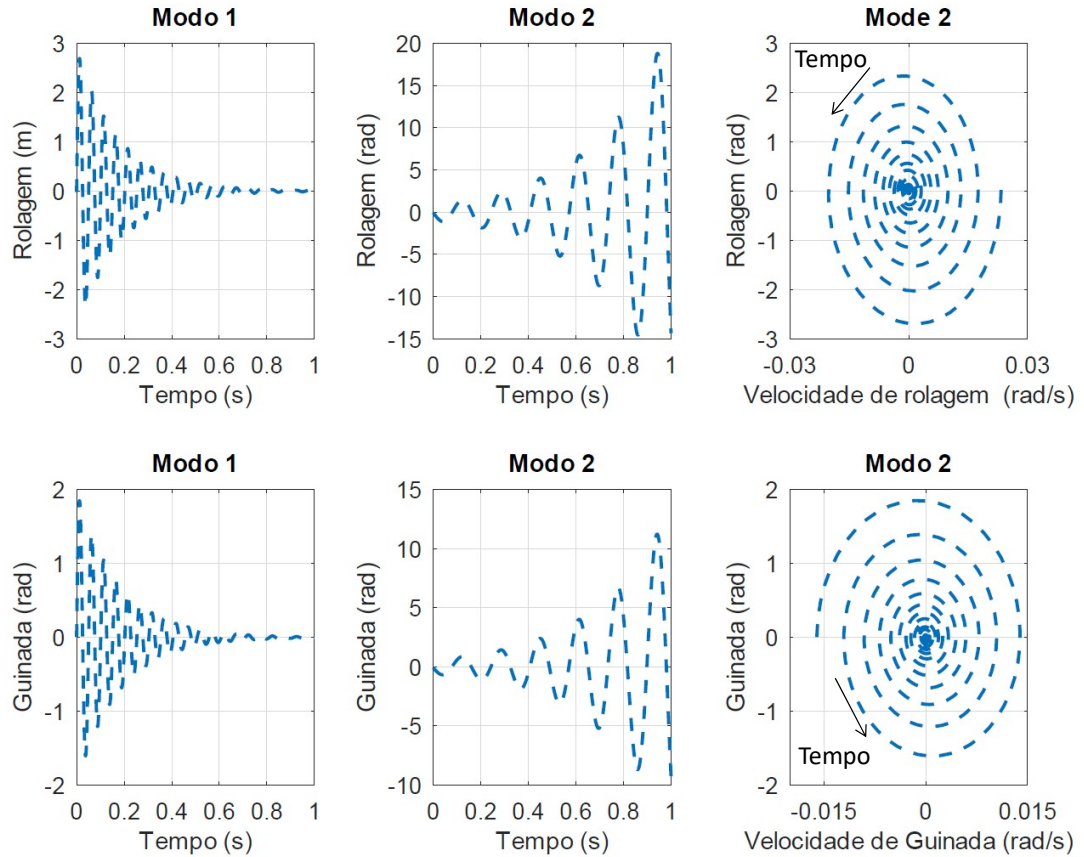


Ao analisar o gráfico da Figura 9, observa-se que existe uma região instável para velocidades próximas a $V = 36$ m/s e comprimento de braço arrastado $e_t = 0.6$ m. Esta velocidade é escolhida por representar uma velocidade típica de decolagem para alguns aviões. Além disso, o comprimento e_t é escolhido de forma arbitrária, para ilustrar a metodologia proposta. No entanto, a designação proposta pode melhorar a estabilidade em toda faixa de velocidade, como é apresentado neste texto, visto que também impõe um valor negativo à parte real do autovalor associado ao modo designado. Assim, toma-se este valor como parte da especificação inicial o sistema. A resposta do sistema é obtida em coordenadas modais, considerando uma condição inicial de ângulo de guinada de 0.1 rad (aprox. 5.7°), e calculada através da Eq. (68), apresentada em [Derusso, Roy and Close \(1990\)](#). Então, tem-se os resultados mostrados na Figura 10, confirmando a instabilidade do segundo modo, enquanto o primeiro tem resposta estável. Vale destacar que as grandes amplitudes atingidas no modelo linear, próximas a 20 radianos, e portanto, mais de 3 voltas, é impossível sob o ponto de vista prático, e somente valem para o modelo linear. Na realidade, à partir de um certo ângulo, o sistema torna-se não linear e atinge o ciclo limite, que mantém a oscilação dentro de valores aceitáveis. Assim sendo, a análise pertinente da resposta contida na Figura 10 é de que se trata de um sistema instável, e que as altas amplitudes são teóricas para o sistema linearizado no ponto de operação, não capturando as não linearidades distantes deste ponto.

$$\mathbf{x}_i = \exp(\lambda_i^R t) \{ [\mathbf{w}_i^R \cos(\lambda_i^I t) + \mathbf{w}_i^I \sin(\lambda_i^I t)] \mathbf{v}_i^R + [\mathbf{w}_i^I \cos(\lambda_i^I t) + \mathbf{w}_i^R \sin(\lambda_i^I t)] \mathbf{v}_i^I \} \quad (68)$$

em que \mathbf{x}_i é o vetor de estados modal do i -ésimo modo, λ_i^R e λ_i^I são as partes real e imaginária do i -ésimo autovalor, \mathbf{v}_i^R e \mathbf{v}_i^I as partes real e imaginária do i -ésimo autovetor, \mathbf{w}_i^R e \mathbf{w}_i^I são as partes real e imaginária do i -ésimo elemento do vetor \mathbf{w} , em que $\mathbf{w} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{x}_o$, sendo \mathbf{x}_o o vetor de condições iniciais do sistema e \mathbf{M} uma matriz na qual as colunas são os autovetores do sistema, normalizados no módulo de cada um, ou seja, cada coluna é definida por $\mathbf{v}_i / |\mathbf{v}_i|$

Figura 10 – Resposta modal do trem de pouso de braço arrasto para configuração de projeto inicial, considerando uma condição inicial de ângulo de guinada de 0,1 rad.



Para designar os parâmetros modais que estabilizam o sistema, considera-se o autovalor do sistema instável λ_2 (o inicial) e se define, convenientemente, um novo autovalor $\lambda_2^d = -\Re(\lambda_2) + j\Im(\lambda_2)$, ou seja, mantendo a frequência modal e impondo um fator de amortecimento para dissipar energia. Note neste ponto que $\Re(\lambda_2) > 0$, visto que o sistema inicial é instável ($\Re(\)$ é a parte real e $\Im(\)$ a parte imaginária do autovalor). Também, note que se define $\Re(\lambda_2^d) = -\Re(\lambda_2)$ de forma arbitrária, sendo que na prática deve-se assumir valores que impliquem em níveis de amortecimento compatíveis com os que podem ser alcançados para cada sistema (em função de dimensões, materiais, entre outras características específicas de cada trem de pouso). Assim, tem-se neste caso $\lambda_2^d = -3.13 + j38.33$.

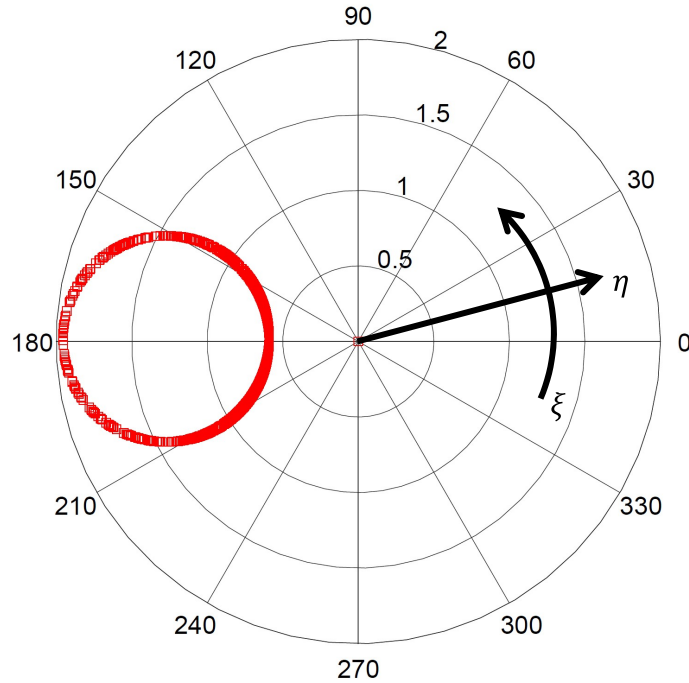
O modelo inicial do trem de pouso tem base vetorial definida pela matriz $\mathbf{L}_i = \mathbf{L}_2 = (\lambda_2^d \mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \mathbf{G}$. Os dois autovetores desta base são apresentados na tabela 1. A tabela mostra também, na coluna à esquerda, a qual grau de liberdade (GDL) está associado cada elemento do autovetor.

Tabela 1 – Dois autovetores da base \mathbf{L}_2 do subespaço para o trem de pouso de braço arrastado.

GDL	Autovetor 1	Autovetor 2
$\dot{\psi}$	$-0.3330 + j0.7240$	$0.4923 + j0.1602$
ψ	$0.0195 + j0.0071$	$0.0031 - j0.1309$
\dot{y}	$0.4995 - j0.3381$	$-0.8435 - j0.1402$
y	$-0.0098 - j0.0122$	$-0.0018 + j0.0221$
α	$-0.0172 - j0.0103$	$0.0049 + j0.0134$

Definindo $\eta_i = |\phi_{y(i)}^{(a)}|/|\phi_{\psi(i)}^{(a)}|$ e $\xi_i = \theta_{y(i)}^{(a)} - \theta_{\psi(i)}^{(a)}$ respectivamente como a razão entre os módulos e os ângulos de fase dos elementos dos autovetores associados deslocamento lateral (quarto elemento) e o ângulo de guinada (segundo elemento) de cada i -ésimo autovetor, pode-se representar alguns dos autovetores que pertencem ao subespaço através do diagrama polar mostrado na Fig. 11. Note que neste caso $\theta_{y(i)}^{(a)} = \arctan \left[\Im(\phi_{y(i)}^{(a)})/\Re(\phi_{y(i)}^{(a)}) \right]$ e $\theta_{\psi(i)}^{(a)} = \arctan \left[\Im(\phi_{\psi(i)}^{(a)})/\Re(\phi_{\psi(i)}^{(a)}) \right]$. Este resultado representa 8000 vetores de \mathbb{V} , obtidos através dos escalares $\chi_{(1)i}$ e $\chi_{(2)i}$ (note que neste caso $m = 2$) que representam os fatores de combinação linear dos vetores da tabela 1, com valores definidos aleatoriamente. Também, note que a representação, indicada de forma discreta (símbolo \square) pode parecer mais (ou menos) próxima de uma curva fechada em função da quantidade de vetores (ou seja, N_χ) e, também, dos valores dos escalares $\chi_{(z)i}$ assumidos. No entanto, tal condição não impede a ilustração associada ao subespaço, e que quanto mais fechada estiver a figura, também mais próximo se está da representação correta do subespaço.

Figura 11 – Ilustração associada ao subespaço que contém os autovetores possíveis de serem designados para o modelo de braço arrastado se $\lambda_1^d = -\Re(\lambda_1) + j\Im(\lambda_1)$. Resultado obtido para 2500 vetores dos subespaço.

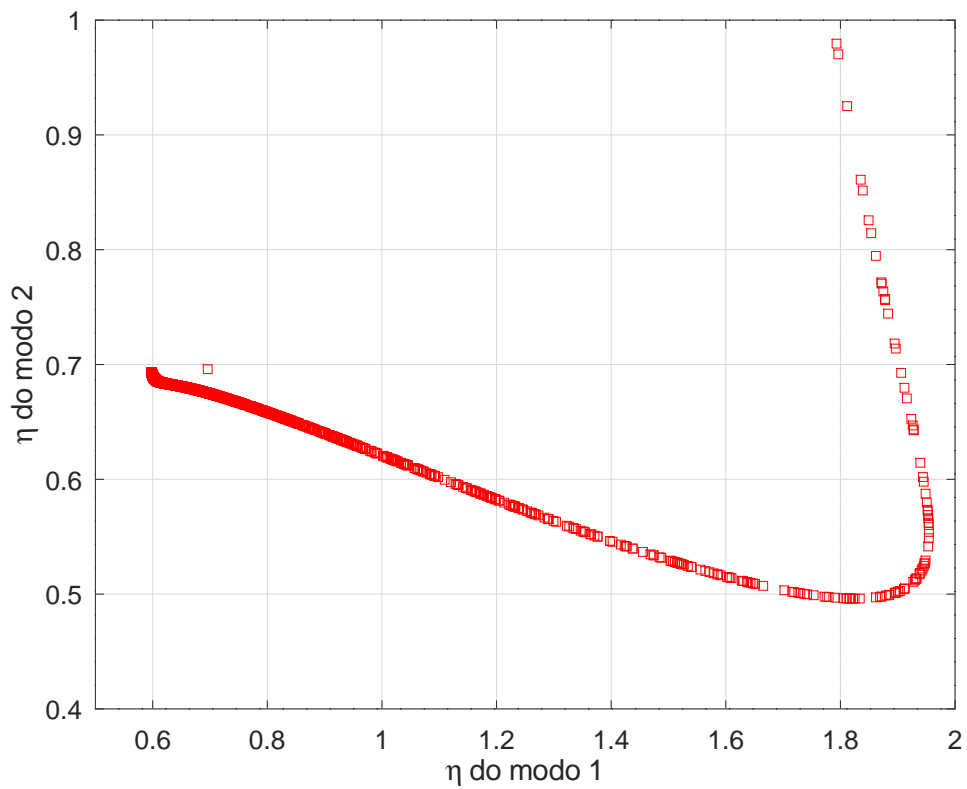


Este diagrama da Fig. 11 representa 2500 autovetores possíveis de serem escolhidos para a designação, particularmente para o autovalor desejado $\lambda_2^d = -3.13 + j38.33$. Por este diagrama se pode identificar a faixa de valores de η_i que implicam em um modo de vibrar com baixa participação do grau de liberdade de guinada e, portanto, com característica que implicam em um melhor comportamento vibratório do trem de pouso. Note que, para este modelo, $y(t) = \phi_{y(1)}^{(a)} y_\phi^{(a)}(t) + \phi_{y(2)}^{(a)} \psi_\phi^{(a)}(t)$ e $\psi(t) = \phi_{\psi(1)}^{(a)} y_\phi^{(a)}(t) + \phi_{\psi(2)}^{(a)} \psi_\phi^{(a)}(t)$, sendo $y_\phi^{(a)}(t)$ o deslocamento lateral modal e $\psi_\phi^{(a)}(t)$ o movimento modal de guinada. Assim, se uma designação assegurar alto valor de η_1 , tem-se que o primeiro modo $\Phi_1 = \{\phi_{y(1)}^{(a)} \quad \phi_{\psi(1)}^{(a)}\}^T$ contribui para um movimento com mais deslocamento lateral do que guinada e, neste sentido, note que modos de vibrar com baixa contribuição do movimento de guinada promovem melhor dinâmica ao trem de pouso.

Embora elevado valor de η_1 contribua para menor acoplamento nos deslocamentos lateral e de guinada, conforme descrito na seção 3.2, ao se designar um i -ésimo modo (o que implica em um η_i) é preciso avaliar η_z , $z \neq i$, para todos os demais modos do trem de pouso. Logo, para o modelo de braço arrastado, tem-se também η_2 , que é apresentado de forma relativa a η_1 pela Figura 12. O resultado mostra que, por exemplo, se $\eta_1 = 1,8$ (o que implica no primeiro modo contribuir para o deslocamento lateral aproximadamente o dobro do que contribui para o movimento de guinada), tem-se $\eta_2 \approx 0,5$. Neste caso, o

segundo modo contribui para o deslocamento lateral cerca da metade do que contribui para o movimento de guinada. Assim, tem-se que para a designação modal se deve considerar uma solução de compromisso, para que a redução de acoplamento obtida pelo modo designado não gere aumento de acoplamento em outro dos modos do novo sistema.

Figura 12 – Comportamento de η_2 (associado ao modo 2) em termos de η_1 (associado ao modo 1) para o trem de pouso de braço arrastado.



De acordo com os resultados da figura 12, ao se escolher $\eta_1 = 1,9$ e, por consequência, se ter $\eta_2 = 0,71$, o autovetor desejado \mathbf{v}_1^d (que contém o primeiro modo) é apresentado na tabela 2, juntamente com o autovetor designado. Esta solução permite obter a matriz de pseudos ganhos $\mathbf{K}^{(a)}$ apresentada a seguir e, então, determinar que os valores incrementais das rigidezes e amortecimentos estruturais para o reprojeto do trem de pouso são $\Delta k_y = -1.4 \times 10^6$ N/m, $\Delta c_y = -394.2$ Ns/m, e $\Delta k_\psi = 6.9 \times 10^4$ Nm/rad, and $\Delta c_\psi = -500.8$ Nms/rad. Portanto, note que a rigidez lateral k_y final deve ser reduzida, em comparação com seu valor inicial, enquanto que a rigidez em guinada deve ser aumentada. Por outro lado, os níveis de amortecimento podem ser reduzidos, o que indica, então, que a nova forma modal é resultado de uma redistribuição das propriedades físicas de rigidez e amortecimento, assegurando a estabilidade do sistema. Para clareza de entendimento, a tabela 3 apresenta os autovalores associados à dinâmica do sistema, obtidos para as configurações original e designada, na qual pode se identificar o autovalor desejado ($\lambda_2^d = -3.13 + j38.33$). Entre os $N = 5$ autovalores, pode-se observar os $N_f = 2$ autovalores associados os modos flexíveis, seus respectivos pares conjugados, além do autovalor (real) associado à equação de translação do trem de pouso.

$$\mathbf{K}^{(a)} = \begin{bmatrix} 1.4 \times 10^6 & 394.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6.9 \times 10^4 & -500.8 \end{bmatrix}$$

Tabela 2 – Autovetores desejado e designado para o trem de pouso de braço arrastado, normalizados em relação ao deslocamento lateral y para comparação.

GDL	\mathbf{v}_1^d	Autovetor designado
ψ	$-7.8459 - j72.5565$	$-7.8459 - j72.5565$
ψ	$-1.8638 + j0.3569$	$-1.8638 + j0.3569$
\dot{y}	$-3.1300 + j38.3300$	$-3.1300 + j38.3300$
y	$1.0000 + j0.0000$	$1.0000 + j0.0000$
α	$1.4425 + j0.0498$	$1.4425 + j0.0498$

Tabela 3 – Autovalores associados à dinâmica do trem de pouso de braço arrastado para os sistemas original e designado. Não são exibidos na mesma ordem.

Autovalor	Original	Designado
1	$-5.6195 + j123.9545$	$-18.1631 + j0.0000$
2	$-5.6195 - j123.9545$	$-3.5010 + j50.3525$
3	$3.1318 + j38.3282$	$-3.5010 - j50.3525$
4	$3.1318 - j38.3282$	$-3.1300 + j38.3300$
5	$-36.3555 + j0.0000$	$-3.1300 - j38.3300$

As respostas modais do sistema reprojeto, considerando a designação do modo de vibrar, pode ser vista na Figura 13. Nota-se que ambos os modos são estáveis. Ainda, para maior facilidade de visualização, as respostas podem ser comparadas com as iniciais, conforme mostra a Figura 14.

Figura 13 – Resposta modal do sistema reprojeto, para condição inicial de ângulo de guinada de 0.1 rad.

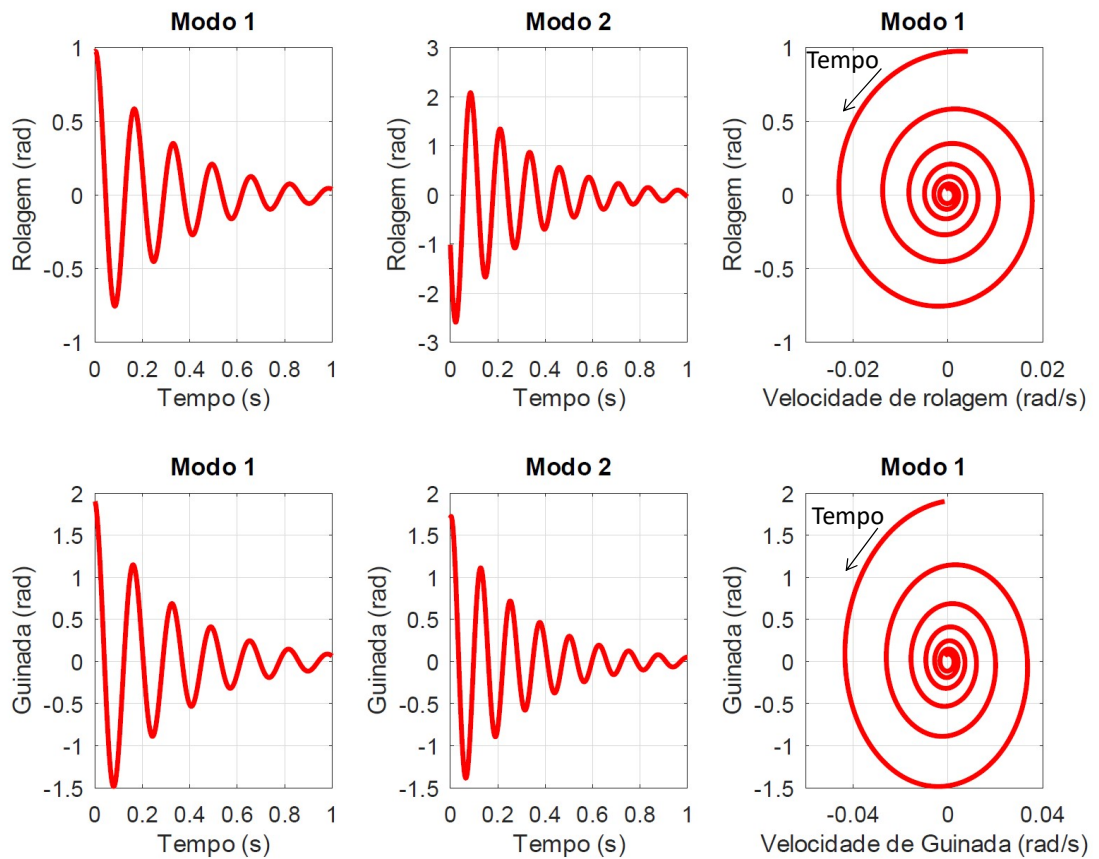
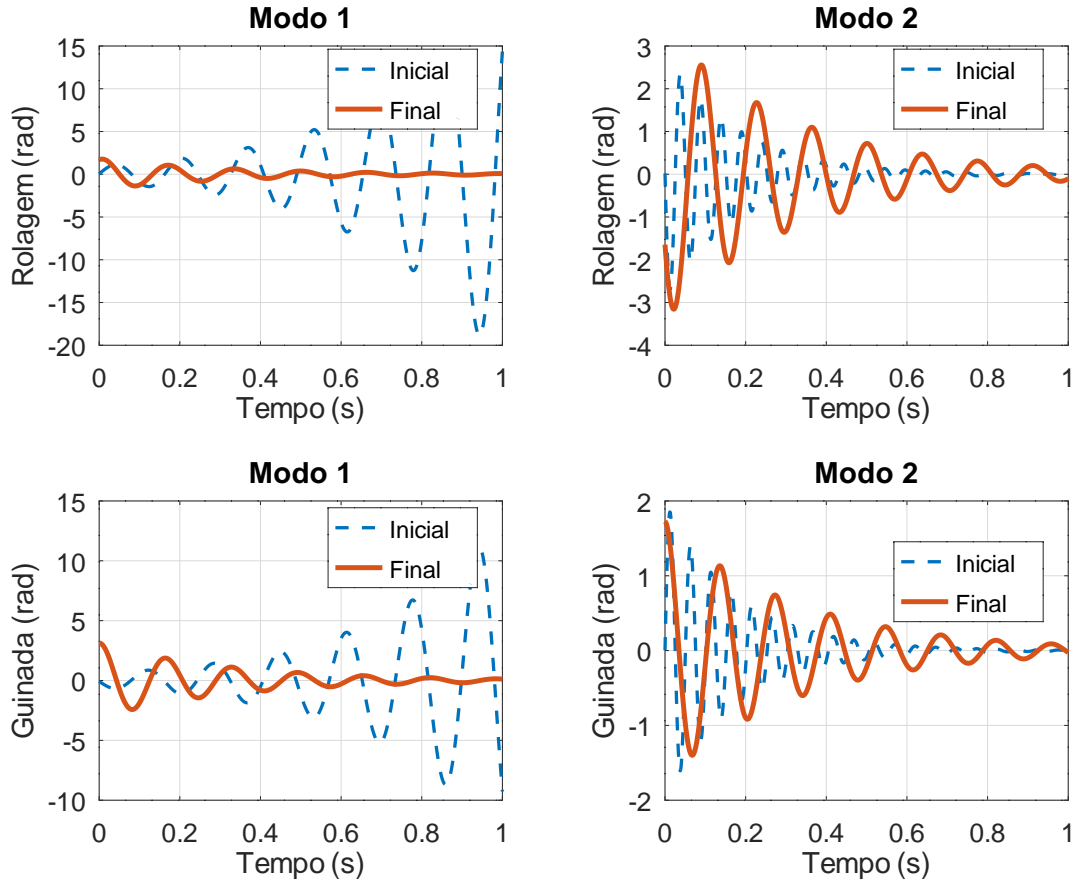


Figura 14 – Resposta modal do sistema inicial vs. sistema final, a uma condição inicial de ângulo de guinada de 0.1 rad.



Considerando a soma das contribuições de cada modo de vibrar para gerar a resposta total do sistema, tem-se o resultado apresentado na Figura 15, para a mesma condição inicial. Importante redução da resposta do sistema pode ser observada, o que demonstra a efetividade do método adotado. O sistema final, que consiste no trem de pouso reprojeto, é definido pelas propriedades apresentadas na Tabela 4. Note que existe uma redução considerável na rigidez lateral, que pode ser impraticável sob o ponto de vista prático. Isso se deve ao fato de que a aplicação da metodologia somente considera as características dinâmicas, modificando o sistema visando à sua melhoria. Assim, para cada aplicação prática da metodologia, é necessário impor restrições para os incrementos e decrementos, de maneira que sejam praticáveis.

Figura 15 – Movimento de guinada para o trem de pouso de braço arrastado para uma condição inicial.

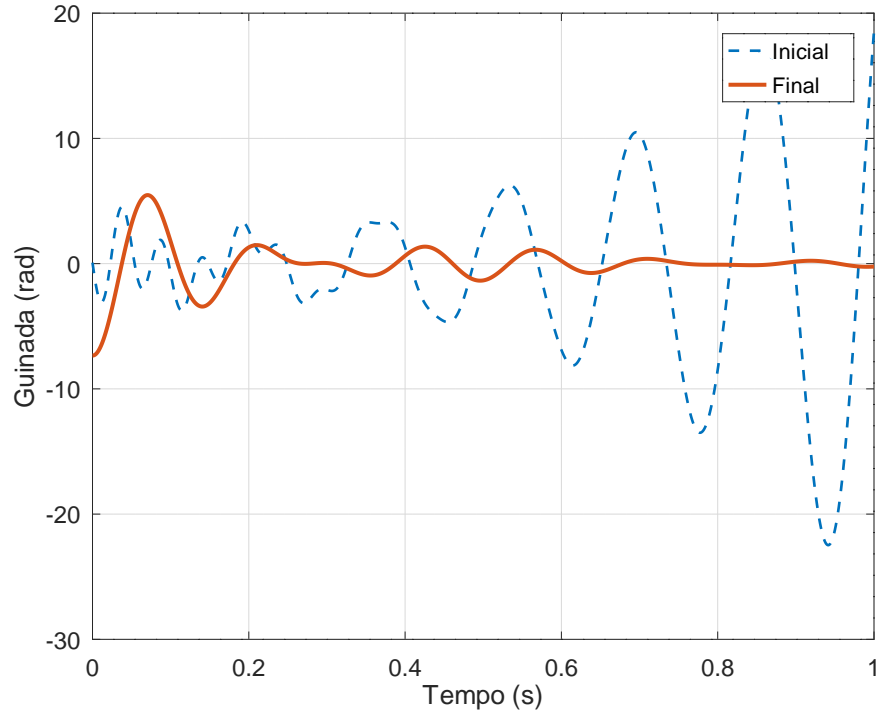


Tabela 4 – Propriedades físicas do trem de pouso de braço arrastado para os sistemas original e reprojeto.

Propriedade	Original	Reprojeto	Unidade
Rigidez lateral k_y	1.5×10^6	1.0×10^5	N/m
Rigidez de guinada k_ψ	1.0×10^5	1.7×10^5	(N/m)rad
Amortecimento lateral c_y	520	125.8	Ns/m
Amortecimento de guinada c_ψ	520	19.2	Nms/rad

4.2 Modelo de Thota

Esta seção apresenta resultados preliminares para a designação modal do trem de pouso de Thota. São consideradas duas entradas de pseudo realimentação através do vetor $\mathbf{u}(t) = \{T_\psi \ T_\phi\}^T$, que compreendem respectivamente um torque em guinada (GDL ψ) e, também, em rolagem (GDL ϕ). Ainda, são consideradas as saídas $\mathbf{y}(t) = \{\psi(t) \ \dot{\psi}(t) \ \phi(t) \ \dot{\phi}(t)\}^T$. Assim, a representação da matriz de pseudos ganhos de controle é dada conforme se apresenta a seguir. Tem-se, então, as pseudo entradas definidas por

$$T_\psi(t) = \Delta k_\psi \psi(t) + \Delta c_\psi \dot{\psi}(t) \text{ e } T_\phi = \Delta k_\phi \phi(t) + \Delta c_\phi \dot{\phi}(t).$$

$$\mathbf{K}^{(T)} = \begin{bmatrix} \Delta k_\psi & \Delta c_\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta k_\phi & \Delta c_\phi \end{bmatrix}$$

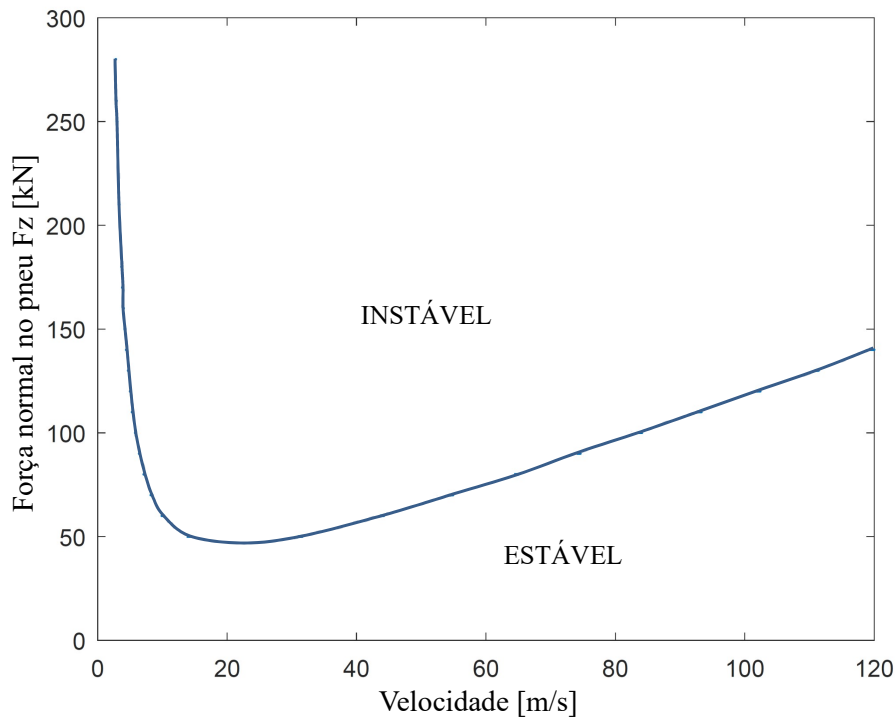
Para esta aplicação também se considera uma designação exata. O sistema é inicialmente definido pelas propriedades apresentadas na tabela 5, e uma ilustração do modelo é apresentada na Fig. 2. A análise de estabilidade para o envelope de pouso e decolagem é realizada considerando a força normal (F_z) do contato do pneu do trem de pouso com o pavimento sendo constante. No entanto, sabe-se que durante os procedimentos de pouso e decolagem tal força se altera, sendo tipicamente em forma não linear.

Para uma avaliação inicial do efeito de F_z são considerados diferentes valores e, para cada um deles, uma solução do problema de autovalores é empregada. Pode-se, com isto, determinar o limite da estabilidade do sistema, em função dos valores de F_z , conforme se apresenta na figura 16. A região acima da curva compreende o comportamento instável do trem de pouso, enquanto que para níveis de F_z abaixo da curva o sistema é livre de shimmy. Esta curva mostra a dependência da estabilidade do sistema em função do aumento da capacidade do pneu gerar força lateral e torque autoalinhante, com o aumento da força normal. Note, também, que este sistema tem dinâmica distinta daquela descrita pelo modelo de braço arrastado, que por sua vez considera um modelo de tangente, com rigidez de deriva constante, corrigido com o comprimento de relaxação.

Tabela 5 – Propriedades físicas e geométricas iniciais para o modelo de trem de pouso de Thota.

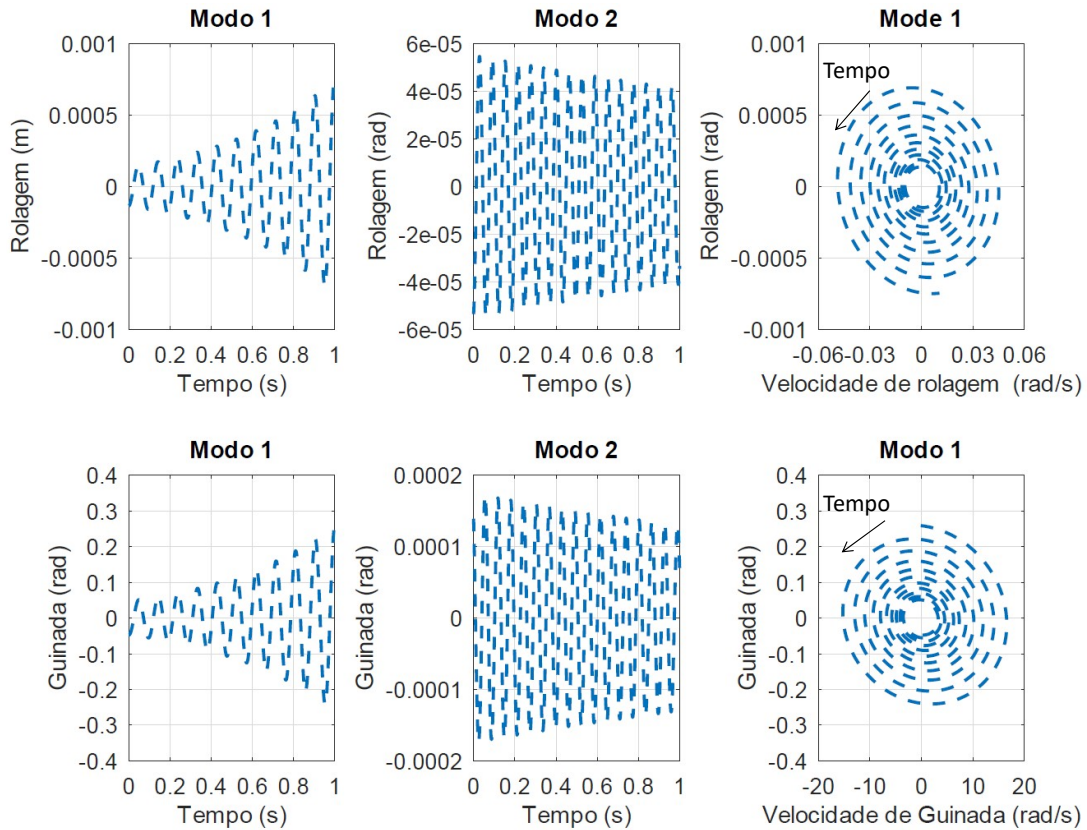
Parâmetro	Valor	Unidade
Rigidez de guinada k_ψ	3.8×10^5	Nm/rad
Rigidez de rolagem k_ϕ	6.1×10^6	(N/m)rad
Amortecimento de guinada c_ψ	300	Nms/rad
Amortecimento de rolagem c_ϕ	300	Nms/rad
Altura do trem de pouso em carga estática l_g	2.5	m
Ângulo de ataque do trem de pouso θ	0	rad
Momento de inércia na direção de guinada I_z	100	kg m ²
Momento de inércia na direção de rolagem I_x	600	kg m ²
Rigidez lateral do pneu elástico K_λ	0.002	rad ⁻¹
Amortecimento lateral do pneu elástico c_λ	570	N m ² /rad
Comprimento de relaxação do pneu σ	0.3	m
Comprimento de contato do pneu com o pavimento a	0.1	m

Figura 16 – Valores máximos da força normal do pneu F_z para assegurar estabilidade em cada uma das velocidades do trem de pouso. Acima da curva o sistema é instável.



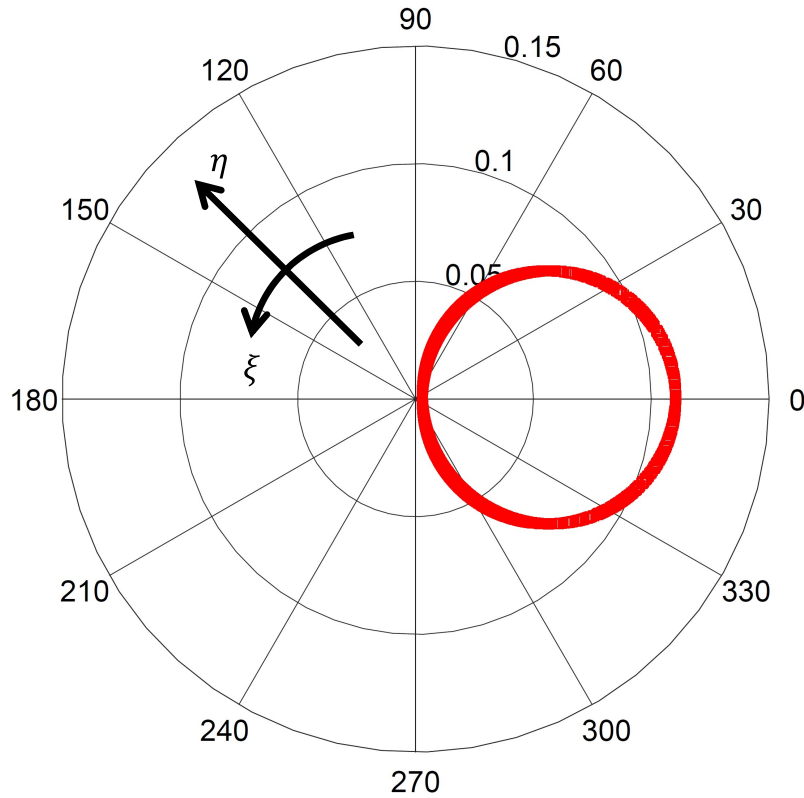
O resultado da Figura 16 é uma representação da bifurcação de Hopf associada à força F_z e à velocidade V da aeronave. Pode-se concluir que a condição crítica corresponde a $V^{crit} = 20\text{m/s}$ e $F_z^{crit} = 50\text{kN}$, pois para qualquer velocidade o sistema é estável se dinâmica do sistema assegurar $F_z < F_z^{crit}$. Assim, é conveniente adotar como configuração inicial do sistema instável esta velocidade e, ainda, uma condição tal que $F_z = 100\text{kN}$ (note que, de maneira geral, pode-se considerar qualquer $F_z \geq F_z^{crit}$). Nestas condições, considerando uma condição inicial de ângulo de guinada de 0.1 rad (aprox. 5.7°), tem-se as respostas modais descritas na Figura 17. Nota-se que o segundo modo do trem de pouso é instável, enquanto que o primeiro é estável.

Figura 17 – Resposta modal do sistema a uma condição inicial de ângulo de guinada de 0.1 rad



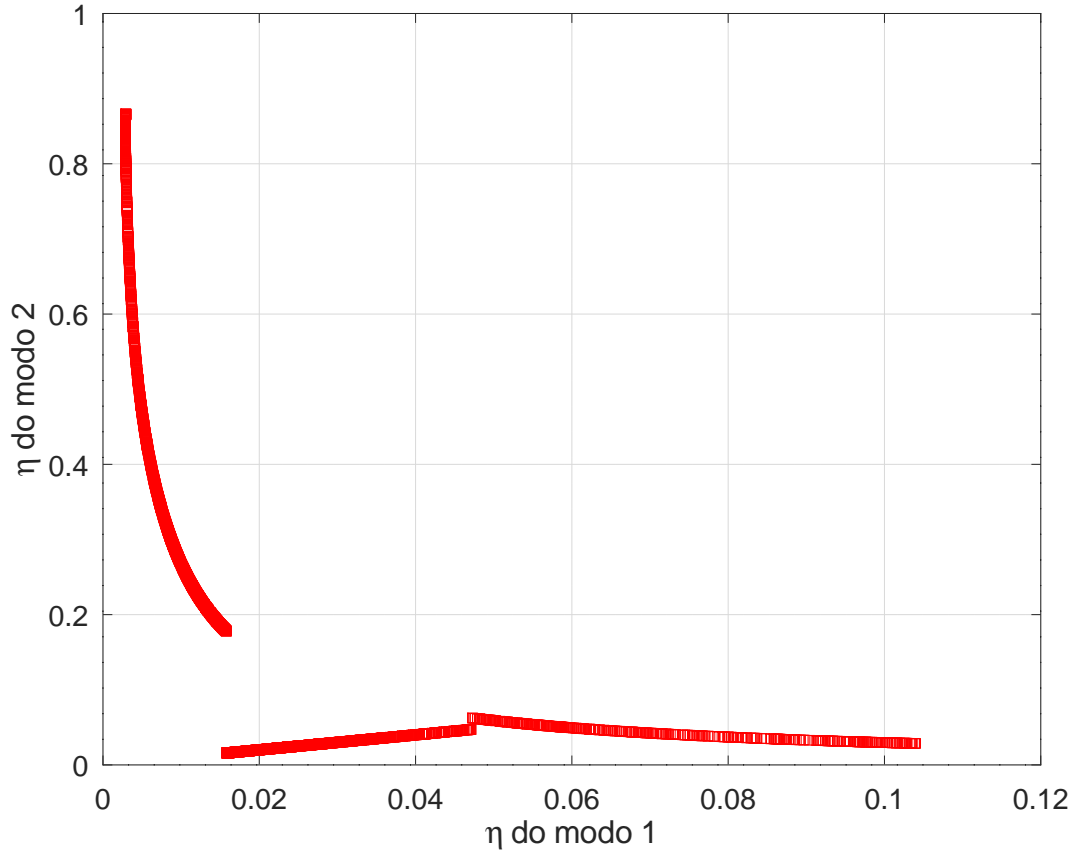
Para este caso define-se η_i e ξ_i como a razão entre os módulos e ângulos de fase dos elementos associados ao ângulo de rolagem (terceiro elemento do autovetor) ângulo de guinada (primeiro elemento do autovetor). Também, considera-se o autovalor desejado sendo $\lambda_1^d = -1.7 + 66.01j$ e, similarmente ao caso anterior, calculando-se 8000 vetores arbitrários do subespaço, tem-se a representação do diagrama polar mostrado na figura 18. Por simplicidade, neste caso também se considera $\lambda_1^d = -\Re(\lambda_1) + j\Im(\lambda_1)$.

Figura 18 – Ilustração associada ao subespaço que contém os autovetores possíveis de serem designados para o modelo de Thota se $\lambda_1^d = -\Re(\lambda_1) + j\Im(\lambda_1)$. Resultado obtido para 8000 vetores do subespaço.



Ao se obter η_1 e η_2 é possível definir a relação entre eles, mostrada na Figura 19. Diferentemente da aplicação anterior, a representação obtida expressa aparentes descontinuidades representadas por saltos em torno dos valores de $\eta_1 = 0,048$ e $\eta_1 = 0,016$. Uma vez que este resultado é obtido para um valor constante de F_z , tem-se potencialmente apenas parte da física do resultado assegurada.

Figura 19 – Comportamento de η_2 (associado ao modo 2) em termos de η_1 (associado ao modo 1) para o trem de pouso de Thota.



A partir deste diagrama da figura 19, escolhe-se $\eta_1 = 0.015$ e, por consequência, $\eta_2 = 0.184$. Com isto, os autovetores desejado e designado são mostrados na Tabela 6. A solução permite obter a matriz de pseudos ganhos de controle $\mathbf{K}^{(T)}$ mostrada a seguir. Os resultados indicam que os valores incrementais das rigidezes e amortecimentos estruturais para o reprojeto do trem de pouso são $\Delta k_\psi = -4.708 \times 10^3$ Nm/rad, $\Delta c_\psi = 795.41$ Ns/m, $\Delta k_\phi = -3.366 \times 10^6$ Nm/rad, e $\Delta c_\phi = 11.56 \times 10^3$ Nms/rad.

$$\mathbf{K}^{(T)} = \begin{bmatrix} -4.708 \times 10^3 & 795.41 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.366 \times 10^6 & 11.56 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

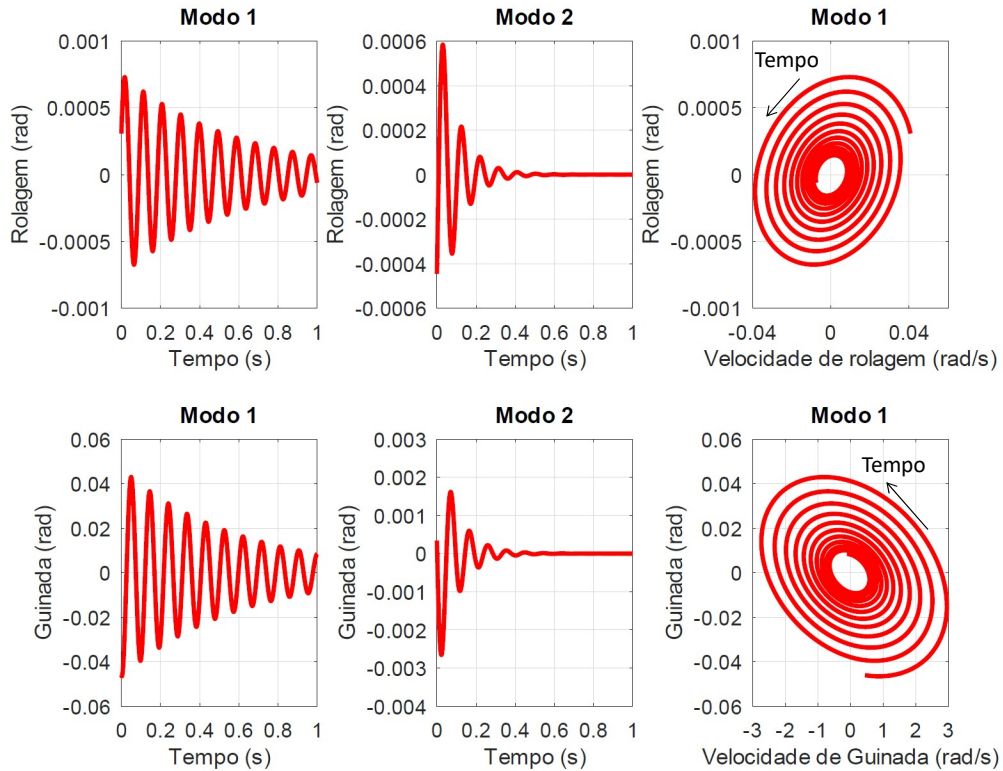
A resposta dos modos de vibrar do sistema final, após a designação do modo mais adequado para a resposta dinâmica do trem de pouso, pode ser vista na figura 20. Observa-se que a dinâmica da condição reprojeta é estável.

Ao se comparar a resposta modal do sistema nas condições original e reprojetao pode-

Tabela 6 – Autovetores desejado e designado, normalizados em relação ao ângulo de guinada ψ .

GDL	\mathbf{v}_1^d	Autovetor designado
ψ	$1.0 + j0.0$	$1.0 + j0.0$
$\dot{\psi}$	$-1.7 + j66,014$	$-1.7 + j66,014$
ϕ	$-0.005 - j0.014$	$-0.005 - j0.014$
$\dot{\phi}$	$0.94 + j0.356$	$0.94 + j0.356$
λ	$0.186 - j0.155$	$0.186 - j0.155$

Figura 20 – Resposta modal do trem de pouso de Thota reprojetoado, para condição inicial de ângulo de guinada de 0.1 rad



se claramente confirmar a dinâmica estável obtida, conforme ilustra a figura 21. Ainda, de forma complementar, a resposta física do movimento de guinada é mostrada na figura 22. A resposta do sistema na condição final é obtida para as propriedades físicas apresentadas na tabela 4.

Figura 21 – Resposta modal do trem de pouso de Thota nas condições original e reprojeto, para condição inicial de ângulo de guinada de 0.1 rad.

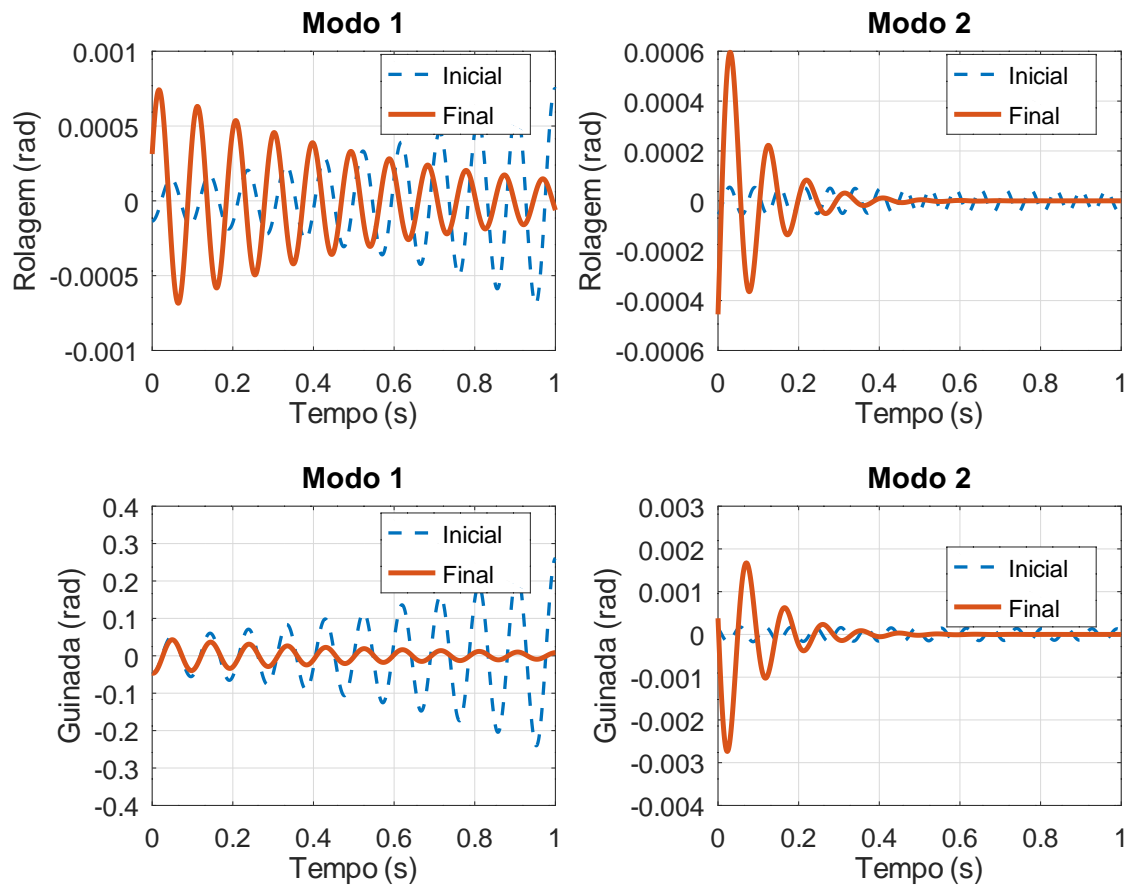
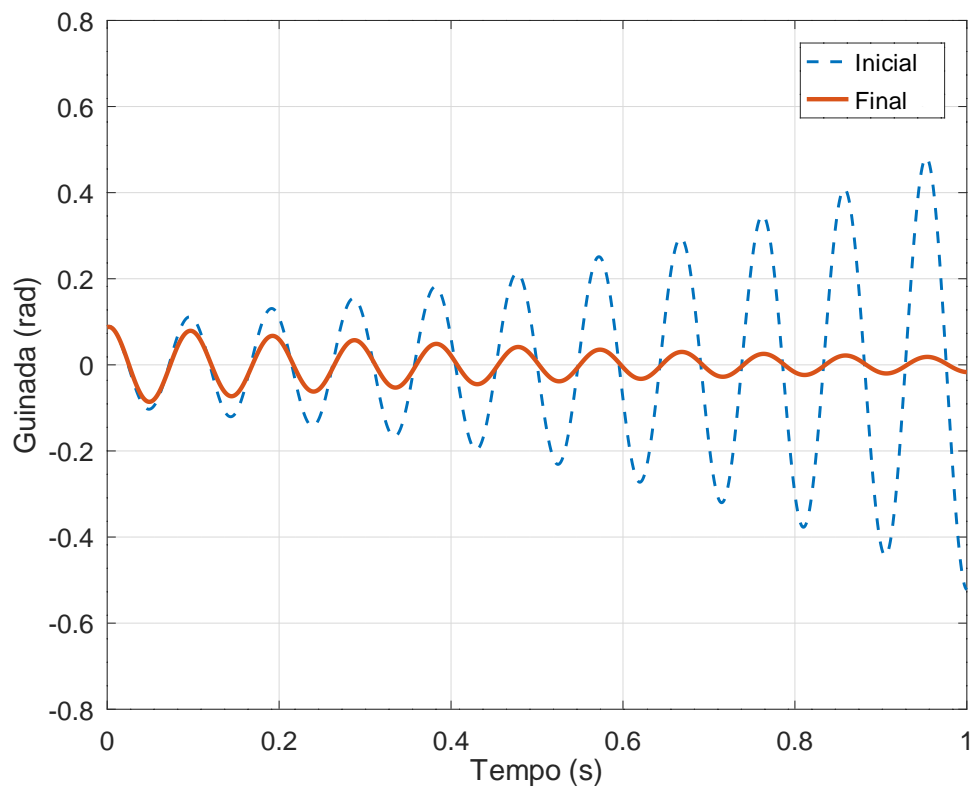


Tabela 7 – Propriedades físicas do trem de pouso de Thota, para os sistemas original e reprojeto.

Parâmetro	Original	Reprojeto	Unidade
Rigidez de guinada k_ψ	3.8×10^5	3.753×10^5	(Nm)/rad
Rigidez de rolagem k_ϕ	6.1×10^6	2.734×10^6	(N/m)rad
Amortecimento em guinada c_ψ	300	1095.4	Nm/rad
Amortecimento em rolagem c_ϕ	300	11861.54	Nms/rad

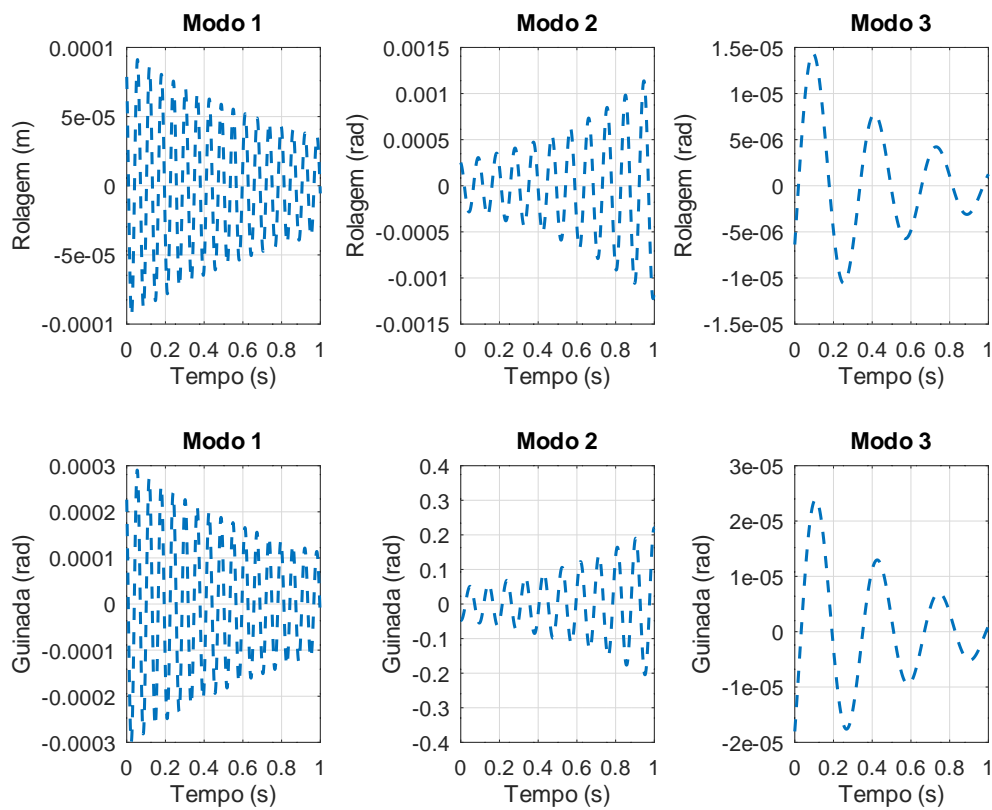
Figura 22 – Resposta total de guinada para o trem de pouso de Thota, para condição inicial em ângulo de guinada.



4.3 Modelo de Thota com Amortecedor de Massa

Considerando a condição estabelecida na aplicação anterior, ou seja, $V = 20m/s$ e $F_z = 50kN$, para o trem de pouso com o amortecedor de massa, para uma condição inicial de 0,1 rad em ginada, tem-se que a resposta do sistema original apresentada na Figura 23. Tem-se, então, que o segundo modo é instável.

Figura 23 – Resposta modal do trem de pouso de Thota com inclusão de amortecedor de massa, para condição inicial em ângulo de guinada de 0.1 rad.



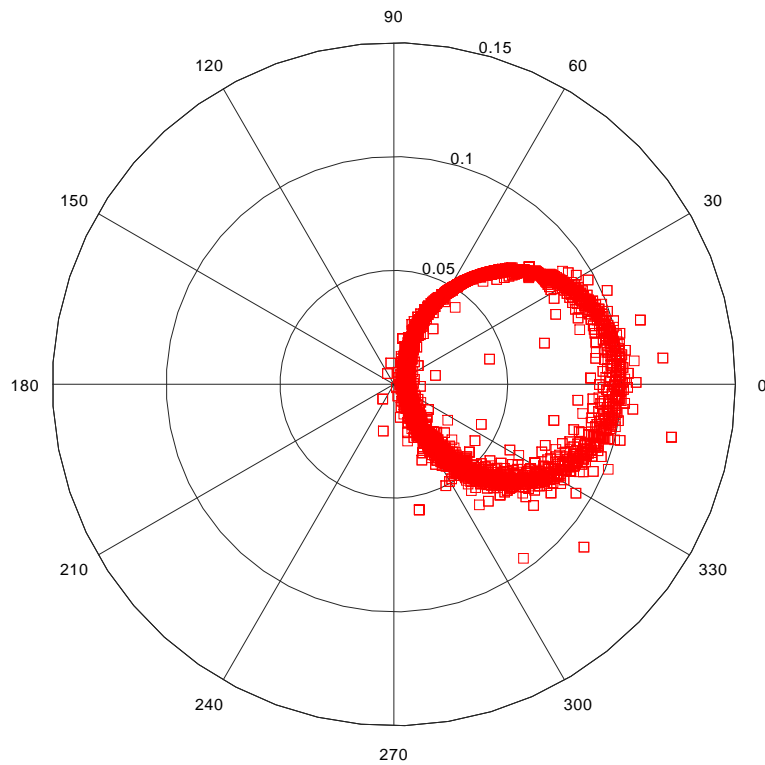
Com a inclusão do novo grau de liberdade no sistema, para descrever o amortecedor, o subespaço formado pelas colunas da matriz $\mathbf{L}_i = (\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \mathbf{G}$ apresenta mais uma dimensão pelo fato de se considerar uma pseudo entrada adicional. Cada coluna da matriz \mathbf{L}_i é apresentada como colunas da tabela 8. Esta base é obtida a partir de $\lambda_1^d = -1.54 + j66.091$, que por simplicidade também corresponde ao autovalor original, com o oposto da parte real (para corresponder a uma dinâmica estável). Também, alguns vetores do subespaço são considerados para se obter a ilustração mostrada na Figura 24.

Uma vez que para esta aplicação tem-se três valores de η , sendo $\eta_i = \eta_2$ e η_z ($z \neq i$) os parâmetros η_1 e η_3 , tem-se que avaliar as contribuições relativas dos graus de liberdade

Tabela 8 – Autovetores da base $\mathbf{L}_i = [\mathbf{L}_{(1)i} \ \mathbf{L}_{(2)i} \ \mathbf{L}_{(3)i}] = \mathbf{L}_2$ que gera o subespaço \mathbb{V} para o tem de pouso de Thota com amortecedor de massa, para $\lambda_2^d = -\Re(\lambda_2) + j\Im(\lambda_2)$.

GDL	$\mathbf{L}_{(1)2}$	$\mathbf{L}_{(2)2}$	$\mathbf{L}_{(3)2}$
ψ	$-0.00045 + j0.01511$	$0.01121 - j0.01008$	$-0.00805 + j0.01150$
$\dot{\psi}$	$-0.99819 - j0.05320$	$0.64981 + j0.75635$	$-0.74781 - j0.54999$
ϕ	$-0.00004 + j0.00008$	$0.00119 - j0.00002$	$-0.00077 - j0.000005$
$\dot{\phi}$	$-0.00514 - j0.00265$	$-0.00037 + j0.07841$	$0.00151 - j0.05167$
y_m	$0.00019 - j0.00028$	$-0.00010 + j0.00021$	$0.00556 - j0.00015$
\dot{y}_m	$0.01817 + j0.01333$	$-0.01393 - j0.00728$	$0.00113 + j0.36802$
λ	$0.00194 + j0.00255$	$0.00186 - j0.00174$	$-0.00060 + j0.00201$

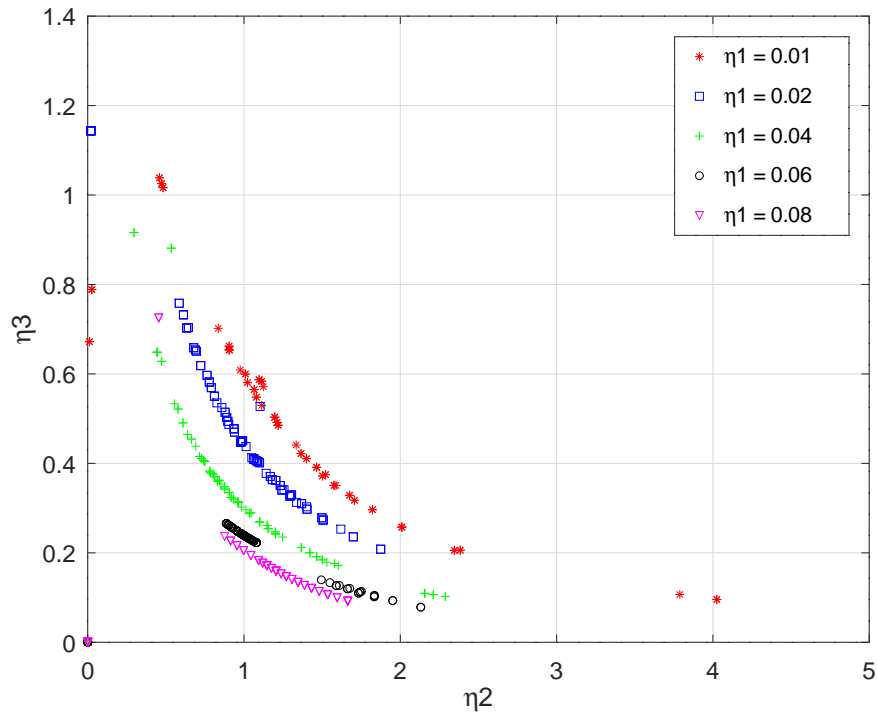
Figura 24 – Ilustração associada ao subespaço que contém os autovetores possíveis de serem designados para o modelo de Thota com amortecedor de massa se $\lambda_2^d = -\Re(\lambda_2) + j\Im(\lambda_2)$. Resultado obtido para 8000 vetores do subespaço.



através de cada um dos três. Assim, a figura 25 as curvas de η_3 em termos de η_2 para diferentes valores de η_1 . Note que sistemas com múltiplos modos requerem avaliação mais detalhadas. Também, em particular para este caso, tem-se baixos valores de η_3

ao se escolher os maiores valores de η_2 , e vice-versa, sendo ainda os maiores valores de η_1 implicam nos menores valores de η_2 e η_3 , indicando, portanto, que uma solução de compromisso deve ser definida.

Figura 25 – Comportamento de η_3 (associado ao modo 3) em termos de η_2 (do modo 2) para diferentes valores de η_1 (associado ao modo 1).



Supondo que se escolha $\eta_2 = 4$, para minizar a participação do GDL de guinada no modo 2, tem-se de forma correspondente $\eta_1 = 0.01$ e $\eta_3 = 0.1$, o que implica em modos 1 e 3 menos adequados para a dinâmica do trem de pouso. Nesta linha de raciocínio, é mais conveniente escolher valores intermediários, como, por exemplo, $\eta_1 = 0.02$, $\eta_2 = 1.2$ e $\eta_3 = 0.4$. Para este caso, o autovetor desejado que equivale ao $\eta_1 = 0.02$ é representado na Tabela 9.

Tabela 9 – Autovetores desejado e designado para o trem de pouso de Thota com amortecedor de massa, normalizados em relação elemento associado ao ângulo de guinada ψ para simplicidade de visualização.

GDL	\mathbf{v}_2^d	Autovetor designado
ψ	$1.0 + j0.0$	$1.0 + j0.0$
$\dot{\psi}$	$-1.54 + j66.09$	$-1.54 + j66.09$
ϕ	$0.0076 + j0.0188$	$0.0076 + j0.0188$
$\dot{\phi}$	$-1.2506 + j0.4706$	$-1.2506 + j0.4706$
y_m	$-0.0500 - j0.1535$	$-0.0500 - j0.1535$
\dot{y}_m	$10.2251 - j3.0710$	$10.2251 - j3.0710$
λ	$0.1466 - j0.1104$	$0.1466 - j0.1104$

A designação modal permite obter a matriz de pseudos ganhos de controle $\mathbf{K}^{(TM)}$ apresentada a seguir. Os resultados indicam os valores incrementais das rigidezes e amortecimentos estruturais do trem de pouso sendo: $\Delta k_\psi = 6923.7331$ Nm/rad, $\Delta c_\psi = 434.2475$ Ns/m, $\Delta k_\phi = 4.7943 \times 10^5$ Nm/rad, $\Delta c_\phi = 1229.9400$ Nm.s/rad, $\Delta k_m = 7.1907 \times 10^4$ Nm/rad, $\Delta c_m = 1344.0317$ Nms/rad.

$$\mathbf{K}^{(TM)} = \begin{bmatrix} 6.92 \times 10^3 & 434.25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.79 \times 10^5 & 1.23 \times 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7.19 \times 10^4 & 1.34 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

Como resposta modal a condição inicial, tem-se a dinâmica do sistema reprojeto mostrada na Figura 26. Observa-se estáveis todos os três modos do trem de pouso. A resposta física do sistema é também apresentada na Figura 27, pela qual nota-se claramente a melhor resposta do sistema final. Para se obter este resultado final são consideradas as propriedades físicas mostradas na Tabela 4. Finalmente, a Figura 28 mostra uma avaliação da estabilidade do trem de pouso para as velocidades de operação, considerando o sistema reprojeto. Nota-se que a força normal F_z é maior para o sistema reprojeto (linha tracejada), em relação ao sistema inicial (linha contínua).

Figura 26 – Resposta modal do trem de pouso de Thota com amortecedor, reprojetoado, para condição inicial em ângulo de guinada de 0.1 rad.

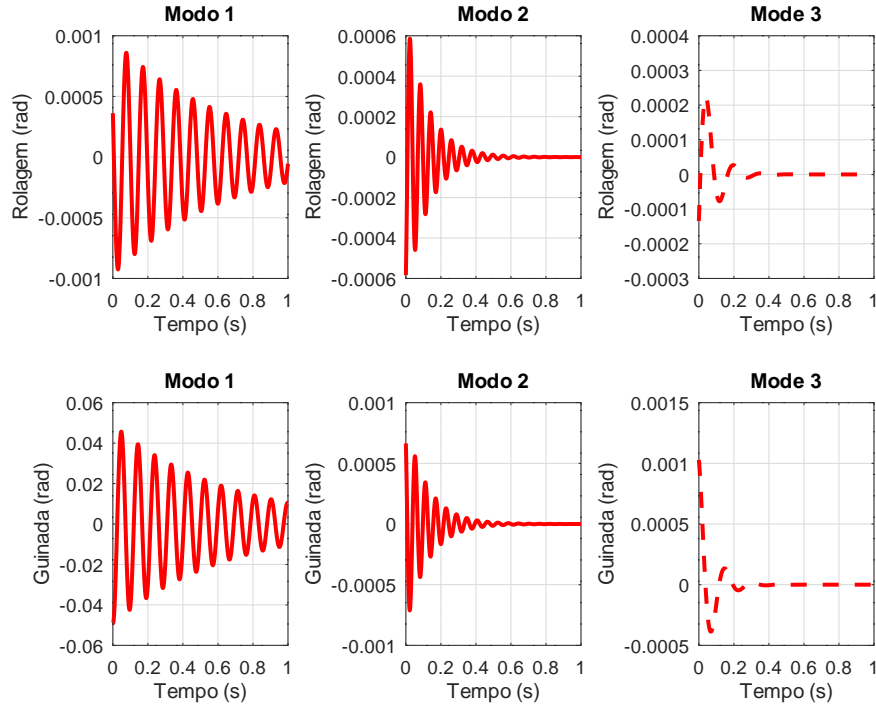


Tabela 10 – Propriedades físicas para o trem de pouso de Thota com amortecedor de massa para os sistemas original e reprojetoado.

Parâmetro	Original	Reprojetoado	Unidade
Rigidez de guinada k_ψ	3.8×10^5	3.869×10^5	(Nm)/rad
Rigidez de rolagem k_ϕ	6.1×10^6	6.5794×10^6	(N/m)rad
Rigidez do amortecedor de massa k_m	2.0×10^4	9.1907×10^4	N/m
Amortec.de guinada c_ψ	300	734.25	Nm/rad
Amortec. de rolagem c_ϕ	300	1529.9	Nms/rad
Amortec. do amortecedor de massa c_m	200	1544	Nm/s

Figura 27 – Resposta total de guinada do sistema a uma condição inicial de ângulo de guinada.

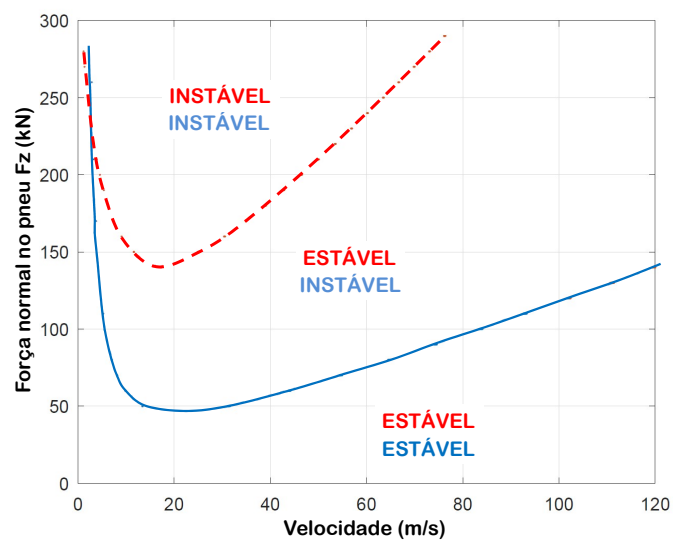
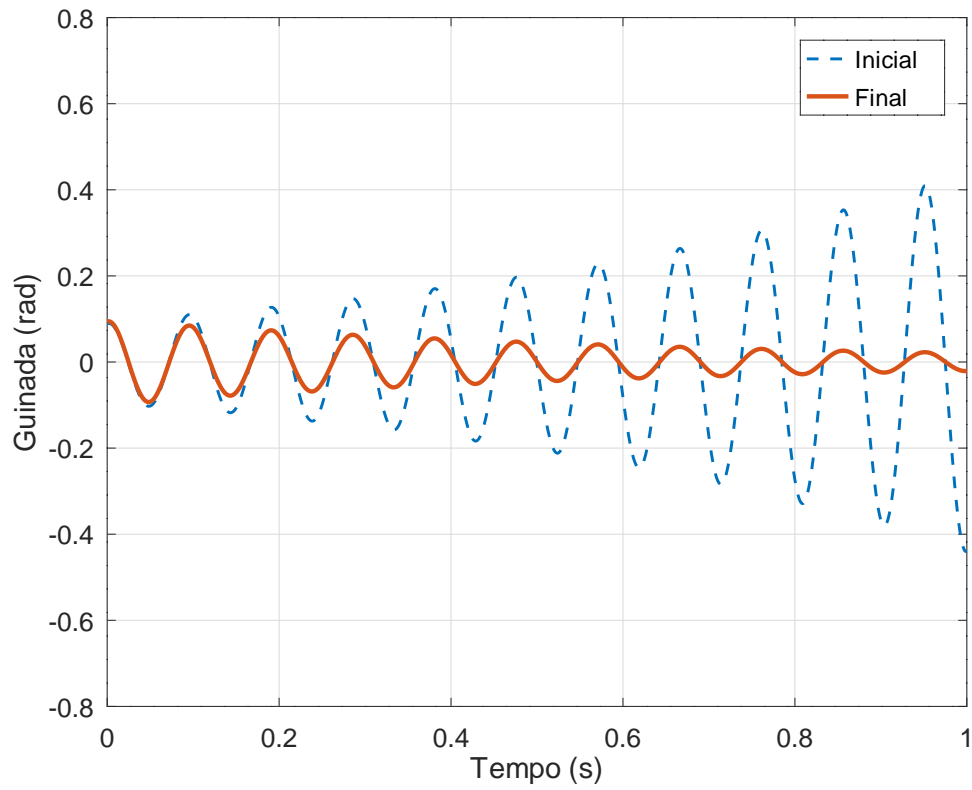
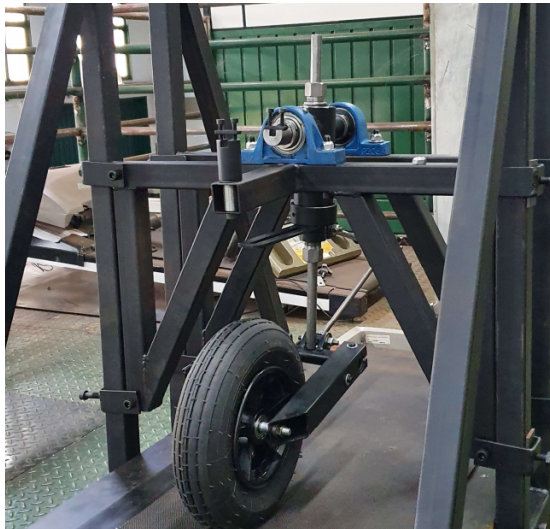


Figura 28 – Comparação de força normal F_z dos modelos de Thota inicial (linha contínua) e reprojeto (linha tracejada).

5 Resultados Experimentais

A metodologia desenvolvida nesta tese foi avaliada experimentalmente considerando o aparato de ensaios apresentado na fotografia da Figura 29. O aparato experimental construído consiste de uma esteira comercial, uma estrutura secundária suporte, e um sistema representativo de um trem de pouso dianteiro (de nariz). Trata-se de um sistema simplificado, que permite reproduzir dois graus de liberdade de guinada, denotados ψ_1 e ψ_2 , além da rolagem ϕ . O sistema foi projetado de forma modular, e portanto permite facilmente a substituição de componentes que representam partes importantes do trem de pouso. A esteira posicionada na parte inferior do trem de pouso permite regulagem da velocidade, e com isso se pode simular diferentes velocidades de translação do trem de pouso.

Figura 29 – Fotografia do aparato de ensaios experimentais do trem de pouso.

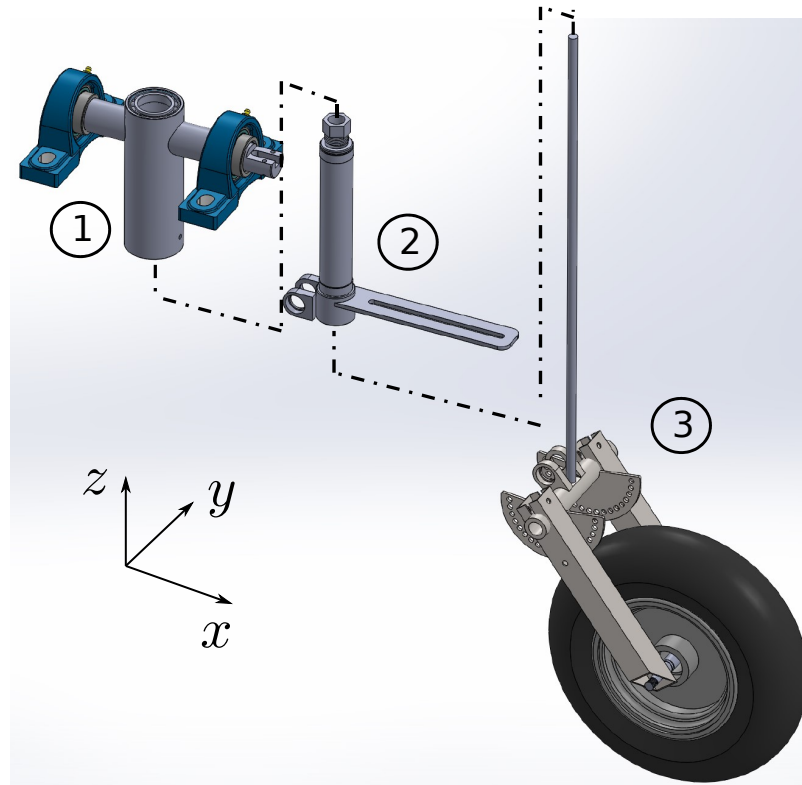


Na Figura 30 são mostrados os três principais corpos que compõem o trem de pouso. Eles são indicados na figura pelos números 1 (um), 2 (dois) e 3 (três), e consistem em:

1. Corpo superior, que permite um grau de liberdade de rotação em rolagem ϕ em torno dos mancais de rolamento;
2. Eixo de esterçamento, que permite um grau de liberdade de rotação em guinada ψ_1 , em torno do eixo z ;
3. Carro principal, que permite dois movimentos, sendo o grau de liberdade de rotação em guinada (ψ_2), e a translação relativa do trem de pouso, na direção x . O

movimento de guinada é permitido por um mancal formado pela haste e duas buchas de bronze fixadas ao eixo de esterçamento, uma superior e outra inferior.

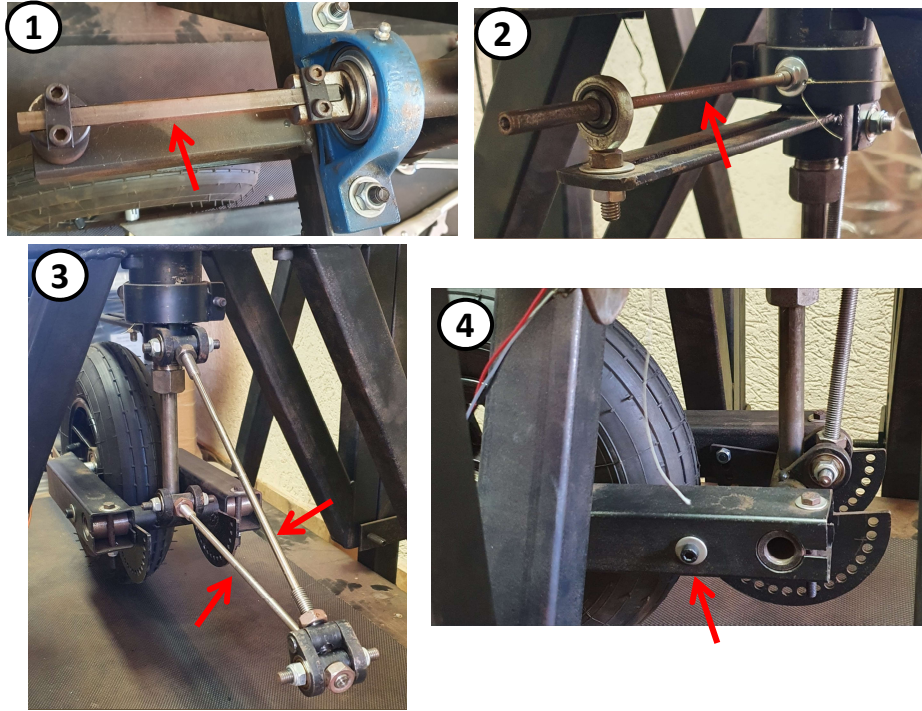
Figura 30 – Vista dos três principais corpos que compõem o trem de pouso.



As fotografias na Figura 31 apresentam imagens dos componentes estruturais que permitem a modificação da dinâmica do trem de pouso. Os componentes foram projetados para simplificar alterações diretas nos parâmetros envolvidos no modelo dinâmico do sistema. Foram empregadas quatro estratégias, conforme se lista a seguir.

1. *Barra de torção*, que define a rigidez de rolagem. A rigidez é alterada pela substituição da barra.
2. *Barra de flexão com apoio móvel*, que proporciona rigidez de guinada entre o eixo de esterçamento e o corpo superior do trem de pouso. A alteração pode ser realizada ao se modificar a posição do apoio (terminal rotular) da barra.
3. *Braços de articulação*, que une o eixo de esterçamento ao carro principal. A substituição das barras (por alteração de diâmetro e comprimento) resultam na modificação desta rigidez de guinada.
4. *Braço arrastado*, cuja alteração do comprimento e altura do trem de pouso alteram a dinâmica do sistema.

Figura 31 – Fotografias de componentes do sistema empregados para alteração da dinâmica estrutural: 1) barra de torção, 2) barra de flexão, 3) braços de articulação, 4) braço arrastado.



5.1 Modelagem do Aparato Experimental

O modelo dinâmico empregado consiste no modelo de Thota adicionando um grau de liberdade de rotação em guinada, completando com isso, um modelo de quatro graus de liberdade, sendo a rolagem $\phi(t)$, guinada do eixo de esterçamento $\psi_1(t)$, guinada do carro principal $\psi_2(t)$ e a deriva lateral do pneu $\lambda(t)$. Assim, o vetor de estados pode ser representado pela Eq. (69)

$$\mathbf{x}_E(t) = \{\psi_1(t) \ \dot{\psi}_1(t) \ \psi_2(t) \ \dot{\psi}_2(t) \ \phi(t) \ \dot{\phi}(t) \ \lambda(t)\}^T \quad (69)$$

As equações de movimento do sistema são apresentadas a seguir. Note que existem modificações em relação às equações apresentadas por [Thota, Krauskopf and Lowenberg \(2012\)](#) devido a inclusão do grau de liberdade ψ_1 , além do grau de liberdade do carro principal do trem de pouso, denotado ψ_2 . Também, note que o aparato experimental apresenta o braço arrastado, que por sua vez não é considerado no modelo de [Thota, Krauskopf and Lowenberg \(2012\)](#). Ainda, considera-se o acoplamento giroscópico dos graus de liberdade de guinada e rolagem, devido à rotação do pneu e roda, e representado nas Eq. (70) pelos termos $2I\dot{\phi}\frac{V}{R}$ e $2I\dot{\psi}\frac{V}{R}$, sendo I o momento de inércia do conjunto roda

e pneu, R o raio do pneu e V a velocidade longitudinal do trem de pouso, sendo neste caso relativa à esteira. Então,

$$\begin{aligned}
 I_{1z}\ddot{\psi}_1 + k_{\psi_1}\psi_1 + c_{\psi_1}\dot{\psi}_1 + k_{\psi_2}(\psi_1 - \psi_2) + c_{\psi_2}(\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2) &= 0 \\
 I_{2z}\ddot{\psi}_2 + k_{\psi_2}(\psi_2 - \psi_1) + c_{\psi_2}(\dot{\psi}_2 - \dot{\psi}_1) + \frac{e_{cp}k_\phi}{h_{cp}^2}(\phi h_{cp} + e_{cp}\psi_2) + \frac{e_{cp}c_\phi}{h_{cp}^2}(\dot{\phi}h_{cp} + e_{cp}\dot{\psi}_2) \\
 + M_{T_\psi} + M_{Z_\psi} + 2I\dot{\phi}\frac{V}{R} &= 0 \quad (70)
 \end{aligned}$$

$$I_x\ddot{\phi} + \frac{k_\phi}{h_{cp}}(\phi h_{cp} + e_{cp}\psi_2) + \frac{c_\phi}{h_{cp}}(\dot{\phi}h_{cp} + e_{cp}\dot{\psi}_2) + M_{T_\phi} + M_{Z_\phi} + 2I\dot{\psi}\frac{V}{R} = 0$$

$$\dot{\lambda} + \frac{V}{\sigma}\lambda - V\psi_2\cos\theta - l_g\dot{\phi} - (e_t - a)\dot{\psi}_2\cos\theta = 0$$

sendo os momentos gerados pelas forças no pneu dados por:

$$M_{T_\psi} = [k_\alpha F_z \frac{\lambda}{\sigma} + e_t(7k_\lambda F_z \frac{\lambda}{\sigma}) + \frac{c_\lambda}{V}\dot{\psi}_2]\cos\theta \quad (71)$$

$$M_{Z_\psi} = -F_z e_t \psi_2 \cos\theta \sin\theta \quad (72)$$

$$M_{T_\phi} = [k_\alpha F_z \frac{\lambda}{\sigma} + e_t(7k_\lambda F_z \frac{\lambda}{\sigma}) + \frac{c_\lambda}{V}\dot{\psi}_2]\sin\theta + l_g F_{k_\lambda} \cos\theta \quad (73)$$

$$M_{Z_\phi} = -F_z e_t \psi_2 \cos^2\theta \quad (74)$$

sendo k_{ψ_1} , k_{ψ_2} e k_ϕ as rigidezes respectivamente de guinadas e rolagem, e c_{ψ_1} , c_{ψ_2} e c_ϕ os coeficientes de amortecimento respectivamente de guinadas e rolagem. Também, e_{cp} indica a posição do CG do carro principal da direção na direção longitudinal e h_{cp} é sua posição na direção vertical, ambos em relação aos eixos de guinada ψ_1 e rolagem ϕ , respectivamente. Ainda, tem-se que (RAHMANI; BEHDIAN, 2018)

$$F_{k_\lambda} = 7k_\lambda F_z \frac{\lambda}{\sigma} \quad (75)$$

A partir das Equações (70) a (75), e considerando que o ângulo de inclinação de ataque do trem de pouso é $\theta = 0$, o modelo de trem de pouso do aparato experimental pode ser representado no espaço de estados com a seguinte matrizes dinâmica $\mathbf{F}_E = [\mathbf{F}_{E_1} \ \mathbf{F}_{E_2}]$, que permite escrever

$$\dot{\mathbf{x}}_E(t) = \mathbf{F}_E \mathbf{x}_E(t) \quad (76)$$

sendo,

$$\mathbf{F}_{E_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-(k_{\psi_1} + k_{\psi_2})}{I_{1z}} & \frac{-(c_{\psi_1} + c_{\psi_2})}{I_{1z}} & \frac{k_{\psi_2}}{I_{1z}} & \frac{c_{\psi_2}}{I_{1z}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_{\psi_2}}{I_{2z}} & \frac{c_{\psi_2}}{I_{2z}} & -\left(\frac{k_{\psi_2}}{I_{2z}} + \frac{k_{\phi} e_{cp}^2}{I_{2z} h_{cp}^2}\right) & -\left(\frac{c_{\psi_2}}{I_{2z}} + \frac{c_{\phi} e_{cp}^2}{I_{2z} h_{cp}^2} + \frac{c_{\lambda}}{I_{2z} V}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k_{\phi} e_{cp}}{h_{cp} I_x} + \frac{F_z e_{cp}}{I_x} & -\left(\frac{2IV}{I_x R} + \frac{c_{\phi} e_{cp}}{h_{cp} I_x}\right) \\ 0 & 0 & V & (e_t - a) \end{bmatrix} \quad (77)$$

$$\mathbf{F}_{E_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_{\phi} e_{cp}}{I_{z_2} h_{cp}} & -\left(\frac{c_{\phi} e_{cp}}{I_{z_2} h_{cp}} + \frac{2IV}{I_{z_2} R}\right) & \frac{-F_z (k_{\alpha} + 7e_t k_{\lambda})}{I_{z_2} \sigma} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-k_{\phi}}{I_x} & \frac{-c_{\phi}}{I_x} & \frac{-F_z 7k_{\lambda} l_g}{I_x \sigma} \\ 0 & l_g & \frac{-V}{\sigma} \end{bmatrix} \quad (78)$$

5.2 Modelo Dinâmico e Aparato Experimental

Para comparação dos resultados numéricos computacionais e ensaios experimentais considera-se inicialmente o modelo dinâmico estrutural para velocidade nula ($V = 0$). A matriz dinâmica mostrada na Equação (79) descreve o sistema ao se eliminar a influência do contato pneu com solo, ou seja, $\dot{\mathbf{x}}_{E_0}(t) = \mathbf{F}_{E_0} \mathbf{x}_{E_0}(t)$, sendo $\mathbf{x}_{E_0} = \{\psi_1(t) \ \dot{\psi}_1(t) \ \psi_2(t) \ \dot{\psi}_2(t) \ \phi(t) \ \dot{\phi}(t)\}^T$ e

$$\mathbf{F}_{E_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-(k_{\psi_1} + k_{\psi_2})}{I_{1z}} & \frac{-(c_{\psi_1} + c_{\psi_2})}{I_{1z}} & \frac{k_{\psi_2}}{I_{1z}} & \frac{c_{\psi_2}}{I_{1z}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{k_{\psi_2}}{I_{2z}} & \frac{c_{\psi_2}}{I_{2z}} & -\left(\frac{k_{\psi_2}}{I_{2z}} + \frac{k_{\phi} e_t^2}{I_{2z} h^2}\right) & -\left(\frac{c_{\psi_2}}{I_{2z}} + \frac{c_{\phi} e_t^2}{I_{2z} h^2}\right) & -\frac{k_{\phi} e_t}{I_{z_2} h} & -\frac{c_{\phi} e_t}{I_{z_2} h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{k_{\phi} e_t}{h I_x} & -\frac{c_{\phi} e_t}{h I_x} & \frac{-k_{\phi}}{I_x} & \frac{-c_{\phi}}{I_x} \end{bmatrix} \quad (79)$$

Note que $\mathbf{x}_E = \{\mathbf{x}_{E_0}^T \ \lambda\}^T$.

O procedimento adotado para obter o modelo computacional representativo do aparato experimental consiste em: *i*) obter os parâmetros físicos do sistema, como inércias, rigidezes e coeficientes de amortecimento. As inércias são obtidas pelo método pendular,

similar à abordagem descrita na referência [Gracey \(1948\)](#). As rigidezes e coeficientes de amortecimento são obtidos a partir a frequência e do decaimento do sinal experimental da oscilação livre do sistema. Para isso, o sistema é devidamente fixado para manter apenas cada um dos graus de liberdade livres, separadamente. Tratam-se então de valores iniciais de rigidez, representativos da dinâmica desacoplada, que é então atualizada com base nas medidas experimentais.

5.2.1 Inércias, Rigidezes e Coeficientes de Amortecimento

Para obtenção da inércia pelo método Pendular são verificadas as posição do centro de gravidade (CG) do sistema. Os CGs são indicados nas Figuras 32 e 33, respectivamente para o trem de pouso e carro principal com a haste, e foram determinados por equilíbrio de momento em torno de um eixo. Cada parte do sistema foi separadamente avaliada bi-apoiada, sendo um lado em apoio fixo e o outro sobre uma balança. Assim, conhecendo a massa total, a distância do apoio fixo à balança e a massa aparente verificada na balança, empregou-se o equilíbrio de momento em torno de um eixo passando pelo apoio fixo. Em particular para carro principal, conforme se ilustra na Figura 33, foi considerado o eixo representado pela linha traço-ponto (vermelha), com direção paralela ao eixo x . O CG desta parte do sistema foi também identificado sem considerar o conjunto roda e pneu, permitindo se determinar o momento de inércia em relação ao seu eixo de rotação. Informações complementares são apresentadas a seguir.

Figura 32 – Indicação de coordenada da posição do CG do carro principal do trem de pouso em relação ao eixo de articulação para rolagem.

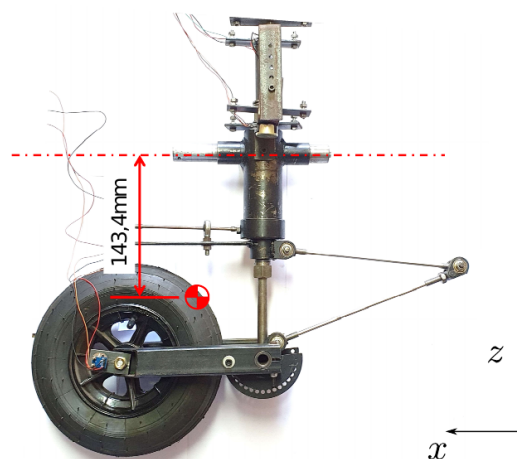
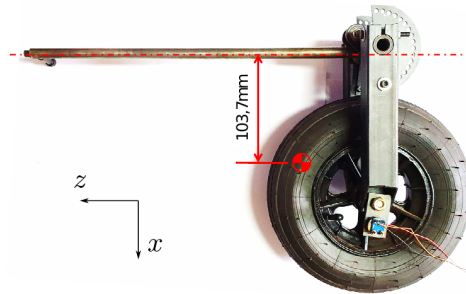
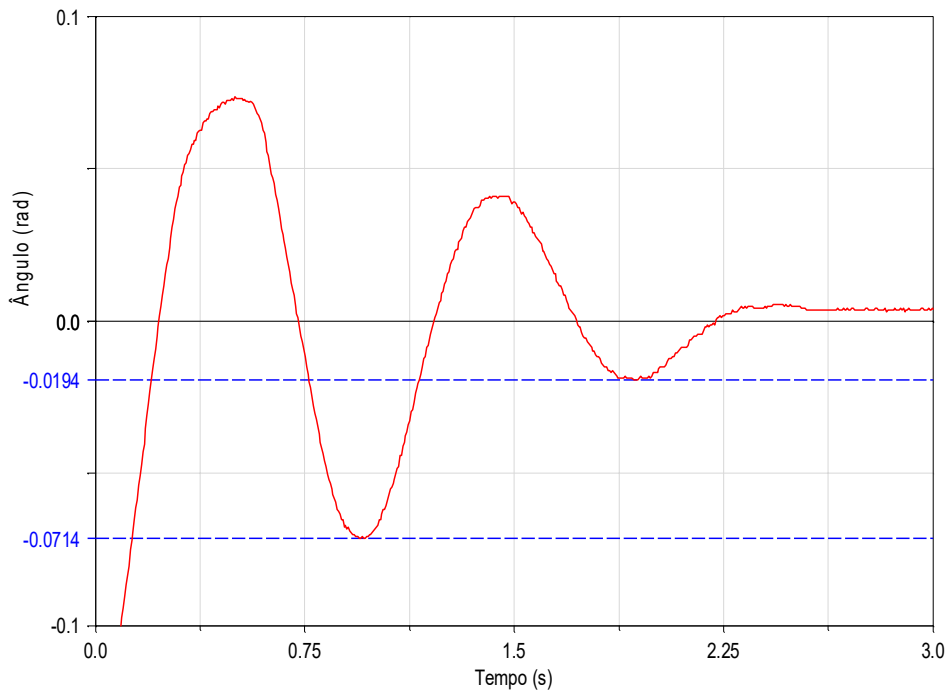


Figura 33 – Posição do CG do carro principal em relação à haste de articulação em guinada.



Para a determinação da inércia de rolagem do trem de pouso (I_x) foi obtida a resposta pendular mostrada na Figura 34. O movimento pendular se deu no plano yz , com atuação da força gravitacional direção $-z$, o que foi possível ao posicionar o sistema como indicado na fotografia da Figura 32. O fator de amortecimento foi obtido a partir do decaimento temporal da curva. Para isso, conforme indicado na Figura 34, foram considerados dois pontos da curva, correspondentes à vales subsequentes, cujos ângulos associados são $\beta_1 = -0.08rad$ e $\beta_2 = -0.028rad$. Estes valores são considerados na equação $\ln\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right) = \frac{\zeta 2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}$, que resultam um fator de amortecimento $\zeta_x = 0.203$, sendo $\ln(\)$ a função logaritmo natural. A partir da transformada de Fourier da resposta, pode-se obter a frequência $\omega_{d_x} = 6.25$ rad/s.

Figura 34 – Resposta do trem de pouso em movimento pendular em relação ao eixo de articulação de rolamento.



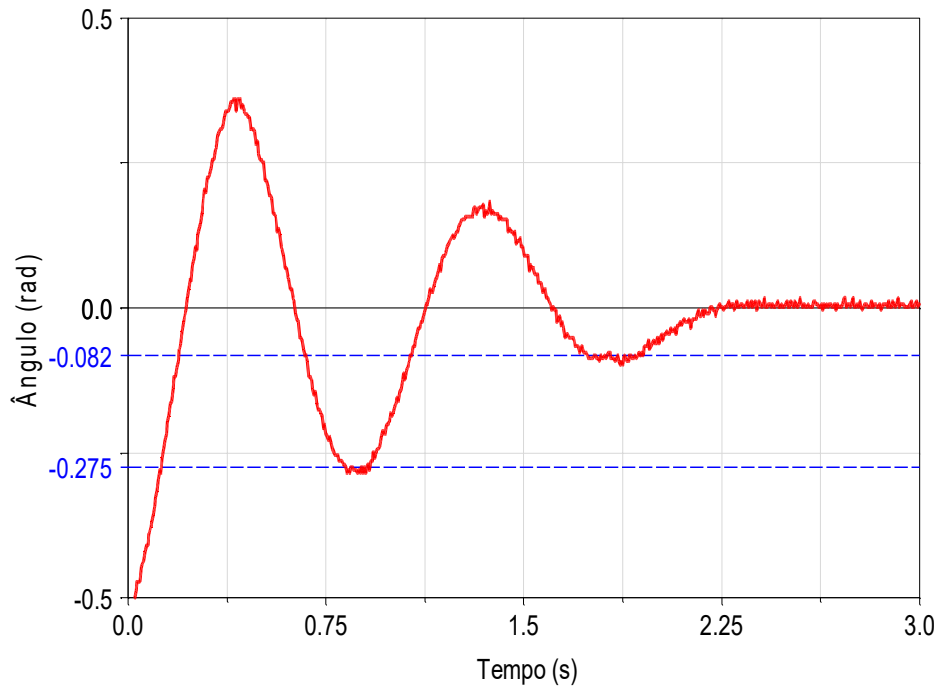
As medições experimentais foram realizadas empregando sistema de aquisição de dados de baixo custo. Por isso, alguns sinais apresentam ruídos, ou outras características típicas destes sistemas. No entanto, foi possível preservar e medir a dinâmica principal de interesse neste estudo.

Com os valores da frequência ω_{d_x} e do fator de amortecimento ζ_x , associados ao movimento pendular, é possível calcular o valor da frequência ω_n associada ao movimento não amortecido equivalente, visto que $\omega_{d_x} = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$. Com isso se obtém o valor de $\omega_{n_x} = 6.383 \text{ rad/s}$. Considerando a equação da frequência de um pêndulo simples (ou seja, $\sqrt{(m_{tp}gh_{tp})/I_x}$), e também a massa do trem de pouso 11.194 kg , aceleração da gravidade $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ e distância do CG até o eixo de articulação $h_{tp} = 143.4 \text{ mm}$ (ver Fig. 32), calculou-se o momento de inércia $I_x = 0.385428 \text{ kg m}^2$. Procedimento similar foi realizado para obter a inércia I_{z_2} do carro principal com sua haste de apoio. Na Figura 36 é mostrada a resposta livre no tempo do movimento pendular. Considerando que a massa de 4.582 kg e altura do CG até o eixo de articulação de 103.7 mm (ver Figuras 33 e 35), foi obtido $I_{z_2} = 0.115599 \text{ kg m}^2$. Também, foi obtido $I_{1z} = 0.012 \text{ kg m}^2$.

Figura 35 – Fotografia do carro principal em posição de pêndulo para obtenção do momento de inércia em torno da haste de articulação.

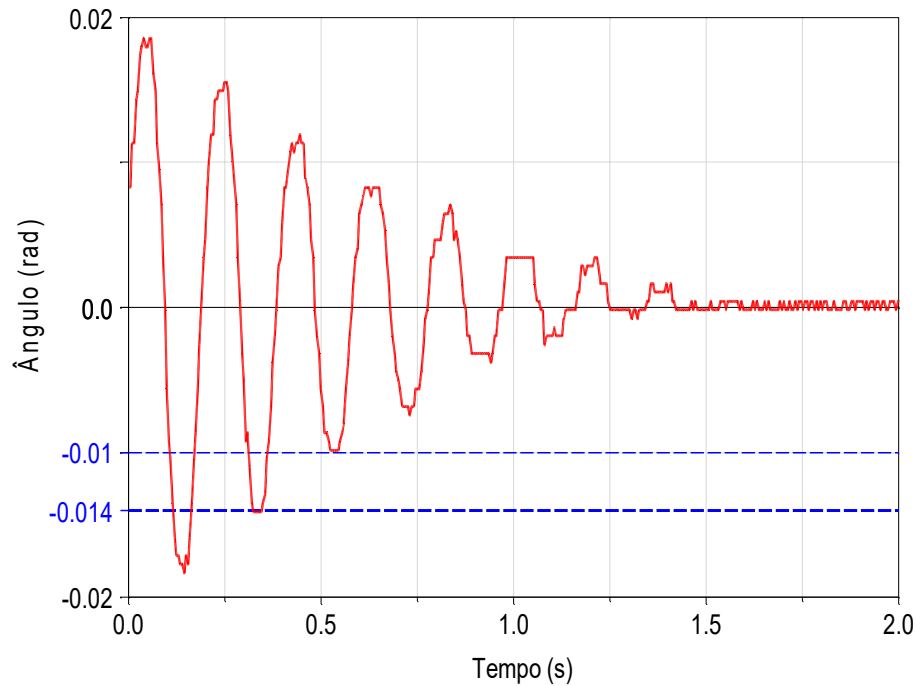


Figura 36 – Resposta da vibração livre do carro principal para um movimento pendular em torno de um eixo na direção da haste.



Para determinação valores preliminares para rigidezes e coeficientes de amortecimento inicialmente foram avaliadas respostas do sistema mantendo livre cada um dos graus de liberdade, restringindo os demais. No primeiro ensaio foram restringidos os dois movimentos de guinada, para então avaliar apenas a rolagem do trem de pouso. Com isso, foi estimada a rigidez k_ϕ e o coeficiente amortecimento c_ϕ , predominantemente da barra de torção, mostrada na peça 1 da Figura 31. A Figura 37 mostra a resposta temporal para uma entrada tipo impulso. São também indicados os valores de ângulos de rolagem relativos a dois vales subsequentes. Assim, é possível calcular o fator de amortecimento ζ_ϕ associado, para $\beta_1 = -0.0145$ e $\beta_2 = -0.0103$, resultando em $\zeta_\phi = 0.0543$. Ainda, a partir da Transformada de Fourier (TF) da resposta, verificou-se a frequência $\omega_{n_\phi} = 42.87 \text{ rad/s}$ para esta parte do sistema, resultando em uma rigidez de rolagem (pura) igual a $k_\phi = 748.161 \text{ Nm/rad}$. Com essa rigidez, para $\zeta_\phi = 0.0543$ calculou-se o coeficiente de amortecimento de rolagem (pura) $c_\phi = 1.355 \text{ Nms/rad}$.

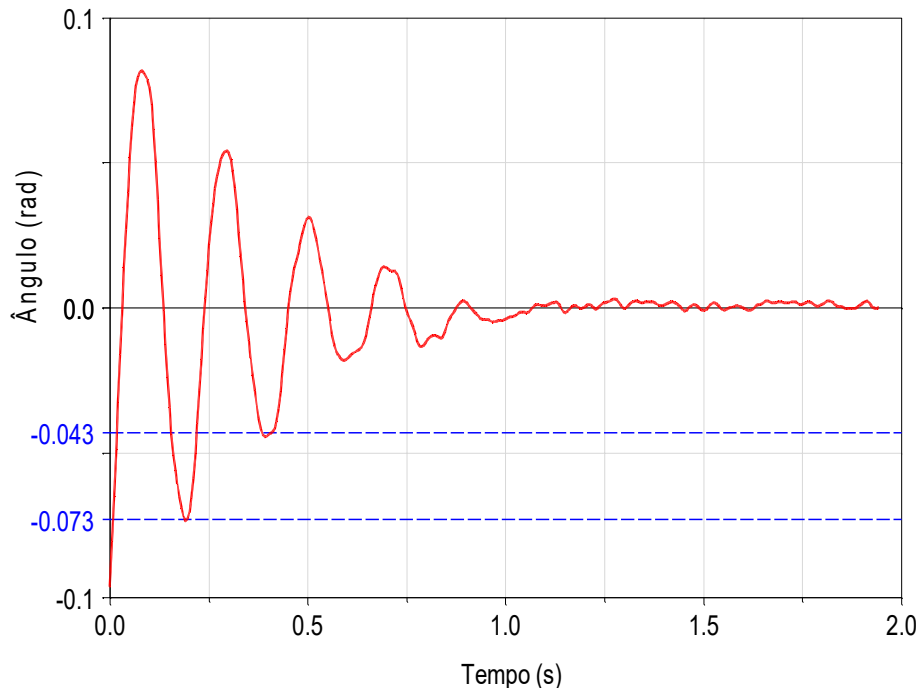
Figura 37 – Resposta de rolagem ϕ ao impulso, com movimentos em guinada restringidos.



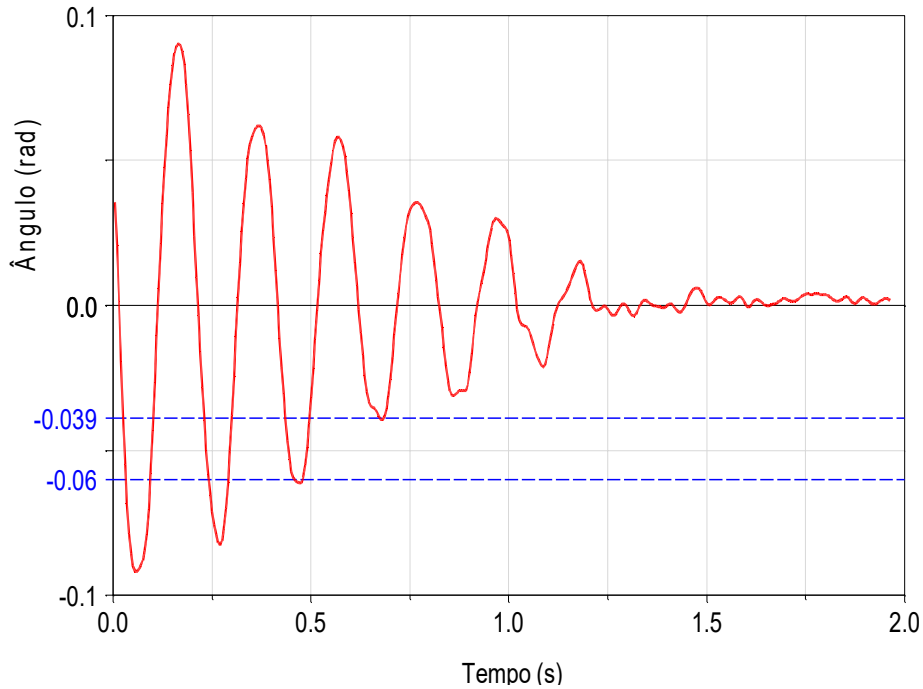
Procedimento similar foi aplicado para se obter os valores preliminares de rigidez e coeficiente de amortecimento de guinada k_{ψ_1} e c_{ψ_1} , proporcionados predominantemente pela barra de flexão mostrada na peça 2 da Figura 31. O movimento de rolagem e a guinada ψ_2 (em relação à ψ_1) foram restringidos, tal que todo sistema livre permaneceu com um movimento de guinada¹ ψ_{12} . Considerando a resposta ψ_{12} do subsistema, mostrada na Figura 38, foi obtido um fator de amortecimento $\zeta_{12} = 0.0887$, frequência amortecida $\omega_{d_{12}} = 30.22$ rad/s, e frequência natural $\omega_{n_{12}} = 30.34$ rad/s. Finalmente, foram obtidas a rigidez $k_{\psi_1} = 108.772$ N m/rade e um coeficiente de amortecimento $c_{\psi_1} = 0.636$ Nms/rad.

¹Note que emprega-se ψ_{12} visto que o eixo de esterçamento e o carro principal apresentam movimento solidário, devido a restrição do movimento ψ_2 .

Figura 38 – Resposta ao impulso nos GDL de Guinada ψ_1 e ψ_2 unidos, formando um único GDL.



Similarmente, a partir da resposta mostrada na Figura 39 foram estimadas a rigidez k_{ψ_2} e o amortecimento c_{ψ_2} relativas à peça 3 (Braços de articulação). Para tanto, os movimentos do eixo de esterçamento e de rolagem foram restringidos, restando somente o GDL de guinada do carro principal. O fator de amortecimento associado foi $\zeta_{\psi_2} = 0.0684$, e a partir da TF da resposta mostrada na Figura 39 foi observada a frequência 31.075 rad/s. Assim, determinou-se $k_{\psi_2} = 112.154$ Nm/rad e $c_{\psi_2} = 0.493$ Nms/rad.

Figura 39 – Resposta ao impulso no GDL de Guinada ψ_2 do carro principal.

Os valores preliminares dos parâmetros, obtidos conforme previamente descrito nesta seção, são apresentados na Tabela 11. Os valores de rigidez e coeficientes de amortecimento são denominados preliminares, visto que foram determinados considerando movimentos (aproximadamente) puros, de rolagem e guinada, devido restrição de graus de liberdade. Assim, os valores preliminares são atualizados a seguir, para melhor aderência do modelo numérico aos dados experimentais.

Tabela 11 – Propriedades físicas e geométricas preliminares obtidas para o modelo de trem de pouso do aparato experimental.

Parâmetro	Valor	Unidade
Rigidez de guinada 1 k_{ψ_1}	108.772	Nm/rad
Rigidez de guinada 2 k_{ψ_2}	112.154	Nm/rad
Rigidez de rolagem k_{ϕ}	403.305	Nm/rad
Coef. de Amortecimento de guinada 1 c_{ψ_1}	0.636	Nms/rad
Coef. de Amortecimento de guinada 2 c_{ψ_2}	0.493	Nms/rad
Coef. de Amortecimento de rolagem c_{ϕ}	1.1355	Nms/rad
Altura do trem de pouso em carga estática l_g	0.48	m
Raio do pneu R	0.145	m
Comprimento de braço arrastado e_t	0.103	m
Altura do CG do Carro Principal h	0.335	m
Momento de inércia do GDL de guinada 1 I_{z_1}	0.0012	kg m ²
Momento de inércia do GDL de guinada 2 I_{z_2}	0.076989	kg m ²
Momento de inércia na direção de rolagem I_x	0.385428	kg m ²

5.2.2 Teste de Vibrações com o Trem de Pouso Suspenso

Os valores preliminares das propriedades físicas do trem de pouso são atualizados para valores definitivos a partir dos resultados de ensaios de vibrações do sistema completo. O trem de pouso foi posicionado suspenso, para eliminar o contato com o solo. Foram consideradas entradas tipo impulso, aplicadas em pontos do sistema convenientemente escolhidos para se obter respostas aproximadamente correspondentes às respostas de cada modo separadamente. Na prática, o procedimento consistiu em excitar predominantemente um modo aplicando uma entrada em posição correspondente aproximadamente à nodal do outro modo, conforme se esclarece a seguir.

Os dois principais modos de vibrar foram denominados dianteiro e traseiro. O primeiro modo, denominado dianteiro, possui um acoplamento entre os graus de liberdade de guinada e rolagem, que resulta em um deslocamento da dianteira do trem de pouso. O segundo modo, denominado traseiro, possui um deslocamento predominantemente na parte traseira, tendo um nó presente na dianteira do trem de pouso. As posições das entradas para medir as respostas de dianteira e traseira correspondem aproximada e respectivamente às posições dos nós da traseira e dianteira, conforme ilustram as Figuras 40 e 41.

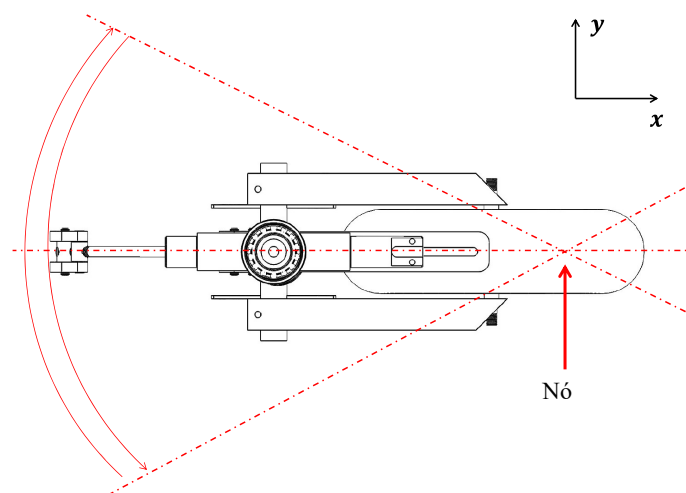


Figura 40 – Modo dianteiro - vista superior esquemática do trem de pouso com ilustração do movimento dominante e da posição nodal.

O terceiro modo do sistema corresponde ao movimento de guinada do eixo de esterçamento. Este modo se apresenta com frequência em torno de 30 Hz, portanto acima da faixa frequência de interesse na análise. Assim, não foi avaliado nos ensaios de vibração devido sua pequena influência na dinâmica de interesse (BESSELINK, 2000).

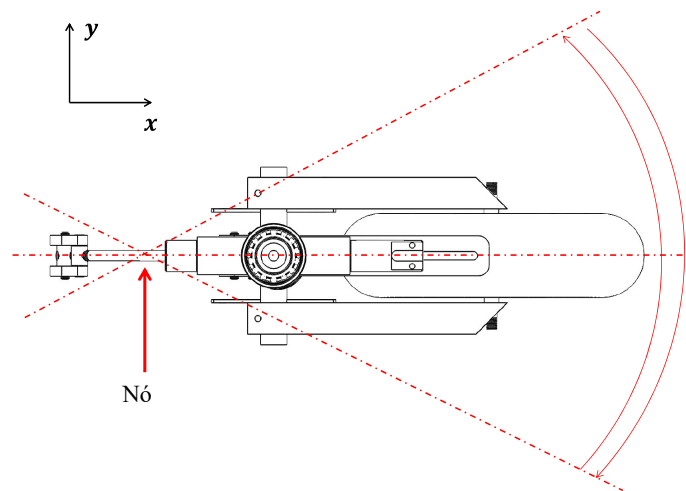


Figura 41 – Modo traseiro - vista superior esquemática do trem de pouso com ilustração do movimento dominante e da posição nodal.

A Figura 42 apresenta as respostas de rolagem (ϕ) e guinadas (ψ_1 e ψ_2) no domínio do tempo. Nota-se a presença de ruídos, especialmente para $t < 0.5$ segundos. No entanto, pode-se observar a dinâmica do movimento em análise, sendo a rolagem ϕ (linha contínua com círculos), e as guinadas ψ_1 e ψ_2 (contínua e tracejada, respectivamente). Também, a Figura 43 apresenta o espectro em frequência da rolagem, obtido pela TF, sendo obtida a frequência modal de 6,9 Hz. O mesmo procedimento foi adotado para análise do modo de vibrar traseiro. Aplicou-se uma entrada tipo impulso, gerando as respostas mostradas na Figura 44, sendo a rolagem ϕ (linha com círculos), a guinada ψ_1 (linha contínua) e a guinada ψ_2 (linha pontilhada). A partir do espectro em frequência de rolagem, mostrado na Figura 45, tem-se uma frequência de 3,47 Hz.

Figura 42 – Resposta temporal em rolagem ϕ (linha contínua com círculos), guinada ψ_1 (linha contínua) e guinada ψ_2 (linha tracejada) para dinâmica do modo dianteiro.

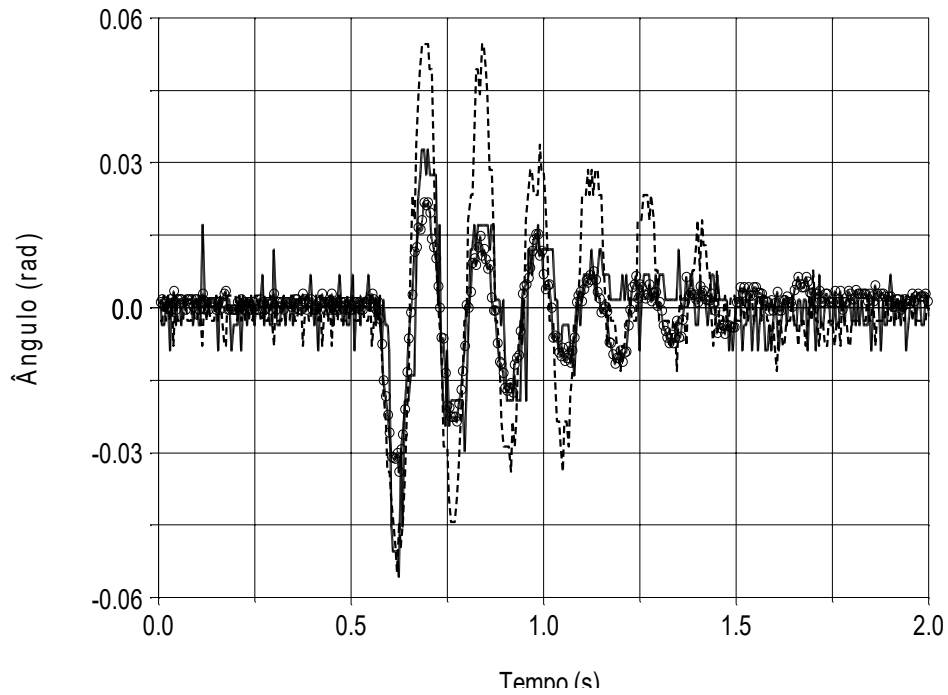


Figura 43 – Espectro em frequência do movimento de rolagem no modo dianteiro.

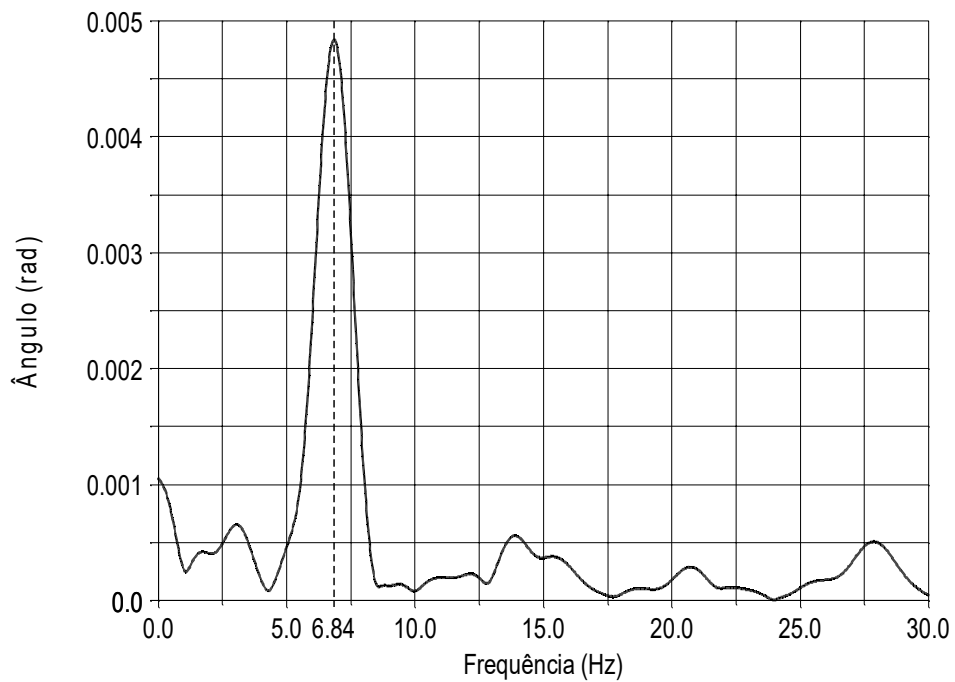


Figura 44 – Resposta temporal em rolagem ϕ (linha contínua com círculos), guinada ψ_1 (linha contínua) e guinada ψ_2 (linha pontilhada) para dinâmica do modo traseiro.

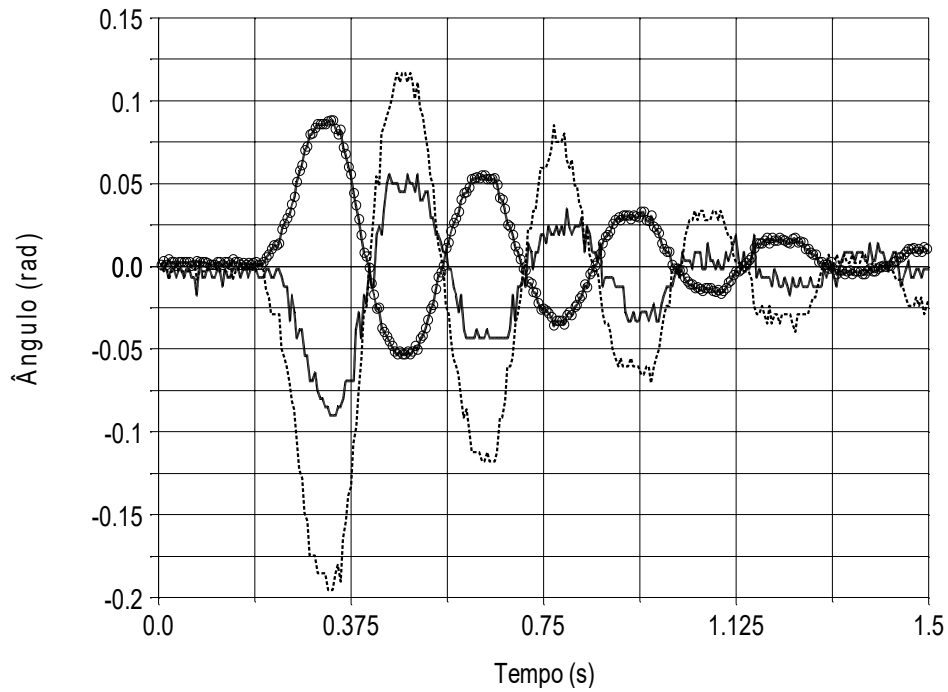
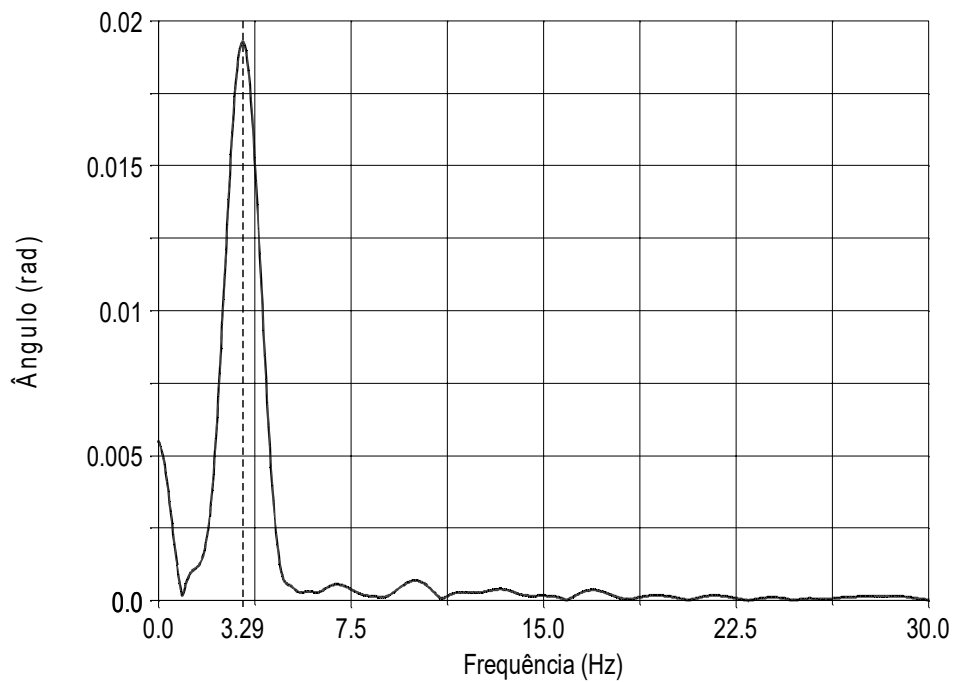


Figura 45 – Espectro em frequência do movimento de rolagem no modo traseiro.



As frequências experimentais obtidas foram comparadas com os resultados obtidos a partir dos autovalores do modelo dinâmico do trem de pouso (sem contato com o solo, ou seja, Eq. 79). Na Tabela 12 são mostrados os autovalores do modelo, as frequência associadas e as frequências modais experimentais. Para o modo de vibrar dianteiro, pode-se observar adequada convergência da frequência modal medida com a numérica, obtida a partir da parte imaginária do autovalor. Por outro lado, observa-se que o modo de vibrar traseiro do modelo apresentou alguma diferença em relação aos resultados dos ensaios.

Tabela 12 – Comparação de frequências modais para o trem de pouso suspenso: numérico e experimental - valores preliminares.

Modo	Autovalor do Modelo	Frequência Modal do Modelo (Hz)	Frequência Experimental (Hz)
Dianteiro	$-3.0744 + 42.8953j$	6.83	6.84
Traseiro	$-0.91232 + 19.72795j$	3.14	3.29

Além das frequências modais, são também comparados os coeficientes modais. Em particular, verificou-se as relações de guinada por rolagem, ou seja, $|\Phi_{\psi_1}/\Phi_{\phi}|$ e $|\Phi_{\psi_2}/\Phi_{\phi}|$. Os resultados são mostrados na Tabela 13 indicam diferença relativa em torno de 5% para o modo dianteiro, e menor que 2% para o traseiro.

Tabela 13 – Coeficientes modais do modelo para guinada em relação à rolagem: numérico e experimental - valores preliminares.

Coeficiente	Modo Dianteiro		Modo Traseiro	
	Modelo	Experimental	Modelo	Experimental
$ \Phi_{\psi_1}/\Phi_{\phi} $	1.36	1.3	1.03	1.05
$ \Phi_{\psi_2}/\Phi_{\phi} $	2.42	2.3	1.98	2.0

Os parâmetros do modelo numérico podem ser ligeiramente alterados para os valores apresentados na Tabela 14, tal que os resultados se tornem mais compatíveis com as verificações experimentais. Nota-se pequenas alterações, em relação aos valores apresentados na Tabela 11, especialmente em rigidez e coeficiente de amortecimento. Com isso, tem-se os resultados mostrados nas Tabelas 15 e 16, respectivamente para as frequências e coeficientes modais.

Tabela 14 – Propriedades físicas e geométricas para o modelo correlacionado do trem de pouso ensaiado.

Parâmetro	Valor	Unidade
Rigidez de guinada 1 k_{ψ_1}	114	Nm/rad
Rigidez de guinada 2 k_{ψ_2}	118	Nm/rad
Rigidez de rolagem k_{ϕ}	418	Nm/rad
Coef. de Amortecimento de guinada 1 c_{ψ_1}	0.136	Nms/rad
Coef. de Amortecimento de guinada 2 c_{ψ_2}	0.493	Nms/rad
Coef. de Amortecimento de rolagem c_{ϕ}	1.1355	Nms/rad
Altura do trem de pouso em carga estática l_g	0.48	m
Raio do pneu R	0.145	m
Comprimento de braço arrastado e_t	0.1	m
Altura do CG do Carro Principal h	0.335	m
Momento de inércia do GDL de guinada 1 I_{z_1}	0.0012	kg m ²
Momento de inércia do GDL de guinada 2 I_{z_2}	0.076989	kg m ²
Momento de inércia na direção de rolagem I_x	0.385428	kg m ²

Tabela 15 – Comparação de frequências modais para o trem de pouso suspenso: numérico e experimental - valores finais.

Modo	Autovalor do Modelo	Frequência Modal do Modelo (Hz)	Frequência Experimental (Hz)
Dianteiro	$-2.9588 + 42.8670j$	6.82	6.84
Traseiro	$-0.94688 + 20.59817j$	3.28	3.29

Tabela 16 – Coeficientes modais do modelo para guinada em relação à rolagem: numérico e experimental - valores finais.

Coeficiente	Modo Dianteiro		Modo Traseiro	
	Modelo	Experimental	Modelo	Experimental
$ \Phi_{\psi_1}/\Phi_{\phi} $	1,32	1,3	1,06	1,05
$ \Phi_{\psi_2}/\Phi_{\phi} $	2,36	2,3	2,04	2,0

5.3 Aplicação da Metodologia Proposta

Para aplicação da metodologia proposta, inicialmente se considera o trem de pouso em movimento¹ para se identificar os valores dos parâmetros relacionados ao pneu. O contato do pneu com a esteira, simulando o contato do pneu com o solo, introduz elementos na matriz mostrada na Equação 76. Por inspeção², são obtidos os valores dos parâmetros

¹Ou seja, movimento relativo à esteira.

²Visto a simplicidade relativa do modelo, e por experiência, os valores foram facilmente obtidos. No entanto, para um caso geral, pode-se empregar técnicas de otimização para obter os valores dos parâmetros.

relativos à dinâmica do pneu, conforme se mostra na Tabela 17.

Tabela 17 – Propriedades físicas e geométricas para a dinâmica do pneu.

Parâmetro	Valor	Unidade
Momento de inércia do pneu para efeitos giroscópicos I_p	0.068	$kg\ m^2$
Rigidez lateral do pneu elástico K_λ	0.0006	rad^{-1}
Rigidez de deriva do pneu elástico K_α	0.01	rad^{-1}
Amortecimento lateral do pneu elástico c_λ	10.6	$N\ m^2/rad$
Comprimento de relaxação do pneu σ	0.172	m
Comprimento de contato do pneu com o pavimento a	0.05	m
Comprimento efetivo total do braço arrastado até o ponto de contato do pneu e_{ff}	0.21	m
Força normal no contato do pneu com a esteira F_z	48.6	N

A Figura 46 mostra uma comparação da resposta temporal do modelo numérico com os resultados experimentais. Cada resposta, numérica e experimental, é normalizada por seu respectivo valor máximo (do módulo do sinal), para simplicidade de comparação. Tal estratégia foi empregada especialmente porque a magnitude da entrada experimental impulsiva não foi medida. No entanto, considerando a dinâmica linear prevista no modelo, nota-se que o modelo reproduz a dinâmica verificada no aparato experimental. Os resultados são mostrados em particular para a velocidade de 12 km/h . No entanto, resultados semelhantes são verificados para outras velocidades, na faixa de operação da esteira V_e ($0 \leq V_e \leq 12$) km/h .

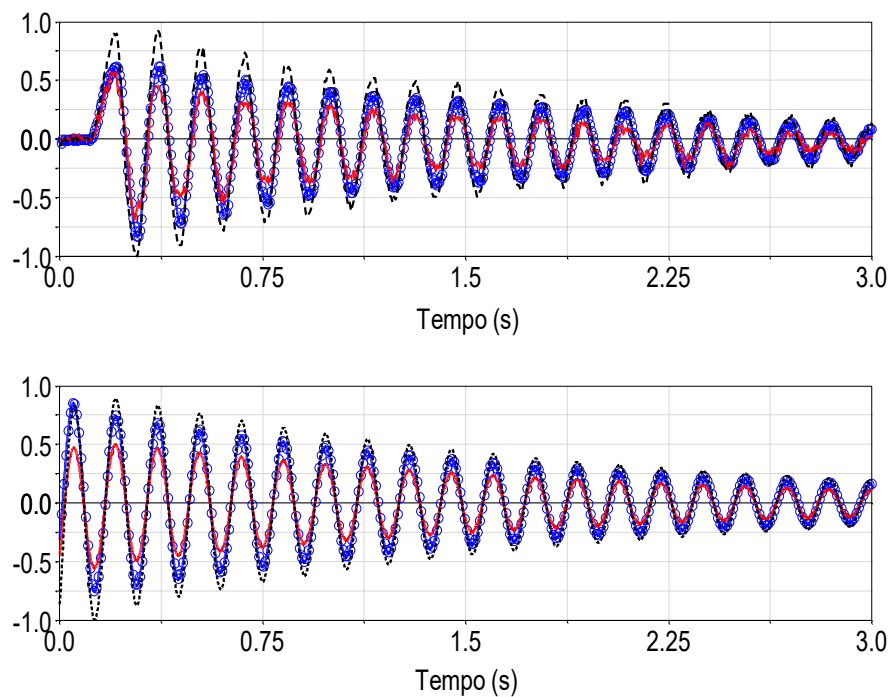


Figura 46 – Respostas normalizadas do trem de pouso estável - experimentais (superior) e numéricas (inferior).

A partir do modelo numérico foi empregada uma análise paramétrica, que consistiu em avaliar a estabilidade do modelo para diferentes valores de k_{ψ_1} . Para cada valor desta rigidez foram avaliados os autovalores do sistema, e de acordo com a Figura 47, nota-se que o sistema é livre de shimmy (ou seja, é estável) para valores de $k_{\psi_1} \geq 68 \text{ Nm/rad}$. Caso contrário, o sistema é instável. Em particular, para $k_{\psi_1} = 45 \text{ Nm/rad}$, verifica-se a presença do shimmy, conforme apresenta o resultado experimental mostrado na Figura 48. Em particular, nota-se que uma atenuação da resposta a partir de aproximadamente

5 segundos devido à uma intervenção externa, à dinâmica do aparato, exercida para preservar a integridade do aparato de ensaios. Tal resultado foi obtido para $V_e = 12$ km/h. A redução de rigidez foi obtida por substituição da barra de flexão, conforme indica a fotografia apresentada na Figura 49.

Figura 47 – Análise de estabilidade do modelo numérico - parte real do autovalor para diferentes valores de rigidez de k_{ψ_1} .

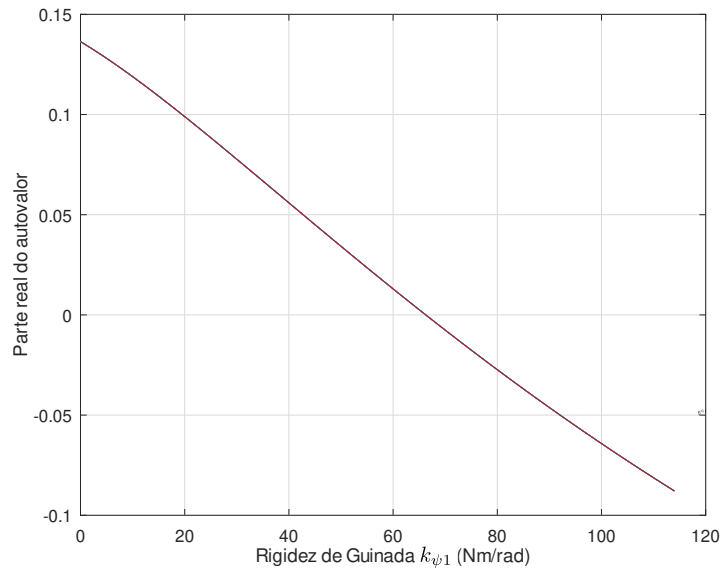


Figura 48 – Resposta no tempo a um impulso após a troca da barra de flexão.

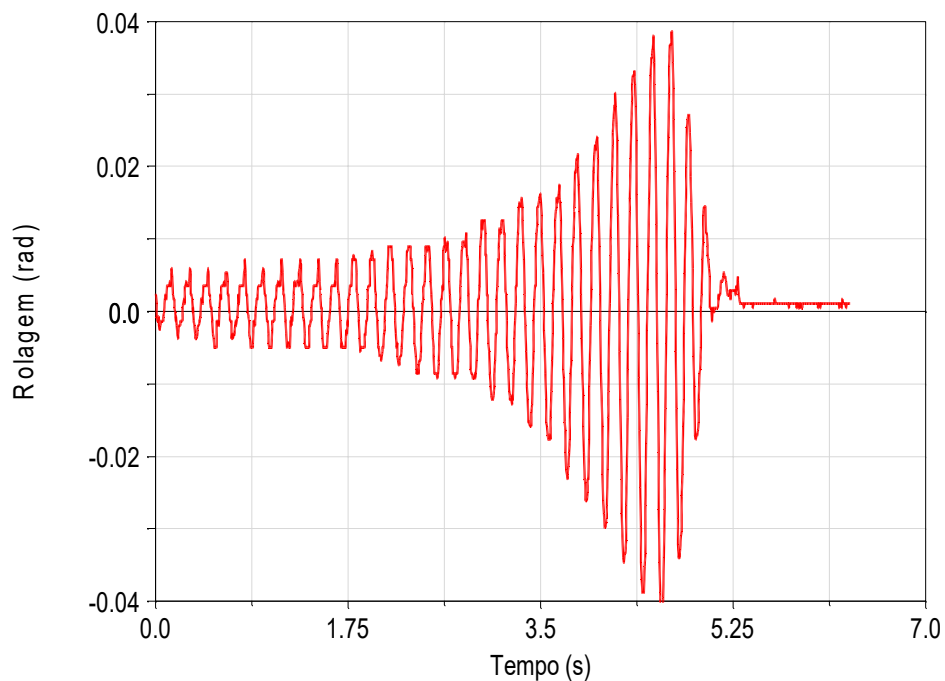


Figura 49 – Fotografia do aparato experimental em detalhe da alteração da barra de flexão para exibir shimmy.



As respostas da dinâmica experimental instável são comparadas com a dinâmica numérica pela Figura 50. As respostas dos três graus de liberdade foram normalizadas pela amplitude máxima (do módulo do sinal), entre as três, por simplicidade de comparação, uma vez que a entrada experimental não foi medida. As principais diferenças são observadas nos instantes iniciais. No entanto, a sequência de amplitudes (em ordem decrescente, sendo guinada ψ_2 (linha tracejada) rolagem ϕ (linha azul) e ψ_1 (linha contínua vermelha)) foi mantida entre experimentos (figura superior) e solução computacional (figura inferior). Neste caso, a entrada experimental foi aplicada com pequena intensidade visto o esperado aumento de amplitude de resposta da condição de shimmy.

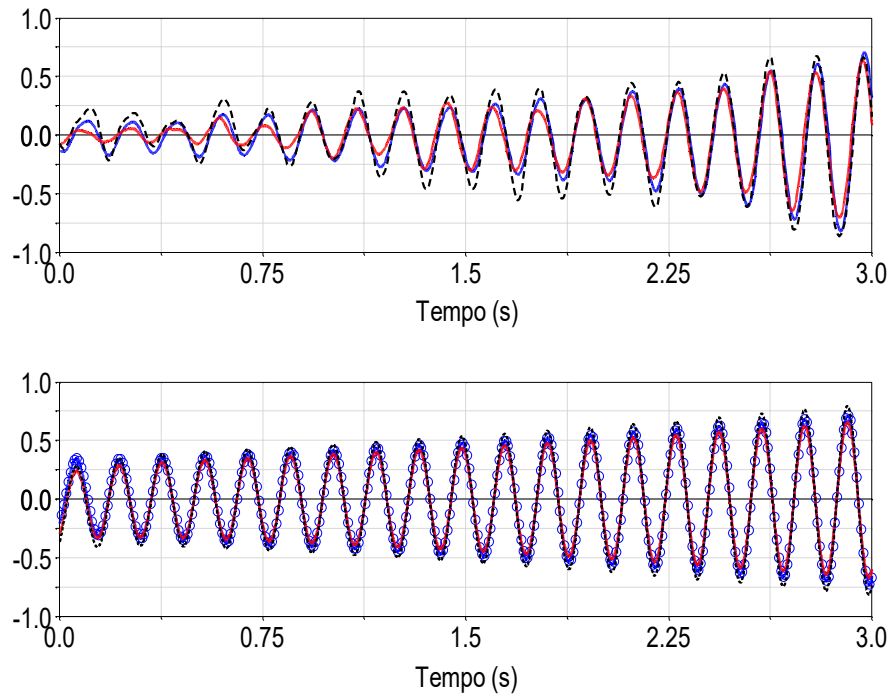


Figura 50 – Respostas normalizadas do trem de pouso instável - experimentais (superior) e numéricas (inferior). Rolagem (linha contínua com círculos), guinada ψ_1 (linha contínua) e guinada ψ_2 (linha tracejada).

Considerando esta condição instável como uma versão preliminar de projeto do trem de pouso, a técnica proposta nesta tese foi avaliada para reprojeter o sistema, visando assegurar estabilidade. Para isso, deve-se escolher apropriadamente as entradas e saídas, considerando-se que, segundo a formulação proposta, a relação entre uma entrada e uma saída deve ser equivalente a um parâmetro da modelagem. Assim, para o sistema em questão, modifica-se os parâmetros de rigidez e coeficiente de amortecimento: k_{ψ_1} , k_{ψ_2} , k_ϕ , c_{ψ_1} , c_{ψ_2} e c_ϕ . Para se calcular os valores incrementais para estes parâmetros considera-se a seguinte matriz de rigidez incremental, que implica em considerar três pseudo entradas $\mathbf{u}(t) = \{T_{\psi_1} \ T_{\psi_2} \ T_\phi\}^T$, e saídas $\mathbf{y}(t) = \{\psi_1(t) \ \dot{\psi}_1(t) \ \Delta\psi_2(t) \ \Delta\dot{\psi}_2(t) \ \phi(t) \ \dot{\phi}\}^T$, de maneira que $T_{\psi_1}(t) = \Delta k_{\psi_1}\psi_1(t) + \Delta c_{\psi_1}\dot{\psi}_1(t)$, $T_{\psi_2}(t) = \Delta k_{\psi_2}\psi_2(t) + \Delta c_{\psi_2}\dot{\psi}_2(t)$ e $T_\phi(t) = \Delta k_\phi\phi(t) + \Delta c_\phi\dot{\phi}(t)$. Isso permite calcular os incrementos e decrementos de propriedades físicas (rigidezes e amortecimentos incrementais) para designar os modos de vibrar desejados. Então, seja

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \Delta k_{\psi_1} & \Delta c_{\psi_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta k_{\psi_2} & \Delta c_{\psi_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta k_\phi & \Delta c_\phi \end{bmatrix} \quad (80)$$

Definidos os vetores de entradas e saídas pode-se determinar as matrizes de entradas e de saídas, \mathbf{G}_{exp} e \mathbf{H}_{exp} , respectivamente, representadas nas Equações (81) e (82), nas quais

os subscrito *exp* indica experimental.

$$\mathbf{G}_{exp} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{I_{1z}} & -\frac{1}{I_{1z}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{2z}} & e_{cp}/(h_{cp}I_{2z}) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_x} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (81)$$

$$\mathbf{H}_{exp} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e_{cp}/h_{cp} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e_{cp}/h_{cp} & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (82)$$

Os autovalores do modelo computacional são $\lambda_1 = 0.06435 + j39.65638$, $\lambda_2 = \lambda_1^*$, $\lambda_3 = -30.21076 + j116.88508$, $\lambda_4 = \lambda_3^*$, $\lambda_5 = -37.69623$, $\lambda_6 = -6.78709$ e $\lambda_7 = -18.98906$. Pode-se observar o autovalor instável $0.06435 + j39.65638$, que deve portanto ser considerado na designação para estabilizar o sistema. Nota-se também um autovalor oscilatório, de frequência mais elevada ($-30.21076 + j116.88508$), relativo ao modo cujo o movimento de ψ_1 (eixo de esterçamento) é predominante. Existe, ainda, um autovalor relacionado à dinâmica de translação do trem de pouso (-18.98906), além de dois autovalores que para a velocidade em análise correspondem à dinâmica superamortecida (-37.69623 e -6.78709) que são considerados na análise.

No modo instável os graus de liberdade de interesse são a rolagem ϕ e a guinada do carro principal (ψ_2). Na escolha do autovalor que se deseja designar para substituir o modo instável, utilizou-se o mesmo autovalor instável, mas com sinal oposto na parte real, tal que corresponda a modo estável. Assim, o autovalor a ser designado $\lambda_1^d = -0.06435 + j39.65638$. Ao aplicar o método proposto, o primeiro resultado que se obtém é o subespaço em que estão presentes os possíveis autovetores associados ao autovalor λ_1^d . Alguns elementos deste subespaço estão representados em um diagrama polar mostrado na Figura 51. Observa-se que as possibilidades para a escolha do autovetor mais adequado para este modo são limitadas, pois η_1 varia entre 0.77 e 0.805. Tal limitação se deve especialmente pelo autovalor (λ_1^d) inicialmente escolhido. Assim, pode-se considerar outros valores para as partes real e imaginária, visando reduzir a limitação observada. Considerando-se diferentes autovalores se obtém o resultado mostrado na

Figura 52.

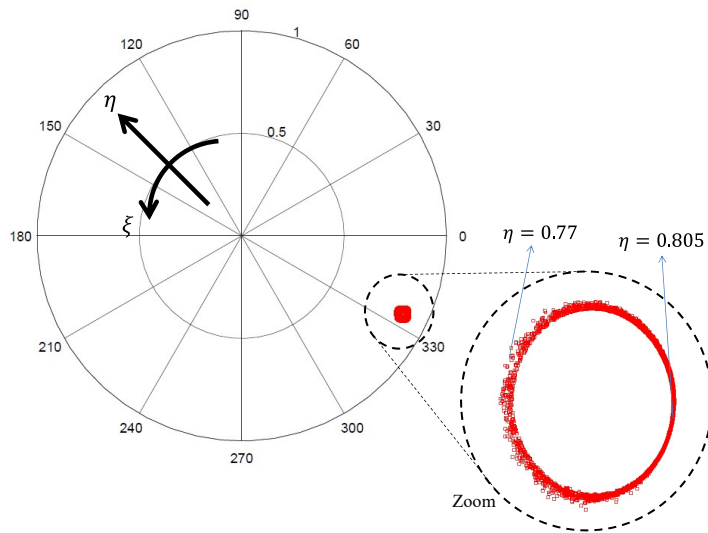


Figura 51 – Ilustração associada ao subespaço que contém os autovetores possíveis de serem designados para o modelo numérico do aparato experimental se $\lambda_1^d = -0.06435 + j39.65638$.

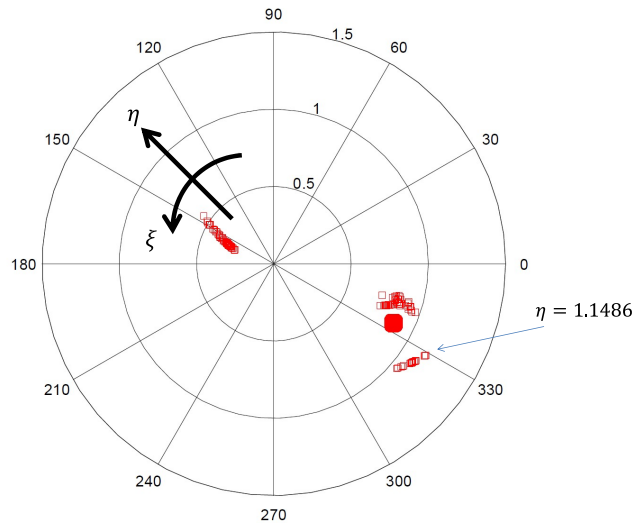


Figura 52 – Ilustração associada ao subespaço que contém os autovetores possíveis de serem designados para o modelo numérico do aparato experimental para diferentes autovalores.

Assim, para o autovalor a ser designado $\lambda_1^d = -0.12870 + j19.82819$, tem-se um valor máximo de $\eta_1 = 1.1486$. Com o modo designado, observou-se o modelo resultante estável, com o segundo modo superamortecido, o terceiro modo em frequência mais alta e participação dominante do grau de liberdade ψ_1 . Note que para esta caso em particular, em função da dinâmica superamortecida, deve-se reprojeter o sistema considerando apenas

η_1 , visto que os modos associados aos autovalores λ_5 e λ_6 permanecem superamortecidos para todas as possibilidades de designação.

Com a escolha do autovalor a ser designado, e do melhor autovetor possível de ser designado, contido no subespaço, aplica-se o método para o cálculo da matriz de ganhos de controle \mathbf{K}_{exp} , resultando na matriz apresentada a seguir. Tal matriz contém os valores de rigidezes e coeficientes de amortecimentos que devem ser adicionados aos seus respectivos valores iniciais. Assim, tem-se os seguintes valores finais $k_{\psi_1} = 42.558$, $c_{\psi_1} = 0.21286$, $k_{\psi_2} = 56.601$, $c_{\psi_2} = 1.2709$, $k_{\phi} = 97.665$ e $c_{\phi} = 1.2137$, nas respectivas unidades físicas.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -2.44185 & 0.07686 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -61.39912 & 0.77794 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -320.33479 & 0.07821 \end{bmatrix}$$

Estes valores finais de rigidez e coeficiente de amortecimento, ao serem aplicados no modelo, resultam em uma resposta modal no tempo do modo designado mostrada na Figura 53. Nota-se a estabilização do modo e uma redução da partição do grau de liberdade de guinada, e aumento da rolagem, como consequência do aumento do η_1 , de 0.89 para 1.1486. Com isso, para efeitos de comparação com o sistema na configuração inicial, na Figura 54 são mostradas as respostas temporais dos graus de liberdades do sistema para uma entrada tipo impulso. Verifica-se o melhor desempenho vibratório, com estabilidade e redução do GDL de guinada do carro principal, com predominância de rolagem.

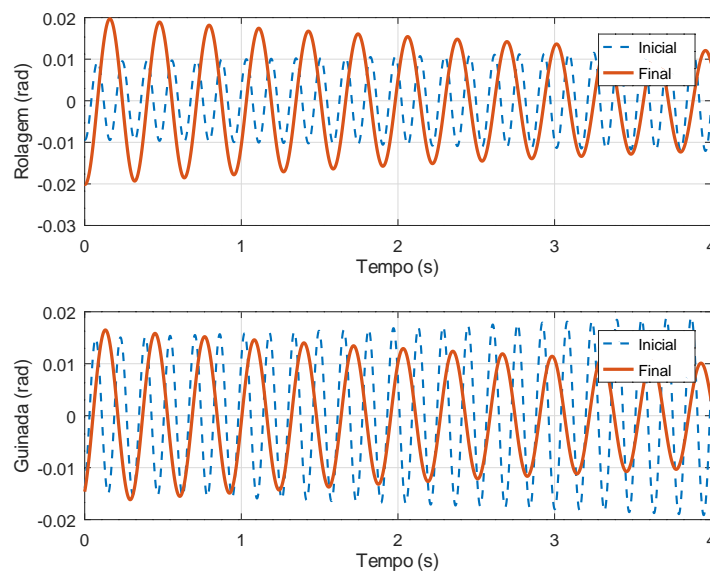


Figura 53 – Resposta temporal dos modos do trem de pouso - modelo numérico - antes (inicial) de depois (final) da designação, para $V_e = 12$ km/h.

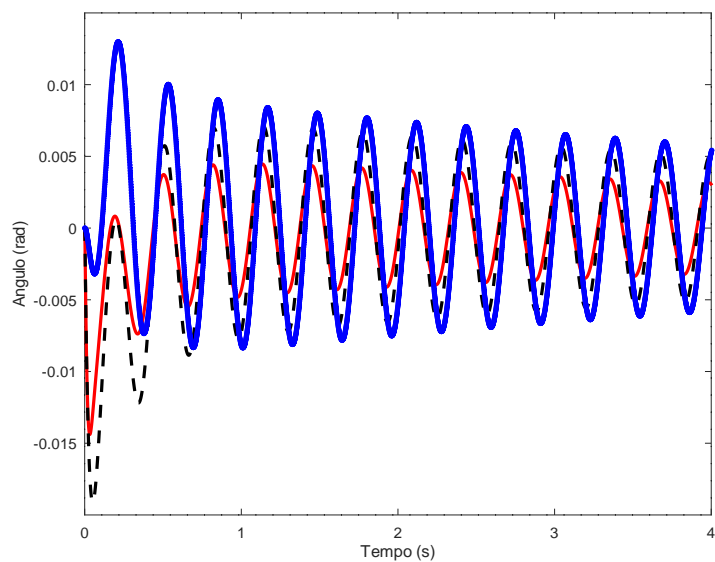


Figura 54 – Resposta temporal do trem de pouso - modelo numérico: rolagem ϕ (linha contínua azul), guinadas ψ_1 (linha vermelha contínua fina) e ψ_2 (linha tracejada) para $V_e = 12 \text{ km/h}$.

6 Considerações Finais

Este trabalho discutiu a aplicação de uma teoria de controle, concebida originalmente para aplicação em sistemas em malha fechada, para a solução de problemas inversos de vibração, ou seja, sistemas em malha aberta, especificamente com foco em shimmy em trens de pouso de aeronaves. Esta teoria é conhecida como designação de estruturas próprias por retroação de saídas, amplamente utilizada no projeto de sistemas de controle, com a qual se pretende impor de maneira exata, modos de vibrar desejados e mais adequados para a dinâmica de um determinado sistema em malha fechada. Baseado nessa teoria de controle, discute-se a designação de modos de vibrar, para se calcular incrementos e decrementos de propriedades físicas, como rigidez e amortecimento, visando melhorar níveis de vibração e, também, suprimir shimmy em trens de pouso.

A tese apresentou-se uma revisão teórica detalhada da literatura sobre designação de estruturas próprias, notadamente para sistemas de controle com retroalimentação de saídas, pela qual se mostra como se determina o subespaço que contém os autovetores possíveis de serem designados, associados a um dado autovalor escolhido a priori, e que também se deseja designar. Também é mostrado como se calcula a matriz de ganhos de controle que resulte na designação dos modos de vibrar escolhidos.

Baseado nessa teoria de controle, se formulou a metodologia para se calcular os incrementos e decrementos em parâmetros físicos da modelagem, como rigidezes e amortecimentos, necessários para a designação exata de um par conjugado de modos de vibrar, ou dois modos de vibrar superamortecidos, sendo então a principal contribuição desta tese de doutorado.

De posse da metodologia, são mostradas três aplicações de designação exata para sistemas de trens de pouso de nariz de aeronaves comerciais de médio porte, com as quais é mostrada a estratégia para a escolha de modos de vibrar, dentre os possíveis, mais adequados para a dinâmica de vibração desta aplicação específica da formulação. Através desses exemplos aplicados, fica clara a relevância da formulação proposta, que permite a imposição de um modo de vibrar desejado no sistema final, sem a necessidade da real utilização de complexos sistemas de controle em malha fechada, mas sim, através da simples modificação de parâmetros físicos do modelo. Neste sentido, destaca-se que os projetos de trens de pouso usualmente consideram amortecedores (*shimmy dampers*) para supressão da instabilidade. Estes transdutores envolvem um projeto dedicado e seguem rigorosos planos de manutenção. Assim, o emprego desta técnica de designação de modos

pode contribuir para o alívio de requisitos de projeto de shimmy *dampers*, ou até mesmo pode eliminar sua necessidade em alguns aviões em particular - como os de pequeno e médio portes, por exemplo.

Dentre as estratégias aplicadas para a escolha de modos de vibrar mais adequados, que resultem na supressão de shimmy em trens de pouso, destaca-se a importância de se minimizar a contribuição relativa do GDL de guinada, nos modos de vibrar do trem de pouso. A afirmação de que o movimento em guinada tem extrema relevância na formação do shimmy foi previamente colocada por [Besselink \(2000\)](#). Então, neste trabalho foi introduzida a razão de amplitudes (η_i) tendo, em particular, no denominador do parâmetro, o módulo do elemento do autovetor associado ao movimento de guinada. Assim, tem-se uma prática forma de especificar um modo desejado, bem como uma maneira conveniente de verificar os demais modos gerados no sistema reprojetoado.

Com a finalidade de se testar a formulação em um sistema real, construiu-se uma bancada experimental representativa de trem de pouso, com a qual inicialmente realizou-se um trabalho de correlação do modelo matemático, primeiramente com o trem de pouso suspenso, ou seja, sem a presença das forças do pneu, e posteriormente com pneu em contato com a esteira em funcionamento. Após a fase inicial de correlação, chegou-se a um sistema instável, com a presença do fenômeno shimmy, e portanto, consistindo em um bom estudo de caso. Então, a metodologia foi aplicada, resultando na estabilização do sistema e, além disso, com a redução na participação do GDL de guinada.

A aplicação da metodologia de designação de modos de vibrar por retroalimentação de saídas, se mostrou bastante útil para o projeto de trens de pouso de aeronaves, visto que possibilita que parâmetros estruturais do sistema sejam modificados apropriadamente, para garantir que modos de vibrar mais adequados para a dinâmica vibracional de trens de pouso sejam designados no sistema final.

6.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

A seguir são apresentadas sugestões para trabalhos futuros, que podem contribuir para continuidade desta pesquisa:

- Estudar a influência de diferentes modelos de pneu na aplicação do método. Visto que para o presente estudo focou-se no entendimento dos modos de vibrar mais adequados para a dinâmica de vibração do trem de pouso, e aplicação da formulação de designação de modos de vibrar em modelos de trens de pouso presentes na literatura;
- A estabilidade do trem de pouso (Shimmy) deve ser pouco sensível ao pneu, visto que

durante as trocas de pneu da aeronave, pode-se utilizar diversas marcas. Portanto, um estudo interessante seria a modificação de parâmetros estruturais do trem de pouso de maneira que garanta a baixa sensibilidade da estabilidade do trem de pouso ao pneu.

- Explorar a liberdade oferecida pelo fato de que diferentes autovalores implicam em diversos subespaços que contém os autovetores possíveis de serem designados.
- Considerar a dinâmica de desbalanceamento para verificar o desempenho da designação modal na supressão de vibrações, além de outras condições de resposta forçada.

Bibliografia

- ALBOSTAN, O.; GOKASAN, M. Mode decoupling robust eigenstructure assignment applied to the lateral-directional dynamics of the F-16 aircraft. **Aerospace Science and Technology**, v. 77, p. 677--687, 2018.
- ANDRY, A. N.; SHAPIRO, E. Y.; CHUNG, J. C. Eigenstructure assignment for linear systems. **IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems**, AES-19, p. 711--729, 1983.
- ARREAZA, C.; BEHDINAN, K.; ZU, J. W. Linear stability analysis and dynamic response of shimmy dampers for main landing gears. **Journal of Applied Mechanics**, v. 83, n. 8, 2016.
- BECKERS, C. J. J.; ÖNGÜT, A. E.; VERBEEK, G.; FEY, R. H. B.; LEMMENS, Y.; WOUW, N. van de. Bifurcation-based shimmy analysis of landing gears using flexible multibody models. In: _____. **Nonlinear Structural Dynamics and Damping**. Cham: Springer International Publishing, 2019. p. 261--291. ISBN 978-3-030-13317-7. Available from: https://doi.org/10.1007/978-3-030-13317-7_7.
- BESSELINK, I. J. M. **Shimmy of aircraft main landing gears**. Thesis (Ph. D.) --- Delft University of Technology, 2000.
- DERUSSO, P. M.; ROY, R. J.; CLOSE, C. M. **State Variables for engineers**. [S.l.]: Malabar, Florida: Robert E. Krieger Publishing Company, 1990.
- FELICIO, L. C. **Modelagem da dinâmica de sistemas e estudo da resposta**. 2. ed. [S.l.]: São Carlos, Brasil: Rima editora, 1990.
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINI. **Feedback control of dynamic systems**. 6. ed. [S.l.]: EUA: Prentice Hall, 2009.
- GRACEY, W. **The experimental determination of the moments of inertia of airplanes by a simplified compound-pendulum method**. [S.l.], 1948. Available from: <https://ntrs.nasa.gov/citations/19930082299>.
- HARTOG, J. D. **Mechanical Vibrations**. [S.l.]: Dover Publications, 1985. ISBN 9780486647852.
- HOWCROFT, C.; LOWENBERG, M.; NEILD, S.; KRAUSKOPF, B.; COETZEE, E. Shimmy of an Aircraft Main Landing Gear With Geometric Coupling and Mechanical Freeplay. **Journal of Computational and Nonlinear Dynamics**, v. 10, n. 5, 09 2015.
- INOUE, K. An example of landing gear shimmy experience on small jet aircraft. In: **Proceedings of the First International Symposium on Flutter and its Application**. [S.l.: s.n.], 2017.

KEWLEY, S.; LOWENBERG, M.; NEILD, S.; KRAUSKOPF, B. Investigation into the interaction of nose landing gear and fuselage dynamics. **Journal of Aircraft**, v. 53, n. 4, p. 881--891, 2016.

LI, Y.; JIANG, J. Z.; NEILD, S. Inerter-based configurations for main-landing-gear shimmy suppression. **Journal of Aircraft**, v. 54, n. 2, p. 684--693, 2017a.

LI, Y.; JIANG, J. Z.; NEILD, S. A.; WANG, H. Optimal inerter-based shock,Ä strut configurations for landing-gear touchdown performance. **Journal of Aircraft**, v. 54, n. 5, p. 1901--1909, 2017b.

Liu, Y.; Chen, M. Z. Q.; Tian, Y. Nonlinearities in landing gear model incorporating inerter. In: **2015 IEEE International Conference on Information and Automation**. [S.l.: s.n.], 2015. p. 696--701.

LOK, S.; PAUL, J.; UPENDRANATH, V. Prescience life of landing gear using multiaxial fatigue numerical analysis. **Procedia Engineering**, v. 86, p. 775--779, 2014.

MOORE, B. On the flexibility offered by state feedback in multivariable systems beyond closed loop eigenvalue assignment. **IEEE Transactions on Automatic Control**, n. 21, p. 689--692, 1976.

MORELAND, W. J. The story of shimmy. **Journal of the Aeronautical Sciences**, v. 21, n. 12, p. 793--808, 1954.

OGATA, K. **Modern Control Engineering**. 2nd. ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall PTR, 1990. ISBN 0135891280.

ORLANDO, C.; ALAIMO, A. A robust active control system for shimmy damping in the presence of free play and uncertainties. **Mechanical System and Signal Processing**, v. 84, p. 551--569, 2017.

PACEJKA, H. B. **The wheel shimmy phenomenon: a theoretical and experimental investigation with particular reference to the non-linear problem**. Thesis (Ph. D.) --- Delft University of Technology, 1966.

PACEJKA, H. B.; BESSELINK, J. M. Magic formula tyre model with transient properties. **Vehicle system dynamics**, v. 27, n. S1, p. 234--249, 1997.

RAHMANI, M.; BEHDIAN, K. Investigation on the effect of coulomb friction on nose landing gear shimmy. **Journal of Vibration and Control**, 2018.

RAHMANI, M.; BEHDINAN, K. Parametric study of a novel nose landing gear shimmy damper concept. **Journal of Sound and Vibration**, v. 457, 06 2019a.

RAHMANI, M.; BEHDINAN, K. On the effectiveness of shimmy dampers in stabilizing nose landing gears. **Aerospace Science and Technology**, v. 91, p. 272 -- 286, 2019b.

SCHILIPPE, B. V.; DIETRICH, R. Das flattern eines bepneuten rades. **Bericht**, v. 140, p. 125--147, 1941.

SOBEL, K. M.; SHAPIRO, E. Y. Eigenstructure assignment: A tutorial - part II applications. In: **American Control Conference**. [S.l.: s.n.], 1985a. p. 461--467.

SOBEL, K. M.; SHAPIRO, E. Y. Eigenstructure assignment: A tutorial - part I theory. In: **American Control Conference**. [S.l.: s.n.], 1985b. p. 456--460.

SRINATHKUMAR, S. **Eigenvalue/eigenvector assignment using output feedback**. [S.l.], 1978.

TARTARUGA, I.; COOPER, J. E.; LOWENBERG, M. H.; SARTOR, P.; LEMMENS, Y. Uncertainty and sensitivity analysis of bifurcation loci characterizing nonlinear landing-gear dynamics. **Journal of Aircraft**, v. 55, n. 1, p. 162--172, 2017.

TARTARUGA, I.; LOWENBERG, M. H.; COOPER, J. E.; SARTOR, P.; LEMMENS, Y. Bifurcation analysis of a nose landing gear system. In: _____. **15th Dynamics Specialists Conference**. [S.l.: s.n.], 2016.

THOTA, P.; KRAUSKOPF, B.; LOWENBERG, M. Interaction of torsion and lateral bending in aircraft nose landing gear shimmy. **Nonlinear Dynamics**, v. 57, n. 3, p. 455--467, 2009.

THOTA, P.; KRAUSKOPF, B.; LOWENBERG, M. Multi-parameter bifurcation study of shimmy oscillations in a dual-wheel aircraft nose landing gear. **Nonlinear Dynamics**, v. 70, n. 2, p. 1675--1688, 2012.

THOTA, P.; KRAUSKOPF, B.; LOWENBERG, M.; COETZEE, E. Influence of tire inflation pressure on nose landing gear shimmy. **Journal of Aircraft**, v. 47, n. 5, p. 1697--1706, 2010.

TOURAJIZADEH, H.; ZARE, S. Robust and optimal control of shimmy vibration in aircraft nose landing gear. **Aerospace Science and Technology**, v. 50, p. 1--14, 2016.

VALK, R. Van der; PACEJKA, H. B. An analysis of a civil aircraft main gear shimmy failure. **Vehicle System Dynamics**, v. 22, n. 2, p. 97--121, 1993.

XUE, C. J.; DAI, J. H.; WEI, T. C.; LIU, B.; DENG, Y. Q.; MA, J. Structural optimization of a nose landing gear considering its fatigue life. **Journal of Aircraft**, v. 49, p. 225--236, 2012.

ZHANG, J.; YE, J.; OUYANG, H. Static output feedback for partial eigenstructure assignment of undamped vibration systems. **Mechanical System and Signal Processing**, v. 68-69, p. 555--561, 2016.

ZHANG, J. F.; OUYANG, H.; YANG, J. Partial eigenstructure assignment for undamped vibration systems using acceleration and displacement feedback. **Journal of Sound and Vibration**, v. 333, n. 1, p. 1--12, 2014.

Zhang, Y.; Hu, N.; Cheng, Z.; Zhang, L.; Chen, H. Dynamic modeling of the aircraft landing gear based on isd mechanism. In: **2018 Prognostics and System Health Management Conference (PHM-Chongqing)**. [S.l.: s.n.], 2018. p. 344--349.