UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Campus de Rio Claro

O Ensino do Conceito de Função e Conceitos relacionados a partir da Resolução de Problemas.

Eliane Saliba Botta

Dissertação de Mestrado apresentada no Curso de Pós-Gradação em Educação Matemática – Área de Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos, para a obtenção do Título de Mestre em Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic

Rio Claro (SP) 2010

512 Botta, Eliane Saliba
B751e O ensino do conceito de função e conceitos relacionados a partir da resolução de problemas / Eliane Saliba Botta. - Rio Claro : [s.n.], 2010
427 f. : il., figs., gráfs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Lourdes de la Rosa Onuchic

1. Álgebra. 2. Currículo escolar. 3. Concepções errôneas. 4. Antecipação do ensino do conceito de função. 5. Princípios de aprendizagem. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

ELIANE SALIBA BOTTA

(aluna)

O Ensino do Conceito de Função e Conceitos relacionados a partir da Resolução de Problemas.

Dissertação de Mestrado apresentada no Curso de Pós-Gradação em Educação Matemática – Área de Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos, para a obtenção do Título de Mestre em Educação Matemática.

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic

(orientadora)

Profa. Dra. Miriam Godoy Penteado

Profa. Dra. Norma Suely Gomes Allevato

Rio Claro, 31 de agôsto de 2010

DEDICATÓRIAS

...

Ao passado: à memória de meus avós Toufic Aboumurad e Rachide Saliba, e de meu pai, Nicolas Y. Saliba.

...
Ao presente: à minha mãe, Ramza, às minhas irmãs, Marcia e Sandra, à Dona Shirley, segunda mãe.

...
Ao futuro: aos meus sobrinhos, que são tantos, e aos seus filhos e netos que estão por vir, até o infinito.

E ontem, hoje, e sempre, agradeço ao Marcelo, que sempre apóia meus sonhos.

AGRADECIMENTOS

No dia a dia, durante a elaboração deste trabalho, pude compreender o que é uma pesquisa pautada em critérios acadêmicos graças à Professora Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic, e agradeço sua valorosa orientação e apoio. Raras são as visões que sobrevivem a muitas gerações, raras são as pessoas que abraçam sua profissão, tocando-nos e influenciando-nos com o seu modo de ver o mundo. Dona Lourdes é uma delas.

Agradeço muito às Professoras Dra. Miriam Godoy Penteado e Dra. Norma Suely Gomes Allevato por sua atenção cuidadosa e colaboração, com comentários e sugestões que muito enriqueceram esse trabalho, em sua versão final.

Agradeço também aos meus colegas membros do GTERP, Analucia, Célia, Graci, Malu, Norma, Raquel A., Raquel B., Tatiane, Marcos, Paulo, Roger, com quem pude semanalmente compartilhar tanto momentos de pesquisa e reflexão quanto risadas amistosas vindas do coração. Em especial, agradeço à Analucia, que muitas vezes emprestou seu ombro amigo e me transmitiu um pouco de sua tranquilidade nas horas difíceis.

Agradeço aos professores e alunos da PGEM, pelos momentos de convivência, descontração e trabalho durante o período de Mestrado.

Agradeço ainda às secretárias Inajara, Ana e Elisa, que sempre se dispuseram a colaborar, com cordialidade e carinho, compreendendo as aflições e imprevistos de um pós-graduando.

Por fim, agradeço à Unesp pelo apoio institucional, e ao governo do estado de São Paulo pelo apoio financeiro.

10 Introdução..

RESUMO

Este trabalho de pesquisa se refere ao ensino e à aprendizagem do conceito de função, no Ensino Fundamental e Médio, fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e, também, fazendo uso de análise de erros e concepções errôneas. Duas questões básicas que podem resumir o propósito deste trabalho são as seguintes: (1) É possível antecipar a introdução do conceito de função para as diversas séries do Ensino Fundamental II, com o uso da metodologia acima mencionada? (2) Como o estudo dos erros cometidos pelos alunos pode ajudar no processo de ensino-aprendizagem? Procuramos respostas para essas questões ao analisarmos trabalhos de alunos das diferentes séries dos ensinos Fundamental e Médio, realizados em sala de aula, sob nossa orientação como professora-pesquisadora. As respostas a essas questões se apoiaram em pontos-chave desta pesquisa, referentes a diferentes concepções da álgebra, a princípios da aprendizagem, e a estudo de erros. A análise desses trabalhos nos leva a pensar que é possível antecipar o ensino do conceito de função para a 5ª série /6° ano do Ensino Fundamental, de forma intuitiva, ao invés de, como o usual, introduzi-lo formalmente na 1ª série do Ensino Médio. Para o desenvolvimento desta pesquisa utilizamos a Metodologia de Pesquisa de Thomas A. Romberg.

Palavras-chave: Álgebra. Estudo de Funções. O Conceito de Função no Currículo escolar. Resolução de Problemas. Concepções Errôneas.

ABSTRACT

This research refers to the teaching and learning of the function concept in elementary school and school, making use of the Mathematics Teaching - Learning - Assessment through Problem Solving Methodology and also making use of error analysis and misconceptions. Two basic questions that can summarize the purpose of this study are: (1) Is it possible to anticipate the introduction of the concept of function for the various grades, II, using the methodology mentioned above? (2) How to study the mistakes made by students can help in the teaching-learning process? We seek answers to these questions by analyzing the works of students of different grades of elementary and high schools, conducted in the classroom, under our guidance as a teacher-researcher. The answers to these questions were supported by key points of this research, referring to different concepts of algebra, to principles of learning and study of errors. The analysis of these students works leads us to think that we can anticipate the teaching of the concept of function to the 5th grade / 6th grade of elementary school, intuitively, rather than, as usual, introduce it formally in first grade of High School. This research was developed following the Research Methodology presented by Thomas A. Romberg.

Keywords: Algebra. Study of Functions. The Concept of Function in the school curriculum. Problem Solving. Misconceptions.

Sumário

INTRODUÇÃO

A questão básica que norteia todo este trabalho refere-se ao ensino e à aprendizagem do conceito de função e à Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, e pode ser colocada como segue:

Como o conceito de função pode surgir e se sedimentar com a utilização da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?

Para que possamos apresentar ao menos um esboço de resposta a essa questão, devemos considerar alguns temas que dela surgem naturalmente. Temas que dizem respeito ao conceito de função em si, tais como a evolução histórica do conceito de função, função como um subtema da álgebra, concepções errôneas e dificuldades que têm os alunos para relacionar as várias formas de representação de funções. E temas que dizem respeito à Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, tais como a gênese e a evolução histórica dessa metodologia, assim como os vários pontos de vista a respeito de resolução de problemas. Outros temas que podem servir ao nosso propósito referem-se ao "processo de aprendizagem" (como os alunos aprendem segundo diferentes teorias psicológicas de aprendizagem) e à composição de parâmetros curriculares. Por fim, devemos considerar a questão metodológica referente ao processo de investigação de todos esses temas, ou seja, devemos escolher nossa metodologia de pesquisa.

No capítulo 1 apresentamos considerações gerais sobre a atividade de pesquisa e a metodologia de pesquisa utilizada em nosso trabalho, conhecida como *Metodologia de Romberg*. Essa metodologia recomenda uma série de passos, listados a seguir, que tanto esclarecem a natureza do trabalho de pesquisa quanto orientam seu desenvolvimento: Identificar um fenômeno de interesse; Construir um modelo preliminar, ou seja, selecionar aspectos que se supõe variáveis importantes do fenômeno de interesse, e relacioná-los em um diagrama; Relacionar o fenômeno de interesse e o modelo preliminar a ideias de outros pesquisadores; Elaborar questões específicas ou fazer uma conjectura "sensata"; Selecionar uma estratégia geral de pesquisa para se obter evidências; Selecionar procedimentos específicos; Coletar informação; Interpretar a informação levantada; Transmitir resultados para outros; Antecipar a ação de outros.

O capítulo 2, além de um relato pessoal, entrelaçando um pouco de minha experiência, como professora do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, com uma descrição de como cheguei ao meu fenômeno de interesse, que se refere ao ensino-aprendizagem do conceito de função, contém uma apresentação do meu primeiro modelo preliminar, elaborado logo no início de meu trabalho de pesquisa e, também, à descrição de um segundo modelo, que designamos Modelo Modificado 1, trazendo mais variáveis e refinando as relações do primeiro.

Nos capítulos 3, 4, 5 e 6 procuramos reunir trabalhos relacionados à nossa questão, realizados por outros pesquisadores. A investigação de um tema de interesse envolve, de modo natural, um levantamento do que já foi feito por outros pesquisadores a respeito desse tema, e Romberg menciona isso explicitamente em seu método. Neste trabalho, considerando que muito já se fez sobre cada um dos temas de interesse vinculados àquela questão inicial, reservamos um capítulo para cada um deles. Assim, no capítulo 3 recolhemos artigos de pesquisa e documentos oficiais referentes a reformas e padrões curriculares. O capítulo 4, dedicado em sua maior parte ao domínio da álgebra, contém considerações históricas, conceituais, metodológicas e curriculares. O conceito de função, visto como inserido nesse domínio, aparece com frequência na discussão dos diversos temas. Ainda no capítulo 4, discutimos três princípios de aprendizagem considerados fundamentais no processo de ensino e aprendizagem da matemática. No capítulo 5 apresentamos um pouco do que já se fez sobre Resolução de Problemas e, em particular, apresentamos a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, que vem sendo estudada e divulgada pelo GTERP, Grupo de Trabalho e Estudo em Resolução de Problemas, UNESP – Rio Claro, desde pelo menos 1989. No capítulo 6 apresentamos uma discussão concernente às concepções errôneas e erros cometidos pelos alunos, tipificando algumas das concepções errôneas mais comuns em quatro categorias: supergeneralização, superespecialização, tradução incorreta e concepções limitadas. A compreensão dos erros é um auxiliar importante no processo de ensino-aprendizagem, podendo indicar ao professor, tanto novas estratégias de ensino, quanto erros didáticos que ele próprio possa estar cometendo.

No capítulo 7 apresentamos nosso último modelo de pesquisa, o Modelo Modificado 2, elaborado após já termos percorrido varias etapas de nosso trabalho, e já estarmos avistando seu contorno final com alguma nitidez. Também apresentamos questões que vieram tomar o lugar de nossa pergunta inicial, como decorrência do trabalho de pesquisa e reflexão realizado durante aquelas etapas. Essas questões se colocam, essencialmente, como segue:

- É possível antecipar a introdução do conceito de função nas diversas séries do Ensino Fundamental II, com o uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?
- Como o estudo dos erros cometidos pelos alunos pode ajudar no processo de ensino-aprendizagem?

Quanto aos capítulos 8 e 9, observamos que, no capitulo 8, com apoio no Modelo Modificado 2, descrevemos as estratégias e os procedimentos selecionados visando a obtenção de evidências que viessem a esclarecer as questões acima, e, no capítulo 9, apresentamos o resultado da aplicação dessas estratégias e procedimentos. Resumidamente, como parte de uma estratégia geral, delineada no capitulo 8, decidimos que faríamos uma análise de trabalhos realizados por alunos das diferentes séries escolhidas - 6ª, 7ª, e 8ª do Ensino Fundamental, e 1°, 2° e 3° anos do Ensino Médio - com o propósito de diagnosticar caminhos e identificar concepções errôneas relacionados com a introdução, a evolução e a aplicação do conceito de função e de outros conceitos que lhe são próximos, ao fazer uso da resolução de problemas, antes mesmo de terem sido formalizados os conteúdos matemáticos necessários à sua resolução. Essa análise foi então apresentada no capítulo 9, levando-se em consideração, nos diversos trabalhos de alunos selecionados, aspectos que pudessem estar relacionados com o conceito de função, com diferentes abordagens da resolução de problemas, com diferentes abordagens da álgebra, com princípios de aprendizagem e com o estudo de erros. Em particular, no que diz respeito à introdução do conceito de função nas diversas séries do Ensino Fundamental II, ficamos convencidas de que a noção de variável, enquanto representando alguma grandeza concreta, e a noção de dependência entre grandezas, com a menção explicita das expressões "variável dependente" e "variável independente", podem ser introduzidas já a partir da 5ª série, com o uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Assim, nos propusemos nesse trabalho mostrar a professores, educadores e produtores de currículo, que a introdução do conceito de função e de outros a ele relacionados não precisa ocorrer necessariamente apenas no 1ª ano do Ensino Médio. Acreditamos que esse trabalho com alunos pode ocorrer muito antes, e que a introdução de função pode ser antecipada.

Capítulo 1

Metodologia de Pesquisa

Em algum período já muito distante no tempo, o espanto do homem primitivo diante do fogo ocasionado por raios, por períodos de seca ou por algum outro fenômeno natural, deu lugar à curiosidade. O homem conseguiu dominar seu medo e, pela observação, compreendeu que o fogo não lhe causaria mal desde que ele se mantivesse suficientemente afastado. Compreendeu como o fogo se propagava na presença de materiais combustíveis, e com que velocidade, e compreendeu que havia uma distância segura a ser mantida. Mais adiante, o homem compreendeu como criar sua própria centelha de fogo, compreendeu sua utilidade, e o resto é a historia que vem se desenrolando há alguns milênios, história movida pelo instinto da curiosidade.

Esse instinto nato, comum a tantas espécies do mundo animal, vem despertando no homem, desde os tempos mais remotos, o desejo de compreensão dos fenômenos observáveis, tanto fenômenos do mundo físico, do concreto, quanto fenômenos que se manifestam em sua "alma". A curiosidade o leva a indagar. E indagar tanto sobre o que é aparentemente relevante e que possivelmente lhe trará alguma facilidade para a manutenção e gerenciamento de sua vida, quanto sobre o que aparentemente não tem qualquer utilidade. A curiosidade leva o homem para além do que antes parecia limite intransponível, e o transforma no senhor da natureza, senhor que a domina pelo conhecimento e a explora para o seu benefício, muito embora descobertas advindas da curiosidade também o tenham levado à transposição de "limites" inimagináveis com consequências nefastas para o meio ambiente e para a qualidade de vida do próprio homem. A curiosidade faz o homem sair à busca de soluções para os problemas que, no final das contas, ela própria, a curiosidade, coloca na mesa. A curiosidade leva o homem à *pesquisa* e ao “triunfo da descoberta”.

1.1 Atividade de Pesquisa

Como disse Polya, em 1944, no Prefácio à primeira tiragem

> Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter (POLYA, 1995, p.v-vi).

Conforme a definição apresentada em “Houaiss”, *pesquisa* é o conjunto de atividades que têm por finalidade a descoberta de novos conhecimentos no domínio científico, literário, artístico, etc; é a investigação ou indagação minuciosa, é o exame de laboratório.

Ludke e André (1986) consideram que a realização de uma pesquisa subentende promover o confronto entre os dados, as evidências, as informações coletadas sobre determinado assunto e o conhecimento teórico acumulado a respeito dele.

Mas de que modo esse confronto é realizado? Qual é a *natureza* da atividade de pesquisa? Ou ainda, o que torna uma investigação uma investigação *minuciosa*? A *Metodologia de Romberg*, que apresentaremos a seguir, nos fornecerá respostas a essas questões.

A Metodologia de Pesquisa Adotada neste Trabalho

Os estudiosos, ao fazerem suas pesquisas, que podem levar meses ou anos, naturalmente se apoiam em alguma metodologia de pesquisa, ou seja, procuram seguir algum conjunto de procedimentos que já tenha previamente se mostrado útil para a obtenção de resultados parciais ou, até mesmo, de um resultado final conclusivo, a respeito do fenômeno que lhes interessa. Assim, a pesquisa vai se costurando sobre um plano metodológico escolhido previamente.

O método de investigação utilizado neste trabalho se apoia no modelo de pesquisa científica elaborado pelo educador matemático Thomas A. Romberg.

Romberg é Professor Emérito de Currículo e Ensino de Matemática na Faculdade de Educação da Universidade de Wisconsin-Madison e desde a década de 1980 é membro do NCTM, National Council of Teachers of Mathematics (Conselho Nacional de Professores de Matemática)-USA trazendo muitas contribuições para a educação matemática.

Seus trabalhos têm sido discutidos no meio acadêmico e, em particular, durante os encontros do GTERP- Grupo de Trabalho e Estudo em Resolução de Problemas, Unesp - Rio Claro. Seu artigo *Perspectives on Scholarship and Research Methods*, (Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisa), publicado no livro Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (1992, p. 49-64), (Manual de Pesquisa em Ensino e Aprendizagem de Matemática), pelo NCTM, além de ser objeto de estudo, serve como apoio metodológico para o desenvolvimento dos trabalhos de mestrandos e de doutorandos.

Em seu artigo, Romberg procura identificar, nas ciências sociais, as grandes tendências de pesquisa que estão relacionadas com o estudo do ensino e da aprendizagem escolar, e determinar como essas tendências têm influenciado o estudo da matemática nas escolas. Para tanto, Romberg (1) descreve alguns aspectos da Educação Matemática, vista como um campo de estudo; (2) apresenta uma lista de atividades relacionadas com o processo de pesquisa; e (3) delineia uma variedade de métodos de pesquisa. A discussão sobre tendências de pesquisa é apresentada, então, na parte final de seu artigo.

O que mais nos interessa por ora, é a parte (2), referente às atividades que um pesquisador deve percorrer ao longo de sua pesquisa. Essa sequência de atividades constitui-se num guia valioso para quem deseja compreender e desenvolver um trabalho de pesquisa.

1.2 A Educação Matemática como um Campo de Estudo

Romberg (1992) observa que é importante considerar a Educação Matemática como um campo de estudo, por ser a escola um “lócus” complexo. Diz que as perspectivas e procedimentos de pesquisa de muitas disciplinas têm sido utilizados para investigar as questões que surgem dos processos envolvidos no ensino e na aprendizagem de matemática e que lhes são inerentes. Romberg reproduz, um diagrama, elaborado por E. G. Begle (1961), ilustrando a relação entre as componentes da sociedade, matemática, alunos, professores e escolarização.

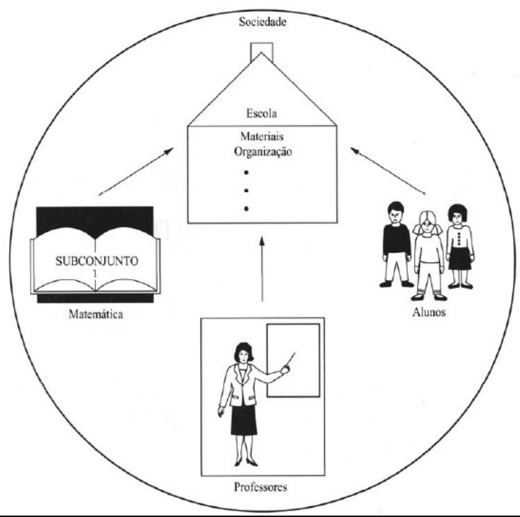


Figura 1

Relação entre as componentes sociedade, matemática, alunos, professores e escolarização. (Adaptado de E. G. Begle, notas de aula para um seminário em Educação Matemática, 1961).

Nesse diagrama, Romberg, observa que o empreendimento educacional escolar está situado dentro de um contexto social; o currículo da matemática escolar envolve um subconjunto da matemática; e o ensino é conduzido por um professor com um grupo de alunos, dentro de uma escola, por um período de tempo.

Romberg (1992) observa, ainda, que esse diagrama foi desenhado para apresentar um ponto de vista a respeito do ensino de matemática através do desenvolvimento de cinco pontos básicos:

1. As escolas foram criadas para preparar os jovens para *participarem da sociedade.* [Hoje diríamos que as escolas também são criadas para preparar pais e familiares de alunos para participarem da sociedade – Escola da Família].

2. Um ensino de matemática *sólido* é obtido de uma preocupação sobre quais ideias da matemática são ensinadas e para que são utilizadas.

3. O ensino de matemática pode ser *efetivo* se o estudante é levado em consideração.

4. Um ensino de matemática *eficiente* pode ser obtido através de considerações de aspectos da educação.

5. Professores são *administradores e guias* que fazem o processo educacional funcionar.

Desses pontos básicos surgem inúmeras questões e conjecturas que poderão conduzir as investigações. Como exemplo, Romberg (1992) cita:

- Quem decide que matemática é incluída no currículo?
- Que concepções têm os professores a respeito de como os estudantes aprendem a resolver problemas matemáticos?
- Como o ensino dos números racionais pode ser sequenciado, e em que passo?
- Quais são as concepções dos estudantes a respeito de razões e proporções?
- Qual é o impacto que o isolamento de um professor em relação ao trabalho de outros professores de matemática pode ter sobre o ensino?

Romberg diz que:

> Cada uma destas questões merece ser investigada. No entanto, pesquisadores individuais poderiam utilizar métodos diferentes para estudar cada questão. Além disso, estudiosos de diferentes disciplinas poderiam estudar as mesmas questões de maneiras bem diferentes (ROMBERG, 1992, p.50).

A esse respeito, ele também observa que perspectivas de diversas disciplinas (matemática, sociologia do conhecimento, história, psicologia da aprendizagem, e outras) são trazidas para atuar no campo da Educação Matemática, produzindo, cada uma delas, seu próprio conjunto de conceitos, métodos e procedimentos, e que para entender as tendências atuais em pesquisa em Educação Matemática, deve-se estar ciente destas várias perspectivas e dos princípios sobre os quais elas estão baseadas, dizendo nesse artigo que:

> Isso é importante porque diferenças em métodos não envolvem simplesmente modos alternativos de investigar as mesmas questões. O que diferencia um método de outro não é só o modo pelo qual a informação é coletada, analisada e relatada mas, também, os próprios tipos de questões tipicamente feitas e os princípios ou paradigmas sobre os quais os métodos utilizados para investigar tais questões estão baseados (ROMBERG, 1992, p.50).

1.2.1 Atividades dos Pesquisadores

Para Romberg (1992), o termo pesquisa refere-se a processos, a coisas que se faz, e não a objetos que alguém pode tocar e ver. Além disso, fazer pesquisa não pode ser visto como uma ação mecânica ou como um conjunto de atividades que indivíduos seguem de uma maneira prescrita ou predeterminada. Segundo ele, as atividades envolvidas em fazer pesquisa incorporam mais características de uma arte do que de uma disciplina puramente técnica. E, como em toda arte, Romberg prossegue, existe concordância, em um sentido amplo, a respeito de quais procedimentos devem ser seguidos e o que é considerado trabalho aceitável, concordância esta que surge do relacionamento cotidiano entre os pesquisadores.

“Uma vez que fazer pesquisa é uma arte, quais são suas atividades essenciais?”

Romberg coloca a questão acima para, em seguida, apresentar uma lista de dez atividades com o propósito de: (1) ressaltar alguns dos problemas comuns que pessoas não familiarizadas com pesquisa encontram para compreender os processos de pesquisa e (2) fornecer um pano de fundo para a discussão de tendências de pesquisa, apresentada em seu artigo, conforme já mencionado.

1.2.2. Esquema que descreve a Metodologia de Romberg:

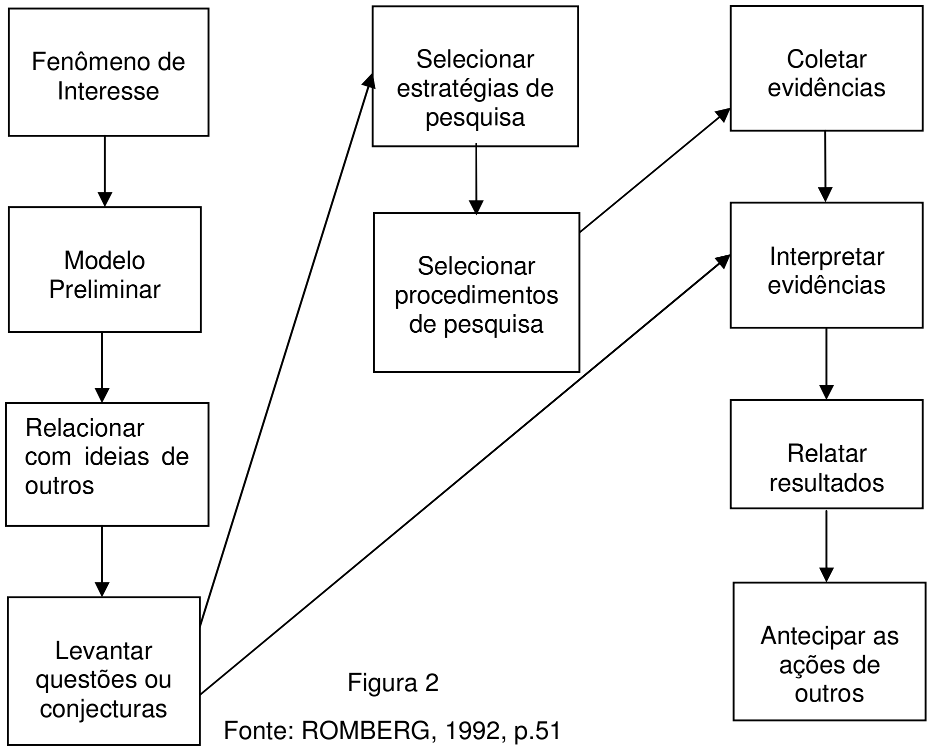


Figura 2

Fonte: ROMBERG, 1992, p.51

1. *Identificar um Fenômeno de Interesse.* Toda pesquisa começa com uma curiosidade a respeito de um particular fenômeno do mundo real.

2. *Construir um Modelo Preliminar.* Um pesquisador faz suposições sobre certos aspectos importantes como variáveis do Fenômeno de Interesse e procura ver como esses aspectos estão relacionados. Então, os apresenta em um modelo.

3. *Relacionar o Fenômeno de Interesse e o Modelo Preliminar a Ideias de Outros.* Uma importante atividade é a de examinar o que outras pessoas pensam sobre o Fenômeno de Interesse e determinar se suas ideias podem ser usadas para esclarecer, ampliar, ou modificar o Modelo Preliminar proposto.

4. *Elaborar questões específicas ou levantar uma conjectura "sensata".* Este é um passo chave em um processo de pesquisa porque, quando se examina um particular fenômeno, um número de questões potenciais inevitavelmente surge.

5. *Selecionar uma Estratégia Geral de pesquisa para se obter evidências.* A decisão sobre que métodos utilizar segue diretamente das questões selecionadas, da visão de mundo na qual estas questões estão situadas, do Modelo Preliminar

que se construiu a partir do “Fenômeno de Interesse”, e da Conjectura ou Pergunta que foi levantada. Estratégias auxiliares podem ser criadas.

6. *Selecionar procedimentos específicos* como auxiliares ao Procedimento Geral selecionado. Para responder as questões específicas, que foram levantadas é preciso coletar evidências. É neste passo que as técnicas usualmente ensinadas em cursos de Métodos de Pesquisa são importantes: como selecionar uma amostra; como reunir informação (entrevistar, questionar, observar e testar); como organizar a informação coletada, e assim por diante.

7. *Coletar Evidências.* Este passo pode ser direto uma vez que se tenha decidido coletar certas informações para construir um argumento a respeito das questões levantadas.

8. *Interpretar as Evidências Coletadas.* Neste estágio, o pesquisador analisa e interpreta as evidências que foram coletadas frente ao Problema de Pesquisa identificado.

9. *Relatar Resultados para Outros.* Ser membro de uma comunidade de pesquisa implica na responsabilidade de informar aos outros membros sobre a investigação completada e ouvir seus comentários e críticas.

10. *Antecipar a Ação de Outros.* Fornecidos os resultados de uma particular investigação, todo pesquisador está interessado no que virá a seguir e, então, antecipar ações posteriores de outros.

O que denominamos *Metodologia de Romberg* é a metodologia de pesquisa orientada por essa lista de atividades, que estabelece, basicamente, uma sequência de etapas para nortear o processo de investigação. A construção dessas etapas fornece uma fragmentação do fenômeno de Interesse, ressaltando os aspectos relevantes deste fenômeno que devem ser compreendidos. Deste modo vai se reconstruindo a identidade do fenômeno que se quer pesquisar.

Romberg observa que não há nada de único a respeito dessa lista de atividades, e diz que listas similares podem ser encontradas em quase todos os textos de metodologias de pesquisa. Ainda, que essas atividades não são necessariamente seguidas na ordem sequencial apresentada, pois a interação entre fatores, tais como a intenção do pesquisador, as hipóteses e conjecturas, a disponibilidade de informação, métodos e assim por diante, não podem ser tão nitidamente separados na prática.

Romberg afirma que as primeiras quatro atividades são as mais importantes pois envolvem o relacionamento das ideias do pesquisador, a respeito de um problema particular, com o trabalho de outros pesquisadores, e a decisão sobre o que se quer investigar. Essas quatro primeiras atividades são referidas na literatura como 1º Bloco de Romberg.

As duas atividades seguintes, que constituem o 2º Bloco de Romberg, envolvem a tomada de decisões a respeito de saber "o quê" deve ser feito e "como fazer" para se resolver o problema de pesquisa identificado. Também buscam reconhecer tipos de evidência coletadas e de que forma isso deve ser feito.

A atividade seguinte envolve a coleta de evidências e, por fim, as últimas três estão relacionadas com a interpretação dessas evidências frente ao problema de pesquisa, e como relatar os resultados antecipando ações de outros. Essas quatro últimas atividades constituem o 3º Bloco de Romberg.

1.2.3 Métodos utilizados pelos pesquisadores

Romberg observa que existem dois aspectos referentes ao uso do termo *métodos de pesquisa* que precisam ser compreendidos. Primeiro, os métodos de pesquisa específicos, discutidos na literatura, podem incluir a maneira pela qual a informação é coletada, o modo como ela é agregada e analisada ou, algumas vezes, como ela é relatada. Segundo, os métodos que um pesquisador usa, hoje em dia, para coletar evidências, dependem de pelo menos cinco fatores:

1. *Visão de mundo*, que diz respeito às crenças de uma particular comunidade em estudo;
2. *Orientação do tempo das perguntas a serem feitas*, isto é, se as questões levantadas são do passado, presente ou futuro;

3. Se a situação atualmente existe ou precisa ser criada;
4. *Fonte de informação prevista*, bem como os artefatos (livros, falas) como também respostas às perguntas e observações de ações.
5. *Julgamento do produto*, ou seja, da avaliação dos estudos.

Romberg observa que uma quantidade considerável de métodos de pesquisa específicos existentes na literatura estão baseados nesses cinco fatores ou fazem uso de alguns deles.

1.2.3.1 Métodos usados com evidência existente

Há três métodos nos quais os pesquisadores não têm poder para gerar novos dados; ou seja, eles devem encontrar o que já existe e não podem alterar a forma em que os dados aparecem. Esses métodos são: Historiografia; Análise de conteúdo; Análises de tendência.

1.2.3.2 Métodos usados quando uma situação existe e evidência deve ser desenvolvida

Há muitos métodos diferentes de investigação nos quais uma situação existe e a evidência específica precisa ser obtida. Em cada método, o pesquisador tem controle sobre a forma pela qual a informação é obtida e agregada. Romberg destaca: pesquisa retrospectiva; pesquisa de massa descritiva; entrevistas estruturadas; observações estruturadas; estudos de caso; pesquisa-ação; e etnografia.

1.2.3.3 Experimentos

Se a conjectura de um pesquisador envolve predizer o que acontecerá sob condições que ainda não existem, ou seja, se envolve a obtenção de evidência sobre efeitos de um novo e diferente produto, ou programa, utiliza-se uma *abordagem experimental*. Nesse tipo de estudo, criar uma nova situação é uma parte crítica do trabalho.

1.2.3.4 Avaliação

Romberg, (1992, p.58), observa que é comum, especialmente em Educação Matemática, que indivíduos ou grupos criem novos produtos com a intenção de melhorar o ensino e a aprendizagem.

O processo de desenvolvimento de um produto envolve quatro estágios: projeto, criação, implementação e utilização. Entendemos assim que o desenvolvimento de um produto envolve um processo de engenharia de inventar partes e cololcá-las juntas para formar algo novo.

Complementando a produção de novos materiais, os avaliadores desenvolveram quatro metodologias gerais para determinar a qualidade do produto em cada estágio: *avaliação de necessidade*; *avaliação formativa*; *avaliação somativa*; e avaliação esclarecedora.

Romberg, ao falar sobre avaliação de necessidade, levanta três questões: Há uma necessidade desse produto? Há uma certa probabilidade de que esse produto preencherá aquela necessidade? Que prioridade este produto tem entre outros? Falando sobre formativa, ele diz que, no estágio criativo do desenvolvimento do produto, um avaliador que saber se o produto é de qualidade ou não. Para isso deve saber se o conteúdo do produto é de boa qualidade; se o desempenho dos resultados pretendidos é alcançados; se o desempenho dos resultados não desejados é identificado; e se são fornecidos os serviços de apoio necessários para a sua instalação. A fim de falar sobre avaliação somativa, Romberg diz que o pesquisador deve coletar evidências para responder as questões: quão diferente é seu produto dos outros; que diferenças de desempenho seu produto tem dos demais concorrentes; que diferenças há entre os custos do seu produto e aqueles de outros concorrentes; foram feitas provisões para o uso desse produto. Como avaliação esclarecedora se entende a caracterização de estudos de programas inovadores em uso efetivo. O procedimento envolve a aplicação de métodos de pesquisa de campo para a avaliação de novos produtos educacionais.

Capítulo 2

Das minhas experiências ao meu problema de pesquisa

Tendo trabalhado no ensino público desde 1992, como professora de matemática (e eventualmente de outras disciplinas da grade curricular), com efetivação em 2004, pude observar que boa parte dos professores do ensino público em nível fundamental (ciclos 3 e 4) e médio, se não a maioria, tem-se mostrado refratária a inovações metodológicas. E isso pelos mais diversos motivos, destacando-se o desestímulo profissional (em minha opinião decorrente do aviltamento que a carreira do magistério público vem sofrendo há várias décadas) e a falta de formação específica do professor para lidar com o “processo de inclusão” dos alunos frequentadores das escolas públicas - em sua grande maioria, provenientes das classes de pouco estímulos e oportunidades. Como diminuir o distanciamento entre a formação teórico-pedagógica dos profissionais da área, formação que pressupõe, em geral, um “universo ideal” de alunos e a realidade que encontrarão nas salas de aula? Embora essa questão mereça uma discussão muito mais ampla, vou me restringir aqui à minha própria experiência no processo de ensino-aprendizagem-avaliação ocorrida dentro de um universo “real”.

Podemos constatar uma aversão significativa dos estudantes com respeito à matemática, quando não, com respeito aos próprios professores desta disciplina. Tenho observado que, na matemática, o planejamento das aulas do dia a dia tem enfatizado, sobretudo, aspectos manipulativos e fórmulas, deixando de lado as eventuais aplicações da teoria a problemas práticos e a problemas relacionados com o cotidiano dos estudantes. Esta característica, reconhecida passivamente pela maioria dos docentes da Rede Pública, só pode contribuir para a desmotivação dos alunos nas salas de aula. A ausência de manipulações de modelos, de atividades que estimulem a visualização, a experimentação, a formulação de hipóteses, a dedução de resultados matemáticos e sua ligação com outras áreas do conhecimento humano e das ciências exatas, geram grande apatia durante as aulas tradicionais.

Desta forma, me parece que não estamos preparando os alunos de modo adequado para um mercado de trabalho que, cada vez mais, exige habilidades envolvendo matemática e áreas afins, bem como a habilidade para lidar de modo crítico-reflexivo com os novos desafios que inevitavelmente surgirão em uma sociedade marcada por um grande dinamismo.

Parece-me que existe um grande consenso entre os educadores quanto à dificuldade de se ensinar e aprender matemática, o que sugere a necessidade de introduzir inovações metodológicas, novas formas de se ensinar matemática, e não somente trabalhar com as aulas expositivas tradicionais. Estes são desafios que nós professores temos que enfrentar, mesmo que desmotivados e despreparados, como já mencionado anteriormente. No entanto, também de acordo com minha experiência, nem mesmo o desenvolvimento dos diversos projetos (Projeto Água, Projeto Consumo e Meio Ambiente, Projeto Hidroponia,...), instituídos nas escolas nesta última década, têm sido discutidos, de modo mais amplo e integrado, com a totalidade dos professores envolvidos nesses projetos. Em decorrência disso, tais projetos não atingem o objetivo esperado: desenvolver um conteúdo significativo, mesmo que modesto, a partir de temas motivadores, otimizando tanto quanto possível o processo de ensino-aprendizagem em sala de aula. Ainda, no que diz respeito à matemática, em reuniões na instituição de ensino, não se tem discutido o currículo e as dificuldades encontradas pelos estudantes no aprendizado desta disciplina, as discussões se limitando apenas ao bom ou mau comportamento dos alunos, seu rendimento, etc.

Infelizmente, não se discutem as duas questões, que me parecem fundamentais:

O que é que devemos ensinar? Como devemos ensinar?

No que diz respeito a este trabalho de pesquisa, parti do pressuposto de que o conteúdo a ser ensinado nas diversas disciplinas já vem especificado nos PCNs - Parâmetros Curriculares Nacionais - e nas Propostas Curriculares do Estado de São Paulo, Ensino Fundamental e Ensino Médio, embora consciente de que esse conteúdo também se constitui num vasto campo de pesquisa, e também, pressupondo que os professores, a princípio, devem se pautar por esse conteúdo, e seguir, tanto quanto possível, a ordenação dos temas conforme apresentada nesses documentos. Deste modo, considerei que, das duas questões colocadas acima, apenas a segunda - Como devemos ensinar? - permitiria alguma autonomia no desenvolvimento de uma pesquisa. Ou seja, considerei que o problema metodológico seria o eixo central de meu trabalho com enfoque específico no *ensino do conceito de função, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através de Resolução de Problemas,* já assumido por mim como uma metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação.

Em geral, as diversas dúvidas e conflitos com respeito a o que ensinar, e como ensinar, em matemática, dizem respeito à crise dos paradigmas educacionais e curriculares, que já vêm sendo discutidos desde o início do século XX até os dias atuais. Como consequência desta crise, resultaram, e resultam ainda hoje, inovações metodológicas e novas formas de se ensinar matemática, como uma necessidade premente de se encontrar novos caminhos que possam pacificar o estudante nesta disciplina, quase sempre mal-amada, mal compreendida, e fruto de desilusões de fim de ano.

2.1 A minha pesquisa e a Metodologia de Romberg

Até mesmo antes de elaborar o meu projeto para a seleção ao Programa de Mestrado, que aparece parcialmente reproduzido nas considerações a seguir, eu já tinha tido a oportunidade de entrar em contato com a metodologia de pesquisa de Romberg, ao participar de reuniões do grupo GTERP. No entanto, eu ainda não tinha assimilado essa metodologia de modo satisfatório, e só depois de encontros com minha orientadora pude compreender melhor as estratégias fornecidas por essa metodologia de pesquisa.

As experiências vivenciadas durante minha atuação profissional, mencionadas anteriormente, forneceram um substrato bastante propício para questionamentos e reflexões concernentes ao ensino e à aprendizagem de matemática. Novas ideias e inquietações surgiram, convicções se reforçaram ou perderam consistência, tornando possível a aquisição gradual de uma visão mais ampla desse mundo particular e, de certa maneira, hoje me vejo inserida no conjunto daqueles que se preocupam com a interpretação teórica da realidade. As inquietações foram de grande importância, pois inevitavelmente tanto as dúvidas como as crenças e experiências trazidas da vida diária, constituem a matéria prima para uma investigação e, portanto, serão tratadas como um fenômeno de estudo.

Esta pesquisa, que está em processo de construção, interage com questões sociais e, em especial, com comunidades de estudo. Romberg, ao falar sobre comunidades de estudo, diz que

> Um pesquisador conduz sua pesquisa dentro de uma comunidade. As comunidades de estudo envolvem compromissos com certas linhas de raciocínio e premissas para certificar o conhecimento. Cada campo de escolaridade é caracterizado por particulares constelações de questões, métodos e procedimentos. Essas constelações apresentam modos compartilhados de “ver” o mundo de trabalho, de testar os estudos uns dos outros. Aprender os exemplos de um campo de inquirição envolve mais do que aprender o conteúdo desse campo, é também aprender como ver, como pensar nele e agir para o mundo (ROMBERG,1992, p.53).

2.1.1 Meu Fenômeno de Interesse

Quando comecei a dar aulas, muito antes de me preocupar com questões de metodologia de pesquisa e, na verdade, nem mesmo estando ciente da conveniência, ou necessidade, de procurar seguir uma metodologia de pesquisa, eu já considerava a possibilidade de tomar, como objeto de estudo, o “Conceito de Função”. A partir dos anos finais de minha Graduação, esse conceito passou a despertar em mim um interesse particular e, até mesmo, fascínio, por estar presente em praticamente todas as áreas da matemática, aparecendo tanto nos diagramas mais simples dos livros ginasiais quanto em complexos diagramas da matemática mais avançada. Durante o curso de História da Matemática ministrado pelo Prof. Dr. Sérgio Roberto Nobre, no programa de Pós-Graduação da UNESP, Rio Claro, tive a oportunidade de conhecer o texto "*The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century", Archive for History of Exact Sciences, 16, 1976/77* (O Conceito de Função até a Metade do Século XIX, Arquivo de História das Ciências Exatas, 16, 1976/77), de autoria de A. P. Youschkevith e, dentre os vários temas e textos propostos pelo Prof. Sérgio naquele curso, foi esse o texto que escolhi, com o objetivo de estudá-lo e apresentá-lo no final do semestre em forma de seminário. Nesse texto, o autor faz uma análise histórica do conceito de função, desde os tempos antigos até a metade do século 19, apresentando os principais estágios de seu desenvolvimento, com seus personagens principais, e revela, de modo claro, a surpreendentemente lenta e gradual maturação desse conceito e a influência do mesmo na evolução do pensamento científico e filosófico, durante os períodos de progresso ocorridos na Antiguidade, na Idade Média e no Período Moderno. Reputo este texto como um dos mais importantes e interessantes que já passaram por minhas mãos, e tive a oportunidade de traduzi-lo integralmente. Ao final deste trabalho, em um apêndice, apresento minha tradução do artigo de A. P. Youschkevith, que reforçou o tema "O conceito de função", como sendo o fenômeno de interesse em meu projeto de mestrado.

2.1.2 Modelo Preliminar

Embora eu já tivesse escolhido, desde o início, qual seria o meu Fenômeno de Interesse, eu não tinha ainda qualquer esboço de meu Modelo Preliminar. Gradualmente, conforme eu adquiria familiarização com a Metodologia de Romberg, foram surgindo várias ideias para o modelo preliminar, até a obtenção de um modelo que me pareceu satisfatório.

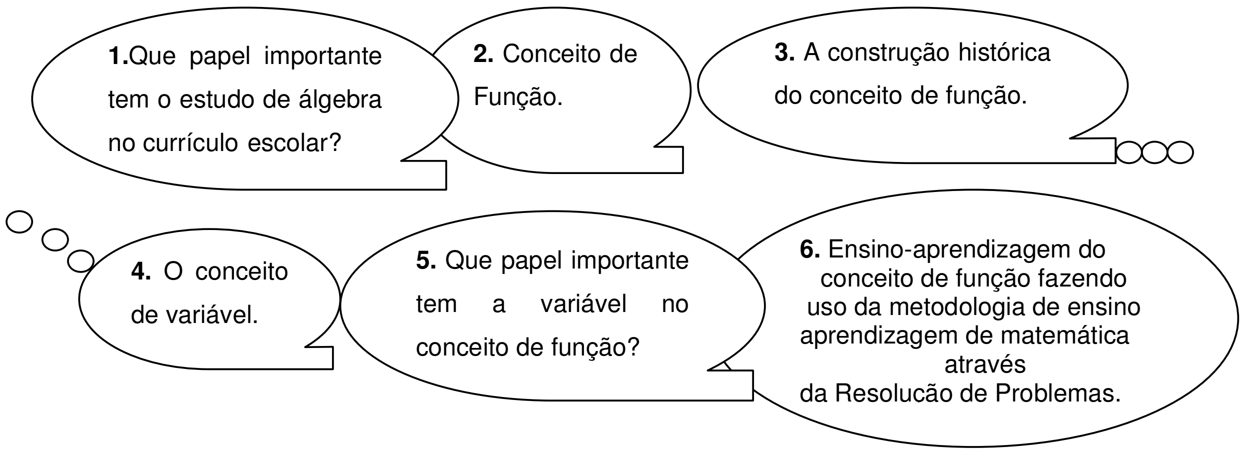


Figura 3

2.1.2.1 Um Modelo Modificado

A Metodologia de Romberg estabelece um canal de duas mãos entre o modelo preliminar e o fenômeno de interesse na medida em que o modelo contribui para a aquisição de conhecimento novo a respeito do fenômeno e, por sua vez, esse conhecimento novo pode levar a uma reestruturação do modelo. No nosso caso, obtivemos um novo modelo quase que imediatamente após a elaboração do Modelo Preliminar. Percebemos que precisávamos externar, com maior objetividade, os novos conhecimentos e significados, referentes à Resolução de Problemas, adquiridos por meio de estudo teórico e por meio de nossa experiência profissional, e que deveríamos compartilhar, e saber como compartilhar, ou seja, saber como transmitir, esses novos conhecimentos e significados, sobretudo em sala de aula, de modo a tornar o aluno um co-construtor de seu conhecimento, para o quê a análise de erros é um auxiliar importante.

Então, após refletirmos sobre essas variáveis, chegamos ao seguinte

Modelo Modificado:

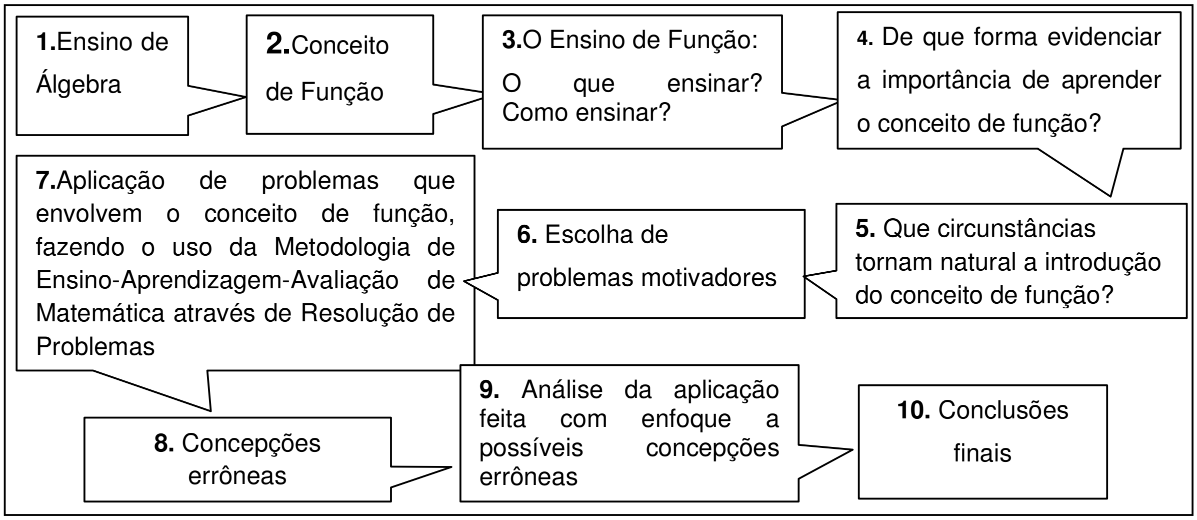


Figura 4

2.1.3 Relacionar com Ideias de Outros

Segundo a Metodologia de Pesquisa de Romberg, que vem servindo de apoio a este trabalho, um dos passos importantes em um processo de pesquisa é o de examinar o que outras pessoas pensam sobre o fenômeno em estudo, analisando se suas ideias podem ser usadas para esclarecer, ampliar ou modificar o modelo proposto por nós.

Em acordo com esse ponto de vista, Santos (2007) afirma que interessa dar um tratamento destacado à pesquisa bibliográfica:

> Primeiro, porque estará presente em qualquer processo de pesquisa. Com efeito a respeito de quase tudo que se deseje pesquisar, algo já foi pesquisado de forma mais básica, ou idêntica ou correlata. Há, portanto, outras percepções e posições que podem servir, seja para embasamento, seja para comparações ou mesmo para o conhecimento daquilo que se pretendia pesquisar por conta própria. Segundo, porque a pesquisa bibliográfica é mais simples e confortável, pois dispensa todo o trabalho de montagem/escolha/testagem/relato de dados. Os dados já estão prontos, organizados, publicados (p.104).

Santos também afirma que

> Percebe-se, porém, em certos meios acadêmicos, uma tendência a tratar o dado bibliográfico como secundário, como informação de segunda categoria. É um equívoco. *É verdade que a pesquisa bibliográfica não costuma oferecer dados inéditos, como a pesquisa de campo ou de laboratório. Ressalte-se, porém, que em nada compromete a possibilidade de originalidade dos raciocínios que a partir deles, possam ser desenvolvidos. A bem da verdade, dados já publicados podem, mesmo, possibilitar raciocínios inéditos, já que o conceito de* ***inédito*** *não se restringe a "realidade nova". Pode também significar "pensamento novo" a respeito de "realidade velha". (p.104-105, grifo do autor).*

Propusémo-nos realizar uma investigação do conceito de função em quatro frentes. Uma delas, envolvendo aspectos históricos, tais como mudanças metodológicas e de ênfase nos currículos de matemática, e a evolução do conceito de função ao longo do tempo. Outra, enfocando a inserção do tópico função no domínio da álgebra. Uma terceira, referente à Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas; e, por fim, uma frente relacionada a concepções errôneas e erros que são cometidos durante o ensino e a aprendizagem de funções. Desta forma, nos interessa fazer um levantamento de trabalhos já realizados por aqueles que pesquisam sobre

a. Documentos Oficiais;

b. A Inserção do tópico Função no domínio da Álgebra;

c. Resolução de Problemas; e

d. Concepções Errôneas.

Nossa proposta foi a de compilar, eventualmente em sua íntegra, trechos de especialistas nas áreas que escolhemos, para investigar nosso Fenômeno de Interesse, e seguir nosso Modelo Modificado, visando à definição de nosso problema de pesquisa.

A visão e o auxílio dessas quatro frentes expandiram o nosso foco, e nos ficou claro que deveríamos reservar um capítulo próprio para cada uma delas:

Capítulo 3 – Documentos Oficiais;

Capítulo 4 – A Inserção do tópico Função do domínio da Álgebra;

Capítulo 5 – Resolução de Problemas;

Capítulo 6 – Concepções Errôneas.

Capítulo 3

Mudanças no Currículo; Documentos Oficiais

Reproduzimos abaixo um trecho de *The Psychology of Arithmetic* (1922), de Edward L. Thorndike, psicólogo que desenvolveu a teoria psicológica de aprendizagem conhecida como *associacionismo*.

> **De acordo com o senso comum, a tarefa da escola elementar é ensinar**: (1) os significados dos números, (2) a natureza de nosso sistema de notação decimal, (3) os significados da adição, subtração, multiplicação e divisão, e (4) a natureza e relações de certas medidas comuns; **para assegurar** (5) a habilidade de adicionar, subtrair, multiplicar, e dividir [...]; (6) a habilidade de aplicar o conhecimento e capacidade indicados nos itens (1) a (5) para resolver problemas, e (7) certas habilidades específicas para resolver problemas referentes a porcentagens, juros e outras ocorrências comuns na vida dos negócios. [**...**] **Esse ponto de vista ordinário da natureza do aprendizado aritmético é obscuro e inadequado** [...]. Ele não define o que é o “conhecimento dos significados dos números”; [...] ele não faz distinção entre a habilidade de lidar com certos problemas quantitativos oferecidos pela vida e a habilidade para lidar com os problemas encontrados em livros didáticos e programas de estudo; ele deixa “a habilidade para aplicar o conhecimento e capacidade” como uma faculdade geral um tanto mística a ser aprimorada por alguma mágica educacional. (THORNDIKE, 1922, p.1, grifo nosso).

E agora, trechos retirados do “Princípio do Currículo”, uma das seções da publicação Principles and Standards for School Mathematics (2000), do NCTM.

> Um currículo é mais que uma coleção de atividades: ele deve ser coerente, focado em matemática relevante, e bem articulado ao longo das séries. [...] Um currículo coerente efetivamente organiza e integra ideias matemáticas importantes, de modo que os estudantes podem ver como as ideias se constroem sobre, ou se conectam com, outras ideias [...] o currículo deveria oferecer experiências que permitam que os estudantes compreendam que a matemática tem aplicações poderosas em modelagem e em predição de fenômenos

> do mundo real. [...] Um currículo bem articulado dá ao professor orientação sobre ideias importantes ou temas principais, os quais recebem atenção especial em diferente momentos. (NCTM, 2000, p.14 -16).

Embora bastante distanciadas no tempo, essas citações parecem perfeitamente concordantes e complementares, com a segunda procurando fornecer uma resposta, pelo menos parcial, às deficiências apontadas pela primeira. E isso não deveria surpreender, pois ambas referem-se a um mesmo e já tão antigo problema, o ensino e a aprendizagem da matemática. No entanto, uma análise mais abrangente do contexto histórico/cultural em que cada uma delas está inserida, pode revelar diferenças de pontos de vista importantes, tanto no que se refere a metodologias de ensino quanto no que se refere a teorias de aprendizagem e currículo.

Talvez não seja incorreto supor que preocupações com o ensino da matemática, incluindo aí currículo e metodologia, tenham surgido junto com o próprio sistema escolar, ou seja, junto com o sistema educacional coletivo e institucional denominado *escola*. E, naturalmente, essas preocupações não brotam de um solo plano e seguro mas, ao invés disso, de uma terra movediça, de circunstâncias sempre novas decorrentes da evolução tecnológica das sociedades. Cada vez mais se requer, de todos os que participam do mercado de trabalho, um conhecimento cada vez mais especializado.

Onuchic , em 1999, observa que

> Ao passar de uma sociedade rural, onde “poucos precisavam conhecer matemática”, para uma sociedade industrial onde mais gente “precisava aprender matemática” em razão da necessidade de técnicos especializados, daí para uma sociedade de informação onde a maioria das pessoas “precisa saber matemática” e, agora, caminhando para uma sociedade do conhecimento que exige de todos “saber muita matemática”, é natural que o homem se tenha interessado em promover mudanças na forma de como se ensina e como se aprende matemática. (p.200)

“Em todas as épocas e em todas as culturas, a matemática e a língua materna vêm constituindo duas componentes básicas na história dos currículos escolares” (SÃO PAULO, 2008). Mas ao longo desses anos, toda a nossa maneira de ser e de estar no mundo, bem como o modo de nos relacionarmos com a natureza, têm passado por um sem número de crises e mudanças, e o mesmo ocorre com respeito à ciência e ao conhecimento, à educação e aos currículos e, em particular, com respeito à educação matemática.

3. 1 Reformas do Currículo de Matemática no século XX – Teorias Psicológicas de Aprendizagem

Em um trabalho apresentado em *Série de Palestras e Debates*, 1983, na Faculdade de Educação da Unicamp, Beatriz D' Ambrosio faz uma análise das fases pelas quais passou o ensino da matemática, desde o início do século XX até as décadas de 60 e 70, ressaltando a influência de teorias psicológicas de aprendizagem na evolução do currículo matemático. D'Ambrosio associa, a cada fase, uma teoria psicológica de aprendizagem subjacente, que vem justificar, de certo modo, o currículo e a metodologia nela predominantes.

Segundo D'Ambrosio, "durante os primeiros dois terços do século XX, o ensino de matemática elementar passou por três fases principais", motivadas por uma mistura de fatores sociológicos, políticos, tecnológicos e psicológicos: a) "Fase do exercício e prática; b) Fase da aprendizagem significativa; e c) Fase da matemática moderna".

Mais recentemente, em *Mudanças através dos anos: conexões entre teorias de aprendizagem psicológica e o currículo da matemática escolar*[1]*,* Lambdin e Walcott (2007), estenderam o trabalho de D'Ambrosio até os dias de hoje, descrevendo, além das três fases já mencionadas, outras três fases que se seguiram ao período da matemática moderna:

---

[1] Do original em inglês: Changes through the Years: Connections between Psycological Learning Theories and the School Mathematics Curriculum.

- De volta às Bases
- Resolução de Problemas
- Padrões, Avaliação e Responsabilidade
  (Standards 1989,1991,1995,2000).

Como em D'Ambrosio, essas autoras também focam sua atenção no fator psicológico, ou seja, na conexão que se pode estabelecer entre teorias psicológicas de aprendizagem e o currículo e a prática do ensino de matemática, com as mudanças, nesses últimos, sendo legitimadas por aquelas teorias, mas não deixando de destacar a influência de outros fatores importantes nessas mudanças educacionais.

Lambdin e Walcott observam que cada uma destas fases merece atenção por corresponder, cada uma delas, a um período de mudanças radicais e fundamentais, com introdução de práticas inovadoras na educação matemática, mas que não só por isso devemos examinar com atenção o que se poderia considerar um período ultrapassado. Segundo essas autoras, a análise histórica pode fornecer uma perspectiva sobre as forças e questões que contribuem para mudanças na educação, e a perspectiva histórica nos ajuda a evitar uma visão afunilada das particularidades dos problemas educacionais que enfrentamos hoje, sugerindo opções a serem consideradas conforme ponderamos suas soluções.

Lambdin e Walcott observam ainda que, num exame mais detalhado, muitas inovações educacionais não são mais do que reciclagens de práticas antigas e, sendo assim, um outro benefício da análise histórica é o de revelar a extensão na qual certas práticas contemporâneas têm suas raízes em mudanças educacionais de anos anteriores.

Nas próximas subseções, apresentaremos uma descrição de cada fase, utilizando como referência os artigos de D'Ambrosio e de Lambdin e Walcott. Na fase Resolução de Problemas, utilizaremos também o artigo Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving (1989) de Schroeder e Lester.

Reproduzimos a seguir, de modo adaptado, uma tabela apresentada por Lambdin e Walcott (2007), contendo um breve panorama de cada uma dessas fases, incluindo suas teorias e principais teóricos, identificando o foco dessa teoria e procurando mostrar como atingir seu objetivo.

Tabela 1. Relações entre as fases da Educação Matemática e as Teorias de Aprendizagem Psicológica, a partir do século XX. (LAMBDIN E WALCOTT, 2007, p.5)

FASES	PRINCIPAIS TEORIAS E TEÓRICOS	FOCO	COMO ATINGIR
Exercício e prática (aprox.1920-1930)	Coneccionismo ou Associacionismo Thorndike	Facilidade com cálculo	Memorização rotineira de fatos e de algoritmos Quebrar todo o trabalho em séries de pequenos passos
Aritmética Significativa (aprox.1930-1950´s)	Teoria Gestalt Brownell, Wertheimer van Engen, Fehr	Compreensão de ideias e habilidades matemáticas Aplicações da matemática a problemas do mundo real	Ênfase nas relações matemáticas Aprendizagem incidental Abordagem de atividade orientada
Matemática Moderna (aprox.1960-1970´s)	Psicologia do desenvolvimento, teoria sociocultural Bruner, Piaget, Dienes	Compreender a estrutura da disciplina	Estudo das estruturas matemáticas Currículo em espiral Aprendizagem pela descoberta
De volta às bases (aprox. 1970´s)	(Volta ao) coneccionismo	(Volta à) preocupação com o conhecimento e o desenvolvimento de habilidade	Fatos aprendidos por exercício e prática
Resolução de problemas (aprox. 1980´s)	Construtivismo, psicologia cognitiva, teoria sociocultural Vygotsky	Resolução de problemas e processos de pensamento matemático	Volta à aprendizagem pela descoberta Aprendizagem através de resolução de problemas
Padrões, avaliação e responsabilidade (aprox. 1990 até hoje)	Psicologia cognitiva, teoria sociocultural versus ênfase renovada sobre psicologia experimental NCLB	"Guerras matemáticas": preocupação pela alfabetização matemática dos indivíduos versus preocupação com a administração de sistemas educacionais	NSF – desenvolve currículos baseados em padrões orientados para os estudantes versus foco sobre preparação de testes para expectativas especificadas pelo Estado

NCLB - No Child Left Behind Act - Nenhuma Criança Ficará Para Trás

NSF – National Science Foundation - Fundação Nacional de Pesquisa

3.1.1 Fase do Exercício e Prática

Até por volta de 1900, o objetivo da escola era o de confrontar o aluno com exercícios mentais difíceis, com o propósito de desenvolver a sua capacidade de raciocínio e pensamento. Nessa época predominava a *teoria da disciplina mental* que, entre outras coisas, considerava a aprendizagem da matemática como o veículo primário para o desenvolvimento do raciocínio. No entanto, a disciplina mental, como uma teoria de aprendizagem, perdeu força durante a primeira década do século 20, com o surgimento de uma nova teoria, proposta por Edward Thorndike.

Segundo D'Ambrosio, na fase do "exercício e prática", ou "avaliação e treino" ("*drill and practice*"), o objetivo do currículo era o de garantir que o aluno decorasse os fatos aritméticos básicos (as tabuadas) e os algoritmos que lhe permitiriam fazer cálculos com rapidez e precisão. Para tanto, o aluno deveria preencher páginas e mais páginas de caderno com cálculos envolvendo as operações básicas, cálculos frequentemente idênticos a menos dos números envolvidos. Essa fase predominou no período de 1920 a 1930, aproximadamente.

Thorndike, principal psicólogo associado à fase do exercício e prática, contribuiu para o desenvolvimento de alguns dos primeiros princípios da teoria psicológica de aprendizagem conhecida como *associacionismo*, ou *estímulo–resposta.* Thorndike afirmava que a aprendizagem se dá pela formação de *associações*, *conexões,* ou *vínculos,* entre estímulos (situações do ambiente) e respostas (reações de um organismo ao ambiente).

Embora tenha feito experimentos, sobretudo com animais, Thorndike defendia que seus princípios de aprendizagem se aplicariam aos humanos. Segundo Thorndike, todo comportamento humano, pensamento e ação, também poderia ser analisado em termos desses dois constructos simples: estímulo e resposta. Com respeito à aprendizagem de aritmética, pode-se ler na página 70 do livro de Thorndike, *The Psychology of Arithmetic,* de 1992, uma explicação de como a aritmética poderia ser traduzida em vínculos estímulo-resposta. Para tanto, ainda na página 70, na aprendizagem da aritmética, a questão: "Quais são os vínculos elementares, ou conexões, que constituem as habilidades mentais envolvidas" ele responde dizendo que o professor precisava reconhecer e tornar explícitas as conexões essenciais que constituíam os assuntos que deveriam ser ensinados. Era preciso providenciar aos alunos o tipo apropriado de exercício e prática para cada uma das conexões, durante o tempo necessário para fortalecê-las:

> O ensino da aritmética, quando considerado como um problema referente ao desenvolvimento de uma hierarquia de hábitos intelectuais, se transforma, em larga medida, em um problema de escolha dos vínculos a serem formados, da descoberta da melhor ordem na qual formá-los, e do melhor meio de formá-los naquela ordem.

Exercício e prática se estabeleceu como uma forma de instrução em matemática, especialmente em aritmética e, ainda hoje, tem feito parte do processo de aprendizagem, embora usualmente acompanhado por experiências concretas ou explicações sobre os princípios matemáticos subjacentes.

3.1.2 Fase da Aritmética Significativa

Durante a segunda fase, que coincidiu com um movimento de maiores dimensões conhecido por educação progressista, os professores tentaram tornar a aprendizagem da aritmética uma aprendizagem significativa através do envolvimento do aluno em atividades. Os teóricos dessa fase enfocavam sobre a compreensão de ideias e habilidades matemáticas e queriam aplicações da matemática a problemas do mundo real.

Embora Thorndike tenha ressaltado que exercícios deveriam ser tornados interessantes e verificados com o auxílio de objetos concretos, sua influência sancionou o ‘exercício e prática’ como o método principal da instrução aritmética, e, logo, surgiram vozes dissidentes, com maior destaque a de Wiliam Brownell.

Algumas objeções levantadas por Brownell, segundo D’ Ambrosio são:

(1) O método do exercício e prática não levava em conta as diferenças qualitativas nos cálculos de adultos e crianças; (2) O método envolvia uma visão distorcida dos objetivos da aprendizagem. Para Brownell (e outros), o critério para competência em aritmética era a habilidade para pensar quantitativamente, e não responder com exatidão a uma dada lista de problemas aritméticos.

De 1930 a 1950, aproximadamente, período conhecido como a *era progressiva,* a ênfase no exercício e prática deu lugar, então, a uma tentativa de desenvolver os conceitos matemáticos de uma maneira *significativa.*

Para alguns progressivos, a matemática era significativa quando encontrada no contexto de alguma atividade prática. Esses educadores recomendavam uma abordagem envolvendo atividades. Outros acreditavam que os estudantes (sobretudo os das séries iniciais) aprenderiam toda a matemática de que precisavam, e aprenderiam melhor, através de *experiências incidentais*, mais do que através do ensino sistemático.

3.1.3 Fase da Matemática Moderna

Na fase conhecida como *matemática moderna*, procurou-se enfatizar a teoria matemática subjacente aos conceitos e procedimentos a serem ensinados. Surgiram novos textos didáticos, em que os tópicos e conceitos eram unificados em uma sequência de cursos (Álgebra I, Geometria, Álgebra II, Pré-Cálculo) ao longo de quatro anos.

Houve uma tentativa de introduzir ideias abstratas cedo no currículo, e de voltar a essas ideias nas aulas seguintes, com reelaborações e extensões. Novos tópicos no currículo da escola elementar foram introduzidos, incluindo teoria dos conjuntos, sistemas de numeração, geometria intuitiva e teoria dos números. E esses tópicos, ainda desconhecidos pelos alunos, eram relacionados a um conteúdo mais familiar por meio de uma *organização em espiral*.

Segundo Onuchic, (1999), essa reforma estava apoiada em estruturas lógica, algébrica, topológica e de ordem, e enfatizava a teoria dos conjuntos. Realçava muitas propriedades, tinha preocupações excessivas com abstrações matemáticas e apresentava uma linguagem matemática universal, concisa e precisa. Entretanto, acumulava o ensino de símbolos e uma terminologia complexa que comprometia o aprendizado.

3.1.4 De volta às Bases

Desgostosos pelo fracasso da Matemática Moderna, educadores matemáticos americanos pediram uma volta às bases, isto é, uma volta ao associacionismo de Thorndike, uma volta com a preocupação do desenvolvimento do conhecimento e das habilidades e querendo atingir essas ideias com os fatos aprendidos por exercício e prática.

3.1.5 Resolução de Problemas

Nesta fase, predominante nos anos 80, a noção de que a resolução de problemas deve ocupar um papel de destaque no currículo é amplamente aceita. Este aspecto será mais detalhado no nosso capítulo 5.

No final da década de 80, Schroeder e Lester (1989), apresentaram três abordagens distintas da resolução de problemas como um meio de ensino-aprendizagem de matemática:

1. Ensinar *sobre* resolução de problemas
2. Ensinar *para* resolver problemas
3. Ensinar *através* da resolução de problemas

Ensinar ***sobre*** resolução de problemas refere-se ao modelo de resolução de problemas de George Pólya (1994), com alguma pequena variação eventualmente. Este modelo descreve um conjunto de quatro fases interdependentes no processo de resolver problemas matemáticos:

1. Compreender o problema;
2. Achar a relação entre os dados e as incógnitas, e elaborar um plano para a resolução;
3. Executar o plano;
4. Examinar a solução obtida no problema original.

No ensino de matemática ***para*** a resolução de problemas dizem os autores, o professor se concentra na maneira pela qual a matemática que está sendo ensinada pode ser aplicada na resolução de problemas (rotineiros ou não). Embora a aquisição de conhecimento matemático tenha importância primordial, o propósito essencial do aprendizado da matemática é a sua utilização. Consequentemente, os alunos recebem muitas oportunidades para aplicar a matemática que estão aprendendo na resolução de problemas. Além disso, o professor que ensina ***para*** a resolução de problemas está muito preocupado com a habilidade do estudante de transferir o que aprendeu de um problema, inserido em um certo contexto, para outros.

Também, segundo esses autores, no ensino de matemática ***através*** da resolução de problemas, os problemas são considerados não só como um meio para o aprendizado da matemática mas, também, como o *principal* meio de fazer isso. O ensino de um tópico começa com uma situação problema, que contém elementos essenciais de um tópico, e técnicas matemáticas são desenvolvidas como respostas razoáveis a problemas razoáveis. O aprendizado da matemática é visto como um movimento do concreto (um problema do mundo real que serve como um exemplo da técnica ou conceito matemático) para o abstrato (uma representação simbólica de uma classe de problemas, e técnicas para operar com esses símbolos).

As teorias da psicologia construtivista influenciaram os estudos e as pesquisas em resolução de problemas. Na visão construtivista, o aluno deve ser engajado ativamente na construção de seu próprio conhecimento.

Segundo as autoras, Lambdin e Wallcot (2007), as teorias de Piaget e de Vigotsky também contribuíram para o desenvolvimento do ensino focado pela resolução de problemas ao longo dessas ultimas décadas e até os dias de hoje.

Todos esses desenvolvimentos teóricos, e os novos que estão por vir, mantiveram origens em formulações já inspiradas anteriormente, sendo que as novas teorias vêm acrescentar novas dimensões às necessidades da sociedade.

A teoria que pretendemos focar neste trabalho, e que é a área de pesquisa de nossa comunidade, é a da terceira abordagem, isto é, aprender matemática através de resolução de problemas.

Embora todos os acontecimentos anteriores possam trazer ecos do passado, a teoria que hoje (atualmente) nos orienta e que reflete nossas preocupações e práticas na sala de aula, dentro da nossa área de estudos, é a "Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

3.1.6 Fase dos Padrões e Responsabilidade

Esta fase se inicia com a publicação dos *Padrões de Currículo e Avaliação para a Matemática Escolar*[2], pelo NCTM, em 1989, que traz sugestões para inovações do currículo. Subsequentemente, dois novos *Padrões* do NCTM foram lançados. Em 1991, focando o *ensino*, os Padrões Profissionais para o Ensino de Matemática[3] e, em 1995, focando a *avaliação*, os Padrões de Avaliação para a Matemática Escolar[4]. Em 2000, as recomendações oriundas dos três documentos foram atualizadas e consolidadas nos *Princípios e Padrões para a Matemática escolar*[5], que designaremos por *Standards 2000*.

Os *Standards* do NCTM, segundo Lambdin e Walcott (2007), refletem a influência da teoria construtivista ao ressaltar a importância de considerar não

---

[2]Do original em inglês: Curriculun and Evaluation Standards for School Mathematics, NCTM, 1989.

[3] Do original em inglês: Professional Standards for Teaching Mathematics, NCTM, 1991.

[4] Do original em inglês: Assessment Standards for School Mathematics, NCTM, 1995.

[5] Do original em inglês: Principles and Standards for School Mathematics, NCTM, 2000.

somente quais conceitos matemáticos os estudantes devem compreender e quais habilidades os estudantes devem adquirir mas também, e talvez o mais importante, como os estudantes aprendem. Os estudantes não são vistos como “passivamente absorvendo informação, armazenando-as em pequenos fragmentos facilmente recuperáveis, como um resultado de prática e reforço repetidos”. Ao invés disso, de acordo com os *Padrões de Currículo e Avaliação*, “indivíduos abordam uma nova tarefa com conhecimento prévio, assimilam nova informação e constroem seus próprios significados”.

Adicionalmente, dizem ainda essas autoras, que os *Standards* do NTCM ecoam a influência da teoria sócio cultural de aprendizagem isto é,

> “A aprendizagem com compreensão pode ser mais intensificada por meios de interações em sala de aula, conforme os estudantes propõem ideias e conjecturas matemáticas, aprendem a avaliar seus próprios argumentos e o de outros, e desenvolvem habilidades de raciocínio matemático” (p.17, grifo do autor)

Pesquisas para avaliar a eficiência dos currículos baseados nos *Standards* foram importantes, pois ao longo dos anos 1990, as opiniões a respeito de qual é a melhor maneira de se ensinar matemática eram bastante discordantes.

As sugestões para inovações do currículo, trazida nos *Standards*, que focavam principalmente no aluno, no “aprendiz” de matemática, foi apoiada por educadores favoráveis aos princípios construtivistas e sócios culturais. Já os que eram contrários, e que tendiam a se focar mais na matemática do que no aluno, queriam um currículo mais tradicional.

3.2 Documentos Oficiais

Uma das finalidades das instituições escolares é a de trabalhar as linguagens do conhecimento de modo formal e sistematizado e, os currículos, delimitando conteúdos de modo planejado e fornecendo orientação pedagógica, desempenham, junto com professores e gestores, um papel fundamental nesse empreendimento.

O que nos interessa agora é descrever algumas reformas do ensino formal estabelecidas pelas instâncias político-institucionais e a comunidade científica, envolvidas, com a educação básica, nos baseando em artigos e documentos oficiais.

No Brasil, a primeira vez que se previu um sistema nacional de educação foi durante o governo de Getúlio Vargas, com a Constituição de 1934. Mais precisamente no artigo 5°. no item XIV, lemos que é competência da União traçar as diretrizes da educação nacional. Mesmo antes dos anos 30, vinham acontecendo no país vários debates e reformas sobre esse tema, lideradas por Gustavo Capanema e Francisco Campos, sendo que este último protagonizou a gênese do programa de Matemática em nível nacional, a disciplina escolar Matemática, sendo que o responsável direto por esse programa foi o professor Euclides Roxo.

Em 1990 o Brasil participou da Conferência Mundial de Educação para Todos, em Jomtien, na Tailândia, convocada pela UNESCO[6], UNICEF[7], PNUD[8] e Banco Mundial[9]. Dessa Conferência, assim como da Declaração de Nova Delhi — assinada pelos nove países em desenvolvimento de maior contingente populacional do mundo, resultaram posições consensuais na luta pela satisfação das necessidades básicas de aprendizagem para todos, capazes de tornar universal a educação fundamental e de ampliar as oportunidades de aprendizagem para crianças, jovens e adultos.

A primeira Lei de Diretrizes e Bases da Educação foi publicada em 1961, pelo presidente João Goulart, 30 anos após a Constituição de 1934, seguida por

---

[6] UNESCO, Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura.

[7] UNICEF, Fundo das Nações Unidas para a Infância, que promove a defesa dos direitos das crianças, ajuda a dar resposta às suas necessidades básicas e contribui para o seu pleno desenvolvimento.

[8] PNUD, Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento.

[9] Banco Mundial, instituição financeira internacional que fornece empréstimos alavancados para os países em desenvolvimento para os programas de capital. É formado pela incorporação do Banco Internacional para Reconstrução e Desenvolvimento (BIRD) e pela Associação Internacional de Desenvolvimento (AID).

uma versão de 1971, durante o regime militar do presidente Emílio Garrastazu Médici, que vigorou até a promulgação da versão mais recente, em 1996, sancionada pelo presidente Fernando Henrique Cardoso e pelo ministro da educação Paulo Renato Souza.

3.2.1 Lei de Diretrizes e Bases

O que é a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional?

Tomamos como resposta o que consta nos Parâmetros Curriculares Nacionais de 1998:

Ela é a Lei Federal n°. 9.394, aprovada em 20 de dezembro de 1996, que consolida e amplia o dever do poder público para com a educação em geral, e em particular, para com o Ensino Fundamental. Assim, vê-se, no art. 22 dessa lei, que a Educação básica, da qual o Ensino Fundamental é parte integrante, deve assegurar a todos "a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhes meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores", fato que confere ao ensino fundamental, ao mesmo tempo, um caráter de terminalidade e de continuidade.

Tendo em vista o quadro atual da educação, no Brasil, e os compromissos assumidos internacionalmente, o Ministério da Educação e do Desporto coordenou a elaboração do Plano Decenal de Educação para Todos (1993-2003), em consonância com o que estabelece a Constituição de 1988, que afirma a necessidade e a obrigação de o Estado elaborar parâmetros claros, no campo curricular, capazes de orientar as ações educativas do ensino obrigatório, de forma a adequá-lo aos ideais democráticos e à busca da melhoria da qualidade do ensino nas escolas brasileiras.

No livro *Educação Matemática da Teoria à Pratica*, 1996, (p.111), Ubiratan D'Ambrosio nos diz que o Plano Decenal foi inspirado na Declaração de Nova Delhi, de 16 de dezembro de1993, ao afirmar

> Nada poderia ser mais claro nessa declaração que o reconhecimento da subordinação dos conteúdos programáticos à diversidade cultural que impera num país como o Brasil. Igualmente

> o reconhecimento de uma variedade de estilos de aprendizagem, implícito no apelo ao desenvolvimento de novas metodologias. Essencialmente, essas considerações determinam uma enorme flexibilidade tanto na seleção de conteúdos quanto na metodologia.

3.2.2 PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

O que são os Parâmetros Curriculares Nacionais?

Temos uma resposta resumida no seguinte parágrafo, retirado dos PCNs de 1997:

> Os Parâmetros Curriculares Nacionais constituem um referencial de qualidade para a educação no Ensino Fundamental em todo o País. Sua função é orientar e garantir a coerência dos investimentos no sistema educacional, socializando discussões, pesquisas e recomendações, subsidiando a participação de técnicos e professores brasileiros, principalmente daqueles que se encontram mais isolados, com menor contato com a produção pedagógica atual. (BRASIL,1997, p.13)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental – 1997 - são compostos por 10 volumes, todos relativos ao 1º e 2º ciclos – 1ª a 4ª séries. Um deles se refere à Introdução, oito desses volumes se referem às Áreas de Conhecimento (Língua Portuguesa, Matemática, Ciências Naturais, História e Geografia, Arte, Educação Física, e Língua Estrangeira) e o último volume diz respeito aos Temas Transversais, visto como novidade por incluir temas sociais como Meio Ambiente, Ética, Saúde, Pluralidade Cultural e Orientação Sexual.

Ainda, em 1998, foram publicados os PCN para o Ensino Fundamental, referentes ao 3º e 4º ciclos – 5ª a 8ª séries, compostos por outros 10 volumes, também separados em Áreas de Conhecimento, e com os mesmos Temas Transversais, aqueles referentes aos 1º e 2º ciclos. A Resolução n°.2 instituiu as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental.

Posteriormente, em 1999, foram publicados os PCN para o Ensino Médio. Essa coleção foi composta por 4 volumes: V1. Bases Legais, V2. Linguagens Códigos e suas Tecnologias, V3. Ciências da Natureza e Matemática e suas Tecnologias e V4. Ciências Humanas e suas Tecnologias. Segundo os Parâmetros Curriculares de 1999, a Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas.

Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e para aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar, no aluno, a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais.

Com a finalidade de consolidar habilidades instrumentais da Matemática no Ensino Médio, segundo os PCNs, a Matemática deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional.

Nesse sentido, é preciso que o aluno perceba a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de ideias e permite modelar a realidade e interpretá-la. Assim, os números e a álgebra como sistemas de códigos e a geometria na leitura e interpretação do espaço, a estatística e a probabilidade na compreensão de fenômenos em universos finitos são subáreas da Matemática especialmente ligadas às aplicações. Nesse sentido, o Parecer da Câmara de Educação Básica n°. 4/98 e a Resolução n° 2 de 1998 propuseram sete diretrizes como referência para a organização do currículo escolar. Essas diretrizes estão explicitadas no art. 3° e, também, nos PCNs.

De acordo com o Parecer CNE N°. 4/98 – CEB, as diretrizes dizem respeito a:

1. As escolas deverão fundamentar suas ações pedagógicas em princípios éticos, políticos e estéticos que se complementam com a autonomia, responsabilidade e solidariedade, com a cidadania e a vida democrática.

2. Reconhecimento da identidade pessoal de alunos, professores e demais profissionais que atuam na educação escolar, bem como da identidade institucional das escolas e dos sistemas de ensino.

3. Considerar o processo educacional como uma relação indissociável entre conhecimentos, linguagem e afetos, constituinte dos atos de ensinar e aprender.

4. Estabelecer conteúdos curriculares mínimos para a chamada Base Nacional Comum, esta diretriz se apoia no art. 9 da LDB, e ainda o Parecer:

> [...] a instituição de uma Base Nacional Comum com uma Parte Diversificada, a partir da LDB, supõe um novo paradigma curricular que articule a Educação Fundamental com a Vida Cidadã.
> O significado que atribuímos à Vida Cidadã é do exercício de direitos e deveres de pessoas, grupos e instituições na sociedade, que em sinergia, em movimento cheio de energias que se trocam e se articulam, influem sobre múltiplos aspectos, podendo assim viver bem e transformar a convivência para melhor. (BRASIL, 1998)

5. A quinta diretriz, complementa a quarta pois, junto do artigo 27 da LDB, orienta as escolas sobre como conduzir as propostas curriculares e sobre como articular os conhecimentos e valores da Base Nacional Comum e da Parte Diversificada ao contexto social durante o processo de ensino.

6. A sexta diretriz enfatiza a autonomia escolar e fundamenta-se na LDB para orientar as escolas no uso da Parte Diversificada ao contexto social.

7. Essa diretriz diz respeito, às condições e possibilidades da interdisciplinaridade e transdisciplinaridade, do sistema seriado ou por ciclos, do currículo, da relação de a escola com a sociedade serem objeto de planejamento e avaliação constantes da escola e de sua proposta pedagógica.

Por sua vez, *os Parâmetros Curriculares Nacionais*, *Introdução* na Seção dos Princípios e Fundamentos dos Parâmetros Curriculares Nacionais, dizem que

> A educação básica tem assim a função de garantir condições para que o aluno construa instrumentos que o capacitem para um processo de educação permanente. Para tanto, é necessário que, no processo de ensino e aprendizagem, sejam exploradas: a aprendizagem de metodologias capazes de priorizar a construção de estratégias de verificação e comprovação de hipóteses na construção do conhecimento, a construção de argumentação capaz de controlar os resultados desse processo, o desenvolvimento do espírito crítico capaz de favorecer a criatividade, a compreensão dos limites e alcances lógicos das explicações propostas. Além disso, é necessário ter em conta uma dinâmica de ensino que favoreça não só o descobrimento das potencialidades do trabalho individual, mas também, e sobretudo, do trabalho coletivo. Isso implica o estímulo à autonomia do sujeito, desenvolvendo o sentimento de segurança em relação às suas próprias capacidades, interagindo de modo orgânico e integrado num trabalho de equipe e, portanto, sendo capaz de atuar em níveis de interlocução mais complexos e diferenciados. (BRASIL, 1997, p.28)

É importante lembrar que os PCNs e as Propostas da Secretaria de Educação – SP-2008 representam um material para subsidiar a escola no sentido de orientar o trabalho que o educador vai desenvolver, assim como o de estabelecer um currículo capaz de atender as reais necessidades dos alunos. Além disso, os PCN dizem que

> Apesar de apresentar uma estrutura curricular completa, os Parâmetros Curriculares Nacionais são abertos e flexíveis, uma vez que, por sua natureza, exigem adaptações para a construção do currículo de uma Secretaria ou mesmo de uma escola. Também pela sua natureza, eles não se impõem como uma diretriz obrigatória: o que se pretende é que ocorram adaptações, por meio do diálogo, entre estes documentos e as práticas já existentes, desde as definições dos objetivos até as orientações didáticas para a manutenção de um todo coerente. Os Parâmetros Curriculares Nacionais estão situados historicamente — não são princípios atemporais. Sua validade depende de estarem em consonância com a realidade social, necessitando, portanto, de um processo periódico de avaliação e revisão, a ser coordenado pelo MEC. (BRASIL, 1997, p.29).

Em 1997, os conteúdos curriculares, nos Parâmetros Curriculares Nacionais, propuseram uma mudança de enfoque:

> ao invés de um ensino em que o conteúdo seja visto como fim em si mesmo, o que se propõe é um ensino em que o conteúdo seja visto como meio para que os alunos desenvolvam as capacidades que lhes permitam produzir e usufruir dos bens culturais, sociais e econômicos. (BRASIL, 1997, p.51).

Para isso, um item que requer nossa atenção é quanto à realização das atividades de ensino e aprendizagem na sala de aula. Os Parâmetros nos propõem que “a programação deve garantir uma distribuição planejada de aulas, distribuição dos conteúdos segundo um cronograma referencial, definições das orientações didáticas prioritárias, seleção do material a ser utilizado, planejamento de projetos e sua execução”. Além disso, que a responsabilidade seja compartilhada com a equipe da escola por meio da co-responsabilidade estabelecida no projeto educativo.

Outro fato a se considerar é que junto ao planejamento das políticas públicas referentes à educação, a fim de fortalecer a escola e o trabalho do professor, articula-se o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica, SAEB, criado em 1988, pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – Inep.

Igual a esse sistema, a resolução SE no. 27, de 29 de março de 1996, vinculada à lei 9394/96, cria o Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo, o SARESP, também para fortalecer as políticas públicas da educação.

É bem verdade, como visto acima, com relação às reformas e ou à implantação de um sistema educacional e aos exames de avaliação, que propostas pedagógicas, mudam de tempos em tempos porque a sociedade também vai se transformando.

3.2.3 NCTM – National Council of Teachers of Mathematics – USA

No site <http://www.nctm.org/ consta que o National Council of Teachers of Mathematics foi fundado em 1920, sendo hoje em dia uma associação profissional com mais de 110.000 membros, entre indivíduos e instituições, tendo como missão “fornecer diretrizes e liderança para a melhoria do ensino e da aprendizagem de matemática, estimular o interesse e o desempenho dos estudantes em matemática e incentivar uma educação mais abrangente para todos os alunos". Conforme mencionado em **3.1.1.6**, a reforma curricular elaborada pelo NCTM, em 1989, trazia alguns “*standards*” (padrões) curriculares que guiavam os currículos de Matemática das escolas americanas.

.Na introdução ao capitulo 1 dos Standards 2000, página 3, é apresentada *“uma visão para a matemática escolar” da qual, entre outras, destacamos os seguintes pontos: a descrição de uma escola perfeita, bastante idealizada e grandemente ambiciosa, exigindo um currículo sólido, que os professores sejam competentes e com uma instrução que assegure e sustente o aprendizado; que o professor continuamente aumente o seu conhecimento profissional; que as salas de aula sejam providas com recursos tecnológicos modernos; e que essa escola assegure “um compromisso dirigido à equidade e à excelência”.*

Imprimindo esta visão, os *Standards 2000* apresentam, no capítulo 2, p.11, seis “Princípios” que constituem os “pressupostos considerados essenciais a uma educação matemática de elevada qualidade”, No capítulo 3 página 29, apresentam cinco “Padrões de Conteúdo”, e cinco “Padrões de Procedimento”.

Os seis princípios para a matemática escolar são:

Igualdade. A excelência na educação matemática requer igualdade - altas expectativas e forte apoio para todos os alunos.

Currículo. Um currículo é mais do que uma coleção de atividades: precisa ser coerente, enfatizando a importância da matemática. Também deve ser bem articulado durante todas as séries.

Ensino. Um ensino de matemática eficiente requer o entendimento daquilo que os alunos sabem e do que precisam saber e, então, desafiá-los e apoiá-los para que aprendam bem.

Aprendizagem. Os alunos precisam aprender matemática entendendo, sendo ativos na construção de novos conhecimentos tirados das experiências e de aprendizados anteriores.

Avaliação. A avaliação deveria apoiar o aprendizado da matemática importante e fornecer informações que sejam úteis tanto para professores como para alunos.

Tecnologia. A tecnologia é essencial ao ensino e ao aprendizado da matemática e influencia a matemática que é ensinada e melhora o aprendizado do aluno.

Os cinco “Padrões de Conteúdo”: Número e Operações, Álgebra, Geometria, Medida, e Análise de Dados e Probabilidade explicitamente descrevem o conteúdo que os estudantes devem aprender.

Os cinco “Padrões de Procedimento”: Resolução de Problemas; Raciocínio e Prova; Comunicação; Conexões; e Representação destacam os caminhos de aquisição e de uso do conhecimento de conteúdo adquirido.

Capítulo 4

A Inserção do Tópico Função no Domínio da Álgebra

Neste capítulo apresentamos uma coletânea de discussões, desenvolvidas por diversos autores, sobre temas referentes ao ensino-aprendizagem da álgebra, do qual o conceito de função surgirá naturalmente, como um tema de destaque. Apresentamos, também, considerações a respeito dos documentos oficiais que regem os conteúdos dos currículos do ensino fundamental e médio e, em particular, os conteúdos de álgebra relacionados com o conceito de função. Ainda, apresentamos uma discussão sobre três princípios de aprendizagem, já bem estabelecidos, que devem ser considerados durante o processo de ensino-aprendizagem, e veremos como esses princípios se aplicam particularmente no caso do ensino-aprendizagem de funções. Iniciaremos o capítulo com a apresentação desses três princípios.

4.1 Princípios de Aprendizagem

No livro *How Students Learn: mathematics in the classroom* (National Research Council, 2006), três princípios fundamentais de aprendizagem são apresentados de modo intensivo e ilustrados por meio de exemplos envolvendo situações de dentro e de fora da sala de aula. Estes princípios se baseiam nas três proposições a seguir:

Os estudantes já vêm para a escola com préconcepções a respeito de como o mundo funciona. Se este entendimento inicial não for levado em conta, os estudantes podem não assimilar adequadamente novos conceitos e informações que lhes são ensinados ou, então, podem aprendê-los apenas com a finalidade de realizar avaliações, retornando às suas pré-concepções quando estiverem fora da sala de aula.

Para desenvolver competência em uma área de investigação, os estudantes devem: (a) ter um embasamento profundo de conhecimento fatual, (b) compreender fatos e ideias no contexto de uma estrutura conceitual, e (c) organizar o conhecimento de modo a facilitar o seu acesso e aplicação.

Uma abordagem "metacognitiva" para o ensino pode contribuir para que os estudantes aprendam a assumir o controle de sua própria aprendizagem, definindo metas de aprendizagem e monitorando o seu progresso em direção a essas metas.

Embora estas proposições se apliquem ao aprendizado em geral, restringiremos nossa atenção ao aprendizado da matemática.

4.1.1 Compreensão Matemática

Por que a palavra "matemática" produz reações tão negativas para tantas pessoas? No capítulo 5 de *How Students Learn* - *Mathematics in the Classroom*, Fuson, Kalchman e Bransford (National Research Council, 2006) colocam essa questão e observam que o ensino da matemática raramente dá atenção às três proposições mencionadas acima.

> Ao invés de conectar com, construir sobre, e refinar os entendimentos matemáticos, intuições e talentos que os estudantes trazem para a sala de aula, os professores frequentemente desconsideram os processos de raciocínio dos estudantes, substituindo-os por um conjunto de regras e procedimentos que dissocia a resolução de problemas da construção de significado (contrariando a proposição 1)

> Ao invés de organizar as habilidades e competências requeridas para a matemática em torno de um núcleo de conceitos matemáticos, aquelas habilidades e competências são colocadas frequentemente como o centro, e algumas vezes, como o todo, da instrução. (contrariando a proposição 2).
>
> E precisamente porque a aquisição de conhecimento processual é frequentemente divorciada da construção de significado, os estudantes não usam estratégias metacognitivas quando envolvidas na resolução de problemas matemáticos (contrariando a proposição 3). (p.217).

Vamos apresentar os enunciados dos três princípios e desenvolver um pouco mais o significado e as implicações de cada um deles.

Princípio 1: Os professores devem levar em conta as pré-concepções dos alunos.

Fuson, Kalchman e Bransford (National Research Council, 2006) observam que tanto adultos quanto crianças se empenham na resolução de problemas matemáticos, desenvolvendo estratégias que não lhes foram ensinadas para chegar a uma solução satisfatória, mesmo quando não passaram por experiências formais de aprendizagem. Por exemplo, segundo esses autores, já foram encontradas crianças de rua, no Brasil, que sabiam fazer matemática ao fazer vendas nas ruas, mas que não eram capazes de resolver problemas similares apresentados em um contexto escolar. Analogamente, um estudo com donas de casa da Califórnia revelou habilidades para a resolução de problemas matemáticos associados a compras e orçamento doméstico, embora essas mulheres não pudessem resolver, em sala de aula, problemas apresentados abstratamente e que requeriam a mesma matemática. Ainda, um resultado similar foi encontrado em um estudo de um grupo de vigilantes do peso.

Esses exemplos sugerem que as pessoas possuem meios de desenvolver estratégias e raciocínio matemático de modo informal, que podem servir como uma base para o aprendizado de matemática mais abstrata. Mas também sugerem que essa ligação não é automática. Se não houver uma ponte entre a matemática informal e a matemática formal, as duas frequentemente permanecem desconectadas.

O Princípio 1 enfatiza tanto a importância de se construir conhecimento novo sobre a base do conhecimento e da compreensão pré-existentes nos alunos, quanto a necessidade de se levar em conta as pré-concepções dos alunos – particularmente quando elas interferem negativamente no aprendizado. Algumas dessas pré-concepções a respeito da matemática, frequentemente alimentadas nos primeiros anos de escola, são as seguintes: a matemática diz respeito a aprender a calcular; a matemática diz respeito a "seguir regras" para garantir a resposta correta.

Assim, dois desafios se apresentam: Como ensinar matemática de modo que os alunos compreendam que ela não diz respeito a efetuar cálculos e a seguir regras, mas à resolução de problemas quantitativos relevantes? Como relacionar o conhecimento informal e a capacidade para resolução de problemas que os alunos já possuem com o treinamento matemático formal?

Fuson, Kalchman e Bransford (National Research Council, 2006) observam que, se não podemos apontar uma única estratégia de ensino que melhor atenda a esses objetivos, ainda assim podemos identificar certas características de ensino que favorecem esses objetivos:

- Permitir que os estudantes usem suas próprias estratégias informais, pelo menos inicialmente, e posteriormente guiá-los em direção a estratégias mais eficientes e à uma compreensão mais avançada.
- Encorajar a conversa sobre matemática, de modo que os alunos possam aclarar suas estratégias, para si mesmos e para os demais, e comparar os benefícios e limitações de abordagens alternativas.
- Planejar atividades de ensino que possam ligar efetivamente concepções que os alunos comumente já apresentam com o conhecimento e a compreensão que se deseja transmitir.

Princípio 2: A compreensão requer conhecimento fatual e estruturas conceituais.

O Princípio 2 sugere a importância da compreensão conceitual e da fluência processual, que devem ser desenvolvidos simultaneamente, bem como de uma organização efetiva do conhecimento – organização que facilite o desenvolvimento de estratégias e raciocínio adaptativo.

Igualmente importantes, o conhecimento processual e a compreensão conceitual devem estar fortemente ligadas. Conforme a matemática encontrada pelos alunos se torna mais complexa, ao longo dos anos de escola, novos conhecimentos e competências requerem o conhecimento e competências dos anos anteriores.

O desafio do professor é ajudar os estudantes a construírem e consolidarem pré-requisitos, compreenderem novos conceitos em profundidade e organizarem tanto conceitos quanto competências em uma rede de conhecimento. Além disso, os professores devem fornecer oportunidades para a consolidação de novas compreensões e procedimentos.

Em matemática, tais redes de conhecimento são frequentemente organizadas como caminhos de aprendizagem que levam de métodos concretos informais para métodos mais abreviados, mais gerais e mais abstratos.

A discussão de múltiplos métodos em sala de aula – chamando a atenção dos motivos pelos quais métodos diferentes funcionam e da eficiência e confiabilidade relativa de cada um deles – pode ajudar a fornecer uma escada conceitual que leve os estudantes a se moverem de onde eles estão para uma abordagem mais eficiente e abstrata.

Os estudantes também podem adotar ou adaptar um método intermediário com o qual eles se sintam mais à vontade.

Os professores podem ajudar os estudantes a passarem ao menos para métodos intermediários, “bons o suficiente”, que possam ser compreendidos e ensinados.

Princípio 3: Uma abordagem metacognitiva permite que o estudante se automonitore.

Aprender sobre si mesmo como um aprendiz, pensador e solucionador de problemas é um aspecto importante da metacognição. Muitas pessoas que seguem cursos de matemática acabam “aprendendo” que eles não “dão para a coisa”. Esta é uma consequência não intencional altamente infeliz de algumas formas de ensino de matemática. É uma consequência que pode influenciar as pessoas para o resto de suas vidas pois elas continuarão a evitar tudo que diga respeito à matemática, o que reforça, por sua vez, a crença sobre a sua inaptidão.

Em todos os níveis de matemática, os estudantes precisam monitorar os seus processos de resolução de problemas e refletir sobre suas soluções e estratégias. Mas o envolvimento metacognitivo é particularmente importante conforme a matemática se torna mais abstrata, porque os estudantes terão poucas pistas, até mesmo quando uma solução estiver terrivelmente errada, se eles não estiverem ativamente envolvidos na construção de significado.

4.1.2 Os Três Princípios e o Ensino-Aprendizagem de Funções

No capítulo 8 de *How Students Learn - Mathematics in the Classroom*, Kalchman e Koedinger (National Research Council, 2006) apresentam considerações, exemplos de atividades, e estratégias, acerca do ensino-aprendizagem de funções, tendo em vista os três princípios discutidos acima. Faremos a seguir uma exposição resumida do trabalho desses autores.

Construindo sobre o conhecimento prévio. Kalchman e Koedinger (National Research Council, 2006) observam que o Princípio 1 enfatiza a importância de os estudantes e professores construírem continuamente vínculos entre experiências de fora de sala de aula e as experiências do aprendizado escolar. E segundo esses autores, as compreensões que os estudantes trazem para a sala de aula podem ser vistas de dois modos: (1) suas experiências informais do dia a dia, que constituem o conhecimento que vem de fora da escola, e (2) conhecimento instrucional[10].

Construindo sobre o conhecimento instrucional: Kalchman e Koedinger utilizam o contexto de uma caminhada, na qual os participantes ganham certa quantia de dinheiro a cada quilometro percorrido, para ilustrar como os estudantes, utilizando suas experiências e conhecimento prévio, podem ser introduzidos a funções, e às suas múltiplas representações. Segundo Kalchman e Koedinger, esse contexto é adequado porque (1) os estudantes têm familiaridade com a associação de dinheiro e distância a quantidades variáveis, (2) eles entendem a relação de contingência entre as variáveis, e (3) eles têm interesse, e são motivados, pela taxa segundo a qual o dinheiro é ganho. Esse contexto serve para vincular as compreensões numérica (equação), e espacial (gráfica), dos estudantes, para associar as suas experiências do dia a dia com lições das aulas de matemática, e possibilita uma introdução a funções de várias formas - situação do mundo real (caminhada), tabela (com duas colunas, km - $), gráfico (km X $), verbal ($1.00 para cada quilometro), símbolos específicos da situação ($ = 1 * Km), e símbolos genéricos (y = x * 1).

Construindo sobre o conhecimento do dia a dia: Kalchman e Koedinger afirmam que os estudantes, frequentemente, sabem coisas através da experiência que não lhes foram ensinadas explicitamente, e que frequentemente são capazes de resolver problemas de um modo que não lhes foi ensinado, ou de modo não

[10] Referente à educação escolar

esperado, se os problemas forem descritos por palavras, desenhos, ou notações que eles entendam. Para ilustrar essa asserção, Kalchman e Koedinger mencionam o tópico inclinação (de retas), reservado tipicamente para alunos da 9ª. série, observando que alunos mais jovens já possuem uma compreensão intuitiva e experimental de inclinação, que pode ser utilizada para apoiar o aprendizado formal, que envolve convenção de notação, algoritmos e definições (razão, sistema de coordenadas, variáveis, sub-índices, resolução de equações de duas variáveis, etc).

*Construindo compreensão conceitual, fluência processual e conexões***.** Kalchman e Koedinger (National Research Council, 2006) observam que, de acordo com Princípio 2, os estudantes precisam de uma compreensão conceitual sólida de funções, bem como de fluência processual.

> O conceito novo e central, introduzido com funções, é o de relação de dependência: o valor de uma coisa depende de, ou é determinado por, ou é uma função de, outro valor. [...] Na educação matemática, o conceito de função veio a ter uma interpretação mais ampla, que não se refere apenas à definição formal, mas também às várias formas pelas quais as funções podem ser escritas e descritas. Formas comuns incluem gráficos, tabelas, símbolos algébricos, palavras e situações problemas. Cada uma dessas representações descreve como o valor de uma variável é determinado pelo valor de outra. [....] Conceitualmente, os estudantes precisam compreender que estas são formas diferentes de descrever uma mesma relação. A boa instrução não é aquela que apenas desenvolve nos estudantes a habilidade para efetuar diversos procedimentos, tais como o de encontrar o valor de y, dado o valor de x, ou o de traçar um gráfico, dada uma equação. A [boa] instrução deveria também ajudar os estudantes a desenvolverem uma compreensão conceitual de função, a habilidade de representar uma função de diversos modos, e fluência para transitar entre múltiplas representações de funções. A inclinação de uma reta, como representada em uma equação, por exemplo, deveria ter tanto um “significado” na descrição verbal da relação entre as duas variáveis quanto uma representação visual sobre o gráfico. (KALCHMAN; KOEDINGER, 2006, p. 352-353).

Segundo Kalchman e Koedinger (National Research Council, 2006) no entanto, os estudantes podem desenvolver habilidades superficiais com as notações, palavras e métodos de um domínio de estudo sem ter uma base real de compreensão. Assim, para que os estudantes compreendam o formalismo matemático, é preciso ajudá-los a conectar esse formalismo com outras formas de conhecimento, incluindo a experiência do dia a dia, exemplos concretos e representações visuais. Tais conexões formam uma estrutura conceitual que mantém o conhecimento matemático unido e facilita sua recuperação e aplicação.

Formando resolvedores de problemas talentosos e auto-reguladores

De acordo com o que foi exposto, o ensino que visa ao desenvolvimento forte e fluente do conhecimento matemático deveria ser construído sobre o conhecimento prévio dos estudantes do mundo real e o da escola (Princípio 1), e deveria integrar habilidade procedimental e compreensão conceitual (Princípio 2). No entanto, a educação escolar deveria ajudar os estudantes não somente a pensar *com* procedimentos e conceitos matemáticos mas, também, ajudar a pensar *sobre* procedimentos e conceitos e, a refletir sobre, e articular, seu próprio pensamento e processo de aprendizagem. Este tipo de "pensamento a respeito do pensamento", ou meta-cognição, é o foco do Princípio 3. Encorajar os estudantes a refletirem e a comunicarem suas ideias sobre funções, os auxilia na elaboração de conexões entre representações, necessárias para uma performance flexível, fluente e segura.

Segundo Kalchman e Koedinger, (National Research Council, 2006) um tipo importante de pensamento metacognitivo em matemática é o de coordenar conclusões obtidas de representações ou estratégias matemáticas alternativas. Uma dessas formas de coordenação aparece quando se recomenda aos estudantes que resolvam problemas de mais de uma maneira para checar se a mesma resposta é obtida. Nessa forma de coordenação, o pensamento meta cognitivo envolve a verificação da consistência de *respostas numéricas* obtidas com o uso de diferentes *estratégias*. Formas de coordenação mais sutis envolvem também a verificação de *interpretações verbais* (por exemplo, crescente versus decrescente) de diferentes *representações* (gráfica, algébrica, etc).

> Em outras palavras, queremos encorajar os estudantes a pensar sobre problemas não somente de múltiplas formas (estratégias), mas também com múltiplas ferramentas (representações), e obter conclusões que são não somente quantitativas (respostas numéricas) mas também qualitativas (interpretações verbais). (KALCHMAN; KOEDINGER, 2006, p. 373).

4.2 O que é Álgebra?

A Aritmética é definida como o ramo da Matemática que trabalha com números, relacionando-os, definindo operações sobre eles, estabelecendo propriedades sobre essas operações e fazendo aplicações. Por sua vez, a Álgebra já não se deixa definir tão facilmente. *O que é álgebra?*

No início do artigo *Advancing Algebra*, publicado no livro *Research Ideas for the Classroom: High School Mathematics*, as autoras Wagner e Parker (1993) colocam essa questão fundamental, que vem merecendo grande atenção dos pesquisadores em educação matemática, ao ser desdobrada nas diferentes concepções admitidas pela álgebra, e nas diferentes interpretações que se pode dar às variáveis em álgebra.

Wagner e Parker apresentam uma primeira visão sobre o assunto, a visão do leigo:

> a maioria das pessoas, quando pensa em "álgebra", pensa em resolução de equações, fatoração de polinômios, fazer gráficos de funções, e em outras atividades que desenvolveram nas aulas de álgebra do Ensino Fundamental utilizando x e y. Observam ainda que, muita gente, incluindo alguns que tiveram boas notas em matemática, pode se lembrar que álgebra era o ponto no qual a matemática deixava de ter muita conexão com o mundo real. (p.119)

No passado, dizem as autoras, muitos estudantes passaram pela álgebra memorizando "rituais", ou seja, procedimentos formais para a manipulação de símbolos que perderam sua conexão com os números que representam. Nos dias de hoje, ao fazer álgebra, os computadores portáteis e as calculadoras podem nos desobrigar de construir gráficos e até mesmo da monótona manipulação de símbolos. Estamos livres para gastar mais tempo "pensando algebricamente". Como professores, dizem as autoras, nossas atividades devem começar a iluminar a estrutura da floresta algébrica sem que se precise pedir aos estudantes que subam em cada árvore.

Com essa excitante oportunidade, dizem elas, vem um desafio assustador: Precisamos reconstituir o currículo da álgebra, mudar a ênfase de "fazer" para "pensar". Consequentemente, precisamos decidir o que significa "pensar algebricamente". Precisamos identificar conceitos e habilidades essenciais e determinar, por meio de pesquisa, o quanto de desenvolvimento conceitual e de habilidade prática o estudante precisa para ter sucesso na resolução de problemas algébricos.

Wagner e Parker observam que a publicação *Curriculum and Evaluation Standards* do NCTM (1989), aponta algumas diretrizes gerais a serem seguidas, mas que

> será uma tarefa contínua de autores de "livro texto", e de professores em sala de aula, mapear detalhes do trajeto que parte da álgebra algorítmica de ontem e encontra a álgebra da resolução de problemas de amanhã. (p. 120)

As autoras prosseguem, defendendo a importância da pesquisa em ensino da álgebra:

> A pesquisa pode nos ajudar a entender como o estudante constrói conceitos maduros e aprende procedimentos complexos. A pesquisa pode sugerir atividades para a sala de aula que fortalecem as conexões que levam à compreensão. A pesquisa pode sugerir formas de tornar as ideias algébricas acessíveis a todos os estudantes, fazendo com que a álgebra se torne parte do propulsor matemático que leva os estudantes a atingirem maiores realizações, ao invés de um filtro que pode lhes barrar o caminho. Traduzir ideias teóricas da pesquisa em ideias práticas para a sala de aula pode, também, ajudar os professores a ensinarem de modo mais eficaz e os estudantes a aprenderem de modo mais proveitoso. (WAGNER; PARKER, 1993. p. 120).

Segundo Wagner e Parker, a pesquisa formal em aprendizagem da álgebra começou no início do século XX, por volta da época em que psicólogos estavam desenvolvendo métodos objetivos para medir inteligência, aptidão e realização. A matemática era um instrumento popular para estudar constructos como a aprendizagem e a memória por causa da facilidade de se pontuar as respostas. A álgebra foi usada frequentemente para estudar o aprendizado avançado porque só muito poucos já tinham alguma compreensão desse assunto.

De 1900 até 1930, a pesquisa sobre a aprendizagem da álgebra lidava primariamente com a relativa dificuldade de resolução de vários tipos de equações lineares. Em 1923, Thorndike publicou A *Psicologia da Álgebra*, no qual ele aplicou sua teoria de "vínculos" ao aprendizado da álgebra. Embora a maioria de suas recomendações focasse coisas como a quantidade de prática necessária para que os alunos adquirissem certas habilidades e como a prática deveria ser distribuída, é atribuída a Thorndike a introdução de uma abordagem sistemática para a pesquisa sobre a aprendizagem da álgebra, incluindo uma análise cuidadosa da natureza de tarefas algébricas.

De 1930 até 1945, a pesquisa em educação decaiu, enquanto os Estados Unidos focavam em questões de sobrevivência referentes à Grande Depressão e à Segunda Guerra Mundial. Após a guerra, no entanto, a pesquisa em álgebra ressurgiu, com uma nova onda de psicólogos comportamentalistas que vieram refinar alguns dos primeiros métodos para a investigação de aquisição de habilidades. Nos anos 1960, educadores matemáticos, com formação acadêmica em matemática avançada e experiência de ensino em escolas secundárias, começaram a mudar o foco de pesquisa para a questão da compreensão conceitual. Seus trabalhos têm sido complementados pelos esforços de psicólogos cognitivos em analisar o processo de pensamento envolvido na resolução de problemas e na aquisição de habilidades algébricas complexas.

4.3 Um Pouco da História da Álgebra na Antiguidade

Em Burton (2007, p. 33), podemos ler que “Embora a ênfase inicial fosse dada à matemática utilitária, o assunto começou eventualmente a ser estudado por seu próprio interesse. A Álgebra evoluiu das técnicas de cálculo [fazer contas], e a geometria começou com medições da terra”.

Segundo Burton, “a emancipação da álgebra veio com Diofanto, que viveu em Alexandria por volta do ano 250 depois de Cristo” (p.219).

A reputação de Diofanto se apóia em seu livro *Arithmetica,* que pode ser descrito como o primeiro tratado devotado à Álgebra. Composto por 13 livros, apenas 6 foram preservados. Esses livros foram aparentemente perdidos provavelmente antes do século X, pois não há indicação de que os árabes os tenham possuído (p. 212).

Como o *Papiro de Rhind*, a *Arithmetica,* de Diofanto, é uma coleção de problemas individuais, 189 ao todo, com suas soluções. O objetivo aparente desses livros era o de ensinar o método de resolução de certos problemas, nos quais se pedia para encontrar números racionais satisfazendo as condições prescritas. Antes de Diofanto, a Álgebra era retórica, isto é, os resultados eram atingidos por argumento oral, sem recursos a símbolos ou abreviações de qualquer tipo. Uma das principais contribuições de Diofanto foi a abreviação da Álgebra.

Praticamente nada se sabe de Diofanto como indivíduo, salvo que ele viveu em Alexandria, por volta do ano 250. Como particularidade pessoal de sua carreira é conhecido o *epigrama,* datando do quarto século, na forma de um problema com palavras, registrado sobre o seu túmulo, que diz

> Diofanto gastou, em sua infância,1/6 de sua vida; em sua juventude gastou mais 1/12 dela; depois de mais 1/7 de sua vida, até que ele se casasse e seu filho nasceu 5 anos depois. O filho viveu ½ da idade do pai e o pai morreu 4 anos depois do filho. Com que idade morreu Diofanto? (BURTON, 2007, p. 220)

Segundo Burton, (2007, p. 240-241), o mais ilustre matemático árabe foi al-Khowârizmî (cerca 780-850) que teve o patrocínio e a amizade do Califa Al-Ma`mûn. Como astrônomo da corte, ele foi, sem dúvida, um dos primeiros estudiosos associados à Casa de Wisdom e foi, muito através de seu trabalho, que consiste principalmente de dois livros – um de Aritmética e outro de Álgebra, que a Europa adquiriu os numerais hindus e a abordagem algébrica para a matemática.

Al-Khowârizmî compilou um pequeno tratado aritmético com título de *Livro de adição e subtração de acordo com o cálculo Hindu*. Foi o primeiro trabalho em árabe feito para explicar o uso do sistema de numerais decimais Hindu. Embora al-Khowârizmî mencione somente nove letras (isto é, símbolos para os dígitos de 1 a 9) para serem usadas na escrita de números, ele também faz uso do zero: quando nada permanece (na subtração), ponha abaixo um pequeno circulo de modo que o lugar não fique vazio, mas o círculo deve ocupá-lo.

Nenhuma cópia da versão arábica original desse livro sobreviveu. Somente uma tradução latina foi alcançada *Algoritmi de numero Indorum,* feito por John of Seville, no começo do século XII. Sua influência na matemática européia, entretanto, foi tão grande que os novos numerais foram chamados *"arábicos",* a despeito de sua origem Indiana. A influência de al-Khowârizmî está também refletida no fato de que *algorism* (ou *algorithm*), uma corruptela latina do seu nome, por um longo tempo significou a arte de calcular com numerais Hindu-Arábicos. Hoje ele é usado para qualquer método de cálculo de acordo com um conjunto de regras estabelecidas.

Em 1857, uma cópia da tradução latina foi descoberta na biblioteca da Universidade de Cambridge. Ela começa com as seguintes palavras: "Assim falou al-Khowârizmî".

Os europeus do leste aprenderam primeiro sobre álgebra a partir do livro de al-Khowârizmî. Assim, não parece provável que seu conhecimento de técnicas algébricas derive de Diofanto, cujo livro *Arithmetica* não teria sido traduzido até o fim do décimo século. Além disso, a álgebra de Diofanto tem um caráter inteiramente diferente, estando primeiramente preocupada com a teoria dos números.

Na página 220 de seu livro, Burton diz que o nome “álgebra” é uma concepção européia de al-Jabr, parte do título do *Tratado de al-Khowârizmî Hisa´b al-jabr w`al muqâbalah.* Aparentemente o título significa “a ciência da reunião e da redução”. As palavras referem-se às duas principais operações que os árabes usavam ao resolver uma equação. “Reunião” refere-se à transferência de termos negativos de um lado da equação para outro e “redução” à combinação de termos semelhantes. No mesmo lado em um único termo, ou o cancelamento de termos semelhantes nos lados opostos de uma equação.

Encerramos essa pequena digressão histórica com um salto no tempo, observando que a invenção da notação algébrica[11], em 1564, por François Viète, teve efeitos imediatos. Em cinquenta anos a geometria analítica foi inventada e trazida a uma forma avançada. Em cem anos surgiu o cálculo.” (USISKIN apud DOMINGUES, 1995, p.14).

4.4 A Álgebra no Currículo Escolar

> Para se atingir o objetivo de tornar a álgebra compreensível, útil, e agradável de se aprender, professores, pesquisadores e desenvolvedores de currículos terão que continuar trabalhando em conjunto para desenvolver abordagens para o ensino de ideias relacionadas com equações e funções, abordagens que podem diferir significativamente de suas próprias experiências de aprendizagem sobre o assunto.
> (KILPATRICK; IZSÁK, 2008, p.14)

No artigo *A History of Algebra in the School Curriculum* (NCTM, Seventieth Yearbook, 2008), os autores Jeremy Kilpatrick e Andrew Izsák

[11] Usiskin, Zalman e Max Bell. *Applying arithmetic.* Ed. Preliminary. Chicago: Department of Education, University of Chicago, 1984

apresentam um panorama do ensino da álgebra, nos EUA e Canadá, desde o século XVIII, quando surgiram os primeiros registros da álgebra nos currículos, até os dias de hoje, descrevendo mudanças ocorridas no currículo dessa disciplina, passando de um foco em equações para um foco em funções.

Kilpatrick e Izsák nos dizem que durante a maior parte do século XIX, a álgebra escolar manteve-se uma extensão e generalização da aritmética escolar, construída em grande parte por indução sobre uma base de quantidades numéricas e operações sobre elas. Uma análise dos livros didáticos de álgebra dos EUA, publicados de 1820 a 1928, revelou que, durante todo aquele período, mais da metade dos exercícios era voltada para técnicas algébricas (fatoração, raízes, potências e operações fundamentais), com a segunda porção maior de atenção voltada para equações e fórmulas (Chateauneuf 1929, apud KILPATRICK; IZSÁK, 2008, p.5).

Influenciados pela psicologia das faculdades do século XIX (a mente é composta de faculdades separadas ou capacidades), e o correspondente modelo educacional da disciplina mental (exercício e repetição são as melhores formas para fortalecer as mentes jovens e cultivar a memória), os autores de livros didáticos e professores intensificaram a complexidade e dificuldade dos exercícios de álgebra, particularmente durante os anos de 1880 a 1910 (OVERN[12], 1937 apud KILPATRICK; IZSÁK, 2008, p.5). De acordo com David Eugene Smith, a fatoração, em particular, “começou a ocupar uma quantidade excessiva de espaço no último quarto do século XIX". (SMITH[13] 1926 apud KILPATRICK; IZSÁK, 2008, p. 5). Amy Olive Chateauneuf observou que nos anos 1890 a atenção às técnicas para a manipulação de expressões algébricas atingiu um crescendo, ocupando cerca de

---

[12] Overn, Orlando E.A. Changes in Curriculum in elementary algebra since 1900 as refletcted in the requirements and examinations of the college entrance examination board. *Journal of experiemental education 5.* (June 1937) 373-468.

[13] Smith, David Eugene. A general survey of the progress of mathematics in our high schools in the last twenty-five years. *In a general survey of progress in the last twenty-five years*, First Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, edited by Raleigh Schorling, p.1-31. New York: Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University, 1926.

64% de todos os livros didáticos. (CHATEAUNEUF[14], 1929 apud KILPATRICK; IZSÁK, 2008, p. 5).

Smith descreveu a álgebra elementar de 1900 como consistindo de

> uma grande quantidade de manipulação abstrata de polinômios, incluindo longos problemas de multiplicação e divisão de expressões inteiras e fracionárias, com trabalho adicional em determinação de raízes, fatoração, calculo do mínimo múltiplo comum e do máximo divisor comum, e em manipulações igualmente inúteis de frações complicadas e radicais. Equações lineares simultâneas em quatro ou mais incógnitas, e equações quadráticas simultâneas do tipo que requer truques estavam em evidência. (SMITH apud KILPATRICK; IZSÁK, 2008, p. 5)

E para caracterizar o ensino da álgebra em 1900 ele prossegue dizendo:

> O assunto geralmente era ensinado como se fosse uma disciplina puramente matemática, sem relação com a vida, excetuando o fato de que na vida se pode apreciar um quebra-cabeças sem sentido. Tão importante quanto o professor poderia considerar que fosse, a maioria dos alunos o encarava como uma forma bastante interessante de se chegar a lugar nenhum. (SMITH apud KILPATRICK; IZSÁK, 2008, p. 5)

Kilpatrick e Izsák (2008, p. 5) concluem dizendo que "por volta do final do século XIX, o valor prático de estudar álgebra, se já tinha estado em evidência algum dia, parecia ter desaparecido".

Na década 1880-1890, muitas escolas na Europa, começaram a considerar o conceito de função como sendo o núcleo da matemática do ensino secundário, utilizando-o para "agilizar o currículo, unificar os ramos da matemática, correlacionar matemática com a ciência, introduzir os alunos à teoria matemática, e proporcionar mais aplicações" (NORDGAARD[15] apud KILPATRICK; IZSÁK, 2008, p. 5). Como resultado, o cálculo se tornou a extensão óbvia e o ponto culminante do

[14] Chateauneuf, Amy Olive. Changes in the content of elementary algebra since the beginning of the high school movement as revealed by the textbooks of the period. Ph.D. dissertation, University of Pennsylvania, 1929.

[15] Nordgaard, Martin A. Introductory calculus as a high school subject. *In selected topics in the teaching of mathematics,* Third Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, edited by John R. Clark and William D. Reeve, p. 65-101. New York: Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University, 1928.

estudo de funções, seus gráficos, e das propriedades das curvas. Nordgaard menciona também que em 1902, a França tornou-se "o primeiro país do mundo a incluir trabalho em cálculo como uma parte regular e obrigatória do currículo de suas escolas secundárias". Nordgaard também citou que em 1904, Felix Klein[16] propôs que

> "a ideia de função representada graficamente devia formar a noção central do ensino de matemática, e como uma consequência natural, os elementos do cálculo deveriam ser incluídos no currículo de todas as nove séries do Ensino Médio (9-class [high] schools, no original)". (NORDGAARD apud KILPATRICK; IZSÁK 2008, p. 6, grifo do autor).

No ano seguinte, em uma conferência em Merano, Itália, as reformas propostas por Klein foram adotadas pela Sociedade Alemã de Cientistas da Natureza. Foi nesse encontro que a expressão *funktionales Denken* (pensamento funcional) foi criada.

Segundo Kilpatrick e Izsák (2008), o endosso de Klein ao conceito de função influenciou a escola secundária ao redor do mundo, mas nos Estados Unidos e Canadá, ele teve aparentemente uma influência muito menor. A análise dos livros didáticos de álgebra elementar nos EUA, feita em 1929, mostrou que exercícios sobre gráficos - o principal local em que as funções apareceram – ocuparam em média, menos que um décimo de 1% durante o século XIX e que não chegou a 5 por cento em 1928. Ao invés de tomar função como um conceito unificador, os membros da Conferência de Matemática da Comissão dos Dez[17], propuseram tratar a álgebra como aritmética generalizada nos níveis intermediários, para proporcionar uma preparação indutiva para a sua introdução formal na nona série. Os membros do comitê endossaram equação, e não função, como merecedora de "ênfase especial", um ponto de vista que prevaleceu durante as primeiras décadas do século

[16] Felix Klein, matemático alemão (1849-1925)

[17] No original, Conference on Mathematics of the Comittee of Ten, criada pela National Education Association 1892, Saratoga

XX. Segundo William Betz[18] 1926, apud Kilpatrick e Izsák (2008, p.6), “após muita controvérsia, um novo e significantemente reduzido programa de álgebra está tomando forma” na escola secundária. Ele afirmou que havia uma incerteza considerável a respeito de quanta atenção deveria ser dada aos problemas com enunciados tradicionais, e houve um debate contínuo a respeito do conceito de função. Na sua perspectiva, diz ele

> ao invés de reorganizar a álgebra em torno do conceito de função, autores de livros didáticos tinham retido todo o material antigo e simplesmente tentaram "colar alguns remendos de trabalho funcional. É esse duplo fardo, e não a ideia de função como tal, o que está fazendo com que muitos professores secundários vejam o novo programa como uma espécie de bête noire”. (WILLIAM BETZ, 1926 apud KILPATRICK; IZSÁK, 2008, p. 6, grifo do autor).

Com respeito ao número de matrículas na High School (correspondente ao nosso Ensino Médio) Kilpatrick e Izsák (2008), apoiados em análise de vários dados, comentam que, nas décadas de 1890-1940, nos EUA, houve um enorme crescimento, de menos de 7% de alunos de catorze a dezessete anos de idade frequentando a escola em 1890, para mais de 73% em 1940. O mesmo fenômeno ocorreu no Canadá, durante esse mesmo período. Quanto ao número de matriculas em álgebra, mais de 45% dos alunos do Ensino Médio nos EUA estavam seguindo o curso de álgebra em 1890, e esse número aumentou para quase 57% em 1910. No entanto, a álgebra foi rapidamente se tornando uma importante fonte de fracasso escolar, e as matrículas começaram a diminuir na medida em que essa disciplina passou, cada vez mais, a ser considerada eletiva e não obrigatória. Matrículas em álgebra diminuíram continuamente depois de 1910, caindo para cerca de 30% em 1940 e abaixo de 25% por volta dos anos 1950[19].

---

[18] Betz, William. The development of mathematics in the junior high school. *In a general survey of Progress in the last twenty-five years,* First Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, edited by Raleigh Schorling, p.141-165. New York: Bureau of publications, Teachers College, Columbia University, 1926.

[19] Kilpatrick e Izsák observam que, em contraste, mais de 90% dos alunos na faixa dos dezessete anos de idade tinha seguido pelo menos um curso de álgebra em 1999 (Campbell, Hombo e Mazzeo 2000, p. 63). Em 2004, 29% dos alunos na faixa dos treze anos estava seguindo um curso de álgebra, principalmente no oitavo ano, e a porcentagem de alunos com dezessete anos cujo curso mais avançado de matemática era o segundo ano de álgebra tinha crescido de 37% em 1978 para 53% em 2004 (Perie, Moran e Lutkus 2005, pp. 56, 58).

Com base em análise histórica de currículo da álgebra, eles também observaram que na primeira metade do século XX, o declínio nas matrículas na matemática do Ensino Médio fez parte de um movimento geral, em que o currículo escolar dos EUA foi revisado para refletir o ideal de eficiência social, ou seja,

> a doutrina de que "o trabalho das escolas era, em primeiro lugar, o de treinar crianças e jovens para os seus papéis predeterminados como adultos",[...]; para um tratamento mais completo sobre os efeitos dos argumentos de eficiência social sobre a matemática da escola [...].

Enquanto Edward Lee Thorndike, 1923, apud Kilpatrick e Izsák (2008, p.7), e seus alunos

> **examinaram como as tarefas da álgebra eram classificadas em importância, por professores de ciência dos colleges (faculdades), e de que maneira tópicos de álgebra eram utilizados em livros didáticos e artigos da Enciclopédia Britânica**. Thorndike e seus estudantes concluíram que "Álgebra é um assunto útil, mas sua utilidade varia enormemente". Em particular, **os professores deveriam prestar mais atenção à leitura e ao uso de simbolismo algébrico, fórmulas e gráficos**, e dar menos atenção ao ensino de habilidades como resolução de equações quadráticas, ou ao trabalho com sequências, ou ao teorema binomial. Surgiram argumentos de que a álgebra era de pouca utilidade para o aluno médio. (KILPATRICK; IZSÁK, 2008, p.7, grifo nosso).

Segundo Kilpatrick e Izsák (2008, p. 7), alguns críticos afirmaram que "álgebra ensinada nas escolas americanas era não-funcional e, portanto, quase sem valor para 90 por cento de todos os rapazes e 99 por cento de todas as meninas".

Esses autores, ao descreverem o progresso “em álgebra” no primeiro quarto do século XX, escreveram que

> David Eugene Smith (1926) reconheceu que se a finalidade do ensino de álgebra "um quarto de século atrás parece ter sido a de produzir matemáticos, o objetivo hoje é produzir cidadãos americanos bem formados". Esse propósito, disse ele, "consiste em dar a todos uma ideia geral do significado da álgebra, juntamente com algumas poucas aplicações bem definidas e úteis com que todos provavelmente irão se deparar". (SMITH, 1926 apud KILPATRICK; IZSÁK, 2008, p. 7, grifo do autor)

Segundo Kilpatrick e Izsák (2008), a era da matemática moderna, que se iniciou por volta da metade dos anos 1950, se estendendo até a metade dos anos 1970, testemunhou uma grande mudança na álgebra escolar – da aritmética generalizada à estrutura sistemática e prova. Uma motivação principal para essa mudança era a de preparar estudantes considerados “capazes para a universidade”, para o estudo da matemática avançada. A mudança tinha sido antecipada por matemáticos, que argumentavam que a álgebra fornecia uma estrutura menos complicada que a geometria e que deveria ser apresentada aos estudantes em sua abstração, um sistema hipotético-dedutivo aberto a múltiplas interpretações. Por exemplo, livros textos publicados durante a era da matemática moderna, abordavam os postulados de um corpo[20] para transmitir ideias algébricas. Vários matemáticos reforçaram a abordagem axiomática e, com certo entusiasmo, Saunders Mac Lane[21] (1957) apud Kilpatrick e Izsák (2008, p. 8) escreveu “As provas dos teoremas algébricos são mais limpas e mais fáceis do que as da geometria! Tradicionalmente, a geometria da High School é considerada a disciplina onde a lógica pode ser melhor aprendida. Álgebra seria um lugar melhor!”.

Os estudantes encontraram dificuldade para enxergar a lógica por trás dos teoremas algébricos, e os professores se esforçaram para convencê-los da necessidade e importância de suas provas. Segundo Kilpatrick e Izsák (2008, p. 8), René Thom sumarizou um aspecto do problema ao observar que significado é mais importante que rigor em matemática e que, embora a álgebra tenha uma sintaxe extremamente rica, diz ele que “o ‘significado’ de um símbolo algébrico ou é estabelecido com dificuldade ou é não existente”. Ele notou a “pobreza heurística da álgebra, onde cada nova dificuldade se apresenta como um muro que requer métodos inteiramente novos para ser transposto”. Para Thom, a axiomática deveria aparecer no final da instrução em álgebra e não no início.

---

[20] Subentende-se, corpo dos números reais.

[21] Mac Lane, Saunders. Algebra. *In insights into modern mathematics.* Twenty-third Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, edited by F. Lynwood Wren, p.100-144. Washington, D.C.: NCTM, 1957

Durante a era da Matemática Moderna, quatro pontos (do segundo ao quinto), dos nove pontos do programa CEEB, para o Exame de Ingresso na Universidade[22] em 1959, vieram a caracterizar a abordagem da álgebra elementar:

> 2. Compreensão da natureza e papel do raciocínio dedutivo – tanto em álgebra quanto em geometria.
> 3. Reconhecimento de estruturas matemáticas (“padrões”) – por exemplo, propriedades dos números naturais, racionais, reais e complexos.
> 4. Uso criterioso de ideias unificadoras – conjuntos, variáveis, funções, relações.
> 5. Estudo de desigualdades junto com equações.
> (KILPATRICK; IZSÁK 2008, p. 8).

Como parte desta abordagem, vários termos foram substituídos ou redefinidos. Muito da nova linguagem contribuiu para desvendar alguns dos mistérios da álgebra elementar, que nunca tinham sido bem esclarecidos, tais como:

> Distinções entre os termos números literais, incógnitas, variáveis e constantes. A terminologia número literal e equação literal foi abandonada; equações e desigualdades se tornaram sentenças abertas; uma variável – não mais definida como uma “quantidade que varia” – se tornou um símbolo a ser substituído por nomes de elementos de conjuntos, normalmente números; e uma função foi definida como um conjunto de pares ordenados satisfazendo certas propriedades. (KILPATRICK; IZSÁK 2008, p. 8, grifo do autor).

O esforço para modificar o currículo de álgebra durante a era da Matemática Moderna teve alguns efeitos permanentes. Por exemplo, desigualdades ainda são incluídas no estudo de equações, curvas geométricas são comumente definidas como conjunto de pontos ao invés de pontos em movimento, e trigonometria continua a ser introduzida por meio de funções periódicas reais. Além disso, disse Begle

> como os matemáticos que dirigiram a reforma acreditavam que o que era boa matemática para estudantes ‘aptos para a universidade’ era também boa matemática para os estudantes menos capazes, foram planejados cursos de dois anos que tratariam os mesmos

[22] No original, ‘College Entrance Examination Board’

> tópicos que o curso de um ano. (BEGLE[23] 1969 apud KILPATRICK; IZSÁK, 2008, p. 9).

Abordagens para a Álgebra. No entanto, muitos cursos de dois anos, introdutórios em álgebra, tendiam a tratar o conteúdo de forma reducionista, empregando exercícios repetitivos e dando pouca atenção ao raciocínio ou à resolução de problemas complexos. Apesar disso, conforme a era da Matemática Moderna se enfraqueceu, dando lugar ao movimento Volta às Bases, dos anos 1970, com a instrução, em álgebra, retomando a ênfase na manipulação de símbolos e na resolução de equações simples, permaneceu viva a ideia de que uma grande porcentagem de estudantes da High School deveria se beneficiar com o estudo da álgebra introdutória se o curso fosse estendido para mais de um ano.

A álgebra permaneceu uma fonte importante de fracasso na High School durante os anos 1970 e 1980 ((Moses e Cobb)[24], 2001, apud KILPATRICK; IZSÁK, 2008, p. 9), e quando o NCTM (1989) iniciou os seus esforços de reforma baseados em padrões, a álgebra escolar ficou sob forte escrutínio mais uma vez. Kilpatrick e Izsák observam que, em anos recentes, educadores de matemática têm adotado um conjunto de mudanças interligadas no que diz respeito à álgebra que são pelo menos tão complexas, e que têm implicações de alcance tão amplo, quanto aquelas que a reforma adotou com relação a qualquer outro ramo da matemática escolar. Essas mudanças estão relacionadas com diferentes *abordagens para a álgebra,* com a visão de que se deve dar *atenção ao pensamento dos estudantes*, e com a visão de que a *álgebra é para todos*.

No final dos anos 1970 e durante os anos 1980, pesquisas sobre a compreensão dos estudantes a respeito de manipulações algébricas e do conceito de função ajudaram educadores matemáticos a esclarecer porque tão poucos

---

[23] Begle, Edward G. The role of research in the improvement of mathematics education. *Educational studies in mathematics 2* (December 1969): 232-44.

[24] Robert, P. Moses, and Charles E. Cobb, Jr. *Radical equations:* math literacy and civil rights. Boston: Beacon Press, 2001

estudantes estavam aprendendo álgebra de modo satisfatório. Algumas dificuldades, como a tendência de os estudantes interpretarem o sinal de igual como um comando para computar uma resposta, sugeriram que aspectos do ensino de aritmética estavam contribuindo para as suas dificuldades com álgebra. Outras dificuldades, tais como a dificuldade de identificar corretamente exemplos particulares de relações como funções, sugeriram que uma revisão do currículo deveria ser feita. Segundo Kilpatrick e Izsák (2008), a introdução tardia e abrupta da álgebra, de forma isolada de outras áreas da matemática, e de aplicações a outras disciplinas, aparentemente contribuiu para as dificuldades dos estudantes. Em resposta, o NCTM (1989) criou um Padrão para Modelos e Relações[25], desde preK até o quarto ano; um Padrão para Modelos e Funções[26]; um Padrão para Álgebra[27], para os anos 5° a 8°; e Padrões para Álgebra e Funções[28], para os anos 9° a 12°. A decisão subsequente do NCTM (2000) de estabelecer um Padrão de Conteúdo para a Álgebra, do preK até o 12° ano foi geralmente bem recebida pelos educadores matemáticos, apesar de algumas dificuldades de interpretação nas séries iniciais.

Enquanto isso, pesquisadores e desenvolvedores de currículo começaram a examinar abordagens que permitiriam, aos alunos, conectar a álgebra de forma mais clara com o seu estudo prévio de matemática e com outras áreas. Estas abordagens, segundo Kilpatrick e Izsák (2008, p. 10), algumas das quais já consideradas em épocas anteriores, colocavam a álgebra como: "(a) aritmética generalizada, (b) uma ferramenta para resolução de problemas, (c) o estudo das funções, e (d) modelação".

Por vários motivos, muitos dos esforços para o desenvolvimento curricular estimularam uma abordagem da álgebra baseada em funções, na medida em que a álgebra poderia surgir ao se considerar funções de quantidades eu estejam inseridas em uma situação problema.

---

[25] No original, Patterns and Relationships Standard

[26] No original, Patterns and Functions Standard

[27] No original, Algebra Standard

[28] No original, Algebra and Functions Standards

Um dos motivos foi o desejo de afastar-se da manipulação de símbolos em expressões e equações, indo em direção a uma abordagem que os alunos considerariam mais motivadora. Um segundo motivo foi a percepção de que um foco sobre funções de quantidades permitiria que os alunos usassem sua compreensão de situações-problema para desenvolver compreensão conceitual. Educadores matemáticos viram uma mudança de ênfase, de resolução de equações para resolução de problemas, como uma mudança de memorizar regras processuais para dar sentido a situações-problema.

Um terceiro fator estimulante para uma abordagem baseada em funções foi a disponibilidade de calculadoras e computadores cada vez mais poderosos, que tornou possível novas atividades, particularmente as que faziam uso de múltiplas representações conectadas (representação algébrica, em tabelas e gráfico de uma função, por exemplo). (KILPATRICK; IZSÁK 2008, p. 10)

Atenção ao pensamento dos estudantes. Muitos dos esforços para estabelecer padrões para a matemática escolar estão fazendo com que professores e pesquisadores deem atenção, não só a como os alunos realizam manipulações de símbolos e aos erros que eles cometem mas, também, a como eles pensam sobre conceitos algébricos.

Ao longo do último meio século, educadores matemáticos têm feito progressos, não só na concepção de novas abordagens de ensino que fazem uso da tecnologia cada vez mais disponível mas, também, na compreensão de como os alunos pensam sobre a álgebra. Em grande parte das pesquisas na década de 1970, e 1980, os investigadores examinaram a construção, manipulação e interpretação de representações gráficas e algébricas feitas pelos estudantes e catalogaram seus erros, que os pesquisadores muitas vezes caracterizaram como “defeitos” (“bugs” no original) ou concepções errôneas[29].

---

[29] Ver, por exemplo, Kieran (1992); Leinhardt, Zaslazsky, e Stein (1990); citados por Kilpatrick e Izsák (2008, p. 11).

Uma geração subseqüente de pesquisa examinou mais de perto o raciocínio dos alunos com representaçõe e surgiram várias conclusões gerais:

> Uma delas era que os alunos, muitas vezes, dão atenção a características representacionais que professores e pesquisadores poderiam não notar. Por exemplo, embora qualquer um, que tenha experiência com funções lineares, centra-se na inclinação e no intercepto-y ao conectar y = mx + b com seu gráfico, os alunos não percebem necessariamente o papel assimétrico desempenhado pelos interceptos. Eles podem ver o intercepto-x como importante e tentar inclui-lo na representação algébrica junto com o intercepto-y[30] [...] Uma segunda descoberta dizia respeito ao processo pelo qual os estudantes fazem as conexões entre representações e situações-problema. Simplesmente falar para os alunos a respeito de correspondências entre características de uma representação - como m e b em y = mx + b - e uma situação problema é geralmente insuficiente. Alunos inexperientes coordenam representações e situações-problema ao refinar a compreensão que eles têm de ambos[31].
> (KILPATRICK; IZSÁK, 2008, p. 11).

Tais resultados, segundo Kilpatrick e Izsák (2008), revelam mais sutileza e nuances no raciocínio dos alunos com representações do que o encontrado em pesquisas anteriores sobre funções. A pesquisa tem deixado claro que ensinar e aprender com múltiplas representações conectadas umas com as outras e as situações-problema, é necessariamente muito complexo.

Álgebra para todos. Desde o início, os esforços dos *Standards*[32] do NCTM (1989, 2000) ressaltaram a necessidade de tornar a matemática escolar e, a álgebra em particular disponível para todos os alunos.

Dois argumentos têm levado educadores matemáticos a considerar a questão de como ensinar ideias relacionadas com a álgebra a um número muito maior de estudantes.

Kilpatrick e Izsák (2008), disseram que o primeiro argumento está relacionado com oportunidade econômica e direitos iguais de cidadania. Álgebra é

---

[30] Ver, por exemplo, Moschlovich (1998); Schoenfeld, Smith e Arcavi (1993); citados por Kilpatrick e Izsák (2008, p. 11).
[31] Ver, por exemplo, Izsák (2004); Meira (1995); citados por Kilpatrick e Izsák (2008, p.11).

[32] Ver notas de rodapé 2 e 5.

muitas vezes referida como uma porta de entrada para a educação superior e para as carreiras propiciadas por essa educação.

O segundo argumento está relacionado com uma reconceituação da matemática do Ensino Fundamental de forma a preparar melhor os alunos para o estudo formal da álgebra. Uma questão fundamental é em que extensão o estudo da aritmética pode fornecer uma base adequada para o estudo posterior da álgebra.

4.5 A Transição da Aritmética para a Álgebra e a Necessidade da Pré-Álgebra

Nos Standards[33] (1989), pode-se ler:

> É essencial que nos "middle grades", (anos 6-8, equivalentes ao nosso Ensino Fundamental II), os estudantes explorem conceitos algébricos num modo informal para construir uma fundamentação para o estudo formal subsequente da álgebra. (NCTM, 1989, p. 102)

Conforme colocado por Kieran e Chalouh, em *Prealgebra: the Transition from Arithmetic to Algebra*, no capítulo 10 de Research Ideas for the Classroom: Middle Grades Mathematics, (1993), pré-álgebra designa o que é ensinado no período de transição da aritmética para a álgebra. A pré-álgebra permite ao estudante mover-se de conceitos concretos da aritmética para conceitos abstratos da álgebra. Nesse período de transição, o estudante se concentra em automatizar os conceitos e as habilidades da aritmética, enquanto os conceitos abstratos da álgebra são lentamente introduzidos.

Mas, a maioria dos cursos de álgebra começa imediatamente com o uso de letras como objetos matemáticos e, então, passam às operações que podem ser

[33]Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. The National Councl of Teachers of Mathematics, 1989.

feitas com esses objetos. Conexões entre o uso de números em aritmética e o uso de letras em álgebra raramente são mencionadas no Ensino Fundamental e são apenas mencionadas de passagem na álgebra do Ensino Médio. Em geral, não se dá aos estudantes a oportunidade de construir conexões explícitas entre esses dois domínios. Nesta perspectiva, a pré-álgebra é vista como aquela área da aprendizagem matemática na qual os estudantes constroem sua álgebra a partir de sua aritmética, isto é, dão significado para os símbolos e as operações da álgebra em termos do seu conhecimento de aritmética.

Segundo as autoras, dois aspectos são considerados cruciais:

- O *uso de letras* para representar os números;
- Consciência explícita do *método matemático* que está sendo simbolizado pelo uso tanto de números quanto de letras.

4.5.1 O Uso de Letras no Simbolismo Algébrico

Kieran e Chalouh (1993) defendem que a ordem cronológica em que apareceram os usos de letras, como incógnitas e como representantes de um elemento qualquer pertencente a algum conjunto de dados, sugerem também uma ordem para a apresentação desses usos nas séries iniciais. Segundo essas autoras, o "desenvolvimento histórico da álgebra como um sistema de símbolos sugere caminhos potencialmente ricos a serem seguidos no ensino da pré-álgebra".

Em um relato dos três estágios evolucionários pelos quais passou o desenvolvimento do simbolismo algébrico, Harper[34] apud Kieran; Chalouh (1993, p. 180) fornece alguma evidência de que os estudantes aparentemente passam pelos mesmos estágios no desenvolvimento de suas habilidades para lidar com o

[34] Harper,E. (1987). Ghosts of Diophantus. Educational studies in mathematics. 18(1), 75-90.

simbolismo algébrico. O estágio retórico, correspondente ao período anterior a Diofanto (c. 250 D.C.), foi caracterizado pelo uso de descrições em linguagem ordinária para resolver tipos de problemas particulares e a falta de símbolos ou signos especiais para representar incógnitas. O segundo estágio, que se estendeu de Diofanto até o final do século XVI, envolveu o uso de abreviações para quantidades *desconhecidas*. Harper ressalta que a preocupação dos algebristas durante esse período era exclusivamente a de descobrir o valor da(s) letra(s), em contraponto a uma tentativa de expressar o geral. O terceiro estágio se iniciou com o uso de letras, por Viète, para ocupar tanto o lugar de quantidades *dadas* quanto o de desconhecidas. Nesse ponto tornou-se possível expressar soluções gerais por meio de símbolos e, na verdade, utilizar a álgebra como uma ferramenta para provar regras que governam relações numéricas.

Esta síntese histórica do desenvolvimento do simbolismo algébrico evidência, segundo as autoras, a importância da linguagem como um primeiro passo no processo de se expressar o pensamento por meio de símbolos. Ela também ressalta a distinção entre: (a) a utilização de letras para representar incógnitas, como ocorre, por exemplo, na resolução de equações ou na representação de problemas literais por meio de equações; e (b) a utilização de letras para a representação de um elemento qualquer pertencente a algum conjunto de dados, como, por exemplo, na especificação de uma solução geral, na generalização de padrões numéricos, ou na expressão de propriedades numéricas e fórmulas. A ordem em que esses dois usos de letras apareceram historicamente sugere que o uso de letras como incógnitas pode ser mais acessível para os estudantes das séries iniciais do que o uso de letras como dados. No entanto, como afirmado nos *Standards* (1989), ambos são importantes para estudantes dos anos 6 a 9, equivalente ao nosso Ensino Fundamental:

> Os estudantes precisam ser capazes de utilizar variáveis de eiras. Duas maneiras particularmente importantes, nas séries 5-9, são o uso de uma variável como um guardador de lugar para uma incógnita específica, como em n + 5 = 12, e como um representante de uma gama de valores, como em 3t + 6. (STANDARDS, 1989, p.103)

4.5.2 Conscientização e Simbolização do Método

Kieran e Chalouh (1993) observam que a evolução histórica do uso de letras, a de representar números desconhecidos para representar números gerais, foi acompanhada por uma mudança de atenção de soluções puramente numéricas para considerações de métodos ou processos. Essa mudança nos traz um segundo aspecto da aprendizagem pré-algébrica que as autoras consideram importante enfatizar, qual seja, um foco sobre o *método* ou *processo* ao invés de um foco na resposta numérica. Uma questão relacionada diz respeito à conscientização da natureza das operações que estão sendo representadas. A mudança de pensar sobre as operações desfeitas ou resolvidas para enfocar sobre as operações à frente requeridas para descrever uma equação é um dos passos cruciais na transição da artimética para a álgebra, sendo que

> **A sentença algébrica que mais naturalmente descreve uma situação- problema não se ajusta imediatamente a um procedimento de cálculo aritmético. Esta possibilidade de primeiro descrever e depois calcular é uma das características chave que torna a álgebra diferente da aritmética.**
> (KIERAN; CHALOUH, 1993, p.181, grifo das autoras)

4.5.3 O Uso de Letras como Incógnitas

Para ilustrar o uso de letras como incógnitas, Kieran e Chalouh (1993) apresentam um exemplo retirado de Whitman citado em seu artigo, na página 182, envolvendo *resolução de equações por cobertura*. Vamos reproduzi-lo aqui, conforme apresentado pelas autoras:

Whitman começou sua sequência de ensino com equações que continham uma única operação. Por exemplo $\quad + 17 = 21$.

Ela fez-se segura de que seus estudantes sentiam-se confortáveis com as perguntas que ela fazia:

- Que número mais 17 dá 21?

Depois, aos estudantes foram dadas certas práticas de equação com duas operações, por exemplo:

$$2 \cdot \quad + 5 = 47$$

$$3 \cdot \Delta - 8 = 31$$

$$48 - 3s = 6$$

Durante esse período, muito tempo foi gasto fazendo-se perguntas aos alunos, como no exemplo que diz: que número mais 5 é 47? Resposta 42. Duas vezes que número é 42? Resposta 21.

Whitman diz que essa abordagem ajudava os estudantes a aprender a associar o produto de um número e uma estrutura com um único número. Ela também enfatiza que esse processo de cobertura, ilustrado na figura abaixo, ajudava os estudantes a verem, completamente, a estrutura das equações, e a desempacotar essa estrutura de modo sistemático.

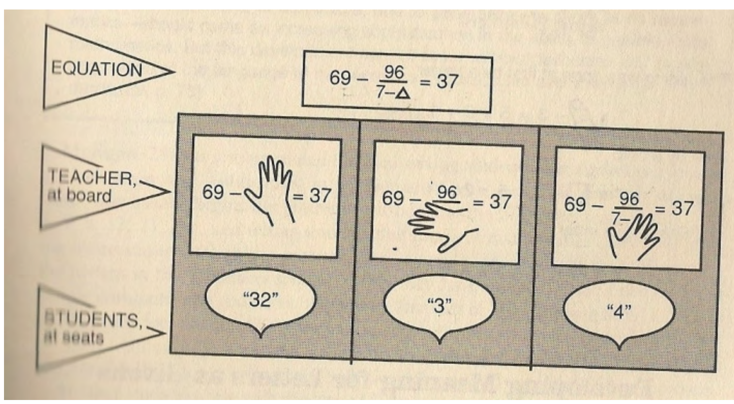


Figura 5

Fonte: Kieran e Chalouh (1993, p.183)

Outra componente do estudo de Whitman era o ensino de técnicas de resolução formais, isto é, desenvolver a mesma operação nos dois lados do sinal de igual. Ela achou que os estudantes que tinham sido ensinados a usar o procedimento de resolver equações por cobertura seguida por técnicas formais tiveram mais sucesso na resolução da equação do que aqueles estudantes que tinham aprendido somente técnicas formais.

4.5.4 O Uso de Letras como Dados

Kieran e Chalouh (1993) acreditam que, na maioria das aulas de matemática ou livros texto, o uso de letras para especificar uma gama de valores, na representação de relações numéricas, não recebe a devida atenção, e que se deveria desenvolver gradualmente, nos estudantes, familiaridade com esse uso de letras, antes que eles seguissem um curso de álgebra formal.

Assim, Kieran e Chalouh (1993) apresentam exemplos de situações problema envolvendo uma única letra, apropriados para introduzir aos alunos a ideia do uso de letras para expressar relações gerais, e de situações *funcionais*, envolvendo duas letras. Vamos reproduzir abaixo um exemplo de cada situação.

Uso de uma letra para expressar relações numéricas: Uma menina multiplica um número por 5 e adiciona 12. Então, ela subtrai o numero original e divide o resultado por 4. Ela percebe que a resposta que ela obteve é igual ao numero inicial somado com 3. Ela diz: “Eu acho que isso teria acontecido independentemente do número inicial considerado”. Utilizando álgebra, mostre que a menina está certa.

Uso de duas letras em situações funcionais: “Invente uma regra. Nós diremos a você um número, você aplicará sua regra sobre ele e nos dirá o resultado. Nós tentaremos adivinhar qual é sua regra.” Por exemplo, a regra poderia ser: “Qualquer que seja o número dado, duplicá-lo e adicionar oito”. Então, se representa o número dado, e Δ representa o resultado após a aplicação da regra, os alunos poderiam montar uma tabela com vários valores para e Δ. Se, ao examinar a tabela, os alunos não conseguirem descobrir sozinhos qual é a regra entre e Δ, ainda assim o “jogo” terá sido instrutivo e o professor poderá finalmente escrever $(\quad \times 2) + 8 = \Delta$ (Kieran e Chalouh chamam atenção aqui a respeito do uso de símbolos, e não de letras, como uma representação intermediária).

4.6 Diferentes Concepções da Álgebra no Ensino Fundamental e no Ensino Médio

> “Hoje em dia, a tendência é pensar numa variável simplesmente como um símbolo pelo qual se podem substituir coisas. [...] Porém, as variáveis comportam muitas definições, conotações e símbolos. Tentar enquadrar a ideia de variável numa única concepção implica uma super simplificação que, por sua vez, distorce os objetos da álgebra.” (USISKIN apud DOMINGUES, 1995, p.10-12).

Apresentaremos nesta seção algumas considerações, a respeito do significado das *variáveis* em álgebra, seguindo o artigo *Concepções sobre a Álgebra da Escola Média e Utilizações das Variáveis*[35], de Zalman Usiskin, nas páginas 9-22, do livro *As Ideias da Álgebra*,1988, traduzido por Higino H. Domingues (1995).

Segundo Usiskin

> A álgebra da “escola média” tem a ver com a compreensão do significado das “letras” (hoje comumente chamadas variáveis) e das operações com elas, e consideramos que os alunos estão estudando álgebra quando encontram variáveis pela primeira vez. Porém, como o próprio conceito de variável é multifacetado, a redução da álgebra da escola média ao estudo das variáveis não responde à questão “ O que é a álgebra da escola média?” (USISKIN apud DOMINGUES, 1995, p. 9-10).

[35] O tradutor deste artigo refere-se a álgebra da escola média, ao traduzir middle grades, que, no Brasil corresponde ao Ensino Fundamental II (5ª. à 8ª. séries)

Para ilustrar esse caráter multifacetado das variáveis, Usiskin considera o seguinte conjunto de equações, todas com a mesma forma: o produto de dois números é igual a um terceiro.

A = b.h	(fórmula)
40 = 50x	(equação ou sentença aberta)
sen x = cos x . tg x	(identidade)
1 = n.(1/n), $n \neq 0$	(propriedade)
y = kx	(função)

Cada uma dessas equações tem um caráter diverso e o nome de cada uma delas reflete uma interpretação diferente da ideia de variável. Em (1), A, b e h representam a área, a base e a altura de um retângulo e têm caráter de coisa conhecida. Em (2) tendemos a pensar em *x* como uma incógnita. Em (3), *x* é o argumento de uma função. A propriedade em (4), ao contrário das outras, generaliza um modelo aritmético e *n* identifica um exemplo do modelo. Em (5), *x* é mais uma vez o argumento de uma função, *y* o valor da função e *k* uma constante (ou parâmetro, dependendo de como é usada). Somente em (5) é que há o caráter de "variabilidade", do qual resulta o termo *variável*. Mesmo assim, tal caráter não estará presente se imaginarmos aquela equação como a representação analítica de uma reta de inclinação *k*, passando pela origem.

De acordo com Usiskin[36] apud Domingues, (1995, p.13) as finalidades do ensino de álgebra e as concepções que se tem dessa matéria estão intrinsecamente relacionadas com a utilização de variáveis: "**As finalidades da álgebra** *são determinadas por, ou relacionam-se com,* **concepções** *diferentes* **da álgebra,** *que correspondem à diferente importância relativa dada aos diversos* **usos das variáveis".**

Usiskin apresentou em seu artigo quatro concepções relacionadas ao uso das variáveis, a serem consideradas em nosso estudo. Apresentaremos essas concepções resumidamente, compilando trechos da tradução de Domingues.

---

[36] Usiskin, Zalman. *Algebra through applications.* Chicago: Department of Education, University of Chicago, 1976.

Concepção 1: A álgebra como aritmética generalizada

Usiskin nos diz que, nesta concepção, é natural pensar as variáveis como generalizadoras de modelos. Por exemplo, 3 + 5 = 5 + 3 generaliza-se como a + b = b + a, $\forall$ a, b.

A noção de variável como generalizadora de modelos também aparece em modelagem matemática. Muitas vezes encontramos certas relações entre números e as variáveis são instrumentos úteis para descrever matematicamente essas relações. Por exemplo, segundo Usiskin, a equação T = - 0,4 A + 1020 descreve, com bastante proximidade, o recorde mundial T (em segundos), do ano A, para o percurso de uma milha, desde o ano 1900.

Segundo Usiskin, as instruções-chave para o aluno, dentro dessa concepção de álgebra, são *traduzir e generalizar*. Esse é o poder da álgebra como aritmética generalizada.

Observemos que a ideia da álgebra como aritmética generalizada já foi mencionada na análise histórica da notação algébrica apresentada na seção 4.4, e será mais uma vez abordada em 4.9.2.

Concepção 2: A álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas

Consideremos o seguinte problema: Adicionando 3 ao quíntuplo de um certo número, a soma é 40. Achar o número.

Facilmente se traduz esse problema para a linguagem da álgebra:

$$5x + 3 = 40$$

Um procedimento para resolver a equação, por exemplo, é somar (-3) a ambos os membros:

$$5x + 3 + (-3) = 40 + (-3)$$

Simplificando $5x = 37$ e, então, $x = \dfrac{37}{5} = 7{,}4$

Nesta concepção de álgebra, as variáveis são ou *incógnitas ou constantes* e as instruções-chave são *simplificar* e *resolver*.

Ao resolver problemas desse tipo, muitos alunos têm dificuldade na passagem da aritmética para a álgebra. Daí a necessidade da pré–álgebra.

Concepção 3: A álgebra como estudo de relações entre grandezas

Quando escrevemos *A = b·h,* fórmula da área de um retângulo, estamos expressando uma relação entre três grandezas. Não se tem a sensação de estar lidando com uma incógnita, pois não estamos resolvendo nada. Fórmulas como *A = b·h* transmitem uma sensação diferente de generalizações como *1 = n·(1/n)*, com n ≠ 0, embora se possa pensar numa fórmula como um tipo especial de generalização.

Considerando que a concepção de álgebra como o estudo das relações pode começar com fórmulas, a distinção crucial entre esta concepção e a anterior é que, neste caso, as variáveis *variam*. Que há uma diferença fundamental entre estas concepções fica evidente pela resposta que os alunos dão à seguinte pergunta:

O que ocorre com o valor de 1/x quando x se torna cada vez maior?

Não pedimos o valor de x, portanto, x não é uma incógnita. Não pedimos ao aluno que traduza. Há um modelo a ser generalizado, mas não se trata de um modelo que se pareça com a aritmética (não tem sentido perguntar o que aconteceria com o valor de ½ quando 2 se torna cada vez maior). Neste caso, trata-se de um modelo fundamentalmente algébrico. Talvez devido à sua natureza intrinsecamente algébrica alguns educadores matemáticos acham que a álgebra deveria ser introduzida através dessa utilização da variável.

Dentro dessa concepção, uma variável é um *argumento,* (isto é, representa os valores do domínio de uma função) ou um *parâmetro* (isto é, representa um número do qual dependem outros números). Só no contexto dessa concepção existem as noções de variável independente e variável dependente. As funções surgem quase imediatamente, pois necessitam de um nome para os valores que dependem do argumento ou parâmetro x. A notação funcional é uma ideia nova quando os alunos a veem pela primeira vez: $f(x) = 3x + 5$ parece e dá uma sensação diferente de $y = 3x + 5$.

Concepção 4: A álgebra como estudo de estruturas

O estudo da álgebra nos cursos superiores envolve estruturas como grupos, anéis, domínios de integridade, corpos e espaços vetoriais. Isso parece ter pouca semelhança com a álgebra do segundo grau (correspondente ao nosso atual ensino médio), embora os corpos dos números reais e dos números complexos e os vários anéis de polinômios fundamentem a teoria da álgebra, e as propriedades dos domínios de integridade e dos grupos expliquem por que certas equações podem ser resolvidas e outras não.

Contudo, reconhecemos a álgebra como o estudo das estruturas pelas propriedades que atribuímos às operações com números reais e polinômios.

Por exemplo, ao considerarmos a fatoração de $3x^2 + 4ax - 132a^2$, que resulta $(3x + 22a)\cdot(x - 6a)$, não temos uma função ou relação, a variável não é um argumento, e não há qualquer equação a ser resolvida, de modo que a variável não atua como incógnita. Também não há nenhum modelo aritmético a ser generalizado. A variável "x" e a letra "a" são objetos arbitrários de uma estrutura estabelecida por certas propriedades. Na concepção da álgebra como estudo de estruturas, a variável é pouco mais que um símbolo arbitrário.

Usiskin, em seu artigo, nos apresenta uma tabela contendo as diferentes concepções da álgebra relacionando-as com os diferentes usos das variáveis:

Tabela: Resumo das concepções segundo Usiskin

Concepção da álgebra	Uso das variáveis
Aritmética generalizada	Generalizadoras de modelos (traduzir, generalizar)
Meio de resolver certos problemas	Incógnitas, constantes (resolver, simplificar)
Estudo de relações	Argumentos, parâmetros (relacionar, gráficos)
Estrutura	Sinais arbitrários no papel (manipular, justificar)

Fonte: Usiskin apud Domingues (1995, p.20)

4.7 Pesquisa sobre Aprendizagem da Álgebra

L. V. Stiff; J. L. Johnsom e M. R. Johnson, no capítulo 1 do livro *Research Ideas for The Classroom: High School Mathematics* (1993), escrevem que ensinar matemática é uma tarefa complexa. Muitos fatores influenciam o processo de comunicar habilidades, conceitos e princípios matemáticos com sucesso aos estudantes mas, talvez, o fator mais significativo no processo de ensino seja a *compreensão do desenvolvimento intelectual* ou cognição. A forma como um estudante aprende ou adquire novas habilidades e informações tem um impacto direto e significativo sobre a forma como os professores devem ensinar matemática. Mas nenhuma teoria de aprendizagem consegue descrever completamente o modo como os estudantes adquirem a compreensão matemática.

Em parte, isto é um resultado de como diferentes teóricos da aprendizagem veem os objetivos do ensino da matemática. Alguns olham a aprendizagem da matemática como aquisição de habilidades algorítmicas, outros a veem como a compreensão de conceitos e relações que definem a estrutura da matemática, e muitos ainda a veem como o desenvolvimento de habilidades em resolução de problemas. Enquanto nos movemos para o século XXI, disseram eles, em 1993, nos deparamos com o desafio de adaptar nossos métodos de ensino e nossas práticas de sala de aula para irmos de encontro às necessidades dos estudantes.

No capítulo 5 de *Research Ideas for the Classroom: High School Mathematics*, S. Wagner, e S. Parker (1993), fazendo referência aos autores acima, escrevem que duas perspectivas teóricas estão por trás da maior parte da pesquisa realizada nos últimos vinte e cinco anos a respeito do aprendizado de álgebra. Uma delas envolve teorias de *desenvolvimento cognitivo* do tipo Piagetiano, que têm fornecido uma estrutura teórica para muito do que se tem pesquisado em compreensão conceitual. Instrumentos escritos e entrevistas semi-estruturadas, utilizando tarefas não rotineiras - tarefas diferentes dos exercícios típicos de livros texto - são utilizados para analisar os conceitos que os estudantes têm de função, equação, e variável. Algumas vezes são administradas tarefas que usam técnicas inspiradas em parte pela metodologia de pesquisa Soviética, tais como pedir a cada estudante que pense alto enquanto trabalha em um problema; fazer os estudantes trabalharem em pares sobre um problema; ou conduzir experimentos de ensino, com pequenos grupos, em que as tarefas são planejadas para tirar proveito dos resultados obtidos em tarefas anteriores. Os pesquisadores, então, analisam gravações e transcrições de seções de trabalho para formular conjecturas a respeito do pensamento dos estudantes.

A segunda perspectiva diz respeito a *processamento de informação*, que fornece uma estrutura teórica para grande parte da pesquisa atual sobre a habilidade de aprendizagem em álgebra. Aqui, os pesquisadores estudam dados sobre fatores como tempo de resposta ou erros comuns, em um esforço para identificar padrões e inferir processos mentais que os estudantes utilizam ao realizar certos procedimentos algébricos. Algumas vezes, modelos computacionais de processos de pensamento dos estudantes são formulados, ou programas de computador denominados “tutores inteligentes” são desenvolvidos para corrigir os erros dos estudantes.

As autoras observam que tanto a pesquisa sobre desenvolvimento cognitivo quanto sobre processamento de informação podem ajudar a compreender como os estudantes aprendem. Os dois tipos de pesquisa podem nos alertar para os obstáculos que surgem ao longo do caminho.

Ainda segundo as autoras, pesquisas sugerem que fontes de dificuldades que os alunos encontram habitualmente – impedimentos à aprendizagem – tendem a ser de três tipos:

(a) Algumas são inerentes à matéria em si mesmo

(b) Algumas são intrínsecas ao aluno

(c) Algumas são consequências não intencionais advindas de técnicas geralmente boas de ensino.

A maioria dos obstáculos inerentes à álgebra origina-se das convenções notacionais ou da complexidade dos conceitos que surgem com o uso de letras como variáveis.

Obstáculos intrínsecos ao aluno decorrem de fraquezas dos seres humanos tais como a tendência de super generalizar ou de julgar com base em características superficiais.

4.8 Pesquisa sobre Conteúdos da Álgebra

Wagner e Parker (1993) apresentam uma discussão a respeito da pesquisa sobre conteúdos da álgebra, dividindo a exposição, por conveniência, nos subtemas linguagem, conceitos, geometria e regras da álgebra. As autoras observam que trabalhos de pesquisa geralmente refletem uma gama de ideias e não se encaixam comodamente em uma única categoria, e que, portanto, elas analisam as pesquisas por área de implicação e não trabalho a trabalho. Vamos apresentar a seguir uma exposição parcial dos subtemas linguagem e conceitos.

4.8.1 A Linguagem da Álgebra

A Álgebra é uma linguagem para descrever ações sobre quantidades e relações entre quantidades. Como ocorre com qualquer linguagem, podem surgir dificuldades características da própria linguagem ou na tradução de uma linguagem para outra. No que diz respeito à linguagem da álgebra, a maioria das dificuldades estão relacionadas às variáveis e às expressões; e a maioria das dificuldades referentes à tradução, surgem na tradução de problemas literais para equações.

Com relação às *variáveis*, pesquisas mostram, segundo essas autoras, que os estudantes podem trabalhar com variáveis sem entender completamente a força e a flexibilidade de símbolos literais. Porque as variáveis operam de modo muito parecido com os números da aritmética, e porque, conceitualmente elas se assemelham a pronomes da linguagem ordinária, a maioria dos estudantes pode adquirir alguma facilidade em manipulações algébricas rotineiras. Por outro lado, variáveis são diferentes de números (por exemplo, variáveis podem representar muitos números simultaneamente; elas não têm valor posicional; elas podem ser selecionadas arbitrariamente), e elas são diferentes de palavras (por exemplo, variáveis podem ser definidas de um modo qualquer, à nossa escolha, e podem ser mudadas sem afetar os valores que elas representam).

Segundo Wagner e Parker (1993), existem evidências de que as primeiras impressões do estudante a respeito das variáveis podem impedi-lo de construir um conceito suficientemente geral.

Estudantes, que encontram, pela primeira vez, variáveis como incógnitas em equações, podem assumir que letras representam um valor específico. Quando confrontados com um letra de valor indeterminado, eles podem responder atribuindo um valor à variável e calculando a resposta.

Uma concepção ingênua comum sobre variáveis é a de que letras diferentes devem ter valores diferentes. Mesmo estudantes que tenham sido instruídos, e que dizem prontamente que qualquer letra pode ser usada como uma incógnita, ainda assim podem acreditar que uma mudança na incógnita pode mudar a solução de uma equação. Quantos de nós não temos reforçado, inadvertidamente, este engano ao sempre tomar valores diferentes para a, b, e c para ilustrar, digamos, a lei distributiva, a(b+c) = ab + ac? Mas, se nós tomarmos ocasionalmente os mesmos valores para variáveis diferentes, as reações de nossos alunos poderiam ser instrutivas.

Uma expressão algébrica é uma descrição de alguma operação envolvendo variáveis, tal como em x + 1, ou 2a + b. As autoras observam que o fato de utilizarmos dois sistemas de símbolos diferentes (letras e números) em álgebra, cada sistema com suas próprias regras, pode levar a confusão. Por exemplo, muitos estudantes assumem que –x é um número negativo. As autoras observam que, nesse caso particular, deveríamos alertar os estudantes para os três usos do sinal " – " (o sinal da operação de subtração, o sinal que denota um numero inteiro negativo e o sinal que denota o inverso aditivo), e nos referirmos a "-x" como o "oposto de x", e não como o "negativo de x".

As autoras discutem outras fontes de dificuldade envolvendo expressões algébricas, tais como a omissão do sinal de operação, no caso da multiplicação, e agrupamentos equivocados envolvendo parênteses e colchetes,

Em sua busca por procedimentos bem definidos a seguir, os estudantes podem transferir a abordagem da "palavra-chave", no caso de resolução de problemas orais em aritmética, para uma abordagem do tipo "contexto-chave" em álgebra. Ou seja, eles tendem a categorizar e recordar problemas de acordo com características superficiais - como problemas de "distância", problemas de "idade", ou problemas de "mistura" - e não de acordo com relações subjacentes aos problemas – quantidades iguais, duas quantidades adicionadas se igualam a uma terceira, e assim por diante. Poderemos ser capazes de ajudar os estudantes a se focarem melhor em estruturas subjacentes se, como recomendam os Padrões[37],

[37] Referência ao Standards 1989 do NCTM

aumentarmos nosso uso de problemas do mundo real (não tão facilmente categorizados) e diminuirmos o número de problemas tradicionais.

A questão que precisa ser pesquisada em problemas literais, em geral é o de verificar se o uso de variáveis simples, não mnemônicas, como x e y, pode desacostumar os estudantes da simples tradução direta e levá-los a uma análise de relações numéricas. Sobretudo, fazer com que os estudantes escrevam em palavras o que cada variável representa ("x" representa o número de estudantes, "y" o número de professores) não somente fornece uma recordação visual de que as variáveis representam números, mas também está muito de acordo com a ênfase crescente em verbalização nos Padrões.

4.8.2 Conceitos da Álgebra

Os conceitos algébricos que têm sido mais investigados segundo Wagner e Parker (1993) são: equações e funções. Conceitualmente, existe um salto significativo de equações, onde uma única variável representa tipicamente um ou dois números desconhecidos, para funções, onde duas ou mais variáveis geralmente podem assumir um conjunto infinito de valores, em relação de uns com os outros.

Os estudantes tipicamente começam a resolver equações simples bem antes de seguir um curso formal de álgebra, mas uma visão clara das diferenças estruturais entre equações e expressões pode ser impedida por sua experiência com o sinal de igualdade em aritmética. Os estudantes fazem tantos cálculos de respostas em aritmética que eles podem vir a considerar o sinal de igualdade como um tipo de sinal operatório – um sinal do tipo "escreva-a-resposta" - ao invés de uma afirmação de equivalência. Em álgebra, o sinal de igual ainda pode indicar uma resposta, como na simplificação de uma expressão, $2x + 5 + 3x – 7 = 5x – 2$. Mas, na resolução de equações, o sinal de igualdade é explicitamente um sinal de relação, e os estudantes são convidados a operar sobre toda relação para encontrar uma sequência de relações equivalentes. Mais uma confusão prolongada entre simplificação de expressões e resolução de equações se revela quando os estudantes se referem ao lado direito da equação (frequentemente numérico) como "a resposta", ou quando eles simplificam uma expressão, olham para a "equação" que eles escreveram e, ao resolvê-la, se perguntam o que aconteceu com o x, quando todos os termos em x se cancelam. Talvez os autores de livros-texto deveriam fazer uma distinção entre os dois usos do sinal de igualdade em álgebra utilizando consistentemente "≡" para denotar expressões identicamente equivalentes (propriedades axiomáticas, expressões simplificadas, identidades de multiplicação/fatoração, equações equivalentes, etc), e "=" para denotar a igualdade limitada de uma equação ou função.

Abordagens numéricas tais como o uso de identidades aritméticas para desenvolver o conceito de equação, ou o uso de calculadoras para encontrar ou aproximar soluções, pode ajudar os estudantes a se focarem mais no aspecto relacional de uma equação e menos no algoritmo para a solução. Também fazer com que os alunos raciocinem para encontrar uma solução ao invés de sempre utilizar operações inversas pode ser útil.

Checar soluções numéricas na equação original – problemas literais, no enunciado do problema – deveria ser uma parte integrante do processo de resolução para todos os tipos de equações, não apenas para equações racionais ou radicais, onde raízes estranhas podem ser introduzidas. A importância de se checar soluções de equações não é intuitivamente óbvia para os estudantes. O propósito não é apenas o de obter precisão, mas também o de obter convencimento da razoabilidade de uma resposta e o de reforçar a conexão entre a equação original, ou situação-problema, e a solução final.

Algumas das pesquisas anteriores sobre conceitos relacionados a funções indicam que os estudantes constroem o conceito formal de função em estágios, começando com a noção de regra de uma função, e progredindo com o vocabulário e o simbolismo, representação gráfica, operações sobre funções, e propriedades internas de funções especificas. Muita pesquisa tem se focado em ideias intuitivas sobre funções e a transição da intuição para o simbolismo formal. Pesquisa sobre gráficos será discutida na próxima seção.

Estudantes do Ensino Médio podem facilmente compreender a ideia básica de uma função como “uma regra de correspondência”, tanto em situações concretas quanto em tabelas de duas colunas de números. Para funções simples, eles podem identificar padrões, completar informações sobre domínio e imagem, e descrever verbalmente regras de associação.

A notação formal f(x), por outro lado, condensa uma grande quantidade de informação de modo bastante eficiente mas causa dificuldade mesmo para estudantes mais avançados. Como um exemplo, as autoras observam que, em uma avaliação nacional de matemática nos EUA, a taxa de sucesso, de alunos do 11º ano, estimando $a + 7$ quando $a = 5$, decaiu de 20 a 40 pontos percentuais (dependendo da experiência em álgebra) quando a questão era recolocada como estimar $f(5)$ quando $f(a) = a+7$.

A definição conjuntista de função (definição de função como uma relação entre conjuntos) que aparece em muitos livros didáticos de álgebra não transmite a riqueza do conceito de função em um modo bastante significativo. Em geral, a intuição dos estudantes a respeito do que constitui uma função corresponde mais à primeira função que eles encontram do que à definição formal. Ou seja, os estudantes geralmente acreditam que funções deveriam ser lineares, ou, pelo menos, contínuas, suaves e definíveis por uma única fórmula. Para ajudar os estudantes a construir uma conceitualização mais completa, é preciso aumentar o número de exemplos simples introdutórios com uma variedade de outras funções, bem como apresentar exemplos de relações não funcionais.

4.9 A Álgebra e a Pedagogia

Em Algebra: The Mathematics and the Pedagogy, capítulo 5 do livro *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics, Seventieth Yearbook, 2008*, Mark Saul coloca, de início, as seguintes questões

> **Porque álgebra é tão difícil de aprender?** O que tem o assunto de desafiador para os estudantes? Estas são questões com as quais o professor novato se depara logo que entra em sala de aula. Conforme os professores adquirem experiência em suas práticas, novas questões emergem. Quais são os pontos difíceis em um curso de álgebra? O que torna estes pontos difíceis? O que poderia ajudar os estudantes a superá-los? Respostas a essas questões podem direcionar a investigação dos professores em auxílio de seus estudantes. (SAUL, 2008, p.63)

Saul (2008) observa que, com respeito ao conteúdo matemático, podemos distinguir três modos de analisar o fenômeno da álgebra: como uma generalização da aritmética, como o estudo de operações binárias, e como o estudo do corpo das expressões racionais e corpos relacionados. Já vimos distinções análogas em 4.6, no trabalho de Usiskin. Os trabalhos de Usiskin e Saul, no entanto, são complementares, cada um considerando diferentes aspectos desses diferentes pontos de vista para a álgebra. Mais precisamente, as diferentes concepções da álgebra, em Usiskin, são relacionadas com e procuram evidenciar as diferentes utilizações das variáveis. No caso de Saul, os três pontos de vista mencionados acima representam três marcos no aprendizado da álgebra, três momentos distintos do amadurecimento do aluno, no que diz respeito ao pensamento algébrico.

Segundo Saul, essa forma de descrever o conteúdo pode explicar algumas das dificuldades que os estudantes têm com a álgebra e nos ajudar a solucioná-las. Esse autor constrói a sua argumentação apoiando-se em um conjunto de exemplos, que levam a observações gerais a respeito da álgebra e do porquê ela é difícil.

4.9.1 O que a Álgebra não é

Exemplo 1: *Andrei é um estudante mediano começando a sétima série. Ele pode resolver equações lineares simples tais como 2x – 3 = 17. Ele faz isso por tentativa, substituindo a variável por valores inteiros até encontrar a solução. Ele sabe que 4 é muito pequeno, porque 2 × 4 – 3 = 5, e ele precisa 17. Ele sabe que 30 é muito grande porque 2 × 30 – 3 = 57, e ele precisa só 17. Dando valores a x maiores ou menores, Andrei pode chegar rapidamente à solução. Ele pode reconhecer quando chegou à solução. Mas Andrei não consegue resolver a equação 2,3x – 3,2 = 17,83 da mesma forma. Ele não consegue nem mesmo resolver 3x – 3 = 17 da mesma forma,* pois aí ele teria que trabalhar com números racionais e, na infinidade deles, ele não encontraria uma possível solução trabalhando aritméticamente. *No entanto, dado um número, ele consegue dizer se ele é ou não uma solução dessas equações.* (SAUL 2008, p.64, grifo do autor).

A confusão de Andrei nos diz muito sobre o que a álgebra não é. A álgebra não é o estudo de variáveis. Andrei sabe como usar a variável x. Ele sabe que a afirmação 2x - 3 = 11 é verdadeira quando x = 7 e falsa quando x = 5. Ele sabe isso porque ele pode usar aritmética para gerar as afirmações que resultam da variável *x* tomando valores específicos.

A álgebra também não é o estudo de funções. Andrei tem uma boa ideia intuitiva sobre a função f(x) = 2x – 3. Ele sabe que f(x) cresce quando x cresce e que se x toma um valor entre 10 e 20 a função terá um valor entre 17 e 37. Essas são essencialmente propriedades analíticas de uma função e não de uma equação.

Saul considera importante notar que o conceito de função é pedagogicamente e matematicamente, separado e distinto do aprendizado de álgebra:

> Nós usamos álgebra para representar funções. Mas nós também usamos geometria quando fazemos um gráfico. E também usamos a linguagem natural. Temos até funções envolvendo variáveis aleatórias, cujos valores não podem ser facilmente registrados

> algebricamente. Álgebra nos ajuda a descrever e investigar uma ampla classe de funções [...] Mas a aquisição do conceito de função não é a mesma coisa que uma compreensão da álgebra. Ao contrário, o estudo algébrico de funções dá ao estudante prática para aplicar habilidades algébricas e tornar essas habilidades mais vívidas. (SAUL, 2008, p.65).

Saul diz que Andrei tem uma boa intuição de iniciante sobre variáveis e funções. Ele sabe que x pode variar e sabe identificar limitações para variável x. A compreensão de Andrei sobre funções está mais relacionada à análise do que à álgebra. Mas, ele ainda não atingiu o núcleo da álgebra. Ele ainda não conhece as propriedades estruturais da álgebra.

4.9.2 Um Primeiro Marco: A álgebra como "Aritmética Generalizada"

Exemplo 2: *Bob é um bom aluno de álgebra da oitava série. Ele não encontra dificuldade para fatorar a diferença de dois quadrados e pode resolver os seguintes exercícios de modo rotineiro:*

$$4a^2 - 1 = (2a + 1)(2a - 1)$$

$$9 - b^4 = (3 + b^2)(3 - b^2)$$

$$n^4 - 16 = (n^2 + 4)(n - 4) = (n^2 + 4)(n + 2)(n - 2)$$

Ele pode até mesmo fatorar $(g - h)$ *como* $\left(\sqrt{g} + \sqrt{h}\right)\left(\sqrt{g} - \sqrt{h}\right)$

Mas se lhe pedirmos para fatorar 4899, ele não percebe que este número é igual a $70^2 - 1$*, e não pôde utilizar este fato para efetuar a fatoração, mesmo quando seu professor observa a ele que 4899 = 4900 – 1. Ao invés disso, Bob observa que o número dado é múltiplo de três mas não de 5. Ele então testa 7, 11, e assim por diante, para identificar os fatores primos de 4899, da mesma forma que, quase sempre se ensina para fatorar números, decompondo-os em produto de fatores primos.* (SAUL, 2008, p.65, grifo do autor)

Saul reproduziu em seu artigo um trecho de “A Aritmética Generalizada”, de Isaac Newton, um tratado sobre álgebra elementar, que também reproduzimos aqui, parcialmente:

> A aritmética comum e a álgebra se apoiam nos mesmos fundamentos computacionais e são direcionadas para o mesmo fim. Mas enquanto a aritmética trata de questões de um modo definido e particular, a álgebra o faz de uma maneira indefinida e universal, com o resultado que quase todos os pronunciamentos que são feitos nesse estilo de computação – e suas conclusões em especial, podem ser chamados teoremas.[...]. (WHITSIDE[38], 1972, apud SAUL 2008, p. 66).

Conforme coloca Saul, Newton nos diz que “*a álgebra generaliza a aritmética transformando afirmações aritméticas em teoremas formais”.* Segundo Saul, foi esse fato, em essência, que Bob deixou de perceber. Bob não pode ver a fatoração de $4899 = 70^2 – 1$ como um caso especial da fatoração de $x^2 - 1$.

Saul prossegue observando que, talvez, os professores estejam “empurrando” os estudantes para “exercícios” algébricos, envolvendo transformações em expressões algébricas, sem considerar o que as variáveis representam. Se esta falta de consideração não é sempre ruim e, em certos estágios, e para certos alunos, é essencial, no estágio em que Bob se encontra, *é importante que ele continue a pensar as variáveis da álgebra como representando números, e as afirmações da álgebra como generalizações das afirmações de aritmética*. Uma compreensão do nível de sofisticação matemática de Bob e do que ele precisa para ir adiante pode ajudar na prevenção desse erro pedagógico.

[38] Whiteside, Derek Thomas, Ed. *The mathematical papers of Isaac Newton.* Vol. 5. London: Cambridge University Press, 1972.

4.9.3 Um Segundo Marco: A Álgebra Como o Estudo de Relações Binárias sobre Conjuntos

Exemplo 3. *Cathy, aluna do 8º. ano*[39]*, resolve questões que Andrew não consegue. Ela pode perceber que as seguintes equações são do mesmo tipo:*

$$2x + 3 = 10$$
$$3x - 1 = 10$$
$$4{,}2x + 4{,}5 = 6{,}7$$
$$\frac{3x}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$
$$12 = 2x - 3$$

Cathy pode subtrair 3 dos dois lados de uma equação e dividir os dois lados por 3/4, mas ela não pode usar essas mesmas técnicas para resolver uma equação como 3x – 2 = 5x + 18. Tão pouco Cathy pode "associar números" a essa equação já que não há nenhum número "alvo" a ser buscado. (SAUL, 2008, p.66-67, grifo do autor).

Saul observa que Cathy também está deixando de compreender algo. O aparecimento da incógnita nos dois lados de uma equação é algo que alguns estudantes acham difícil de compreender. Nesse tipo de problema é necessário transformar a equação, colocando as incógnitas todas em um mesmo lado. Ao fazer isso, o estudante estará acrescentando algo à sua compreensão do significado do símbolo de igualdade. Como Carpenter[40], Franke e Levi (2003, apud Saul (2008)) perceberam, as crianças mais novas vêm no símbolo de igualdade algo como um

[39] Equivalente a nossa 7ª. série do Ensino Fundamental II

[40] Carpenter, Thomas P., Megan Loef Franke, and Linda Levi. *Thinking mathematically:*integrating arithmetic and algebra in the elementary school. Portsmouth, N.H: Heinemann, 2003.

botão de “retornar” em uma calculadora. Como uma sugestão para executar algum algoritmo implementando a operação indicada.

Diante de problemas do tipo 7 + 5 = o quê? + 4, estudantes de aritmética, raramente subtraem 4 dos dois lados para obter 7 + 1 = o quê? Esse passo envolve a compreensão de uma relação entre afirmações de igualdade e operações aritméticas, qual seja, uma afirmação de igualdade permanece verdadeira se somarmos ou subtrairmos a mesma quantidade dos dois lados.

Analisar a igualdade de expressões algébricas requer que os estudantes voltem sua atenção para as operações indicadas nas expressões. Embora Cathy não tenha feito esse passo completamente, ela progrediu nessa direção. Ela não se concentra nos números particulares que aparecem nas equações. O que lhe permite generalizar através das equações é sua compreensão de que o importante são as operações sendo efetuadas sobre os números e não os números em particular. Ela começa a compreender a álgebra como o estudo de relações binárias sobre conjuntos.

4.9.4 Um Terceiro Marco: A Álgebra pela Álgebra

Segundo Saul (2008), muitos estudantes nunca vão além de uma compreensão da álgebra como o estudo de operações binárias definidas em conjuntos de objetos e, na verdade, isso já os leva bastante longe. Eles podem atrelar a álgebra ao estudo da aritmética e utilizar a álgebra para pensar afirmações aritméticas de modo mais geral. Eles têm acesso às estruturas da álgebra, baseadas em propriedades gerais de operações binárias. Os estudantes descritos no próximo exemplo, no entanto, estão começando a dar um terceiro passo, em direção à compreensão das estruturas algébricas.

Exemplo 4: *Dina conhece a identidade* $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ *muito bem e já efetuou inúmeras vezes a multiplicação desses dois fatores, bem como a fatoração correspondente, mas ela tem dificuldade de fatorar expressões como* $4a^2 - 9b^2$, $25c^2 - 1$ *(embora ela reconheça 1 como um quadrado perfeito), e* $4 - d^2$. *Ela encontra ainda mais dificuldades para fatorar* $e^2/4 - 9f^2$, *pois não está acostumada a tratar frações como quadrados perfeitos, e também não sabe fatorar* $(e + f)^2 - 4$. *Além disso, Dina se surpreende com a igualdade* $\left(\sqrt{g}+\sqrt{h}\right)\cdot\left(\sqrt{g}-\sqrt{h}\right)=g-h$

Froim, um bom aluno em álgebra intermediária, sabe como fatorar $A^2 - B^2$, *mas tem dificuldade com* $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$.

Gabe sabe que $x + 1/x$ *é uma função que assume seu mínimo (no conjunto dos reais positivos) quando* $x = 1$. *Ele sabe disso não pelo cálculo, mas pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica:* $(A+B)/2 \geq \sqrt{AB}$, *para números positivos A e B, valendo a igualdade se A = B. Tomando A = x e B = 1/x, obtemos* $x + 1/x \geq 2$, *valendo a igualdade quando* $x = 1/x = 1$. *Gabe deve minimizar cada uma delas no conjunto dos reais positivos:*

$$\frac{x+1}{x-2}+\frac{x-2}{x+1}, \qquad \tan x+\cot x, \qquad \log_a x+\log_x a$$

Harriet sabe que $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ *mas tem dificuldade para fatorar* $x^6 + y^6$. (SAUL, 2008, p.69, 70, grifo do autor).

Esse terceiro passo nos leva diretamente a concepções modernas da álgebra – matemáticos trabalhando em álgebra contemporânea estudam estruturas (tais como grupos, anéis, e corpos) e não apenas operações.

Saul observa que, em um processo largamente evidente para professores e alunos, boa parte da álgebra, após o primeiro ano de estudo, lentamente se transforma no estudo do *corpo* das expressões racionais. Desse ponto de vista, expressões racionais deixam de representar funções ou mesmo números racionas, e o que importa são as operações (soma e multiplicação) entre expressões racionais, com suas propriedades. Segundo Saul, atenção conscienciosa a esse processo (que estranhamente não tem sido destacado na literatura, ele acrescenta) pode ajudar professores a identificar problemas de compreensão, tais como os dos alunos mencionados acima.

Saul sugere uma estratégia pedagógica para ajudar alunos como Dina. Logo que ela compreenda que um ou dois exemplos têm a mesma forma que $A^2 - B^2$, o professor poderia lhe perguntar: O que faz o papel de A? O que faz o papel de B? A questão “O que faz o papel de ....?” pede ao estudante para substituir valores pertencentes ao corpo das expressões racionais.

Segundo Saul, dicas como essa podem ajudar os alunos com suas dificuldades:

> De fato, muitos dos problemas em livros texto de álgebra de nível intermediário são organizados nessa linha. É dada uma “forma” algébrica e os estudantes devem usá-la para obter muitos casos gerais. Embora isso possa ser interpretado como um exercício de rotina em manipulação algébrica, uma interpretação conscienciosa como um trabalho no corpo das expressões racionais pode ajudar professores a guiarem os estudantes na aquisição dessas habilidades (SAUL, 2008, p.72).

4.10 O Raciocínio Algébrico e Funções

Van de Walle e Lovin (2006) em, *Teaching Student-Centered Mathematics grades 5-8*[41], diz que os Standards 2000, (p.265) listam álgebra como um dos cinco padrões de conteúdo da matemática para toda a escolaridade obrigatória (desde o pré até o ano 12, nos Estados Unidos). Diz também que as grandes ideias para se trabalhar com o raciocínio algébrico são:

[41] O Ensino da Matemática Centrado no Aluno, anos 5-8

1) Padrões lógicos existem e ocorrem regularmente na matemática. Eles podem ser reconhecidos, estendidos e generalizados tanto por meio de símbolos quanto por meio de palavras.

2) Uma variedade de representações tais como diagramas, retas numeradas, mapas e gráficos podem ser utilizados para ilustrar situações matemáticas e relações. Estas representações ajudam na conceitualização de ideias e na resolução de problemas.

3) Simbolismo, especialmente o que envolve equações e variáveis, é usado para expressar generalizações de padrões e relações.

4) Variáveis são símbolos que tomam o lugar de números ou intervalos de números. Elas têm significados diferentes, dependendo de estarem sendo usadas como representações de quantidades que variam ou mudam, como representações de valores desconhecidos específicos, ou como representantes de quantidades em uma expressão generalizada ou fórmula.

5) Equações e desigualdades são utilizadas para expressar relações entre quantidades. Simbolismo em qualquer lado de uma equação ou desigualdade representa uma quantidade. Assim, $3 + 8$ e $5n + 2$ são ambas expressões para números e não algo “para ser feito”.

Van de Walle e Lovin (2006), disseram que o raciocínio algébrico envolve uma busca por regularidade em toda a matemática, e que funções são uma das ferramentas mais poderosas para este propósito. Elas nos permitem representar relações simbolicamente, visualmente, e oralmente, e generalizar relações entre variáveis em qualquer área da matemática envolvendo quantidades que são relacionadas. Isto torna o conceito de função uma das maiores ideias da matemática.

Funções são a ferramenta usada para modelar matematicamente todo tipo de mudança no mundo real. Representar funções de modos diferentes pode levar à analise e compreensão daquela mudança. Estudantes nos *middle grades* deveriam desenvolver uma compreensão dos múltiplos métodos de se expressar relações funcionais do mundo real (palavras, gráficos, equações, e tabelas). Trabalhar com estas diferentes representações de funções permitirá aos alunos desenvolverem uma compreensão maior deste importante conceito.

Um estudo de funções é um estudo do modo como a mudança em uma variável afeta a outra, é um estudo de variação conjunta de variáveis. Uma função é uma regra que define de modo único como a primeira variável, ou variável independente, afeta a segunda, variável dependente.

As *grandes ideias* para um bom trabalho com função, segundo Van de Walle e Lovin (2006) são:

- Funções são relações ou regras que associam, de modo único, membros de um conjunto com membros de outro conjunto.
- Em uma relação funcional, uma variável (a variável dependente) é definida em termos da outra variável (a variável independente).
- Relações funcionais podem ser expressas em contextos reais, gráficos, equações algébricas, tabelas, e palavras. Cada representação para uma dada função é apenas uma forma diferente de expressar a mesma ideia. Cada representação fornece um ponto de vista diferente de função. O valor de uma particular representação depende de seu propósito.

4.11 Raciocinando com Proporções

Van de Walle e Lovin (2006), referindo-se ao desenvolvimento dos conceitos de razão e proporção, dizem que o raciocínio com proporções tem sido referido como "o ponto crucial do currículo elementar e a pedra fundamental da álgebra", Lesh[42] Post e Behr, (1987, apud Van de Walle e Lovin, (2006)). Segundo

---

[42] Lesh, R. A., Post, T. R., e Behr, M.J. (1987). Representations and translations among representations, in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (p.33-40). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Piaget, a habilidade de raciocinar com proporções é um indicador primário do *pensamento operacional formal*, considerado o estágio mais alto do desenvolvimento cognitivo[43]. Segundo Van de Walle e Lovin (2006), o raciocínio com proporções representa a habilidade para começar a entender relações multiplicativas, onde a maioria dos conceitos aritméticos são de natureza aditiva.

Segundo Post, Behr e Lesh, apud Domingues (1995), autores do artigo *A Proporcionalidade e o Desenvolvimento de Noções Pré-Álgebra*, o raciocínio com proporções é considerado, geralmente, um dos componentes do raciocínio formal adquiridos na adolescência.

O que é o raciocínio com proporções?

Para Van de Walle (2006), é difícil definir o raciocínio com proporções. Ele não é algo que se pode ou não fazer, mas sim, algo que se desenvolve ao longo do tempo, através do raciocínio. Uma maneira de se descrever o raciocínio com proporções é dizer que ele é a habilidade de se pensar sobre, e comparar, relações multiplicativas entre quantidades. Essas relações são representadas simbolicamente como razões.

Van de Walle (2006) destaca três ideias importantes:

1) Uma razão é uma comparação entre duas quantidades quaisquer. Um aspecto chave do desenvolvimento cognitivo é a habilidade de um estudante começar a pensar uma razão como uma entidade distinta, diferente das duas medidas que a compõem.

2) Proporções envolvem comparações multiplicativas ao invés de aditivas. Razões iguais resultam de multiplicação ou divisão, e não de adição ou subtração.

---

[43] Piaget descreve o desenvolvimento intelectual por meio de uma série de estágios. As crianças parecem progredir sistematicamente dos estágios sensorial, motor e operacional para o estágio do *pensamento concreto*. A transição do pensamento concreto para o pensamento formal ocorre, segundo Piaget, no início da adolescência (Raven, 1973).

3) O pensamento proporcional é desenvolvido através de atividades envolvendo comparação e determinação de equivalência de razões, e resolvendo proporções em uma grande variedade de problemas contextuais e situações, sem a utilização de regras ou fórmulas.

Post, Behr e Lesh observam o raciocínio com proporções como uma forma de raciocínio matemático. E prosseguem:

> Ele [o raciocínio com proporções] envolve um senso de covariação, comparações múltiplas e a capacidade de armazenar e processar mentalmente várias informações. O raciocínio com proporções está muito ligado à inferência e à predição, e envolve métodos de pensamento qualitativos e quantitativos. O fato de muitos aspectos de nosso mundo funcionarem de acordo com regras de proporcionalidade faz com que a faculdade de raciocinar com proporções seja extremamente útil na interpretação dos fenômenos do mundo real. (DOMINGUES 1995, p.90)

Visando à compreensão da importância do raciocínio com proporções no aprendizado de álgebra, Post, Behr e Lesh (1988) apud Domingues (1995), dizem que

> A proporcionalidade é um exemplo simples, mas importante, de função matemática e pode ser representada como uma equação linear. Como tal, é uma ponte adequada e talvez necessária entre experiências e modelos numéricos comuns e as relações mais abstratas, que se expressarão de forma algébrica. A representação algébrica da proporcionalidade (y=mx) abrange uma classe incrivelmente ampla de ocorrências físicas.
>
> As proporções (expressas pela igualdade de duas razões) são úteis numa grande variedade de situações de resolução de problemas, como muitos tipos de problemas sobre taxas – por exemplo, velocidade, mistura, densidade, escala, conversão, consumo, preço e outras formas de comparações. Um exemplo específico de uma taxa relacionada com a velocidade é o seguinte: Se uma torneira goteja onze vezes em vinte segundos, quantas gotas deixará cair em uma hora?
>
> O raciocínio e o conhecimento algébrico muitas vezes envolvem modos diferentes de representação. Tabelas, gráficos, símbolos (equações), desenhos e diagramas são maneiras importantes pelas quais se podem representar as ideias algébricas. A capacidade de criar e compreender traduções desses modos e de um para outro é

> um elemento essencial de competência matemática em todas as áreas, e não apenas em álgebra. As situações proporcionais e os raciocínios que as acompanham fornecem um excelente veículo para ilustrar essas associações multiformes.(DOMINGUES 1995, p.91-92).

4.12 O Ensino Aprendizagem de Função em Documentos Oficiais

Os documentos oficiais analisados neste trabalho de pesquisa, tanto nacionais quanto estrangeiros, apresentam guias curriculares e conteúdos referentes a cada ano escolar, e fornecem orientações, ou sugestões, para o planejamento e desenvolvimento desses conteúdos em sala de aula.

4.12.1 Como os PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais veem o Ensino-Aprendizagem de Função no Ensino Fundamental

Nos *Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, da 5ª a 8ª séries*, de 1998, do Ministério de Educação e do Desporto, Secretaria de Educação Fundamental, lemos que

> O estudo da Álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas. (BRASIL 1998, p. 115).

Com respeito ao papel da Álgebra no currículo, os PCN dizem que

> Para uma tomada de decisões a respeito do ensino da Álgebra, deve-se ter, evidentemente, clareza de seu papel no currículo, além da reflexão de como a criança e o adolescente constroem o conhecimento matemático, principalmente quanto à variedade de representações. Assim, é mais proveitoso propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações, do que desenvolver o estudo da Álgebra apenas enfatizando as ‘manipulações’ com expressões e equações de uma forma meramente mecânica.
> Existe um razoável consenso de que para garantir o desenvolvimento do pensamento algébrico o aluno deve estar necessariamente engajado em atividades que interrelacionem as diferentes concepções da Álgebra. (BRASIL, 1998, p. 116)

Quanto aos objetivos da matemática para o Ensino Fundamental II de 5ª a 6ª séries, segundo os PCN, a matemática deve visar o pensamento algébrico por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:

> * reconhecer que representações algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações-problema e favorecer as possíveis soluções;
> * traduzir informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice-versa, generalizando regularidades e identificar os significados das letras;
> * utilizar os conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico." (BRASIL 1998, p.64)

Com relação ao conteúdo de 5ª a 6ª séries do Ensino Fundamental

os PCNs ressaltam que

> No decorrer do trabalho com os números, é fundamental estudar algumas relações funcionais pela exploração de padrões em sequências numéricas que levem os alunos a fazer algumas generalizações e compreender, por um processo de aproximações sucessivas, a natureza das representações algébricas. A construção dessas generalizações e de suas respectivas representações permite a exploração das primeiras noções de álgebra. [...] É suficiente nesse ciclo que os alunos compreendam a noção de variável e reconheçam a expressão algébrica como uma forma de traduzir a relação existente entre a variação de duas grandezas. É provável que ao explorar situações-problema que envolvam variação de grandezas o aluno se depare com equações, o que possibilita interpretar a letra como incógnita. (BRASIL 1998, p. 68, grifo nosso).

Na seção de Ensino e aprendizagem de Matemática no "quarto ciclo[44]", isto é 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental, dos PCNs, lemos

> a grande maioria dos alunos tem a sensação de que a Matemática é uma matéria difícil e que seu estudo se resume em decorar uma série de fatos matemáticos, sem compreendê-los e sem perceber suas aplicações e que isso lhes será de pouca utilidade, e que isso os leva a assumir atitudes bastante negativas, que se manifestam

[44] Termo utilizado no documento dos PCN 1998, referindo-se às 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental

> no desinteresse, na falta de empenho e mesmo na pouca preocupação diante de resultados insatisfatórios ou nos sentimentos de insegurança, bloqueio e até em certa convicção de que são incompetentes para aprendê-la, o que os leva a se afastar da Matemática em situações da vida futura (BRASIL 1998, p.79)

Os PCNs dizem também que fica mais evidente para os estudantes a presença da Matemática em outras áreas do currículo, particularmente no estudo de alguns fenômenos físicos, químicos, no estudo da informática etc.

> [...] tradicionalmente no quarto ciclo em geral, a ênfase recai no estudo dos conteúdos algébricos, abordados de forma mecânica, distanciando-se ainda mais das situações-problema do cotidiano. É como se, neste ciclo, o aluno tivesse de esquecer quase tudo o que aprendeu antes, porque esses conhecimentos já não lhe servem mais para resolver as situações que ora lhe são propostas. No entanto, essa situação poderá ser revertida se, para os novos conteúdos a serem estudados, esses alunos conseguirem estabelecer relações com os conhecimentos construídos anteriormente.(BRASIL 1998, p. 80).

Segundo os PCN, é importante considerar que alguns aspectos associados ao desenvolvimento cognitivo dos alunos que estão no quarto ciclo em muito favorecem a aprendizagem. Por exemplo, a observação ganha em detalhes, ampliam-se as capacidades para pensar de forma mais abstrata e argumentar com maior clareza.

Dos objetivos de matemática para o quarto ciclo os PCNs dizem que o ensino de Matemática deve visar o desenvolvimento do pensamento algébrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:

> * produzir e interpretar diferentes escritas algébricas - expressões, igualdades e desigualdades -, identificando as equações, inequações e sistemas;
> * resolver situações-problema por meio de equações e inequações do primeiro grau, compreendendo os procedimentos envolvidos;
> * observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis."
> (BRASIL 1998, p.81).

Com relação ao conteúdo proposto para o ensino de Matemática na página 84 lemos que

> o trabalho com a Álgebra, neste quarto ciclo, tem como ponto de partida a pré-álgebra, desenvolvida no ciclo anterior, em que as noções algébricas são exploradas por meio de jogos, generalizações e representações matemáticas (como gráficos, modelos), e não por procedimentos puramente mecânicos, para lidar com as expressões e equações. (BRASIL 1998, p. 84, grifo nosso).

Para que os alunos deem significado à linguagem e às ideias matemáticas, é preciso que em Álgebra os alunos trabalhem com problemas. Nesse sentido lemos nos PCN que

> [...] Ao se proporem situações-problema bastante diversificadas, o aluno poderá reconhecer diferentes funções de Álgebra (ao resolver problemas difíceis do ponto de vista aritmético, ao modelizar, generalizar e demonstrar propriedades e fórmulas, estabelecer relações entre grandezas). [...] é fundamental a compreensão de conceitos como o de variável e de função; a representação de fenômenos na forma algébrica e na forma gráfica; a formulação e a resolução de problemas por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis) e o conhecimento da sintaxe, (regras para resolução) de uma equação. Para apoiar a compreensão desses conceitos pode-se lançar mão da construção e interpretação de planilhas, utilizando recursos tecnológicos como a calculadora e o computador. (BRASIL 1998, p.84).

Sabemos que o trabalho com a Álgebra também está presente em atividades e problemas envolvendo noções e conceitos referentes a generalizar os procedimentos para calcular o número de diagonais para qualquer polígono, ao indicar a expressão que relaciona duas grandezas, ao calcular medidas.

É importante também que os alunos percebam conexões nestes estudos. A proporcionalidade, por exemplo, que já vem sendo trabalhada nos ciclos anteriores, aparece na resolução de problemas multiplicativos, nos estudos de porcentagem, de semelhança de figuras, na matemática financeira, na análise de tabelas, gráficos e funções. Para a compreensão da proporcionalidade é preciso também explorar situações em que as relações não sejam proporcionais, os contra-exemplos.

Com respeito a estes conteúdos envolvidos como também a conceitos e procedimentos os PCN, 1998 dizem que

> O aluno poderá desenvolver essa noção ao analisar a natureza da interdepência de duas grandezas em situações-problema em que elas sejam diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não-proporcionais (função afim ou quadrática). Essas situações são oportunas para que se expresse a variação por meio de uma sentença algébrica, representando-a no plano cartesiano" [...] e que a "resolução de problemas envolvem grandezas diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais por meio de estratégias variadas, incluindo a regra de três. (BRASIL, 1998, p. 84,85 e 87)

De forma sintetizada, os PCN-1998 apresentam um quadro que sintetiza de forma bastante simplificada as diferentes interpretações da álgebra escolar e as diferentes funções das letras.

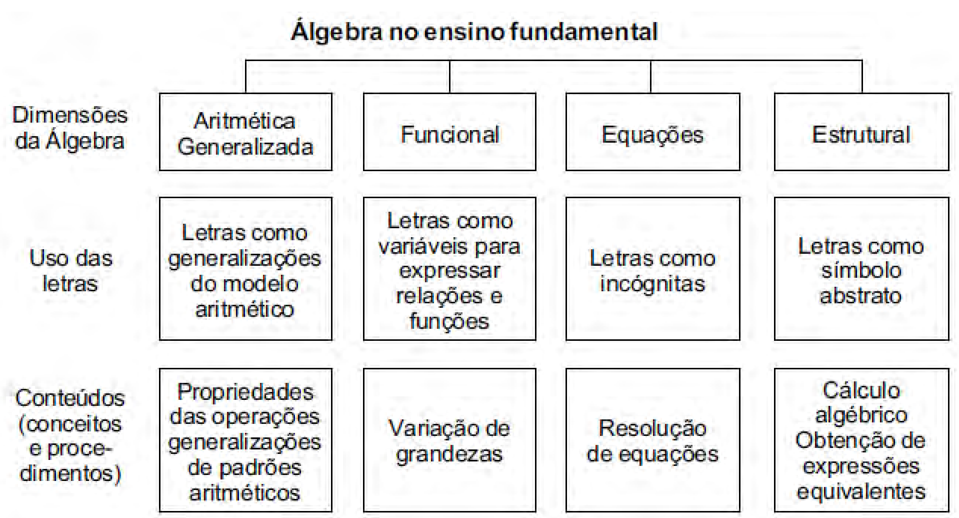


Figura 6

Fonte: Brasil (1998, p.116)

É fato conhecido que os professores não desenvolvem todos esses aspectos da Álgebra no Ensino Fundamental, pois privilegiam fundamentalmente o estudo do cálculo algébrico e das equações - muitas vezes descoladas dos problemas. Apesar de esses aspectos serem necessários, eles não são, absolutamente, suficientes para a aprendizagem desses conteúdos. Para a compreensão de conceitos e procedimentos algébricos é necessário um trabalho articulado com essas quatro dimensões ao longo dos terceiro e quarto ciclos.

Os adolescentes desenvolvem de forma bastante significativa a habilidade de pensar ‘abstratamente’ se lhes forem proporcionadas experiências variadas envolvendo noções algébricas, a partir dos ciclos iniciais, de modo informal, em um trabalho articulado com a Aritmética. Assim, os alunos adquirem base para uma aprendizagem de Álgebra mais sólida e rica em significados.

Embora se considere importante que esse trabalho - chamado de ‘pré-álgebra’ - aconteça nas séries iniciais, ele deve ser retomado no terceiro ciclo para que as noções e conceitos algébricos possam ser ampliados e consolidados. Para isso é desejável que o professor proponha situações que permitam identificar e generalizar as propriedades das operações aritméticas, e estabelecer algumas fórmulas, como, por exemplo, a fórmula da área do triângulo: $A= (b \times h)/2$. Nessa dimensão a letra simplesmente substitui um valor numérico.

É interessante também propor situações em que os alunos possam investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas e identificar suas estruturas, construindo a linguagem algébrica para descrevê-los simbolicamente. Esse trabalho favorece a que o aluno construa a ideia de Álgebra como uma linguagem para expressar regularidades.

Os PCNs observam que a ênfase que os professores dão a esse ensino não garante o sucesso dos alunos, a julgar tanto pelas pesquisas em Educação Matemática como pelo desempenho dos alunos nas avaliações que têm ocorrido em muitas escolas. Por exemplo, os itens referentes à Álgebra raramente atingem, em muitas regiões do país, o índice de 40% de acerto nos resultados do SAEB[45].

[45] O Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), conforme estabelece a Portaria n.º 931, de 21 de março de 2005, é composto por dois processos: a Avaliação Nacional da Educação Básica (Aneb) e a Avaliação Nacional do Rendimento Escolar-Anresc- fonte:http://www.inep.gov.br/basica/saeb/default.asp

4.12.2 Como os PCNs veem o Ensino-Aprendizagem de Funções no Ensino Médio

Nos PCN do Ensino Médio (Brasil,1999) - parte III, entre uma série de temas ou tópicos em Matemática escolhidos para o Ensino Médio, vemos que o primeiro deles é função. Para o ensino-aprendizagem de função, os PCN recomendam a observância de critérios que visem o desenvolvimento de atitudes e habilidades dos estudantes relacionadas com abstração, raciocínio, resolução de problemas, investigação, análise e compreensão de fatos matemáticos e de interpretação da própria realidade. Para isso os PCN dizem que

> O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência.
> Um primeiro exemplo disso pode ser observado com relação às funções. O ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador que ele possui. Devemos observar que uma parte importante da Trigonometria diz respeito às funções trigonométricas e seus gráficos. As sequências, em especial progressões aritméticas e progressões geométricas, nada mais são que particulares funções. As propriedades de retas e parábolas estudadas em Geometria Analítica são propriedades dos gráficos das funções correspondentes.
> Aspectos do estudo de polinômios e equações algébricas podem ser incluídos no estudo de funções polinomiais, enriquecendo o enfoque algébrico que é feito tradicionalmente.
> Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática.
> Outro tema que exemplifica a relação da aprendizagem de Matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências é a trigonometria, desde que seu estudo esteja ligado às aplicações, evitando-se investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. (BRASIL 1999, p.255-257)

De acordo com a publicação das Orientações Curriculares para o Ensino Médio, Volume 2, de 2006, (p.72), o estudo de *Funções* pode ser iniciado com uma exploração qualitativa das relações entre duas grandezas em diferentes situações: idade e altura; área do círculo e raio; tempo e distância percorrida; tempo e crescimento populacional; tempo e amplitude de movimento de um pêndulo, entre outras.

Essas orientações ainda dizem que é interessante provocar os alunos para que apresentem outras tantas relações funcionais e que, de início, esbocem qualitativamente os gráficos que representam essas relações, registrando os tipos de crescimento e decrescimento (mais ou menos rápido)

O estudo de *Funções* pode prosseguir com os diferentes modelos que devem ser objeto de estudo na escola – modelos linear, quadrático e exponencial. O modelo periódico discute-se segundo essas orientações, no tópico referente às funções trigonométricas. Eles recomendam que ao aluno sejam apresentados diferentes modelos, tomados em diferentes áreas do conhecimento (queda livre de um corpo, movimento uniforme e uniformemente acelerado, crescimento de uma colônia de bactérias, quantidade de medicamento na corrente sanguínea, rendimentos financeiros, consumo doméstico de energia elétrica, etc.). Sempre que possível, os gráficos das funções devem ser traçados a partir de um entendimento global da relação de crescimento/decrescimento entre as variáveis.

4.12.3 Proposta Curricular da Secretaria do Estado de São Paulo de 2008

As propostas curriculares elaboradas, a partir de 1986, no Estado de São Paulo, apresentam a matemática como uma área específica, distinguida tanto das Linguagens quanto das Ciências Naturais. Isso não ocorre nos PCNs, em que a Matemática aparece inserida na área de Ciências. Conforme se lê na Proposta Curricular da Secretaria do Estado de São Paulo, de 2008, existem três razões principais para essa opção. A primeira delas se refere à especificidade da matemática, que pode ficar parcialmente obscurecida, ao incluirmos a Matemática no grupo das linguagens em sentido amplo, ou seja, ao grupo das ciências.

> A Matemática compõe com a Língua Materna um par fundamental, ter complementar: é impossível reduzir um dos sistemas simbólicos ao outro. Se uma língua se aproximar demasiadamente do modo de operar da Matemática, ela ficará empobrecida, e o mesmo pode ocorrer com um texto matemático que assumisse a ambivalência, apropriada apenas à expressão linguística. (p.38)

Em segundo lugar, a incorporação da matemática à área de ciências pode enfatizar em demasia a condição instrumental da Matemática, de linguagem para a expressão cientifica, distorcendo o fato de que ela também constitui um conhecimento específico da educação básica. E em terceiro lugar, o tratamento da Matemática como área específica pode facilitar a incorporação crítica dos inúmeros recursos tecnológicos disponíveis para a representação de dados e o tratamento das informações, na busca da transformação de informação em conhecimento.

Conteúdos de Álgebra, Funções e Proporcionalidade, por série/bimestre do Ensino Fundamental e Médio

De acordo com as Propostas Curriculares da Secretaria do Estado de São Paulo, de 2008, e em acordo com os PCN de 1998, os conteúdos de álgebra, funções e proporcionalidade são estudados:

Nas 6ª, 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental, distribuídos da seguinte forma:

- Proporcionalidade e Álgebra na 6ª série, 3º e 4º bimestres, respectivamente;

- Gráfico na 7ª série, 3º bimestre;

- Álgebra-Funções e Proporcionalidade na Geometria na 8ª série, 2º bimestre e 3º bimestre, respectivamente;

E nas 1ª, 2ª e 3ª séries do Ensino Médio, distribuídos da seguinte forma:

- Álgebra-Funções na 1ª série, no 1º, 2º e 3º bimestre;

- Funções Trigonométricas na 2ª série, 1º bimestre;

- Equações Algébricas e Números Complexos; Estudo das Funções na 3ª série, 2º bimestre e 3º bimestre respectivamente.

4.12.4 O Ensino Aprendizagem de Funções nos "Middle Grades"[46], segundo o NCTM[47]

Pesquisando os *Standards 2000* verificamos que "os estudantes dos "middle grades", (equivalente ao nosso Ensino Fundamental de 5ª a 8ª séries) deveriam aprender álgebra tanto como um conjunto de conceitos e competências ligados à representação de relações quantitativas quanto como um tipo de pensamento matemático para a formalização de padrões, funções, e generalizações. Nas séries intermediárias, os estudantes deveriam trabalhar mais frequentemente com símbolos algébricos do que nas séries mais baixas.

"É essencial que eles se tornem aptos para relacionar expressões simbólicas contendo variáveis com representações verbais, em tabelas, e gráficos, de relações numéricas e quantitativas."

E, além disso, os Standards dizem que os "estudantes deveriam desenvolver uma compreensão inicial de vários significados e diferentes usos de variáveis, através da representação de quantidades em uma variedade de situações problema. Eles deveriam conectar suas experiências com funções lineares à sua compreensão em desenvolvimento de proporcionalidade, e eles deveriam aprender a distinguir relações lineares de não lineares.

---

[46] Equivalente ao nosso Ensino Fundamental II
[47] National Council of Teachers of Mathematics, USA - Conselho Nacional de Professores de Matemática.

Nos Middle Grades os estudantes também deveriam aprender a reconhecer e gerar expressões equivalentes, resolver equações lineares, e usar fórmulas simples. Sempre que possível, o ensino e a aprendizagem de álgebra poderia e deveria estar integrado com outros tópicos do currículo".

De acordo com os Standards (2000, p.222), nos Middle Grades os estudantes deveriam ser capazes de:

- Compreender padrões, relações e funções;
  - ✓ representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos;
  - ✓ usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas; e
  - ✓ analisar mudança em vários contextos.

- Representar e analisar situações matemáticas e estruturas usando símbolos algébricos;
  - ✓ desenvolver um entendimento inicial conceitual dos diferentes usos de variáveis;
  - ✓ explorar as relações entre expressões simbólicas e gráficos de linhas, com especial atenção para o significado de interceptos e declividade;
  - ✓ usar álgebra simbólica para representar situações e resolver problemas, principalmente aqueles que envolvem relações lineares; e
  - ✓ reconhecer e gerar formas equivalentes de simples expressões algébricas e resolver equações lineares.

- Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;

- ✓ modelar e resolver problemas contextualizados com várias representações, como gráficos, tabelas e equações.

- Analisar a mudança em vários contextos;
  - ✓ usar gráficos para analisar a natureza das mudanças nas quantidades em relações lineares.

4.12.5 Como o NCTM vê o Ensino-Aprendizagem de Funções na "High School"[48]

Na publicação *Standards 2000* lemos que os estudantes deveriam aprender álgebra tanto como um conjunto de conceitos e competências ligados à representação de relações quantitativas quanto como um tipo de pensamento matemático para a formalização de padrões, funções, e generalizações. Nas séries intermediárias, os estudantes deveriam trabalhar mais frequentemente com símbolos algébricos do que nas séries mais baixas. É essencial que eles se tornem aptos para relacionar expressões simbólicas contendo variáveis com representações verbais, em tabelas, em gráficos, de relações numéricas e quantitativas. Dizem eles que os estudantes deveriam desenvolver uma compreensão inicial de vários significados diferentes e usos de variáveis através da representação de quantidades em uma variedade de situações-problema. Eles deveriam conectar suas experiências com funções lineares à sua compreensão em desenvolvimento de proporcionalidade, e eles deveriam aprender a distinguir relações lineares de não lineares. Nas séries intermediárias, os estudantes também deveriam aprender a reconhecer e gerar expressões equivalentes, resolver equações lineares, e usar fórmulas simples. Sempre que possível, o ensino e a

---

[48] High School-grades 9-12, equivalente ao nosso Ensino Médio

aprendizagem de álgebra pode e deveria ser integrado com outros tópicos do currículo.

Na visão apresentada nesses Standards, a respeito da matemática escolar, estudantes da High School aprenderão que padrões podem ser representados e analisados matematicamente. Por volta do nono grau, eles terão representado funções por meio de tabelas, gráficos, regras verbais, e terão trabalhado com estas representações e as interpretado. Eles terão explorado, também, algumas relações não lineares. E ainda, observam que, na High School, os estudantes deveriam ter oportunidade de desenvolver essas experiências prévias, tanto aprofundando sua compreensão de relações e funções quanto expandindo seu repertório de funções familiares. Os estudantes deveriam saber utilizar ferramentas tecnológicas para representar e estudar o comportamento de funções polinomiais, exponenciais, racionais e periódicas, entre outras. Eles deveriam aprender a combinar funções, expressá-las em formas equivalentes, fazer composições e encontrar inversas quando possível. E, ao fazer isso, eles viriam a compreender o conceito de uma classe de funções e aprenderiam a reconhecer as características de diversas classes.

Nos *Standards* 2000 também lemos que a álgebra na “High School” deveria propiciar aos alunos algum discernimento a respeito da abstração matemática e de suas estruturas. Nos anos 9 - 12, os estudantes deveriam desenvolver uma compreensão das propriedades algébricas que governam a manipulação de símbolos em expressões, equações e inequações. Eles deveriam se tornar fluentes nestas manipulações por meios apropriados – mentalmente, manualmente, ou pelo uso de máquina - para resolver equações e desigualdades, para gerar formas equivalentes de expressões ou funções, ou para provar resultados gerais.

Os Standards para o ensino de álgebra, segundo a publicação *Principles and Standards for School Mathematics*, NCTM (2000), dizem que todos os estudantes dos anos 9-12 deveriam respeitar determinados pontos:

- Compreender padrões, relações e funções:

> generalizar o uso de padrões explicitamente definidos e funções definidas recursivamente;
> compreender relações e funções, e selecionar, converter com flexibilidade, e utilizar suas diferentes representações;
> analisar as funções de uma variável, investigando as taxas de variação, interceptos, zeros, assíntotas, e comportamento local e global;
> combinar, compondo e invertendo funções comumente usadas, utilizando a tecnologia para executar tais operações em expressões simbólicas mais complicadas;
> compreender e comparar as propriedades das classes de funções, incluindo funções exponenciais, polinomiais, racionais, logarítmicas e periódicas;
> interpretar representações de funções de duas variáveis
> (NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, 2000, p. 296).

- Representar e analisar situações matemáticas e estruturas usando símbolos algébricos:

> compreender o significado de formas equivalentes das expressões, equações, desigualdades e relações;
> escrever formas equivalentes de equações, desigualdades e sistemas de equações e resolvê-los com fluência mentalmente ou com papel e lápis em casos simples e usar a tecnologia em todos os casos;
> usar álgebra simbólica para representar e explicar relações matemáticas;
> usar uma variedade de representações simbólicas, incluindo as equações recursivas e paramétricas, para as funções e relações;
> julgar o significado, utilidade e razoabilidade dos resultados da manipulação de símbolos, incluindo os realizados pela tecnologia.
> (NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, 2000, p. 296).

- Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas:

> essencial identificar as relações quantitativas em uma situação e determinar a classe ou classes de funções que podem modelar as relações;
> usar expressões simbólicas, incluindo as formas iterativa e recursiva, para representar as relações decorrentes de vários contextos;

> tirar conclusões razoáveis sobre uma situação que está sendo modelado.
> (NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS 2000, p. 296).

- Analisar a mudança em vários contextos:

> Aproximar e interpretar taxas de variação a partir de dados gráficos e numéricos.(NCTM, 2009, p.296).

4.13 Pontos Focais Curriculares para o Pré e Ensino Fundamental II

Em 2006, com a publicação dos *Curriculum Focal Points for Prekindergarten through Grade 8-Mathematics*, o NCTM apresentou recomendações e orientação sobre como enfocar o conteúdo matemático sugerido nos *Standards* 2000, para cada série, fornecendo descrições dos conceitos e habilidades matemáticas mais significativos em cada série.

Conforme colocado pelo próprio documento, os Pontos Focais do Currículares são tópicos importantes de matemática para cada nível, de preK-8 e respondem à questão: O que são Pontos Focais Curriculares?

> Essas áreas de ênfase instrucional podem servir como estruturas organizadas para o planejamento do currículo e do ensino ao longo de cada nível. Os tópicos são fundamentais para a matemática: eles propagam conhecimentos e habilidades que são essenciais aos cidadãos educados e fornecem as bases para posterior aprendizado de matemática. Por que os pontos focais são estruturas básicas que colocam uma fundamentação conceitual, eles podem servir para organizar conteúdo, conectar e trazer coerência para múltiplos conceitos e processos ensinados através dos diferentes níveis. Eles são elementos indispensáveis no desenvolvimento da resolução de problemas, no raciocínio e nas habilidades de pensamento crítico que são importantes para toda a aprendizagem matemática. (NATIONAL COUNCIL OF MATHEMATICS TEACHERS, 2006 p.5).

Na tabela a seguir apresentamos algumas das expectativas de conteúdo, por padrão de conteúdo e série, conforme sugerido no *Curriculum Focal Points* (2006).

Tabela 3: Pontos Focais Curriculares-USA, correspondentes ao Ensino Fundamental

Álgebra	Grades 3, 4 e 5	Tópicos de álgebra: modelar situações- problema com objetos e usar representações tais como gráficos, tabelas e equações para obter conclusões; Tópicos de medidas: efetuar conversões de medidas dentro de um sistema de medidas.
Números e Operações	Grades 6 e 7	Compreender o uso de razões e proporções; desenvolver, analisar e explicar métodos para resolver problemas que envolvem proporções, tais como mudanças de escalas e encontrar razões equivalentes.
Álgebra	Grades 6 e 7	Representar, analisar e generalizar uma variedade de modelos utilizando tabelas, palavras, gráficos e, quando possível regras simbólicas; desenvolver uma primeira compreensão conceitual de diferentes usos de variáveis; usar símbolos algébricos para representar situações e resolver problemas, especialmente aqueles que envolvem relações lineares; modelar e resolver problemas contextualizados usando várias representações, tais como gráficos, tabelas, e equações.
Medidas	Grades 6 e 7	Compreender relações entre unidades e converter de uma para outra dentro de um mesmo sistema; resolver problemas envolvendo fatores de escala, usando razão e proporção; resolver problemas simples envolvendo taxas e medidas derivadas para atributos tais como velocidade e densidade.

Medidas	Grade 7	Desenvolver e usar fórmulas para determinar o comprimento da circunferência, área de círculos de triângulos, paralelogramos, de trapézios e desenvolver estratégias para encontrar áreas de figuras mais complexas.
Números e Operações	Grade 8	Desenvolver, analisar e explicar métodos para resolver problemas envolvendo proporções tais como escalas e encontrar razões equivalentes.
Álgebra	8º grau	Representar, analisar e generalizar uma variedade de modelos utilizando tabelas, palavras, gráficos, e quando possível regras simbólicas; identificar funções como lineares ou não lineares e contrastar suas propriedades por meio de tabelas, gráficos, ou equações; desenvolver uma primeira compreensão conceitual dos diferentes usos de variáveis; explorar relações entre expressões simbólicas e gráfico de retas, dando atenção particular ao significados de interceptos e de inclinação; usar álgebra simbólica para representar situações e resolver problemas, especialmente aqueles que envolvem relações lineares; reconhecer e gerar formas equivalentes para expressões algébricas simples e resolver equações lineares; modelar e resolver problemas contextualizados, utilizando várias representações, tais como gráficos, tabelas e equações; usar gráficos para analisar a natureza de mudanças em quantidade em relações lineares.
Medidas	8º grau	Resolver problemas simples envolvendo taxas e medidas derivadas para atributos tais como velocidade e densidade.

4.14 Pontos Focais Curriculares para High School: Raciocinar e Dar Sentido

> Um programa de matemática da High School baseado sobre o raciocínio e o compreender preparará os alunos para a cidadania, para a força de trabalho e para estudos posteriores.
> (NATIONAL COUNCIL OF MATHEMATICS TEACHERS 2009, p.3)

Também em 2006, uma comissão do NCTM recomendou o desenvolvimento de uma estrutura baseada nos *Standards* 2000, que pudesse guiar o trabalho futuro com respeito à matemática do ensino médio. Como um resultado disso, adveio a estrutura delineada na publicação *Focus in High School Mathematics: Reasoning and Sense Making* (NCTM, 2009), a qual recomenda que todos os programas de matemática do ensino médio concentrem sua atenção no *raciocínio* e no *dar sentido.*

Em linhas gerais, o **raciocínio** pode ser pensado como o processo pelo qual obtemos conclusões a partir de evidências ou de hipóteses assumidas. Embora raciocinar seja uma parte importante de todas as disciplinas, ele tem um papel especial e fundamental em matemática. Raciocinar em matemática é frequentemente identificado com o raciocínio *formal*, ou *prova*, em que conclusões são logicamente deduzidas de hipóteses e definições. No entanto, o raciocínio matemático pode assumir muitas formas, desde explicações e justificativas informais até o processo dedutivo formal, bem como a forma de uma argumentação indutiva, em que se procura obter conclusões gerais a partir de um número limitado de observações ou experiências. O ato de raciocinar frequentemente começa com explorações, conjecturas em vários níveis, falsas premissas, e explicações parciais, antes de levar a algum resultado. Conforme os estudantes desenvolvem, ao longo da High School, um repertório de métodos de raciocínio e prova cada vez mais sofisticados, os “padrões para a aceitação de explicações devem se tornar mais rigorosos.” (NCTM, 2000, p.342 apud NCTM, 2009).

Define-se **dar sentido** como o desenvolver da compreensão de uma situação, de um contexto, ou de um conceito, ao conectá-lo a um conhecimento existente. Quando os estudantes conectam um aprendizado novo com algo já conhecido, eles provavelmente compreenderão e reterão melhor esse novo aprendizado (HIEBERT[49], 2003 apud NCTM, 2009), do que quando o novo é simplesmente apresentado como uma lista de procedimentos isolados. Sem dar sentido, o "aprendizado de novos tópicos se torna mais difícil, pois não haverá nenhuma rede de conceitos e habilidades aprendidos previamente, com os quais o novo tópico possa se vincular", segundo dizem Kilpatrick, Swafford, e Findell (2001, p. 123) apud NCTM (2009).

Na prática, raciocinar e dar sentido estão interligados por meio de um contínuo, desde observações informais até deduções formais, como ilustrado na figura abaixo, a despeito de uma percepção comum que identifica dar sentido com a extremidade informal do contínuo, e o raciocínio, especialmente as demonstrações, com a extremidade mais formal.

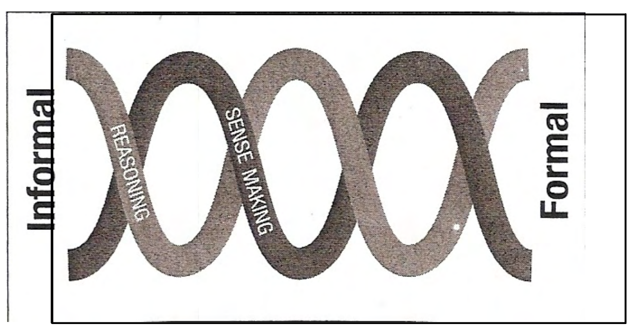


Figura 7: A relação entre raciocinar e dar sentido[50]

Fonte: NCTM 2009, p. 4

Por um lado, o raciocínio formal pode se basear no dar sentido, na medida em que, no dar sentido identificamos elementos comuns em um certo

[49] Hiebert, James. What research says about the NCTM Standars. In: *A research companion to "principles and standards for school mathematics"*. Edited by Jeremy Kilpatrick, W. Gary Martin, and Deborah Schifter, p.5-23. Reston, Va.: NCTM, 2003.

[50] No original, The relationship of reasoning and sense making

número de observações e percebemos como esses elementos comuns estão conectados com situações previamente vivenciadas. Por outro lado, "uma boa prova é aquela que também nos ajuda a compreender o significado do que está sendo provado: a ver não somente que algo é verdadeiro mas, também, porque é verdadeiro" como disseram Yackel[51] e Hanna (2003, p. 228) apud NCTM (2009).

O raciocínio matemático e o dar sentido são tanto resultados importantes do ensino de matemática quanto meios importantes pelos quais os estudantes aprendem matemática.

Focus in High School Mathematics enfatiza que o raciocínio e o dar sentido são os fundamentos dos padrões dos processos da matemática descritos no *NCTM Process Standards*[52]. Os processos da matemática – Resolução de Problemas, Raciocínio e Prova, Conexões, Comunicação, e Representação - são todos manifestações do ato de produzir significado em matemática, e do raciocínio, conforme as definições acima. Resolução de problemas e prova são impossíveis sem raciocínio, e ambos são meios pelos quais os estudantes desenvolvem o raciocínio matemático e constroem significado de ideias matemáticas. As comunicações, conexões e representações escolhidas por um estudante devem auxiliar o raciocínio e o dar sentido, e o raciocínio precisa ser empregado no momento em que são tomadas aquelas escolhas.

---

[51] Yackel, Erna, and Gila Hanna. Reasoning and proof. In: *A research companion to principles and standards for school mathematics.* Edited by Jeremy Kilpatrick, W. Gary Martin, and Deborah shifter, p.227-36. Reston, Va: NCTM, 2003

[52] No original NCTM Process Standards 2000a, que consta no livro Principles and Standards for School Mathematics. Reston, Va.:NCTM, 200a.

4.14.1 Raciocinar e Dar Sentido ao longo do Currículo

Uma ênfase no raciocínio e no dar sentido pode contribuir para que os estudantes organizem seus conhecimentos de tal modo que se intensifique o desenvolvimento do significado de número, da fluência algébrica, das relações funcionais, do raciocínio geométrico e do pensamento estatístico. Cada um destes tópicos pode ser inserido em um grande tema referente a uma área específica do currículo da High School:

> Raciocinando com Número e Medida
> Raciocinando com Símbolos Algébricos
> Raciocinando com Funções
> Raciocinando com Geometria
> Raciocinando com Estatística e Probabilidade.
> (NCTM, 2009, p.18)

No livro *Focus in High School Mathematics: reasoning and sense making* há capítulos que ilustram de que forma o currículo de matemática da High School pode ser focado nesses grandes temas e promover o raciocínio e o dar sentido dentro das áreas específicas correspondentes. Apresentaremos a seguir apenas considerações referentes ao tema "Raciocinando com funções".

4.14.2 Raciocinando com Funções

De acordo com Yerushalmy[53] e Shternberg (2001) apud National Council of Teachers of Mathematics (2009), as funções são uma das ferramentas matemáticas mais importantes que os estudantes têm à disposição para auxiliá-los a dar sentido ao mundo que os rodeia e para prepará-los para estudos posteriores

---

[53] Yerushalmy, Michal, and Beba Shternberg. Charting a visual course to the concept of function. In*: The roles of representation in school mathematics,2001 Yearbook of the NCTM, edited by Albert A. Cuoco, p. 251-67. Reston, Va: NCTM, 2001.*

em matemática. As funções aparecem na maioria das áreas da matemática e fornecem uma forma consistente de fazer conexões entre dois ou mais tópicos.

Elementos-chave do raciocínar e do dar sentido com funções incluem o que segue:

> *Utilizar representações múltiplas de funções*. Representar funções de várias formas, incluindo representação por tabelas, gráfico, simbólica (explcita e recorrente), visual, e oral; decidir sobre quais representações são mais úteis em circunstâncias de resolução de problemas; movimentar flexivelmete entre essas representações.
> *Modelar utilizando famílias de funções.* Trabalhar para desenvolver um modelo matemático razoável para uma determinada situação contextual aplicando o conhecimento dos comportamentos característicos de diferentes famílias de funções.
> *Analisar os efeitos de parâmetros*. Utilizar a representação geral de uma função em uma dada família (por exemplo, a forma do vértice de uma função quadrática, $f(x) = a(x-h)^2 + k$ para analisar os efeitos provocados pela variação dos coeficientes ou de outros parâmetros; converter funções de uma forma para outra (por exemplo, converter uma função quadrática de sua forma padrão para sua forma fatorada), de acordo com o que for requerido pela situação problema (por exemplo, encontrar o vértice de uma função quadrática ou encontrar suas raízes).
> (NATIONAL COUNCIL OF MATHEMATICS TEACHERS 2009, p.41)

Conforme observado no *Focus in High School Mathematics: reasoning and sense making,* em todo estágio do desenvolvimento matemático de um estudante da High School surgem oportunidades para o raciocínio com funções e para o uso de funções na modelagem de situações do mundo real. Segundo esse documento, o desenvolvimento do raciocínio com funções é um dos alicerces sobre o qual se apoia uma compreensão consistente da matemática.

Capítulo 5

Resolução de Problemas

O tema Resolução de Problemas tem sido intensamente discutido na pesquisa em ensino e aprendizagem de matemática, e um inventário detalhado do que já se fez a respeito desse tema, incluindo trabalhos mais recentes, publicados nos últimos anos desta década, mereceria, por si só, o espaço de toda uma monografia. Sendo assim, decidimos apresentar neste capítulo uma pequena seleção de trabalhos que tanto fornecem um panorama histórico da Resolução de Problemas, quanto indicam novas tendências nessa área.

5.1 Perspectivas históricas da Resolução de Problemas no currículo de matemática

Vamos apresentar, nesta seção e subseções, quase que em sua íntegra, o artigo *Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum*, de George M. A. Stanic e Jeremy Kilpatrick, em tradução feita por nós. Esse artigo foi publicado na monografia *The Teaching and Assessing of Mathematics Problem Solving*, resultante de um encontro realizado em San Diego, Califórnia, USA, de 9 a 12 de Janeiro de 1987, no Projeto Research Agenda for Mathematics Education. Stanic e Kilpatrick traçam, nesse artigo, a história da resolução de problemas no currículo da matemática, descrevendo o papel da resolução de problemas desde as primeiras civilizações até a parte final do século XX.

Segundo Stanic e Kilpatrick (1989), embora problemas tenham ocupado um lugar central nos currículos desde a Antiguidade, o mesmo não ocorreu com a Resolução de Problemas, e só recentemente apareceram educadores matemáticos aceitando a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas merece atenção especial. E ainda assim, “esse foco sobre resolução de problemas veio acompanhado de discordância entre os educadores matemáticos. Segundo os autores, o termo *Resolução de Problemas* transformou-se num slogan englobando diferentes visões do que é a educação, a escolaridade, a matemática, e das razões porque devemos ensinar matemática em geral e resolução de problemas em particular.

Para justificar essa falta de concordância entre os educadores matemáticos a respeito da resolução de problemas, Stanic e Kilpatrick (1989), mencionam a *Agenda para a Ação* do NCTM (1980), que então recomendava a “resolução de problemas como o foco da matemática escolar durante os anos oitenta”. Embora a resolução de problemas apareça caracterizada nesse documento como uma das dez áreas de habilidades básicas, e seja assumido que há uma relação direta entre a resolução de problemas nas aulas de matemática e a resolução de problemas encontrados em nossa vida, Stanick e Kilpatrick observam que a Agenda não esclarece de modo adequado o que seria a resolução de problemas, por quê deveríamos ensiná-la, ou como a posição adotada se insere em um contexto histórico.

Conforme veremos adiante, Stanic e Kilpatrick (1989) identificam vários temas que historicamente caracterizaram o papel da resolução de problemas nos currículos escolares. Segundo os autores, esses temas se entrelaçaram e se mantiveram na maior parte sem exame. O que os educadores matemáticos dizem uns aos outros, hoje, acerca da resolução de problemas, está ligado a várias tradições diferentes nos campos da psicologia, do currículo, e do ensino da matemática.

5.1.1 Problemas no currículo

Segundo Stanick e Kilpatrick, problemas nos currículos remontam, pelo menos, aos antigos egípcios, chineses e gregos. Por exemplo, o Papiro de Ahmes, copiado de um documento mais antigo pelo escriba Ahmes, por volta de 1650 A. C., é um manuscrito matemático egípcio que consiste numa coleção de problemas. Num dos problemas, é pedido ao aluno que efetue a soma de cinco termos de uma progressão geométrica, onde o primeiro termo e a razão são ambos iguais a 7 (CHASE[54], 1979, p. 59, 136-137, apud STANIK; KILPATRICK, 1989). No próprio papiro, só é dada uma forma abreviada do problema, com dois métodos de resolução e a resposta. O fato de o problema se referir a casas, gatos, ratos, etc., a serem adicionados, sugere que este era um problema recreativo ou um puzzle. (fig.8)

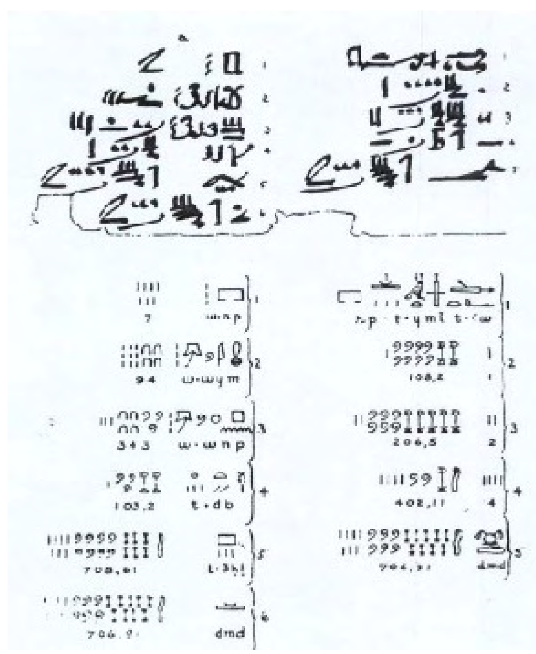


Figura 8

Um problema de progressão geométrica, no Papiro de Ahmes. (Chase, 1979, p.17)

[54] Chase, A. B. (1979). *The Rhind mathematical papyrus.* Reston, VA: NCTM.

Um segundo exemplo vem de *Nine sections*, um documento chinês, datado de cerca de 1000 A. C.:

> De duas ervas daninhas de água, uma cresce três “pés” e a outra um “pé”, no primeiro dia. O crescimento da primeira é, todos os dias, metade do dia anterior, enquanto que a outra cresce duas vezes o que cresceu no dia anterior. Em quantos dias terão as duas atingido a mesma altura? (SANFORD[55], 1927, p. 7, apud STANIK; KILPATRICK, 1989).

No grego antigo, temos uma primeira versão do *problema da cisterna*:

> Eu sou um leão de bronze; minhas goteiras são os meus dois olhos, a minha boca e a parte lisa da minha pata direita. Meu olho direito enche a cisterna em dois dias, meu olho esquerdo em três, e o meu pé em quatro. Minha boca é capaz de enchê-lo em seis horas. Diga-me quanto tempo, os quatro juntos, levarão para enchê-lo. (SANFORD, 1927, p. 69, apud STANIK; KILPATRICK, 1989).

Stanick e Kilpatrick observam que alguns métodos particulares de resolução de problemas têm também uma longa história. Por exemplo, uma técnica muito semelhante à *Regra da Falsa Posição* já aparece no Papiro de Ahmes. E Vera Sanford, em sua história de problemas de álgebra, 1927, dá um exemplo do uso dessa regra no seguinte problema, tirado de um trabalho do séc. XV, de autoria de Phillip Calandri:

A cabeça de um peixe pesa 1/3 de todo o peixe, a sua cauda pesa ¼ dele, e o seu corpo pesa 30 onças. Qual é o peso de todo o peixe?

Sanford explicou que a Regra da Falsa Posição foi usada para resolver o problema do seguinte modo:

Se todo o peixe pesa l2 onças, então a cabeça pesa 4, a cauda 3 e o corpo 5. Evidentemente, o peso do peixe é o mesmo múltiplo de 12 que 30 é de 5, e então, o peso do peixe é 72 onças.

---

[55] Sanford, V. (1927). *The history and significance of certain standard problems in algebra*. New York: Columbia University, Teachers College, Bureau of Publications.

Encontram-se problemas semelhantes, em livros de matemática dos séc. XIX e XX. Segundo Stanick e Kilpatrick, o ponto importante a ser sublinhado, acerca desses exemplos, é que neles transparece uma visão muito estreita da aprendizagem da resolução de problemas. Até tempos relativamente recentes, ensinar resolução de problemas significava apresentar problemas e, talvez, incluir um exemplo de uma técnica de solução específica. Uma página do texto intitulado Uma Aritmética Mental, de William J. Milne, de 1897, reflete esta visão do ensino da resolução de problemas. O texto intitulado New School Algebra, de G. A. Wentworth, de 1900, é semelhante.

Clifford B. Upton[56] apud Stanic e Kilpatrick, em *Social Utility Arithmetics* (1939), tentou fazer com que as crianças pensassem acerca do processo de resolver um problema apresentando problemas sem números, mas não chegou a discutir o que é que se pode aprender com tais problemas. Mesmo textos escritos para professores apresentavam visões limitadas de resolução de problemas. Um bom exemplo é *The Principles of Arithmetic* de H. O. R. Siefert[57] , publicado em 1902, e também *Normal Elementary Álgebra* de Edward Brooks[58] , publicado em 1871. Brooks pelo menos falava acerca do "método de resolver um problema".

Há exemplos de discussões mais detalhadas sobre como resolver problemas em *Plane and Solid Geometry* de Wentworth, publicado em 1899. Ainda, *Strayer-Upton Arithmetics - Higher Grades*, publicado em 1928, traz algum conselho sobre "como resolver problemas difíceis".

A atenção de hoje ao desenvolvimento das habilidades em resolução de problemas dos alunos pode ser vista na figura abaixo, que mostra em uma página

[56] Upton, C. B. (1939).*Social utility arithmetics – First book,* New York: American Book.
[57] Siefert, H.O.R. (1902). *Principles of arithmetic: Embaracing common fractions, decimal fractions, percentage, proportion, involution, evolution and mesuration. A manual for teachers and normal students.* Boston: Heath.
[58] Brooks, E. (1871). *The normal elementary algebra: Contaninig the first principles of science, developed with conciseness and simplicity, for common schools, academies, seminaries and normal schools.* Philadelphia: Sower, Potts.

do livro do 5º ano da série Addison-Wesley Mathematics (Eicholz[59], O'Daffer, Fleenor, Charles, Young, & Barnett, 1987).

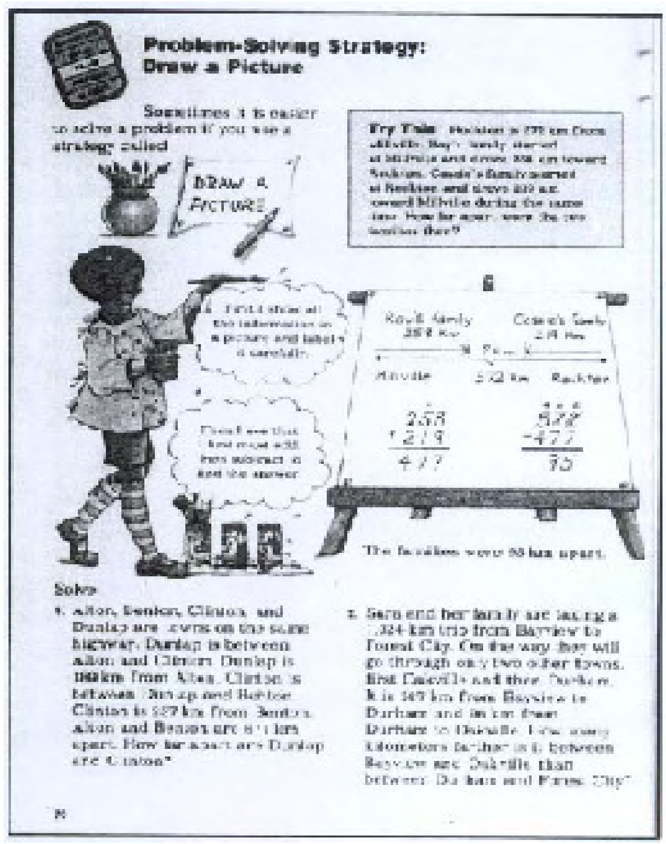


Figura 9

5.1.2 A mudança de papel na resolução de problemas

Stanic e Kilpatrick (1989) observam que no último século, principalmente, discussões sobre o ensino de resolução de problemas passaram do apoio à visão de que os estudantes deveriam simplesmente ser introduzidos a problemas, ou regras para a resolução de problemas particulares, para a visão de que era preciso desenvolver abordagens mais gerais para a resolução de problemas. No entanto, segundo esses autores, os educadores matemáticos não

[59] Eicholz, R.E; O`Daffer, P.G; Fleenor,C.R.; Charles, R.I.;Young, S.; & Barnett, C. S. (1987). *Addison-Wesley mathematics* (Book 5). Menlo Park, CA: Addison-Wesley.

examinaram inteiramente a questão: Porque deveríamos ensinar resolução de problemas?

> O papel da resolução de problemas na matemática escolar é o resultado de forças conflitantes ligadas a ideias antigas e persistentes acerca das vantagens do estudo da matemática, e a uma variedade de eventos que se influenciaram mutuamente, ocorridos no princípio do séc. XX. (STANIC; KILPATRICK, 1989, p.4)

Os autores dizem que a principal razão para os educadores matemáticos enfatizarem o ensino da resolução de problemas é que "até este século, era assumido que o estudo da matemática – de qualquer matemática, não apenas daquela que agora consideraríamos problemas – melhoraria, de uma maneira geral, o pensamento das pessoas. Platão dizia que "aqueles que são por natureza, bons em cálculo, são, pode-se dizer, naturalmente argutos em todos outros estudos, e [...] aqueles que são lentos nisso, se são educados e exercitados nesse estudo, melhoram e tornam-se mais competentes do que eram" (GRUBE[60], 1974, p. 18, apud STANIC; KILPATRICK, 1989).

Por isso, segundo Stanic e Kilpatrick (1989), desde pelo menos Platão, temos a ideia de que, estudando matemática, melhoramos nossa capacidade de pensar, raciocinar e de resolver problemas com que nos confrontaremos no mundo real. Num certo sentido, a resolução de problemas nos currículos foi simplesmente um meio de conseguir que os alunos estudassem matemática. Os problemas eram um elemento do currículo de matemática que contribuiu, tal como todos os outros elementos, para o desenvolvimento do poder de raciocínio.

Stanic e Kilpatrick observam que a Teoria da Disciplina Mental, durante o século XIX, forneceu a estrutura para a expressão das ideias acima. Segundo eles, a Disciplina Mental foi resultado de uma fusão nem sempre pacífica entre a psicologia das faculdades e a tradição das artes liberais. Como uma teoria de

[60] Grube, G.M.A. (Trans.) (1974). *Plato´s Republic*. Indianapolis: Hackett.

currículo, a Disciplina Mental se baseava na ideia de que era um trabalho da escola ajudar os estudantes a desenvolverem essas faculdades, e que as artes liberais tradicionais – ou seja, a matemática e as línguas clássicas – eram os melhores veículos para o desenvolvimento dessas faculdades.

Embora a tradição refletida na Teoria da Disciplina Mental continue a resistir, acontecimentos que ocorreram perto da virada do século XX acarretaram mudanças significativas na forma como era visto o estudo da matemática. A este respeito, os autores comentam que o trabalho de Edward L. Thorndike é geralmente reconhecido como uma contestação às noções básicas da Teoria da Disciplina Mental. A matemática, elemento crucial do currículo baseado na Teoria da Disciplina Mental, tornou-se alvo de críticas diretas. "Os críticos concordavam que a matemática era muito importante, mas argumentavam que muitas pessoas não precisavam saber mais do que a aritmética do 6º. Ano de escolaridade (STANIC, apud STANIC; KILPATRICK, 1989)."

No início do século XX pessoas como David Eugene Smith, no Teachers College, Columbia University, e Jacob William Albert Young, na Universidade de Chicago, estavam firmando a educação matemática como um campo de estudo profissional legítimo, nas universidades e em outras escolas superiores do país.

Stanic e Kilpatrick observam que Smith, Young, e a maioria de nossos outros antecessores profissionais viam a matemática, incluindo a matemática de nível mais avançado, como apropriada para todos os estudantes, e como um veículo essencial para desenvolver a capacidade de raciocínio dos estudantes.

Os autores observam que, ironicamente, conforme crescia o número de educadores matemáticos profissionais, a posição da matemática no currículo escolar passou a sofrer ataques. Os educadores matemáticos tentaram se ajustar aos tempos e ideias em mudança, alguns até mesmo abraçando as ideias dos críticos, mas o conflito resultante das tradições em disputa levou a uma crise na educação matemática nos anos 1930. Uma crise que conforme disse Stanic[61] (1983/1984, 1986), apud Stanick e Kilpatric (1989), ainda não foi resolvida.

[61] Stanik, G.M.A. (1984). Why teach mathematics? A historical study of the justification question (Doctoral dissertation, University of Wisconsin-Madison, 1983). *Dissertation Abstracts International*, 44, 2347A.

Stanic e Kilpatrick apontam mais uma ironia ao observar que, em parte por causa dos ataques ao lugar da matemática no currículo, muitos de nossos antecessores, embora advogando os benefícios da matemática para o desenvolvimento do pensamento humano, não se sentiam à vontade com a ideia de dar aos problemas um papel demasiado extenso no currículo.

Matemáticos tais como Felix Klein na Alemanha, John Perry na Inglaterra e Eliakim Hastings Moore nos Estados Unidos, discutiam a relação entre matemática pura e aplicada no currículo escolar, advogando, em essência, um maior papel para as aplicações. Mas muitos educadores matemáticos, particularmente Smith, não queriam dar um papel muito grande às aplicações, porque os críticos do currículo escolar que não eram matemáticos também pediam que a matemática escolar se tornasse mais relevante para a vida real. Smith tinha receio de desistir do que ele via como o papel e conteúdo essencial da matemática em nome das aplicações, e receava dar demasiado apoio à causa dos críticos.

Klein, Perry e Moore não estavam sugerindo que as aplicações deveriam predominar no currículo. Moore[62] (1903/1926) pedia a unificação da matemática pura e aplicada, e Klein até mesmo nos preveniu acerca de se superestimar os benefícios das aplicações dizendo:

> É possível que através do simples amontoado de aplicações interessantes, o verdadeiro treinamento lógico possa ser mutilado, e, sob nenhuma circunstância, isso pode acontecer. Caso contrário, a essência verdadeira do todo é perdida. Portanto, desejamos enfaticamente um revigoramento do ensino em matemática por meio de suas aplicações, mas desejamos também que o pêndulo que, em décadas anteriores talvez tenha se inclinado demais na direção abstrata, não se incline agora para o outro extremo. Desejamos permanecer exatamente no meio termo. (KLEIN[63], apud STANICK; KILPATRICK, 1989, p. 12, apud Young, J.W.A. (1903))

Stanic, G.M.A. (1986). The growing crisis in mathematics education in the early twentieth century. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17, 190-205.

[62] Moore, E.H. (1926). On the foundations of mathematics. In R. Schorling (Ed.), *A general survey of progress in the last twenty-five years* (First Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, p. 32-57). New York: Columbia University, Teachers College, Bureau of Publications. (Original work published 1903).

[63] Klein citado em Stanick e Kilpatrick que por sua vez foi citado por Young, J.W.A. (1903), *What is the laboratory method?* Mathematical Supplement of School Science, 1, 50-56.

Smith[64], no entanto, não estava convencido disso. Em um artigo de 1909, ele se mostrou preocupado com a "tendência, em todo o país, de tornar a aritmética, assim como outros temas, mais interessante para as crianças", argumentando que "deveríamos fazer tudo o que fosse possível para tornar a aritmética interessante, ou mesmo atrativa, para as crianças, mas que não deveríamos esperar alcançar esse resultado oferecendo um substituto adoentado para o assunto vigoroso que venha por herança até nós."

Segundo Stanic e Kilpatrick, Smith simplesmente não queria desistir da ideia de que qualquer trabalho em matemática poderia contribuir para a habilidade de uma pessoa em "atacar os problemas do dia a dia". Para Smith, calcular um máximo divisor comum era tão valioso quanto resolver um "problema aplicado".

Acontecimentos circundando o declínio da Teoria da Disciplina Mental podem ter preparado o terreno para que os educadores matemáticos começassem a dar uma ênfase mais específica ao desenvolvimento da capacidade de "resolver problemas", mas o confronto das ideias básicas acerca da inteligência humana, da educação, e do currículo escolar, ainda hoje permeia as discussões sobre a resolução de problemas.

Stanic e Kilpatrick observam que se olharmos para a resolução de problemas nos currículos, desde o antigo Egito até o presente, diferentes temas são revelados - mais especificamente, três temas gerais caracterizam o papel da resolução de problemas nos currículos de matemática das escolas: *resolução de problemas como contexto, resolução de problemas como habilidade* e *resolução de problemas como arte.*

[64] Smith, D.E. (1909). *The teaching of arithmetic*. New York: Columbia University, Teachers College.

Resolução de Problemas como Contexto

A resolução de problemas como contexto tem pelo menos cinco subtemas, todos eles baseados na ideia de que os problemas e a resolução de problemas são meios para atingir fins importantes.

- *Resolução de problemas como justificação*. Historicamente, a resolução de problemas foi incluída no currículo de matemática em parte porque os problemas fornecem uma justificativa para ensinar matemática. Presumivelmente, pelo menos alguns problemas relacionados de algum modo com experiências do mundo real foram incluídos no currículo para convencer os alunos e professores sobre o valor da matemática.

- *Resolução de problemas como motivação*. O subtema da motivação está relacionado com o da justificativa, em que os problemas justificavam a matemática que se ensinava. Contudo, no caso da motivação, a conexão é muito mais específica, e é procurado o objetivo de atrair o interesse dos alunos. Por exemplo, um problema específico, envolvendo a adição com reagrupamento, deve ser usado para introduzir uma série de aulas conduzindo à aprendizagem do algoritmo mais eficiente para adicionar números.

- *Resolução de problemas como recreação*. O subtema da recreação está relacionado com o da motivação porque o interesse dos alunos está envolvido, mas no caso da recreação os problemas são fornecidos não tanto para motivar os alunos a aprender mas para lhes permitir ter algum divertimento com a matemática que eles já aprenderam. Presumivelmente, tais problemas satisfazem um interesse humano natural em explorar situações não usuais. O problema do Papiro Ahmes, anteriormente mostrado, é uma boa ilustração. O subtema da recreação também difere dos dois primeiros na medida em que puzzles ou problemas sem qualquer ligação ao mundo real são perfeitamente apropriados.

- *Resolução de problemas como veículo*. Os problemas são muitas vezes fornecidos, não simplesmente para motivar os alunos a interessarem-se na aprendizagem direta de um tópico, mas como um veículo através do qual um novo conceito ou técnica deve ser aprendido. Os métodos de descoberta refletem em parte a ideia de que a resolução de problemas pode ser um veículo para a aprendizagem de novos conceitos e técnicas. E, quando o currículo de matemática consiste exclusivamente em resolver problemas, estes devem servir obviamente como veículo.

- *Resolução de problemas como prática*. Dos cinco subtemas, a resolução de problemas como prática tem tido a maior influência no currículo de matemática. Neste subtema, os problemas, mais do que justificação, motivação, recreação ou veículo, proveem a prática necessária para reforçar habilidades e conceitos ensinados diretamente.

Resolução de Problemas como habilidade

A resolução de problemas é muitas vezes vista como uma entre várias habilidades a serem ensinadas no currículo escolar. De acordo com esta visão, a resolução de problemas não é necessariamente uma habilidade unitária, mas há uma orientação clara nesse sentido.

Embora a resolução de problemas como contexto se mantenha como um tema forte e persistente, o tema resolução de problemas como habilidade tornou-se dominante para aqueles que veem a resolução de problemas como uma valiosa finalidade curricular, merecendo especial atenção, em vez de ser visto simplesmente como um meio para atingir outros fins ou um inevitável produto do estudo da matemática.

O tema habilidade está claramente relacionado às mudanças que tiveram lugar perto do virar do século XIX para o século XX, embora nem todos os que advogam este ponto de vista reclamem uma associação com, por exemplo, o trabalho de Thorndike. No entanto, em grande parte pela influência de Thorndike e, também, por outras mudanças, muitos educadores não tardaram a assumir que o estudo da matemática melhorava o pensamento e nos tornava melhores para resolver problemas do mundo real. Especialmente porque muitos dos nossos antecessores profissionais tiveram relutância em desistir das suas ideias acerca da matemática e em incluir mais problemas aplicados no currículo, eles permitiam, a psicólogos como Thorndike, definir uma nova visão da resolução de problemas.

Colocar a resolução de problemas, em uma hierarquia de habilidades a serem adquiridas pelos alunos, conduz a certas consequências para o papel da resolução de problemas no currículo. Uma consequência é que, dentro da habilidade geral para a resolução de problemas, faz-se distinções hierárquicas entre resolver problemas de rotina e problemas não rotineiros. Ou seja, a resolução de problemas não rotineiros é caracterizada como uma habilidade de nível elevado, a ser adquirida depois da habilidade na resolução de problemas de rotina que, por sua vez, é adquirida depois de os alunos apreenderem conceitos e habilidades matemáticas básicas. Esta visão adia a introdução de problemas não rotineiros e, como resultado, apenas alguns alunos, por terem conseguido dominar os pré-requisitos, chegam a ser expostos a tais problemas. A resolução de problemas não rotineiros torna-se então uma atividade para os estudantes especialmente capazes mais do que para todos os estudantes.

Resolução de Problemas como Arte

Uma visão mais profunda e mais abrangente da resolução de problemas nos currículos escolares de matemática – a visão da resolução de problemas como arte – emergiu do trabalho de George Polya, que reviveu no nosso tempo a ideia da heurística (a arte da descoberta). Matemáticos antigos, como Euclides e Pappus, e mais recentes, como Descartes, Leibniz e Bolzano, discutiram métodos e regras para a descoberta e invenção em matemática, mas suas ideias nunca tiveram grande eco nos currículos escolares. Ficou para Polya a tarefa de reformular, estender e ilustrar várias ideias acerca da descoberta matemática de tal modo que os professores as pudessem compreender e usar.

A experiência de Polya na aprendizagem e no ensino da matemática levou-o a perguntar como é que a matemática surge – como as pessoas fizeram descobertas matemáticas? Os estudantes não compreenderiam melhor a matemática se eles vissem em primeiro lugar como ela é criada, e se eles pudessem obter algum gosto pela descoberta em matemática por si só? A experiência de Polya como matemático levou-o a concluir que a face acabada da matemática, apresentada dedutivamente em revistas matemáticas e em livros-texto, não fazia justiça ao tema. A matemática acabada requer raciocínio demonstrativo, enquanto que fazer matemática requer raciocínio plausível. Se os alunos devem usar raciocínio plausível, precisam ser ensinados a fazer isso.

Como os nossos antecessores profissionais Smith e Young, Polya argumentava que o principal objetivo da educação é o desenvolvimento da inteligência – ensinar os jovens a pensar. Na escola primária, as crianças devem ser ensinadas a fazer a sua aritmética muito mais com compreensão do que mecanicamente porque, embora o comportamento que envolve compreensão seja um objetivo mais ambicioso, tem de fato uma maior probabilidade de sucesso. Este objetivo produz resultados mais rápidos e mais permanentes. Na escola secundária, a matemática deve oferecer algo àqueles que a usarão e àqueles que não a usarão nas suas carreiras ou estudos posteriores. A mesma matemática deve ser ensinada a todos os alunos porque ninguém pode saber logo de início quais alunos poderão vir a utilizar a matemática profissionalmente.

> Se o ensino da matemática dá só uma perspectiva unilateral, incompleta, do pensamento de um matemático, suprimindo totalmente aquelas atividades informais de conjecturar e extrair conceitos matemáticos do mundo visível à nossa volta, ela negligencia aquilo que pode ser a parte mais interessante para a generalidade dos alunos, a mais instrutiva para o futuro utilizador da matemática, e a mais inspiradora para o futuro matemático (POLYA[65], 1966, apud KILPATRICK; STANIK, 1989).

Do ponto de vista de Polya, a matemática consiste em informação e “know-how”. Independentemente de quão bem as escolas forneçam informação matemática, se elas não ensinarem os alunos a como usar essa informação, ela

---

[65] Polya, G. (1966). On teaching problem solving. In E. G. Begle (Ed.). *The role of axiomatic and problem solving in mathematics* (p.123-129). Boston: Ginn.

será esquecida. “Saber matemática é ser capaz de fazer matemática” “O que é “know-how” em matemática? É a habilidade de resolver problemas” (POLYA, apud STANIC; KILPATRICK, 1989).

Na perspectiva de Polya, a resolução de problemas era uma arte prática, “como nadar, esquiar ou tocar piano”. Aprendem-se tais artes por imitação e por prática. Polya assumia que nem a resolução de problemas por si só, sem uma orientação, conduz a um melhor comportamento, nem o estudo da matemática pela sua própria natureza, nos eleva o nível geral de inteligência. Em vez disso, reconhecia que as técnicas de resolução de problemas precisam ser ilustradas pelo professor, discutidas com os alunos e praticadas de uma maneira esclarecedora e não mecanizada. Além disso, ele observou que, embora os problemas de rotina pudessem ser usados para cumprir certas funções pedagógicas do ensino nos alunos, para seguir um procedimento específico ou usar uma definição corretamente, só através de um uso judicioso de problemas não rotineiros, os alunos podem desenvolver a sua capacidade de “resolver problemas”.

Na formulação de Polya, o professor é a chave. Só um professor sensível pode estabelecer o tipo correto de problemas para uma dada aula e fornecer a quantidade de ajuda apropriada. Porque ensinar também é uma arte, ninguém pode programar ou mecanizar o ensino da resolução de problemas; ela permanece uma atividade humana que requer experiência, gosto e julgamento.

Hoje em dia, existem os que aparentemente se filiam ao trabalho de Polya, mas que reduzem o princípio básico da heurística a habilidades de procedimento, quase que adotando uma visão algorítmica da heurística (ou seja, heurísticas específicas aplicadas a situações específicas). Uma heurística torna-se uma capacidade, uma técnica, ou, paradoxalmente, até mesmo um algoritmo. Num certo sentido, a resolução de problemas como arte fica reduzida à resolução de problemas como habilidade quando são feitas tentativas para implementar as ideias de Polya enfatizando seus passos e colocando-os nos manuais escolares. Embora a distorção possa não ser inevitável, quando os educadores tentam captar em manuais e guias para professores o que é essencialmente um esforço artístico, a tarefa é claramente difícil.

Stanic e Kilpatrick (1989) acreditam que as ideias de Dewey acerca da resolução de problemas complementam as de Polya. Segundo eles, Dewey não fornece todas as respostas pois, de fato, ele demonstra que a situação é mesmo muito mais complexa do que se poderia pensar. E dá uma orientação valiosa e outra maneira de pensar sobre a resolução de problemas.

Esses autores, ainda dizem que "o que tem sido chamado de educação progressiva teve uma influência nos currículos da matemática escolar, mas a crítica à educação progressiva fornecida por Dewey[66] (1938/1963), em *Experience and Education*, mostra como a maioria dos outros reformadores estava longe de suas ideias básicas. Apesar disso, Dewey continua a ser a principal figura na educação americana porque muitas pessoas declararam uma ligação com o seu trabalho, incluindo as poucas que realmente despenderam tempo a ler os próprios escritos de Dewey em vez de distorções de segunda mão.

Dewey não utilizou com frequencia o termo resolução de problemas, mas é claro que a resolução de problemas era essencial na sua visão sobre educação e escola. Aquilo que referimos como resolução de problemas, Dewey designava, usualmente, de *pensamento reflexivo*. Mais do que ser uma maneira como os homens lidam com o mundo, a resolução de problemas era, para Dewey, a essência do pensamento humano. Ser capaz de pensar reflexivamente faz de nós humanos. Dewey distinguia entre vários tipos de pensamento, mas quando ele escreveu *How We Think,* em 1910, e o reviu em 1933, pensar significava pensar reflexivamente.

Melhor do que ninguém, Dewey combinou as ideias da resolução de problemas como meio e resolução de problemas como fim, como merecedoras de especial atenção. Dewey usou muito do *How We Think* para discutir como o pensamento pode ser treinado, tal era a importância que dava ao desenvolvimento, nas pessoas, da capacidade de resolver problemas. Mas isso não era um fim separado da organização progressiva da matéria que é um resultado direto do

[66] Dewey, J.(1963). *Experience and education.* New York: Colleier. (Original work published 1938)

pensamento reflexivo. Tão simples e óbvio como isto pode soar, nossa história de fracassos em atingir o duplo objetivo de ajudar os alunos a desenvolver a capacidade de resolver problemas e organizar a matéria de matemática é uma evidência convincente de como a tarefa é complexa.

Talvez a concepção errônea mais grave acerca de John Dewey seja a de que ele se preocupava com a criança e não com a matéria. O problema, diz Dewey, “é justamente desembaraçar-se da noção prejudicial que há numa diferença entre a experiência da criança e as várias formas de matéria que constituem o plano de estudos”. Dewey argumentava que a experiência da criança “contém em si mesma elementos – fatos e verdades – exatamente do mesmo tipo dos que entram no estudo formulado . . . e, ainda mais importante, as atitudes, os motivos, e o interesse que operam no desenvolvimento e na organização da matéria no lugar que agora ela ocupa”.

Para Dewey, a experiência era central, os problemas surgem naturalmente dentro da experiência, ensinar e aprender consiste na reconstrução da experiência que conduz à progressiva organização da matéria, e a reconstrução da experiência requer pensamento reflexivo (ou resolução de problemas).

Como Polya, disseram Stanic e Kilpatrick (1989), Dewey colocou uma grande ênfase no professor. Dewey não rejeitou a ideia de que os professores transmitem informação aos alunos. De fato, ele disse que “nenhuma questão educacional tem maior importância do que a questão de como obter o bem mais lógico ao aprender através da transmissão de outros”. Dewey disse que o problema era o de saber como converter tal informação num bem intelectual e perguntava-se: _ “Como trataremos nós a matéria dada pelo livro texto e a ensinaremos de modo que ela funcione como matéria para uma investigação reflexiva, não como um alimento intelectual já pronto a ser aceito e engolido exatamente como fornecido pela história?”. Dewey respondeu sua própria questão, dizendo que a informação transmitida não deve ser alguma coisa que os alunos podem facilmente descobrir através da inquirição direta; que a informação “deve ser fornecida por meio de estímulos, não com finalidade e rigidez dogmática”, e que a informação deve ser relevante para uma questão vital na própria experiência dos alunos". De acordo com Dewey[67] (1910),

> Ensino de matéria que não se relacione com qualquer problema já abordado na própria experiência do estudante, ou que não seja apresentado para resolver um problema é menos do que inútil para propósitos intelectuais, e, na medida em que não entra em qualquer processo de reflexão, é desnecessária. Mantém-se em mente como madeiras e escombros sem préstimo, é uma barreira, um obstáculo no caminho do pensamento efetivo quando o problema surge (DEWEY[68],1933, p.29 apud STANIC; KILPATRICK, 1989)

Os professores, então, podem justificadamente transmitir informação, de acordo com Dewey, mas só se a informação estiver ligada à experiência da criança e aos problemas que surgem dessa experiência. Num certo sentido, a matéria é até mesmo mais importante para o professor do que para o aluno. O professor precisa usar o seu conhecimento da matéria de modo a ajudar a criança a reconstruir sua experiência de maneira que a matéria se torne progressivamente mais organizada para o aluno. O processo de pensar reflexivamente, de resolver problemas que surgem da experiência era, para Dewey, uma forma de arte.

A crença de Polya e Dewey, de que a matemática e a resolução de problemas são para todos, liga-os aos nossos antecessores profissionais em educação matemática e à fé básica que eles tinham na inteligência humana. Smith e Young não puderam ver em Dewey, ou não veriam, a oportunidade de reformular a sua visão dos benefícios das artes liberais, à luz de uma sociedade em transformação.

Segundo Stanic e Kilpatrick, uma consequência de retomar esta tradição é considerar seriamente a noção de que a resolução de problemas é realmente para todos. Precisamos olhar mais para o que os alunos podem de fato fazer e procurar por ampla evidência do que conta como habilidade para resolver problemas. Em outras palavras, devemos estudar mais cuidadosamente o papel do contexto na resolução de problemas. Algumas pesquisas recentes mostram que os alunos, que têm dificuldade na resolução de problemas na escola, podem resolver problemas semelhantes em situações de fora da escola que são mais significativas para eles.

---

[67] Dewey, J. (1910). *How we think. Boston*: Heath.

[68] Dewey, J. (1933). *How we think. A restatement of the relation of reflextive thinking to the educative process.* Boston: Heath.

Considerar seriamente a noção de que a resolução de problemas é para todos, significa estudar as crianças e jovens numa variedade de situações e providenciar exemplos, aos professores, do que eles podem fazer quando é feita uma tentativa para ligar a matéria à experiência.

Klierbard[69] (1968), citado por Stanic e Kilpatrick (1989) disse que “uma vez mais, nem Dewey nem Polya têm todas as respostas, mas eles nos ajudam com os temas básicos do que é resolução de problemas e porque devemos ensiná-la, e como ela se relaciona com a organização progressiva da matéria. Seu trabalho nos fornece um veículo através do qual deveríamos “examinar criticamente a nossa herança como um campo de estudo” estabelecendo um “diálogo com os nossos antecessores profissionais”.

5.2 O Ensino da Matemática através da Resolução de Problemas

No artigo Ensinando Matemática através de Resolução de Problemas: Uma Perspectiva Histórica, publicado em *Teaching Mathematics through Problem Solving, grades 6-12,* NCTM-2003, Beatriz D’ Ambrosio também apresenta um breve panorama histórico do papel da resolução de problemas no currículo, complementando o trabalho de Stanic e Kilpatrick. D’Ambrosio reproduz, na integra, com permissão, a discussão dos vários temas apresentados em Stanic e Kilpatrick “porque esses temas podem ajudar a iluminar o que é especial e diferente no ensino da matemática através da resolução de problemas” e, em seguida, apresenta o que seria um tema emergente a respeito da resolução de problemas: *ensinando matemática através da resolução de problemas*.

---

[69] Kliebard, H.M. (1968). The curriculum field in retrospect. In P. Witt (Ed), *Technology and the curriculum* (p. 69-84). New York: Teachers College Press.

D' Ambrosio inicia seu artigo reproduzindo um trecho do prefácio de *Álgebra*, de *Joseph Ray*[70], um dos mais prolíficos autores de textos didáticos dos EUA do séc XIX :

> No seguinte trabalho, o objetivo tem sido fornecer um tratado elementar, começando com os primeiros princípios e levando o aluno por meio de passos graduais e fáceis, a um conhecimento dos elementos da ciência... Para este propósito, toda regra é demonstrada, e todo princípio analisado, de modo que a mente do aluno possa ser disciplinada e fortalecida para prepará-lo, ou para seguir o estudo da matemática de modo inteligente, ou para atingir de modo mais bem sucedido qualquer outro propósito na vida. (RAY 1848, p.3, apud D'AMBROSIO, 2003, p. 39).

D' Ambrosio afirma que essa declaração de Ray captura uma perspectiva sobre o aprendizado e o ensino da matemática que foi prevalecente na educação matemática nos EUA durante o séc XIX, além de sugerir um papel específico para problemas no currículo da matemática.

Conforme exposto por D'Ambrosio, os educadores da metade até o final dos anos 1800 acreditavam que o ensino efetivo envolvia a apresentação de procedimentos matemáticos aos estudantes, seguida de aplicação (isto é, o uso do procedimento para resolver "word problems", ou seja, problemas com enunciado) e prática daqueles procedimentos pelos estudantes. Acreditava-se que tal prática fortaleceria a mente, como Ray indica acima.

De acordo com D'Ambrosio, todos os problemas colocados nos muitos livros de Ray dão aos estudantes oportunidades para aplicar as habilidades e as regras apresentadas nesses livros. Ray enfatiza, no prefácio de um de seus livros de aritmética, que "ao aluno nunca é solicitado fazer qualquer operação até que o princípio sobre o qual ela é fundamentada tenha sido primeiro esclarecido" (Ray 1857, p.3). De fato, este ponto de vista da resolução de problemas, como a aplicação de "princípios" que foram ensinados - ou seja, explicados pelo professor ou apresentados no livro texto – dominou o currículo da matemática e a visão do ensino e aprendizagem de matemática de muitos professores por pelo menos 150 anos.

[70] Ray, J. *Ray´s Algebra*: Part First. Ver. (Ed.). Cincinnati, Ohio: Van Antwerp, Bragg & Co., 1848.

Como poderia ser esperado, concepções da resolução de problemas, e do papel que ela exerce no currículo da matemática, têm sofrido mudanças importantes desde o tempo de Joseph Ray.

Segundo D' Ambrosio, a posição defendida em Teaching Mathematics through Problem Solving - o uso da resolução de problemas como eixo central do ensino da matemática – emergiu vagarosamente e recentemente começou a ser refletido em alguns livros didáticos de matemática.

D'Ambrosio afirma que, "hoje, entrando no século XXI, nos confrontamos com ainda outra mudança no foco do uso da resolução de problemas no currículo: *ensinar matemática através da resolução de problemas*". Segundo D"Ambrosio, Tom Schroeder e Frank Lester, em um capítulo do Livro do Ano do NCTM, de 1989, sustentaram que, desde que o papel da resolução de problemas é o de desenvolver a compreensão da matemática pelos estudantes, o ensino via resolução de problemas é a abordagem mais apropriada. Eles argumentaram que proponentes desta abordagem consideram a resolução de problemas não como um tópico, um padrão, ou como um conteúdo, mas sim como uma postura pedagógica.

Nesse livro, intitulado *New Directions for Elementary School Mathematics*, Schroeder & Lester (1989), falam em "ensinar matemática **via** resolução de problemas" e somente a partir de 1992 é que se passou a falar em "ensinar e aprender matemática através da resolução de problemas". A influência dos pontos de vista de Polya e de Dewey a respeito da resolução de problemas como uma arte são evidentes nesta concepção do papel da resolução de problemas no currículo.

Esta nova concepção também se aproxima do tema resolução de problemas como um veículo, de Stanic e Kilpatrick. De fato, problemas que servem como meios para a introdução ou o desenvolvimento de conceitos matemáticos começaram a aparecer em materiais do currículo matemático nos anos noventa. Os proponentes do ensino da matemática através da resolução de problemas baseiam sua pedagogia na crença de que estudantes, que se confrontam com situações problemáticas, utilizam o conhecimento que já possuem para resolver aqueles problemas e, no processo de resolução dos problemas, eles constroem novo conhecimento e nova compreensão. Pesquisas recentes em psicologia e ciência cognitiva descrevem o aprendizado como o processo individual de dar sentido a ideias com base na compreensão já existente do indivíduo. Teorias que descrevem como as pessoas aprendem, ou constroem conhecimento, servem como fundamento para o ensino da matemática através da resolução de problemas.

Para ilustrar como o ensino da matemática através da resolução de problemas tem sido posto em prática, D'Ambrosio apresenta e discute em seu artigo três exemplos de problemas que apareceram em livros didáticos no EUA, no final da década de 90, um para Ensino Fundamental, ciclo 1, um para o Ensino Fundamental, ciclo 2, e um para o Ensino Médio.

E D'Ambrosio conclui ressaltando que a resolução de problemas tem sido um componente importante do currículo da matemática escolar já há bastante tempo – 150 anos ou mais - mas que seu papel tem mudado ao longo do tempo. E que em alguns livros-texto de matemática hoje, a resolução de problemas aparece, conforme mencionado por Stanic e Kilpatrick (1989), como um *meio* para o desenvolvimento de uma compreensão mais aprofundada de ideias matemáticas e processos. Proponentes dessa abordagem acreditam que o envolvimento com a resolução de problemas produtiva leva a uma compreensão ampliada. Essa abordagem, que envolve confrontar os estudantes com situações realmente problemáticas, é dramaticamente diferente da abordagem promovida há mais de 150 anos atrás por Joseph Ray (1848) – uma abordagem envolvendo "passos fáceis e graduais".

5.3 Novas Reflexões sobre Resolução de Problemas

No artigo *Novas Reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas*, publicado em Educação Matemática, Pesquisa em Movimento, pag. 213-231, Editora Cortez, 2004, as autoras Onuchic e Allevato observam que

> [...] no início da década de 70, tiveram início investigações sistemáticas sobre Resolução de Problemas e suas implicações

> curriculares. A importância dada à resolução de Problemas é, portanto, recente e somente nessa década é que os educadores matemáticos passaram a aceitar a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas merecia mais atenção. A caracterização da Educação matemática, em termos de Resolução de Problemas, reflete uma tendência de reação a caracterizações passadas, que a configuravam como um conjunto de fatos, como o domínio de procedimentos algorítmicos, ou como um conhecimento a ser obtido por rotina ou por exercício mental. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2004, p.215).

Onuchic e Allevato apresentam em seu artigo algumas considerações sobre o livro *Elementary and Middle School Mathematics*, de John A. Van de Walle[71] (2001), livro escrito depois da publicação dos Standards 2000.

Segundo as autoras, Van de Walle coloca que os professores de Matemática, para serem realmente eficientes, devem envolver quatro componentes básicos em suas atividades: gostar da disciplina Matemática, o que significa fazer Matemática com prazer; compreender como os alunos aprendem e constroem suas ideias; ter habilidade em planejar e selecionar tarefas e, assim, fazer com que os alunos aprendam Matemática num ambiente de Resolução de Problemas; ter habilidade em integrar diariamente a avaliação com o processo de ensino a fim de melhorar esse processo e aumentar a aprendizagem. Os conceitos matemáticos que os alunos criam, num processo de construção, não são as ideias bem formadas concebidas pelos adultos. Novas ideias são formadas pouco a pouco, ao longo do tempo, quando os alunos refletem ativamente sobre elas e as testam através dos muitos diferentes caminhos que o professor pode lhes oferecer. Aí está o mérito das discussões entre os estudantes em grupos de trabalho. Quanto mais condições se deem aos alunos para pensar e testar uma ideia emergente, maior é a chance de essa ideia ser formada corretamente e integrada numa rica teia de ideias e de compreensão relacional.

Nesse contexto, conforme observam as autoras, se insere a Metodologia de "Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de

[71] Van de Walle, J.A. *Elementary and Middle School Mathematics.*New York: Longman, 2001.

Problemas”, que se constitui num caminho para se ensinar Matemática através da resolução de problemas e não apenas para se ensinar a resolver problemas. Nela, conforme já foi recomendado nos PCN, o problema é um ponto de partida e, na sala de aula, através da Resolução de Problemas, deve-se fazer conexões entre os diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos.

Numa sala de aula onde o trabalho é feito com a abordagem de ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, busca-se usar tudo o que havia de bom nas reformas anteriores: repetição, compreensão, o uso da linguagem Matemática da teoria dos conjuntos, Resolução de Problemas e, às vezes, até a forma de ensino tradicional.

Nesse livro, Onuchic e Allevato, falando de Van de Walle, em 2005, escreveram:

> Para Van de Walle (2001), muitas vezes se fala em trabalhar com problemas para se ensinar Matemática sem se ter uma ideia clara do que é um problema. Há muitas diferentes concepções de problema. Para nós, é tudo aquilo que não sabemos fazer mas que estamos interessados em fazer. Para ele, um problema é definido como qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm métodos específicos para chegar à solução correta. [...] diz, ainda, que ensinar Matemática através da Resolução de Problemas não significa, simplesmente, apresentar um problema, sentar-se e esperar que uma mágica aconteça. O professor é responsável pela criação e manutenção de um ambiente matemático motivador e estimulante em que a aula deve transcorrer. Para se obter isso, toda aula deve compreender três partes importantes: antes, durante e depois. Para a primeira parte, o professor deve garantir que os alunos estejam mentalmente prontos para receber a tarefa e assegurar-se de que todas as expectativas estejam claras. Na fase “durante”, os alunos trabalham e o professor observa e avalia esse trabalho. Na terceira, “depois”, o professor aceita a solução dos alunos sem avaliá-las e conduz a discussão enquanto os alunos justificam e avaliam seus resultados e métodos. Então, o professor formaliza os novos conceitos e novos conteúdos construídos. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2004).

5.4 A Resolução de Problemas como metodologia – aspectos didáticos

Desde pelo menos 1989, o Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática **Através** da Resolução de Problemas é a linha de pesquisa adotada no GTERP, grupo de pesquisa em educação matemática liderado pela pesquisadora

Lourdes de la Rosa Onuchic. No artigo *Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas*, publicado em Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas, Editora UNESP, 1999, essa pesquisadora faz um pequeno histórico da pesquisa em resolução de problemas no Brasil e exterior, e apresenta sua visão do ensino, aprendizagem e avaliação de matemática através da resolução de problemas.

Outros artigos de Onuchic referentes à essa metodologia, em colaboração com a pesquisadora Norma Suely Gomes , são *Novas Reflexões sobre o Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas*, sobre o qual discorremos na seção anterior, e *Formação de Professores – Mudanças Urgentes na Licenciatura em Matemática*, publicado em Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates, 2009.

Neste último artigo, Onuchic e sugerem um roteiro que serve de referência e orientação aos professores que queiram trabalhar com essa metodologia.

1) Formar grupos e entregar a atividade. – O professor apresenta o problema aos alunos que, após uma leitura individual, distribuem-se em pequenos grupos, lêem novamente e tentam interpretar e compreender o problema. Ressalte-se que o conteúdo necessário, ou mais indicado, para a resolução do problema dado ainda não foi trabalhado em sala de aula. O problema proposto aos alunos, que chamamos problema gerador, é que, durante o processo de resolução, conduzirá ao conteúdo que o professor planejou construir naquela aula.

2) Observar e incentivar. – O professor não mais tem o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos tentam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. O professor faz a intermediação no sentido de levar os alunos a pensar, dando-lhes tempo para tal, e incentivando a troca de ideias entre os alunos.

3) Auxiliar nos problemas secundários. – O professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios ou técnicas já conhecidas para resolver o problema; estimula-os a escolher diferentes métodos a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que atenda aos alunos em suas dificuldades, colocando-se como um interventor e questionador, acompanhando suas explorações e ajudando-os, quando necessário, a resolver problemas secundários. Tratam-se de dúvidas apresentadas pelos alunos no contexto do vocabulário presente no enunciado; no contexto da leitura e interpretação; além daqueles que podem surgir por ocasião da resolução do problema: notação, passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática, conceitos relacionados, técnicas operatórias, a fim de possibilitar a continuidade do trabalho.

4) Registrar as resoluções na lousa. – Representantes dos grupos são convidados a registrar suas resoluções na lousa. Resoluções certas e erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.

5) Realizar uma Plenária. – O professor chama todos os alunos para discutirem as resoluções realizadas pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos, pois este é um momento bastante rico para a aprendizagem.

6) Buscar um consenso. – Após sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.

7) Formalizar o conteúdo. – Neste momento, denominado “formalização”, o professor faz uma apresentação formal dos novos conceitos e conteúdos construídos, destacando as diferentes técnicas operatórias e as propriedades qualificadas para o assunto.

5.5 Problem-solving? Or Problem Solving? Uma voz dissonante.

A. Gardiner, em seu artigo *Problem-Solving? Or Problem Solving?* (The Mathematical Gazette, p. 143, Março1996), ressalta a distinção entre a atividade de resolver problemas, que ele designa como “problem solving”, e a teoria meta-cognitiva referente a essa atividade, designada “problem-solving”. Segundo Gardiner, problem solving representa o sangue vital da matemática e da educação, ao passo que problem-solving representa uma tendência atual equivocada. Dessa forma, Gardiner aparece como uma voz dissonante, entre aqueles que discutem o papel e as várias tendências da resolução de problemas no ensino-aprendizagem de matemática. Apresentamos abaixo um resumo de seu artigo, compilando eventualmente alguns trechos.

Gardiner nos diz que o grande matemático David Hilbert, ao apresentar seus famosos 23 problemas de pesquisa, em 1900, sentiu a necessidade de enfatizar que a dificuldade dos problemas não deveria ser usada como uma desculpa para deixá-los de lado:

> Mesmo que esses problemas possam nos parecer inabordáveis, e mesmo que diante deles nos sintamos impotentes, nós devemos ter, de qualquer modo, a firme convicção de que a resolução desses problemas deve seguir de um número finito de processos puramente lógicos. Esta convicção de que todo problema matemático pode ser resolvido é um grande incentivo para o pesquisador. Ouvimos, dentro de nós, o chamado constante: “Existe o problema. Procure sua solução. Você pode encontrá-la utilizando puramente a razão. Em matemática não existe nenhum ignorabimus.
> (HILBERT[72], 1902 apud GARDNER,1996, p.1)

Segundo Gardner, essa é a mensagem que todos os professores de matemática deveriam procurar transmitir para seus estudantes, independente de idade ou nível escolar, e independente do quão difícil eles possam considerar o assunto.

---

[72] D.Hilbert, Mathematical problems, Bulletin of the American Mathematical Society 8 (1902) p.437-479

> "Mesmo que esses problemas possam parecer à primeira vista inabordáveis, e mesmo que diante deles nos sintamos impotentes, devemos ter a firme convicção de que sua solução deve ser possível por processos puramente lógicos. Se existe o problema, ache a solução. Você pode encontrá-lo por puro raciocínio".

Gardner fornece uma distinção útil entre problema e exercício:

> Todo problema pode ser resolvido combinando passos familiares e simples. Se somente um passo é necessário, não há desafio, a tarefa é mais um exercício do que um problema. Exercícios são importantes – porque é absolutamente vital que rotinas envolvendo um passo sejam inteiramente compreendidas e executadas fluentemente. Mas problemas matemáticos começam quando dois passos simples têm que ser selecionados e combinados para atingir o objetivo. (GARDNER, 1996, p.1)

Segundo Gardner, a atividade de resolver problemas é algo que todos os alunos são capazes de realizar, em um nível apropriado, desde que nós lhes forneçamos os dois ingredientes chave:

- Primeiro, as necessárias rotinas de um passo têm que se tornar totalmente automáticos para que a mente do aluno esteja livre para tarefas mais elevadas, capazes de selecionar e combinar os passos no modo requerido para resolver o problema.
- Segundo, mesmo quando estamos desenvolvendo a fluência dos alunos, nós ainda deveríamos incluir uma noção de problemas envolvendo dois passos, e nos certificarmos de que os alunos possam perceber que uma rotina de um passo é uma etapa intermediária para alcançar um fim e não um fim em si mesmo.

Problema A: A diagonal de um quadrado tem 4 cm de comprimento. Qual é sua área em cm^2?

Gardner observa que achar a área de um quadrado, dado o lado, é um exercício. Se a diagonal é dada, deve-se saber algo sobre triângulo isósceles, triângulo retângulo, ou usar Pitágoras para encontrar o comprimento do lado, ou compreender que a diagonal corta o retângulo em dois triângulos retângulos, cujas áreas podem ser calculadas facilmente a partir dessas informações. Mesmo assim, disse ele, quando esta questão foi recentemente dada (na forma de teste de múltipla escolha, com opções 2, 4, $4\sqrt{2}$, 8, 16) para uma centena de estudantes entre 11 e

12 anos, numa excelente escola inglesa, nenhum deles escolheu a reposta correta. Gardner diz: “Este pode ser um exemplo extremo, mas ele ilustra a natureza de nosso dilema.”

Problema B: 3 vezes ¼ de um círculo e 1 vez ¾ de círculo, ambos de raio 10 cm, forma este jarro de forma atraente (ver Figura 10). Qual é sua área?

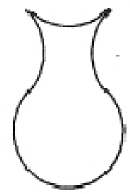


Figura 10

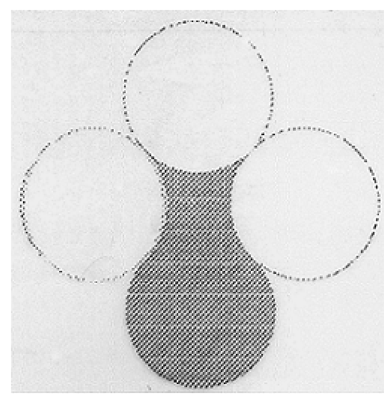


Figura 11

Se alguém lesse essa questão, provavelmente se perguntaria como *três vezes 1/4 de círculo e* como *uma vez 3/4 de círculo* poderiam possivelmente se unir para formar qualquer figura? Uma olhada no desenho mostra que 3 vezes ¼ do círculo representam curvas *para dentro*, (ver Figura11) de modo que é claro que não se poderia simplesmente adicionar as áreas de 3 vezes ¼ de disco com 1 vez 3/4 de disco.

Ainda assim, essa adição sem sentido tem sido apresentada como uma “solução” por estudantes aparentemente bem treinados (incluindo quase metade de todos os calouros de uma boa universidade inglesa). Isto nos sugere fortemente, disse ele, que as questões com as quais estes estudantes têm se defrontado os levaram a acreditar que eles nunca terão que fazer procedimentos com mais do que um passo. Este mesmo engano atinge até mesmo estudantes que não cometem erros como o mencionado acima. Pois parece que eles não têm noção de que, para se resolver um problema, é preciso criar ativamente passos seguros entre aquilo que é dado e aquilo que é procurado e, neste caso, marcando pontos e linhas cruciais, tais como os centros dos quatro círculos e as linhas que os unem.

Quando estamos diante de um problema não familiar e aparentemente muito difícil, há sempre a tentação de imaginar que ele é muito árduo, que avançar na direção de uma solução requer alguns truques e técnicas que ainda não aprendemos, e que a solução está, portanto, além de nossas forças. Esta visão derrotista não deixa de ser plausível porque ela algumas vezes é verdadeira. Mas isto, na opinião de Gardiner, é quase sempre uma desculpa para tirar o corpo fora.

Durante o século XIX tornou-se claro que, quanto mais os cientistas aprendiam sobre a natureza, mais eles percebiam o quão pouco eles sabiam, e que ninguém poderia esperar descobrir toda a verdade. Esta percepção foi resumida por um filósofo, Emil du Bois-Reymond, no bordão "*ignoramus et ignorabimus*" **–** ignorante nós somos e ignorantes permaneceremos. Esta frase se tornou de fato um bordão. Com a entrada do novo século, David Hilbert julgou importante afirmar tão claramente lhe fosse possível que a matemática é diferente. Em matemática, disse Hilbert, nós podemos atacar problemas **"com a firme convicção de que soluções devem seguir de um número finito de processos puramente lógicos"**. E, como para ressaltar a sua afirmação, um dos seus 23 notáveis problemas foi resolvido quase que imediatamente.

Hilbert estava falando sobre pesquisa em matemática. No entanto seu princípio se aplica igualmente bem para resolução de problemas desafiadores a nível escolar. Quando os matemáticos começam a explorar um problema, eles assumem que deve ser possível progredir em direção à uma solução, usando somente as ferramentas disponíveis naquele momento. É claro que algumas vezes eles estão errados; mas esta não é a questão. Os matemáticos sabem perfeitamente bem que esta hipótese é irracional estritamente falando, na medida em que ela não pode ser justificada logicamente – e é em geral claramente falsa. Mas é uma hipótese de trabalho de valor inestimável. Embora estritamente ilógica, a hipótese de que todo problema matemático pode ser resolvido tem se justificado a si mesmo tão frequentemente na prática que ela se tornou uma poderosa convicção – uma convicção que é psicologicamente de valor inestimável toda vez que experimentamos aquele sentimento de desamparo ao nos depararmos com um problema matemático difícil.

Diante de um problema não familiar o matemático, jovem ou experiente, é como alguém com um pequeno molho de chaves que está tentando abrir alguma caixa de um quebra cabeça chinês extremamente difícil. À primeira vista, a superfície parece totalmente lisa sem uma única rachadura visível. Se não estivéssemos convencidos de que se trata de fato de um quebra cabeça chinês e que pode ser de fato aberta, nós rapidamente desistiríamos. Saber (ou acreditar) que ela pode ser aberta nos faz persistir, continuar procurando até começar a encontrar um pequeno traço de uma rachadura aqui ou ali. Nós ainda não temos ideia de como as peças devem se mover, ou qual das chaves disponíveis pode ajudar a abrir a primeira camada do jogo. Mas experimentado a chave que parece apropriada na rachadura, que parece mais promissora, poderemos eventualmente encontrar aquela que se ajuste exatamente, e as peças começam a se mover. O ato de resolver um problema de matemática é análogo ao de alguém com um molho de chaves, tentar abrir alguma caixa de um quebra cabeça chinês.

Num bom quebra-cabeça o sucesso não é nunca o resultado de puro acaso. Sem dúvida, uma vez que se tenha descoberto o caminho, frequentemente, se percebe que deveria ter sido "óbvio" onde começar. Mas as coisas usualmente tornam-se óbvias somente em retrospectiva. Se o quebra-cabeça não é familiar e bem feito, o sucesso pode requerer persistência, fé e muito tempo. Exatamente o mesmo é verdade para qualquer bom problema matemático. Assim, não se deveria desistir tão facilmente, e se deveria sempre estar preparado para olhar para trás depois de resolver um problema para ver o que, talvez, deveria ter sido feito diferentemente. **É assim que os seres humanos aprendem.**

Segundo Gardiner (1996), um dos muitos paradoxos que nós temos que encarar é que o colapso na habilidade de nossos melhores estudantes em atacar problemas matemáticos simples (tais como os problemas A e B acima) tem coincidido com a ênfase crescente em ensinar e avaliar "problem-solving" explicitamente. Nós temos que nos perguntar se os dois fenômenos estão interligados. Mais geralmente, nós devemos reconhecer nossa falha em distinguir claramente entre problem solving (o qual deveria ser um item fundamental em todo o ensino da matemática para crianças), e a teoria meta-cognitiva de “problem-solving” (a qual pode ser uma diversão fascinante para adultos em comum acordo, mas a qual não é obviamente útil – e que pode ser até mesmo danoso – para iniciantes). Ao explorar tais temas nós temos que ir além da crença atraente mais superficial de que, desde que “problem-solving” era destinado a ajudar os alunos a resolver problemas, ela não pode, portanto, estar envolvida no já observado declínio na habilidade para resolver problema simples.

Sobretudo, não devemos nos esquivar de aceitar conclusões desagradáveis, nem aderirmos, ao status quo, simplesmente para evitar dar conforto a alguma oposição imaginada.

Em anos recentes a educação inglesa tem testemunhado verdadeira epidemia de mudança. Se alguns têm feito objeções, eles têm feito isso de maneira ineficiente. Muitos de nós temos notado isso sem nos envolvermos – escolhendo não questionar e, portanto, deixando de esclarecer, tanto os supostos fins quanto os meios declarados. Tudo o que é preciso para o mal prevalecer é que os homens bons permaneçam em silêncio.

Uma razão pela qual nós temos tornado tão fácil a vida dos proponentes de mudança é que eles têm baseado suas reivindicações sobre uma retórica aparentemente plausível de “verdades auto evidentes”. Quem de nós escolheria publicamente se opor àqueles que nos exortam a “elevar os padrões?” Ou a dar “aulas excitantes e bom ensino para todos os alunos?” Ou a promover a participação de grupos minoritários? Ou a “preparar nossos alunos para a vida adulta”? Ou a sustentar que professores devem “motivar” o que eles ensinam? Ou a incorporar a “tecnologia moderna”? Ou àqueles que sugerem que “aprender como aprender” é mais importante do que qualquer outro fato individual, e que “problem-solving” é mais importante do que resolver qualquer problema individualmente? *Já sabemos* que tal retórica é unilateral, que mudanças mal planejadas produzem dano incalculável, e que melhoras na educação não podem ser tão facilmente obtidas, como pretendem esses slogans; no entanto não é fácil desafiar esse otimismo ingênuo sem se parecer como um remanescente de alguma era pré-histórica.

Alguns podem ter-se sentido obrigados a aprender e mesmo a utilizar este novo discurso educacional. E alguns poucos podem ter tido sucesso em entrelaçar essas novas demandas com seus métodos tradicionais. Mas a maioria, embora permanecendo calada, reluta em devotar-se a essa nova ortodoxia – esperando, contra qualquer esperança, contrariando seu sentimento instintivo, de que algo de bom possa surgir inesperadamente. A retórica pode ser mal planejada e os esquemas baseados nela podem ser apressadamente juntados; contudo, pelo menos seus propósitos declarados parecem ser bem intencionados. A estrada para o inferno está pavimentada, precisamente, com estas esperanças piedosas.

Gardiner observa que não seria razoável afirmar que não surgiu nenhum resultado positivo desta convulsão dos últimos 15 anos. Mas "o que eu afirmaria é que quaisquer benefícios têm sido sociais e não matemáticos: as salas de aula de matemática são geralmente lugares mais amistosos do que eram antes." Entretanto, Gardiner prossegue, o total impacto matemático de mudanças recentes poderia ser resumido pela afirmação de que nós não apenas perdemos nosso caminho, mas também jogamos o mapa fora, e estamos rapidamente atingindo o estágio onde relativamente poucos professores, os mais experientes, podem se lembrar claramente do que o mapa mostrava, ou porque ele era importante.

O conhecimento, nos é dito, está crescendo tão rapidamente, que não há mais porque nos concentrarmos em "fatos" que podem se tornar obsoletos antes que nossos alunos cheguem aos 40. Ao invés disso, nós deveríamos nos focar em habilidades mais permanentes, tais como:

a) "habilidades de pesquisa", as quais poderiam preparar os alunos a descobrir por si mesmos;

b) "criatividade", que daria aos alunos uma ideia de onde vem a literatura ou a matemática, e os ajudaria a pensar de uma forma não padronizada;

c) "problem-solving", que poderia prepará-los melhor para enfrentar o mundo real e torná-los mais úteis nesse mundo.

Gardiner afirma que a ênfase atual é totalmente inadequada por três razões:

Em primeiro lugar tais habilidades não existem por si mesmas. Não há habilidades para "problem-solving" que surgem do nada. Há somente a prática de resolver e a consequente habilidade para resolver problemas num contexto particular. Analogamente, não há habilidade generalizada chamada “criatividade” e não há essa coisa de “aprender como aprender”. As palavras têm significado somente em um contexto. O contexto deve vir primeiro e precisa ser avaliado por si mesmo.

Em segundo lugar, enquanto educadores de meia idade podem apreciar a discussão de “habilidades generalizadas” em seminários, adolescentes estão muito mais interessados no poder e no prazer que eles experimentam ao dirigir suas mentes para habilidades específicas. O jovem violoncelista deleita-se ao tocar cordas dispersas; o jovem jogador de rugby adora atracar-se com os demais na disputa da bola, ou carregar a bola sob pressão e correr com ela; e o jovem matemático se deleita em aprender a fazer malabarismos com números em sua cabeça, ou “buscando ângulos” num diagrama geométrico. Para obter progresso técnico, para simplificar esquemas mentais, é importante de tempos em tempos refletir sobre, e reorganizar, nossa experiência. Mas, tendo “refletido”, as mentes jovens querem progredir na direção de novos desafios técnicos. Em particular, em matemática os alunos precisam de uma dieta de pequenos problemas de múltiplos estágios com soluções exatas, e não uma variedade de problemas extensos, auto-indulgentes, “metodologicamente corretos” (cada um deles separado em pequenos passos para garantir sucesso) que são agora mascateados pelas bancas de exames e por aqueles que fazem SATs (testes). A metodologia auto-indulgente é inteiramente estranha ao universo dos adolescentes (como talvez seja para outros). A compreensão profunda de uma disciplina vem devagar.

Em terceiro lugar, a mudança de ênfase proposta, de “conhecimento” para “habilidades”, torna o ensino da matemática muito mais difícil. Na medida em que seja justificável estar insatisfeito com a efetividade do ensino da matemática no passado, é difícil ver como as coisas podem melhorar impondo uma regra muito mais exigente justamente sobre aqueles professores que deram origem à insatisfação inicial. Em resumo, o currículo oficial deveria se concentrar em conteúdos cuidadosamente escolhidos e claramente especificados e, ao mesmo tempo, encorajar professores, autores de livros textos e examinadores a abordar aquele conteúdo de forma imaginativa.

Colocamos em destaque o parágrafo final de Gardner, que nos exorta a uma reavaliação:

> Muitos professores ingênuos deram boas-vindas à ênfase em “problem-solving” quando ela foi introduzida pela primeira vez. Eles podem não ter percebido, na ocasião, que a ideia seria sequestrada pelos teóricos de currículos e utilizada para seus próprios fins (transformar o foco tradicional da educação sobre o conteúdo e o conhecimento em uma nova dieta de “habilidades” imaginárias; ou que as atividades resultantes se concentrariam em problemas - puros e aplicados - que não poderiam, de modo algum, ser resolvidos (a nível escolar), mas apenas explorados ou investigados; ou que o compromisso de avaliar tudo o que é ensinado, dentro de um sistema crescentemente dirigido por forças de mercado, faria com que uma atividade essencialmente imprevisível (atacar problemas) se degenerasse em um ritual totalmente previsível sem ter nada a ver nem com a matemática nem com a educação. Já é hora de reavaliar. (GARDNER, 1996, p.6)

Observemos que no GTERP, ao trabalhamos com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, uma metodologia Pós-Polya, conseguimos compreender algumas das controvérsias de Gardiner no que se refere às novas pesquisas feitas relativas ao ensino, aprendizagem e avaliação. No entanto, estamos absolutamente convencidas do mérito e valor de nossa área de pesquisa.

Capítulo 6

Concepções Errôneas e Erros

Reproduzirei abaixo, com permissão das autoras, Lourdes de la Rosa Onuchic e Norma Suely Gomes , considerações referentes à análise de concepções errôneas e erros cometidos pelos alunos, que podem indicar ao professor, tanto novas estratégias de ensino, quanto erros didáticos que ele próprio possa estar cometendo.

Os primeiros escritores que utilizaram o termo “diagnóstico/prescritivo” não se dedicaram a esclarecer o significado desses termos. Eram mais prolíficos sobre o que constituía um “bom diagnóstico” e as várias competências necessárias para fazê-lo. Mais recentemente, várias definições e novas perspectivas têm sido oferecidas sobre diagnóstico e prescrição. Numa delas o diagnóstico é definido como um exame das estruturas do aprendiz, das estruturas do conteúdo matemático que está sendo aprendido e da natureza das estruturas instrucionais em prática. A prescrição **é** definida como o processo de restabelecer a harmonia entre as estruturas do aprendiz e as estruturas da matemática por meio da intervenção direta do professor (SHULTZ; STRAWDERMAN, 1980 apud ONUCHIC; , 2009).

Um diagnóstico é caracterizado pelos julgamentos do que é valioso na aprendizagem matemática. Quando resolução de problemas, estrutura matemática, compreensão do significado ou atitude do aprendiz são vistas como importantes, o diagnóstico deverá incluir esses elementos. Desse modo, se o interesse está, principalmente, na habilidade dos estudantes, adota-se o procedimento de examinar se e onde a habilidade falha. Aqueles que estão interessados em ajudar os estudantes a construir uma compreensão conceitual ou relacional devem verificar o raciocínio que o estudante usou para chegar a uma resposta.

Igualmente, um diagnóstico eficiente acerca das concepções errôneas dos alunos, somente será possível se forem conhecidas suas principais características. Podem-se apontar algumas delas como sendo:

- preocupação com uma teoria ou princípio e não somente com uma habilidade ou fato, o que reflete uma estrutura interna;
- auto-evidência – não se sente necessidade de prová-las; os portadores sentem uma certeza intrínseca;
- coercivo – é-se compelido a usá-los numa resposta inicial;
- implícito – é difícil controlar sua influência;
- comum entre aprendizes inexperientes e mesmo nos estudantes mais academicamente capazes;
- perseverante, muito “robusta”;
- frequentemente apoiada pelo uso diário de linguagem ou de símbolos (GRAEBER; JOHNSON, 1990)

Além disso, estudos já desenvolvidos sobre este tema têm apresentado evidências de que, nas situações em que se manifestam, os erros e concepções errôneas:

- ilustram processos cognitivos comuns;
- representam uma variedade de tópicos importantes numa variedade de níveis;
- oferecem evidências de metodologias para ajudar os estudantes a controlarem a influência ou superarem essas concepções errôneas;
- incluem explicações de uma variedade de teorias de aprendizagem;

- ilustram uma variedade de fontes de apoio para a lógica do estudante.

Também há, na literatura, um grande número de classificações para as concepções errôneas e para os erros. Entretanto, todas essas caracterizações parecem apresentar um mesmo problema, que é inevitável: os erros observáveis associados com muitas concepções errôneas podem ser explicados por duas diferentes categorias ou por combinações de categorias, de modo que um sistema de classificação definitivo parece ilusório. No trabalho de Graeber e Johnson (1990) as concepções foram classificadas em quatro categorias: supergeneralização, superespecialização, tradução incorreta e concepções limitadas. Reproduzimos, a seguir, as definições e exemplos apresentados pelos autores, para essas quatro diferentes categorias.

6.1 Supergeneralização

São definidos dois tipos de supergeneralização:

Se um estudante toma um conceito, um princípio ou um procedimento que é verdadeiro para uma classe e o estende para outra classe, então o estudante está supergeneralizando.

Exemplos:

No conhecido conjunto dos inteiros, um sinal (–) precedendo um número natural designa uma quantidade menor do que zero; por exemplo, –7, –89, –2, e –67 são menores do que zero. Quando um sinal (–) é anexado a um símbolo, como em "-a", alguns estudantes veem o valor de "-a" como menor do que zero.

A expressão algébrica $(x - 3)(x + 5) = 0$ implica que ou $(x - 3) = 0$ ou $(x + 5) = 0$. Alguns estudantes continuam a aplicar este teorema do produto zero num modo semelhante para expressões que não são iguais a zero, pensando que

$$(x - 3)(x + 5) = 9$$

$$\text{implica } (x - 3) = 9 \text{ ou } (x + 5) = 9.$$

O processo do produto cruzado 7 x 24 = 3 x 56 é um procedimento aritmético completo para verificar a igualdade $\frac{3}{24}=\frac{7}{56}$. Uma abordagem dos estudantes para resolver equações algébricas como $\frac{3}{2-x}+\frac{7}{2+x}=9$ é, primeiro, achar a soma das frações no primeiro membro. Neste caso, a soma é encontrada por eles através de um procedimento idêntico àquele feito no primeiro passo do produto cruzado rotineiro. Isto é, o primeiro membro ficará 7.(2 – x) + 3.(2 + x). Alguns estudantes, aparentemente, ao terminarem esse produto cruzado e, tendo chegado a um "ponto final" do primeiro membro, finalizam o cálculo escrevendo

$$7\,(2-x) + 3\,(2+x) = 9.$$

Se um estudante toma um procedimento e o usa como um conceito, então o estudante está supergeneralizando.

Exemplo:

Quando se está dividindo por um número decimal, é preciso primeiro mudar o divisor para um número natural antes de continuar a divisão. Acrescente-se que, para ocorrer essa mudança de número decimal para número natural, é feita uma multiplicação por 10, 100, 1000, ... , no divisor. Consequentemente, para que o quociente da divisão proposta não se altere, a mesma multiplicação deve ser feita no dividendo. Isso é mostrado, em geral, para o aluno como uma regra: "para efetuar a divisão por um número decimal deve-se igualar as casas decimais no divisor e no dividendo e cortar as vírgulas". Como consequência deste procedimento comum, alguns estudantes desenvolvem um conceito de divisão que inclui "você não pode dividir por um número decimal".

6.2 Superespecialização

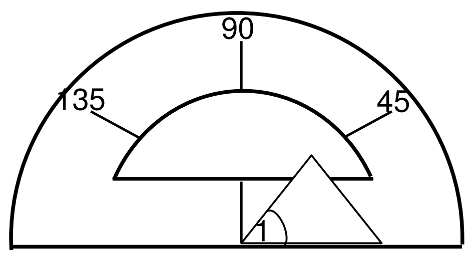
Se um estudante impõe, numa classe inteira, uma propriedade de alguma subclasse, então o estudante está superespecializando. Ou, se um estudante adiciona alguma restrição a um conceito, princípio ou procedimento que não é uma característica de uma classe inteira, então o estudante está superespecializando.

Exemplos:

O conceito de aleatoriedade sugere que cada resultado seja igualmente provável. Alguns estudantes interpretam isso considerando que cada amostra produzida por um processo aleatório deve ter uma aparência de aleatoriedade. Se o experimento é o de jogar uma moeda 6 vezes, eles não acreditam nos resultados que incluem longas sequências ou padrões particulares como CCCCCK ou KCKKKK ou CKCKCK como muito prováveis, ou que eles sejam representantes de um processo aleatório.

Alguns estudantes aceitam a propriedade distributiva assim: $a.(b + c) = ab + ac$, mas rejeitam a distribuição de (c) à direita como em $(a + b).c = ac + bc$.

Quando estão usando um transferidor para medir os ângulos de um triângulo, alguns estudantes argumentarão que os ângulos cujos lados não atingem o transferidor não têm medida. Por exemplo, esses estudantes dirão que o ângulo 1, no desenho abaixo, não tem medida. Esta dificuldade de procedimento impõe uma séria restrição ao conceito de medida no estudante.



Alguns erros comportamentais podem ser explicados como supergeneralizações ou como superespecializações, dependendo do raciocínio do aluno. Por exemplo, o estudante que reagrupa 3 Gal. 1Qt.[73] como 2 Gal. 11Qt. estaria generalizando a partir da subtração com números naturais ao reagrupar com a base 10, ou superespecializando ao pensar que sempre se reagrupa somente na base 10.

[73] Gal representa galões e Qt representa um quarto de galão.

6.3 Tradução incorreta

Muitos erros ocorrem como consequência de traduções que os estudantes fazem entre formas de representação, como: palavras, símbolos ou fórmulas, tabelas e gráficos. Tais traduções são frequentemente encontradas e cada tipo de tradução, por exemplo de palavras para símbolos, tem dificuldades associadas a ela.

Exemplos:

Quando a tradução verbal dos estudantes descreve relações entre duas variáveis nos gráficos, eles podem assumir que o gráfico corresponde a uma representação pictórica do fenômeno que gerou os dados. Assim, um gráfico da velocidade de uma bola lançada no ar fica desenhada como uma parábola com concavidade voltada para baixo (que representa a trajetória da bola) quando, na realidade, o correto seria uma parábola com concavidade voltada para cima.

Relações expressas na forma tabular são frequentemente mal traduzidas quando os estudantes tentam expressar a relação com uma fórmula. Por exemplo, 58% dos alunos do primeiro ano de Engenharia, ao buscarem uma fórmula que relacionasse os dados da tabela abaixo mostravam expressões falsas para dar o comprimento da mola em relação ao seu peso.

Comprimento S(cm)	Peso W(g)
3	100
6	200
9	300
12	400

A resposta incorreta mais frequente foi $3S = 100W$, quando o correto seria $3W = 100S$.

6.4 Concepções limitadas

Se a concepção errônea de um estudante tem origem na falta de um conceito, princípio ou procedimento, ou se o estudante tem apenas uma compreensão limitada daquele conceito, princípio ou procedimento, então o estudante está usando uma concepção limitada. Neste tipo, podem ser incluídas as "concepções fracas" (pontos de vista limitados), ou as "concepções perdidas" (os estudantes são somente capazes de recordar pedaços ou partes da concepção), ou "conhecimento frágil" (conhecimento que falha quando não há capacidade de realizar um processo pré-estabelecido).

Exemplos:

Hiebert (1986, apud ONUCHIC; , 2009) notou que muitas das dificuldades dos estudantes em ordenar e operar com números decimais são, basicamente, apoiadas ou causadas pela falta de compreensão do significado do conceito de número decimal. O mesmo pode ocorrer no trabalho dos estudantes com frações ordinárias.

Uma vez que alguns estudantes não têm o significado do conceito de decimal, eles podem supergeneralizar observações feitas no domínio dos números naturais. Por exemplo, que quanto mais dígitos houver num numeral, maior será o valor do número. Assim eles pensam que 0,009 > 0,26.

Muitos pesquisadores têm dito que os estudantes que não têm o conceito dos valores de frações como $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \text{ ou } \frac{2}{5}$, não têm meios para reconhecer a inadequação de afirmações como $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$.

O exemplo (B) acima novamente ilustra o entrelaçamento dos tipos de concepções errôneas que são evidenciadas. Os estudantes em face de uma falta de conhecimento, podem supergeneralizar conhecimento existente para realizar uma dada tarefa.

Assim, a identificação do erro ou da concepção errônea, o diagnóstico dessa concepção no trabalho dos alunos, o processo de ajudar os alunos a superá-las e a observação e análise das implicações decorrentes desse trabalho devem ser realizadas a partir de problemas. O aluno deve participar como sujeito ativo e co-construtor do conhecimento e o professor como guia e condutor do processo de ensino-aprendizagem com a avaliação integrada ao ensino para promover a aprendizagem. O professor tem a responsabilidade de organizar suas aulas selecionando e propondo atividades que deem oportunidade aos alunos de reavaliar suas crenças e concepções relativas a conceitos, princípios e procedimentos.

A metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da RP é uma ferramenta bastante eficiente para realizar esse trabalho. Trata-se de uma metodologia onde um problema é ponto de partida e orientação para a aprendizagem, e a construção do conhecimento far-se-á através de sua resolução. Professor e alunos, juntos, desenvolvem esse trabalho e a aprendizagem se realiza de modo colaborativo em sala de aula. Reitere-se que, nesta metodologia, os problemas são propostos aos alunos antes mesmo de lhes ter sido apresentado formalmente o conteúdo matemático que, de acordo com o programa da disciplina para a série atendida, é pretendido pelo professor, necessário ou mais apropriado à resolução do problema proposto. Dessa forma, o ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com um problema que expressa aspectos-chave desse tópico e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis ao problema dado. A avaliação do crescimento dos alunos é feita, continuamente, durante a resolução do problema. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2005).

A metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas tem sido sistematicamente utilizada e pesquisada, em todos os níveis de ensino, pelo GTERP.

Aproveitando as possibilidades que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas oferece, criam-se ambientes de aprendizagem extremamente favoráveis à construção e reconstrução do conhecimento. Acreditamos que ela, entre outras que atualmente se fazem presentes, seja, para os professores, uma boa alternativa para a prática docente e, aos estudantes, uma oportunidade de construir conhecimento matemático através da busca e do aproveitamento de seu próprio potencial e de suas próprias habilidades, assim como de suas concepções prévias, mesmo que errôneas. Entretanto, para que seja incorporada à prática profissional dos licenciandos em Matemática, e de professores de matemática é preciso que seja efetivamente vivenciada durante a formação desses futuros professores em seu curso de Licenciatura e em encontros de Educação Matemática para professores dando-lhes a formação necessária para que compreendam a importância de um trabalho consciente no tocante a essas concepções errôneas, suas e de seus futuros alunos. É necessário que estes assuntos sejam estudados e que a resolução de problemas seja analisada e discutida nas disciplinas pedagógicas da Licenciatura. Mas isso não é suficiente. É fundamental que ela seja utilizada pelos docentes que ministram disciplinas nesses cursos, não só para promover a construção de conhecimento matemático específico. Também para oferecer a licenciandos e outros professores a oportunidade de vivenciar e, assim, incorporar à sua prática, essa forma alternativa e mais atual de trabalho com resolução de problemas nas aulas de Matemática, sempre que possível e, em particular no tratamento e superação das concepções errôneas como caminho para a aprendizagem matemática.

Capítulo 7

Um Novo Modelo Modificado e a Pergunta da Pesquisa

7.1 Modelo Modificado 2

Conforme observado por Romberg (1992), a construção de um modelo preliminar, por envolver uma seleção de variáveis que supostamente operam sobre o fenômeno de interesse, ajuda na compreensão desse fenômeno, servindo como um ponto de partida e orientação para o pesquisador. Por outro lado, após algumas etapas do processo de pesquisa já terem sido cumpridas, um reexame do fenômeno pode levar a uma nova seleção de variáveis e à identificação de novas relações entre elas e, portanto, à elaboração de um novo modelo. Assim, já esperávamos que, ao consultar especialistas nas quatro áreas pesquisadas, o Modelo Modificado sofresse mudanças. Mas não esperávamos tantas. Analisando o que cada um desses "outros" queria nos dizer percebemos que:

- Os documentos oficiais, refletindo resultados de um sem número de pesquisas em educação matemática, fornecem-nos um referencial sólido no que diz respeito a conteúdos, objetivos, competências e habilidades, e indicam a Resolução de Problemas como ponto de partida da atividade matemática. Em particular, com relação ao ensino-aprendizagem da álgebra, os documentos oficiais nos fornecem diretrizes para a apresentação dos conteúdos, cuidadosamente elaboradas, incluindo discussão de exemplos, formas de ensino e observações a respeito das dificuldades inerentes ao aprendizado da álgebra.

- Na História da Função, vista como inserida na História da Álgebra, e esta, por sua vez, inserida na História da Matemática, podemos encontrar tanto argumentos que evidenciam a importância de se aprender o conceito de função quanto formas de se ensinar e aprender esse conceito.
- A Resolução de Problemas, com sua Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, é um caminho bastante recomendado por pesquisadores e desenvolvedores de currículos;
- As Concepções Errôneas serviriam para, em trabalhos de alunos de diferentes séries, ajudar a diagnosticar as dificuldades dos alunos no ensino e aprendizagem de função.

Desse modo, nosso Modelo Modificado 1 pôde se apresentar inteiramente reelaborado, como mostrado a seguir.

Modelo Modificado 2

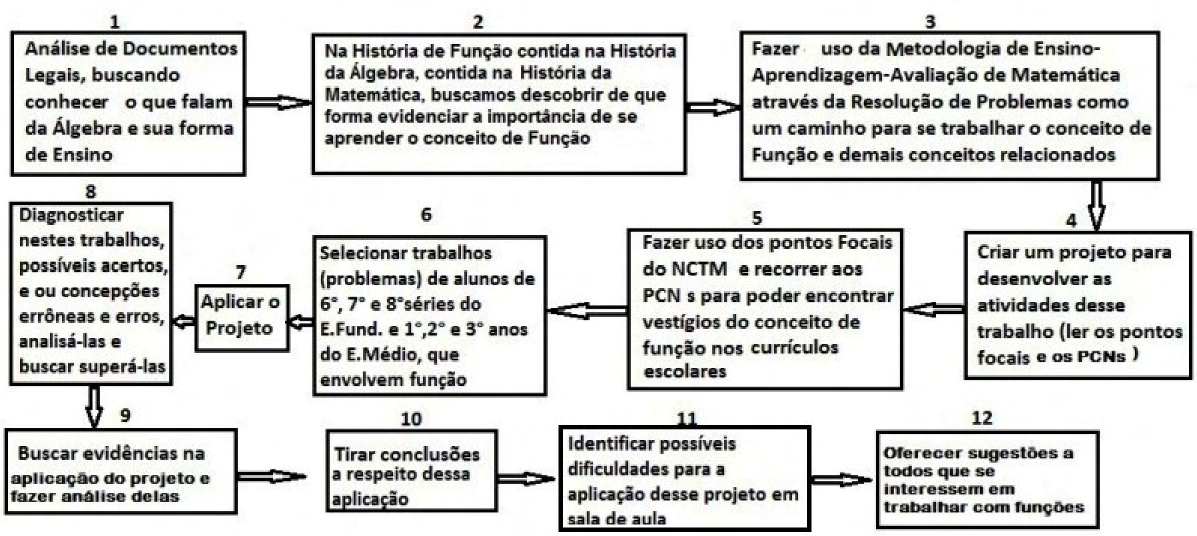


Figura 12

7.2 A Pergunta da Pesquisa

Absorvendo as ideias dos “outros” que falaram sobre as bases de pesquisa necessárias ao nosso trabalho e, assim, tendo percorrido o primeiro bloco de Romberg, em suas atividades (1), (2) e (3), pudemos enxergar, não uma única pergunta para a nossa pesquisa, mas um conjunto de questões que podem ser formuladas do seguinte modo:

1. Como o conceito de função pode surgir e se sedimentar com a utilização da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?

   1.1 Que tipos de atividades podem levar o aluno a construir o conceito de função?

   1.2 Com essa metodologia, a introdução do conceito de função, feita normalmente no 1º Ano do Ensino Médio, poderia ser antecipada? Desde que série acredita-se ser possível essa antecipação?

2. Como o estudo dos erros cometidos pelos alunos pode ajudar no processo de ensino-aprendizagem?

   2.1- Tendo em vista as concepções errôneas apresentadas em nosso trabalho, como a análise de erros pode ajudar os professores no processo de ensino-aprendizagem do conceito de função?

   2.2- Tendo em vista os Princípios de Aprendizagem descritos em nosso trabalho, como o estudo de erros pode ajudar o professor no processo de ensino-aprendizagem do conceito de função? E como o próprio aluno pode aprender com seus erros?

Com essas questões respondidas, analisadas e justificadas, pode-se criar um caminho bem delineado para o ensino-aprendizagem e, consequentemente, avaliação do desenvolvimento do conceito de função, no que diz respeito ao trabalho em sala de aula.

Conforme indicado em nosso Modelo Modificado 2, para tirar conclusões a respeito da construção, compreensão e significado do conceito de função, adotando a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, respeitando o que dizem os Documentos Oficiais sobre o Ensino de Álgebra e, em especial, o de Funções, e analisando, diagnosticando e ajudando os alunos a superar suas concepções errôneas e erros, dentro dos diferentes períodos de escolaridade, selecionamos problemas resolvidos por grupos de alunos, em diferentes séries, e analisamos o trabalho realizado pela professora e pelos alunos. Os problemas selecionados, bem como o trabalho de análise realizado, serão apresentados no capítulo 9.

Capítulo 8

Estratégias e Procedimentos

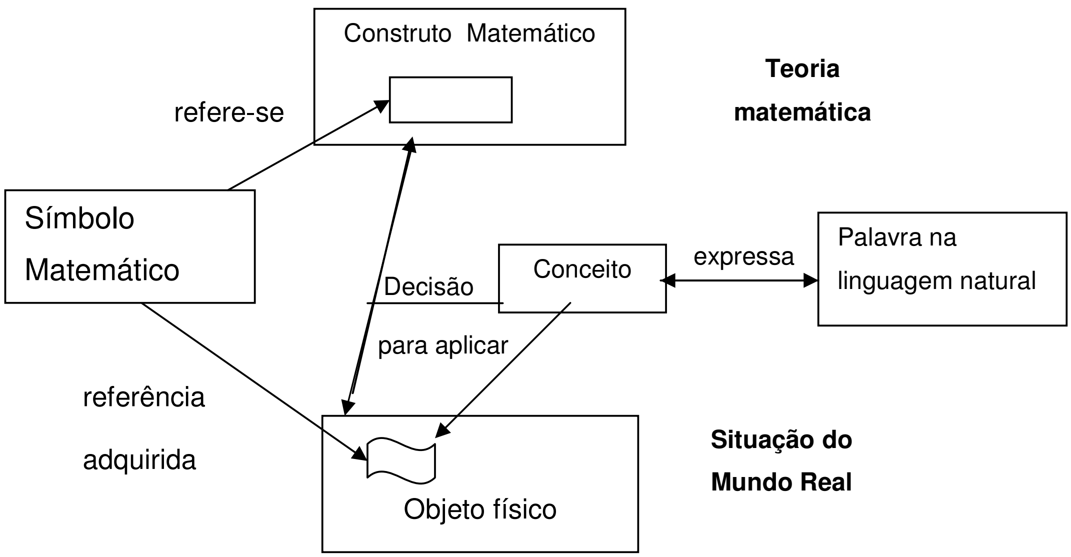
8.1 Estratégias e Procedimentos Selecionados Visando a responder as questões do Problema da Pesquisa

Como disse Romberg (1992), para realizar uma pesquisa, “a decisão sobre que métodos utilizar segue diretamente das questões que se seleciona, da visão de mundo na qual essas questões estão inseridas, do modelo preliminar que foi construído para explicar o fenômeno de interesse, e da conjectura que se faz a respeito da evidência necessária”.

Passamos, então, para o segundo bloco de Romberg, compreendendo as atividades (5) e (6), que requerem do pesquisador a capacidade de planejar e programar caminhos e procedimentos que o levem a responder ao Problema da Pesquisa. Esse planejamento se apresentou para nós como um projeto de pesquisa envolvendo uma análise do trabalho desenvolvido por alunos de diferentes séries curriculares quando postos diante de situações-problema envolvendo o conceito de função.

Como professora pesquisadora, refletindo sobre o material coletado, pudemos compreender a necessidade, implícita ou explicitamente revelada em todo trabalho de pesquisa em educação matemática, de se encontrar dinâmicas diferentes para o trabalho em sala de aula. Devemos fazer com que nossos alunos possam dar sentido aos nomes dados aos conceitos que procuramos definir. Que saibam relacionar esses nomes dados em linguagem vernácula, com objetos do mundo físico; que identifiquem um determinado construto matemático dentro de uma teoria matemática; e, por fim, que possam relacioná-los a um símbolo matemático que expresse e reflita uma técnica operatória.

No artigo, Mathematical Meaning and Applicational Meaning in the Semantics of Fractions and Related Concepts [74], de Stellam Ohlsson, publicado em *Number Concepts and operations in the Middle Grades* [75] (NCTM, 1989, 3ª edição: 1991), encontramos um diagrama expressando a relação entre o significado matemático e o significado aplicacional de um conceito.



Uma descrição de uma situação do mundo real em termos de um <u>construto</u> <u>matemático</u> envolve pelo menos as quatro seguintes entidades: (1) um construto matemático; (2) uma situação do mundo real; (3) um conceito da linguagem natural que especifica o sentido do constructo dentro de uma particular aplicação; e (4) uma correspondência entre o constructo matemático e a situação do mundo real que especifica a referência do constructo dentro de uma particular aplicação.

---

[74] Significado Matemático e Significado Aplicacional na Semântica das Frações e Conceitos Relacionados

[75] Conceitos Numéricos e operações nas 6º., 7º. e 8º. séries

Uma aplicação significa tanto um sentido como uma referência a um construto matemático. Chama-se, a esse tipo de significado, significado aplicacional.

Um construto matemático adquire seu significado a partir da teoria (postulados e teoremas) na qual ele está encaixado e as proposições dessa teoria funcionam como postulados de significado para seus construtos.

Dando continuidade à nossa pesquisa, passamos para o 2° Bloco de Romberg, lançando mão, do Modelo Modificado 2, onde as variáveis aparecem nele dispostas, (p.160).

A atividade 5, nesse Bloco, sugere como estratégia geral (E_G), criar um projeto para desenvolver o trabalho pretendido por nós, ao analisar os trabalhos de alunos, de diferentes séries, visando à construção do conceito de função e de outros a ele relacionados.

Olhando para o Modelo Modificado 2, pudemos compreender que a estratégia geral E_G deveria ser composta por uma série de estratégias auxiliares: E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8 .

Como E_1, vimos que tudo o que o passo 1, do Modelo Modificado 2 pedia, já havia sido trabalhado no Capítulo 3 – Documentos Oficiais.

A estratégia E_2, considerando a História da função contida da História da Álgebra que, por sua vez, está contida na História da Matemática já fora trabalhada no Capítulo 4 – A inserção do tópico Funções no domínio da Álgebra.

O passo 3 do Modelo Modificado 2, já havia sido considerado no Capítulo 5 – Resolução de Problemas – e, em seu item 5.2, o tema emergente Ensinando Matemática através da resolução de problemas, nos levaria à construção de um Roteiro de trabalho para a sala de aula, como uma metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação, gerando a estratégia E_3. A estratégia E_3, com uma visão associada à de avaliação, foi considerada como a estratégia E_4.

A partir daí, outros passos do Modelo Modificado 2 passaram a constituir-se como novas variáveis para o Problema de Pesquisa, e a exigirem novas investigações.

Como E_5 faremos uso dos pontos focais curriculares do NCTM e procuraremos encontrar, nos PCNs e nas Propostas Curriculares do Estado de São Paulo, recomendações e conteúdos referentes ao conceito de função.

Como E_6, faremos uma seleção de trabalhos realizados pelos alunos, das diferentes séries escolhidas – 6ª, 7ª, e 8ª do Ensino Fundamental e 1°, 2° e 3° anos do Ensino Médio. Nesse passo deveremos analisar com bastante atenção os trabalhos dos alunos, uma vez que temos, como propósito, diagnosticar caminhos e identificar compreensões e concepções errôneas que tenham relação com a introdução, a evolução e a aplicação do conceito de função, e outros conceitos relacionados, ao fazer uso da resolução de problemas, antes mesmo de terem sido trabalhados os conteúdos matemáticos necessários à sua resolução.

Consideramos que seria importante criar questionamentos que pudessem ser comuns a todas as séries e outros específicos a cada uma delas.

Como E_7, o passo seguinte seria o da aplicação desse projeto.

Como E_8, visamos diagnosticar, em todos esses trabalhos, acertos, concepções errôneas e erros, analisá-los e buscar superar as dificuldades encontradas.

Correspondentes a essas estratégias selecionadas, a atividade 6 de Romberg pede por procedimentos. Assim, correspondente a E_G ter-se-ia o procedimento P_G : a criação do projeto.

Para chegar a P_G devemos selecionar os procedimentos auxiliares P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 e P_8 correspondentes às estratégias E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7 e E_8, e pô-los em ação. Para isso devemos construir inicialmente um roteiro de atividades.

Roteiro de Atividades

1. Agrupar, em blocos, atividades desenvolvidas por alunos das 6ª, 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e por alunos dos 1°, 2° e 3° séries do Ensino Médio.
2. Analisar cada bloco escolhido e selecionar aquelas atividades que dizem respeito ao conceito de função e demais conceitos relacionados.
3. Listar questionamentos relativos às atividades a essas seis séries.

De início foram levantados possíveis questionamentos relativos às atividades a essas seis séries, reconhecendo a possibilidade de utilizar somente aqueles que mais de perto atendessem à nossa pergunta da pesquisa em suas várias indagações.

Verificar, para cada série:

1) Se todas se referem de alguma forma ao conceito de função.
2) Se todas as atividades trabalham a partir de resolução de problemas.
3) Se essas atividades usam a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação ou outra metodologia.
4) Se, nessas atividades, os alunos percebem a relação das palavras função e dependência. Que palavras os alunos usaram para expressar uma relação funcional?
5) Como o professor nessas atividades vê o conceito de função nos problemas selecionados?
6) Se há nessas atividades, indícios de concepções errôneas: (a) supergeneralização, (b) superespecialização, (c) tradução incorreta e (d) concepções limitadas.

7) De que forma o professor, nessas atividades, se preocupou em chamar a atenção dos alunos, na resolução dos problemas, sobre o conceito de função?

8) Em cada série, o que o professor, nessas atividades, pode fazer para levar o aluno a perceber a relação funcional entre as variáveis contidas nos problemas?

9) Como o professor pode averiguar a dificuldade da passagem da linguagem falada para a linguagem matemática dos alunos?

10) Se nessas atividades, foram seguidas as recomendações curriculares e a distribuição de conteúdo por séries, dos PCNs e/ou das Propostas Curriculares do Estado de São Paulo? E do NCTM? E dos Pontos Focais Curriculares?

11) Com relação ao conteúdo, foram trabalhadas formas de raciocínio algébricos por meio de:

- Padrões lógicos, tanto por meio de símbolos quanto por meio de palavras?
- Representações como diagramas, retas numeradas, tabelas, gráficos que podem ser utilizados para ilustrar situações matemáticas e relações?
- Simbolismo, envolvendo equações e variáveis, para expressar generalizações de padrões e relações?
- Variáveis, com significados diferentes, ora representando variáveis que variam ou mudam, como em uma função; ora como valores desconhecidos específicos, como em uma equação, e ora representando quantidades, como em uma expressão generalizada ou fórmula?
- Equações e desigualdades, utilizadas para expressar relações entre quantidades?

12) A possibilidade, nessas atividades, de levar o aluno a um automonitoramento, como co-construtor de seu próprio conhecimento.

13) Identificar nessas atividades, aspectos cruciais do ensino da álgebra: a) álgebra como uso de letras para representar números, b) consciência

explícita do método matemático que está sendo simbolizado pelo uso tanto de números quanto de letras.

14) Analisar nessas atividades, fontes de dificuldade relativas a: a) algumas são inerentes à matéria em si; b) algumas são intrínsecas ao aprendiz; e c) algumas são consequências não intencionais advindas de técnicas geralmente boas de ensino.

15) Nessas atividades pode-se perceber, nos alunos, o envolvimento do raciocinío com proporção, com o senso de covariação, o de comparações múltiplas e com a capacidade de armazenar e processar mentalmente várias informações?

16) Nessas atividades, os Princípios da Aprendizagem foram considerados pelos professores?

17) Foi feito nessas atividades, o uso de história da função durante sua aplicação?

18) Reconhecer que chegar a resposta é menos importante do que colocar o foco no processo ou método de resolução?

19) Se os estudantes do Ensino Médio devem compreender a ideia básica de uma função como:

    a) uma regra de correspondência;

    b) tabela de duas colunas de números;

    c) um gráfico

20) Para funções simples, estudantes do Ensino Médio podem:

    a) identificar padrões?

    b) completar informações sobre domínio e imagem?

    c) descrever verbalmente regras de associação?

    d) escrever uma função usando notação formal de função?

e) representar no plano cartesiano a função?

Como professora-pesquisadora, pretendemos analisar, em todas as séries, a possibilidade de se antecipar a introdução do conceito de função antes que este seja introduzido formalmente na 1ª série do Ensino Médio. No entanto, no que diz respeito às questões acima, serão consideradas, na análise de cada série em particular, somente as questões que se mostrarem mais adequadas àquela série.

No próximo capítulo, passaremos para o Bloco 3 de Romberg, buscaremos por evidências, conclusões e, a partir daí, procuraremos identificar dificuldades em se trabalhar dessa maneira. Então, procuraremos oferecer sugestões a todos que se interessem em trabalhar com funções em diferentes níveis de escolaridade.

Capítulo 9

O Procedimento Geral em Ação

A estratégia geral elaborada previu um projeto que pudesse analisar trabalhos de alunos, de diferentes séries, visando à construção do conceito de função e de outros a ele relacionados. Correspondente a essa estratégia geral foi estabelecido, como procedimento geral, a criação desse projeto. Esse projeto foi posto em ação, conforme veremos a seguir.

Neste capítulo apresentamos uma análise de trabalhos realizados por estudantes, das diferentes séries, no que se refere então, ao ensino-aprendizagem do conceito de função e de conceitos a ele relacionados. Observemos que, para essa análise, utilizamos dados construídos à partir de todo estudo e trabalho desenvolvidos sobre teorias e teóricos consultados. Como observado anteriormente, a possibilidade de se antecipar a introdução do conceito de função foi uma questão central para nós.

Para um melhor acompanhamento do leitor a respeito das atividades desenvolvidas pelos alunos e fazendo uso dos questionamentos levantados no final do capítulo 8, pudemos selecionar, para cada série, qual deles seria mais conveniente. Assim, vários tipos de atividades surgiram e foram classificadas em três tipos:

- Tipo I - Atividades realizadas em grupos, de até 4 alunos, desenvolvidas pela ação da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.
- Tipo II - Atividades realizadas individualmente, como avaliação bimestral requerida pela instituição de ensino, após os alunos terem trabalhado seguindo a referida metodologia;
- Tipo III - Atividades realizadas em grupos, de até 4 alunos, referentes ao desenvolvimento de projetos interdisciplinares, com temas transversais, usando material elaborado pela professora, ou disponibilizado nos endereços:

  http://www.cdcc.usp.br/exper/medio/matematica/matematica_medio/1_estudo_da_poluicao_p.pdf

  http://www.cdcc.usp.br/exper/medio/matematica/matematica_medio/1_estudo_da_poluicao_a.pdf;
- Atividades realizadas à partir do ensino tradicional vigente.

Com relação à Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avalição de Matemática através de Resolução de Problemas consideramos que:

- O problema deve ser utilizado, sempre que possível, como ponto de partida para a construção do novo conhecimento, com o processo de ensino-aprendizagem centrado nos alunos, permitindo-lhes que utilizem suas ideias e estratégias. A avaliação contínua deve estar integrada ao ensino de modo a melhorar a aprendizagem.
- A formalização dos conceitos trabalhados deve ocorrer de modo gradual, conforme os problemas vão sendo resolvidos, dando tempo aos estudantes para reflexão e ação.

Para pôr em prática o trabalho com a metodologia acima mencionada, usamos, com freqüência no GTERP, para nossas salas de aula, um roteiro de atividades, apresentado a seguir:

1. Entregar uma atividade individual, ler e compreender essa atividade;

2. Formar grupos para compartilhar, uns com os outros, o problema;
3. O papel do professor é o de observador, organizador, mediador, incentivador da aprendizagem;
4. Resultados na lousa, isto é os resultados obtidos são anotados na lousa pelos grupos quer estejam certos ou errados e aqueles feitos por diferentes caminhos;
5. Plenária, assembléia com os todos participantes;
6. Análise dos resultados onde são trabalhados os pontos de dificuldade;
7. Consenso sobre o resultado obtido;
8. Formalização onde são colocadas as devidas definições, identificadas as propriedades e feitas as demonstrações, isto é, a formalização do conhecimento novo construído.

As atividades do Tipo I, II, III foram planejadas atendendo ao tempo didático marcado nos programas escolares, com apoio do material didático disponibilizado para todos os professores e alunos, contendo os conteúdos das propostas curriculares do estado de São Paulo, a partir de 2006. Ao considerar também o tempo de aprendizagem dos alunos, restringimo-nos a atividades que contemplassem dois dos três temas gerais, que caracterizam o papel da resolução de problemas nos currículos de matemática das escolas, a saber, *resolução de problemas como contexto* e *resolução de problemas como habilidade*, descritos em 5.1.2.

Nas atividades do Tipo III que visam o desenvolvimento de projetos interdisciplinares foram desenvolvidos dois subtemas, de um projeto maior, já institucionalizado nas nossas escolas do estado de São Paulo – o Projeto Meio Ambiente. Os subtemas “Poluição do lago numa aula de matemática” e “Consumo e meio ambiente” possibilitaram uma discussão de problemas relacionados com experiências do mundo real, envolvendo conteúdos do currículo a serem aprendidos, servindo para convencer os alunos (e também alguns dos professores de outras áreas) da importância e do valor da matemática. No que diz respeito aos temas da resolução de problemas discutidos, no capítulo cinco, essas atividades têm um caráter *justificador,* pois se referem a temas facilmente identificáveis na vida cotidiana e justificam, assim, para os alunos, a matemática que se ensina, e que também têm um caráter *motivador*, pois procuram conduzir ao aprendizado de conteúdos específicos (proporcionalidade, porcentagem, função). Ainda, essas atividades têm um caráter de *recreação*, por envolverem pesquisa extraclasse (consulta a preços, receitas culinárias de família, pesquisas na internet, etc), e servem como um *veículo* através do qual um novo conceito ou técnica deve ser construído.

9.1 Atividades desenvolvidas e aplicadas na 6ª série/ 7° ano

Apresentaremos a seguir atividades desenvolvidas nas 6as séries/7os anos do Ensino Fundamental, fazendo uma análise dos resultados e apresentando diagnósticos, seguindo algumas das ideias sugeridas pelo roteiro de atividades do capítulo anterior.

AtividadeTipo III

1. Sessão de vídeo: Pato Donald no país da matemágica, de Walt Disney.

Nesse vídeo, o personagem Pato Donald é o aluno sendo conduzido a um passeio pela história da matemática da Grécia antiga pelo narrador-professor, que introduz alguns dos princípios básicos da matemática, tais como proporcionalidade, ângulo, formas geométricas e probabilidade, ao discorrer sobre música, escultura, pintura, arquitetura, mecânica, esportes e outras atividades do nosso dia a dia. Em particular, a noção de proporcionalidade é introduzida através da interação, visual e verbal, entre narrador e aluno, e as fantasias introduzidas continuamente pelo narrador, auxiliam o espectador na construção de novos significados.

Essa atividade foi desenvolvida em duas aulas. Os alunos assistiram ao filme na primeira aula e, ao término da sessão, as perguntas surgiram naturalmente. Após uma pequena discussão dos vários temas levantados no vídeo foram distribuídas algumas questões para os grupos de alunos, para serem refletidas e respondidas individualmente.

Ainda que, num primeiro momento, ao usar esse vídeo, tínhamos como objetivo introduzir intuitivamente a noção de proporcionalidade, posteriormente ele também nos auxiliou a trabalhar outros conteúdos, particularmente geometria e combinatória.

As atividades apresentadas abaixo são respostas às perguntas objetivas, formuladas no enunciado, com a intenção de tanto verificar em que medida os alunos assimilaram os novos conceitos e significados apresentados no vídeo, quanto reforçar esses conceitos e significados.

Enunciado e respostas dos alunos

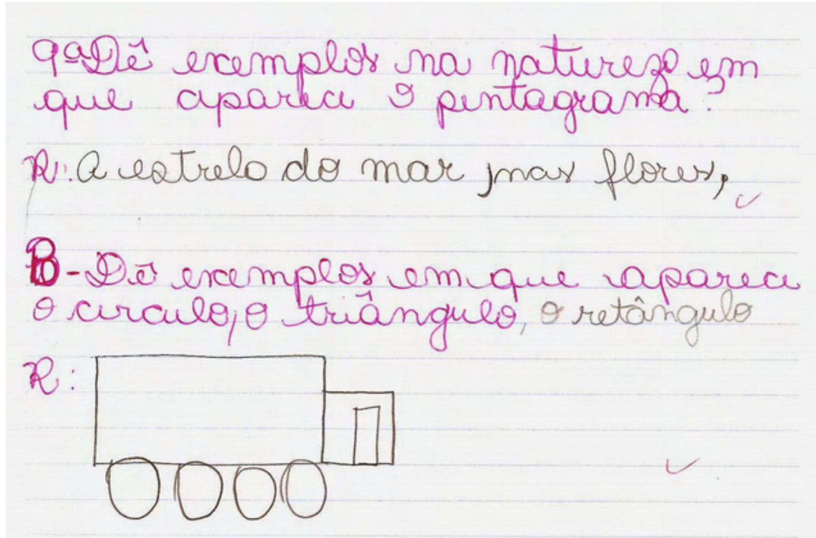
1a)

1- Que país iniciou a aventura do pato Donald?
Grécio
2- Como se chama o símbolo secreto da comunidade pitagorica?
pentagramo
3- Que intelectual deu origem ao sistema musical de hoje?
Pitagoras
4- Como foi dividida inicialmente as cordas musicais?
Ele dividiu a corda no meio, essa metade ele dividiu no meio, essa metade ele dividiu no meio, até chegar nas 7 notas musicais
5- Dê exemplos onde aparece o retangulo de ouro?
O Panteon, o quadro da monalisa
6- Que propriedade importante conserva o retangulo de ouro?
Todos os Retangulos tem a mesma porporção

1b)

7- Oque é um retangulo de ouro?
R  Ele era usado nas construções da antiga grecia

1c)



9ª) Dê exemplos na natureza em que aparêca o pentagrama?

R: A estrelo do mar, nas flores,

1d)

10- Dê exemplos em que apareca o círculo, o triângulo, o retângulo

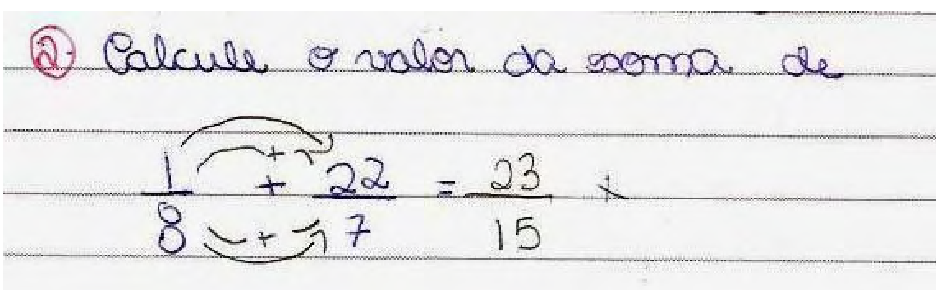
R:

Um dos propósitos de usar esse vídeo foi o de fazer com que os estudantes se motivassem ao ver a matemática na história da humanidade, pudessem se familiarizar com fatos de conhecimento geral necessários à formação do cidadão.

Atividade Tipo I

2. Desenvolvendo atividades que envolvem aritmética e proporcionalidade

2a)

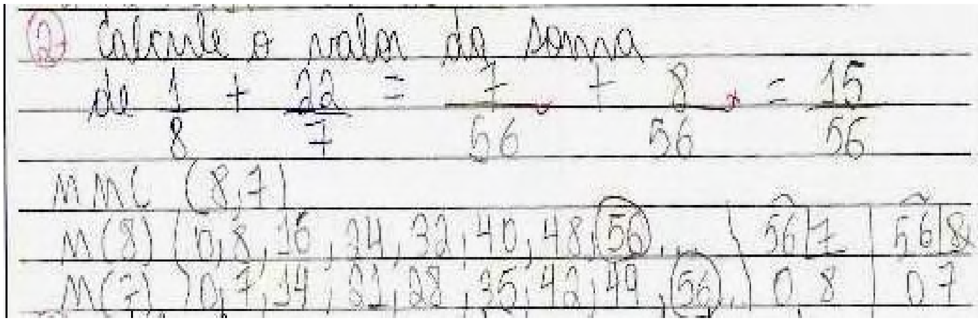


② Calcule o valor da soma de

$$\frac{1}{8} + \frac{22}{7} = \frac{23}{15}$$

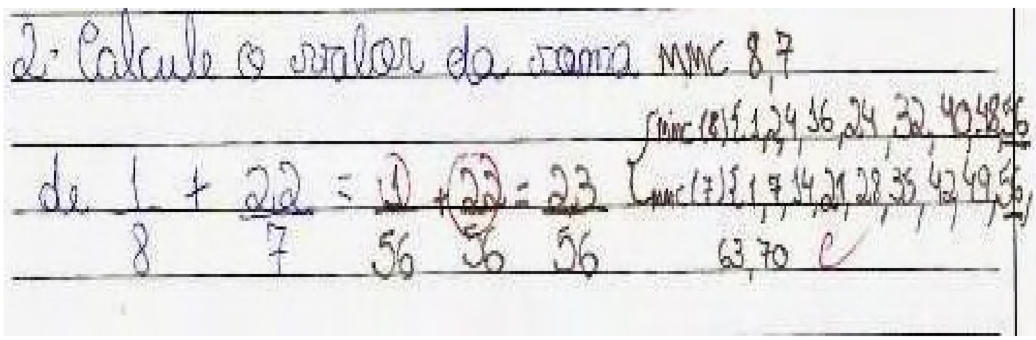
Nota-se que o grupo não conhece o procedimento de adicionar frações;

2b)



Este grupo revela uma concepção errônea de superespecialização. Os estudantes adicionara uma restrição ao procedimento geral de adicionar frações;

2c)



Temos uma concepção errônea de concepção limitada. O estudante conhece parte do procedimento de adicionar frações.

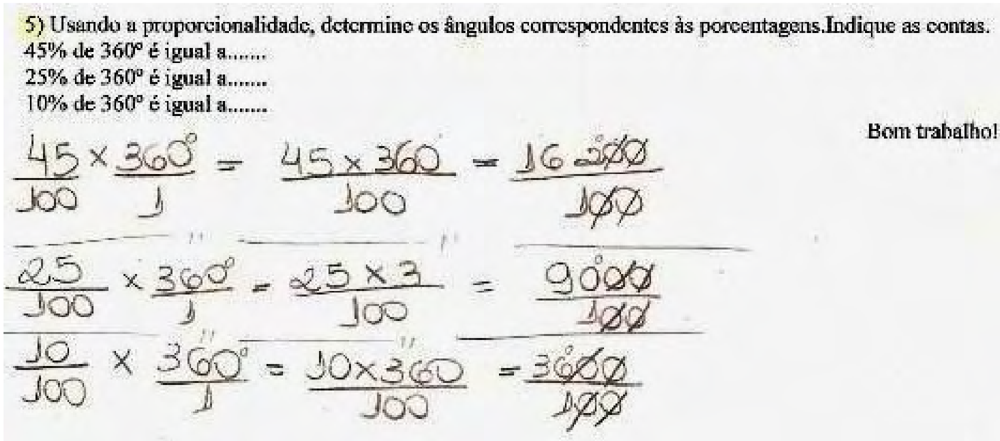
No desenvolvimento das atividades em grupos, os exemplos 2a), 2b) e 2c) revelam a ocorrência de erros cognitivos comuns dos estudantes. Recorrendo ao nosso capítulo 6, referente à concepções errôneas e erros, podemos dizer que:

O professor, ao observar e analisar esses erros, poderá promover, durante o processo de ensino-aprendizagem dos estudantes, uma melhor compreensão do método de adicionar frações, e ao mesmo tempo mostrar a eles a importância de averiguarem seus resultados com os outros, e a necessidade de rever os resultados e a forma como eles foram obtidos.

Atividade Tipo II

2. Desenvolvendo atividades que envolve aritmética e proporcionalidade.

2d)



5) Usando a proporcionalidade, determine os ângulos correspondentes às porcentagens.Indique as contas.
45% de 360° é igual a.......
25% de 360° é igual a.......
10% de 360° é igual a.......

Bom trabalho!

$\frac{45}{100} \times \frac{360^\circ}{1} = \frac{45 \times 360}{100} = \frac{162\cancel{00}}{1\cancel{00}}$

$\frac{25}{100} \times \frac{360^\circ}{1} = \frac{25 \times 3}{100} = \frac{90\cancel{00}}{1\cancel{00}}$

$\frac{10}{100} \times \frac{360^\circ}{1} = \frac{10 \times 360}{100} = \frac{36\cancel{00}}{1\cancel{00}}$

Na atividade 2d) de avaliação individual, o estudante embora tenha obtido os resultados corretos e tenha mostrado conhecer a técnica operatória relativa ao cálculo de porcentagens, não podemos afirmar que ele compreendia satisfatoriamente o raciocínio por trás dessa técnica. Se tivéssemos sugerido aos alunos que também interpretassem e resolvessem esse problema utilizando os conceitos de razão e proporcionalidade, poderíamos tanto identificar dificuldades quanto fortalecer a compreensão conceitual e a fluência processual dos alunos.

Outro dado importante que deixamos de considerar, por ocasião da aplicação desse problema, é que nele esta incluída a ideia de função. Considerando as grandezas, medidas de ângulo e porcentagem, dando valores ao ângulo a partir de zero graus, e considerando a lei de correspondência P=P(A), onde P é porcentagem e A é ângulo, pode-se construir uma tabela e obter uma representação gráfica da função assim construída, que estabelece uma relação de dependência entre o valor da porcentagem (variável dependente) e o valor do ângulo (variável independente).

Assim, acreditamos que o conceito de função trabalhado intuitivamente já poderia ser antecipado para a 6ª série/7°ano.

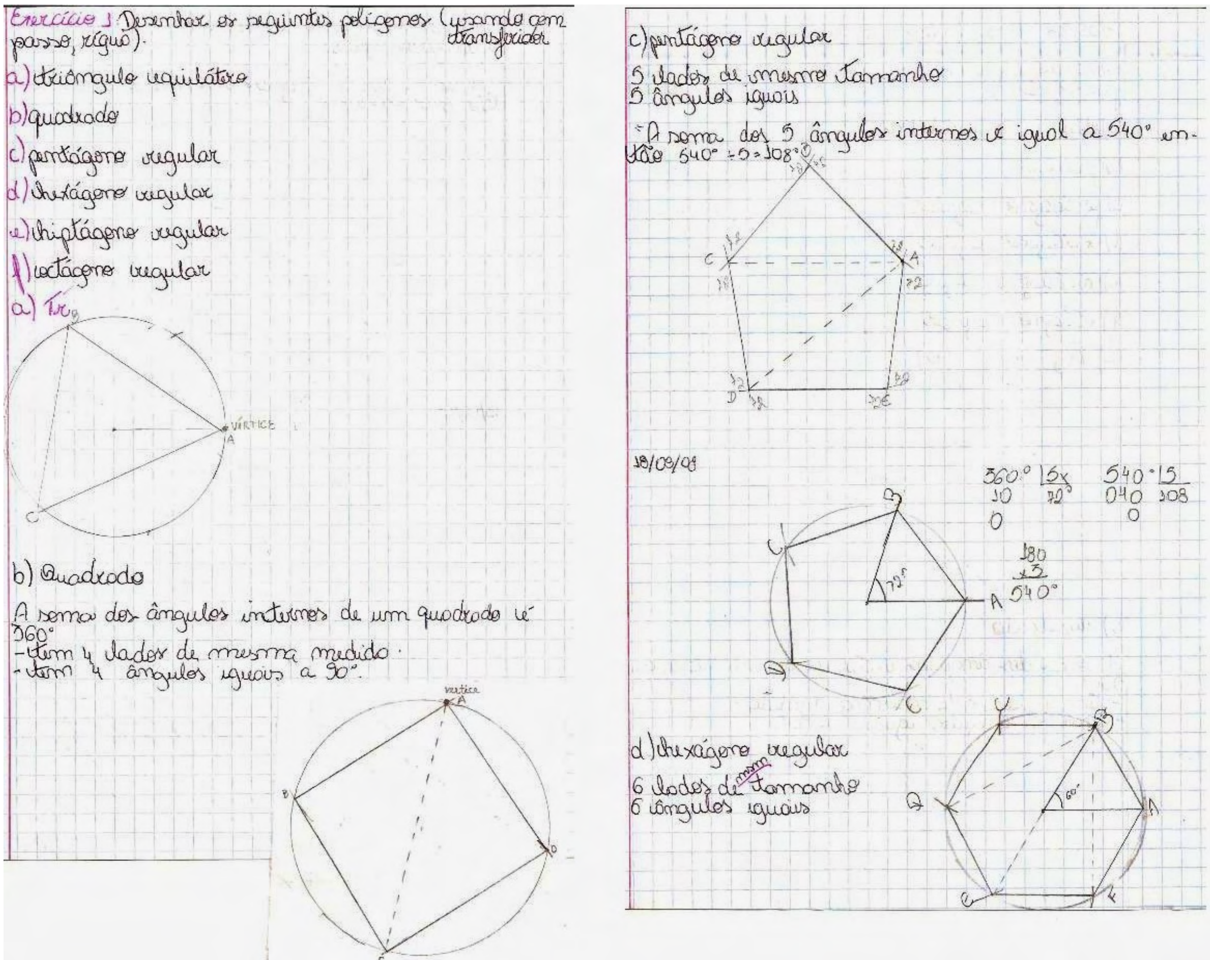
Atividade Tipo I

3. Desenvolvimento de problemas que envolvem padrões, geometria e raciocínio dedutivo para a obtenção de uma fórmula (Tempo de duração 3 aulas).

Alguns dos objetivos dessas atividades são: que o aluno mostre que sabe interpretar o que se pede no problema, que sabe apresentar valores relacionados com o problema em uma tabela e que, a partir da observação de casos particulares, consiga expressar, através de uma fórmula algébrica, a soma dos ângulos internos de um polígono regular com um número n qualquer de lados.

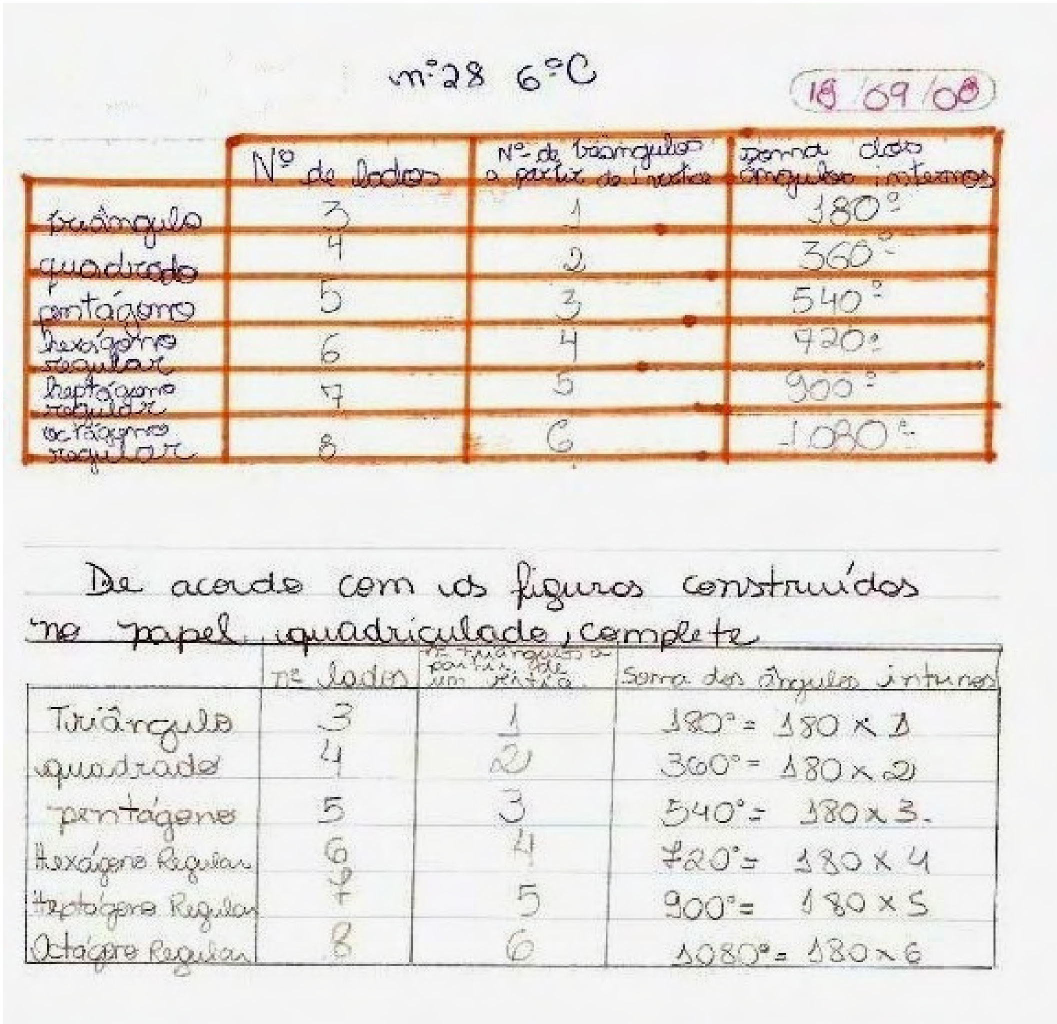
Essa atividade foi desenvolvida após os alunos já estarem familiarizados com a construção de bissetriz e mediatriz usando régua, compasso, transferidor e papel quadriculado nas aulas anteriores. E foi dada a devida importância ao manuseio desses instrumentos. Ainda assim, os alunos, em sua maioria, apresentaram dificuldades com o manuseio do compasso.

3a) Inicialmente pede-se que os grupos usando régua, compasso e transferidor desenhem no papel quadriculado polígonos regulares.



Observamos que o grupo em (3a) desenhou nas figuras linhas tracejadas representando a quantidade de triângulos possíveis de se obter a partir de um vértice do polígono.

3b) De acordo com as figuras construídas no papel quadriculado, feitas em (3a), pede-se que os grupos completem a tabela.



nº28 6ºC (19/09/08)

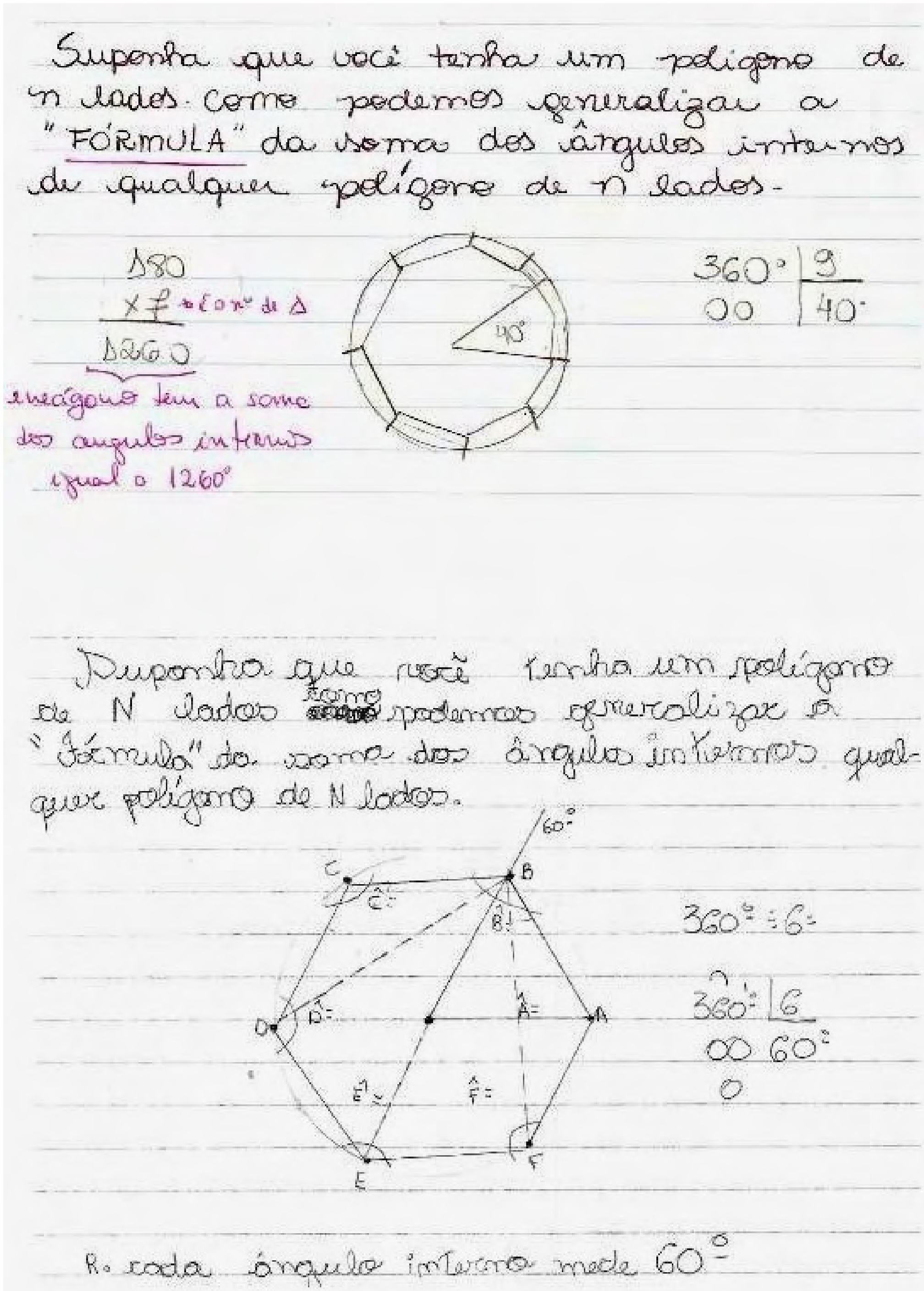
	Nº de lados	Nº de triângulos a partir de 1 vértice	Soma dos ângulos internos
triângulo	3	1	180°
quadrado	4	2	360°
pentágono	5	3	540°
hexágono regular	6	4	720°
heptágono regular	7	5	900°
octágono regular	8	6	1080°

De acordo com os figuras construídos no papel quadriculado, complete

	nº lados	nº triângulos a partir de um vértice	Soma dos ângulos internos
Triângulo	3	1	180° = 180 x 1
quadrado	4	2	360° = 180 x 2
pentágono	5	3	540° = 180 x 3.
Hexágono Regular	6	4	720° = 180 x 4
Heptágono Regular	7	5	900° = 180 x 5
Octágono Regular	8	6	1080° = 180 x 6

O problema (3b) foi resolvido seguindo as observações e os cálculos feitos durante a resolução do exercício (3a). Como já foi dito, os alunos apresentaram, nas figuras de (3a), linhas tracejadas representando a quantidade possível de triângulos obtidos a partir de um vértice do polígono e puderam fazer a associação do número de triângulos e da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo que é 180°. Isso fica explícito em uma das tabelas de (3b). O raciocínio do aluno, ao calcular a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono, mostrou que ele sabe que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180° e, ao checar a quantidade possível do número de triângulos a se construir a partir de um vértice do polígono, ele então deduziu que medida da soma dos ângulos internos de um polígono é igual a 180° vezes o número de triângulos obtidos.

3c) Nesta atividade, o grupo buscou generalizar, através de uma "fórmula", a medida da soma dos ângulos internos de qualquer polígono de n lados.

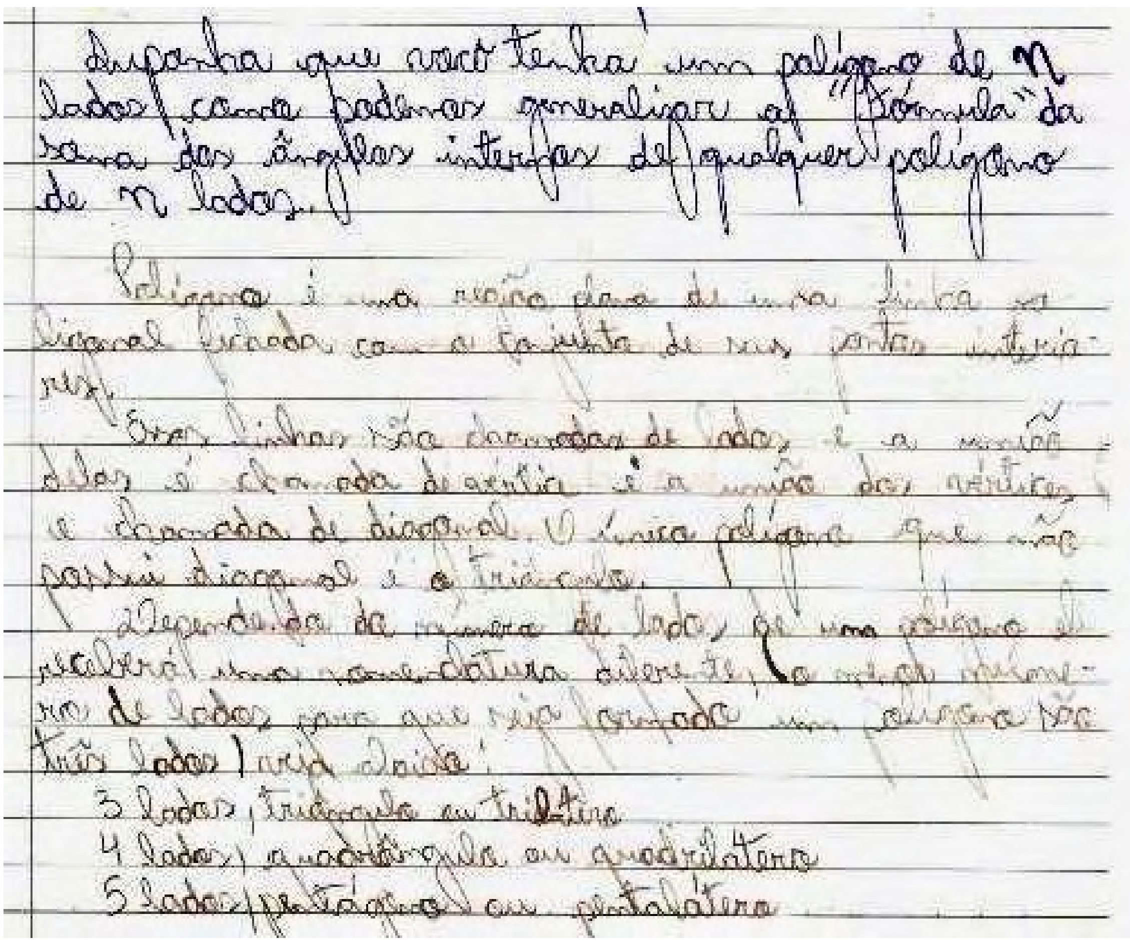

Suponha que você tenha um polígono de n lados. Como podemos generalizar a "FÓRMULA" da soma dos ângulos internos de qualquer polígono de n lados.

Suponha que você tenha um polígono de N lados como podemos generalizar a "fórmula" da soma dos ângulos internos qual-quer polígono de N lados.

R. cada ângulo interno mede 60°

O grupo em (3c) considerou apenas dois polígonos regulares. Chegou, no caso do eneágono regular, à medida da soma de seus ângulos, isto é, Si = 1260° e estendeu o problema dizendo que, nesse caso, o ângulo central mede 40°. Repetiu esse raciocínio para um hexágono regular e chegou a um ângulo central medindo 60° mas, não chegou à fórmula desejada.

3d) Este grupo também respondeu à atividade como em 3c) usando um outro caminho.


Suponha que você tenha um polígono de n lados, como podemos generalizar a "fórmula" da soma dos ângulos internos de qualquer polígono de n lados.

Polígono é uma região plana de uma linha poligonal fechada com o conjunto de seus pontos interiores.

Essas linhas são chamadas de lados, e a união de dois lados é chamada de vértice, e a união dos vértices é chamada de diagonal. O único polígono que não possui diagonal é o triângulo.

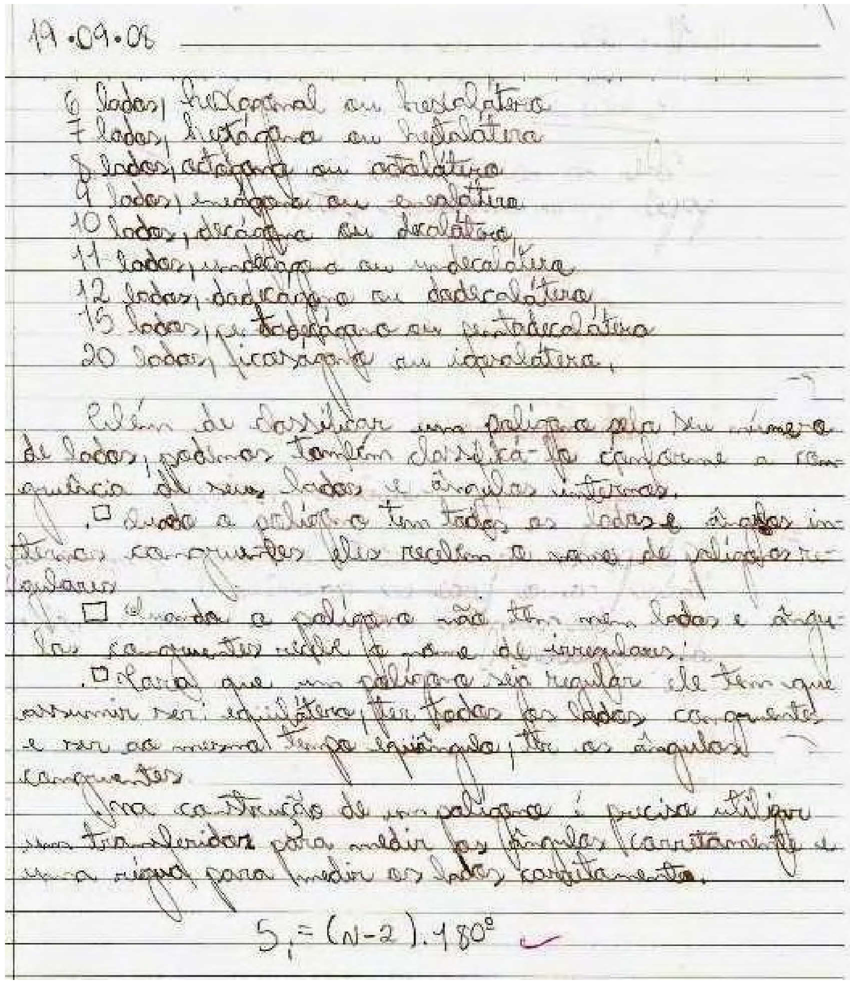
Dependendo do número de lados, o polígono receberá uma nomenclatura diferente, o menor número de lados para que seja formado um polígono são três lados (veja abaixo):

3 lados, triângulo ou trilátero

4 lados, quadrângulo ou quadrilátero

5 lados, pentágono ou pentalátero

Continuação



19.09.08

6 lados, hexágono ou hexalátero
7 lados, heptágono ou heptalátero
8 lados, octógono ou octalátero
9 lados, eneágono ou enealátero
10 lados, decágono ou decalátero
11 lados, undecágono ou undecalátero
12 lados, dodecágono ou dodecalátero
15 lados, pentadecágono ou pentadecalátero
20 lados, icoságono ou icosalátero.

Além de classificar um polígono pelo seu número de lados, podemos também classificá-lo conforme a congruência de seus lados e ângulos internos.

□ Quando o polígono tem todos os lados e ângulos internos congruentes eles recebem o nome de polígonos regulares

□ Quando o polígono não tem nem lados e ângulos congruentes recebe o nome de irregulares;

□ Para que um polígono seja regular ele tem que assumir ser: equilátero, ter todos os lados congruentes e ser ao mesmo tempo equiângulo, ter os ângulos congruentes

Na construção de um polígono é preciso utilizar um transferidor para medir os ângulos corretamente e uma régua para medir os lados corretamente.

$S_i = (n-2).180°$

Apenas este grupo, durante a plenária, observou que o número de triângulos obtidos ao decompor o polígono é duas vezes menor do que o número de lados do polígono e, como sabiam que a medida da soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, apresentou uma expressão para calcular a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono qualquer, dado por $S_i = (n - 2)\times 180°$.

Mesmo que os alunos, nessa questão 3, nem sempre tenham se expressado corretamente no desenvolvimento dessas atividades, pudemos depreender, depois da Plenária, que nem sempre houve uma boa compreensão da ideia de generalização. Como pudemos observar, somente um dos grupos conseguiu expressar em forma de função a relação existente entre a medida da soma dos ângulos internos de um polígono e o número de lados desse polígono, sendo que o conceito de função surgiu assim de uma situação-problema envolvendo geometria e padrões.

Na fórmula construída, $S_i = (n-2) \cdot 180°$, S_i é a variável dependente, e n, o número de lados do polígono, é a variável independente. Depreende-se daqui que esse conceito importante de dependência ou independência da variável pode ser trabalhado bem antes do que a formalização regimentada do conceito de função.

Para essa análise foram consideradas, pela professora-pesquisadora às perguntas 8, 9, 10 e 11 levantadas no capítulo 8.

Atividade Tipo I

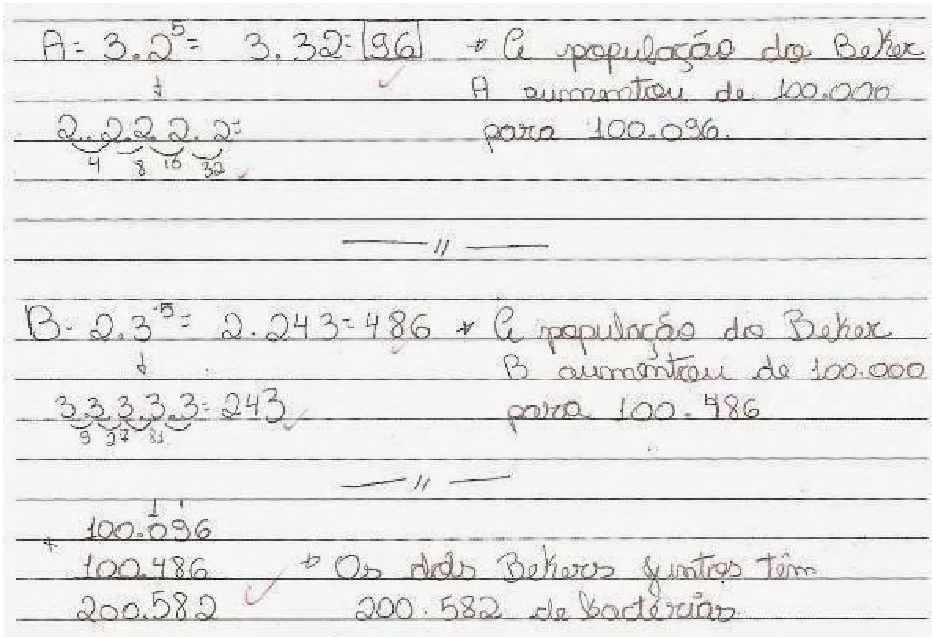
4. Desenvolvendo atividades com problemas envolvendo letras como variáveis, letras como incógnitas e proporcionalidade.

Enunciado

2- Problema:
Dois Beker A e B contém 100000 bactérios cada um deles.
Após 10 dias de descanso observou-se que os vidros de Bekers estava transbordando, isto é, a população de bactérias cresceu bastante
Sabendo que: $PA = 3.2^n$ e $PB = 2.3^n$, onde n = nº de dias, pergunta-se. Qual é a quantidade de bacterias no 5º dia do Beker A e B. Qual é o total da população até o 5º dia dos Bekers juntos?

Resolução

4a)



$A = 3.2^5 = 3.32 = \boxed{96}$ → A população do Beker A aumentou de 100.000 para 100.096.

$2.2.2.2.2 =$ 4 8 16 32

— // —

$B.\ 2.3^5 = 2.243 = 486$ → A população do Beker B aumentou de 100.000 para 100.486

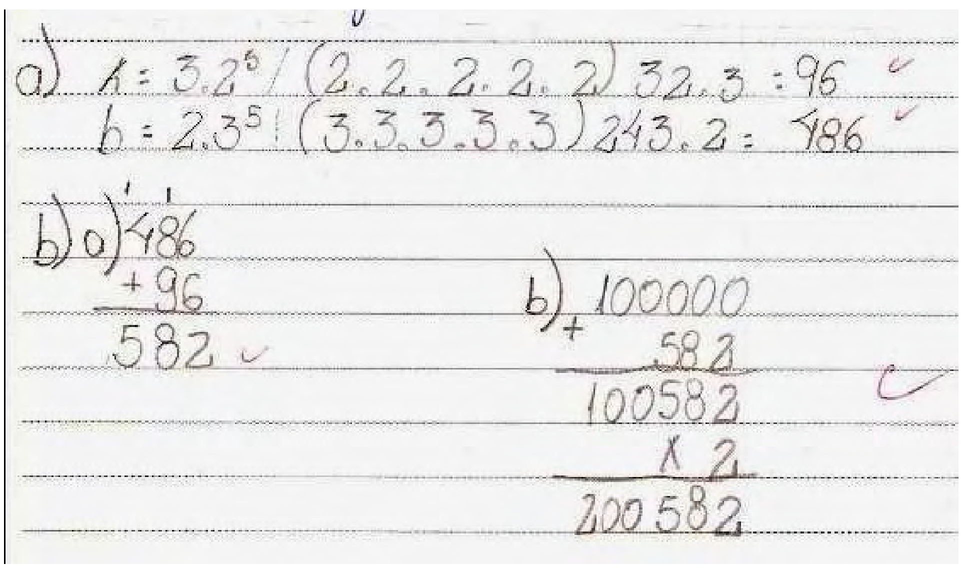
$3.3.3.3.3 = 243$ 9 27 81

— // —

100.096
\+ 100.486
200.582 → Os dois Bekers juntos têm 200.582 de bactérias

Resolução

4b)



a) $A = 3.2^5 / (2.2.2.2.2)\ 32.3 = 96$

$b = 2.3^5 / (3.3.3.3.3)\ 243.2 = 486$

b) a) 486
\+ 96
582

b) 100000
\+ 582
100582
× 2
200582

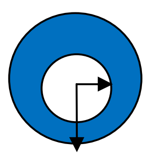
No problema (4), resolvido como mostrado em (4a) e (4b), os estudantes interpretam e substituem corretamente o valor da letra n, variável que corresponde ao número de dias. Os dois grupos apresentam soluções corretas, mas com procedimentos de raciocínio aritméticos diferentes.

Na resolução de (4b) podemos notar um descuido com a sintaxe matemática, descuido bastante comum durante a aplicação de técnicas operatórias, que tanto pode levar a erros no resultado final, quanto tornar incompreensível o raciocínio desenvolvido. Para obter a população do beaker A, efetuando as operações $A = 3\times 2^5$, os estudantes escreveram $(2\times 2\times 2\times 2\times 2)\,32\times 3 = 96$, e embora o sinal de igualdade nessa expressão até possa ser compreendido dentro do contexto do problema, a expressão, por si só, não está correta.

Observemos que esse problema também permite introduzir o conceito de função, com a ressalva de que a operação potenciação, que deve ser feita antes da multiplicação, afeta o resultado mostrando que a operação potenciação faz crescer mais rapidamente que a operação multiplicação. Isso se apresenta como funções da população P em função do número de dias n, $P_A(n) = 3\times 2^n$ e $P_B(n) = 2\times 3^n$.

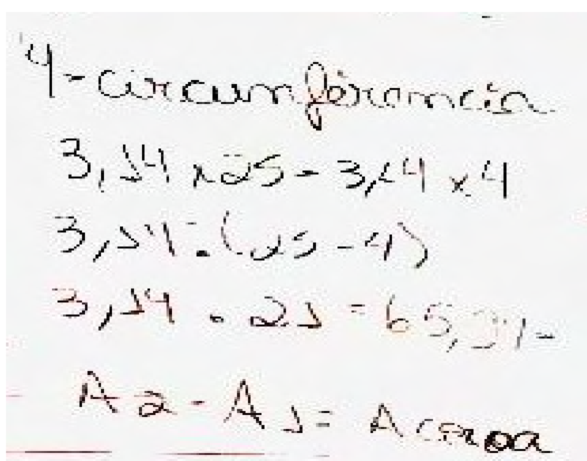
Atividades Tipo II

Enunciado: Calcule a área da figura hachurada abaixo lembrando, que a área da circunferência é A= π·r^2 e que π ≈ 3,14.



R= 5cm e r = 2cm

4c)



4- circunferência
3,14 x 25 - 3,14 x 4
3,14 . (25 - 4)
3,14 . 21 = 65,94
A2 - A1 = Acoroa

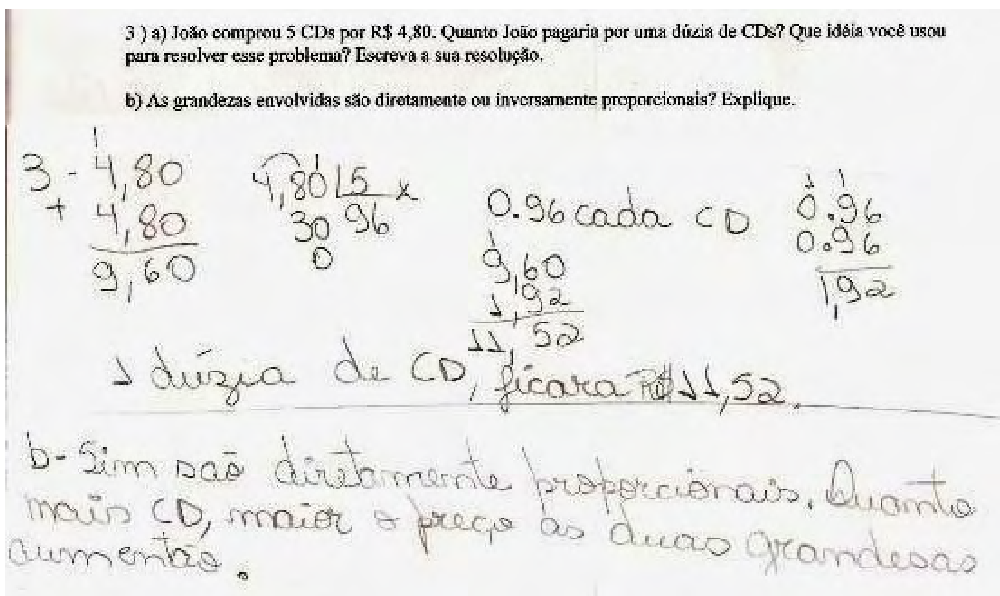
Neste problema (4c), os estudantes interpretam e substituem os valores das incógnitas corretamente na fórmula fornecida e indicam um raciocínio geométrico e algébrico corretos, quando escrevem $A_2 - A_1$ = Área da coroa. No entanto deixaram de fazer uso das unidades de medidas atribuídas ao raios. Esse erro é bastante comum por expressar somente a quantidade numérica sem fazer referência às unidades de medidas.

Enunciado

a) João comprou 5 CDs por R$4,80. Quanto João pagaria por uma dúzia de CDs? Que ideia você usou para resolver esse problema? Escreva a sua resolução.

b) As grandezas envolvidas são diretamente ou inversamente proporcionais? Explique.

4d)



3) a) João comprou 5 CDs por R$ 4,80. Quanto João pagaria por uma dúzia de CDs? Que idéia você usou para resolver esse problema? Escreva a sua resolução.

b) As grandezas envolvidas são diretamente ou inversamente proporcionais? Explique.

3 - 4,80 + 4,80 = 9,60

4,80 | 5 → 96; 30; 0

0.96 cada CD

0.96 + 0.96 = 1,92

9,60 + 1,92 = 11,52

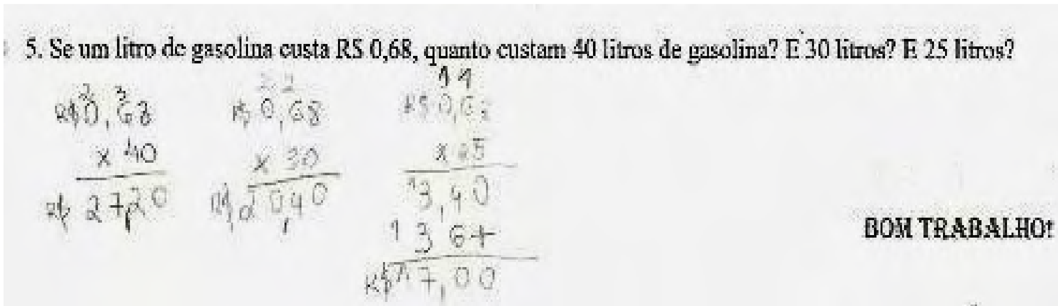
1 dúzia de CD, ficara R$ 11,52.

b- Sim são diretamente proporcionais, Quanto mais CD, maior o preço as duas grandesas aumentão.

Esse problema (4d) envolve, de fato, raciocínio com proporcionalidade, embora o que foi usado e interpretado pelo aluno não seja inteiramente correto, visto que o que o estudante afirma é que as grandezas são diretamente proporcionais. Observa-se, na parte (b) desse problema, que o aluno compreendeu o que é grandeza e como elas se relacionam, ao analisá-las se são diretamente ou inversamente proporcionais, fazendo uso das regras a ele colocadas como ferramenta necessária à resolução do problema. Entretanto, ao dizer que “quanto mais CD”, maior seria o preço a pagar não é suficiente para justificar a razão de proporcionalidade.

Enunciado: Se um litro de gasolina custa R$0,68, quanto custam 40 litros de gasolina? E 30 litros? E 25 litros?

4e)



5. Se um litro de gasolina custa R$ 0,68, quanto custam 40 litros de gasolina? E 30 litros? E 25 litros?

R$0,68 × 40 = R$ 27,20

R$0,68 × 30 = R$ 20,40

R$0,68 × 25 = 3,40 + 136 = R$17,00

BOM TRABALHO!

Esse exemplo (4e) envolve raciocínio com proporcionalidade e o uso da aritmética básica. Também, a noção intuitiva de variável já aparece na interpretação do problema. O aluno não mostrou dificuldade na resolução.

A ideia de função já poderia ter sido explorada neste problema e também nas aulas anteriores à avaliação feita, já que as proporções envolvem comparação multiplicativa entre duas grandezas. Por exemplo, apresentando numa tabela as grandezas e quantidades envolvidas no problema:

Quantidade de gasolina (l)	Preço (R$)
1	0,68 = 1 × 0,68
2	1,36 = 2 × 0,68
3	2,04 = 3 × 0,68
. . .	. . .
n	n × 0,68

Escrevendo as proporções:

$$\frac{1}{0,68} = \frac{2}{1.36} = \frac{3}{2.04} = ... = \frac{25}{x} = \frac{30}{y} = \frac{40}{z}$$ e para achar x, y e z,

trabalham-se as razões que contêem a variável comparadas com a razão conhecida mais simples.

Assim, temos as igualdades entre duas razões:

$\frac{1}{R\$0,68} = \frac{25l}{xl}$, que fornece $x = 25 \times R\$0,68 = R\$17,00,$

$\frac{1}{R\$0,68} = \frac{30l}{yl}$, que fornece $y = 30 \times R\$0,68 = R\$20,40,$

$\frac{1}{R\$0,68} = \frac{40l}{zl}$, que fornece $z = 40 \times R\$0,68 = R\$27,20$

Generalizando, a relação funcional do custo C em função da quantidade de litros l é expressa da seguinte forma:

$$C = C(l) = l \cdot R\$0,68$$

Enunciado:

4f)

2) a) Um aluno obteve as seguintes notas nas provas de matemática: 6 e 7,5. Escreva a sentença matemática para calcular a média aritmética obtida por esse aluno nessa disciplina.

a1) Tendo como base a sentença do item 2 a) escreva uma fórmula para calcular a média aritmética M entre dois valores quaisquer, representados pelas letras a e b.

a2) Escreva uma fórmula para calcular a média aritmética M entre três valores quaisquer, a, b e c.

2·a) 6,0 + 7,5 = 13,5   13,5 | 2
                              15   6,7
                              1

a1- $M = \frac{a+b}{2}$

a2- $M = \frac{a+b+c}{3}$

Neste exemplo, (4f) envolve a compreensão da média aritmética usando o raciocínio com fração. Aparece aí o uso de letras na construção de uma fórmula.

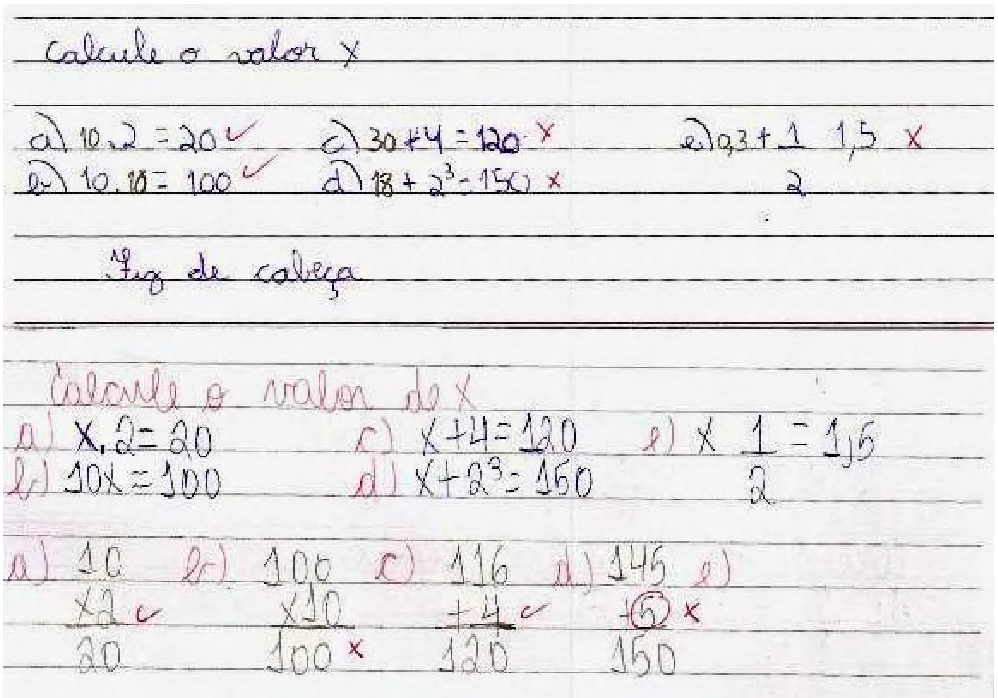
Enunciado: Calcule o valor de x em:

a) $x \cdot 2 = 20$ b) $10 \cdot x = 100$ c) $x + 4 = 120$ d) $x + 2^3 = 150$

e) $x \cdot ½ = 120$

Resolução

4g)



Neste problema aparece o uso de letras como incógnitas, relacionado com equações e resolução de equações.

O primeiro aluno nos apresenta uma resolução puramente aritmética, e como ele mesmo diz “fiz de cabeça”. Ele buscou números que se ajustassem às resposta do problema. Com referência ao que disse Saul (2008), temos aqui uma ilustração do que a álgebra não é. O mesmo ocorre no caso do outro aluno, que buscou valores adequados para resolver o problema, sem fazer uso das propriedades algébricas.

O procedimento de resolver equação por cobertura, mencionado por Kieran e Chalouh (1993), citando Whitman, visto em nosso capítulo 4, adequado para o período da pré-álgebra, também poderia ser praticado aqui como reforço. Embora não tenhamos utilizado esse procedimento neste exemplo particular, já tivemos oportunidade de aplicá-lo em outras situações, até mesmo no Ensino Médio, e notamos que os alunos obtiveram um ganho de compreensão.

Para as análises dos problemas da atividade 4 foram consideradas, pela professora-pesquisadora as perguntas 1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13 e 15, levantadas no capítulo 8.

O quinto problema será apresentado aqui em duas etapas, uma para o desenvolvimento do Tipo I e outra para o desenvolvimento do Tipo III, ambas correspondentes às atividades do projeto escolar: Meio Ambiente – Estudo da poluição numa aula de matemática.

Atividade Tipo I – duração de duas aulas.

Antes de apresentar o problema para cada aluno do grupo, a professora fez um levantamento de textos que falam sobre poluição ambiental de rios, praias e lagos, e apresenta problemas que dizem respeito aos rios Gregório e Monjolinho, da cidade de São Carlos, procurando evidenciar, para os alunos, a importância e a atualidade de questões envolvendo o meio ambiente. Depois, em grupo, os alunos fazeram um desenho ilustrando o problema da poluição e, então, respondem a perguntas e resolvem o problema proposto. Durante a Plenária os grupos comentaram a resolução do problema proposto, apresentaram suas respostas e mostram seus desenhos.

Ao término dessa aula a professora pediu, para alguns dos estudantes, que trouxessem, para a aula seguinte, o material referente ao kit que seria usado para executar o roteiro sugerido no site da experimentoteca do CDCC[76]-USP.

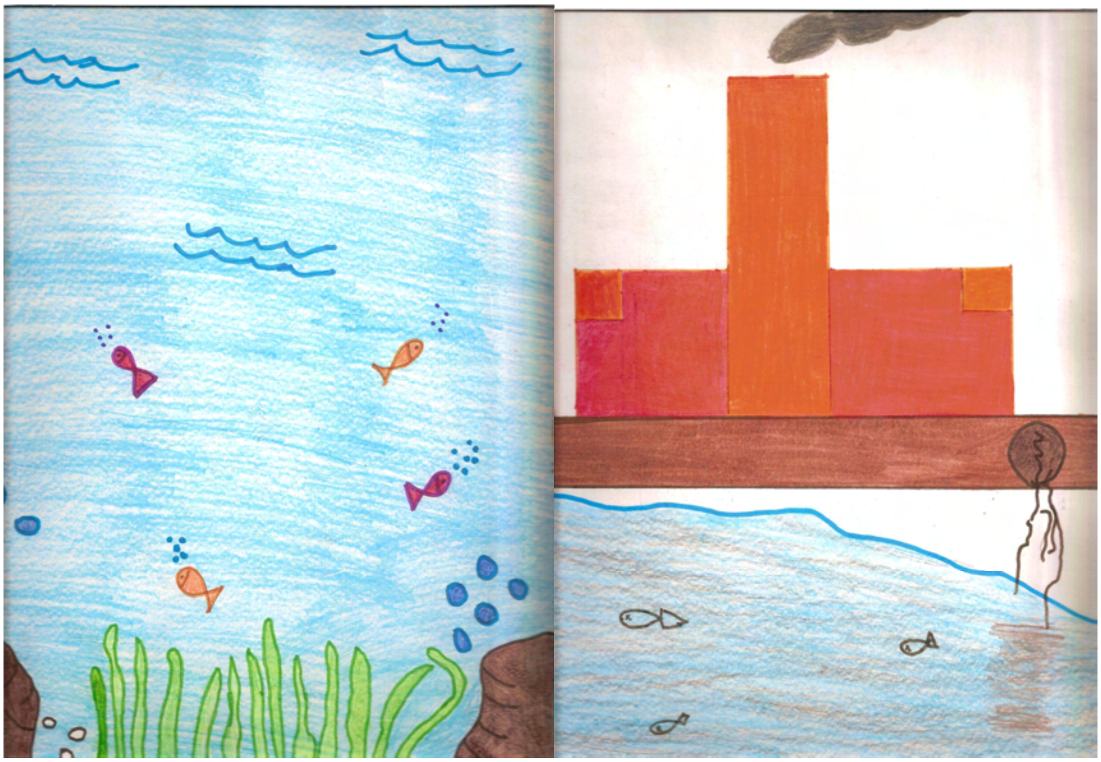
Apresentamos a seguir alguns dos trabalhos desenvolvidos durante a primeira etapa do projeto.

---

[76] CDCC-USP, Centro de Divulgação Científica e Cultural, da Universidade de São Paulo, São Carlos

Desenho de um dos grupos:

O lago antes e depois



Perguntas-respostas e o problema resolvido

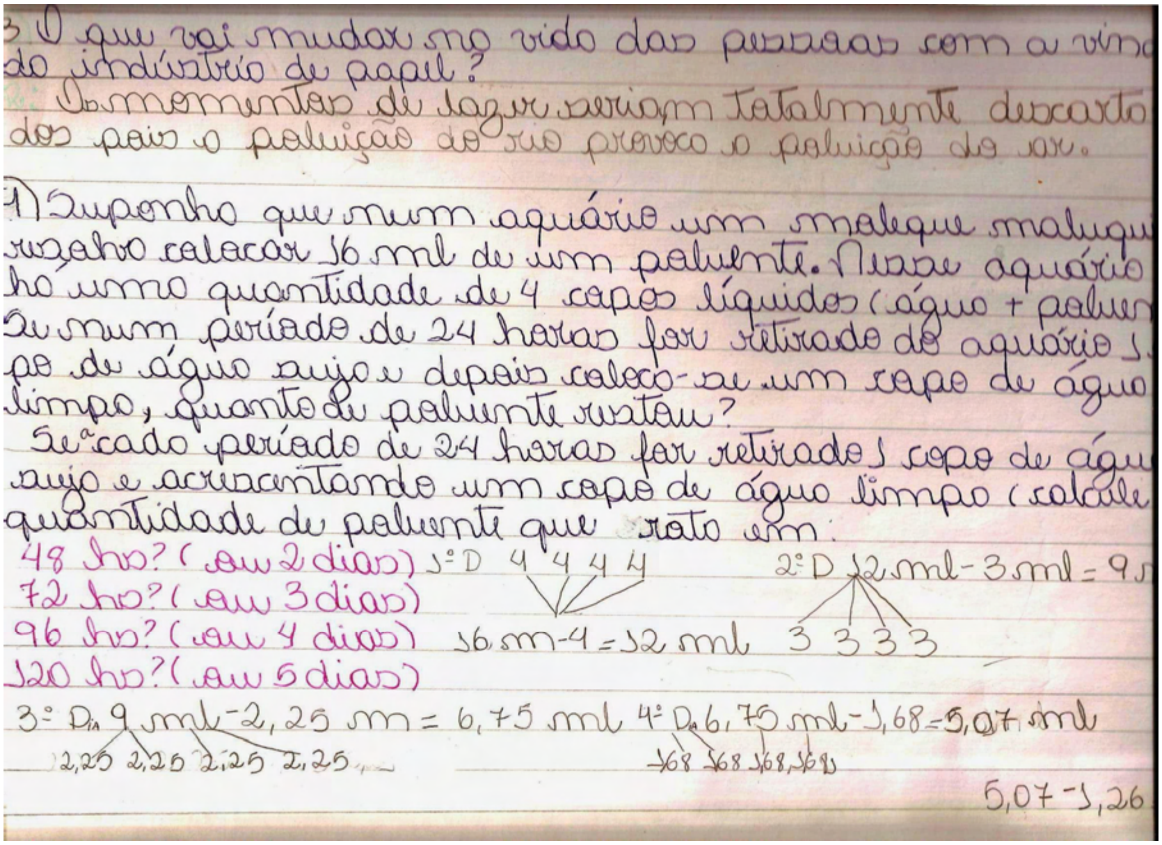
5a)

1- O que vai acontecer no habitát do lago?
R: O lago ficará poluído e os animais que o habitam irão morrer.

2- Cite algumas providências que você tomaria?
R: Faríamos um abaixo assinado para mudar o local onde a indústria joga os resíduos liberados por ela.

3- O que vai mudar na vida das pessoas a vinda da indústria de papel?
Se as pessoas usavam o lago como lazer não poderam mais usar, pois o lago estará poluído

5b)


3) O que vai mudar na vida das pessoas com a vinda da indústria de papel?
Os momentos de lazer seriam totalmente descartados pois a poluição do rio provoca a poluição do ar.

1) Suponha que num aquário um moleque maluquinho colocou 16 ml de um poluente. Nesse aquário há uma quantidade de 4 copos líquidos (água + polue[nte]). Se num período de 24 horas for retirado do aquário 1 copo de água suja e depois coloco-se um copo de água limpa, quanto de poluente restou?
Se a cada período de 24 horas for retirado 1 copo de água suja e acrescentando um copo de água limpa (calcule a quantidade de poluente que resta em:
48 hs? (ou 2 dias) 1º D 4 4 4 4 — 2º D 12 ml - 3 ml = 9
72 hs? (ou 3 dias)
96 hs? (ou 4 dias) 16 m - 4 = 12 ml — 3 3 3 3
120 hs? (ou 5 dias)
3º D. 9 ml - 2,25 m = 6,75 ml — 4º D. 6,75 ml - 1,68 = 5,07 ml
2,25 2,25 2,25 2,25 — 168 168 168 168
5,07 - 1,26

Para a resolução de (5a) e (5b), inicialmente os alunos fizeram distinção entre horas e dias, e usaram apenas o raciocínio aritmético com frações, usando as variáveis dia e quantidade de poluente mais água (igual a 4 copos) em seus cálculos.

Atividade Tipo I – duração duas aulas.

O material entregue a cada aluno do grupo são folhas de atividades disponíveis no endereço na experimentoteca do CDCC-USP: http://www.cdcc.usp.br/exper/medio/matematica/matematica_medio/1_estudo_da_poluicao_a.pdf.

Este material foi elaborado durante o desenvolvimento de um projeto institucional do qual a professora pesquisadora durante o ano de 2002 participava, no grupo de matemática, (Projeto, “Instrumentação para o ensino interdisciplinar das ciências da natureza e da matemática") do Centro de Difusão Científica e Cultural (CDCC) – USP São Carlos, financiado pelo CNPq, cuja coordenação do grupo de matemática foi efetuada pelo Prof. Dr. Pedro Malagutti (UFSCar) e Profa. Dra. Renata Cristina Geromel Meneguetti (USP-São Carlos).

Com os alunos das 6ªs séries/7°anos desenvolvemos apenas a atividade 1 dentre as quatro atividades propostas na experimentoteca do Ensino Médio.

Primeiro foi distribuído a cada aluno do grupo uma folha atividade. Após a leitura da descrição da atividade 1, dois grupos de alunos reproduziram em separado, como descrita na atividade, a ideia da despoluição e outros grupos também quiseram reproduzir a experiência. Quando o segundo grupo começou a fazer o experimento, outros integrantes do grupo foram à lousa e começaram a escrever as quantidades de água e poluente em cada etapa do processo da despoluição.

Modelo do material entregue para cada aluno.

CDCC - USP
EXPERIMENTOTECA

MATEMATICA

1 ESTUDO DA POLUIÇÃO NUMA AULA DE MATEMÁTICA

NOME ________________________________
ESCOLA ______________________________
EQUIPE ____________ SÉRIE ____________
PERÍODO ___________ DATA ____________

OBJETIVO

Esta atividade tem múltiplos objetivos: evidenciar a importância do ferramental matemático no estudo e resolução de problemas que ocorrem ou naturalmente ou como conseqüência da intervenção do homem na natureza, desenvolvimento da cidadania, incentivar a reflexão e desenvolver o espírito crítico do aluno no que diz respeito a essa intervenção.

MATERIAL

- 3 vasilhames transparentes
- 1 copo plástico
- 1 frasco com corante
- 1 espátula de madeira

Observação: O primeiro vasilhame deverá ser utilizado para armazenar a água limpa, a qual será utilizada para repor a água do "lago" em cada etapa de sua despoluição; o segundo vasilhame deverá representar o "lago" e o terceiro deverá ser utilizado para armazenar a água removida do "lago".

PROCEDIMENTO

Este kit deve ser utilizado com a supervisão do professor, que deverá orientar as atividades a serem desenvolvidas em cada etapa. A classe deverá ser dividida em grupos de 5 alunos.

ATIVIDADE 1 - Descrição e primeiras conclusões

Suponha que em um habitat constituído por um lago de águas límpidas, com vegetação e espécimes característicos, seja despejada uma certa quantidade de um produto poluente e que ocorra um processo de despoluição natural, promovido pelos seres vivos pertencentes a esse habitat.
Em uma descrição simplificada desse processo natural de despoluição, suponha que os seres vivos do lago purifiquem um quarto do volume de água do lago durante qualquer período de 24 horas.
Use um vasilhame transparente para representar o lago e adicione quatro copos de água ao vasilhame para simular a água do lago. Represente o produto poluente por 16 mL de corante. Utilize o conta-gotas para adicionar 48 gotas de corante ao vasilhame (3 gotas correspondem a 1mL). Veja a figura 1.

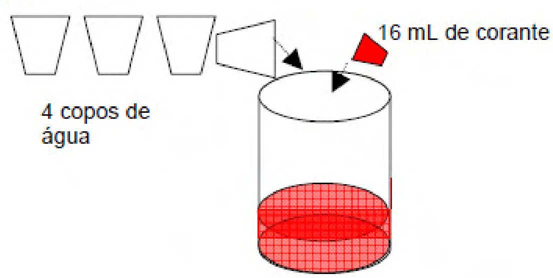


Figura 1

1

continuação

Podemos simular o processo natural de despoluição do lago removendo um copo de água colorida do frasco e recolocando um copo de água pura, como na figura 2 abaixo.

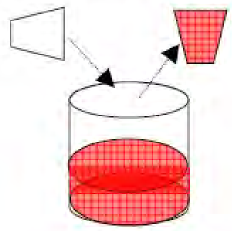


Figura 2

QUESTÕES

1. Quanto de poluição permanece no vasilhame?
Resposta:

2. Assuma que mais nenhum poluente seja adicionado ao lago. Quanto de poluição é eliminada do lago após as próximas 24 horas?
Resposta:

3. Represente este processo removendo um copo de água colorida e acrescentando um copo de água limpa.
Suponha que n represente o n-ésimo período de 24 horas considerado e que a(n) represente a quantidade de poluente ao final do n-ésimo período de 24 horas.
Continue o experimento para 1, 2, 3, 4,... períodos de tempo e descreva o que você observou em cada um dos passos efetuados, registrando a quantidade de poluente restante (em mL) após cada período.(Use o verso da folha).
Com os resultados obtidos complete a tabela abaixo. Utilize uma calculadora para acompanhar os cálculos que serão realizados.

Período de 24 horas (n)		**Poluente (mL) a(n)**
0 – 24	n = 1	16
24 – 48	n = 2	
48 – 72	n = 3	
72 – 96	n =4	
96 – 120	n =5	
120 – 144	n =6	
144 – 168	n =7	

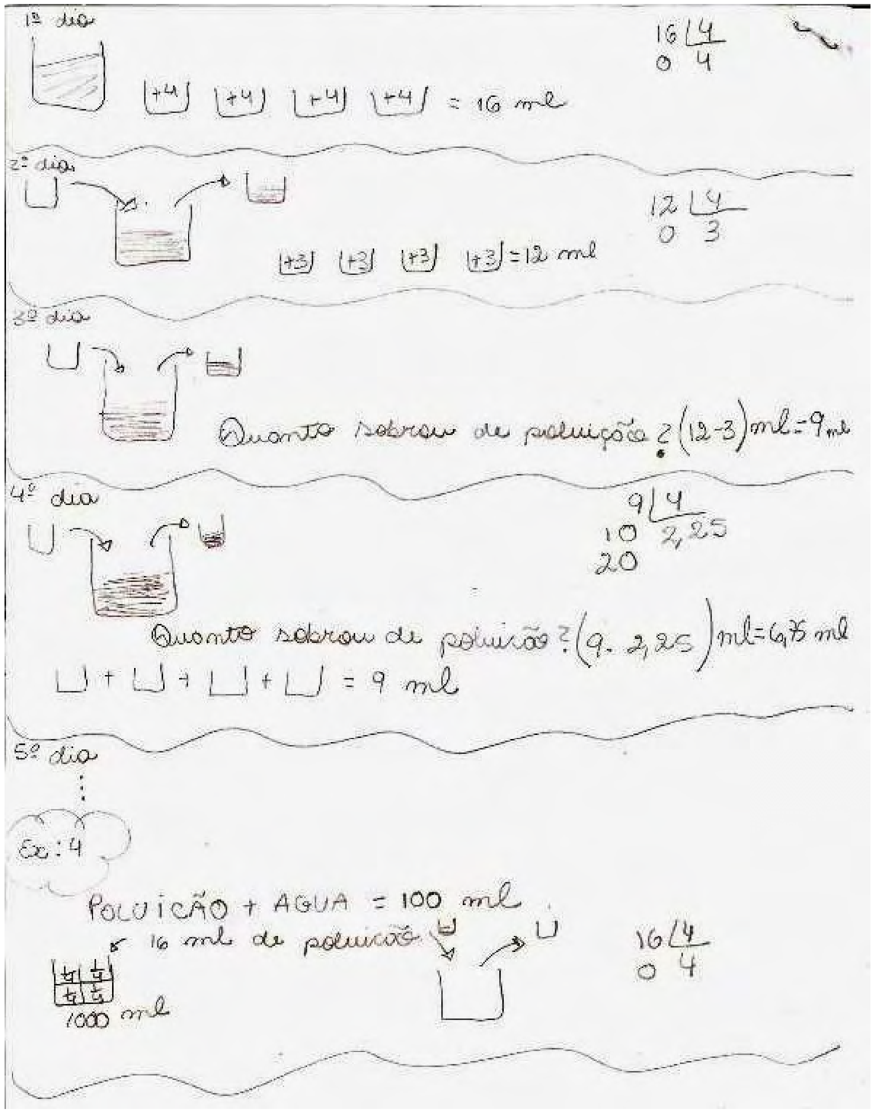
4. Supondo que o volume total de líquido no lago (água + poluente) seja 100mL, determine qual fração deste volume representa a quantidade de poluente, em cada período de tempo da tabela acima.
Resposta:

5. Pesquisar quais são as substâncias necessárias para fazer um detergente.
Resposta:

6. Quais são as conseqüências de uma quantidade elevada de detergente num lago com peixes? Explique.
Resposta:

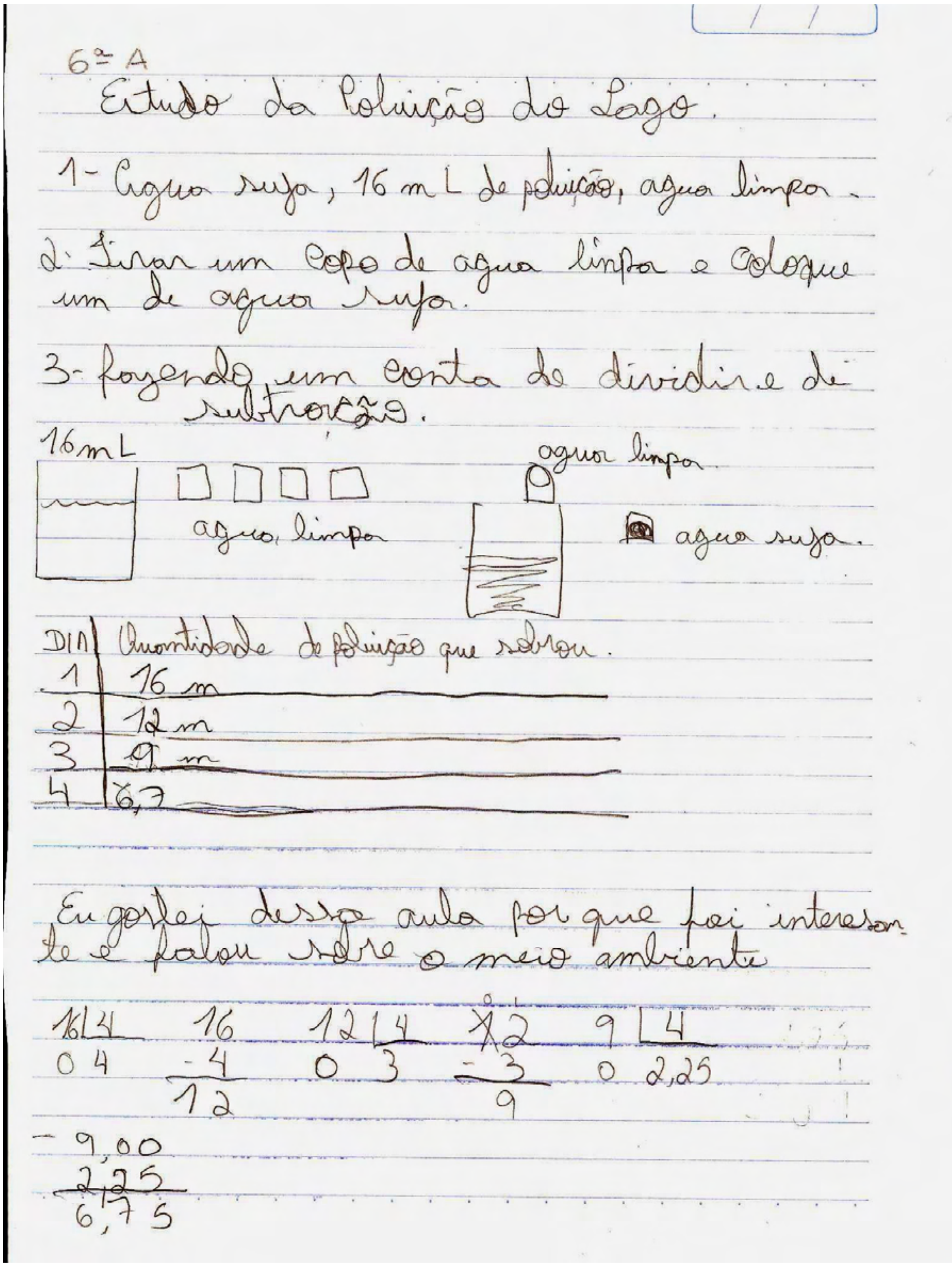
Respostas às questões

5c)



Os cálculos foram obtidos passo a passo, com o auxilio visual dos desenhos e da tradução do problema em palavras. Os resultados foram obtidos aritmeticamente sem usar notação de fração, com apenas as operações de divisão e subtração.

5d)



6º A

Estudo da Poluição do Lago.

1- Agua suja, 16 mL de polução, agua limpa.

2- Tirar um copo de agua limpa e coloque um de agua suja.

3- fazendo um conta de dividir e de subtração.

16mL

agua limpa

agua limpa

agua suja.

DIA	Quantidade de polução que sobrou.
1	16 m
2	12 m
3	9 m
4	6,7

Eu gostei dessa aula porque foi interessante e falou sobre o meio ambiente

16 | 4 → 0 4

16 − 4 = 12

12 | 4 → 0 3

12 − 3 = 9

9 | 4 → 0 2,25

9,00 − 2,25 = 6,75

Nota-se que o estudante na resposta (d) faz uma correspondência do dia com a quantidade de poluente, descrevendo os valores numa tabela. Pode-se dizer que já aparece uma ideia intuitiva de função.

5e) Enunciado e Resolução

QUESTÕES

1. Quanto de poluição permanece no vasilhame?
Resposta: 14 − 2 = 12   12 ml

2. Assuma que mais nenhum poluente seja adicionado ao lago. Quanto de poluição é eliminada do lago após as próximas 24 horas?
Resposta: 16 ml   14 + 2 = 16 ml

3. Represente este processo removendo um copo de água colorida e acrescentando um copo de água limpa.
Suponha que n represente o n-ésimo período de 24 horas considerado e que a(n) represente a quantidade de poluente ao final do n-ésimo período de 24 horas.
Continue o experimento para 1, 2, 3, 4,... períodos de tempo e descreva o que você observou em cada um dos passos efetuados, registrando a quantidade de poluente restante (em mL) após cada período.(Use o verso da folha).
Com os resultados obtidos complete a tabela abaixo. Utilize uma calculadora para acompanhar os cálculos que serão realizados.

Período de 24 horas (n)		Poluente (mL) a(n)
0 – 24	n = 1	16
24 – 48	n = 2	12
48 – 72	n = 3	9
72 – 96	n =4	6,75
96 – 120	n =5	4,6875
120 – 144	n =6	5,0625
144 – 168	n =7	0,25

4. Supondo que o volume total de líquido no lago (água + poluente) seja 100mL, determine qual fração deste volume representa a quantidade de poluente, em cada período de tempo da tabela acima.
Resposta:

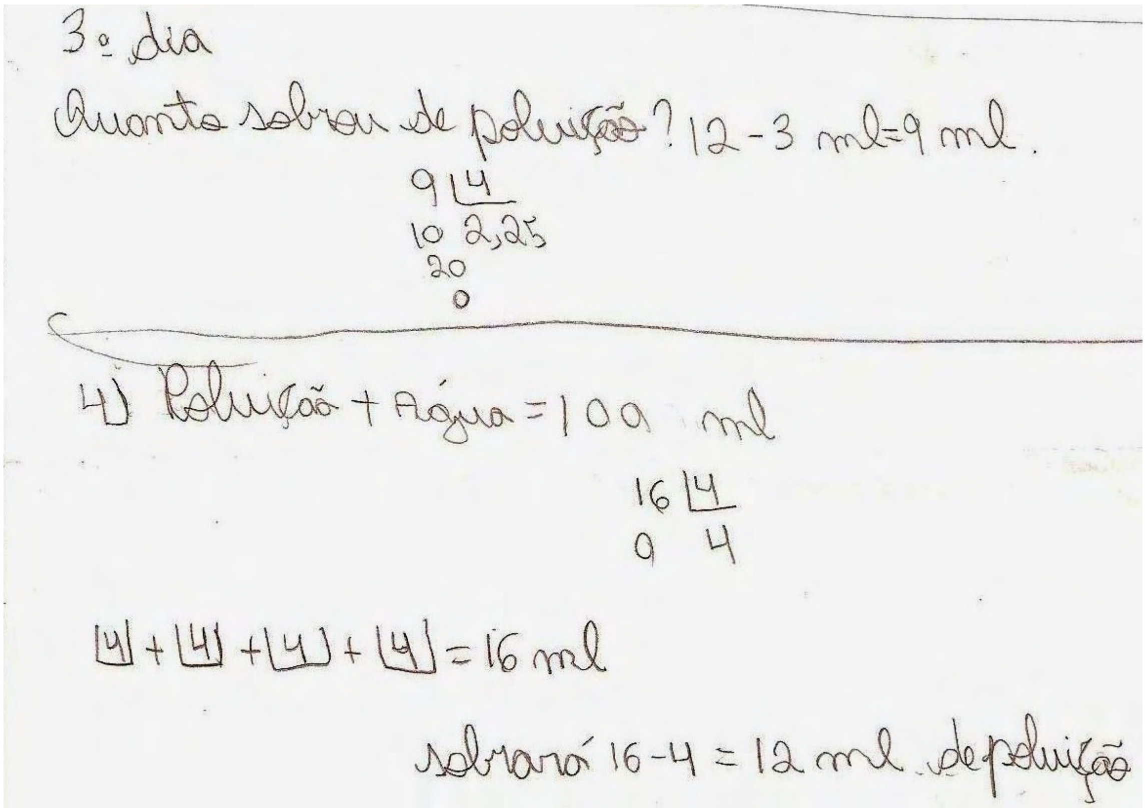
5. Pesquisar quais são as substâncias necessárias para fazer um detergente.
Resposta: 5 substância

6. Quais são as conseqüências de uma quantidade elevada de detergente num lago com peixes? Explique.
Resposta: A consequência é que os peixes podem morrer

2

Enunciado e Resolução

5f)



3º dia

Quanto sobrou de poluição? 12 - 3 ml = 9 ml.

9 | 4
10 2,25
20
0

4) Poluição + Água = 100 ml

16 | 4
0 4

$\boxed{4} + \boxed{4} + \boxed{4} + \boxed{4} = 16$ ml

sobrará 16 - 4 = 12 ml de poluição

Observemos que esse grupo, durante seus cálculos apresentam um erro significativo, não tomaram cuidado com o uso das unidades de medida. (Obs: onde lemos 3° dia corresponde ao cálculo do período de 48 a 72h da quantidade de poluente)

5g)

$16 \,|\!\underline{\,4\,}$; $0 \quad 4$ — $(16-4)$ ml $= 12$ ml

$9 \,|\!\underline{\,4\,}$; $10 \quad 2,25$; 20 ; 0 — $(4-2,25)$ ml $= 6,75$ ml

$12 \,|\!\underline{\,4\,}$; $0 \quad 3$ — $(12-3)$ ml $= 9$ ml

Esse grupo usou corretamente as unidades de medida durante os cálculos

5h)

Receita 2

Ingredientes

2 l. de álcool

1/2 Kg de soda cáustica

3 l de óleo de cozinha (já usado)

20 l de H_2O;

1 copo de açucar

Preparo:

1) misture o óleo frio, o álcool e soda caústica mexer e deixar descançar 4 horas,

2) depois despejar H_2O fervendo aos poucos e mexendo

3) Em seguida, coloque o açucar e deixe ferver

Fonte: http://pt.wikibooks.org/wiki/livro de receitas/detergente caseiros.

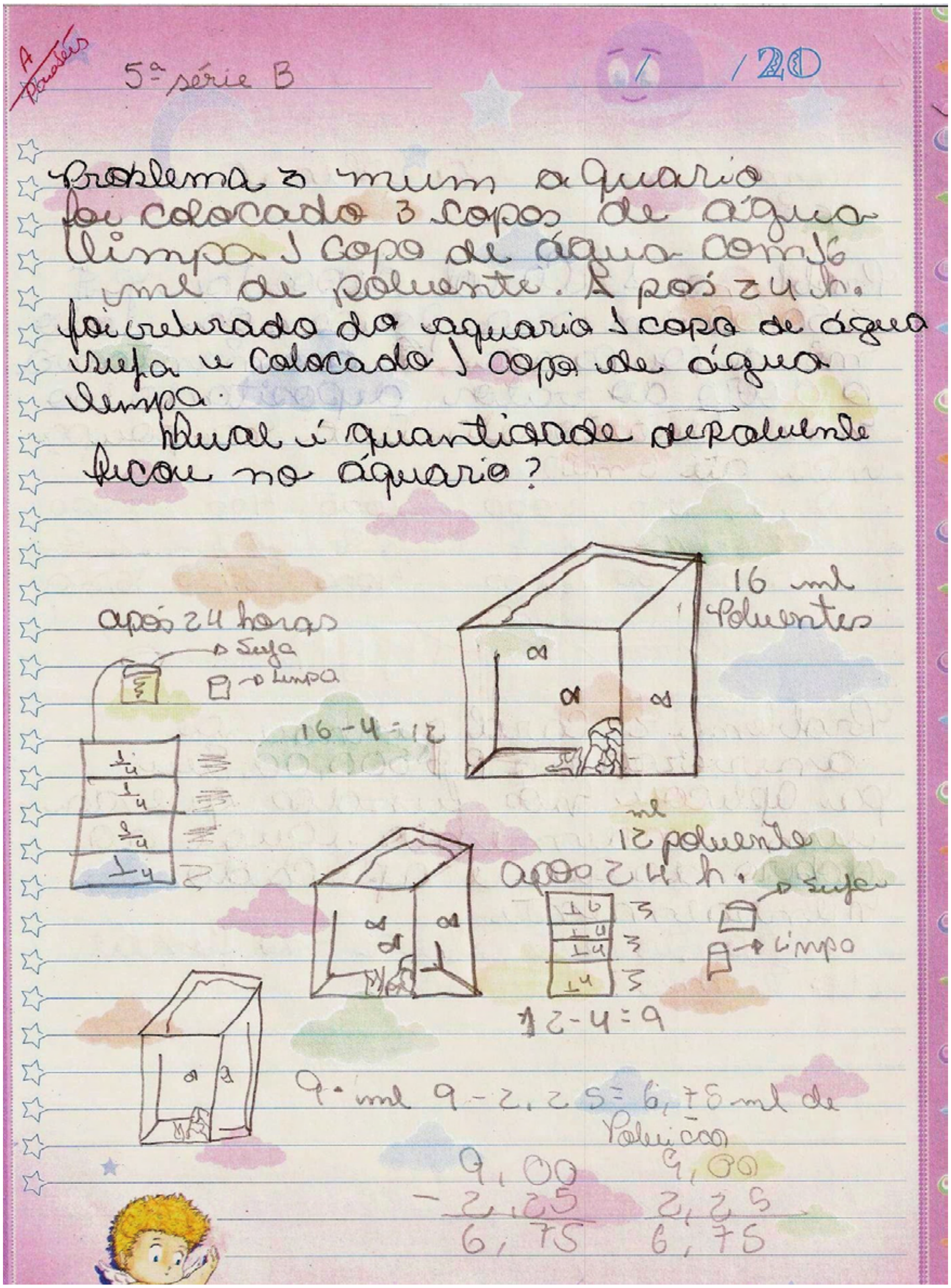
Este grupo ao responder a atividade 5 apresentou uma receita para o detergente, indicando as substancias que compõe a fórmula e a fonte dessas informações.

Durante a realização da experiência, apenas um grupo perguntou se os cálculos deveriam levar em conta a quantidade de água mais a quantidade de poluente e, portanto, se os cálculos deveriam ser feitos com quatro copos de água acrescidos de 16 ml de poluente. Todos concordaram que a diferença seria muito pequena, e resolvemos considerar, como simplificação, que a quantidade de água mais poluente seria igual a quatro copos de água

Os alunos usaram apenas o cálculo aritmético para calcular a quantidade de poluente. Compreenderam a ideia de recorrência que estava implícita em seus raciocínios, pois efetuaram os cálculos da quantidade de poluição do dia seguinte sempre retirando poluição da quantidade de poluente que sobrou do dia anterior. Fizeram uso das palavras dia e poluente, ou horas e poluente, para designar as variáveis.

Este problema do meio ambiente, usando a ideia de despoluição, pode ser adaptado para estudantes da 5ª série, conforme se pode ver abaixo.

5i) *Atividade – Tipo I, 5ª série*



5ª série B /20

Problema 3 num aquario foi colocado 3 copos de água limpa 1 copo de água com 16 ml de poluente. Após 24 h. foi retirado do aquario 1 copo de água suja e colocado 1 copo de água limpa.
Qual é quantidade de poluente ficou no áquario?

após 24 horas
→ suja
→ limpa

16 ml Poluentes

$16-4=12$

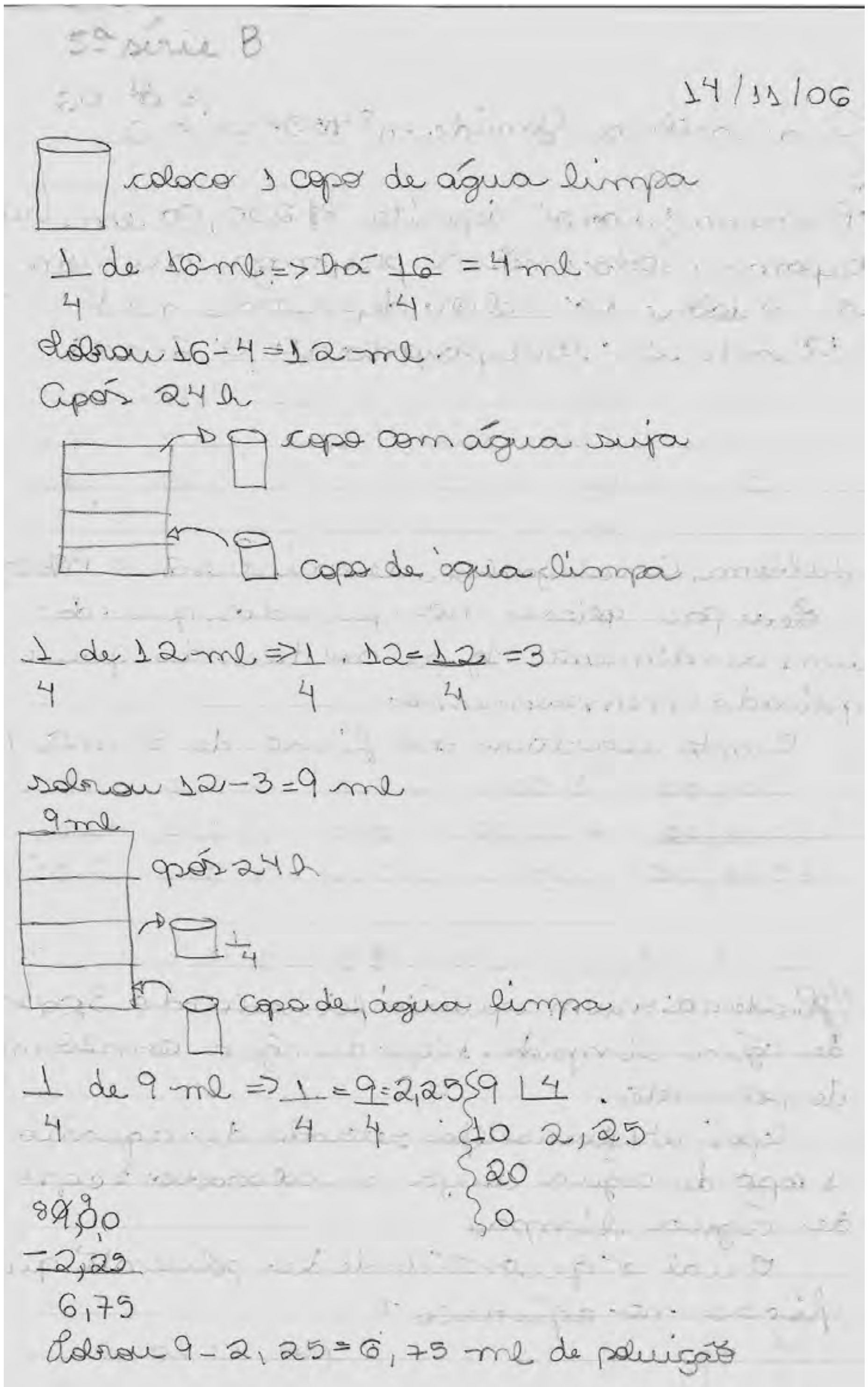
12 ml poluente
após 24 h.
→ suja
→ limpo

$12-4=9$

9 ml $9-2,25=6,75$ ml de Poluicao

$$\begin{array}{r} 9,00 \\ -\ 2,25 \\ \hline 6,75 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9,00 \\ 2,25 \\ \hline 6,75 \end{array}$$

5j) 5ª série



5ª série B

14/11/06

coloco 1 copo de água limpa

$\frac{1}{4}$ de 16 ml => dá $\frac{16}{4} = 4$ ml

sobrou $16 - 4 = 12$ ml.

Após 24 h

copo com água suja

copo de água limpa

$\frac{1}{4}$ de 12 ml => $\frac{1}{4} \cdot 12 = \frac{12}{4} = 3$

sobrou $12 - 3 = 9$ ml

9 ml

após 24 h

$\frac{1}{4}$

copo de água limpa

$\frac{1}{4}$ de 9 ml => $\frac{1}{4} = \frac{9}{4} = 2{,}25$

$9 \;|\underline{4}$; 10 2,25 ; 20 ; 0

$9{,}00 - 2{,}25 = 6{,}75$

sobrou $9 - 2{,}25 = 6{,}75$ ml de poluição

Os problemas (5i) e (5j) também foram trabalhados com alunos da 5ª série/6°ano.

Neles os alunos interpretaram o problema com ilustrações, palavras, e ao mesmo tempo, utilizaram aritmética, obtendo resultados também por recorrência. A noção variável já estava presente no pensamento dos alunos, quando se referiam a horas e à quantidade de poluente. Ao operarem sobres essas variáveis, sempre usaram "após 24 horas", como se mentalmente estivessem calculando a poluição do dia seguinte, mas isso não ficou explícito.

Os problemas apresentados nestas séries nos mostraram que já é possível o professor introduzir a noção de grandezas (tempo e quantidade de poluição), e de relações entre elas. Ou seja, já é possível introduzir, mesmo que de forma intuitiva, o conceito de função. A análise das atividades, considerando aspectos referentes à álgebra como generalização da aritmética e como estudo de operações binárias, à concepções errôneas e ao uso da Metodologia do Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, envolvem e respondem as questões de nossa pesquisa.

Além disso, como professora-pesquisadora, observei que os alunos se envolveram durante as atividades da Plenária, de forma que as dificuldades e erros apresentados durante os estudos, puderam ser considerados e a até mesmo automonitorados fazendo com que eles construíssem os conceitos. É importante que tenhamos clareza das concepções da álgebra, como vimos no capítulo 4, para que possamos guiar nossos alunos a compreenderem a importância do conceito de função.

Sendo assim, acredito que podemos introduzir problemas em que aparece a idéia do conceito de função desde as 5as séries/6°anos do Ensino Fundamental II.

9.2 Atividades desenvolvidas e analisadas na 7ª série/8° ano

Apresentaremos a seguir atividades desenvolvidas nas 7ª séries/8°anos do Ensino Fundamental, do Tipo III, analisando-as e diagnosticando-as, seguindo algumas das ideias sugeridas no capítulo anterior. Como veremos, essas atividades já são trabalhadas de forma menos intuitiva e dão ênfase ao conceito de função, na medida em que os problemas visam à obtenção de uma relação funcional.

Essas atividades fizeram parte do projeto Consumo e Meio Ambiente, desenvolvido em 2004, junto com as professoras de ciências da Escola Municipal de Ensino Básico Carmine Botta, sendo que as atividades de matemática foram aplicadas por mim, enquanto professora-pesquisadora.

Esse projeto foi dividido em três etapas, sendo que as duas primeiras dizem respeito à disciplina de matemática e a terceira à disciplina de ciências, tratou do processo de compostagem, utilizando lixo orgânico para fabricação de adubo.

Durante as etapas 1 e 2 do projeto, os alunos descobriram que, com pequenas mudanças em nossos hábitos culinários, podemos aproveitar certos compostos orgânicos que, normalmente, ou são desperdiçados ou parcialmente utilizados na industrialização de ração animal ou como adubo, obtendo assim uma otimização da relação custo benefício, além de contribuirmos para a preservação do Meio-ambiente e dos Recursos Naturais disponíveis.

Os alunos descobriram que folhas de hortaliças, como as da cenoura e beterraba, e talos, cascas, sementes e bagaços de frutas, poderiam ser incorporados em pratos do nosso dia-a-dia, por serem ricos em fibras, vitaminas e minerais fundamentais para o bom funcionamento do nosso organismo. Observaram que novos hábitos contribuiriam para a melhoria da saúde da população em geral.

Ao desenvolverem as etapas 1 cálculo do custo das receitas, e 2 cálculo de calorias, os estudantes primeiramente buscaram receitas culinárias, com seus conhecidos, familiares, ou em livros de receitas vegetarianas, que utilizassem talos, cascas, sementes, bagaços e outros ingredientes que normalmente são desperdiçados e jogados no lixo. Depois de escolherem três receitas em comum acordo, os grupos de alunos foram a quatro estabelecimentos de vendas, tais como supermercados e quitandas, para fazer pesquisa de preços dos ingredientes. Obtiveram os preços de todos os ingredientes em cada estabelecimento, e calcularam qual seria o menor preço para cada receita. Na etapa seguinte os alunos calcularam a quantidade de caloria de cada receita, e a quantidade de calorias da porção de 100 gramas da receita.

As receitas escolhidas foram torta de abacaxi, doce de polpa de melancia e salada de maracujá. Para cada uma delas os estudantes calcularam o menor custo e as calorias. Os cálculos do custo da receita e o cálculo de calorias que mostraremos mais adiante são da torta de abacaxi.

Os conceitos matemáticos trabalhados nessas atividades foram: números decimais e periódicos; razão e proporção; porcentagem; unidades de medidas e suas transformações; interpretar textos e tabelas.

6a) Etapa 1 do projeto – Folha atividade entregue para os grupos

E.M.E.B CARMINE BOTTA

PROJETO CONSUMO E MEIO AMBIENTE - 2004

Disciplinas envolvidas: Ciências e Matemática
Alunos da 7ª. série C – Prof. de matemática, Eliane Saliba Botta

Nome dos integrantes do grupo:
Letícia Pereira Lima Nº 20
Kaite Mayara dos Santos Nº 19
Fabiana Natália Nogueira Nº 7
Mayara Fernanda Pereira Pedro Nº 25

PROBLEMA PROPOSTO

O problema proposto a seguir tem o objetivo de determinar o número de calorias contido em uma porção de uma determinada receita.
Observação: Os valores para o número de calorias correspondente a cada um dos ingredientes das receitas são valores aproximados.

1ª. parte

PROBLEMA: Vamos Supor que durante o processo de cozimento ocorra uma perda de 10% de peso, devido a evaporação de parte da água contida nos ingredientes da receita, mas que o número total de calorias não se altera. Calcule a quantidade de calorias de uma porção de 100 gramas da receita que você fez.

PROCEDIMENTOS:
a)Escolher a receita e copiar.
b)Calcular o número total de calorias e o peso total dos ingredientes antes do cozimento.
c)Determinar o peso do produto final após o cozimento.
d)Determinar a quantidade de calorias em 100g do produto final.

2ª.parte

Na primeira parte, supusemos que ocorre a perda de aproximadamente 10% de peso durante o processo de cozimento. Na verdade esta porcentagem varia de receita para receita. Para obter um valor mais preciso para a quantidade de calorias em uma porção, determine o peso do produto final utilizando uma balança e refaça o cálculo efetuado no item d) da primeira parte.

6b) Receita escolhida

RECEITA

"BOLO DE CASCA DE ABACAXI"

Afervente a casca de um abacaxi com 5 xícaras de chá de água por 20 minutos. Bata no liquidificador coe e reserve o caldo e o bagaço separadamente. Bata 2 claras em neve misture as gemas, acrescente aos poucos 2 xícaras de chá de açúcar, 3 xícaras de chá de farinha de trigo, uma colher de fermento e 2 xícaras de chá do suco da casca.

Misture bem, coloque em uma forma untada e leve ao forno em temperatura moderada. Depois de assado, perfure o bolo com um garfo e umedeça com uma xícara de caldo adoçado a gosto.

Aluno: Diego

KAITE MAYARA

6c) Cálculo das calorias

Guilherme 7º C Profª Eliane

TABELA DE CALORIAS

TORTA DE ABACAXI

Ingredientes	quantidade de caloria (Kcal) do ingrediente pesquisado numa tabela de nutrição	Caloria correspondente à quantidade do ingrediente utilizado	Peso dos ingredientes antes do cozimento
Abacaxi	80g = 50Kcal	500 Kcal	800 g
Açucar	1og = 20Kcal	40 Kcal	20 g
Ovos	40g = 76Kcal	152 kcal	80 g (2 ovos)
Farinha	20g = 89Kcal	1335 Kcal	300 g
Fermento	x	x	5 g
Total de calorias (Kcal)	**X**	2.027 Kcal	**X**
Peso da receita antes do cozimento	**X**	**X**	1205 g

Peso da receita depois do cozimento (-10%)	Quantidade de calorias em 100g após o cozimento	Peso real da receita depois do cozimento usando uma balança	Quantidade de calorias em 100g após o cozimento usando o peso real da receita
1.084,5g	186,9 Kcal	x	x

6c1)

Abacaxi:

80 g — 50 kcal
800 g — ?

$$\frac{80\cancel{0}\ \cancel{g} \times 50\ kcal}{8\cancel{0}\ \cancel{g}} = \frac{4000}{8} = 500\ kcal$$

Açúcar:

10g — 20 kcal
20g — ?

$$\frac{20\ \cancel{g} \times 2\cancel{0}\ kcal}{1\cancel{0}\ \cancel{g}} = \frac{40\ kcal}{1} = 40\ kcal$$

Ovos:

40g — 76 kcal
80g — ?

$$\frac{8\cancel{0}\ \cancel{g} \times 76\ kcal}{4\cancel{0}\ \cancel{g}} = \frac{8 \times 76\ kcal}{4} = \frac{608}{4} = 152\ kcal$$

Farinha: 20 g — 89 kcal
300 g — ?

$$= \frac{30\cancel{0}\ \cancel{g} \times 89\ kcal}{2\cancel{0}\ \cancel{g}}$$

$$\frac{2\,670\ kcal}{2} = 1335\ kcal$$

Total de calorias:

$$\begin{array}{r} 500\ kcal \\ 40\ kcal \\ 152\ kcal \\ 1\,335\ kcal \\ \hline 2.027\ kcal \end{array}$$

Peso da receita antes do cozimento:

$$\begin{array}{r} 800g \\ 20g \\ 80g \\ 300g \\ 5g \\ \hline 1.205\ g \end{array} +$$

Peso da receita depois do cozimento: 1205
Cálculo de 10% de 1205g:

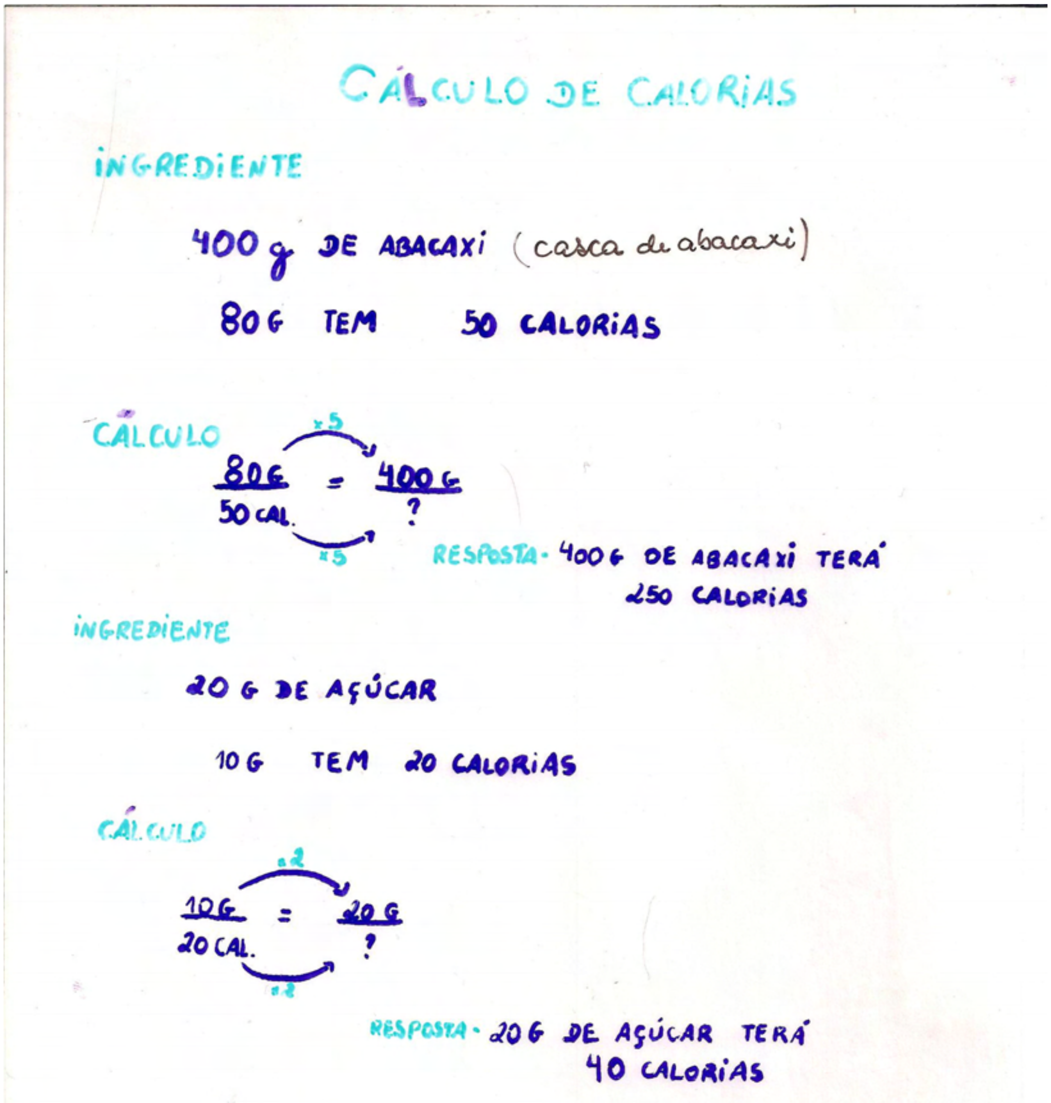
$$\begin{array}{r} 1205 \\ \times\ 10\% \\ \hline 120,50\ g \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1205,0\ - \\ 120,5 \\ \hline 1\,084,5 \end{array}$$

Cálculo de calorias em um total de 100g:
Regra de três:

1.084,5 g —— 2027 kcal =
100g —— ?

$$\frac{100\ \cancel{g} \times 2\,027\ kcal}{1.084,5\ \cancel{g}} = \frac{202\,700\ kcal}{1.084,5} = 186,9\ kcal$$

6c2)



CÁLCULO DE CALORIAS

INGREDIENTE

400 g DE ABACAXI (casca de abacaxi)

80 G TEM 50 CALORIAS

CÁLCULO

$$\frac{80\,G}{50\,CAL} \overset{\times 5}{=} \frac{400\,G}{?}$$

RESPOSTA - 400 G DE ABACAXI TERÁ 250 CALORIAS

INGREDIENTE

20 G DE AÇÚCAR

10 G TEM 20 CALORIAS

CÁLCULO

$$\frac{10\,G}{20\,CAL} \overset{\times 2}{=} \frac{20\,G}{?}$$

RESPOSTA - 20 G DE AÇÚCAR TERÁ 40 CALORIAS

Os problemas 6c1) e 6c2) envolvem o estudo de proporcionalidade. Os estudantes em 6c1) utilizaram a notação de regra de três para calcular as calorias e, em 6c2), utilizaram a notação de razão e obtiveram razões equivalentes.

A regra de três é uma forma útil de resolver problemas envolvendo o conceito de proporcionalidade, mas, frequentemente, os alunos (e também adultos), passam a utilizá-la de forma automática, sem se dar conta de que, por trás desse procedimento está escondida a ideia de proporcionalidade. Em nossa opinião, é importante que o professor procure ressaltar, sempre que houver uma oportunidade, que a regra de três envolve sempre uma relação de proporcionalidade.

Em 6c1) nota-se que os estudantes utilizam as unidades de grandeza, kcal e gramas, ao efetuarem os cálculos, e mostram que sabem manipular essas unidades durante a resolução. Na obtenção de 10% a menos do peso da receita após o cozimento, o aluno usou uma notação incorreta. Embora ele tenha obtido o resultado esperado, a notação usada sugere que ele aprendeu um procedimento, mas, talvez, sem compreender exatamente porque funciona. Por exemplo, será que ele saberia como calcular 12% de um ingrediente. Se tivéssemos usado a Metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, o professor poderia explorá-la durante a Plenária, investigando como outros alunos fizeram os cálculos, e aproveitaria para reforçar a compreensão do conceito de porcentagem. Também durante a Plenária, o professor poderia fazer comentários a respeito dos erros cometidos pelos alunos, e induzi-los a avaliarem seus entendimentos. Isso nos remete a uma abordagem meta-cognitiva, ou seja, ao Princípio 3 de Aprendizagem, visto no capítulo 4.

6d) Etapa 2 do projeto – pesquisa de preços apresentada pelos alunos.

Talita 8ºC Estabelecimento 4

Abacaxi: R$ 0,99
Melancia: R$ 1,50
maço de brocolis: R$ 0,80
maracuja: R$ 2.30
Espinafre: R$ 1,40
Almeirão: R$ 0,50
bagaço de milho: R$ 2,45
ovo: 1 duzia R$ 2,20
leite: R$ 1.10
farinha = R$ 1.70
Açucar = R$ 1.20
margarina: R$ 2.20
cebola: R$ 1,20
oleo = R$ 2,10
alho R$ 5,20

Pesquisa nos estabelecimentos (3)

Estabelecimento 3

Jéssica cristina
Nº 13 7ºC

abacaxi R$ 0,89
melância R$ 0,99 cada
maço de Brocolis R$ 0,70
maracujá R$ 2,40
Espinafre R$ 1,00
almeirão R$ 0,60
bagaço de milho
ovos R$ 2,50 duzia
leite R$ 0,99 caixa
farinha R$ 1,90
açúcar R$ 2,50 Kg
margarina 100g 2,40
cebola R$ 1,00
oleo R$ 2,20
alho R$ 0,50 1 cabeça
fermento em pó R$ 2,00

tilibra © DISNEY

→ Bolo de Casca de Abacaxi

	2 1
ABACAXI = R$ 0,99	0,99
2 OVOS = R$ 0,30	0,30
FARINHA (3 XÍCARAS) = 300g = R$ 0,75	0,75 +
FERMENTO (1 colher) = 2,30	2,30
AÇÚCAR (2 XÍCARAS) = 200g = R$ 0,32	0,32
	R$ 4,66

→ Doce de Melancia

MELANCIA = R$ 10,00	10,00
AÇÚCAR (1 ½ XÍCARA) = 150g = R$ 0,28	0,28
3 CRAVOS = R$ 0,60	0,60
	R$ 10,88

→ Salada de Casca de Maracujá

MARACUJÁ = R$ 0,12	0,12
AZEITONAS PRETAS =	
SAL = R$ 0,60	0,60
MAIONESE (4 colheres) = R$ 2,50	2,50
MOSTARDA (1 colher) = R$	
SALSA (2 colhers) = R$ 0,70	0,70
	3,92

6d1) Calculo de custos dos ingredientes da receita

TABELA DE CUSTOS

ESTABELECIMENTO 1 - TORTA DE ABACAXI

Ingredientes	preço de uma embalagem do ingrediente no mercado	quantidade de ingrediente utilizada (g, ml, unidade)	custo da quantidade de ingrediente utilizada
1 abacaxi	R$ 0,99 kg	1	R$ 0,99
2 ovos	R$ 0,10 cada	2	R$ 0,20
2 xícaras (chá) açúcar	R$ 1,25 pacote	2 xícaras (chá)	R$ 0,12
3 " " farinha de trigo	R$ 1,59 pacote	3 xícaras (chá)	R$ 0,16
1 colher (sopa) fermento	R$ 2,00	20 gr	R$ 0,40
Custo total (somar a ultima coluna)			R$ 1,47

Transcreva abaixo a fórmula para o cálculo do custo da torta de abacaxi e utilize a mesma para determinar o custo da receita caso você fosse comprar os ingredientes no estabelecimento 1.

FÓRMULA :

TABELA DE CUSTOS

ESTABELECIMENTO 2 - TORTA DE ABACAXI

Ingredientes	preço de uma embalagem do ingrediente no mercado	quantidade de ingrediente utilizada (g, ml, unidade)	custo da quantidade de ingrediente utilizada
Abacaxi	2,30	1 unidade	R$ 2,30
ovos	1,80	2 unidade	R$ 0,30
farinha	2,50	300 gramas	R$ 0,75
fermento	2,00	20 gramas	R$ 0,40
açucar	1,60	200 gramas	R$ 0,32
Custo total (somar a ultima coluna)			

Transcreva abaixo a fórmula para o cálculo do custo da torta de abacaxi e utilize a mesma para determinar o custo da receita caso você fosse comprar os ingredientes no estabelecimento 2.

FÓRMULA :

TABELA DE CUSTOS

ESTABELECIMENTO 3 - **TORTA DE ABACAXI**

Ingredientes	preço de uma embalagem do ingrediente no mercado	quantidade de ingrediente utilizada (g, ml, unidade)	custo da quantidade de ingrediente utilizada
abacaxi	R$ 0,89	1 unidade	R$ 0,89
ovos	R$ 2,50	2 unidade	R$ 0,50
farinha	R$ 1,90	300 gramas	R$ 0,57
fermento	R$ 2,00	20 gramas	R$ 0,40
açucar	R$ 2,50	200 gramas	R$ 0,50
Custo total (somar a ultima coluna)			R$ 2,86

Transcreva abaixo a fórmula para o cálculo do custo da torta de abacaxi e utilize a mesma para determinar o custo da receita caso você fosse comprar os ingredientes no estabelecimento 3.

FÓRMULA :

TABELA DE CUSTOS

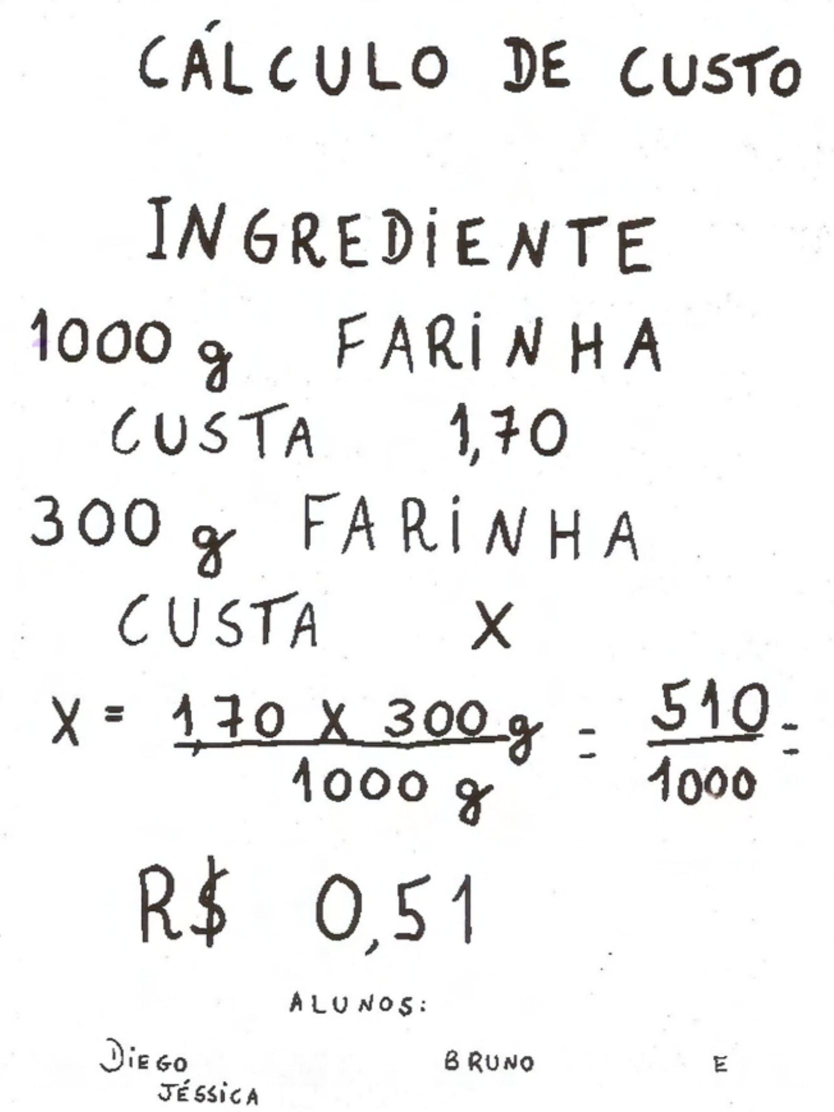
ESTABELECIMENTO 4 - **TORTA DE ABACAXI**

Ingredientes	preço de uma embalagem do ingrediente no mercado	quantidade de ingrediente utilizada (g, ml, unidade)	custo da quantidade de ingrediente utilizada
abacaxi	R$ 0,99	1 unidade	R$ 0,99
ovos	R$ 2,20	2 unidade	R$ 0,38
farinha	R$ 1,70	300 grama	R$ 0,51
fermento	R$ 2,30	20 gramas	R$ 0,46
açucar	R$ 1,20	200 gramas	R$ 0,24
Custo total (somar a ultima coluna)			R$ 2,58

Transcreva abaixo a fórmula para o cálculo do custo da torta de abacaxi e utilize a mesma para determinar o custo da receita caso você fosse comprar os ingredientes no estabelecimento 4.

FÓRMULA :

6d2)



Nesse exemplo o aluno utilizou a regra de três e usou a letra x para indicar o custo do ingrediente. As concepções da álgebra como aritmética generalizada, da álgebra como procedimento, e da álgebra como relações entre grandezas, aparecem todas aqui, com a ideia de proporcionalidade, $a/b = x/c$.

Novamente observamos que nos parece importante ressaltar a ideia de proporcionalidade “escondida” em uma regra de três, traduzindo o diagrama dessa regra como uma igualdade entre razões e como uma relação de proporcionalidade. Ao fazer isso o professor estará promovendo uma base real de compreensão a respeito desse método e também das noções de razão e proporcionalidade, ou seja, estará promovendo a fluência processual e a compreensão conceitual dos alunos, conforme recomendado pelo princípio 2 de aprendizagem visto no capítulo 4.

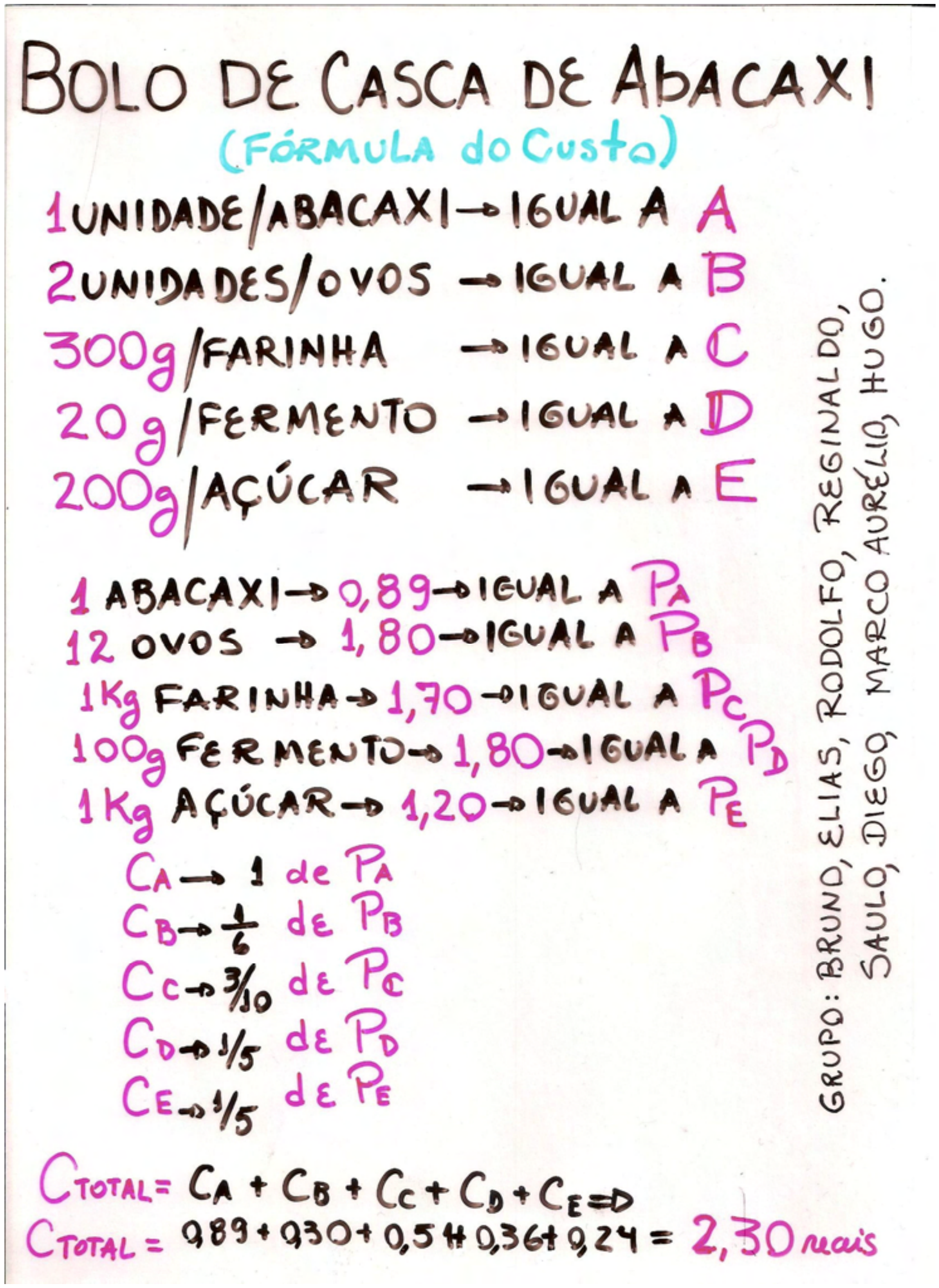
Obtendo a fórmula do custo

Observamos em 6d3) que estudantes usaram letras, ora para representar incógnitas, ora para representar variáveis, e mostraram fluência processual ao apresentarem de forma organizada o desenvolvimento de suas estratégias e um raciocínio correspondente a essas estratégias. Mas não há indícios de que houve compreensão conceitual no que diz respeito à ideia de razão e proporcionalidade, ao deduzirem a fórmula do cálculo do custo da receita de torta de abacaxi.

Podemos considerar que nessa atividade, os estudantes desenvolveram conexões entre o uso de números em aritmética e o uso de letras em álgebra, isto é, deram significado para os símbolos e às operações da álgebra em termos do conhecimento de aritmética que já tinham, para calcular o custo da receita, e para a obtenção de uma fórmula geral do custo desta receita em particular.

O professor poderia ter considerado aqui a possibilidade de introduzir a ideia de relação funcional com a fórmula do custo da receita, observando a variação do custo da receita com a variação do preço de um dos ingredientes.

6d3) A fórmul


BOLO DE CASCA DE ABACAXI

(FÓRMULA do Custo)

1 UNIDADE/ABACAXI → IGUAL A A

2 UNIDADES/OVOS → IGUAL A B

300g/FARINHA → IGUAL A C

20 g/FERMENTO → IGUAL A D

200g/AÇÚCAR → IGUAL A E

1 ABACAXI → 0,89 → IGUAL A P_A

12 OVOS → 1,80 → IGUAL A P_B

1Kg FARINHA → 1,70 → IGUAL A P_C

100g FERMENTO → 1,80 → IGUAL A P_D

1Kg AÇÚCAR → 1,20 → IGUAL A P_E

$C_A \to 1$ de P_A

$C_B \to \frac{1}{6}$ de P_B

$C_C \to 3/10$ de P_C

$C_D \to 1/5$ de P_D

$C_E \to 1/5$ de P_E

$C_{TOTAL} = C_A + C_B + C_C + C_D + C_E \Rightarrow$

$C_{TOTAL} = 0{,}89 + 0{,}30 + 0{,}51 + 0{,}36 + 0{,}24 =$ 2,30 reais

GRUPO: BRUNO, ELIAS, RODOLFO, REGINALDO,
SAULO, DIEGO, MARCO AURÉLIO, HUGO.

Esta atividade envolveu diversas pessoas da comunidade, incluindo pais, avós, tios e irmãos dos alunos. Num dia de atividade cultural nossa escola apresentou este trabalho para a comunidade escolar e, durante o encerramento desta atividade, a comunidade degustou as receitas culinárias feitas pelos alunos e levaram de lembrança um pequeno livro com as receitas incluindo os custos e a quantidade de calorias. Este livrinho foi confeccionado por eles usando papel reciclado, atividade que contou com a participação da professora de artes.

Comentários dos alunos:

Conclusão do Projeto:

"Consumo e Meio Ambiente-Matemática"

Trabalhar com este projeto, foi muito bom para prolongar a parte de ciências. Na parte de matemática, podemos encontrar vários objetivos, pois com as receitas e contas podemos saber as calorias, nutrientes, os gramas e também os custos de cada receita. Nas receitas que fizemos no dia-a-dia, não nos preocupamos em fazer contas e sem fazer, comer e pronto. Este trabalho é interessante, diferente e concreto, com ele podemos extrair outros objetivos ou resultados: O que estamos comendo e suas quantidades, o custo da receita, entre outros.

(Texto escrito por: Guilherme 7ºC
E.M.G.B Carmine Botta, 2004 - Setembro).

Comentários dos alunos

Eu achei util esse trabalho.
Aprendi fazer varias coisas como as contas.
E me ensinou a consumir os alimentos e calculos de Kcal que antes ela ia para o lixo e agora podemos aproveitar dos alimentos.

Jéssica

nome: Luana [redacted] nº 21 série 7ª C
nome: Jéssica [redacted] nº 16 série 7ª C
nome: Jéssica [redacted] nº 14 série 7ª C
nome: Liana [redacted] nº 03 série 7ª C
nome: Paola [redacted] nº 27 série 7ª C

O trabalho consumo e meio ambiente, foi muito bom para aprendermos um pouco mais sobre os alimentos, que são fundamentais para nós!
Aprendemos como nos alimentar bem sem gastar muito custo e sem acumular mais lixo.
Também aprendemos a calcular as calorias e o custo.
Aprendendo a calcular o custo, aprendemos a economizar e a escolher melhor os nossos alimentos.
Enfim esse projeto foi bom p/ consientizar as pessoas sobre a diminuição do lixo e que isso também esta relacionada com a matemática!

9.3 Atividades desenvolvidas e analisadas na 8ª série/ 9° ano

Apresentaremos a seguir atividades desenvolvidas nas 8as séries do Ensino Fundamental, analisando-as e diagnosticando nelas erros e acertos, seguindo algumas das ideias sugeridas no capítulo anterior. Nas oitavas séries utilizamos o termo de compromisso reproduzido abaixo, com o propósito de inspirar nos alunos o desejo de realizar um trabalho responsável e colaborativo.

Termo de Compromisso

Introdução:

Este Termo de Compromisso tem por objetivo estabelecer parâmetros para nortear o desenvolvimento e a organização de um trabalho diferenciado em Matemática, apontando as responsabilidades e os direitos dos alunos e da professora. O trabalho será realizado na disciplina de Matemática na 8B série do Ensino f.... na Escola Estadual ....Álvaro.....Guião...................., localizada na cidade de....São....Carlos..................../SP.

Conteúdo e Metodologia:

Será desenvolvido o conteúdo matemático pertinente à ..8... série do Ensino ...f......, proposto pela instituição, cujo trabalho será aplicado pela professora ..Eliane....Saliba...Botta.., utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Normas:

- O trabalho será desenvolvido de forma cooperativa e colaborativa. Os estudantes trabalharão em pequenos grupos com o objetivo de resolver problemas visando à construção de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos;
- Todos deverão engajar-se na discussão dos problemas apresentados;
- Os grupos serão formados por quatro alunos, aceitando-se três na impossibilidade de um quarto elemento juntar-se ao grupo, devido à insuficiência do número de alunos na sala de aula;
- O trabalho individual de cada membro terá um efeito direto sobre o sucesso do grupo.

Avaliação:

Cada aluno será avaliado individualmente, de acordo com o artigo 24, inciso V-a, da L.D.B. da Educação Nacional, lei nº 9394 de 20/12/1996, nos seguintes itens:

- FREQÜÊNCIA (Peso 1): "Todos deverão estar presentes no local e horário estipulados."
- TAREFA (Peso 1): "As tarefas extraclasse serão recolhidas no início de cada aula."
- TRABALHO DE GRUPO (Peso 1): "Os trabalhos de grupo serão observados e avaliados pela professora durante as atividades em classe."
- PARTICIPAÇÃO (Peso 1): "Participação nas discussões e no desenvolvimento de atividades propostas."
- DISCIPLINA (Peso 1): "Será observada a disciplina em sala de aula em todos os momentos da aula de Matemática."
- PROVA (Peso 5): "A avaliação escrita terá a validade de 5 pontos."

Outras resoluções:

Questões e problemas surgidos durante o desenvolvimento do trabalho serão discutidos por todos, alunos e professora, afim de chegar-se à um comum acordo, ficando estabelecido que as normas deverão ser cumpridas pelos alunos e pela professora.

Ciente dessas normas, de pleno acordo com todas as condições estabelecidas, assinam abaixo.

São Carlos, 26 de agosto de 2009.

[illegible] (mãe) — João Vitor P.

Profª. Eliane Saliba Botta — Aluno (a)

Tipo I - Atividade apresentada no caderno do aluno Ensino Fundamental de matemática da 8ª série/9° ano, v.2, 2009, p. 11, produzida pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo.

7a)

Matemática - 8ª série - Volume 2

Leitura e Análise de Textos

Considere o seguinte problema:

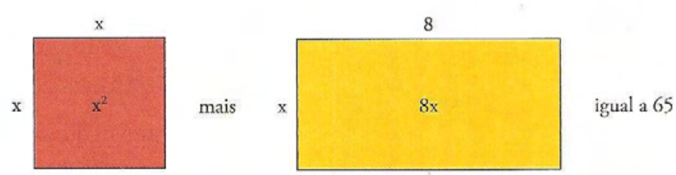
"A área de um quadrado acrescida de 8 vezes o seu lado é igual a 65.
Qual é a medida do lado desse quadrado?"

Na álgebra moderna, esse problema pode ser traduzido pela seguinte expressão algébrica: $x^2 + 8x = 65$. Resolvendo a equação, podemos obter a solução do problema.

Antigamente, contudo, os matemáticos não dispunham das mesmas ferramentas da álgebra moderna. Usavam, então, de outras estratégias para resolver problemas desse tipo. Uma delas foi desenvolvida pelo matemático persa Al-Khowarizmi, que viveu em Bagdá no século IX.

O método desenvolvido por ele seguia os seguintes passos:

I. As expressões x^2 e $8x$ eram interpretadas como as áreas de um quadrado e de um retângulo. A solução do problema é, então, a medida do lado do quadrado:



$$x^2 + 8x = 65$$

Após leitura em grupo, foi discutido o desenvolvimento do método de Al-Khowarizmi, num primeiro momento sem nos apoiarmos no desenvolvimento desta atividade como consta no caderno do aluno da proposta curricular. Depois de algumas tentativas de compreender o enunciado, e escrever como interpretaram o texto, seguimos as orientações apresentadas no caderno do aluno. O método de Al-Khowarizmi fornece uma solução do problema utilizando geometria e álgebra. É uma atividade inserida em um contexto histórico, que mostra ao aluno uma forma diferente de resolver uma equação do segundo grau, antes mesmo do aprendizado da fórmula de Bhaskara (1114-1185).

A nosso ver, é uma situação-problema que pode preceder o estudo da equação e da função do 2º. grau. É uma atividade motivadora e recreativa, além de instrutiva, e mostra aos estudantes que nem sempre as equações foram classificadas pelo grau, ou admitiram coeficientes negativos, pois no séc. IX os números negativos ainda não existiam (isso só veio a ocorrer no fim do séc. XVII). É um problema que pode levar os alunos a se envolverem com a história da matemática, ao pesquisarem, por exemplo, a origem das palavras álgebra, algoritmo e algarismo, e a perceberem que a matemática que eles aprendem evoluiu lentamente durante séculos.

Ao tratar uma situação-problema que envolve um pouco da história da matemática, os estudantes ampliam seu horizonte cultural e, dependendo da ação do professor, poderão começar a perceber que a matemática, bem como todas as ciências e áreas do conhecimento, se tiveram um começo, não terão um fim, e que eles poderão dar sua parcela de contribuição algum dia.

Enunciados dos grupos interpretando as etapas do método de Al- Khowarizmi, durante a leitura e a análise do texto.

① Desenhe um quadrado de área igual a x^2, um retângulo de área igual a $8x$

b) Faço o mesmo desenho da área do quadrado de lado x e o outro retângulo dividido em duas figuras de mesma área

c) Escreva uma expressão matemática dos itens (a) e (b) que representa cada figura e some o resultado com 65

d) Complete a figura com o quadrado que falta

x^2	$4x$
$4x$	?

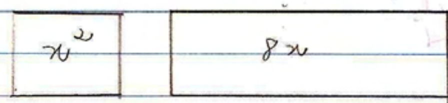
e) Indentifique as medidas dos lados de cada lado da figura obtida no item (d)

7a1) Algumas resoluções

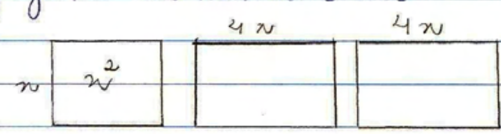
DATA 09/10/09

nome: Danielle Toyama nº: 44 Série: 8º A
Paloma Chiecolli nº 43

1 a) Desenhe um quadrado de área igual a x^2, um retângulo de área igual a $8x$.



b) Faça o mesmo desenho da área do quadrado de lado x, e o outro retângulo dividido em duas figuras de mesma área

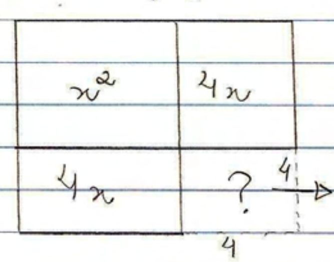


c) Escreva uma expressão matemática dos itens (a) e (b) que representa cada figura e some o resultado com 65.

$x^2+8x=65$

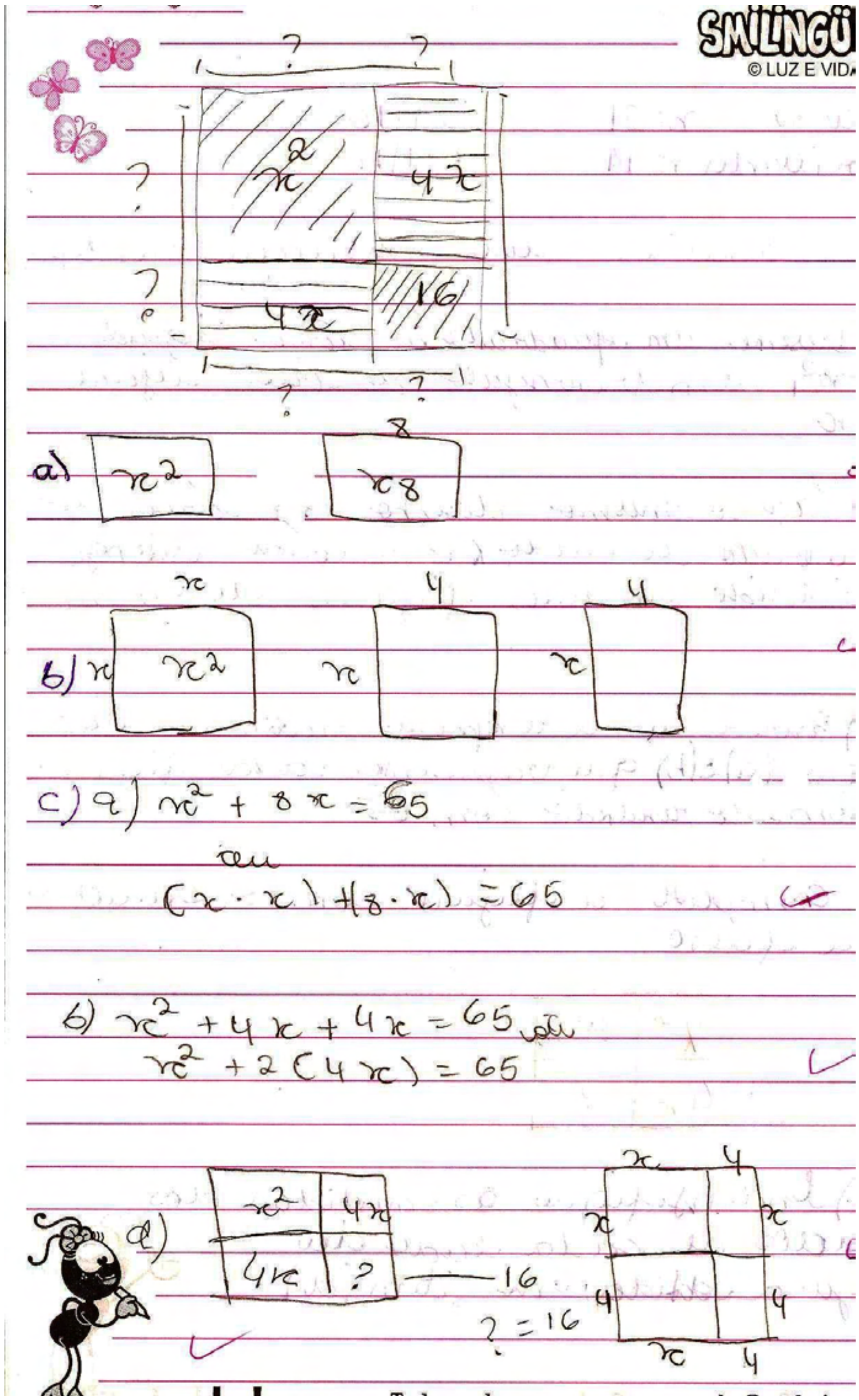
$x^2+2\cdot 4x=65$

d) Complete a figura com o quadrado que falta.

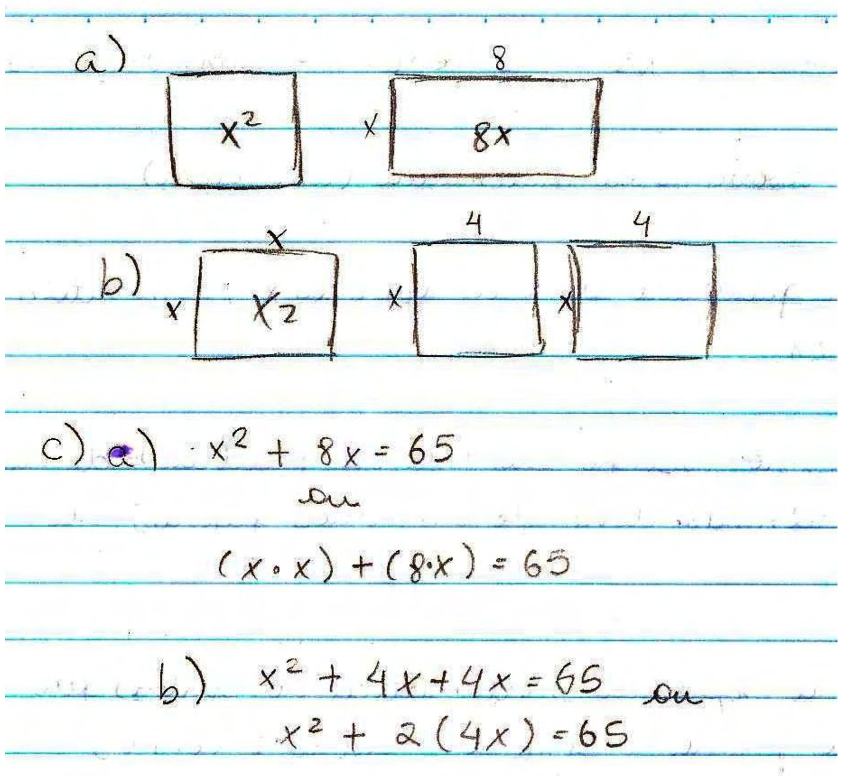


A área da figura é 16.

7a2)


? ?
?
x^2
$4x$
?
$4x$
16
? ?
a) x^2 8 $x8$
b) x x^2 x 4 x 4
c) a) $x^2 + 8x = 65$
ou
$(x \cdot x) + (8 \cdot x) = 65$
b) $x^2 + 4x + 4x = 65$ ou
$x^2 + 2(4x) = 65$
d) x^2 $4x$ $4x$? — 16
? = 16
x 4 x x 4 4 x 4

7a3)



Nos problemas 7a1), 7a2) e 7a3), os estudantes puderam descobrir a dimensão do quadrado que faltava para completar o quadrado maior, ou seja, completaram a figura corretamente, indicando suas dimensões, mas não utilizaram essa informação para obter uma nova equação, correspondente ao quadrado ampliado. Foi necessário que o professor interviesse para fazê-los notar que essa nova equação poderia ser obtida tanto ao somarmos 16 nos dois lados da equação original, quanto ao observamos que a área do quadrado maior era 81 e que seu lado media $x+4$. Se $x^2 + 8x + 16 = 65 + 16$ *então* $(x+4)^2 = 81$

$$e \quad (x+4) = 9$$

$$x = 9 - 4$$

$$x = 5$$

que responde à pergunta do problema.

Nesse momento, com apoio na intuição geométrica procurou-se esclarecer o significado do sinal de igualdade da equação que diz respeito à soma de áreas. Desse modo, os estudantes utilizaram seu conhecimento anterior de área de figura geométrica, usaram a letra x para indicar o comprimento dos lados da figura, expressaram o raciocínio de forma organizada como visto nos desenhos, mas não estabeleceram a relação entre o desenho geométrico e a expressão algébrica. Nos exemplos 7b1) e 7b2) a seguir, no entanto, vemos que os alunos já souberam estabelecer essa relação.

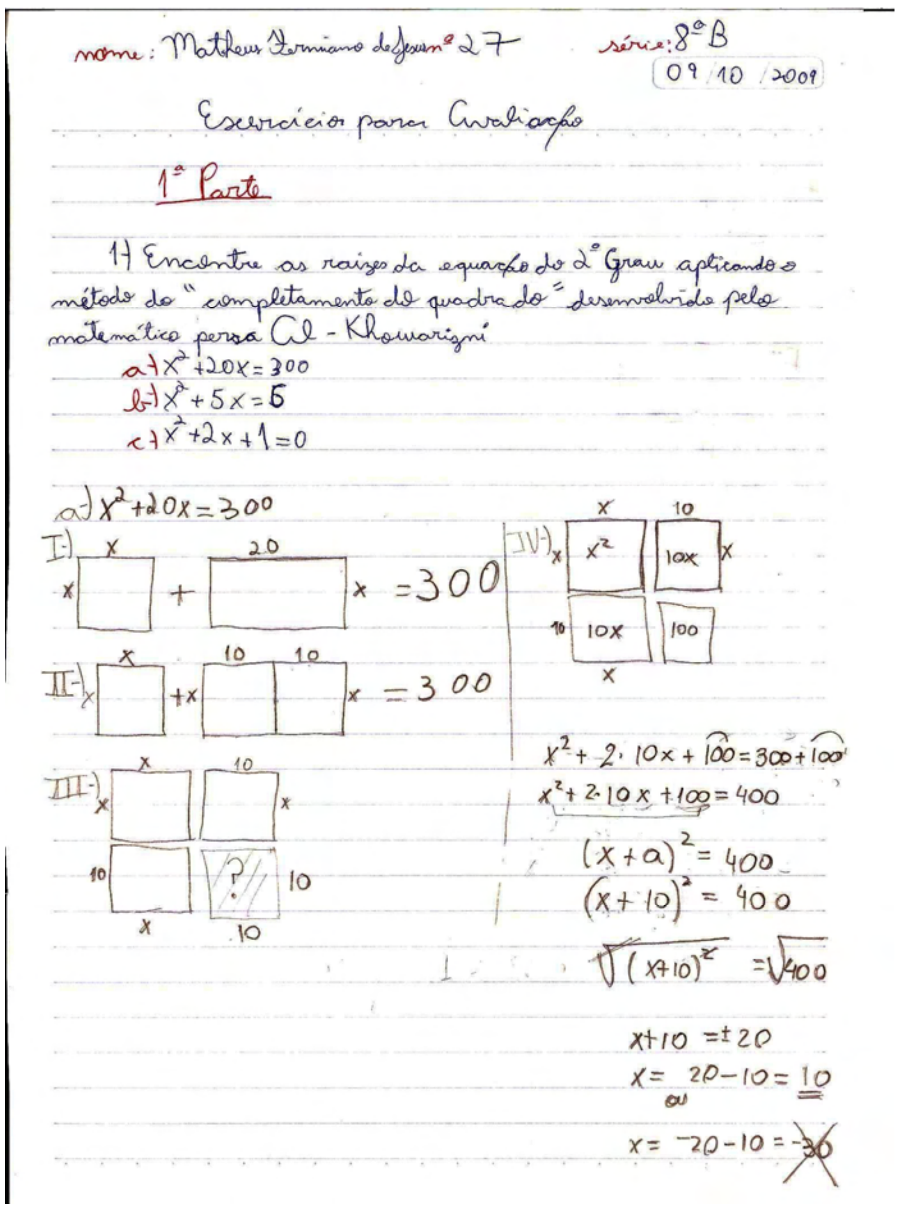
Em nossa opinião, a habilidade de traduzir algebricamente um problema, com compreensão, pode ser desenvolvida de modo mais satisfatório, durante o processo de ensino-aprendizagem, se houver alguma diversificação de métodos, e alguma imaginação, com o uso de palavras, de figuras geométricas, e de letras indicando medidas, quantidades, etc. Desde que esses elementos tenham um significado claro para os alunos, sua tradução em notação matemática, em uma equação, ocorrerá de modo natural. Em nossa opinião, ainda, durante a análise das respostas apresentadas pelos alunos, feita na lousa, diante da classe, já poderíamos ter chamado a atenção dos alunos sobre os diversos usos que se faz das letras em problemas de matemática, utilizando as ideias vistas no capítulo 4, sem esperar, no entanto, que eles compreendessem inteiramente as distinções apresentadas.

7b) *Tipo II*

Os problemas 7b1) e 7b2), resolvidos de forma individual durante uma avaliação, baseiam-se na resolução de uma equação do segundo grau usando o método geométrico de Al-Khowarizmi, trabalhado anteriormente com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Nesses exemplos os estudantes mostraram que aprenderam como resolver problemas envolvendo noções de área de figuras planas, um tópico previamente trabalhado como problema secundário durante a aplicação da metodologia, e como resolver equações do segundo grau, usando tanto o raciocínio algébrico quanto o raciocínio geométrico desenvolvido no método de Al-Khowarizmi.

Durante a resolução os estudantes também mostraram que sabem usar o quadrado da soma de dois números que dá um trinômio quadrado perfeito, como também sabem usar a propriedade da operação inversa da potenciação para resolver a equação com o produto notável, $(x+a)^2 = b^2$. Mostraram ainda que conheciam a propriedade da raiz quadrada de um número, apresentando duas soluções possíveis para a raiz.

7b1)



nome: Matheus Firmiano de Jesus nº 27 série: 8º B

09/10/2009

Exercícios para Avaliação

1ª Parte

1) Encontre as raízes da equação do 2º Grau aplicando o método do "completamento do quadrado" desenvolvido pelo matemático persa Al - Khowarizmi

a) $x^2+20x=300$

b) $x^2+5x=6$

c) $x^2+2x+1=0$

a) $x^2+20x=300$

$x^2+2\cdot 10x+100=300+100$

$x^2+2\cdot 10x+100=400$

$(x+a)^2=400$

$(x+10)^2=400$

$\sqrt{(x+10)^2}=\sqrt{400}$

$x+10=\pm 20$

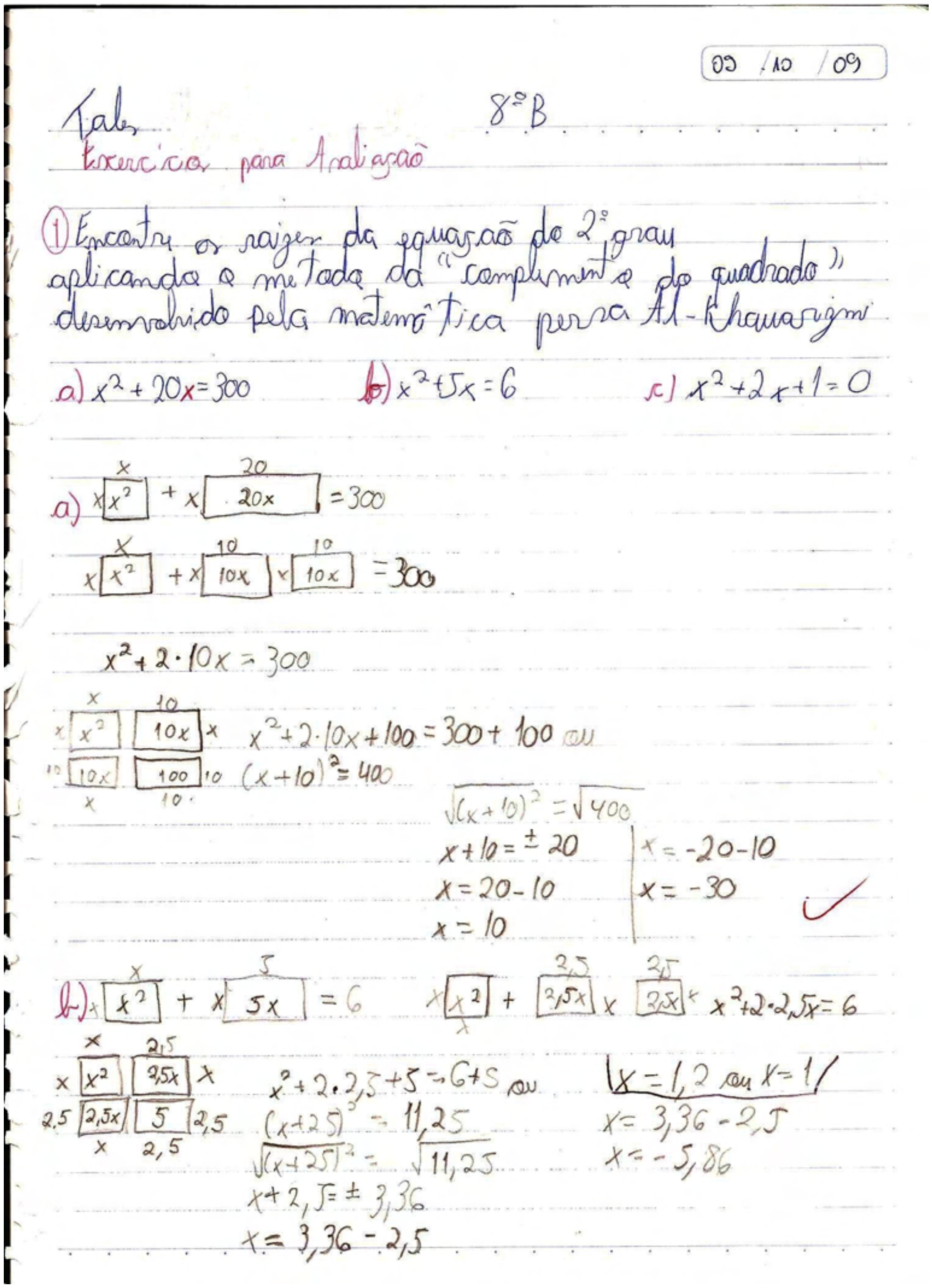
$x=20-10=\underline{10}$

ou

$x=-20-10=\cancel{-30}$

Neste problema, 7b1), o aluno ao encontrar as duas soluções da equação, excluiu uma delas, possivelmente pensando que calculava o tamanho do lado de um quadrado como fez ao estudar o método de Al-Khowarizmi.

7b2)


09 /10 /09

Talis 8º B

Exercício para Avaliação

1) Encontre as raízes da equação do 2º grau aplicando o método do "complemento do quadrado" desenvolvido pelo matemático persa Al-Khowarizmi

a) $x^2+20x=300$ b) $x^2+5x=6$ c) $x^2+2x+1=0$

a) $\boxed{x^2} + \boxed{20x} = 300$

$\boxed{x^2} + \boxed{10x} + \boxed{10x} = 300$

$x^2+2\cdot 10x = 300$

$x^2+2\cdot 10x+100 = 300+100$ ou

$(x+10)^2 = 400$

$\sqrt{(x+10)^2} = \sqrt{400}$

$x+10 = \pm 20$ | $x=-20-10$

$x = 20-10$ | $x=-30$

$x = 10$

b) $\boxed{x^2} + \boxed{5x} = 6$ $\boxed{x^2} + \boxed{2{,}5x} + \boxed{2{,}5x}$ $x^2+2\cdot 2{,}5x = 6$

$x^2+2\cdot 2{,}5+5 = 6+5$ ou

$(x+2{,}5)^2 = 11{,}25$

$\sqrt{(x+2{,}5)^2} = \sqrt{11{,}25}$

$x+2{,}5 = \pm 3{,}36$

$x = 3{,}36-2{,}5$

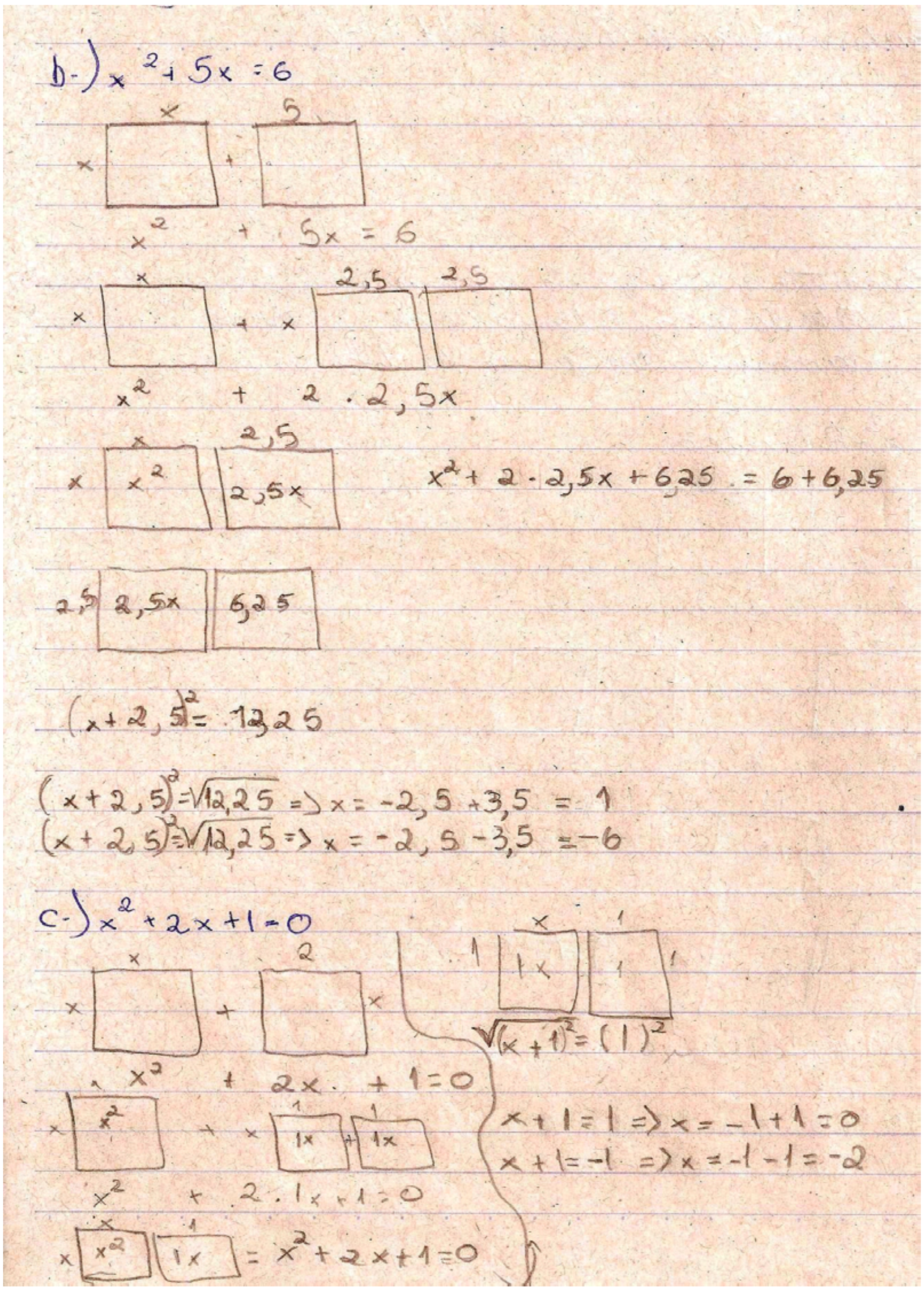
$x=1{,}2$ ou $x=1$

$x = 3{,}36-2{,}5$

$x=-5{,}86$

No problema, (7b2), o aluno cometeu alguns erros, por exemplo, no cálculo da área do quadrado de lado 2,5. Ao invés de multiplicar 2,5 por 2,5 ele adicionou 2,5 com 2,5. Também fez um erro de cálculo aritmético de adicionar e subtrair dois números.

7b3)

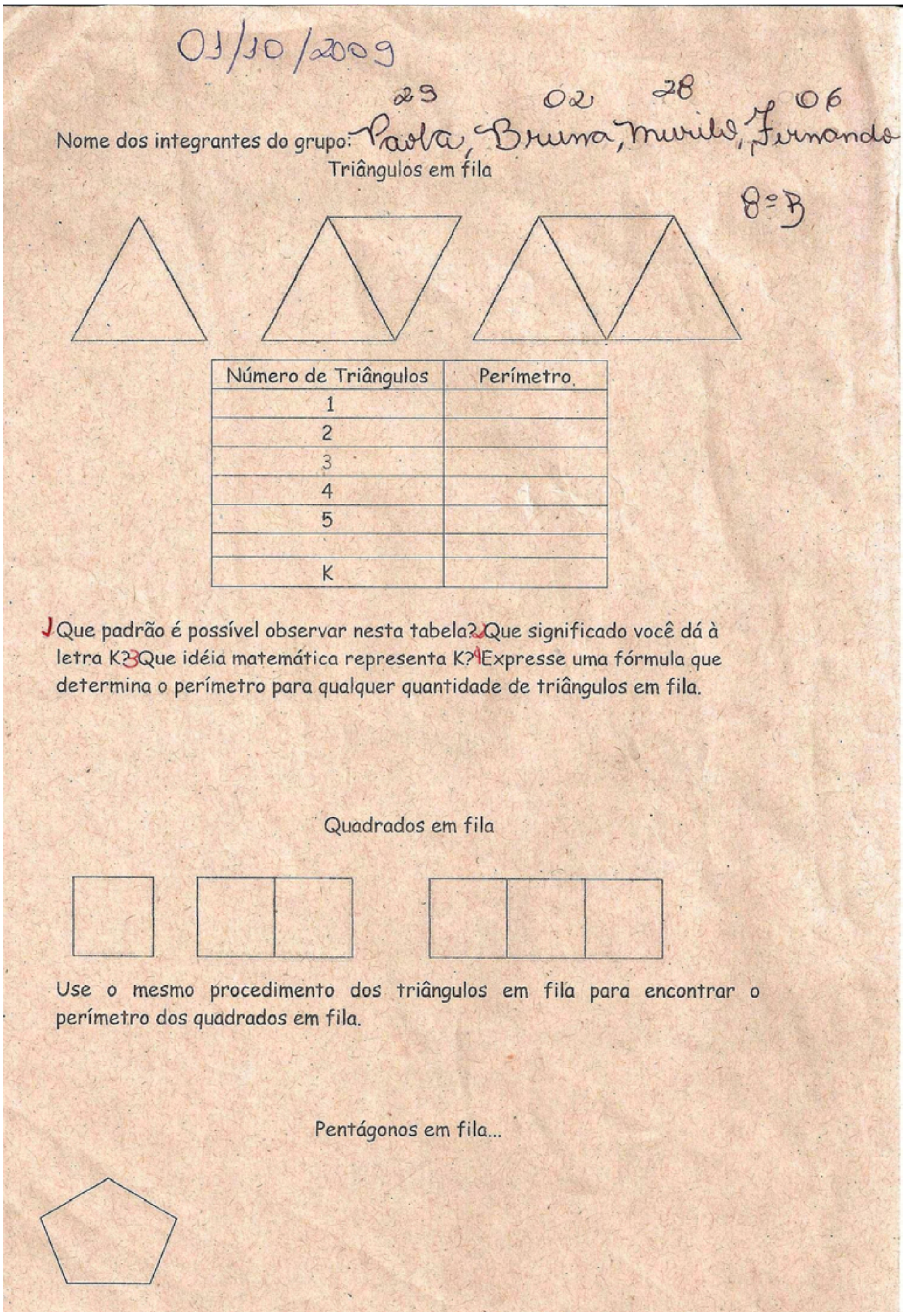


Neste terceiro problema, (7b3), o aluno desenvolveu um raciocínio de modo claro, mostrou que compreendeu o método de Al-Khowarizmi e mostrou fluência processual ao utilizar o método nesse novo problema.

Os problemas 8a) e 8b), a seguir, são atividades do Tipo I. Esses problemas apresentam padrões e generalizações, envolvem o princípio da contagem, apresentam a álgebra como estudo de relações entre grandezas, introduzem padrões para a obtenção de relações funcionais, e introduzem aos poucos os termos e vocabulário relacionados com o conceito de função. Assim, podemos dizer que esses problemas constituem uma ponte para a introdução, com compreensão, do conceito formal de função. Os problemas foram retirados e adaptados do livro Teaching Student-Centered Mathematics, Joh A. Van de Walle e Lou Ann H. Lovin (p.292).

O Modelo da atividade entregue a cada aluno dos grupos, é igual a este que mostramos a seguir.

8a)



01/10/2009

Nome dos integrantes do grupo: Paola, Bruna, Murilo, Fernando

29 02 28 06

8ª B

Triângulos em fila

Número de Triângulos	Perímetro
1	
2	
3	
4	
5	
K	

1 Que padrão é possível observar nesta tabela? 2 Que significado você dá à letra K? 3 Que idéia matemática representa K? 4 Expresse uma fórmula que determina o perímetro para qualquer quantidade de triângulos em fila.

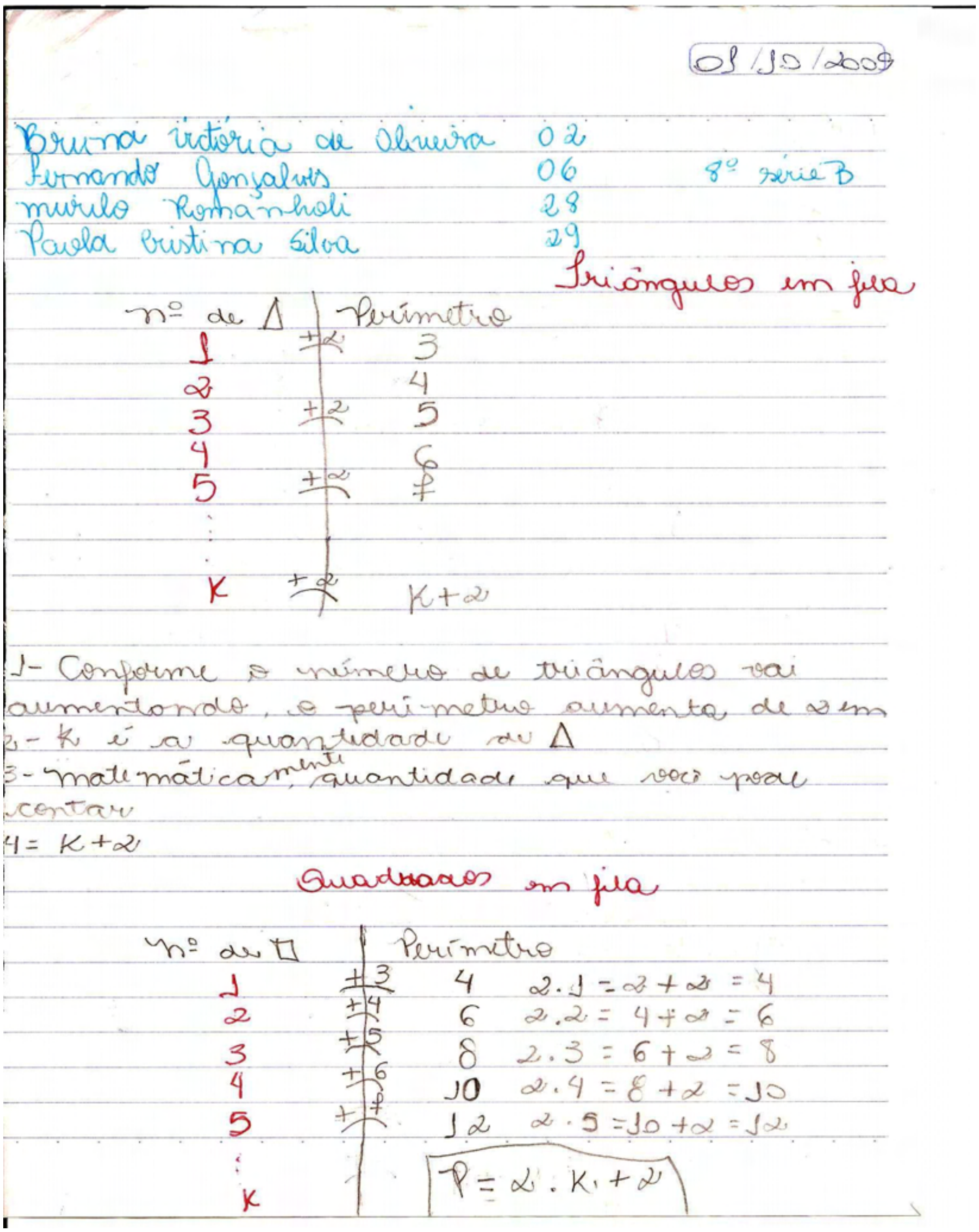
Quadrados em fila

Use o mesmo procedimento dos triângulos em fila para encontrar o perímetro dos quadrados em fila.

Pentágonos em fila...

Veremos a seguir algumas resoluções, com triângulos, quadrados e pentágonos em fila.

8a1) Resolução com triângulos em fila



01/10/2009

Bruna Vitória de Oliveira 02
Fernando Gonzalves 06 8º série B
Murilo Romanholi 28
Paula Cristina Silva 29

Triângulos em fila

nº de Δ		Perímetro
1	+2	3
2		4
3	+2	5
4		6
5	+2	7
⋮		
K	+2	K+2

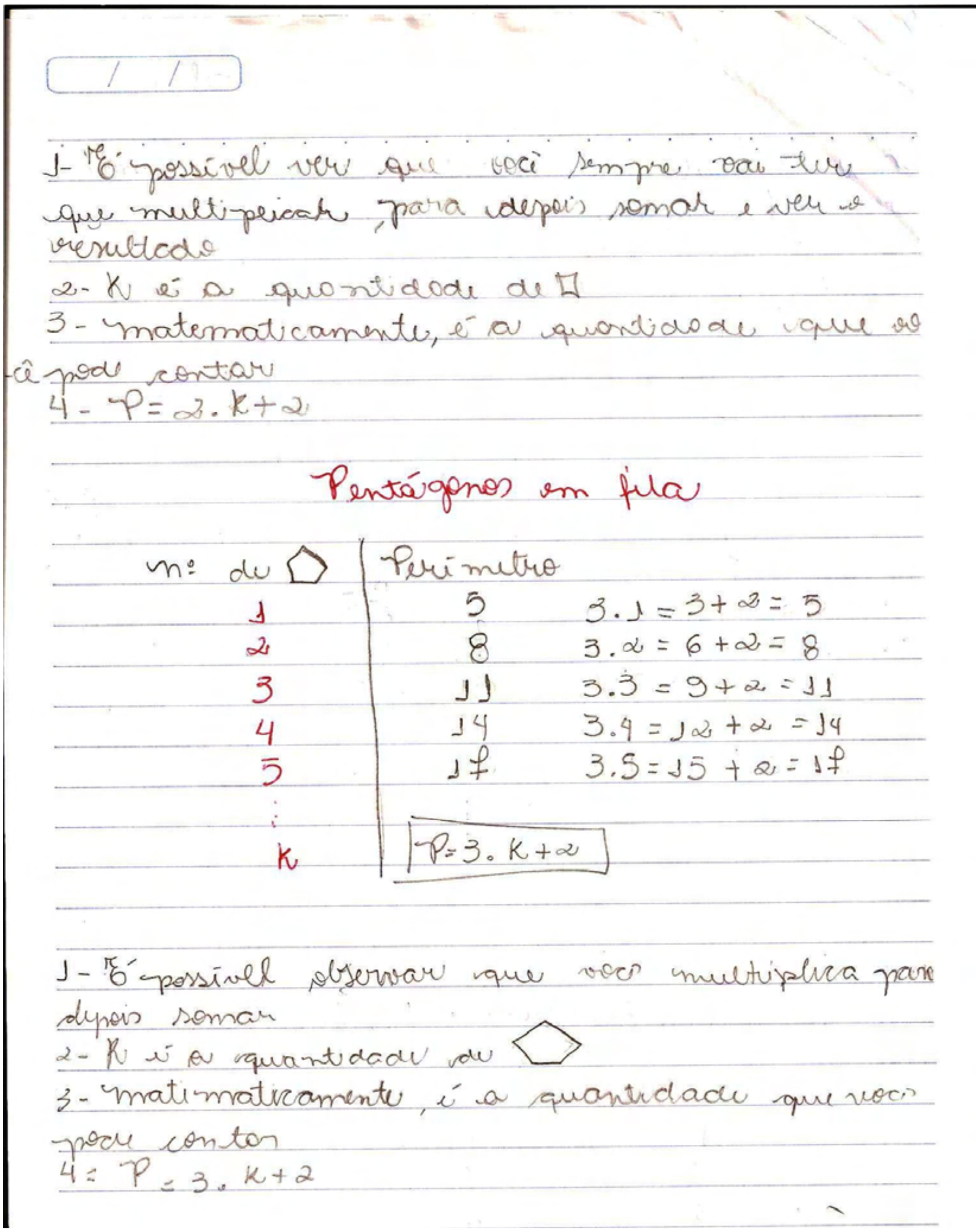
1- Conforme o número de triângulos vai aumentando, o perímetro aumenta de 2 em
2- K é a quantidade de Δ
3- matematicamente quantidade que você pode contar
4= K+2

Quadrados em fila

nº de □		Perímetro	
1	+3	4	2.1 = 2+2 = 4
2	+4	6	2.2 = 4+2 = 6
3	+5	8	2.3 = 6+2 = 8
4	+6	10	2.4 = 8+2 = 10
5	+7	12	2.5 = 10+2 = 12
⋮			
K			

$\boxed{P = 2 \cdot K + 2}$

8a2) Resolução do problema com pentágonos em fila



1- É possível ver que você sempre vai ter que multiplicar, para depois somar e ver o resultado

2- K é a quantidade de ☐

3- matematicamente, é a quantidade que você pode contar

4- $P = 2 . K + 2$

Pentágonos em fila

nº de ⬠	Perímetro	
1	5	$3.1 = 3+2 = 5$
2	8	$3.2 = 6+2 = 8$
3	11	$3.3 = 9+2 = 11$
4	14	$3.4 = 12+2 = 14$
5	17	$3.5 = 15+2 = 17$
⋮		
k	$\boxed{P = 3 . K + 2}$	

1- É possível observar que você multiplica para depois somar

2- K é a quantidade de ⬠

3- matematicamente, é a quantidade que você pode contar

4: $P = 3 . K + 2$

Durante o desenvolvimento dessas atividades em grupo, foi necessário: observar e analisar as grandezas envolvidas nas filas de triângulos, quadrados e pentágonos; fazer uso de uma tabela para representar as grandezas envolvidas e observar como essas grandezas se relacionam. Observa-se que os alunos usaram as letras P e K para representar variáveis-grandeza que se relacionam, e também conseguiram apresentar uma relação entre estas grandezas.

Nos problemas 8a1) e 8a2) vemos novamente um encadeamento incorreto de igualdades, já observado no problema 4, a2).

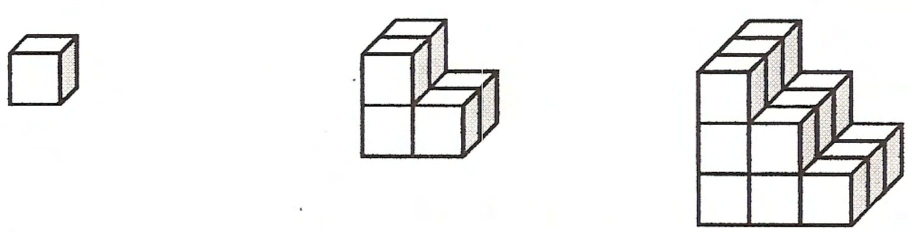
Atividade Tipo I - O problema a seguir foi retirado e adaptado do livro Teaching Student-Centered Mathematics, Joh A. Van de Walle e Lou Ann H. Lovin (p.266).

Os alunos de cada grupo receberam uma folha de atividades e cada grupo recebeu o kit didático *Linking Cubes*, constituído de cubinhos encaixantes, que possibilitam, entre outras coisas, a construção de objetos geométricos e padrões, e fornecem meios de ilustrar as operações básicas.

Nome dos integrantes do grupo:

Problema A Enésima Escada

1- Quantos cubos são necessários para construir a próxima escada?
2- Quantos cubos são necessários para construir a décima escada?
3- Explique como você encontrou a sua resposta para a questão anterior.
4- De que outros modos você poderia olhar para o problema?
5- Quantos cubos são necessários para a enésima escada?



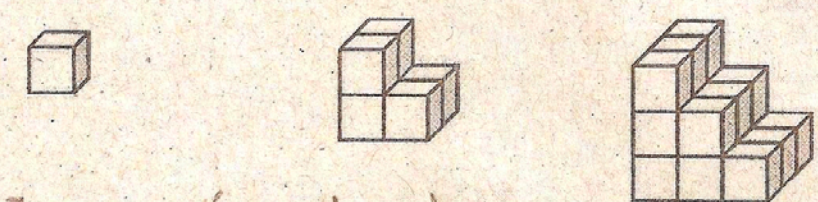
Resoluções

8d)

Nome dos integrantes do grupo:
Julia, Aláisia e Lucas Sampaio 8-A

Problema A Enésima Escada

1- Quantos cubos são necessários para construir a próxima escada?
2- Quantos cubos são necessários para construir a décima escada?
3- Explique como você encontrou a sua resposta para a questão anterior.
4- De que outros modos você poderia olhar para o problema?
5- Quantos cubos são necessários para a enésima escada?



1- Sãa necessários 40 cubos
2. Sãa necessarios 150 cubos
3- Nós imaginamos
4- Contar lado x lado + cada degrau
5
6-

nº de degraus	nº de cubinhos
1-	1
2	6
3	18
4	40

8d1) Outras resoluções

02 10 09

Nome dos integrantes do grupo:

Kellyn, Yngrid, Gabriela e Raiza nº 21, 40, 07, 33

Problema a Enésima Escada

nº de degraus	nº de cubinhos
1	1
2	6
3	18
4	40
5	75
6	126
7	196
8	288
9	405
10	550

1- São necessárias 40 cubinhos

2- São necessárias 550 cubinhos

3- Encontramos somando o número da face vezes o número de degraus.

4- contando os cubinhos por cubinhos.

8d2)

1- 40 cubos

2- 550 cubos

3- n= n-1+n-2+n-3+n-4+n-5... x n = número de cubos

10=10+10-1+10-2+10-3+10-4+10-5+10-6+10-7+10-8+10-9 x 10=

10= 10+9+8+7+6+5+4+3+2+1 x 10= 550 cubos

4- exemplo: 6 degraus seria 6x1+6x2+6x3+6x4+6x5+6x6=nº de cubos.

5- n=n-1+n-2+n-3+n-4+n-5... x n= nº de cubos

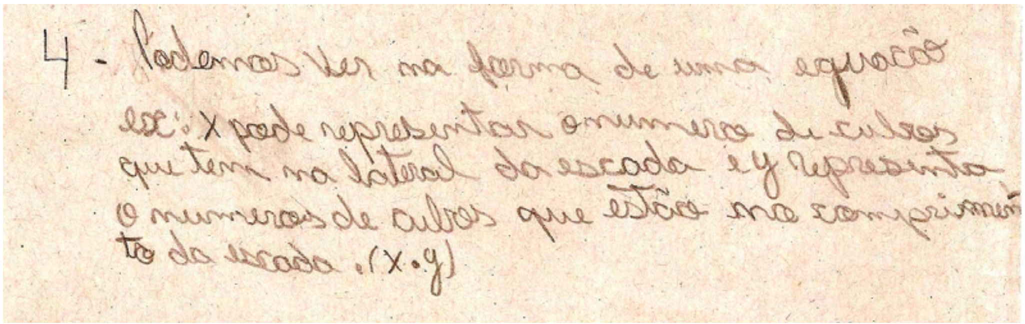
n= nº de degraus.

8d3)

6= Construa uma tabela para auxiliar e ilustrar:

nº de degraus	nº de cubinhos
1	1
2	6
3	18
4	40
5	5(5+4+3+2+1)
6	6(6+5+4+3+2+1)
7	7(7+6+5+4+3+2+1)
8	8(8+7+6+5+4+3+2+1)
9	9(9+8+7+6+5+4+3+2+1)
10	10(10+9+8+7+6+5+4+3+2+1)

8d4)


4 - Podemos ver na forma de uma equacão
ex: X pode representar o numero de cubos
que tem na lateral da escada e y representa
o numeros de cubos que estão no comprimen
to da escada. (X.y)

Diferentemente dos problemas resolvidos na atividade 8c), nos da atividade 8d) os alunos não conseguiram obter uma fórmula para calcular o número de cubinhos em função do número de degraus, mas chegaram bem perto. Nesses problemas, como um auxílio para obtenção dessa fórmula, os grupos utilizaram uma tabela relacionando o número n de degraus com o número de cubinhos, para vários valores de n, e também procuraram expressar com palavras essa relação, mesmo que com dificuldade. De modo geral, os alunos mostraram uma boa compreensão do que ocorria com as variáveis-grandezas envolvidas no problema. Isso ficou evidente ao expressarem suas ideias usando números particulares e letras. Os grupos mostraram diversos raciocínios, uns até mesmo bem elaborados, como em 8d2) e 8d3), e na forma escrita em 8d4). Em 8d2), no entanto, vemos novamente um encadeamento de igualdades incorreto.

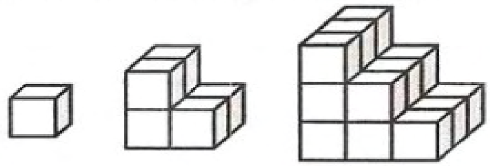
O desenvolvimento dessa atividade foi documentado no site da Escola Estadual Dr. Álvaro Guião, http://alvaroguiao.blogspot.com/, onde se pode ver a descrição do problema e alguns vídeos filmados em sala de aula.

sexta-feira, 6 de novembro de 2009

Álgebra Funcional - Matemática

Identificar, estender e explicar padrões são processos importantes no pensamento algébrico. Numa aula de matemática foi sugerido aos estudantes das **oitavas séries** o problema: "**A enésima escada**". Este problema foi abordado inicialmente utilizando *desenho/puzzle/linking cubes* para ilustrar a seqüência do modelo padrão sugerido pelo problema, eles puderam de forma mais divertida **reconhecer, falar, estender, explicar e generalizar o modelo padrão**.

Problema: A Enésima Escada:
Quantos cubinhos são necessários para construir 10 degraus?



O **principal objetivo** desta atividade é os estudantes discutirem com seus grupos o **padrão da seqüencia**, e também tentar explicar **como cada elemento da seqüencia difere do anterior**, **observar se cada novo elemento da seqüencia pode ser obtido adicionando ou mudando o "passo" anterior**.

No entanto, os alunos foram além, observaram que há uma **componente numérica** relacionando os elementos envolvidos na seqüencia, e isto ficou evidenciado ao construírem uma **tabela** apresentando um **rol de número de escadas associadas com o número de cubinhos**, outros grupos de estudantes obtiveram uma **relação recursiva** existente na seqüencia do modelo padrão, outros foram além de **combinações aritméticas**, estenderam o problema para qualquer quantidade de escadas e obtiveram uma relação funcional entre o número de escadas e a quantidade de cubinhos.

A **forma lúdica** de introduzir o conteúdo de **álgebra funcional** influenciou no aprendizado, pois **partindo da idéia que o estudante já tem algum conhecimento**, dele poder manipular objetos, observar desenhos/padrões, e desenvolver a linguagem oral, **estas ações permitiram os estudantes refletir seus pensamentos individualmente como também interagir socialmente**.

Essa forma lúdica de introduzir novos conceitos não significou simplesmente deixar os alunos brincar na esperança que eles magicamente descobrissem as idéias matemáticas novas.
Pelo contrário, em face ao comportamento e impactos dos alunos, a aula foi desenvolvida inter-relacionando as idéias dos alunos, de forma que cada um deles aprenda e compreenda novos conceitos a partir da interação social promovida/conduzida pelo professor.

Bibliografia consultada:
Teaching Student-Centered Mathematics,
John A. Van de Walle e LouAnn H. Lovin

Prof. **Eliane Botta** leciona **Matemática** na **Escola Guião**

Tipo II – Enunciados e avaliação

8e)

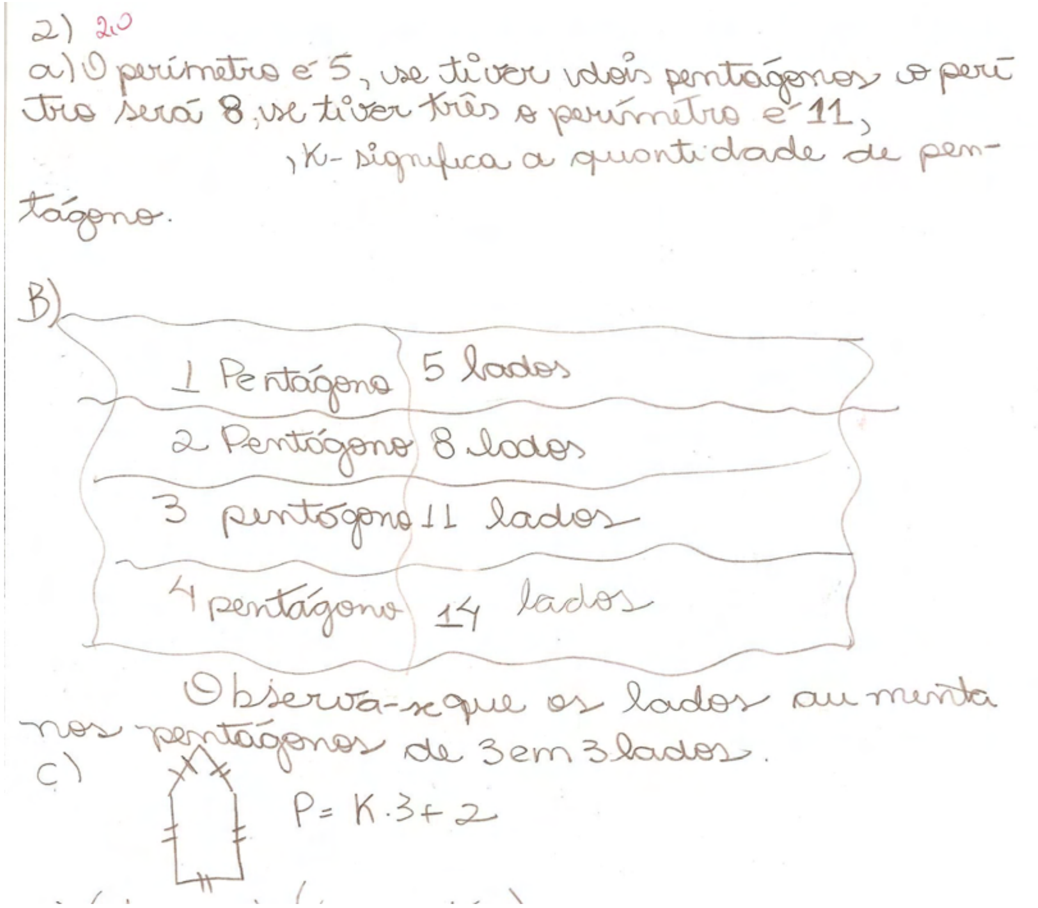
2) Construa uma fila de pentágonos, onde cada pentágono tem os lados de mesmo tamanho. Depois determine:
   a) Qual é o perímetro se você tiver um pentágono? E se você tiver dois pentágonos unidos?
   E se você tiver três pentágonos unidos? E se você tiver K pentágonos unidos? O que significa a letra K?
   b) Construa uma tabela e transcreva os resultados do item a). Que padrão é possível observar nesta tabela.
   c) Escreva uma fórmula que indica o perímetro para qualquer quantidade de pentágonos.

8e1) Resoluções

Nas resoluções de 8e1), 8e2) e 8e3), logo a seguir, os estudantes mostraram saber expressar as variáveis do problema na forma de: desenho (geometricamente); na forma de tabela, sendo que alguns também indicaram na tabela a relação existente entre as grandezas por meio de flechinhas; e, também, através de uma fórmula. Usaram o conhecimento prévio a respeito do que é perímetro e, depois de construírem a tabela, observaram e escreveram que o número de lados aumenta de três em três, conforme aumenta o número de pentágonos.

Em 8e4) os alunos aparentemente procuraram encontrar alguma relação entre o número de triângulos que se pode construir, a partir de um vértice, em cada pentágono, igual a três, e o número 3 que aparece na expressão do perímetro.

8e1)



2) 2,0

a) O perímetro é 5, se tiver dois pentágonos o perí-
tro será 8, se tiver três o perímetro é 11,
, K- significa a quantidade de pen-
tágono.

B)

1 Pentágono	5 lados
2 Pentágono	8 lados
3 pentágono	11 lados
4 pentágono	14 lados

Observa-se que os lados aumenta
nos pentágonos de 3 em 3 lados.

c)

P = K.3 + 2

Essa atividade também fornece, evidentemente, uma oportunidade para se discutir de modo informal a noção de variável e a relação de dependência entre variáveis.

8e2

2- a)  o perimetro é 5,  o perimetro é 8,

 o perimetro é 11.

b)

1 Pentagono	5 lados
2 Pentagono	8 lados
3 Pentagono	11 lados
4 Pentagono	14 lados

Pode se observar que os lados aumenta de 3 em 3 vezes.

8e3)

1,5

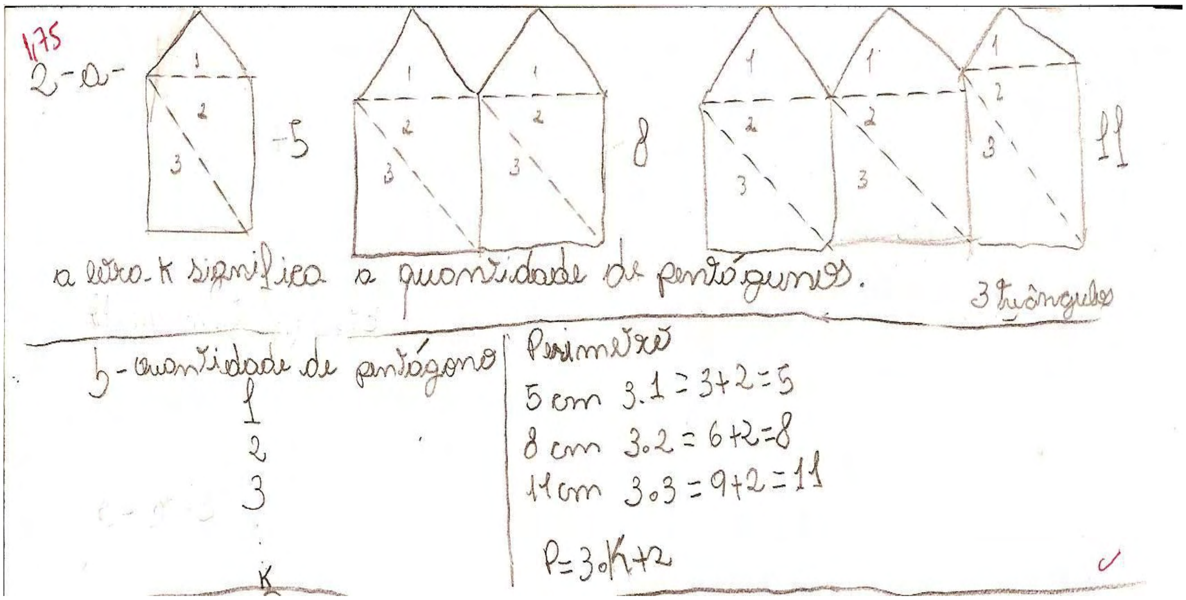
2.  a) 5cm , 8cm , 11cm ; 3.K+2 cm

b-

Nº de	Perimetro
1	3.1+2 → 5cm
2	3.2+2 → 8cm
3	3.3+2 → 11cm
K	3.K+2 → 3.K+2

c- 3. K +2

8e4)



Gostaríamos de observar que as atividades a) b) c), d) e e) exigem certa ousadia do professor, interação, inspiração e paciência de todos, professor e alunos, e, possivelmente, constituem experiências pelas quais os alunos passam uma única vez durante o período escolar.

Atividades - *Tipo I*

Elas foram desenvolvidas em grupos, com o objetivo de familiarizar os alunos com os conceitos de variável dependente e independente, utilizando grandezas relacionadas em uma tabela. Propunha-se levar o aluno a: ler, construir e interpretar informações de variáveis expressas em tabelas; associar informações apresentadas nas tabelas aos gráficos que as representam e vice-versa; compreender como os pares ordenados são representados em um gráfico; compreender que nos elementos dos pares ordenados associados aos dados da tabela, o primeiro representa a variável independente e o segundo representa a variável dependente; interpretar de que forma as variáveis se relacionam – diretamente ou inversamente; compreender a noção de relação funcional.

9a) Enunciado e resolução

1 a)

x	1	2	3	4	5	6	7
y	10	20	30	40	50	60	70

A grandeza y varia em função da grandeza x. Com os valores apresentados na tabela, verifique:

1. Se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais.

São diretamente proporcionais.

2. Escreva a sentença algébrica que relaciona x e y.

$y = 10x$

1 b)

x	1	2	3	4	5	6	10
y	48	24	16	12	9,6	8	4,8

Verifique:

1. Se as grandezas x e y são inversamente ou diretamente proporcionais.

São inversamente proporcionais.

2. Escreva a relação que envolve as duas variáveis da tabela.

$y = \frac{x}{48}$

9a1) Enunciado e resolução (continuação de 9a)

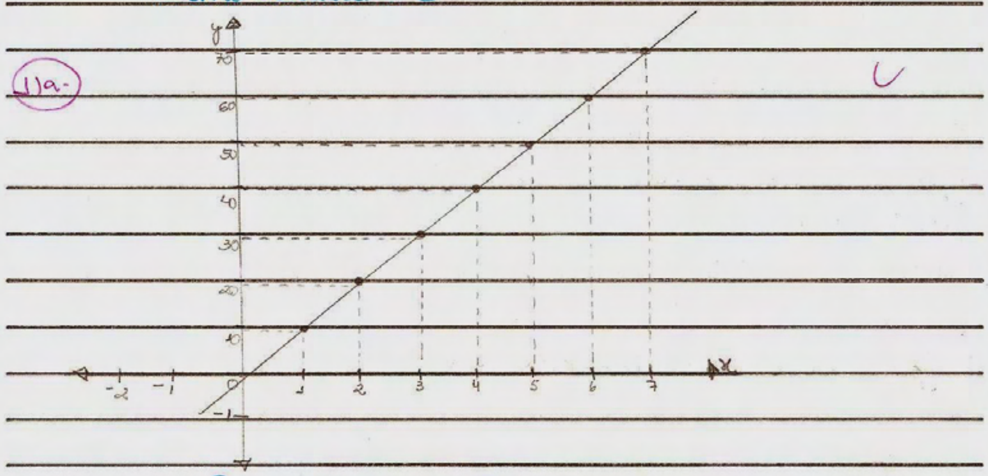
c) Represente os pares ordenados da Tabela 1a e 1b

1.a) (1,10); (2,20); (3,30); (4,40); (5,50); (6,60); (7,70);

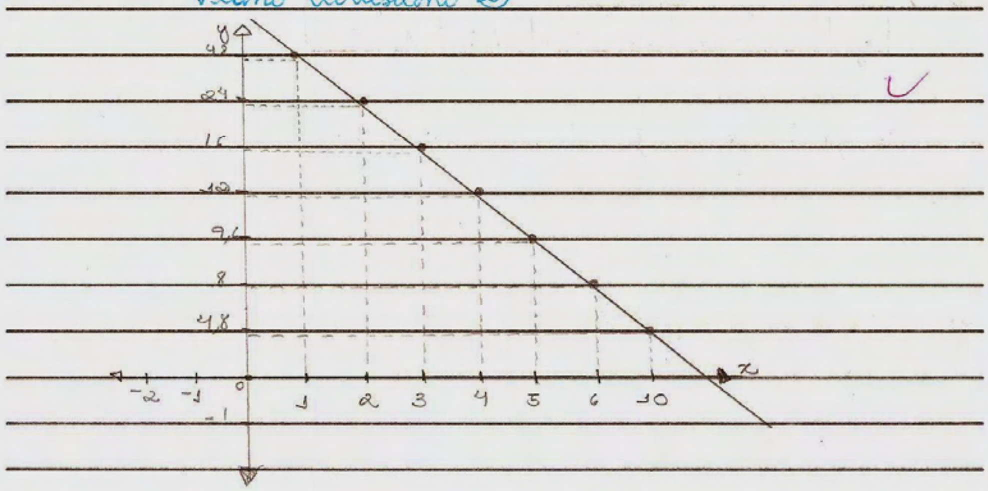
1.b) (1,48); (2,24); (3,16); (4,12); (5;9,6); (6,8); (10;4,8);

d) Represente no Plano cartesiano os pontos do item ©.

Plano Cartesiano ①



Plano Cartesiano ②



DANIELE; DANIEL; KAROLINE; JONAS, 8ª A

Tipo II -

10) Essas atividades foram desenvolvidas depois das atividades 9a) e 9a1), com a intenção de averiguar individualmente, na prova bimestral, o que o aluno aprendeu.

Observamos que a partir de gráfico, ou a partir de tabelas, o aluno mostrou que: sabe o que é variável, sabe identificar se a variável é dependente ou independente, sabe se as variáveis envolvidas são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais, sabe encontrar uma relação funcional a partir dos dados de uma tabela, como também sabe representar os valores da tabela no plano cartesiano.

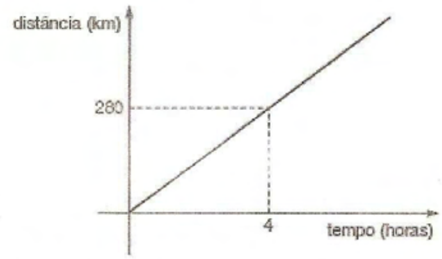
Observação: essa avaliação constou de 5 exercícios para serem resolvidos em 1h:30min.

10a) Enunciado e Resolução

ne: Jonas no. 17 Série 8ª 3 data 02/12/09
Tempo de duração 1h:30min

10,0

1- O gráfico desenhado abaixo representa uma relação entre a grandeza tempo (em horas) e distância percorrida (em quilômetros).



R: É diretamente proporcional pois o tempo em horas aumenta e a distância também.

Assinale e justifique a resposta: As grandezas distância e tempo, nesse caso, são
(A) não proporcionais (B) inversamente proporcionais (C) diretamente proporcionais (D) proporcionais, mas a primeira ao quadrado da segunda.

2- A sentença algébrica d= 12/h, relaciona o número **d** de dias, e o número **h** de horas trabalhadas por um sapateiro, por dia, para fazer uma certa quantidade de sandálias. Supõe-se que o trabalhador produza a mesma quantidade de sandálias por hora trabalhada.Qual das tabelas abaixo expressa, de forma correta, a sentença algébrica? Justifique a resposta.

(A)

Número de horas (h)	10	8	6
Número de dias (d)	2	4	6

(B)

Número de horas (h)	12	9	6
Número de dias (d)	6	3	2

(C)

Número de horas (h)	12	6	4
Número de dias (d)	6	3	2

(D)

Número de horas (h)	2	4	6
Número de dias (d)	6	3	2

R: $D = \frac{12}{2} = 6$, $D = \frac{12}{4} = 3$,
$D = \frac{12}{6} = 2$

3- A tabela abaixo mostra o número de horas que Lúcia assiste à televisão em relação ao número de dias:

Número de horas (h)	3	6	15	18
Número de dias (d)	1,0	2,0	5,0	6,0

Indica-se por **h**, o número de horas, e por **d,** o número de dias. A sentença algébrica que relaciona, de forma correta, as duas grandezas é

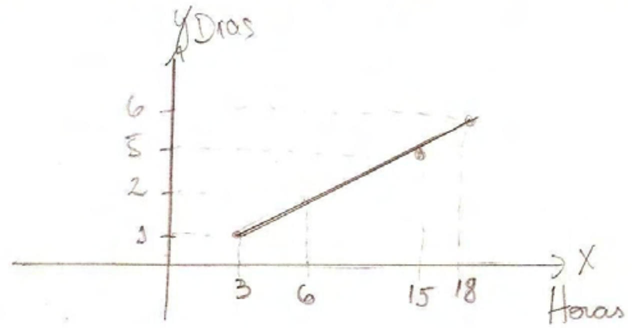
(A) d = h – 2 (B) d = h . 3 (C) h /3 = d (D) h – 3 = d

10a1) Enunciado (continuação da atividade 10)

4- De acordo com as suas respostas das questões 2) e 3) responda: Quem são as grandezas envolvidas? Quais dessas grandezas são as variáveis, dependente e independente? Elas são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais? Represente no plano cartesiano os pontos da tabela da questão (3).

Resposta

4) Os grandezas envolvidas são dias e horas, os horas são independentes e os dias dependentes, em 2) são inversamente proporcionais e em 3) Diretamente.



Tipo I – A atividade 10b) que veremos a seguir, considerou que os alunos já tinham algum conhecimento prévio de semelhança de triângulos, do teorema de Tales e de proporcionalidade. Nesse sentido, do ponto de vista da resolução de problemas, essa atividade se enquadra como recreação e, também, como veículo, pois foi aplicada com o objetivo de motivar os alunos a usarem a inferência e a predição ao mesmo tempo que fizessem alguma análise qualitativa e quantitativa de um problema que envolve raciocínio com proporcionalidade. Esse problema como veículo é útil na interpretação dos fenômenos do mundo real como também requer dos alunos o senso de covariação, ou seja, comparações múltiplas, e a capacidade deles armazenarem e processarem mentalmente várias informações.

10b) Modelo da atividade entregue a cada aluno dos grupos

8ºA 19.09.2009

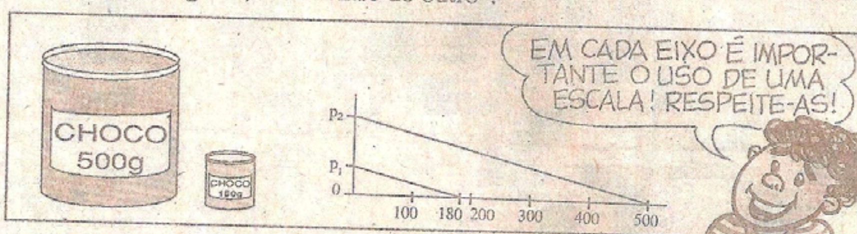
Nome dos integrantes do grupo: Biana, Larissa; Patrícia, Maisa; Candiro.
6 24 41 30 9

Escolha o mais barato

São duas latas de chocolate em pó, uma contendo 180 g do produto e a outra, 500 g. A menor custa 290 cruzeiros e a maior, 650. Relativamente, qual delas é a mais barata?

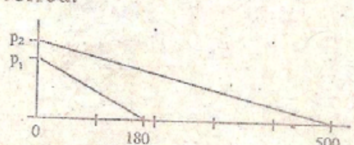
Você sabia que esse problema pode ser resolvido usando a semelhança de triângulos?

Vamos "desenhar a situação". Num eixo, marcamos os preços das latas e no outro, seus conteúdos. Ligando cada conteúdo a seu preço, formam-se dois triângulos retângulos, "um dentro do outro".

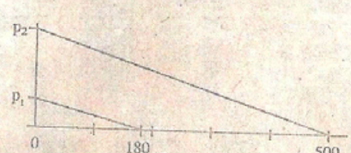


Aí é só comparar as inclinações das hipotenusas. Se elas tiverem a mesma inclinação, ou seja, se forem paralelas, os triângulos formados serão semelhantes. Isso indica que seus lados são proporcionais, e nos lados marcamos preços e conteúdos. Nesse caso, é indiferente a compra de uma ou de outra lata.

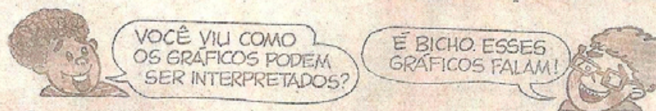
Caso contrário, é preciso olhar o desenho e ver por que o paralelismo não ocorreu.



O paralelismo não ocorreu porque p_2 foi "puxado para baixo". Nesse caso, é vantagem comprar a lata de 500 g.



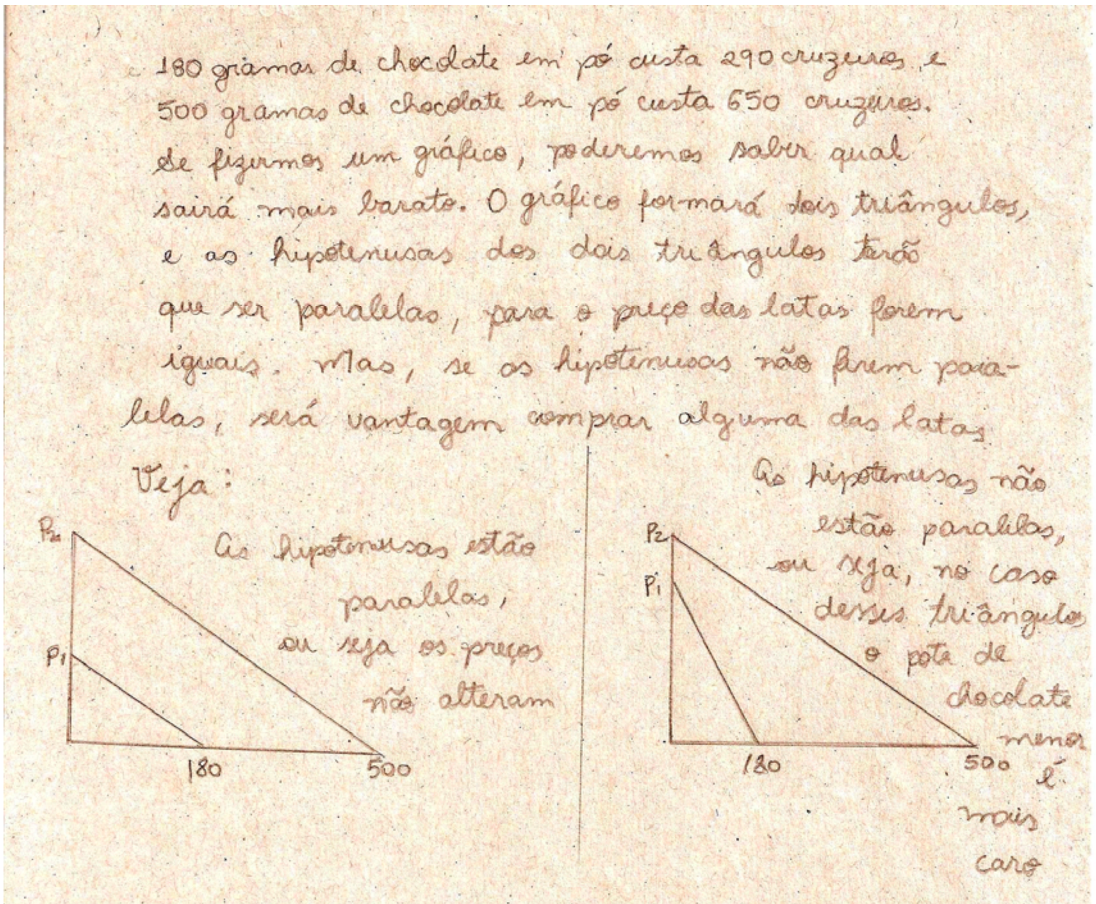
O paralelismo não ocorreu porque p_2 foi "puxado para cima". Nesse caso, é vantagem comprar a lata de 180 g.



Agora, faça um desenho cuidadoso e responda à pergunta com que iniciamos esta página.

Você e seu grupo vêem alguma relação desta solução com o problema de Tales? Explique com suas palavras!

10b1) Resolução


180 gramas de chocolate em pó custa 290 cruzeiros e
500 gramas de chocolate em pó custa 650 cruzeiros.
Se fizermos um gráfico, poderemos saber qual
sairá mais barato. O gráfico formará dois triângulos,
e as hipotenusas dos dois triângulos terão
que ser paralelas, para o preço das latas forem
iguais. Mas, se as hipotenusas não forem para-
lelas, será vantagem comprar alguma das latas.
Veja:

Nessa atividade se deu atenção à inclinação das hipotenusas. Neste momento o professor pode apresentar aos estudantes a equação da reta que se associa à hipotenusa. Por exemplo, deduzindo a partir dos pontos extremos da hipotenusa a equação da reta a ela associada, e que esta reta é representada por uma função afim, isto é, que obedece a relação $y = ax + b$.

Nota-se nesta resolução que os alunos interpretaram, explicaram e utilizaram com clareza as definições e hipóteses apresentadas no problema, e que souberam expressar suas ideias ao escrevê-las. Entretanto, os estudantes não souberam responder qual é a relação desta solução com o Teorema de Tales, e isso foi discutido durante a Plenária. Resultou dessa discussão, por sugestão dos alunos, um novo trabalho, relacionado com o Teorema de Pitágoras. Foi proposto que os alunos pesquisassem diferentes demonstrações do Teorema de Pitágoras incluindo a aplicação do Teorema de Tales e do conceito de semelhança de triângulos.

Durante a apresentação de seus trabalhos os grupos disseram que o Teorema de Tales nos mostra a existência de proporcionalidade entre certos segmentos e que decorrem deste teorema os teoremas de semelhança de triângulos.

Segue abaixo um trecho do trabalho apresentada por um grupo:

Algumas demostrações do teorema adequada à nossa época

por semelhança de triângulos

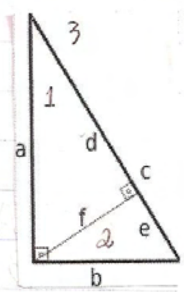
$\frac{d}{a} = \frac{a}{c}$ $d = \frac{a^2}{c}$ (1) e $\frac{c}{b} = \frac{b}{e}$ (2)

da figura $c = d + e$ e e substituindo pelas equações (1)e(2)

$c = \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c}$

Multiplicando todo por c:

$c^2 = a^2 + b^2$.



9.4 Atividades da 1ª série do Ensino Médio

Apresentaremos a seguir atividades desenvolvidas nas 1ª séries do Ensino Médio, analisando e diagnosticando, seguindo algumas das ideias sugeridas no capítulo anterior.

Atividade Tipo III

11) Projeto Consumo e Meio Ambiente

Este mesmo projeto foi apresentado na sessão 8.2. Aplicamos parte dele em 2005 na E. E. Theresa S. de Almeida – Guarujá, S.P. Mostraremos o cálculo de custo de apenas duas receitas e algumas redações dos alunos falando sobre o projeto.

Material entregue aos grupos

11a)

PROJETO CONSUMO E MEIO AMBIENTE – 2005

EM PARCERIA COM A MATEMÁTICA

E.E.Theresa S. de Almeida

Profa. Eliane S. Botta

Nome dos integrantes do grupo:

____

____

____

____

____

____

PROBLEMA PROPOSTO

O problema proposto a seguir tem o objetivo de determinar o número de calorias contido em uma porção de uma determinada receita.
Observação: Os valores para o número de calorias correspondente à cada um dos ingredientes das receitas são valores aproximados.

1ª. parte

PROBLEMA: Vamos Supor que durante o processo de cozimento ocorra uma perda de 10% de peso, devido a evaporação de parte da água contida nos ingredientes da receita, mas que o número total de calorias não se altera. Calcule a quantidade de calorias de uma porção de 100 gramas da receita que você fez.

PROCEDIMENTOS:
a)Escolher a receita e copiar.
b)Calcular o número total de calorias e o peso total dos ingredientes antes do cozimento.
c)Determinar o peso do produto final após o cozimento.
d)Determinar a quantidade de calorias em 100g do produto final.

2ª.parte

Na primeira parte, supusemos que ocorre a perda de aproximadamente 10% de peso durante o processo de cozimento. Na verdade esta porcentagem varia de receita para receita. Para obter um valor mais preciso para a quantidade de calorias em uma porção, determine o peso do produto final utilizando uma balança e refaça o cálculo efetuado no item d) da primeira parte.

11a1) Redações dos alunos

07/11/05

NOME: Anderson Luis da silva Nº 02 SERIE: 1º B

CONSUMO E MEIO AMBIENTE

Bom nas últimas aulas a professora passou muitos contas de calculos de custo dos alimentos, e deu para mim aprender muito bem, eu diria que de 100% que a professora ensinou eu aprendi 90%.

como usar os cálculos de custo dos alimentos?

Na minha opinião esses cálculos podem ser utilizados em varios ocasiões como por exemplo: quando você dezejo criar uma empresa no ramo da alimentação, quando você desejo fazer um jantar em familia e até mesmo nas ocasiões que o dinheiro está pouco, atraves desses calculos você calcula o tanto que vai gastar e sabendo o que você vai gastar, já daria para ter uma idéia a que preço você iria vender no futuro algum tipo de alimento.

Data 7/11/05

Nome: Rafael Nº 18 1º B

Consumo e meio ambiente

Esse trabalho é bom que a pessoa aprende novas receitas e se alimenta bem.

mas também por outro lado o aluno aprende novas contas como porcentagem, fração de modos diferentes.

mas nesse trabalho tem uma coisa melhor do que fazer conta, é a reciclagem com isso nós aprendemos a limpar o meio ambiente e reciclar papel, plastico, latinha etc.

continuação

mariana nº 41 1º B

Foi interessante porque nos ajudou a compreender melhor a matéria, e também aprendemos o quanto vale cada caloria que ingerimos no dia-a-dia. E nos ensinou a aprender gastar.

nome: Dayakella nº26
07/11

Foi um exercício bom que ajudou muito na matéria. E os alunos ficaram bem mais interessados na aula e aprenderam mais. Foi uma experiência boa. assim nós ficaremos preparados para provas e outros exercícios.

nome: latia nº24 1ºB 07/11/05

O Projeto do consumo do meio ambiente foi muito importante para mim pois através desse projeto eu aprendi a fazer calculos e formulas que não sabia. E também me ajuda a calcular o tanto de calorias que cada alimento tem. E também nos fez aprender outras coisas novas como fomos em vários estabelecimento pesquisar custo.
E nos ajudará no futuro.

Como já tínhamos aplicado esse projeto na 7ª série, pudemos avaliar nossos erros e acertos e, desta vez, conduzir esse trabalho na 1ª série do Ensino Médio imprimindo, sempre que possível, uma abordagem meta-cognitiva, dando tempo aos alunos para que eles pudessem refletir sobre o que estavam fazendo. Os estudantes puderam utilizar melhor, com compreensão, os conceitos de proporcionalidade e porcentagem, e também se mostraram mais inclinados a assumir um compromisso com o meio ambiente, o que pôde ser observado nas redações por eles escritas.

Tipo III

11b) Atividade Experimental – Interdisciplinar: O Ensino da Matemática e da Física através de Modelagem, um dos temas desenvolvido durante o Projeto Pró-Ciência 2001, com adaptações para o Ensino Médio.

Material utilizado:

garrafa pet de 1 litro, com um pequeno furo na frente e na parte inferior da garrafa,

fita adesiva com marcação de 15cm, colada na parte inferior no sentido vertical da garrafa,

cronômetro ou relógio com marcação em segundos.

Antes de iniciar o experimento, tampar o furo da garrafa, depois enchê-la com água até a marca dos 15 cm.

Ao iniciar o experimento, destampa-se o furo, e conforme o nível da água diminui, registra-se o tempo.

A descrição desta atividade está transcrita numa atividade feita por um grupo de estudantes.

11b1) Descrição da atividade feita por um grupo

Redação:-

Elsa -> Nº 18
Zilma -> Nº 40
Telma -> Nº 39
Suzana -> Nº 37
Tania -> Nº 38

• Realizamos uma experiência, cujo o objetivo era observar a variação da altura da água em função do tempo. Observamos então, que o domínio é o tempo, e o contra-domínio é a altura. Através disso construímos um gráfico que representa o experimento. Logo percebemos que o experimento é uma equação matemática, e descobrimos também que é uma equação $h = at^2 + bt + c$ ($h = 0{,}24t^2 + 2{,}65t + 15$)
E no final de tudo isso, através do gráfico encontramos os coeficientes a, b, e c...

Observação: Foi uma experiência ótima, porém demorada e muito cansativa... mas valeu...

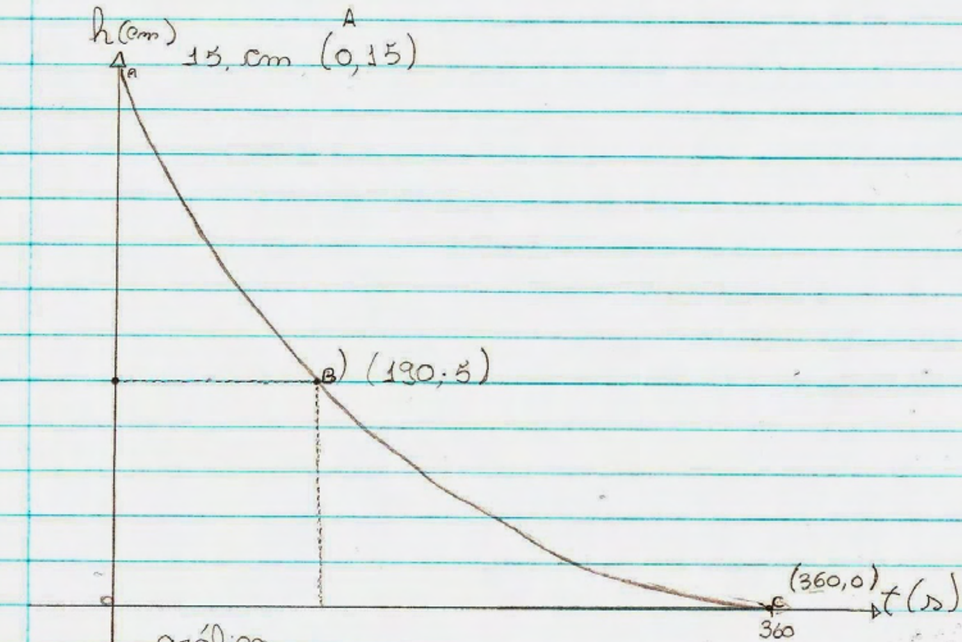
11b2) Avaliação da atividade Tipo III do item 11b1), Atividade Experimental – Interdisciplinar

04/06

Avaliação Experimental

Nome: Elsa Nº 18

Serie: 1º H data: 04-06-01



gráfico

Legenda

h = altura em centímetros

t = tempo em segundo

$h = at^2 + bt + c$

$15 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$

$15 = 0 + 0 + c$

$c = 15$

B = (190; 5) substituir → $\overset{5}{10} = a \cdot 190^2 + b \cdot 190 + 15$

C = (360; 0) substituir → $0 = a \cdot \underset{360^2}{13} + b \underset{360}{15} + 15$

No procedimento de encontrar os coeficientes, a, b e c da função h(t) = a t^2 + bt + c, a aluna não associou corretamente as coordenados dos pontos B e C do gráfico com as variáveis independente e dependente da função. Isso demonstra a necessidade de trabalho adicional com gráficos de funções. A aluna também não explicitou, com a notação h(t), a dependência de h em relação t, e essa relação funcional ficou expressa como uma fórmula. Embora isso pareça um detalhe irrelevante, ele pode indicar dificuldades com a notação de função e com os diversos papeis representados pelas variáveis. Talvez, se tivéssemos empregado a MEAARP, teríamos notado a conveniência de ressaltar distinções de caráter conceitual envolvendo variáveis, utilizando as ideias de Usiskin (por Domingues) e Saul, apresentadas no capítulo 4.

12) *Avaliação* de uma *Atividade Tipo III* - Projeto Informática-Interdisciplinaridade, desenvolvido na sala de informática, com a utilização de softwares voltados para o aprendizado de funções.

Esse projeto foi aplicado em sincronia com a disciplina de Física, quando a professora ensinava o conceito de Movimento Retilíneo Uniforme, e os estudantes já tinham conhecimento da função do primeiro grau e de seu gráfico.

Com apenas dez computadores em funcionamento na sala, as atividades foram realizadas em grupos de até quatro alunos. Usamos o programa Jogo de Funções, elaborado pelo Departamento de Avaliação Perspectiva e Planejamento do Ministério da Educação de Portugal, disponibilizado no software *educare informática*, distribuído para as escolas pela Secretaria de Estado da Educação do Estado de São Paulo.

As animações de trajetórias e as simulações de gráfico deste programa convidam o aluno a iniciar-se na interpretação e leitura de gráficos e na análise de expressões e relações matemáticas elementares. Seus temas estão relacionados com:

- Proporção
- Equação
- Representação gráfica de funções
- Função linear
- Movimento retilíneo uniforme

Esses conceitos matemáticos foram abordados através de exemplos simples, envolvendo diferentes situações relacionadas com a fuga de um coelho para a sua toca.

Avaliação da aula de laboratório de computação

Nome: Patrícia Cristina nº25 Série: 1ª E data: 01/06

1ª Parte: descreva em linhas gerais qual é o programa que foi trabalhado durante a aula, como funciona, e o que você fez.

Quanto tempo você precisou para se familiar com o programa.

Quantas vezes você esteve no laboratório antes desta avaliação.

Você teve dificuldade em manusear o computador, se teve o que é que foi difícil. Você ainda tem dificuldade em manusea-lo?

Na sua opinião é preciso de outro instrutor durante as idas ao laboratório de computação. Por quê?

2ª Parte: Resolva o problema:

a- O coelho percorre a distância de 400 metros, no tempo de 8 segundos para chegar a toca. Qual é a velocidade dele?

Construir o gráfico da posição em função do tempo.

b- O coelho vai à sua toca com velocidade de 40 m/s em 0,5 segundos. Qual é a distância que ele percorre?

Construir o gráfico da posição em função do tempo.

12a) Resolução

1ª parte: - O programa que foi trabalhado durante a aula chama-se jogos de funções, no programa tem vários probleminhas com posições diferentes de um coelho e tem que achar o tempo certo para ele chegar em sua toca. Se acertar o tempo, aparece um gráfico na tela, e se errar o jogo dá outras chances para tentar acertar.

Eu observei primeiramente como o jogo funciona somei algumas contas até chegar a um resultado para determinar o tempo do coelho até sua toca, errei algumas vezes e quando eu acertava o jogo me dava pontos altos mais ou menos de 87 à 98.

Logo nos primeiros 5 minutos eu já me entendi com o programa

Eu estive apenas 1 vez na sala de computação antes desta avaliação.

O computador é uma coisa muito fácil de se manusear, por isso eu adoro mexer e brincar nele.

Não, somente você professora já está ótimo!

2ª parte:

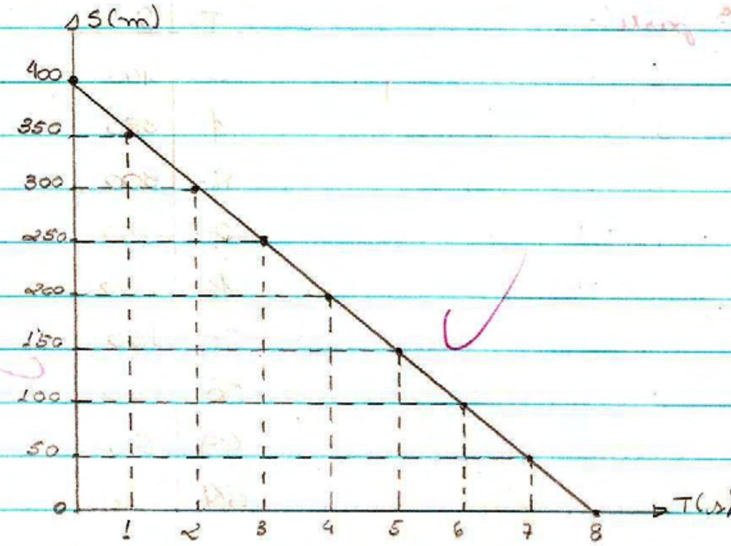
a- $v = \frac{\Delta S}{\Delta T} = \frac{400}{8} = 50 \, m/s$

Resp: - Ele percorre 50 m/s.

12b) Segunda parte da avaliação

2ª parte :-

T	S
0	400
1	350
2	300
3	250
4	200
5	150
6	100
7	50
8	0

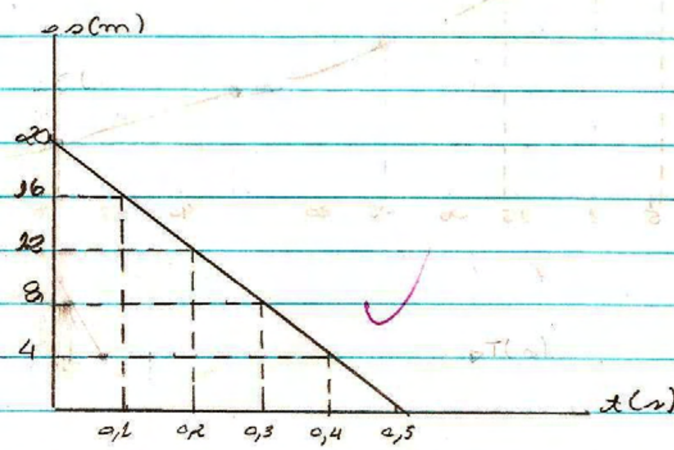


b- $V_m = 40\ m/s$ $\quad V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} \rightarrow 40 = \frac{\Delta S}{0{,}5} \rightarrow \Delta S = 20\ m$

$\Delta t = 0{,}5s$

$\Delta S: 20m$ Ele está na marca de 20m

t	S
0	20
0,1	16
0,2	12
0,3	8
0,4	4
0,5	0



No desenvolvimento 12b), segunda parte da avaliação, a estudante mostrou fluência processual ao traduzir as instruções do problema ora por meio de uma equação, ora apresentando uma tabela, ora construindo um gráfico, assim como fez o procedimento correto para resolver a equação. Observamos que o aluno omitiu, no entanto, as unidades de medida de distancia em metros e tempo em segundos.

Observamos que os gráficos da 2ª. parte da avaliação correspondem ao movimento uniforme.

Tipo lll – 13) Atividade desenvolvida no Projeto Pró-Ciências 2001, UFSCar.

Nesta atividade, pede-se aos alunos que encontrem a área máxima de um cercado com perímetro fixado. Os alunos já tinham, como pré-requisito, conhecimentos sobre o conceito de função, gráficos, área e perímetro de figuras planas. A atividade como um todo serve para aprimorar o raciocínio algébrico do aluno, que deverá obter uma função a partir de uma fórmula e de uma equação, e serve também para reforçar os conceitos já ensinados. Algumas das tarefas trabalhadas nesta atividade levam o aluno a desenvolver um raciocínio indutivo para obter conclusões a partir de um certo número de informações dispostas em uma tabela.

13a) Enunciado

E.E. Esterina Placco **Disciplina de Matemática – prof. Eliane**

Turma: 1ª. C **data:** 04/09/01

Nome e nº. dos alunos: Camilla da Costa Nº 06
Cristiane Juzaro Romanatto Nº 08
Helizene Ap. Ferreira Nº 16

***PROJETO PRÓ-CIÊNCIAS*: Prof. Orientador Roberto Paterlini - DM – UFSCar**

Abordagem hipertextual

Atividade nº 1

Considere o seguinte problema:

Um sitiante dispõe de uma tela de arame com 200 metros de comprimento, com a qual deseja fazer um cercado retangular para colocar animais. Quais devem ser as dimensões do cercado para que sua área seja máxima?

Tarefa 1: *compreensão do enunciado.*

i) Por que o sitiante gostaria de Ter um cercado com área máxima? No enunciado o que são "as dimensões do cercado"? Ficou claro no enunciado se a tela será usada em uma só largura, ou seja, se a largura da tela é suficiente para a altura do cercado?

ii) Desenhe retângulos não congruentes com perímetro fixo, por exemplo, 12, e para cada um deles ache a área.

Tarefa 2: *primeira resolução do problema.*

iii) Utilize uma tabela para resolver o problema do sitiante ou considere figuras retangulares desenhadas em uma folha de papel. Alguma outra idéia?

Se voce resolver pelo uso de uma tabela, proponho que complete a que segue abaixo:

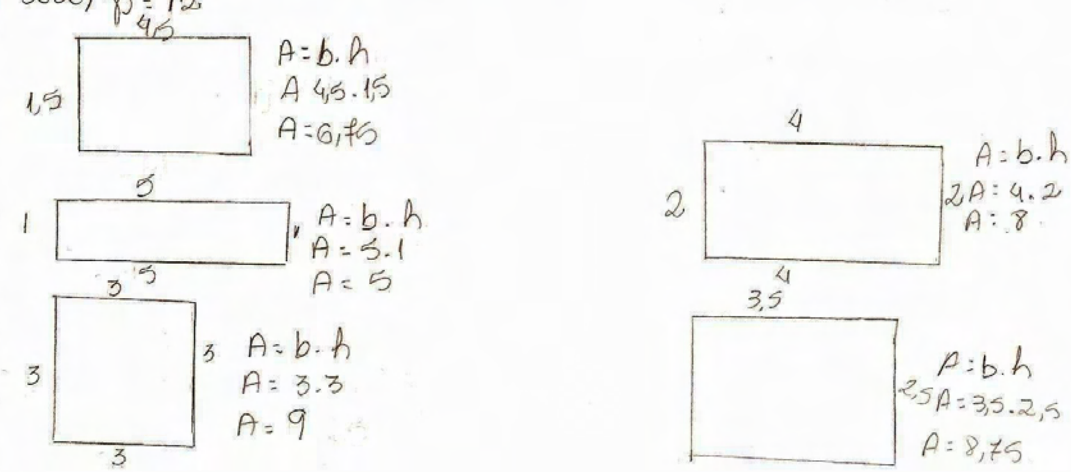
13a1) Resolução

Resposta

TAREFA1:

i) O sitiante gostaria de ter um cerco de área máxima, pois quanto maior a área, maior quantidade de animais caberá dentro deste. Para isso ele necessitaria ter conhecimento das dimensões, ou seja, o comprimento da largura, sendo assim deve se considerar as espécies dos animais que serão colocados dentro do cercado (por exemplo, neste caso não poderíamos colocar um macaco e um pássaro, pois o 1º escalaria o cercado e o 2º fugiria voando). E também seria necessário no enunciado a informação da largura (o que este não nos oferece)

ii) $p = 12$



13a2) Resoluções - Tarefa 2) iii)

largura	comprimento	perímetro	área
5m	45m	100m	225m2
10m	40m	100m	400m2
15m	35 m	100m	525 m²
20m	30 m	100m	600 m²
25 m	25 m	100m	625 m²
30 m	20 m	100m	600 m²
35 m	15 m	100m	525 m²
40 m	10 m	100m	400 m²
45 m	5 m	100m	225 m²

Tarefa 3: O que você observa de interessante na tabela acima? Seus dados mostram alguma possível resposta para o problema do sitiante? O que ocorre se você construir uma tabela com as medidas da largura do cercado menos espaçadas, por exemplo, de 1 em 1 metro?

Tabela para tarefa 3

larg	comp	perím	área
15 m	35 m	100 m	525 m²
16 m	34 m	100 m	544 m²
17 m	33 m	100 m	561 m²
18 m	32 m	100 m	576 m²
19 m	31 m	100 m	589 m²
20 m	30 m	100 m	600 m²
21 m	29 m	100 m	609 m²
22 m	28 m	100 m	616 m²
23 m	27 m	100 m	621 m²
24 m	26 m	100 m	624 m²
25 m	25 m	100 m	625 m²
26 m	24 m	100 m	624 m²
27 m	23 m	100 m	621 m²
28 m	22 m	100 m	616 m²
29 m	21 m	100 m	609 m²
30 m	20 m	100 m	600 m²
31 m	19 m	100 m	587 m²
32 m	18 m	100 m	576 m²

Tabela para tarefa 4

larg	comp	perím	área
5 m	20 m	50 m	100 m²
5,5 m	19,5 m	50 m	107,25 m²
6 m	19 m	50 m	114 m²
6,5 m	18,5 m	50 m	120,25 m²
7 m	18 m	50 m	126 m²
7,5 m	17,5 m	50 m	130,25 m²
8 m	17 m	50 m	136 m²
8,5 m	16,5 m	50 m	140,25 m²
9 m	16 m	50 m	144 m²
9,5 m	15,5 m	50 m	147,15 m²
10 m	15 m	50 m	150 m²
10,5 m	14,5 m	50 m	152,25 m²
11 m	14 m	50 m	154 m²
11,5 m	13,5 m	50 m	155,25 m²
12	13 m	50 m	156 m²
12,5 m	12,5 m	50 m	156,25 m²
13 m	12 m	50 m	156 m²
13,5 m	11,5 m	50 m	155,25 m²
14 m	11 m	50 m	154 m²

→ (tabela de 1 em 1 no verso)

Tarefa 4: *Estudando outros casos:* Suponha que a tela do sitiante seja suficiente para fazer um cercado com perímetro de 50 metros. Construa uma tabela para esse caso e verifique se sua conjectura se mantém. Sua conjectura é conclusiva? Sua conjectura se aplica para qualquer medida do perímetro?

13 a3) Resolução, continuação da tabela referente a tarefa 4

Tabela para Tarefa 4

Larg	comp	Perím	àrea
5 m	20 m	50 m	100 m^2
6 m	19 m	50 m	114 m^2
7 m	18 m	50 m	126 m^2
8 m	17 m	50 m	136 m^2
9 m	16 m	50 m	144 m^2
10 m	15 m	50 m	150 m^2
11 m	14 m	50 m	154 m^2
12 m	13 m	50 m	156 m^2
13 m	12 m	50 m	156 m^2
14 m	11 m	50 m	154 m^2
15 m	10 m	50 m	150 m^2
16 m	9 m	50 m	144 m^2
17 m	8 m	50 m	136 m^2
18 m	7 m	50 m	126 m^2
19 m	6 m	50 m	114 m^2
20 m	5 m	50 m	100 m^2

13 a4) Resolução

TAREFA 3:

= O comprimento e a largura variá 5em5m, onde o perímetro é igual a 100 m. A área máxima é igual um quadrado cujos lados medem 25 m, isso significa que os 100 m foram divididos em 4 partes iguais (=25m)

= Sim, pois assim o Sthonte saberá que para ter uma área máxima basta construir um cercado com formato de um quadrado

= mesmo variando de 1em1m a área máxima ainda será um quadrado, cujos lados é 25 m

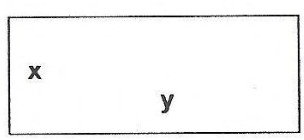
TAREFA 4:

- não, pois olhando as tabelas há apenas uma indicação e não uma afirmação.
- Também não, para se ter a total certeza temos que fazer calculos.

13 a5) Enunciado

Tarefa 5: *Segunda resolução do problema.* Considere a possibilidade de se construir um modelo algébrico para o problema. Por exemplo, chamar de *x* a largura do cercado, e de *y* seu comprimento. Qual o perímetro P do cercado? Qual e sua área A? Dessas duas grandezas, P e A, qual é fixa e qual é variavel? Qual é a função que voce vai considerar para a resolução do problema? Esta função pode ser escrita em uma variavel apenas? Que tipo de fórmula obteve? Você pode fazer um gráfico desta fórmula em um sistema cartesiano? Que propriedade do gráfico interessa para obter a solução ? Que valor o gráfico lhe oferece como solução? Sua solução é exata ou aproximada?

Qual é a propriedade da função que interessa para a resolução do problema?



13 a6) Resolução da tarefa 5

TAREFA 5:

- Perímetro = $2x+2y$
- Área = $x \cdot y$
- O perímetro é a grandeza fixa (de acordo com o problema do [illegible]) e a área é a grandeza variável
- a função da área
- Sim, basta substituir o y da fórmula da área pelo perímetro, assim:

$P = 2x + 2y \quad (\div 2)$

$\frac{P}{2} = x + y \rightarrow \frac{P}{2} - x = y \rightarrow \frac{200}{2} - x = y \rightarrow y = 100 - x$

(subst em área)

$A = x \cdot y$

$A = x \cdot (100 - x)$

$A = 100x - x^2$

$a = -1,\ b = 100,\ c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 100^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0$

$\Delta = 10.000$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$

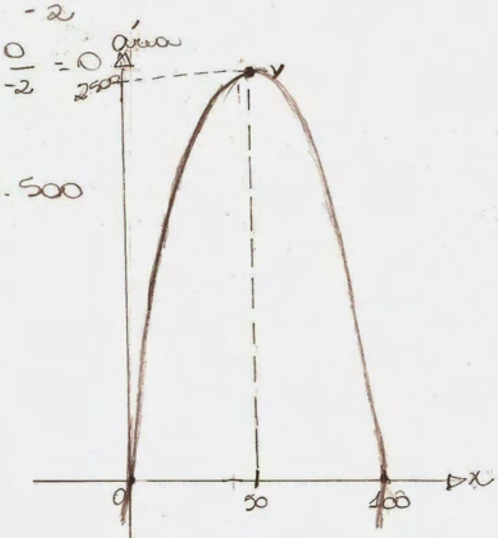
$x = \frac{-100 \pm \sqrt{10000}}{2 \cdot (-1)}$

$x = \frac{-100 \pm 100}{-2} \rightarrow x = -\frac{100 - 100}{-2} = -\frac{200}{-2} = 100$

$\rightarrow x = -\frac{100 + 100}{-2} = \frac{0}{-2} = 0$

$V = \frac{-b}{2a} = -\frac{100}{2(-1)} = \frac{\cancel{-}100}{\cancel{-}2} = 50$

$V = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{10.000}{4 \cdot (-1)} = \frac{\cancel{-}10000}{\cancel{-}4} = 2.500$



13a7) Algumas reflexões da aluna a respeito das tarefas 5 e 6

TAREFA 5

- O que nos mais interessa é a área máxima. no gráfico a área máxima corresponde ao ponto do vértice. (e esse ponto é único)
- O gráfico oferece como solução de área máxima igual a 2.500 m²
- Exato, porque quando calculamos a área chegamos a uma equação do 2º grau, cuja resolução resultou em uma parábola com vértice de ponto de máximo, cujo o valor é único. Portanto não há possibilidade de ficarmos em dúvida.
- A propriedade da função é o vértice (Ponto de máximo)

TAREFA 6.

- O método das tabelas é mais fácil, mas a resposta obtida não é exato, pois ela apenas indica não afirma. Já o método algébrico é mais difícil, mas a resposta é exata.
- Usando o método das tabelas apesar de ser fácil gasto mais tempo e não nos informa exatamente. Já para resolver o método algébrico é necessário saber mais matemática, principalmente equação do 2º grau, além de economizar tempo.

Comentários dos subitens dos problemas n°13). Parece-nos que essa atividade atende, como um todo, às recomendações do princípio 2 de aprendizagem, ao permitir a discussão de múltiplas abordagens para o problema, enriquecendo a compreensão conceitual e a fluência processual dos alunos. No entanto, por mais rica que tenha sido, poderíamos tê-la tornado ainda mais instrutiva se tivéssemos seguido as orientações da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, promovendo discussões em plenária, procurando evidenciar particularidades do problema que podem ter passado desapercebidas. Por exemplo, durante a resolução da tarefa 5 os estudantes utilizaram a equação do perímetro e a fórmula da área para obter, a partir delas, uma relação funcional entre a área e apenas uma das dimensões e, talvez, a discussão desse procedimento algébrico, nesse contexto, teria lhes trazido um impulso novo para o aprendizado de manipulações algébricas análogas, porém descontextualizadas. E talvez pela primeira vez os alunos poderiam ter compreendido a ocorrência do máximo, em uma equação ou função do segundo grau, não só como uma propriedade geométrica representada pelo vértice de uma parábola, mas também como uma configuração ótima de um fenômeno do mundo real que pode ser representado, ou modelado, por uma função do 2º grau, função essa obtida por meio de um raciocínio algébrico claro, desenvolvido por eles. Observemos que, nas aulas de física, os alunos são obrigados a aceitar sem demonstração a equação do movimento uniformemente variado, pois ainda não têm a ferramenta do cálculo.

Poderíamos ter considerado o problema mais geral - Dentre os retângulos de mesmo perímetro P, fixo, qual tem maior área? - e convidá-los a resolver esse problema obtendo a expressão correspondente para a área, $A(x) = x(P/2 - x)$, os zeros dessa função, o ponto médio $x_m = P/4$, e finalmente, a outra dimensão do retângulo. Poderíamos ainda explorar aqui uma resolução alternativa: se o retângulo for um quadrado, então, cada lado mede P/4, e sua área é $(P/4)^2$, e se o retângulo não for um quadrado, então, um lado mede mais do que P/4, digamos, $(P/4) + a$, com $a > 0$, e podemos verificar que o outro mede $(P/4) – a$. Logo a área do retângulo seria igual a $(P/4 + a)\ (P/2 – a) = (P/4)^2 – a^2$, que é menor do que $(P/4)^2$. Logo, o quadrado tem área maior.

A discussão de diferentes métodos em sala de aula é um caminho indicado pelo principio de aprendizagem 2, que leva de métodos concretos informais para métodos mais gerais.

Atividade Tipo I – 14) Problema de máximo e mínimo, usando apenas raciocínio indutivo. Uma variação do problema do sitiante usando a Metodologia do Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas.

14 a) Problema proposto aos grupos:

Suponhamos que um sitiante queira construir um cercado retangular ao longo de um muro, com 200 metros de tela. Quais são as dimensões que fornecem área máxima para o cercado do sitiante?

14a1) Resolução: Designando como profundidade e largura, as dimensões, perpendicular e paralela ao muro, respectivamente, os grupos fazem algumas tabelas dando valores à profundidade e à largura, levando em conta a restrição do perímetro, e calculam a área.

Tabela A

PROFUNDIDADE (M)	LARGURA (M)	Área (M²)
10	180	1800
20	160	3200
30	140	4200
40	120	4800
50	100	5000
60	80	4800
70	60	4200
80	30	3200
90	20	1800

Tabela do Bile

Tabela do bile

Profundidade (m)	largura (m)	Área (m²)
44	112	4928
45	110	4950
46	108	4968

Foi observado pelos estudantes o seguinte erro na tabela do Bile:

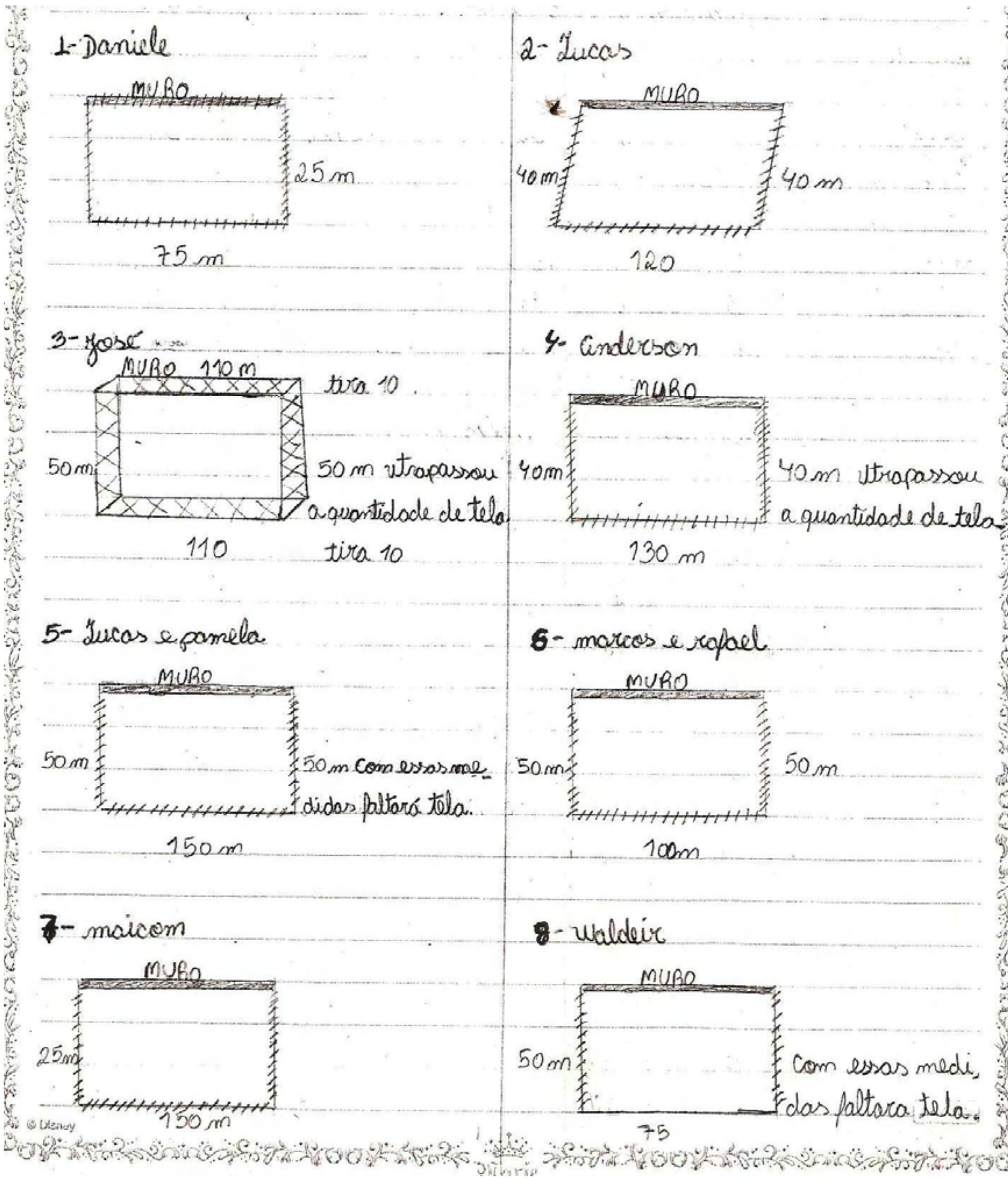
O bili errou nas medidas da profundidade e largura porque a soma dessas medidas ultrapassaram a quantidade de 200m de tela

Ao analisar os dados da tabela A, um aluno escreveu:

O fazendeiro usará as medidas de 50m é 10m para obter à maior área usando 200m de tela.

Um dos grupos sugere que todos façam um esboço das possíveis cercas incluindo as dimensões possíveis. Então a professora pede que os grupos apresentem um esboço da cerca incluindo as dimensões possíveis.

14a2) Esboço das dimensões apresentadas pelos alunos dos grupos:



Em seguida os estudantes fazem uma tabela com todas as medidas das cercas possíveis que eles apresentaram, colocam na lousa a tabela e depois tiram conclusões sobre essas medidas.

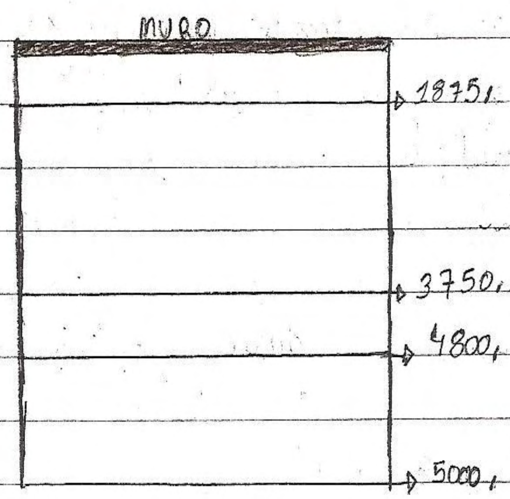
14 a3) Resultados

Tabela 1

	Profundidade (m)	largura (m)	área (m²)	medida do cercado (m)
Daniele	25	75	1875	200
Lucas	40	120	4800	200
josé	50	100	5000	300
Anderson	40	130	5200	210
Lucas-Pamela	25	150	3750	200
marcos-rafa	50	100	5000	200
maicon	25	150	3750	200
Valdeir	50	75	3750	175

14a4) Algumas conclusões a respeito das medidas das cercas dos colegas:

1- com respeito ao uso da tela...

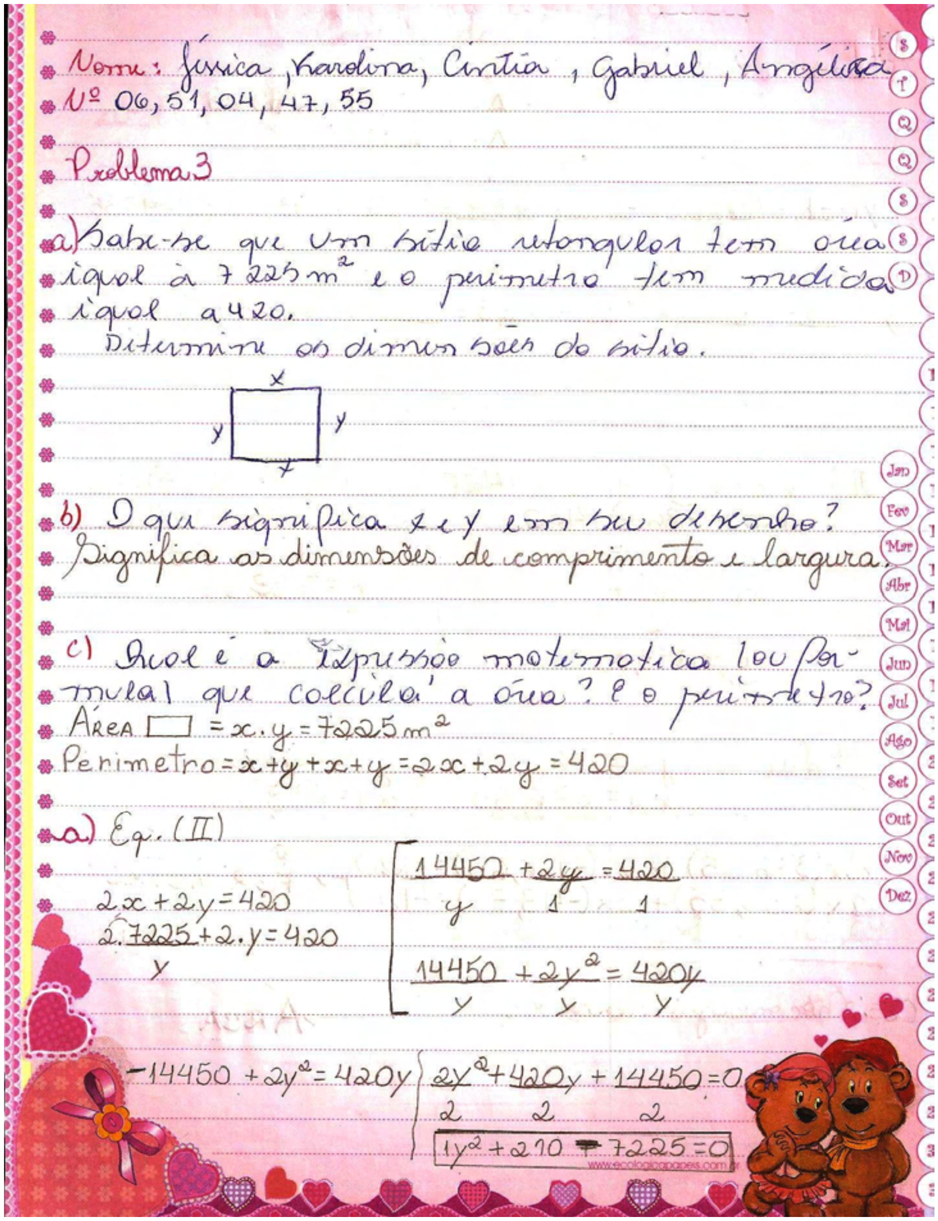


Dani, lucas, L.P, m.R, maicom usou os 200 m de tela que tinham, o josé e o anderson usou a mais do que tinha e o valdeir gastou menas tela que tinha. Entao todos fizeram sua fazenda mas alguns teve prejuiso porque tiveram que usar mais tela.

Atividade Tipo I –15) Esta atividade teve como objetivo fazer com que os estudantes utilizassem seus conhecimentos prévios de métodos e conceitos para resolver o problema proposto, utilizando suas próprias estratégias, e avaliar a fluência processual dos estudantes, ao trabalharem com formula, equação e função.

Parece-nos que nesta atividade, bem como na tarefa 5 do problema do sitiante itens 13) ou 14) mencionados anteriormente, poderíamos ter mencionado, de modo informal, as diferenças entre fórmula, equação e função, no que diz respeito ao significado das variáveis em cada uma delas. Essas distinções, quando explicitadas, podem iluminar procedimentos efetuados de forma automática, com pouca compreensão.

15 a) Enunciado e resolução do problema:



Nome: Jéssica, Karolina, Cíntia, Gabriel, Angélica
Nº 06, 51, 04, 47, 55

Problema 3

a) Sabe-se que um sítio retangular tem área igual à $7225\,m^2$ e o perímetro tem medida igual a 420.
Determine as dimensões do sítio.

b) O que significa x e y em seu desenho?
Significa as dimensões de comprimento e largura.

c) Qual é a expressão matemática (ou fórmula) que calcula a área? E o perímetro?
Área $\square = x \cdot y = 7225\,m^2$
Perímetro $= x + y + x + y = 2x + 2y = 420$

a) Eq. (II)

$2x + 2y = 420$

$2 \cdot \frac{7225}{y} + 2 \cdot y = 420$

$\frac{14450}{y} + \frac{2y}{1} = \frac{420}{1}$

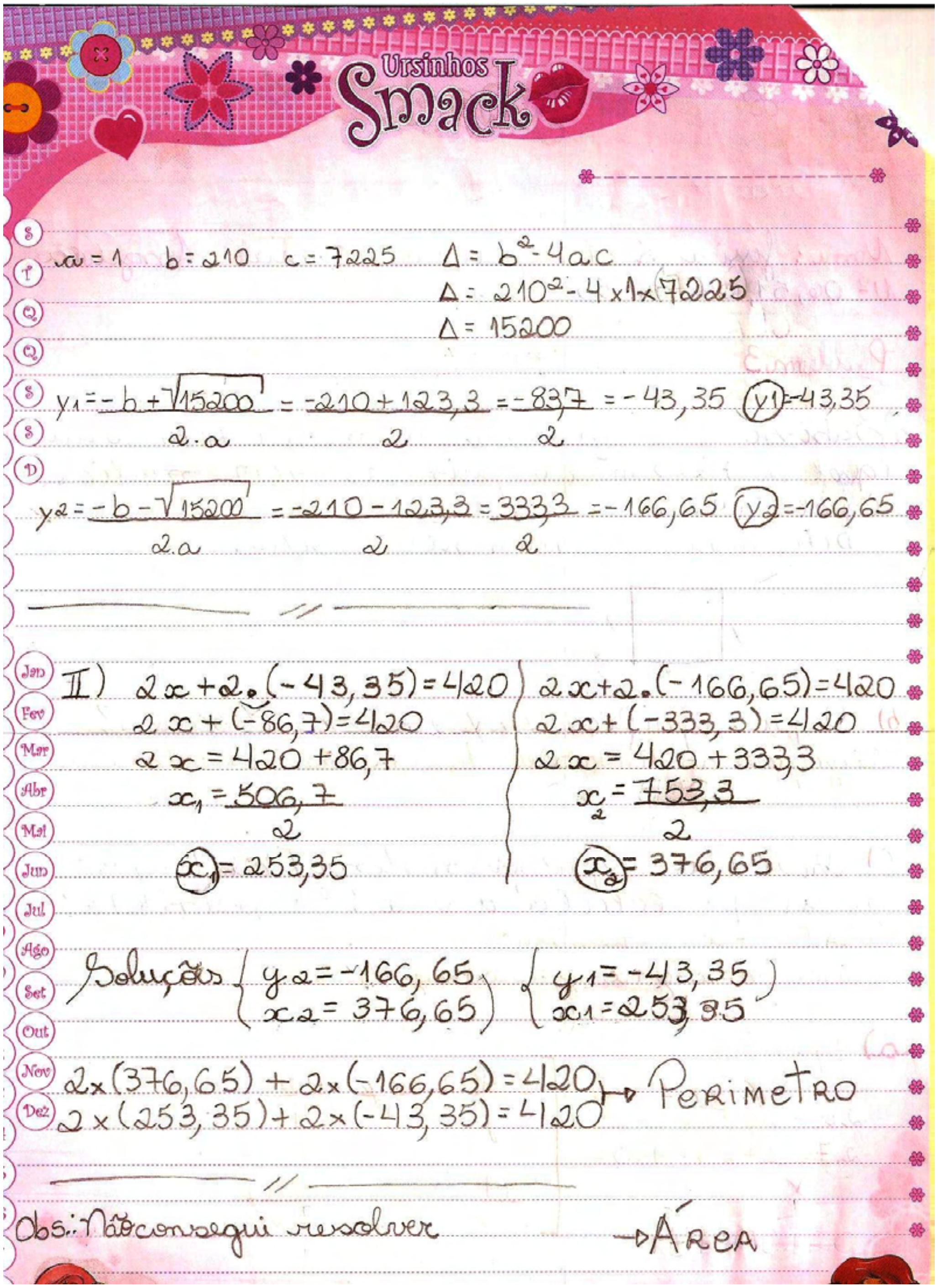
$\frac{14450}{y} + \frac{2y^2}{y} = \frac{420y}{y}$

$-14450 + 2y^2 = 420y$

$\frac{2y^2}{2} + \frac{420y}{2} + \frac{14450}{2} = 0$

$\boxed{1y^2 + 210 \mp 7225 = 0}$

Continuação da resolução:



$a = 1 \quad b = 210 \quad c = 7225 \quad \Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 210^2 - 4 \times 1 \times 7225$

$\Delta = 15200$

$y_1 = \frac{-b + \sqrt{15200}}{2.a} = \frac{-210 + 123,3}{2} = \frac{-83,7}{2} = -43,35 \quad y1 = -43,35$

$y_2 = \frac{-b - \sqrt{15200}}{2a} = \frac{-210 - 123,3}{2} = \frac{333,3}{2} = -166,65 \quad y2 = -166,65$

II) $2x + 2.(-43,35) = 420$

$2x + (-86,7) = 420$

$2x = 420 + 86,7$

$x_1 = \frac{506,7}{2}$

$x_1 = 253,35$

$2x + 2.(-166,65) = 420$

$2x + (-333,3) = 420$

$2x = 420 + 333,3$

$x_2 = \frac{753,3}{2}$

$x_2 = 376,65$

Soluções $\begin{cases} y_2 = -166,65 \\ x_2 = 376,65 \end{cases}$ $\begin{cases} y_1 = -43,35 \\ x_1 = 253,35 \end{cases}$

$2 \times (376,65) + 2 \times (-166,65) = 420$ → PERIMETRO

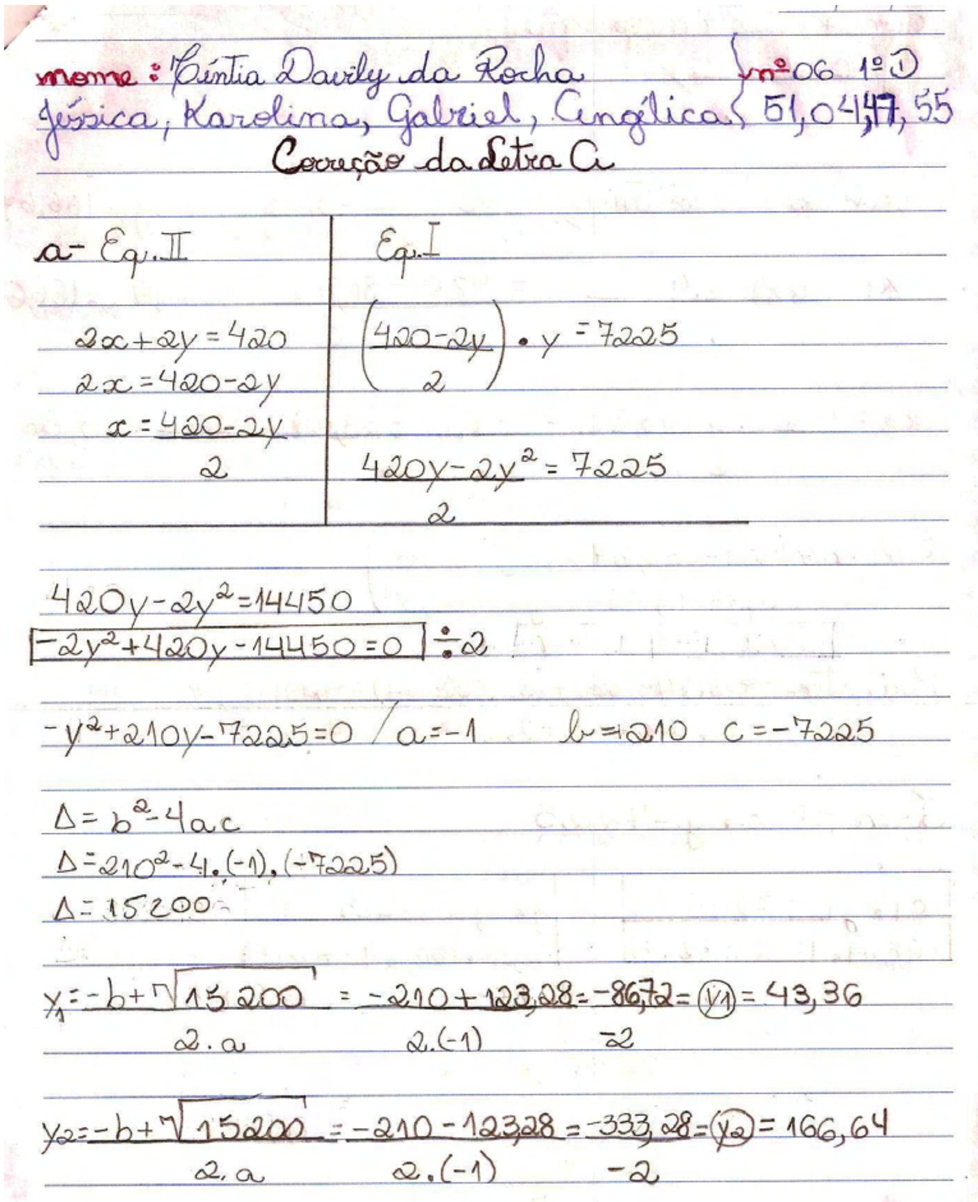
$2 \times (253,35) + 2 \times (-43,35) = 420$

Obs.: Não consegui resolver → ÁREA

O erro cometido pelos alunos desse grupo é comum. Frequentemente, ao resolver (ou simplificar) uma equação algébrica, os estudantes cometem um erro de sinal ao passarem termos de um lado para outro de forma automática, sem qualquer reflexão a respeito das propriedades operatórias que justificam esse procedimento. No entanto, observamos que esse grupo de alunos pelo menos percebeu que a resposta obtida não podia estar correta por ser um valor negativo.

O erro foi discutido por todos durante a plenária, os grupos fizeram uma investigação e juntos apresentaram uma nova solução.

15 a1) Nova solução



nome: Cíntia Davily da Rocha } nº 06 1º D

Jéssica, Karolina, Gabriel, Angélica { 51, 04, 47, 55

Correção da Letra a

a- Eq. II

$2x+2y=420$

$2x=420-2y$

$x=\frac{420-2y}{2}$

Eq. I

$\left(\frac{420-2y}{2}\right)\cdot y=7225$

$\frac{420y-2y^2}{2}=7225$

$420y-2y^2=14450$

$\boxed{-2y^2+420y-14450=0}\ \div 2$

$-y^2+210y-7225=0$ / $a=-1$ $b=210$ $c=-7225$

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=210^2-4.(-1).(-7225)$

$\Delta=15200$

$y_1=\frac{-b+\sqrt{15200}}{2.a}=\frac{-210+123,28}{2.(-1)}=\frac{-86,72}{-2}=y_1=43,36$

$y_2=\frac{-b+\sqrt{15200}}{2.a}=\frac{-210-123,28}{2.(-1)}=\frac{-333,28}{-2}=y_2=166,64$

Continuação da nova solução:

Como vimos que $\boxed{x = \frac{420 - 2 . y}{2}}$

vamos substituir y por $y_1 = 43,36$ e $y_2 = 166,64$

$$x_1 = \frac{420 - 2 . 43,36}{2} = \frac{420 - 86,72}{2} = \frac{333,28}{2} = 166,64$$

$$x_2 = \frac{420 - 2 . 166,64}{2} = \frac{420 - 333,28}{2} = \frac{86,72}{2} = 43,36$$

Solução $\begin{pmatrix} x_1 = 166,64 \text{ e } x_2 = 43,36 \\ y_1 = 43,36 \text{ e } y_2 = 166,64 \end{pmatrix}$

Perímetro $\rightarrow 2 . (43,36) + 2 . (166,64) = 420$

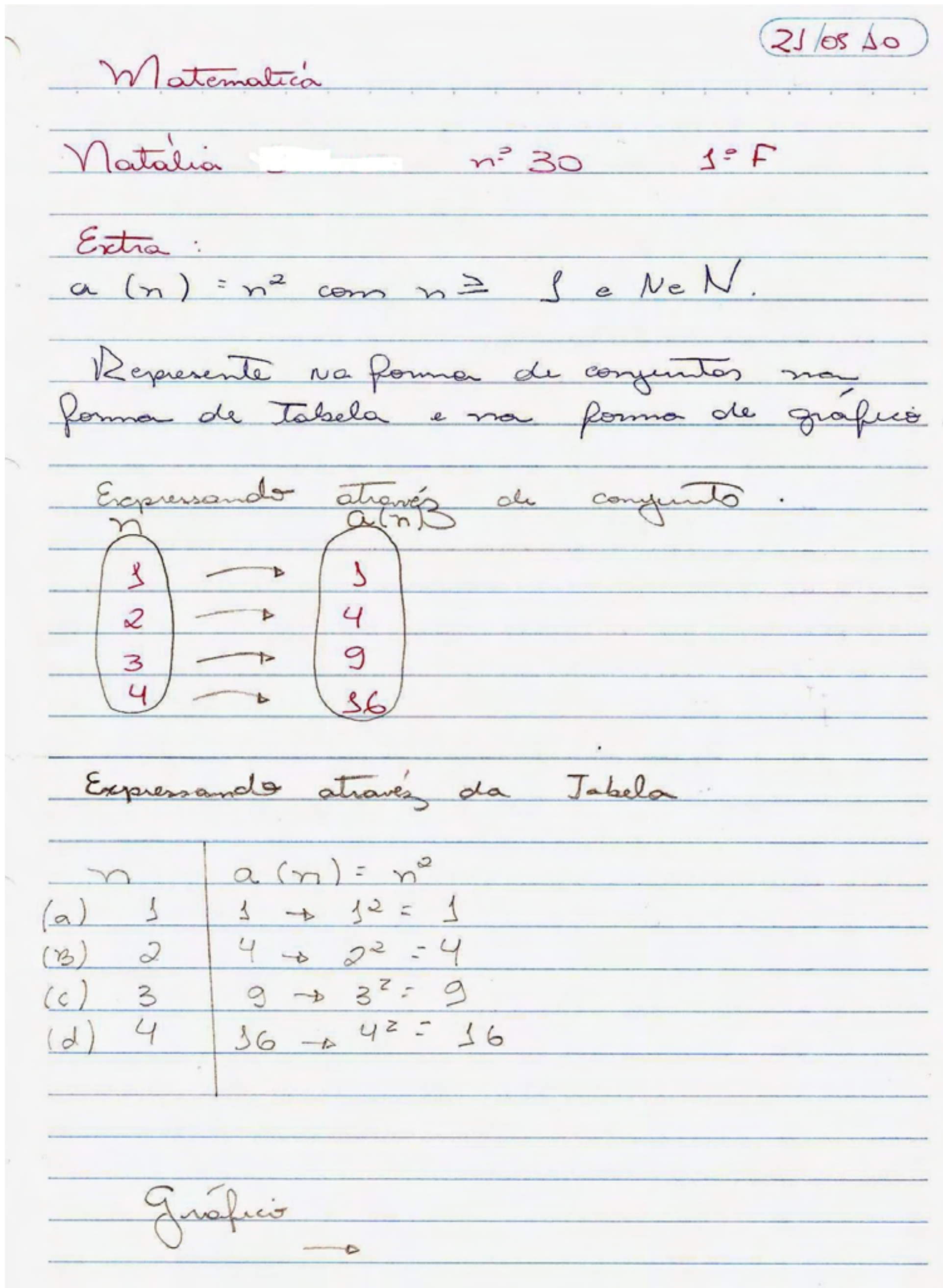
$2 . (166,64) + 2 . (43,36) = 420$

Área $\rightarrow x . y = 7225$

$x_1 . y_1 = 7225$	$x_2 . y_2 = 7225$
$166,64 . 43,36 = 7225$	$43,36 . 166,64 = 7225$

Atividade Individual – 16) Problema Extra: teve como objetivo levar o estudante a compreender uma progressão aritmética como uma relação funcional.

16 a) Enunciado e resolução



21/05/10

Matemática

Natália nº 30 1º F

Extra:

$a(n) = n^2$ com $n \geq 1$ e $N \in \mathbb{N}$.

Represente na forma de conjuntos na forma de Tabela e na forma de gráfico.

Expressando através de conjunto.

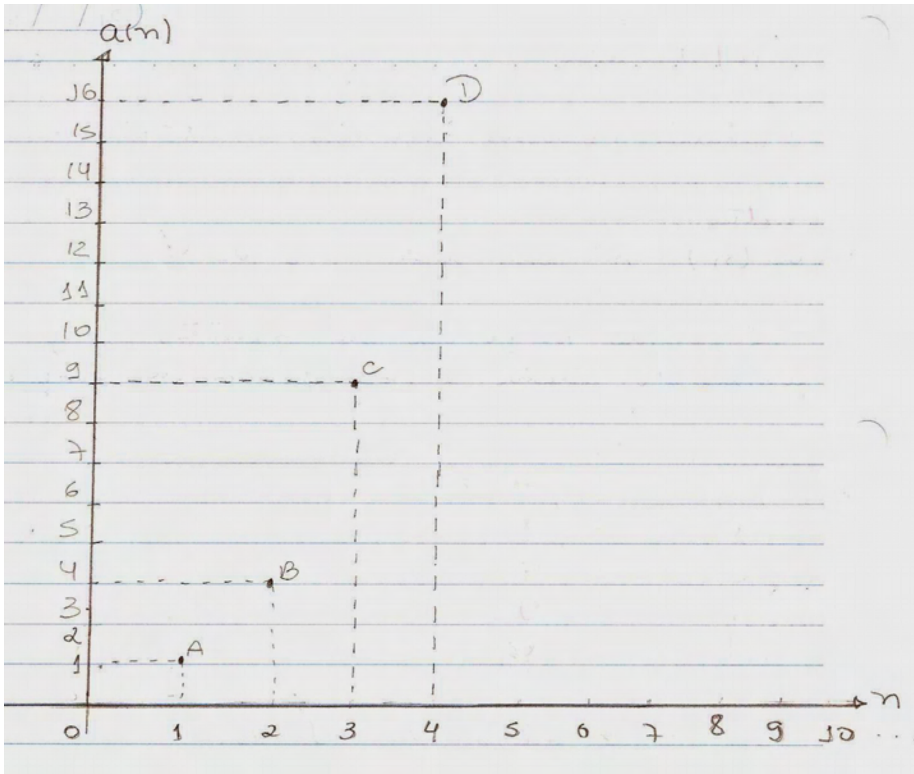
n		a(n)
1	→	1
2	→	4
3	→	9
4	→	16

Expressando através da Tabela

	n	$a(n) = n^2$
(a)	1	$1 \to 1^2 = 1$
(b)	2	$4 \to 2^2 = 4$
(c)	3	$9 \to 3^2 = 9$
(d)	4	$16 \to 4^2 = 16$

Gráfico →

Continuação - Gráfico



Podemos concluir que a aluna compreendeu com clareza a relação funcional definida pela progressão aritmética, e que mostrou fluência processual ao representar corretamente a função por meio de gráfico, tabela e diagrama de conjuntos.

Atividade Tipo II – 17) Apresentamos abaixo alguns problemas propostos numa avaliação. Esses problemas têm o propósito de verificar a fluência processual e a compreensão conceitual dos alunos no que diz respeito aos conceitos de progressão aritmética e funções.

17 a) Enunciados dos problemas

2) Podemos relacionar cada número natural **n** com um termo de uma sequência. Como se faz isso?

3) A relação que a cada número natural **x associa** o número real $y = x^2$ é uma função? Justifique.

4) Como você escreveria as expressões $a_n = 2n - 1$ e $a_n = 2n$, na forma de função, utilizando as letras x e y para denotar as variáveis independente, e dependente, respectivamente. Represente estas funções para alguns valores na forma de diagrama ou tabela.

6) Rafael resolveu fazer exercícios físicos para ficar "sarado". Começou pela série de exercícios de abdominais, sugerido pelo seu personal trainer. A sequência de abdominais segue a seguinte regra:
No primeiro dia faz 3 abdominais, no segundo dia faz o mesmo número de abdominais do dia anterior mais 2, no terceiro dia, faz o mesmo número de abdominais do dia anterior mais 2, e assim sucessivamente até completar 30 dias
Quantos abdominais ele fará no 12o. dia? Que expressão algébrica você pode usar para calcular o número de abdominais em qualquer dia? Qual é a função que associa a cada dia o número de abdominais?

17 a1) Algumas soluções desses problemas

2 - R: faz como uma relação entre n que é o ponto de partida e x é o ponto de chegada.

n	x
1 →	1
2 →	4
3 →	9
4 →	16
5 →	25

3 - R: Sim, pois Y é o termo dependente e X é o tempo independente e pode ser escrito em conjunto Ex:

X	Y
1 →	1
2 →	4
3 →	9
4 →	16
5 →	25

4 - R: $a_n = 2n - 1$ $a_n = 2n$

$Y = 2x - 1$ $Y = 2x$

X =	Y
1 →	$2 \cdot 1 - 1 = 1$
2 →	$2 \cdot 2 - 1 = 3$
3 →	$2 \cdot 3 - 1 = 5$
4 →	$2 \cdot 4 - 1 = 7$

6 - R:
$a_1 = 3$
$a_2 = 3 + 2 = 5$
$a_3 = 5 + 2 = 7$
$a_4 = 7 + 2 = 9$
$a_5 = 9 + 2 = 11$
$a_6 = 11 + 2 = 13$
$a_7 = 13 + 2 = 15$
$a_8 = 15 + 2 = 17$
$a_9 = 17 + 2 = 19$
$a_{10} = 19 + 2 = 21$
$a_{11} = 21 + 2 = 23$
$a_{12} = 23 + 2 = \boxed{25}$

$\boxed{a_n = 2n + 1}$ $Y = 2x + 1$

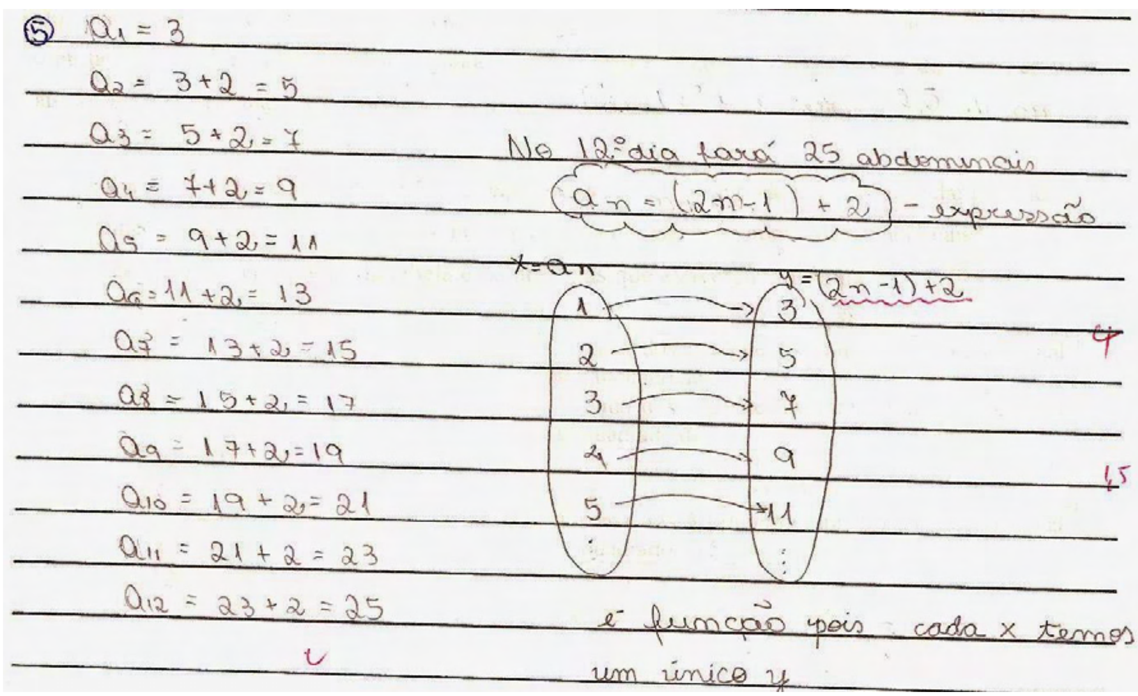
$a_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$
$a_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$
$a_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$
$a_4 = 2 \cdot 4 + 1 = 9$
$a_5 = 2 \cdot 5 + 1 = 11$

X	Y
1	$2 \cdot 1 + 1 = 3$
2	$2 \cdot 2 + 1 = 5$
3	$2 \cdot 3 + 1 = 7$
4	$2 \cdot 4 + 1 = 9$
5	$2 \cdot 5 + 1 = 11$

Nas atividades de 17a1), itens 2, 3 e 4, o aluno expressou as relações funcionais utilizando conjuntos, de modo correto, mas não respondeu as questões satisfatoriamente, sobretudo a questão 3. O professor foi complacente, no entanto, por acreditar que ele tinha compreendido a noção de relação funcional e o papel das variáveis dependente e independente, mas que não soube expressar suas ideias.

Na questão 6 do problema 17a) apresentado, o aluno usa recorrência até atingir o termo procurado. Este processo de recorrência possibilitou ao aluno obter uma fórmula geral para os termos da sequencia. O estudante mostrou fluência processual ao traduzir a progressão aritmética em uma relação funcional, e também representou esta relação como uma relação entre conjuntos.

17a2) Resposta


5 $a_1 = 3$
$a_2 = 3+2 = 5$
$a_3 = 5+2 = 7$
$a_4 = 7+2 = 9$
$a_5 = 9+2 = 11$
$a_6 = 11+2 = 13$
$a_7 = 13+2 = 15$
$a_8 = 15+2 = 17$
$a_9 = 17+2 = 19$
$a_{10} = 19+2 = 21$
$a_{11} = 21+2 = 23$
$a_{12} = 23+2 = 25$

No 12º dia fará 25 abdominais
$a_n = (2n-1)+2$ - expressão
$x = a_n$ $y = (2n-1)+2$
1 → 3
2 → 5
3 → 7
4 → 9
5 → 11
é função pois cada x temos um único y

As respostas deste aluno mostram que ele tem fluência processual e compreensão conceitual. Ele justifica que a relação y = (2x-1) +2 é uma função porque a cada valor de x temos um único y.

Trabalhamos problemas apresentados no caderno do aluno da Proposta Curricular do Estado de São Paulo 2010. Esses problemas, envolvendo funções do 1°. grau, têm o objetivo de atribuir significado aos coeficientes, estudar o crescimento e decrescimento, taxa de variação, e representação gráfica.

Atividade Tipo IV – 18) Problemas aplicados individualmente antes da avaliação bimestral, com o intuito de averiguar se o aluno compreendeu que o termo geral de uma sequencia define uma relação funcional, e averiguar o aprendizado da função exponencial.

18 a) Enunciado do problema

Encontre uma expressão algébrica que determina qualquer termo a_n da sequencia (1, 4, 9, 16, 25, ...). Determine os termos a_{10} , a_{35} e a_{100} . A relação que você obteve é uma função? Justifique.

Resposta

$a_n = n^2$

2- $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 9$, $a_4 = 16$, $a_5 = 25$, $a_6 = 36$
$a_7 = 49$, ... $a_{10} = 10^2 = 100$ ... $a_{35} = 35^2$ ... $a_{100} = 10000$

3-

n	$a(n)$
1 →	1
2 →	4
3 →	9
⋮	⋮

é função porque cada valor de $\underline{n}$ há um único correspondente.

No problema 18a) o estudante identificou com facilidade a expressão algébrica que fornece todos os números da sequencia por se tratar de uma sequencia de números já bastante conhecida, e mostrou compreender a relação funcional determinada pelo termo geral a_n, ao indicar, através de um diagrama de flechas, a relação que a cada número natural associa um único elemento da sequencia. O aluno também justificou corretamente sua resposta, embora por meio de uma frase mal construída.

18b) Enunciado do problema

O crescimento populacional de coelhos que vivem num certo tipo de habitat é representado pela função $P(t) = P_0 e^{kt}$, onde t representa o tempo em anos, e P_0 é o número de coelhos no instante inicial t = 0. Obtenha a quantidade de coelhos após um ano, sendo que

$$\begin{cases} P_0 = 100 \qquad em \qquad t = 0 \qquad e \\ k = 5, \qquad e = 2{,}7 \end{cases}$$

Resolução

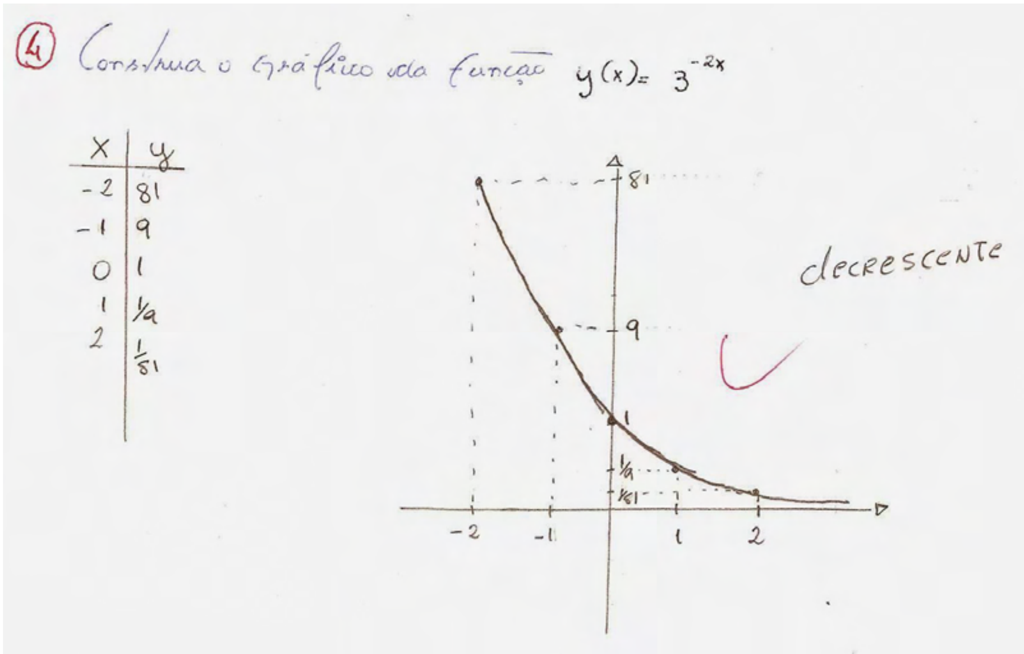
1R: $P(T) = P_0 \, e^{Kt}$

$P(1) = 100 . 2{,}7^5$

$P(1) = 100 . 143{,}4 = 14340$

$P = 14340$

18c) Enunciado e resolução



Comentário: Em 18a) a aluna mostrou que compreendeu a relação funcional dada pela sequencia. Em 18 b) e 18c) o aluno interpreta corretamente o problema, mostrou que sabe usar as variáveis, na função dada, identificando qual é constante, qual varia; mostrou que sabe usar as operações aritméticas e propriedade de estruturas algébricas; mostrou que sabe tanto construir o gráfico da função exponencial como fazer uma leitura do comportamento dele.

Atividade - Resolvendo problemas em grupo sem fazer uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

19) Com algumas modificações, trabalhamos problemas apresentados no material fornecido pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, caderno do aluno, Ensino Médio 1° série, vol. 2, p. 15, 16 e 17, elaborado de acordo com a Proposta Curricular do Estado de São Paulo 2010. Esses problemas envolvem funções do 1°. grau, com o objetivo de atribuir significado aos coeficientes e estudar o crescimento e decrescimento da função do 1º grau, taxas de variação, e representação gráfica. A abordagem apresentada nesse material atende, a nosso ver, o Princípio 2 de aprendizagem.

De inicio, nossa intenção era a de permitir que os alunos, já familiarizados em certa medida com o conceito de função afim e gráfico de função afim, procurassem resolver os problemas propostos fazendo suas próprias conjecturas, sem que lhes tivesse sido apresentado formalmente todo o conteúdo. Desse modo, o caderno do aluno foi posto de lado, servindo apenas como sugestão de roteiro. A partir de um diagnóstico, então, veríamos como introduzir esses novos conteúdos.

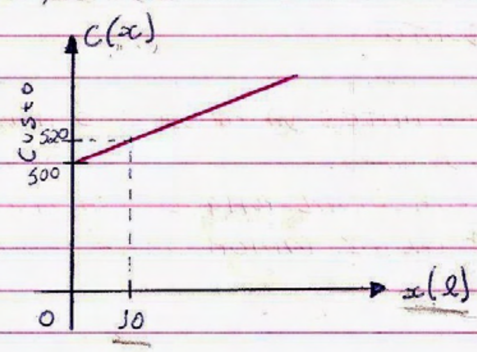
19a) Enunciado dos problemas trabalhados:

Lilian Cristina Rorim nº 23
Nome: Daniele dos A. Paoli nº 24 série: 1º D
Josiane Ramos duque nº 08

Pag-16

Exercícios

1. O gráfico abaixo representa a relação entre a quantidade x litros de xampu produzida e o custo C(x), em reais, da produção caseira.



a1) Quais são as grandezas envolvidas nesta relação representada no gráfico?
a2) Qual é a variável dependente? E independente?
a3) Qual seria o motivo de existir um gasto de R$ 500,00 quando ainda não se está produzindo xampu?

b1) Observando o gráfico, que tipo de curva representa a relação?
b2) Qual é a função C(x) = ax + b representada no gráfico? Essa sentença da interdependência entre o custo C e a quantidade produzida x é válida para qualquer valor de x?
b3) Essa relação representa uma função? Porquê?

c) Calcule o gasto para se produzirem 1.500 litros de xampu.

continuação

d) Quantos litros de xampu podem ser produzidos com R$ 10000,00?

e) Qual é a variação do gasto para a produção de cada litro adicional de xampu?

19 a1) Resolução

nomes: Josiani R. D, Lilian C. P, Daniele dos A. P
nºs 08, 23, 24 1º D

Exercícios pag-16

a1- Custo e litros.

a2- O custo é dependente da quantidade de litros do xampu → independente.

a3- O gasto que teria antes da produção seria o aluguel e os produtos para fabricar o xampu.

B1- diretamente proporcional porquê quanto mais litros de xampu você produz maior será o custo

B2 - $C(x) = x + 500$
Sim desde que seja positivo

B3- Representa uma função porque elas são grandezas interdependendes, relaciona cada quantidade de litros com um valor de custo.

C- 10 l → 520 R$ $\quad 10x = 520 \cdot 1500 \quad x = 78.000$
1.500 l → x $\quad 10x = 780.000$

d- 520 R$ → 10 l $\quad 520x = 10000 \cdot 10$
10.000 R$ → x l $\quad 520x = 100000$
$x = \frac{100000}{520} \quad x \cong 192,30$

e- 52 porque, 10 l → 520 $\quad 10x = 520 \cdot 1$
1 l → x $\quad x = \frac{520}{10} \quad x = 52.$

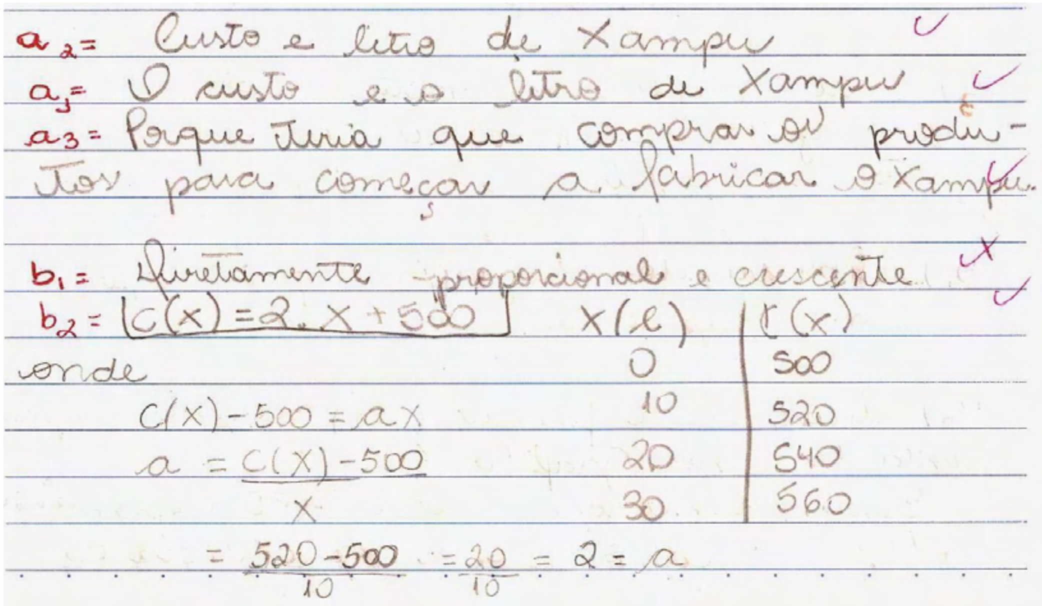
continuação

taxa de variação: $\dfrac{\Delta C}{\Delta \ell} = \dfrac{520-52}{10-1} = \dfrac{468}{9} = 52$

$\dfrac{\Delta C}{\Delta \ell} = \dfrac{104-52}{2-1} = \dfrac{52}{1} = 52.$

Na resolução 19a1) como um todo, os alunos mostraram uma noção vaga do conceito de função. Indicaram corretamente a relação de dependência entre as variáveis, mas não perceberam a necessidade de um cálculo adicional para a obtenção do coeficiente angular da função do 1º grau. Cometeram mais um erro ao considerar proporcionais as grandezas quantidade de xampu e custo. Esse erro, comum no estudo das funções do 1º grau, é um exemplo de supergeneralização, segundo a classificação de Graeber e Johnson (1990), e ocorre também nas séries mais avançadas. Talvez não se esteja dando a atenção devida ao conceito de razão e proporção e, em particular, no estudo da função afim, não se esteja ressaltando de que forma ocorre a proporcionalidade. Por fim, na resposta ao item b3), os alunos não explicitaram a unicidade do custo para cada quantidade de xampu. Trata-se claramente de um erro de concepção limitada, segundo Graeber e Johnson (1990). A freqüência com que ocorre a omissão dessa propriedade, essencial na definição de relação funcional, sugere que pode haver, nesse item, uma dificuldade cognitiva particularmente acentuada. E parece-nos que a falta de precisão vocabular e deficiências com a linguagem escrita acentuam ainda mais essa dificuldade.

19a2) Resolução j2)



a_2= Custo e litro de Xampu

a_1= O custo e o litro de Xampu

a_3= Porque teria que comprar os produtos para começar a fabricar o Xampu.

b_1= Diretamente proporcional e crescente

b_2= $\boxed{C(x) = 2.x + 500}$

onde

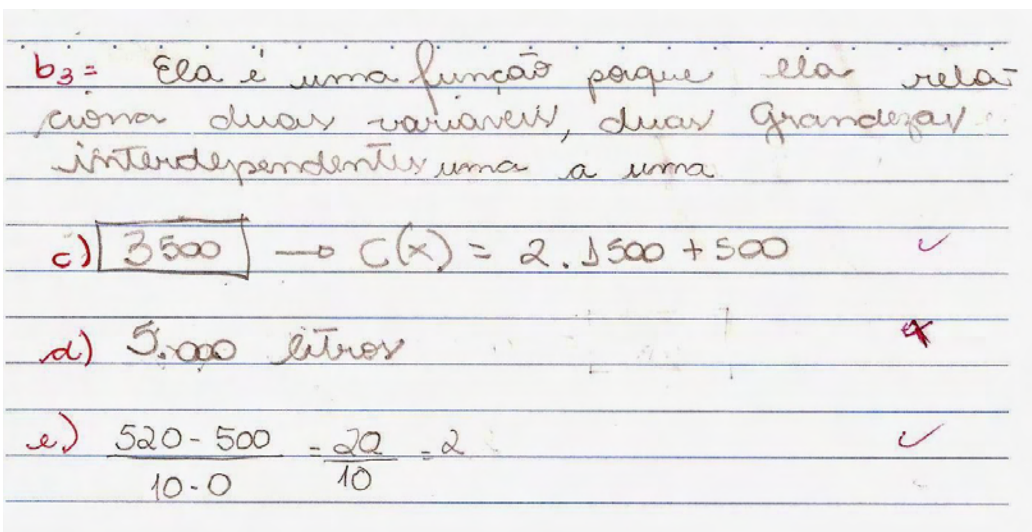
$C(x) - 500 = ax$

$a = \frac{C(x) - 500}{x}$

$= \frac{520-500}{10} = \frac{20}{10} = 2 = a$

x(l)	C(x)
0	500
10	520
20	540
30	560

continuação



b_3= Ela é uma função porque ela relaciona duas variáveis, duas Grandezas interdependentes uma a uma

c) $\boxed{3500}$ $\rightarrow C(x) = 2.1500 + 500$

d) 5.000 litros

e) $\frac{520-500}{10-0} = \frac{20}{10} = 2$

Já na resolução 19a2) os estudantes mostraram uma boa compreensão da função do 1º grau. Souberam determinar o coeficiente angular da reta por meio de uma manipulação algébrica não inteiramente correta, mas com substituição correta dos dados fornecidos, e também souberam calcular a variação do custo utilizando corretamente uma razão. Utilizaram corretamente a expressão algébrica da função para montar uma tabela e para calcular o valor solicitado na resolução de (19a2) item c). No item b1) esperávamos que os estudantes dissessem apenas que a curva descreve uma reta. No entanto, eles fizeram menção a duas propriedades sugeridas pelo gráfico da reta. Classificaram a curva como crescente com base, provavelmente, na geometria da curva e, talvez, na ideia informal representada pela frase “se x cresce, y cresce”, pois ainda não tinham aprendido a noção de função crescente e decrescente. E associaram seu conhecimento prévio de proporcionalidade com o gráfico de uma reta, afirmando existir proporcionalidade direta, mas não especificando entre que quantidades. Se eles não tivessem resolvido o item e), poderíamos supor que também esses alunos não sabiam de que modo ocorre a proporcionalidade em uma função afim.

Atividade Interdisciplinar – 20) Física e Matemática

Nesta atividade, desenvolvida em duas aulas, os alunos tiveram a oportunidade de aplicar seus conhecimentos de matemática para resolver problemas de física, monitorados, no entanto, pelo professor de matemática. E foram expostos pela primeira vez ao conceito de taxa de variação instantânea. Na resolução dos problemas propostos mostraram boa compreensão do conceito de função e, também, mostraram boa compreensão do significado da equação do movimento, ao indicar sobre o eixo horizontal, representando a trajetória retilínea percorrida, tanto a posição x(t) da partícula quanto o instante t correspondente. Atividades interdisciplinares atendem particularmente aos Princípios 1 e 2 de aprendizagem, pois levam o aluno a compreender que a matemática não diz respeito apenas a *efetuar cálculos e seguir regras mas à resolução de problemas quantitativos relevantes*, e o ajudam a conectar o formalismo matemático com outras formas de conhecimento, facilitando sua recuperação e aplicação.

20a) Enunciados

21/05/10

Sissi

nome: Pamella n°: 31 série: 1°F

Uma partícula move-se sobre o eixo x, de modo que no instante t a posição x é dada por $x(t) = t^2$, $t > 0$, onde x é dado em metros e t em segundos.

a. Quantos metros a partícula andou nos instantes $t=0$, $t=1$, $t=2$, $t=3$ e $t=4$.

b. Construa uma tabela indicando a posição e o tempo.

c. Qual dessas grandezas é variável dependente e qual é independente?

Você pode dizer que a posição é uma relação que mostra dependência com que grandeza?

d. Represente no plano cartesiano o gráfico da relação $x(t) = t^2$.

e. Qual é a velocidade média nos intervalos de $[0,1]$, $[0,2]$, $[0,3]$, $[0,4]$.

B.) R: TABELA

t	x (t)
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

0m 1m 4m 9m 16m

0s 1s 2s 3s 4s

A) R: t=0 → andou nenhum metro.

t=1 = 1 → andou 1 metro

t = 2 = 4 → andou 4 metros

t = 3 = 9 → andou 9 metros

t = 4 = 16 → andou 16 metros.

20 a1) Resolução

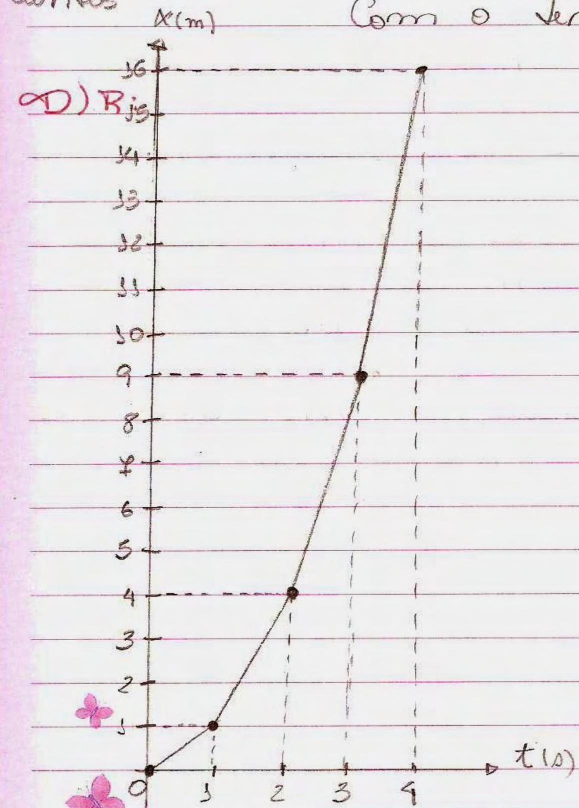
C.) R:

t	$x(t)$
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

nºs independentes

nºs dependentes. Com o tempo.

D) R:



E) R: $\dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$

$V_m = \dfrac{1-0}{1-0} = \boxed{1\ m/s}$

20a2) Enunciado e Resolução

$$V_m = \frac{4-0}{2-0} = \frac{4}{2} = \boxed{2\ m/s}$$

$$V_m = \frac{9-0}{3-0} = \frac{9}{3} = \boxed{3\ m/s}$$

$$V_m = \frac{16-0}{4-0} = \frac{16}{4} = \boxed{4\ m/s}$$

f. Qual é a velocidade instantânea t, e quando o tempo for 2s?

R: $$V = \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = \frac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = \frac{(t+\Delta t).(t+\Delta t) - t^2}{\Delta t}$$

$$V = \frac{\cancel{t^2} + 2t.\Delta t + \Delta t - \cancel{t^2}}{\Delta t} = \frac{2t.\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = \frac{\cancel{\Delta t}.(2t + \Delta t)}{\cancel{\Delta t}}$$

$$V = 2t + \cancel{\Delta t}^{\to 0} = V = 2t = \boxed{4\ m/s}$$

Foi bom p/a matéria de física e vai me ajudar bastante

20 a3) Resolução

de $[0,1]$, $[0,2]$, $[0,3]$, $[0,4]$

a) $t = 0 \to 0$ $t = 2 \to 4$ $t = 4 \to 16$

$t = 1 \to 1$ $t = 3 \to 9$

b)

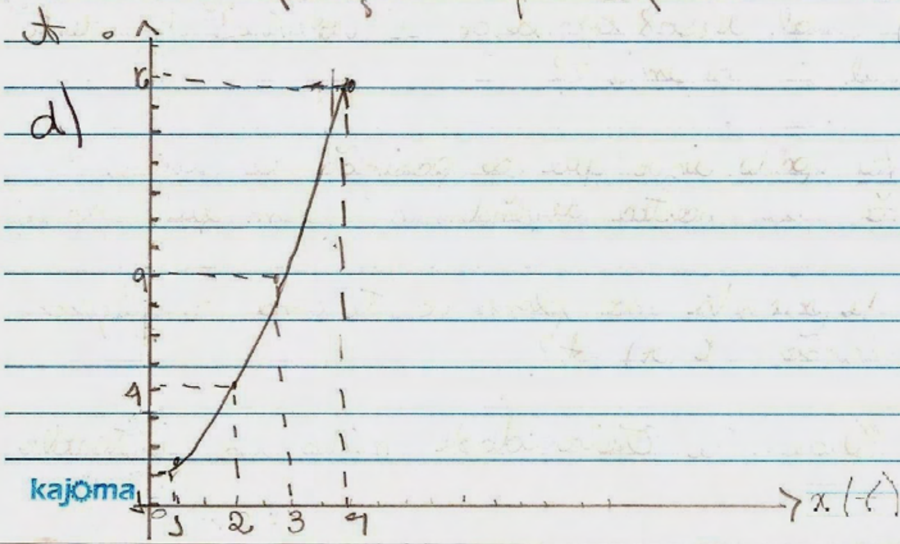
t	$x(t)$
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
⋮	⋮
10	100

c) O t é independente

$x(t)$ é dependente.

A posição é que depende do t.

d)



20 a4) Continuação

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = \frac{9-0}{3-0} = \frac{9}{3} = 3$$

intervalo de $[0,1] = 3$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4-0}{2-1} = \frac{4}{1} = 4$$

intervalo de $[0,2] = 4$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}\ \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{0-9}{6-0} = -\frac{9}{6} = -1,5$$

intervalo de $[0,3] = -1,5$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{16-0}{4-0} = \frac{16}{4} = 4$$

intervalo $[0,4] = 4$

f) $v = \dfrac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \dfrac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = \dfrac{(t+\Delta t)\cdot(t+\Delta t)}{\Delta t}$

$$v = \frac{\cancel{t^2} + 2t\,\Delta t + \Delta t^2 - \cancel{t^2}}{\Delta t} = \frac{2t\cdot\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} =$$

$$\frac{\cancel{\Delta t}\cdot(2t + \Delta t)}{\Delta t}$$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} 2t + \cancel{\Delta t} = v = 2t = 4$$

Atividade Avaliação Bimestral – Individual

A aluna que fez as atividades (21) e (21a), a seguir, mostrou ter compreendido muito bem os aspectos mais importantes da relação funcional, mesmo estando no segundo bimestre da 1ª série do ensino médio, e a maioria de seus colegas de classe também tiveram um desempenho bastante satisfatório. Isso reforça nossa opinião a respeito da possibilidade de anteciparmos o conceito de função para séries anteriores. Consideramos isso possível e desejável, reconhecendo, no entanto, a necessidade de métodos pedagógicos apropriados. E a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas nos parece fornecer procedimentos particularmente apropriados para o estudo de funções.

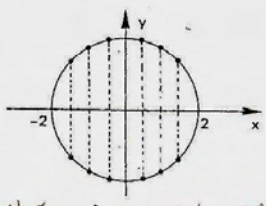
21) Enunciado e resolução

U.E.E.Esterina Placco **1a. Prova do 2o. Bimestre** **Prof. Eliane**

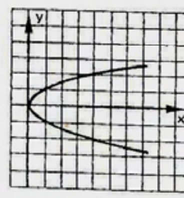
Nome: Cristiane **Turma:** 1º C E **data:** 25/05

1) Nas relações abaixo, escreva SIM se representarem funções e Não caso contrário. (Justifique a resposta).

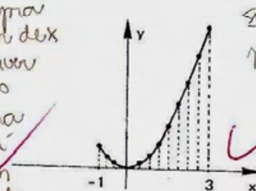
Nos casos em que as relações não representarem gráficos decomponha-os em dois ou mais gráficos de modo que cada um deles represente uma função.



Não, pois pra cada valor de x só pode haver um y correspondente, no gráfico, pra cada x há 2 y correspondentes.



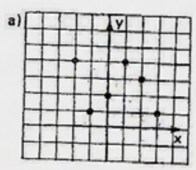
Não, pois pra cada valor de x só pode haver um y, no gráfico, pra cada x há mais de um y correspondente.



Sim, pois pra cada valor de x só há um y correspondente.

2) Determine o domínio e a imagem das funções correspondentes aos gráficos abaixo:

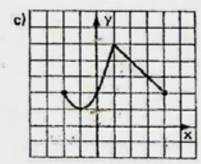
a)



$D(f) = \{3, -1, 0, 2, 1, -2\}$

$Im(f) = \{1, 2, 3, 4\}$

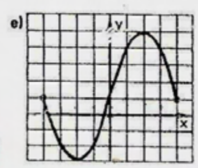
c)



$D(f) = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq 4\}$

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} / 1 \leq y \leq 5\}$

e)



$D(f) = \{x \in \mathbb{R} / -4 \leq x \leq 4\}$

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} / -3 \leq y \leq 5\}$

3) Dar o domínio e a imagem das seguintes funções reais:

a) $y = \frac{1}{3x+2}$

b) $y = \frac{\sqrt{x-2}}{x-2}$

c) $y = \frac{1}{x^2-3x+2}$

d) $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{2x-1}$

a) $y = \frac{1}{3x+2}$

$3x + 2 \neq 0$

$3x \neq -2$

$x \neq -\frac{2}{3}$

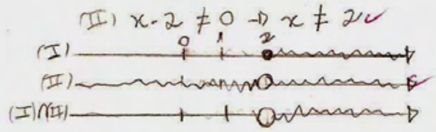
$D(f) = \{x \in \mathbb{R} / x \neq -\frac{2}{3}\}$

$Im(f) = \mathbb{R}$

b) $y = \frac{\sqrt{x-2}}{x-2}$

(I) $x - 2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2$

(II) $x - 2 \neq 0 \rightarrow x \neq 2$

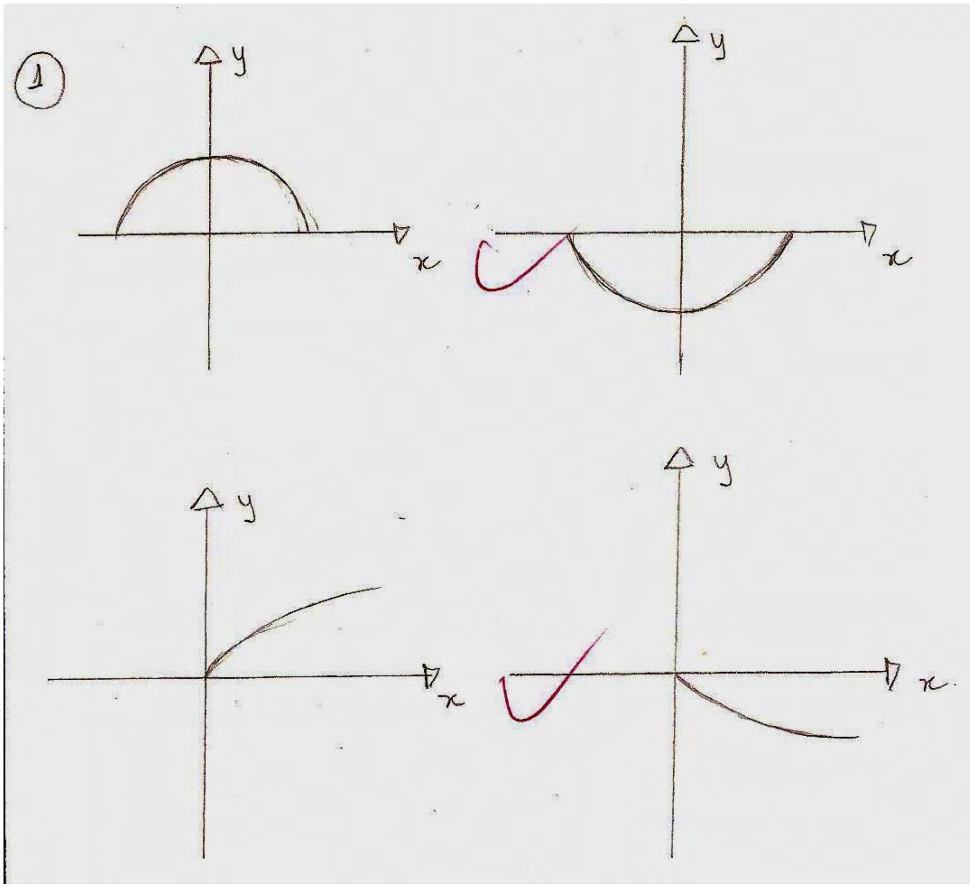


$D(f) = \{x \in \mathbb{R} / x > 2\}$

$Im(f) = \mathbb{R}$

1

21 a) Continuação



9.5 Atividades da 2^a série do Ensino Médio

Como se sabe, o estudo formal de funções inicia-se no ensino médio, a partir do primeiro bimestre da 1° série, atendendo às recomendações dos PCNs. E sendo assim, o conceito de função é suposto compreendido, ou considerado um conhecimento prévio já adquirido, pelos estudantes das 2ª e 3ª séries.

Atividade Tipo II – 22) Problemas de avaliação bimestral, com funções trigonométricas

22a) Enunciados:

1) Dada a função $f(x) = 1 + senx$, construa seu gráfico e determine

i) O domínio da função

ii) O contra domínio da função

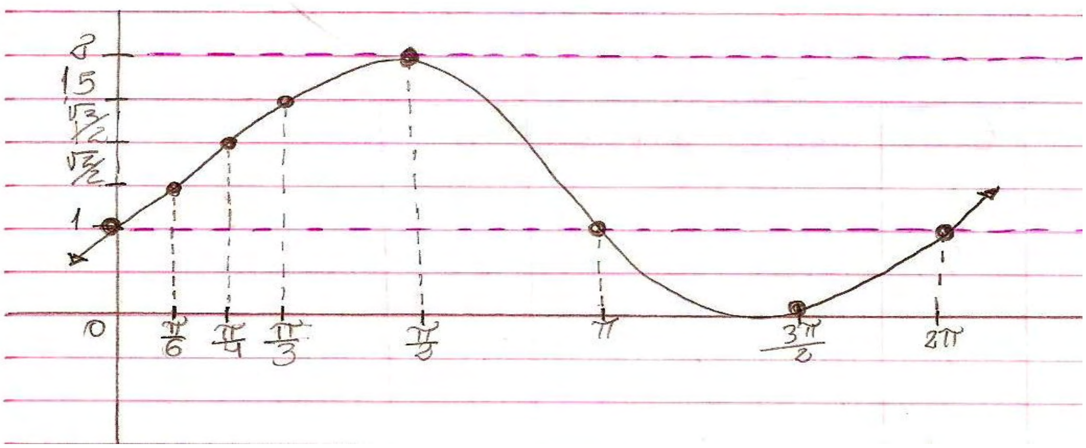
iii) A imagem da função

iv) O período da função

22a1) Resolução

Domínio → Reais
Contra domínio → Reais
Imagem → [0,2]
Período → 2π
c) Construir tabela.

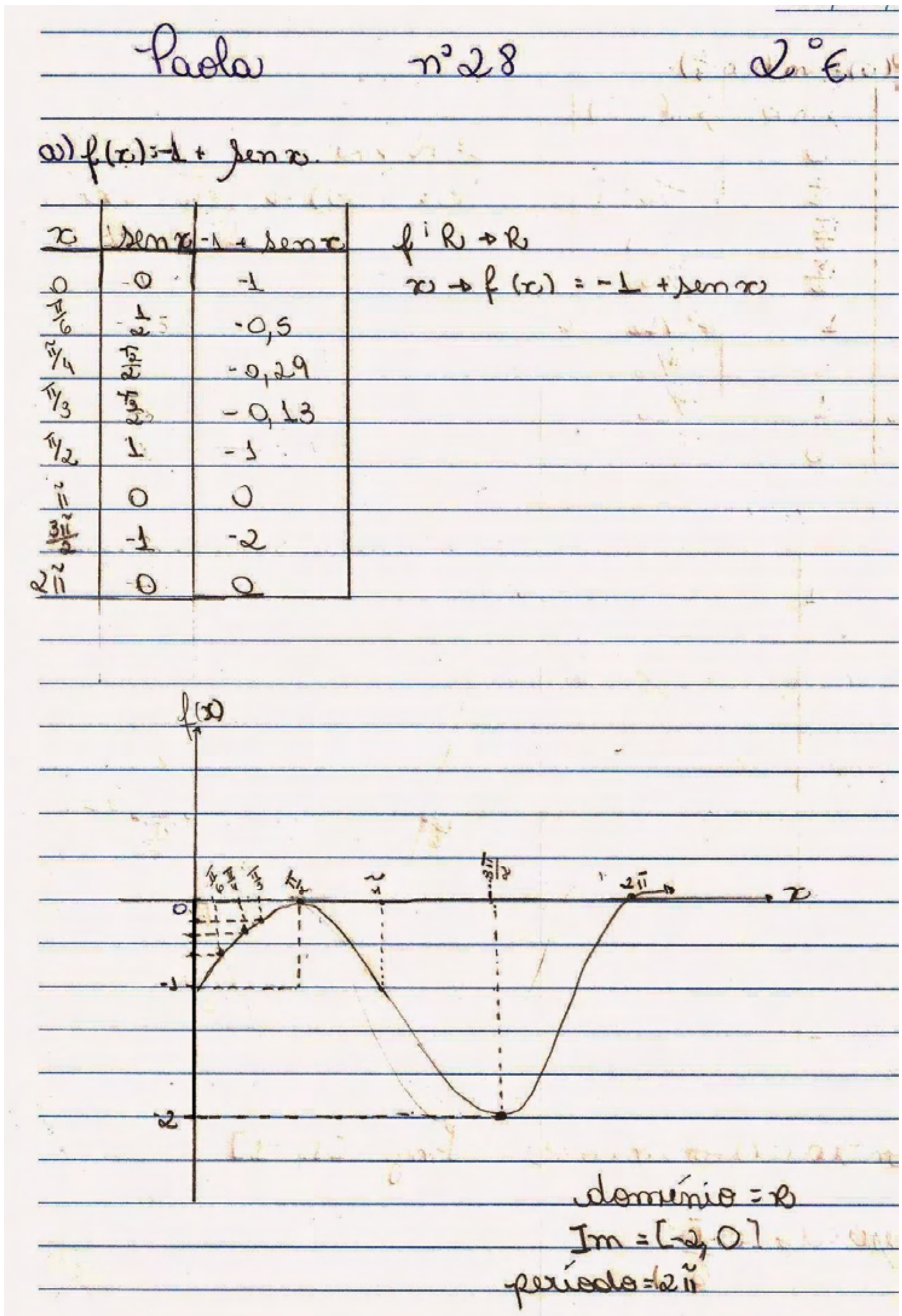
x	sen x	f(x) = 1+ sen x
0	0	1
π/6	1/2	1,5
π/4	√2/2	1+√2/2 = 1,7
π/3	√3/2	$1+\frac{\sqrt{3}}{2}$ = 1,8
π/2	1	2
π	0	1
3π/2	−1	0
2π	0	1



Comentário: Essa atividade pode ser inserida no tema Resolução de Problemas como Prática. Observando o gráfico construído pelo aluno, notamos uma falta de padrão para representar a unidade de medida escolhida por ele. Esse descuido é bastante frequente e, mesmo que o aluno mostre que sabe obter os pontos do gráfico, como é o caso nesse exemplo, devemos chamar sua atenção para a conveniência de expressar um resultado com a maior correção possível, quer seja por escrito, quer seja por meio de um raciocínio matemático, quer seja por meio de gráficos.

Atividade Tipo I – 23) A resolução a seguir foi apresentada na lousa por uma integrante de um grupo, com a intenção de esclarecer duvidas sobre o conjunto imagem da função, um dos pontos com que os alunos têm dificuldades.

23 a) Resolução



Comentário da resolução: A aluna utilizou um procedimento análogo ao que já lhe fora ensinado durante o estudo de funções polinomiais, na série anterior (1° série do ensino médio), ao tracejar, com um giz colorido, uma linha horizontal ligando os pontos extremos da curva ao eixo y. Dessa forma, ela evidenciou, sobre o eixo y, o intervalo [-2, 0] = Im. Podemos dizer que a aluna mostrou fluência processual, um dos indicadores do bom aprendizado, segundo o Princípio de aprendizagem 2. Observemos que a aluna procurou explicitar com palavras esse procedimento, durante a resolução na lousa. A nosso ver, a comunicação verbal eficiente também é um indicador do bom aprendizado e, não só isso, parece-nos que o treino dessa habilidade pode levar, por sua vez, a uma assimilação mais rápida de definições, propriedades e métodos.

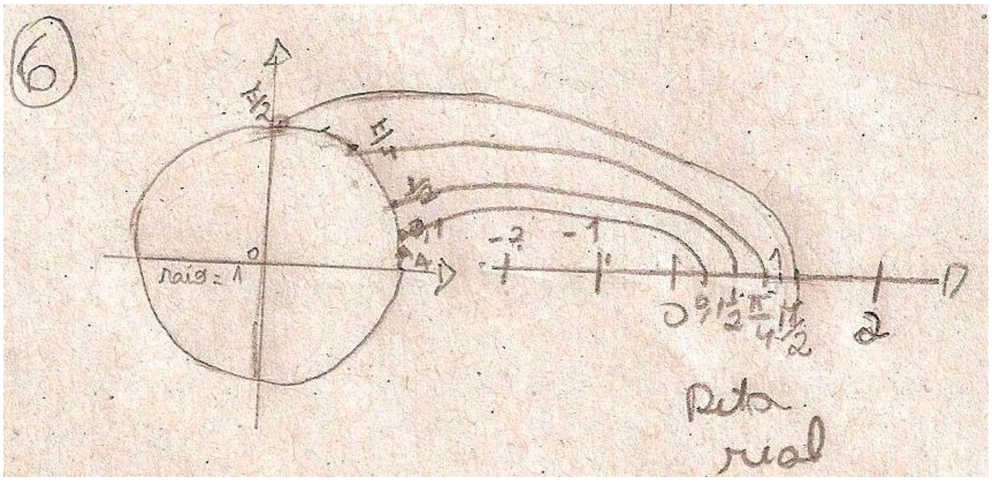
Atividade Tipo II – 24) Avaliação bimestral, envolvendo problemas com função trigonométrica, trabalhado anteriormente com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

24 a) Enunciado

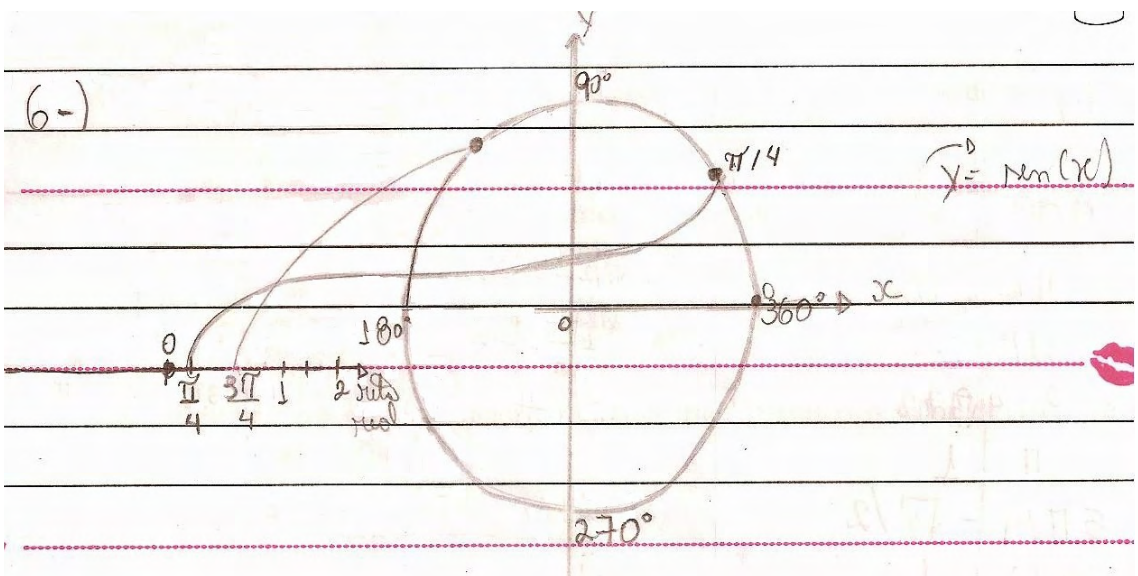
6) Podemos relacionar cada número da reta real com um ponto do círculo trigonométrico. Como se faz isso?

7) A relação que a cada número real x associa o número real y = sen(x) é uma função? Justifique utilizando o círculo trigonométrico.

24a1) Resoluções da questão 6) do problema 24)

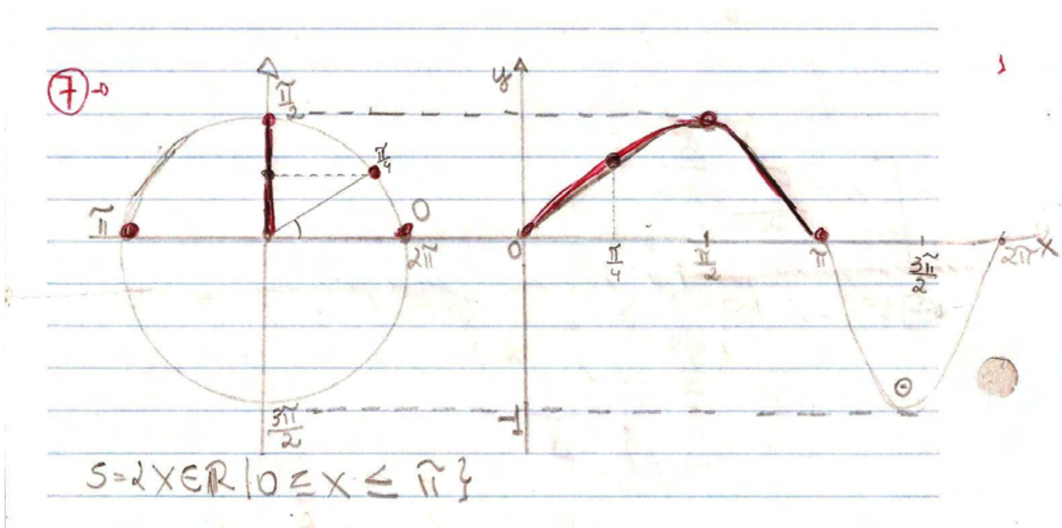


Outra resolução

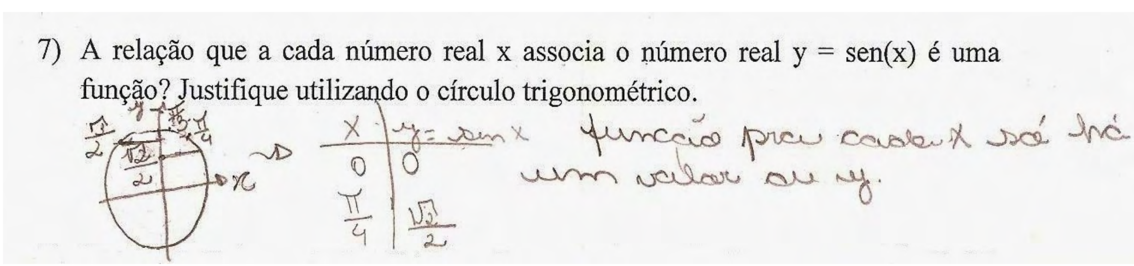


Comentário: Os alunos indicaram a relação através de um desenho e não por palavras, utilizando linhas continuas ligando números do eixo real a pontos do círculo trigonométrico. No entanto, para um dado número x, não indicaram de que forma o ponto correspondente sobre o circulo é obtido, e só consideraram números no intervalo [0, 2]. Parece-nos que a grande maioria dos alunos do ensino médio encontra dificuldades na passagem da trigonometria do triangulo retângulo para a trigonometria do circulo trigonométrico, particularmente por causa da introdução da medida de ângulos em radianos. Parece-nos que os alunos não compreendem facilmente o fato de termos um mesmo número real (positivo, digamos) representando tanto um ponto sobre a reta, quanto o comprimento de um arco do circulo trigonométrico, quanto uma medida do ângulo determinado por esse arco. Mas, nesse caso, admitimos que ficaríamos surpresos se não fosse assim.

24b) Resoluções da questão 7) do problema 24a)



24 b1) Resolução


7) A relação que a cada número real x associa o número real y = sen(x) é uma função? Justifique utilizando o círculo trigonométrico.

função pra cada x só há um valor de y.

Comentário: Na primeira resolução (24b) o aluno colocou lado a lado o circulo trigonométrico e o gráfico da função y = sen(x), no intervalo [0, π], indicou que os pontos da curva sobre esse intervalo têm correspondência com pontos do eixo y, e indicou sobre esse eixo o ponto que supostamente corresponderia ao seno de π/4, embora ele não tenha explicitado isso. Aparentemente ele saberia indicar a mesma correspondência para um valor x qualquer, pelo menos no intervalo que ele considerou. Mesmo assim, o aluno estaria cometendo um erro. Pois ele utilizou um raciocínio “invertido”, já partindo do gráfico da função seno, já conhecido por ele, para mostrar que a relação que define o seno de um número real é uma função.

Na segunda resolução (24b1) o aluno foi menos ambicioso e mais correto.

24 c) Enunciado e resolução

3) Transforme em radiano os ângulos: 210°, 240°, 225°

240

3-) $360° \text{ —— } 2\pi \text{ rad}$
$210° \text{ —— } x$

$360°x = 210°.2(\pi \text{ rad})$

$360°x = 420°(\pi \text{ rad})$

$x = \dfrac{42\cancel{0}(\pi \text{ rad})}{36\cancel{0}}$

$x = 1{,}16\pi \text{ rad.}$

$360° \text{ —— } 2\pi \text{ rad}$
$240° \text{ —— } x$

$360°x = 240°.2(\pi \text{ rad})$

$360°x = 480°(\pi \text{ rad})$

$x = \dfrac{48\cancel{0}(\pi \text{ rad})}{36\cancel{0}}$

$x = 1{,}33\pi \text{ rad}$

$360° \text{ —— } 2\pi \text{ rad}$
$225° \text{ —— } x$

$360°x = 225°.2(\pi \text{ rad})$

$360°x = 250°(\pi \text{ rad})$

$x = \dfrac{25\cancel{0}(\pi \text{ rad})}{36\cancel{0}}$

$x = 0{,}69\pi \text{ rad}$

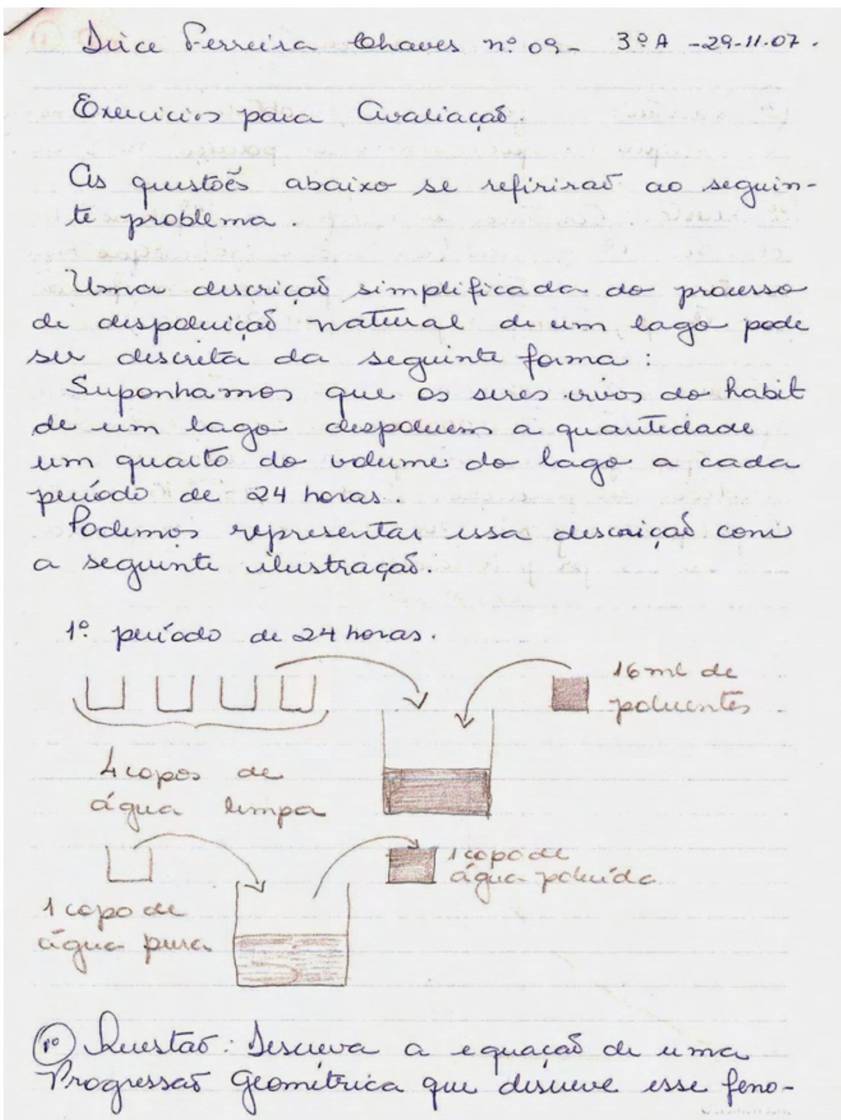
Comentário: Nesta resolução o aluno soube efetuar as transformações corretamente mas fica a pergunta: ele saberia justificar com clareza a relação de proporcionalidade entre medidas em graus e medidas em radianos? Essa pergunta está relacionada com o comentário feito em (24a1) mencionado anteriormente nos remete novamente ao Principio de aprendizagem 2 quando este ressalta a importância do aprendizado com compreensão.

9.6 Atividades da 3ª série do Ensino Médio

Nas atividades a seguir, estávamos considerando que os alunos já tinham conhecimento prévio do conceito de função e de outros a ele relacionados.

Atividade Tipo Avaliação individual após desenvolveremos com grupo de estudantes o Projeto Meio Ambiente: Estudo da Poluição do Lago numa Aula de Matemática.

25) Enunciado


Dirce Ferreira Chaves nº 09 - 3ºA - 29-11-07.

Exercícios para Avaliação.

As questões abaixo se referirão ao seguinte problema.

Uma descrição simplificada do processo de despoluição natural de um lago pode ser descrita da seguinte forma:

Suponhamos que os seres vivos do habit de um lago despoluem a quantidade um quarto do volume do lago a cada período de 24 horas.

Podemos representar essa descrição com a seguinte ilustração.

1º período de 24 horas.

16 ml de poluentes

4 copos de água limpa

1 copo de água poluída

1 copo de água pura

1º Questão: Descreva a equação de uma Progressão Geométrica que descreve esse feno-

25 a) continuação

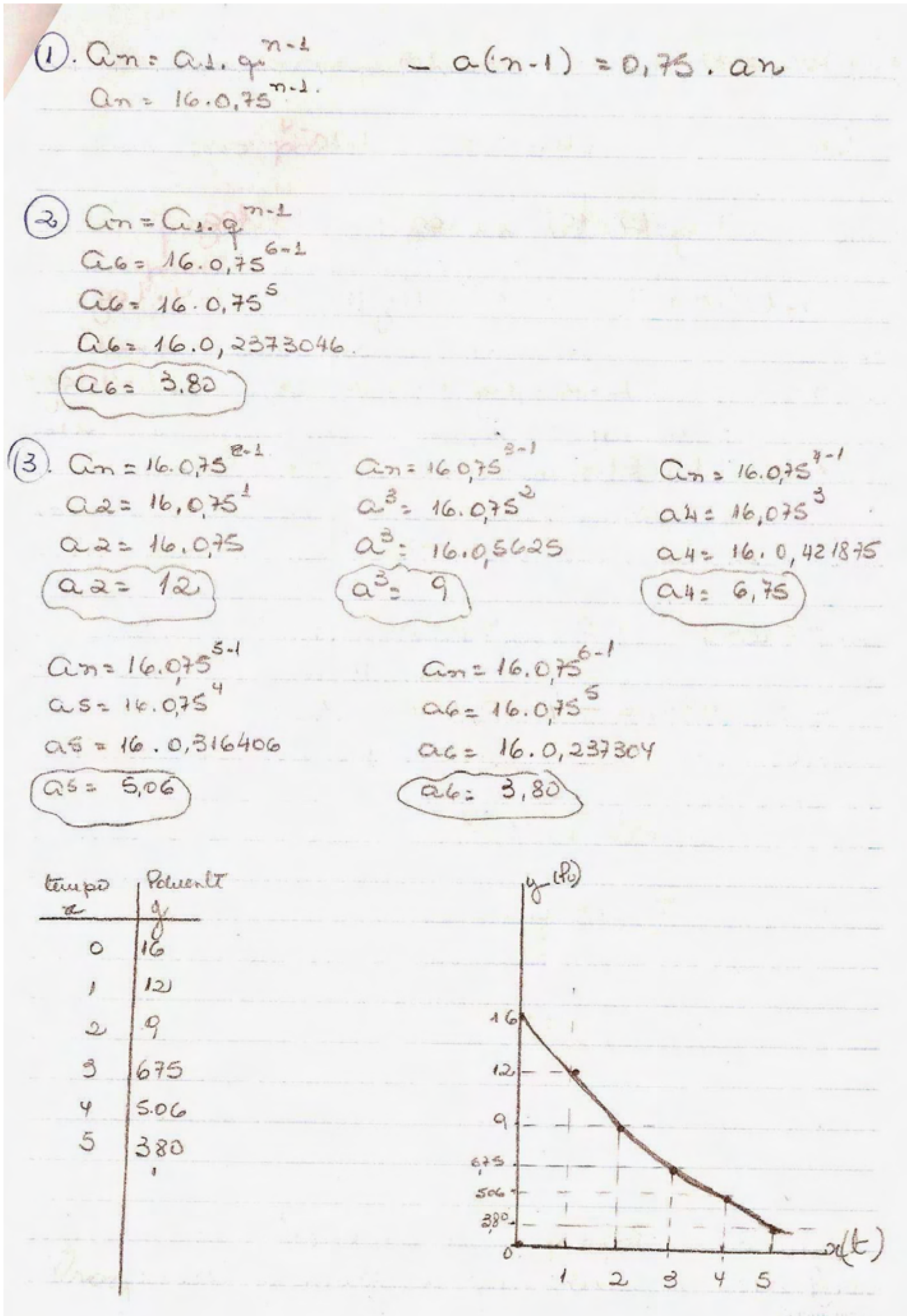
mino "com o decorrer dos dias".

(2º) Questaõ: Utilize a equaçaõ obtida anteriormente e verifique a quantidade de poluiçaõ no 5 dia.

(3º) Questaõ: Construa o gráfico da "funçaõ" obtida na 1º questaõ (ou seja o gráfico que representa a quantidade de poluiçaõ em funçaõ do tempo) (tempo = períodos de 24 horas).

(4º) Questaõ: Suponhamos que exista um aparelho que detecta até 0,0001 ml de poluiçaõ. Encontre em que período o aparelho detectará esse índice de poluiçaõ. Dado: $0,75^{n-1} \cdot 16 = 0,0001$. Aplique log nos dois lados da igualdade e use as propriedades de log.

5 a1) Resoluções



① $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ — $a(n-1) = 0,75 \cdot a_n$

$a_n = 16 \cdot 0,75^{n-1}$

② $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_6 = 16 \cdot 0,75^{6-1}$

$a_6 = 16 \cdot 0,75^{5}$

$a_6 = 16 \cdot 0,2373046$

$a_6 = 3,80$

③ $a_n = 16 \cdot 0,75^{2-1}$

$a_2 = 16 \cdot 0,75^{1}$

$a_2 = 16 \cdot 0,75$

$a_2 = 12$

$a_n = 16 \cdot 0,75^{3-1}$

$a^3 = 16 \cdot 0,75^{2}$

$a^3 = 16 \cdot 0,5625$

$a^3 = 9$

$a_n = 16 \cdot 0,75^{4-1}$

$a_4 = 16 \cdot 0,75^{3}$

$a_4 = 16 \cdot 0,421875$

$a_4 = 6,75$

$a_n = 16 \cdot 0,75^{5-1}$

$a_5 = 16 \cdot 0,75^{4}$

$a_5 = 16 \cdot 0,316406$

$a_5 = 5,06$

$a_n = 16 \cdot 0,75^{6-1}$

$a_6 = 16 \cdot 0,75^{5}$

$a_6 = 16 \cdot 0,237304$

$a_6 = 3,80$

tempo x	Poluente y
0	16
1	12
2	9
3	675
4	5.06
5	380

Comentários: Como a aluna já tinha trabalhado esse problema anteriormente, ela não mostrou como obteve a razão, 0,75. A estudante mostrou fluência processual ao construir um gráfico contínuo da função exponencial definida implicitamente pela equação da Progressão Geométrica.

25a2) Resolução

(4º) $\log 0{,}75^{n-1} \cdot 16 = 0{,}0001$

$(n-1) \log 0{,}75 + \log 16 = \log 1 . 10^{-4}$

$(n-1) \log 75 \cdot 10^{-2}) + \log 16 = 1 + \log 10^{-4}$

$(n-1)(\log 75 + \log 10^{-2}) + \log 16 = \log 1 - 4 \cdot \log 10$

$(n-1)(\log 75 - 2 . \log 10^{1}) + \log 16 = \log 1^{0} - 4 \cdot \log 10^{1}$

$(n-1) \cdot (1{,}8751 - 2) + 1{,}2041 = -4$

$(n-1) . (0{,}1249) + 1{,}2041 = -4$

$-0{,}1249n + 0{,}1249 + 1{,}2041 = -4$

$-0{,}1249n = -4 - 0{,}1249 - 1{,}2041$

$-0{,}1249n = -5{,}329$

$n = \dfrac{-5{,}329}{-0{,}1249}$

$n \cong 43$ dias

Comentário: Poucos alunos fizeram esse problema até o fim, e isso não nos pareceu surpreendente. A função logaritmo, por ser definida de modo indireto, requer um esforço de compreensão adicional dos alunos, habituados sobretudo com funções racionais. E no caso das funções trigonométricas, eles têm pelo menos o recurso geométrico-visual. O estudante do exemplo, no entanto, mostrou conhecer as propriedades da função logaritmo, ao fazer as sucessivas manipulações algébricas na equação inicial, e obteve o resultado correto.

Atividade Tipo Avaliação bimestral - 26) (Alunos com bastante dificuldade na escrita e aprendizado)

26 a) Enunciados

3) a) Sendo x e y duas grandezas, quando podemos dizer que y é uma função de x? (escreva a definição de função)

b) as grandezas que envolvem o comprimento C de uma circunferência é uma função de seu raio x isto é, $C = 2\pi x$. Quais dessas grandezas correspondem à variável dependente e à variável independente. Se o diâmetro de uma circunferência for 5/4 qual é o comprimento da circunferência. Use $\pi = 3,14$.

4) Esboce o gráfico da função $y = 9 - x^2$; encontre o ponto de máximo ou de mínimo.

BOA PROVA!

FELIZ NATAL!

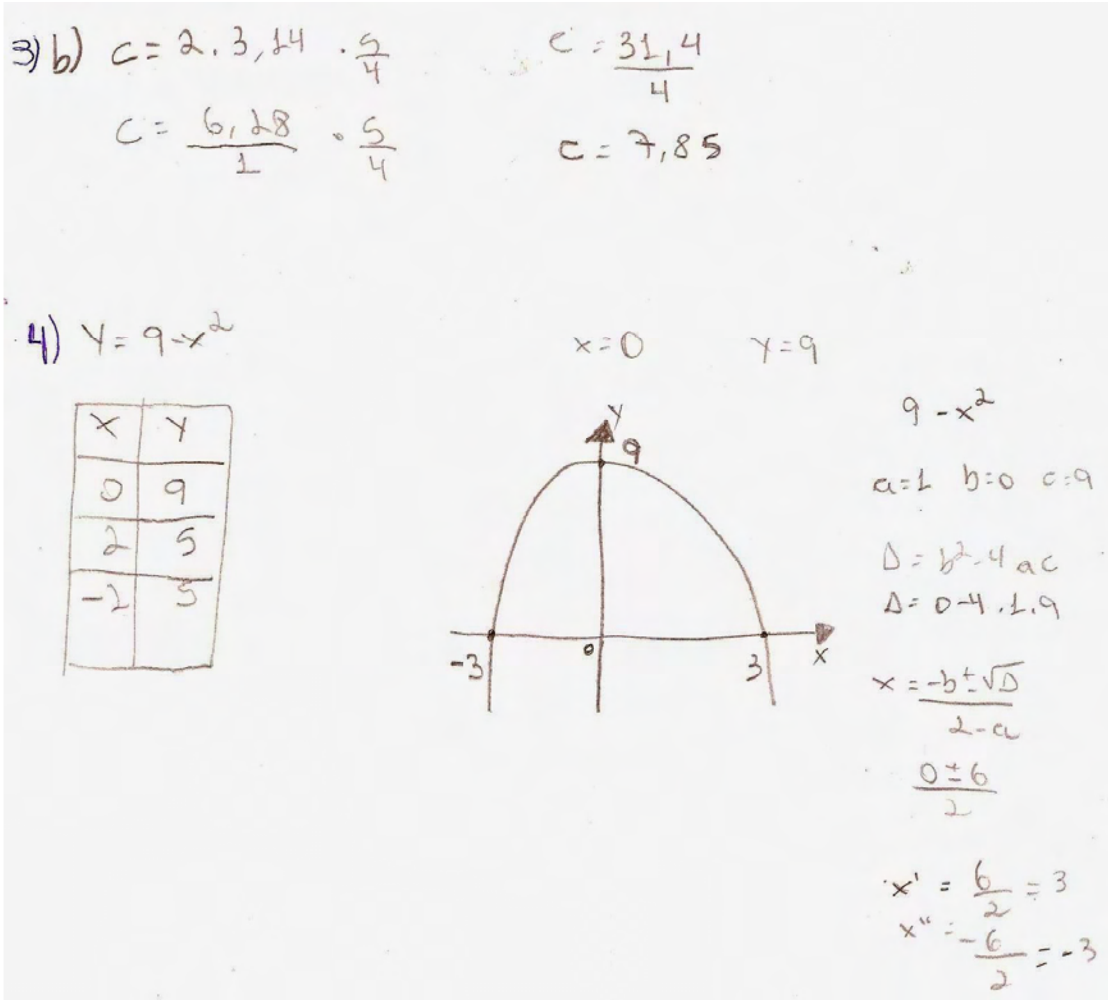
26 a1) Resolução

0,5 3) a) Quando o Valor do y depende do Valo
de X

b) Variavel independente - x
dependente - C

Comentário: Este aluno, mesmo estando no terceiro colegial, não consegue apresentar a definição de função e omitiu a propriedade essencial de unicidade: para cada x um único y. Como observado anteriormente trata-se de um erro de concepção limitada, segundo Graeber e Johnson (1990), e particularmente persistente.

26a2)



Comentário: A questão 3b) do problema 26a) o estudante, como muitos outros, cometeu o erro de substituir o valor da variável x pela medida do diâmetro dado no enunciado, por não saber interpretar o enunciado do problema. Observamos, nesse estudante, deficiências trazidas das séries anteriores, decorrentes, talvez, de pouca atenção por parte da escola como um todo, levando-o à frente sem avaliar de modo adequado o seu aprendizado efetivo. Problemas desse tipo prenunciam as muitas dificuldades que professores encontram, apesar de sua boa vontade, ao trabalhar com conceitos importantes da matemática como idéias unificadoras.

Considerações Finais

Ao colocarmos em ação o procedimento geral delineado no capítulo 8, por meio da aplicação do roteiro de atividades apresentado também naquele capítulo, percorremos as atividades 7 e 8 do Bloco 3 de Romberg - levantar e coletar evidências (atividade 7), e selecionar e interpretar aquelas evidências que dizem respeito à nossa Pergunta de Pesquisa (atividade 8).

No entanto, ainda não percorremos todo o Bloco 3 de Romberg, restando ainda as atividades 9 e 10 - relatar o que observamos neste trabalho (atividade 9), e antecipar a ação de outros (atividade 10) - que procuraremos atender nas considerações a seguir.

Acreditamos que, em trabalhos de pesquisa em educação e, em particular, em educação matemática, pela natureza intangível, em certo sentido, dos fenômenos de interesse que se apresentam, podemos esperar obter apenas indicações de como ocorre o processo de ensino-aprendizagem, e apenas indicações de como promover alguma melhoria nesse processo. Conclusões definitivas a respeito de um fenômeno de interesse só podem ser obtidas, acreditamos, quando os aspectos mais importantes desse fenômeno admitem algum tipo de mensuração objetiva, o que não nos parece ocorrer no caso dos objetos de estudo da educação, ou educação matemática e, mais geralmente, em todas as chamadas ciências humanas.

Os princípios de aprendizagem, vistos no capítulo 4, constituem um bom exemplo de indicações gerais sobre o processo de ensino-aprendizagem como um todo, e a analise de erros, apresentada no capítulo 6, e a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, discutida ao longo de todo este trabalho, constituem bons exemplos de indicações de como atingir melhores resultados em sala de aula.

Neste trabalho, portanto, não esperávamos obter conclusões definitivas a respeito de nosso fenômeno de interesse e, mesmo que tenhamos conseguido algumas indicações a respeito do processo de ensino-aprendizagem de funções, o que nos pareceu mais importante, olhando retrospectivamente, foi o processo de pesquisa em si, incluindo a metodologia utilizada e o estudo dos diversos temas abordados, e a tradução desse processo nestas páginas que, a nosso ver, não deixam de constituir uma fonte de informação para aqueles que estão trabalhando com funções, e não deixam de fornecer, pontualmente, indicações de caminhos para novos estudos.

No que diz respeito à metodologia adotada, pudemos compreender o valor do Método de Romberg, que orienta o pesquisador ao longo de todo o processo de investigação, e faz isso de modo natural, na medida em que, ao final de uma etapa, a etapa seguinte sugerida pelo método parece ser a etapa que se deve seguir inevitavelmente.

E no que diz respeito aos nossos temas, não podemos deixar de apresentar aqui alguns comentários a respeito das questões levantadas no capítulo 7. Uma delas refere-se à possibilidade de anteciparmos a introdução do conceito de função nas diversas séries do Ensino Fundamental II, com o uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas. Esse conteúdo é normalmente introduzido de modo formal na 1º série do ensino médio, seguindo a orientação dos PCNs, após os alunos já terem visto, na 8ª série, as noções de grandezas proporcionais e de variação linear, e a representação gráfica de grandezas proporcionais e não proporcionais. Observemos que o NCTM indicou claramente a conveniência de se abordar funções, e conceitos relacionados, desde o inicio da escolaridade, ao elaborar Padrões para Modelos e relações, destinados para o período do pré até a 4ª série, e Padrões para Modelos e Funções, para as séries de 5ª a 8ª, conforme mencionado em nosso capítulo 4 (segundo Kilpatrick e Izsák, 2008). Essa indicação nos parece bastante pertinente, pelo menos no que diz respeito ao Ensino fundamental II, com o qual tivemos a oportunidade de trabalhar. Os problemas das quintas às oitavas séries discutidos no capítulo 9 constituem para nós uma evidencia de que é possível antecipar, se não o formalismo rigoroso, pelo menos a terminologia, com a menção explicita das expressões “variável dependente”, variável independente” e “relação funcional”, por exemplo, e também, a construção gráfica (no plano cartesiano) de relações funcionais. Naqueles problemas estão presentes todos os elementos necessários para a construção do conceito de função, e parece-nos que a noção de variável, enquanto representando alguma grandeza concreta, e a noção de dependência entre grandezas, poderiam ter sido introduzidas naturalmente a partir das quintas séries, sem causar perplexidade aos alunos E acreditamos que essa antecipação não só é possível como, também, desejável, sendo razoável supor que os alunos, se tiverem uma bagagem prévia, poderão assimilar mais facilmente o formalismo que lhes será apresentado mais adiante. No entanto, sugerimos ao professor não esperar dos alunos da 5ª série/6°ano muito mais do que uma compreensão intuitiva da relação funcional, e que, para todas as séries, de 5ª a 8ª, (6°ano ao 9°ano) procure fazer uso de problemas que envolvam, por exemplo, proporcionalidade, recorrência, padrões e noções básicas de geometria, e que estejam relacionados tanto com pequenos temas do cotidiano, quanto com temas em evidência nas diversas mídias, para que o aluno comece a perceber desde cedo a presença da matemática em virtualmente todas as áreas do conhecimento.

Para a seleção de problemas envolvendo o conceito de função, destinados aos alunos do Ensino Médio, 1º, 2º e 3º séries, parece-nos importante dar atenção ao tema Resolução de Problemas como Prática[77], em que os problemas fornecem a prática necessária para reforçar habilidades e conceitos ensinados previamente.

Outra questão sobre a qual nos debruçamos se refere à análise de erros e seu papel no processo de ensino-aprendizagem. A princípio, tendo uma ideia vaga desse procedimento metodológico, ficamos posteriormente convencidos de que a análise de erros pode desempenhar um papel importante no ensino da matemática, e pudemos compreender que ela se inicia, necessariamente, com a adoção de algum sistema de classificação de erros. Observamos que nos foi possível classificar claramente alguns dos erros cometidos pelos alunos nos problemas do

---

[77] ver página 140 desta Dissertação

capítulo 9 utilizando o sistema de classificação sugerido por Graeber e Johnson (1990), apresentado por Onuchic e Allevato (cap.6). E ficamos convencidos de que o fato de podermos nomear um erro, colocá-lo dentro de uma categoria bem determinada, permite-nos compreender esse erro com maior clareza, e permite-nos traduzi-lo com maior clareza para o aluno. O professor, ao analisar, classificar e agrupar os erros dos alunos utilizando um sistema de classificação, poderá identificar mais facilmente os conteúdos que são fontes de dificuldades, e poderá desenvolver estratégias para rever esses conteúdos tendo em mente os tipos de erros cometidos. E talvez, também os alunos, a partir do Ensino Médio, já possam refletir sobre seus erros utilizando o ferramental conceitual fornecido pelo sistema de classificação adotado, desenvolvendo assim um trabalho meta cognitivo.

Parece-nos que a análise de erros não é um trabalho fácil para o professor inexperiente, ou, ainda que experiente, pouco inclinado a inovações metodológicas. No entanto, acreditamos que a prática, já estando o professor familiarizado com um sistema de classificação, pode torná-la um procedimento naturalmente integrado aos demais procedimentos pedagógicos do professor.

Segundo Romberg (1992), é comum, especialmente em Educação Matemática, que indivíduos ou grupos criem novos produtos com a intenção de melhorar o ensino e a aprendizagem. Os produtos podem ser novos materiais educativos, técnicas educativas ou programas educativos. Parece-nos que o que apresentamos de novo aqui diz respeito à antecipação do conceito de função para as séries iniciais. Como se sabe, o conceito de função está presente nas mais diversas atividades do cotidiano e, portanto, é um assunto que merece um tratamento especial desde cedo na vida dos estudantes. Como pudemos constatar neste trabalho, esse conceito pode ser introduzido de forma intuitiva já na 5ª. série do Ensino Fundamental II. Quanto mais cedo os estudantes se familiarizarem com o estudo de função, melhor **darão sentido** a esse importante conceito.

Encerramos aqui este trabalho como quem encerra uma etapa. Como quem sobe o primeiro degrau de uma longa escadaria sem desanimar. Por saber que, se apenas um degrau foi vencido, ainda assim, sem ele não seria possível ir adiante, e por esperar, talvez por ingenuidade, que mais alguém queira lhe acompanhar até o cume.

BIBLIOGRAFIA

BRAGA, C. **Função**: a alma do ensino da matemática. São Paulo: Annablume: Fapesp, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília,1997.

________. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília,1997.v.3,142p.

________. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** 3° e 4° ciclos: Matemática. Brasília,1998.126p.

________. Ministério da Educação – Secretaria da Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio:** Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, 2006. v.2, p.69-98.

BURTON, D. M. **The History of Mathematics**: introduction. 6^{th} ed. New York: MacGraw Hill, 2007.

D'AMBRÓSIO, B. **Influência de teorias de aprendizagem na evolução do currículo matemático**. Campinas: Faculdades de Educação: 1983. (Série de Palestras e Debates).

________. Teaching mathematics through Problem Solving: a historical. In: SCHOEN, H. L. (Ed.).**Teaching mathematics through problem solving, grades 6-12**, Reston:NCTM,2003. p.39-52.

D' AMBRÓSIO, U. **Educação matemática:** da teoria à prática**.** Campinas: Papirus, 1996. p.29-60; p.109-121.

DEMO, P. **Pesquisa e construção do conhecimento**: metodologia científica no caminho de Habermas. Rio de Janeiro: Tempo Brasileiro, 1994.

________. **Metodologia do conhecimento científico.** São Paulo: Atlas, 2000.

DOMINGUES, H. H. As Idéias da álgebra. In:COXFORD, A.F.; SHULTE,A.P.(Org.). **As idéias da álgebra** –Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual,1995.

DONAVAN, S. M; BRANSFORD, J. D. Introdução. In:----- (Ed). **How students learn**: mathematics in the classroom. Washington:National Academies Press, 2006. p.1-26. National Research Council of the National Academies.

FISCHER, R. Mathematics as a mean and as a system. In: RESTIVO, S.; BENDEGEM, J.P.V.;FISHCHER R. (Org.). **Math worlds**: philosophical and social studies of mathematics and mathematics education. Nova York: Albany,1993.

FUSON, K.C.; KALCHMAN, M.; BRANSFORD, J. D. Mathematical understanding: an introduction. In: DONAVAN, M.S.; BRANSFORD, J. D (Ed.). **How Students Learn**: mathematics in the classroom. Washington:The Nacional Academies Press, 2006. p.217-256. National Research Council of the National Academies.

GARDINER, A. 'Problem-Solving ? Or problem solving ?'. In: **The Mathematical Gazette**. p. 143. Março,1996.

GRAEBER, O. A.; JOHNSON, M. L. **Insights into secondary student's snderstanding of mathematics**. Maryland: University of Maryland 1990.

HOUAISS, A.; VILLAR, M. S. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001.

KIERAN, C.; CHALOUH, L. Prealgebra: the transition from arithmetic to algebra. In: Owens, D.T.(Org.). **Research Ideas for the Classroom:** middle grades mathematics.New Yok: Macmillan,1993. p.179-198. Publicação do NCTM.

KALCHMAN, M.; KOEDINGER, K. R. Teaching and learning functions. In: DONAVAN, M.S.; BRANSFORD, J. D. (Ed.). **How students learn**: mathematics in the classroom. Washington: National Academies Press 2006. p.351-393. National Research Council of the National Academies.

KILPATRICK, J.;IZSÁK,A. A history of algebra in the school curriculum. In: GREENES, C.E.; RUBENSTEIN, R.(Ed.). **Algebra and algebraic:** thinking in school mathematics, seventieth yearbook. Reston: 2008. p.3-33. Publicação do NCTM.

LAMBDIN, D. V.; WALCOTT, C. Changes through the years: connections between psychological learning theories and the school mathematics curriculum. In: ELLIOTT, P.C. (Ed.). **The learning of mathematics, sixty-ninth yearbook**. Reston, 2007.p.1-25. Publicação do NCTM.

LÜDKE, M; ANDRÉ, M.E.D.A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Curriculum and evaluation standards for school mathematics**. The National Council of Teachers of Mathematics, Reston:1989.

________. **Professional standards for teaching mathematics.** The National Council of Teachers of Mathematics, Reston:1991.

________. **Principles and standards for school mathematics**. The National Council of Teachers of Mathematics, Reston:2000.

________. **Curriculum focal points for pre-kindergarten through grade 8 mathematics:** a quest for coherence**.** Reston, 2006. p.14-20.

________. **Focus in high school mathematics:** reasoning and sense making. Reston, 2009. p.1-7; p.31-53.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em educação matemática:** concepções e perspectivas. Rio Claro: UNESP, 1999. p.199-218.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V.;BORBA,M. C. (Org.). **Educação matemática**: pesquisa em movimento. 2.ed. São Paulo: Cortez, 2005. p.213-231.

________. Formação de professores – mudanças urgentes na Licenciatura em Matemática. In. REZENDE, M.C.; NASSE, L. **Educação matemática no ensino superior**: pesquisas e debates. Recife: Sbem, 2009. v.5, p. 169-187. Biblioteca do Educador. Coleção SBEM.

POLYA, G. A. A arte de Resolver Problemas,Tradução:Heitor Lisboa de Araujo. Ed. Interciência, 1978.

POST, T. R.; BEHR, M. J.; LESH R. A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções pré-álgebra. In: COXFORD, A.F.;SHULTE, A. P.(Org.). **As idéias da álgebra** -1988- NCTM, tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual,1995. p.89-111.

ROMBERG, T. A. Perspectivas sobre o conhecimento e métodos de pesquisa. In: **Bolema: Boletim de Educação Matemática,** v.20, n.27, p. 93-139, 2007.Artigo traduzido por Lourdes de La Rosa Onuchic e Maria Lúcia Boero.

SANTOS, A. R. **Metodologia científica**-a construção do conhecimento. 7. ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2007.

SÃO PAULO. Conselho Estadual de Educação (São Paulo). **Diretrizes curriculares para a educação básica no estado de São Paulo.** Conselho Estadual de Educação. São Paulo: CEE, 2002.

________. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. **Proposta curricular do estado de São Paulo:** Matemática, Ensino Fundamental ciclo II e Ensino Médio**.** São Paulo: SEE, 2008.

SAUL, M. Algebra: the mathematics and the pedagogy. In:GREENES, C.E.; RUBENSTEIN, R.(Ed.). **Algebra and algebraic:** thinking in school mathematics, seventieth yearbook. Reston: 2008. p.63-79. Publicação do NCTM.

SCHROEDER, T. L.; LESTER J. R. F. K. Developing understanding in mathematics via problem solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.). **New directions for elementary school mathematics**. Reston: NCTM, 1989. p. 31-42.

SKOVSMOSE, O**.** **Educação matemática crítica**: a questão da democracia. Trad. Abgail Lins, Jussara de Loiola Araújo. Campinas: Papirus, 2001. p.65-125.

STANIC, G.M.A.; KILPATRICK,J. **Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum.** In:Charles, R.; Silver, E. (Ed). **The teaching and assessing of mathematics problem solving**. 3rd.ed Reston:NCTM,1989. p.1-22

STIFF, L. V.; JOHNSON, J. L.; JOHNSON, M. R. Cognitive issues in mathematics education. In:WILSON, P.S. (Ed.). **Research ideas for the classroom:** high school mathematics, Nova York,1993. p.3-20.

THORNDIKE, E. L. **The psychology of arithmetic.** New York: Macmillan,1922. Disponivel em: <http://www.archive.org/details/psychologyofarit00thoruoft> Acesso em: 11 out. 2009.

VAN DE WALLE, J. A.; LOVIN, L. H. **Teaching Student**: Centered Mathematics grades 5-8, v.3. Boston: Pearson, 2006.

WAGNER, S.; PARKER, S. Advancing Algebra. In: WILSON, P. S.(Ed.). **Research ideas for the classroom:** high school mathematics, Nova York,1993. p.119-136.

YOUSCHKEVITCH, A. P. The concept of function up the middle of the 19^{th} century. **Archives for history of exact sciencies**. v.16, n.1, p.37-85, Mar.1976.

APÊNDICE

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

Área de concentração em ensino e aprendizagem da matemática e seus fundamentos filosófico-científicos

Trabalho final do curso de História da Matemática,

Prof. Dr. Sérgio Roberto Nobre

Tradução do texto:

O Conceito de Função até a Metade do Século 19

A.P. Youshkevitch

Archive for History of Exact Sciences, 16, 1976/77

Autora: Aluna- Eliane Saliba Botta

1º semestre de 2008

O Conceito de Função até a Metade do Século 19

A.P. Youshkevitch

Archive for History of Exact Sciences, 16, 1976/77

1. Observações preliminares

Até os dias de hoje, a história da funcionalidade permanece insuficientemente estudada. Esse importante tema é na verdade evitado até mesmo por C. Boyer, cujo livro [1] sobre a história dos principais conceitos do cálculo já está em sua terceira edição. É verdade que esse trabalho, bem como outros sobre a história da matemática, contém varias considerações sobre aspectos isolados da evolução do conceito de dependência funcional e sobre a interpretação de vários acadêmicos a respeito desta dependência. Embora sem dúvida valiosas, estas considerações, mesmo que reunidas, não fornecem um quadro completo. Além disso, as opiniões de vários autores frequentemente diferem umas das outras; em particular, não há concordância a respeito de quando o conceito de função de fato surgiu. Talvez o ponto de vista mais comum tenha sido colocado no bem conhecido livro de D. E. Smith ([2], p.376), que afirmou, há aproximadamente cinqüenta anos atrás:

...afinal, a idéia real de funcionalidade, como mostrada pelo uso de coordenadas, foi primeiro expressada clara e publicamente por Descartes.

No entanto, a opinião de Boyer ([1], p.156), formulada em conexão com o trabalho de Fermat, um acadêmico contemporâneo de Descartes, é que

...*o conceito de função e a idéia de símbolos representando variáveis não parece estar presente no trabalho de nenhum matemático da época.*

Por outro lado, W. Hartner & M. Schramn ([3], p.215), acreditam que

A questão de [da] *origem e desenvolvimento* [do conceito de função] *é usualmente tratada com surpreendente parcialidade: ela é considerada quase que exclusivamente com relação à análise Cartesiana, a qual por sua vez é considerada (acreditamos que erroneamente) como um fruto tardio da escolástica latitudines formarum.*

E, ainda,

...operar com funções já tinha atingido um alto grau de perfeição na época em que foram feitas as primeiras tentativas de elaborar uma concepção geral de funções.

Operações com funções, esses autores afirmam, podem ser encontradas em cálculos astronômicos de pesquisadores antigos (por exemplo, nos trabalhos de Ptolomeu), em ciências arábicas e nos trabalhos de Al-Biruni (a quem o artigo dos autores é dedicado).

Em um livro [4] publicado posteriormente ao livro [1] mencionado acima, dedicado à história da geometria analítica, C. Boyer destaca outros protótipos de funções na matemática grega antiga. Assim, considerando o uso de proporções, ele diz (p.5):

Isto foi de certa forma equivalente ao uso moderno de equações como expressões de relações funcionais, embora muito mais limitado.

O mesmo autor ([4], p.46) bem como J. E. Hofmamn ([5], pp.80-81), A.C. Crombie ([6], vol. ii, pp.88-89) e outros, relacionam expressões geométricas de funções e cálculos de seus valores com a *teoria de cálculo* e com a *teoria de latitudes de formas* do século XIV. No entanto, H. Wieleitner ([7], p.145) acreditava que a idéia de função nesta última teoria continha

...nicht die geringste Vorstellung der zahlenmäbigen Abhängigkeit einer Grösse von einer anderen

enquanto que E. T. Bell ([8], p.32) até mesmo atribuiu aos matemáticos babilônicos um *instinto para a funcionalidade.* Finalmente, uma opinião sobre a existência de uma idéia de função na matemática antiga foi colocada em evidência recentemente por O. Pedersen [9].

Não estenderei esta lista de opiniões, ora concordantes, ora discordantes umas das outras, lista por vezes correta, por vezes incorreta ou, no mínimo, incompleta. Apenas acrescentarei que, no que diz respeito ao século 19, a definição clássica de função, presente em quase todo tratado sobre análise matemática nos dias de hoje, é usualmente atribuída ou a Dirichlet ou a Lobatchevsky (1837 e 1834, respectivamente). No entanto, historicamente falando, essa opinião geral é incorreta porque o conceito geral de função, como uma relação arbitrária entre pares de elementos, cada um pertencente a um conjunto, foi formulada muito mais cedo, na metade do século 18.

A importância de uma análise histórica do conceito de funcionalidade, especialmente ao se considerar as discussões contemporâneas desse mesmo conceito, é óbvia. Sem pretender atingir tal objetivo, eu deverei apresentar breves observações descrevendo somente os principais estágios do desenvolvimento da idéia de função até a metade do século 19. No meu ponto de vista, esses estágios são os seguintes:

(1) Antiguidade, estágio no qual o estudo de casos particulares de dependência entre duas quantidades não tinha levado ainda a noções gerais de quantidades variáveis e funções.

(2) A Idade Média, estágio no qual, na ciência Européia do século 14, essas noções gerais eram, antes de mais nada, expressas de forma geométrica ou mecânica, mas no qual, e como também na antiguidade, cada caso concreto de dependência entre duas quantidades era definida por uma descrição verbal ou por um gráfico, mas não por fórmulas.

(3) O Período Moderno, estágio no qual, começando no final do século 16, e especialmente durante o século 17, expressões analíticas de funções começaram a prevalecer, com a classe das funções analíticas geralmente expressas como séries infinitas de potencias, logo se tornando a principal classe utilizada.

Foi o método analítico de introduzir funções que revolucionou a matemática e, por causa de sua extraordinária eficiência, assegurou um lugar central para a noção de função em todas as ciências exatas.

Ainda, com toda a sua riqueza, por volta da metade do século XVIII essa interpretação de funções como expressões analíticas se mostrou inadequada, de modo que uma nova definição geral de função, que mais tarde se tornaria universalmente aceita em análise matemática, foi introduzida durante aquele mesmo período.

Na segunda metade do século XIX essa definição geral abriu grandes possibilidades para o desenvolvimento da teoria de funções, mas imediatamente revelou dificuldades lógicas as quais, no século XX, fizeram com que a essência do conceito de função fosse reconsiderada (como foram, na verdade, os outros principais conceitos da análise matemática). A luta entre diferentes pontos de vista continua; no entanto, como eu mencionei acima, não discutirei este período (ou melhor, esses dois períodos, conectados respectivamente com a teoria de funções e com a lógica matemática), o qual foi descrito por A. F. Monna [10].

Aqui eu deverei como regra discutir funções reais de uma variável real. Tais funções são introduzidas em tratados modernos de análise matemática por meio de um número variado de termos que têm um significado comum. No sentido mais geral, uma função *y* da variável *x*, $y = f(x)$, é uma relação entre pares de elementos de dois conjuntos numéricos, X e Y, tal que a cada elemento *x* do primeiro conjunto X, é associado um único elemento *y* do segundo conjunto Y, de acordo com alguma regra definida. Deixando de lado dificuldades lógicas inerentes a esta definição[1], eu observo apenas que a regra funcional, ou "lei", poderia ser introduzida de várias formas: verbalmente; por uma tabela de valores de *x* e *y*; por uma expressão analítica; por um gráfico, etc., devendo somente satisfazer a condição que esta regra seja definida e que, uma vez dado o valor de *x*, seja suficiente para a obtenção de *y*.

A idéia de função compreendida em um ou outro sentido está implicitamente contida em regras para mensuração de áreas das figuras mais simples tais como retângulos, círculos, etc., conhecidas já no início da civilização e, também, já nas primeiras tabelas (algumas delas sendo tabelas de funções de duas variáveis) de adição, multiplicação, divisão, etc., usadas para facilitar cálculos.

Obviamente, relações entre números, ou mais geralmente, entre quantidades, são encontradas a cada passo no terreno que denominamos matemática elementar. No entanto, este fato trivial é em si próprio, de pouca utilidade em nossa busca do processo de formação da idéia de função, de sua generalização e gradual compreensão, do significado concreto por ela adquirido com o progresso do pensamento científico e filosófico e, finalmente, do papel que ela exerce durante os vários estágios desse progresso.

2. Funções Tabeladas e os "Sintomas" das Sessões Cônicas na Antiguidade

Como dito acima, o primeiro estágio do conceito de função é o da antiguidade. Mesmo em 2000 A.C. matemáticos da Babilônia utilizaram largamente, para seus cálculos, tabelas sexagêmais de recíprocos, quadrados e raízes quadradas, cubos e raízes cúbicas, bem como algumas outras tabelas. Dois tipos diferentes de tabelas de funções, a *função escada* e a função *zigue zague-linear*, como O. Neugedeauer ([12], Cap.5) as denominou, foram utilizadas na astronomia dos babilônios durante o reinado de Seleucids para compilação de efemérides do sol, da lua e dos planetas. Funções empiricamente tabeladas se tornaram depois disso o fundamento matemático para todo o desenvolvimento subseqüente da astronomia.

Novas idéias do conceito de função apareceram na matemática e ciência natural gregas. Tentativas de determinar as leis mais simples da acústica, atribuídas aos primeiros Pitagóricos, são típicas da procura por interdependência quantitativa de várias quantidades físicas como, por exemplo, os comprimentos e os tons de notas emitidas por cordas dedilhadas do mesmo tipo, sob tensões iguais. Mais tarde durante a época Alexandrina, astrônomos desenvolveram toda uma trigonometria de cordas relacionada com uma circunferência de raio fixado e, utilizando teoremas de geometria e regras de interpolação, calcularam tabelas de cordas equivalentes, na verdade, a tabelas de seno, tais como as que vieram a ser utilizadas pelos Hindus poucos séculos mais tarde. A mais antiga das tabelas de cordas existentes é encontrada no *Almagest,* de Ptolomeu, no qual estão presentes inúmeras tabelas astronômicas de outras quantidades, equivalentes a funções racionais, e também as funções irracionais mais simples do seno [9].

No entanto, os gregos não se restringiram ao uso de funções tabeladas. O papel principal na teoria das cônicas foi desempenhado por seus *sintomas,* isto é, por aquelas propriedades planimétricas básicas que seguem imediatamente da definição esteriométrica original (embora não utilizada) das cônicas como sendo seções planas do cone. Um sintoma de uma dada seção cônica representa, conforme diria um matemático moderno, para cada ponto da curva dada, uma e a mesma dependência funcional entre sua semi–corda y e o segmento x do diâmetro conjugado com a corda, os pontos finais deste segmento sendo o ponto de intersecção do diâmetro com a corda e o vértice correspondente. Geômetras da antiguidade descreveram sintomas verbalmente e, também, por meio de *álgebra geométrica* (o termo é devido a H. G. Zeuthen ([13], p.7)), na qual identidades e equações nos primeiros dois graus foram representadas por igualdades de áreas de certos retângulos. O significado desses sintomas, cuja descrição verborrágica da antiguidade parece pouco usual para o ouvido moderno, poderia ser expresso de modo absolutamente acurado na linguagem da geometria analítica por equações de curvas de segunda ordem com respeito aos seus vértices,

$$y^2 = 2px \mp \frac{p}{a}x^2, \qquad y^2 = 2px$$

No entanto, os recursos fornecidos pela álgebra geométrica eram insuficientes para expressar, de modo análogo, as propriedades de curvas de terceira e quarta ordens (sissóide e conchoíde) e de algumas outras curvas algébricas conhecidas pelos matemáticos gregos, que tiveram que definir todas essas curvas, e também certas curvas transcendentes tais como a quadratrix e a espiral eqüiângular, por meio de construções geométricas ou mecânicas (cinemáticas) especiais.

Matemáticos antigos introduziram uma classificação peculiar de curvas e de problemas resolvidos por meio dessas curvas. Mesmo antes de Euclides eles destacaram três classes de lugares geométricos: lugar geométrico plano – linhas retas e círculos; lugar geométrico sólido – seções cônicas; e lugar geométrico linear – todas as outras curvas. É realmente impossível estudar aqui a origem e o significado desta classificação, sendo ela tão distanciada da nossa, a qual se originou no século XVII ([14], §25).

Na Grécia antiga e em países helenísticos que mais tarde se tornariam províncias romanas, funções introduzidas em conexão com problemas matemáticos e astronômicos foram submetidas a estudos similares àqueles realizados na análise matemática dos tempos modernos. De acordo com o objetivo procurado, funções eram tabeladas pelo uso de interpolação linear, e, nos casos mais simples, limites de razões de duas quantidades infinitamente pequenas foram encontrados, como por exemplo, o limite de *sen(x/x)* com *x* tendendo a zero.

Problemas sobre valores extremos e sobre tangentes foram resolvidos por métodos equivalentes ao método diferencial; áreas, volumes, comprimentos, e centros de gravidade foram calculados por métodos integrais equivalentes ao calculo de integrais como, por exemplo, $\int_0^a x dx$ e $\int_0^a x^2 dx$.

Finalmente, problemas nos quais raízes de polinômios cúbicos tinham que ser calculadas foram resolvidos com a utilização de seções cônicas (curvas de 2º. ordem). Para esse propósito, raízes das equações correspondentes eram consideradas como coordenadas de pontos de intersecção, ou contato, de duas cônicas apropriadas. Nesta descrição eu uso a terminologia e notação moderna, desconhecidas dos matemáticos antigos. Eu enfatizo esse fato tão distintamente quanto possível.

O simbolismo Grego até aproximadamente o século 3 D.C., tirando o uso de dígitos, se restringiu a denotar várias quantidades por letras diferentes do alfabeto. Nenhuma formula algébrica, nenhum tipo de algoritmo literal, nenhuma expressão analítica jamais foram introduzidos. Somente nos trabalhos do matemático alexandrino Diophantus e, possivelmente, naqueles de seus predecessores imediatos, cujos nomes foram esquecidos, alguns signos algébricos aparecem, como, por exemplo, signos para as seis primeiras potências de uma quantidade desconhecida, um signo de igualdade, etc. No entanto, com o declineo da sociedade antiga, essa notação não foi desenvolvida.

3. Uma Noção Geral de Função na Antiguidade

Exceto pela falta de simbolismo, que atrasou todo o progresso da matemática, as aquisições dos Gregos, tanto no que diz respeito ao aumento do número de dependências funcionais utilizadas quanto no que diz respeito à descoberta de novos métodos para estudá-las, foram realmente substanciais e desempenharam um papel proeminente no desenvolvimento posterior da matemática, até a criação da nova álgebra, geometria analítica e do cálculo infinitesimal nos séculos 16 e 17. Apesar disso, eu devo repetir que não houve nenhuma idéia geral de funcionalidade nos tempos antigos.

O problema de saber se os matemáticos antigos possuíam um conceito geral de função também foi considerado detalhadamente por O. Pedersen em seu artigo dedicado ao *Almagest* de Ptolomeu [9]. Muito corretamente, Pedersen observa que, de acordo com o sistema Ptolomaico do mundo, as posições do sol, lua e planetas são consideradas como mudando contínua e periodicamente com o tempo; que a determinação dessas posições é obtida por Ptolomeu por meio de procedimentos padronizados, algumas vezes explicados por exemplos numéricos ou, alternativamente, formulados verbalmente de uma maneira bastante geral; e finalmente, que esses procedimentos padronizados são utilizados para compilar várias tabelas astronômicas, *i.e.*, para tabelar as funções correspondentes (não somente de uma mas até mesmo de duas e, em diversos exemplos, três variáveis). Observando que a palavra *função* não apareceu pela primeira vez nos trabalhos de matemáticos antigos mas somente muito mais tarde, Pedersen ([9], p.35) coloca a seguinte questão:

Mas por esta razão podemos concluir que eles não tinham qualquer idéia de relações funcionais?

Sua própria resposta é que tudo depende do que de fato se quer designar por função. Se, em concordância com muitos matemáticos do passado, interpretarmos uma função como uma expressão analítica, então a conclusão é que os antigos não conheciam funções.

Mas se, continua Pedersen (p.36), *nós concebermos uma função, não como uma fórmula, mas como uma relação mais geral associando os elementos de um conjunto de números (em outras palavras, pontos de tempo t_1, t_2, t_3,..) com os elementos de outro conjunto (por exemplo alguma variável angular em um sistema planetário), é obvio que funções neste sentido são abundantes em todo o Almagest). Somente está faltando a palavra: a coisa em si esta lá e claramente representada pelas muitas tabelas de elementos relacionados de tais conjuntos.*

Eu quase concordo com tudo isso. É claro que, Ptolomeu, como outros astrônomos daquela época e de épocas anteriores, sabiam que as coordenadas celestiais dos corpos mudam periodicamente com o tempo, ou que, em um dado círculo, cordas de comprimentos desiguais estão relacionadas com arcos de comprimentos desiguais. Acima (ver §2) eu considerei outros exemplos de funções (anteriores à Ptolomeu) estudadas pelos matemáticos Gregos, que não compilaram tabelas para aquele fim. Também, dois mil anos antes de Ptolomeu, relações tabulares eram bem conhecidas pelos Babilônios. Apesar de tudo isso, falta à literatura matemática antiga não somente palavras equivalentes ao termo função mas também uma alusão àquela idéia mais abstrata e mais geral que unifica diferentes dependências concretas entre quantidades ou números, sejam quais forem as formas em que essas dependências venham a ser expressas (descrição verbal, gráfico, tabela). Existe uma boa distancia entre o *instinto para a funcionalidade* (Bell) e a percepção desse instinto, e o mesmo é verdadeiro com respeito a funções particulares e à emergência do conceito de uma função em um ou outro grau de generalidade. O uso do singular (*a coisa em si mesma*, i.e., a relação funcional *representada* por várias tabelas) por Pedersen, com respeito ao *Almagest* (ver citação acima) parece ser incorreto na medida em que ele permite que toda aquela passagem seja interpretada como implicando que as funções correspondentes a essas tabelas eram consideradas como exemplos particulares de relação funcional em geral.

Uma situação análoga pode ser encontrada na matemática Grega como um todo. Os seus procedimentos para calcular ou determinar limites individuais concretos nunca conduziram a uma formulação de conceitos gerais de seqüência, variável, limite, quantidades infinitamente pequenas, integral, ou de teoremas gerais a respeito desses objetos[2]. Exemplos apropriados são quadraturas e cubaturas obtidas por Archimedes. De fato, resolvendo diversos problemas (determinação da área de uma "volta" em uma espiral, o volume de um esferóide, a área de um segmento de um hiperbolóide de revolução), ele calculou, na verdade, uma e apenas uma integral, qual seja, $\int_0^a x^2dx$, ou, para colocar isso de outra forma, ele calculou o limite de uma e apenas uma soma de "Riemann-Darboux", desenvolvendo completamente, a cada vez, os mesmos procedimentos requeridos pelo método de exaustão. Observando que também outros problemas resolvidos por

Archimedes (quadratura de uma parábola, determinação do centro de gravidade de um triângulo) poderiam ser reduzidos ao calculo dessa mesma integral, N.Bourbaki ([15], p.208) continua:

...nous ignorons jusqu'à quel point il a pris consience dês liens de parente qui unissent lês divers problèmes don til traite (liens que nous exprimerions em disant que la même intégrale reviente em maisnts endroits, sous dês aspects géométriques varies), et quelle importance il a pu leur attribuer.

É impossível responder esta questão, mas é claro que Archimedes não poderia ter deixado de perceber que os procedimentos de cálculo nos três primeiros problemas eram idênticos. Ainda assim, mesmo para o caso da única função que ele utilizou, $y = x^2$, ele não introduziu uma noção geral de uma integral definida (cf. [16]).

Geralmente falando, ao estudar a matemática do passado, não apenas com freqüência avaliamos a sua importância para o desenvolvimento posterior dessa ciência (o que é necessário), mas também, com freqüência, ampliamos de uma maneira indevida a interpretação de suas idéias, vinculando-as com noções e concepções modernas e muito mais gerais. E realmente acontece, como o Fausto de Goethe observou ao seu discípulo, que o historiador equaciona o espírito dos tempos refletindo-o em sua própria mente:

Was ihr den Geist der Zeiten heisst,
Das ist im Grund der Herren eigner Geist,
In dem dei Zeiten sich bespiegeln.

Em particular, seria uma modernização indevida enxergar a idéia de uma quantidade variável no sentido próprio do termo, nos trabalhos de Diofantos, que utilizou substituições para o cálculo de raízes racionais de equações indeterminadas e cujo método torna possível, em muitos casos, calcular um número infinito de valores da incógnita do problema indeterminado. No máximo, é possível se falar, como D. T. Whiteside ([17], p.197) o fez, sobre a noção ou, ainda, sobre o uso de fato, de uma *variável de substituição*, mas não sobre a *variável inteiramente livre* característica da álgebra de Viète.

Idéias de mudança e de quantidade variável não eram estranhas ao pensamento Grego. Problemas de movimento, continuidade, infinito, tem sido considerados desde os tempos de Eráclito e Zeno de Elea, e a maior parte da *física* Aristotélica ou filosofia natural (φύσις significa natureza) foi devotada ao estudo dessas noções. Utilizando o termo *movimento* no sentido amplo de *mudança*, Aristóteles[3] distinguiu três formas principais de processos: alteração ou mudança de qualidade; mudança de magnitude ou de quantidade, como, por exemplo, crescimento ou decrescimento; e movimento local (*motus localis*), este sendo a forma mais baixa de movimento, que necessariamente acompanha as duas outras formas mais altas de mudança da matéria. O movimento local foi subdivido em movimento uniforme, no qual distâncias iguais (segmentos ou, digamos, arcos de circunferência) são percorridas em tempos iguais, e movimento diforme; no entanto, nem a velocidade (média), tal como o quociente *s/t,* nem muito menos a velocidade instantânea foi introduzida na antiguidade. Portanto, nem a mudança quantitativa nem o movimento local, que posteriormente vieram a ser representados em uma noção mais abstrata de quantidade variável, tornaram-se um objeto de estudo matemático para os Gregos. Esse fato poderia ser parcialmente explicado pela influencia de controvérsias trazidas pelos paradoxos de Zeno.

A conexão desse fato com a direção geral do desenvolvimento da mecânica e astronomia Gregas é impressionante. Nenhuma dessas ciências ultrapassou os limites do movimento uniforme, pois os movimentos irregulares de corpos celestes foram reduzidos, nos sistemas antigos do mundo, a combinações de movimentos circulares uniformes. O movimento irregular não foi estudado como tal. Sempre que possível, idéias cinemáticas foram banidas do reino da matemática pura. Proposições isoladas encontradas em Euclides, nas quais movimento e superposição são utilizados, bem como casos isolados de definições cinemáticas de curvas (da quadratrix ou da espiral eqüiângular, digamos) não mudam o panorama geral.

Eu observei acima que mesmo os chamados Pitagóricos tinham vislumbrado leis quantitativas da natureza. Excetuando modelos cinemáticos do sistema de mundo, este aspecto quantitativo das leis da natureza foi pouco desenvolvido na ciência Grega.

Sejam quais forem as circunstâncias e causas sociais ou ideológicas que produziram as características da ciência antiga acima descritas, o pensamento matemático da antiguidade não criou uma noção geral nem de uma quantidade variável nem de uma função. No campo das aplicações, principalmente em astronomia, na qual métodos quantitativos de pesquisa alcançaram o maior desenvolvimento, o objetivo principal foi a representação tabular de funções concebidas como relações entre conjuntos discretos de quantidades constantes dadas, isoladas por motivos práticos de contínuos de valores numéricos de quantidades relacionadas funcionalmente umas com as outras.

Neste contexto, surge naturalmente uma similaridade com a concepção estática da teoria de conjuntos de Cantor, na qual a idéia intuitiva de quantidade variável é reduzida a uma idéia de conjunto de quantidades constantes dadas previamente. Em todo caso, os pensamentos dos matemáticos Gregos, tomados em geral, estavam distantes da concepção cinemática de uma quantidade fluente, característica do cálculo infinitesimal dos séculos 17, 18 e 19.

4. Representação Cinemática e Geométrica de Relações Funcionais. Teorias de Cálculos e de Latitudes de Formas.

Tendo ocorrido algum tempo depois do declínio da sociedade antiga, o novo reflorescimento da ciência em países de cultura Árabe não provocou, tanto quanto se sabe, desenvolvimentos essencialmente novos em funcionalidade. Ainda assim, o número de funções utilizadas aumentou e melhoraram os métodos para estudá-las. Assim, todas as principais funções trigonométricas foram introduzidas, métodos para tabelá-las foram aperfeiçoados (em particular, interpolação quadrática passou a ser utilizada junto com interpolação linear), e o estudo de raízes positivas de polinômios cúbicos por meio de seções cônicas avançou de modo essencial. Obteve-se progresso em ótica e astronomia. Uma exceção, parece, e uma exceção extremamente notável do meu ponto de vista, foi a análise do movimento acelerado no *Mas'udic Cânon* (ca.1030) de Al-Biruni, parcialmente precedida no século IX por Thabit Ibn Qurra ([3], pp. 212-214; [17 a], p. 37-38).

No entanto, as idéias e análises de Al-Biruni não exerceram muita influência em seus sucessores. A noção de função ocorreu pela primeira vez, em uma forma mais geral, três séculos mais tarde, nas escolas de filosofia natural em Oxford e Paris. Seguindo pensadores tais como Rober Grosseteste e Roger Bacon (Bacon,1214-1294), essas duas escolas, que floresceram no século 14, declararam a matemática como sendo o principal instrumento para o estudo de fenômenos naturais. Partindo da doutrina Aristotélica de intensão e remissão de qualidades e formas *(intensio et remissio qualitatum et formarum)* eles passaram para o estudo matemático de movimento local e quantitativo não uniforme.

Qualidades ou formas são fenômenos tais como calor, luz, cor, densidade, distância, velocidade, etc., os quais podem possuir vários graus (*gradus*) de intensidade (*intensio*) e que, geralmente falando, mudam constantemente dentro de alguns limites dados. Intensidades de formas são consideradas em relação à suas extensões (*extensio*) tais como, por exemplo, quantidade de matéria, tempo, etc. Durante tais considerações toda uma série de conceitos da maior importância foi introduzida, como, por exemplo, velocidade instantânea ou pontual (*velocitas instantânea, punctualis*), aceleração (*intensio motus localis,* também *velocitatio*), e quantidade variável, concebida como sendo um grau ou um fluxo de qualidade (*gradus qualitatis, fluxus qualitatis*). Nisso tudo, um papel dominante foi exercido por uma síntese do pensamento matemático e cinemático.

Toute cinématique, observa N. Bourbaki ([15], p. 292)*, repose sur une idée intuitive, et en quelque sorte expérimentale, de quantités variables avec le temps, cèst-à-dire de fonctions du temps.*

Toda a cinemática, observa N. Bourbaki*, repousa sobre uma ideia intuitiva, e em certa medida experimental, de quantidades variáveis com o tempo, ou seja, de funções do tempo.*

Simultaneamente, uma idéia de que leis quantitativas da natureza eram leis do tipo funcional gradualmente amadureceu na filosofia natural.

A doutrina da intensidade de formas, ou ainda, a teoria de "cálculos" (*calculationes*) e sua parte mais importante, a cinemática, foi desenvolvida na Inglaterra por Willian Heytesbury, Richard Swineshead, e outros, principalmente na direção cinemática-aritmética, enquanto que na França, onde seu principal representante foi Nicole Oresme, também se desenvolveu na direção geométrica. De interesse especial é a teoria de configurações de qualidades (*de configurationibus qualitatum*), ou, em outras palavras, de uniformidade e diformidade de intensidades, ou em outras palavras ainda, de latitudes de formas (*de latitudenibus formarum)*, desenvolvida por Oresme na metade do século XIV.

Toda coisa mensurável, escreveu Oresme ([18], pp.164-165), *exceto números* [que ele, como os Gregos antigos, compreendiam como um conjunto de unidades] *é imaginada ao modo de uma quantidade contínua (ominis res mensurabilis exceptis numeris ymaginatur ad modum quantitatis continue).*

Portanto, pontos, linhas e superfícies, nas quais, de acordo com Aristóteles, a medida ou razão (*mensura seu proportio*) é inicialmente encontrada, são necessários para medir essas *coisas*; a medida ou razão em qualquer outra coisa, é compreendida por meio de sua relação mental com pontos, linhas e superfícies.

Oresme representa graus de intensidade por segmentos de comprimentos correspondentes, "latitudes" (*latitudo*) construídas perpendicularmente sobre a linha de "longitudes" (*longitudo)*, os segmentos da qual representando extensões; a razão de duas intensidades de alguma qualidade é a mesma que a razão das latitudes correspondentes, de modo que, como diz o próprio Oresme, latitudes e longitudes de alguma qualidade poderiam ser consideradas ao invés de suas intensidade e extensão. Os extremos superiores das latitudes de alguma qualidade geram a “linha de intensidade” (*línea intensiones*) ou, em outras palavras, a linha de sumidade (*línea summitatis)*, a qual, bem como a figura limitada por essa linha, pelo segmento da linha de longitudes em consideração, e pelas duas latitudes extremas, representa a qualidade em consideração e seus “graus”. O ângulo entre as latitudes e a linha de longitude poderia ser escolhido arbitrariamente, embora latitudes sejam mais convenientemente construídas perpendicularmente à linha de longitudes.

Uma das observações de Oresme deveria ser especialmente notada, a saber, que intensidades poderiam ser denominadas longitude, de modo que extensões deveriam ser denominadas latitudes. Nesse contexto, qualidades “lineares” (*linearis*) são consideradas, as intensidades das quais são distribuídas entre pontos de uma linha, mas existem também qualidades “superficiais” (*superficialis*) e “corporais” (*corporalis*) distribuídas entre pontos de um contínuo bidimensional ou tridimensional. Qualidades superficiais são representadas por sólidos com base plana; quanto as qualidades corpóreas, o problema de suas representações geométricas naturalmente trouxeram a Oresme dificuldades extraordinárias tanto que suas observações sobre elas são muito pouco claras ([18]; ver especialmente Pt . 1,capítulos i-iv e x).

Assim, estas teorias desenvolvidas no século XIV parecem ser fundadas em um uso consciente de idéias gerais sobre quantidades variáveis dependentes e independentes; embora estejam faltando definições diretas destas quantidades, cada uma delas é designada por um termo especial. A latitude de uma “qualidade” é interpretada em uma maneira mais geral como sendo uma quantidade variável dependente de sua longitude e, analogamente, a “linha de sumidade” é compreendida como sendo uma representação gráfica de alguma relação funcional contínua ([6], Vol. II, p. 88; [19], p.341). Assim, nestas teorias uma função é definida ou por uma descrição verbal de sua propriedade específica ou diretamente por um gráfico.

Na linguagem matemática dos tempos modernos, latitude e longitude, e também as correspondentes semi-cordas e segmentos de diâmetros da antiga teoria das secções cônicas (ver §2), bem poderiam ser denominadas ordenada e abscissa, respectivamente, com apenas uma ressalva, embora substancial: coordenadas no século XIV eram sempre relacionadas a pontos de alguma curva ao invés de pontos arbitrários no plano. No entanto, a mesma ressalva se aplica até mesmo a Descartes. Parece realmente que coordenadas de pontos arbitrários, não tendo qualquer conexão com alguma curva, apareceram primeiramente no comentário de Fr. Van Schooten sobre a edição latina da *geometria* de Descartes (publicada em 1649), no contexto da dedução da primeira formula conhecida para transformação de coordenadas ([20], p. 191 e ff.).

A teoria de latitude de formas se distingue por sua interpretação preliminar absolutamente abstrata dos problemas resolvidos, com nenhum significado sendo atribuído à forma ou qualidade concreta. Mas Oresme introduz também uma espécie de classificação dos principais tipos de qualidades lineares, e ele próprio se restringe, essencialmente, ao estudo dessas qualidades. Esta classificação é a seguinte ([18], Pt. 1, cap. xi – vi):

(1) Qualidade uniforme (*qualitas uniformes*) com uma latitude constante e a linha de intensidade sendo paralela à linha de longitudes. A figura correspondente é um retângulo.

(2) Qualidade uniformemente diforme (*uniformiter diformis*), ([18], pp.192-193)

no qual se quaisquer três pontos [da linha considerada] *são tomados, a razão da distância entre o primeiro e o segundo com a distância entre o segundo e o terceiro é a mesma que a razão do excesso de intensidade do primeiro ponto em relação ao segundo ponto com o excesso de intensidade do segundo ponto com relação ao terceiro ponto; eu denomino o primeiro daqueles três pontos como ponto de maior intensidade. (Est cuius omnium trium punctorum proportio distantie inter primum et 2^m et 3^m est sicut proportio excessus primi supra 2^m ad excessum 2^j supra 3^m intensione, ita quod punctum intensiorem illorum trium voco primum.)*

Correspondendo a essa descrição verbal temos a nossa equação de uma linha reta passando por dois pontos dados (x_1, y_1) e (x_2, y_2):

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

A linha de intensidade é aqui representada pela hipotenusa de um triângulo retângulo ou, alternativamente, pelo lado superior inclinado de um quadrângulo tendo dois ângulos retos em sua base. No primeiro caso a linha de intensidade encontra o segmento da linha de longitudes dado em um de seus extremos (na terminologia de Oresme, a linha termina sem grau, *terminatur ad non gradum,* isto é, no ponto zero de latitude). No segundo caso a linha de intensidade não encontra o segmento dado (nos dois extremos ela termina em algum grau, *terminatur utrobique ad gradum*).

(3) Qualidade diformemente diforme (*difformiter difformis*), em todos os outros casos. Esta, a mais extensa classe de qualidades poderia ser "descrita negativamente" (*poteste describi negative*) como sendo a classe das qualidades que não são nem uniformes nem uniformemente uniformes ([18], pp. 194-195).

Em primeiro lugar, Oresme distingue aqui, quatro tipos simples (*simplex*) de qualidades, sendo estas arcos de circulo côncavos ou convexos (relativamente a linha das longitudes), não maiores do que o semi-circulo, e também, arcos similares de uma elipse. (A palavra elipse não é utilizada; o que realmente se discute é uma curva proporcional em altitude a uma figura circular). Então, em segundo lugar, Oresme discute 63 diformidades diformes "compostas" (*compositae*) cujas linhas de intensidade são compostas de dois ou mais arcos das curvas previamente descritas ou de segmentos de uma linha reta. Estas linhas, combinadas, se parecem de alguma forma com as curvas "mistas" de Euler (*lineae mixtae),* ver §9; Oresme até usa o mesmo termo, *mixtio, mixture*.

Um componente importante da teoria de cálculos ou latitudes de formas foi o estudo de funções do tempo. Apontando corretamente a natureza rudimentar desses estudos, N. Bourbaki ([15], p. 217) observa que obviamente eles foram efetuados *sans considérations infinitézimales.* No entanto, isto não está exatamente correto. Considerações infinitesimais não estavam apenas presentes de modo latente nos conceitos de velocidade instantânea e aceleração, mas também foram utilizadas explicitamente na resolução de toda uma série de problemas tais como problemas de determinação de áreas de algumas figuras ilimitadas em sua extensão, ou da velocidade média de corpos com velocidades (instantâneas) que mudam em saltos um número infinito de vezes, de acordo com alguma lei definida, durante um dado intervalo de tempo dividido de tal modo a formar uma progressão geométrica. Nesses problemas o método principal de cálculo era exatamente a soma de progressões geométricas infinitas; mais tarde no âmbito da mesma teoria, os matemáticos encontraram séries mais complicadas cujas somas foram representadas por quantidades transcendentais (ainda desconhecidas) as quais eles tinham que estimar aproximadamente, tanto inferiormente quanto superiormente (A. Thomas, em 1509).

Um resultado muito importante para a mecânica, senão para a matemática, foi a determinação da velocidade media do movimento uniformemente diforme (uniformemente acelerado), apesar de não se ter conseguido conectar este problema com o problema da queda livre de corpos pesados. Este resultado, primeiramente obtido em Oxford, foi descrito nos trabalhos de W. Heytesbury (em 1335?), R. Swineshead, e J. Dumbleton escritos quase que simultaneamente; eles concluíram que o movimento uniformemente diforme é equivalente a um movimento uniforme com uma velocidade igual à velocidade do movimento acelerado no instante correspondente a metade do tempo[4]. Como os três pesquisadores trabalharam no mesmo lugar, no Merton College em Oxford, a literatura moderna se refere usualmente a conclusão dos três como o teorema de Merton ([19], Cap.5).

Oresme também provou este teorema. Ele representou a distancia percorrida ou a quantidade proporcional a velocidade (média) total (*velocitas totalis)* pela área de um triangulo ou de um trapézio ([18], Pt.3i, Cap.VII). Na verdade Oresme ([21], pp. 37-39 e 122-124) foi ainda mais adiante e determinou que, para uma velocidade inicial zero, a distancia cresce proporcionalmente com o quadrado do tempo e também, que as distancias percorridas durante intervalos de tempo iguais crescem em proporção com os números primos (1:3:5:7:...). É fato que Oresme chegou a seus resultados de modo semelhante ao que Galileu iria fazer em seu estudo da queda livre de corpos pesados *in vácuo*, publicado no *Dialogo* (em 1632) e novamente, no *Discorsi e DismostrazioneMatematiche* (em 1638). No entanto a prova do "Teorema de Merton" de Galileu se apóia explicitamente sobre o método dos indivisíveis enquanto que na prova de Oresme considerações infinitesimais são apenas implicadas.

No século XV e também na primeira metade do século XVI a teoria de latitudes de formas e cálculos gozou de grande fama, especialmente na Inglaterra, França, Itália e Espanha. Ela foi exposta em cursos universitários e foram dedicados a ela não somente trabalhos manuscritos, mas também alguns livros impressos. No entanto, ela não foi muito enriquecida naquele tempo e, em particular, aplicações de seus métodos em física e mecânica não foram além de problemas isolados e artificialmente colocados. Como A. C. Crombie ([6], Vol.ii, p.89) afirma:

No século XIV a idéia de relação funcional foi desenvolvida sem medições reais e somente em princípio.

Um levantamento dos resultados gerais da teoria em discussão poderia bem concluir que no desenvolvimento de alguns dos conceitos básicos da matemática e da mecânica, o de função incluído, os filósofos naturais do século XIV avançaram muito além de todos os seus predecessores juntos, no que diz respeito a generalização e abstração. Também, resultados particulares de importância fundamental foram obtidos; por exemplo, a existência de figuras de extensão ilimitada, mas de área finita e a divergência da série harmônica foram descobertas (Oresme). Por outro lado, possibilidades potenciais fornecidas pelos novos conceitos não foram amplamente exploradas nem em matemática ou em suas aplicações. As escolas de Oxford e Paris dispunham somente de meios escassos para pesquisa matemática concreta; nem os representantes dessas escolas nem seus sucessores imediatos introduziram qualquer novidade substancial em técnicas computacionais, álgebra (exceto na teoria das proporções e o trabalho de

Bradwardein e Oresme), trignometria, ou métodos de quadratura e cubatura. Uma desproporção óbvia se desenvolveu entre o alto nível de especulações teórico-abstratas e a fragilidade do aparato matemático.

Determinar a influência exercida pelas teorias de cálculos e latitudes de formas sobre a matemática dos tempos modernos é um problema um tanto complicado, pois os materiais a nossa disposição são insuficientes para uma solução apurada e abrangente. Em muitos casos a similaridade entre os conceitos comuns e resultados particulares das duas é tão grande que dificilmente pode ser atribuída à simples coincidência. Mais naturalmente, podemos perceber aqui uma continuidade de tradições algumas vezes transmitidas de forma complicada, por exemplo, por migração através de um certo número de países. Informações poderiam ter sido transmitidas não somente de forma escrita ou impressa, mas também por meio de leituras ou mesmo conversas privadas (das quais existem algumas evidencias indubitáveis).

Um exemplo é fornecido pelo estudo da queda livre de corpos pesados, por Galileu. Mesmo a semelhança geral da interpretação matemática de Galileu, da lei correspondente, com a interpretação de Oresme do teorema de Merton indica uma continuidade de idéias; esta indicação se torna uma certeza em vista do fato de que M. Clagett econtrou o teorema de Merton em nada menos que dezessete livros impressos no século XVI.

Também surpreendente é a semelhança de alguns princípios básicos da matemática universal de Descartes com a teoria de latitudes de formas de Oresme. Eu me refiro aqui à representação de todas as quantidades e relações entre elas por meio de formas geométricas e, em última instancia, por meio de segmentos de linhas retas, como o próprio Descartes afirmou em seu *Regulare ad Directionem ingenii,* escrito já em 1629. Nós não sabemos se Descartes realmente leu os trabalhos de Oresme mas nós sabemos o quão importante para Descartes foram suas conversas com seu amigo, I. Beeckman, cuja familiaridade com as idéias de Oresme e em particular com o teorema de Merton é testemunhada por seu diário no ano 1618 ([19], pp. 417-418). Assim, alguma influencia de Oresme sobre Descartes é muito provável; e é claro que ela não é contradita pela conexão direta entre o método de coordenadas de Descartes com os sintomas das secções cônicas como descritos por Apolônio de Perga[5].

Também, dificilmente se pode duvidar que as idéias cinemáticas dos ingleses Heytesbury e Swineshead tenham perdurado na Inglaterra e influenciado os trabalhos de Neper, Barrow e Newton. Em particular sabemos que Swineshead não foi esquecido mesmo no século XVII; Leibniz esteve entre aqueles que leram Swineshead e o admirava grandemente, ([1], p.88).

5. A Quantidade Variável de Descartes; Funções Algébricas

Tão certo quanto estou de que as idéias das escolas de filosofia natural de Oxford e Paris desempenharam um papel notável no desenvolvimento da matemática dos tempos modernos e, em particular, no desenvolvimento da noção geral de função, ainda não afirmo que este papel foi dominante, tanto mais que uma nova interpretação de funcionalidade veio a surgir no século XVII.

O impetuoso crescimento da matemática computacional por um lado e, por outro lado, a criação da álgebra literal simbólica, com a correspondente extensão do conceito de número, de modo a abarcar, por volta do final do século XVI, não somente todo o campo dos números reais mas também os números imaginários e complexos, tiveram uma importância decisiva para o desenvolvimento posterior da doutrina de funções. Houve, digamos assim, preliminares na própria matemática para a introdução do conceito de função mais como uma relação entre conjuntos de números do que entre quantidades, e para a representação analítica de funções por fórmulas. Neste contexto é suficiente mencionar o progresso em trigonometria e a descoberta dos logaritmos; o que deveria ser especialmente enfatizado, no entanto, é a introdução de inúmeros signos para operações matemáticas e relações (em primeiro lugar, os da adição, subtração, de potências e de igualdade) e, sobretudo, de signos para quantidades desconhecidas e parâmetros, os quais Viéte, em 1591, denotou por vogais A, E, I,... e consoantes B, C, D,...do alfabeto Latino, respectivamente. A importância desta notação, a qual, pela primeira vez, tornou possível colocar no papel em forma simbólica equações algébricas e expressões contendo quantidades desconhecidas e coeficientes arbitrários (a palavra coeficientes também se originou com Viéte), dificilmente poderia ser sobreestimada. No entanto, o criador da nova álgebra não utilizou sua descoberta notável para contribuir com o desenvolvimento do conceito de função; o “pensamento funcional” não era característico de sua mente.

O simbolismo de Viète possuía muitas deficiências e logo foi corrigido por vários estudiosos, sendo então estendido para além do domínio da álgebra e utilizado no cálculo infinitesimal. Descartes, Newton, Leibniz (que deu grande importância para a escolha apropriada de signos), Euler e outros estudiosos da maior estatura participaram neste processo de aperfeiçoamento do simbolismo matemático; este processo continua em nossos tempos em todos os ramos da matemática.

Por outro lado, nas ciências exatas de tempos passados, especialmente do início do século XVII, a nova concepção de leis quantitativas da natureza (ver § 4), ao estabelecer relações funcionais entre valores numéricos de quantidades físicas, vinha ganhando força em medida crescente e se tornando mais e mais diferenciada. Nesse processo a criação de um campo cada vez mais amplo de metrologia física, com a introdução de medidas quantitativas de calor, pressão, etc., desempenharam um papel importante; o mesmo vale para o rápido ganho em precisão de experimentos e observações trazidos pela invenção de vários instrumentos científicos. Entre as ciências, a mecânica, ultrapassando a astronomia, tomou a dianteira e, com ela, seu novo ramo, a dinâmica, que logo seria acompanhada pela mecânica celestial. Estudar a relação entre o movimento curvilíneo e as forças que afetam o movimento se tornou o principal problema da ciência. Este problema deu origem a uma série de problemas de análise infinitesimal, cujas soluções tinham que fornecer respostas numéricas.

Como uma conseqüência disso tudo, surgiu um novo método de introduzir funções, para se tornar por um longo período, o principal método em matemática e, especialmente, em suas aplicações. Como anteriormente, funções não raras vezes eram introduzidas verbalmente; por um gráfico; cinematicamente; e como anteriormente, tabuas de funções continuavam a ser utilizadas extensivamente. No entanto, em pesquisa teórica, o método analítico de introduzir funções por meio de fórmulas e equações ganhou o primeiro plano.

Somos capazes de dizer quase exatamente quando essa mudança de idéias ocorreu. Mesmo na virada do século 16 funções estavam sendo introduzidas somente por meio de velhos métodos. E desta forma foi introduzida a função logaritmo (a mais importante, junto com as funções trigonométricas). J. Burgi calculou suas tabuas de logarítmo (publicadas em 1620), partindo da relação, enfatizada anteriormente por M. Stieffel (em 1544), mas já conhecida por Arquimedes, entre a progressão geométrica das potencias de alguma quantidade (*e.g.*, q, q^2, q^3,...) e a progressão aritmética de suas potencias (1; 2; 3;..). Burgi intuitivamente considerou esta relação como sendo contínua, como é evidenciado pelo processo de interpolação que ele utilizou. No entanto, J. Neper, cujo trabalho foi publicado em 1614-1615, partiu de uma comparação entre dois movimentos retilíneos contínuos, o de um ponto (L) se movendo uniformemente e o de um ponto (N) com velocidade proporcional à sua distancia de um algum ponto fixado[6]. Neste caso, a distancia percorrida pelo ponto L é o logarítmo (Neperiano) da distancia percorrida por N.

Mas então, apenas de quinze a vinte anos após isso, Fermat e Descartes, de modo independente, aplicando a nova álgebra à geometria, apresentaram o método analítico de introduzir funções, inaugurado assim uma nova era na matemática.

Em sua *Introdução ao lócus plano e sólido (Ad locos planos et sólidos isagoge)* escrito um pouco antes de 1637 mas publicado somente em 1679, Fermat ([23],p.91) diz:

Tão logo duas quantidades aparecem em uma equação final, existe um lócus, e o ponto final de uma das duas quantidades descreve uma linha reta ou curva.

Aqui, tanto o argumento quanto a função são denominados apenas quantidades desconhecidas, este termo significando na verdade segmentos de linha de comprimento continuamente variável.

Utilizando a notação de Viète e também um sistema de coordenadas retangular, Fermat obtêm então equações de uma linha reta e, apoiando-se nas *Cônicas* de Apolonio, de algumas curvas de segunda ordem.

A idéia de introduzir uma função analiticamente foi desenvolvida com mais detalhes por Descartes em seu celebrado *Geometria* (*La Géometrie,* 1673). Seu propósito principal foi reduzir a solução de todos os problemas algébricos e equações a alguns procedimentos padrões para construir as suas raízes reais – i.e., os segmentos coordenados de pontos de intersecção de curvas planas apropriadas de ordem mais baixa possível.

Relacionando uma curva algébrica plana com uma equação entre as coordenadas de seus pontos, as coordenadas sendo novamente compreendidas como segmentos de linha, Descartes escreveu ([24], p.386):

Prenant successivement infinies diverses grandeurs pour la ligne y, on em trouvera aussi infinies pour la ligne x, et ainsi on aura une infinite de divers points tells que celui est marque C, par le moyen desquels on décrit la ligne courbe démandée.

Aqui, pela primeira vez e de modo bem claro, sustenta-se que uma equação em x e y é um meio de introduzir uma dependência entre quantidades variáveis de modo a permitir o cálculo dos valores de uma delas correspondentes a valores dados da outra.

Indo um pouco mais além, Descartes destaca a classe de curvas algébricas (que ele denomina curvas geométricas). Todos os pontos destas curvas, como Descartes observou, possuem alguma relação com todos os pontos de uma linha reta, sendo possível representar esta relação por alguma equação, a mesma para cada ponto de uma dada curva. Por uma equação Descartes, não sendo capaz de escrever em símbolos quaisquer equações de outros tipos, queria dizer realmente uma equação algébrica. Denominando como mecânicas as curvas não geométricas, Descartes introduziu, aqui e ali, sua classificação, ainda não perfeita, de curvas geométricas em tipos (genres), as do primeiro tipo sendo linhas descritas por equações do segundo grau; as do segundo, descritas por equações do terceiro e quarto graus; as do terceiro tipo por equações do quinto e sexto graus etc[7].

A introdução de funções na forma de equações produziu uma verdadeira revolução no desenvolvimento da matemática. O uso de expressões analíticas e as operações envolvendo as mesmas, efetuadas de acordo com regras estritamente especificadas, conferiram um caráter de um cálculo regular ao estudo de funções, abrindo assim horizontes inteiramente novos. Tendo se originado das aplicações da álgebra à geometria, esse método de representar funções foi imediatamente estendido a outros ramos da matemática e em primeiro lugar ao cálculo infinitesimal.

Em notas escritas à aproximadamente cem anos atrás, mas somente publicadas em 1925, F. Engels ([25], p. 275), o grande pensador, sustentou que

Der Wendepunkt in der Mathematik war Descartes' ***variable Grobe.*** *Damit die* ***Bewegung*** *und* ***damit die Dialektik*** *in der Mathematik, und* ***damit auch sofort mit Notwendigkeitdie Differential-und Integralrechnung,*** *die auch sifort anfangt...*

A opinião do famoso matemático H. Hankel, expressa aproximadamente no mesmo período ([26], pp. 44-45), é muito parecida com a asserção acima:

... während die Alten den Begriff der Bewegung, des räumlichen Ausdruckes der Veränderlichkeit ... in ihrem strengen Systeme niemals und auch in der Behandlung phoronomisch erzeugten Kurven nur vorübergehend verwenden, so datiert die neuere Mathematik von dem Augenblicke, als Descartes von der rein algebraischen Behandlung der Gleichungen dazu fortschritt, die Grössenveränderungen zu untersuchen, welche ein algebraischer Ausdruck erleidet, indem eine in ihm allgemein bezeichnete Grösse eine stetige Folge von Werten durchläuft.

Exatamente no tempo de Descartes e Fermat, o pensamento funcional se tornou predominante no trabalho matemático criativo. Relacionado com isso eu observo de passagem que a geometria analítica de Descartes e Fermat, pobre como ela foi de início, no que diz respeito a descobertas, se comparada com as realizações da teoria das seções cônicas dos antigos, é potencialmente superior à geometria analítica de Apolônio e difere dela tanto quanto a nova álgebra simbólica difere da antiga "álgebra geométrica" (cf. [17], p. 294).

No início a variedade de funções expressas analiticamente era restrita às funções algébricas, e Descartes até mesmo excluiu de sua geometria todas as curvas mecânicas por não serem tratáveis por seu método de análise. No entanto uma descoberta feita um pouco mais tarde na metade do século XVII por P. Mengoli, N. Mercator, J. Gregory e I. Newton independentemente, tornou possível representar analíticamente qualquer ralação funcional estudada naqueles tempos.

Eu me refiro aqui à descoberta de como desenvolver funções em séries de potências infinitas. Outras expressões infinitas de funções surgiram mais tarde – produtos infinitos, frações contínuas etc. Em uma forma embrionária a idéia de que uma expressão infinita era uma “função” não era nova, a progressão geométrica decrescente infinita já sendo há muito conhecida (ver § 4), mas somente na segunda metade do século XVII as séries de potencias se tornaram o meio mais frutífero e como foi suposto até bastante tempo depois, o meio universal para a expressão analítica e estudo de qualquer função. P. Boutroux ([27], p. 117) até mesmo considerou a teoria de desenvolvimento de funções em séries de potencias como sendo o mais original, notável, e frutífero componente da nova matemática como descoberta por Newton e Leibniz. De todo modo, exatamente por causa das séries de potencias o conceito de função ocupou o lugar central na análise matemática. Não sem razão um dos principais trabalhos de Newton foi denominado *O método dos fluxões e séries infinitas (Methodus Fluxionum et serierum infinitarum).*

6. Conceito de Função como Entendido por Newton (c.1670) e Leibnz (1673-1694)

Não havia grande distancia entre as primeiras descrições dos novos conceitos de função e a formulação de definições correspondentes que de inicio guardavam características mecânicas ou geométricas, tanto por força da tradição quanto porque os métodos do cálculos infinitesimal foram criados principalmente durante a solução de problemas em mecânica e de problemas geométricos relacionados.

A função logarítmica era uma área hiperbólica; a função elíptica um arco de uma secção cônica; integrais eram representadas por distancias, áreas, arcos, volumes; diferenciais, por segmentos coordenados infinitesimalmente pequenos; derivadas, por velocidades ou razões de lados de triângulos retângulos infinitesimalmente pequenos, etc.

Uma interpretação cinemática-geométrica particularmente clara dos conceitos básicos da análise matemática foram apresentados por Newton, que desenvolveu as idéias de seu professor, I. Barrow, como explicado em seminários apresentados em Cambridge em 1664-1665, mas somente mais tarde publicados [28]. Newton descreve concepções de tempo e movimento e de suas apresentações geométricas a partir de Galileu e Oresme ([15], p. 220; [29], p. 240).

Como Barrow, Newton escolhe tempo como um argumento universal e interpreta variáveis dependentes como quantidades que fluem continuamente, possuindo alguma velocidade de mudança.

Em duas cartas para J. Wallis, datadas de 27 de agosto e 17 de setembro de 1692 (velho estilo ?), Newton explicou de modo conciso sua concepção do cálculo infinitesimal cujo desenvolvimento ele tinha iniciado já em 1664-1666. Versões algo reduzidas destas cartas foram publicadas em l693, na edição latina ampliada do tratado algébrico de Wallis (edição inglesa 16l85). Neste texto pode-se ler que Newton ([30], p.391) reduziu seu método à solução de dois problemas:

> *Data aequatione fluentes quotcunque quantitates involvente, fluxiones invenire: et vice versa. Per fluentes quantitates intelligit indeterminatas, id est quae in generatione Curvarum per motum localem perpetuo augentur vel diminuuntur, et per earum fluxionem intelligit celeritatem incrementi vel decrementi.*[8]

Newton expôs estas mesmas idéias com mais detalhes em alguns outros trabalhos como, por exemplo, no acima mencionado *Method of fluxions and infinite series*, escrito por volta de 1670 mas publicado em uma tradução para o inglês de um manuscrito em latin somente em 1763 [32]. Como é evidente, mesmo os dois principais problemas do calculo infinitesimal foram expressos em termos mecânicos, quais sejam, dada a lei para a distancia, determinar a velocidade do movimento (diferenciação), e, dada a velocidade do movimento, determinar a distancia percorrida (integração de equações diferenciais e, em particular, de funções). No entanto, as concepções de Newton se inclinam em direção a uma compreensão mais abstrata de termos filosóficos e mecânicos. Assim, com respeito ao argumento universal, o tempo, Newton diz em seu *Method of fluxions* ([32a], pp. 72-73) (eu estou aqui reproduzindo sua versão original em Latin datada de 1670-1671)[9]:

We can have, however, no estimate of time except in so far as it is expounded and measured by an equable local motion, and furthermore quantities of the same kind alone, and also their speeds of increase and decrease, may be compared one with another. For these reasons, in what follows I shall have no regard to time, formally so considered, but from quantities propounded which are of the same kind shall suppose some one to increase with an equable flow: to this all the others may be referred as though it were time, and so by analogy the name of "time" may not improperly be conferred upon it.

Um pouco mais adiante ([32a], pp. 88-91) Newton denomina o fluente, o qual desempenha o papel de variável independente, uma quantidade correlacionada (*quantitas correlata)*; a quantidade dependente ele denomina relacionada (*relata*). Assim, somente as noções básicas são introduzidas cinematicamente, de modo que, na verdade, o método de fluxões é desenvolvido para os fluentes, expressados analiticamente ou em uma forma finita ou por somas de séries de potências infinitas, aquelas frações decimais da análise matemática.

No início, Leibniz também chegou às noções básicas do cálculo diferencial e integral desenvolvendo-as a partir de geometria de curvas. É suficiente recordar que já em sua memória básica sobre o cálculo diferencial, *Um novo método para máxima e mínima bem como tangentes,...e um notável tipo de cálculo para eles (novamethodos pro maximis et minimis, itemque tangentibus..., et singularis pro irllis calculi genus)*, em 1684, ele descreveu a diferencial (dy) de uma coordenada de alguma curva ([33], v,vp.220) como sendo um segmento cuja razão com dx, um incremento arbitrário da abcissa, é igual a razão de sua ordenada com a subtangente.

A palavra "função" aparece pela primeira vez em manuscritos de Leibniz de agosto de 1673 e em particular em seu manuscrito intitulado *O método inverso de tangentes, ou sobre funções (methodus tangentium inversa, seu de functionibus)*. Primeiramente, a determinação de subtangentes, subnormais e outros segmentos relacionados com pontos variáveis de uma curva são tratados aqui tanto para curvas "geométricas" e "não geométricas" para as quais ([34], p. 44)

A relação entre sua aplicada [ordenada] ED e abcissa AE é representada por alguma equação conhecida para nós (in qua Relatio aplicatae ED ad abcissam AE aequatione quadam nobis cognita explicatur).

Leibniz passa a considerar então ([34], p. 47) o problema inverso de determinar aplicadas (ordenadas) a partir de uma dada propriedade da tangente à curva ou de

Outros tipos de linhas as quais, em uma dada figura, realizam alguma função.

Deveria ser lembrado que o verbo latin *fungor, functus sum fungi* significa realizar, cumprir uma obrigação, etc. Como D. Nahnke observa ([34], p. 47):

LEIBNIZ *gebraucht allerdings in der vorliegenden Handschrift für diese gesetzliche Beziehung, in der die Ordinate einer Kurve zu ihrer Abszisse ... steht, noch nicht das Wort Funktion; aber wie der Anfang der Handschrift beweist, hat er den Funktionsbegriff schon im weitesten Sinne gebildet und benennt ihn mit dem Wort relatio. Auch an der vorliegenden Stelle, bei der allgemeinen Formulierung der dem umgekehrten Tangentenproblem ähnlichen Probleme, hat das Wort Funktion noch nicht ganz den heutigen mathematischen Sinn, sondern eher den, den wir in der Sprache des täglichen Lebens mit ihm verbinden; es bedeutet also etwa die "Verrichtung", die ein Glied eines Organismus oder ein Teil einer Maschine zu leisten hat, seine Aufgabe, Stellung oder Wirkungsweise. "In figura functionem facere" bedeutet also z.B.: die Kurve berühren, auf ihr senkrecht stehen, ihre Subtangente oder Subnormale bilden usw., wobei natürlich immer ein begrenztes Stück der so oder so "funktionierenden" Linie, z.B. das Tangentenstück zwischen Berührungspunkt und X-Achse, in Betracht zu ziehen ist.*

Mas no mesmo manuscrito, mais adiante, o termo função assume um novo significado como um termo geral para segmentos diferentes conectados com uma curva dada.

So spricht er [LEIBNIZ], said D. MAHNKE (p. 48), *an späteren Stellen der Handschrift von dem regressus a Tangentibus aut aliis functionibus ad ordinatas, und in diesem Sinne ist auch der Ausdruck de functionibus in der Überschrift zu verstehen.*

No mesmo relativamente amplo sentido da geometria diferencial, uma definição de uma função apareceu impressa pela primeira vez em uns poucos artigos de Leibniz publicados em 1692 e 1694. Nesses artigos ele denomina função (functiones, fonctions) quaisquer partes de linhas retas, isto é, segmentos obtidos pela construção de infinitas linhas retas correspondentes a um ponto fixado e a pontos de uma curva dada[10]. Ele explica que na verdade ele se refere a abcissas, ordenadas, cordas, segmentos de tangentes e de normais cortadas pelos eixos coordenados, segmentos de subtangentes e subnormais etc, e no mesmo sentido a palavra função foi utilizada por Jacob Bernoulli em seu trabalho no *Acta eruditorum* de outubro de 1694.

No entanto, tal definição de função, não corresponde a nenhum contexto analítico mais amplo. A correspondência com Johann Bernoulli durante 1694-1698 indica, na verdade, como a busca de um termo geral para representar quantidades arbitrarias dependentes de alguma variável logo resultou no uso do termo função no sentido de uma expressão analítica.

7. Uma Função como uma Expressão Analítica Arbitrária:

Johann Bernoulli (1694-1718) e Euler (1748)

Em sua carta de dois de setembro de 1694, Bernoulli ([33], iii, p.150), dizendo a Leibiniz sobre sua descoberta do desenvolvimento de $\int ndz$ em uma série infinita

$$nz-\frac{1}{1.2}z^2\frac{dn}{dz}+\frac{1}{1.2.3}z^3\frac{ddn}{dz^2}-...$$

(a qual, no entanto, Leibniz já conhecia) escreveu:

por n eu entendo uma quantidade de algum modo formada por [quantidades] *indeterminadas e constantes*.

No mesmo ano essa descoberta, expressa nas mesmas palavras, apareceu no artigo de Bernoulli ([35], i, p. 126) no *Acta eruditorum.* O termo função ainda não é utilizado. Ele também não está presente na carta de Bernoulli de 25 de agosto de 1696 ([33], iii, p. 324) onde ele propõe denotar por

$$\overset{1}{X},\ \overset{2}{X}$$

quantidades diversas dadas de algum modo por uma indeterminada [quantidade] *x e por constantes ...* [ou] *algebricamente ou transcendentalmente.*

Johann Bernoulli utiliza pela primeira vez a palavra função somente dois anos mais tarde, em um artigo anexado a sua carta de 5 de julho de 1698, dedicado a solução do problema isoperimétrico colocado por seu irmão Jakob: entre todas as curvas BFN de comprimento dado e base BN encontrar uma curva tal que quaisquer potencias de suas ordenadas FP geram ordenadas PZ de (uma outra) curva BZN com máxima, ou mínima, área.

Na verdade, Johann Bernoulli ([33], iii, pp. 506-507) até mesmo generaliza este problema colocando-o como

Encontrar [uma curva] *BFN, cujas ordenadas FP, elevadas a uma potencia dada ou, em gera,l algumas funções dessas ordenadas, etc.*

Em uma tradução francesa publicada em 1706 no *Mém. Acad. Sci. Paris* ([35], p. 1, p. 424), lê-se esta passagem do original como:

trouver la courbe BFN telle, que ses appliquées FP élevées à une puissance donnée, ou généralement telle, que les fonctions quelconques de ces appliquées PZ, exprimées par d'autres appliquées PZ etc.

Bernoulli não explica em que sentido ele utiliza o termo "algumas" (*quaecunque*) funções; de qualquer modo, dificilmente ele poderia dar qualquer outro significado que não expressões analíticas já conhecidas naquele tempo[11].

Em 29 de julho de 1698, Leibniz expressou sua satisfação por Johann Bernoulli utilizar o seu (Leibniz) termo "função" ([33], iii, p. 526) após o que ambos trocaram suas opiniões umas poucas vezes mais sobre a notação mais apropriada para uma função de uma ou mais variáveis. Ambos preferiram distinguir funções por meio de índices, não do modo que fazemos hoje mas algo como: x^1, x^2, $(x;y)^1$, $(x;y)^2$ e assim por diante ([33], iii, p. 537).

Na mesma ocasião Leibniz propôs escrever *dz* para a razão *dz:dx*.

Simultaneamente ou um pouco mais cedo Leibniz introduziu para uso geral as palavras “constantes” e “variável”[12], “coordenadas” (em 1692 ([33], v, p. 268)), e “parâmetro” no sentido de um segmento ou quantidade constantes arbitrários [em um manuscrito de 1679 aproximadamente ([33], iii, p. 103) e, em 1692, em um trabalho impresso (*ibidem,* p. 268)], etc. Por fim, ele considerou inconveniente a terminologia que Descartes tinha introduzido e portanto ele modificou. Descartes tinha classificado curvas como “geométricas” e “mecânicas”, excluindo erroneamente as ultimas da geometria como sendo inabordáveis para estudo por meio de seu método (algébrico); ver também parágrafo 5.

Leibniz ao contrário dividiu funções e curvas em duas classes: algébricas, a saber, aquelas que poderiam ser representadas por uma equação de uma certa ordem (*certi gradus*) e transcendentais. Funções e curvas transcendentais poderiam também ser submetidas a um estudo exato e cálculos, embora de uma natureza diferente, através de suas representações por equações de ordem infinita ou indefinida (*gradus indefinite*) as quais ([33], v, pp. 123-124 e 228, 1684 e 1686 respectivamente)

Transcendem qualquer equação algébrica.[13]

A definição de Leibniz de funções transcendentais como sendo funções não algébricas tem sido repetida em livros didáticos até os dias de hoje. A propriedade intrínseca de funções analíticas complexas transcendentais (existência de pelo menos um ponto singular além de pólos e pontos de ramificação de ordem finita) seria estabelecida somente na metade do século XIX. No entanto, teria que se passar vinte anos até que a nova definição de função aparecesse impressa. Durante todo esse tempo o termo função permaneceu pouco conhecido. Ele está ausente no livro *Mathematisches Lexicon* de Chr. Wolff, publicado em 1716, no qual, no entanto, dois artigos relacionados foram incluídos, *Quantitas constans,* e *Quantitates variabiles*. O segundo artigo menciona que a distinção entre os dois tipos de quantidades é essencial na nova análise de Leibniz ([38], colunas 1144 e 1149-1150).

Expressão de uma quantidade variável por meio de outra é também tratada na mesma fonte, embora em outro artigo, *Abcissa, die Abcissie*, como segue ([38], colunas 3-4):

Durch die Relation der Abszisse AP zu der halben Ordinate [we should have preferred: to the (whole) ordinate] *PM pfleget man die krummen Linien von einander zu unterscheiden.*

Uns poucos exemplos de funções estão presentes em artigos como o A*equtio exponentialis, eine Exponential-Gleichung; Aequatio* .... *undeterminirte Gleichung,* e *Aequatio* ....*Transcendentische Gleichung.*

A idéia de relação funcional nem mesmo é mencionada em artigos como *Calculus differentialis, die Differential-Rechnung* e *Calculus integralis, seu summatorius, die Integral-Rechnung*. A idéia de que a análise matemática é uma ciência geral de variáveis e suas funções parece ser devida a Euler, que disse isso no prefácio de seu famoso *Introductio in analysin infinitorum,* completado por volta de 1744 e publicado em 1748 [39].

A primeira definição explicita de uma função como uma expressão analítica apareceu impressa no artigo *Remarques sur ce qu'on a donné jusqu'ici de solutions des problèmes sur les isopérimètres*, de J. Bernoulli, publicado na *Mém. Acad. Roy. Sci. Paris* de 1718. É neste artigo que encontramos ([35], ii, p. 241)

Dèfinition. On appelle fonction d'une grandeur variable une quantitè compossé de quelque manière que se soit de cette grandeur variable et de constantes.

No mesmo artigo Bernoulli também propôs a letra grega φ como uma notação para uma *característica* de uma função (o termo é devido a Leibniz), ainda escrevendo o argumento sem parênteses: φx. Parênteses, bem como o símbolo *f* para função, são devidos a Euler, que os utilizou em seu artigo E.45, comunicado em 1734 e publicado em 1740.

Em sua definição, Bernoulli não deu qualquer indicação de como constituir funções a partir da variável independente. Mas é óbvio que ele se referia a expressões analíticas de funções, em acordo com a tendência básica no desenvolvimento da análise infinitesimal, a qual, retendo e até mesmo fortalecendo suas conexões com a geometria, a mecânica e a física, se tornou, durante o século 18, uma disciplina científica mais e mais auto-contida em seus princípios. Todos os conceitos iniciais do cálculo gradualmente perdem sua estrutura geométrica e mecânica, são formulados de maneira aritmética ou algébrica, e começam a ser apreendidos como conceitos que precedem logicamente conceitos similares de outra ciências exatas.

O processo de tornar a análise matemática uma disciplina cientifica autônoma, que no século 19 se transformou em um processo de aritmetização, levou um pouco mais de tempo. No início ele subjugou a mecânica, tornando-a uma parte da análise matemática: de fato, para Newton uma fluxão de uma quantidade era a velocidade de sua mudança; para Lagrange velocidade era uma derivada da função que representava a distancia em termos do tempo. Além disso, em seu *Mécanique analytique* (em 1788), Lagrange declarou a mecânica como sendo uma parte da analise matemática cuja exposição não demandava nem figuras nem considerações geométricas ou mecânicas em geral. Havia uma tendência similar com respeito à relação da análise matemática com a geometria, cujos métodos deixaram de ser aplicados não somente para definir, mas até mesmo para ilustrar conceitos básicos do cálculo.

Isto é evidenciado até mesmo por uma comparação superficial do *Analyse dês infinimentes petites, etc* (publicado em 1696), de L`hospital com os cursos de Euler e Lagrange nos quais ilustrações geométricas não são utilizadas de modo algum. É claro que a intuição geométrica continuou a desempenhar seu papel construtivo; é claro que sempre existiram acadêmicos que substanciaram "teoremas de existência" analíticos fazendo referencia à obviedade geométrica; e é claro, o valor educacional das analogias geométricas e mecânicas voltaram a ser compreendidas novamente.

A tendência geral não muda, no entanto, de modo que no tempo devido (embora somente na segunda metade do século XIX) se tornou necessário definir analiticamente noções geométricas como a área de uma superfície, o comprimento de uma curva, etc, que antes disso pareciam ser intuitivamente óbvios.

Um desenvolvimento adicional, essencial, do conceito de função foi efetuado por Leonhard Euler, o discípulo de Joh. Bernoulli. No Capítulo I do Volume I de seu *Introductio in analysim infinitorum*, em 1748 (E. 101), Euler submeteu o conceito de função a um estudo mais detalhado, como o usual, na verdade, em análise matemática. Ele começou definindo noções iniciais. De acordo com Euler, uma constante é uma quantidade definida sempre assumindo um e apenas um valor enquanto que uma variável é introduzida como o conjunto (algumas vezes como um ou outro subconjunto) dos números complexos.

Uma quantidade variável, escreveu Euler ([39], p. 17), *é uma quantidade indeterminada, ou universal, que comporta em si absolutamente todos os valores determinados*.

Assim, ele continua (p.18), *uma quantidade variável comporta em si absolutamente todos os números, positivos e negativos, inteiros e frações, racionais e irracionais, e transcendentes. Até mesmo o zero e números imaginários não são excluídos do significado de uma quantidade variável.*

Em sua definição de função, Euler mais uma vez seguiu seu professor Joh. Bernoulli, mudando no entanto a palavra “quantidade” para “expressão analítica”. (ibidem):

Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de qualquer maneira por esta quantidade variável e por números ouquantidades constantes.

Eu terei que deixar de lado a introdução, feita por Euler, às funções de uma variável complexa, tão importantes quanto as de uma variável real (um passo de grande importância), e também alguma inconveniência formal ocasionada pelo fato de que Euler não considerou constantes também como sendo funções. Para mim, o importante é que Euler foi o primeiro a tentar responder à questão: qual é a extensão do termo *expressão analítica*? Ou, quais métodos de composição de uma expressão analítica são levados em consideração de fato?[14]

Enumerando operações por meio das quais expressões analíticas são compostas, Euler começa com operações algébricas (se referindo também à solução de uma equação algébrica) e então nomeia várias funções transcendentais, chegando em particular às funções logaritmo e exponencial e a um número infinito de outras funções fornecidas pelo calculo integral, incluindo a integração de equações diferenciais.

Então, Euler destaca funções explicitas e implícitas, as últimas sendo aquelas que se originam de soluções de equações, e formula teoremas sobre a existência de uma função inversa a uma função dada, e de uma função representada parametricamente (dados y e x como funções de z, y é uma função de x e, inversamente, x é uma função de y). Praticamente falando ([39], p.25), por causa da imperfeição da álgebra tais funções não podem sempre ser expressas explicitamente;

neste ínterim, no entanto, esta reciprocidade de funções é entendida como se todas as equações pudessem ser resolvidas.[15]

Mostrarei no § 8 como Euler classifica estes últimos métodos de introduzir funções sob a sua primeira definição geral de uma função. Por ora, eu observo que a classificação de funções de Euler (descrita acima, sem detalhes) foi colocada em uso em sua totalidade.

8. Funções Analíticas

Obviamente, parecia impossível enumerar vários métodos de expressar funções analiticamente de modo, que no Cap. 4 de seu *Introductio*, Euler reduziu todos eles a um único, declarando que a forma mais conveniente e universal de expressão analítica para uma função era por meio de uma série de potencias infinita do tipo

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + ...$$

Sendo, é claro, incapaz de provar que qualquer função poderia ser desenvolvida em uma série como essa, ele lançou o seguinte desafio ([39], p. 74):

...*se alguém duvidar,* [sua] *dúvida será eliminada pelo desenvolvimento de uma ou outra função.*

No entanto, acrescentou Euler, *para tornar esa explicação mais abrangente, não somente potencias inteiras positivas de z deveriam ser admitidas mas quaisquer potencias. Assim, não haverá qualquer dúvida que qualquer função de z poderia ser transformada em uma expressão infinita do tipo*

$$Az^{\alpha} + Bz^{\beta} + Cz^{\gamma} + Dz^{\delta} + ...$$

os expoentes α, β, γ, δ denotando quaisquer números.

De fato, a grande maioria das funções utilizadas em análise matemática no tempo de Euler eram analíticas (no nosso sentido do termo) em todo o seu domínio de definição, exceto, talvez, em valores isolados do argumento e, em casos especiais, poderiam ster sido desenvolvidas em séries de termos contendo potencias fracionárias ou negativas do argumento[16]. Não é de se surpreender que series de potencias e, em menor grau, produtos infinitos e desenvolvimentos em somas de frações parciais ou frações continuas são utilizadas no Volume I do *Introductio* como o principal instrumento para o estudo de varias classe de funções elementares.

Como observado acima, teoremas sobre a existência de funções implícitas ou paramétricas, do ponto de vista de Euler, poderiam ter sido considerados dentro dos limites de uma definição geral de uma função. O fato é que, de acordo com Euler, uma equação algébrica arbitraria, de qualquer potencia, é solúvel por radicais.Em um caso mais geral, por que qualquer função, *y*, poderia ser representada por alguma série de termos contendo potencias do argumento, *z*, este argumento poderia ser expresso em termos de *y* invertendo-se a série; procedimentos para inversão de series tinham sido introduzidos por Newton.

A definição de Joh. Bernoulli e Euler de uma função como sendo uma expressão analítica, com forma mais geral dada por uma série de potencias, foi aceita por muitos outros matemáticos incluindo Lagrange que, se referindo a Leibniz e Bernoulli em seu *Théorie dês fonctions analytiques* (em 1797), denominou função qualquer *expression de calcul.*[17]

Eu observo de passagem que Lagrange, como Euler e outros matemáticos do século 18, considerou indubitável que qualquer função da análise matemática poderia ser representada por uma série de termos proporcionais a potencias reais da variável independente; além disso, Lagrange ([40], Pt.I, Cap. I) até mesmo tentou provar que, geralmente, as potencias eram inteiros positivos, enquanto que potencias fracionárias ou negativas poderiam ocorrer somente em casos correspondentes a valores isolados, especiais, do argumento.

Assim, uma função, definida no inicio do Volume I do *Introductio* de Euler como qualquer expressão analítica, é mais tarde declarada como sendo (em nossa terminologia) uma função analítica em todo ponto, exceto, talvez, em pontos isolados especiais, na vizinhança dos quais a função poderia ser representada por uma serie de potencias generalizada (ver também §10).

9. Funções Continuas e Descontinuas (mistas) no Sentido de Euler:

A Controvérsia Sobre a Corda Vibrante

Somente funções analíticas são na verdade estudadas no Volume 1 do *Introducto*. No entanto, Euler sabia que também existiam funções de um tipo diferente. Este fato é observado no inicio do Volume 2 do *Introducto*, que é devotado principalmente a teoria das curvas planas. Da mesma forma que alguma linha curvada corresponde a qualquer função de *x*, também linhas curvadas são representadas por funções de *x*, diz Euler, continuando ([41], p. 11) assim:

Desta idéia sobre linha curvadas segue imediatamente sua divisão em linhas continuas e descontinuas ou mistas.

Esta terminologia, que para Euler tinha um sentido especial, não usual para nós, foi utilizada até os dias em que Bolzano (em 1817) e Cauchy (em 1821) deram às expressões *continuo* e *descontinuo* o significado que agora em geral se adota; mas a terminologia de Euler ainda foi utilizada, em algumas ocasiões, até depois disso.

No sentido de Euler, continuidade significava invariabilidade, imutabilidade da lei – da equação que determinava a função em todo o domínio de valores da variável independente, enquanto que descontinuidade de a função significava uma mudança da lei analítica, uma existência de leis diferentes em dois ou mais intervalos de seu domínio. Curvas *descontinuas*, explicava Euler, são compostas de partes *contínuas*, sendo por isso mesmo denominadas *mistas* ou *irregulares* (*irregulares*); também, algumas vezes ele denominava tais curvas *mecânicas* (*mechanices*). Em geometria, de acordo com Euler, principalmente curvas *continuas* (i.e., analíticas) são estudadas.

As funções e curvas *descontinuas* ou *mistas* do Volume 2 do *Introductio* correspondem às nossas funções analíticas por partes; assim, a inclusão das mesmas na análise matemática não ofereceu nenhuma extensão essencial ao conceito de função.[18]

No entanto, no mesmo ano em que o Introductio foi publicado (recordemos que o manuscrito de seu trabalho foi completado em 1744), Euler compreendeu que a classe de funções (curvas) *descontinuas*, longe de se esgotar nas funções (curvas) *mistas*, deveria ser estendida de modo essencial. Como observado por A. I. Markushevich ([43], pp.108-109), Euler tinha visto a necessidade de tal extensão já em 1744, durante seu trabalho sobre o *Methodus inveniendi líneas maximi minimive proprietates gaudentes* (E.65) quando ele comparou curvas extremas - soluções de problemas variacionais - com curvas diferindo infinitesimalmente pouco daquelas em uma vizinhança de um, ou uns poucos, pontos isolados.

De qualquer modo, o principal impulso para o desenvolvimento posterior do conceito de função veio do trabalho de Euler sobre física matemática, começando com o celebre problema referente à vibrações infinitamente pequenas de uma corda finita homogênea fixada em ambas as extremidades[19]. A primeira interpretação matemática deste problema, a respeito do qual especulações anteriores remontam a Galileu, foi oferecida por Taylor (em 1715), embora o primeiro passo decisivo em direção a teoria foi dado por D'Alembert em uma memória comunicada à *Acad. Roy. Sci. Et Belles-Lettr. Berlin* no final de 1746 e publicada em sua *Histoire* em 1749 [45].

D'Alembert expressou as condições deste problema por equações equivalentes a uma equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

(a qual apareceu em uma forma explicita na memória E.213 de Euler, publicada em 1755) e provou que a solução geral do problema poderia ser representada por uma soma de duas funções arbitrárias

$$y = \varphi(x + at) + \psi(x - at),$$

a qual, devido às condições de fronteira, se reduz a

$$y = \varphi(at + x) - \varphi(at - x).$$

Em cada caso particular, as funções que aparecem na solução geral são determinadas pela forma inicial da corda (e da velocidade inicial de seus pontos). É claro que estas condições iniciais poderiam ser muitas mas D'Alembert restringiu rigidamente a classe de formas iniciais admitidas para a corda, sustentando que sem estas restrições, não seria possível obter qualquer solução do problema pela analise matemática. Entre as restrições impostas por D'Alembert, é particularmente interessante a hipótese de que a forma inicial da corda deve ser representada ao longo de toda a sua extensão por uma e apenas uma equação, i.e., a corda deve ser *contínua* no sentido de Euler.

Euler logo respondeu à memória de D'Alembert, da qual ele tinha tomado conhecimento logo após sua comunicação, apresentando, em maio de 1748, sua própria memória, *De vibratione chordarum exercitatio*, E119, publicada em *Nova Acta Eruditorum* em 1749 (versão francesa: *Sur la vibration dês cordes*, E. 140, publicada em 1750 ([46], pp. 50-77) pela mesma *Acad. Roy. Berlin*).

Valorizando muito o método de D'Alembert como um todo, Euler discordou de D'Alembert no que diz respeito à natureza das funções admitidas na condição inicial (e consequentemente, na solução do problema). Guiado pela intuição física e por uma profunda intuição matemática, até mesmo ao enunciar o problema ele escreveu ([46], p. 64):

...la premiere vibration dépend de notre bom plaisir, puisqu'on peut, avant de lâcher la corde, lui donner une figure quelconque; ce qui fait que le mouvement

vibratoire de la même corde peut varier à l'infini, suivant qu'on donne à la corde telle ou telle figure au commencement du mouvement.

Repetindo esta afirmação no trabalho propriamente dito, o qual, em sua primeira parte, se assemelha ao de D'Alembert, Euler (p.72) considera uma

courbe anguiforme, soit régulière, contenue dans une certaine equation, soit irregulière ou mécanique,

i.e., com nenhuma restrição a ser imposta sobre a forma da corda. Em um caso particular ele produz uma solução correspondente à forma inicial *contínua* representada por uma série trigonométrica

$$y = \alpha \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) + \beta \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right) + \gamma \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{\ell}\right) + \ldots\ldots, \qquad (*)$$

a corda sendo fixada nas extremidades x = 0 e x = *l*.

D'Alembert não concordou com Euler. E assim começa a longa controvérsia a respeito da natureza das funções permitidas nas condições iniciais e nas integrais de equações diferenciais parciais, as quais continuaram a aparecer em número cada vez maior na teoria da elasticidade, hidrodinâmica, aerodinâmica e geometria diferencial.

Logo a controvérsia ganhou uma nova dimensão, com a entrada de um novo participante, D. Bernoulli, cuja contribuição foi publicada em 1755. Desenvolvendo o princípio da superposição de modos, introduzido por ele em seus estudos anteriores, Bernoulli manteve que tanto a forma inicial arbitraria da corda quanto sua vibração subseqüente poderiam ser representados por uma série infinita de termos incluindo senos de ângulos múltiplos. De acordo com Bernoulli, uma escolha apropriada de coeficientes torna tais séries (*) tão gerais quanto as séries de potencias; no entanto, o método para calcular os "coeficientes de Fourier" permaneceu desconhecido para ele.

Euler, que um pouco antes tinha oferecido, em um caso especial, uma solução na forma de uma série (*), excluiu qualquer possibilidade de representar desta forma funções *mistas* arbitrárias ou classes extensas de funções *continuas*, e.g., as funções algébricas (ver seu *Remarques sur lês* etc, pag 66)[20].

D'Alembert também rejeitou a solução de D. Bernoulli. No entanto, a controvérsia não terminou. Ela foi continuada por Lagrange (em 1759-1762), e um pouco mais tarde, por outros matemáticos proeminentes (Monge, Laplace, Arbogast, Fourier e outros).

Esta controvérsia, cuja historia mais detalhada, até o ano de 1788, é apresentada por C. Truesdell [51], foi de suprema importância tanto para o progresso da física-matemática quanto para o desenvolvimento metodológico dos fundamentos da analise matemática. Do ponto de vista do meu tema, é essencial que, desde o inicio de seu estudo do problema da corda, Euler estabeleceu a tese de que na solução do problema, curvas de uma forma arbitrária deveriam ser admitidas, i.e., curvas que não pertencem à classe das funções mistas e, mais geralmente (na opinião de Euler), que não obedecem a qualquer lei analítica.

Euler desenvolveu mais detalhadamente seu ponto de vista sobre este tema em seu *De usu functionum discontinuarum in analysi* (E.322), enviado para a Academia de Petesburgo na primavera de 1763 e publicado em 1767 ([52], pp.74-91). Nesta memória, funções *continua*s são definidas, em termos de imagens geométricas, assumindo não apenas que a relação entre as coordenadas de todos os pontos de uma tal curva é determinada por uma e somente uma lei ou equação mas também que (pp.75-76)

Todas as partes da curva [continua] são firmemente conectadas umas com as outras de tal modo a tornar impossível que elas sofram qualquer mudança sem perturbar a conexão de continuidade.

Euler enfatiza que ele não se refere à conexão, ou continuidade, do trajeto, ou percurso, da curva (*continuitas tractu*), mas, exclusivamente, à unicidade da lei analítica correspondente. Assim, os dois ramos conjugados de uma hipérbole constituem uma curva *contínua*. Esta propriedade principal das linhas *contínuas*, que, para Euler, eram uma conseqüência direta de sua concepção de *continuidade*, poderia ser expressa como: qualquer pequena porção de uma linha *continua* (função) determina de modo único esta linha como um todo (ver nota de rodapé 18).

Há muito tempo atrás, I Y. Timchencko ([53], p. 482) observou que

na medida em que Euler identificava expressões analíticas com funções representáveis por séries de Taylor, a propriedade de "continuidade" corresponde à propriedade de unicidade de funções analíticas no sentido de Weierstrass[21].

Quanto às curvas contínuas, Euler ([52], p.76) as define como

todas as curvas que não são determinadas por qualquer equação definida, do tipo que costuma ser traçada com um único movimento livre da mão.

Novamente, esta *descontinuidade* não se aplica ao trajeto da curva; são também *descontinuas* curvas estendidas continuamente (*etiamsi continuo procedant*) no sentido de conectividade. Se nós desconsiderarmos o fato empírico que figuras geométricas ideais não podem ser traçadas, funções *descontínuas* correspondem então às nossas funções continuas por partes arbitrárias, com derivadas contínuas por partes, tanto de primeira quanto de segunda ordem (cf. [51], p.247)[22]. Sem esta última condição, implicada pela descrição geométrica mas não explicitamente formulada, a *descontinuidade* se torna absolutamente arbitrária, a ponto de nenhuma parte de uma curva *descontínua* precisar ser *continua*, i.e., analiticamente representável e, portanto, de acordo com Euler, analítica.

O alcance da nova concepção de Euler é também confirmada pelo fato de ele mencionar, logo após fornecer uma descrição de toda a classe de curvas *descontinuas*, ou mecânicas, que (*ibidem*) nesta classe

deveriam ser incluídas também as linhas usualmente denominadas mistas como, por exemplo, a fronteira de um polígono (um exemplo considerado repetidamente durante a controvérsia a respeito das corda) etc.

Na parte subseqüente de seu artigo, Euler estuda o papel de tipos diferentes de funções na matemática. Em ramos tradicionais da analise matemática e da geometria superior, são estudadas funções *continuas*. O caso é um pouco diferente no campo então recentemente descoberto e, portanto, ainda pouco desenvolvido, do calculo integral, em que a integração de funções contêm diferenciais de funções de duas os mais variáveis.

Da mesma forma que quantidades constantes arbitrárias aparecem nas integrais de equações diferenciais ordinárias, as soluções daquele tipo essencialmente novo de equações contêm funções *descontinuas*, absolutamente indefinidas e dependentes de nosso critério (*ad arbítrio nostro)* ([52], p.86). Euler supôs que exatamente esta circunstância constitui a principal característica (e maior força) de integrar equações diferenciais parciais, a qual apresenta uma grande esfera de pesquisa adicional. Um pouco mais tarde, Euler dedicou às equações diferenciais parciais quase todo o Volume 3 de seu *Institutiones calculi integralis* (e.385), publicado em 1770, mais uma vez enfatizando vigorosamente a utilidade das funções *descontinuas* ([55], §§37 e 299).

10. Definição Geral de uma função Segundo Euler

Desde que, de acordo com Euler, funções *descontinuas* não são representáveis analiticamente, a definição de uma função dada no Volume 1 do *Introductio*, ligeiramente modificada em seu Volume 2, se tornou muito limitada. Deste modo, para formular uma outra definição abrangendo todas as classes conhecidas de relação, Euler se voltou para uma noção que sempre esteve presente, embora não expressa explicitamente, em qualquer método de introduzir funções: a noção geral de correspondência entre pares de elementos, cada um pertencendo a seu proprio conjunto de valores de quantidades variáveis. Esta noção, desvinculada de qualquer expressão analítica definida, tinha sido utilizada mais de uma vez em raciocínios implicitamente contidos no Volume 1 do *Introductio*, especialmente nos capítulos 2 e 3, o primeiro destes capítulos se iniciando com a seguinte frase ([39], p. 32):

Funções são transmutadas em outras formas, ou pela introdução de uma nova quantidade variável ao invés da utilizada inicialmente, ou [até mesmo] *mantendo a mesma quantidade variável*.

Exemplos fornecidos na mesma passagem ilustram como uma mesma variável pode ser representada de varias formas. Assim, uma função de z, $u = 2 - 3z + z^2$, é a mesma que $u = (1-z)(2-z)$, e $v = a^4 - 4a^3z + 6a^2z^2 - 4az^3 + z^4$ é transformada em uma função mais simples de y, $v = y^4$, por uma substituição $a - z = y$, enquanto que uma função irracional de z,

$$w = \sqrt{a^2 + z^2},$$

se torna uma função racional de y,

$$w = \frac{a^2 + y^2}{2y},$$

após a substituição

$$z = \frac{a^2 - y^2}{2y}.$$

É óbvio que quaisquer dessas duas (ou mais) expressões analíticas possuem uma propriedade comum, a saber, elas estabelecem, de formas diferentes, a mesma correspondência entre dois conjuntos de valores numéricos da variável z e as correspondentes funções u, v ou w.

Agora, esta ideia de relação precisava ser formulada da maneira mais universal e abstrata possível, e foi exatamente isso o que fez Euler ao apresentar a sua nova definição de uma função no prefácio de seu *Institutiones calculi differentialis* (publicado em 1755) ([50], p.4):

Se certas quantidades dependem de outras quantidades, de tal modo que, se as ultimas são alteradas, as primeiras sofrem alteração, então, as primeiras quantidades são denominadas funções das ultimas. Esta denominação é de natureza a mais ampla e abrange todo método por meio do qual uma quantidade poderia ser determinada por outras. Se, portanto, x denota uma quantidade variável, então todas as quantidades que, de alguma maneira, dependem de x, ou são determinadas por x, são denominadas funções de x.

No entanto, no livro em si, dedicado ao cálculo diferencial, somente funções analíticas são consideradas, uma circunstancia que permitiu a Euler se arranjar sem o uso explicito do conceito de limite de uma função (apenas uma vez mencionado no prefácio), baseando-se ele próprio em um peculiar “cálculo de zeros” [56].

O conceito de função de Euler exerceu uma grande influencia positiva em todo o desenvolvimento subseqüente da matemática. Em primeiro lugar, foi de essencial importância isolar (destacar) a classe das funções *contínuas*, i.e., das funções analíticas representáveis por séries de potências, e a descoberta das principais propriedades peculiares a esta classe, das quais só mencionei até o momento a unicidade (característica, como só descoberto no século 20, da classe ainda mais geral das funções quasi-analíticas).

Além desta propriedade, Euler (e também em certa medida D’Alembert) determinou outras propriedades essenciais das funções analíticas. Por exemplo, ele mostrou (em 1755, publicado em 1778) que funções analíticas mapeiam uma esfera conformemente sobre um plano, preservando semelhança de figuras infinitamente pequenas; a expressão em si (projectio conformis) é de autoria de F. Schubert, que a utilizou em 1797, após a morte de Euler. Euler foi o primeiro a utilizar quantidades complexas em cálculos de integrais definidas e, em conexão com isso, deduziu (em

1777, publicado em 1797), utilizando considerações analíticas gerais, as denominadas equações de Cauchy-Riemann, as quais tinham sido obtidas por D'Alembert em 1752, durante as suas pesquisas em hidrodinâmica. Assim, a teoria geral das funções analíticas do século 19, com suas três direções desenvolvidas por Cauchy, Riemann e Weierstrass, teve suas raízes nos trabalhos de Euler e D'Alembert.

Não menos importante para o desenvolvimento subseqüente da análise matemática foi a introdução de funções *descontínuas* arbitrárias e o estudo de vários problemas referentes a relações entre propriedades intrínsecas de uma ou outra classe de funções de uma variável real e a natureza do aparato matemático utilizado para representar aquelas funções.

Apesar da prolongada e persistente oposição de D'Alembert, que algumas vezes apontou detalhes na concepção de Euler que realmente eram fundamentados de modo frágil ou insuficiente (dificuldades especiais estavam relacionadas com os problemas da descontinuidade, em nosso sentido da palavra, da inclinação e curvatura da forma inicial da corda), esta concepção gradualmente se tornou mais e mais amplamente disseminada. O primeiro a vir em favor de Euler foi Lagrange (em 1759-1762) em seus trabalhos sobre a propagação do som e sobre a vibração de cordas; embora ele tenha se voltado por algum tempo para o lado de D' Alembert,

ele retornou mais tarde (em 1788) a sua posição anterior.

Com algumas reservas ou especificações, o ponto de vista de Euler foi apoiado mais tarde por muitos outros matemáticos, incluindo G. Monge, P. S. Laplace, M. J. Condorcet and L. Arbogast.. Mesmo D' Alembert, durante seus últimos anos, mudou sua opinião e permitiu nas soluções de equações diferenciais parciais de qualquer ordem funções *descontinuas,* as derivadas das quais até a mesma ordem possuindo nenhum salto (*sur les fonctions discontinues*, 1780). Na verdade D' Alembert utilizou o conceito de derivada a esquerda e derivada a direita em um ponto [57].

A esse respeito deveria ser observado que estas discussões revelaram a necessidade de uma separação mais distinta entre funções continuas e descontinuas (em nosso sentido), o que foi de fato concretizado por L. Arbogast em um trabalho [58] premiado, em 1790, pela Academia de Ciências de Petersburg em sua competição de 1787 referente a natureza de funções arbitrárias a serem admitidas na resolução de equações diferenciais parciais.

Arbogast pensou que seria possível (embora não no problema da corda, na qual a continuidade da curva é condicionada pela própria natureza do problema) utilizar não apenas funções com derivadas descontinuas mas também funções descontinuas em pontos isolados[22a]; estas funções foram por ele denominadas *fonctions discontigues*

Parce que toutes leur parties ne tiennent pás, ou ne sont pás contigues les unes aux autres.

No entanto, Arbogast não ofereceu nenhuma definição analítica de continuidade (ou descontinuidade). Matemáticos do século XVIII não tinham sentido a necessidade desta definição; se necessário, eles descreviam as principais propriedades de continuidade verbalmente.

Assim, por exemplo, ao explicar métodos de cálculos aproximados de integrais definidas no Volume I de seu *Institutiones Calculi Integralis* (E. 342), publicado em 1768, Euler escreveu ([59], §§297 e 300) que o calculo de $\int Xdx$ seria tanto mais preciso quanto menores fossem assumidos os incrementos da variável *x*, desde que os incrementos do integrando *X* fossem também pequenos. Também verbalmente, Euler descreve (§304) o comportamento de uma função descontínua $X = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ na vizinhança do ponto x = 1, observando que qualquer pequeno incremento em x dá origem a uma mudança extremamente grande da função X, mas ele não usou o termo *continuidade*[23].

Descontinuidades nas derivadas de soluções de equações diferenciais parciais apresentam grandes dificuldades, a superação das quais se mostrando possível somente no nível muito mais alto da análise matemática atingido na segunda metade do século XIX (cf. [51], pp. 286-297). Em nosso tempo um desenvolvimento posterior deste problema, de grande importância e extremamente abrangente, se originou da análise funcional. Eu me refiro aqui à teoria das soluções generalizadas de equações diferenciais parciais (em particular da equação da onda) desenvolvida principalmente pelas mãos de S. L. Sobolev (1936) e L. Schwartz (1945). Estas funções generalizadas (Sobolev) ou distribuições (Schwartz) são funcionais lineares que não precisam ser diferenciáveis no sentido usual mas possuem derivadas generalizadas.

Da mesma forma que a teoria moderna de soma de séries mostrou que o ponto de vista de Euler a respeito da importância e uso de séries divergentes era essencialmente correto, também a teoria de funções generalizadas ilustra a profunda intuição e perspicácia surpreendentes de Euler com respeito a funções descontínuas.

No entanto, o estado geral da análise matemática no século XVIII não permitiu a Euler nem estabelecer suas idéias de modo preciso (do ponto de vista das gerações subseqüentes) nem formular definições exatas ou, ainda, poupá-lo de erros, alguns dos quais notados até mesmo por contemporâneos mais jovens.

11. Crítica do Conceito de Função “Mista”;

Charles (1780) e Fourier (1807-1821)

A primeira das idéias de Euler a ser criticada foi a idéia de destacar a classe das *funções mistas*. Logo após sua morte foi mostrado que funções que eram introduzidas por expressões analíticas diferentes em regiões diferentes de algum intervalo finito (ou, algumas vezes, infinito) poderiam ser representadas também por uma mesma equação. Os primeiros exemplos de tais funções foram apresentados por J. Charles em seu *Fragment sur les fonctions discontinues*, 1780 [60].

Muito mais tarde, ninguém menos que o próprio Cauchy considerou relevante dedicar um artigo expressamente a esse problema, o *Mémoire sur les*

Fonctions Continues [61] (publicado em 1844). Seu exemplo mais simples foi a função

$$y = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ -x, & x \geq 0, \end{cases}$$

descontínua portanto, mas simultaneamente representável por uma única equação, $y = \sqrt{x^2}$, - ∞ < x < + ∞, e portanto, *contínua*. Assim a distinção entre funções *mistas* e *contínuas* se mostrou teoricamente indefensável.

Muito mais importante, no entanto, foi a crítica desta mesma noção de *funções mistas* no contexto da teoria de séries trigonométricas. Como nós vimos (ver § 9), em dois de seus artigos (E. 317 e 339) Euler negou enfaticamente que era possível representar a configuração inicial da corda, definida por duas equações diferentes sobre duas partes de um dado intervalo finito, por uma série de termos contendo senos de arcos múltiplos.

No início do século XIX, Fourier refutou esta asserção em seus trabalhos sobre a teoria da propagação do calor, que também deram origem à teoria geral das séries trigonométricas. Mesmo em 1805, em um fragmento recentemente publicado por I. Grattan-Guinness ([62], p.183), Fourier escreveu:

Il résulte de mês recherches sur cet objet que les fonctions arbitraires même discontinues peuvent toujours être representées par les développements em sinus ou cosinus d´arcs multiples, et que les intégrales [de equação diferencial parcial] *qui contiennent ces développements sonst précisement ausssi générales que celles ou entrent les fonctions artitraires dárcs mutiples. Conclusion que le célebre Euler a toujours repoussée.*

Fourier prossegue apresentando uns poucos exemplos ilustrados por gráficos. Ele desenvolveu seu raciocínio em maior detalhe em seu *Théorie de la propagation de la chaleur dans les solides,* enviado para o *Institute de France* em 21 de Dezembro de 1807, mas publicado só recentemente, novamente por Grattan-

Guinness (ver [62]), e, logo depois, em seu básico *Théorie analytique de la chaleur* em 1822 [63].

As conclusões obtidas por Fourier em 1807 surpreenderam matemáticos das gerações anteriores, e Lagrange, como tal, as desaprovou; por outro lado, após 1822 elas receberam uma acolhida entusiasmada de jovens matemáticos.

Formado na tradição do século 18, o próprio Fourier supôs que uma série trigonométrica podia ser utilizada para representar qualquer função *mista* e não apresentou nenhuma análise satisfatória do problema de representar funções por tais séries. No entanto, uma vez colocado, este problema se tornou em alguns poucos anos seguintes, o tema de estudos especiais baseados na nova concepção geral do cálculo, cujos elementos tinham sido desenvolvidos sistematicamente por Cauchy em seu *Cours d'analyse...1re partie: analyse algébrique*, 1821 [64] e *Résumé des leçons... sur le calcul infinitesimal,* 1823 [65].

Os coeficientes da série de Fourier de qualquer função dada sendo iguais a integrais dos produtos *f(x)cos(nx)* e *f(x)sen(nx)*, a classe de tais séries foi gradualmente ampliada conforme definições mais e mais gerais da integral eram formuladas. Também, os conceitos de convergência e de soma de séries gradualmente adquiriram novo conteúdo.

12. Digressão: A Representação Analítica de Funções

Não iremos detalhar aqui as numerosas pesquisas dedicadas às condições suficientes para a representação de funções por séries de Fourier. Mencionarei apenas que daquelas condições apresentadas por P. Lejeune-Dirichlet in 1829-1837 [66], seguiu-se que qualquer função limitada, se contínua por partes e monótona por partes sobre um dado intervalo, poderia ser desenvolvida em uma série de Fourier convergente para aquela função. Isto significava que uma curva arbitrária traçada sobre um dado intervalo por meio de um movimento livre das mãos (i.e., qualquer função *descontínua*, no sentido de Euler, e limitada) poderia ser representada por uma única lei analítica, tornando–a assim uma função *contínua*. É claro que nem toda função contínua sobre um dado intervalo é representável por sua série de Fourier, a qual pode divergir em infinitos pontos deste intervalo.

Se uma dada função pode ser representada analiticamente ou não, depende dos métodos de expressão analítica admitidos. No Volume 1 do seu *Introductio*, Euler afirmou que a forma mais geral de uma expressão analítica é a de uma série de potencias gerada por um número enumerável (um termo moderno) de adições e multiplicações da variável x e um conjunto enumerável de constantes, sendo permitido um processo de limite adicional[24].

Mais tarde Euler expressou claramente sua crença no fato de que suas funções *descontínuas* não são, em termos gerais, analíticas, explicando ainda (por exemplo: Em seu *Eclaircissements sur le mouvemente des cordes vibrantes,* E.317 ([46], p. 385)) que

on regarderoit fort mal à propôs toutes les courbes comme renfermées dans cette equation parabolique

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + etc...$$

quoi qu`on puisse faire passer cette courbe par une infinite de points donnés.

E ele estava certo: Cauchy provou que mesmo uma função infinitamente diferenciavel em um dado ponto poderia não ser analítica naquele ponto. Seu exemplo,

$$F(x) = \begin{cases} \exp\left(-1/x^2\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

publicado em 1823 em seu *Resume des leçons ... sur le calcul infinitesimal* [65], se tornou clássico[25]. Sobretudo, como foi mostrado por A. Pringshein (em 1893), existem funções infinitamente diferenciáveis e não analíticas sobre qualquer intervalo.

Se o “estoque” de expressões algébricas for ampliado, o universo das funções representáveis analiticamente se alarga de modo extraordinário. Assim, Weierstrass mostrou que qualquer função contínua sobre um intervalo fechado poderia ser representada naquele intervalo por uma soma de séries uniformemente convergentes de polinômios inteiros (publicado em 1885). Alem disso, mesmo funções descontinuas de uma natureza bastante complexa, classificadas por R. Baire (em 1898-1899), podem ser representadas por somas de séries convergentes e séries múltiplas de polinômios. H. Lebesgue denominou analiticamente representável qualquer função que poderia ser construída por meio de um conjunto enumerável de adições, multiplicações e processos de limite, efetuados de acordo com uma lei definida com respeito à variável independente e a um conjunto enumerável de quantidades constantes.

A classificação de Baire (como estabelecida em 1905 por Lebesgue) abrange todas estas funções, que também são mensuráveis no sentido de Borel. Lebesgue denominou esta lei de construção *une expression analytique* (cf. [10]).

13. A Definição Geral de Euler Reconhecida: Condorcet (1778), Lacroix (1797), Fourier (1821), Lobatchevsky (1834), Dirichlet (1837)

Assim, a divisão entre funções contínuas e descontínuas (as mistas incluídas) não teve mais lugar na matemática[26]; por outro lado, a definição geral de uma função dada por Euler (ver § 10) gradualmente obteve mais e mais reconhecimento e aplicação. Parece que o primeiro a avaliar corretamente a importância desta nova definição foi Condorcet, que desenvolveu a concepção de Euler em um trabalho não publicado, *Traité du calcul integral*, do qual, um manuscrito não terminado, enviado para a Academia de ciências de Paris em 1778-1782, é mantido na Biblioteca do *Institut de France*, completo com “proofsheets”.[27]

Conforme projetado por seu autor, este livro deveria ter tido cinco partes, mas somente duas delas foram escritas de fato. A primeira parte, intitulada *De fonctions analytiques*, se inicia com uma explicação do que é entendido como sendo uma função analítica (ver [67], p.134):

Je suppose que j'aie un certain nombre de quantités x, y, z, ..., F, et que pour chaque valeur déterminée de x, y, z, ... etc., F ait une ou plusieurs valeurs déterminées qui y répondent; je dis que F est une fonction de x, y, z, ...

Oferecendo uns poucos exemplos de funções explicitas e implícitas, introduzidas por meio de equações, Condorcet continua:

Enfin, si je sais que lorsque x, y, z seront déterminées, F le sera aussi, quand même je ne connoîtrois ni la manière d'exprimer F en x, y, z, ni la forme de l'équation entre F et x, y, z; je saurai que F est fonction de x, y, z.

Finalmente, são distinguidos três tipos de funções:

(1) Funções cuja forma é conhecida (funções explícitas, nós diríamos);

(2) Funções introduzidas por meio de equações não resolvidas entre *F* e *x*, *y*, *z* (funções implícitas); e

(3) Funções dadas apenas por certas condições (por exemplo, por equações diferenciais).

Alguns exemplos mecânicos são dados para ilustrar o terceiro tipo, no qual também são encaixadas

des fonctions qui ne son connues que parce qu'on sait em general qu'une certaine quantité será déterminée lorsque d'autres quantités le seront.

Novamente, são dados exemplos de alguns fenômenos físicos cuja descrição matemática é desconhecida.

Como se vê, Condorcet foi o primeiro a utilizar o termo *função analítica* para descrever funções de natureza geral, o adjetivo *analítico* implicando sobretudo funções consideradas na análise matemática. Continuando sua exposição, Condorcet tenta obter uma série de Taylor formalmente para uma função arbitrária, quase da mesma forma que Lagrange tinha feito, um pouco mais cedo, em seu artigo, *Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'integration des quantités variables*, publicado em 1774 ([68], pp. 441-476). Parece, no entanto, que o termo *fonction analytique* é devido a Condorcet.

Embora o trabalho não terminado de Condorcet, o *Traité*, nunca tenha visto a luz do dia, suas paginas impressas foram lidas por alguns matemáticos em Paris, conforme S. F. Lacroix mencionou no prefácio do seu curso de análise matemática em três volumes [69]. Além disso, ao definir uma função Lacroix seguiu Euler e Condorcet. Observando que, no início, uma função de alguma quantidade tinha sido entendida como sendo qualquer uma de suas potencias (a mesma imprecisão foi cometida por Lagrange no início de sua *Théorie des fonctions analytiques* [40]), e então, também, como qualquer outra expressão algébrica, Lacroix prossegue (p. 1):

> *Enfin de nouvelles idées, amenées par le progrès de l'analyse, ont donné lieu à la définition suivante des fonctions.* [The definition itself, emphasized by the author, follows immediately.] *Toute quantité dont la valeur dépend d'une ou de plusieurs autres quantités, est dite fonction de ces dernières, soit qu'on sache ou qu'on ignore par quelles opérations il faut passer pour remonter de celles-ci à la première.*

O *Traité* de Lacroix, sendo amplamente conhecido, contribuiu enormemente para a disseminação do novo conceito de função. É verdade que em muitos outros livros e manuais daquele tempo a antiga definição de função, como sendo uma expressão analítica, ainda era usada. Como eu já mencionei (ver rodapé 17), era esse o caso do *Théorie des fonctions analytiques* de Lagrange, publicado pela primeira vez em 1797, com segunda edição revista e ampliada em 1813. Essencialmente a mesma interpretação do conceito de função era também sugerida no *Analyse algébrique* de Cauchy (em 1821), embora na definição mesma o termo *expressão analítica* não é utilizado[18].

No entanto, a definição geral de Euler foi aceita rapidamente por três pesquisadores do mais alto calibre, e nos três casos em conexão com suas pesquisas sobre a teoria de séries trigonométricas. Em primeiro lugar, pode-se encontrar a definição de Euler na *Théorie analytique de la chaleur*, de Fourier, publicada em 1821 ([63], p. 500):

En général, la fonction f(x) représente une suíte de valeurs ou ordonées, dont chacune est arbitraire.

Fourier imediatamente se repete, sustentando não supor que estas ordenadas estão sujeitas a uma lei comum, que elas se sucedem umas as outras de um modo qualquer, e que cada ordenada poderia ser considerada como sendo dada individualmente. Eu deverei abordar abaixo, brevemente, o sentido sugerido por Fourier (e outros matemáticos) ao falar sobre a natureza *arbitrária* de uma dependência funcional.

Seguindo esta definição lacônica de Fourier, cujo trabalho adquiriu imediatamente grande fama, Lobatchevski e Dirichlet publicaram definições muito mais eloqüentes. Em seu artigo, *On the disappearance [convergence] of trigonometric series*, em 1834, Lobatchevski escreveu ([72], p. 43):

A concepção geral requer que seja denominada uma função de x um número que é dado para cada x e que muda gradualmente junto com x. O valor da função poderia ser dado ou por uma expressão analítica ou por uma condição que oferece um meio de testar todos os números e selecionar um deles; ou, finalmente, a dependência pode existir mas permanecer desconhecida.

Então, declarando que, embora nenhum exemplo contraditório fosse ainda conhecido, a alegada possibilidade de representar qualquer função analiticamente não era mais que uma hipótese arbitrária, Lobatchevski conclui (p. 44):

Parece impossível duvidar tanto da verdade de que todas as coisas no mundo poderiam ser expressas por números quanto da correção [do julgamento] de que qualquer mudança e relação no mundo é representada por uma função analítica. Por enquanto, o amplo ponto de vista da teoria permite a existência de dependência somente no sentido de que números, em conexão uns com os outros, são considerados como dados juntos no entanto. Por esta razão Lagrange, em seu Calcul des fonctions[29]*, com o qual ele desejava substituir o cálculo diferencial, prejudicou a generalidade do conceito tanto quanto ele pensava ganhar no rigor de julgamento.*

A tendência de incluir no conceito de função também dependências hipotéticas tais que poderiam não ser analiticamente representáveis é então expressa de modo absolutamente distintivo. No entanto, como o termo *gradualmente* em Lobatchevski significa continuamente no sentido de Cauchy, a definição de Lobatchevski, tomada literalmente, diz respeito, de modo um tanto inesperado, somente a funções continuas.

O mesmo é verdade a respeito da definição de Dirichlet oferecida em 1837 em seu artigo, *Uber die Darstellung ganz willkurlicher Funktionen durch Sinus- und Cosinusreihen*, do qual eu reproduzirei agora toda a passagem relevante ([66], pp. 135-136):

Man denke sich unter a und b zwei feste Werthe und unter x eine veränderliche Grösse, welche nach und nach alle zwischen a und b liegenden Werthe annehmen soll. Entspricht nun jedem x ein einziges, endliches y, und zwar so, dass, während x das Intervall von a bis b stetig durchläuft, y = f(x) sich ebenfalls allmählich verändert, so heisst y eine stetige oder continuirliche Function von x für dieses Intervall. Es ist dabei gar nicht nöthig, dass y in diesem ganzen Intervalle nach demselben Gesetze von x abhängig sei, ja man braucht nicht einmal an eine durch mathematische Operationen ausdrückbare Abhängigkeit zu denken. Geometrisch darstellt, d.h. x und y als Abszisse und Ordinate gedacht, erscheint eine stetige Function als eine zusammenhängende Curve von der jeder zwischen a und b enthaltenen Abszisse nur ein Punkt entspricht. Diese Definition schreibt den einzelnen Theilen der Curve kein gemeinsames Gesetz vor; man kann sich dieselbe aus den verschiedenartigsten Theilen zusammengesetzt oder ganz gesetzlos gezeichnet denken. Es geht hieraus hervor, dass eine solche Function für ein Intervall als vollständig bestimmt nur dann anzusehen ist, wenn sie entweder für den ganzen Umfang desselben graphisch gegeben ist, oder mathematischen, für die einzelnen Theile desselben geltenden Gesetzen unterworfen wird. So lange man über eine Function nur für einen Theil des Intervalls bestimmt hat, bleibt die Art ihrer Fortsetzung für das übrige Intervall ganz Willkür überlassen.

Em essência as definições de Lobatchevski e Dirichlet são idênticas, a única diferença sendo que Dirichlet julgou necessário adicionar uma explicação geométrica. A natureza positivamente geral destas definições no que diz respeito a funções contínuas e a possibilidade de serem diretamente generalizadas para incluir as funções descontínuas são absolutamente evidentes.

Desde que os autores levavam em consideração as funções descontínuas, a restrição de suas definições a funções contínuas no sentido de Cauchy parece ainda mais surpreendente: funções (ou derivadas) com pontos de descontinuidade isolados são explicitamente incluídas nas condições suficientes para a representação de uma função por meio de uma série de Fourier, como estabelecido pelos próprios Lobatchevski e Dirichlet. E devemos também a Dirichlet o célebre exemplo de uma função descontinua em todo ponto do intervalo $0 \leq x \leq 1$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{para valores racionais de } x \\ 1 & \textit{para valores irracionais de } x \end{cases}$$

Porque esse dois pesquisadores julgaram conveniente restringir suas definições a funções contínuas? A explicação mais natural para esta circunstancia foi dada por Medvedev ([71], pp. 242-243): a classe de funções destacada, as funções contínuas no sentido de Cauchy, imediatamente se tornou extremamente importante, e precisamente esta classe foi necessária para eliminar a restrição da representação analítica, já que mesmo mais tarde alguns pesquisadores, por exemplo V. Ya. Bunyakoski ([74], p. 246) e G. G. Stokes ([75], p. 240), identificavam continuidade no sentido de Cauchy com *continuidade* no sentido de Euler.

H. Burkhardt observou que somente em 1841 A. Cournot formulou uma definição de função com o grau de generalidade que veio a ser comumente atribuída a Dirichlet e, mais tarde, a ambos Dirichlet e Lobatchevski[30]. A atribuição a Dirichlet é devida a Hankel, cujo trabalho foi publicado em 1870. Vou reproduzir as palavras de Cournot como apresentadas por Burkhardt ([76], p. 968), já que o original *Théorie des fonctions*, t. I, de Cournot (Paris, 1841), se revelou indisponível:

Nous concevons qu'une grandeur peut dépendre d'une autre, sans que catte dépendance soit de nature à pouvoir être exprimée par une combinaison des signes de l'algèbre.

Um pouco mais adiante Cournot (ibidem) sugeriu que é possível

imaginer une théorie qui qurait pour object la discussion des propriétés générales des fonctions.

14. Hankel e Funcionalidade

Pelo que acabamos de mencionar, é óbvio que um conceito de função sem qualquer débito com a generalidade foi realmente devido a Lobatchevski e Dirichlet. No entanto, nem o livro de Cournot nem o artigo de Lobatchevski gozaram naqueles tempos de grande popularidade, como é evidenciado pelo *Untersuchungen uber unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen* ([26], publ. 1870) de Hankel. Tendo apresentado um ensaio histórico conciso, Hankel oferece então observações introdutórias sobre o conceito de função, formulando a seguinte definição ([29], p. 49):

> *Eine Funktion heißt y von x, wenn jedem Werte der veränderlichen Größe x innerhalb eines gewissen Intervalles ein bestimmter Wert von y entspricht; gleichviel, ob y in dem ganzen Intervalle nach demselben Gesetze von x abhängt oder nicht; ob die Abhängigkeit durch mathematische Operationen ausgedrückt werden kann oder nicht.*

Hankel prossegue acrescentando (ibidem) que ele denominará esta definição pelo nome de Dirichlet

> *weil sie* [this definition] *seinen Arbeiten über die Fourierschen Reihen, welche die Unhaltbarheit jenes älteren Begriffes zweifellos dargetan haben, zugrunde liegt.*

Hankel também denomina este velho conceito Eulersche *Auffassung* (p. 48), recordando as funções *contínuas* e *descontínuas* do *Introductio.*

Então, na pagina 53, Hankel limita sua definição dizendo que o *bestimmter Wert von y* não inclui o caso de descontinuidade infinita e oferece uma nova definição quase coincidente com parte da original que precede o ponto e virgula. Exatamente nesta ou em uma forma similar, a definição geral de uma função foi incluída em cursos de análise matemática no final do século 19 e no século 20.

Deveria ser notado que Hankel formulou sua definição com prudência: Sem reproduzir a definição de Dirichlet, ele se restringiu a observar que sua própria definição é na verdade a pedra fundamental do *Arbeiten uber die Fourierschen Reihen*, de Dirichlet.

Tendo contribuído tanto para o estudo das funções descontínuas, Hankel dificilmente poderia não ter notado que a definição do próprio Dirichlet estava relacionada com funções contínuas, uma circunstancia observada somente em nosso tempo, por A. Church [77], A. Ostrowski [78], e outros autores.

15. O Papel Histórico da Definição Geral de Euler

Assim, parece que para Hankel o principal era mais o *espírito* da definição de Dirichlet do que sua formulação literal. Por outro lado, ao contrastar a definição de Dirichlet com *die Eulersche Auffssung* Hankel estava positivamente enganado.

Como mostrado acima (ver § 10), o conceito de função de Euler evoluiu de modo essencial, e se um ou outro nome pode ser associado de maneira unívoca com a definição de uma função, este nome é o de Euler: aquele cujo conceito, descrito em 1755, foi desenvolvido por muitos outros pesquisadores, incluindo Lobatchevski e Dirichlet.

Uma consideração especial sobre a natureza arbitrária de uma relação funcional e de sua representabilidade analítica é apropriada.

Em primeiro lugar, noções diferentes sobre o grau de arbitrariedade e sobre o tipo de comportamento das funções utilizadas são características de épocas diferentes e de gerações diferentes de matemáticos. Embora Euler, Lacroix ou Fourier nunca tenham chegado a funções tais como a função descontínua de Dirichlet[31] mencionada acima (ver § 13), o conceito de função desses matemáticos, como sendo uma correspondência arbitrária, foi tão geral para a época *deles* quanto o conceito de Dirichlet foi para *sua* época. E a esse propósito, o *próprio* Dirichlet não imaginou as funções que vieram a ser introduzidas nos tempos de G. Cantor, Baire, Borel e Lebesgue.

Em segundo lugar, como já foi dito (ver § 12), o problema da representabilidade analítica de funções veio a se tornar muito mais complexo do que tinha sido suposto pelos matemáticos até o início do século 20. Durante um longo período, começando com Euler e terminando com Dirichlet e Cournot, foi considerado necessário contornar o problema da representabilidade analítica. No entanto, gradualmente se descobriu que classes de funções cada vez mais extensas, de inicio aquelas satisfazendo as condições de Dirichlet na teoria de séries de Fourier, depois as funções contínuas e mesmo aquelas de tipo mais geral, são representáveis por meio de um ou outro método analítico.

U. Dini, em seu Fondamentiper la teórica delle funzioni di variabili reali, publicado em 1878 (German edition, 1892), bem apropriadamente indagou ([79], p. 49)

ob bei Aufrechterhaltung der ganzen in der Definition enthaltenen Allgemeinheit es stets möglich sein wird, in einem gewissen Intervall eine Funktion y von x für alle Werte der Variabelen in diesem Intervall durch eine oder mehrere, endliche oder unendliche Reihen von Rechnungsoperationen, die man mit der Variabelen vornimmt, analytisch auszudrücken oder nicht.

Ainda, acrescentou Dini, levando em conta o nível atual do conhecimento matemático, uma resposta satisfatória para sua questão é simplesmente impossível.

Como observado acima (ver § 12), Lebesgue, em 1905, deu uma resposta afirmativa a essa questão envolvendo todas as funções mensuráveis, oferecendo simultaneamente um exemplo de uma função não representável analiticamente em seu sentido.

Eu sou compelido a deixar de lado o problema correlato da legitimidade das construções de Baire e Lebesgue, que foram posteriormente criticadas do ponto de vista do “efetivismo”, do “construtivismo” e de outras direções dos fundamentos da matemática.

Se a rejeição da representabilidade analítica se revela ilusória em um certo sentido, qual é então a importância da definição de Euler de 1755? Ainda, qual é a importância de todas as outras definições que derivaram daí? O lado fraco da definição de Euler não escapou da atenção de Hankel que, mais do que ninguém, a considerou como uma *reine Nominal-definition* ([26], p. 49), observando que funções definidas de modo tão universal não possuem qualquer propriedade comum.

A resposta apropriada para a questão acima é fornecida pelo proprio desenvolvimento da teoria de funções. Conforme o tempo passou, a classe de funções considerada, se tornando mais e mais ampla, sofreu mudanças essenciais. Expressões analíticas compostas por meio de operações de calculo comparativamente simples, tendo sido quase que o único objeto de estudo durante aproximadamente dois séculos, nunca perderam sua importância. No entanto, com o passar do tempo, se tornou necessário estudar classes diferentes de funções (contínuas, diferenciáveis, de variação finita, descontinuas por partes, mensuráveis, etc.) introduzidas por meio de uma ou outra propriedade básica que define toda a estrutura de uma dada classe independentemente de as funções desta classe serem ou não representáveis analiticamente. Como formulado por N. N. Luzin em seu livro (*em russo*) *Integral and trigonometric series*, publicado em 1915 ([80], p.50),

A principal diferença entre métodos para o estudo de funções dentro do contexto da análise matemática e [alternativamente] *da teoria das funções é que a analise clássica deduz propriedades de qualquer função a partir das propriedades daquelas expressões analíticas e formulas pelas quais a função é definida, enquanto que a teoria da funções determina as propriedades da função a partir daquela propriedade que a priori distingue a classe das funções consideradas.*

É também importante observar que, dentro da teoria das funções, descrições verbais do comportamento de funções sobre um ou outro conjunto de valores da variável independente se tornou de uso geral.

Como mencionado acima, a lógica matemática moderna descobriu dificuldades essenciais inerentes à definição universal, e portanto não algorítmicas, de uma função. Mesmo em 1927, H Weyl mantinha, bastante corretamente, que ([81], p.8)

Niemand kann erklären, was eine Funktion ist. Aber: "Eine Funktion f ist gegeben, wenn auf irgendeine bestimmte gesetzmässige Weise jeder reelen Zahl a eine Zahl b zugeordnet ist ... Man sagt dann, b sei der Wert der Funktion f für den Argumentwert a".

Assim, duas funções definidas de modo diferente são consideradas iguais se, para todos os valores possíveis de a, os valores correspondentes de b coincidem. As opiniões dos matemáticos a respeito do significado das palavras *auf irgendeine bestimmte gesetzmassige Weise* (enfatizado por mim, não por Weyl) diferem. No entanto, a definição geral (nominal) de Euler de uma função, que se tornou necessária já na metade do século 18, tem sido utilizada com sucesso – para emprestar um termo dito em outra ocasião – como *ein Medium freien Werdens* – para construções mais e mais complexas na teoria de funções e, também, abriu novos horizontes no desenvolvimento de muitas áreas da analise matemática e de suas aplicações. Mesmo as dificuldades inerentes a esta definição tiveram um papel positivo na colocação e estudo de vários problemas de fundamentos da matemática e de lógica matemática.

Adendo

Quando este artigo estava quase completo eu recebi o *Tagungsbericht, Problem geschichte der Mathematik 22.9. bis 28.9.1974, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach*,. BRD.

Por este meio eu soube que o tema principal da Conferencia foi o desenvolvimento do conceito de função, para o qual quase metade das comunicações foi dedicado. A primeira comunicação apresentada por Dr. Karin Reich foi um sumário da versão original deste artigo (ver *Agradecimento*): Bericht über einen Aufsatz von A. P. Iuschkewitsch zur Geschichte des Funktionsbegriffs. Outras comunicações sobre o tema foram apresentadas por C.J.Scriba, E.M.Bruins, C.O. Selenius, I.Schneider, O. Volk, I. Grattan-Guinness and H. Gericke. Participaram da discussão de encerramento H. Gericke, G. Hirch, J. J. M. Bos e outros.

Os sumários das comunicações, publicados em Tagungsbericht, são muito concisos para serem considerados aqui, e eu somente posso esperar que as comunicações em si sejam publicadas. Também, eu lamento que uma das referências, mencionada na comunicação de Scriba, viz, S. Bochner, *The rise of functions* (Rice Univ. Studies 56 (1970), No. 2, 3-21 (1971)), permaneça desconhecida para mim.

Referências

1. C. B. BOYER, The History of the Calculus and its Conceptual Development (1939). N.Y., 1959 (3,d ed.).

2. D.E. SMITH, History of Mathematics, v. 1 (1923). N.Y., 1958.

3. W. HARTNER & M. SCHRAMM. Al-Biruni and the theory of the solar apogee: an example/e of originality in Arabic Science. In: Scientific change, ed. by A.C.C~OMBIE. London, 1963, 206-218.

4. C. B. BOYER, History of Analytic Geometry. N.Y., 1956.

5. E. HOFMANN, Geschichte der Mathematik, Bd. I, 2. Aufl. Berlin, 1963.

6. A.C. CROMBIE, Augustine to Galileo, v. I-II, 2nd ed. London-Me1bourne-Toronto, 1959-1961.

7. H. WIELEITNER, Der "Tractatus de latitudinibus formarum" des Oresme. Bibl. Mathematica, 3. F. Bd.13 (1912íl3), 115-145; see also his Über den Funktionsbergriff und die graphische Darstellung bei Oresm. Ibid., 3. F., Bd. 14, 193-243 (1914).

8. E. T. BELL, The Development of Mathematics (1940), 2nd ed. N.Y.-London, 1945.

9. O. PEDERSEN, Logistics al1d the Theory of. Functions. Arch. Intern. d'Hist. d. Sciences, 24, N.94, 29-50. (1974).

10. A.F.MoNNA, The Concept of Function in the 191h and 201h Centuries, in Particular with Regard to the Discussions between Baire, Borel a/ld Lebesgue. Arch, for Hist. of Exact Sciences, 9, 57-84 (1972). 11. KENNETH O. MAY, Elements of Modern Mathematics. 2nd Printing. Reading, Mass.-Palo Alto- London, 1962.

11. O. NEUGEBAUER. The Exact Sciences in Antiquity. 2nd ed. Providence. R.I., 1957.

12. H. G. ZEUTEN, Die Lehire von den Kegelschnitten im Alterum (1886). 2nd ed. Hildesheim, 1966.

13. H. G. ZEUTEN, Die Lehire des mathématiques dans l'antiquité el le moyen age. Ed. française, revue et corrigée par l'auteur. Paris, 1902 (1st ed. Kobenhavn, 1893).

14. N. BOURBAKI, Eléments d'histoire des mathématiques. 2e éd. revue, corrigée, augmentée, Paris, 1969.

15. A. P.YouSCHKEVITCH, Remarques sur la méthode antique d'exhaustion. In: Mélanges Alexandre Koyré,1, Paris, 1964,635-653.

16. D. T. WHITESIDE, Patterns of Mathematical Thought In the later Seventeenth Century. Arch. for History of Exact Sciences, 1, N 3. 179-388(1961).

17a, O. SCHIRMER, Studien zur Astronomie der Araber. Sitzungsber. d. Phys.-Med. Sozietat zu Erlangen, Bd. 58 (1926).

18. Nicole Oresme and the. Medieval Geometry of Qualities and Motions. A Treatise on the Uniformity and Diformity of Intensities kown as Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum. Ed. by M. CLAGETT. Madison, Milwaukee & London 1968. - Russ. ed, by V. P. ZOUBOV in Istoricomathematicheskie issledoval1ia, vo1. XI, 601-731 (1958).

19. M. CLAGETT, The Science of Mechanics in the Middle Ages. Madison, 1959.

20. Geometria à RENATO DES CARTES Anno 1637 Gallicè edita; nurc autem ... in linguam Latinam versa et commentalaris ilustrata. Opera atque studio FRANCISCI à SCHOOTEN ... Lugduni Batavorum. 1649.

21. NICOLE ORESME, Quaestiones supcr geometriam Euclidis, ed. by H. L. L. BUSARD. 2 Vols., Leiden. 1961.

22. SCHRAMM. M .. Steps Towardls the Idea of Fuction: A Comparison Between Eastern and Western Science of Middle Ages. History of Science. 4, 70-103 (1965).

23. Oeuvres de Fermat, éd. P. TANNERY & CH. HENRY, t. 1, Paris, 1891.

24. Oeuvcres de Descartes, éd. CH. ADAM & P. TANNERY, t. VI, Paris, 1903.

25. F. ENGELS, Dialektik der Natur, Berlin. 1958.

26. B. BOLZANO, Rein analytischer Beweis ... H. HANKEL. Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen (1870). Hg. von PH.E.B. JOURDAIN, Leipzig. 1905 (First ed. as "Gratulationsprogramm" der Tubinger Universitat, 1870).

27. P. BOUTROUX, L`idéal scientifique des mathématiciens. Paris, 1920.

28. I.BARROW, Lectiones geametricae. London. 1670; Lectiones mathematicae. London. 1683.

29. MARGARET E. BARON, The Origins of the Infinitesimal Calculus. Pergamon Press, 1969.

30. J. WALLIS ... De Algebra Tractatus Historicus et Practicus. Operum M athematicorum Volumen alterum. Oxoniae, 1693.

31. The Correspondence of Isaac Newton. vol. III. Ed. by H.W.TURNBULL. Cambridge, 1961.

32. I. NEWTON, The Method of Fluxions and Infinite Series, with its Application to The Geometry of Curve-Lines. Translated ... by JOHN COLSON. London, 1736.
32a. The Mathematical Papers of Isaac Newton. Vol. III, 1670-1673. Ed. by D.T.WHITESIDE with the assistance ... of M.A. HoSKIN & A. PRAG. Cambridge, 1969.

33. LEIBNIZENS mathematische Schriften. hsg. von C. I. GERHARDT, I -VII Berlin-Halle. 1849-1863.

34. D. MAHNKE, Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der hoheren Analysis. Abh. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. KI., 1925. NI (1926).

35. JOH. BERNOULLI. Opera omnia, I-IV. Lausannae et Genevae, 1742.

36. M. DEHN & E. HELINGER. 0n James Gregory's " Vera Quadratura". In: James Gregory Tercentenary Memorial Volume, ed. by H. W. TURNBULL. London, 1839. 468-478.

37. G. F. DE L'HoSPITAL, Ana1yse dês infiniments petits pour I 'inrelligence des lignes courbes. Paris, 1696.

37 a. J. GREGORY, Vera circuli et hyperboliae quadratura ... Patavii [Padua, 1667].

37b. CHP..J.SCRIBA, James Gregory fruhe Schriften zur infinitesimalrechnung. Giessen, 1957.

38. CHR. WOLFF, Mathematisches Lexicon (1716), hsg. von J. E. HOFMANN. Hildesheim, 1965.

39. LEONHARDI EULERI Opera Omnia, ser. I. vo1 VIII ed. A. KRAZER & F. RUDIO, 1922.

40. Oeuvres de J. L. Lagrange, publiées par J. A. SERRET, t. iX. Paris, 1881.

41. LEONHARDI EULERI Opera omnia, ser. I. vol. IX, ed. A.SPEISER, 1945.

42. I.GRATTAN-GUINNESS, The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann. Cambridge, Mass.-London, 1970. 42. I.GRATTAN-GUINNESS, The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann. Cambridge, Mass.-London, 1970.

42a. A.SPEISER, Über die diskontinuirlichen Kurven, pp. XXI-XXIV of the editor's introduction, LEONHARDI EULERI Opera omnia, ser. I, vol.. XXV, 1952.

42b. C.TRUESDELL, editor's introduction, LEONHARDI EULERI Opera omnia, ser. II, vol. 13, 1956.

43. A. II. Маркушевиу, Основные понятия математического анализа и теории функций в вруцах ЗйЛера. – Jiеонард ЗйЛер. Сборник статей ... Мосива, 1958,98-132.

44. LEONHARDI EULERI Opera omnia. ser. IV-A, vol. I, ed. A. JUŠKEVIČ, V.SMIRNOV & W. HABICHT, 1975.

45. J.D'ALEMBERT, Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration; Suite des reherches ... Hist. Acad. Sci. Berlin (1747) 1749, 214-249.

46. LEONHARDI EULERI Opera omnia, ser. II, vol. X, ed. F. STÜSSI & H. F AVRE. 1947.

47. LEONHARDI EULERI Opera omnia, ser. I, vol. XVI-I, ed. C. BOEHM, 1933.

48. D. BERNOULLI, De indole singulari serierum infinitarum quas sinus vel cosinus angularum arithmetice progredientium formant, earumque summatione et usu. Nov. Comm. Ac. Petrop., XVII (1772) 1773, 3-23.

49. LEONHARD EULER und CHRISTIAN GOLDBACH. Briefwechsel 1729-1764, hsg. von A. P. JUŠKEVIČ & E. WINTER. Berlin. 1965.

50. LEONHARDI EULERI Opera omnia, ser. I, vol. X, ed. G. KOWALEWSKI, 1913.

51. C. TRUESDELL, The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies. 1638-1788. In: LEONHARDI EULERI Opera omnia. ser. II vol. 1I-2. Turici 1960.

52. LEONHARDI EULERI Opera omnia, ser. I, vol. XXIII, ed. H.DULAC, 1938.

53. И. Ю. Тимченко, Основания Основания терии аналитческиҳ. Функций, Ч. I, т. I. Одесса, 1899.

54. C. MACLAURIN, A Treatise of Fluxions, vol. I-II. Edinburgh, 1742.

55. LEONHARDI EULERI Opera omnia, ser. I, vol. XIII, ed. F.ENGEL et L.SCHLESINGER, 1914.

56. A. P. YOUSCHKEVITCH, Euler und Lagrange über die Grundlagen der Analysis. - Sammelband … zu Ehren des 250. Geburtstages Leonard Eulers ... , ed. K.SCHRÖDER. Berlin, 1959, 224-244. 57.

57. J.D'ALEMBERT. Opuscules mathématiques, vol. VIII. Paris, 1780, 302-308. See also: А. П. Юшкевич, К истории спора о колеóлющейся струҷе (Дапамбер о применении "paspывных" Функций). Историо-математические исследования, XX, 1975, 221-231.

58. L. ARBOGAST, Mémoires sur la des fonctions arbitraires qui entrent dans les intègrales des équations aux différentielles partielles. St. Pétersbourg, 1791.

59. LCONHARDI EULERI Opera omnia, ser.I, vol. XI, ed. F.ENGEL & L.SCHLESINGER, [913.

60. J. CHARLES, Fragment sur les fonctions discontinues. Mémoires de mathématiques et de physique présentès par divers savants. Paris, 1785; 585-588.

61. A L. CAUCHY, Oeuvres completes, I sér., vol. VIII, 145-160.

62. I. GRATTAN-GUINNESS in collaboration with J. R. RAVETZ, Joseph Fourier. 1768-1830. Cambridge, Mass.-London, 1972.

63. J. B. FOURIER. Oeuvres, v. I, publié par G. DARBOUX. Paris, 1888.

64. A. L. CAUCHY. Oeuvres complètes, 2 sér., vol. III. Paris. 1897.

65. A. L. CAUCHY, Oeuvres complètes, 2 sér., vol. IV. Paris, 1899.

66. P. G. LEJEUNE-DIRICHLET, Gesammelte Werke, Bd.I. Berlin, 1889 (Sur la convergence des series trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données (1829), 117-132: Über die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus- und Cosinusreihen (1837), 133-160.

67. A. P. Y OUSCHKEVITCH, La notion de fonction chez Condorcet. In: For Dirk Struik. Ed. by R. S. COHEN, J.J. STACHEL & M. W. WARTOFSKY. Dordrecht-Hollaod, Boston-U.S.A, 1974, 131-139.

68. J.L.LAGRANGE, Oe"I"/'es, t.111. Paris, 1869.441-476.

69. S. F.LACROIX, Traite du calcul diferentiel et du calcul integral, t.I, Paris, 1797; 2º éd., Paris. 1810.

70. M. KLÊIN, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. New York, 1972.

71. Ф. А. Медведев, Об пределении Функции у Лобачевского и Дирихле Истрико-математичские исследования, XX, 1975, 232-245.

72. Н. И. Лобачевский, Полное срание сочинений, т. У. Москва–Ленинград, 1951.

73. J.L. LAGRANGE, Oeuvres. I. X. Paris, 1884.

74. В. Я. Ъняковский, Лексикон чистой и прикадной, т. I. Сапкт–Петербург, 1839.

75. G. G. STOKES, On the critical values of the sums of periodic series, 1848. In: Mathematical and Physical Papers, v. I. Cambridge, 1880.

76. H. BURKHARDT, Trigonometrische Reihen und Integrale. 28. Exkurs betreffend die Entwicklung des Begriffs einer willkürlichen Funktiorn.. Encyklopadie der mathematischen Wissenschaften, Bd.II, T.I, 2 Halfte. Leipzig 1904-1916, 958-971.

77. A. CHURCH. Introduction to Mathematical Logic, v. 1-2. Princeton, 1952-1956.

78. A. OSTROWSKI, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Bd. I. Basel und Stuttgart, 1965.

79. U. DINI. Grundlagen fur eine Theorie der Funktionen einer veranderlichen reellen Grobe. Deutsch. bearb. von G.LÜROTH und A.SCHEPP, Leipzig, 1892.

80. Н. Н. Луэин, Интеграл и тригонометрический ряд. Редакция и комментарии Н. К. Бари и Д. Е. Меньшова. Статьи Н. К. Бари, В. В. **Голубева и Л. А.** Люстерника. Москва–Ленинград, 1951.

81. H. WEYL, Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft. Müncheo-Berlin, 1927. Institute for History of Science and Technology Moscow 103012.