

UNESP - Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

RODRIGO DE CASTRO LIMA

**CRIAÇÃO DE PARTÍCULAS ESPINORIAIS ELKO POR EFEITOS
GRAVITACIONAIS**

Guaratinguetá
2017

RODRIGO DE CASTRO LIMA

**CRIAÇÃO DE PARTÍCULAS ESPINORIAIS ELKO POR EFEITOS
GRAVITACIONAIS**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, para a obtenção do título de Mestre em Física na área de Partículas e Campos

Orientador: Prof. Dr. Saulo Henrique Pereira.

Guaratinguetá
2017

L732c	Lima ,Rodrigo de Castro Criação de partículas espinoriais ELKO por efeitos gravitacionais / Rodrigo de Castro Lima – Guaratinguetá, 2017. 90 f : il. Bibliografia: f. 79-81 Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2017. Orientador: Prof. Dr. Saulo Henrique Pereira 1. Cosmologia. 2. Teoria quântica de campos. 3. Partículas. I. Título CDU 524.82(043)
-------	---

RODRIGO DE CASTRO LIMA

**ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“MESTRE EM FÍSICA”**

PROGRAMA: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO


Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. SAULO HENRIQUE PEREIRA
Orientador / UNESP/FEG


Prof. Dr. ELIAS LEITE MENDONÇA
UNESP/FEG


Prof. Dr. LUIZ CLEBER TAVARES DE BRITO
UFLA/MG

Fevereiro de 2017

com muito carinho, a minha família e amigos.

“I certainly think we are only living in the prehistory
of the understanding of our universe”.

Prigogine, Ilya.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, *Lindalva* e *José Afonso* que, juntamente com meu irmão *Renan*, proporcionaram todo amor, carinho e apoio durante meu desenvolvimento. À minha namorada, *Laura*, por estar sempre ao meu lado nos momentos alegres, tristes, de estudo, de diversão e por sempre ser um exemplo de dedicação e esforço na minha vida. Aos meus tios, *Lucia* e *Noel*, bem como aos meus primos *Liliane* e *Lucas* por todo apoio e companheirismo dados desde minha infância.

De modo especial, sou grato ao meu orientador, *Prof. Dr. Saulo*, por ter me guiado, motivado e dado fortalecimento para o desenvolvimento deste trabalho. E, a todos os professores do departamento que contribuíram, direta ou indiretamente, para mais esta etapa da minha formação acadêmica.

Aos meus colegas da pós-graduação, principalmente ao *Pedro*, *Dino* e *Rodolfo*, pela ajuda coletiva e reuniões de estudo.

Agradeço ao meu amigo de infância *Seon* e aos meus “amigos-família” de graduação e acampamentos [*Dora*, *Titonhe*, *Bg*, *Du Guetto*, *Crisis*, *Dudu*, *Rivus*, *MariArt*, *MariNova*, *Marina*, *Potta*, *Rica*, *Lis*, *Marcos*, *Marciel*, *Bianca*, *Imara* e *Jana*] por todo companheirismo, ensinamentos de vida, descontrações, alegria e tosquices.

Sou grato, também, à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro dado durante todo o mestrado.

Deixo registrado neste trabalho minha eterna gratidão a todos vocês!

LIMA, R. C. **Criação de partículas espinoriais ELKO por efeitos gravitacionais** 2017. 90f. Dissertação (Mestrado em Física) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, 2017.

RESUMO

O campo espinorial ELKO associado às partículas de matéria de spin $1/2$ e dimensão de massa 1, construídos em um conjunto completo de autoespinores de helicidade dual do operador conjugação de carga, é um candidato a descrever a matéria escura. Devido a sua natureza, possui diversas aplicações cosmológicas. Neste trabalho, o estudo de tais espinores é realizado sob universo de Friedmann-Robertson-Walker plano, homogêneo e isotrópico. À luz da Teoria Quântica de Campos em Espaços-Tempo Curvos, com as transformações de Bogoliubov, obteve-se a densidade de partículas criadas em uma métrica modelo de regime assintoticamente plano no passado e no futuro, permitindo-se comparar com soluções exatas presentes na literatura para produção de partículas escalares e férmions de Dirac. Discute-se, também, a compatibilidade do fenômeno de criação de partículas provenientes da Teoria Quântica de Campos em Espaço Curvos com os estudos de Prigogine para descrição deste fenômeno à escala cosmológica, considerando-se um universo termodinamicamente aberto.

Palavras-chave: Cosmologia, Teoria Quântica de Campos em Espaços-Tempo Curvos, ELKO, Criação de partículas.

LIMA, R. C. **Creation of ELKO spinor particles by gravitational effects** 2017. 90f. Thesis (Master in Physics) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, 2017.

ABSTRACT

The ELKO spinor field associated with spin $1/2$ particles and mass dimension 1, constructed on a complete set of dual helicity eigenspinors of the charge conjugation operator, is a candidate for describing dark matter. Due to its nature, it has several cosmological applications. In this work, the study of such spinors is performed under a homogenous and isotropic Friedmann-Robertson-Walker universe. In the light of the Quantum Field Theory in Curved Space-Time, with the Bogoliubov transformations, we obtained the density of particles created in a model of asymptotically plane metric in the past and in the future, allowing to compare with exact solutions present in the literature for the production of scalar particles and Dirac fermions. It is also discussed the compatibility of the phenomenon of particle creation from the Quantum Field Theory in Curved Space with the studies of Prigogine to describe this phenomenon at the cosmological scale, considering a thermodynamically open universe.

Keywords: Cosmology, Quantum Field Theory in Curved Spacetimes, ELKO, Particle's Creation.

Lista de Figuras

5.1	gráfico do fator de escala (5.15)	55
5.2	Análise gráfica para as funções exatas (f_{1ex}, f_{2ex}), em linhas pretas e funções aproximadas (f_{1ap}, f_{2ap}), em linhas vermelhas, das equações (5.21) e (5.22) para $c_1 = (A+B)/A$, $c_2 = (2/3)c_1^2$ e $\rho = 1$, com os seguintes valores de parâmetros: (a) $A = 2$, $B = 1$; (b) $A = 2$, $B = 1$; (c) $A = 8$, $B = 1$; (d) $A = 8$, $B = 1$	58
5.3	Gráfico 3D para a densidade de número de partículas ELKO criadas em função da massa m e do momento k , com parâmetros $A = 30$, $B = 1$ e $\rho = 1$. (a) Região de massa e momento “grandes”; (b) Região de massa e momento “pequenos”.	71
5.4	Gráfico 3D para a densidade de número de partículas ELKO criadas em função da massa m e do momento k , com parâmetros $A = 50$, $B = 10$ e $\rho = 3$. (a) Região de massa e momento “grandes”; (b) Região de massa e momento “pequenos”.	72
5.5	Análise gráfica para N_ψ (Dirac - linha vermelha), N_λ (ELKO - linha preta) e N_ϕ (Escalar - linha azul) em função dos momentos, com os seguintes parâmetros: (a) $A = 10$, $B = 1$, $m = 1$ e $\rho = 1$; (b) $A = 30$, $B = 1$, $m = 1$, $\rho = 1$; (c) $A = 100$, $B = 1$, $m = 1$, $\rho = 1$; (d) $A = 30$, $B = 1$, $m = 1$, $\rho = 5$	74
5.6	Análise gráfica para N_ψ (Dirac - linha vermelha), N_λ (ELKO - linha preta) e N_ϕ (Escalar - linha azul) em função das massas, com os parâmetros $A = 30$, $B = 1$, $\rho = 1$ a momentos fixos: (a) $k = 0,01$; (b) $k = 0,1$; (c) $k = 0,5$; (d) $k = 1,0$	75
5.7	Análise gráfica para produção de partículas Dirac N_ψ e ELKO N_λ em função dos momentos para diferentes massas, assumindo como parâmetro $\rho = 1$: (a) $A = 30$, $B = 1$, $m_{Dirac} = 1$ (linha vermelha), $m_{ELKO} = 1,05m_{Dirac}$ (linha preta) e $m_{ELKO} = 0,95m_{Dirac}$ (linha preta tracejada); (b) $A = 100$, $B = 1$, $m_{Dirac} = 1$ (linha vermelha), $m_{ELKO} = 1,03m_{Dirac}$ (linha preta) e $m_{ELKO} = 0,97m_{Dirac}$ (linha preta tracejada);	76

Sumário

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	NOTAÇÃO	14
2	COSMOLOGIA	15
2.1	TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL	15
2.2	EQUAÇÕES DE EINSTEIN	16
2.3	CONSERVAÇÃO DO TENSOR ENERGIA-MOMENTO	18
2.4	TENSOR ENERGIA-MOMENTO DE FLUIDOS PERFEITOS	19
2.5	UNIVERSO HOMOGÊNIO E ISOTRÓPICO	21
2.6	MODELO DE FRIEDMANN-ROBERTSON-WALKER	22
2.7	TERMODINÂMICA DE UM UNIVERSO EM EQUILÍBRIO	23
2.8	MATÉRIA ESCURA E ENERGIA ESCURA	24
2.9	TERMODINÂMICA E CRIAÇÃO DE MATÉRIA	25
2.10	CRIAÇÃO DE MATÉRIA PARA FLUIDOS SIMPLES	26
2.11	ACELERAÇÃO DO UNIVERSO E TAXA DE CRIAÇÃO DE MATÉRIA	30
3	TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS EM ESPAÇOS-TEMPO CURVOS	32
3.1	FUNDAMENTOS DA TQC	32
3.2	FUNDAMENTOS DA TQCETC	36
3.3	TRANSFORMAÇÃO DE BOGOLIUBOV E CRIAÇÃO DE PARTÍCULAS POR EFEITOS GRAVITACIONAIS	40
4	CAMPO ESPINORIAL ELKO	44
4.1	ESTRUTURA DOS ESPINORES ELKO	44
4.2	CAMPO QUÂNTICO DOS ESPINORES ELKO	46
5	CRIAÇÃO DE PARTÍCULAS ESPINORIAIS ELKO POR EFEITOS GRAVITACIONAIS	49
5.1	EQUAÇÕES DE MOVIMENTO PARA O ELKO EM FRW	49
5.2	DECOMPOSIÇÃO DO CAMPO $\Lambda(\mathbf{x},\eta)$	52
5.3	SOLUÇÕES PARA $\Lambda(\mathbf{x},\eta)$ SOB UMA MÉTRICA ASSINTOTICAMENTE PLANA NO PASSADO E NO FUTURO	55

5.4	TAXA DE CRIAÇÃO DE PARTÍCULAS ELKO	66
5.5	COMPARAÇÃO COM CRIAÇÃO DE ESCALARES E FÉRMIONS DE DIRAC	73
5.6	ANÁLISE QUALITATIVA: ELKO E A ACELERAÇÃO DO UNIVERSO .	77
6	CONCLUSÕES	78
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	80
A	- COMPONENTES X_j e Y_j	83
B	- EQUAÇÕES DE RIEMANN-PAPPERITZ	89

1 INTRODUÇÃO

A busca por uma teoria capaz de descrever fenômenos quânticos por influência da gravidade, ou mesmo o comportamento quântico do espaço-tempo, tem sido um dos maiores interesses da física teórica desde Einstein. Enquanto a formulação para uma teoria gravitacional consistente a nível quântico, Gravitação Quântica (GQ), não é encontrada, teorias efetivas e semiclássicas são usadas para atender ao tema. Dentre estas, a Teoria Quântica de Campos em Espaços-Tempo Curvos (TQCETC) (BIRRELL; DAVIES, 1994)[1], (PARKER; TOMS, 2009)[2], (MUKHANOV; WINITZKI, 2004)[3] surge como uma junção entre a Relatividade Geral (RG) e a Teoria Quântica de Campos (TQC), cujo objetivo é descrever a evolução dos campos quânticos de matéria no cenário de métricas clássicas, buscando soluções para as equações de Einstein com o método padrão da Teoria Quântica de Campos.

Historicamente, os mecanismos fundamentais da TQCETC foram apresentados, de forma consistente, na tese de Leonard E. Parker em 1966 (PARKER, 1966)[4], trazendo como consequência o fenômeno de produção de partículas em espaços curvos. Na década de 70 do século passado, outros trabalhos para criação de partículas a partir do vácuo de um campo gravitacional sob um universo em expansão como os de Grib, Mamayev e Sterobinskii (GRIB *et al*, 1970)[5], (GRIB *et al*, 1980)[6], (ZEL'DOVICH; STEROBINSKII, 1972)[7], (ZEL'DOVICH, 1993)[8], a descoberta da evaporação de buracos negros por Hawking (HAWKING, 1975)[9], (GIBBONS; HAWKING, 1977)[10] e o estudo acerca do espectro de energia de átomos de hidrogênios no espaço-tempo curvo realizado pelos físicos Audretsch e Schäfer (AUDRETSCH; SHAEFER, 1978)[11] refletiram bons resultados a esta teoria.

Soluções exatas para criação de partículas escalares em (1+3)D em um universo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) foram estudadas por Bernard e Duncan (BERNARD; DUNCAN, 1977)[12], com o fator de escala comóvel $a(\eta) = \sqrt{A + Btgh(\rho\eta)}$ ¹ que por sua vez implica regiões assintoticamente planas no passado $a(\eta) \rightarrow \sqrt{(A - B)}$ e no futuro $a(\eta) \rightarrow \sqrt{(A + B)}$, fornecendo uma taxa de produção não nula de partículas massivas com spin 0. Em 2009, Moradi (MORADI, 2009)[13] calculou a densidade de partículas fermiônicas que obedecem a equação de Dirac em condições cosmológicas similares as propostas por Duncan, com fator de escala $a(\eta) = A + Btgh(\rho\eta)$.

¹A, B e ρ são constantes.

Paralelamente a estes trabalhos, sabe-se que entre as possíveis partículas capazes de descrever a natureza da *Cold Dark Matter* (CDM), encontra-se o ELKO², proposto por Ahluwalia e Grumiller (AHLUWALIA; GRUMILLER, 2005)[14], (*ibidem*, 2005)[15] para referir partículas fermiônicas de spin 1/2 e com dimensão de massa 1.

Não obstante, em 1989, Ilya Prigogine deu um passo importante na compreensão de criação de partículas no universo, trazendo do ponto de vista macroscópico, a primeira formulação consistente no que diz respeito ao mecanismos de criação dentro da termodinâmica de sistemas abertos. Ele reinterpreto o tensor energia-momento ao incorporar a criação irreversível de matéria às equações de campo de Einstein através de um termo adicional de pressão, que por ventura é designado como pressão de criação (PRIGOGINE *et al*, 1989)[16]. Tal termo é negativo, o que pode levar a uma possibilidade de explicar a expansão acelerada do universo.

Devido a estas últimas pesquisas, é natural surgir a seguinte questão: Assim como ocorre para campos escalares e férmions de Dirac, é possível obter uma taxa de produção associada às partículas “escuras” de spin 1/2?

O objetivo deste trabalho, portanto, consiste em obter a densidade de partículas espinoriais ELKO criadas no cenário de FRW *à la* Bernard e Duncan, afim de compará-las com a produção de partículas escalares e fermiônicas que satisfazem Klein-Gordon e Dirac. Além de discutir, qualitativamente, a relação desta taxa de criação com o mecanismo desenvolvido por Prigogine, ao relacionar o espinor ELKO como partícula “escura” contribuinte à aceleração do universo.

O texto encontra-se estruturado nos seguintes capítulos: (2) Cosmologia - descreve a termodinâmica da cosmologia atual, partindo das equações de Einstein, até a proposta de criação de matéria por Prigogine em cenários cosmológicos de sistemas abertos; (3) Teoria Quântica de Campos em Espaços-Tempo Curvos - apresenta as bases para o tratamento de campos de matéria em espaços curvos, partindo da TQC e sua extensão para TQCETC, com um processo conhecido por transformações de Bogoliubov; (4) Campo Espinorial ELKO - discorre sobre a natureza e dinâmica do campo espinorial ELKO, no que tange a sua estrutura e descrição de seu campo quântico; (5) Criação de partículas espinoriais ELKO por efeitos gravitacionais - desenvolve os cálculos para criação de partículas ELKO em um universo de Friedmann-Roberson-Walker plano, homogêneo e isotrópico, comparando às densidades de criação de partículas escalares e férmions de Dirac; (6) Conclusões - discute os resultados obtidos quanto a criação de partículas ELKO com aqueles já existentes na literatura para partículas escalares e de Dirac, associando qualitativamente à predição de criação de matéria em cenários cosmológicos, segundo Prigogine.

²Do acrônimo alemão, *Eigenspinoren des Ladungskojugationsoperator*, cuja tradução é Autoespinor do Operador Conjugação de Carga.

1.1 NOTAÇÃO

As unidades e notação usadas neste trabalho são:

- Unidades naturais: $c = \hbar = 1$;
- Assinatura da métrica $g_{\mu\nu}$: $\text{diag}(+, -, -, -)$;
- Índices latinos: $i = 1, 2, 3$. Índices gregos: $\mu = 0, 1, 2, 3$;
- Relação algébrica de comutação: $[A, B] = AB - BA$;
- Relação algébrica de anti-comutação: $\{A, B\} = AB + BA$;
- Derivada usual: ∂_μ ;
- Derivada covariante: ∇_μ ;
- Escalar curvatura de Ricci: $R = g^{\mu\lambda} R_{\mu\lambda}$;
- Tensor de Ricci: $R_{\mu\lambda} = R^\rho_{\mu\rho\lambda}$;
- Tensor curvatura de Riemann em termos da conexão afim: $R^\rho_{\mu\nu\lambda} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\lambda} + \Gamma^\rho_{\sigma\mu} \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} - \Gamma^\rho_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}$;
- Conexão afim em termos da métrica: $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 1/2 g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu})$;
- Matrizes de Pauli: $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;
- Fator de escala a tempo cósmico t : $a(t)$;
- Fator de escala a tempo conforme η : $a(\eta)$;
- Função gama de Euler: $\Gamma(z)$, para z complexo.

2 COSMOLOGIA

A Cosmologia é designada como um ramo da Astronomia, tendo início com as primeiras civilizações. Etimologicamente, “*cosmos*” - ordem e “*logia*” - estudo. Seu principal objetivo consiste em estudar o universo como um todo, preocupando-se com sua origem, conteúdo, estrutura e evolução. Este capítulo apresenta alguns aspectos da cosmologia usual, baseando-se na Teoria da Relatividade Geral de Einstein, desde a descrição do universo de Friedmann-Roberson-Walker homogêneo e isotrópico até a hipótese da aceleração do universo devido a criação de partículas, por Prigogine, Lima e seus colaboradores.

2.1 TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL

Em 25 de novembro de 1915, Albert Einstein apresentou sua versão final das equações da gravidade à Academia Prussiana, estabelecendo a teoria da Relatividade Geral (RG). A construção desta teoria foi realizada ao longo de quase uma década, tendo início com um *insight* de seu criador, em 1907, de que seria impossível distinguir localmente a aceleração de origem gravitacional e a aceleração causada por um referencial não inercial, elaborando o *princípio de equivalência* entre a massa gravitacional (m_G) e a massa inercial (m_i) (experimentos atuais mostram que o princípio permanece válido em $1 - m_G/m_i < 10^{-14}$) (TURYSHEV, 2008)[17].

Nos anos seguintes, Einstein precisou aprender e aplicar uma geometria que mantivesse invariante o elemento de linha $ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$ em transformações gerais de coordenadas (esta notação para ds^2 generaliza a notação de Minkowski utilizada nas descrições da Relatividade Restrita, válida somente em referenciais inerciais, $ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$), pois a esta altura ele sabia que o tensor métrico, objeto $g_{\mu\nu}$, consistiria na dinâmica do campo capaz de descrever a gravidade. Com a ajuda de seu amigo Marcel Grossmann, Einstein fundamentou a *covariância geral* que necessitava a sua teoria, moldando-a sob os alicerces da Geometria Riemanniana e culminando nas equações de campo $G_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}$. A elaboração de sua equação garante que nos limites clássicos newtonianos, a RG recupera a equação de Laplace na ausência de matéria ρ para um potencial gravitacional Φ , $\nabla^2\Phi = 0$ ou a equação de Poisson quando há presença de matéria, $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$. Isto significa que as equações de campo de Einstein generalizam as equações de campo de Poisson e Laplace, análogas para o eletromagnetismo e gravitação newtoniana, para uma entidade geométrica dinâmica que corresponde ao próprio tecido

do espaço-tempo (PAIS, 2005), p. 177-298 [18].

O tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ representa a dinâmica do espaço-tempo frente um tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ que o define, ou, segundo Wheeler: “... o espaço-tempo diz a matéria como se mover e a matéria diz ao espaço-tempo como se curvar” (TAYLOR; WHEELER, 1992), p. 275 [19].

2.2 EQUAÇÕES DE EINSTEIN

As equações de campo de Einstein podem ser obtidas, formalmente, pelo princípio variacional. Neste formalismo, o procedimento inicia-se com a descrição apropriada da ação que conduz à dinâmica dos campos da teoria em questão. Para a gravitação de Einstein, a ação total é a soma da ação gravitacional de Einstein-Hilbert S_{EH} e a ação para matéria S_M (HOBSON *et al*, 2006)[20], (CARROLL, 2014)[21], p. 159-165 e (SILVA, 2012)[22]:

$$S = S_{EH} + S_M. \quad (2.1)$$

Considerando-se uma região limitada Ω do espaço-tempo $(1+3)D$ onde os campos de interesse estão imersos e construídos pelas densidades de lagrangianas gravitacional $\mathcal{L}_{EH} = \frac{R}{2\kappa}$ e de matéria $\mathcal{L}_m$, S é reescrito como:

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} \sqrt{-g} R d^4x + \int_{\Omega} \sqrt{-g} \mathcal{L}_m d^4x, \quad (2.2)$$

em que $\kappa = 8\pi G$, $\sqrt{-g} d^4x$ é o elemento de volume invariante, g o determinante do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, $R = g^{\mu\lambda} R_{\mu\lambda}$ o escalar curvatura de Ricci, $R_{\mu\lambda} = R_{\mu\rho\lambda}^{\rho}$ o tensor de Ricci, $R_{\mu\nu\lambda}^{\rho} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\rho}\Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\rho}\Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma}$ o tensor curvatura de Riemann e $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = 1/2g^{\lambda\rho}(\partial_{\mu}g_{\nu\rho} + \partial_{\nu}g_{\mu\rho} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu})$ a conexão afim. Segundo o princípio variacional, obtendo-se a mínima ação, $\delta S = 0$, consequentemente tem-se as equações de campo do fenômeno tratado.

Tomando-se a variação na ação do primeiro termo de (2.2), tem-se:

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + R \delta \sqrt{-g}) d^4x. \quad (2.3)$$

Descrito em termos dos produtos das conexões afins e suas derivadas, a variação do tensor de Ricci $\delta R_{\mu\nu}$ torna-se:

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_{\rho} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - \partial_{\nu} \delta \Gamma_{\rho\mu}^{\rho} + \delta \Gamma_{\rho\lambda}^{\rho} \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\rho} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} - \delta \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\rho\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} \delta \Gamma_{\rho\mu}^{\lambda}. \quad (2.4)$$

Mesmo a conexão afim sendo um objeto não tensorial, sua variação é. Desse modo, pode-se tomar a derivada covariante sobre $\delta \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}$, tendo como resultado $\nabla_{\rho}(\delta \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}) = \partial_{\rho} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\rho} + \Gamma_{\alpha\rho}^{\rho} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\nu\rho}^{\alpha} \delta \Gamma_{\alpha\mu}^{\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^{\alpha} \delta \Gamma_{\nu\alpha}^{\rho}$, permitindo que $\delta R_{\mu\nu}$ de (2.4) seja compactada na forma:

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\rho}(\delta \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}) - \nabla_{\nu}(\delta \Gamma_{\rho\mu}^{\rho}). \quad (2.5)$$

O termo variacional $\delta\sqrt{-g}$ é descrito como

$$\delta\sqrt{-g} = \left[\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu}} \right] \delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \left(\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} \right) \delta g_{\mu\nu}. \quad (2.6)$$

Sabendo-se que o determinante da matriz métrica, g , pode ser expresso na forma $g = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} \text{Cof}(g^{\mu\nu}) = \frac{\text{Cof}(g^{\mu\nu})}{g^{\mu\nu}}$, sendo $\text{Cof}(g^{\mu\nu})$ o cofator do elemento $g_{\mu\nu}$ do tensor métrico, segue de imediato que, $\text{Cof}(g^{\mu\nu}) = \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} = gg^{\mu\nu}$. Deste modo, a expressão (2.6) torna-se:

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

Usando-se (2.5) e (2.7) na expressão (2.3), tem-se

$$\begin{aligned} \delta S_{EH} &= \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} [\nabla_{\rho}(\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma_{\rho\mu}^{\rho})] \right) d^4x \\ &+ \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} \left(\sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \right) d^4x, \end{aligned} \quad (2.8)$$

que, por sua vez, pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \delta S_{EH} &= \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} \left(\sqrt{-g} [\nabla_{\rho}(g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho}) - \nabla_{\nu}(g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\rho\mu}^{\rho})] \right) d^4x \\ &+ \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} \left(\sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \right) d^4x, \end{aligned} \quad (2.9)$$

pois $\nabla_{\rho} g^{\mu\nu} = 0$. Por uma questão de simetria nas conexões afins, realizando-se a troca de índices $\rho \leftrightarrow \nu$ na segunda parcela da primeira integral acima, obtem-se:

$$\begin{aligned} \delta S_{EH} &= \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} \left(\sqrt{-g} [\nabla_{\rho}(g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - g^{\mu\rho} \delta\Gamma_{\nu\mu}^{\nu})] \right) d^4x \\ &+ \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} \left(\sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \right) d^4x. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Fazendo-se uso do Teorema de Gauss covariante,

$$\int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \nabla_{\varsigma} v^{\varsigma} = \oint_{\partial\Omega} d^3x \sqrt{-g} \hat{n}_{\varsigma} v^{\varsigma}, \quad (2.11)$$

em que $\partial\Omega$ é a borda da região Ω , $\sqrt{-g} d^3x$ é o elemento de hiper-superfície covariante e $\hat{n}_{\varsigma}$ é o versor normal à hiper-superfície, na equação (2.10), tem-se:

$$\begin{aligned} \delta S_{EH} &= \frac{1}{2\kappa} \oint_{\partial\Omega} \left(\sqrt{-g} [(g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - g^{\mu\rho} \delta\Gamma_{\nu\mu}^{\nu})] \right) \hat{n}_{\rho} d^3x \\ &+ \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} \left(\sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \right) d^4x. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Uma vez que a integral de superfície é nula na fronteira da região Ω , a parcela Einstein-Hilbert da ação reduz-se em:

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) d^4x. \quad (2.13)$$

Tomando-se, agora, a variação na ação do segundo termo de (2.2) e fazendo-se uso da expressão (2.7), tem-se:

$$\begin{aligned} \delta S_M &= \int_{\Omega} \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m) d^4x \\ &= \int_{\Omega} \left(\mathcal{L}_m \delta\sqrt{-g} + \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \right) d^4x \\ &= \int_{\Omega} \sqrt{-g} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} \mathcal{L}_m g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x. \end{aligned} \quad (2.14)$$

De modo geral, o tensor energia-momento é definido como

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} - \mathcal{L}_m g_{\mu\nu}, \quad (2.15)$$

permitindo-se visualizar a expressão (2.14) na forma:

$$\delta S_M = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (2.16)$$

Em posse das expressões (2.13) e (2.16), a variação da ação total torna-se

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta S_{EH} + \delta S_M \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) d^4x + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x \\ &= \int_{\Omega} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \kappa T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Assim, para toda e qualquer variação arbitrária da métrica $\delta g^{\mu\nu}$, as equações de campo de Einstein se revelam como:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.18)$$

em que $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein com quadri-divergência conservada $\nabla_{\nu} G^{\mu\nu} = 0$ e $\kappa = 8\pi G$.

2.3 CONSERVAÇÃO DO TENSOR ENERGIA-MOMENTO

A lei de conservação do tensor energia-momento assegura que o fluxo total do conteúdo de energia e momento que atravessa uma região Ω em $(1+3)D$ é nula (CARROLL,

2014)[21], p. 159-165, (GRON; HERVIK, 2007)[23], p. 185,

$$\int_{\partial\Omega} T^{\mu\nu} n_\nu d\sigma = 0, \quad (2.19)$$

em que $\partial\Omega$ é a borda da região Ω e n^ν é o vetor normal a superfície infinitesimal $d\sigma$. Aplicando-se o Teorema de Gauss covariante, dado pela expressão (2.11) em (2.19) obtém-se

$$\int_{\Omega} \sqrt{-g} \nabla_\nu T^{\mu\nu} d^4x = 0, \quad (2.20)$$

para toda e qualquer região arbitrária Ω . Desse modo, pode-se apresentar a formulação para lei de conservação de energia-momento na forma:

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.21)$$

Lê-se as componentes do tensor energia-momento como: T^{00} densidade de matéria e energia; $T^{\mu\mu}$ densidade de momento na direção μ , com $\mu \neq 0$; $T^{0\nu}$ fluxo de densidade de energia na direção ν , com $\nu \neq 0$; $T^{\mu 0}$ fluxo de densidade de momento na direção μ , com $\mu \neq 0$ e $T^{\mu\nu}$ fluxo de densidade da tensão de cisalhamento na direção ν , com $\mu \neq \nu$.

É válido notar que a expressão (2.21) generaliza a ideia de força, $\mathbf{F} = -\nabla\phi$, como gradiente de uma energia potencial. E, uma vez conservada, significa que a densidade de quadri-força f^μ é nula, garantindo-se que não haja interação atuando sobre a região externa à borda $\partial\Omega$ de Ω .

2.4 TENSOR ENERGIA-MOMENTO DE FLUIDOS PERFEITOS

No âmbito de estudo sobre as equações de Einstein em diversos cenários, o tensor energia-momento está associado à fonte responsável em gerar a curvatura do espaço-tempo dos mesmos. Uma vez que o presente capítulo tem como intuito apresentar as bases cosmológicas para o desenvolvimento deste trabalho faz-se necessário compreender sua fonte de energia-momento.

A palavra *fluido* é usada, em cenários cosmológicos, para caracterizar não somente fluidos em seu sentido ordinário, mas também gases, radiação e energia do vácuo. Um fluido é designado *perfeito* quando não há viscosidade e condução térmica. Ele é caracterizado por um quadri-vetor velocidade $\mathbf{u}$ em um sistema de coordenadas comóveis e por certas quantidades escalares, tais como densidade própria ρ , pressão isotrópica p , temperatura T , entropia específica s e entalpia específica $w = (\rho + p)/n$, em que n é densidade de número bariônico. Tais quantidades são definidas em bases ortonormais ao campo do fluido. Aqui, n é dado em termos de um vetor densidade de fluxo de matéria (bárions) (GRON; HERVIK, 2007)[23], p. 186,

$$n^\mu = n\sqrt{-g}u^\mu, \quad (2.22)$$

em que u^μ é a componente do quadri-vetor velocidade $\mathbf{u}$ e

$$n = \sqrt{\frac{g_{\mu\nu}n^\mu n^\nu}{g}}. \quad (2.23)$$

Quando a taxa de entropia e produção de partículas é conservada para qualquer variação da métrica, a densidade de lagrangiana do fluido perfeito é representada por sua densidade própria:

$$\mathcal{L} = -\rho \quad (2.24)$$

Ao atentar-se novamente à expressão (2.15), nota-se que a definição do tensor energia-momento permite variar a densidade lagrangiana em relação à métrica somente, implicando que as quantidades s e n^μ variem como:

$$\begin{aligned} \delta s &= 0, \\ \delta n^\mu &= 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

para se conservarem.

Através da relação termodinâmica

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial n}\right)_s = w, \quad (2.26)$$

em que o sub-índice s designa que tal variação é realizada a entropia específica constante, e deste modo tem-se

$$\delta \rho = w \delta n. \quad (2.27)$$

Fazendo-se uso das equações (2.22), de (2.23) e (2.25) obtem-se:

$$\delta n = \frac{1}{2n} \left(\frac{n^\mu n^\nu}{g} \delta g_{\mu\nu} - n^\mu n^\nu \frac{g_{\mu\nu}}{g^2} \delta g \right) = \frac{n}{2} \left(-u^\mu u^\nu \delta g_{\mu\nu} + \frac{u^\mu u_\mu}{g} \delta g \right). \quad (2.28)$$

Usando-se das propriedades $\partial g / \partial g_{\mu\nu} = g g^{\mu\nu}$, $\partial g / \partial g^{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu}$, $\delta g_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \delta g^{\mu\nu}$ e $u^\mu u_\mu = -1$, em (2.28), tem-se:

$$\delta n = \frac{n}{2} (u_\mu u_\nu + g_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.29)$$

A partir das equações (2.24), (2.27) e (2.29) obtem-se:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} = -\frac{nw}{2} (u_\mu u_\nu + g_{\mu\nu}). \quad (2.30)$$

Com a expressão para $w = (\rho + p)/n$, (2.30) torna-se:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} = -\frac{(\rho + p)}{2} (u_\mu u_\nu + g_{\mu\nu}). \quad (2.31)$$

Recordando-se que o tensor energia-momento de (2.15) pode ser visualizado como

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} + \mathcal{L}_m g_{\mu\nu},$$

e que neste caso, $\mathcal{L}_m = -\rho$, fazendo-se uso de (2.31), a expressão que designa o tensor energia-momento de um fluido perfeito é:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}. \quad (2.32)$$

Assumindo autovalores $\lambda_{(\alpha)}$ e autovetores $\mathbf{u}_{(\alpha)}$, o tensor energia-momento também pode ser expresso como um operador:

$$T^\mu_\nu u^\nu_{(\alpha)} = \lambda_{(\alpha)} u^\mu_{(\alpha)}. \quad (2.33)$$

Tal expressão admite que dado um conjunto de autovetores indexados $\mathbf{u}_{(0)}$ e $\mathbf{u}_{(i)}$, com $i = 1, 2, 3$, como bases ortonormais comóveis ao campo do fluido, a atuação de um tensor energia-momento sobre os mesmos, gera autovalores correspondentes $\lambda_{(0)}$ associado à densidade de matéria ou energia ρ e $\lambda_{(1)} = \lambda_{(2)} = \lambda_{(3)} = p$ associado a sua pressão isotrópica (GRON; HERVIK, 2007)[23], p. 187.

2.5 UNIVERSO HOMOGÊNIO E ISOTRÓPICO

Pode-se dizer que a Teoria da Relatividade Geral de Einstein tem se revelado promissora no campo da cosmologia, desde sua formulação. Antes de 1920, cosmólogos e astrofísicos acreditavam que a Via-Láctea era a única galáxia imersa em um universo estático. Agora, sabe-se que esta é apenas uma entre bilhões de galáxias em um universo dinâmico.

A observação das galáxias, com técnicas cada vez mais sofisticadas, permitiu aos pesquisadores fundamentar dois princípios básicos da cosmologia, por vezes chamados de princípios cosmológico:

- Não existe um ponto privilegiado no universo, as galáxias estão igualmente distribuídas no espaço em imensas distâncias. O universo é dito *homogêneo* em grande escala¹.
- Não existe uma direção privilegiada no universo, as galáxias estão igualmente distribuídas em diferentes direções angulares conforme o universo evolui. O universo é dito *isotrópico* em grande escala, (GRON; HERVIK, 2007)[23], p. 267-268, (CARROLL, 2014)[21], p. 323-324.

¹A partir de 100 Mpc, em que 1 pc (parsec) é 3,26 anos-luz.

2.6 MODELO DE FRIEDMANN-ROBERTSON-WALKER

Assumindo-se a homogeneidade e isotropia do universo, seu elemento de linha é dado pelo modelo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)², desenvolvido entre os anos de 1920 e 1930, expresso em coordenadas esféricas como:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right), \quad (2.34)$$

em que a função $a(t)$ é chamada fator de escala, representando o raio entre um objeto (uma galáxia, por exemplo) até um ponto arbitrário no tempo cósmico t . O parâmetro K representa a curvatura do universo, podendo ser $K = 0$ para um universo plano, $K = 1$ para um universo fechado (esférico) e $K = -1$ para um universo aberto (hiperbólico).

Admitindo-se que o tensor energia-momento para este cenário seja descrito por

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p), \quad (2.35)$$

em um referencial co-móvel, com a quadri-velocidade do fluido $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$, as equações de campo de Einstein (2.18), com uso de (2.34) e (2.35), são:

$$3\frac{\dot{a}^2 + K}{a^2} = 8\pi G\rho, \quad (2.36)$$

$$-2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2 + K}{a^2} = 8\pi Gp, \quad (2.37)$$

em que $\dot{a} \equiv d(a(t))/dt$. Estas duas expressões são as *equações de Friedmann* (GRON; HERVIK, 2007)[23], p. 268-272.

Inserindo-se (2.36) em (2.37) tem-se:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (2.38)$$

Nota-se que a energia gravitacional efetiva é determinada por $(\rho + 3p)$, e a pressão passa a ser um contribuinte da gravitação. Para casos em que $p < -\rho/3$ a gravidade torna-se repulsiva.

Antes de haver observações astrofísicas mais apuradas, Einstein acreditava em um universo estacionário. Deste modo, ele corrigiu suas equações de campo (2.18) adicionando um termo conhecido como *constante cosmológica* Λ_C , afim de garantir sua hipótese:

$$G_{\mu\nu} - \Lambda_C g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (2.39)$$

²Às vezes, é possível verificar na literatura a sigla FLRW, em que L é a abreviação de Lemaître, que desenvolveu uma ideia similar ao dos três primeiros, considerando o início do universo como um átomo primordial.

Com este novo termo, a equação de Friedmann que descreve a dinâmica do universo, (2.38), torna-se:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda_C}{3}. \quad (2.40)$$

Com o avanço de pesquisas cosmológicas no estudo de supernovas do tipo IA, notou-se que o universo expande-se aceleradamente $\ddot{a} > 0$ (HORVATH, 2007), p. 276-277 [24], (RIESS *et al*, 1998)[25], implicando que a constante cosmológica, associada à energia escura, seja responsável por tal aceleração, impondo-se a condição de que $\Lambda_C > 0$ e $|\Lambda_C| > |4\pi G(\rho + 3p)|$. A discussão desta entidade “escura” está melhor reportada na seção 2.8.

2.7 TERMODINÂMICA DE UM UNIVERSO EM EQUILÍBRIO

Retornando às equações de Friedmann, (2.36) e (2.37), é possível extrair a relação

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \quad (2.41)$$

que, por sua vez, pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) + p \frac{d}{dt}a^3 = 0, \quad (2.42)$$

em que $V = a^3$ é o volume de uma região expandindo junto com o fluido cósmico, chamado de *volume co-móvel*. A energia em um volume co-móvel é descrita como $U = \rho a^3$. Em termos de U e V , a equação (2.42) tem a forma:

$$dU + p dV = 0. \quad (2.43)$$

A primeira lei da termodinâmica para o estado de um fluido em equilíbrio é ditada por

$$T dS = dU + p dV, \quad (2.44)$$

em que T é a temperatura e S a entropia. Um processo com $dS = 0$ é chamado de *processo adiabático*. Deste modo, a equação (2.43) mostra que um universo homogêneo e isotrópico para um fluido perfeito expande-se adiabaticamente.

Assumindo-se que a equação de estado de um fluido perfeito seja

$$p = w\rho, \quad (2.45)$$

a equação (2.42) torna-se:

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) + w\rho \frac{d}{dt}a^3 = 0. \quad (2.46)$$

Tal equação admite a solução

$$\rho a^{3(w+1)} = \rho_0, \quad (2.47)$$

em que ρ_0 é uma constante interpretada como o atual valor da densidade. Através da expressão (2.47), é possível catalogar três diferentes situações para o conteúdo de energia do universo: 1. Dominado por um ente, cuja densidade é constante, ($w = -1$); 2. Dominado por matéria ($w = 0$); 3. Dominado por radiação ($w = 1/3$). Assim, compactamente, tem-se:

$$\begin{cases} \rho_v = \rho_{v0}, \\ \rho_m = \rho_{m0}a^{-3}, \\ \rho_r = \rho_{r0}a^{-4}. \end{cases} \quad (2.48)$$

Este conjunto de densidades, revela algo interessante acerca do comportamento do universo: a expansão modifica o estado da matéria e define a escala de energia das reações das partículas que o compõem. A matéria não-relativística, ρ_m , por exemplo, sofre diluição conforme o volume do universo aumenta. Enquanto a temperatura do gás de radiação cai com o aumento do fator de escala, $T \propto a(t)^{-1}$, já que $\rho_r \propto a^{-4}$ e $\rho_r \propto T^4$ (GRON; HERVIK, 2007)[23], p. 272-273, (HORVATH, 2007), p. 93-96 [24].

2.8 MATÉRIA ESCURA E ENERGIA ESCURA

As entidades *matéria* e *energia escura* foram incorporadas nos estudos cosmológicos em contextos distintos. A primeira teve início há mais de 70 anos, com o estudo das curvas de rotação das galáxias espirais. Na época acreditava-se que toda massa de gás e estrelas contidas numa certa galáxia deveriam ter órbitas keplerianas (órbitas em torno de uma massa aproximadamente constante) e suas velocidades de rotação deveriam diminuir com a distância segundo $r^{-1/2}$, mas isso não ocorria. As observações indicavam que a velocidade e curvas de rotação permaneciam constantes, inclusive em regiões que não haviam mais corpos celestes. Uma maneira de interpretar esse fenômeno era que, além de estrelas e gases, as galáxias possuem uma matéria desconhecida e que não interage eletromagneticamente sendo, portanto, denominada *matéria escura*, segundo (ZWICKY, 1933)[26] e (HORVATH, 2007), p. 149-159 [24]. A segunda surgiu a partir de 1998, através de resultados para explicação do baixo brilho de supernovas do tipo IA. O fato foi atribuído a um aumento da taxa de expansão do universo, acelerado. Análises posteriormente apresentadas chegaram à conclusão de que era necessário a existência de um componente distribuído uniformemente em todo o universo, com pressão negativa e em grande quantidade. Por ter uma natureza não eletromagnética, como a matéria escura, tal componente levou o nome de *energia escura*, associada à constante cosmológica Λ_C (RIESS *et al*, 1998)[25] e (HORVATH, 2007), p. 161-170 [24].

Retornando à primeira das equações de Friedmann, (2.36), tem-se que esta pode ser

expressa em termos do parâmetro de Hubble³ $H \equiv \dot{a}/a$ e da solução (2.47) como:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_0}{a^{3(w+1)}} - \frac{K}{a^2}. \quad (2.49)$$

Usando-se o sub-índice 0 para designar o presente, $t = t_0$, assumindo-se um universo homogêneo, isotrópico e plano, $K = 0$, sua atual densidade crítica, via (2.49), é (BAUMANN, 2015), p. 25-27 [27]:

$$\rho_{crit,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1,9 \times 10^{-29} h^2 g/cm^3, \quad (2.50)$$

em que $h = H/100 km s^{-1} Mpc^{-1}$. Adotando-se as condições obtidas em (2.48) e uma densidade crítica para definir $\Omega_{I,0}$ como um parâmetro adimensional,

$$\Omega_{I,0} \equiv \frac{\rho_{I,0}}{\rho_{crit,0}}, \quad (2.51)$$

em que $(I,0)$ é a abreviação para conteúdo energético I no presente 0, a equação de Friedmann (2.49) pode ser escrita na forma:

$$H^2(a) = H_0^2 \left[\Omega_{r,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^4 + \Omega_{m,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 + \Omega_{K,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 + \Omega_{\Lambda_C,0} \right], \quad (2.52)$$

em que $\Omega_{r,0}$, $\Omega_{m,0}$, $\Omega_{K,0} \equiv -K/(a_0 H_0)^2$ e $\Omega_{\Lambda_C,0}$ são os parâmetros de densidade para radiação (fótons e neutrinos), matéria (bariônica e escura fria “não relativística”), curvatura e energia escura respectivamente.

Segundo (*ibidem*, 2015), p. 26 [27] e (RIESS *et al.*, 1998)[25], os parâmetros de densidade $\Omega_{I,0}$ presentes na expressão (2.52) são, quantitativamente, dados por: $|\Omega_{K,0}| < 0,01$, $\Omega_{r,0} = 9,4 \times 10^{-5}$, $\Omega_{m,0} \approx 0,31$ e $\Omega_{\Lambda_C,0} \approx 0,68$. O parâmetro relacionado à distribuição de matéria pode, ainda, ser visto como $\Omega_{m,0} = \Omega_{b,0} + \Omega_{dm,0}$, sendo $\Omega_{b,0} \approx 0,04$ (bariônica) e $\Omega_{dm,0} \approx 0,27$ *cold dark matter* (matéria escura fria). Através dessa análise numérica, nota-se que a quantidade de matéria e energia escura no universo somam quase 95% de tudo que existe.

2.9 TERMODINÂMICA E CRIAÇÃO DE MATÉRIA

Nas seções anteriores, o estudo cosmológico tratado levou em consideração a evolução de um universo com número de partículas constante $\dot{n} = \delta n = 0$. Esta é uma consequência decorrente de sistemas termodinâmicos isolados. Em 1989, Ilya Prigogine⁴ e seus cola-

³Hubble deu um passo decisivo em 1929, utilizando um conjunto de dados de distâncias entre galáxias medidas cuidadosamente por seu colaborador M.Humason. Como consequência, seus resultados mostraram pela primeira vez uma correlação entre a velocidade v e a distância D estimada às galáxias, $v = H \times D$ (HORVATH, 2007), p. 80-81 [24].

⁴Prêmio Nobel de Química de 1977 por seus estudos e desenvolvimento da termodinâmica de processos irreversíveis à luz da teoria de estruturas dissipativas.

boradores (PRIGOGINE *et al*, 1989)[16] propuseram uma aplicação da termodinâmica de sistemas abertos à cosmologia, tendo como resultado uma taxa de produção de partículas e entropia específica não nulas, apresentando do ponto de vista macroscópico, a primeira formulação auto-consistente de mecanismos de criação. Posteriormente, em 1992, Calvão, Lima e Waga ampliaram os estudos de Prigogine no comportamento evolutivo da temperatura de um universo que admite criação de matéria (LIMA *et al*, 1992)[28] e discutiram o processo de criação de partículas gravitacionalmente induzido através da teoria relativística para processos irreversíveis que generaliza a formulação proposta por Prigogine.

2.10 CRIAÇÃO DE MATÉRIA PARA FLUIDOS SIMPLES

Naquilo que tange a descrição de criação de partículas no contexto cosmológico, a questão fundamental a ser entendida é como o fenômeno de criação pode ser incorporado nas equações de campo de Einstein. A início de desenvolvimento desta seção, deve-se considerar as seguintes densidades:

$$v = \frac{V}{N}, \quad (2.53)$$

$$\sigma = \frac{S}{N}, \quad (2.54)$$

$$u = \frac{U}{N}, \quad (2.55)$$

em que v é a densidade de volume por partícula, σ é a densidade de entropia por partícula e u é a densidade de energia interna do sistema por partícula, bem como

$$\rho = \frac{U}{V}, \quad (2.56)$$

$$n = \frac{N}{V}, \quad (2.57)$$

$$s = \frac{S}{V}, \quad (2.58)$$

em que ρ é a densidade de energia interna por volume, n é a densidade de partículas por volume e s é a densidade de entropia por volume.

A energia total de um sistema aberto, contexto para criação de matéria na visão de Prigogine, é dado por (CALLEN, 1985), p. 146-149 [29]:

$$U = TS - pV + \mu N, \quad (2.59)$$

em que T é a temperatura, S é a entropia, p é a pressão, μ é o potencial químico e N é o número de partículas do sistema termodinâmico em questão. Tomando-se o elemento

infinitesimal de energia de (2.59), tem-se

$$dU = TdS + SdT - pdV - Vdp + \mu dN + Nd\mu,$$

que através da condição de Gibbs

$$SdT = Vdp - Nd\mu, \quad (2.60)$$

obtem-se a seguinte equação de conservação de energia:

$$dU = TdS - pdV + \mu dN. \quad (2.61)$$

Considerando-se a quantidade por volume de energia descrita em (2.59), com uso de (2.54), (2.56) e (2.58),

$$\begin{aligned} \rho &= Ts - p + \mu n \Rightarrow \\ \mu &= \frac{\rho + p}{n} - T \frac{s}{n} = \frac{\rho + p}{n} - T\sigma, \end{aligned}$$

implica que a densidade de entropia específica (por partícula) é

$$\sigma = \frac{\rho + p}{Tn} - \frac{\mu}{T}, \quad (2.62)$$

permitindo-se estabelecer a quantidade denominada *vetor fluxo de entropia* (LIMA *et al*, 1992)[28]:

$$S^\alpha = n\sigma u^\alpha. \quad (2.63)$$

Uma vez que a densidade de energia ρ pode ser descrita como $\rho = Ts - p + \mu n$, seu elemento infinitesimal é

$$\begin{aligned} d\rho &= nTd\left(\frac{s}{n}\right) + \frac{\rho + p}{n}dn \\ &= nT\frac{ds}{n} - nTs\frac{1}{n^2}dn + \frac{\rho + p}{n}dn \\ &= Tds - T\frac{s}{n}dn + \frac{\rho + p}{n}dn \Rightarrow \\ Tds - T\frac{s}{n}dn &= d\rho - \frac{(\rho + p)}{n}dn, \end{aligned}$$

gerando-se a seguinte relação de Gibbs para este sistema (*ibidem*, 1992)[28]:

$$nTd\sigma = d\rho - \frac{(\rho + p)}{n}dn. \quad (2.64)$$

Considerando-se os vetores fluxo de partículas e entropia como $N^\alpha = nu^\alpha$ e $S^\alpha = su^\alpha = \sigma nu^\alpha$ respectivamente, tem-se que as quadri-divergências dos vetores N^α e S^α são:

$$\nabla_\alpha N^\alpha = \nabla_\alpha(nu^\alpha) = (\nabla_\alpha n)u^\alpha + n(\nabla_\alpha u^\alpha) \equiv \Psi \quad (2.65)$$

e

$$\nabla_\alpha S^\alpha = \nabla_\alpha(\sigma nu^\alpha) = (\nabla_\alpha \sigma)nu^\alpha + \sigma(\nabla_\alpha n)u^\alpha + \sigma n \nabla_\alpha u^\alpha. \quad (2.66)$$

Admitindo-se que o estudo termodinâmico em questão seja construído para análise de um universo de FRW plano,

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 d\mathbf{x}^2, \quad (2.67)$$

cujas conexões não nulas são $\Gamma_{j0}^i = \dot{a}/a \delta_i^j$ e $\Gamma_{ij}^0 = a\dot{a}\delta_{ij}$ ($\dot{f} \equiv df(t)/dt$), a parcela $\nabla_\alpha u^\alpha$ de (2.65) e (2.66), para $u^\alpha = (1,0,0,0)$, reduz-se a

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha u^\alpha &= \partial_\alpha u^\alpha + \Gamma_{\alpha\kappa}^\alpha u^\kappa = 0 + \Gamma_{\alpha 0}^\alpha u^0 + \Gamma_{\alpha i}^\alpha u^i \\ &= \Gamma_{\alpha 0}^\alpha u^0 = \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{10}^1 + \Gamma_{20}^2 + \Gamma_{30}^3 \\ &= 3\frac{\dot{a}}{a} \equiv \Theta. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Deste modo, aplicando (2.68) em (2.65), a quadri-divergência do vetor N^α se estabelece como

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha N^\alpha &= (\nabla_\alpha n)u^\alpha + n\nabla_\alpha u^\alpha = (\partial_\alpha n)u^\alpha + n\nabla_\alpha u^\alpha \\ &= \dot{n} + n\Theta = \Psi. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Da mesma forma, a quadri-divergência do vetor S^α segue como

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha S^\alpha &= \nabla_\alpha(\sigma nu^\alpha) = (\partial_\alpha \sigma)nu^\alpha + \sigma(\partial_\alpha n)u^\alpha + \sigma n \nabla_\alpha u^\alpha \\ &= \dot{\sigma} + \sigma\dot{n} + \sigma n\Theta = \dot{\sigma}n + \sigma(\dot{n} + n\Theta), \end{aligned} \quad (2.70)$$

que através do resultado (2.69), pode ser compactada na forma

$$\nabla_\alpha S^\alpha = \dot{\sigma}n + \sigma\Psi. \quad (2.71)$$

A hipótese de Prigogine, para um cenário cosmológico capaz de criar matéria, consiste em descrever um tensor energia-momento

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + P)u^\alpha u^\beta - Pg^{\alpha\beta}, \quad (2.72)$$

no qual

$$P = p + \Pi, \quad (2.73)$$

em que p é a pressão de equilíbrio termostático, visto na seção 2.6 e Π é um termo de correção presente em situações dissipativas, relacionado à viscosidade do fluido. Sabe-se, por instância, que a termodinâmica cosmológica convencional trata o fluido de componentes do universo considerando-o com interação nula ou muito fraca $\Pi = 0$, mas de modo geral $\Pi \neq 0$ (PRIGOGINE *et al*, 1989)[16] e (LIMA *et al*, 1992)[28]. A equação (2.72) deve, ainda, satisfazer a lei de conservação $\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0$. Assim, segue que

$$\begin{aligned}\nabla_\beta T^{\alpha\beta} &= \partial_\beta T^{\alpha\beta} + \Gamma_{\beta\kappa}^\alpha T^{\kappa\beta} + \Gamma_{\beta\kappa}^\beta T^{\alpha\kappa} \\ &= \partial_0 T^{\alpha 0} + \partial_i T^{\alpha i} + \Gamma_{0\kappa}^\alpha T^{\kappa 0} + \Gamma_{0\kappa}^0 T^{\alpha\kappa} + \Gamma_{1\kappa}^\alpha T^{\kappa 1} \\ &\quad + \Gamma_{1\kappa}^1 T^{\alpha\kappa} + \Gamma_{2\kappa}^\alpha T^{\kappa 2} + \Gamma_{2\kappa}^2 T^{\alpha\kappa} + \Gamma_{3\kappa}^\alpha T^{\kappa 3} + \Gamma_{3\kappa}^3 T^{\alpha\kappa},\end{aligned}$$

a qual, para $\alpha = 0$, usando-se das conexões afins não nulas de FRW, tem-se:

$$\begin{aligned}\nabla_\beta T^{\alpha\beta} &= \dot{\rho} + 3a\dot{a}\left(-P\left(-\frac{1}{a^2}\right)\right) + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho \\ &= \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0.\end{aligned}\tag{2.74}$$

Sabendo-se que $\Theta = 3\dot{a}/a$ e $P = p + \Pi$, a lei de conservação do tensor-energia momento implica em

$$\dot{\rho} = -\Theta(\rho + p + \Pi).\tag{2.75}$$

Da equação (2.64), a variação da entropia específica no tempo é descrita na forma

$$\dot{\sigma} = \frac{\dot{\rho}}{nT} - \frac{(p+\rho)}{Tn^2}\dot{n},\tag{2.76}$$

que ao ser inserida em $\nabla_\alpha S^\alpha$ de (2.71) e com auxílio de (2.62), (2.69) e (2.75), tem-se

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha S^\alpha &= \frac{\dot{\rho}}{T} - \frac{p+\rho}{nT}\dot{n} + \sigma\Psi \\ &= -\Theta\frac{(\rho+P)}{T} - \frac{(p+\rho)}{nT}(\Psi - n\Theta) + \sigma\Psi \\ &= -\frac{\Theta}{T}(\rho+p+\Pi) - \frac{(p+\rho)}{nT}\Psi + \frac{(\rho+p)}{T}\Theta + \sigma\Psi \\ &= -\frac{\Theta\Pi}{T} - \frac{(p+\rho)}{nT}\Psi + \left(\frac{\rho+p}{nT} - \frac{\mu}{T}\right)\Psi, \\ &= -\frac{\Theta\Pi}{T} - \frac{\mu\Psi}{T}\end{aligned}$$

permitindo-se dizer que a condição termodinâmica para estabelecer a quadri-entropia de um universo com fluido dissipativo é tal que:

$$\nabla_\alpha S^\alpha = -\frac{\Theta\Pi}{T} - \frac{\mu\Psi}{T} \geq 0.\tag{2.77}$$

É possível notar que a expressão acima generaliza as condições termodinâmicas no campo de estudo da cosmologia convencional, em que a condição imposta para $dS \geq 0$ seja tratar ($\Psi = \nabla_\alpha N^\alpha = 0$), que diz haver conservação no número de partículas do universo (*ibidem*, 1992)[28]. Para o caso particular $\nabla_\alpha S^\alpha = 0$, o termo de pressão dissipativa presente no tensor-energia momento é

$$\Pi = -\mu \frac{\Psi}{\Theta}, \quad (2.78)$$

implicando relação direta com a criação de matéria ($\Psi \neq 0$) e, portanto, reconhecido como “*pressão de criação*”.

2.11 ACELERAÇÃO DO UNIVERSO E TAXA DE CRIAÇÃO DE MATÉRIA

Invocando-se, novamente, a primeira equação de Friedmann (2.36) e derivando-a em relação ao tempo, decorre que

$$2H\dot{H} = \frac{8\pi G}{3}\dot{\rho}. \quad (2.79)$$

Usando-se (2.75) em (2.79) segue, de imediato

$$\begin{aligned} 2H\dot{H} &= \frac{8\pi G}{3}[-3H(\rho + p + \Pi)] \Rightarrow \\ \dot{H} &= -4\pi G(\rho + p + \Pi) \Rightarrow \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - 4\pi G(\rho + p + \Pi) \\ &= \frac{8\pi G}{3}\rho - 4\pi G\rho - 4\pi G(p + \Pi) \\ &= -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p + 3\Pi). \end{aligned} \quad (2.80)$$

Logo, a equação de Friedmann que descreve um universo de FRW, plano e acelerado, segundo a hipótese de Prigogine, é caracterizada como:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p + 3\Pi). \quad (2.81)$$

Se $\dot{\sigma} = 0$ (entropia específica por partículas constante), então a pressão de criação torna-se

$$\Pi = -\frac{(\rho + p)}{n\Theta}\Psi = -\frac{(\rho + p)}{3H}\Gamma, \quad (2.82)$$

em que $\Gamma = \Psi/n$ é a densidade de taxa de produção de partícula com a evolução temporal do universo ($\Psi = \nabla_\alpha N^\alpha \neq 0$) (LIMA *et al*, 1992)[28]. Inserindo a expressão (2.82) na equação (2.81), a aceleração do universo é descrita como:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{4\pi G}{3}(\rho + p)\frac{\Gamma}{H}. \quad (2.83)$$

Para $\ddot{a} > 0$, implica que $\Gamma > 0$ e $|(\rho + p)\frac{\Gamma}{H}| > |(\rho + 3p)|$. Comparando-se a equação (2.83) com a (2.40), nota-se que a pressão de criação pode assumir a mesma função desempenhada pela constante cosmológica Λ_C . Nesta perspectiva, ao invés de considerar um fluido perfeito que preenche o universo de FRW plano, contendo a presença de uma entidade escura responsável em criar uma pressão negativa e contribuir para a aceleração do mesmo, também é admissível supor um universo com fluido com pressão dissipativa Π em que toda matéria, bariônica e escura gerada, garanta uma pressão de criação que o faça acelerar.

Um caso particular de (2.83) é para $p = 0$:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G\rho}{3}\left(1 - \frac{\Gamma}{H}\right), \quad (2.84)$$

implicando que $\Gamma > H$ para $\ddot{a} > 0$. Com o auxílio da equação (2.69), tem-se portanto:

$$\Gamma > H \Rightarrow \frac{\Psi}{n} > H \Rightarrow \dot{n} + 3nH > nH,$$

sendo possível reconhecer que

$$\Gamma = \frac{\dot{n}}{n} + 3H. \quad (2.85)$$

Além disso, segundo (PRIGOGINE *et al*, 1989)[16] e (LIMA *et al*, 1992)[28], para entropia específica de partículas, a taxa de criação Γ pode ser visualizada como:

$$\Gamma = \frac{\Psi}{n} = \frac{\dot{S}}{S} = \frac{\dot{N}}{N}, \quad (2.86)$$

em que S é a entropia total e N o número de partículas total do sistema. Se S e n são positivos, devido a segunda lei da termodinâmica, $\dot{S} \geq 0$, o espaço-tempo só pode criar matéria.

3 TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS EM ESPAÇOS-TEMPO CURVOS

A Teoria Quântica de Campos em Espaços-Tempo Curvos (TQCETC) é uma generalização da Teoria Quântica de Campos (TQC) padrão, descrevendo a evolução do campo de matéria em variedades não minkoswkianas e trazendo como predição o fenômeno de criação de partículas por efeitos da própria dinâmica do espaço-tempo. Este capítulo apresenta as bases para o tratamento da quantização de campos de matéria em espaços curvos clássicos, partindo da formulação e quantização canônica da TQC e sua extensão para TQCETC, através de um processo conhecido como transformações de Bogoliubov, sendo de suma importância para o final do capítulo 5.

3.1 FUNDAMENTOS DA TQC

A presente seção aborda, de maneira geral, os processos básicos para a quantização canônica de campos de matéria no espaço de Minkowski. Por simplicidade, o campo aqui tratado será o escalar, detalhes desse e de outros campos podem ser encontrados em (ASHOK, 2008)[30], p. 257-284 e (RYDER, 1996)[31], p. 127-153.

A ação de um campo escalar $\phi_a(x) = \phi_a(\mathbf{x}, t)$ em (3+1)D minkoswkiano é dada por

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a), \quad (3.1)$$

em que $\mathcal{L}$ é a densidade de lagrangiana que depende do campo e suas primeiras derivadas.

A equação de movimento para ϕ_a é obtida aplicando o princípio da mínima ação $\delta S = 0$. Usando integração por partes na equação (3.1), tem-se:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \delta \phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \delta (\partial_\mu \phi_a) \right] \\ &= \int d^4x \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \right) \right) \delta \phi_a + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \delta \phi_a \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Considerando que no infinito, $\mathbf{x} \rightarrow \infty$, a variação do campo se anula, $\delta \phi_a \rightarrow 0$, (3.2) leva a equação de Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} = 0. \quad (3.3)$$

A densidade de lagrangiana para o campo escalar real é dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi_a\partial_\nu\phi_a - \frac{1}{2}m^2\phi_a^2. \quad (3.4)$$

Com a assinatura de Minkowski $\eta^{\mu\nu} = (+1, -1, -1, -1)$, aplicando-se (3.4) em (3.3), tem-se a equação de movimento de Klein-Gordon,

$$\partial_\mu(\partial^\mu\phi_a) + m^2\phi_a = 0, \quad (3.5)$$

em que $\partial_\mu\partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$. Assim, (3.5) pode ser visualizada como:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)\phi_a(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (3.6)$$

O campo ϕ_a , expresso em termos da transformada de Fourier, é dado por

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \phi_a(\mathbf{k}, t), \quad (3.7)$$

que por sua vez, ao ser aplicado em (3.6), leva à equação de um oscilador harmônico com frequência $\omega_{\mathbf{k}}^2 = \mathbf{k}^2 + m^2$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{\mathbf{k}}^2\right)\phi_a(\mathbf{k}, t) = 0. \quad (3.8)$$

Os operadores de criação e aniquilação do oscilador harmônico são definidos como:

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) &\equiv \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} \left(\phi(\mathbf{k}, t) - \frac{i\pi(\mathbf{k}, t)}{\omega_{\mathbf{k}}} \right), \\ \hat{a}(\mathbf{k}) &\equiv \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} \left(\phi(-\mathbf{k}, t) + \frac{i\pi(-\mathbf{k}, t)}{\omega_{\mathbf{k}}} \right), \end{aligned} \quad (3.9)$$

em que $\phi(\mathbf{k}, t)$ é o campo e $\pi(\mathbf{k}, t)$ seu momento conjugado no espaço dos momentos. Assim, $\phi(\mathbf{k}, t)$ e $\pi(\mathbf{k}, t)$ podem ser escritos em termos dos operadores de criação e aniquilação a partir de (3.9) como:

$$\phi(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} (\hat{a}^\dagger(-\mathbf{k})e^{i\omega_{\mathbf{k}}t} + \hat{a}(\mathbf{k})e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}), \quad (3.10)$$

$$\pi(\mathbf{k}, t) = i\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} (-\hat{a}(\mathbf{k})e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} + \hat{a}^\dagger(-\mathbf{k})e^{i\omega_{\mathbf{k}}t}). \quad (3.11)$$

Usando-se (3.10) na transformada de Fourier (3.7), o campo $\phi(\mathbf{x}, t)$ é expresso na forma:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} (\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i\omega_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}). \quad (3.12)$$

Uma vez que $\pi(\mathbf{x}, t) = \dot{\phi}(\mathbf{x}, t)$, em que o “ponto” denota a derivada em relação ao tempo, seu momento conjugado é:

$$\pi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} i \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} (\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i\omega_{\mathbf{k}} t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} - \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}). \quad (3.13)$$

A relação de comutação entre $\phi(\mathbf{x}, t)$ e $\pi(\mathbf{y}, t)$ ocorre simultaneamente em diferentes pontos do espaço, estabelecendo-se de modo

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] &= \phi(\mathbf{x}, t) \pi(\mathbf{y}, t) - \pi(\mathbf{y}, t) \phi(\mathbf{x}, t) \\ &= \int \frac{d^3 k d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}'}}{\omega_{\mathbf{k}}}} ([\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{y})} - [\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}'}] e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{y})}) \\ &= i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \end{aligned} \quad (3.14)$$

em que a função delta de Dirac é expressa na forma:

$$\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}. \quad (3.15)$$

A condição para que (3.14) seja verdade, consiste na exigência da seguinte regra de comutação entre os operadores:

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = (2\pi)^{3/2} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (3.16)$$

assumindo também que

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}] = [\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0, \quad (3.17)$$

para que

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] = [\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = 0. \quad (3.18)$$

Escrevendo um modo de solução $u_{\mathbf{k}}$ na forma

$$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (3.19)$$

o campo $\phi(\mathbf{x}, t)$ de (3.12) pode ser visualizado como um conjunto completo de soluções dos modos $(u_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}}^*)$, com z^* denotando o complexo conjugado de qualquer quantidade complexa z sendo, portanto, escrito como:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int d^3 k (\hat{a}_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger u_{\mathbf{k}}^*),$$

em modos contínuos de $u_{\mathbf{k}}$. A expressão acima para o campo $\phi(\mathbf{x}, t)$ também pode ser descrita em modos discretos:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} (\hat{a}_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} u_{\mathbf{k}}^*). \quad (3.20)$$

Uma vez obtida a quantização do campo $\phi(x)$, pode-se definir o produto interno (BIRRELL; DAVIES, 1994), p. 11-12 [1]:

$$\begin{aligned} \langle \phi_1, \phi_2 \rangle &\equiv -i \int_t [\phi_1(x) \partial_t \phi_2^*(x) - (\partial_t \phi_1(x)) \phi_2^*(x)] d^3x \\ &= -i \int_t \phi_1(x) \overleftrightarrow{\partial}_t \phi_2^*(x) d^3x, \end{aligned} \quad (3.21)$$

em que a integração é realizada em todo o espaço a t fixo, denotando um hiper-plano do tipo-espaço simultâneo no instante t . A equação (3.21) pode ser descrita em termos explícitos do produto interno dos modos $(u_{\mathbf{k}}(x), u_{\mathbf{k}'}(x))$,

$$\langle u_{\mathbf{k}}(x), u_{\mathbf{k}'}(x) \rangle = - \int_t J_{\mu}[u_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}'}] d^3x, \quad (3.22)$$

em que $J_{\mu}[u_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}'}] = -i[u_{\mathbf{k}}^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} u_{\mathbf{k}'}(x)]$ é a densidade de corrente, dos modos de soluções, conservada $\partial^{\mu} J_{\mu} = 0$. Da expressão (3.22) se estabelece a relação de ortogonalidade entre os modos completos $(u_{\mathbf{k}}(x), u_{\mathbf{k}'}(x))$:

$$\begin{aligned} \langle u_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}'} \rangle &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \\ \langle u_{\mathbf{k}}^*, u_{\mathbf{k}'}^* \rangle &= -\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \\ \langle u_{\mathbf{k}}^*, u_{\mathbf{k}'} \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

É possível também analisar o significado dos estados de Fock, a saber, estados quânticos de sistemas com duas ou mais partículas. Antes de obtê-los, deve-se primeiramente descrever o tensor energia-momento em termos dos operadores criação e aniquilação, assim como foi feito para o campo $\phi(x)$ na equação (3.20).

O tensor-energia momento, no espaço de Minkowski, é construído com o auxílio de (2.15) sobre a densidade de lagrangiana de matéria (3.4),

$$T_{\mu\nu} = \partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \phi \partial_{\beta} \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \eta_{\mu\nu}, \quad (3.24)$$

conduzindo, por sua vez, às densidades de energia e momento, respectivamente:

$$\begin{aligned} T_{tt} &= \frac{1}{2} [(\partial_t \phi)^2 + \sum_{i=1}^3 (\partial_i \phi)^2 + m^2 \phi^2], \\ T_{ti} &= \partial_t \phi \partial_i \phi. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Substituindo o campo quantizado $\phi(t, \mathbf{x})$ de (3.20) nas densidades de energia e momento de (3.25) e integrando em todo o espaço, tem-se (BIRRELL; DAVIES, 1994), p. 14-15 [1]:

$$\begin{aligned} H &\equiv \int_t T_{tt} d^3x = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} (\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger) \omega \\ P_i &\equiv \int_t T_{ti} d^3x = \sum_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} k_i, \end{aligned} \quad (3.26)$$

em que $\omega = \omega_{\mathbf{k}} = (\mathbf{k}^2 + m^2)^{1/2}$. Conhecida a relação de comutação entre os operadores de criação e aniquilação de (3.16) e (3.17), tem-se o operador hamiltoniano:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} (\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + 1/2) \omega \equiv \sum_{\mathbf{k}} (\hat{N}_{\mathbf{k}} + 1/2) \omega. \quad (3.27)$$

De posse da construção acima tem-se o espaço de Hilbert, formado por elementos normalizados de vetores *kets* $|\rangle$, no qual os operadores de criação e aniquilação, por meio da álgebra (3.16) e (3.17), atuando sobre estes vetores descrevem os estados (*ibidem*, 1994), p. 15 [1] :

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger |n_{\mathbf{k}}\rangle &= (n+1)^{1/2} |(n+1)_{\mathbf{k}}\rangle, \\ \hat{a}_{\mathbf{k}} |n_{\mathbf{k}}\rangle &= (n)^{1/2} |(n-1)_{\mathbf{k}}\rangle. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Assim, define-se o estado de vácuo ou estado de não-partícula como aquele em que, atuado um operador de aniquilação nada produz e, atuado um operador de criação, produz o estado de partícula única com modo $\mathbf{k}$:

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\mathbf{k}} |0\rangle &= 0, \forall \mathbf{k}, \\ \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle &= |1_{\mathbf{k}}\rangle. \end{aligned} \quad (3.29)$$

O valor médio do número de partículas N é revelado tomando-se seu valor esperado para o estado de Fock que, por sua vez, generaliza a ideia do espaço de Hilbert para descrever o estado quântico com um número variável ou desconhecido de partículas. Portanto, com as propriedades de (3.28) e (3.29), tem-se:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{N}_{\mathbf{k}} | 0 \rangle &= 0, \forall \mathbf{k}, \\ \langle N \rangle &= \sum_i^j \langle {}^1 n_{\mathbf{k}_1}, \dots, {}^j n_{\mathbf{k}_j} | \hat{N}_{\mathbf{k}_i} | {}^1 n_{\mathbf{k}_1}, \dots, {}^j n_{\mathbf{k}_j} \rangle. \end{aligned} \quad (3.30)$$

3.2 FUNDAMENTOS DA TQCETC

De modo geral, como visto no tópico anterior, as etapas para a quantização de campos de matéria em um espaço-tempo minkowskiano são: (i) obtenção da lagrangiana

que leva às equações de movimento da dinâmica do sistema clássico a ser quantizado; (ii) escolha do procedimento de quantização, podendo ser o método canônico ou integrais de caminho (os mais comumente adotados); (iii) a caracterização dos estados quânticos obtidos e (iv) a interpretação física dos observáveis. Sendo esse procedimento realizado em espaços-tempo planos, o estado de vácuo é independente do observador, garantindo sua invariância à qualquer mudança de referencial e definindo-se, de maneira única, o conceito de partícula.

Em espaços-tempo curvos, as etapas para quantização dos campos são as mesmas usadas na TQC usual, salvo que ao considerar-se a dinâmica de uma partícula sob as equações de campo de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = -8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (3.31)$$

a ausência da invariância no espaço-tempo, já que a RG não é invariante frente às transformações de Lorentz, impõe dificuldades na caracterização dos estados quânticos e consequentemente na descrição física dos observáveis, tornando o conceito de partícula dependente do observador, segundo Unruh e Fulling (UNRUH, 1976)[32] e (DAVIES; FULLING; UNRUH, 1976)[33]. Além disso, em TQCETC, deve-se considerar duas importantes características inerentes ao espaço-tempo curvo para que a quantização do campo de matéria nele presente não altere a unicidade das equações de campo (preservem a solução e que dadas as condições iniciais em uma superfície tipo-tempo, essa solução seja única) (VILLAYERDE, 2012)[34]:

- *Hiperbolicidade global* - Garante a não existência de “buracos” e “singularidades” entre dois eventos p e q do espaço-tempo. Ou seja, a geometria trabalhada deve ser bem comportada. A presença de uma singularidade acarreta na não validade da unicidade das equações de campo de matéria;
- *Orientação temporal* - Diz-se que um espaço-tempo é orientável temporalmente quando, para quaisquer dois eventos p e q nele contido, a escolha de “futuro” e “passado” de p coincide com a de q ao aproximar-se p e q . Se tal orientação for dita *causal* então não existem curvas causais fechadas. A existência de tais curvas levaria a diversos paradoxos, permitindo por exemplo que um sinal volte ao seu próprio passado infinitas vezes ao longo destas.

A fim de facilitar o procedimento nas etapas de quantização da TQCETC, será considerado, a seguir, um campo escalar $\phi(x)$. Ressalta-se que as técnicas envolvidas também são aplicáveis a bósons e férmions, como será desenvolvido no capítulo 5 deste trabalho para o campo espinorial ELKO.

A ação clássica do campo escalar $\phi(x)$ evoluindo em um espaço-tempo curvo em

(1+3)D é descrita como

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - (m^2 + \xi R) \phi^2], \quad (3.32)$$

sendo essa análoga ao caso usual da TQC, pois $\eta_{\mu\nu} \longrightarrow g_{\mu\nu}(x)$, $\partial_\mu \longrightarrow \nabla_\mu$, $d^4x \longrightarrow d^4x \sqrt{-g}$, ξ é a constante de acoplamento entre o campo escalar e gravitacional e R é o escalar curvatura de Ricci (BIRRELL; DAVIES), p. 43-44 [1]. A variação da ação (3.32) com respeito a $\phi(x)$ garante a equação de movimento do campo escalar, que consiste na generalização da equação de Klein-Gordon

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = 0 \Rightarrow (\square + m^2 + \xi R) \phi = 0, \quad (3.33)$$

em que $\square = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu = g^{\mu\nu} (\partial_\mu \nabla_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \nabla_\rho) = (-g)^{-1/2} \partial_\mu [(-g)^{1/2} g^{\mu\nu} \partial_\nu]$ é o operador d'Alembert covariante.

Uma vez que ξ carrega informação da interação do campo de matéria com a curvatura, deve-se atentar a duas escolhas de interesse físico: $\xi = 0$ chamado de acoplamento mínimo e $\xi = \xi(d) = \frac{1}{4}[(d-2)/(d-1)]$ conhecido por acoplamento conforme¹, assumindo o valor $\xi = \xi(4) = \frac{1}{6}$ no contexto em questão. Neste último caso, no limite de campo não massivo, $m = 0$, a teoria que descreve a ação é invariante frente transformações conformes da métrica:

$$g_{\mu\nu}(x) \longrightarrow g'_{\mu\nu} = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}, \quad (3.34)$$

em que $\Omega(x)$ é uma função real. Por exemplo, frente a transformação conforme da métrica

$$g_{\mu\nu}(x) \longrightarrow g'_{\mu\nu} = e^{2\sigma(x)} g_{\mu\nu}, \quad (3.35)$$

os campos de matéria sofrem variações, sem modificar a ação original que os descrevem, dadas por:

$$\begin{aligned} \phi &\longrightarrow \phi' = e^{-\sigma(x)} \phi, \\ A_\mu &\longrightarrow A'_\mu = A_\mu, \\ \Psi &\longrightarrow \Psi' = e^{-3/2\sigma(x)} \Psi, \end{aligned} \quad (3.36)$$

em que $\phi = \phi(x)$ representa os campos escalares, $A_\mu = A_\mu(x)$ os campos vetoriais de gauge e $\Psi = \Psi(x)$ os campos fermiônicos.

É válido notar que os campos vetoriais de gauge, A_μ , não variam frente a transformações conformes da métrica, revelando portanto que a teoria eletromagnética é relativística em sua natureza.

A partir da equação de transformação conforme na métrica (3.34), o símbolo de

¹d é o número da dimensão do espaço-tempo.

Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$, o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ e o escalar curvatura de Ricci R transformam-se, respectivamente, como (BIRRELL; DAVIES), p. 38 [1]:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\nu}^\rho &\longrightarrow \Gamma_{\mu\nu}^{\rho'} = \Gamma_{\mu\nu}^\rho + \Omega^{-1}(\delta_\mu^\rho \nabla_\nu \Omega + \delta_\nu^\rho \nabla_\mu \Omega - g_{\mu\nu} g^{\rho\alpha} \nabla_\alpha \Omega), \\ R_{\mu\nu} &\longrightarrow R_{\mu\nu}' = \Omega^{-2} R_{\mu\nu} - (d-2)\Omega^{-1} \nabla_{\mu\rho}(\Omega^{-1}) g_\nu^\rho + (d-2)^{-1} \Omega^{-d} \nabla_{\rho\sigma}(\Omega^{d-2}) g^{\rho\sigma} \delta_{\mu\nu}, \\ R &\longrightarrow R' = \Omega^{-2} R + 2(d-1)\Omega^{-3} \nabla_{\mu\nu} \Omega g^{\mu\nu} + (d-1)(d-4)\Omega^{-4} \nabla_\mu \Omega \nabla_\nu \Omega g^{\mu\nu}.\end{aligned}\quad (3.37)$$

Avaliando-se (3.33) no limite de $m \longrightarrow 0$, aplicando-se a transformação conforme da métrica (3.34) e utilizando as transformações sobre R de (3.37) tem-se:

$$\begin{aligned}[\square + \xi R]\phi &= [\square + \frac{1}{4}(d-2)R/(d-1)]\phi \longrightarrow \\ [\square' + \frac{1}{4}(d-2)R'/(d-1)]\phi' &= [(-g')^{-1/2} \partial_\mu [(-g')^{1/2} g^{\mu\nu'} \partial_\nu] + \frac{1}{4}(d-2)R'/(d-1)]\phi' \\ &= \Omega^{-(d-2)/2} [\square + \frac{1}{4}(d-2)R/(d-1)]\phi.\end{aligned}\quad (3.38)$$

Portanto, sob uma transformação conforme na métrica, o campo escalar deve se transformar como:

$$\phi(x) \longrightarrow \phi'(x) \equiv \Omega(x)^{(2-d)/2} \phi(x). \quad (3.39)$$

Verificando-se o exemplo dado em (3.35),

$$\begin{aligned}g_{\mu\nu}' &= e^{2\sigma(x)} g_{\mu\nu} \Rightarrow \\ \phi'(x) &= (e^{\sigma(x)})^{(2-d)/2} \phi(x) \xrightarrow{d=4} \\ \phi'(x) &= e^{-\sigma(x)} \phi(x),\end{aligned}$$

é confirmado a transformação para o campo escalar como em (3.36).

O produto interno para duas soluções de (3.33) é uma generalização de (3.21), dado por (*ibidem*), p. 44 [1]:

$$\langle \phi_1(x), \phi_2(x) \rangle = i \int_\Sigma (\phi_2^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi_1(x)) (\sqrt{-g_\Sigma(x)}) d\Sigma^\mu,$$

em que $d\Sigma^\mu = d\Sigma n^\mu$ representa o elemento de volume de uma hiper-superfície tipo-espaço Σ , orientável e em espaço-tempo globalmente hiperbólico, com n^μ denotando um vetor tipo-tempo, orientado para o futuro e normal à superfície Σ .

Se Σ_1 e Σ_2 são duas hiper-superfícies diferentes, então $\langle \phi_1, \phi_2 \rangle_{\Sigma_1} = \langle \phi_1, \phi_2 \rangle_{\Sigma_2}$. Usando-se o teorema de Gauss, a demonstração para esta afirmação segue como:

$$\begin{aligned}\langle \phi_1, \phi_2 \rangle_{\Sigma_2} - \langle \phi_1, \phi_2 \rangle_{\Sigma_1} &= i \oint_{\partial\Sigma} (\phi_2^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi_1) d\Sigma^\mu = i \int_V \nabla^\mu (\phi_2^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi_1) dV \\ &= i \int_V \nabla^\mu (\phi_2^* \partial_\mu \phi_1 - \phi_1 \partial_\mu \phi_2^*) dV\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= i \int_V (\nabla^\mu \phi_2^* \partial_\mu \phi_1 + \phi_2^* \nabla^\mu \partial_\mu \phi_1 - \nabla^\mu \phi_1 \partial_\mu \phi_2^* - \phi_1 \nabla^\mu \partial_\mu \phi_2^*) dV \\
&= i \int_V (\phi_2^* \square \phi_1 - \phi_1 \square \phi_2^*) dV \\
&= i \int_V (-\phi_2^* [(m^2 + \xi R) \phi_1] + \phi_1 [(m^2 + \xi R) \phi_2^*]) dV = 0.
\end{aligned}$$

Assim, o produto interno para os modos $(u_{\mathbf{k}}(x), u_{\mathbf{k}'}(x))$ visto em (3.22) é, em espaço curvo, generalizado para:

$$\langle u_{\mathbf{k}}(x), u_{\mathbf{k}'}(x) \rangle = - \int_\Sigma J_\mu[u_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}'}] d\Sigma^\mu, \quad (3.40)$$

em que $J_\mu[u_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}'}] = -i[u_{\mathbf{k}}^*(x) \overleftrightarrow{\nabla}_\mu u_{\mathbf{k}'}(x)]$ é a densidade de corrente conservada $\nabla^\mu J_\mu = 0$. Existindo uma base completa de soluções $u_{\mathbf{k}}$ para (3.33), essas serão ortonormais através do produto interno (3.40), satisfazendo

$$\begin{aligned}
\langle u_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}'} \rangle &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \\
\langle u_{\mathbf{k}}^*, u_{\mathbf{k}'}^* \rangle &= -\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \\
\langle u_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}'}^* \rangle &= 0
\end{aligned}$$

e o campo $\phi(x)$ pode ser expandido como em (3.20): $\phi(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} (\hat{a}_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger u_{\mathbf{k}}^*)$. Dessa maneira, a covariância da teoria é implementada, obedecendo as relações de comutação: $[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$, $[\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = [\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}] = 0$.

A construção do estado de vácuo e do espaço de Fock procede da mesma forma como descrito na TQC usual. No entanto, há um adendo: o conjunto dos modos (3.19) foram construídos naturalmente em Minkowski, que por sua vez está associado ao grupo de Poincaré, que leva à unicidade do vácuo e à existência de um conjunto natural de modos que são diretamente associados ao sistema de coordenadas (t, x, y, z) , assim o elemento de linha, ds^2 , é invariante sob transformações de Poincaré (*boosts + translações*). Porém, este grupo não é mais um grupo de simetria no espaço-curvo (BIRRELL; DAVIES, 1994), p. 45 [1] e (DAVIES; FULLING; HUNRUH, 1976)[33]. Uma forma de resolver este aparente problema para evolução dos campos quânticos de matéria em uma variedade pseudo-Riemanniana é por meio das transformações de Bogoliubov (BOGOLIUBOV, 1958)[35], descritas a seguir.

3.3 TRANSFORMAÇÃO DE BOGOLIUBOV E CRIAÇÃO DE PARTÍCULAS POR EFEITOS GRAVITACIONAIS

Os princípios básicos da Relatividade Geral de Einstein não impõem referenciais absolutos, assim pode-se, por exemplo, supor um espaço-tempo arbitrário dividido em três regiões distintas: (A) - minkoswkiana que representa o passado; (B) - minkoswkiana que representa o futuro; (C) - intermediária à (A) e (B) com curvatura não nula, $R_{\mu\nu\lambda}^\rho \neq 0$.

Para as regiões (A) e (B), a quantização do campo ϕ em modos discretos² torna-se, respectivamente:

$$\begin{aligned}\phi_{in}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{\mathbf{k}} (\hat{a}_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} u_{\mathbf{k}}^*), \\ \phi_{out}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{\mathbf{j}} (\hat{a}_{\mathbf{j}} \bar{u}_{\mathbf{j}} + \hat{a}_{\mathbf{j}}^{\dagger} \bar{u}_{\mathbf{j}}^*),\end{aligned}\tag{3.41}$$

em que os subíndices *in* e *out* designam o passado e futuro, nesta ordem. Na região (A) os operadores de criação e aniquilação atuam no estado de vácuo como: $\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}|0\rangle_{in} \equiv |1_{\mathbf{k}}\rangle_{in}$ e $\hat{a}_{\mathbf{k}}|0\rangle_{in} \equiv 0|0\rangle_{in}$. Já na região (B), os operadores atuam no estado de vácuo como: $\hat{a}_{\mathbf{j}}^{\dagger}|0\rangle_{out} \equiv |1_{\mathbf{j}}\rangle_{out}$ e $\hat{a}_{\mathbf{j}}|0\rangle_{out} \equiv 0|0\rangle_{out}$. É importante notar que agora há dois estados de vácuo distintos.

Usando a chamada transformação de Bogoliubov, pode-se expressar o modo $\bar{u}_{\mathbf{j}}$ do futuro em termos das combinações dos modos $(u_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}}^*)$ do passado, bem como o inverso (BIRRELL; DAVIES, 1994), p. 46-48 [1], (PARKER; TOMS, 2009), p. 51-53 [2] e (BOGOLIUBOV, 1958)[35]:

$$\bar{u}_{\mathbf{j}} = \sum_{\mathbf{k}} (\alpha_{\mathbf{j}\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} + \beta_{\mathbf{j}\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}^*)\tag{3.42}$$

e

$$u_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{j}} (\alpha_{\mathbf{j}\mathbf{k}}^* \bar{u}_{\mathbf{j}} + \beta_{\mathbf{j}\mathbf{k}} \bar{u}_{\mathbf{j}}^*),\tag{3.43}$$

em que $\alpha_{\mathbf{j}\mathbf{k}}$ e $\beta_{\mathbf{j}\mathbf{k}}$ são os coeficientes de Bogoliubov. Os campos ϕ_{in} e ϕ_{out} são a evolução de um mesmo campo ϕ do passado ao futuro. Portanto, eles podem ser comparados:

$$\sum_{\mathbf{k}} (\hat{a}_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} u_{\mathbf{k}}^*) = \sum_{\mathbf{j}} (\hat{a}_{\mathbf{j}} \bar{u}_{\mathbf{j}} + \hat{a}_{\mathbf{j}}^{\dagger} \bar{u}_{\mathbf{j}}^*).\tag{3.44}$$

Usando (3.42) em (3.44) tem-se:

$$\begin{aligned}& \sum_{\mathbf{k}} (\hat{a}_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} u_{\mathbf{k}}^*) \\ &= \sum_{\mathbf{j}} [\hat{a}_{\mathbf{j}} \sum_{\mathbf{k}} (\alpha_{\mathbf{j}\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} + \beta_{\mathbf{j}\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}^*) + \hat{a}_{\mathbf{j}}^{\dagger} \sum_{\mathbf{k}} (\alpha_{\mathbf{j}\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}}^* + \beta_{\mathbf{j}\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}})] \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{j}} (\alpha_{\mathbf{j}\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{j}} + \beta_{\mathbf{j}\mathbf{k}}^* \hat{a}_{\mathbf{j}}^{\dagger}) u_{\mathbf{k}} + (\beta_{\mathbf{j}\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{j}} + \alpha_{\mathbf{j}\mathbf{k}}^* \hat{a}_{\mathbf{j}}^{\dagger}) u_{\mathbf{k}}^*.\end{aligned}\tag{3.45}$$

Como consequência de (3.45), tem-se os operadores de aniquilação e criação do passado em termos dos que atuam nos estados do futuro:

$$\hat{a}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{j}} (\alpha_{\mathbf{j}\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{j}} + \beta_{\mathbf{j}\mathbf{k}}^* \hat{a}_{\mathbf{j}}^{\dagger}),\tag{3.46}$$

²A decomposição também pode ser feita a modos contínuos de $u_{\mathbf{k}}$.

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger = \sum_{\mathbf{j}} (\beta_{\mathbf{j}\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{j}} + \alpha_{\mathbf{j}\mathbf{k}}^* \hat{a}_{\mathbf{j}}^\dagger).$$

Analogamente, usando (3.43) em (3.44) tem-se os operadores de aniquilação e criação do futuro em termos dos que atuam nos estados do passado:

$$\begin{aligned}\hat{a}_{\mathbf{j}} &= \sum_{\mathbf{k}} (\alpha_{\mathbf{j}\mathbf{k}}^* \hat{a}_{\mathbf{k}} - \beta_{\mathbf{j}\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger), \\ \hat{a}_{\mathbf{j}}^\dagger &= \sum_{\mathbf{k}} (\alpha_{\mathbf{j}\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger - \beta_{\mathbf{j}\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}).\end{aligned}\tag{3.47}$$

Impondo que a álgebra de $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ e $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$ deve valer para $\hat{a}_{\mathbf{j}}$ e $\hat{a}_{\mathbf{j}}^\dagger$, tem-se, a partir de (3.47), que

$$\begin{aligned}[\hat{a}_{\mathbf{j}}, \hat{a}_{\mathbf{j}}^\dagger] &= \sum_{\mathbf{k}} [(\alpha_{\mathbf{j}\mathbf{k}}^* \hat{a}_{\mathbf{k}} - \beta_{\mathbf{j}\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger)(\alpha_{\mathbf{j}\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger - \beta_{\mathbf{j}\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}) - (\alpha_{\mathbf{j}\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger - \beta_{\mathbf{j}\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}})(\alpha_{\mathbf{j}\mathbf{k}}^* \hat{a}_{\mathbf{k}} - \beta_{\mathbf{j}\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger)] \\ &= \sum_{\mathbf{k}} (|\alpha_{\mathbf{j}\mathbf{k}}|^2 \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger - \alpha_{\mathbf{j}\mathbf{k}}^* \beta_{\mathbf{j}\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} - \beta_{\mathbf{j}\mathbf{k}}^* \alpha_{\mathbf{j}\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger + |\beta_{\mathbf{j}\mathbf{k}}|^2 \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \\ &\quad - |\alpha_{\mathbf{j}\mathbf{k}}|^2 \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \alpha_{\mathbf{j}\mathbf{k}} \beta_{\mathbf{j}\mathbf{k}}^* \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger + \beta_{\mathbf{j}\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{j}\mathbf{k}}^* \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} - |\beta_{\mathbf{j}\mathbf{k}}|^2 \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger) \\ &= |\alpha_{\mathbf{j}\mathbf{k}}|^2 [\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger] + \alpha_{\mathbf{j}\mathbf{k}} \beta_{\mathbf{j}\mathbf{k}}^* [\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger] + \alpha_{\mathbf{j}\mathbf{k}}^* \beta_{\mathbf{j}\mathbf{k}} [\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}}] - |\beta_{\mathbf{j}\mathbf{k}}|^2 [\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger] = 1,\end{aligned}$$

sendo estabelecida a seguinte condição sobre os coeficientes de Bogoliubov para o caso escalar:

$$\sum_{\mathbf{k}} (|\alpha_{\mathbf{j}\mathbf{k}}|^2 - |\beta_{\mathbf{j}\mathbf{k}}|^2) = 1.\tag{3.48}$$

Paralelamente, pode-se analisar o que ocorre ao aplicar o operador de aniquilação da região (B) sobre o vácuo da região (A) com uso de (3.47):

$$\begin{aligned}\hat{a}_{\mathbf{j}}|0\rangle_{in} &= \sum_{\mathbf{k}} (\alpha_{\mathbf{j}\mathbf{k}}^* \hat{a}_{\mathbf{k}} - \beta_{\mathbf{j}\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger)|0\rangle_{in} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} (\alpha_{\mathbf{j}\mathbf{k}}^* \hat{a}_{\mathbf{k}}|0\rangle_{in} - \beta_{\mathbf{j}\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger|0\rangle_{in}) \\ &= \sum_{\mathbf{k}} -\beta_{\mathbf{j}\mathbf{k}}^*|1_{\mathbf{k}}\rangle_{in}.\end{aligned}\tag{3.49}$$

O número esperado de partículas em (B) a partir do vácuo de (A) torna-se:

$$\begin{aligned}\langle N_{out} \rangle &= \langle in|0|\hat{N}_{out}|0\rangle_{in} = \langle in|0|\hat{a}_{\mathbf{j}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{j}}|0\rangle_{in} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} (-\beta_{\mathbf{j}\mathbf{k}}^*)(-\beta_{\mathbf{j}\mathbf{k}}) \langle in|1_{\mathbf{k}}|1_{\mathbf{k}}\rangle_{in} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} |\beta_{\mathbf{j}\mathbf{k}}|^2.\end{aligned}\tag{3.50}$$

O procedimento inverso também é válido, ou seja, aplicando-se o operador aniquilação da região (A) sobre o vácuo da região (B), com uso de (3.46) e calculando o número esperado

de partículas em (A) a partir do vácuo de (B), tem-se respectivamente:

$$\begin{aligned}\hat{a}_{\mathbf{k}}|0\rangle_{out} &= \sum_{\mathbf{j}} \beta_{\mathbf{j}\mathbf{k}}^* |1_{\mathbf{j}}\rangle_{out}, \\ \langle N_{in} \rangle &= \langle out|0| \hat{N}_{in} |0\rangle_{out} = \sum_{\mathbf{j}} |\beta_{\mathbf{j}\mathbf{k}}|^2.\end{aligned}\tag{3.51}$$

Percebe-se, através das equações (3.49) e (3.51), que a noção de vácuo em espaços curvos difere daquela obtida em um espaço-tempo minkoswkiano, pois mesmo começando com um vácuo sem partículas, um observador presente em outra região de um espaço-tempo arbitrário perceberá um estado de não-vácuo. Consequentemente, como se nota em (3.50) e (3.51), caso qualquer coeficiente de Bogoliubov $\beta_{\mathbf{j}\mathbf{k}}$ seja não nulo, um observador de (B)/(A) medirá um número não nulo de partículas sobre o vácuo de (A)/(B), respectivamente. Esse número não nulo de partículas detectado por ambos os observadores é atribuído ao processo de criação de partículas pelo campo gravitacional da região intermediária (C), uma vez que nenhum outro campo externo foi levado em consideração.

No capítulo a seguir será apresentado algumas propriedades do campo espinorial ELKO, objeto central neste trabalho.

4 CAMPO ESPINORIAL ELKO

O capítulo em questão apresenta alguns aspectos importantes no que tange a natureza e dinâmica do campo espinorial ELKO, candidato associado à partícula fermiônica “escura” de spin 1/2. Detalhes da construção algébrica e etapas para sua quantização são encontrados em (ALHUWALIA; GRUMILLER, 2005)[14], (*ibdem*, 2005)[15], (ROGERIO, 2014)[36] e (LEE, 2012)[37].

4.1 ESTRUTURA DOS ESPINORES ELKO

Motivados pelo estudo dos espinores de Majorana¹, Ahluwalia e Grumiller propuseram uma classe de autoespinores que, ao serem atuados pelo operador conjugação de carga, devolvem autovalores ± 1 . Batizados como ELKO, tais espinores são definidos no espaço dos momentos por (ALHUWALIA; GRUMILLER, 2005)[14] e (*ibdem*, 2005)[15]:

$$C\lambda(\mathbf{k}) = \pm\lambda(\mathbf{k}) \Rightarrow \begin{cases} C\lambda^S(\mathbf{k}) = +1.\lambda^S(\mathbf{k}) \\ C\lambda^A(\mathbf{k}) = -1.\lambda^A(\mathbf{k}) \end{cases} \quad (4.1)$$

em que C é o operador conjugação de carga na representação de Weyl, a saber (4.2), e $(\lambda^S(\mathbf{k}), \lambda^A(\mathbf{k}))$ é o conjunto dos autoespinores de C com autovalores $+1$ e -1 , sendo *self-conjugate* (autoconjugado) e *anti-self-conjugate* (anti-autoconjugado), respectivamente.

$$C \stackrel{\text{Weyl}}{=} \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & i\Theta \\ -i\Theta & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix} K, \quad (4.2)$$

em que $\Theta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ é o operador de reversão temporal de Wigner e K um operador que toma o complexo conjugado de qualquer quantidade a sua direita.

A construção do objeto que obedece (4.1) é implementada na representação de Weyl, em que as matrizes gama de Dirac são da forma $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \\ I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix}$ e $\gamma^i = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & -\sigma_{2 \times 2}^i \\ \sigma_{2 \times 2}^i & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix}$, na qual $\sigma^i = \sigma_i$ são as matrizes de Pauli. Neste processo, é verificado que os espinores

¹Ettore Majorana foi um italiano, supervisionado por Enrico Fermi, que desenvolveu trabalhos promissores com neutrinos e desapareceu misteriosamente no ano de 1938. Os espinores de Majorana são autoespinores do operador conjugação de carga com autovalor positivo $+1$.

ELKO tem helicidades duais $\beta = (\{+, -\}, \{-, +\})$ para cada um dos autoespinores auto-conjugado e anti-autoconjugado, sendo dados, formal e pictoricamente, por (ROGERIO, 2014)[36]:

$$\begin{aligned}\lambda_{\{+,-\}}^S(\mathbf{0}) &= \begin{pmatrix} +\sigma_2[\phi_L^-(\mathbf{0})]^* \\ \phi_L^-(\mathbf{0}) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \uparrow\uparrow \\ \downarrow\downarrow \end{pmatrix}, \\ \lambda_{\{-,+\}}^S(\mathbf{0}) &= \begin{pmatrix} +\sigma_2[\phi_L^+(\mathbf{0})]^* \\ \phi_L^+(\mathbf{0}) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \downarrow\downarrow \\ \uparrow\uparrow \end{pmatrix}, \\ \lambda_{\{+,-\}}^A(\mathbf{0}) &= \begin{pmatrix} -\sigma_2[\phi_L^-(\mathbf{0})]^* \\ \phi_L^-(\mathbf{0}) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \uparrow\uparrow \\ \downarrow\downarrow \end{pmatrix}, \\ \lambda_{\{-,+\}}^A(\mathbf{0}) &= \begin{pmatrix} -\sigma_2[\phi_L^+(\mathbf{0})]^* \\ \phi_L^+(\mathbf{0}) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \downarrow\downarrow \\ \uparrow\uparrow \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{4.3}$$

sendo $\phi_L^\pm(\mathbf{0})$ os espinores de mão esquerda de Weyl no repouso $\mathbf{k} = 0$,

$$\begin{aligned}\phi_L^+(\mathbf{0}) &= \sqrt{m} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)e^{-i\varphi/2} \\ \sin(\theta/2)e^{+i\varphi/2} \end{pmatrix}, \\ \phi_L^-(\mathbf{0}) &= \sqrt{m} \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2)e^{-i\varphi/2} \\ \cos(\theta/2)e^{+i\varphi/2} \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{4.4}$$

em que m representa a massa do espinor. Nota-se que no limite de massa nula, os espinores de Weyl da equação (4.4) zeram, deixando claro que os espinores ELKO devem ser massivos para existirem.

Aplicando um *boost* sobre os espinores no repouso (4.3), tem-se para momentos arbitrários:

$$\begin{aligned}\lambda_{\{\pm,\mp\}}^S(\mathbf{k}) &= \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(1 \pm \frac{k}{E+m}\right) \lambda_{\{\pm,\mp\}}^S(\mathbf{0}), \\ \lambda_{\{\pm,\mp\}}^A(\mathbf{k}) &= \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(1 \pm \frac{k}{E+m}\right) \lambda_{\{\pm,\mp\}}^A(\mathbf{0}),\end{aligned}\tag{4.5}$$

em que $E = (k^2 + m^2)^{1/2}$ é a energia relativística.

As equações apresentadas entre (4.3) e (4.5) descrevem a estrutura do espinor ELKO usual. Analogamente como ocorre para os espinores de Dirac (RYDER, 1996), p. 46-47 [31], a cada espinor usual $\lambda_\beta(\mathbf{k})$ deve haver um dual $\bar{\lambda}_\beta(\mathbf{k})$ tal que, $\bar{\lambda}_\beta(\mathbf{k})\lambda_\beta(\mathbf{k})$ seja invariante por transformações de Lorentz arbitrárias. Com os passos apresentados em (ROGERIO, 2014)[36], encontra-se o dual do espinor ELKO na forma:

$$\bar{\lambda}_{\{\mp,\pm\}}^{S/A}(\mathbf{k}) = \pm i[\lambda_{\{\pm,\mp\}}^{S/A}(\mathbf{k})]^\dagger \gamma^0,\tag{4.6}$$

em que $A^\dagger$ denota o transposto conjugado de qualquer objeto A . Com (4.5) e (4.6), a invariância é respeitada:

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_\beta(\mathbf{k})^S \lambda_{\beta'}(\mathbf{k})^S &= 2m\delta_{\beta\beta'}, \\ \bar{\lambda}_\beta(\mathbf{k})^A \lambda_{\beta'}(\mathbf{k})^A &= -2m\delta_{\beta\beta'}\end{aligned}\tag{4.7}$$

sendo $\delta_{\beta\beta'} = 0$ para $\beta \neq \beta'$ e $\delta_{\beta\beta'} = 1$ para $\beta = \beta'$. Um novo dual tem sido proposto recentemente (AHLUWALIA, 2016)[42] e (ROGERIO; SILVA, 2016)[43], satisfazendo a invariância (4.7).

4.2 CAMPO QUÂNTICO DOS ESPINORES ELKO

Uma vez que os espinores ELKO generalizam os espinores de Majorana e, este último não obedece a equação de Dirac, é natural que tais objetos também não satisfaçam esta equação, como mostrado em (*ibidem*, 2014)[36]. Contudo, eles obedecem a equação de Klein-Gordon, pois como esperado para qualquer campo, a conservação de energia deve ser mantida. Expandindo o campo quântico do ELKO no espaço das posições minkoswkiano, $\mathbf{f}(x) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, em termos da transformada de Fourier, assim como feito para o caso escalar (3.12), seus espinores $\lambda_\beta^{S/A}(\mathbf{k})$ tornam-se coeficientes da expansão:

$$\mathbf{f}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{a(k^\mu)}{2E(\mathbf{k})} \sum_\beta [\hat{c}_\beta(\mathbf{k}) \lambda_\beta^S(\mathbf{k}) e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{c}_\beta^\dagger(\mathbf{k}) \lambda_\beta^A(\mathbf{k}) e^{+ik_\mu x^\mu}], \tag{4.8}$$

em que $\hat{c}_\beta(\mathbf{k})$ e $\hat{c}_\beta^\dagger(\mathbf{k})$ são os operadores de aniquilação e criação (*ibidem*, 2014)[36], cuja relação algébrica deve ser determinada e $a(k^\mu) \in \mathbb{R}$ será obtido a seguir. O campo (4.8) conduz às soluções de ondas planas da equação de Klein-Gordon:

$$(\square + m^2)\mathbf{f}(x). \tag{4.9}$$

A densidade de lagrangiana livre do ELKO é a de Klein-Gordon

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \bar{\mathbf{f}}(x) \partial_\mu \mathbf{f}(x) - m^2 \bar{\mathbf{f}}(x) \mathbf{f}(x). \tag{4.10}$$

A densidade de hamiltoniana, por sua vez, é

$$\mathcal{H} = \Pi(x) \frac{\partial \mathbf{f}(x)}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}(x)}{\partial t} \bar{\Pi}(x) - \mathcal{L}. \tag{4.11}$$

Usando (4.10) tem-se:

$$\Pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{f}}(x)} = \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}(x)}{\partial t},$$

$$\bar{\Pi}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{f}}(x)} = \frac{\partial \mathbf{f}(x)}{\partial t}.$$

Integrando $\mathcal{H}$ em todo espaço, se obtém a hamiltoniana:

$$H = \int d^3x (\partial^0 \bar{\mathbf{f}}(x) \partial_0 \mathbf{f}(x) - \partial^i \bar{\mathbf{f}}(x) \partial_i \mathbf{f}(x) + m^2 \bar{\mathbf{f}}(x) \mathbf{f}(x)). \quad (4.12)$$

Substituindo os operadores de campo quântico usual e dual a partir da expressão (4.8) e realizando as operações necessárias, obtém-se:

$$\begin{aligned} H = & \int \left(\frac{d^3k}{(2\pi)^3} \right) \left(\frac{a^2(k^\mu)}{4E(\mathbf{k})^2} \right) \sum_{\beta} [(k_0^2 + \mathbf{k}^2 + m^2) \\ & \times (\hat{c}_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{k}) \hat{c}_{\beta}(\mathbf{k}) \bar{\lambda}_{\beta}^S(\mathbf{k}) \lambda_{\beta}^S(\mathbf{k}) + \hat{c}_{\beta}(\mathbf{k}) \hat{c}_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{k}) \bar{\lambda}_{\beta}^A(\mathbf{k}) \lambda_{\beta}^A(\mathbf{k}))]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Usando a condição (4.7), a equação (4.13) passa a ser escrito como:

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} a^2(k^\mu) m \sum_{\beta} [\hat{c}_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{k}) \hat{c}_{\beta}(\mathbf{k}) - \hat{c}_{\beta}(\mathbf{k}) \hat{c}_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{k})]. \quad (4.14)$$

É preciso notar que se $\hat{c}_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{k})$ e $\hat{c}_{\beta}(\mathbf{k})$ comutarem, a hamiltoniana pode assumir valores negativos, assim as seguintes relações de anticomutação precisam ser satisfeitas:

$$\{\hat{c}_{\beta}(\mathbf{k}), \hat{c}_{\beta'}^{\dagger}(\mathbf{k}')\} = b(k^\mu) (2\pi)^3 2E(\mathbf{k}) \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\beta\beta'}, \quad (4.15)$$

de modo que

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} a^2(k^\mu) m \sum_{\beta} [\hat{c}_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{k}) \hat{c}_{\beta}(\mathbf{k}) - b(k^\mu) (2\pi)^3 2E(\mathbf{k}) \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') + \hat{c}_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{k}) \hat{c}_{\beta}(\mathbf{k})].$$

Assim, a equação (4.14) torna-se compatível com (4.15) quando:

$$\begin{aligned} a(k^\mu) &= \sqrt{\frac{2E(\mathbf{k})}{m}}, \\ b(k^\mu) &= \frac{1}{2E(\mathbf{k})}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Com os valores de $a(k^\mu)$ e $b(k^\mu)$ e munido da forma integral da delta de Dirac, a Hamiltoniana torna-se, então:

$$H = H_0 + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} 2E(\mathbf{k}) \sum_{\beta} 2\hat{c}_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{k}) \hat{c}_{\beta}(\mathbf{k}), \quad (4.17)$$

em que $H_0 = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x \int d^3k 2E(\mathbf{k})$ assume o papel da energia do ponto zero do oscilador harmônico. Desta forma, as relações de anti-comutação entre os operadores de criação e aniquilação se estabelecem como:

$$\begin{aligned}\{\hat{c}_\beta(\mathbf{k}), \hat{c}_{\beta'}^\dagger(\mathbf{k}')\} &= (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\beta\beta'}, \\ \{\hat{c}_\beta^\dagger(\mathbf{k}), \hat{c}_{\beta'}^\dagger(\mathbf{k}')\} &= \{\hat{c}_\beta(\mathbf{k}), \hat{c}_{\beta'}(\mathbf{k}')\} = 0.\end{aligned}\quad (4.18)$$

Por fim, aplicando-se o valor de $a(k^\mu)$ de (4.16) sobre o campo quântico para o ELKO em (4.8), tem-se:

$$\mathfrak{f}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2mE(\mathbf{k})}} \sum_\beta [\hat{c}_\beta(\mathbf{k}) \lambda_\beta^S(\mathbf{k}) e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{c}_\beta^\dagger(\mathbf{k}) \lambda_\beta^A(\mathbf{k}) e^{ik_\mu x^\mu}], \quad (4.19)$$

com seu dual dado por

$$\bar{\mathfrak{f}}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2mE(\mathbf{k})}} \sum_\beta [\hat{c}_\beta^\dagger(\mathbf{k}) \bar{\lambda}_\beta^S(\mathbf{k}) e^{ik_\mu x^\mu} + \hat{c}_\beta(\mathbf{k}) \bar{\lambda}_\beta^A(\mathbf{k}) e^{-ik_\mu x^\mu}]. \quad (4.20)$$

Uma outra maneira de escrever o campo quântico para o ELKO é distinguindo os operadores de criação e aniquilação, estando em sua forma não majoranizada (LEE, 2012)[37] e (AGARWAL, *et al*, 2015)[38]:

$$\begin{aligned}\mathfrak{f}(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2mE(\mathbf{k})}} \sum_\beta [\hat{a}_\beta(\mathbf{k}) \lambda_\beta^S(\mathbf{k}) e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{b}_\beta^\dagger(\mathbf{k}) \lambda_\beta^A(\mathbf{k}) e^{ik_\mu x^\mu}], \\ \bar{\mathfrak{f}}(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2mE(\mathbf{k})}} \sum_\beta [\hat{a}_\beta^\dagger(\mathbf{k}) \bar{\lambda}_\beta^S(\mathbf{k}) e^{ik_\mu x^\mu} + \hat{b}_\beta(\mathbf{k}) \bar{\lambda}_\beta^A(\mathbf{k}) e^{-ik_\mu x^\mu}].\end{aligned}\quad (4.21)$$

Os operadores de (4.21) satisfazem a seguinte relação de anti-comutação:

$$\begin{aligned}\{\hat{a}_\beta(\mathbf{k}), \hat{a}_{\beta'}^\dagger(\mathbf{k}')\} &= (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\beta\beta'}, \\ \{\hat{a}_\beta^\dagger(\mathbf{k}), \hat{a}_{\beta'}^\dagger(\mathbf{k}')\} &= \{\hat{a}_\beta(\mathbf{k}), \hat{a}_{\beta'}(\mathbf{k}')\} = 0, \\ \{\hat{b}_\beta(\mathbf{k}), \hat{b}_{\beta'}^\dagger(\mathbf{k}')\} &= (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\beta\beta'}, \\ \{\hat{b}_\beta^\dagger(\mathbf{k}), \hat{b}_{\beta'}^\dagger(\mathbf{k}')\} &= \{\hat{b}_\beta(\mathbf{k}), \hat{b}_{\beta'}(\mathbf{k}')\} = 0.\end{aligned}\quad (4.22)$$

De posse do ferramental apresentado para o tratamento de campos em espaços curvos e com a estrutura dos espinores ELKO, o capítulo seguinte tem como propósito conduzir aos cálculos para obtenção do número esperado de partículas ELKO, cujo campo evolui num universo de FRW.

5 CRIAÇÃO DE PARTÍCULAS ESPINORIAIS ELKO POR EFEITOS GRAVITACIONAIS

Este capítulo apresenta os cálculos para obtenção da taxa de partículas ELKO no cenário de FRW plano, homogêneo e isotrópico.

5.1 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO PARA O ELKO EM FRW

A ação do espinor ELKO em espaço-tempo curvo é dada por (SILVA; PEREIRA, 2014)[39]:

$$S = \frac{1}{2} \int \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\nabla_\mu \bar{\lambda} \nabla_\nu \lambda + \nabla_\nu \bar{\lambda} \nabla_\mu \lambda) - m^2 \bar{\lambda} \lambda - \xi R \bar{\lambda} \lambda \right) d^4x, \quad (5.1)$$

em que $g \equiv \det g_{\mu\nu}$. As derivadas covariantes atuantes no espinor ELKO são $\nabla_\mu \bar{\lambda} = \partial_\mu \bar{\lambda} + \bar{\lambda} \Gamma_\mu$ e $\nabla_\mu \lambda = \partial_\mu \lambda - \Gamma_\mu \lambda$, sendo Γ_μ as conexões de spin. ξ é uma constante de acoplamento¹ do campo de matéria em questão com a curvatura e R é o escalar de Ricci. Em um universo espacialmente plano, homogêneo e isotrópico

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (5.2)$$

as conexões de spin são dadas por $\Gamma_0 = 0$ e $\Gamma_i = \frac{\dot{a}}{2} \gamma_0 \gamma_i$, com “ponto” denotando derivada em relação ao tempo, γ_0 , γ_i sendo as matrizes gama de Dirac.

Tomando-se o princípio da mínima ação em (5.1) em relação a λ e $\bar{\lambda}$, tem-se respectivamente:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha [\sqrt{-g} g^{\alpha\nu} (\partial_\nu \lambda - \Gamma_\nu \lambda)] + \sqrt{-g} [g^{\mu\nu} (\Gamma_\mu \Gamma_\nu \lambda - \Gamma_\mu (\partial_\nu \lambda)) + m^2 \lambda + \xi R \lambda] &= 0, \\ \partial_\alpha [\sqrt{-g} g^{\alpha\nu} (\partial_\nu \bar{\lambda} + \bar{\lambda} \Gamma_\nu)] + \sqrt{-g} [g^{\mu\nu} (\Gamma_\mu \Gamma_\nu \bar{\lambda} + (\partial_\mu \bar{\lambda}) \Gamma_\nu) + m^2 \bar{\lambda} + \xi R \bar{\lambda}] &= 0. \end{aligned}$$

As equações de movimento explícitas para o campo usual e dual do ELKO, neste cenário, são:

$$\ddot{\lambda} + 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \dot{\lambda} - \frac{1}{a^2} \partial_i^2 \lambda - \frac{3}{4} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \lambda + \frac{\dot{a}}{a^2} \gamma_0 \gamma_i (\partial_i \lambda) + (m^2 + \xi R) \lambda = 0, \quad (5.3)$$

¹ $\xi = \xi(d) \equiv \frac{1}{4} \frac{d-2}{d-1}$, no caso conforme, em que d é a dimensão do espaço-tempo.

$$\ddot{\bar{\lambda}} + 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \dot{\bar{\lambda}} - \frac{1}{a^2} \partial_i^2 \bar{\lambda} - \frac{3}{4} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \bar{\lambda} - \frac{\dot{a}}{a^2} (\partial_i \bar{\lambda}) \gamma_0 \gamma_i + (m^2 + \xi R) \bar{\lambda} = 0.$$

Para os propósitos deste trabalho é conveniente tomar a evolução do espinor em questão sob o chamado tempo conforme, $d\eta = \frac{1}{a(t)} dt$, transformando o elemento de linha (5.2) em $ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2)$ (carácter minkoswkiano), implicando $\lambda(\mathbf{x}, t) \longrightarrow \lambda(\mathbf{x}, \eta)$ e $a(t) \longrightarrow a(\eta)$. Desta maneira, assumindo a notação $f' = \frac{d}{d\eta} f$, tem-se as transformações:

$$\begin{aligned} \ddot{\lambda} &= \frac{1}{a} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{a} \lambda' \right) = \frac{1}{a^2} \lambda'' - \frac{1}{a} a^{-2} a' \lambda' = \frac{1}{a^2} \lambda'' - \frac{a'}{a^3} \lambda', \\ \dot{a} \dot{\lambda} &= \left(\frac{1}{a} \frac{d}{d\eta} a \right) \left(\frac{1}{a} \frac{d}{d\eta} \lambda \right) = \frac{1}{a^2} a' \lambda', \\ \frac{\dot{a}^2}{a^2} &= \left(\frac{1}{a} \frac{1}{a} \frac{d}{d\eta} a \right)^2 = \left(\frac{a'}{a^2} \right)^2, \\ \frac{\dot{a}}{a^2} &= \frac{1}{a^2} \frac{1}{a} \frac{d}{d\eta} a = \frac{a'}{a^3}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

que permitem reescrever (5.3) como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} \lambda'' - \frac{a'}{a^3} \lambda' + \frac{3}{a} \frac{1}{a^2} a' \lambda' - \frac{1}{a^2} \partial_i^2 \lambda - \frac{3}{4} \left(\frac{a'}{a^2} \right)^2 \lambda + \frac{a'}{a^3} \gamma_0 \gamma_i (\partial_i \lambda) + (m^2 + \xi R) \lambda &= 0, \\ \frac{1}{a^2} \bar{\lambda}'' - \frac{a'}{a^3} \bar{\lambda}' + \frac{3}{a} \frac{1}{a^2} a' \bar{\lambda}' - \frac{1}{a^2} \partial_i^2 \bar{\lambda} - \frac{3}{4} \left(\frac{a'}{a^2} \right)^2 \bar{\lambda} - \frac{a'}{a^3} (\partial_i \bar{\lambda}) \gamma_0 \gamma_i + (m^2 + \xi R) \bar{\lambda} &= 0. \end{aligned}$$

Ou simplesmente:

$$\begin{aligned} \lambda'' + 2 \frac{a'}{a} \lambda' - \partial_i^2 \lambda + \frac{a'}{a} \gamma_0 \gamma_i (\partial_i \lambda) + \left(m^2 a^2 - \frac{3}{4} \frac{a'^2}{a^2} + \xi R a^2 \right) \lambda &= 0, \\ \bar{\lambda}'' + 2 \frac{a'}{a} \bar{\lambda}' - \partial_i^2 \bar{\lambda} - \frac{a'}{a} (\partial_i \bar{\lambda}) \gamma_0 \gamma_i + \left(m^2 a^2 - \frac{3}{4} \frac{a'^2}{a^2} + \xi R a^2 \right) \bar{\lambda} &= 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Reescrevendo $\lambda(\mathbf{x}, \eta)$ em termos de um campo $\Lambda(\mathbf{x}, \eta)$ tal que $\lambda(\mathbf{x}, \eta) = \Lambda(\mathbf{x}, \eta)/a(\eta)$, as derivadas de primeira e segunda ordem sob o tempo conforme de λ e $\bar{\lambda}$ tornam-se:

$$\begin{aligned} \lambda' &= \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\Lambda}{a} \right) = \frac{1}{a} \Lambda' - \frac{a'}{a^2} \Lambda, \\ \lambda'' &= \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{a} \Lambda' - \frac{a'}{a^2} \Lambda \right) = \frac{1}{a} \Lambda'' - 2 \frac{a'}{a^2} \Lambda' - \frac{a''}{a^2} \Lambda + 2 \frac{a'^2}{a^3} \Lambda, \\ \bar{\lambda}' &= \frac{1}{a} \bar{\Lambda}' - \frac{a'}{a^2} \bar{\Lambda}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\bar{\lambda}'' = \frac{1}{a} \bar{\Lambda}'' - 2 \frac{a'}{a^2} \bar{\Lambda}' - \frac{a''}{a^2} \bar{\Lambda} + 2 \frac{a'^2}{a^3} \bar{\Lambda},$$

de modo que (5.5) é reescrita como:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a} \Lambda'' - 2 \frac{a'}{a^2} \Lambda' - \frac{a''}{a^2} \Lambda + 2 \frac{a'}{a^3} \Lambda + 2 \frac{a'}{a} \frac{1}{a} \Lambda' - 2 \frac{a'}{a} \frac{a'}{a^2} \Lambda - \frac{1}{a} \partial_i^2 \Lambda + \frac{a'}{a^2} \gamma_0 \gamma_i (\partial_i \Lambda) \\ & + m^2 a^2 \frac{\Lambda}{a} - \frac{3}{4} \frac{a'}{a^2} \frac{\Lambda}{a} + \xi R a^2 \frac{\Lambda}{a} = 0, \\ & \frac{1}{a} \bar{\Lambda}'' - 2 \frac{a'}{a^2} \bar{\Lambda}' - \frac{a''}{a^2} \bar{\Lambda} + 2 \frac{a'}{a^3} \bar{\Lambda} + 2 \frac{a'}{a} \frac{1}{a} \bar{\Lambda}' - 2 \frac{a'}{a} \frac{a'}{a^2} \bar{\Lambda} - \frac{1}{a} \partial_i^2 \bar{\Lambda} - \frac{a'}{a^2} (\partial_i \bar{\Lambda}) \gamma_0 \gamma_i \\ & + m^2 a^2 \frac{\bar{\Lambda}}{a} - \frac{3}{4} \frac{a'}{a^2} \frac{\bar{\Lambda}}{a} + \xi R a^2 \frac{\bar{\Lambda}}{a} = 0. \end{aligned}$$

As equações de movimento dos campos Λ e $\bar{\Lambda}$ são, portanto:

$$\begin{aligned} \Lambda'' - \partial_i^2 \Lambda + \frac{a'}{a} \gamma_0 \gamma_i (\partial_i \Lambda) + \left[(m^2 + \xi R) a^2 - \frac{a''}{a} - \frac{3}{4} \frac{a'^2}{a^2} \right] \Lambda &= 0, \\ \bar{\Lambda}'' - \partial_i^2 \bar{\Lambda} - \frac{a'}{a} (\partial_i \bar{\Lambda}) \gamma_0 \gamma_i + \left[(m^2 + \xi R) a^2 - \frac{a''}{a} - \frac{3}{4} \frac{a'^2}{a^2} \right] \bar{\Lambda} &= 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Avaliando-se o escalar curvatura de Ricci $R(a(t), \dot{a}(t), \ddot{a}(t)) \rightarrow R(a(\eta), a'(\eta), a''(\eta))$ da equação de FRW (5.2), tem-se:

$$R = \frac{6}{a^2} (a\ddot{a} + \dot{a}^2) \rightarrow R = \frac{6}{a^2} \frac{a''}{a},$$

e assim (5.7) torna-se:

$$\begin{aligned} \Lambda'' - \partial_i^2 \Lambda + \frac{a'}{a} \gamma_0 \gamma_i (\partial_i \Lambda) + \left[m^2 a^2 - 6 \frac{a''}{a} \left(\frac{1}{6} - \xi \right) - \frac{3}{4} \frac{a'^2}{a^2} \right] \Lambda &= 0 \\ \bar{\Lambda}'' - \partial_i^2 \bar{\Lambda} - \frac{a'}{a} (\partial_i \bar{\Lambda}) \gamma_0 \gamma_i + \left[m^2 a^2 - 6 \frac{a''}{a} \left(\frac{1}{6} - \xi \right) - \frac{3}{4} \frac{a'^2}{a^2} \right] \bar{\Lambda} &= 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Tomando-se $\xi = 1/6$ em $(3+1)D$, as equações de movimento dos campos Λ e $\bar{\Lambda}$ de λ e $\bar{\lambda}$ são estabelecidas como:

$$\begin{aligned} \Lambda'' - \partial_i^2 \Lambda + \frac{a'}{a} \gamma_0 \gamma_i (\partial_i \Lambda) + \left[m^2 a^2 - \frac{3}{4} \frac{a'^2}{a^2} \right] \Lambda &= 0, \\ \bar{\Lambda}'' - \partial_i^2 \bar{\Lambda} - \frac{a'}{a} (\partial_i \bar{\Lambda}) \gamma_0 \gamma_i + \left[m^2 a^2 - \frac{3}{4} \frac{a'^2}{a^2} \right] \bar{\Lambda} &= 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

5.2 DECOMPOSIÇÃO DO CAMPO $\Lambda(\mathbf{x}, \eta)$

Pode-se definir o campo Λ de forma independente para cada auto-espinor com suas respectivas helicidades:

$$\Lambda(\mathbf{x}, \eta) = \Lambda_{\beta}^{S/A}(\mathbf{x}, \eta), \quad (5.10)$$

sendo

$$\begin{aligned} \Lambda_{\beta}^S &= \Lambda_{\{\pm, \mp\}}^S = N \lambda_{\{\pm, \mp\}}^S(\mathbf{k}) g^{(+)}(\eta) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \\ \Lambda_{\beta}^A &= \Lambda_{\{\pm, \mp\}}^A = N \lambda_{\{\pm, \mp\}}^A(\mathbf{k}) g^{(-)}(\eta) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

em que N é uma constante de normalização, $\beta = \{\pm, \mp\}$ são as helicidades, S/A denominam autoconjugado/anti-autoconjugado, $g^{\pm}(\eta)$ as funções de propagação positiva e negativa no tempo conforme.

Aplicando (5.11) em (5.9), para o campo usual, tem-se:

$$\begin{aligned} N \left(\partial_{\eta}^2 + k^2 + i \frac{a'}{a} \gamma_0 \gamma_i k^i + m^2 a^2 - \frac{3}{4} \frac{a'^2}{a^2} \right) g^{(+)}(\eta) \lambda_{\{\pm, \mp\}}^S(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} &= 0 \\ N \left(\partial_{\eta}^2 + k^2 - i \frac{a'}{a} \gamma_0 \gamma_i k^i + m^2 a^2 - \frac{3}{4} \frac{a'^2}{a^2} \right) g^{(-)}(\eta) \lambda_{\{\pm, \mp\}}^A(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} &= 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Considerando-se as matrizes gama de Dirac, γ_{μ} , na representação de Weyl, uma vez que os espinores ELKO são construídos em tal representação, o termo $\gamma_0 \gamma_i k^i$ das expressões de (5.12) vêm da forma:

$$\gamma_0 \gamma_i k^i = \begin{pmatrix} -k_3 & -k_1 + ik_2 & 0 & 0 \\ -k_1 - ik_2 & k_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & k_1 - ik_2 \\ 0 & 0 & k_1 + ik_2 & -k_3 \end{pmatrix},$$

podendo-se, por isso, visualizar (5.12) como:

$$\begin{aligned} ND^{(+)} g^{(+)}(\eta) \lambda_{\{\pm, \mp\}}^S(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} &= 0, \\ ND^{(-)} g^{(-)}(\eta) \lambda_{\{\pm, \mp\}}^A(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} &= 0, \end{aligned} \quad (5.13)$$

sendo os operadores $D^{(\pm)}$:

$$D^{(\pm)} = \begin{pmatrix} D_{00}^{(\pm)} & D_{01}^{(\pm)} & 0 & 0 \\ D_{10}^{(\pm)} & D_{11}^{(\pm)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{22}^{(\pm)} & D_{23}^{(\pm)} \\ 0 & 0 & D_{32}^{(\pm)} & D_{33}^{(\pm)} \end{pmatrix}$$

em que

$$D_{00}^{(+)} = D_{33}^{(+)} = D_{11}^{(-)} = D_{22}^{(-)} = \partial_\eta^2 + k^2 + m^2 a^2 - \frac{3}{4} \frac{a'^2}{a^2} - i \frac{a'}{a} k_3,$$

$$D_{11}^{(+)} = D_{22}^{(+)} = D_{00}^{(-)} = D_{33}^{(-)} = \partial_\eta^2 + k^2 + m^2 a^2 - \frac{3}{4} \frac{a'^2}{a^2} + i \frac{a'}{a} k_3,$$

$$D_{01}^{(+)} = -D_{23}^{(+)} = -D_{01}^{(-)} = D_{23}^{(-)} = -i \frac{a'}{a} k_1 - \frac{a'}{a} k_2,$$

$$D_{10}^{(+)} = -D_{32}^{(+)} = -D_{10}^{(-)} = D_{32}^{(-)} = -i \frac{a'}{a} k_1 + \frac{a'}{a} k_2.$$

Admitindo-se, a princípio, que $\lambda_{\{\pm, \mp\}}^S$ e $\lambda_{\{\pm, \mp\}}^A$ possam ser escritos como²

$$\lambda_{\{\pm, \mp\}}^S(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} b^{1,2} \\ c^{1,2} \\ d^{1,2} \\ f^{1,2} \end{pmatrix}$$

e

$$\lambda_{\{\pm, \mp\}}^A(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} h^{1,2} \\ l^{1,2} \\ m^{1,2} \\ n^{1,2} \end{pmatrix},$$

então $ND_{4 \times 4}^{(+)} g^{(+)}(\eta) \lambda_{\{\pm, \mp\}}^S e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = 0_{4 \times 1}$ e $ND_{4 \times 4}^{(-)} g^{(-)}(\eta) \lambda_{\{\pm, \mp\}}^A e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = 0_{4 \times 1}$. Assim, (5.13) passa a ser escrita como o seguinte conjunto de equações:

$$N \left\{ \left[\left(\partial_\eta^2 + k^2 + m^2 a^2 - \frac{3}{4} \frac{a'^2}{a^2} - i \frac{a'}{a} k_3 \right) g^{(+)}(\eta) \right] b^{1,2} + \frac{a'}{a} (-ik_1 - k_2) c^{1,2} g^{(+)}(\eta) \right\} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = 0,$$

$$N \left\{ \left[\left(\partial_\eta^2 + k^2 + m^2 a^2 - \frac{3}{4} \frac{a'^2}{a^2} + i \frac{a'}{a} k_3 \right) g^{(+)}(\eta) \right] c^{1,2} + \frac{a'}{a} (-ik_1 + k_2) b^{1,2} g^{(+)}(\eta) \right\} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = 0,$$

$$N \left\{ \left[\left(\partial_\eta^2 + k^2 + m^2 a^2 - \frac{3}{4} \frac{a'^2}{a^2} + i \frac{a'}{a} k_3 \right) g^{(+)}(\eta) \right] d^{1,2} + \frac{a'}{a} (+ik_1 + k_2) f^{1,2} g^{(+)}(\eta) \right\} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = 0,$$

$$N \left\{ \left[\left(\partial_\eta^2 + k^2 + m^2 a^2 - \frac{3}{4} \frac{a'^2}{a^2} - i \frac{a'}{a} k_3 \right) g^{(+)}(\eta) \right] f^{1,2} + \frac{a'}{a} (+ik_1 - k_2) d^{1,2} g^{(+)}(\eta) \right\} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = 0,$$

²As entradas $b^{1,2}, c^{1,2}, d^{1,2}, f^{1,2}$ representam as componentes do espinor ELKO autoconjugado, com o super-índice ^{1,2} assinalando as helicidades $\{+, -\}$ e $\{-, +\}$ respectivamente. As entradas $h^{1,2}, l^{1,2}, m^{1,2}, n^{1,2}$ fazem o mesmo papel para o espinor elko anti-autoconjugado.

$$\begin{aligned}
N \left\{ \left[\left(\partial_\eta^2 + k^2 + m^2 a^2 - \frac{3}{4} \frac{a'^2}{a^2} + i \frac{a'}{a} k_3 \right) g^{(-)}(\eta) \right] h^{1,2} + \frac{a'}{a} (+ik_1 + k_2) l^{1,2} g^{(-)}(\eta) \right\} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} &= 0, \\
N \left\{ \left[\left(\partial_\eta^2 + k^2 + m^2 a^2 - \frac{3}{4} \frac{a'^2}{a^2} - i \frac{a'}{a} k_3 \right) g^{(-)}(\eta) \right] l^{1,2} + \frac{a'}{a} (+ik_1 - k_2) h^{1,2} g^{(-)}(\eta) \right\} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} &= 0, \\
N \left\{ \left[\left(\partial_\eta^2 + k^2 + m^2 a^2 - \frac{3}{4} \frac{a'^2}{a^2} - i \frac{a'}{a} k_3 \right) g^{(-)}(\eta) \right] m^{1,2} + \frac{a'}{a} (-ik_1 - k_2) n^{1,2} g^{(-)}(\eta) \right\} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} &= 0, \\
N \left\{ \left[\left(\partial_\eta^2 + k^2 + m^2 a^2 - \frac{3}{4} \frac{a'^2}{a^2} + i \frac{a'}{a} k_3 \right) g^{(-)}(\eta) \right] n^{1,2} + \frac{a'}{a} (-ik_1 + k_2) m^{1,2} g^{(-)}(\eta) \right\} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} &= 0.
\end{aligned}$$

Como N é não nulo, pode-se visualizar o conjunto de equações acima como³:

$$\begin{aligned}
\left(\partial_\eta^2 + k^2 + m^2 a^2 - \frac{3}{4} \frac{a'^2}{a^2} + \frac{a'}{a} \left[(-ik_1 - k_2) \frac{c^{1,2}}{b^{1,2}} - ik_3 \right] \right) g^{(+)}(\eta) &= 0, \\
\left(\partial_\eta^2 + k^2 + m^2 a^2 - \frac{3}{4} \frac{a'^2}{a^2} + \frac{a'}{a} \left[(-ik_1 + k_2) \frac{b^{1,2}}{c^{1,2}} + ik_3 \right] \right) g^{(+)}(\eta) &= 0, \\
\left(\partial_\eta^2 + k^2 + m^2 a^2 - \frac{3}{4} \frac{a'^2}{a^2} + \frac{a'}{a} \left[(+ik_1 + k_2) \frac{f^{1,2}}{d^{1,2}} + ik_3 \right] \right) g^{(+)}(\eta) &= 0, \\
\left(\partial_\eta^2 + k^2 + m^2 a^2 - \frac{3}{4} \frac{a'^2}{a^2} + \frac{a'}{a} \left[(+ik_1 - k_2) \frac{d^{1,2}}{f^{1,2}} - ik_3 \right] \right) g^{(+)}(\eta) &= 0, \\
\left(\partial_\eta^2 + k^2 + m^2 a^2 - \frac{3}{4} \frac{a'^2}{a^2} + \frac{a'}{a} \left[(+ik_1 + k_2) \frac{l^{1,2}}{h^{1,2}} + ik_3 \right] \right) g^{(-)}(\eta) &= 0, \\
\left(\partial_\eta^2 + k^2 + m^2 a^2 - \frac{3}{4} \frac{a'^2}{a^2} + \frac{a'}{a} \left[(+ik_1 - k_2) \frac{h^{1,2}}{l^{1,2}} - ik_3 \right] \right) g^{(-)}(\eta) &= 0, \\
\left(\partial_\eta^2 + k^2 + m^2 a^2 - \frac{3}{4} \frac{a'^2}{a^2} + \frac{a'}{a} \left[(-ik_1 - k_2) \frac{n^{1,2}}{m^{1,2}} - ik_3 \right] \right) g^{(-)}(\eta) &= 0, \\
\left(\partial_\eta^2 + k^2 + m^2 a^2 - \frac{3}{4} \frac{a'^2}{a^2} + \frac{a'}{a} \left[(-ik_1 + k_2) \frac{m^{1,2}}{n^{1,2}} + ik_3 \right] \right) g^{(-)}(\eta) &= 0,
\end{aligned}$$

que, por sua vez, reduz-se a (ver Apêndice A):

$$\left(\partial_\eta^2 + k^2 + m^2 a^2 - \frac{3}{4} \frac{a'^2}{a^2} + \frac{a'}{a} [X_j + iY_j] \right) g(\eta) = 0, \quad (5.14)$$

³A aparente singularidade nos termos entre [], quando $b^{1,2} = c^{1,2} = \dots = n^{1,2} = 0$, desaparece quando se faz a decomposição do momento $\mathbf{k}$ do espinor em coordenadas esféricas (ver Apêndice A).

em que $X_j = X_j(k_1, k_2, \theta, \varphi)$ e $Y_j = Y_j(k_1, k_2, k_3, \theta, \varphi)$ com $j = 1, 2, 3, 4$ para $g^{(+)}(\eta)$ de $\Lambda_{\{+,-\}}^S$; $j = 5, 6, 7, 8$ para $g^{(+)}(\eta)$ de $\Lambda_{\{-,+\}}^S$; $j = 9, 10, 11, 12$ para $g^{(-)}(\eta)$ de $\Lambda_{\{+,-\}}^A$ e $j = 13, 14, 15, 16$ para $g^{(-)}(\eta)$ de $\Lambda_{\{-,+\}}^A$.

A equação diferencial de segunda ordem (5.14) é a equação principal para iniciar-se o estudo da criação de partículas para o campo ELKO. Algumas conseqüências são obtidas a partir dela. Em primeiro lugar, usando-se coordenadas esféricas no termo $[X_j + iY_j]$, pode-se mostrar que $X_j = 0$ para todas as componentes e $Y_j = \mp k = \mp |\mathbf{k}|$, sendo $-k$ para $\Lambda_{\{+,-\}}^S, \Lambda_{\{-,+\}}^A$ (A.8) e $+k$ para $\Lambda_{\{-,+\}}^S, \Lambda_{\{+,-\}}^A$ (A.9). Além disso, os dois últimos termos em colchetes, ou seja, os termos proporcionais a'^2 e a' , são específicos para o campo ELKO. O primeiro leva o acoplamento do espinor ao campo gravitacional, oriundo da conexão de spin Γ_μ e o segundo carrega a estrutura espinorial explícita do campo. Quando ambos os termos são descartados obtém-se exatamente a mesma equação para o campo escalar padrão (BIRRELL; DAVIES, 1994)[1] e (BERNARD; DUNCAN, 1977)[12]. A princípio, se abordará as componentes gerais $[X_j + iY_j]$ em sistema de coordenadas arbitrário e, no final da seção 5.4, se tomará o sistema de coordenadas esféricas para obtenção da taxa de criação de tais partículas.

5.3 SOLUÇÕES PARA $\Lambda(x, \eta)$ SOB UMA MÉTRICA ASSINTOTICAMENTE PLANA NO PASSADO E NO FUTURO

Considera-se uma métrica com o fator de escala tendo um comportamento assintoticamente plano em $\eta \rightarrow \pm\infty$ (BERNARD; DUNCAN, 1977)[12]:

$$a^2(\eta) = A + B \tanh(\rho\eta), \quad (5.15)$$

em que A, B e ρ são parâmetros reais, com $A > B > 0$ e $\rho > 0$, como pode ser visto na imagem abaixo:

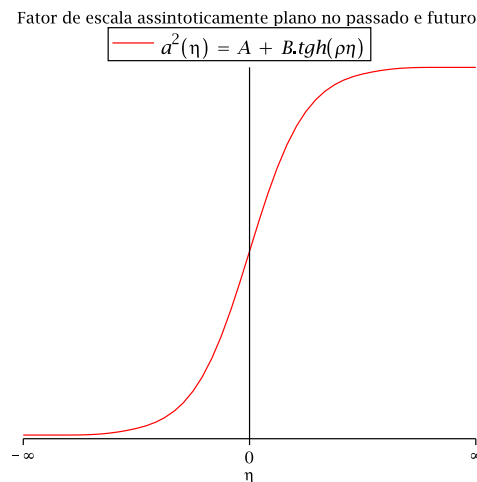


Figura 5.1: gráfico do fator de escala (5.15)

Para uma análise comparativa da (5.14) com a equação de um oscilador harmônico, identifica-se a massa efetiva $m_{ef}^2(\eta)$ e a frequência $\omega^2(\eta)$ deste como:

$$\begin{aligned} m_{ef}^2(\eta) &= m^2 a^2 - \frac{3}{4} \frac{a'^2}{a^2} + \frac{a'}{a} (X_j + iY_j), \\ \omega^2(\eta) &= k^2 + m_{ef}^2(\eta). \end{aligned} \quad (5.16)$$

No limite de $\eta \rightarrow \pm\infty$, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{a'}{a} &= \frac{a'^2}{a^2} \rightarrow 0, \\ a^2(\eta) &\rightarrow A \pm B, \end{aligned}$$

podendo-se definir as frequências do passado e do futuro:

$$\omega(\eta) \equiv \begin{cases} \omega_{in} = \sqrt{k^2 + m^2(A - B)}, & \eta \rightarrow -\infty, \\ \omega_{out} = \sqrt{k^2 + m^2(A + B)}, & \eta \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (5.17)$$

Inserindo (5.15) em (5.14), chega-se à equação:

$$\begin{aligned} &\left[\partial_\eta^2 + k^2 + m^2(A + Btgh(\rho\eta)) - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} (B\rho)^2 \left(\frac{1 - tgh^2(\rho\eta)}{A + Btgh(\rho\eta)} \right)^2 \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} B\rho \left(\frac{1 - tgh^2(\rho\eta)}{A + Btgh(\rho\eta)} \right) (X_j + iY_j) \right] g(\eta) = 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Deve-se, por instância, ressaltar algumas importantes considerações sobre a equação (5.18). Os últimos dois termos dentro do colchetes, como já frisado, são contribuições explícitas do espinor ELKO, derivados de a'^2 e a' respectivamente. Entretanto esta equação diferencial não tem solução analítica. Embora o comportamento assintótico da métrica permita descartar esses termos nos limites $\eta \rightarrow \pm\infty$, é bem conhecido que o processo de criação pelo formalismo de Parker compara o número de partículas criadas entre os estágios assintóticos e, portando, deve-se levar em conta a contribuição explícita desses termos não nulos na evolução temporal $-\infty < \eta < +\infty$, caso contrário, tem-se simplesmente a mesma taxa de criação a partir do campo escalar padrão (*ibidem*, 1994)[1] e (*ibidem*, 1977)[12]. Faz-se necessário, portanto, ter uma equação diferencial que apresente o mesmo comportamento da equação (5.18) e que seja solúvel analiticamente. Isso pode ser feito substituindo tais termos por alguma função aproximada com o mesmo comportamento no intervalo, a saber f_{1ap} de (5.21) e f_{2ap} de (5.22). Uma função que preserve a mesma forma da anterior contribuirá com quase a mesma quantidade para os cálculos finais, uma vez que o total de partículas criadas é tomado apenas no limite do tempo assintótico de $-\infty$ para $+\infty$.

Tomando-se a substituição $\xi = \frac{1+tgh(\rho\eta)}{2} \Rightarrow tgh(\rho\eta) = (2\xi - 1)$, cujo motivo é condu-

zir às soluções em termos de funções hipergeométricas⁴, os operadores de (5.18) tornam-se:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\eta} &= \frac{d\xi}{d\eta} \frac{d}{d\xi} = \frac{\rho}{2}(1-tgh^2(\rho\eta)) \frac{d}{d\xi} = 2\rho\xi(1-\xi) \frac{d}{d\xi}, \\ \frac{d^2}{d\eta^2} &= 4\rho^2\xi^2(1-\xi)^2 \frac{d^2}{d\xi^2} + 4\rho^2\xi(1-\xi)(1-2\xi) \frac{d}{d\xi},\end{aligned}\quad (5.19)$$

$$\begin{aligned}k^2 + m^2(A + Btgh(\rho\eta)) &= k^2 + m^2(A + B(2\xi - 1)) \\ &= k^2 + m^2(A - B) + 2Bm^2\xi \\ &= \omega_{in}^2 + (\omega_{out}^2 - \omega_{in}^2)\xi \\ &= \omega_{in}^2(1 - \xi) + \omega_{out}^2\xi,\end{aligned}\quad (5.20)$$

As contribuições dos dois últimos termos de (5.18) serão aproximados para:

$$\begin{aligned}\frac{a'}{a} &= f_{1ex} = \frac{1}{2} \frac{B\rho(1-tgh^2(\rho\eta))}{(A + Btgh(\rho\eta))} \approx \frac{1}{2} c_1 \frac{B\rho(1-tgh^2(\rho\eta))}{(A + B)} = f_{1ap} \\ &= \frac{2c_1 B\rho}{(A + B)} \xi(1 - \xi),\end{aligned}\quad (5.21)$$

$$\begin{aligned}\frac{a'^2}{a^2} &= f_{2ex} = \frac{1}{4} \frac{B^2\rho^2(1-tgh^2(\rho\eta))^2}{(A + Btgh(\rho\eta))^2} \approx \frac{1}{4} \frac{c_2 B^2\rho^2(1-tgh^2(\rho\eta))^2}{(A + B)^2} = f_{2ap} \\ &= \frac{c_2 B^2\rho^2}{(A + B)^2} \xi(1 - \xi),\end{aligned}\quad (5.22)$$

em que c_1 e c_2 são constantes de proporcionalidades a serem ajustadas, entre os termos de (5.21) e (5.22) respectivamente, mantendo-se a área abaixo da função na mesma ordem. Uma análise gráfica e numérica das funções exatas (f_{1ex}, f_{2ex}) e funções aproximadas (f_{1ap}, f_{2ap}) sugerem uma escolha razoável para os parâmetros como $c_1 = (A + B)/A$ e $c_2 = (2/3)c_1^2$. Alguns exemplos são plotados (vide gráficos da Figura 5.2) para diferentes valores dos parâmetros A e B com $\rho = 1$. Verifica-se que as funções f_{1ex} e f_{1ap} são praticamente iguais a todos os valores de A e B que satisfazem $A/B > 2$. A diferença entre a área abaixo das curvas é menor que 9% para $A/B > 2$ e menos de 1% para $A/B > 6$. Para as funções f_{2ex} e f_{2ap} a diferença na amplitude é mais evidente, no entanto verifica-se numericamente que a diferença entre a área abaixo das curvas é menor que 7% para $A/B > 3$ e menos de 1% para $A/B > 8$. Assim, conclui-se que tais aproximações são boas o suficiente para garantir um erro menor que 1% em ambas as funções se a condição $A/B > 8$ for satisfeita.

⁴Neste tipo de abordagem, é possível obter uma relação entre soluções de diferentes regiões assintóticas $\pm\infty$ podendo-se, assim, descrever as soluções da região assintótica $-\infty$ em termos da $+\infty$ ou vice-versa, por meio de transformações dentro da classe das funções hipergeométricas.

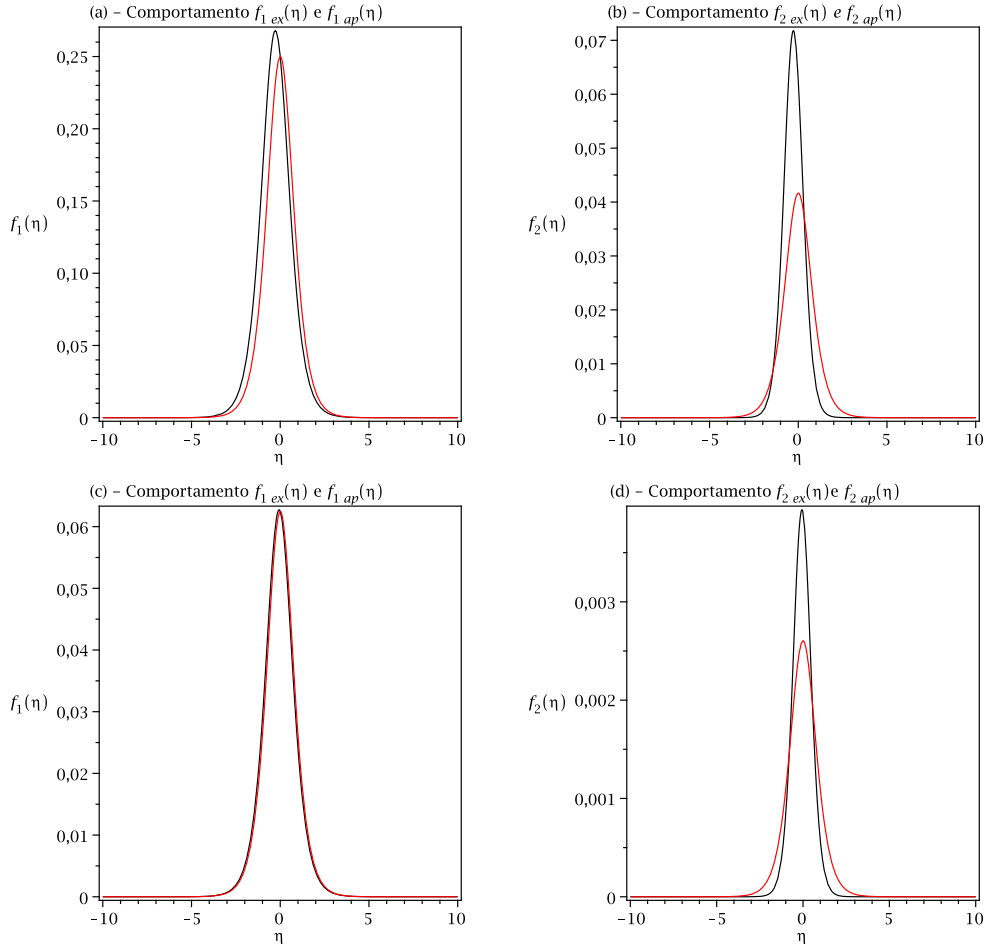


Figura 5.2: Análise gráfica para as funções exatas (f_{1ex}, f_{2ex}), em linhas pretas e funções aproximadas (f_{1ap}, f_{2ap}), em linhas vermelhas, das equações (5.21) e (5.22) para $c_1 = (A+B)/A$, $c_2 = (2/3)c_1^2$ e $\rho = 1$, com os seguintes valores de parâmetros: (a) $A = 2$, $B = 1$; (b) $A = 2$, $B = 1$; (c) $A = 8$, $B = 1$; (d) $A = 8$, $B = 1$

Com a substituição adotada, ao fazer-se uso de (5.19), (5.20), (5.21) e (5.22) em (5.18), tem-se:

$$\left[4\rho^2\xi^2(1-\xi)^2 \frac{d^2}{d\xi^2} + 4\rho^2\xi(1-\xi)(1-2\xi) \frac{d}{d\xi} + \omega_{in}^2(1-\xi) + \omega_{out}^2\xi - \frac{3}{4} \cdot \frac{c_2 B^2 \rho^2}{(A+B)^2} \xi(1-\xi) + \frac{2c_1 B \rho}{(A+B)} (X_j + iY_j) \xi(1-\xi) \right] \tilde{g}(\xi) = 0,$$

e ao se tomar a divisão por $4\rho^2\xi^2(1-\xi)^2$ e reescrever $(1-\xi) = -(\xi-1)$, a expressão acima fica organizada como:

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} + \left(\frac{1}{\xi-1} + \frac{1}{\xi} \right) \frac{d}{d\xi} + \left(\frac{\omega_{out}^2}{4\rho^2} \frac{1}{\xi-1} - \frac{\omega_{in}^2}{4\rho^2} \frac{1}{\xi} \right) \cdot \frac{1}{\xi(\xi-1)} + \frac{B}{8(A+B)} \left(\frac{3c_2 B}{2(A+B)} - \frac{4c_1(X_j + iY_j)}{\rho} \right) \cdot \frac{1}{\xi(\xi-1)} \right] \tilde{g}(\xi) = 0, \quad (5.23)$$

que é, por sua vez, uma EDO de segunda ordem do tipo Riemann-Papperitz. A solução para $\tilde{g}(\xi)$ de (5.23) é (ver solução em Apêndice B):

$$\tilde{g}(\xi) = P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ i\frac{\omega_{in}}{2\rho} & i\frac{\omega_{out}}{2\rho} & \frac{1 \pm \sqrt{1-4r}}{2} \\ -i\frac{\omega_{in}}{2\rho} & -i\frac{\omega_{out}}{2\rho} & \frac{1 \mp \sqrt{1-4r}}{2} \end{Bmatrix} \xi, \quad (5.24)$$

em que P é o símbolo de Riemann e $r = \frac{B}{8(A+B)} \left(\frac{3c_2 B}{2(A+B)} - \frac{4c_1(X_j + iY_j)}{\rho} \right)$ (B.10). Nota-se que, a partir da discussão tida anteriormente (em coordenadas esféricas tem-se $Y_j = \mp k$, sendo $-k$ para $\Lambda_{\{+,-\}}^S$, $\Lambda_{\{-,+\}}^A$ e $+k$ para $\Lambda_{\{-,+\}}^S$, $\Lambda_{\{+,-\}}^A$) assumindo-se dois valores distintos para r , ou seja $r = r_{1,2}$, de acordo com o sinal de Y_j . A equação (5.24) pode ser escrita como:

$$\tilde{g}(\xi) = \xi^{\frac{i\omega_{in}}{2\rho}} (1 - \xi)^{\frac{i\omega_{out}}{2\rho}} P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \frac{1 \pm \sqrt{1-4r}}{2} + \frac{i\omega_{\pm}}{\rho} \\ -\frac{i\omega_{in}}{\rho} & -\frac{i\omega_{out}}{\rho} & \frac{1 \mp \sqrt{1-4r}}{2} + \frac{i\omega_{\pm}}{\rho} \end{Bmatrix} \xi, \quad (5.25)$$

em que $\omega_{\pm} = \frac{1}{2}(\omega_{out} \pm \omega_{in})$ (B.11).

Soluções de equações hipergeométricas são casos particulares de soluções do tipo Riemann-Papperitz, denotadas como (BARATA, 2015), cap. 7 e 13 [40]:

$${}_2F_1(\epsilon, v; \varpi; z) = P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \epsilon \\ 1 - \varpi & \varpi - \epsilon - v & v \end{Bmatrix} z, \quad (5.26)$$

em que a função hipergeométrica é dada pela série:

$${}_2F_1(\epsilon, v; \varpi; z) = 1 + \frac{\epsilon \cdot v}{\varpi \cdot 1} z + \frac{\epsilon(\epsilon+1)v(v+1)}{\varpi(\varpi+1) \cdot 1 \cdot 2} z^2 + \dots, \quad (5.27)$$

sendo os sub-índices ${}_2$ e ${}_1$ designados ao número de pólos para os coeficientes do numerador e denominador da série, respectivamente. As vírgulas entre os coeficientes ϵ e v indicam que ambos estão no numerador da série, enquanto o ponto e vírgula entre ϖ indica que este permanece no denominador. Por fim, o último ponto e vírgula indica que o termo a sua direita é a variável da série.

Comparando P de (5.25) com P de (5.26), obtem-se:

$$\begin{cases} \epsilon = \frac{1 \pm \sqrt{1-4r}}{2} + \frac{i\omega_{\pm}}{\rho} \\ v = \frac{1 \mp \sqrt{1-4r}}{2} + \frac{i\omega_{\pm}}{\rho} \\ \varpi = 1 + \frac{i\omega_{in}}{\rho} \\ z = \xi \end{cases},$$

e, assim, tem-se $\tilde{g}(\xi)$ escrito em termos de uma solução hipergeométrica:

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\xi) &= \xi^{\frac{i\omega_{in}}{2\rho}} (1-\xi)^{\frac{i\omega_{out}}{2\rho}} \\ &\times {}_2F_1\left(\frac{1\pm\sqrt{1-4r}}{2} + \frac{i\omega_+}{\rho}, \frac{1\mp\sqrt{1-4r}}{2} + \frac{i\omega_+}{\rho}; 1 + \frac{i\omega_{in}}{\rho}; \xi\right).\end{aligned}\quad (5.28)$$

Contudo, a solução de (5.18) se dará ao obter $g(\eta)$. Assim, nota-se que:

$$\begin{cases} \xi^{\frac{i\omega_{in}}{2\rho}} = \left(\frac{1+tgh(\rho\eta)}{2}\right)^{\frac{i\omega_{in}}{2\rho}} = \left(\frac{e^{\rho\eta}}{2cosh(\rho\eta)}\right)^{\frac{i\omega_{in}}{2\rho}} = e^{\frac{i\omega_{in}}{2}\eta} e^{-\frac{i\omega_{in}}{2\rho} \ln(2cosh(\rho\eta))}, \\ (1-\xi)^{\frac{i\omega_{out}}{2\rho}} = \left(\frac{1-tgh(\rho\eta)}{2}\right)^{\frac{i\omega_{out}}{2\rho}} = e^{-\frac{i\omega_{out}}{2}\eta} e^{-\frac{i\omega_{out}}{2\rho} \ln(2cosh(\rho\eta))}. \end{cases}\quad (5.29)$$

Portanto, usando (5.29) em (5.28), tem-se que $\tilde{g}(\xi) \rightarrow g(\eta)$:

$$\begin{aligned}g(\eta) &= \exp\left[-i\left(\omega_-\eta + \frac{\omega_+}{\rho} \ln(2cosh(\rho\eta))\right)\right] \\ &\times {}_2F_1\left(\frac{1\pm\sqrt{1-4r}}{2} + \frac{i\omega_+}{\rho}, \frac{1\mp\sqrt{1-4r}}{2} + \frac{i\omega_+}{\rho}; 1 + \frac{i\omega_{in}}{\rho}; \frac{1+tgh(\rho\eta)}{2}\right).\end{aligned}\quad (5.30)$$

Com a equação (5.30) será possível obter $g_{in}(\eta)$ e $g_{out}(\eta)$.

Retornando a $\tilde{g}(\xi)$, pode-se usar a seguinte transformação (*ibidem*, 2015)[40]:

$${}_2F_1(\epsilon, v; \varpi; z) = (1-z)^{\varpi-\epsilon-v} \times {}_2F_1(\varpi-\epsilon, \varpi-v; \varpi; z), \quad (5.31)$$

permitindo $\tilde{g}(\xi)$ ser escrito como:

$$\tilde{g}(\xi) = \xi^{\frac{i\omega_{in}}{2\rho}} (1-\xi)^{\frac{i\omega_{out}}{\rho}} (1-\xi)^{\varpi-\epsilon-v} \times {}_2F_1(\varpi-\epsilon, \varpi-v; \varpi; z), \quad (5.32)$$

em que

$$\begin{cases} \varpi - \epsilon - v = -\frac{i\omega_{out}}{\rho} \\ \varpi - \epsilon = \frac{1\mp\sqrt{1-4r}}{2} - \frac{i\omega_-}{\rho} \\ \varpi - v = \frac{1\pm\sqrt{1-4r}}{2} - \frac{i\omega_-}{\rho} \end{cases},$$

que permite visualizar (5.32) na forma:

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\xi) &= \xi^{\frac{i\omega_{in}}{2\rho}} \\ &\times {}_2F_1\left(\frac{1\mp\sqrt{1-4r}}{2} - \frac{i\omega_-}{\rho}, \frac{1\pm\sqrt{1-4r}}{2} - \frac{i\omega_-}{\rho}; 1 + \frac{i\omega_{in}}{\rho}; \xi\right).\end{aligned}\quad (5.33)$$

Pode-se retornar a $g(\eta)$, por meio de (5.29), obtendo-se:

$$g(\eta) = \exp \left[i \left(\frac{\omega_{in}}{2} \eta - \frac{\omega_{in}}{2\rho} \ln(2\cosh(\rho\eta)) \right) \right] \quad (5.34)$$

$$\times {}_2F_1 \left(\frac{1 \mp \sqrt{1-4r}}{2} - \frac{i\omega_-}{\rho}, \frac{1 \pm \sqrt{1-4r}}{2} - \frac{i\omega_-}{\rho}; 1 + \frac{i\omega_{in}}{\rho}; \frac{1 + tgh(\rho\eta)}{2} \right).$$

Pela análise de (5.34) em $\eta \rightarrow -\infty$, tem-se que

$${}_2F_1 \left[\alpha, \beta; \gamma; \frac{1 + tgh(\rho\eta)}{2} \right] \rightarrow 1, \quad (5.35)$$

$$\ln(2\cosh(\rho\eta)) \rightarrow -\rho\eta,$$

de modo que

$$g(\eta)|_{\eta \rightarrow -\infty} = \exp \left[i \left(\frac{\omega_{in}}{2} \eta - \frac{\omega_{in}}{2\rho} (-\rho\eta) \right) \right] \times 1 = e^{i\omega_{in}\eta}, \quad (5.36)$$

como esperado, pois seu limite assintótico no passado caracteriza solução de ondas planas.

Desta maneira, pode-se escrever $g(\eta)$ que garanta $g_{in}^*(\eta)$:

$$g(\eta)|_{\eta \rightarrow -\infty} = \exp \left[i \left(\omega_+ \eta + \frac{\omega_-}{\rho} \ln(2\cosh(\rho\eta)) \right) \right] \quad (5.37)$$

$$\times {}_2F_1 \left(\frac{1 \mp \sqrt{1-4r}}{2} - \frac{i\omega_-}{\rho}, \frac{1 \pm \sqrt{1-4r}}{2} - \frac{i\omega_-}{\rho}; 1 + \frac{i\omega_{in}}{\rho}; \frac{1 + tgh(\rho\eta)}{2} \right)$$

$$\equiv g_{in}^*(\eta) = e^{i\omega_{in}\eta},$$

com z^* designando complexo conjugado de qualquer quantidade z . Consequentemente, $g_{in}(\eta) = (g_{in}^*(\eta))^*$, possibilitando evidenciar as soluções para $g^{(\pm)}(\eta)$ no passado:

$$g_{in}^{(+)}(\eta) = \exp \left[i \left(-\omega_+ \eta - \frac{\omega_-}{\rho} \ln(2\cosh(\rho\eta)) \right) \right] \quad (5.38)$$

$$\times {}_2F_1 \left(\frac{1 \mp (\sqrt{1-4r})^*}{2} + \frac{i\omega_-}{\rho}, \frac{1 \pm (\sqrt{1-4r})^*}{2} + \frac{i\omega_-}{\rho}; 1 - \frac{i\omega_{in}}{\rho}; \frac{1 + tgh(\rho\eta)}{2} \right),$$

$$g_{in}^{(-)}(\eta) = \exp \left[i \left(-\omega_- \eta - \frac{\omega_+}{\rho} \ln(2\cosh(\rho\eta)) \right) \right] \quad (5.39)$$

$$\times {}_2F_1 \left(\frac{1 \mp (\sqrt{1-4r})^*}{2} + \frac{i\omega_+}{\rho}, \frac{1 \pm (\sqrt{1-4r})^*}{2} + \frac{i\omega_+}{\rho}; 1 + \frac{i\omega_{in}}{\rho}; \frac{1 + tgh(\rho\eta)}{2} \right).$$

As expressões acima deixam claro que na região *in*: $g_{in}^{(\pm)}(\eta) = e^{\mp i\omega_{in}\eta}$.

Analogamente, é esperado que ao se tomar $\eta \rightarrow +\infty$ obtenha-se $g^{(\pm)}(\eta)|_{\eta \rightarrow +\infty} = e^{\mp i\omega_{out}\eta} \equiv g_{out}^{(\pm)}(\eta)$. Mas, primeiramente, deve-se descrevê-los em termos de soluções hiper-

geométricas, assim como foi feito com $g_{in}^{(\pm)}(\eta)$. Usando uma propriedade importante das funções hipergeométricas é possível achar um vínculo entre $g_{in}^{(\pm)}(\eta)$ em termos de $g_{out}^{(\pm)}(\eta)$ através da seguinte transformação (*ibidem*, 2015), cap. 13 [40]:

$$\begin{aligned} {}_2F_1(\epsilon, v; \varpi; z) &= \frac{\Gamma(\varpi)\Gamma(\varpi - \epsilon - v)}{\Gamma(\varpi - \epsilon)\Gamma(\varpi - v)} \times {}_2F_1(\epsilon, v; \epsilon + v - \varpi; 1 - z) \\ &+ (1 - z)^{\varpi - \epsilon - v} \frac{\Gamma(\varpi)\Gamma(\epsilon + v - \varpi)}{\Gamma(\epsilon)\Gamma(v)} \times {}_2F_1(\varpi - \epsilon, \varpi - v; \varpi - \epsilon - v + 1; 1 - z), \end{aligned} \quad (5.40)$$

sendo Γ as funções gama de Euler. Aplicando-se a transformação (5.40) nas hipergeométricas presentes em (5.38) e (5.39), identificam-se os coeficientes:

$$\begin{cases} \varpi - \epsilon - v = -\frac{i\omega_{out}}{\rho} \\ \varpi - \epsilon = \frac{1 \pm (\sqrt{1-4r})^*}{2} - \frac{i\omega_{+}}{\rho} \\ \varpi - v = \frac{1 \mp (\sqrt{1-4r})^*}{2} - \frac{i\omega_{+}}{\rho} \\ \epsilon + v - \varpi = \frac{i\omega_{out}}{\rho} \\ \varpi - \epsilon - v + 1 = 1 - \frac{i\omega_{out}}{\rho} \end{cases}, \quad (5.41)$$

para a transformação em $g_{in}^{(+)}(\eta)$ e

$$\begin{cases} \varpi - \epsilon - v = -\frac{i\omega_{out}}{\rho} \\ \varpi - \epsilon = \frac{1 \pm (\sqrt{1-4r})^*}{2} - \frac{i\omega_{-}}{\rho} \\ \varpi - v = \frac{1 \mp (\sqrt{1-4r})^*}{2} - \frac{i\omega_{-}}{\rho} \\ \epsilon + v - \varpi = \frac{i\omega_{out}}{\rho} \\ \varpi - \epsilon - v + 1 = 1 - \frac{i\omega_{out}}{\rho} \end{cases}, \quad (5.42)$$

para a transformação em $g_{in}^{(-)}(\eta)$.

Portanto, escrevendo $g_{in}^{(+)}(\eta)$ em termos da transformação (5.40) com os coeficientes de (5.41), chega-se a:

$$\begin{aligned} g_{in}^{(+)}(\eta) &= \exp \left[i \left(-\omega_{+}\eta - \frac{\omega_{-}}{\rho} \ln(2 \cosh(\rho\eta)) \right) \right] \\ &\times [C_1 \times {}_2F_1 \left(\frac{1 \mp (\sqrt{1-4r})^*}{2} + \frac{i\omega_{-}}{\rho}, \frac{1 \pm (\sqrt{1-4r})^*}{2} + \frac{i\omega_{-}}{\rho}; \frac{i\omega_{out}}{\rho}; \frac{1 - \tanh(\rho\eta)}{2} \right) \\ &+ (1 - z)^{-\frac{i\omega_{out}}{\rho}} \\ &\times C_2 \times {}_2F_1 \left(\frac{1 \pm (\sqrt{1-4r})^*}{2} - \frac{i\omega_{+}}{\rho}, \frac{1 \mp (\sqrt{1-4r})^*}{2} - \frac{i\omega_{+}}{\rho}; 1 - \frac{i\omega_{out}}{\rho}; \frac{1 - \tanh(\rho\eta)}{2} \right)], \end{aligned} \quad (5.43)$$

em que

$$C_1 = \frac{\Gamma(1 - \frac{i\omega_{in}}{\rho})\Gamma(-\frac{i\omega_{out}}{\rho})}{\Gamma(\frac{1 \pm (\sqrt{1-4r})^*}{2} - \frac{i\omega_+}{\rho})\Gamma(\frac{1 \mp (\sqrt{1-4r})^*}{2} - \frac{i\omega_+}{\rho})}, \quad (5.44)$$

$$C_2 = \frac{\Gamma(1 - \frac{i\omega_{in}}{\rho})\Gamma(\frac{i\omega_{out}}{\rho})}{\Gamma(\frac{1 \mp (\sqrt{1-4r})^*}{2} + \frac{i\omega_-}{\rho})\Gamma(\frac{1 \pm (\sqrt{1-4r})^*}{2} + \frac{i\omega_-}{\rho})}.$$

Fazendo-se o mesmo para $g_{in}^{(-)}(\eta)$, com os coeficientes e a notação de (5.42), tem-se:

$$g_{in}^{(-)}(\eta) = \exp \left[i \left(-\omega_- \eta - \frac{\omega_+}{\rho} \ln(2 \cosh(\rho \eta)) \right) \right] \times \quad (5.45)$$

$$[C_3 \times {}_2F_1 \left(\frac{1 \mp (\sqrt{1-4r})^*}{2} + \frac{i\omega_+}{\rho}, \frac{1 \pm (\sqrt{1-4r})^*}{2} + \frac{i\omega_+}{\rho}; \frac{i\omega_{out}}{\rho}; \frac{1 - \tanh(\rho \eta)}{2} \right)$$

$$+ (1 - z)^{-\frac{i\omega_{out}}{\rho}}$$

$$\times C_4 \times {}_2F_1 \left(\frac{1 \pm (\sqrt{1-4r})^*}{2} - \frac{i\omega_-}{\rho}, \frac{1 \mp (\sqrt{1-4r})^*}{2} - \frac{i\omega_-}{\rho}; 1 - \frac{i\omega_{out}}{\rho}; \frac{1 - \tanh(\rho \eta)}{2} \right)],$$

em que

$$C_3 = \frac{\Gamma(1 + \frac{i\omega_{in}}{\rho})\Gamma(-\frac{i\omega_{out}}{\rho})}{\Gamma(\frac{1 \pm (\sqrt{1-4r})^*}{2} - \frac{i\omega_-}{\rho})\Gamma(\frac{1 \mp (\sqrt{1-4r})^*}{2} - \frac{i\omega_-}{\rho})}, \quad (5.46)$$

$$C_4 = \frac{\Gamma(1 + \frac{i\omega_{in}}{\rho})\Gamma(\frac{i\omega_{out}}{\rho})}{\Gamma(\frac{1 \mp (\sqrt{1-4r})^*}{2} + \frac{i\omega_+}{\rho})\Gamma(\frac{1 \pm (\sqrt{1-4r})^*}{2} + \frac{i\omega_+}{\rho})}.$$

Ainda há a propriedade das funções hipergeométricas dada por

$${}_2F_1(\epsilon, v; \varpi; z) = (1 - z)^{\varpi - \epsilon - v} \times {}_2F_1(\varpi - \epsilon, \varpi - v; \varpi; z), \quad (5.47)$$

que, ao ser aplicada nas segundas hipergeométricas de (5.43) e (5.45), respectivamente, resulta em:

$${}_2F_1 \left(\frac{1 \pm (\sqrt{1-4r})^*}{2} - \frac{i\omega_+}{\rho}, \frac{1 \mp (\sqrt{1-4r})^*}{2} - \frac{i\omega_+}{\rho}; 1 - \frac{i\omega_{out}}{\rho}; \frac{1 - \tanh(\rho \eta)}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{1 + \tanh(\rho \eta)}{2} \right)^{\frac{i\omega_{in}}{\rho}}$$

$$\times {}_2F_1 \left(\frac{1 \mp (\sqrt{1-4r})^*}{2} - \frac{i\omega_-}{\rho}, \frac{1 \pm (\sqrt{1-4r})^*}{2} - \frac{i\omega_-}{\rho}; 1 - \frac{i\omega_{out}}{\rho}; \frac{1 - \tanh(\rho \eta)}{2} \right)$$

e

$$\begin{aligned}
& {}_2F_1\left(\frac{1 \pm (\sqrt{1-4r})^*}{2} - \frac{i\omega_-}{\rho}, \frac{1 \mp (\sqrt{1-4r})^*}{2} - \frac{i\omega_-}{\rho}; 1 - \frac{i\omega_{out}}{\rho}; \frac{1 - tgh(\rho\eta)}{2}\right) \\
&= \left(\frac{1 + tgh(\rho\eta)}{2}\right)^{-\frac{i\omega_{in}}{\rho}} \\
&\times {}_2F_1\left(\frac{1 \mp (\sqrt{1-4r})^*}{2} - \frac{i\omega_+}{\rho}, \frac{1 \pm (\sqrt{1-4r})^*}{2} - \frac{i\omega_+}{\rho}; 1 - \frac{i\omega_{out}}{\rho}; \frac{1 - tgh(\rho\eta)}{2}\right).
\end{aligned}$$

Sabendo que:

$$\frac{1 + tgh(\rho\eta)}{2} = \frac{e^{2\rho\eta}}{e^{2\rho\eta} + 1}, \quad (5.48)$$

as equações (5.43) e (5.45), com a propriedade (5.47), são reescritas como:

$$\begin{aligned}
g_{in}^{(+)}(\eta) &= \exp\left[i\left(-\omega_+\eta - \frac{\omega_-}{\rho} \ln(2\cosh(\rho\eta))\right)\right] \\
&\times C_1 \times {}_2F_1\left(\frac{1 \mp (\sqrt{1-4r})^*}{2} + \frac{i\omega_-}{\rho}, \frac{1 \pm (\sqrt{1-4r})^*}{2} + \frac{i\omega_-}{\rho}; \frac{i\omega_{out}}{\rho}; \frac{1 - tgh(\rho\eta)}{2}\right) \\
&+ C_2 \times \exp\left[i\left(-\omega_+\eta - \frac{\omega_-}{\rho} \ln(2\cosh(\rho\eta))\right)\right] \times \left(\frac{e^{2\rho\eta}}{e^{2\rho\eta} + 1}\right)^{\frac{i\omega_{in}}{\rho}} \times \left(\frac{1}{e^{2\rho\eta} + 1}\right)^{-\frac{i\omega_{out}}{\rho}} \\
&\times {}_2F_1\left(\frac{1 \mp (\sqrt{1-4r})^*}{2} - \frac{i\omega_-}{\rho}, \frac{1 \pm (\sqrt{1-4r})^*}{2} - \frac{i\omega_-}{\rho}; 1 - \frac{i\omega_{out}}{\rho}; \frac{1 - tgh(\rho\eta)}{2}\right)
\end{aligned} \quad (5.49)$$

e

$$\begin{aligned}
g_{in}^{(-)}(\eta) &= \exp\left[i\left(-\omega_-\eta - \frac{\omega_+}{\rho} \ln(2\cosh(\rho\eta))\right)\right] \\
&\times C_3 \times {}_2F_1\left(\frac{1 \mp (\sqrt{1-4r})^*}{2} + \frac{i\omega_+}{\rho}, \frac{1 \pm (\sqrt{1-4r})^*}{2} + \frac{i\omega_+}{\rho}; \frac{i\omega_{out}}{\rho}; \frac{1 - tgh(\rho\eta)}{2}\right) \\
&+ C_4 \times \exp\left[i\left(-\omega_-\eta - \frac{\omega_+}{\rho} \ln(2\cosh(\rho\eta))\right)\right] \times \left(\frac{e^{2\rho\eta}}{e^{2\rho\eta} + 1}\right)^{-\frac{i\omega_{in}}{\rho}} \times \left(\frac{1}{e^{2\rho\eta} + 1}\right)^{-\frac{i\omega_{out}}{\rho}} \\
&\times {}_2F_1\left(\frac{1 \mp (\sqrt{1-4r})^*}{2} - \frac{i\omega_+}{\rho}, \frac{1 \pm (\sqrt{1-4r})^*}{2} - \frac{i\omega_+}{\rho}; 1 - \frac{i\omega_{out}}{\rho}; \frac{1 - tgh(\rho\eta)}{2}\right).
\end{aligned} \quad (5.50)$$

Paralelamente a esta construção, tomando-se a transformação de Bogoliubov para se descrever o modo de solução da região *in* em termos de *out*, quando $\eta \rightarrow +\infty$, tem-se $1 + e^{2\rho\eta} \approx e^{2\rho\eta}$ e $\ln(2\cosh(\rho\eta)) \approx \rho\eta$. Logo

$$g_{in}^{(+)}(\eta) = \sigma e^{-i\omega_{out}\eta} + \varrho e^{i\omega_{out}\eta}, \quad (5.51)$$

$$g_{in}^{(-)}(\eta) = \pi e^{-i\omega_{out}\eta} + \tau e^{i\omega_{out}\eta}, \quad (5.52)$$

sendo σ , ϱ , π e τ os coeficientes de Bogoliubov.

Pode-se enfim comparar (5.49) e (5.50) com (5.51) e (5.52) respectivamente, identificando-se $g_{out}^{(+)}(\eta)$, $g_{out}^{(-)}(\eta)$, σ , ϱ , π e τ :

$$g_{out}^{(+)}(\eta) = \exp \left[i \left(-\omega_+ \eta - \frac{\omega_-}{\rho} \ln(2 \cosh(\rho \eta)) \right) \right] \quad (5.53)$$

$$\times {}_2F_1 \left(\frac{1 \mp (\sqrt{1-4r})^*}{2} + \frac{i\omega_-}{\rho}, \frac{1 \pm (\sqrt{1-4r})^*}{2} + \frac{i\omega_-}{\rho}; \frac{i\omega_{out}}{\rho}; \frac{1 - tgh(\rho \eta)}{2} \right),$$

$$g_{out}^{(-)}(\eta) = \exp \left[i \left(\omega_- \eta + \frac{\omega_+}{\rho} \ln(2 \cosh(\rho \eta)) \right) \right] \quad (5.54)$$

$$\times {}_2F_1 \left(\frac{1 \mp (\sqrt{1-4r})^*}{2} - \frac{i\omega_+}{\rho}, \frac{1 \pm (\sqrt{1-4r})^*}{2} - \frac{i\omega_+}{\rho}; -\frac{i\omega_{out}}{\rho}; \frac{1 - tgh(\rho \eta)}{2} \right),$$

$$\sigma = C_1 = \frac{\Gamma \left(1 - \frac{i\omega_{in}}{\rho} \right) \Gamma \left(-\frac{i\omega_{out}}{\rho} \right)}{\Gamma \left(\frac{1 \pm (\sqrt{1-4r})^*}{2} - \frac{i\omega_+}{\rho} \right) \Gamma \left(\frac{1 \mp (\sqrt{1-4r})^*}{2} - \frac{i\omega_-}{\rho} \right)}, \quad (5.55)$$

$$\varrho = C_2 = \frac{\Gamma \left(1 - \frac{i\omega_{in}}{\rho} \right) \Gamma \left(\frac{i\omega_{out}}{\rho} \right)}{\Gamma \left(\frac{1 \mp (\sqrt{1-4r})^*}{2} + \frac{i\omega_-}{\rho} \right) \Gamma \left(\frac{1 \pm (\sqrt{1-4r})^*}{2} + \frac{i\omega_+}{\rho} \right)}, \quad (5.56)$$

$$\pi = C_3 = \frac{\Gamma \left(1 + \frac{i\omega_{in}}{\rho} \right) \Gamma \left(-\frac{i\omega_{out}}{\rho} \right)}{\Gamma \left(\frac{1 \pm (\sqrt{1-4r})^*}{2} - \frac{i\omega_-}{\rho} \right) \Gamma \left(\frac{1 \mp (\sqrt{1-4r})^*}{2} - \frac{i\omega_+}{\rho} \right)}, \quad (5.57)$$

$$\tau = C_4 = \frac{\Gamma \left(1 + \frac{i\omega_{in}}{\rho} \right) \Gamma \left(\frac{i\omega_{out}}{\rho} \right)}{\Gamma \left(\frac{1 \mp (\sqrt{1-4r})^*}{2} + \frac{i\omega_+}{\rho} \right) \Gamma \left(\frac{1 \pm (\sqrt{1-4r})^*}{2} + \frac{i\omega_-}{\rho} \right)}. \quad (5.58)$$

As expressões (5.53) e (5.54) deixam claro que na região *out*: $g_{out}^{(\pm)}(\eta) = e^{\mp i\omega_{out}\eta}$.

Portanto, o campo $\Lambda(\mathbf{x}, \eta)$ nas regiões *in* e *out* é

Para $\eta \rightarrow -\infty$:

$$\Lambda_{in\{+,-\}}^S(\mathbf{x}, \eta) \approx N_{in} E_+^{in} \sqrt{m} \begin{pmatrix} -i \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ -i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} e^{+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega_{in}\eta},$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{in\{-,+\}}^S(\mathbf{x},\eta) &\approx N_{in}E_-^{in}\sqrt{m}\begin{pmatrix} -isen\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ icos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ sen\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}e^{+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega_{in}\eta}, \\
\Lambda_{in\{+,-\}}^A(\mathbf{x},\eta) &\approx N_{in}E_+^{in}\sqrt{m}\begin{pmatrix} icos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ isen\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ -sen\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+i\omega_{in}\eta}, \\
\Lambda_{in\{-,+\}}^A(\mathbf{x},\eta) &\approx N_{in}E_-^{in}\sqrt{m}\begin{pmatrix} isen\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ -icos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ sen\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+i\omega_{in}\eta}. \tag{5.59}
\end{aligned}$$

Para $\eta \longrightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned}
\Lambda_{out\{+,-\}}^S(\mathbf{x},\eta) &\approx N_{out}E_+^{out}\sqrt{m}\begin{pmatrix} -icos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ -isen\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ -sen\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}e^{+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega_{out}\eta}, \\
\Lambda_{out\{-,+\}}^S(\mathbf{x},\eta) &\approx N_{out}E_-^{out}\sqrt{m}\begin{pmatrix} -isen\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ icos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ sen\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}e^{+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega_{out}\eta}, \\
\Lambda_{out\{+,-\}}^A(\mathbf{x},\eta) &\approx N_{out}E_+^{out}\sqrt{m}\begin{pmatrix} icos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ isen\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ -sen\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+i\omega_{out}\eta}, \\
\Lambda_{out\{-,+\}}^A(\mathbf{x},\eta) &\approx N_{out}E_-^{out}\sqrt{m}\begin{pmatrix} isen\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ -icos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ sen\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+i\omega_{out}\eta}. \tag{5.60}
\end{aligned}$$

5.4 TAXA DE CRIAÇÃO DE PARTÍCULAS ELKO

As duas bases completas de soluções para as partículas espinoriais ELKO autoconjugados e anti-autoconjugados nas regiões *in* e *out* são, respectivamente, $\{\Lambda_{in}^S(\mathbf{k},\beta,\eta), \Lambda_{in}^A(\mathbf{k},\beta,\eta)\}$

e $\{\Lambda_{out}^S(\mathbf{k}, \beta, \eta), \Lambda_{out}^A(\mathbf{k}, \beta, \eta)\}$, com β denotando as helicidades. A decomposição do campo ELKO em termos de Fourier traz a descrição do campo quântico usual (4.21), evidenciados no passado e no futuro como:

$$\mathfrak{f}_{in}(x) = \int d^3k \sum_{\beta} [\hat{a}_{in}(\mathbf{k}, \beta) \Lambda_{in}^S(\mathbf{k}, \beta, \eta) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \hat{b}_{in}^{\dagger}(\mathbf{k}, \beta) \Lambda_{in}^A(\mathbf{k}, \beta, \eta) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}] \quad (5.61)$$

e

$$\mathfrak{f}_{out}(x) = \int d^3k \sum_{\beta} [\hat{a}_{out}(\mathbf{k}, \beta) \Lambda_{out}^S(\mathbf{k}, \beta, \eta) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \hat{b}_{out}^{\dagger}(\mathbf{k}, \beta) \Lambda_{out}^A(\mathbf{k}, \beta, \eta) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}], \quad (5.62)$$

em que os operadores de criação e aniquilação satisfazem as seguintes relações de anti-comutação:

$$\begin{aligned} \{\hat{a}_{in/out}(\mathbf{k}, \beta), \hat{a}_{in/out}^{\dagger}(\mathbf{k}', \beta')\} &= \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\beta\beta'}, \\ \{\hat{b}_{in/out}(\mathbf{k}, \beta), \hat{b}_{in/out}^{\dagger}(\mathbf{k}', \beta')\} &= \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\beta\beta'}, \\ \{\hat{a}_{in/out}(\mathbf{k}, \beta), \hat{a}_{in/out}(\mathbf{k}', \beta')\} &= \{\hat{a}_{in/out}^{\dagger}(\mathbf{k}, \beta), \hat{a}_{in/out}^{\dagger}(\mathbf{k}', \beta')\} = 0, \\ \{\hat{b}_{in/out}(\mathbf{k}, \beta), \hat{b}_{in/out}(\mathbf{k}', \beta')\} &= \{\hat{b}_{in/out}^{\dagger}(\mathbf{k}, \beta), \hat{b}_{in/out}^{\dagger}(\mathbf{k}', \beta')\} = 0. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Por meio das transformações de Bogoliubov é possível descrever os modos de soluções *in* em termos de *out*, assim como foi feito com os $g_{in}^{(\pm)}(\eta)$ em termos dos $g_{out}^{(\pm)}(\eta)$:

$$\begin{aligned} \Lambda_{in}^S(\mathbf{k}, \beta, \eta) &= \sum_{\beta'} [\sigma_{\beta\beta'} \Lambda_{out}^S(\mathbf{k}, \beta', \eta) + \varrho_{\beta\beta'} \Lambda_{out}^A(\mathbf{k}, \beta', \eta)], \\ \Lambda_{in}^A(\mathbf{k}, \beta, \eta) &= \sum_{\beta'} [\pi_{\beta\beta'} \Lambda_{out}^S(\mathbf{k}, \beta', \eta) + \tau_{\beta\beta'} \Lambda_{out}^A(\mathbf{k}, \beta', \eta)], \end{aligned} \quad (5.64)$$

em que $\sigma_{\beta\beta'}$, $\varrho_{\beta\beta'}$, $\pi_{\beta\beta'}$ e $\tau_{\beta\beta'}$ são os coeficientes de Bogoliubov. Os operadores, por meio da mesma transformação, são descritos como:

$$\begin{aligned} \hat{a}_{out}(\mathbf{k}, \beta) &= \sum_{\beta'} [\sigma_{\beta\beta'} \hat{a}_{in}(\mathbf{k}, \beta') + \pi_{\beta\beta'} \hat{b}_{in}^{\dagger}(\mathbf{k}, \beta')], \\ \hat{b}_{out}(\mathbf{k}, \beta) &= \sum_{\beta'} [\tau_{\beta\beta'}^* \hat{b}_{in}(\mathbf{k}, \beta') + \varrho_{\beta\beta'}^* \hat{a}_{in}^{\dagger}(\mathbf{k}, \beta')]. \end{aligned} \quad (5.65)$$

Ao tomar-se o $(\dagger)$ de (5.65), tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{a}_{out}^{\dagger}(\mathbf{k}, \beta) &= \sum_{\beta'} [\sigma_{\beta\beta'}^* \hat{a}_{in}^{\dagger}(\mathbf{k}, \beta') + \pi_{\beta\beta'}^* \hat{b}_{in}(\mathbf{k}, \beta')], \\ \hat{b}_{out}^{\dagger}(\mathbf{k}, \beta) &= \sum_{\beta'} [\tau_{\beta\beta'} \hat{b}_{in}^{\dagger}(\mathbf{k}, \beta') + \varrho_{\beta\beta'} \hat{a}_{in}(\mathbf{k}, \beta')]. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Através das equações (5.65) e (5.66) pode-se verificar as condições para os coeficientes de Bogoliubov afim de preservar as relações de comutação dos operadores de criação e aniquilação.

Para $\{\hat{a}_{out}(\mathbf{k},\beta), \hat{a}_{out}^\dagger(\mathbf{k},\beta)\}$ e $\{\hat{b}_{out}(\mathbf{k},\beta), \hat{b}_{out}^\dagger(\mathbf{k},\beta)\}$, respectivamente:

$$\begin{aligned}
& \{\hat{a}_{out}(\mathbf{k},\beta), \hat{a}_{out}^\dagger(\mathbf{k},\beta)\} \\
&= \left\{ \sum_{\beta'} [\sigma_{\beta\beta'} \hat{a}_{in}(\mathbf{k},\beta') + \pi_{\beta\beta'} \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta')], \sum_{\beta'} [\sigma_{\beta\beta'}^* \hat{a}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta') + \pi_{\beta\beta'}^* \hat{b}_{in}(\mathbf{k},\beta')] \right\} \\
&= \sum_{\beta'} [(\sigma_{\beta\beta'} \hat{a}_{in}(\mathbf{k},\beta') + \pi_{\beta\beta'} \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta')) \times (\sigma_{\beta\beta'}^* \hat{a}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta') + \pi_{\beta\beta'}^* \hat{b}_{in}(\mathbf{k},\beta')) \\
&\quad + (\sigma_{\beta\beta'}^* \hat{a}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta') + \pi_{\beta\beta'}^* \hat{b}_{in}(\mathbf{k},\beta')) \times (\sigma_{\beta\beta'} \hat{a}_{in}(\mathbf{k},\beta') + \pi_{\beta\beta'} \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta'))] \\
&= \sum_{\beta'} [| \sigma_{\beta\beta'} |^2 \hat{a}_{in}(\mathbf{k},\beta') \hat{a}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta') + \sigma_{\beta\beta'} \pi_{\beta\beta'}^* \hat{a}_{in}(\mathbf{k},\beta') \hat{b}_{in}(\mathbf{k},\beta') \\
&\quad + \pi_{\beta\beta'} \sigma_{\beta\beta'}^* \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta') \hat{a}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta') + | \pi_{\beta\beta'} |^2 \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta') \hat{b}_{in}(\mathbf{k},\beta') \\
&\quad + | \sigma_{\beta\beta'} |^2 \hat{a}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta') \hat{a}_{in}(\mathbf{k},\beta') + \sigma_{\beta\beta'}^* \pi_{\beta\beta'} \hat{a}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta') \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta') \\
&\quad + \pi_{\beta\beta'}^* \sigma_{\beta\beta'} \hat{b}_{in}(\mathbf{k},\beta') \hat{a}_{in}(\mathbf{k},\beta') + | \pi_{\beta\beta'} |^2 \hat{b}_{in}(\mathbf{k},\beta') \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta')],
\end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned}
& \{\hat{a}_{out}(\mathbf{k},\beta), \hat{a}_{out}^\dagger(\mathbf{k},\beta)\} \\
&= \sum_{\beta'} [| \sigma_{\beta\beta'} |^2 \{\hat{a}_{in}(\mathbf{k},\beta'), \hat{a}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta')\} + \sigma_{\beta\beta'} \pi_{\beta\beta'}^* \{\hat{a}_{in}(\mathbf{k},\beta'), \hat{b}_{in}(\mathbf{k},\beta')\} \\
&\quad + \pi_{\beta\beta'} \sigma_{\beta\beta'}^* \{\hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta'), \hat{a}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta')\} + | \pi_{\beta\beta'} |^2 \{\hat{b}_{in}(\mathbf{k},\beta'), \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta')\}] \\
&= \sum_{\beta'} (| \sigma_{\beta\beta'} |^2 + | \pi_{\beta\beta'} |^2) = 1;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{\hat{b}_{out}(\mathbf{k},\beta), \hat{b}_{out}^\dagger(\mathbf{k},\beta)\} \\
&= \left\{ \sum_{\beta'} [\tau_{\beta\beta'}^* \hat{b}_{in}(\mathbf{k},\beta') + \varrho_{\beta\beta'}^* \hat{a}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta')], \sum_{\beta'} [\tau_{\beta\beta'} \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta') + \varrho_{\beta\beta'} \hat{a}_{in}(\mathbf{k},\beta')] \right\} \\
&= \sum_{\beta'} [(\tau_{\beta\beta'}^* \hat{b}_{in}(\mathbf{k},\beta') + \varrho_{\beta\beta'}^* \hat{a}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta')) \times (\tau_{\beta\beta'} \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta') + \varrho_{\beta\beta'} \hat{a}_{in}(\mathbf{k},\beta')) \\
&\quad + (\tau_{\beta\beta'} \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta') + \varrho_{\beta\beta'} \hat{a}_{in}(\mathbf{k},\beta')) \times (\tau_{\beta\beta'}^* \hat{b}_{in}(\mathbf{k},\beta') + \varrho_{\beta\beta'}^* \hat{a}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta'))] \\
&= \sum_{\beta'} [| \tau_{\beta\beta'} |^2 \hat{b}_{in}(\mathbf{k},\beta') \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta') + \tau_{\beta\beta'}^* \varrho_{\beta\beta'} \hat{b}_{in}(\mathbf{k},\beta') \hat{a}_{in}(\mathbf{k},\beta') \\
&\quad + \varrho_{\beta\beta'}^* \tau_{\beta\beta'} \hat{a}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta') \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta') + | \varrho_{\beta\beta'} |^2 \hat{a}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta') \hat{a}_{in}(\mathbf{k},\beta') \\
&\quad + | \tau_{\beta\beta'} |^2 \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta') \hat{b}_{in}(\mathbf{k},\beta') + \tau_{\beta\beta'} \varrho_{\beta\beta'}^* \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta') \hat{a}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta') \\
&\quad + \varrho_{\beta\beta'} \tau_{\beta\beta'}^* \hat{a}_{in}(\mathbf{k},\beta') \hat{b}_{in}(\mathbf{k},\beta') + | \varrho_{\beta\beta'} |^2 \hat{a}_{in}(\mathbf{k},\beta') \hat{a}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta')],
\end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned}
& \{\hat{b}_{out}(\mathbf{k},\beta), \hat{b}_{out}^\dagger(\mathbf{k},\beta)\} \\
&= \sum_{\beta'} [|\tau_{\beta\beta'}|^2 \{\hat{b}_{in}(\mathbf{k},\beta'), \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta')\} + \tau_{\beta\beta'}^* \varrho_{\beta\beta'} \{\hat{b}_{in}(\mathbf{k},\beta'), \hat{a}_{in}(\mathbf{k},\beta')\} \\
&+ \varrho_{\beta\beta'}^* \tau_{\beta\beta'} \{\hat{a}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta'), \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta')\} + |\varrho_{\beta\beta'}|^2 \{\hat{a}_{in}(\mathbf{k},\beta'), \hat{a}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta')\}] \\
&= \sum_{\beta'} (|\tau_{\beta\beta'}|^2 + |\varrho_{\beta\beta'}|^2) = 1.
\end{aligned}$$

Assim, a relação de comutação entre os operadores de criação e aniquilação será satisfeita com as seguintes condições sobre os coeficientes de Bogoliubov:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\beta'} (|\sigma_{\beta\beta'}|^2 + |\pi_{\beta\beta'}|^2) = 1. \\
&= \sum_{\beta'} (|\tau_{\beta\beta'}|^2 + |\varrho_{\beta\beta'}|^2) = 1.
\end{aligned} \tag{5.67}$$

O valor esperado de partículas espinoriais ELKO autoconjugado para um observador em *out* a partir do vácuo de *in* é:

$$\begin{aligned}
\langle N^S \rangle &= \langle 0_{in} | \hat{a}_{out}^\dagger(\mathbf{k},\beta) \hat{a}_{out}(\mathbf{k},\beta) | 0_{in} \rangle \\
&= \langle 0_{in} | \sum_{\beta'} (\sigma_{\beta\beta'}^* \hat{a}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta') + \pi_{\beta\beta'}^* \hat{b}_{in}(\mathbf{k},\beta')) \times (\sigma_{\beta\beta'} \hat{a}_{in}(\mathbf{k},\beta') + \pi_{\beta\beta'} \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta')) | 0_{in} \rangle \\
&= \sum_{\beta'} \left(|\sigma_{\beta\beta'}|^2 \langle 0_{in} | \hat{a}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta') \hat{a}_{in}(\mathbf{k},\beta') | 0_{in} \rangle + \sigma_{\beta\beta'}^* \pi_{\beta\beta'} \langle 0_{in} | \hat{a}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta') \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta') | 0_{in} \rangle \right. \\
&+ \pi_{\beta\beta'}^* \sigma_{\beta\beta'} \langle 0_{in} | \hat{b}_{in}(\mathbf{k},\beta') \hat{a}_{in}(\mathbf{k},\beta') | 0_{in} \rangle + |\pi_{\beta\beta'}|^2 \langle 0_{in} | \hat{b}_{in}(\mathbf{k},\beta') \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta') | 0_{in} \rangle \Big) \\
&= \sum_{\beta'} |\pi_{\beta\beta'}|^2.
\end{aligned} \tag{5.68}$$

Do mesmo modo, o valor esperado de partículas espinoriais ELKO anti-autoconjugado para um observador em *out* a partir do vácuo de *in* é:

$$\begin{aligned}
\langle N^A \rangle &= \langle 0_{in} | \hat{b}_{out}^\dagger(\mathbf{k},\beta) \hat{b}_{out}(\mathbf{k},\beta) | 0_{in} \rangle \\
&= \langle 0_{in} | \sum_{\beta'} (\tau_{\beta\beta'} \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta') + \varrho_{\beta\beta'} \hat{a}_{in}(\mathbf{k},\beta')) \times (\tau_{\beta\beta'}^* \hat{b}_{in}(\mathbf{k},\beta') + \varrho_{\beta\beta'}^* \hat{a}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta')) | 0_{in} \rangle \\
&= \sum_{\beta'} \left(|\tau_{\beta\beta'}|^2 \langle 0_{in} | \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta') \hat{b}_{in}(\mathbf{k},\beta') | 0_{in} \rangle + \tau_{\beta\beta'} \varrho_{\beta\beta'}^* \langle 0_{in} | \hat{b}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta') \hat{a}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta') | 0_{in} \rangle \right. \\
&+ \varrho_{\beta\beta'} \tau_{\beta\beta'}^* \langle 0_{in} | \hat{a}_{in}(\mathbf{k},\beta') \hat{b}_{in}(\mathbf{k},\beta') | 0_{in} \rangle + |\varrho_{\beta\beta'}|^2 \langle 0_{in} | \hat{a}_{in}(\mathbf{k},\beta') \hat{a}_{in}^\dagger(\mathbf{k},\beta') | 0_{in} \rangle \Big) \\
&= \sum_{\beta'} |\varrho_{\beta\beta'}|^2.
\end{aligned} \tag{5.69}$$

Assim, o número esperado de partículas espinoriais ELKO para um observador em *out* a partir do vácuo de *in* será:

$$\langle N_\lambda \rangle = \langle N^S \rangle + \langle N^A \rangle = \sum_{\beta'} (|\pi_{\beta\beta'}|^2 + |\varrho_{\beta\beta'}|^2). \quad (5.70)$$

Os modos $\{\Lambda_{in}^S(\mathbf{k}, \beta, \eta), \Lambda_{in}^A(\mathbf{k}, \beta, \eta)\}$ em termos de $\{\Lambda_{out}^S(\mathbf{k}, \beta, \eta), \Lambda_{out}^A(\mathbf{k}, \beta, \eta)\}$, no fim, dependem unicamente da descrição de $N_{in}g_{in}^{(\pm)}(\eta)$ em termos de $N_{out}g_{out}^{(\pm)}(\eta)$. Ao correlacioná-los através das equações (5.40) e (5.47), quando $\eta \rightarrow +\infty$, tem-se:

$$\begin{aligned} N_{in}g_{in}^{(+)}(\eta) &\approx N_{out} \left(\frac{N_{in}}{N_{out}} \right) \frac{\Gamma\left(1 - \frac{i\omega_{in}}{\rho}\right) \Gamma\left(-\frac{i\omega_{out}}{\rho}\right)}{\Gamma\left(\frac{1 \pm (\sqrt{1-4r})^*}{2} - \frac{i\omega_{+}}{\rho}\right) \Gamma\left(\frac{1 \mp (\sqrt{1-4r})^*}{2} - \frac{i\omega_{+}}{\rho}\right)} e^{-i\omega_{out}\eta} \\ &+ N_{out} \left(\frac{N_{in}}{N_{out}} \right) \frac{\Gamma\left(1 - \frac{i\omega_{in}}{\rho}\right) \Gamma\left(\frac{i\omega_{out}}{\rho}\right)}{\Gamma\left(\frac{1 \mp (\sqrt{1-4r})^*}{2} + \frac{i\omega_{-}}{\rho}\right) \Gamma\left(\frac{1 \pm (\sqrt{1-4r})^*}{2} + \frac{i\omega_{-}}{\rho}\right)} e^{i\omega_{out}\eta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{in}g_{in}^{(-)}(\eta) &\approx N_{out} \left(\frac{N_{in}}{N_{out}} \right) \frac{\Gamma\left(1 + \frac{i\omega_{in}}{\rho}\right) \Gamma\left(-\frac{i\omega_{out}}{\rho}\right)}{\Gamma\left(\frac{1 \pm (\sqrt{1-4r})^*}{2} - \frac{i\omega_{-}}{\rho}\right) \Gamma\left(\frac{1 \mp (\sqrt{1-4r})^*}{2} - \frac{i\omega_{-}}{\rho}\right)} e^{-i\omega_{out}\eta} \\ &+ N_{out} \left(\frac{N_{in}}{N_{out}} \right) \frac{\Gamma\left(1 + \frac{i\omega_{in}}{\rho}\right) \Gamma\left(\frac{i\omega_{out}}{\rho}\right)}{\Gamma\left(\frac{1 \mp (\sqrt{1-4r})^*}{2} + \frac{i\omega_{+}}{\rho}\right) \Gamma\left(\frac{1 \pm (\sqrt{1-4r})^*}{2} + \frac{i\omega_{+}}{\rho}\right)} e^{i\omega_{out}\eta}. \end{aligned}$$

Como $N_{in/out}$ assinala a normalização do campo quântico do espinor ELKO nas regiões minkowskiana do passado e do futuro, e sabendo-se que a normalização $N = (2mE(k))^{-1/2} = (2m\omega)^{-1/2}$, conforme visto em (4.21), das expressões acima decorre que:

$$\begin{aligned} \frac{N_{in}}{N_{out}} g_{in}^{(+)}(\eta) &\approx \sqrt{\frac{\omega_{out}}{\omega_{in}}} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{i\omega_{in}}{\rho}\right) \Gamma\left(-\frac{i\omega_{out}}{\rho}\right)}{\Gamma\left(\frac{1 \pm (\sqrt{1-4r})^*}{2} - \frac{i\omega_{+}}{\rho}\right) \Gamma\left(\frac{1 \mp (\sqrt{1-4r})^*}{2} - \frac{i\omega_{+}}{\rho}\right)} e^{-i\omega_{out}\eta} \quad (5.71) \\ &+ \sqrt{\frac{\omega_{out}}{\omega_{in}}} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{i\omega_{in}}{\rho}\right) \Gamma\left(\frac{i\omega_{out}}{\rho}\right)}{\Gamma\left(\frac{1 \mp (\sqrt{1-4r})^*}{2} + \frac{i\omega_{-}}{\rho}\right) \Gamma\left(\frac{1 \pm (\sqrt{1-4r})^*}{2} + \frac{i\omega_{-}}{\rho}\right)} e^{i\omega_{out}\eta}, \end{aligned}$$

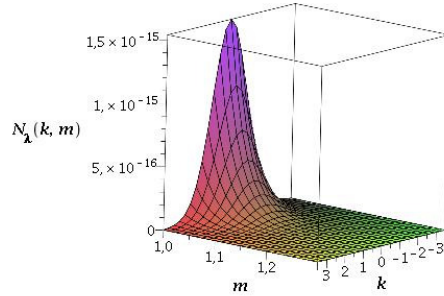
$$\begin{aligned} \frac{N_{in}}{N_{out}} g_{in}^{(-)}(\eta) &\approx \sqrt{\frac{\omega_{out}}{\omega_{in}}} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{i\omega_{in}}{\rho}\right) \Gamma\left(-\frac{i\omega_{out}}{\rho}\right)}{\Gamma\left(\frac{1 \pm (\sqrt{1-4r})^*}{2} - \frac{i\omega_{-}}{\rho}\right) \Gamma\left(\frac{1 \mp (\sqrt{1-4r})^*}{2} - \frac{i\omega_{-}}{\rho}\right)} e^{-i\omega_{out}\eta} \quad (5.72) \\ &+ \sqrt{\frac{\omega_{out}}{\omega_{in}}} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{i\omega_{in}}{\rho}\right) \Gamma\left(\frac{i\omega_{out}}{\rho}\right)}{\Gamma\left(\frac{1 \mp (\sqrt{1-4r})^*}{2} + \frac{i\omega_{+}}{\rho}\right) \Gamma\left(\frac{1 \pm (\sqrt{1-4r})^*}{2} + \frac{i\omega_{+}}{\rho}\right)} e^{i\omega_{out}\eta}. \end{aligned}$$

Identificando-se os coeficientes de Bogoliubov das equações (5.71) e (5.72), quando comparadas à equação (5.64), e fazendo-se uso desses coeficientes em (5.70), denota-se a densidade de criação de partículas espinoriais ELKO, em termos das funções gama de Euler, como:

$$\langle N_\lambda \rangle = \frac{\omega_{out}}{\omega_{in}} \sum_{j=1}^2 \left[\left| \frac{\Gamma\left(1 - \frac{i\omega_{in}}{\rho}\right) \Gamma\left(\frac{i\omega_{out}}{\rho}\right)}{\Gamma\left(\frac{1 \mp (\sqrt{1-4r_j})^*}{2} + \frac{i\omega_-}{\rho}\right) \Gamma\left(\frac{1 \pm (\sqrt{1-4r_j})^*}{2} + \frac{i\omega_-}{\rho}\right)} \right|^2 + \left| \frac{\Gamma\left(1 + \frac{i\omega_{in}}{\rho}\right) \Gamma\left(-\frac{i\omega_{out}}{\rho}\right)}{\Gamma\left(\frac{1 \pm (\sqrt{1-4r_j})^*}{2} - \frac{i\omega_-}{\rho}\right) \Gamma\left(\frac{1 \mp (\sqrt{1-4r_j})^*}{2} - \frac{i\omega_-}{\rho}\right)} \right|^2 \right], \quad (5.73)$$

em que $r_1 = \frac{B}{8(A+B)} \left(\frac{3c_2B}{2(A+B)} + \frac{4ic_1k}{\rho} \right)$ e $r_2 = \frac{B}{8(A+B)} \left(\frac{3c_2B}{2(A+B)} - \frac{4ic_1k}{\rho} \right)$, de acordo com a discussão tida em (5.24). O fato de haver dois valores de r deve-se à existência de duas helicidades para o campo espinorial ELKO, $\beta = \{\pm, \mp\}$. Através dos gráficos nas imagens abaixo, pode-se observar certas características qualitativamente interessantes no tocante ao comportamento da densidade de criação de partículas ELKO, como consequência da equação (5.73).

(a) - Produção de partículas ELKO $N_\lambda(k, m)$



(b) - Produção de partículas ELKO $N_\lambda(k, m)$

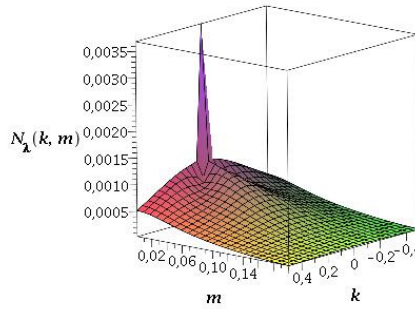
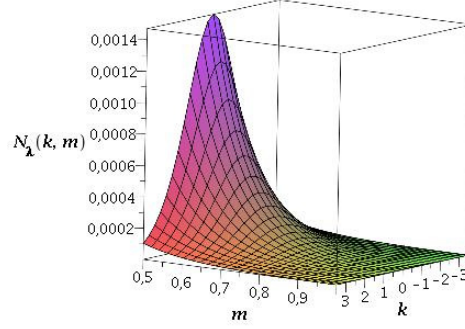


Figura 5.3: Gráfico 3D para a densidade de número de partículas ELKO criadas em função da massa m e do momento k , com parâmetros $A = 30$, $B = 1$ e $\rho = 1$. (a) Região de massa e momento “grandes”; (b) Região de massa e momento “pequenos”.

(a) - Produção de partículas ELKO $N_{\lambda}(k, m)$



(b) - Produção de partículas ELKO $N_{\lambda}(k, m)$

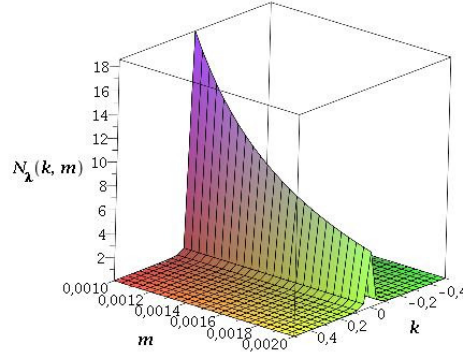


Figura 5.4: Gráfico 3D para a densidade de número de partículas ELKO criadas em função da massa m e do momento k , com parâmetros $A = 50$, $B = 10$ e $\rho = 3$. (a) Região de massa e momento “grandes”; (b) Região de massa e momento “pequenos”.

A partir dos gráficos das Figuras 5.3 e 5.4 vê-se que: (1) Para massas muito pequenas, o número de partículas criadas tende a ser muito alto. No primeiro caso, avaliando-se a diminuição da massa entre 10^0 e 10^{-2} , a produção de partículas aumenta em cerca de 10^{12} . E no segundo, para mesma ordem de grandeza na diminuição da massa, a produção de partículas aumenta em cerca de 10^3 . Embora tal resultado aponte para uma quantidade infinita de partículas ELKO criadas, quando $m \rightarrow 0$, no repouso $k = 0$, a própria definição do campo ELKO garante que ele deve ser massivo. Assim, a produção infinita dessas partículas (requerendo energia infinita do campo gravitacional) torna-se absurdo, como esperado, já que não pode-se ter partículas ELKO de massa nula sendo criadas, concordando com a teoria deste espinor; (2) Entre os gráficos 5.3 e 5.4, o parâmetro ρ aumentou em três vezes, tendo como consequência um aumento quanto ao número de partículas produzidas para massas “grandes” e massas “pequenas”, respectivamente. Deste modo, pode-se verificar que quanto maior o parâmetro ρ (proporcional ao grau de expansão do fator de escala adotado (5.15)) maior é a produção de partículas. Esta consequência também concorda com a teoria de criação em espaços curvos, já que, com a análise reversa, quando $\rho \rightarrow 0 \Rightarrow a^2(\eta) \rightarrow A = cte \Rightarrow R_{\mu\nu\lambda}^\alpha = 0$, acarretando na não produção

de partículas; (3) Em ambos os gráficos, conforme a massa e o momento aumenta, vê-se que o número de densidade de partículas tende a zero pois, como esperado, para se criar partículas muito massivas ou relativísticas é necessário uma enorme conversão de energia por parte do campo gravitacional.

5.5 COMPARAÇÃO COM CRIAÇÃO DE ESCALARES E FÉRMIONS DE DIRAC

Pode-se comparar a densidade $\langle N_\lambda \rangle$ com a densidade de criação de partículas escalares $\langle N_\phi \rangle$, por Bernard e Duncan (BIRRELL; DAVIES, 1994)[1], (BERNARD; DUNCAN, 1977)[12] e (BAUER, 2013)[41]:

$$\langle N_\phi \rangle = 2 \frac{\omega_{out}}{\omega_{in}} \left| \frac{\Gamma\left(1 - \frac{i\omega_{in}}{\rho}\right) \Gamma\left(\frac{i\omega_{out}}{\rho}\right)}{\Gamma\left(\frac{i\omega_-}{\rho}\right) \Gamma\left(1 + \frac{i\omega_-}{\rho}\right)} \right|^2, \quad (5.74)$$

em que o fator 2 é devido a criação em igual quantidade de partículas e anti-partículas do campo escalar. Nota-se que quando $r_1 = 0 = r_2$ para (5.73) obtêm-se, como caso particular, a mesma densidade de criação de partículas escalares (5.74).

A produção de partículas fermiônicas de Dirac $\langle N_\psi \rangle$, por (MORADI, 2009)[13], é dado em termos das funções gama de Euler como:

$$\langle N_\psi \rangle = 2 \frac{N_{in}}{N_{out}} \left(\left| \frac{\Gamma\left(1 - \frac{i\omega_-}{\rho} + \frac{imB}{\rho}\right) \Gamma\left(-\frac{i\omega_-}{\rho} - \frac{imB}{\rho}\right)}{\Gamma\left(\frac{i\omega_+}{\rho} - \frac{imB}{\rho}\right) \Gamma\left(1 + \frac{i\omega_+}{\rho} + \frac{imB}{\rho}\right)} \right|^2 + 1 \right)^{-1}, \quad (5.75)$$

em que

$$N_{in/out} = \frac{1}{\sqrt{2m^2(A \mp B)^2 + 2m(A \mp B)\omega_{in/out}}}$$

sob um fator de escala $a(\eta) = A + Btgh(\rho\eta)$. Uma vez que o ELKO é uma partícula fermiônica, é interessante compará-lo com a produção de férmions de Dirac. Entretanto, o contexto no qual este trabalho foi realizado admitiu um fator de escala $a^2(\eta) = A + Btgh(\rho\eta)$. Tendo em conta que $tgh(\rho\eta)$ é limitado a ± 1 e considerando o limite $B/A \leq 0,1$, a métrica (5.15) pode ser expandida como $a(\eta) \approx \sqrt{A} + [B/(2\sqrt{A})] tgh(\rho\eta) + \dots$ em (5.75), permitindo-se então comparar o resultado (5.73) com a correspondente partículas de Dirac (*ibdem*, 2009)[13]:

$$\langle N_\psi \rangle = 2 \frac{N_{in}}{N_{out}} \frac{\left| \Gamma\left(\frac{i\omega_+}{\rho} - \frac{imD}{\rho}\right) \Gamma\left(1 + \frac{i\omega_+}{\rho} + \frac{imD}{\rho}\right) \right|^2}{\left| \Gamma\left(1 - \frac{i\omega_-}{\rho} + \frac{imD}{\rho}\right) \Gamma\left(-\frac{i\omega_-}{\rho} - \frac{imD}{\rho}\right) \right|^2 + \left| \Gamma\left(\frac{i\omega_+}{\rho} - \frac{imD}{\rho}\right) \Gamma\left(1 + \frac{i\omega_+}{\rho} + \frac{imD}{\rho}\right) \right|^2}, \quad (5.76)$$

$$N_{out/in} = \frac{1}{\sqrt{2m^2(C \pm D)^2 + 2m(C \pm D)\omega_{out/in}}},$$

em que o fator 2 implica no número de partículas e anti-partículas produzida em igual quantidade, $\omega_{\pm} = (\omega_{out} + \omega_{in})/2$, $\omega_{out/in} = \sqrt{k^2 + m^2}(C \pm D)^2$, com $C = \sqrt{A}$ e $D = B/(2\sqrt{A})$.

A seguir, estão plotados alguns gráficos que comparam a produção de partículas ELKO, fermiônicas de Dirac e escalares:

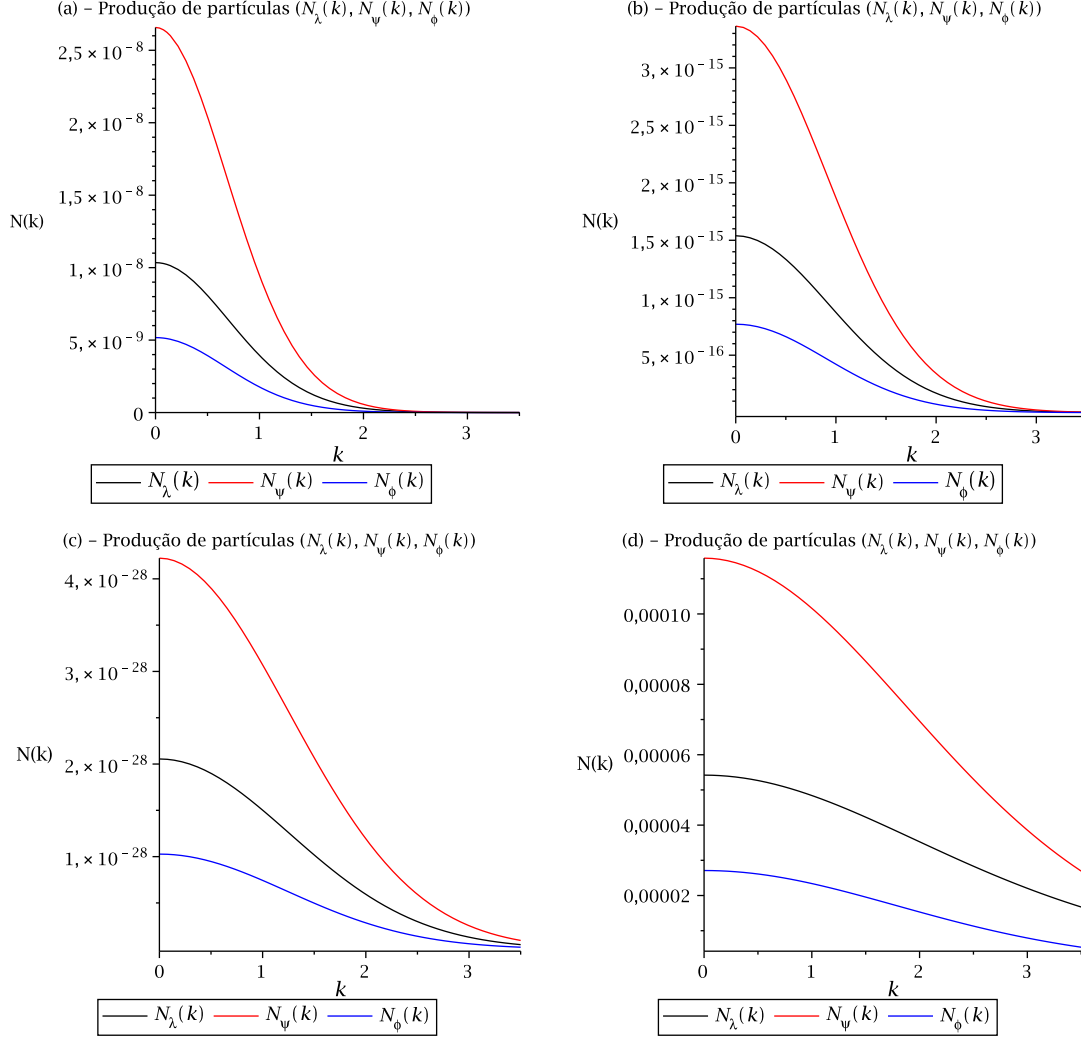


Figura 5.5: Análise gráfica para N_{ψ} (Dirac - linha vermelha), N_{λ} (ELKO - linha preta) e N_{ϕ} (Escalar - linha azul) em função dos momentos, com os seguintes parâmetros: (a) $A = 10$, $B = 1$, $m = 1$ e $\rho = 1$; (b) $A = 30$, $B = 1$, $m = 1$, $\rho = 1$; (c) $A = 100$, $B = 1$, $m = 1$, $\rho = 1$; (d) $A = 30$, $B = 1$, $m = 1$, $\rho = 5$.

Através da Figura 5.5, vê-se que para as mesmas massas, o espectro de partículas de Dirac criada é sempre maior do que as partículas ELKO e escalares. Para todos os tipos de partículas o máximo ocorre a momentos nulos, indicando-se novamente que partículas no repouso são criadas em maior quantidade pois, como já mencionado, partículas com momentos mais elevados exigem mais energia do campo gravitacional para serem criadas, sendo dessa forma suprimidas. Tomando-se $r_{1,2} = 0$ para a densidade do número de ELKO,

recupera-se exatamente o espectro das partículas escalares, com um fator 2 provenientes dos dois tipos de ELKO, ou seja, autoconjugado e anti-autoconjugado. Observa-se também que quanto maior a distância entre os parâmetros A e B , menor o número de partículas criadas. No gráfico (d) da figura 5.5 vê-se o efeito do parâmetro ρ , que aumenta o número de partículas criadas e amplia a forma do espectro (isso é mais evidente quando comparado ao gráfico (b), com os mesmos parâmetros a menos de ρ).

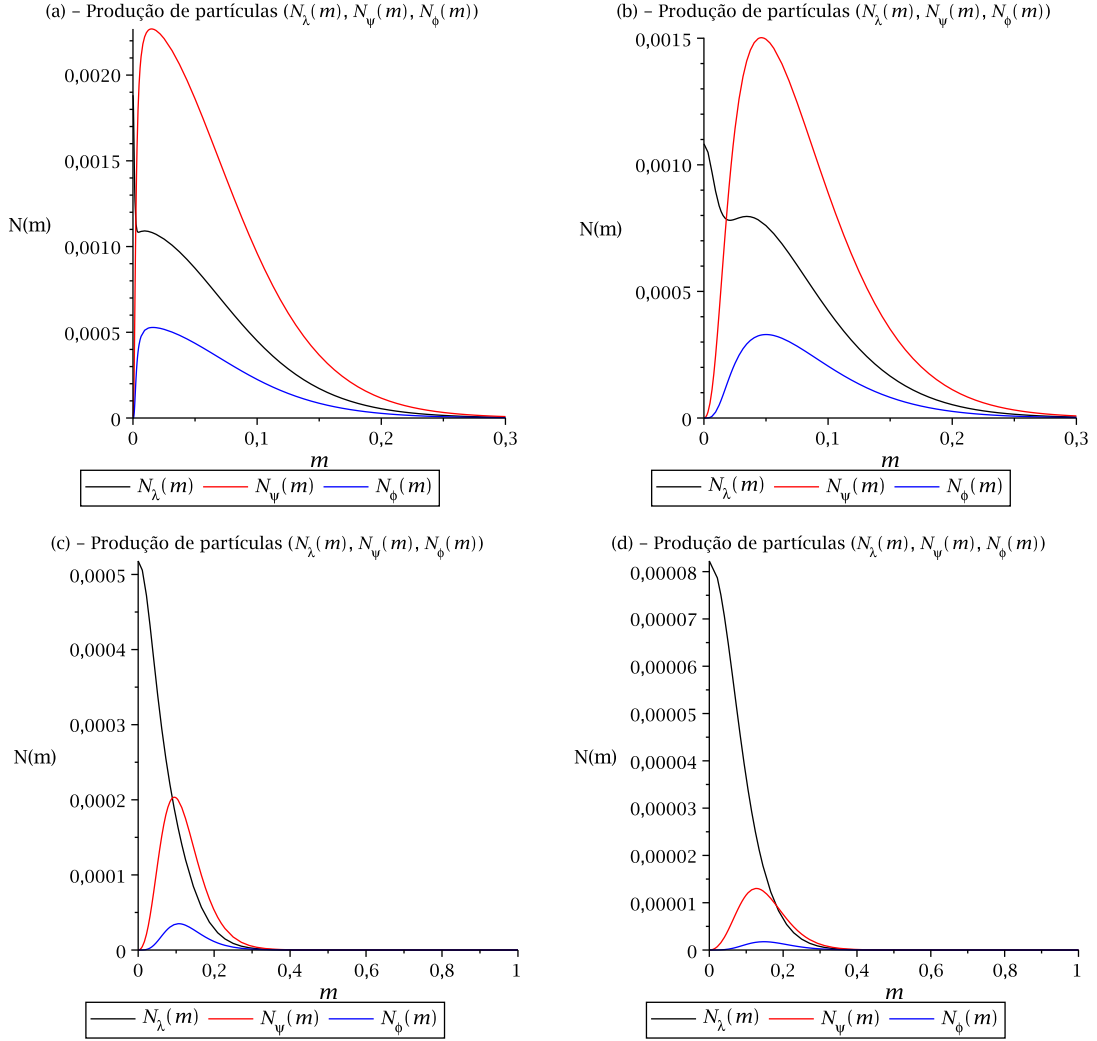


Figura 5.6: Análise gráfica para N_ψ (Dirac - linha vermelha), N_λ (ELKO - linha preta) e N_ϕ (Escalar - linha azul) em função das massas, com os parâmetros $A = 30$, $B = 1$, $\rho = 1$ a momentos fixos: (a) $k = 0,01$; (b) $k = 0,1$; (c) $k = 0,5$; (d) $k = 1,0$.

Na Figura 5.6 compara-se o número de partículas criadas em função de suas massas para alguns valores constantes de momentos. Vale observar que para partículas de Dirac e escalares tem-se que a densidade de número de partículas criadas tende a zero no limite de massa nula para cada momento, enquanto que para partículas ELKO a densidade de número de partículas aumenta no limite de massa nula. Um segundo máximo ocorre para

ELKO de pequenas massas e momentos (gráficos (a) e (b)), de acordo com o máximo também existente para partículas escalares e de Dirac. No caso específico de massa nula e momentos nulos, a densidade de números diverge para as partículas de ELKO, compatível com a discussão tida em 5.3 e 5.4, em que partículas de massa nula é absurdo, por construção da teoria deste férmion.

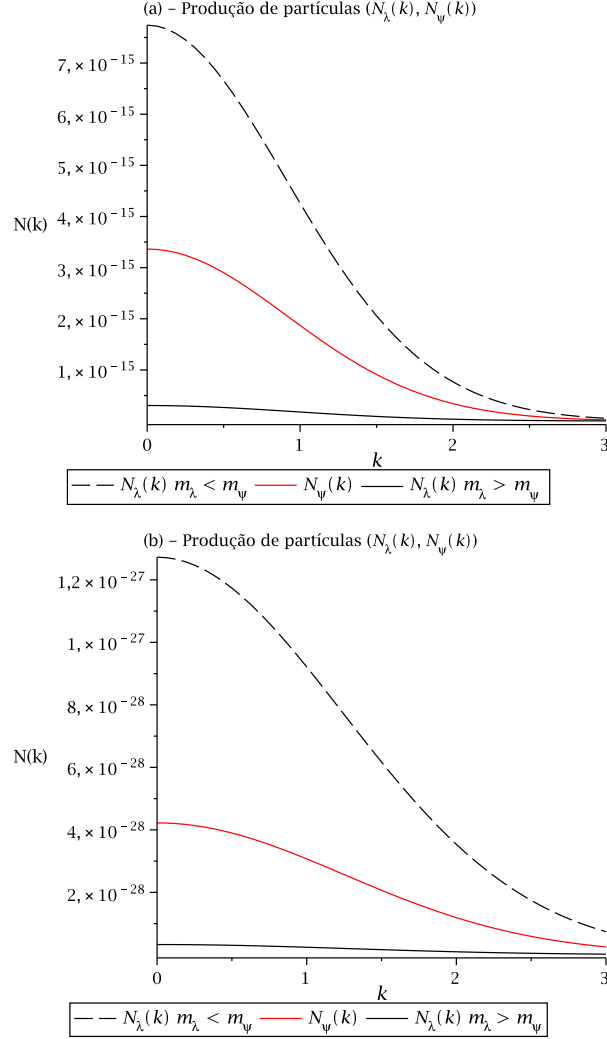


Figura 5.7: Análise gráfica para produção de partículas Dirac N_ψ e ELKO N_λ em função dos momentos para diferentes massas, assumindo como parâmetro $\rho = 1$: (a) $A = 30$, $B = 1$, $m_{Dirac} = 1$ (linha vermelha), $m_{ELKO} = 1,05m_{Dirac}$ (linha preta) e $m_{ELKO} = 0,95m_{Dirac}$ (linha preta tracejada); (b) $A = 100$, $B = 1$, $m_{Dirac} = 1$ (linha vermelha), $m_{ELKO} = 1,03m_{Dirac}$ (linha preta) e $m_{ELKO} = 0,97m_{Dirac}$ (linha preta tracejada);

Em última análise, compara-se na figura 5.7 a densidade de número de partículas criadas apenas para ELKO e Dirac às massas ligeiramente diferentes em função dos seus momentos. Observa-se que a criação de partículas ELKO é maior do que as partículas de Dirac quando sua massa é menor que este último (normalizada a um). Isso implica em uma interpretação interessante considerando-se o ELKO como o candidato à matéria escura

no universo pois, supondo que tais férmions escuros sejam em média menos massivos que os férmions bariônicos, esses são criados em quantidades maiores. Tal diferença poderia ser responsável pela presença de cerca de 5% de matéria bariônica e 25% de partículas de matéria escura no universo real. Além disso, sendo menos massivas, tais partículas são mais difíceis de serem detectadas em aceleradores, por exemplo.

5.6 ANÁLISE QUALITATIVA: ELKO E A ACELERAÇÃO DO UNIVERSO

No capítulo 2 foi visto duas possibilidades em caracterizar a aceleração $\ddot{a}$ do universo, através das equações (2.40) para cosmologia padrão e (2.83) para cosmologia *à la* Prigogine:

- Um universo termodinamicamente fechado, com presença de matéria (bariônica e escura), radiação e constante cosmológica, regido pela equação de Friedmann, a tempo cósmico t ,

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho(t) + 3p(t)) + \frac{\Lambda_C}{3}$$

em que $|\Lambda_C| > |4\pi G(\rho(t) + p(t))|$ para $\ddot{a}(t) > 0$;

- Um universo termodinamicamente aberto, com presença de matéria (bariônica e escura), radiação e pressão de criação, regido pela equação de Friedmann, a tempo cósmico t ,

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho(t) + 3p(t)) + \frac{4\pi G}{3}(\rho(t) + p(t))\frac{\Gamma(t)}{H(t)},$$

em que $|(\rho(t) + p(t))\Gamma(t)/H(t)| > |(\rho(t) + 3p(t))|$ para $\ddot{a}(t) > 0$.

Mesmo não representando um fator de escala mais realista na prescrição evolutiva do universo, segundo os dados cosmológicos atuais, o termo utilizado neste trabalho (5.15), a tempo conforme η , é um modelo muito interessante que condiz com as soluções analíticas. Deste modo, pode-se comparar o processo de criação de partículas escalares $\langle N_\phi \rangle$, fermiônicas de Dirac $\langle N_\psi \rangle$ e ELKO $\langle N_\lambda \rangle$, como averiguado em (5.73), (5.74) e (5.76), em termos de massas e momentos. À luz dessa característica presente em TQCETC, na qual a produção de partículas é permitida, vê-se a possibilidade de associá-la qualitativamente à termodinâmica de Prigogine com a taxa de criação $\Gamma = \Gamma(\eta)$. Assim, é sensato dizer que validando-se o fenômeno de criação, ao quantizar campos de matéria em espaços curvos, o número total de partículas produzidas em um instante conforme $\eta = -\infty$ até um instante η pode garantir uma pressão de criação Π e consequentemente uma taxa de criação Γ positiva, contribuinte para um universo acelerado. No modelo estudado nesta dissertação, por exemplo, supondo um universo composto apenas por partículas escalares, bariônicas e “escuras” ELKO, em que a massa do espinor ELKO m_{ELKO} seja ligeiramente menor que a de férmions bariônicos m_{Dirac} , a contribuição deste primeiro para a taxa Γ faz-se mais significativo que o segundo para a aceleração do universo, como mostrado nos gráficos da Figura 5.7.

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi apresentado o estudo de criação de partículas à nível da TQCETC, partindo como motivação do fenômeno de produção de matéria segundo a termodinâmica de Prigogine para sistemas abertos em cenários cosmológicos. Posteriormente, foi apresentado certas características estruturais e quânticas do campo espinorial ELKO, candidato à descrição da matéria escura.

De posse destes tópicos, deu-se início os cálculos para obtenção da densidade de número de partículas espinoriais ELKO sob um fator de escala métrico da forma $a(\eta) = \sqrt{A + Btgh(\rho\eta)}$, uma vez que este modelo admite soluções analíticas exatas para partículas escalares em geral e também para férmions de Dirac no limite $B/A \leq 0,1$, permitindo-se, portanto, condições de comparar o espectro de criação de partículas. Observou-se que a equação diferencial que rege a função do modo de tempo para o campo ELKO, (5.14), é exatamente uma generalização daquela de partículas escalares. As soluções analíticas de tal equação foram obtidas para o fator de escala acima mencionado após usar uma aproximação que permite escrever as soluções por meio de funções hipergeométricas generalizadas, como visto em (5.25). Em seguida, utilizando-se das propriedades das funções hipergeométricas e dos preceitos das transformações de Bogoliubov, obteve-se a densidade numérica das partículas ELKO criadas, (5.73), tendo como resultado a generalização da densidade de número de partículas escalares geradas sob o mesmo modelo cosmológico, (5.74). Mesmo sendo de natureza fermiônica, a parte dependente do tempo do campo deste espinor “escuro” segue uma evolução semelhante a partículas escalares, já que ambos não obedecem a equação de Dirac (somente a de Klein-Gordon). Frente a isto, no que diz respeito ao espectro de partículas criadas, várias propriedades interessantes estão presentes: (i) para partículas de mesma massa obteve-se que a densidade de número de partículas ELKO criadas é maior do que as partículas escalares e menor que as partículas de Dirac; (ii) para os três tipos de partículas o máximo de criação ocorre para momentos nulos, já que a produção de partículas com alto momento precisa de muito mais energia do campo gravitacional para serem geradas; (iii) o espectro de densidade de partículas criadas em função das suas massas também foi analisado para alguns valores constantes dos momentos. As partículas de Dirac e escalares têm uma produção máxima para massa não nula e vão para zero no limite de massa nula ou massas altas, semelhante a um espectro de radiação de corpo negro. Enquanto que as partículas ELKO apresenta um comportamento peculiar, onde no limite de massa zero a criação é máxima, indo para o infinito para momentos

nulos, revelando que isto é um absurdo tanto do ponto de vista de conservação de energia (não pode-se criar infinitas partículas) quanto do ponto de vista estrutural deste espinor (não se pode permitir ELKO com $m = 0$); (iv) partículas ELKO mais leves podem ser criadas em maior quantidade do que as partículas de Dirac. Neste sentido, vale observar que ao se considerar as partículas ELKO como candidatas à matéria escura no universo, interpreta-se que existem partículas escuras muito mais leves criadas gravitacionalmente do que as partículas fermiônicas bariônicas. Tal resultado é confirmado por observações, uma vez que há cerca de 25% de matéria escura contra cerca de 5% de matéria bariônica, de acordo com o modelo padrão da cosmologia.

Por último, e não menos importante, foi analisado qualitativamente que a descrição microscópica para criação de partículas através dos preceitos da TQCETC e a descrição macroscópica para taxa de produção de matéria em cenários cosmológicos de FRW em sistema termodinâmico aberto, segundo Ilya Prigogine, são razoavelmente compatíveis, permitindo enxergar, como exemplo, que a densidade de partículas criada para ELKO de massas ligeiramente menores do que as de Dirac, pode resultar em uma contribuição maior para a pressão de criação do tensor energia-momento de Prigogine, possibilitando a aceleração do universo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BIRRELL, N.D.; DAVIES, P. C. W., *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1994.
- [2] PARKER, L.; TOMS D., *Quantum Field Theory in Curved Spacetime - Quantized Fields and Gravity*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 2009.
- [3] MUKHANOV, V.F.; WINITZKI, S., *Introduction to Quantum Fields in Classical Backgrounds*, DRAFT VERSION 2004.
- [4] PARKER, L.E., The Creation of Particles in an Expanding Universe, *Thesis Doctoral, Harvard University*, 1966.
- [5] GRIB, A.A.; MAMAYEV, S.G.; FIZIKA, Y., **10**, 1276-1281 (1969) [Engl. transl: *Sov. J. Nucl. Phys. (USA)* **10**, 722-725 (1970)]. On field theory in Friedmann space.
- [6] GRIB, A.A.; MAMAYEV, S.G.; MOSTEPANENKO, V.M., Quantum effects in intensive external fields [in Russian] (*Atomizdat, Moscow*, 1980).
- [7] ZEL'DOVICH, Ya.B.; STEROBINSKII, A.A., *Sov. Phys. JETP* **34**, 1159-1166 (1972). Particle production and vacuum polarization in an anisotropic gravitational field.
- [8] Selected Works ZEL'DOVICH, Ya.B., Vol. II: Particles, Nuclei, and the Universe (*Nauka, Moscow*, 1985) [Engl. transl.: *Princeton Univ. Press, Princeton*, 1993].
- [9] HAWKING, S.W., Particle Creation by Black Holes, *Commun. Math. Phys.* **43** (1975) 199 [*Erratum ibid.* **46**(1976) 206-206][INSPIRE].
- [10] GIBBONS, G.W.; HAWKING, S.W., Cosmological Event Horizons, Thermodynamics and Particle Creation, *Phys. Rev. D* **15**(1977) 2738 [INSPIRE].
- [11] AUDRETSCH, J.; SHAEFER, G., Quantum Mechanics of Electromagnetically Bounded Spin 1/2 Particle in an Expanding Universe. 1. Influence of the Expansion, *Gen. Rel. Grav.* **9**(1978) 243[INSPIRE].
- [12] BERNARD, C.; DUNCAN, A.: *Ann. Phys* **107**, 201 (1977).

- [13] MORADI, S., Exact Solutions of Dirac Equation and Particle Creation in (1+3)-Dimensional Robertson-Walker Spacetime, *Int J Theor Phys* (2009) 48:969-980 DOI 10.1007/s10773-008-9870-3.
- [14] ALHUWALIA-KHALILOVA, D.V.; GRUMILLER, D., Dark matter: A spin one half fermion field with mass dimension one?, *Phys. Rev. D* 72, 067701 (2005).
- [15] ALHUWALIA-KHALILOVA, D.V.; GRUMILLER, D., Spin-half fermions with mass dimension one: Theory, phenomenology, and dark matter, *JCAP* 0507:012 (2005).
- [16] PRIGOGINE, I.; GEHENIAU, J; GUNZIG, E.; NARDONE, P., Thermodynamics and Cosmology, *General Relativity*, Vol. 21, No. 8, 1989.
- [17] TURYSHEV, S.G, Experimental Tests of General Relativity, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 2008, vol.58, p.207.
- [18] PAIS, A., *Subtle is the Lord*, The science and the life of Albert Einstein, with a new foreword Roger Penrose, Oxford University Press, 2005.
- [19] TAYLOR, E.; WHEELER, J., *Spacetime physics introduction to special relativity* [S.1]: W.H.Freeman and Company, New York, 1992.
- [20] HOBSON, M.P.; EFSTATHIOU, G.P., LASENBY, A.N., *General Relativity: An Introduction for Physics*, Cambridge, University Press, 2006.
- [21] CARROLL, S., *Spacetime and Geometry - An Introduction to General Relativity*, Pearson New International Edition, 2014.
- [22] SILVA, P.M.L.T, Uma descrição da expansão e aceleração do universo no contexto das teorias $f(R)$. Dissertação (Mestrado em Física), *Centro de Ciências Tecnológicas, Universidade Estadual de Santa Catarina*, **56f.**, 2012.
- [23] GRON, O.; HERVIK, S., *Einstein General Theory of Relativity - with modern applications in cosmology*, Springer, 2007.
- [24] HORVATH, J.; LUGONES, G.; ALLEN, M.P.; JR., S.S.; TEIXEIRA, R., *Cosmologia Física - do micro ao macro cosmos e vice-versa*, Livraria da Física, 2007.
- [25] RIESS, A.G.; FILIPPENKS, A.V.; CHALLIS, P.; *et al.* Observational Evidences from Supernovas for an Accelerating Universe and Cosmological Constant, *AJ*, 1998, vol. 116, p.1009.
- [26] ZWICKY, F., Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln, *Helvetica Physica Acta*, 1933, vol. 6, p. 110.
- [27] BALMANN, D., *Cosmology - Lectures*, Harvard, 2015.

- [28] LIMA, J.A.S.; CALVÃO, M.O., WAGA, I., On the thermodynamics of matter creation in cosmology, *Physics Letters A*, 1992.
- [29] CALLEN, H.B., *Thermodynamics and an Indroduction to Thermostatistics*, Second Edition, John Wiley and Sons, 1985.
- [30] ASHOK, D., *Lectures on Quantum Field Theory*, University of Rochester, USA, World Scientific, 2008.
- [31] RYDER, L.H., *Quantum Field Theory*, Second Edition, Cambridge University Press, 1996.
- [32] UNRUH, W.G., *Phys. Rev. D***14**, 870, 1976.
- [33] DAVIES, P.C.W.; FULLING, S.A.; UNRUH, W.G., *Phys. Rev. D***13**, 2720, 1976.
- [34] VILLAVERDE, F.A.C., A matriz S em teoria quântica de campos em espaços curvos. Dissertação (Mestrado em Física), *Instituto de Física, Departamento de Física-Matemática, Universidade de São Paulo*, **113f.**, 2012.
- [35] BOGOLIUBOV, N.N., *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **34**, 58 (Sov. Phys. JETP, 7, 51), 1958.
- [36] ROGERIO, R.J.B., Campos Espinoriais ELKO. **61f.** Dissertação (Mestrado em Física) - *Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista*, 2014.
- [37] LEE, C.Y., Symmetries of Elko and massive vector fields. PhD Thesis in Physics at the *University of Canterbury*. 2012, *arXiv: 1306.5491v2 [hep-th]*.
- [38] AGARWAL, B.; NAYAK, A.C.; VERMA, R.K.; JAIN, P., ELKO as dark matter candidate, *arXiv:1407.0797v3 [hep-ph]*, 2015.
- [39] SILVA, J.M.H.; PEREIRA, S.H., Exact solutions to Elko spinors in spatially flat Friedmann-Roberson-Walker spacetimes. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. **JCAP03**. 2014, 009.
- [40] BARATA, J.C.A., Notas para um curso de Física-Matemática, cap. 7 e 13, 2015.
- [41] BAUER, D.V.K., Particle Production in Gravitational Fields, *NTNU - Norwegian University of Science and Technology*, 2013.
- [42] AHLUWALIA, D.V., *arXiv:1605.04224 [physics.gen-ph]*, 2016.
- [43] ROGERIO, R.J.B.; SILVA, J.M.H., *arXiv:1602.05871 [hep-th]*, 2016.

Apêndice A - COMPONENTES X_j e Y_j

De forma explícita, as estruturas espinoriais ELKO são:

$$\begin{aligned}
\lambda_{\{+,-\}}^S(\mathbf{k}) &= \begin{pmatrix} b^1 \\ c^1 \\ d^1 \\ f^1 \end{pmatrix} = E_+ \sqrt{m} \begin{pmatrix} -i \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ -i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ -\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}, \\
\lambda_{\{-,+\}}^S(\mathbf{k}) &= \begin{pmatrix} b^2 \\ c^2 \\ d^2 \\ f^2 \end{pmatrix} = E_- \sqrt{m} \begin{pmatrix} -i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ i \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}, \\
\lambda_{\{+,-\}}^A(\mathbf{k}) &= \begin{pmatrix} h^1 \\ l^1 \\ m^1 \\ n^1 \end{pmatrix} = E_+ \sqrt{m} \begin{pmatrix} i \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ -\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}, \\
\lambda_{\{-,+\}}^A(\mathbf{k}) &= \begin{pmatrix} h^2 \\ l^2 \\ m^2 \\ n^2 \end{pmatrix} = E_- \sqrt{m} \begin{pmatrix} i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ -i \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}, \tag{A.1}
\end{aligned}$$

em que $E_{\pm}$ são os *boosts* aplicados a partir do repouso de $\lambda_{\{\pm,\mp\}}^{S/A}(\mathbf{0})$, dados por

$$E_{\pm} = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(1 \pm \frac{k}{E+m} \right). \tag{A.2}$$

Portanto, pode-se explicitar os termos que levam a (5.14):

Para $\Lambda_{\{+,-\}}^S$

$$\frac{a'}{a} \left[(-ik_1 - k_2) \frac{c^1}{b^1} - ik_3 \right] = \frac{a'}{a} \left[(-ik_1 - k_2) \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\varphi} - ik_3 \right],$$

$$\begin{aligned}
\frac{a'}{a} \left[(-ik_1 + k_2) \frac{b^1}{c^1} + ik_3 \right] &= \frac{a'}{a} \left[(-ik_1 + k_2) \cot g \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{-i\varphi} + ik_3 \right], \\
\frac{a'}{a} \left[(+ik_1 + k_2) \frac{f^1}{d^1} + ik_3 \right] &= \frac{a'}{a} \left[(-ik_1 - k_2) \cot g \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{i\varphi} + ik_3 \right], \\
\frac{a'}{a} \left[(+ik_1 - k_2) \frac{d^1}{f^1} - ik_3 \right] &= \frac{a'}{a} \left[(-ik_1 + k_2) \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{-i\varphi} - ik_3 \right].
\end{aligned}$$

Separado as partes reais e imaginárias das equações acima, tem-se:

$$\begin{aligned}
&\frac{a'}{a} \left\{ (k_1 \operatorname{sen} \varphi - k_2 \operatorname{cos} \varphi) \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) + i \left[-(k_1 \operatorname{cos} \varphi + k_2 \operatorname{sen} \varphi) \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) - k_3 \right] \right\}, \\
&\frac{a'}{a} \left\{ (-k_1 \operatorname{sen} \varphi + k_2 \operatorname{cos} \varphi) \cot g \left(\frac{\theta}{2} \right) + i \left[-(k_1 \operatorname{cos} \varphi + k_2 \operatorname{sen} \varphi) \cot g \left(\frac{\theta}{2} \right) + k_3 \right] \right\}, \\
&\frac{a'}{a} \left\{ (k_1 \operatorname{sen} \varphi - k_2 \operatorname{cos} \varphi) \cot g \left(\frac{\theta}{2} \right) + i \left[-(k_1 \operatorname{cos} \varphi + k_2 \operatorname{sen} \varphi) \cot g \left(\frac{\theta}{2} \right) + k_3 \right] \right\}, \\
&\frac{a'}{a} \left\{ (-k_1 \operatorname{sen} \varphi + k_2 \operatorname{cos} \varphi) \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) + i \left[-(k_1 \operatorname{cos} \varphi + k_2 \operatorname{sen} \varphi) \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) - k_3 \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Identifica-se em sua respectiva ordem:

$$\begin{aligned}
&\frac{a'}{a} (X_1 + iY_1), \\
&\frac{a'}{a} (X_2 + iY_2), \\
&\frac{a'}{a} (X_3 + iY_3), \\
&\frac{a'}{a} (X_4 + iY_4).
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Para $\Lambda_{\{-,+\}}^S$

$$\begin{aligned}
\frac{a'}{a} \left[(-ik_1 - k_2) \frac{c^2}{b^2} - ik_3 \right] &= \frac{a'}{a} \left[(+ik_1 + k_2) \cot g \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{i\varphi} - ik_3 \right], \\
\frac{a'}{a} \left[(-ik_1 + k_2) \frac{b^2}{c^2} + ik_3 \right] &= \frac{a'}{a} \left[(+ik_1 - k_2) \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{-i\varphi} + ik_3 \right], \\
\frac{a'}{a} \left[(+ik_1 + k_2) \frac{f^2}{d^2} + ik_3 \right] &= \frac{a'}{a} \left[(+ik_1 + k_2) \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{i\varphi} + ik_3 \right], \\
\frac{a'}{a} \left[(+ik_1 - k_2) \frac{d^2}{f^2} - ik_3 \right] &= \frac{a'}{a} \left[(+ik_1 - k_2) \cot g \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{-i\varphi} - ik_3 \right].
\end{aligned}$$

Separado as partes reais e imaginárias das equações acima, tem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{a'}{a} \left\{ (-k_1 \operatorname{sen} \varphi + k_2 \cos \varphi) \cot g \left(\frac{\theta}{2} \right) + i \left[(k_1 \cos \varphi + k_2 \operatorname{sen} \varphi) \cot g \left(\frac{\theta}{2} \right) - k_3 \right] \right\}, \\ & \frac{a'}{a} \left\{ (k_1 \operatorname{sen} \varphi - k_2 \cos \varphi) \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) + i \left[(k_1 \cos \varphi + k_2 \operatorname{sen} \varphi) \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) + k_3 \right] \right\}, \\ & \frac{a'}{a} \left\{ (-k_1 \operatorname{sen} \varphi + k_2 \cos \varphi) \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) + i \left[(k_1 \cos \varphi + k_2 \operatorname{sen} \varphi) \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) + k_3 \right] \right\}, \\ & \frac{a'}{a} \left\{ (k_1 \operatorname{sen} \varphi - k_2 \cos \varphi) \cot g \left(\frac{\theta}{2} \right) + i \left[(k_1 \cos \varphi + k_2 \operatorname{sen} \varphi) \cot g \left(\frac{\theta}{2} \right) - k_3 \right] \right\}. \end{aligned}$$

Identifica-se, em sua respectiva ordem:

$$\begin{aligned} & \frac{a'}{a} (X_5 + iY_5), \\ & \frac{a'}{a} (X_6 + iY_6), \\ & \frac{a'}{a} (X_7 + iY_7), \\ & \frac{a'}{a} (X_8 + iY_8). \end{aligned} \tag{A.4}$$

Para $\Lambda_{\{+,-\}}^A$

$$\begin{aligned} & \frac{a'}{a} \left[(+ik_1 + k_2) \frac{l^1}{h^1} + ik_3 \right] = \frac{a'}{a} \left[(+ik_1 + k_2) \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{i\varphi} + ik_3 \right], \\ & \frac{a'}{a} \left[(+ik_1 - k_2) \frac{h^1}{l^1} - ik_3 \right] = \frac{a'}{a} \left[(+ik_1 - k_2) \cot g \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{-i\varphi} - ik_3 \right], \\ & \frac{a'}{a} \left[(-ik_1 - k_2) \frac{n^1}{m^1} - ik_3 \right] = \frac{a'}{a} \left[(+ik_1 + k_2) \cot g \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{i\varphi} - ik_3 \right], \\ & \frac{a'}{a} \left[(-ik_1 + k_2) \frac{m^1}{n^1} + ik_3 \right] = \frac{a'}{a} \left[(+ik_1 - k_2) \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{-i\varphi} + ik_3 \right]. \end{aligned}$$

Separado as partes reais e imaginárias das equações acima, tem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{a'}{a} \left\{ (-k_1 \operatorname{sen} \varphi + k_2 \cos \varphi) \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) + i \left[(k_1 \cos \varphi + k_2 \operatorname{sen} \varphi) \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) + k_3 \right] \right\}, \\ & \frac{a'}{a} \left\{ (k_1 \operatorname{sen} \varphi - k_2 \cos \varphi) \cot g \left(\frac{\theta}{2} \right) + i \left[(k_1 \cos \varphi + k_2 \operatorname{sen} \varphi) \cot g \left(\frac{\theta}{2} \right) - k_3 \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{a'}{a} \left\{ (-k_1 \operatorname{sen} \varphi + k_2 \cos \varphi) \cot g \left(\frac{\theta}{2} \right) + i \left[(k_1 \cos \varphi + k_2 \operatorname{sen} \varphi) \cot g \left(\frac{\theta}{2} \right) - k_3 \right] \right\}, \\ & \frac{a'}{a} \left\{ (k_1 \operatorname{sen} \varphi - k_2 \cos \varphi) \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) + i \left[(k_1 \cos \varphi + k_2 \operatorname{sen} \varphi) \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) + k_3 \right] \right\}. \end{aligned}$$

Identifica-se em sua respectiva ordem:

$$\begin{aligned} & \frac{a'}{a} (X_9 + iY_9), \\ & \frac{a'}{a} (X_{10} + iY_{10}), \\ & \frac{a'}{a} (X_{11} + iY_{11}), \\ & \frac{a'}{a} (X_{12} + iY_{12}), \end{aligned} \tag{A.5}$$

Para $\Lambda_{\{-,+\}}^A$

$$\begin{aligned} & \frac{a'}{a} \left[(+ik_1 + k_2) \frac{l^2}{h^2} + ik_3 \right] = \frac{a'}{a} \left[(-ik_1 - k_2) \cot g \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{i\varphi} + ik_3 \right], \\ & \frac{a'}{a} \left[(+ik_1 - k_2) \frac{h^2}{l^2} - ik_3 \right] = \frac{a'}{a} \left[(-ik_1 + k_2) \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{-i\varphi} - ik_3 \right], \\ & \frac{a'}{a} \left[(-ik_1 - k_2) \frac{n^2}{m^2} - ik_3 \right] = \frac{a'}{a} \left[(-ik_1 - k_2) \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{i\varphi} - ik_3 \right], \\ & \frac{a'}{a} \left[(-ik_1 + k_2) \frac{m^2}{n^2} + ik_3 \right] = \frac{a'}{a} \left[(-ik_1 + k_2) \cot g \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{-i\varphi} + ik_3 \right]. \end{aligned}$$

Separado as partes reais e imaginárias das equações acima, tem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{a'}{a} \left\{ (k_1 \operatorname{sen} \varphi - k_2 \cos \varphi) \cot g \left(\frac{\theta}{2} \right) + i \left[-(k_1 \cos \varphi + k_2 \operatorname{sen} \varphi) \cot g \left(\frac{\theta}{2} \right) + k_3 \right] \right\}, \\ & \frac{a'}{a} \left\{ (-k_1 \operatorname{sen} \varphi + k_2 \cos \varphi) \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) + i \left[-(k_1 \cos \varphi + k_2 \operatorname{sen} \varphi) \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) - k_3 \right] \right\}, \\ & \frac{a'}{a} \left\{ (k_1 \operatorname{sen} \varphi - k_2 \cos \varphi) \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) + i \left[-(k_1 \cos \varphi + k_2 \operatorname{sen} \varphi) \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) - k_3 \right] \right\}, \\ & \frac{a'}{a} \left\{ (-k_1 \operatorname{sen} \varphi + k_2 \cos \varphi) \cot g \left(\frac{\theta}{2} \right) + i \left[-(k_1 \cos \varphi + k_2 \operatorname{sen} \varphi) \cot g \left(\frac{\theta}{2} \right) + k_3 \right] \right\}. \end{aligned}$$

Identifica-se em sua respectiva ordem:

$$\begin{aligned}
& \frac{a'}{a}(X_{13} + iY_{13}), \\
& \frac{a'}{a}(X_{14} + iY_{14}), \\
& \frac{a'}{a}(X_{15} + iY_{15}), \\
& \frac{a'}{a}(X_{16} + iY_{16}).
\end{aligned} \tag{A.6}$$

O momento $\mathbf{k}$ é parametrizado em coordenadas esféricas:

$$\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{k}} = (k_1, k_2, k_3) = (k \sin\theta \cos\varphi, k \sin\theta \sin\varphi, k \cos\theta), \tag{A.7}$$

Ao aplicar as componentes de (A.7) de forma explícita em X_j e Y_j , tem-se
Para X_j :

$$X_j = \begin{cases} (k_1 \sin\varphi - k_2 \cos\varphi) \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right), j = 1, 6, 12, 15, \\ (-k_1 \sin\varphi + k_2 \cos\varphi) \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right), j = 4, 7, 9, 14, \\ (k_1 \sin\varphi - k_2 \cos\varphi) \operatorname{cotg}\left(\frac{\theta}{2}\right), j = 3, 8, 10, 13, \\ (-k_1 \sin\varphi + k_2 \cos\varphi) \operatorname{cotg}\left(\frac{\theta}{2}\right), j = 2, 5, 11, 16; \end{cases}$$

$$X_j = \begin{cases} (k \sin\theta \cos\varphi \sin\varphi - k \sin\theta \sin\varphi \cos\varphi) \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0, j = 1, 6, 12, 15, \\ (-k \sin\theta \cos\varphi \sin\varphi + k \sin\theta \sin\varphi \cos\varphi) \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0, j = 4, 7, 9, 14, \\ (k \sin\theta \cos\varphi \sin\varphi - k \sin\theta \sin\varphi \cos\varphi) \operatorname{cotg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0, j = 3, 8, 10, 13, \\ (-k \sin\theta \cos\varphi \sin\varphi + k \sin\theta \sin\varphi \cos\varphi) \operatorname{cotg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0, j = 2, 5, 11, 16; \end{cases}$$

$$\therefore X_j \equiv 0, \forall j = [1, 16] \in \mathbb{N}. \tag{A.8}$$

Para Y_j :

$$Y_j = \begin{cases} [-(k_1 \cos\varphi + k_2 \sin\varphi) \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) - k_3], j = 1, 4, 14, 15, \\ [-(k_1 \cos\varphi + k_2 \sin\varphi) \operatorname{cotg}\left(\frac{\theta}{2}\right) + k_3], j = 2, 3, 13, 16, \\ [(k_1 \cos\varphi + k_2 \sin\varphi) \operatorname{cotg}\left(\frac{\theta}{2}\right) - k_3], j = 5, 8, 10, 11, \\ [(k_1 \cos\varphi + k_2 \sin\varphi) \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) + k_3], j = 6, 7, 9, 12; \end{cases}$$

$$Y_j = \begin{cases} \left[-(ksen\theta \cos^2\varphi + ksen\theta \sin^2\varphi)tg\left(\frac{\theta}{2}\right) - k\cos\theta \right], j = 1,4,14,15, \\ \left[-(ksen\theta \cos^2\varphi + ksen\theta \sin^2\varphi)cotg\left(\frac{\theta}{2}\right) + k\cos\theta \right], j = 2,3,13,16, \\ \left[(ksen\theta \cos^2\varphi + ksen\theta \sin^2\varphi)cotg\left(\frac{\theta}{2}\right) - k\cos\theta \right], j = 5,8,10,11, \\ \left[(ksen\theta \cos^2\varphi + ksen\theta \sin^2\varphi)tg\left(\frac{\theta}{2}\right) + k\cos\theta \right], j = 6,7,9,12; \end{cases}$$

$$Y_j = \begin{cases} \left[-ksen\theta \left(\frac{\sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})} \right) - k\cos\theta \right], j = 1,4,14,15, \\ \left[-ksen\theta \left(\frac{\cos(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})} \right) + k\cos\theta \right], j = 2,3,13,16, \\ \left[ksen\theta \left(\frac{\cos(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})} \right) - k\cos\theta \right], j = 5,8,10,11, \\ \left[ksen\theta \left(\frac{\sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})} \right) + k\cos\theta \right], j = 6,7,9,12; \end{cases}$$

Fazendo-se uso da propriedade trigonométrica: $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$,

$$Y_j = \begin{cases} \left[-2ksen\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\frac{\sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})}\right) - k\cos\theta \right] = -k\left(2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos\theta\right), j = 1,4,14,15, \\ \left[-2ksen\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\frac{\cos(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}\right) + k\cos\theta \right] = k\left(-2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos\theta\right), j = 2,3,13,16, \\ \left[2ksen\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\frac{\cos(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}\right) - k\cos\theta \right] = k\left(2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\theta\right), j = 5,8,10,11, \\ \left[2ksen\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\frac{\sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})}\right) + k\cos\theta \right] = k\left(2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos\theta\right), j = 6,7,9,12; \end{cases}$$

Com as propriedades trigonométricas $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ e $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$, tem-se

$$Y_j = \begin{cases} -k\left[2\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right) + \cos\theta\right] = -k, j = 1,4,14,15, \\ k\left[-2\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right) + \cos\theta\right] = -k, j = 2,3,13,16, \\ k\left[2\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right) - \cos\theta\right] = k, j = 5,8,10,11, \\ k\left[2\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right) + \cos\theta\right] = k, j = 6,7,9,12; \end{cases}$$

$$\therefore Y_j \equiv \mp k, \quad (\text{A.9})$$

sendo $-k$ para $\Lambda_{\{+,-\}}^S$ e $\Lambda_{\{-,+\}}^A$; $+k$ para $\Lambda_{\{-,+\}}^S$ e $\Lambda_{\{+,-\}}^A$.

Apêndice B - EQUAÇÕES DE RIEMANN-PAPPERITZ

A equação de Riemann-Papperitz¹ é uma equação diferencial de segunda ordem que representa a generalização de equações Fuchianas², com três pontos de singularidades. Para uma função $w = w(z)$, a mesma é dada por (BARATA, 2015), cap. 13 [40]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2w}{dz^2} + \left[\frac{1-\alpha-\alpha'}{z-z_1} + \frac{1-\beta-\beta'}{z-z_2} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{z-z_3} \right] \frac{dw}{dz} \\ + \left[\frac{\alpha\alpha'(z_1-z_2)(z_1-z_3)}{z-z_1} + \frac{\beta\beta'(z_2-z_3)(z_2-z_1)}{z-z_2} + \frac{\gamma\gamma'(z_3-z_1)(z_3-z_2)}{z-z_3} \right] \\ \times \frac{w}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)} = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

em que z_1 , z_2 e z_3 são os pólos da equação, α , α' , β , β' , γ e γ' são os coeficientes de Riemann que satisfazem a seguinte condição:

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' - 1 = 0. \quad (\text{B.2})$$

Escolhendo-se os pólos como $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ e $z_3 = \infty$, tem-se que (B.1) torna-se:

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \left[\frac{1-\beta-\beta'}{z-1} + \frac{1-\alpha-\alpha'}{z} \right] \frac{dw}{dz} + \left[\frac{\beta\beta'}{z-1} - \frac{\alpha\alpha'}{z} + \gamma\gamma' \right] \frac{w}{z(z-1)} = 0, \quad (\text{B.3})$$

cuja solução é:

$$w(z) = P \begin{Bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

¹Foi encontrada primeiramente por Papperitz em 1885. É denominada equação de Papperitz, equação de Riemann ou ainda equação de Riemann-Papperitz.

²Equações diferenciais lineares de uma variável complexa.

compactada pelo símbolo P de Riemann³ que, por sua vez, admite a seguinte transformação, para os pólos adotados:

$$P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & z \\ \delta + \kappa & \varepsilon + l & \zeta - \kappa - l & \\ \delta' + \kappa & \varepsilon' + l & \zeta' - \kappa - l & \end{Bmatrix} = z^\kappa (1-z)^l P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & z \\ \delta & \varepsilon & \zeta & \\ \delta' & \varepsilon' & \zeta' & \end{Bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Agora, comparando-se (5.23) com (B.3), em que $z \rightarrow \xi$ e $w(z) \rightarrow \tilde{g}(\xi)$, identificamos os coeficientes de Riemann, para a equação de $\tilde{g}(\xi)$ tratada:

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} + \left(\frac{1}{\xi-1} + \frac{1}{\xi} \right) \frac{d}{d\xi} + \left(\frac{\omega_{out}^2}{4\rho^2} \frac{1}{\xi-1} - \frac{\omega_{in}^2}{4\rho^2} \frac{1}{\xi} \right) \cdot \frac{1}{\xi(\xi-1)} \right. \\ \left. + \frac{B}{8(A+B)} \left(\frac{3c_2 B}{2(A+B)} - \frac{4c_1(X_j + iY_j)}{\rho} \right) \cdot \frac{1}{\xi(\xi-1)} \right] \tilde{g}(\xi) = 0, \quad (\text{B.6})$$

com os coeficientes:

$$\begin{cases} 1 - \alpha - \alpha' = 1 \\ \alpha\alpha' = \frac{\omega_{in}^2}{4\rho^2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = -\alpha' = i \frac{\omega_{in}}{2\rho}, \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{cases} 1 - \beta - \beta' = 1 \\ \beta\beta' = \frac{\omega_{out}^2}{4\rho^2} \end{cases} \Rightarrow \beta = -\beta' = i \frac{\omega_{out}}{2\rho}, \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{cases} 1 - \gamma - \gamma' = 0 \\ \gamma\gamma' = r \end{cases} \Rightarrow \gamma = \frac{1 \pm \sqrt{1-4r}}{2}, \gamma' = \frac{1 \mp \sqrt{1-4r}}{2}, \quad (\text{B.9})$$

em que $r = \frac{B}{8(A+B)} \left(\frac{3c_2 B}{2(A+B)} - \frac{4c_1(X_j + iY_j)}{\rho} \right)$. Portanto, $\tilde{g}(\xi)$ de (B.6) = (5.23), tem-se

$$\tilde{g}(\xi) = P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \xi \\ i \frac{\omega_{in}}{2\rho} & i \frac{\omega_{out}}{2\rho} & \frac{1 \pm \sqrt{1-4r}}{2} & \\ -i \frac{\omega_{in}}{2\rho} & -i \frac{\omega_{out}}{2\rho} & \frac{1 \mp \sqrt{1-4r}}{2} & \end{Bmatrix}. \quad (\text{B.10})$$

³Em seus trabalhos de 1857, Riemann introduziu uma notação para representar esquematicamente a dependência de equações com variáveis complexas do tipo $w''(z) + a_1(z)w'(z) + a_0w(z) = 0$, em que $f'(z) \equiv df(z)/dz$. As três primeiras colunas contêm os pontos singulares e os respectivos índices, em que os pontos singulares são dispostas na primeira linha. A quarta coluna contém apenas a variável da equação.

Agora, usando-se da transformação (B.5) em (B.10), segue

$$\tilde{g}(\xi) = P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ i\frac{\omega_{in}}{2\rho} & i\frac{\omega_{out}}{2\rho} & \frac{1 \pm \sqrt{1-4r}}{2} \\ -i\frac{\omega_{in}}{2\rho} & -i\frac{\omega_{out}}{2\rho} & \frac{1 \mp \sqrt{1-4r}}{2} \end{Bmatrix} \xi = P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ \delta + \kappa & \varepsilon + l & \zeta - \kappa - l \\ \delta' + \kappa & \varepsilon' + l & \zeta' - \kappa - l \end{Bmatrix} \xi,$$

em que $\kappa = \frac{i\omega_{in}}{2\rho}$ e $l = \frac{i\omega_{out}}{2\rho}$. Logo:

$$\begin{cases} \delta = 0 \\ \varepsilon = 0 \\ \zeta = \frac{1 \pm \sqrt{1-4r}}{2} + \frac{i\omega_{\pm}}{\rho} \\ \delta' = -\frac{i\omega_{in}}{\rho} \\ \varepsilon' = -\frac{i\omega_{out}}{\rho} \\ \zeta' = \frac{1 \mp \sqrt{1-4r}}{2} + \frac{i\omega_{\pm}}{\rho} \end{cases},$$

com $\omega_{\pm} = \frac{1}{2}(\omega_{out} \pm \omega_{in})$.

Portanto, $\tilde{g}(\xi)$ de (B.10) através da transformação de (B.5) é escrito como:

$$\tilde{g}(\xi) = \xi^{\frac{i\omega_{in}}{2\rho}} (1 - \xi)^{\frac{i\omega_{out}}{2\rho}} P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \frac{1 \pm \sqrt{1-4r}}{2} + \frac{i\omega_{\pm}}{\rho} \\ -\frac{i\omega_{in}}{\rho} & -\frac{i\omega_{out}}{\rho} & \frac{1 \mp \sqrt{1-4r}}{2} + \frac{i\omega_{\pm}}{\rho} \end{Bmatrix} \xi. \quad (\text{B.11})$$