



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

SEGMENTAÇÃO DE TEXTURAS EM IMAGENS DIGITAIS UTILIZANDO WAVELETS REDUNDANTES

Joyce Aline Duarte Dobler

Orientador: Prof. Dr. Aylton Pagamisse

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, Setembro de 2015

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

SEGMENTAÇÃO DE TEXTURAS EM IMAGENS DIGITAIS UTILIZANDO WAVELETS REDUNDANTES

Joyce Aline Duarte Dobler

Orientador: Prof. Dr. Aylton Pagamisse

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, Setembro de 2015

FICHA CATALOGRÁFICA

D663s Dobler, Joyce Aline Duarte.
Segmentação de texturas em imagens digitais utilizando wavelets
redundantes / Joyce Aline Duarte Dobler. - Presidente Prudente: [s.n.], 2015
114 f.

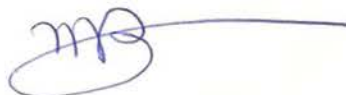
Orientador: Aylton Pagamisse
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de
Ciências e Tecnologia
Inclui bibliografia

1. Segmentação de texturas. 2. Wavelet diádica. 3. Wavelet starlet. 4.
Wavelets redundantes. I. Pagamisse, Aylton. II. Universidade Estadual
Paulista. Faculdade de Ciências e Tecnologia. III. Título.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. AYLTON PAGAMISSE
ORIENTADOR



Prof. Dr. MAURILIO BOAVENTURA
UNESP/IBILCE



Prof. Dr. ERIVALDO ANTONIO DA SILVA
UNESP/FCT



JOYCE ALINE DUARTE DOBLER

Presidente Prudente (SP), 25 de setembro de 2015.

Resultado: **APROVADA.**

Aos meus amados pais, Adolfo Hane Dobler e Avelina Moreira Duarte Dobler, que acreditaram e investiram em mim; e com amor, incentivo e apoio constantes, não mediram esforços para que eu concluísse mais esta etapa de minha vida.

Agradecimentos

A Deus, “O Mestre dos mestres”, pela minha vida, família e amigos; e por ter estado ao meu lado em todos os momentos, me sustentando e dando sabedoria. Em particular, agradeço pela oportunidade de ter cursado o mestrado e pelo provimento de todas as minhas necessidades no decorrer desse período.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Aylton Pagamisse, pelo apoio, confiança, incentivo, contribuição para o meu crescimento acadêmico e pessoal, e, principalmente, pela paciência que sempre teve comigo.

Aos professores do PósMAC e do Departamento de Matemática, Estatística e Computação, por contribuírem com minha formação acadêmica. Em especial, agradeço pelo incentivo e preciosas sugestões da Profa. Dra. Eniuce Menezes de Souza e do Prof. Dr. Messias Meneguette Junior, que fizeram parte da banca do meu exame de qualificação; e, dos Professores Dr. Maurílio Boaventura e Dr. Erivaldo Antonio da Silva, que fizeram parte da banca da minha defesa de dissertação.

Aos funcionários da seção de Pós-Graduação. Em especial, agradeço a Cinthia Thiemi Onishi por ter sido sempre tão dedicada e prestativa.

A todos os colegas da quarta turma do PósMAC, pela convivência e amizade. Em especial aos meus queridos amigos Adriano Sueke Takata, Bruno Felipe de Jesus Oliveira e Crislaine Menezes da Silva, por serem meus companheiros desde a graduação, pela paciência, estímulo e apoio constantes.

À minha amada família que não mediu esforços para me ajudar sempre que precisei, pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

A todos que direta ou indiretamente colaboraram para a realização deste trabalho.

*“Talvez não tenha conseguido
fazer o melhor, mas lutei para que
o melhor fosse feito. Não sou o que
deveria ser, mas Graças a Deus,
não sou o que era antes”.*

Martin Luther King

Resumo

A análise de texturas desempenha um papel importante em diversas aplicações, tais como análise de imagens médicas, inspeção industrial, sensoriamento remoto, etc. Dentre as principais aplicações que utilizam a análise de texturas, está a segmentação. Em particular, o estudo relacionado à segmentação de texturas já se estende por mais de cinco décadas, entretanto, continua sendo tópico de enorme interesse. Devido à variedade de contextos e situações em que o termo textura é utilizado, não se tem uma definição formal do seu conceito. Intuitivamente, textura está relacionada às variações tonais (níveis de cinza) nas imagens que podem ser consideradas descontinuidades locais e, em geral, estão associadas às bordas. A detecção de bordas é geralmente vista como um processo que reduz a quantidade de dados que representa um sinal, porém, a transformada *wavelet* é uma poderosa ferramenta que utiliza escala, direcionalidade e a distribuição local da energia das bordas e fornece uma representação completa e estável de um sinal, sem perda de informações. Neste trabalho, estudou-se e adaptou-se o método de segmentação de texturas desenvolvido por Pagamisse que utiliza a transformada *wavelet* diádica com quatro direções, incluindo a transformada *wavelet* starlet no intuito de melhorar o seu desempenho. O método agrega e combina as respostas das transformadas *wavelets* redundantes (invariantes por translação) em escalas e orientações, fornecendo a melhor segmentação de texturas. A eficiência do método construído foi comprovada aplicando-o em mosaicos de texturas e comparando os resultados obtidos com os resultados de outros métodos de segmentação de texturas encontrados na literatura.

Palavras-Chave: *Segmentação de Texturas, Wavelet Diádica, Wavelet Starlet, Wavelets Redundantes.*

Abstract

The texture analysis plays an important role in many applications, such as analysis of medical imaging, industrial inspection, remote sensing, etc. The main applications that use the analysis of textures is the segmentation. In particular, the study related to the textures segmentation spans for more than five decades, however, it continues to be topic of enormous interest. Because of the variety of contexts and situations in which the term texture is used, there isn't formal definition of the concept. Intuitively, texture is related to tonal variations (gray level) in images, and can be that considered local discontinuities that are generally associated with edges. The edge detection is generally seen as a process that reduces the amount of data that represents a sign, however, the *wavelet* transform is a powerful tool that uses scale, directionality and the local energy distribution of the edges, and provides a complete and stable representation of a signal, without loss of information. In this study, we studied and adapted the texture segmentation method developed by Pagamisse using the dyadic *wavelet* transform with four directions, including starlet *wavelet* transform in order to improve their performance. The method aggregates and combines the responses of the redundant *wavelets* transform (invariant by translation) in scales and orientations, providing the best segmentation of textures. The efficiency of the method constructed was proven by applying to mosaics of textures and comparing the results obtained with the results of other texture segmentation methods found in the literature.

Keywords: *Textures Segmentation, Dyadic Wavelet, Starlet Wavelet, Redundant Wavelets.*

Lista de Figuras

2.1	Exemplos de texturas. Fonte: [8].	22
3.1	Esquema de um plano tempo X frequência: (a) FT e sua função base, (b) WFT e suas funções base e (c) WT e sua função base. Fonte: [12].	31
3.2	Subespaços de funções gerados por uma função escala. Fonte: [25].	35
3.3	A relação entre os subespaços de função escala e <i>wavelet</i> . Fonte: [25].	37
3.4	Banco de análise FWT. Fonte: Adaptado de [25].	39
3.5	A transformada <i>wavelet</i> rápida 2-D: (a) banco de filtros de análise e (b) decomposição resultante. Fonte: Adaptado de [25].	42
4.1	Esquema de decomposição por uma transformada <i>wavelet</i> redundante.	44
4.2	Gráfico do módulo da equação 4.19 para $0 \leq n \leq 3$. Fonte: [59].	47
4.3	Esquema de decomposição pela transformada <i>wavelet</i> diádica com quatro direções em dois níveis. Fonte: Adaptado de [59].	49
4.4	(a) Função <i>spline</i> cúbica ϕ e (b) função <i>wavelet</i> starlet ψ . Fonte: [67].	50
4.5	Esquema de decomposição pela transformada <i>wavelet</i> starlet em dois níveis.	52
5.1	Esquema representativo do método de segmentação de texturas utilizando as <i>wavelets</i> diádica com quatro direções e starlet no nível j. Fonte: Adaptado de [58].	55
5.2	Etapas do método: (a) Um par de texturas, (b) uma das bandas de detalhes resultante da 1ª etapa, (c) banda homogeneizada resultante da 2ª e 3ª etapas, (d) banda de máxima separabilidade resultante da 4ª e 5ª etapas, (e) imagem referência para a limiarização, e (f) banda limiarizada resultante da 6ª etapa. . .	56
5.3	(a) Plano cartesiano hipotético bidimensional com duas classes de dados que ilustram a falta de separabilidade em qualquer banda original e (b) eixo ao longo do qual as classes podem ser separadas. Fonte: [65].	57
5.4	(a) Mosaico de três texturas, (b) imagem referência, (c) resultado da segmentação, (d), (e) e (f) resultado da limiarização das bandas de máxima separabilidade conforme legendas. Fonte: Adaptado de [58].	65
6.1	(a) Par de texturas D004D084, (b) par de texturas D005D092, (c) par de texturas D012D017 e (d) imagem referência. Fonte: [1].	68
6.2	Par de texturas D009D024. Fonte: [1].	69
6.3	Etapas finais do melhor resultado obtido pelo método de segmentação de texturas aplicado ao par de texturas D004D084 apresentado em (a) correspondente ao nível 1, por meio da combinação das bandas B1, B2, B3, B4 e B5: (b) Banda de máxima separabilidade e (c) limiarização da banda de máxima separabilidade. .	75
6.4	Etapas finais do melhor resultado obtido pelo método de segmentação de texturas aplicado ao par de texturas D005D092 apresentado em (a) correspondente ao nível 1, por meio da combinação das bandas B1, B2, B3, B4 e B5: (b) Banda de máxima separabilidade e (c) limiarização da banda de máxima separabilidade. .	78

6.5	Etapas finais do melhor resultado obtido pelo método de segmentação de texturas aplicado ao par de texturas D012D017 apresentado em (a) correspondente ao nível 2, por meio da combinação das bandas B3, B4 e B5: (b) Banda de máxima separabilidade e (c) limiarização da banda de máxima separabilidade.	81
6.6	Etapas finais do melhor resultado obtido pelo método de segmentação de texturas aplicado ao par de texturas D009D024 correspondente ao nível 2, por meio da combinação das bandas B1, B2, B3, B4 e B5: (a) Banda de máxima separabilidade e (b) limiarização da banda de máxima separabilidade.	83
6.7	(a) Mosaico de texturas Nat-5c, (b) mosaico de texturas Nat-5v, (c) mosaico de texturas Nat-5v2, (d) mosaico de texturas Nat-5v3, (e) mosaico de texturas Nat-5m e (f) imagem referência. Fontes: [1], [2] e [3].	85
6.8	(a) Mosaico com 5 texturas Nat-5c, (b) segmentação do melhor resultado obtido pelo método aplicado ao mosaico de 5 texturas Nat-5c correspondente ao nível 1, por meio da combinação das bandas B1, B2, B3, B4 e B5; e (c) imagem erro. .	86
6.9	(a) Mosaico com 5 texturas Nat-5v, (b) segmentação do melhor resultado obtido pelo método aplicado ao mosaico de 5 texturas Nat-5v correspondente ao nível 1, por meio da combinação das bandas B1, B2, B3, B4 e B5; e (c) imagem erro. .	87
6.10	(a) Mosaico com 5 texturas Nat-5v2, (b) segmentação do melhor resultado obtido pelo método aplicado ao mosaico de 5 texturas Nat-5v2 correspondente ao nível 1, por meio da combinação das bandas B1, B2, B3, B4 e B5; e (c) imagem erro. .	88
6.11	(a) Mosaico com 5 texturas Nat-5v3, (b) segmentação do melhor resultado obtido pelo método aplicado ao mosaico de 5 texturas Nat-5v3 correspondente ao nível 1, por meio da combinação das bandas B1, B2, B3, B4 e B5; e (c) imagem erro. .	89
6.12	(a) Mosaico com 5 texturas Nat-5m, (b) segmentação do melhor resultado obtido pelo método aplicado ao mosaico de 5 texturas Nat-5m correspondente ao nível 1, por meio da combinação das bandas B1, B2, B3, B4 e B5; e (c) imagem erro. .	90
6.13	(a) Mosaico de texturas Nat-10, (b) mosaico de texturas Nat-10v e (c) imagem referência. Fontes:[1], [2] e [3].	92
6.14	(a) Mosaico de texturas Nat-10, (b) segmentação do melhor resultado obtido pelo método aplicado ao mosaico de 10 texturas Nat-10 correspondente ao nível 1, por meio da combinação das bandas B1, B2, B3, B4 e B5; e (c) imagem erro.	94
6.15	(a) Mosaico de texturas Nat-10v, (b) segmentação do melhor resultado obtido pelo método aplicado ao mosaico de 10 texturas Nat-10v correspondente ao nível 1, por meio da combinação das bandas B1, B2, B3, B4 e B5; e (c) imagem erro. .	96

Lista de Tabelas

6.1	Desempenho do método de segmentação de texturas utilizando o método de limiarização automático (MLA) e o método de limiarização de Otsu (MLO) para o par de texturas D004D084.	70
6.2	Desempenho do método de segmentação de texturas utilizando o método de limiarização automático (MLA) e o método de limiarização de Otsu (MLO) para o par de texturas D005D092.	70
6.3	Desempenho do método de segmentação de texturas utilizando o método de limiarização automático (MLA) e o método de limiarização de Otsu (MLO) para o par de texturas D012D017.	70
6.4	Desempenho do método de segmentação de texturas utilizando determinados parâmetros de filtragem para o par de texturas D004D084.	71
6.5	Desempenho do método de segmentação de texturas utilizando determinados parâmetros de filtragem para o par de texturas D005D092.	71
6.6	Desempenho do método de segmentação de texturas utilizando determinados parâmetros de filtragem para o par de texturas D012D017.	72
6.7	Desempenho do método de segmentação de texturas para o par de texturas D004D084 utilizando a combinação das bandas 2 a 2: Percentual de erro e banda de máxima separabilidade (BMS).	73
6.8	Desempenho do método de segmentação de texturas para o par de texturas D004D084 utilizando a combinação das bandas 3 a 3: Percentual de erro e banda de máxima separabilidade (BMS).	73
6.9	Desempenho do método de segmentação de texturas para o par de texturas D004D084 utilizando a combinação das bandas 4 a 4: Percentual de erro e banda de máxima separabilidade (BMS).	74
6.10	Desempenho do método de segmentação de texturas para o par de texturas D004D084 utilizando a combinação das 5 bandas: Percentual de erro e banda de máxima separabilidade (BMS).	74
6.11	Desempenho do método de segmentação de texturas para o par de texturas D005D092 utilizando a combinação das bandas 2 a 2: Percentual de erro e banda de máxima separabilidade (BMS).	76
6.12	Desempenho do método de segmentação de texturas para o par de texturas D005D092 utilizando a combinação das bandas 3 a 3: Percentual de erro e banda de máxima separabilidade (BMS).	76
6.13	Desempenho do método de segmentação de texturas para o par de texturas D005D092 utilizando a combinação das bandas 4 a 4: Percentual de erro e banda de máxima separabilidade (BMS).	77
6.14	Desempenho do método de segmentação de texturas para o par de texturas D005D092 utilizando a combinação das 5 bandas: Percentual de erro e banda de máxima separabilidade (BMS).	77

6.15	Desempenho do método de segmentação de texturas para o par de texturas D012D017 utilizando a combinação das bandas 2 a 2: Percentual de erro e banda de máxima separabilidade (BMS).	79
6.16	Desempenho do método de segmentação de texturas para o par de texturas D012D017 utilizando a combinação das bandas 3 a 3: Percentual de erro e banda de máxima separabilidade (BMS).	79
6.17	Desempenho do método de segmentação de texturas para o par de texturas D012D017 utilizando a combinação das bandas 4 a 4: Percentual de erro e banda de máxima separabilidade (BMS).	80
6.18	Desempenho do método de segmentação de texturas para o par de texturas D012D017 utilizando a combinação das 5 bandas: Percentual de erro e banda de máxima separabilidade (BMS).	80
6.19	Erro percentual obtido por diversos métodos de segmentação de texturas aplicados aos pares de texturas D004D084, D005D92 e D012D017. Fontes: [58] e [63].	82
6.20	Desempenho do método de segmentação de texturas para o par de texturas D009D024: Percentual de erro e banda de máxima separabilidade (BMS).	83
6.21	Desempenho do método de segmentação de texturas para o mosaico com 5 texturas Nat-5c utilizando a combinação das bandas B1, B2, B3, B4 e B5.	86
6.22	Desempenho do método de segmentação de texturas para o mosaico com 5 texturas Nat-5v utilizando a combinação das bandas B1, B2, B3, B4 e B5.	87
6.23	Desempenho do método de segmentação de texturas para o mosaico com 5 texturas Nat-5v2 utilizando a combinação das bandas B1, B2, B3, B4 e B5.	88
6.24	Desempenho do método de segmentação de texturas para o mosaico com 5 texturas Nat-5v3 utilizando a combinação das bandas B1, B2, B3, B4 e B5.	89
6.25	Desempenho do método de segmentação de texturas para o mosaico com 5 texturas Nat-5m utilizando a combinação das bandas B1, B2, B3, B4 e B5.	90
6.26	Erro percentual obtido por diversos métodos de segmentação de texturas aplicados aos mosaicos com 5 texturas Nat-5c, Nat-5v, Nat-5v2, Nat-5v3 e Nat-5m. Fontes: [58] e [63].	91
6.27	Desempenho do método de segmentação de texturas para o mosaico com 10 texturas Nat-10 utilizando a combinação das bandas B1, B2, B3, B4 e B5.	93
6.28	Desempenho do método de segmentação de texturas para o mosaico com 10 texturas Nat-10v utilizando a combinação das bandas B1, B2, B3, B4 e B5.	95
6.29	Erro percentual obtido por diversos métodos de segmentação de texturas aplicados aos mosaicos com 10 texturas Nat-10 e Nat-10v. Fontes: [58] e [63].	97

Sumário

Resumo	7
Abstract	9
Lista de Figuras	10
Lista de Tabelas	12
Capítulos	
1 Introdução	17
1.1 Considerações Iniciais	17
1.2 Objetivos	18
1.3 Organização da Dissertação	18
2 Análise de Texturas	21
2.1 Textura	21
2.2 Aplicações da Análise de Texturas	23
2.2.1 Análise de Imagens Médicas	23
2.2.2 Inspeção Industrial	24
2.2.3 Segmentação de Documentos	24
2.2.4 Sensoriamento Remoto	25
2.3 Segmentação de Texturas	25
2.3.1 Abordagem Estatística	26
2.3.2 Abordagem Geométrica	26
2.3.3 Abordagem Baseada em Modelos Paramétricos	27
2.3.4 Abordagem Baseada em Processamento de Sinais	27
3 Wavelets	29
3.1 Breve Histórico das Funções <i>Wavelets</i>	29
3.2 Função <i>Wavelet</i>	30
3.3 Transformada <i>Wavelet</i>	30
3.4 Análise Tempo-Frequência na Representação de Funções	31
3.4.1 Transformada <i>Wavelet</i> Contínua	32
3.4.2 Transformada <i>Wavelet</i> Discreta	33
3.5 Análise Multirresolução	34
3.6 Transformada <i>Wavelet</i> Rápida	38
3.7 Transformada <i>Wavelet</i> em Duas Dimensões	40

4	Transformada <i>Wavelet</i> Redundante	43
4.1	Transformada <i>Wavelet</i> Diádica	45
4.2	Transformada <i>Wavelet</i> Starlet	50
5	Método de Segmentação de Texturas	53
5.1	Etapas do Método	53
5.1.1	Análise Canônica	56
5.1.2	Método de Limiarização de Otsu	60
5.2	Algoritmo Combinatorial Para a Segmentação de Duas ou Mais Texturas .	63
6	Aplicação do Método de Segmentação de Texturas	67
6.1	Segmentação de Pares de Texturas	67
6.1.1	Escolha do Método de Limiarização	69
6.1.2	Escolha dos Parâmetros de Filtragem	71
6.1.3	Resultados	72
6.2	Segmentação de Mosaicos com Cinco Texturas	84
6.2.1	Resultados	86
6.3	Segmentação de Mosaicos com Dez Texturas	91
6.3.1	Resultados	93
6.4	Discussão dos Resultados	97
7	Conclusões e Trabalhos Futuros	99
7.1	Conclusões	99
7.2	Trabalhos Futuros	100
	Referências	100
A	Apêndice A	107

Introdução

1.1 Considerações Iniciais

A enorme aplicabilidade da análise de texturas em diversas áreas torna impossível estabelecer uma única definição formal do termo “textura”. Seu conceito depende do contexto em que está inserida e à qual aplicação está associada. Dentre as aplicações que utilizam a análise de texturas, pode-se destacar a análise de imagens médicas, o sensoriamento remoto, a inspeção industrial, o reconhecimento de formas de objetos tridimensionais a partir de imagens bidimensionais, a segmentação de documentos e a segmentação de texturas. Em particular, a segmentação de texturas é o processo que visa particionar a imagem em regiões que apresentam características semelhantes.

De maneira geral, regiões de texturas semelhantes estão relacionadas à características semelhantes. As características de uma textura, mais lisa ou mais rugosa, por exemplo, estão relacionadas às variações tonais locais menos ou mais bruscas, isto é, descontinuidades locais contidas na imagem. Os pontos onde há intensas variações tonais fornecem a localização das bordas, que geralmente descrevem a informação estrutural sobre os contornos dos objetos representados na imagem [58].

As texturas de uma imagem são objetos de estudo do Processamento de Imagens Digitais por mais de cinco décadas [39]. As pesquisas são motivadas, principalmente, pela alta eficiência do sistema visual humano em identificá-las e diferenciá-las. Por isso, o Processamento de Imagens Digitais visa desenvolver ferramentas que possibilitem às máquinas não apenas automatizar procedimentos realizados pelas funções visuais dos seres humanos, mas também superar seu desempenho, pois são capazes de processar grande quantidade de informação com muito mais rapidez. Para isso, os resultados obtidos nos estudos psicofisiológicos da visão humana servem como referência ao desenvolvimento e construção de técnicas, modelos e algoritmos para diversas aplicações da análise de texturas.

A partir desses estudos da psicofisiologia da visão humana, foram encontradas evidências de que a imagem na retina é decomposta em vários canais de frequência espacialmente orientados. Baseada nessa teoria, surgiu recentemente, por volta de 1990, a primeira ferramenta matemática que forneceu uma abordagem mais formal, sólida e unificada, para a representação de um sinal (imagem) em várias escalas (níveis) de resolução [49], denominada análise multirresolução.

Técnicas utilizando multirresolução têm sido utilizadas há décadas [6], devido a necessidade e a importância da utilização de transformações que fornecem uma representação

em que as informações de tempo e frequência estejam presentes. Uma das ferramentas matemáticas que faz essa intermediação entre a representação espacial e a frequencial, e foi utilizada por muito tempo, é a transformada de Fourier janelada (WFT, *windowed Fourier transform*), porém, a limitação que a mesma apresenta na resolução tempo-frequência motivou a criação da transformada *wavelet* (WT, *wavelet transform*), que atualmente tem facilitado ainda mais a análise de muitas imagens [25], pois tornou possível computar decomposições precisas com limitado esforço computacional. Sua aplicação se destaca em diferentes áreas como Engenharia, Física, Matemática, Estatística, Economia, além de ser um instrumento eficiente utilizado no Processamento de Imagens Digitais.

Assim, a WT passou a ser mais utilizada na análise de imagens após Mallat desenvolver a análise multirresolução, em 1989 [49]. Alguns anos depois, Mallat e Zhong [52] construíram a transformada *wavelet* diádica, uma decomposição invariante por translação (redundante), que considera escala, direcionalidade e a distribuição local da energia das bordas e fornece uma representação completa e estável de um sinal (ou imagem), sem perda de informações. Dessa maneira, a transformada *wavelet* diádica é uma poderosa ferramenta que possibilita a obtenção de informações necessárias e suficientes para segmentar texturas.

Fundamentado nessa abordagem inspirada na teoria da filtragem por multicanais de frequência usada pelo sistema visual humano para processar informação, Pagamisse [58] desenvolveu um modelo teórico matemático para segmentar regiões de texturas homogêneas a partir da quantificação da energia local das bordas da imagem, detectada pela transformada *wavelet* diádica com quatro direções em vários níveis de resolução. Sua tese motivou e foi utilizada como referência para a construção teórica e prática deste trabalho.

1.2 Objetivos

Este trabalho tem a proposta de estudar o método de segmentação de texturas desenvolvido por Pagamisse [58], que utiliza a transformada *wavelet* diádica com quatro direções, e adaptá-lo, incluindo a transformada *wavelet* starlet a fim de melhorar o seu desempenho, e assim, contribuir para a área de Processamento de Imagens.

Em sua tese de doutorado, Pagamisse [58] mostrou a eficiência do uso da *wavelet* diádica com quatro direções em um método para segmentar texturas. Dessa maneira, espera-se que a combinação das *wavelets* diádica e starlet, ambas redundantes, ou seja, invariantes por translação, melhore ainda mais o desempenho desse método.

O método construído agrega e combina as respostas das transformadas *wavelet* redundantes (invariantes por translação), que extraem informações necessárias e suficientes da imagem em escalas (níveis) e orientações, obtendo a melhor segmentação de texturas. Sua eficiência é verificada por meio da aplicação a mosaicos de duas, cinco e dez texturas extraídas de Brodatz [8], MIT Vision Texture Database [3] e MeasTex Image Texture Database [2], e comparação dos resultados obtidos com os resultados de outros métodos de segmentação de texturas encontrados na literatura.

1.3 Organização da Dissertação

Este trabalho está dividido em 7 capítulos. Neste primeiro capítulo, o trabalho foi apresentado por meio da descrição da motivação para a realização do mesmo, e dos objetivos geral e específico a serem atingidos.

No capítulo 2, faz-se uma introdução sobre textura, exemplificando algumas de suas possíveis definições encontradas na literatura, comenta-se sobre algumas aplicações que se utilizam da análise de texturas e também sobre os principais métodos de extração de características de texturas de acordo com diferentes abordagens.

No capítulo 3, apresenta-se uma breve introdução às ideias e conceitos básicos da teoria de *wavelets* no contexto de Processamento de Imagens. Também é mostrada a vantagem que a transformada *wavelet* possui com relação à transformada de Fourier por meio do conceito de análise tempo-frequência, além da apresentação da análise multirresolução e o desenvolvimento de uma implementação computacionalmente eficiente, chamada de transformada *wavelet* rápida.

O capítulo 4 é dedicado à revisão bibliográfica das *wavelets* redundantes diádica e starlet, construídas a partir de uma função *spline* e utilizadas no desenvolvimento do método de segmentação de texturas a ser avaliado.

No capítulo 5, descreve-se todas as etapas que constitui o método de segmentação de texturas construído, bem como o funcionamento do algoritmo combinatorial para a segmentação de mais de duas texturas.

No capítulo 6, apresenta-se os resultados da aplicação do método desenvolvido a mosaicos de duas, cinco e dez texturas, extraídas do álbum “A Photographic Album for Artists and Designers” de Phil Brodatz [8], de MIT Vision Texture Database [3] e MeasTex Image Texture Database [2], e em seguida faz-se a avaliação do desempenho do método por meio da comparação dos resultados obtidos com os resultados de outros métodos de segmentação de texturas encontrados na literatura.

Por fim, no capítulo 7, descreve-se as conclusões do trabalho e apresenta-se algumas sugestões para trabalhos futuros.

Análise de Texturas

A utilização de informações texturais se apresenta como uma abordagem adequada para a descrição, de maneira efetiva, de cada região contida em uma imagem. Esta constitui uma das tarefas mais complexas presentes na análise de imagens. Desse modo, a análise de texturas é utilizada em processos de alto nível e sua aplicação abrange diversas áreas.

Dentre as principais aplicações que utilizam análise de texturas pode-se destacar a segmentação, um processo que consiste em particionar uma imagem em regiões que apresentem características semelhantes.

2.1 Textura

As texturas estão presentes em praticamente toda a matéria. Pode-se encontrá-las na natureza e nos objetos ao redor. Elas estão em paredes, pisos, árvores, rochas, tecidos, na pele humana e dos animais e etc. São as características texturais que normalmente diferenciam um objeto natural de um objeto artificial. A figura 2.1 mostra alguns exemplos de texturas naturais e artificiais extraídas do álbum “A Photographic Album for Artists and Designers” de Phil Brodatz [8], disponíveis em [1].

De modo geral, uma textura é caracterizada pelas informações sobre a distribuição espacial e a variação de luminosidade contidas em um objeto ou imagem [61], e também descreve o arranjo estrutural das superfícies e relações entre regiões vizinhas, que na maioria das vezes são constituídas por padrões repetitivos, cuja disposição pode ser periódica ou aleatória. Normalmente, texturas naturais são aleatórias, enquanto que texturas artificiais são frequentemente determinísticas ou periódicas. Além disso, termos como fina, grossa, suave, áspera, granulada, alongada, regular e irregular estão associados ao conceito de textura.

Seu estudo já se estende por mais de cinco décadas [39], e as pesquisas são motivadas em parte pela grande quantidade de texturas presentes em imagens e pela eficiência do sistema visual humano em detectá-las e diferenciá-las.

Embora o sistema visual humano apresente facilidade no reconhecimento e descrição de texturas, é extremamente difícil formalizar sua definição. Tal dificuldade implica em uma grande quantidade de definições de textura na literatura.

Exemplos de definições para textura podem ser encontrados no trabalho de Tamura *et al.* [68], que a define como constituinte de uma região macroscópica, em que sua estrutura

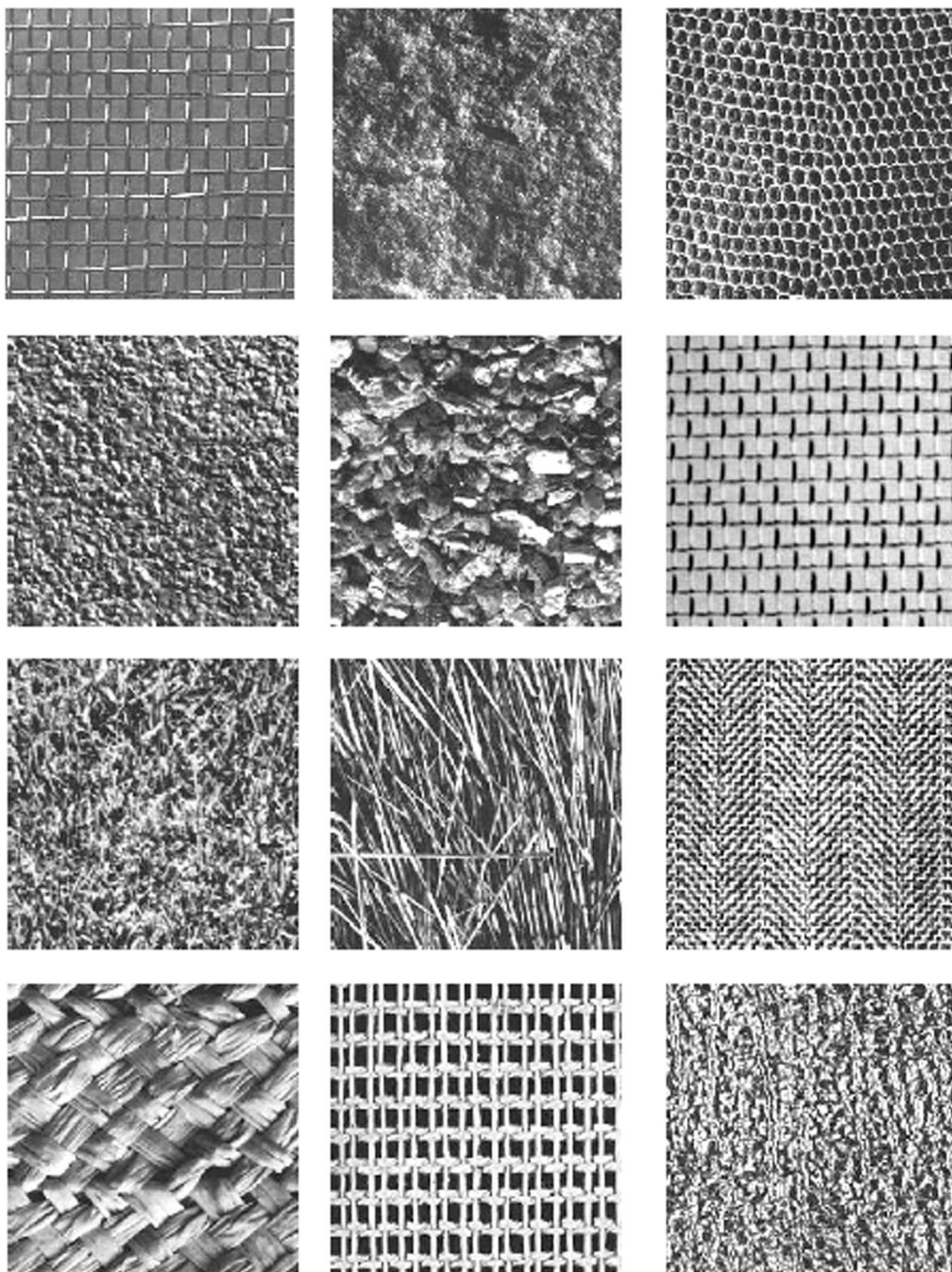


Figura 2.1: Exemplos de texturas. Fonte: [8].

é formada pela repetição de padrões em que seus elementos ou primitivas encontram-se arranjados conforme uma regra de composição. Rosenfeld e Troy [66] definem textura como um arranjo repetitivo de padrões sobre uma área e tentam medir sua aspereza observando fatores como a dependência de níveis de cinza e autocorrelação. Segundo Haralick [33], uma textura pode ser descrita pela interação entre as primitivas tonais

que a compõem, que ocorrem em diferentes números e formas. Pixels contíguos que apresentam propriedades semelhantes formam cada uma das primitivas, dentre as quais podem ocorrer interações aleatórias ou com certo grau de dependência.

As definições da palavra textura encontradas na literatura, estão associadas à sua aplicação em diversas áreas. Alguns exemplos de aplicações da análise de texturas são dados a seguir.

2.2 Aplicações da Análise de Texturas

Dentre as inúmeras aplicações que utilizam a análise de texturas, pode-se destacar a análise de imagens médicas, a inspeção industrial, a segmentação de documentos e o sensoriamento remoto. A seguir é apresentada a importância do uso da análise de texturas em cada uma dessas aplicações, segundo Jain e Tuceryan [47].

2.2.1 Análise de Imagens Médicas

Inúmeras pesquisas têm sido direcionadas no campo da análise de imagens médicas com o objetivo de auxiliar os estudos de clínicos na determinação de diagnósticos mais precisos, já que a avaliação de imagens médicas, obtidas a partir de diferentes sistemas de imagem, como ressonância magnética, tomografia computadorizada, ultrassom, é de natureza qualitativa e pode variar de profissional para profissional. Por isso, técnicas de análise de imagens têm desempenhado um papel importante em várias aplicações médicas. Em geral, as aplicações envolvem a extração automática de características da imagem, que são então usadas para uma variedade de tarefas de classificação, tal como distinguir um tecido normal de um tecido anormal. Dependendo da tarefa de classificação particular, as características extraídas capturam propriedades morfológicas, propriedades de cores, ou certas propriedades de texturas da imagem [47].

As propriedades texturais computadas estão intimamente relacionadas com o domínio de aplicação a serem utilizadas. Por exemplo, Sutton e Hall [62] discutem a classificação de doença pulmonar usando características de texturas. Algumas doenças, tais como fibrose pulmonar, afetam os pulmões de tal forma que as alterações resultantes nas imagens de raios-X ocorrem nas propriedades das texturas, em oposição às lesões claramente apresentadas. Em tais aplicações, os métodos de análise de texturas são idealmente adequados para essas imagens.

Harms *et al.* [27] utilizaram propriedades texturais e recursos de cores de uma imagem para diagnosticar leucemia em amostras de glóbulos brancos. Em combinação com recursos de cores, o uso das características de texturas melhorou significativamente a taxa de classificação correta de tipos de células do sangue quando comparada à taxa obtida usando apenas recursos de cores.

Landeweerd e Gelsema [28] extraíram várias estatísticas de primeira ordem (como o nível de cinza médio em uma região), bem como estatísticas de segunda ordem (como matrizes de co-ocorrência de níveis de cinza) para diferenciar os tipos de células brancas do sangue. Insana *et al.* [20] utilizaram características de texturas em imagens de ultrassom para estimar parâmetros de difusão de tecido. Além do conhecimento da física envolvida no processo de ultrassonografia, eles utilizaram características de texturas do tecido para projetar o modelo. Chen *et al.* [10] utilizaram características de texturas de fractais para classificar imagens de ultrassom de fígados e também para realçar as bordas de radiografias de tórax. Já Lundervold [5], utilizou características de texturas de fractais em combinação com outros recursos para analisar imagens de ultrassom do coração.

Técnicas de análise de texturas também têm sido aplicadas com sucesso na detecção de lesões em imagens mamográficas e na caracterização de lesões cervicais por Ji *et al.* [37], Mudigonga *et al.* [54] e Pattichis *et al.* [60].

2.2.2 Inspeção Industrial

Em vários setores industriais, uma das propriedades visuais mais importantes que devem ser sujeitas ao controle de qualidade é a textura de matérias-primas e produtos. Estas aplicações incluem a detecção de defeitos em imagens de têxteis e inspeção automatizada do desgaste de tapetes e pinturas de automóveis, por exemplo.

Na detecção de defeitos por meio das texturas das imagens, a maioria das aplicações têm sido no domínio de inspeção de têxteis. Dewaele *et al.* [57] detectaram defeitos pontuais e defeitos de linha a partir de características texturais das imagens.

Connors *et al.* [69] utilizaram métodos de análise de texturas para detectar automaticamente defeitos em madeira serrada. A detecção de defeitos é realizada dividindo a imagem em sub-janelas e classificando cada sub-janela em uma das categorias de defeitos. Os recursos utilizados para executar esta classificação são baseados em características tonais tais como média, variância, assimetria, curtose de níveis de cinza, juntamente com características texturais calculadas a partir de matrizes de co-ocorrência de níveis de cinza, analisadas por meio das imagens da madeira. A combinação do uso de recursos tonais com características texturais melhora as taxas de classificação corretas sobre o uso de qualquer tipo de recurso sozinho.

No domínio do controle de qualidade de imagens com texturas, Siew *et al.* [31] propuseram um método para a avaliação do desgaste de tapetes. Eles usaram características de texturas simples que são computadas a partir da diferença entre as estatísticas de segunda e de primeira ordem dos níveis de cinza. Eles demonstraram que as características numéricas de texturas obtidas a partir dessas técnicas podem ser usadas com sucesso para caracterizar um tapete. Jain *et al.* [40] também usou as características de texturas, calculadas a partir de um banco de filtros de Gabor para classificar automaticamente a qualidade de superfícies metálicas pintadas.

Inúmeras abordagens para inspeção por texturas também foram propostas por Farokhnia [21], Rao e Schunck [64], e, Chen e Jain [14].

2.2.3 Segmentação de Documentos

A análise de texturas também pode ser utilizada para segmentar regiões de texto e de gráficos contidas em documentos escaneados, como jornais e artigos. Uma das aplicações úteis em modelagem computacional e análise de imagens tem sido a segmentação de documentos a partir de reconhecimento de caracteres, como por exemplo, o reconhecimento de endereço postal para análise e interpretação de mapas.

Em muitas aplicações de segmentação de documentos postais (tais como o reconhecimento de endereço de destino e CEP informados em envelopes), o primeiro passo é separar as regiões da imagem que contém informação útil a partir do fundo. A maioria dos métodos de análise de imagens propostos até o momento para a segmentação de documentos são baseados nas características morfológicas e texturais dos documentos impressos.

Métodos de segmentação de texturas podem ser utilizados em pré-processamento de imagens de documentos para identificar regiões de interesse [42], [41], [43]. A segmentação de um documento é obtida utilizando-se três classes de texturas: uma classe para as regiões de texto, uma segunda classe para as regiões uniformes que formam o fundo ou imagens em que as intensidades variam lentamente, e uma terceira classe para as áreas de transição

entre os dois tipos de regiões. As regiões de texto são caracterizadas pelo seu conteúdo de alta frequência.

2.2.4 Sensoriamento Remoto

O sensoriamento remoto (SR) é a utilização de sensores para a aquisição de informações sobre objetos ou fenômenos, sem que haja contato direto com eles [38]. Técnicas de sensoriamento remoto incluem fotografias e medidas multiespectrais feitas por satélites, inspeções feitas por sismógrafos ou sonares, entre outros.

A análise de texturas tem sido amplamente utilizada para classificar imagens de SR. A identificação e classificação de regiões homogêneas com diferentes tipos de terrenos, tais como regiões urbanas, plantações de trigo, mananciais, reflorestamentos recentes ou antigos, desmatamento de florestas, queimadas, desertificação, etc., é uma aplicação importante.

Haralick *et al.* [46] usaram recursos de matrizes de co-ocorrência de níveis de cinza para analisar imagens de SR. Eles calcularam matrizes de co-ocorrência de nível de cinza com quatro direções (0° , 45° , 90° e 135°) para uma determinada distância. Por um problema de classificação de sete classes, obtiveram aproximadamente a precisão da classificação de 80% utilizando características de texturas.

Rignot e Kwok [19] também analisaram imagens de SR utilizando características de texturas calculadas a partir de matrizes de co-ocorrência de níveis de cinza. No entanto, eles complementaram esses recursos com o conhecimento sobre as propriedades de imagens de SR. Por exemplo, foram utilizados algoritmos de restauração de imagens para eliminar o ruído especular presentes em imagens de SR, a fim de melhorar os resultados de classificação. Schistad e Jain [30], Du [36], além de Lee e Philpot [29] também utilizaram características de texturas para segmentar imagens de SR.

2.3 Segmentação de Texturas

Dentre as principais aplicações que utilizam a análise de texturas, está a segmentação.

A segmentação de texturas é o processo que visa particionar a imagem em regiões que apresentam características semelhantes, isto é, identificar regiões com texturas “uniformes” em uma dada imagem, a fim de destacá-las do contexto geral.

O fato de não existir uma única definição universal para o termo “textura”, também torna impossível a existência de um único método que possa ser utilizado para análise de texturas em diferentes domínios de aplicações. Desse modo, os métodos para analisar texturas são diversos e refletem os diferentes conceitos de textura que aparecem em aplicações de diversas áreas.

Normalmente, as medidas resultantes da aplicação dos métodos de análise de texturas - em particular, dos métodos de segmentação de texturas - são obtidas por meio dos processos de extração de características. Esse processo é responsável por executar transformações nos dados de entrada, de modo a descrevê-los de maneira simplificada, porém, representativa.

A seguir, comenta-se sobre os principais métodos de extração de características de texturas, divididos entre as abordagens *estatística*, *geométrica*, *baseada em modelos paramétricos* e *baseada em processamento de sinais*, apresentadas em Pedrini e Schwartz [61].

2.3.1 Abordagem Estatística

Os métodos que utilizam a abordagem estatística representam a textura indiretamente por propriedades não-determinísticas que definem distribuições e relacionamentos entre os níveis de cinza dos pixels pertencentes a uma imagem.

A distribuição dos níveis de cinza dos pixels pode ser caracterizada por medidas como média, variância, desvio padrão, assimetria e curtose. Tais medidas estatísticas dependem apenas da intensidade de cinza de cada pixel, característica que as torna sensíveis por exemplo, às variações monotônicas nos tons de cinza. Para evitar problemas dessa natureza são consideradas relações dependentes das transições de níveis de cinza entre dois ou mais pixels localizados em uma vizinhança.

Uma das abordagens utilizadas para adquirir informações sobre transições de níveis de cinza entre dois pixels é obtida por meio da construção da matriz de co-ocorrência, baseada na ocorrência repetida da configuração de alguns níveis de cinza na textura, variando rapidamente segundo a frequência espacial em texturas finas e lentamente em texturas ásperas. Efetuando-se essas variações na relação espacial, podem ser obtidas diversas matrizes de co-ocorrência, a partir das quais são extraídas medidas utilizadas para a análise de texturas.

Embora seja amplamente utilizada em análise de texturas, a matriz de co-ocorrência de níveis de cinza apresenta alguns problemas, tais como a inexistência de um método para a seleção da distância entre os pixels, e a não captura dos aspectos das primitivas contidas na textura. Tais problemas não ocorrem com a utilização da função de autocorrelação, que descreve as interações espaciais entre as primitivas.

Segundo Haralick [33], a função de autocorrelação é caracterizada por medir o tamanho das primitivas tonais. Dessa forma é possível diferenciar texturas ásperas de texturas finas por meio da detecção da frequência espacial determinada pela ocorrência de variações dos níveis de cinza em uma região específica. Texturas finas são compostas por primitivas com tamanho pequeno e apresentam frequência espacial alta, enquanto as texturas ásperas, compostas de primitivas maiores, são caracterizadas por possuírem frequência espacial baixa.

2.3.2 Abordagem Geométrica

Na abordagem geométrica, uma textura é definida como sendo composta por primitivas. Após a identificação das primitivas que a compõem, duas classes de métodos são utilizadas para a extração de características. A primeira utiliza medidas extraídas das primitivas para descrever a textura, enquanto a segunda extrai regras para descrever a disposição espacial e o relacionamento existente entre as primitivas.

A vantagem de se utilizar a segunda classe de métodos, denominados métodos estruturais, está no fato de que eles provêm uma boa descrição simbólica da textura, característica bastante útil para a síntese de texturas. Por outro lado, na análise de texturas, os métodos estruturais não apresentam boa adaptação pelo fato de apenas atuarem de maneira satisfatória em texturas regulares, as quais praticamente não estão presentes em imagens naturais.

A primeira classe refere-se aos métodos baseados na extração de medidas que se caracterizam por apresentarem menor sensibilidade a variações contidas em imagens naturais. Dentro dessa classe, estão os métodos que utilizam o conceito de unidade de medida proposto por He e Wang [34], baseado na ideia de que uma imagem texturizada pode ser considerada como um conjunto de pequenas unidades essenciais que caracterizam a informação local de um dado pixel em relação aos seus vizinhos, enquanto que as medidas

extraídas a partir de todas as unidades contidas na imagem revelam o aspecto global da textura.

Um outro exemplo que se insere nesta primeira classe de métodos é proposto por Horng *et al.* [35], denominado método de codificação de características de texturas (TFCM, *texture feature coding method*). Esse método utiliza sete medidas baseadas no histograma e na matriz de co-ocorrência para a descrição das características, a saber, aspereza, homogeneidade, convergência média, variância, entropia de código e similaridade de código.

2.3.3 Abordagem Baseada em Modelos Paramétricos

Nesta abordagem, a textura é considerada como uma amostra extraída de um processo não-determinístico definido por um conjunto de parâmetros que, servindo como modelo para textura, resumem suas características. Com a utilização de parâmetros, pode-se efetuar tanto a análise quanto a síntese de texturas.

Exemplos de modelos paramétricos são os modelos baseados em campos aleatórios de Markov (MRF, *Markov random fields*). Chen e Huang [15] citam que, dentre as principais vantagens de se utilizar os MRF, está o fato de que seus parâmetros capturam a direcionalidade e a aspereza presentes na textura, além de não necessitar de uma etapa subsequente de seleção ou nova extração de características.

2.3.4 Abordagem Baseada em Processamento de Sinais

Os métodos de análise de texturas baseados em processamento de sinais possuem a característica de extrair descritores a partir da representação obtida após a aplicação de transformações na imagem de entrada. Por exemplo, a transformada de Fourier (FT, *Fourier transform*), que efetua uma transformação linear nos dados de entrada, apresenta informações sobre o espectro resultante, as quais são utilizadas como características de texturas.

As características texturais também podem ser obtidas a partir de algumas subimagens resultantes da WT. Dentre as características extraídas, encontra-se a energia de uma subimagem [13], [18], além de estatísticas calculadas por meio de matrizes de co-ocorrência sobre as subimagens que apresentam alta frequência e medidas obtidas a partir de histogramas [18].

A WT faz parte de uma subclasse importante formada pelos métodos de multirresolução, fornecendo uma representação à imagem que separa atributos em diferentes escalas (níveis) de resolução. Sua importância é devido à sua relação com o sistema visual humano. Estudos psicofisiológicos apresentam evidências de que humanos processam imagens em um modo multirresolução. O córtex visual possui células distintas que respondem a diferentes frequências e orientações, isto porque os “*early processing*” no cérebro humano realizam um tipo de análise tempo-frequência [11]. Esse processamento em multirresolução é utilizado com sucesso a fim de reconhecer e identificar texturas, e essa é a motivação para se realizar uma análise de texturas em multirresolução. O método desenvolvido nesta dissertação se insere nesta subclasse.

Wavelets

A utilização das funções *wavelet* cresceu exponencialmente nas últimas décadas, principalmente na área de análise de sinais e equações diferenciais. Técnicas que utilizam *wavelets* são eficientes, e, portanto, de interesse em aplicações de diversas áreas, incluindo Processamento de Imagens. O seu destaque deve-se à representação tempo-frequência que fornecem à um sinal (ou imagem).

3.1 Breve Histórico das Funções *Wavelets*

A primeira função *wavelet* foi construída por Alfred Haar [32] e apresentada em uma tese sua publicada em 1910. Uma propriedade das *wavelets* de Haar é que estas possuem suporte compacto (anulam-se fora de um intervalo fechado e limitado), contudo, não são continuamente diferenciáveis, o que de certa forma limita a aplicabilidade a elas relacionadas.

As *wavelets* de Haar ficaram no anonimato por muitos anos e, por um período muito longo, elas continuaram a ser a única base ortonormal de *wavelets* conhecida, até que, em 1980, o termo *wavelet* foi originalmente introduzido pelo engenheiro Jean Morlet, sendo que a base matemática de suas ideias foi formalizada pelo físico teórico Alex Grossmann [4].

Em 1985, Stephane Mallat proporcionou às *wavelets* um grande impulso por meio de seu trabalho em processamento de imagens e, inspirado nos resultados de Mallat, Y. Meyer construiu a primeira *wavelet* não-trivial (suave) [17]. Estas, ao contrário das *wavelets* de Haar, são *wavelets* continuamente diferenciáveis, porém, não possuem suportes compactos.

Poucos anos mais tarde, Ingrid Daubechies usou os trabalhos de Mallat para construir um conjunto de bases ortonormais de *wavelets* suaves, com suportes compactos [45]. Os trabalhos de Daubechies são os alicerces das aplicações atuais de *wavelets*.

Mallat foi quem demonstrou pela primeira vez, em 1987 [48], que as *wavelets* constituíam as bases de uma poderosa nova abordagem ao processamento e análise de sinais, chamada de análise multirresolução (MRA, *multiresolution analysis*). Sua teoria incorpora e unifica técnicas de uma variedade de áreas, incluindo a codificação em sub-bandas, a filtragem de quadratura espelhada, o reconhecimento digital de voz e o processamento de sinais e imagens. Como o nome sugere, a MRA se concentra na representação e análise de sinais (ou imagens) em várias escalas (níveis) de resolução.

A vantagem de uma abordagem como essa é clara, características que poderiam deixar de ser percebidas em uma resolução podem ser facilmente detectadas em outra. Apesar de o interesse da comunidade da área na MRA ter sido limitado até o final da década de 1980, atualmente existem inúmeros trabalhos publicados dedicados ao tema.

3.2 Função *Wavelet*

Considere o espaço $L^2(\mathbb{R})$ de todas as funções mensuráveis de quadrado integrável sobre $\mathbb{R}$, também denominado espaço das funções de energia finita, isto é, se $\psi(t) \in L^2\mathbb{R}$, então $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty$.

Definição 1 Uma função $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ é denominada *wavelet*, se satisfaz as condições:

1. A condição de admissibilidade

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\lambda)|^2}{|\lambda|} d\lambda < \infty. \quad (3.1)$$

em que $\hat{\psi}(\lambda)$ é a transformada de Fourier de $\psi(t)$.

2. A função *wavelet* deve ter energia unitária, isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1. \quad (3.2)$$

A condição de admissibilidade apresentada em 1 garante a invertibilidade da transformada *wavelet* e, na maioria dos casos é equivalente a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0, \quad (3.3)$$

o que implica que a função *wavelet* tem uma forma oscilatória (de onda) com média zero.

Já a condição 2 garante que a função *wavelet* possui suporte compacto, ou com um decaimento muito rápido de amplitude (*e-folding time*), conhecido como suporte efetivo, que garante a localização espacial das frequências. Geometricamente, essa condição indica que $\psi(t)$ será uma onda de curta duração [12].

3.3 Transformada *Wavelet*

Apesar da FT ter constituído os fundamentos do Processamento de Imagens com base em transformadas desde o final dos anos 1950, uma transformação mais recente, a WT, atualmente tem facilitado ainda mais a compressão, transmissão e análise de muitas imagens [25].

A FT permite descrever as diferentes frequências contidas na imagem e, embora seja de grande importância para algumas aplicações, a localização espacial de tais frequências não pode ser determinada. Com o intuito de contornar essa limitação apresentada pela FT, utiliza-se a WT, a qual fornece à imagem uma representação em que informações sobre tempo e frequência estejam presentes.

3.4 Análise Tempo-Frequência na Representação de Funções

O tempo e a frequência normalmente são vistos como domínios diferentes na representação de funções, porém eles estão estritamente relacionados. Quando se analisa uma função simultaneamente no tempo e na frequência, depara-se com o seguinte problema: para obtenção de informações precisas sobre o tempo, precisa-se aceitar alguma imprecisão com relação à frequência e vice-versa. Esse problema é conhecido como Princípio da Incerteza de Heisenberg, enunciado no Teorema 1 a seguir [12].

Teorema 1 (*Princípio da Incerteza de Heisenberg*) *Existe um balanço entre a resolução em tempo e a resolução em frequência. Se f é uma função do $L^2(\mathbb{R})$, então as variações em tempo Δt e em frequência $\Delta \xi$ são inversamente proporcionais, de forma que*

$$(\Delta t)^2(\Delta \xi)^2 \geq \text{constante}. \quad (3.4)$$

Para ilustrar graficamente esse princípio, cada função base utilizada na representação de uma função pode ser vista na forma de um esquema com janelas, em um plano tempo-frequência apresentado na figura 3.1. Cada janela, também chamada de célula/retângulo de Heisenberg mostra o conteúdo de frequência que a função base apresenta e onde ela se localiza no tempo.

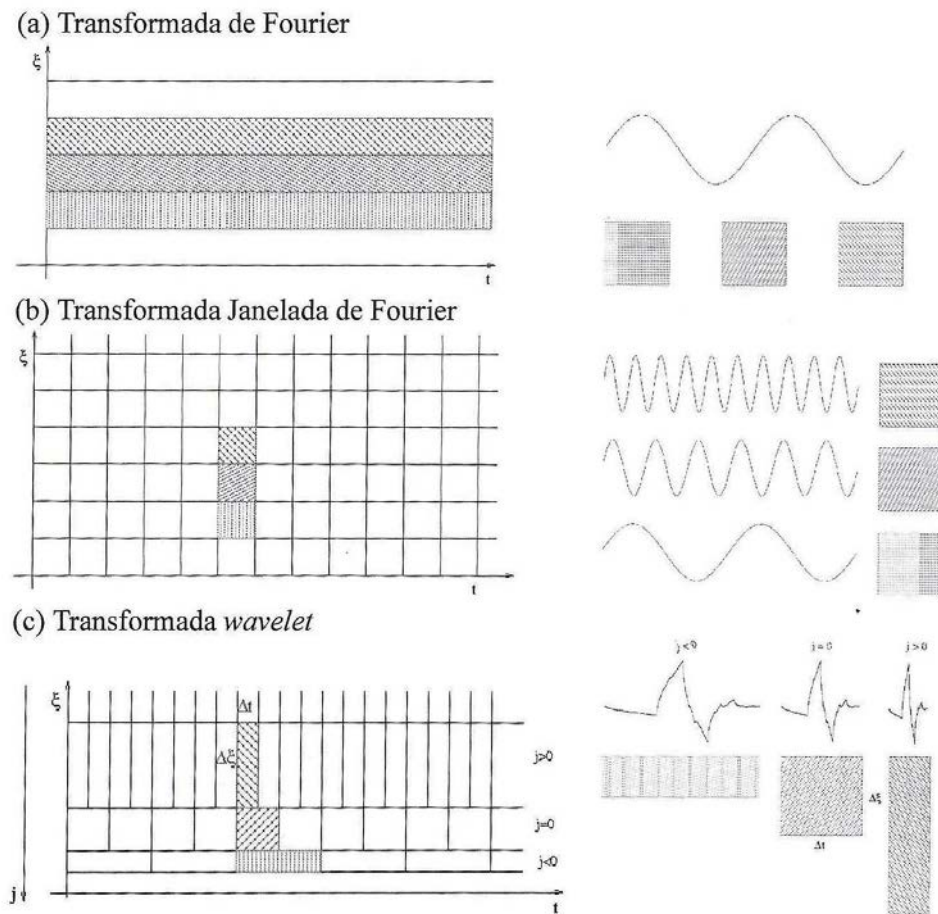


Figura 3.1: Esquema de um plano tempo X frequência: (a) FT e sua função base, (b) WFT e suas funções base e (c) WT e sua função base. Fonte: [12].

A figura 3.1 mostra as janelas de tempo-frequência para uma base senoidal da FT em 3.1 (a), uma base da WFT em 3.1 (b), e uma base da WT em 3.1 (c). Cada janela é uma região retangular nas figuras 3.1 (a) a (c); a altura e a largura da região definem as características de frequência e tempo das funções que podem ser representadas utilizando a função base.

A base senoidal da figura 3.1 (a), identifica as frequências presentes nos eventos que ocorrem em longos períodos, mas não proporciona nenhuma resolução no tempo (a altura de cada retângulo na figura 3.1 (a) deve ser considerada como uma única frequência). Dessa forma, a senoide de frequência única pode ser representada como uma única expansão envolvendo uma função base senoidal.

A figura 3.1 (b) mostra a localização no tempo e na frequência da WFT, mas a janela é constante. Já a resolução de tempo e frequência das janelas da WT na figura 3.1 (c) varia, porém a área de cada janela (retângulo) é a mesma. Em baixas frequências as janelas são mais curtas (isto é, tem uma melhor resolução na frequência ou menor ambiguidade com relação à frequência), mas são mais largas (o que corresponde a uma resolução no tempo mais pobre ou maior ambiguidade no que se refere ao tempo). Em altas frequências a largura da janela é menor (de forma que a resolução no tempo é melhorada) e a altura da janela é maior (o que significa que a resolução na frequência é piorada).

De acordo com a análise tempo-frequência da WT apresentada na figura 3.1 (c), pode-se afirmar que essa ferramenta decompõe uma imagem de acordo com a localização espacial das frequências, isto é, cada decomposição representa os atributos visíveis em uma dada faixa de frequências. Por exemplo, em uma representação que apresenta baixas frequências, objetos grandes e com baixas variações em intensidade são enfatizados, enquanto que em uma representação que mostra altas frequências, detalhes finos, tais como bordas, tornam-se perceptíveis.

Dessa maneira, a WT pode ser vista como um mecanismo para decompor uma imagem (ou sinal), permitindo analisar as características locais da mesma em diferentes domínios de frequências. Essa propriedade de localidade das *wavelets* conduz às suas vantagens sobre a FT.

3.4.1 Transformada *Wavelet* Contínua

A transformada *wavelet* contínua (CWT, *continuous wavelet transform*), transforma uma função contínua em uma função altamente redundante de duas variáveis contínuas: translação e escala. A transformada resultante é de fácil interpretação e muito útil para a análise tempo-frequência. Apesar do interesse se concentrar em imagens discretas, será apresentada aqui a transformada contínua para complementação do trabalho.

Definição 2 A CWT de uma função $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ é definida por

$$W_\psi(j, k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi}_{j,k}(t) dt, \quad (3.5)$$

na qual

$$\psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{j}} \psi\left(\frac{t-k}{j}\right) \quad (3.6)$$

representa a família de funções *wavelet* escolhida, denominada função *wavelet-analisadora* ou *wavelet-mãe*. Os parâmetros j e k são chamados de parâmetros de escala e translação, respectivamente, e $\overline{\psi}_{j,k}(t)$ é o complexo conjugado de $\psi_{j,k}(t)$.

A transformada contínua pode ser vista como um conjunto de coeficientes $\{W_\psi(j, k)\}$, que medem a semelhança de $f(t)$ com um conjunto de funções base $\{\psi_{j,k}(t)\}$. No caso contínuo, os dois conjuntos são infinitos. Se $\psi_{j,k}(t)$ tem valor real, então $\psi_{j,k}(t) = \psi_{j,k}^*(t)$, em que $\psi_{j,k}^*(t)$ é o complexo de $\psi_{j,k}(t)$, e cada coeficiente da equação 3.5 é o produto interno integral de $f(t)$ e $\psi_{j,k}(t)$, isto é, $\langle f(t), \psi_{j,k}(t) \rangle$.

Quanto ao parâmetro de escala contínua, j , este é inversamente proporcional ao parâmetro de escala binária, 2^j . Isso ocorre porque j aparece no denominador de $\psi(\frac{t-k}{j})$ na equação 3.6. Dessa forma, as *wavelets* utilizadas em transformadas contínuas são comprimidas ou reduzidas em largura quando $0 < j < 1$ e são dilatadas ou expandidas quando $j > 1$. A escala da *wavelet* e a noção tradicional de frequência são inversamente proporcionais.

É possível também obter a *inversa* da CWT:

Definição 3 Dada $W_\psi(j, k)$, a CWT inversa de uma função $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ é definida por

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty W_\psi(j, k) \frac{\psi_{j,k}(t)}{j^2} dj dk \quad (3.7)$$

em que C_ψ é a condição de admissibilidade dada na equação 3.1.

3.4.2 Transformada Wavelet Discreta

A transformada *wavelet* discreta (DWT, *discrete wavelet transform*) é o resultado do mapeamento da função de uma variável contínua em uma sequência de coeficientes discretos, isto é, uma sequência de números. Pode-se definir uma DWT utilizando um esquema de discretização tal que as funções *wavelet* construídas formem uma base ortonormal da seguinte forma:

Definição 4 Dada $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$, seja $f(t) = f(n_0 + t\Delta n)$ para algum n_0 , Δn e $t = 1, 2, \dots, M$. Os coeficientes da DWT direta para a sequência $f(t)$ são expressos por

$$W_\phi(j_0, k) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_t f(t) \phi_{j_0,k}(t), \quad (3.8)$$

$$W_\psi(j, k) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_t f(t) \psi_{j,k}(t), \quad (3.9)$$

para $j \geq j_0$, em que j_0 é uma escala arbitrária, os coeficientes $W_\phi(j_0, k)$ normalmente são chamados de coeficientes de aproximação ou escala, $W_\psi(j, k)$ são chamados de coeficientes de detalhes ou *wavelet*, j e k são os parâmetros de escala e translação, respectivamente.

As funções $\phi_{j_0,k}(t)$ e $\psi_{j,k}(t)$, conhecidas como funções escala e *wavelet*, respectivamente, nas equações 3.8 e 3.9 são versões amostradas de suas funções base. Por exemplo, $\phi_{j_0,k}(t) = \phi_{j_0,k}(n_s + t\Delta n_s)$ para alguns n_s , Δn_s e $t = 1, 2, \dots, M$. Dessa forma, emprega-se M amostras igualmente espaçadas ao longo do suporte das funções base.

Neste caso, também é possível obter a *inversa* da DWT:

Definição 5 A DWT inversa complementar de uma sequência $f(t)$ é definida por

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_k W_\phi(j_0, k) \phi_{j_0, k}(t) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_k W_\psi(j, k) \psi_{j, k}(t). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Normalmente, considera-se $j_0 = 1$ e seleciona-se M para ser uma potência de 2, isto é, $M = 2^j$, de forma que os somatórios são calculados ao longo de $t = 1, 2, \dots, M$, $j = 1, 2, \dots, J$ e $k = 1, 2, \dots, 2^j$.

Observe que um fator de normalização $\frac{1}{\sqrt{M}}$ foi adicionado tanto na expressão direta quanto na inversa. Alternativamente, esse fator poderia ser incorporado apenas à transformação direta ou à transformação inversa, como $\frac{1}{M}$.

É importante lembrar que as equações 3.8 a 3.10 são válidas somente para bases ortonormais.

3.5 Análise Multirresolução

A MRA promoveu uma mudança de paradigma na área de *wavelets*. Essa ferramenta proporciona a criação de funções *wavelets* a partir de certas condições desejadas de regularidade local. Antes dela, a escolha de uma função *wavelet* era feita por meio de um processo de verificação, o que nem sempre era uma tarefa fácil [12].

Na MRA, uma *função escala* é utilizada para criar uma série de aproximações de uma função ou imagem, cada uma com resoluções que diferem por um fator de 2, considerando suas aproximações de vizinhança mais próxima; e, funções adicionais - as funções *wavelets* - são utilizadas para codificar a diferença de informações entre aproximações adjacentes.

Formalmente, defini-se

Definição 6 Uma MRA do $L^2(\mathbb{R})$ é uma sequência $\{V_j, \phi\}$, de subespaços lineares fechados $V_j \in L^2(\mathbb{R})$ e uma função escala ϕ associada, que satisfaz as seguintes condições:

$$\begin{aligned} P1. \quad & V_{-\infty} \subset \dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{\infty}, \\ P2. \quad & \overline{\cup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}), \\ P3. \quad & \cap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}, \\ P4. \quad & f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2^{-j}t) \in V_{j+1}, \\ P5. \quad & f(t) \in V_0 \Leftrightarrow f(t - k) \in V_0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}; \\ P6. \quad & \{\phi(t - k)_{k \in \mathbb{Z}}\}, \text{ constitui uma base ortonormal de } V_0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Por meio da MRA é possível analisar uma função f em várias escalas de resolução. Essa técnica consiste em decompor um espaço de funções, neste caso, o $L^2(\mathbb{R})$, em subespaços V_j , o que implica decompor f , de modo que cada projeção de f , denotada por $P_j f$, está em cada subespaço V_j .

Os subespaços $V_j \in L^2(\mathbb{R})$, ilustrados na figura 3.2, são chamados de subespaços de função escala, pois são gerados pelo conjunto $\{\phi_{j, k}(t)\}$ de funções escala, definidas por

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \phi(2^{-j}t - k), \quad (3.12)$$

para todos os $j, k \in \mathbb{Z}$, em que j é o parâmetro de escala e k é o parâmetro de translação.

Dessa forma, se $f(t) \in V_j$, então

$$f(t) = \sum_k \alpha_k \phi_{j,k}(t). \quad (3.13)$$

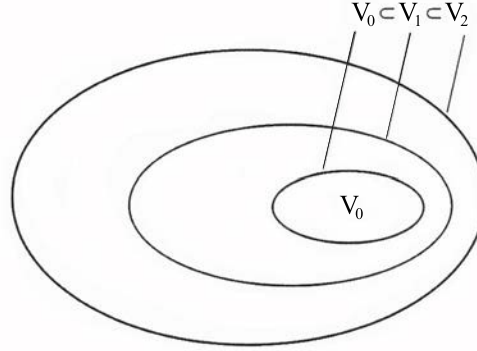


Figura 3.2: Subespaços de funções gerados por uma função escala. Fonte: [25].

De acordo com a Definição 6, a relação $V_j \subset V_{j+1}$ vista em P1 e mostrada na figura 3.2, indica que ao passar do nível de resolução j para $j + 1$, cada projeção contém mais informações (ou detalhes) sobre f , isto é, à medida que o nível de resolução aumenta ($j \rightarrow \infty$), $P_j f$ converge para a função original, como mostra P2. Já quando f é aproximada a níveis de resolução cada vez menores ($j \rightarrow -\infty$), cada projeção contém menos informações sobre f , e, portanto, tem-se $P_j f$ convergindo para a função nula, o que demonstra a propriedade P3.

A condição P4 ressalta que V_{j+1} pode ser obtido de V_j , isto é, a resolução fica mais fina, e, detalhes que aparecem na escala 2^{-j} , também devem estar presentes na escala 2^{-j+1} .

Na propriedade P5 é possível notar que uma função $f(t-k)$, transladada k unidades de $f(t)$, não apresenta mudança de nível de resolução. Tal propriedade, junto à P6, implica que $\{\phi_{j,k}; j, k \in \mathbb{Z}\}$ é uma base ortonormal em V_j , para todo $j \in \mathbb{Z}$, em que $\phi_{j,k}$ é uma função escala.

Sob essas condições, dada uma função $f \in L^2(\mathbb{R})$, o objetivo da MRA é obter funções, em vários níveis de resolução, que aproximam f . Assim, cada subespaço V_j será constituído por funções aproximadas de f , de modo que a projeção ortogonal $P_j f$ de f sobre cada V_j é a melhor aproximação para f .

Neste contexto, tem-se o Teorema 2 enunciado a seguir. Este constitui um dos resultados mais importantes da MRA [16], [45].

Teorema 2 *Se uma sequência de subespaços fechados $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ em $L^2(\mathbb{R})$ e uma função escala ϕ satisfazem as condições P1-P6 da definição 6, então existe uma base ortonormal de wavelets $\{\psi_{j,k}; j, k \in \mathbb{Z}\}$ de $L^2(\mathbb{R})$, em que $\psi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}t - k)$, tal que para todo $f \in L^2(\mathbb{R})$,*

$$P_{j+1}f = P_j f + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}. \quad (3.14)$$

Desse modo, a MRA representa funções por aproximações e detalhes projetados em subespaços V_j , em que $V_j \subset V_{j+1}$.

Cada V_j pode ser interpretado como um espaço de aproximação sucessiva: a aproximação de $f \in L^2(\mathbb{R})$ no nível de resolução j é definida como a projeção de f sobre V_j , e quanto maior j , mais fina é a resolução obtida. Assim, as funções do subespaço V_{j+1} podem ser expressas como uma soma ponderada das funções do subespaço V_j . Utilizando a equação 3.13, segue que

$$\phi_{j+1,k}(t) = \sum_k \alpha_k \phi_{j,k}(t). \quad (3.15)$$

Substituindo $\phi_{j,k}(t)$ em 3.15 pela equação 3.12 e alterando a variável α_k para h_k , obtém-se

$$\phi_{j+1,k}(t) = \sum_k h_k 2^{\frac{-j}{2}} \phi(2^{-j}t - k). \quad (3.16)$$

Fazendo $\phi_{j+1,k}(t) = \phi_{0,k}(t) = \phi(t)$,

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_k h_k \phi(2t - k) \quad [25]. \quad (3.17)$$

Os coeficientes h_k nessa equação recursiva são chamados de *coeficientes da função escala*. A equação 3.17 é fundamental para a MRA e é chamada de *equação de refinamento*, *equação MRA* ou *equação de dilatação*.

Já a diferença de informação (detalhes) entre o nível de resolução j e o adjacente $j+1$ é dada pela projeção de f sobre o complemento ortogonal de V_j em relação a V_{j+1} , denotado por W_j .

Os subespaços W_j são denominados subespaços de função *wavelet*, pois são gerados pelo conjunto $\{\psi_{j,k}(t)\}$ de *wavelets*, definidas por

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{-j}{2}} \psi(2^{-j}t - k), \quad (3.18)$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Então, se $f(t) \in W_j$,

$$f(t) = \sum_k \alpha_k \psi_{j,k}(t), \quad (3.19)$$

em que somente um número finito de α_k são não-nulos.

A relação entre os subespaços de função escala V_j e função *wavelet* W_j é ilustrada na figura 3.3, e expressa por

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad (3.20)$$

em que $\oplus$ expressa a união dos espaços.

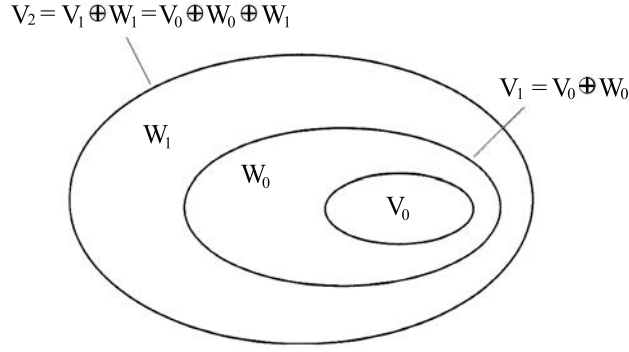


Figura 3.3: A relação entre os subespaços de função escala e *wavelet*. Fonte: [25].

Como W_j é o complemento ortogonal de V_j em V_{j+1} , todos os elementos de V_j são ortogonais aos elementos de W_j , isto é,

$$\langle \phi_{j,k}(t), \psi_{j,l}(t) \rangle = 0, \quad (3.21)$$

para todos os j, k e $l \in \mathbb{Z}$ apropriados.

Portanto, pode-se expressar o espaço de todas as funções mensuráveis de quadrado integrável como

$$L^2(\mathbf{R}) = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \quad (3.22)$$

ou

$$L^2(\mathbf{R}) = V_1 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \quad (3.23)$$

ou então

$$L^2(\mathbf{R}) = \dots \oplus W_{-2} \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \quad (3.24)$$

Note que esta última representação elimina o subespaço de função escala, conservando os subespaços de função *wavelet*. Desse modo, como os espaços *wavelet* residem nos espaços gerados pelas próximas funções escala de resolução mais alta (veja a figura 3.3), qualquer função *wavelet*, assim como sua função escala equivalente na equação 3.17, pode ser expressa como uma soma ponderada de funções escala deslocadas, isto é,

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_k g_k \phi(2t - k), \quad (3.25)$$

na qual os g_k são chamados de *coeficientes da função wavelet*.

Observe que as equações 3.22 a 3.24 podem ser generalizadas para gerar

$$L^2(\mathbf{R}) = V_{j_0} \oplus W_{j_0} \oplus W_{j_0+1} \oplus \dots \quad (3.26)$$

na qual j_0 é uma escala arbitrária.

Dessa maneira, $f(t)$ pode ser representada por uma expansão da função escala no subespaço V_{j_0} (como definido na equação 3.13) e um número finito de expansões da função *wavelet* nos subespaços $W_{j_0}, W_{j_0+1}, \dots$ (como definido na equação 3.19). Assim, tem-se a seguinte definição:

Definição 7 A expansão de uma função $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$, relacionada à função wavelet $\psi(t)$ e à função escala $\phi(t)$ é dada pela expressão

$$f(t) = \sum_k c_{j_0,k} \phi_{j_0,k}(t) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_k \omega_{j,k} \psi_{j,k}(t), \quad (3.27)$$

na qual j_0 é uma escala arbitrária e $c_{j_0,k}$ e $\omega_{j,k}$ correspondem aos α'_k s das equações 3.13 e 3.19, respectivamente. Os $c_{j_0,k}$ normalmente são chamados de coeficientes de aproximação ou escala e os $\omega_{j,k}$ são chamados de coeficientes de detalhes ou wavelet.

Isso ocorre porque a primeira soma na equação 3.27 utiliza funções escala para fornecer uma aproximação de $f(t)$ na escala j_0 (a menos que $f(t) \in V_{j_0}$, de forma que a soma das funções escala seja igual a $f(t)$). Para cada escala mais alta $j \geq j_0$ na segunda soma, uma função wavelet é adicionada à aproximação para proporcionar cada vez mais detalhes. Como as funções escala e wavelet formam uma base ortonormal, os coeficientes $c_{j_0,k}$ e $\omega_{j,k}$ são definidos por

$$c_{j_0,k} = \langle f(t), \phi_{j_0,k} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi_{j_0,k}(t) dt \quad (3.28)$$

e

$$\omega_{j,k} = \langle f(t), \psi_{j,k} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{j,k}(t) dt. \quad (3.29)$$

3.6 Transformada Wavelet Rápida

A transformada wavelet rápida (FWT, *fast wavelet transform*), também conhecida como algoritmo piramidal de Mallat [49], [51] é uma implementação computacionalmente eficiente da DWT que explora uma relação surpreendente, porém favorável, entre os coeficientes da DWT em escalas adjacentes, utilizando a MRA.

Inicialmente, deve-se considerar a função escala ϕ e a função wavelet ψ que relacionam a transformada ao aspecto de multirresolução. Estas funções são definidas nas equações 3.17 e 3.25.

Como mostrado na figura 3.4, o esquema da implementação computacional da FWT é composto por um banco de filtros de quadratura espelhada (QMF, de *quadrature mirror filter*) [49]. Neste caso, o banco de filtros é formado pelos filtros passa-baixa (*low-pass*) e passa-alta (*high-pass*), representados nas equações 3.17 e 3.25 por h_k e g_k , respectivamente, os quais formam as bases para a transformada.

Os coeficientes h_k e g_k dos filtros são computados por meio do processo iterativo de convoluções. Para uma dada escala, tem-se

$$h_k = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \phi(2t - k) dt, \quad (3.30)$$

$$g_k = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \phi(2t - k) dt. \quad (3.31)$$

É possível mostrar que g_k se relaciona com h_k da seguinte forma:

$$g_k = (-1)^k h_{1-k} \quad [9]. \quad (3.32)$$

Por meio da operação de convolução do sinal de entrada com o banco de filtros, seguida da operação de decimação/subamostragem (*downsampling*), a próxima escala (nível) apresenta o sinal decomposto em bandas distintas cada uma representada por metade do número de coeficientes que representam o sinal de entrada, e assim ocorre sucessivamente com os próximos níveis de resolução da FWT, isto é, no nível $j+1$, tem-se metade do número de coeficientes do nível j , por isso, o algoritmo é denominado piramidal. Isto acontece porque a operação de decimação definida por $(\downarrow q)(\vec{u}) = (\vec{u}_{nq})$, consiste em descartar os termos de uma sequência cujo o índice *não* é múltiplo de q . Neste caso, utiliza-se $q = 2$, e, portanto, descarta-se elementos alternados da sequência.

A partir de substituições realizadas nas equações 3.17 e 3.25, referentes às funções escala e *wavelet*, respectivamente, e nas equações 3.28 e 3.29, que definem respectivamente os coeficientes $c_{j0,k}$ e $\omega_{j,k}$ de aproximação e detalhes da função contínua $f(t)$, pode-se calcular os coeficientes $c_{j,k}$ e $\omega_{j,k}$ da DWT quando $f(t)$ é discreta [25]. Dessa forma,

Definição 8 *O cálculo da FWT é definido pelas expressões*

$$c_{j+1,n} = h_{-k} \star c_{j,k} \mid_{k=2n, n \geq 0}, \quad (3.33)$$

e

$$\omega_{j+1,n} = g_{-k} \star c_{j,k} \mid_{k=2n, n \geq 0}, \quad (3.34)$$

em que $c_{j+1,n}$ e $\omega_{j+1,n}$ são os coeficientes de aproximação e de detalhes da escala $j+1$, $c_{j,k}$ são os coeficientes de aproximação da escala j ; h_{-k} e g_{-k} são os coeficientes dos filtros de ordem reversa, tal que h_k e g_k são definidos nas equações em 3.30 e 3.31, respectivamente; e, as convoluções (representadas por $\star$) são calculadas nos instantes $k = 2n$ para $n \geq 0$.

Note que as equações 3.33 e 3.34 revelam uma relação entre os coeficientes DWT de escalas adjacentes.

Observe por meio do diagrama de blocos da figura 3.4 que calcular as convoluções para os índices pares não negativos equivale a realizar a filtragem e a decimação por um fator de 2.

Com relação às vantagens do tempo de processamento da FWT, tem-se que para uma sequência de tamanho $M = 2^j$, o número de operações matemáticas envolvidas é da ordem de $O(M)$. Isto é, o número de multiplicações e adições é linear em relação ao tamanho da sequência de entrada, porque o número de multiplicações e adições envolvidas nas convoluções realizadas pela FWT é proporcional ao tamanho das sequências convoluídas.

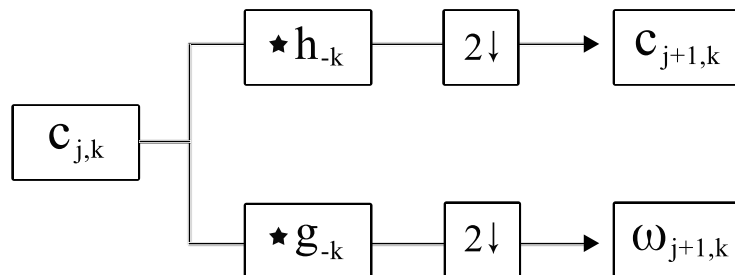


Figura 3.4: Banco de análise FWT. Fonte: Adaptado de [25].

Note que o banco de filtros da figura 3.4 pode ser facilmente estendido para duas ou mais escalas (níveis) sucessivas.

Normalmente, escolhe-se $M = 2^j$ amostras de $f(t)$, em que $j = 1, 2, \dots, J$, e emprega-se P bancos de filtros para gerar uma FWT nas escalas $J+1, J+2, \dots, J+P$. Os coeficientes de mais baixa escala, isto é, $J+1$, são calculados primeiro, e os de mais alta escala, isto é, $J+P$, são calculados por último, sendo que $f(t)$ é utilizada como a função escala (aproximação) de entrada para o primeiro banco de filtros [55].

É possível formular a *transformada wavelet inversa rápida* para a reconstrução de $f(t)$ a partir dos resultados da *transformada direta* [25].

3.7 Transformada *Wavelet* em Duas Dimensões

As transformadas unidimensionais apresentadas anteriormente podem ser facilmente estendidas para funções bidimensionais, como as imagens. Em duas dimensões são necessárias uma função de escala bidimensional, $\phi(t_1, t_2)$, e três *wavelets* bidimensionais, $\psi^H(t_1, t_2)$, $\psi^V(t_1, t_2)$, $\psi^D(t_1, t_2)$. Cada uma é o produto tensor de duas funções unidimensionais. Excluindo produtos que geram resultados unidimensionais, como $\phi(t_1)\psi(t_1)$, os quatro produtos resultantes geram a função de escala *separável*

$$\phi(t_1, t_2) = \phi(t_1)\phi(t_2), \quad (3.35)$$

e as *wavelets* separáveis, “direcionalmente sensíveis”

$$\psi^H(t_1, t_2) = \psi(t_1)\phi(t_2), \quad (3.36)$$

$$\psi^V(t_1, t_2) = \phi(t_1)\psi(t_2), \quad (3.37)$$

$$\psi^D(t_1, t_2) = \psi(t_1)\phi(t_2). \quad (3.38)$$

Essas *wavelets* medem variações da função - variações de intensidade para imagens - ao longo de diferentes direções: ψ^H mede variações ao longo de colunas (por exemplo, bordas horizontais), ψ^V responde a variações ao longo de linhas (como bordas verticais) e ψ^D corresponde a variações ao longo de diagonais. A sensibilidade direcional é uma consequência natural da separabilidade nas equações 3.36 a 3.38, ela não aumenta a complexidade computacional da transformada 2-D.

Dadas as funções *wavelet* e escala bidimensionais separáveis, a extensão da DWT 1-D para duas dimensões é direta. Primeiro defini-se as funções base escalonadas e transladas:

$$\phi_{j,m,n}(t_1, t_2) = 2^{-\frac{j}{2}} \phi(2^{-j}t_1 - m, 2^{-j}t_2 - n), \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \psi_{j,m,n}^d(t_1, t_2) &= 2^{-\frac{j}{2}} \psi^d(2^{-j}t_1 - m, 2^{-j}t_2 - n), \\ d &= \{H, V, D\}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

sendo que o índice d identifica as *wavelets* direcionais nas equações 3.36 a 3.38, ou seja, d é um sobrescrito que assume os valores H , V e D .

Definição 9 A DWT da imagem $f(t_1, t_2)$ de tamanho $M \times N$ é definida por

$$c_{j_0, m, n} = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{t_1=1}^M \sum_{t_2=1}^N f(t_1, t_2) \phi_{j_0, m, n}(t_1, t_2), \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \omega_{j, m, n}^d &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{t_1=1}^M \sum_{t_2=1}^N f(t_1, t_2) \psi_{j, m, n}^d(t_1, t_2), \\ d &= \{H, V, D\}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Como no caso unidimensional, j_0 é uma escala arbitrária e os coeficientes $c_{j_0, m, n}$ definem uma aproximação de $f(t_1, t_2)$ na escala j_0 . Os coeficientes $\omega_{j, m, n}^d$ adicionam detalhes horizontais, verticais e diagonais para as escalas $j \geq j_0$. Normalmente define-se $j_0 = 1$ e seleciona-se $N = M = 2^J$, de forma que $j = 1, 2, \dots, J$ e $m = n = 1, 2, \dots, 2^j$. Dados $c_{j_0, m, n}$ e $\omega_{j, m, n}^d$ nas equações 3.41 e 3.42, $f(t_1, t_2)$ é obtida por meio da DWT inversa.

Definição 10 A DWT inversa da imagem $f(t_1, t_2)$ é definida por

$$\begin{aligned} f(t_1, t_2) &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_m \sum_n c_{j_0, m, n} \phi_{j_0, m, n}(t_1, t_2) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{d=H, V, D} \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_m \sum_n \omega_{j, m, n}^d \psi_{j, m, n}^d(t_1, t_2). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Do mesmo modo que a transformada *wavelet* discreta 1-D, a DWT 2-D pode ser implementada utilizando filtros e decimações. Utilizando as funções escala e *wavelet* bidimensionais separáveis, simplesmente calcula-se a FWT 1-D das linhas de $f(t_1, t_2)$ e, em seguida, a FWT 1-D das colunas resultantes. A figura 3.5 (a) mostra o processo na forma de um diagrama de blocos. Observe que, a FWT 2-D “filtra” os coeficientes de aproximação da escala j para construir os coeficientes de aproximação e detalhes da escala $j + 1$. No caso bidimensional, contudo, tem-se três conjuntos de coeficientes de detalhes - os detalhes horizontais, verticais e diagonais.

O banco de filtros de escala única da figura 3.5 (a) pode ser estendido a fim de produzir uma transformada de P blocos de filtros com escalas $J + 1, J + 2, \dots, J + P$. Como no caso unidimensional, a imagem $f(t_1, t_2)$ - representada por $c_{j, m, n}$ - é utilizada como entrada. Efetuando a convolução de suas linhas com h_{-n} e g_{-n} e a decimação de suas colunas, obtém-se duas subimagens cujas resoluções horizontais são reduzidas por um fator de 2. O componente passa-alta ou de detalhes caracteriza as informações de alta frequência da imagem com orientação vertical, e, o componente passa-baixa, de aproximação, contém as informações de baixa frequência, verticais. As duas subimagens são, então, filtradas por meio da convolução de suas colunas com h_{-m} e g_{-m} e decimadas ao longo das linhas para gerar quatro subimagens de saída $c_{j+1, m, n}$, $\omega_{j+1, m, n}^H$, $\omega_{j+1, m, n}^V$ e $\omega_{j+1, m, n}^D$ de um quarto do tamanho da imagem de entrada $c_{j, m, n}$. Essas subimagens, mostradas no centro da figura 3.5 (b) são os produtos internos de $f(t_1, t_2)$ com as funções escala e *wavelet* bidimensionais nas equações 3.35 a 3.38, seguidas da decimação por dois em cada dimensão. Duas iterações do processo de filtragem produzem a decomposição em duas escalas (níveis) mostrada na extremidade direita da figura 3.5 (b).

O processo descrito pode ser revertido, e o algoritmo de reconstrução é similar ao caso unidimensional apresentado em [25].

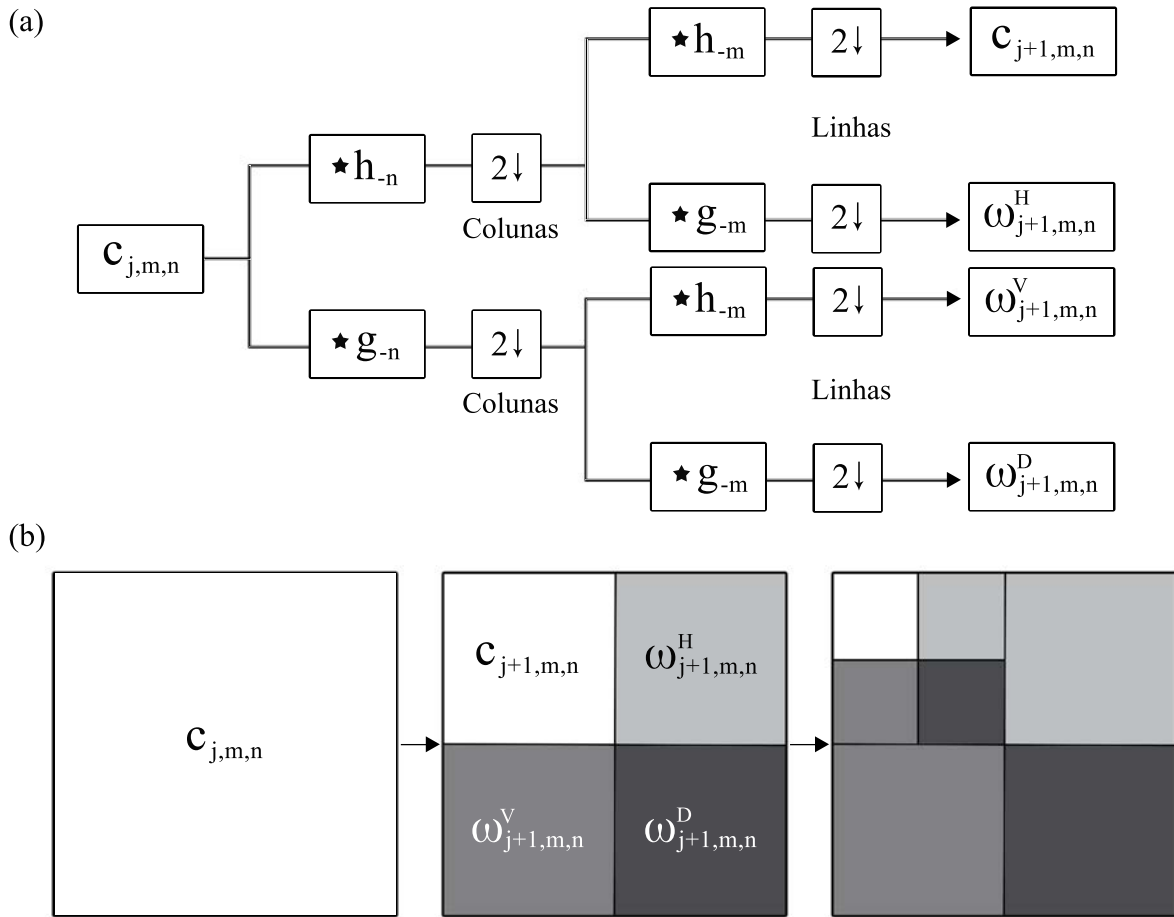


Figura 3.5: A transformada *wavelet* rápida 2-D: (a) banco de filtros de análise e (b) decomposição resultante. Fonte: Adaptado de [25].

Transformada *Wavelet* Redundante

Como visto anteriormente, a transformada *wavelet* rápida também conhecida como o algoritmo piramidal de Mallat [49], [51], decompõe uma função (ou imagem) utilizando a transformada *wavelet* decimada, que pode ser vista como um processo de filtragem seguido por uma decimação por 2, em que são aproveitados apenas os elementos pares ou ímpares da amostra. Apesar de ser um algoritmo computacional eficiente da DWT e fornecer uma representação esparsa, a transformada *wavelet* decimada sofre de quatro deficiências fundamentais entrelaçadas [70].

Problema 1: Oscilações

Como as *wavelets* são funções passa-banda, os coeficientes *wavelet* tendem a oscilar positiva e negativamente em torno de singularidades. Isto complica consideravelmente o processamento baseado em *wavelet*, fazendo com que a extração de singularidade e a modelagem do sinal, em particular, seja um grande desafio [26]. Além disso, uma vez que uma função oscilante passa muitas vezes pelo zero, vê-se que a sabedoria convencional de que as singularidades produzem grandes coeficientes *wavelet* é exagerada. Na verdade, é bem possível que uma *wavelet* sobrepondo uma singularidade tenha um coeficiente *wavelet* pequeno ou mesmo nulo.

Problema 2: Mudança na Variância

Um pequeno desvio do sinal perturba muito o padrão dos coeficientes *wavelet*, que oscila em torno de singularidades. Uma translação nos dados de entrada resulta em um conjunto de coeficientes *wavelet* completamente diferente se comparado ao conjunto de dados originais de entrada. Por isso, a mudança na variância complica o processamento domínio-*wavelet*. Dessa maneira, devem ser construídos algoritmos capazes de lidar com a grande variedade de padrões possíveis de coeficientes *wavelet* causados por singularidades deslocadas [44], [23].

Problema 3: *Aliasing*

O grande espaçamento das amostras de coeficientes *wavelet*, ou equivalentemente, o fato de que os coeficientes *wavelet* são calculados por meio de operações de amostragem tempo-discreta descendentes de iterações intercaladas com filtros passa-baixa e passa-alta não ideais, resulta em considerável *aliasing* (efeito “serrilhado” na imagem). A DWT inversa cancela este *aliasing*, mas apenas se os coeficientes escala não forem alterados. Qualquer processamento nos coeficientes *wavelet* (*thresholding*, filtragem e quantização)

perturba o equilíbrio delicado entre as transformações direta e inversa, levando à artefatos no sinal reconstruído.

Problema 4: Falta de Direcionalidade

Finalmente, enquanto senoides de Fourier em dimensões mais elevadas correspondem a ondas planas altamente direcionais, a construção padrão do produto tensor de *wavelets* produz um padrão quadriculado que é simultaneamente orientado ao longo de várias direções. Esta falta de seletividade direcional complica muito a modelagem e o processamento de recursos de imagens geométricas como cumes e bordas.

Com exceção do *aliasing*, um problema da transformada *wavelet* decimada que prejudica apenas a reconstrução do sinal, as demais deficiências interferem na decomposição do sinal e podem ser resolvidas. Uma solução simples para os problemas de oscilações e mudança na variância é obtida eliminando-se a decimação da transformada *wavelet* decimada. A transformada *wavelet* não decimada, também conhecida como transformada *wavelet* redundante (RDWT, *redundant discrete wavelet transform*) considera todos os elementos da amostra e é invariante por translação. Sendo assim, uma translação no sinal de entrada não gera mudanças nos coeficientes *wavelet* do sinal original.

Em cada escala do algoritmo da transformada *wavelet* não decimada ou redundante, mostrado na figura 4.1, os filtros escala e *wavelet* são modificados pela inserção de zeros entre os seus elementos, de modo que ao realizar a convolução entre o sinal (imagem) e o filtro, se obtenha em cada escala (nível) do algoritmo o mesmo número de coeficientes, isto é, a resolução da imagem é preservada. Assim, em cada nível de resolução, a RDWT permite uma análise completa, mostrando-se ideal para identificar detalhes de informações não tão perceptíveis, porém presentes nas imagens.

Neste capítulo são apresentadas as transformadas de duas famílias de *wavelets* redundantes que foram utilizadas no método de segmentação de texturas aqui construído: as *wavelets* diádica e starlet. Em particular, o problema da falta de direcionalidade não ocorre com a *wavelet* diádica, já que esta é uma *wavelet* direcional, e, portanto, permite que a imagem seja analisada ao longo de direções específicas, o que contribui para a captura de detalhes presentes, por exemplo, nas bordas da imagem.

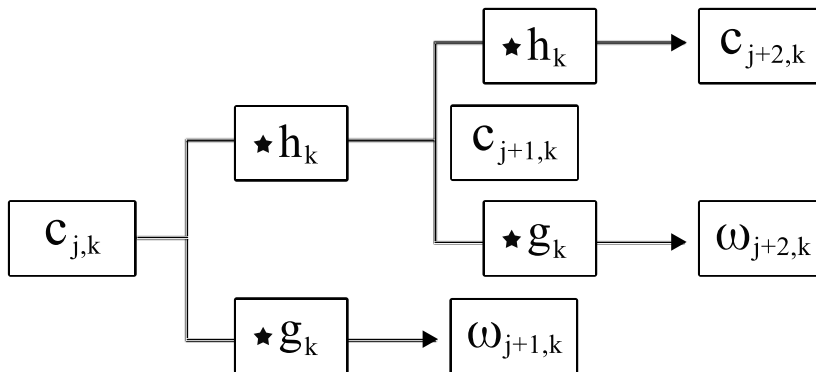


Figura 4.1: Esquema de decomposição por uma transformada *wavelet* redundante.

4.1 Transformada Wavelet Diádica

O ferramental matemático utilizado na construção da família de *wavelets* apresentada nesta seção é baseado nos trabalhos de Mallat e Zhong [52], [53].

Para construir uma representação *wavelet* que seja invariante por translação (redundante), a escala j da transformada contínua unidimensional definida na equação 3.5 é discretizada, enquanto que o parâmetro de translação k não é. No caso da WT diádica, a escala é discretizada ao longo da sequência diádica $\{2^j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, para simplificar os cálculos numéricos [50]. Dessa maneira,

Definição 11 A transformada wavelet diádica de $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ é definida por

$$W_\psi(2^j, k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \bar{\psi}_{2^j, k}(t) dt = f(t) \star \bar{\psi}_{2^j, k}(t) \quad (4.1)$$

com

$$\bar{\psi}_{2^j, k}(t) = \psi_{2^j, k}(-t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{-t}{2^j}\right). \quad (4.2)$$

A FT de $W_\psi(2^j, k)$ é dada por

$$\widehat{W}_\psi(2^j, \lambda) = \widehat{f}(\lambda) \star \widehat{\bar{\psi}}_{2^j, k}(\lambda) \quad (4.3)$$

O Teorema 3 a seguir mostra que se o eixo da frequência é completamente coberto por *wavelets* diádicas dilatadas, então elas definem uma representação completa e estável.

Teorema 3 Se existirem duas constantes $A, B \geq 0$ tais que

$$A \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\widehat{\bar{\psi}}_{2^j, k}(\lambda)|^2 \leq B, \quad (4.4)$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, então

$$A \|f(t)\|^2 \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^j} \|W_\psi(2^j, k)\|^2 \leq B \|f(t)\|^2. \quad (4.5)$$

Se $\tilde{\psi}_{2^j, k}$ satisfaz

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}_{2^j, k}^*(\lambda) \widehat{\tilde{\psi}}_{2^j, k}(\lambda) = 1, \quad (4.6)$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, em que $\widehat{\psi}_{2^j, k}^*$ é o complexo de $\widehat{\psi}_{2^j, k}$, então

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^j} W_\psi(2^j, \cdot) \star \tilde{\psi}_{2^j, k}(t). \quad (4.7)$$

Desse modo, $\widehat{f}(\lambda)$ e $f(t)$ podem ser recuperadas a partir de sua WT diádica. A expressão 4.4 é chamada de *Condição de Admissibilidade*. A *wavelet* de reconstrução $\widehat{\tilde{\psi}}_{2^j, k}$ é qualquer função cuja FT satisfaça a equação 4.6, e $f(t)$ é a função recuperada a partir de sua WT diádica [50].

A fim de poder computar a WT diádica discreta por um banco de filtros, deve-se construir a *wavelet* de modo apropriado, satisfazendo algumas relações de escala diádica. Para isso, considere h_k e g_k um par de filtros que possuem resposta de impulso finita (FIR). Suponha que h_k seja um filtro passa-baixa cuja função de transferência, $H(\lambda)$, satisfaz $\hat{H}(0) = 1$, e, g_k seja um filtro passa-alta cuja função de transferência é $G(\lambda)$. Como nos casos de bases *wavelets* ortogonais e biortogonais, constrói-se uma função escala cuja FT é dada por

$$\hat{\phi}(\lambda) = \prod_{p=1}^{\infty} \hat{H}(2^{-p}\lambda) = \hat{H}\left(\frac{\lambda}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\lambda}{2}\right) \quad [50]. \quad (4.8)$$

Suponha que esta FT é uma função de energia finita para que $\phi(t) \in L^2(\mathbb{R})$. Desse modo, a FT da função *wavelet* correspondente $\psi(t)$ será dada por

$$\hat{\psi}(\lambda) = \hat{G}\left(\frac{\lambda}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\lambda}{2}\right), \quad (4.9)$$

em que ambas $\phi(t)$ e $\psi(t)$ possuem suporte compacto, pois h_k e g_k tem um número finito de coeficientes não nulos.

Uma família de funções *wavelets* diádica satisfazendo as relações de escala 4.8 pode ser construída a partir de uma B-spline de ordem n .

Definição 12 . Uma B-spline de ordem n é definida pela convolução de n splines de ordem zero,

$$B^n(t) = B^0 \star B^{n-1}(t) = B^0 \star B^0 \star \dots \star B^0 \quad (n+1 \text{ vezes}) \quad (4.10)$$

em que $B^0(t)$ é a função característica do intervalo $[0, 1]$.

O suporte da B-spline de ordem n é o intervalo $[0, n]$ e sua FT é dada por

$$\hat{B}^n = \left(\frac{\text{sen}(\frac{\lambda}{2})}{\frac{\lambda}{2}} \right)^{n+1} e^{\left(\frac{-ik\lambda}{2}\right)} \quad \text{com} \quad k = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ é par} \\ 0, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \quad (4.11)$$

Se $\phi(t) = B^n$, então

$$\hat{H}(\lambda) = \frac{\hat{B}^n(2\lambda)}{\hat{B}^n(\lambda)} = \left(\cos \frac{\lambda}{2} \right)^{n+1} e^{\left(\frac{-ik\lambda}{2}\right)}. \quad (4.12)$$

Usando a fórmula de Euler e expansão binomial calcula-se os coeficientes FIR de $\hat{H}(\lambda)$:

$$h_k = \begin{cases} \frac{1}{2^{n+1}} \binom{n+1}{\frac{n+1}{2} + k}, & |k| \leq n+1 \quad \text{para } n \text{ ímpar} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (4.13)$$

em que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (4.14)$$

são os coeficientes binomiais e

$$h_k = \begin{cases} \frac{1}{2^{n+1}} \binom{n+1}{\frac{n}{2} + 1 + k}, & \frac{-n}{2} - 1 \leq k \leq \frac{n}{2} \quad \text{para } n \text{ par} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.15)$$

A *wavelet* $\psi(t)$ é tomada como sendo a derivada de primeira ordem de uma função $\theta(t)$, isto é,

$$\psi'(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}, \quad (4.16)$$

em que $\theta(t)$ é a resposta ao impulso de um filtro passa-baixa, cuja transformada de Fourier tem a energia concentrada em baixas frequências, chamada de função suavizante. Um exemplo desse tipo de função é a Gaussiana,

$$\theta(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{(-t)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (4.17)$$

Logo, para que $\psi^n(t)$ seja a derivada primeira de uma B-spline, considera-se

$$\hat{G}(\lambda) = -i \operatorname{sen} \frac{\lambda}{2} e^{\left(\frac{-ik\lambda}{2}\right)}. \quad (4.18)$$

A FT da *wavelet* resultante é

$$\hat{\psi}^n(\lambda) = \hat{G}\left(\frac{\lambda}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \frac{-i\lambda}{4} = \left(\frac{\operatorname{sen}(\frac{\lambda}{4})}{\frac{\lambda}{4}}\right)^{n+2} e^{\left(\frac{-i\lambda(1+k)}{4}\right)}, \quad (4.19)$$

em que $\psi^n(t)$ é a derivada primeira de uma B-spline de grau $n + 1$ centrada em $t = \frac{1+k}{4}$. Na figura 4.2 é apresentado o gráfico do módulo da FT das *wavelets* $\psi(t)$ para n variando de 1 a 3. Se g_k é o filtro discreto cuja função de transferência é $G(\lambda)$, então $\{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é da forma: $g_0 = -g_1 = 0.5$ e $g_k = 0$ para os demais $k \in \mathbb{Z}$.

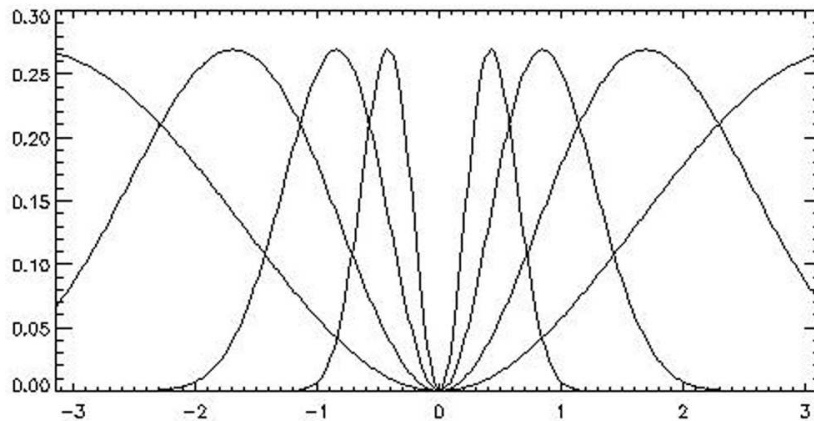


Figura 4.2: Gráfico do módulo da equação 4.19 para $0 \leq n \leq 3$. Fonte: [59].

Em duas dimensões, uma transformada *wavelet* diádica é calculada com diversas *wavelets*-mãe $\psi^d(t_1, t_2) \in L^2(\mathbb{R})$ e cada *wavelet* tem uma orientação específica d , em que

$1 \leq d \leq D$. Denota-se

$$\psi_{2^j,k}^d(t_1, t_2) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi^d\left(\frac{t_1}{2^j}, \frac{t_2}{2^j}\right) \quad e \quad \bar{\psi}_{2^j,k}^d(t_1, t_2) = \psi_{2^j,k}^d(-t_1, -t_2). \quad (4.20)$$

Definição 13 A WT diádica de $f(t_1, t_2) \in L^2(\mathbf{R}^2)$ na direção d e na escala 2^j é definida por

$$W_\psi^d(2^j, k) = \langle f(t_1, t_2), \frac{\bar{\psi}_{2^j,k}^d(t_1, t_2)}{2} \rangle = f(t_1, t_2) \star \bar{\psi}_{2^j,k}^d(t_1, t_2). \quad (4.21)$$

Como no Teorema 3 pode-se provar que a WT bidimensional é uma representação completa e estável do sinal se existir $A, B \geq 0$ tais que

$$A \leq \sum_{d=1}^D \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\widehat{\bar{\psi}}_{2^j,k}^d(\lambda_1, \lambda_2)|^2 \leq B, \quad (4.22)$$

$\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

Então existem *wavelets* de reconstrução $\{\tilde{\psi}^d(t)\}_{1 \leq d \leq D}$ cuja FT satisfaz

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{2j}} \sum_{d=1}^D \tilde{\psi}_{2^j,k}^{d*}(\lambda_1, \lambda_2) \widehat{\psi}_{2^j,k}^d(\lambda_1, \lambda_2) = 1, \quad (4.23)$$

que implica em

$$f(t_1, t_2) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{2j}} \sum_{d=1}^D W_\psi^d(2^j, \cdot) \star \tilde{\psi}_{2^j,k}^d(t_1, t_2). \quad (4.24)$$

Como no modelo desenvolvido por Pagamisse [58], aqui serão utilizadas as *wavelets* diádicas com quatro orientações (0° , 45° , 90° e 135°), definidas por

$$\begin{aligned} \psi^1(t_1, t_2) &= \psi(t_1)2\phi(t_2), \\ \psi^2(t_1, t_2) &= 2\phi(t_1)\psi(t_2), \\ \psi^3(t_1, t_2) &= \psi^1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}R_{45}(t_1, t_2)\right), \\ \psi^4(t_1, t_2) &= \psi^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}R_{45}(t_1, t_2)\right), \end{aligned} \quad (4.25)$$

em que $R_{45}(t_1, t_2) = (t_1 - t_2, t_1 + t_2)$ é a rotação de 45° no sentido anti-horário.

As *wavelets* direcionais apresentadas em 4.25 possuem as seguintes relações de escala diádica:

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}^1(\lambda_1, \lambda_2) &= \widehat{\psi}(\lambda_1)\widehat{\phi}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) = G\left(\frac{\lambda_1}{2}\right)\widehat{\phi}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right)\widehat{\phi}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right), \\ \widehat{\psi}^2(\lambda_1, \lambda_2) &= \widehat{\phi}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right)\widehat{\psi}(\lambda_2) = \widehat{\phi}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right)G\left(\frac{\lambda_2}{2}\right)\widehat{\phi}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right), \\ \widehat{\psi}^3(\lambda_1, \lambda_2) &= \widehat{\psi}^1(\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2) = G\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right)\widehat{\phi}\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right)\widehat{\phi}\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right), \\ \widehat{\psi}^4(\lambda_1, \lambda_2) &= \widehat{\psi}^2(\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2) = \widehat{\phi}\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right)G\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)\widehat{\phi}\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Se $G(\lambda) = \sum_k h_k e^{-ik\lambda}$, então

$$G(\lambda_1 - \lambda_2) = \sum_k h_k e^{-ik(\lambda_1 - \lambda_2)} = \sum_k h_k e^{-ik\lambda_1} e^{-ik\lambda_2}, \quad (4.27)$$

e os coeficientes de $G(\lambda_1 \pm \lambda_2)$ são os mesmos de $G(\lambda)$, mas atuam na diagonal da imagem, ou seja, $G(\lambda_1 \pm \lambda_2)$ também é um filtro FIR.

As relações de escala 4.26, juntamente com 4.27, permitem uma implementação rápida da WT diádica. Para isto, seja $D_1 F$ a matriz cuja diagonal principal é formada pelos coeficientes do filtro correspondente à função de transferência F ; $D_2 F$ a matriz cuja diagonal secundária é formada pelos coeficientes do filtro correspondente à função de transferência F ; e F_p o filtro discreto obtido ao colocar-se $2^p - 1$ zeros entre cada coeficiente do filtro correspondente à função de transferência F . Desse modo, a decomposição *wavelet* diádica discreta de um sinal bidimensional $f(t) = c_{2^j,k}^1$ é feita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} c_{2^{j+1},k}^1 &= c_{2^j,k}^1 \star (H_j \cdot H_j), \\ \omega_{2^{j+1},k}^1 &= c_{2^j,k}^1 \star (G_j \cdot I), \\ \omega_{2^{j+1},k}^2 &= c_{2^j,k}^1 \star (I \cdot G_j), \\ \omega_{2^{j+1},k}^3 &= c_{2^j,k}^1 \star (D_1 G_j \cdot I), \\ \omega_{2^{j+1},k}^4 &= c_{2^j,k}^1 \star (I \cdot D_2 G_j), \end{aligned} \quad (4.28)$$

em que I é o filtro de Dirac, cuja resposta ao impulso é igual a 1 na posição zero, e zero nas demais posições.

Esquematicamente pode-se visualizar essa decomposição conforme a figura 4.3, em que os c 's são as bandas suavizadas do sinal que serão utilizadas na próxima escala e os ω 's são as bandas de detalhes extraídos do sinal nas direções 0° , 45° , 90° e 135° .

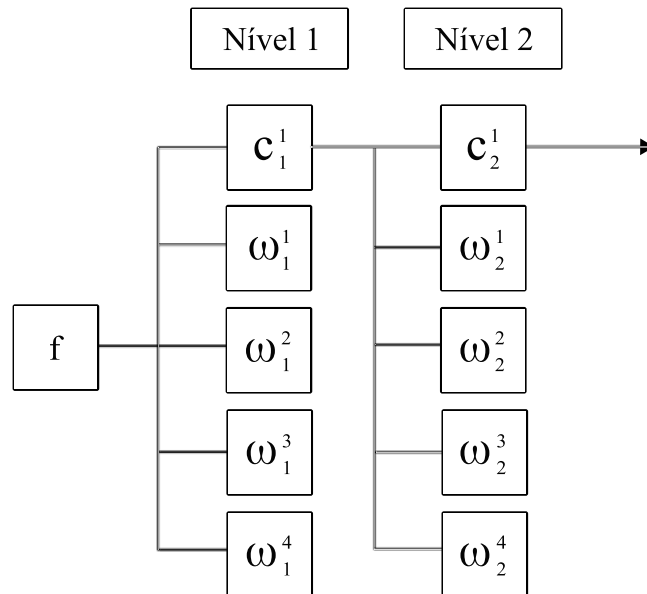


Figura 4.3: Esquema de decomposição pela transformada *wavelet* diádica com quatro direções em dois níveis. Fonte: Adaptado de [59].

4.2 Transformada Wavelet Starlet

A transformada *wavelet* starlet (SWT, *starlet wavelet transform*) é uma transformada isotrópica e redundante (invariante por translação) com base no algoritmo “à trous” (“com furos”) [67].

Transformadas isotrópicas recuperam apenas um conjunto de detalhes por nível, extraídos em todas as direções, ao invés de vários conjuntos de detalhes (como por exemplo as *wavelets* diádicas e as *wavelets* de Daubechies que extraem detalhes na vertical, horizontal e diagonal), facilitando a interpretação dos resultados.

Devido às suas propriedades, essa ferramenta é uma boa alternativa no processamento de imagens e reconhecimento de padrões. Em particular, como a SWT está muito bem adaptada para a detecção de características isotrópicas, ela é muito utilizada no processamento de imagens astronômicas, que contêm principalmente objetos isotrópicos ou quase isotrópicos, como estrelas, galáxias ou aglomerados de galáxias.

A construção unidimensional desta *wavelet* é dada por suas funções escala e *wavelet* unidimensionais, ϕ e ψ respectivamente,

$$\phi(t) = \frac{1}{12}(|t-2|^3 - 4|t-1|^3 + 6|t|^3 - 4|t+1|^3 + |t+2|^3), \quad (4.29)$$

$$\frac{1}{2}\psi\left(\frac{t}{2}\right) = \phi(t) - \frac{1}{2}\phi\left(\frac{t}{2}\right), \quad (4.30)$$

em que ϕ é uma B-spline de terceira ordem (*spline* cúbica).

Uma extensão de duas dimensões é obtida por um produto tensor,

$$\phi(t_1, t_2) = \phi(t_1)\phi(t_2), \quad (4.31)$$

$$\frac{1}{4}\psi\left(\frac{t_1}{2}, \frac{t_2}{2}\right) = \phi(t_1, t_2) - \frac{1}{4}\phi(t_1, t_2) - \frac{1}{2}\phi\left(\frac{t_1}{2}, \frac{t_2}{2}\right). \quad (4.32)$$

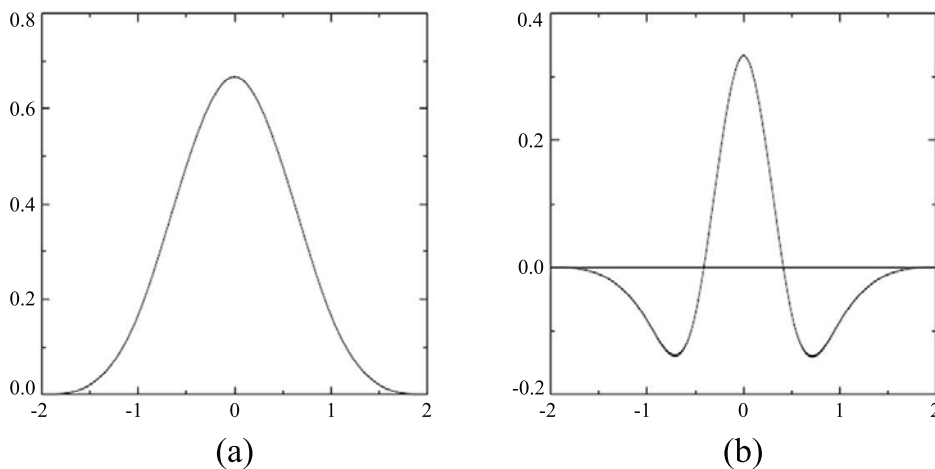


Figura 4.4: (a) Função *spline* cúbica ϕ e (b) função *wavelet* starlet ψ . Fonte: [67].

O par de filtros (h_l, g_l) relacionado a esta *wavelet* (equação (4.30)) é

$$g_l = \delta_l - h_l, \quad (4.33)$$

em que

$$h_l = \left\{ \frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16} \right\}, \quad (4.34)$$

para $l = -2, \dots, 2$ e δ definido como $\delta_0 = 1$, $\delta_l = 0$ para $l \neq 0$.

Ao escolher ϕ como sendo uma B-spline de primeira ordem (spline linear), utiliza-se

$$h_l = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right\}. \quad (4.35)$$

No entanto, utilizando ϕ como sendo uma B-spline de segunda ordem (spline quadrática), utiliza-se

$$h_l = \left\{ \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8} \right\}. \quad (4.36)$$

Em ambos os casos, as *wavelets* são construídas de forma análoga à equação 4.30.

Considerando o filtro derivado de ϕ (equação 4.34), a aplicação da SWT é dada por uma convolução entre a imagem de entrada $c_{j,k}$, e a resposta ao impulso finito do filtro h_l , que pode ser estendido para duas dimensões:

$$h_l = \begin{pmatrix} \frac{1}{256} & \frac{1}{64} & \frac{3}{128} & \frac{1}{64} & \frac{1}{256} \\ \frac{1}{64} & \frac{1}{16} & \frac{3}{32} & \frac{1}{16} & \frac{1}{64} \\ \frac{3}{128} & \frac{3}{32} & \frac{6}{64} & \frac{3}{32} & \frac{3}{128} \\ \frac{1}{64} & \frac{1}{16} & \frac{3}{32} & \frac{1}{16} & \frac{1}{64} \\ \frac{1}{256} & \frac{1}{64} & \frac{3}{128} & \frac{1}{64} & \frac{1}{256} \end{pmatrix}. \quad (4.37)$$

Esta convolução resulta em um conjunto de coeficientes de suavização $c_{j+1,k}$. Das equações 4.31 e 4.30, os detalhes de $c_{j+1,k}$ são representados pelos coeficientes *wavelet* $\omega_{j+1,k}$ e obtidos a partir da diferença de informações entre os níveis de resolução anteriores e atuais. Assim, os coeficientes *wavelet* de detalhes do primeiro nível de decomposição são obtidos a partir da operação $\omega_{1,k} = c_{0,k} - c_{1,k}$.

Definição 14 *O cálculo da SWT é definido pelas expressões:*

$$c_{j+1,k} = \sum_l h_l c_{j,k+2^j l}, \quad (4.38)$$

$$\omega_{j+1,k} = \sum_l g_l c_{j,k+2^j l}, \quad (4.39)$$

ou ainda

$$\omega_{j+1,k} = c_{j,k} - c_{j+1,k}, \quad (4.40)$$

com $j = 1, \dots, J$, em que $j = 1$ corresponde à menor escala e seus coeficientes são calculados primeiro a partir de $c_{0,k}$ que é utilizada como a função escala (aproximação) de entrada; e, J corresponde à maior escala, e, portanto, seus coeficientes são calculados por último.

Desse modo, a SWT decompõe uma imagem $c_{0,k}$ em um conjunto de coeficientes $W = \{\omega_{1,k}, \dots, \omega_{J,k}, c_{J,k}\}$, o qual é possível reconstruir.

Definição 15 O cálculo da SWT inversa é definido por

$$c_{0,k} = c_{J,k} + \sum_{j=1}^J \omega_{j,k}. \quad (4.41)$$

A figura 4.5 a seguir, mostra o esquema de decomposição pela SWT.

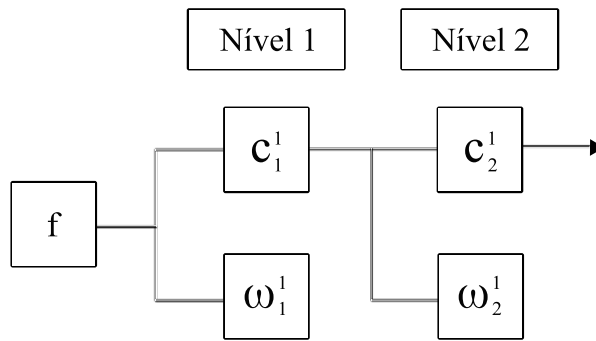


Figura 4.5: Esquema de decomposição pela transformada *wavelet* starlet em dois níveis.

Método de Segmentação de Texturas

5.1 Etapas do Método

Baseado no método desenvolvido por Pagamisse [58], o método aqui construído agrega e combina as respostas (medidas de distribuição da energia local) das transformadas *wavelet* diádica com quatro direções e starlet, fornecendo a melhor segmentação de texturas.

O procedimento a fim de realizar as medidas da distribuição da energia local por meio das transformadas, consiste primeiramente em tomar amostras representativas de cada textura e realizar as decomposições *wavelet* diádica e starlet separadamente, isto é, em cada decomposição é feita a convolução entre as amostras das texturas e um banco de filtros. Nesta primeira etapa, as informações correspondentes a diferenças entre regiões de texturas estão concentradas em diferenças nas variâncias dos atributos iniciais, pois todas as bandas possuem inicialmente média zero. É importante ressaltar que a escolha das amostras interfere nos resultados, e, portanto, depende da experiência do usuário.

As decomposições *wavelet* fornecem o total de cinco bandas de detalhes para cada nível: quatro bandas da WT diádica (B1, B2, B3 e B4) e uma banda da WT starlet (B5). Cada banda traz consigo alguma informação diferente sobre a imagem, visto que são oriundas de quatro orientações específicas - 0°, 45°, 90° e 135° - no caso da WT diádica, e de características isotrópicas, extraídas em todas as direções, no caso da WT starlet.

A próxima etapa é a tomada do valor absoluto das saídas das decomposições, retificando as respostas dos filtros por aplicar-se uma transformação não linear. Essa operação tem o efeito de converter diferenças de variâncias em diferenças de médias, a fim de se trabalhar com a energia resultante nas bandas obtidas.

Em seguida é realizada uma homogeneização nas bandas utilizando uma versão discreta do filtro Gaussiano passa-baixa, baseada no Teorema Central do Limite [24], obtido por convoluções sucessivas do filtro caixa (*box filter*)

$$box = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad box * box = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad box * box * box = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Este processo constitui a terceira etapa do método, e, se insere no contexto de que textura é propriedade local e não pontual, ou seja, é indefinida para um único pixel, pois está associada a um conjunto de pixels. Além disso, a homogeneização reduz a variância, resultando em classes mais bem definidas, o que facilita o processo de segmentação.

Na quarta etapa, a fim de se obter a maior separabilidade possível entre as texturas aplica-se a Análise Canônica [65], que neste caso, consiste em compor as amostras das

texturas de cada uma das bandas e encontrar o vetor que representa a direção canônica que dá a máxima separabilidade entre as texturas. Para M classes e N bandas de dados multiespectrais são fornecidos $M-1$ eixos canônicos. No caso dos pares de texturas, por exemplo, trabalha-se com 2 classes e 5 bandas, portanto, existe uma projeção em um único eixo que fornece a máxima separabilidade entre as classes. Na sequência é feita a projeção na direção canônica encontrada por meio de uma combinação linear entre as bandas originais e os elementos do vetor obtido, a qual gera a banda com a melhor separabilidade para cada composição. Para escolher a melhor entre elas, na quinta etapa, utiliza-se o critério de separabilidade de Fisher [7]

$$C_F = \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \quad (5.1)$$

em que μ_1 e μ_2 são as médias, e σ_1^2 e σ_2^2 são as variâncias das amostras de cada uma das texturas 1 e 2, respectivamente. Esse critério é aplicado em cada uma das bandas, e leva em conta não apenas a separação das médias das energias, mas também o quanto essas energias se afastam das médias, isto é, as variâncias.

O maior coeficiente obtido pelo critério de Fisher define a banda de melhor separabilidade entre as texturas. Desta, toma-se os elementos do vetor que representa a direção canônica que dá a separação máxima entre as texturas e aplica-se na banda original para gerar a banda ótima para cada nível. Após esse procedimento, a mesma passa por um processo de pós-homogeneização por meio do filtro média.

Na sexta etapa, aplica-se a limiarização na banda de máxima separabilidade de cada nível para se obter a segmentação das imagens. Pelo fato de uma textura ser caracterizada por uma região e não por pixels isolados, essa limiarização pode ser obtida de forma automática, tomando-se as energias nas mesmas regiões que se colheu as amostras e usando-as como centro de classe. Para cada pixel, toma-se a energia local e verifica-se a qual centro de classe ele está mais próximo, classificando-o nessa classe. Outra forma de se obter a limiarização de uma imagem é por meio do método de Otsu [56]. Baseado na análise discriminante, um limiar ótimo é selecionado de modo a maximizar a separabilidade das classes resultantes dos níveis de cinza do histograma de uma dada imagem. Ambos os métodos de limiarização foram adotados neste trabalho.

Por fim, verifica-se o menor percentual de erro apresentado pelas bandas limiarizadas de cada nível e define-se qual banda fornece a melhor segmentação de texturas (máxima separabilidade global). O percentual de erro é definido pela porcentagem correspondente à soma dos pixels classificados erroneamente obtida por meio da comparação da imagem limiarizada com a imagem referência. É importante ressaltar que, na prática, a escolha do nível depende da experiência do usuário.

A figura 5.1 mostra o esquema representativo do método e a figura 5.2 apresenta as imagens resultantes em cada processo do método aplicado a um par de texturas.

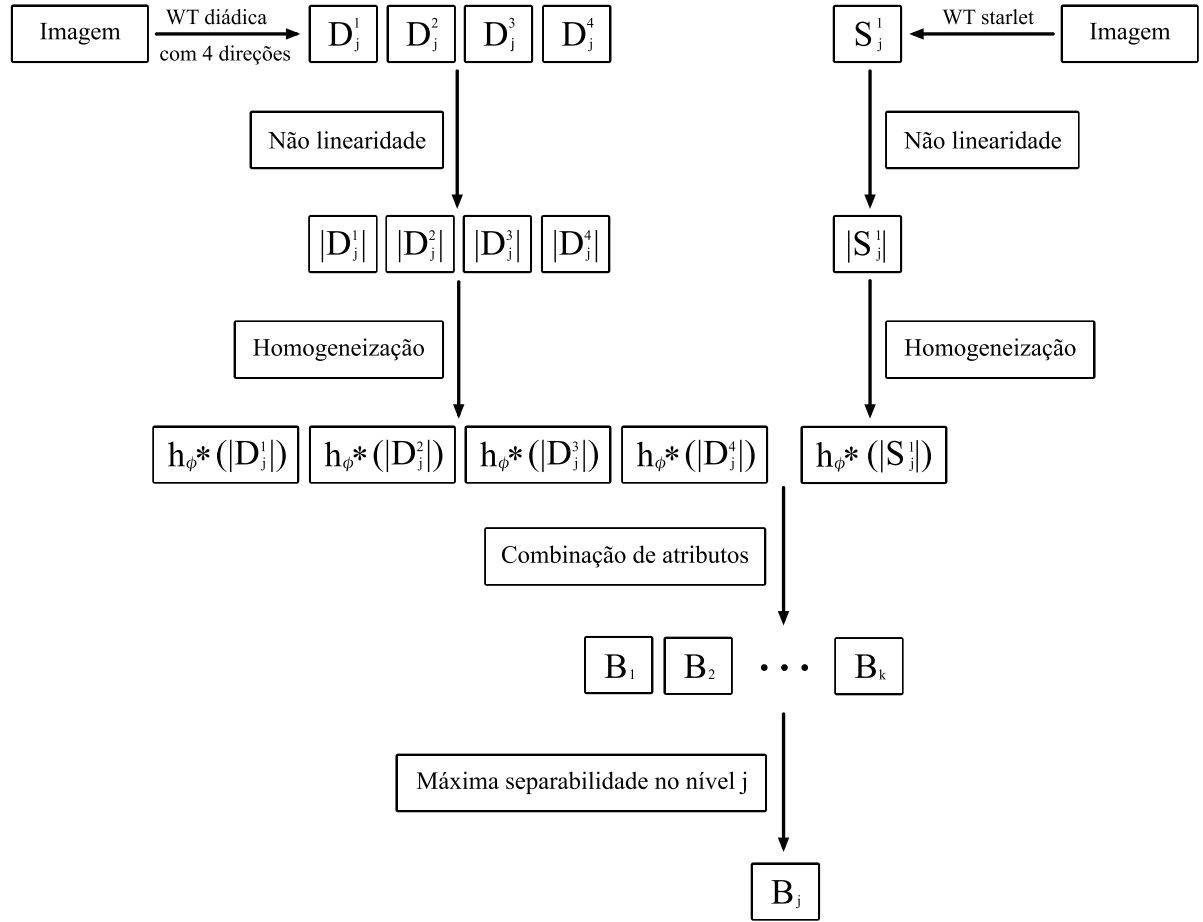


Figura 5.1: Esquema representativo do método de segmentação de texturas utilizando as *wavelets* diádica com quatro direções e starlet no nível j . Fonte: Adaptado de [58].

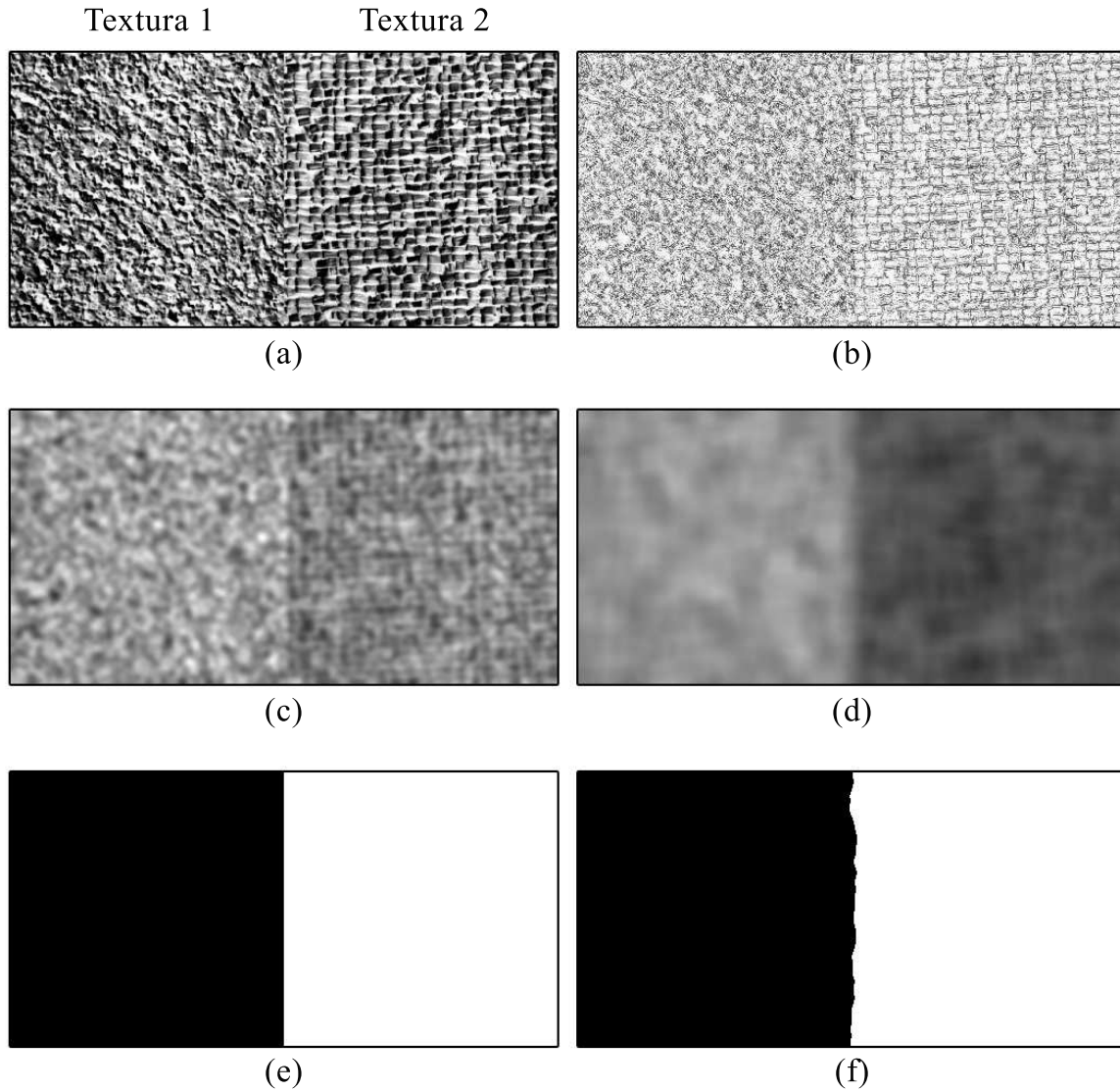


Figura 5.2: Etapas do método: (a) Um par de texturas, (b) uma das bandas de detalhes resultante da 1ª etapa, (c) banda homogeneizada resultante da 2ª e 3ª etapas, (d) banda de máxima separabilidade resultante da 4ª e 5ª etapas, (e) imagem referência para a limiarização, e (f) banda limiarizada resultante da 6ª etapa.

5.1.1 Análise Canônica

Normalmente, as medidas resultantes da aplicação dos métodos de análise de texturas, em particular, dos métodos de segmentação de texturas, são obtidas por meio de processos de seleção de características. Esses processos são responsáveis por executar transformações nos dados de entrada, de modo a descrevê-los de maneira simplificada, porém, representativa.

A seleção de características não pode ser realizada indiscriminadamente [65]. Os métodos devem ser elaborados de forma que as características sejam avaliadas de maneira quantitativa e rigorosa. Um procedimento utilizado é o de determinar a separabilidade matemática das classes. Na classificação de dados, o número de características utilizadas para descrever vetores correspondentes aos pixels no espaço multiespectral aumenta com

o número de bandas espectrais associadas a cada pixel. É importante assegurar que não há mais características utilizadas do que o necessário quando se realiza uma classificação. Para os dados de dimensionalidade alta exige-se que o número de características usadas em uma classificação seja o mínimo possível, pois resultados confiáveis são esperados a partir da formação de números acessíveis de pixels, o que representa um grande desafio na prática. Assim, características que não ajudam a segmentação, contribuindo pouco para a separabilidade de classes espectrais, podem ser descartadas.

Uma das formas de se efetuar a redução de características é por meio da Análise Canônica, um método de transformação de imagens que gera um conjunto de eixos através dos quais a separação de classes é otimizada. A transformação dos dados originais em um novo conjunto de eixos, nos quais a separabilidade é maior, permite que características não transformadas sejam desconsideradas.

Para ilustrar esta abordagem, considere duas classes dimensionais mostradas na figura 5.3 (a). Verificando-a, pode-se observar que as classes não são separáveis. Porém, os dados podem ser separados quando um único eixo de rotação é adotado (isto é, uma transformação na imagem), tal como mostrado na figura 5.3 (b).

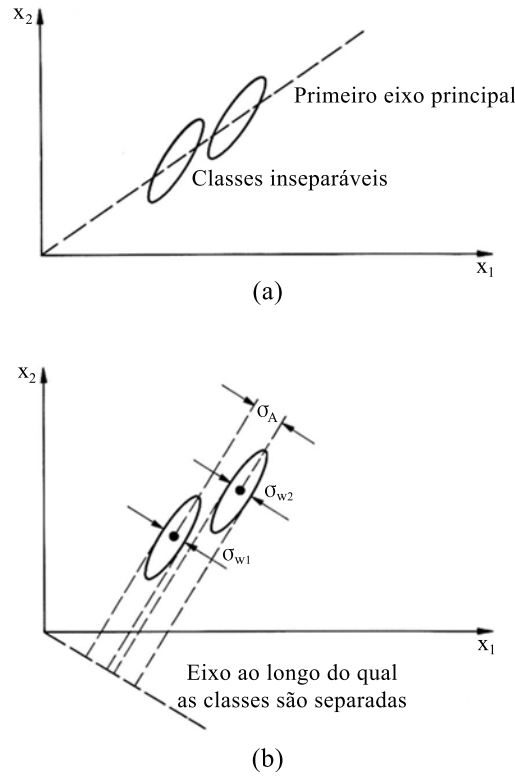


Figura 5.3: (a) Plano cartesiano hipotético bidimensional com duas classes de dados que ilustram a falta de separabilidade em qualquer banda original e (b) eixo ao longo do qual as classes podem ser separadas. Fonte: [65].

O novo eixo nesta transformação deve ser orientado de forma que as classes tenham a máxima separabilidade quando projetadas sobre ele. Para que isto ocorra, a distância entre as posições médias dos dados de cada classe deve ser a maior possível, e, simultaneamente, a dispersão dos dados de cada classe deve ser a menor possível. Dessa maneira, conforme ilustrado na figura 5.3 (b), seja a medida σ_A , o desvio padrão **entre** as classes, isto é, a distância entre as posições médias dos dados das classes e, σ_{w1} e σ_{w2} , a dispersão

de dados **dentro** das classes, isto é, os desvios padrão das classes. Assim, o interesse está em encontrar um novo eixo tal que a relação

$$\frac{\sigma_A^2}{\sigma_w^2} = \frac{\text{variância entre as classes}}{\text{variância dentro as classes}}, \quad (5.2)$$

em que σ_w^2 é a média de σ_{w1}^2 e σ_{w2}^2 ; seja maximizada.

5.1.1.1 Matrizes de Covariância Dentro das Classes e Entre as Classes

Para tratar os dados com qualquer número de dimensões é necessário definir a dispersão média de dados **dentro** das classes e a dispersão **entre** as classes em torno do espaço multiespectral, através de matrizes de covariância [65].

A média da matriz de covariância **dentro** das classes é definida por

$$\Sigma_w = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \Sigma_i, \quad (5.3)$$

em que M é o número total de classes e Σ_i é a matriz de covariância dos dados na classe i , dada por

$$\Sigma_i = \sum_{k=1}^{M,K} (x_k - m_i)^t, \quad (5.4)$$

sendo que m_i é a média dos vetores x_k que representam cada um dos K pixels da i -ésima classe, definida por

$$m_i = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K x_k. \quad (5.5)$$

A equação 5.3 só se aplica se as classes têm o mesmo número de elementos.

A matriz de covariância **entre** as classes é dada por

$$\Sigma_A = \xi \{ (m_i - m_0) \} (m_i - m_0)^t, \quad (5.6)$$

em que ξ é o operador de expectativa, m_i é a média da i -ésima classe e m_0 é a média global, dada por

$$m_0 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M m_i. \quad (5.7)$$

Uma estimativa imparcial da matriz de covariância é dada por

$$\Sigma_A = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (x_i - m_0) (x_i - m_0)^t. \quad (5.8)$$

5.1.1.2 Medida de Separabilidade

Seja $y = D^t$ a transformação necessária que gera novos eixos y nos quais as classes tem separação ideal. É possível mostrar que as matrizes de covariância dentro das classes

e entre as classes no sistema de novas coordenadas são

$$\Sigma_{w,y} = D^t \Sigma_{w,x} D, \quad (5.9)$$

$$\Sigma_{A,y} = D^t \Sigma_{A,x} D, \quad (5.10)$$

em que as duas novas matrizes de covariância D não são necessariamente diagonais e os vetores linha de D^t definem o eixo de direções no espaço y [65].

Considerando d^t um vetor especial (que define o primeiro eixo, chamado eixo canônico, ao longo do qual as classes serão otimamente separadas), as correspondentes variâncias dentro das classes e entre as classes serão

$$\sigma_w^2 = d^t \Sigma_{w,x} d, \quad (5.11)$$

$$\sigma_A^2 = d^t \Sigma_{A,x} d. \quad (5.12)$$

Dessa forma, o objetivo é encontrar d (e, em última análise, a matriz de transformação completa D^t) para os quais

$$\lambda = \frac{\sigma_A^2}{\sigma_w^2} = \frac{d^t \Sigma_{A,x} d}{d^t \Sigma_{w,x} d} \quad (5.13)$$

é maximizada. A seguir, os subscritos dos eixos das matrizes de covariância serão descartados por conveniência.

5.1.1.3 Equação Generalizada de Autovalores

A razão de variâncias λ em 5.13 é maximizada pela seleção de d se, e somente se

$$\frac{\partial \lambda}{\partial d} = 0. \quad (5.14)$$

Utilizando a identidade

$$\frac{\partial \{x^t A x\}}{\partial x} = 2Ax, \quad (5.15)$$

segue que

$$\Sigma_{Ad} - \Sigma_{wd} (d^t \Sigma_{Ad}) (d^t \Sigma_{wd})^{-1} = 0 \quad [65], \quad (5.16)$$

que pode ser escrita como

$$(\Sigma_A - \lambda \Sigma_w) d = 0. \quad (5.17)$$

A equação 5.17 é chamada de equação generalizada de autovalores, cuja solução é encontrar o conjunto de autovalores λ e os correspondentes autovetores d . O primeiro eixo canônico será na direção d e λ dará a relação entre a razão das variâncias associadas entre e dentro das classes ao longo desse eixo. Geralmente, no primeiro eixo canônico, que corresponde ao maior λ , as classes terão máxima separabilidade. O segundo eixo, correspondente ao segundo maior λ , irá fornecer o próximo melhor grau de separabilidade, e assim sucessivamente.

A equação 5.17 pode ser escrita da forma

$$(\Sigma_A - \Lambda \Sigma_w) D = 0, \quad (5.18)$$

em que Λ é uma matriz diagonal do conjunto completo de λ 's e D é a matriz de vetores d .

O desenvolvimento para esta fase é usualmente referida como análise discriminante. Uma etapa a mais é incluída no caso da Análise Canônica. Esta etapa consiste da seguinte restrição adicional:

$$D^t \Sigma_w D = I, \quad (5.19)$$

que significa que a matriz de covariância dentro das classes após a transformação, deve ser a matriz identidade, isto é, uma matriz diagonal unitária. Em outras palavras, depois da transformação, as classes devem aparecer esféricas.

Para M classes e N bandas de dados multiespectrais, se $N > M - 1$, haverá somente $M - 1$ raízes diferentes de zero em 5.18 e, portanto, $M - 1$ eixos canônicos. Isto implica que a dimensionalidade do espaço transformado será menor do que a dos dados originais. Assim, a Análise Canônica prevê a separabilidade com dimensionalidade reduzida.

5.1.2 Método de Limiarização de Otsu

O método de limiarização global de Otsu [56] é caracterizado pela sua natureza não paramétrica e não supervisionada de seleção automática de um limiar para a segmentação de imagens. Através da análise discriminante, um limiar ótimo é selecionado de modo a maximizar a separabilidade das classes resultantes dos níveis de cinza do histograma de uma dada imagem.

Para a formulação do método, considera-se os pixels de uma determinada imagem representados por L níveis de cinza $[1, 2, \dots, L]$. O número de pixels no nível i é denotado por n_i e o total de pixels por $N = n_1 + n_2 + \dots + n_L$. A fim de simplificar a discussão, os níveis de cinza do histograma são normalizados e considerados como uma distribuição de probabilidade:

$$p_i = \frac{n_i}{N}, \quad p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^L p_i = 1. \quad (5.20)$$

Suponha que dicotomizando os pixels em duas classes de C_0 e C_1 por um limiar no nível k ; C_0 denota pixels com níveis de $[1, \dots, k]$, e C_1 denota pixels com níveis $[k+1, \dots, L]$. Então as probabilidades de ocorrência de classe e dos níveis médios das classes, respectivamente, são dadas por

$$\omega_0 = Pr(C_0) = \sum_{i=1}^k p_i = \omega(k), \quad (5.21)$$

$$\omega_1 = Pr(C_1) = \sum_{i=k+1}^L p_i = 1 - \omega(k), \quad (5.22)$$

e

$$\mu_0 = \sum_{i=1}^k i Pr(i|C_0) = \sum_{i=1}^k \frac{i p_i}{\omega_0} = \frac{\mu(k)}{\omega(k)}, \quad (5.23)$$

$$\mu_1 = \sum_{i=k+1}^L i Pr(i|C_1) = \sum_{i=k+1}^L \frac{i p_i}{\omega_1} = \frac{\mu_T - \mu(k)}{1 - \omega(k)}, \quad (5.24)$$

em que

$$\omega(k) = \sum_{i=1}^k p_i \quad \text{e} \quad \mu(k) = \sum_{i=1}^k i p_i \quad (5.25)$$

são os momentos cumulativos zero e de primeira ordem do histograma até o nível de ordem k , respectivamente, e

$$\mu_T = \mu(L) = \sum_{i=1}^L i p_i \quad (5.26)$$

é o nível médio total da imagem original. Pode-se facilmente verificar a seguinte relação para qualquer escolha de k :

$$\omega_0 \mu_0 + \omega_1 \mu_1 = \mu_T, \quad \omega_0 + \omega_1 = 1. \quad (5.27)$$

As variâncias das classes são dadas por

$$\sigma_{W0}^2 = \sum_{i=1}^k (i - \mu_0)^2 Pr(i|C_0) = \sum_{i=1}^k (i - \mu_0)^2 \frac{p_i}{\omega_0}, \quad (5.28)$$

$$\sigma_{W1}^2 = \sum_{i=k+1}^L (i - \mu_1)^2 Pr(i|C_1) = \sum_{i=k+1}^L (i - \mu_1)^2 \frac{p_i}{\omega_1}. \quad (5.29)$$

Estas exigem momentos cumulativos (estatísticas) de segunda ordem.

A fim de avaliar a separabilidade do limiar (no nível k), introduz-se as seguintes medidas de critérios discriminantes (ou medidas de classes de separabilidade) utilizados na análise discriminante [22]:

$$\lambda = \frac{\sigma_A^2}{\sigma_W^2}, \quad \kappa = \frac{\sigma_T^2}{\sigma_W^2}, \quad \eta = \frac{\sigma_A^2}{\sigma_T^2}, \quad (5.30)$$

em que

$$\sigma_W^2 = \omega_0 \sigma_{W0}^2 + \omega_1 \sigma_{W1}^2, \quad (5.31)$$

$$\sigma_A^2 = \omega_0 (\mu_0 - \mu_T)^2 + \omega_1 (\mu_1 - \mu_T)^2 = \omega_0 \omega_1 (\mu_1 - \mu_0)^2 \quad (5.32)$$

e, devido a equação 5.27,

$$\omega_T^2 = \sum_{i=1}^L (i - \mu_T)^2 p_i. \quad (5.33)$$

A variância **dentro** das classes é representada por σ_W^2 em 5.31, σ_A^2 é a variância **entre** as classes dada em 5.32, e, ω_T^2 define a variância **total** de níveis na equação 5.33. Então, o problema é reduzido a um problema de otimização para procurar um limiar k que maximiza uma das funções de objetos (as medidas de critério) em 5.30.

Este ponto de vista é motivado por uma conjectura que diz que as classes bem limiarizadas são separadas em níveis de cinza, e, inversamente, o limiar que fornece a melhor separação de classes em níveis de cinza seria o melhor limiar.

Os critérios discriminantes que maximizam λ , κ e η , respectivamente, para k são, no entanto, equivalentes entre si. Por exemplo, em termos de λ , segue que

$$\kappa = \lambda + 1 \quad \text{e} \quad \eta = \frac{\lambda}{\lambda + 1}, \quad (5.34)$$

porque a seguinte relação básica sempre é válida:

$$\sigma_W^2 + \sigma_A^2 = \sigma_T^2. \quad (5.35)$$

Nota-se que os σ_W^2 e σ_A^2 são funções dependentes do limiar k , enquanto que σ_T^2 é independente de k . Observa-se também que σ_W^2 é baseado nas estatísticas de segunda ordem (variâncias das classes), enquanto que σ_A^2 é baseado nas estatísticas de primeira ordem (médias das classe). Portanto, η é a medida mais simples no que diz respeito a k . Assim, adota-se η como a medida critério para avaliar a separabilidade do limiar de nível k .

O limiar k^* ótimo que maximiza η , ou equivalentemente maximiza σ_A^2 é selecionado utilizando os momentos acumulados simples 5.25, ou explicitamente usando 5.21 ao 5.24:

$$\eta(k) = \frac{\sigma_A^2(k)}{\sigma_T^2}, \quad (5.36)$$

$$\sigma_A^2(k) = \frac{[\mu_T \omega(k) - \mu(k)]^2}{\omega(k)[1 - \omega(k)]}, \quad (5.37)$$

e o limiar k^* ótimo

$$\sigma_A^2(k^*) = \max_{1 \leq k < L} \sigma_A^2(k). \quad (5.38)$$

A partir desse problema, o intervalo de k ao longo do qual o máximo é procurado pode ser restrito a

$$S^* = \{k; \quad \omega_0 \omega_1 = \omega(k)[1 - \omega(k)] > 0 \quad \text{ou} \quad 0 < \omega(k) < 1\}, \quad (5.39)$$

definido como alcance efetivo dos níveis de cinza do histograma. A partir da definição em 5.32, a medida do critério σ_A^2 (ou η) assume um valor mínimo igual a zero para k tal que $k \in S - S^* = \{k; \quad (\omega(k) = 0 \quad \text{ou} \quad 1)\}$ e tem um valor positivo e limitado para $k \in S^*$. Portanto, é evidente que o máximo existe sempre.

5.1.2.1 Análise de Aspectos Importantes

O método de Otsu como proposto proporciona meios para se analisar outros aspectos além da seleção de um limiar ótimo para uma dada imagem. Para a seleção do limiar k^* de uma imagem, as classes de probabilidades ω_0 e ω_1 indicam as porções das áreas ocupadas pelas classes C_0 e C_1 , respectivamente. As médias de classes μ_0 e μ_1 servem como estimativa dos níveis médios das classes na imagem original em níveis de cinza. Além disso, o valor máximo de $\eta(k^*)$, denotado por η^* , pode ser usado como medida para avaliar a separabilidade das classes C_0 e C_1 na imagem original ou a bimodalidade do histograma. Esta é uma medida bastante significativa pois é invariante por translações (transformações afins) da escala de níveis de cinza (ou seja, para qualquer mudança e dilatação, $g'i = agi + b$), e unicamente determinada dentro do intervalo

$$0 \leq \eta^* \leq 1. \quad (5.40)$$

O limite inferior (zero) é obtido se e somente se uma dada imagem tenha um único e constante nível de cinza, e o limite superior (um) é obtido se e somente se uma dada imagem tenha dois valores de nível de cinza.

Em imagens digitais, a uniformidade dos objetos tem papel importante na separação dos mesmos. De fato, a abordagem de Otsu para limiarização de imagens em níveis de cinza é eficiente com base na uniformidade medida entre as duas classes C_0 e C_1 a serem segmentadas.

5.1.2.2 Vantagens

A aplicação do método de limiarização de Otsu se estende à vários problemas práticos por apresentar as seguintes vantagens:

1. O procedimento é muito simples; são utilizados somente os momentos cumulativos zero e de primeira ordem do histograma de níveis de cinza;
2. Uma extensão simples e direta para problemas que exijam vários limiares é viabilizada mediante o critério no qual o método está baseado, a saber, a análise discriminante;
3. Um limiar ótimo (ou conjunto de limiares) é selecionado de forma automática e estável, não baseado na diferenciação (uma propriedade local, como um vale) mas sim na integração (propriedade global) do histograma;
4. Viabiliza a análise de outros aspectos importantes, tais como estimativa dos níveis médios das classes, avaliação da separabilidade das classes e etc;
5. O método é extremamente genérico; cobre um largo escopo de processos de decisão não supervisionados.

O conjunto de suas aplicações não se limita a binarização de imagens em níveis de cinza tal como descrito anteriormente, mas também pode ser utilizado em outros casos de classificação não supervisionada no qual um histograma de alguma característica (ou recurso) discriminativa que classifique objetos esteja disponibilizado.

Cabe ressaltar no entanto, que o limiar calculado não é apropriado para imagens nas quais as variâncias dos níveis de cinza de objetos e fundo ou populações de pixels correspondentes sejam extremamente diferentes.

5.2 Algoritmo Combinatorial Para a Segmentação de Duas ou Mais Texturas

O processo de segmentação de duas ou mais texturas pode ser dividido em partes equivalentes, as quais se considera a segmentação de pares de texturas. Neste trabalho, utiliza-se um algoritmo combinatorial que é eficiente e fácil de ser implementado, o qual é descrito a seguir.

Todo problema que envolve a segmentação de mosaicos com duas ou mais texturas pode ser resolvido usando-se o método para a segmentação de pares de texturas da seguinte forma: para cada par de texturas é gerada uma banda de máxima separabilidade utilizando amostras das duas texturas. Aplicando-se o resultado da seleção de amostras em uma imagem composta por k texturas, obtém-se o número de

$$\binom{k}{2} = \frac{k!}{2!(k-2)!} = \frac{k(k-1)}{2} \quad (5.41)$$

bandas. Assim, para cada pixel da imagem, obtém-se um vetor atributo com o mesmo número $(k(k-1)/2)$ de posições, sendo que a posição 1 receberá o valor 1 ou 2, dependendo da classificação do pixel com relação às respectivas texturas 1 e 2 na banda 1. Na posição 2, o vetor receberá o valor 1 ou 3, dependendo da classificação do pixel com relação às texturas 1 e 2 na banda 2. E assim, sucessivamente, até a posição de número $(k(k-1)/2)$, cujo vetor atributo terá o valor $k-1$ ou k , dependendo da classificação do pixel com relação às respectivas texturas $k-1$ ou k na banda de número $(k(k-1)/2)$.

Para exemplificar, considere o mosaico com três texturas de dimensão 256x256 pixels, apresentado na figura 5.4 (a). Note em 5.4 (b), que a textura 1 forma o centro do mosaico, a textura 2 está na parte inferior e a textura 3, na parte superior do mosaico. Utilizando o algoritmo combinatorial, cada pixel da imagem original está associado a um vetor atributo de três posições cujos valores variam de 1 a 3. Os pixels são classificados como pertencendo à textura que tiver mais entradas no vetor atributo associado a eles. Na figura 5.4 é possível destacar duas situações distintas: uma em que a segmentação foi executada corretamente e outra em que a segmentação foi executada erroneamente. Primeiramente, considere o pixel P1 na posição [128;128], ou seja, P1 está localizado no centro da imagem, e, portanto, pertence à textura 1. Na figura 5.4 (d), esse pixel foi classificado como pertencendo à textura 1, em 5.4 (e) como pertencendo à textura 1, e em 5.4 (f), como pertencendo à textura 3. Assim, seu vetor atributo é da forma (1,1,3), e, portanto, na segmentação final, ele foi classificado corretamente como pertencendo à textura 1. Considere agora, um pixel P2 localizado na mancha branca pertencente à textura 2 na segmentação final do mosaico mostrada na figura 5.4 (c). Note que um pixel pertencente a essa região possui vetor atributo da forma (2,3,3), e, portanto, ele foi classificado erroneamente como pertencendo à textura 3.

A segmentação final da imagem é dada pela soma dos pixels classificados corretamente, e, conseqüentemente, o percentual de erro é definido pela porcentagem correspondente à soma dos pixels classificados erroneamente.

Em termos de agilidade de processamento, este algoritmo tem baixo custo computacional, pois os procedimentos a fim de se obter a segmentação da imagem são realizados em amostras das texturas. Por meio dessas amostras, gera-se a banda ótima e em seguida a limiarização da mesma, podendo-se descartar a banda ótima ao reiniciar os procedimentos para um novo par de texturas, isto é, não há a necessidade de armazenamento das bandas ótimas geradas na memória da máquina, o que contribui para o rápido processamento do método.

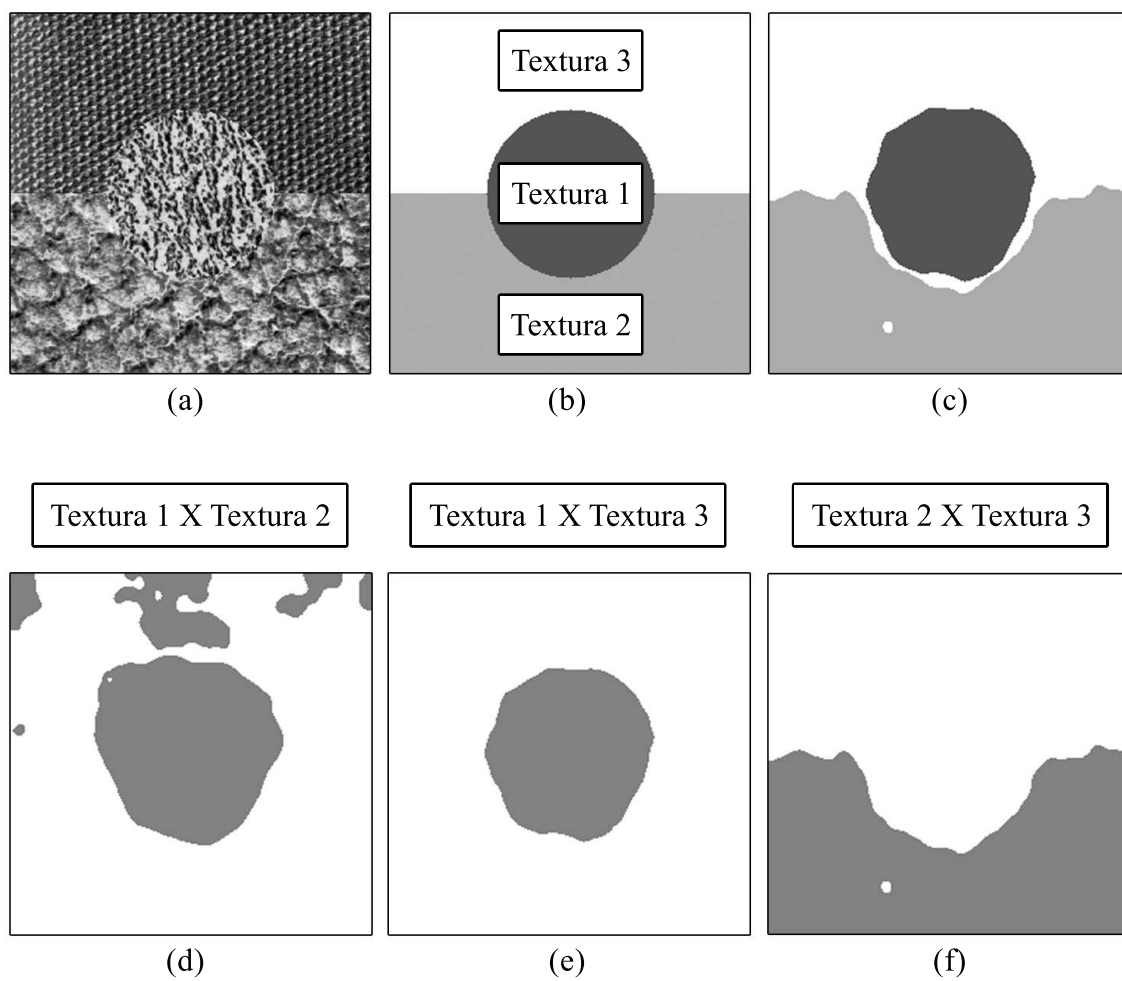


Figura 5.4: (a) Mosaico de três texturas, (b) imagem referência, (c) resultado da segmentação, (d), (e) e (f) resultado da limiarização das bandas de máxima separabilidade conforme legendas. Fonte: Adaptado de [58].

Aplicação do Método de Segmentação de Texturas

A fim de avaliar o desempenho do método de segmentação de texturas apresentado no capítulo 5 e compará-lo com outros métodos de segmentação de texturas encontrados na literatura, aplica-se o método a um conjunto de texturas constituídos por duas, cinco e dez texturas.

Para viabilizar a comparação entre os resultados obtidos pelo método construído com os resultados obtidos por outros métodos de segmentação de texturas, toma-se como referência os resultados obtidos pelo método desenvolvido por Pagamisse [58] em sua tese de doutorado, o qual serviu de base para o desenvolvimento deste trabalho, bem como os resultados obtidos por outros métodos apresentados no artigo de Randen e Husoy [63]. Nesse trabalho, encontra-se uma extensa avaliação de métodos com abordagens baseadas em filtragem, utilizando certa padronização nos procedimentos por meio da aplicação a um conjunto de texturas extraídas de MeasTex Image Texture Database [2], MIT Vision Texture Database [3] e do álbum “A Photographic Album for Artists and Designers” de Phil Brodatz [8]. Esse último álbum consiste de uma coletânea de 112 fotos de texturas naturais e manufaturadas, e tornou-se uma espécie de referência para a validação e comparação de métodos de segmentação de texturas, pois apresenta um conjunto com grande número de texturas variadas e de fácil acesso, disponíveis em [1].

6.1 Segmentação de Pares de Texturas

Os pares de texturas utilizados para avaliação do desempenho do método de segmentação de texturas apresentado anteriormente são mostrados na figura 6.1.

As texturas componentes de cada par são de tamanho 256x256 pixels, em 8 bits, foram extraídas de Brodatz [8] e estão disponíveis em [1]. A imagem 6.1 (a) é formada pelas texturas D004 e D084; a imagem 6.1 (b) é formada pelas texturas D005 e D092, e a imagem 6.1 (c) é formada pelas texturas D012 e D017.

A figura 6.1 (d) mostra a imagem referência para cada par de texturas.

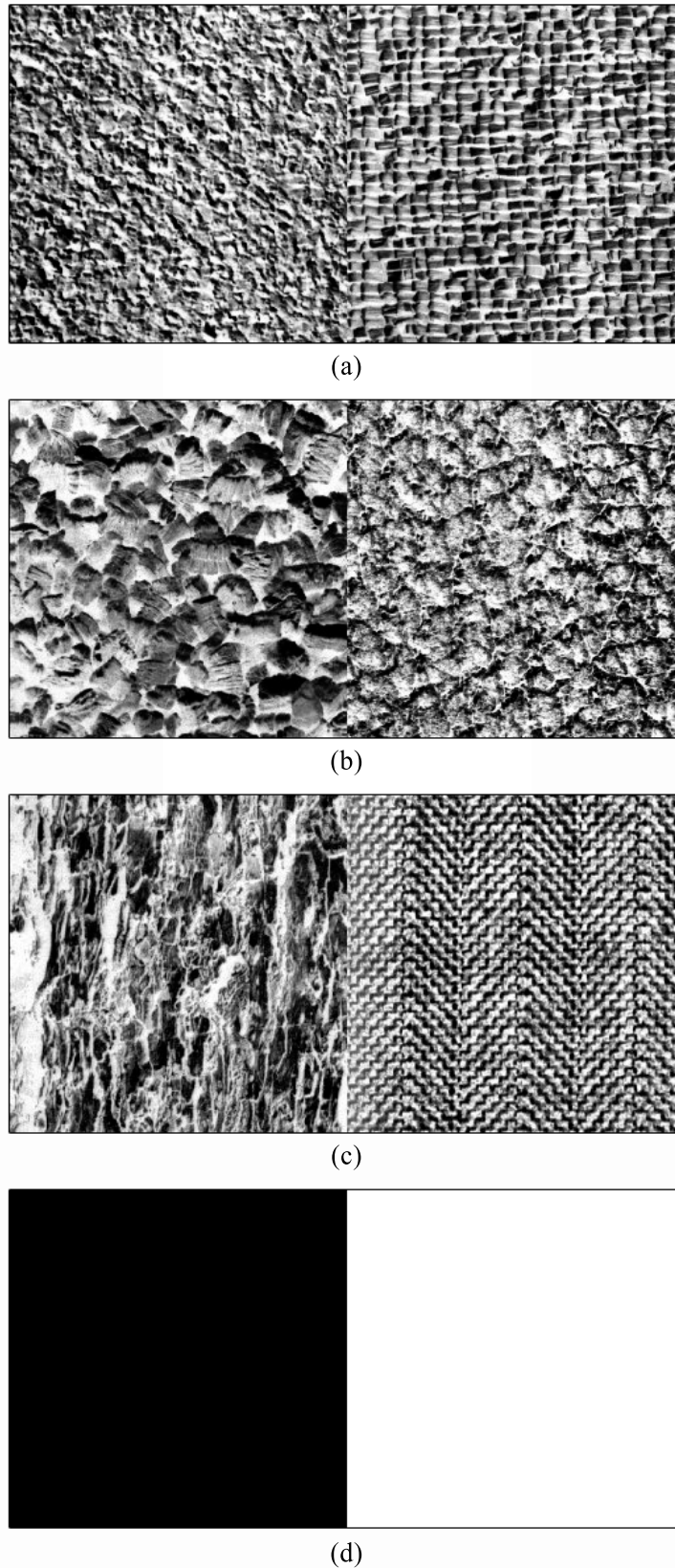


Figura 6.1: (a) Par de texturas D004D084, (b) par de texturas D005D092, (c) par de texturas D012D017 e (d) imagem referência. Fonte: [1].

Nota-se que as texturas apresentam aspectos estruturais que as diferenciam, tais como escala, orientação e a presença da repetitividade de texel gerador. Em particular, as texturas em 6.1 (a) se caracterizam principalmente pela repetitividade, enquanto que as

texturas em 6.1 (b) por diferenças na escala e as texturas em 6.1 (c) por diferenças em orientação, escala e repetitividade.

Também foram feitos testes de caráter experimental com a imagem formada pelas texturas D009 e D024 apresentada na figura 6.2, utilizando a *wavelet* starlet com o filtro da spline cúbica, no segundo nível de decomposição das *wavelets* diádica e starlet. Note que essa é uma imagem aparentemente difícil de ser segmentada devido à semelhança de aspectos estruturais de ambas as texturas que a compõe.

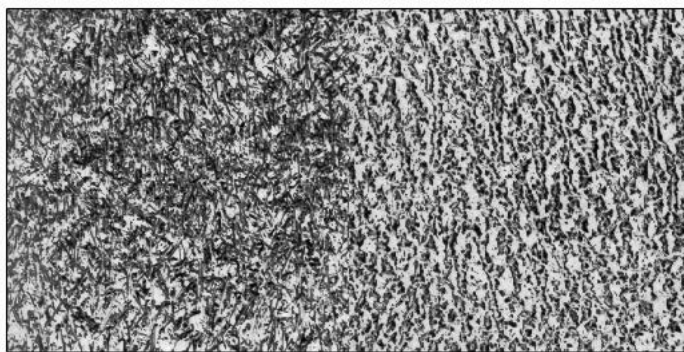


Figura 6.2: Par de texturas D009D024. Fonte: [1].

Foram utilizadas amostras representativas das texturas de tamanho 32x32 pixels, isto é, amostras que expressam da melhor maneira possível o comportamento “textural” da imagem. As mesmas foram extraídas diretamente das imagens com o uso do mouse para marcar o ponto inicial (x,y). Neste caso, $x=[x(1);x(2)]$ e $y=[y(1);y(2)]$.

As etapas utilizadas para a geração das bandas de máxima separabilidade são aquelas descritas no método apresentado anteriormente.

Inicialmente, o método consiste em definir a banda de máxima separabilidade em cada nível por meio da composição das 5 bandas resultantes das decomposições *wavelet* diádica e starlet. Portanto, para melhor avaliar o desempenho do método de segmentação de texturas proposto neste trabalho, o mesmo foi implementado e testado no *software* Matlab para a combinação das bandas 2 a 2, 3 a 3, 4 a 4, e, por fim, para a combinação das 5 bandas, utilizando os dois primeiros níveis de decomposição das *wavelets*. Em primeiro lugar, foram realizados testes para a definição do método de limiarização e dos parâmetros de filtragem aplicados no método.

6.1.1 Escolha do Método de Limiarização

Primeiramente fez-se uma análise do desempenho do método de segmentação de texturas utilizando as limiarizações obtidas por meio do método automático (por centro de classes) e do método de Otsu, no intuito de se escolher o melhor deles. Vários testes foram feitos para cada combinação das bandas e cada um dos pares de texturas. A seguir, apresenta-se os resultados de três amostras utilizadas nesta análise.

Par de Texturas D004D084									
Amostras		Erro (%)							
		Comb. 2 a 2		Comb. 3 a 3		Comb. 4 a 4		Comb. 5	
x	y	MLA	MLO	MLA	MLO	MLA	MLO	MLA	MLO
[207; 320]	[216; 199]	0.6416	0.4875	0.8194	0.6653	0.6218	0.5440	0.6111	0.5295
[79; 469]	[185; 210]	0.4478	0.3632	0.3914	0.3784	0.4211	0.3616	0.3944	0.3098
[182; 281]	[193; 192]	1.4542	0.5150	0.5493	0.4654	0.5562	0.5089	0.5936	0.4967

Tabela 6.1: Desempenho do método de segmentação de texturas utilizando o método de limiarização automático (MLA) e o método de limiarização de Otsu (MLO) para o par de texturas D004D084.

Par de Texturas D005D092									
Amostras		Erro (%)							
		Comb. 2 a 2		Comb. 3 a 3		Comb. 4 a 4		Comb. 5	
x	y	MLA	MLO	MLA	MLO	MLA	MLO	MLA	MLO
[121; 383]	[185; 79]	1.5808	1.3023	1.6182	1.2970	1.6464	1.2939	1.4366	1.2260
[92; 409]	[76; 38]	1.3199	1.3214	1.2627	1.3100	1.2917	1.2962	1.2703	1.2741
[197; 301]	[63; 73]	1.9814	1.2985	1.9676	1.3519	1.9463	1.4603	1.8951	1.3435

Tabela 6.2: Desempenho do método de segmentação de texturas utilizando o método de limiarização automático (MLA) e o método de limiarização de Otsu (MLO) para o par de texturas D005D092.

Par de Texturas D012D017									
Amostras		Erro (%)							
		Comb. 2 a 2		Comb. 3 a 3		Comb. 4 a 4		Comb. 5	
x	y	MLA	MLO	MLA	MLO	MLA	MLO	MLA	MLO
[142; 430]	[166; 59]	3.0701	1.7365	2.8427	1.7616	3.0067	2.1881	2.8435	2.0905
[74; 340]	[66; 213]	2.3293	2.0378	2.2392	1.4557	2.3445	1.5198	2.6627	1.9737
[39; 430]	[158; 201]	4.9774	1.7357	7.0412	1.6792	4.2854	1.7616	4.2877	1.7616

Tabela 6.3: Desempenho do método de segmentação de texturas utilizando o método de limiarização automático (MLA) e o método de limiarização de Otsu (MLO) para o par de texturas D012D017.

Comparando as tabelas 6.1, 6.2 e 6.3, nota-se que os valores referentes aos erros percentuais obtidos para a limiarização por meio do método de Otsu são menores que os valores obtidos para o método de limiarização automático, com diferença de apenas décimos ou centésimos, quando se trata dos pares de texturas D004D084 e D005D095. No entanto, na maioria dos casos, essa diferença passa de 1% a mais para o par de texturas D012D017, e chega a mais de 5% para uma das amostras em um dos casos para essa mesma imagem.

Assim, nota-se que o método de segmentação de texturas obteve melhor desempenho utilizando o método de limiarização de Otsu, e, portanto, o mesmo foi adotado para esta etapa do trabalho.

6.1.2 Escolha dos Parâmetros de Filtragem

Utilizando a limiarização obtida por meio do método de Otsu, o próximo passo foi analisar o desempenho do método de segmentação de texturas para determinados parâmetros dos filtros de homogeneização (h) e pós-homogeneização (s). Novamente, vários testes foram feitos com algumas amostras e combinações de parâmetros diferentes para cada par de texturas, porém, a maioria deles apresentaram resultados semelhantes. Isso pode ser observado em alguns dos testes apresentados nas tabelas 6.4, 6.5 e 6.6 a seguir.

Par de Texturas D004D084							
Amostras		Parâmetros		Erro (%)			
x	y	h	s	C. 2 a 2	C. 3 a 3	C. 4 a 4	C. 5
[207;320]	[216;199]	31	31	0.5806	0.7507	0.6020	0.5867
		35	25	0.4875	0.6653	0.5440	0.5295
		37	29	0.5516	0.7133	0.5745	0.5806
[79;469]	[185;210]	31	31	0.5219	0.6409	0.4295	0.3960
		35	25	0.3632	0.3784	0.3616	0.3098
		37	29	0.4471	0.3677	0.3929	0.3326
[182;281]	[193;192]	31	31	0.6317	0.4662	0.5295	0.5394
		35	25	0.5150	0.4654	0.5089	0.4967
		37	29	0.5898	0.4593	0.5150	0.5150

Tabela 6.4: Desempenho do método de segmentação de texturas utilizando determinados parâmetros de filtragem para o par de texturas D004D084.

Par de Texturas D005D092							
Amostras		Parâmetros		Erro (%)			
x	y	h	s	C. 2 a 2	C. 3 a 3	C. 4 a 4	C. 5
[121;383]	[185;79]	31	31	1.7426	1.8059	2.1774	2.1988
		35	25	1.7365	1.7616	2.1881	2.0905
		37	29	1.7372	1.7288	2.2507	2.1393
[92;409]	[76; 38]	31	31	2.0653	1.4267	1.5800	2.0866
		35	25	2.0378	1.4557	1.5198	1.9737
		37	29	2.0256	1.4175	1.4984	2.0493
[197;301]	[63; 73]	31	31	1.6342	1.6647	1.7220	1.7494
		35	25	1.7357	1.6792	1.7616	1.7616
		37	29	1.6327	1.6647	1.8051	1.8860

Tabela 6.5: Desempenho do método de segmentação de texturas utilizando determinados parâmetros de filtragem para o par de texturas D005D092.

Par de Texturas D012D017							
Amostras		Parâmetros		Erro (%)			
x	y	h	s	C. 2 a 2	C. 3 a 3	C. 4 a 4	C. 5
[142;430]	[166;59]	31	31	1.2505	1.2810	1.2291	1.2146
		35	25	1.3023	1.2970	1.2939	1.2260
		37	29	1.2733	1.2672	1.2253	1.2161
[74;340]	[66;213]	31	31	1.2421	1.2589	1.2093	1.2169
		35	25	1.3214	1.3100	1.2962	1.2741
		37	29	1.2497	1.2650	1.2222	1.2115
[39;430]	[158;201]	31	31	1.2596	1.2688	1.2718	1.2451
		35	25	1.2985	1.3519	1.4603	1.3435
		37	29	1.2650	1.2726	1.2749	1.2642

Tabela 6.6: Desempenho do método de segmentação de texturas utilizando determinados parâmetros de filtragem para o par de texturas D012D017.

Nota-se facilmente que a maioria dos valores referentes aos erros percentuais obtidos para cada par de parâmetros utilizados em cada um dos casos nas tabelas 6.4, 6.5 e 6.6, estão bem próximos uns dos outros. Ainda assim, pelas diferenças entre os percentuais de erro de apenas décimos ou centésimos a menos que os outros, na maioria dos casos, escolheu-se adotar os parâmetros $h=35$ e $s=25$, já que essas pequenas diferenças entre os erros percentuais certamente aumentariam se o método for aplicado a mosaicos com mais de duas texturas, o que constitui a próxima etapa do trabalho.

6.1.3 Resultados

Definidos o método de Otsu para a realização do processo de limiarização da banda de máxima separabilidade e os parâmetros $h=35$ (nível de suavização do filtro Gaussiano utilizado no processo de homogeneização) e $s=25$ (dimensão do filtro utilizado no processo de pós-homogeneização), foram feitos testes com o método de segmentação de texturas utilizando 10 amostras representativas para cada uma das combinações das bandas e cada par de texturas nos dois primeiros níveis de decomposição das *wavelets* diádica e starlet.

Para o par de texturas D004D084, obteve-se:

Par de Texturas D004D084 - Combinação das Bandas 2 a 2					
Amostras		Erro (%)	BMS	Erro (%)	BMS
x	y	Nível 1		Nível 2	
[207; 320]	[216; 199]	0.4875	B3/B5	1.8303	B3/B5
[79; 469]	[185; 210]	0.3632	B3/B5	1.9585	B3/B4
[182; 281]	[193; 192]	0.5150	B3/B5	2.7962	B3/B5
[125; 446]	[118; 174]	0.6683	B3/B4	2.0737	B3/B5
[148; 327]	[57; 92]	0.3510	B3/B5	2.3048	B3/B5
[104; 428]	[125; 165]	0.4341	B3/B5	1.7929	B3/B5
[190; 436]	[221; 122]	0.5081	B3/B5	1.8723	B3/B5
[213; 316]	[177; 77]	1.0429	B1/B3	1.6510	B3/B5
[148; 475]	[56; 187]	0.4463	B3/B5	2.0592	B3/B4
[390; 154]	[14; 131]	0.6668	B3/B4	6.4125	B2/B3

Tabela 6.7: Desempenho do método de segmentação de texturas para o par de texturas D004D084 utilizando a combinação das bandas 2 a 2: Percentual de erro e banda de máxima separabilidade (BMS).

Par de Texturas D004D084 - Combinação das Bandas 3 a 3					
Amostras		Erro (%)	BMS	Erro (%)	BMS
x	y	Nível 1		Nível 2	
[207; 320]	[216; 199]	0.6653	B1/B3/B5	2.8061	B3/B4/B5
[79; 469]	[185; 210]	0.3784	B1/B2/B3	1.5968	B1/B2/B3
[182; 281]	[193; 192]	0.4654	B1/B2/B3	2.6634	B1/B3/B5
[125; 446]	[118; 174]	0.3700	B1/B2/B3	1.7319	B1/B3/B5
[148; 327]	[57; 92]	0.4585	B1/B3/B5	1.9600	B1/B3/B5
[104; 428]	[125; 165]	0.3777	B1/B3/B5	1.6243	B1/B3/B5
[190; 436]	[221; 122]	0.5501	B1/B3/B5	2.6512	B3/B4/B5
[213; 316]	[177; 77]	0.4951	B1/B2/B3	1.7845	B1/B3/B5
[148; 475]	[56; 187]	0.4150	B3/B4/B5	1.5709	B3/B4/B5
[390; 154]	[14; 131]	0.3616	B2/B3/B5	2.8893	B2/B3/B5

Tabela 6.8: Desempenho do método de segmentação de texturas para o par de texturas D004D084 utilizando a combinação das bandas 3 a 3: Percentual de erro e banda de máxima separabilidade (BMS).

Par de Texturas D004D084 - Combinação das Bandas 4 a 4					
Amostras		Erro (%)	BMS	Erro (%)	BMS
x	y	Nível 1		Nível 2	
[207; 320]	[216; 199]	0.5440	B1/B2/B3/B5	2.4895	B1/B3/B4/B5
[79; 469]	[185; 210]	0.3616	B1/B2/B3/B5	1.8242	B1/B2/B3/B5
[182; 281]	[193; 192]	0.5089	B1/B2/B3/B5	4.2297	B1/B3/B4/B5
[125; 446]	[118; 174]	0.3029	B1/B2/B3/B5	2.7031	B1/B3/B4/B5
[148; 327]	[57; 92]	0.4089	B1/B2/B3/B5	1.7563	B1/B2/B3/B5
[104; 428]	[125; 165]	0.3166	B1/B2/B3/B5	1.4664	B1/B2/B3/B5
[190; 436]	[221; 122]	0.4166	B1/B2/B3/B5	2.9884	B1/B2/B3/B4
[213; 316]	[177; 77]	0.5592	B1/B2/B3/B5	1.9890	B1/B3/B4/B5
[148; 475]	[56; 187]	0.4265	B1/B2/B3/B5	1.4977	B1/B3/B4/B5
[390; 154]	[14; 131]	0.3349	B1/B2/B3/B5	2.9160	B1/B2/B3/B5

Tabela 6.9: Desempenho do método de segmentação de texturas para o par de texturas D004D084 utilizando a combinação das bandas 4 a 4: Percentual de erro e banda de máxima separabilidade (BMS).

Par de Texturas D004D084 - Combinação das 5 Bandas				
Amostras		Erro (%)	Erro (%)	BMS
x	y	Nível 1	Nível 2	
[207; 320]	[216; 199]	0.5295	2.3041	B1/B2/B3/B4/B5
[79; 469]	[185; 210]	0.3098	1.8288	B1/B2/B3/B4/B5
[182; 281]	[193; 192]	0.4967	4.4327	B1/B2/B3/B4/B5
[125; 446]	[118; 174]	0.2586	2.7435	B1/B2/B3/B4/B5
[148; 327]	[57; 92]	0.4059	1.8036	B1/B2/B3/B4/B5
[104; 428]	[125; 165]	0.3014	1.5503	B1/B2/B3/B4/B5
[190; 436]	[221; 122]	0.4074	2.4521	B1/B2/B3/B4/B5
[213; 316]	[177; 77]	0.5394	2.1584	B1/B2/B3/B4/B5
[148; 475]	[56; 187]	0.4242	1.5396	B1/B2/B3/B4/B5
[390; 154]	[14; 131]	0.2991	2.8847	B1/B2/B3/B4/B5

Tabela 6.10: Desempenho do método de segmentação de texturas para o par de texturas D004D084 utilizando a combinação das 5 bandas: Percentual de erro e banda de máxima separabilidade (BMS).

A figura 6.3 mostra as imagens das etapas finais do melhor resultado obtido pelo método aplicado ao par de texturas D004D084.

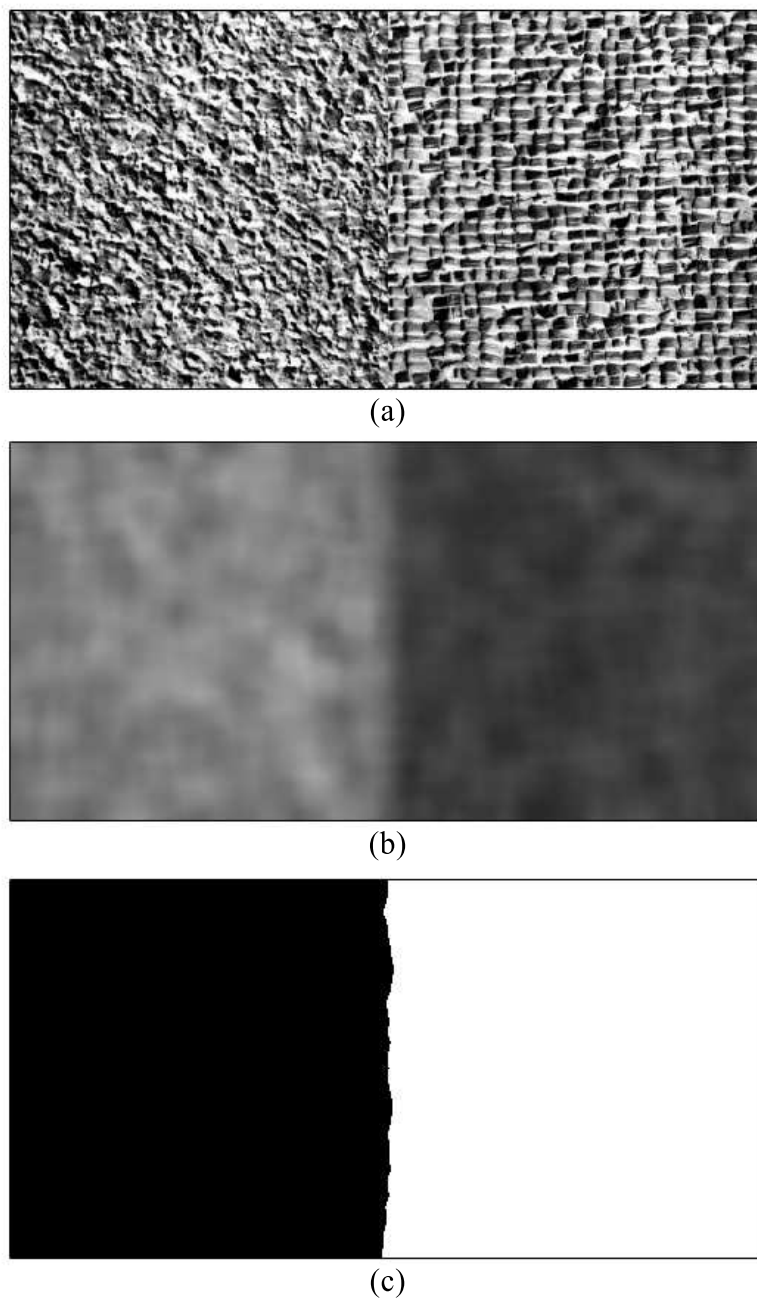


Figura 6.3: Etapas finais do melhor resultado obtido pelo método de segmentação de texturas aplicado ao par de texturas D004D084 apresentado em (a) correspondente ao nível 1, por meio da combinação das bandas B1, B2, B3, B4 e B5: (b) Banda de máxima separabilidade e (c) limiarização da banda de máxima separabilidade.

Aplicando o método ao par de texturas D005D092, obteve-se:

Par de Texturas D005D092 - Combinação das Bandas 2 a 2					
Amostras		Erro (%)	BMS	Erro (%)	BMS
x	y	Nível 1		Nível 2	
[121; 383]	[185; 79]	1.3023	B4/B5	13.7108	B4/B5
[92; 409]	[76; 38]	1.3214	B4/B5	20.9053	B2/B5
[197; 301]	[63; 73]	1.2985	B4/B5	13.5506	B4/B5
[122; 331]	[186; 133]	1.2909	B4/B5	13.7543	B4/B5
[28; 304]	[64; 196]	1.3031	B4/B5	16.3589	B4/B5
[43; 346]	[41; 79]	1.4885	B4/B5	16.7168	B4/B5
[113; 390]	[38; 113]	1.2863	B4/B5	14.0060	B4/B5
[123; 388]	[118; 121]	1.3222	B4/B5	17.9459	B1/B5
[167; 364]	[24; 123]	1.2886	B4/B5	13.7100	B4/B5
[19; 480]	[24; 102]	1.8982	B1/B2	14.5859	B3/B5

Tabela 6.11: Desempenho do método de segmentação de texturas para o par de texturas D005D092 utilizando a combinação das bandas 2 a 2: Percentual de erro e banda de máxima separabilidade (BMS).

Par de Texturas D005D092 - Combinação das Bandas 3 a 3					
Amostras		Erro (%)	BMS	Erro (%)	BMS
x	y	Nível 1		Nível 2	
[121; 383]	[185; 79]	1.2970	B3/B4/B5	15.2931	B1/B4/B5
[92; 409]	[76; 38]	1.3100	B3/B4/B5	18.8026	B2/B4/B5
[197; 301]	[63; 73]	1.3519	B3/B4/B5	11.3312	B3/B4/B5
[122; 331]	[186; 133]	1.2703	B3/B4/B5	16.0515	B2/B4/B5
[28; 304]	[64; 196]	1.3939	B1/B4/B5	12.3772	B2/B4/B5
[43; 346]	[41; 79]	1.4076	B3/B4/B5	18.3105	B1/B4/B5
[113; 390]	[38; 113]	1.4259	B1/B4/B5	15.1726	B1/B4/B5
[123; 388]	[118; 121]	1.3298	B2/B4/B5	16.6252	B1/B4/B5
[167; 364]	[24; 123]	1.3138	B3/B4/B5	13.9511	B1/B2/B5
[19; 480]	[24; 102]	1.6975	B1/B2/B3	14.9330	B1/B3/B5

Tabela 6.12: Desempenho do método de segmentação de texturas para o par de texturas D005D092 utilizando a combinação das bandas 3 a 3: Percentual de erro e banda de máxima separabilidade (BMS).

Par de Texturas D005D092 - Combinação das Bandas 4 a 4					
Amostras		Erro (%)	BMS	Erro (%)	BMS
x	y	Nível 1		Nível 2	
[121; 383]	[185; 79]	1.2939	B2/B3/B4/B5	16.9899	B1/B3/B4/B5
[92; 409]	[76; 38]	1.2962	B2/B3/B4/B5	19.7838	B1/B2/B4/B5
[197; 301]	[63; 73]	1.4603	B2/B3/B4/B5	12.5542	B2/B3/B4/B5
[122; 331]	[186; 133]	1.3481	B1/B2/B4/B5	15.9348	B1/B2/B4/B5
[28; 304]	[64; 196]	1.6449	B1/B2/B3/B4	12.2978	B1/B3/B4/B5
[43; 346]	[41; 79]	1.6113	B1/B3/B4/B5	17.0395	B1/B2/B4/B5
[113; 390]	[38; 113]	1.4420	B1/B3/B4/B5	12.2864	B1/B3/B4/B5
[123; 388]	[118; 121]	1.3313	B2/B3/B4/B5	15.0742	B2/B3/B4/B5
[167; 364]	[24; 123]	1.3329	B1/B3/B4/B5	15.1436	B1/B2/B3/B5
[19; 480]	[24; 102]	1.5442	B1/B2/B3/B5	16.1552	B1/B2/B4/B5

Tabela 6.13: Desempenho do método de segmentação de texturas para o par de texturas D005D092 utilizando a combinação das bandas 4 a 4: Percentual de erro e banda de máxima separabilidade (BMS).

Par de Texturas D005D092 - Combinação das 5 Bandas				
Amostras		Erro (%)	Erro (%)	BMS
x	y	Nível 1	Nível 2	
[121; 383]	[185; 79]	1.2260	16.7198	B1/B2/B3/B4/B5
[92; 409]	[76; 38]	1.2741	18.8309	B1/B2/B3/B4/B5
[197; 301]	[63; 73]	1.3435	12.5153	B1/B2/B3/B4/B5
[122; 331]	[186; 133]	1.2550	16.1278	B1/B2/B3/B4/B5
[28; 304]	[64; 196]	1.3046	12.3276	B1/B2/B3/B4/B5
[43; 346]	[41; 79]	1.4755	16.5924	B1/B2/B3/B4/B5
[113; 390]	[38; 113]	1.3588	12.7670	B1/B2/B3/B4/B5
[123; 388]	[118; 121]	1.2566	15.2573	B1/B2/B3/B4/B5
[167; 364]	[24; 123]	1.3268	16.1560	B1/B2/B3/B4/B5
[19; 480]	[24; 102]	1.4542	15.2603	B1/B2/B3/B4/B5

Tabela 6.14: Desempenho do método de segmentação de texturas para o par de texturas D005D092 utilizando a combinação das 5 bandas: Percentual de erro e banda de máxima separabilidade (BMS).

As imagens das etapas finais do melhor resultado obtido pelo método aplicado ao par de texturas D005D092 são mostrados na figura 6.4.

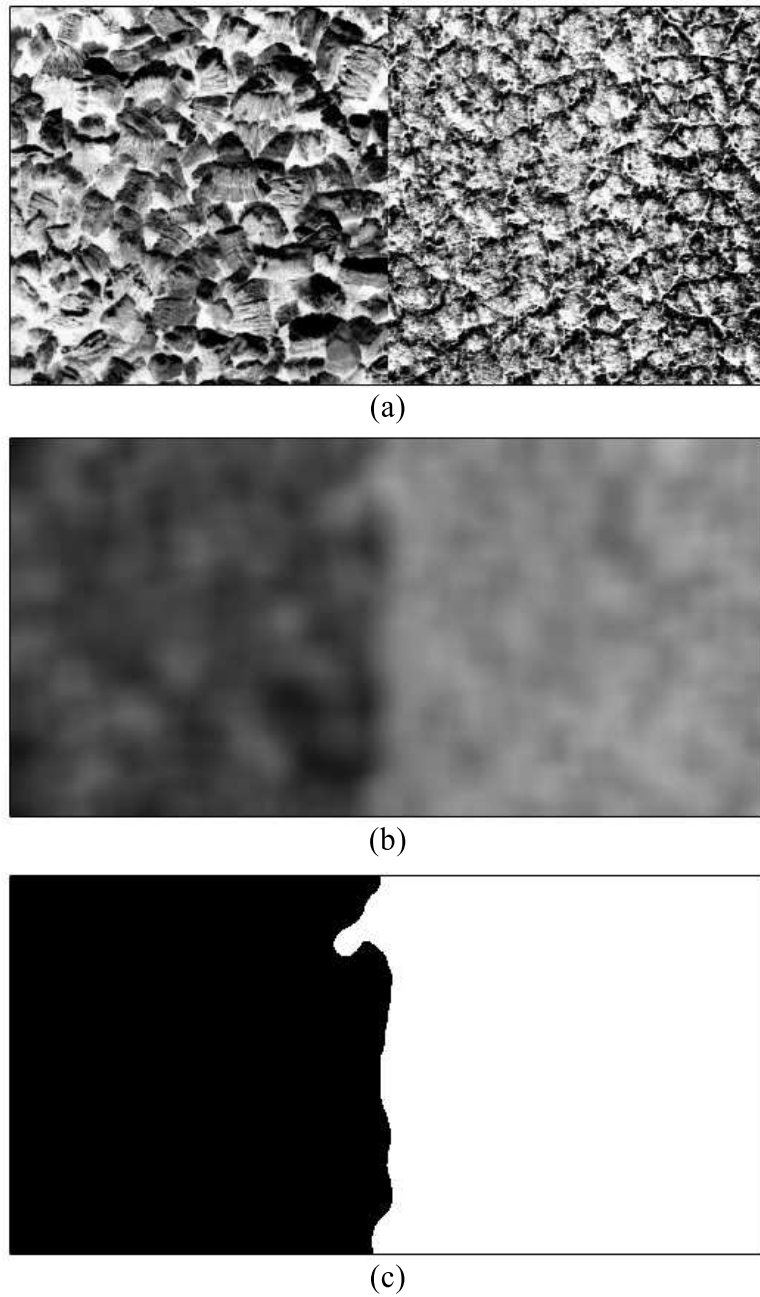


Figura 6.4: Etapas finais do melhor resultado obtido pelo método de segmentação de texturas aplicado ao par de texturas D005D092 apresentado em (a) correspondente ao nível 1, por meio da combinação das bandas B1, B2, B3, B4 e B5: (b) Banda de máxima separabilidade e (c) limiarização da banda de máxima separabilidade.

Para o par de texturas D012D017, obteve-se os seguintes resultados:

Par de Texturas D012D017 - Combinação das Bandas 2 a 2					
Amostras		Erro (%)	BMS	Erro (%)	BMS
x	y	Nível 1		Nível 2	
[142; 430]	[166; 59]	1.7365	B2/B3	2.7618	B2/B5
[74; 340]	[66; 213]	2.0378	B1/B2	1.4740	B1/B5
[39; 430]	[158; 201]	1.7357	B2/B3	19.4786	B4/B5
[43; 432]	[132; 182]	1.9356	B2/B3	17.7734	B4/B5
[156; 340]	[112; 113]	1.6861	B2/B3	3.6926	B3/B5
[72; 363]	[64; 114]	2.0340	B1/B2	1.1070	B1/B5
[39; 366]	[99; 80]	2.1828	B2/B5	2.8336	B2/B5
[165; 432]	[167; 104]	2.0897	B2/B3	2.3888	B2/B4
[154; 343]	[63; 81]	1.8227	B2/B3	1.4503	B4/B5
[72; 430]	[63; 105]	1.9341	B1/B2	1.0216	B1/B5

Tabela 6.15: Desempenho do método de segmentação de texturas para o par de texturas D012D017 utilizando a combinação das bandas 2 a 2: Percentual de erro e banda de máxima separabilidade (BMS).

Par de Texturas D012D017 - Combinação das Bandas 3 a 3					
Amostras		Erro (%)	BMS	Erro (%)	BMS
x	y	Nível 1		Nível 2	
[142; 430]	[166; 59]	1.7616	B2/B3/B5	2.2636	B1/B2/B5
[74; 340]	[66; 213]	1.4557	B1/B2/B3	1.0620	B3/B4/B5
[39; 430]	[158; 201]	1.6792	B2/B3/B5	1.0124	B3/B4/B5
[43; 432]	[132; 182]	1.2581	B1/B3/B4	0.6554	B3/B4/B5
[156; 340]	[112; 113]	2.0355	B1/B3/B4	1.1574	B3/B4/B5
[72; 363]	[64; 114]	2.5055	B1/B2/B4	0.9949	B3/B4/B5
[39; 366]	[99; 80]	1.8555	B2/B3/B5	1.6747	B2/B4/B5
[165; 432]	[167; 104]	1.5160	B1/B2/B3	1.2794	B2/B4/B5
[154; 343]	[63; 81]	4.5448	B1/B3/B4	1.0300	B3/B4/B5
[72; 430]	[63; 105]	2.4246	B1/B2/B4	0.7408	B3/B4/B5

Tabela 6.16: Desempenho do método de segmentação de texturas para o par de texturas D012D017 utilizando a combinação das bandas 3 a 3: Percentual de erro e banda de máxima separabilidade (BMS).

Par de Texturas D012D017 - Combinação das Bandas 4 a 4					
Amostras		Erro (%)	BMS	Erro (%)	BMS
x	y	Nível 1		Nível 2	
[142; 430]	[166; 59]	2.1881	B2/B3/B4/B5	1.8990	B2/B3/B4/B5
[74; 340]	[66; 213]	1.5198	B1/B2/B3/B4	1.1551	B2/B3/B4/B5
[39; 430]	[158; 201]	1.7616	B2/B3/B4/B5	0.7561	B2/B3/B4/B5
[43; 432]	[132; 182]	1.4481	B1/B2/B3/B4	0.7790	B2/B3/B4/B5
[156; 340]	[112; 113]	2.0012	B1/B2/B3/B4	1.6266	B2/B3/B4/B5
[72; 363]	[64; 114]	2.0500	B1/B2/B3/B4	1.1169	B2/B3/B4/B5
[39; 366]	[99; 80]	2.2835	B2/B3/B4/B5	1.6495	B2/B3/B4/B5
[165; 432]	[167; 104]	1.6342	B1/B2/B3/B4	1.2650	B2/B3/B4/B5
[154; 343]	[63; 81]	2.2827	B2/B3/B4/B5	1.0185	B2/B3/B4/B5
[72; 430]	[63; 105]	1.9958	B1/B2/B3/B4	0.9377	B2/B3/B4/B5

Tabela 6.17: Desempenho do método de segmentação de texturas para o par de texturas D012D017 utilizando a combinação das bandas 4 a 4: Percentual de erro e banda de máxima separabilidade (BMS).

Par de Texturas D012D017 - Combinação das 5 Bandas				
Amostras		Erro (%)	Erro (%)	BMS
x	y	Nível 1	Nível 2	
[142; 430]	[166; 59]	2.0905	1.8211	B1/B2/B3/B4/B5
[74; 340]	[66; 213]	1.9737	1.2161	B1/B2/B3/B4/B5
[39; 430]	[158; 201]	1.7616	0.7454	B1/B2/B3/B4/B5
[43; 432]	[132; 182]	1.6823	0.7248	B1/B2/B3/B4/B5
[156; 340]	[112; 113]	1.9814	1.7647	B1/B2/B3/B4/B5
[72; 363]	[64; 114]	2.0309	1.0284	B1/B2/B3/B4/B5
[39; 366]	[99; 80]	2.0554	1.6571	B1/B2/B3/B4/B5
[165; 432]	[167; 104]	1.7548	1.4336	B1/B2/B3/B4/B5
[154; 343]	[63; 81]	1.7433	0.9605	B1/B2/B3/B4/B5
[72; 430]	[63; 105]	2.2064	0.9773	B1/B2/B3/B4/B5

Tabela 6.18: Desempenho do método de segmentação de texturas para o par de texturas D012D017 utilizando a combinação das 5 bandas: Percentual de erro e banda de máxima separabilidade (BMS).

A seguir são apresentadas as imagens das etapas finais do melhor resultado obtido pelo método aplicado ao par de texturas D012D017.

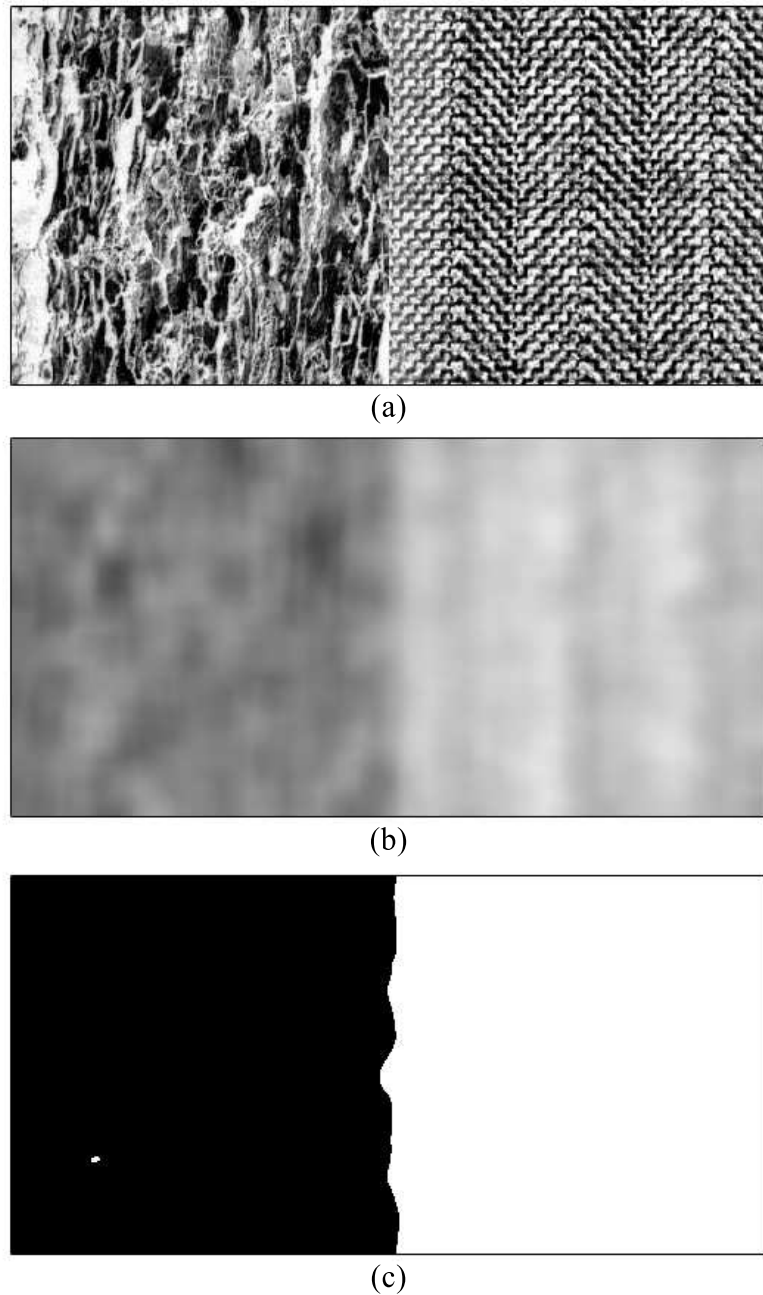


Figura 6.5: Etapas finais do melhor resultado obtido pelo método de segmentação de texturas aplicado ao par de texturas D012D017 apresentado em (a) correspondente ao nível 2, por meio da combinação das bandas B3, B4 e B5: (b) Banda de máxima separabilidade e (c) limiarização da banda de máxima separabilidade.

A tabela 6.19 a seguir, mostra os melhores resultados obtidos pelo método de segmentação de texturas aqui apresentado, para cada um dos pares de texturas utilizados, juntamente com os resultados apresentados por outros métodos de segmentação de texturas para as mesmas imagens, os quais foram extraídos de Randen e Husoy [63].

Método	Erro (%)			
	D004D084	D005D092	D012D017	Média
Filtros de Law	24.8	8.6	3.3	12.2
Filtros Anel/Wedge	3.0	18.4	4.5	8.6
Banco de Filtros Diádicos de Gabor	3.6	11.3	2.0	5.6
Gabor arbitrário	6.5	15.6	1.2	3.7
DCT	6.4	2.5	2.2	3.2
Wavelet Frame	4.4	4.7	0.4	4.5
QMF	6.7	6.0	0.8	3.3
Co-ocorrência	1.9	3.3	4.8	5.4
AR	11.3	3.0	1.9	7.8
Gabor full rate	6.5	15.6	1.2	4.8
Daubechies 4 full rate	5.7	8.2	0.6	3.8
Daubechies 6 full rate	4.7	6.1	0.6	3.6
Daubechies 8 full rate	4.9	4.7	1.3	3.6
Daubechies 10 full rate	4.4	5.1	1.2	5.7
F 16 b, full rate	8.1	8.2	0.8	5.6
F_2_1_smpl, full rate	7.2	7.4	2.3	4.9
F_2_1_09, full rate	6.7	6.0	2.1	9.1
Mahalanobis-Singh	1.3	1.4	24.6	4.5
Fisher, closed form	1.4	7.4	4.6	2.2
Fisher, gradient	1.9	1.6	3.0	9.7
Dunn	2.8	1.0	25.4	4.1
Eigenfilter	4.0	4.7	3.7	15.8
Opt. Repr. Filter Gabor	5.5	36.2	5.8	12.5
JMS	0.7	28.6	8.3	2.6
JU	0.7	5.1	2.1	2.6
JF	0.7	5.1	2.1	2.6
Optimal Gabor filter (best)	5.3	10.8	3.3	6.5
Prediction error filter	0.9	31.7	4.6	12.4
BackProp. NN mask size=11	32.1	43.6	30.0	35.2
BackProp. NN mask size=21	30.8	48.6	28.8	36.1
4,6,10 filter opt. Gabor filter bank (melhor)	3.8	12.8	3.8	6.8
Wavelet Diádica 2 Direções	0.8	2.6	2.4	1.9
Wavelet Diádica 4 Direções	0.6	1.1	1.1	0.9
Wavelets Diádica 4 Direções mais Starlet	0.3	1.2	0.6	0.7

Tabela 6.19: Erro percentual obtido por diversos métodos de segmentação de texturas aplicados aos pares de texturas D004D084, D005D92 e D012D017. Fontes: [58] e [63].

O método de segmentação também foi aplicado ao par de texturas D009D024. Foram feitos testes de caráter experimental utilizando a *wavelet* starlet com o filtro da spline cúbica no segundo nível de decomposição das *wavelets* diádica e starlet. Seguem os resultados obtidos para uma das amostras:

Par de Texturas D009D024					
Amostras	Comb.	Erro (%) Nível 1	BMS	Erro (%) Nível 2	BMS
x=[203;347]	2 a 2	24.5483	B4/B5	5.0194	B4/B5
	3 a 3	24.6956	B2/B4/B5	4.7562	B1/B3/B5
y=[218;159]	4 a 4	19.7998	B1/B2/B4/B5	4.6623	B1/B3/B4/B5
	5	18.6508	B1/B2/B3/B4/B5	3.5301	B1/B2/B3/B4/B5

Tabela 6.20: Desempenho do método de segmentação de texturas para o par de texturas D009D024: Percentual de erro e banda de máxima separabilidade (BMS).

A figura 6.6 mostra as imagens das etapas finais do melhor resultado obtido pelo método aplicado ao par de texturas D009D024.

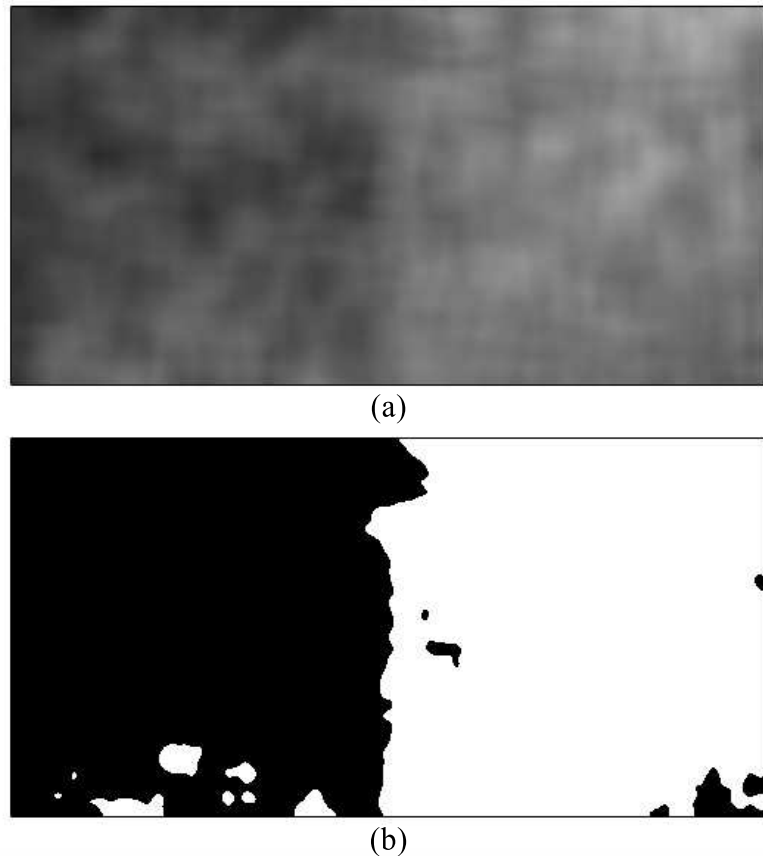


Figura 6.6: Etapas finais do melhor resultado obtido pelo método de segmentação de texturas aplicado ao par de texturas D009D024 correspondente ao nível 2, por meio da combinação das bandas B1, B2, B3, B4 e B5: (a) Banda de máxima separabilidade e (b) limiarização da banda de máxima separabilidade.

6.2 Segmentação de Mosaicos com Cinco Texturas

O desempenho do método de segmentação de texturas aqui desenvolvido também foi verificado por meio da sua aplicação a mosaicos com cinco texturas.

A figura 6.7 mostra os mosaicos com cinco texturas utilizados no trabalho, juntamente com a imagem referência para cada um deles.

Cada mosaico com cinco texturas é de tamanho 256x256 pixels e as texturas desses mosaicos não são oriundas exclusivamente de Brodatz [8] (disponíveis em [1]), mas também de MeasTex Image Texture Database [2] e de MIT Vision Texture Database [3]. Segue a composição de cada um dos mosaicos:

- Figura 6.7 (a) Nat-5c: D077, D084, D055, D053 e D024 [1].
- Figura 6.7 (b) Nat-5v: Fabric.000, Fabric.017, Flowers.002, Leaves.006 e Leaves.013 [2], [3].
- Figura 6.7 (c) Nat-5v2: Fabric.009, Fabric.016, Fabric.019, Flowers.005 e Food.005 [2], [3].
- Figura 6.7 (d) Nat-5v3: Fabric.007, Fabric.009, Leaves.003, Misc.002 e Sand.000 [2], [3].
- Figura 6.7 (e) Nat-5m: Asphalt.000, Concrete.001, Grass.002, Misc.002 e Rock.005 [2], [3].

Como na aplicação a pares de texturas, foram utilizadas amostras representativas de cada textura de tamanho 32x32 pixels. As mesmas foram extraídas diretamente das imagens com o uso do mouse para marcar o ponto inicial (x,y). Neste caso,

$$x = [x(1); x(2); x(3); x(4); x(5)] \quad \text{e} \quad y = [y(1); y(2); y(3); y(4); y(5)].$$

As etapas utilizadas para a geração das bandas de máxima separabilidade são aquelas descritas no método apresentado no capítulo 5.

Tendo em vista os melhores resultados obtidos na segmentação de pares de texturas, nesta nova etapa do trabalho, os testes foram realizados no *software* Matlab utilizando apenas a combinação das 5 bandas resultantes da decomposição das *wavelets* diádica e starlet nos dois primeiros níveis de resolução. Também foram utilizados os parâmetros de filtragem do processo de homogeneização $h=35$ e pós-homogeneização $s=25$ e o método de limiarização automático, pois não foi possível implementar o método de limiarização de Otsu no programa geral que segmenta duas ou mais texturas. A seguir são apresentados os resultados obtidos para 10 amostras representativas de cada um dos mosaicos com cinco texturas.

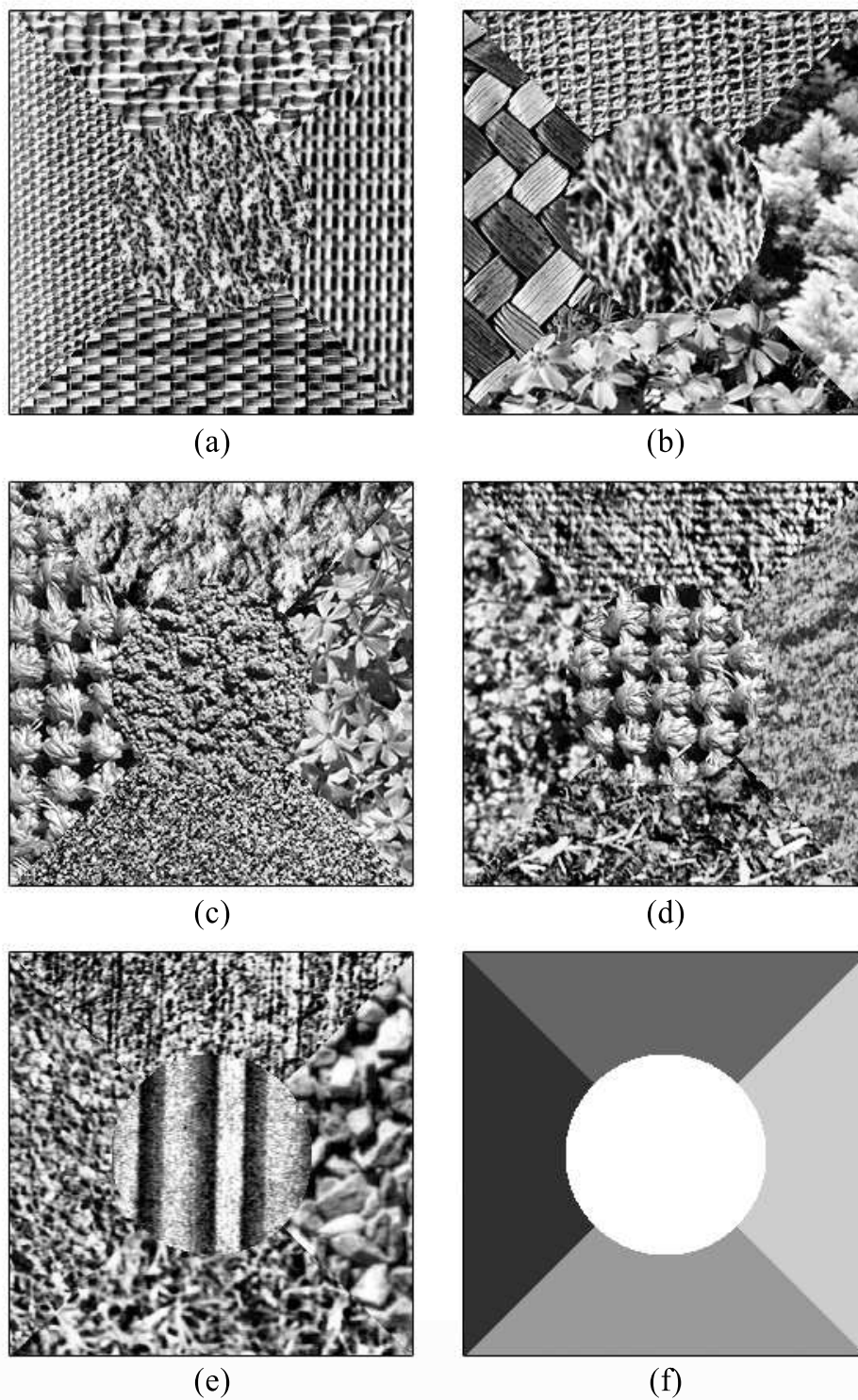


Figura 6.7: (a) Mosaico de texturas Nat-5c, (b) mosaico de texturas Nat-5v, (c) mosaico de texturas Nat-5v2, (d) mosaico de texturas Nat-5v3, (e) mosaico de texturas Nat-5m e (f) imagem referência. Fontes: [1], [2] e [3].

6.2.1 Resultados

Para o mosaico de texturas Nat-5c, obteve-se:

Mosaico com 5 Texturas Nat-5c			
Amostras		Erro (%)	
x	y	Nível 1	Nível 2
[11; 144; 167; 212; 115]	[170; 29; 217; 83; 122]	5.9540	13.5895
[4; 59; 118; 201; 120]	[153; 20; 209; 95; 105]	5.2032	15.2893
[10; 99; 114; 209; 101]	[136; 8; 211; 157; 135]	5.0751	13.9343
[10; 99; 70; 218; 151]	[136; 8; 198; 136; 120]	4.9530	11.8927
[10; 99; 113; 214; 99]	[136; 8; 220; 130; 133]	4.6585	11.5906
[10; 99; 118; 201; 120]	[136; 8; 209; 95; 105]	4.5563	16.1621
[10; 99; 58; 215; 99]	[136; 8; 209; 67; 133]	4.3762	8.5098
[10; 99; 58; 205; 99]	[136; 8; 209; 55; 133]	4.2023	8.3160
[10; 99; 63; 205; 99]	[136; 8; 200; 55; 133]	4.0863	8.7006
[4; 99; 63; 205; 99]	[130; 8; 200; 55; 133]	3.8025	8.8379

Tabela 6.21: Desempenho do método de segmentação de texturas para o mosaico com 5 texturas Nat-5c utilizando a combinação das bandas B1, B2, B3, B4 e B5.

A figura 6.8 mostra a segmentação e a imagem erro do melhor resultado obtido pelo método aplicado ao mosaico de 5 texturas Nat-5c.

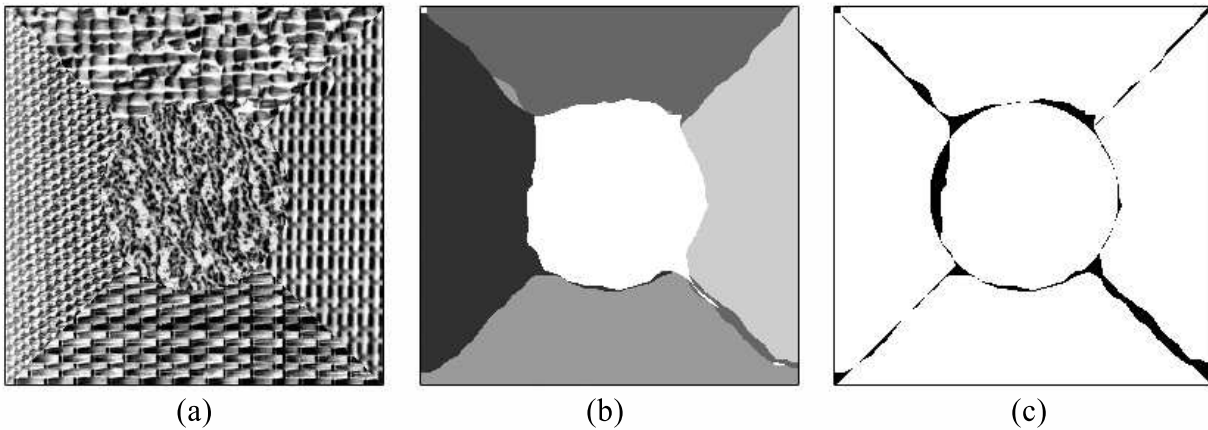


Figura 6.8: (a) Mosaico com 5 texturas Nat-5c, (b) segmentação do melhor resultado obtido pelo método aplicado ao mosaico de 5 texturas Nat-5c correspondente ao nível 1, por meio da combinação das bandas B1, B2, B3, B4 e B5; e (c) imagem erro.

Aplicando o método ao mosaico de texturas Nat-5v, obteve-se:

Mosaico com 5 Texturas Nat-5v			
Amostras		Erro (%)	
x	y	Nível 1	Nível 2
[39; 110; 120; 215; 140]	[91; 17; 210; 131; 122]	12.7029	22.6746
[30; 112; 121; 204; 125]	[99; 16; 215; 97; 104]	11.3449	16.3818
[13; 100; 115; 214; 119]	[89; 31; 207; 108; 103]	11.0260	15.0238
[13; 100; 121; 216; 100]	[89; 31; 209; 135; 123]	10.8749	21.0190
[13; 100; 115; 214; 100]	[89; 31; 207; 108; 123]	10.8490	15.6570
[13; 100; 115; 212; 100]	[89; 31; 207; 89; 123]	10.8414	16.6962
[13; 100; 209; 218; 100]	[89; 31; 125; 117; 123]	10.7590	16.4688
[13; 100; 115; 218; 100]	[89; 31; 207; 117; 123]	10.7208	15.5640
[13; 100; 115; 201; 100]	[89; 31; 207; 163; 123]	10.5438	18.8187
[13; 100; 110; 201; 100]	[89; 31; 207; 163; 123]	10.3500	20.3308

Tabela 6.22: Desempenho do método de segmentação de texturas para o mosaico com 5 texturas Nat-5v utilizando a combinação das bandas B1, B2, B3, B4 e B5.

A figura 6.9 a seguir, apresenta a segmentação e a imagem erro do melhor resultado obtido pelo método aplicado ao mosaico de 5 texturas Nat-5v.

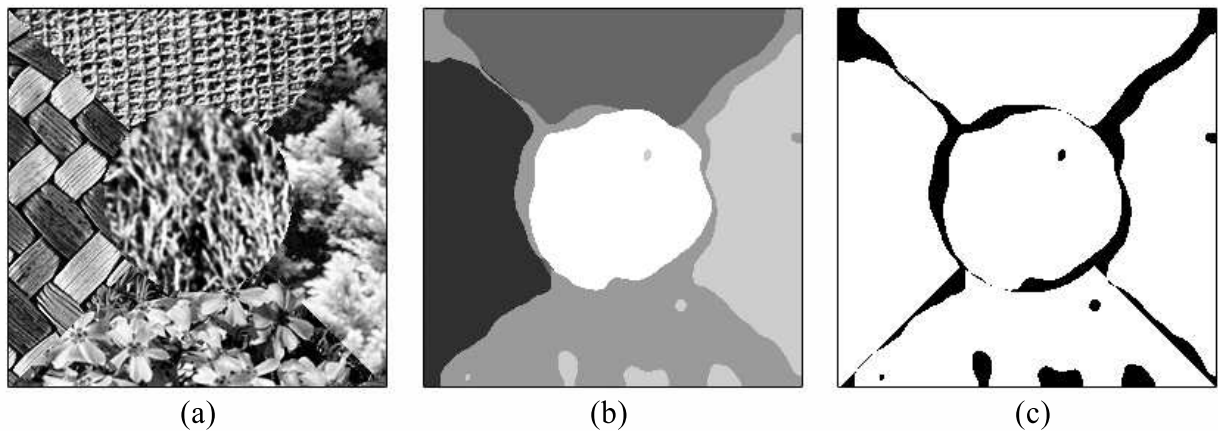


Figura 6.9: (a) Mosaico com 5 texturas Nat-5v, (b) segmentação do melhor resultado obtido pelo método aplicado ao mosaico de 5 texturas Nat-5v correspondente ao nível 1, por meio da combinação das bandas B1, B2, B3, B4 e B5; e (c) imagem erro.

Para o mosaico de texturas Nat-5v2, obteve-se:

Mosaico com 5 Texturas Nat-5v2			
Amostras		Erro (%)	
x	y	Nível 1	Nível 2
[39; 86; 121; 198; 119]	[144; 23; 215; 142; 107]	18.9316	33.9569
[18; 121; 75; 224; 101]	[76; 32; 212; 98; 123]	17.6926	24.3362
[19; 111; 109; 223; 114]	[77; 25; 221; 98; 106]	17.1982	24.8566
[19; 111; 109; 203; 114]	[77; 25; 221; 170; 106]	16.4200	26.4954
[19; 111; 109; 214; 114]	[77; 25; 221; 82; 106]	15.2222	25.4440
[47; 111; 109; 201; 114]	[155; 25; 221; 95; 106]	15.1215	23.5748
[12; 104; 109; 199; 114]	[75; 25; 221; 89; 106]	14.8315	26.9287
[21; 104; 109; 201; 114]	[126; 25; 221; 95; 106]	13.8687	22.9523
[16; 104; 109; 201; 114]	[75; 26; 221; 95; 106]	12.9898	21.2677
[19; 111; 109; 201; 114]	[77; 25; 221; 95; 106]	12.2925	21.8857

Tabela 6.23: Desempenho do método de segmentação de texturas para o mosaico com 5 texturas Nat-5v2 utilizando a combinação das bandas B1, B2, B3, B4 e B5.

A figura 6.10 mostra a segmentação e a imagem erro do melhor resultado obtido pelo método aplicado ao mosaico de 5 texturas Nat-5v2.

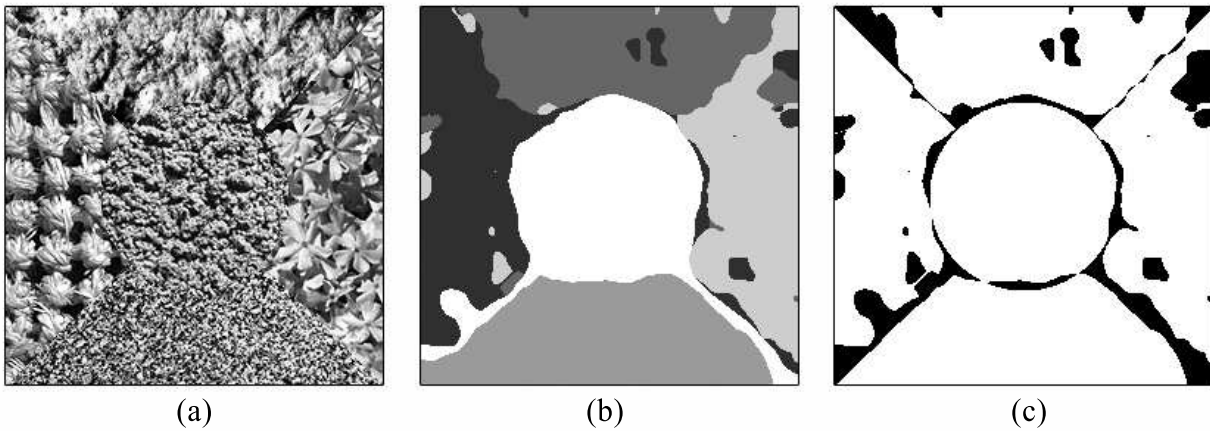


Figura 6.10: (a) Mosaico com 5 texturas Nat-5v2, (b) segmentação do melhor resultado obtido pelo método aplicado ao mosaico de 5 texturas Nat-5v2 correspondente ao nível 1, por meio da combinação das bandas B1, B2, B3, B4 e B5; e (c) imagem erro.

Para o mosaico de texturas Nat-5v3, obteve-se os seguintes resultados:

Mosaico com 5 Texturas Nat-5v3			
Amostras		Erro (%)	
x	y	Nível 1	Nível 2
[16; 96; 85; 210; 118]	[129; 19; 203; 97; 123]	19.0460	33.0261
[15; 115; 87; 219; 104]	[127; 36; 202; 110; 108]	18.7439	30.7129
[34; 82; 87; 213; 106]	[68; 17; 215; 95; 115]	17.4438	32.2754
[34; 82; 87; 205; 106]	[68; 17; 215; 111; 115]	16.7068	32.2235
[39; 119; 101; 213; 147]	[158; 31; 217; 95; 125]	16.4154	30.0781
[22; 119; 93; 213; 138]	[77; 31; 209; 95; 118]	16.1362	33.4183
[39; 119; 93; 213; 147]	[158; 31; 209; 95; 125]	15.9225	30.7343
[18; 119; 93; 213; 147]	[60; 31; 209; 95; 125]	15.8234	32.9834
[22; 119; 93; 213; 147]	[71; 31; 209; 95; 125]	15.7547	33.8028
[22; 119; 93; 213; 147]	[77; 31; 209; 95; 125]	15.6708	33.3511

Tabela 6.24: Desempenho do método de segmentação de texturas para o mosaico com 5 texturas Nat-5v3 utilizando a combinação das bandas B1, B2, B3, B4 e B5.

A segmentação e a imagem erro do melhor resultado obtido pelo método aplicado ao mosaico de 5 texturas Nat-5v3 são mostradas na figura 6.11.

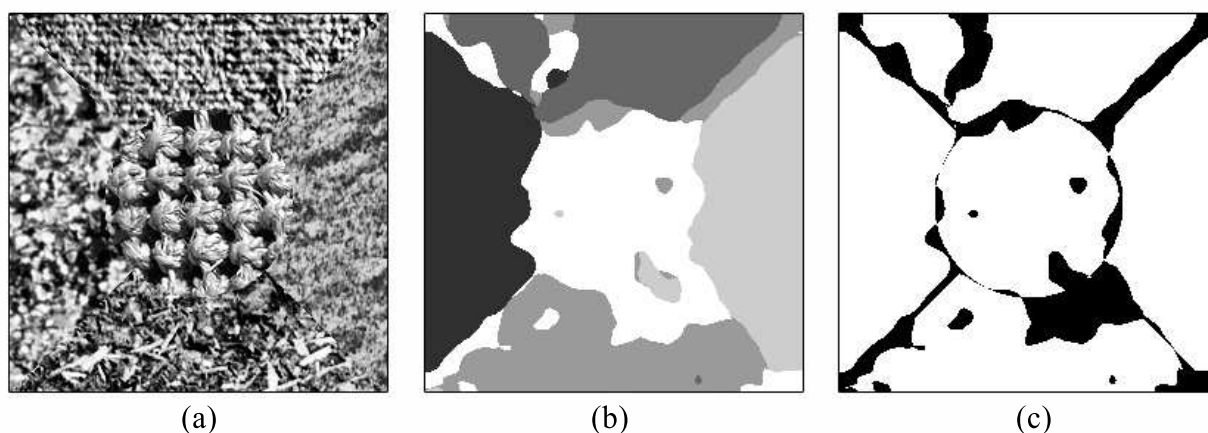


Figura 6.11: (a) Mosaico com 5 texturas Nat-5v3, (b) segmentação do melhor resultado obtido pelo método aplicado ao mosaico de 5 texturas Nat-5v3 correspondente ao nível 1, por meio da combinação das bandas B1, B2, B3, B4 e B5; e (c) imagem erro.

Aplicando o método ao mosaico de texturas Nat-5m, obteve-se:

Mosaico com 5 Texturas Nat-5m			
Amostras		Erro (%)	
x	y	Nível 1	Nível 2
[23; 73; 97; 212; 112]	[138; 16; 208; 159; 130]	9.7809	22.6532
[23; 193; 172; 205; 111]	[109; 13; 210; 160; 122]	8.0826	24.0677
[28; 84; 114; 206; 109]	[107; 29; 204; 106; 119]	7.9590	23.6832
[20; 60; 179; 198; 90]	[164; 17; 220; 125; 145]	7.6065	19.9966
[28; 84; 114; 209; 109]	[107; 29; 204; 124; 121]	7.4890	24.0356
[28; 84; 114; 201; 90]	[107; 29; 204; 122; 139]	7.1808	23.6771
[28; 84; 114; 218; 90]	[107; 29; 204; 132; 139]	7.0602	24.3652
[28; 84; 114; 205; 90]	[107; 29; 204; 136; 139]	7.0251	22.5082
[28; 84; 114; 192; 90]	[107; 29; 204; 145; 139]	6.9061	22.8760
[28; 84; 114; 190; 90]	[107; 29; 204; 140; 139]	6.7917	22.8760

Tabela 6.25: Desempenho do método de segmentação de texturas para o mosaico com 5 texturas Nat-5m utilizando a combinação das bandas B1, B2, B3, B4 e B5.

A figura 6.12 apresenta a segmentação e a imagem erro do melhor resultado obtido pelo método aplicado ao mosaico de 5 texturas Nat-5m.

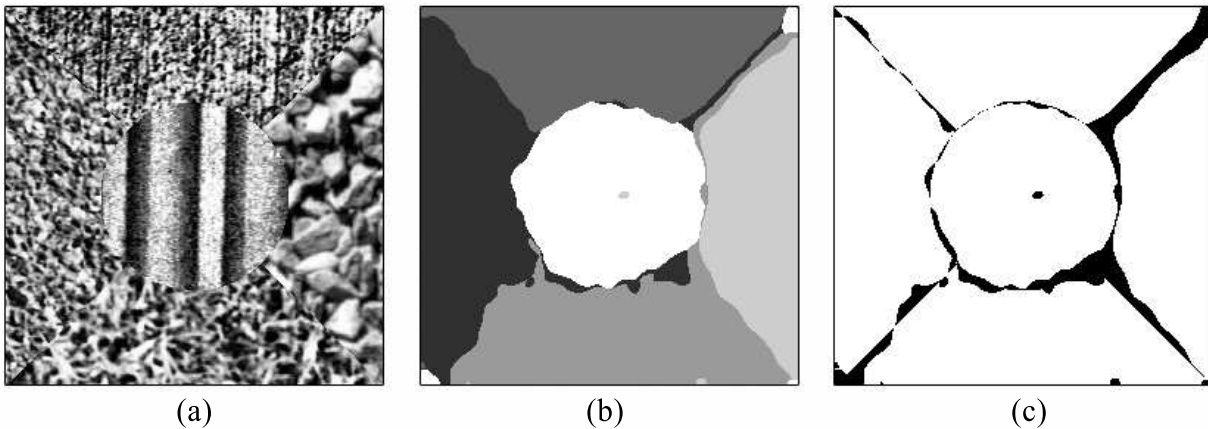


Figura 6.12: (a) Mosaico com 5 texturas Nat-5m, (b) segmentação do melhor resultado obtido pelo método aplicado ao mosaico de 5 texturas Nat-5m correspondente ao nível 1, por meio da combinação das bandas B1, B2, B3, B4 e B5; e (c) imagem erro.

Os melhores resultados obtidos pelo método utilizando as *wavelets* diádica e starlet para cada um dos mosaicos com cinco texturas são mostrados na tabela 6.26, juntamente com o desempenho apresentado por outros métodos de segmentação de texturas extraídos de Randen e Husoy [63] para as mesmas imagens.

Método	Erro (%)					
	Nat-5c	Nat-5v	Nat-5v2	Nat-5v3	Nat-5m	Média
Filtros de Law	9.7	25.7	32.4	27.3	25.7	24.1
Filtros Anel/Wedge	14.6	35.5	28.9	35.5	22.4	27.3
Banco de Filtros Diádicos de Gabor	10.7	34.8	22.6	25.2	24.6	23.6
Banco de filtros de Gabor	8.2	34.0	25.8	36.9	28.4	26.7
DCT	13.2	27.0	25.5	37.8	22.6	25.2
Co-ocorrência	9.9	27.0	26.1	51.1	35.7	30.0
AR	19.6	19.4	23.0	23.9	24.0	22.0
Daubechies 4	8.7	22.8	25.0	23.4	21.8	20.3
F 16 b	8.7	18.9	23.3	18.4	17.2	17.3
Eigenfilter	12.1	27.0	25.0	29.7	23.4	23.4
Opt. Repr. Gabor filter bk.	7.2	60.5	36.4	27.4	42.2	34.7
Prediction error filter	14.7	31.1	27.0	34.0	42.5	29.9
4-filter opt. Gabor filter bk.	24.7	54.5	34.2	33.3	34.0	36.1
6-filter opt. Gabor filter bk.	16.3	34.5	33.9	33.6	29.3	29.5
10-filter opt. Gabor filt. bk.	16.1	29.4	31.3	34.5	27.8	27.8
JMS	16.9	36.3	32.7	41.1	43.0	34.0
JU	12.7	33.0	26.5	34.3	43.4	30.0
BackProp. NN mask size=11	47.4	65.0	71.4	67.2	55.7	61.2
BackProp. NN mask size=21	72.4	68.7	69.0	74.8	70.0	71.0
Wavelet Diádica 2 Direções	11.7	17.7	22.3	27.8	18.2	19.5
Wavelet Diádica 4 Direções	6.9	9.5	15.7	17.9	10.2	12.0
Wavelets Diádica 4 Direções mais Starlet	3.8	10.3	12.3	15.7	6.8	9.8

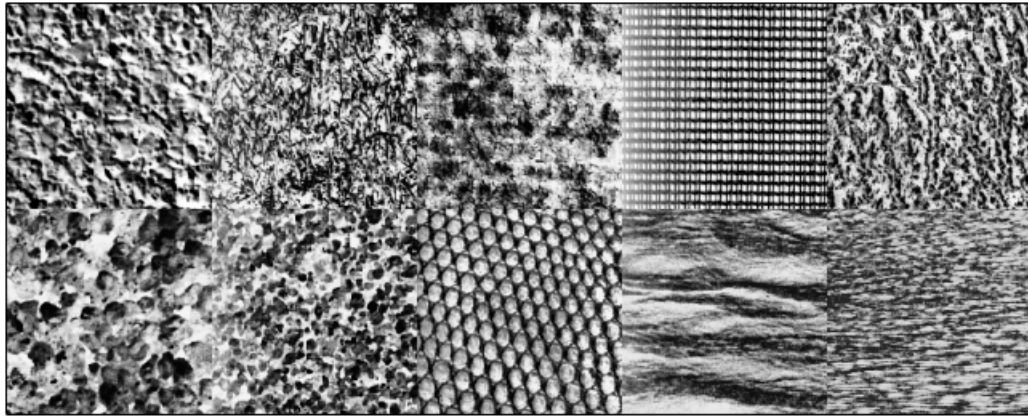
Tabela 6.26: Erro percentual obtido por diversos métodos de segmentação de texturas aplicados aos mosaicos com 5 texturas Nat-5c, Nat-5v, Nat-5v2, Nat-5v3 e Nat-5m. Fontes: [58] e [63].

6.3 Segmentação de Mosaicos com Dez Texturas

O método de segmentação de texturas foi ainda aplicado a dois mosaicos com dez texturas.

Os mosaicos com dez texturas aqui utilizados são mostrados na figura 6.13, bem como a imagem referência para cada um deles. Cada mosaico é de tamanho 256x640 pixels e as texturas que os compõem foram extraídas de Brodatz [8] (disponíveis em [1]), MeasTex Image Texture Database [2] e de MIT Vision Texture Database [3]. Esses mosaicos são compostos por:

- Figura 6.13 (a) Nat-10: D004, D009, D019, D021, D024, D028, D029, D036, D037 e D38 [1].
- Figura 6.13 (b) Nat-10v: Fabric.009, Fabric.016, Fabric.019, Flowers.005, Food.005, Leaves.003, Misc.000, Misc.002, Sand.000 e Stone.004 [2],[3].



(a)



(b)



(c)

Figura 6.13: (a) Mosaico de texturas Nat-10, (b) mosaico de texturas Nat-10v e (c) imagem referência. Fontes:[1], [2] e [3].

Foram utilizadas amostras representativas das texturas de tamanho 32x32 pixels extraídas diretamente das imagens com o uso do mouse para marcar o ponto inicial (x,y). Neste caso,

$$\begin{aligned}
 x &= [x(1); x(2); x(3); x(4); x(5); x(6); x(7); x(8); x(9); x(10)] \text{ e} \\
 y &= [y(1); y(2); y(3); y(4); y(5); y(6); y(7); y(8); y(9); y(10)].
 \end{aligned}$$

As etapas utilizadas para a geração das bandas de máxima separabilidade são aquelas descritas no método experimental apresentado no capítulo 5.

Como na aplicação aos mosaicos com cinco texturas, os testes foram realizados no *software* Matlab utilizando a combinação das 5 bandas resultantes da decomposição das *wavelets* diádica e starlet nos dois primeiros níveis de resolução, o método de limiarização automático e os parâmetros de filtragem do processo de homogeneização $h=35$ e pós-homogeneização $s=25$. Os resultados obtidos para 10 amostras representativas de cada um dos mosaicos de dez texturas são apresentados a seguir.

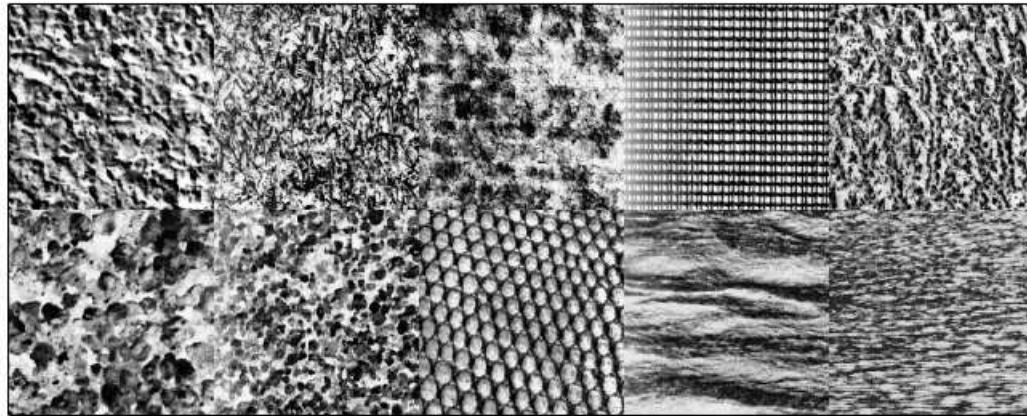
6.3.1 Resultados

Para o mosaico de texturas Nat-10, obteve-se os seguintes resultados:

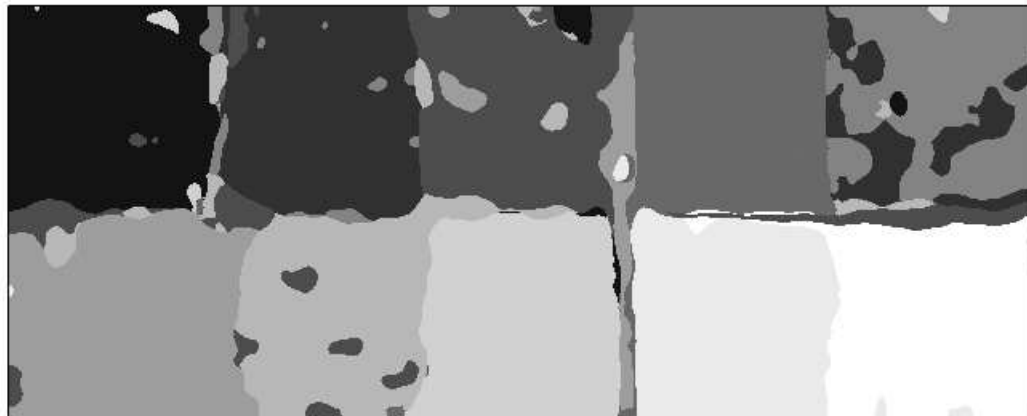
Mosaico com 10 Texturas Nat-10			
Amostras		Erro (%)	
		Nível 1	Nível 2
x	[74; 195; 336; 401; 596; 25; 189; 311; 438; 561]	17.2504	28.5803
y	[52; 72; 68; 78; 63; 145; 189; 154; 141; 186]		
x	[62; 174; 309; 398; 565; 68; 182; 308; 430; 557]	16.5918	29.8694
y	[22; 68; 27; 45; 70; 186; 166; 168; 174; 169]		
x	[44; 180; 298; 395; 599; 26; 209; 283; 402; 536]	15.9723	31.6565
y	[90; 63; 73; 16; 79; 190; 177; 144; 142; 196]		
x	[44; 180; 298; 395; 564; 88; 194; 283; 402; 536]	15.7941	35.3864
y	[90; 23; 73; 16; 42; 165; 201; 144; 142; 196]		
x	[44; 180; 298; 395; 599; 41; 209; 283; 402; 536]	15.5499	34.5880
y	[90; 63; 73; 16; 79; 141; 177; 144; 142; 196]		
x	[44; 180; 298; 395; 599; 75; 152; 283; 402; 536]	14.9780	32.2522
y	[90; 63; 73; 16; 76; 216; 210; 144; 142; 196]		
x	[44; 183; 298; 395; 561; 88; 184; 283; 402; 536]	14.9078	30.2753
y	[90; 61; 73; 16; 59; 165; 170; 144; 142; 196]		
x	[44; 162; 298; 395; 551; 88; 166; 283; 402; 536]	14.6960	28.6975
y	[90; 49; 73; 16; 59; 165; 183; 144; 142; 196]		
x	[44; 180; 298; 395; 599; 88; 152; 283; 402; 536]	14.4385	29.8523
y	[90; 63; 73; 16; 76; 165; 210; 144; 142; 196]		
x	[44; 199; 298; 395; 603; 88; 148; 283; 402; 536]	13.6011	29.5642
y	[90; 78; 73; 16; 92; 165; 205; 144; 142; 196]		

Tabela 6.27: Desempenho do método de segmentação de texturas para o mosaico com 10 texturas Nat-10 utilizando a combinação das bandas B1, B2, B3, B4 e B5.

A segmentação e a imagem erro do melhor resultado obtido pelo método aplicado ao mosaico de 10 texturas Nat-10 são apresentadas na figura 6.14 a seguir.



(a)



(b)



(c)

Figura 6.14: (a) Mosaico de texturas Nat-10, (b) segmentação do melhor resultado obtido pelo método aplicado ao mosaico de 10 texturas Nat-10 correspondente ao nível 1, por meio da combinação das bandas B1, B2, B3, B4 e B5; e (c) imagem erro.

Aplicando o método ao mosaico de texturas Nat-10v, obteve-se:

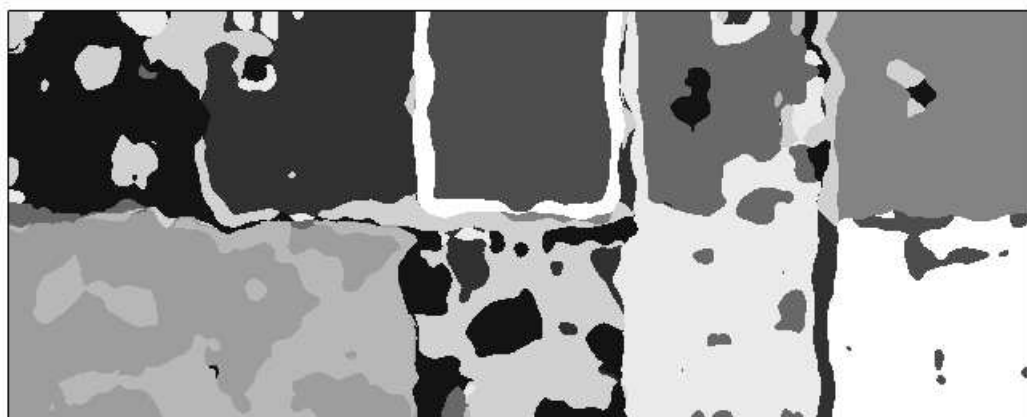
Mosaico com 10 Texturas Nat-10v			
Amostras		Erro (%)	
		Nível 1	Nível 2
x	[44; 199; 298; 395; 581; 88; 204; 283; 402; 536]	30.2930	44.9213
y	[90; 78; 73; 16; 52; 165; 168; 144; 142; 196]		
x	[44; 199; 298; 395; 581; 68; 214; 314; 402; 536]	29.7601	43.5291
y	[90; 78; 73; 16; 52; 172; 177; 216; 142; 196]		
x	[90; 203; 302; 395; 565; 79; 214; 331; 445; 592]	28.8062	44.9133
y	[74; 48; 67; 72; 66; 204; 143; 208; 159; 213]		
x	[90; 203; 302; 395; 565; 51; 206; 331; 445; 592]	28.0811	41.9702
y	[74; 48; 67; 72; 66; 215; 215; 208; 159; 213]		
x	[90; 203; 302; 395; 565; 9; 206; 331; 445; 592]	27.8412	42.4786
y	[74; 48; 67; 72; 66; 153; 215; 208; 159; 213]		
x	[90; 203; 302; 395; 565; 62; 165; 331; 445; 592]	27.2021	42.3047
y	[74; 48; 67; 72; 66; 146; 214; 208; 159; 213]		
x	[90; 203; 302; 395; 565; 64; 206; 331; 445; 592]	26.9647	42.5336
y	[74; 48; 67; 72; 66; 150; 215; 208; 159; 213]		
x	[90; 203; 302; 395; 565; 57; 206; 331; 445; 592]	26.4618	41.9965
y	[74; 48; 67; 72; 66; 197; 215; 208; 159; 213]		
x	[41; 203; 302; 395; 565; 18; 199; 331; 445; 592]	26.3184	43.7939
y	[39; 48; 67; 72; 66; 185; 192; 208; 159; 213]		
x	[65; 203; 302; 395; 565; 53; 204; 331; 445; 592]	25.8533	42.3029
y	[38; 48; 67; 72; 66; 191; 169; 208; 159; 213]		

Tabela 6.28: Desempenho do método de segmentação de texturas para o mosaico com 10 texturas Nat-10v utilizando a combinação das bandas B1, B2, B3, B4 e B5.

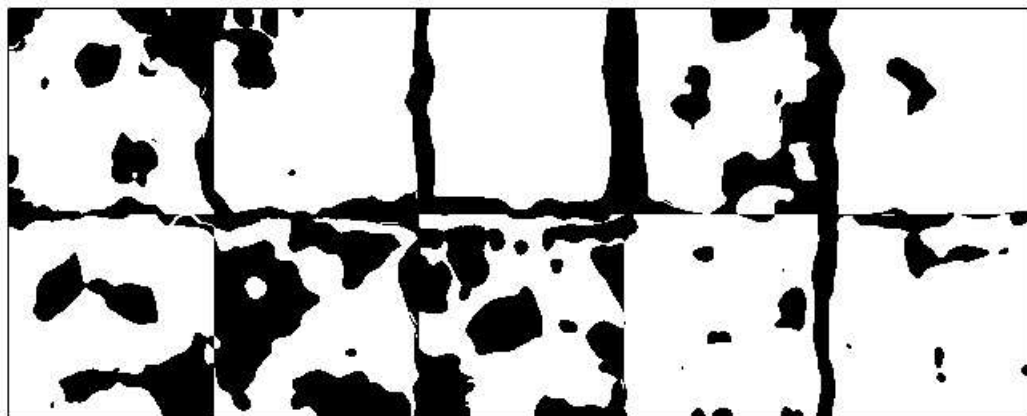
A figura 6.15 mostra a segmentação e a imagem erro do melhor resultado obtido pelo método aplicado ao mosaico de 10 texturas Nat-10v.



(a)



(b)



(c)

Figura 6.15: (a) Mosaico de texturas Nat-10v, (b) segmentação do melhor resultado obtido pelo método aplicado ao mosaico de 10 texturas Nat-10v correspondente ao nível 1, por meio da combinação das bandas B1, B2, B3, B4 e B5; e (c) imagem erro.

A tabela 6.29 mostra os melhores resultados obtidos pelo método de segmentação de texturas utilizando as *wavelets* redundantes diádica e starlet, para os dois mosaicos de dez de texturas, juntamente com o desempenho apresentado para as mesmas imagens, por outros métodos de segmentação de texturas extraídos de Randen e Husoy [63].

Método	Erro (%)		
	Nat-10	Nat-10v	Média
Filtros de Law	41.9	37.8	39.8
Filtros Anel/Wedge	44.5	48.3	46.4
Banco de Filtros Diádicos de Gabor	32.3	47.9	40.1
Banco de filtros de Gabor	39.7	54.8	47.2
DCT	38.2	33.0	36.5
Co-ocorrência	35.3	49.1	42.2
AR	56.7	28.7	45.7
Daubechies 4	40.9	30.1	35.5
F 16 b	39.8	28.5	34.1
Eigenfilter	37.1	33.3	35.2
Opt. Repr. Gabor filter bk.	41.9	67.5	54.7
Prediction error filter	44.6	36.7	40.6
4-filter opt. Gabor filter bk.	52.8	51.4	52.1
6-filter opt. Gabor filter bk.	50.3	45.4	47.8
10-filter opt. Gabor filt. bk.	39.9	37.3	38.6
JMS	59.7	49.9	54.8
JU	35.9	30.5	33.2
BackProp. NN mask size=11	69.3	70.2	69.7
BackProp. NN mask size=21	76.5	84.3	160.8
Wavelet Diádica 2 Direções	41.5	43.4	42.3
Wavelet Diádica 4 Direções	17.7	27.1	22.4
Wavelets Diádica 4 Direções mais Starlet	13.6	25.8	19.7

Tabela 6.29: Erro percentual obtido por diversos métodos de segmentação de texturas aplicados aos mosaicos com 10 texturas Nat-10 e Nat-10v. Fontes: [58] e [63].

6.4 Discussão dos Resultados

Aqui, apresenta-se uma análise dos resultados obtidos pelo método de segmentação de texturas por meio dos dois primeiros níveis de decomposição das *wavelets* diádica e starlet para os pares, os mosaicos com cinco e os mosaicos com dez texturas.

Nota-se que, aplicado aos pares de texturas D004D084 e D005D092, o método apresentou melhor desempenho com a utilização do nível 1, por meio da combinação das bandas B1, B2, B3, B4 e B5, obtendo aproximadamente 0.3% e 1.2% de erro, respectivamente.

No entanto, o menor percentual de erro foi apresentado por meio da aplicação do método de segmentação ao par de texturas D012D017, utilizando o nível 2. O valor obtido foi de aproximadamente 0.6%, por meio da banda de máxima separabilidade resultante da combinação das bandas B3, B4 e B5.

Portanto, os valores referentes aos menores erros percentuais obtidos pelo método estão próximos e abaixo de 1.3% para os três pares de texturas, o que representa um limite de erro muito sutil e aceitável, já que na maioria das vezes, o percentual de erro obtido na segmentação é proveniente da região situada na borda entre as texturas. Nessa

região existe uma área de “confusão”, isto é, uma área em que a intensidade da energia resultante se encontra entre as intensidades das energias das duas texturas. Isso pode ser verificado nas imagens que aparecem nas figuras 6.3 (a), 6.4 (a) e 6.5 (a). Apenas para efeito de comparação, sabendo que uma única coluna em um par de texturas contém 256 pixels, isto é, representa 0.19% do total de pixels, então, cinco colunas mal classificadas, na borda entre as duas texturas, irão representar aproximadamente 1% de erro.

Além disso, comparando esses resultados obtidos pelo método aplicado a cada um dos pares de texturas com os resultados obtidos por outros métodos de segmentação de texturas testados com as mesmas imagens, apresentados na tabela 6.19, nota-se que o método de segmentação de texturas utilizando as *wavelets* redundantes diádica e starlet apresentou o melhor resultado quando aplicado à imagem D004D084, e resultados muito próximos aos melhores quando aplicado aos pares de texturas D005D092 e D012D017.

Para os mosaicos com cinco texturas, observa-se que o método de segmentação de texturas apresentou melhor desempenho com a utilização do primeiro nível de decomposição das *wavelets* diádica e starlet, por meio da combinação das bandas B1, B2, B3, B4 e B5. Os menores erros obtidos foram de aproximadamente 3.8% para o mosaico Nat-5c, 10.3% para o Nat-5v, 12.3% para o Nat-5v2, 15.7% para o Nat-5v3 e 6.8% para o Nat-5m, como pode ser visto na tabela 6.26.

Comparando o desempenho dos métodos de segmentação por meio dos resultados apresentados na tabela 6.26, nota-se que o método de segmentação de texturas aqui desenvolvido, utilizando a combinação das *wavelets* diádica com quatro direções e starlet, apresentou o melhor desempenho para os mosaicos Nat-5c, Nat-5v2, Nat-5v3 e Nat-5m. Em particular, quando comparado com o método utilizando apenas a *wavelet* diádica com quatro direções desenvolvido por Pagamisse [58], com exceção do mosaico Nat-5v, os demais mosaicos obtiveram erro percentual menor. A diferença entre os erros percentuais chega a 3.4% a menos para os mosaicos Nat-5v2 e Nat-5m.

Observando os resultados obtidos para os mosaicos com dez texturas, vê-se que o método de segmentação também apresentou melhor desempenho com a utilização do nível 1 de decomposição das *wavelets* diádica e starlet, por meio da combinação das bandas B1, B2, B3, B4 e B5. Para o mosaico Nat-10, obteve-se erro percentual de aproximadamente 13.6%. Esse resultado superou o excelente resultado obtido pelo método de Pagamisse [58] aplicado à essa imagem, cujo percentual de erro diferencia-se em larga margem dos demais métodos apresentados na tabela 6.29.

Já para o mosaico Nat-10v, o método apresentou 25.8% de erro, aproximadamente. O alto percentual de erro apresentado para o mosaico Nat-10v deve-se a natureza não homogênea e a semelhança visual observada em algumas texturas componentes desse mosaico. Apesar disso, esse valor corresponde ao melhor resultado obtido para essa imagem, quando comparado com os resultados obtidos pelos outros métodos de segmentação de texturas apresentados na tabela 6.29.

Conclusões e Trabalhos Futuros

7.1 Conclusões

A análise de texturas tem desempenhado um papel importante em várias aplicações. Dentre elas, pode-se destacar a análise de imagens médicas, a inspeção industrial, a segmentação de documentos e o sensoriamento remoto. A análise de imagens médicas, por exemplo, tem um papel fundamental na obtenção de diagnósticos mais precisos, que em muitos casos são determinados por propriedades texturais. Técnicas que utilizam a análise de textura têm sido aplicadas com sucesso na detecção de lesões em imagens mamográficas, na caracterização de lesões cervicais, entre outras. Em sensoriamento remoto, características texturais são utilizadas para identificar e classificar regiões homogêneas com diferentes tipos de terrenos. Desse modo, a análise de texturas também tem um papel importante nessa aplicação.

A enorme aplicabilidade da análise de texturas em diversas áreas, a torna tópico de grande interesse e isso é comprovado por meio da gama de trabalhos que vêm sendo publicados sobre o assunto. Mesmo que as teorias desenvolvidas não obtenham bons resultados na prática, cada novo estudo colabora para o avanço na discussão do problema. Dessa maneira, trabalhando-se com uma das principais aplicações que utilizam a análise de texturas, a saber, a segmentação de texturas, este estudo visa contribuir para a área de Processamento de Imagens.

A proposta deste trabalho foi estudar e adaptar o método de segmentação de texturas desenvolvido por Pagamisse [58] que utiliza a WT diádica com quatro direções, incluindo a WT starlet, no intuito de melhorar o seu desempenho.

As *wavelets* fornecerem uma representação completa e estável à um sinal, sem perda de informações, o que as tornam tão desejáveis para a aplicação em diversas áreas. Além das propriedades tradicionais das *wavelets*, a *wavelet* diádica possui características particulares como a redundância (invariância por translação), que resultam na preservação da localização dos pixels da imagem, e, por isso, constituem uma das ferramentas mais adequadas no reconhecimento de padrões. De fato, em sua tese de doutorado, Pagamisse [58] mostrou a eficiência do uso da *wavelet* diádica com quatro direções em um método para segmentar texturas. Dessa maneira, esperava-se que a combinação da *wavelet* diádica com outra família de *wavelets* que possui a mesma propriedade - a *wavelet* starlet - melhorasse ainda mais o desempenho desse método.

Os resultados obtidos pelo método construído por meio da aplicação a mosaicos com duas, cinco e dez texturas, comparados com os resultados de outros métodos de segmen-

tação de texturas extraídos do trabalho de Randen e Husoy [63] para as mesmas imagens, comprovam que as expectativas do trabalho foram alcançadas, e, portanto, seus objetivos, atingidos.

É interessante ressaltar que a banda resultante da decomposição *wavelet* starlet (B5) está presente nas bandas de máxima separabilidade dos melhores resultados obtidos para todas as imagens utilizadas neste trabalho, isto é, inclusive para o par de texturas D009D024, que visualmente é uma imagem difícil de ser segmentada. Isso mostra a importância do uso da *wavelet* starlet no método de segmentação de texturas aqui desenvolvido.

De maneira geral, nota-se que o método de segmentação de texturas apresentou desempenho ruim por meio da utilização do nível 2 de decomposição das *wavelets* diádica e starlet, porém, é importante se testar o método utilizando este nível. Os resultados obtidos por meio da sua aplicação ao par de texturas D012D017 e à imagem D009D024, reforçam essa ideia.

Apesar do método não ter apresentado o melhor desempenho para os pares de texturas D005D092, D012D017 e para o mosaico de texturas Nat-5v, pode-se observar que, em média, ele é superior a todos os outros métodos de segmentação de texturas das tabelas 6.19, 6.26 e 6.26. Portanto, em geral, os resultados apresentados para os três pares de texturas, os cinco mosaicos com cinco texturas e os dois mosaicos com dez texturas, mostram a eficiência e o excelente desempenho do método de segmentação de texturas que combina as respostas fornecidas pelas *wavelets* redundantes diádica com quatro direções e starlet.

7.2 Trabalhos Futuros

Existem muitas outras possibilidades de testes e implementações a serem feitas no método de segmentação de texturas aqui desenvolvido. Como sugestões para trabalhos futuros, recomenda-se, por exemplo, combinar as bandas de máxima separabilidade que obtiveram os melhores resultados em cada composição, ou ainda, agregar as bandas de máxima separabilidade dos níveis 1 e 2.

O acréscimo de outras famílias de *wavelets* ao método é outra possibilidade. Neste caso, é importante lembrar que o esforço computacional *pode* não compensar, e, além disso, o acréscimo de informações *pode* prejudicar a segmentação ao invés de melhorá-la, devido a existência da chamada “maldição da dimensionalidade”.

Pode-se também utilizar classificadores de alto nível nas bandas de máxima separabilidade geradas, o que certamente melhoraria os resultados aqui obtidos. Em algumas áreas, como Geomorfologia e Sensoriamento Remoto, a segmentação e a classificação são feitas em programas específicos, como por exemplo, o *Spring* e o *ENVI*, que utilizam métodos sofisticados de classificação disponíveis na literatura. Uma boa referência para tais métodos é Randen e Husoy [63].

Referências

- [1] Brodatz Textures. Disponível em:. <<http://www.ux.uis.no/~tranden/brodatz.html>>. Acesso em: 22 set. 2014.
- [2] MeasTex Image Texture Database and Test Suite. Disponível em:. <<http://www.texturesynthesis.com/meastex/meastex.html>>. Acesso em: 22 set. 2014.
- [3] Vision Texture. Disponível em:. <<http://vismod.media.mit.edu/vismod/imagery/VisionTexture/vistex.html>>. Acesso em: 22 set. 2014.
- [4] Grossman; J. Morlet A. Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 15(4):723–736, 1984.
- [5] Lundervold A. Ultrasonic tissue characterization. *A Pattern Recognition Approach, Technical Report, Norwegian Computing Center*, 1992.
- [6] N. Ahmed; K.R. Rao. *Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing*. Springer, Berlin, 1975.
- [7] M.S. Bazaraa; C.M. Shetty. *Nonlinear Programming*. John Wiley and Sons, New York, 1979.
- [8] P. Brodatz. A photographic album for artists and designers. *Dover Publications*, 1966.
- [9] C.S. Burrus; R.A. Gopinath; H. Guo. *Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms*. Prentice Haal, Upper Saddle River, N. J., 1998.
- [10] Chen; J. S. Daponte; M. D. Fox C. C. Fractal feature analysis and classification in medical imaging. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 8:133–142, 1989.
- [11] F. Campbel; J. Kulikowski. Orientation selectivity of the human visual system. *J. Phisiol.*, 197:437–441, 1966.
- [12] J.E. Castilho; M.O. Domingues; A. Pagamisse; O. Mendes. *Introdução ao Mundo das Wavelets*. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, São Carlos, 1 edition, 2012.
- [13] T. Chang; C.-C.J. Kuo. Texture analysis and classification with tree-structured wavelet transform. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2(4):429–441, 1993.
- [14] J. Chen; A.K. Jain. A structural approach to identify defects in textured images. *Proc. IEEE Int. Conf. On Syst., Man, Cyb, Beijing*, pages 29–32, 1988.

- [15] C.-C. Chen; C.-L. Huang. Markov random fields for texture classification. *Pattern Recognition Letters*, 14(11):907–914, 1993.
- [16] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1992.
- [17] I. Daubechies. Where do we go from here? - a personal point of view. *Proc. IEEE*, 84(4):510–513, 1996.
- [18] G.V. de Wouwer; P. Scheunders; D.D. Van Dick. Statistical texture characterization from discrete wavelet representations. *IEEE Transactions on Image Processing*, 8(4):592–598, 1999.
- [19] Rignot; R. Kwok E. Extraction of textural features in sar images: Statistical model and sensitivity. *Proceedings of International Geoscience and Remote Sensing Symposium*, pages 1979–1982, 1990.
- [20] Insana; R. F. Wagner; B. S. Garra; D. G. Brown; T. H. Shawker M. F. Analysis of ultrasound image texture via generalized rician statistics. *Optical Engineering*, 25:743–748, 1986.
- [21] F. Farrokhnia. *Multi-Channel Filtering Techniques for Texture Segmentation and Surface Quality Inspection*. PhD thesis, Michigan State University, 1990.
- [22] K. Fukunaga. Introduction to statisticol pattern recognition. *Academic*, pages 260–267, 1972.
- [23] Kingsbury; J. F. A. Magarey N. G. Wavelet transforms in image processing. *Proc. 1st European Conf. Signal Anal. Prediction*, page 23?34, June 1997.
- [24] J. Gomes; L. Velho. *Computação Gráfica: Imagem*. IMPA-SBM, Rio de Janeiro, 1994.
- [25] R.C. Gonzalez; R.E. Woods. *Processamento Digital de Imagens*. Pearson Prentice Hall, São Paulo, 3 edition, 2010.
- [26] Choi; J. Romberg; R. G. Baraniuk; N. G. Kingsbury H. Hidden markov tree modeling of complex wavelet transforms. *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing (ICASSP)*, 1:133–136, June 2000.
- [27] Harms; U. Gunzer; H. M. Aus H. Combined local color and texture analysis of stained cells. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 33:364–376, 1986.
- [28] Landeweerd; E. S. Gelsema G. H. The use of nuclear texture parameters in the automatic analysis of leukocytes. *Pattern Recognition*, 10:57–61, 1978.
- [29] Lee; W. D. Philpot J. H. A spectral-textural classifier for digital imagery. *Proceedings of International Geoscience and Remote Sensing Symposium*, pages 2005–2008, 1990.
- [30] Schistad; A. K. Jain A. H. Texture analysis in the presence of speckle noise. *Proceedings of IEEE Geoscience and Remote Sensing Symposium*, May 1992.
- [31] Siew; R. M. Hodgson; E. J. Wood L. H. Texture measures for carpet wear assessment. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, PAMI-10*, pages 92–105, 1988.

- [32] A. Haar. Zur theorie der orthogonalen funktionensysteme. *Math. Annal.*, 69:331–371, 1910.
- [33] R.M. Haralick. Statistical and structural approaches to texture. *Proceedings of the IEEE*, 67(5):786–804, 1979.
- [34] D.-C. He; L. Wang. Texture unit, texture spectrum, and texture analysis. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 28(4):509–512, 1990.
- [35] M.-H. Horng; Y.-N. Sunb; X.-Z. Lin. Texture feature coding method for classification of liver sonography. *Computerized Medical Imaging and Graphics*, 26(1):33–42, 2002.
- [36] Du L. J. Texture segmentation of sar images using localized spatial filtering. *Proceedings of International Geoscience and Remote Sensing Symposium*, pages 1983–1986, 1990.
- [37] Q. Ji; J. Engel; E. Craine. Texture analysis for classification of cervix lesions. *IEEE Trans. On Medical Imaging*, 19(11), Nov. 2000.
- [38] Marple S. L. Jr. Digital spectral analysis with aplications. *Prentice Hall, Inc.*, 1987.
- [39] B. Julesz. Visual pattern discrimination. *IRE Transactions INF. Theory*, 8:84–92, 1962.
- [40] Jain; F. Farrokhnia; D. H. Alman A. K. Texture analysis of automotive finishes. *Proceedings of SME Machine Vision Applications Conference*, pages 1–16, Nov. 1990.
- [41] Jain; S. K. Bhattacharjee A. K. Address block location on envelopes using gabor filters. *Proceedings of 11th International Conference on Pattern Recognition*, August 1992.
- [42] Jain; S. K. Bhattacharjee A. K. Text segmentation using gabor filters for automatic document processing. *Machine Vision and Applications*, 1992.
- [43] Jain; S. K. Bhattacharjee; Y. Chen A. K. On texture in document images. *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, June 1992.
- [44] Dragotti; M. Vetterli P. L. Wavelet footprints: Theory, algorithms, and applications. *IEEE Trans. Signal Processing*, 51(5):1306–1323, May 2003.
- [45] P.C. Lima. *Wavelets: Teoria, Algoritmos e Aplicações*. Departamento de Matemática - ICEX - UFMG, Belo Horizonte, 2002.
- [46] Haralick; K. Shanmugam; I. Dinstein R. M. Textural features for image classification. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, SMC-3*, pages 610–621, 1973.
- [47] Tuceryan; A. K. Jain M. Texture analysis. *The Handbook of Pattern Recognition and Computer Vision*, *World Scientific Publishing Company*, (2nd Edition):207–248, 1998.
- [48] S. Mallat. A compact multiresolution representation: The wavelet model. *Proc. IEEE Computer Society Workshop on Computer Vision*, *IEEE Computer Society Press*, pages 2–7, 1987.

- [49] S. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(7):674 – 693, Out. 1989.
- [50] S. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, 2 edition, 1999.
- [51] S.G. Mallat. Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of l_2 . *Trans. American Mathematical Society*, 315:69–87, 1989.
- [52] S. Mallat; S. Zhong. Characterization of signals from multiscale edges. *IEEE Trans. on PAMI*, 14(7), 1992.
- [53] S. Mallat; S. Zhong. Wavelet maxima representation. *Wavelets and Applications - Proceedings of Int. Conf., Marseille, France, May 1992*. Yves Meyer Ed.
- [54] N.R. Mudigonga; R.M. Rangayyan; J.E.L. Desautels. Gradient and texture analysis for classification of mamographic masses. *IEEE Trans. On Medical Imaging*, 19(10), Oct. 2000.
- [55] J.E. Odegard; R.A. Gopinath; C.S. Burrus. Optimal wavelets for signal decomposition and the existence of scale-limited signals. *Proceedings of IEEE Int. Conf. On Signal Proc., ICASSP-92*, IV:597–600, 1992.
- [56] N. Otsu. A threshold selection method from gray-level histograms. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, SMC 9(1):62–66, 1979.
- [57] Dewaele; P. Van Gool; A. Oosterlinck P. Texture inspection with self-adaptive convolution filters. *Proceedings of the 9th International Conference on Pattern Recognition*, pages 56–60, Nov. 14-17 1988.
- [58] A. Pagamisse. *Discriminação de Texturas pela Transformada Wavelet*. PhD thesis, UNICAMP, Campinas, 2003.
- [59] A. Pagamisse; L.V. Dutra. Segmentação de texturas pela transformada wavelet diádica. *I Simpósio de Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação - I SIMGEO*, 2004.
- [60] M.S. Pattichis; M.A. Pattichis; A. Bovik; K. Kyriacou. Am-fm texture segmentation in electron microscopic muscle imaging. *IEEE Trans. On Medical Imaging*, 19(12), Dec. 2000.
- [61] H. Pedrini; W.R. Schwartz. *Análise de Imagens Digitais: Princípios, Algoritmos e Aplicações*. Thomson Learning, São Paulo, 2008.
- [62] Sutton; E. L. Hall R. Texture measures for automatic classification of pulmonary disease. *IEEE Transactions on Computers*, pages 667–676, 1972.
- [63] Randen; J. H. Husoy. Filtering for supervised texture segmentation: A comparative study. *IEEE Transactions Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 21(4):291–310, 1999.
- [64] R.A. Rao; B.G. Schunck. Computing oriented texture fields. *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, 53(2):157–185, 1991.
- [65] J.A. Richards; X. Jia. *Remote Sensing Digital Image Analysis*. Springer, Berlin, 1999.

-
- [66] A. Rosenfeld; E.B. Troy. Visual texture analysis. *A Symposium on Feature Extraction and Selection in Pattern Recognition*, pages 115–124, 1970.
 - [67] J.-L. Starck; F. Murtagh. *Astronomical Image and Data Analysis*. Springer, 2 edition, 2006.
 - [68] H.S.M. Tamura; Y. Yamawaki. Textural features corresponding to visual perception. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics SMC*, 8:237–247, 1978.
 - [69] Connors; C. W. McMillin; K. Lin; R. E. Vasquez-Espinosa R. W. Identifying and locating surface defects in wood: Part of an automated lumber processing system. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, PAMI-5*, pages 573–583, 1983.
 - [70] Selesnick; R. G. Baraniuk; N. G. Kingsbury I. W. The dual-tree complex wavelet transform. *IEEE Signal Processing Magazine*, pages 125–126, November 2005.

Apêndice A

A seguir, apresenta-se os programas que foram implementados no *software* Matlab referentes ao método de segmentação de pares e mosaicos de texturas desenvolvidos neste trabalho; e a rotina Análise Canônica para ambos.

• Método de Segmentação de Pares de Texturas:

```
% Segmentação de pares de texturas utilizando as wavelets diádica e starlet
% Parâmetros:
% img=imagem com duas texturas;
% niv=nível da wavelet;
% k=suavização, e
% p é o tamanho da pós homogeneização.
```

```
function seg=segmentext5(img,niv,k,p)
```

```
[m,n]=size(img);
seg=zeros(m,n,niv);
```

```
% Seleção das amostras 32x32 pixels para as duas texturas
set(figure,'name','Par de texturas','numbertitle','off'),imshow(img)
[x,y]=ginput(2);
x=round(x);
y=round(y);
```

```
% 1ª etapa
% Decomposições wavelet diádica e starlet
[b1,b2,b3,b4,b5]=dec4(img,niv); % decomposição wavelet diádica
[bs,d]=starlet(img,niv); % decomposição wavelet starlet
```

```
B=zeros(m,n,5);
B(:, :, 1)=b2;
B(:, :, 2)=b3;
B(:, :, 3)=b4;
B(:, :, 4)=b5;
```

```

B(:,:,5)=d(:,:,niv);
clear b1 b2 b3 b4 b5 bs d;

% 2ª etapa
% Valor absoluto das bandas B's de detalhes
B=abs(B);

% 3ª etapa
% Processo de homogeneização
for i=1:5
aux=B(:,:,i);
aux=bordo(aux,k); % Acrescentando "bordo"
g=gaussiana(k);
aux=conv2(aux,g,'same'); % Aplicando o filtro gaussiano
aux=conv2(aux,g,'same');
aux=aux(k+1:m+k,k+1:n+k); % Voltando para o tamanho inicial
B(:,:,i)=aux;
B(:,:,i)=255*(B(:,:,i)/max(max(B(:,:,i)))); % Regularização
end

% Definição da banda de máxima separabilidade por nível

% 4ª etapa
% Análise Canônica
% Combinação das 5 bandas
am1=B(y(1):y(1)+31,x(1):x(1)+31,1);
am2=B(y(1):y(1)+31,x(1):x(1)+31,2);
am3=B(y(1):y(1)+31,x(1):x(1)+31,3);
am4=B(y(1):y(1)+31,x(1):x(1)+31,4);
am5=B(y(1):y(1)+31,x(1):x(1)+31,5);
am6=B(y(2):y(2)+31,x(2):x(2)+31,1);
am7=B(y(2):y(2)+31,x(2):x(2)+31,2);
am8=B(y(2):y(2)+31,x(2):x(2)+31,3);
am9=B(y(2):y(2)+31,x(2):x(2)+31,4);
am10=B(y(2):y(2)+31,x(2):x(2)+31,5);
f=fisher5(am1,am2,am3,am4,am5,am6,am7,am8,am9,am10); % Análise canônica
B(:,:,6)=f(1)*B(:,:,1)+f(2)*B(:,:,2)+f(3)*B(:,:,3)+f(4)*B(:,:,4)+f(5)*B(:,:,5);

% Regularização
B(:,:,6)=B(:,:,6)-min(min(B(:,:,6)));
B(:,:,6)=255*(B(:,:,6)/max(max(B(:,:,6))));

% 5ª etapa
% Critério de separabilidade de Fisher
f=zeros(1,6);
for i=1:6
u1=mean2(B(y(1):y(1)+31,x(1):x(1)+31,i));
u2=mean2(B(y(2):y(2)+31,x(2):x(2)+31,i));
s1=std2(B(y(1):y(1)+31,x(1):x(1)+31,i));
s2=std2(B(y(2):y(2)+31,x(2):x(2)+31,i));

```

```

f(i)=((u1-u2)^2)/(s1^2+s2^2);
end
bmax=zeros(m,n);
[v,i]=max(f)
bmax(:,i)=B(:,i);

% Pós homogeneização com tamanho p
bmax=bordo(bmax,k);
filt=ones(p,p)/p^2; % se for usar a média
bmax=conv2(bmax,filt,'same'); % Se for usar a média
bmax=bmax(k+1:m+k,k+1:n+k);

set(figure,'name','Banda de máxima separabilidade','numbertitle','off'),imshow(uint8(bmax(:,:)))

% 6ª etapa
% Limiarização da banda de máxima separabilidade para cada nível
% Método de Otsu
bmax=bmax/max(max(bmax));
level=graythresh(bmax);
if level>=0.5
lim_bmax=im2bw(bmax,level);
lim_bmax=abs(1-lim_bmax);
else
lim_bmax=im2bw(bmax,level);
end

% Cálculo do erro da banda de máxima separabilidade
ref=zeros(256,512);
ref(:,257:512)=1;
s1=sum(sum(abs(lim_bmax-ref)));
erro=100*s1/(256*512)

set(figure,'name','Limiarização da banda de máxima
separabilidade','numbertitle','off'),imshow(lim_bmax)

end

```

• Método de Segmentação de k Texturas:

```

% Segmentação de k texturas utilizando as wavelets diádica e starlet e a combinação das
5 bandas
% Parâmetros:
% img=imagem com k texturas;
% num_text=número de texturas na imagem;
% ref=imagem de referência para cálculo do erro;
% niv=nível da wavelet;
% h=tamanho da homogeneização pelo filtro Gaussiano;
% s=tamanho da suavização para eliminação de ruídos na segmentação.

```

```

function [seg,erro]=ktexturas5(img,num_text,ref,niv,h,s)

[m,n]=size(img);
f=zeros(6,1);
num_bandas=factorial(num_text)/(factorial(num_text-2)*factorial(2)); % Algoritmo com-
binatorial
lim_bmax=zeros(m,n,num_bandas);
filt=ones(s,s)/s^2;

% Seleção das amostras 32x32 pixels para as k texturas
set(figure,'name','Mosaico de texturas','numbertitle','off'),imshow(img)
[x,y]=ginput(num_text);
x=round(x);
y=round(y);

% 1ª etapa
% Decomposições wavelet diádica e starlet
[m,n]=size(img);
[b1,b2,b3,b4,b5]=dec4(img,niv); % decomposição wavelet diádica
[bs,d]=starlet(img,niv); % decomposição wavelet starlet

B=zeros(m,n,5);
B(:,:,1)=b2;
B(:,:,2)=b3;
B(:,:,3)=b4;
B(:,:,4)=b5;
B(:,:,5)=d(:,:,niv);
clear b1 b2 b3 b4 b5 bs d;

% 2ª etapa
% Valor absoluto das bandas B's de detalhes
B=abs(B);

% 3ª etapa
% Processo de homogeneização
for i=1:5
aux=B(:,:,i);
aux=bordo(aux,h); % Acrescentando "bordo"
g=gaussiana(h);
aux=conv2(aux,g,'same'); % Aplicando o filtro Gaussiano
aux=conv2(aux,g,'same');
aux=aux(h+1:m+h,h+1:n+h); % Voltando para o tamanho inicial
B(:,:,i)=aux;
B(:,:,i)=255*(B(:,:,i)/max(max(B(:,:,i)))); % Regularização
end

% Definição da banda de máxima separabilidade por nível
% Textura versus Textura
cont=0;
for t1=1:num_text-1

```

```

for t2=t1+1:num_text
coef=zeros(6,5); % usando a combinação das 5 bandas
cont=cont+1;

% 4ª etapa
% Análise Canônica
% Combinação das 5 bandas
am1=B(y(t1):y(t1)+31,x(t1):x(t1)+31,1);
am2=B(y(t1):y(t1)+31,x(t1):x(t1)+31,2);
am3=B(y(t1):y(t1)+31,x(t1):x(t1)+31,3);
am4=B(y(t1):y(t1)+31,x(t1):x(t1)+31,4);
am5=B(y(t1):y(t1)+31,x(t1):x(t1)+31,5);
am6=B(y(t2):y(t2)+31,x(t2):x(t2)+31,1);
am7=B(y(t2):y(t2)+31,x(t2):x(t2)+31,2);
am8=B(y(t2):y(t2)+31,x(t2):x(t2)+31,3);
am9=B(y(t2):y(t2)+31,x(t2):x(t2)+31,4);
am10=B(y(t2):y(t2)+31,x(t2):x(t2)+31,5);
d=fisher5(am1,am2,am3,am4,am5,am6,am7,am8,am9,am10); % Análise canônica
coef(6,1)=d(1); coef(6,2)=d(2); coef(6,3)=d(3); coef(6,4)=d(4); coef(6,5)=d(5);
B(:,6)=d(1)*B(:,1)+d(2)*B(:,2)+d(3)*B(:,3)+d(4)*B(:,4)+d(5)*B(:,5);

% Regularização
B(:,6)=B(:,6)-min(min(B(:,6)));
B(:,6)=255*(B(:,6)/max(max(B(:,6))));

% 5ª etapa
% Critério de separabilidade de Fisher
for i=1:6
u1=mean2(B(y(t1):y(t1)+31,x(t1):x(t1)+31,i));
u2=mean2(B(y(t2):y(t2)+31,x(t2):x(t2)+31,i));
s1=std2(B(y(t1):y(t1)+31,x(t1):x(t1)+31,i));
s2=std2(B(y(t2):y(t2)+31,x(t2):x(t2)+31,i));
f(i)=((u1-u2)^2)/(s1^2+s2^2);
end

[v,i]=max(f); % i é a posição do máximo
bmax=zeros(m,n);

% Aplicando os parâmetros da banda de máxima separabilidade à banda original
for j=1:5
coef(j,j)=1;
bmax(:,j)=bmax(:,j)+coef(i,j)*B(:,j);
end

% Pós-homogeneização com tamanho s
bmax=bordo(bmax,s);
bmax=conv2(bmax,filt,'same'); % Usando o filtro média
bmax=bmax(s+1:m+s,s+1:n+s);

```

```

% 6ª etapa
% Limiarização da banda de máxima separabilidade para cada nível
% Método automático
u1=mean2(bmax(y(t1):y(t1)+31,x(t1):x(t1)+31));
u2=mean2(bmax(y(t2):y(t2)+31,x(t2):x(t2)+31));
x1=abs(bmax-u1);
x2=abs(bmax-u2);
x3=x1>x2;
x1=x3==0;
x2=x3==1;
lim_bmax(:,cont)=t1*x1+t2*x2;
end
end % end da textura versus textura

% Segmentação final
x=zeros(num_bandas,1);
seg=zeros(m,n);
y=1:num_text;
for i=1:m
    for j=1:n
        x(:)=lim_bmax(i,j,:);
        h1=hist(x,y);
        [v,p]=max(h1);
        seg(i,j)=p;
    end
end

erro=seg~=ref;
erro=100*sum(sum(abs(erro)))/(m*n)
set(figure,'name','Limiarização da banda de máxima
separabilidade','numbertitle','off'),imshow(uint8(round(256/num_text)*seg))

imerro=seg==ref;
set(figure,'name','Imagem erro','numbertitle','off'),imshow(uint8(imerro))
end % end da function

```

• Rotina Análise Canônica (fisher5):

```

% Entradas: Amostras a1,a2,a3,a4,a5 = mesma amostra (textura 1) da "banda1" e "banda2"
% Amostras a6,a7,a8,a9,a10 = outra amostra (textura 2) da "banda1" e "banda2"

function y=fisher5(a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,a10)

c1=[a1(:),a2(:),a3(:),a4(:),a5(:)];
c2=[a6(:),a7(:),a8(:),a9(:),a10(:)];

% Calculando a matriz de covariância DENTRO das classes
sig1=cov(c1);
sig2=cov(c2);

```

```

sigw=(1/2)*(sig1+sig2);

% Calculando a matriz de covariância ENTRE as classes
media1=mean(c1)'; % Média das colunas da classe 1
media2=mean(c2)'; % Média das colunas da classe 2
media0=(1/2)*(media1+media2); % Média global
siga=(media1-media0)*(media1-media0)'+(media2-media0)*(media2-media0)';

% Resolvendo agora a equação no determinante |siga-lambda*sigw|=0
% Este é um problema de autovalor generalizado
% Solução: encontrar autovalores lambda e autovetores x tais que
% Ax=lambda Bx, onde A e B são matrizes simétricas, e B é positiva definida
% Aplicando a decomposição de Cholesky a B:
% Ax=B lambda x
% Ax=lambda LL^(t)x
% (L^(-1)AL^(-t))L^(t)x=lambda L^(t)x
% Cy=lambda y, onde C=L^(-1)AL^(-t) é simétrica, e y = L^(t)x
% - Problema de autovalor padrão

% Aplicando para A=siga e B=sigw
L=chol(sigw);
L=L';
Cholesky=inv(L)*siga*(inv(L))';
lambda=eig(Cholesky); % Solução do problema de autovalor padrão

% Encontrando o vetor d da condição (10.18) do livro Remote Sensing Digital
% Image Analysis de John A. Richards - pg. 298.
% [siga-lambda*sigw]*d=0

% Escalonando o sistema [siga-lambda*sigw]d=0 e obtendo as relações entre as variáveis
lambda=max(lambda); % O maior lambda corresponde ao primeiro eixo canônico
mat=siga-lambda*sigw;

for i=1:3
for j=i+1:5
for k=i+1:5
mat(k,j)=mat(i,i)*mat(k,j)-mat(i,j)*mat(k,i);
end
end

d4=-mat(5,4)/mat(4,4);
d3=-(mat(4,3)*d4+mat(5,3))/mat(3,3);
d2=-(mat(3,2)*d3+mat(4,2)*d4+mat(5,2))/mat(2,2);
d1=-(mat(2,1)*d2+mat(3,1)*d3+mat(4,1)*d4+mat(5,1))/mat(1,1);

temp1=sigw(1,1)*d1^2+sigw(2,2)*d2^2+sigw(3,3)*d3^2+sigw(4,4)*d4^2+sigw(5,5);
temp2=(sigw(2,1)+sigw(1,2))*d1*d2+(sigw(1,3)+sigw(3,1))*d1*d3+(sigw(4,1)+
(sigw(5,1)sigw(1,4))*d1*d4+sigw(1,5))*d1;
temp3=(sigw(3,2)+sigw(2,3))*d2*d3+(sigw(2,4)+sigw(4,2))*d2*d4+(sigw(5,2)+
sigw(2,5))*d2;

```

```
temp4=(sigw(4,3)+sigw(3,4))*d3*d4+(sigw(5,3)+sigw(3,5))*d3+(sigw(5,4)+  
sigw(4,5))*d4;  
temp=temp4+temp3+temp2+temp1;  
d5=sqrt(1./temp);  
d4=d4*d5;  
d3=d3*d5;  
d2=d2*d5;  
d1=d1*d5;  
  
y=[d1,d2,d3,d4,d5];  
  
end
```