

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO EM FÍSICA APLICADA



Efeitos Seculares Para Configurações Retrógradadas

Ana Vitoria de Almeida Martinheira Braga

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO

2022



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Câmpus de Rio Claro

Efeitos Seculares Para Configurações Retrógradas

Ana Vitoria de Almeida Martinheira Braga

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física, junto ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado em Física, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de Rio Claro.

Orientadora

Profa. Dra. Maria Helena Moreira Moraes

Rio Claro

2022

B813e Braga, Ana Vitoria de Almeida Martinheira
Efeitos seculares sara configurações retrógradas / Ana Vitoria de Almeida Martinheira Braga. -- Rio Claro, 2022
128 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientadora: Maria Helena Moreira Morais

1. Mecânica celeste. 2. Asteroides. 3. Perturbação (Astronomia). 4. Planetas Órbitas. 5. Órbitas. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Efeitos Seculares Para Configurações Retrógradadas

Candidato: Ana Vitoria de Almeida Martinheira Braga

Orientador: Maria Helena Moreira Moraes

Comissão Examinadora:

Profa. Dra. Maria Helena Moreira Moraes

Unesp - Campus Rio Claro

Profa. Dra. Silvia Maria Giuliatti Winter

Unesp - Campus Guaratinguetá

Prof. Dr. Nelson Callegari Júnior

Unesp - Campus Rio Claro

Conceito: Aprovada

Instituição: Universidade Estadual Paulista

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Departamento de Física

Rio Claro - SP, 05 de julho de 2022.

*Dedico este trabalho a minha mãe Rita,
ao meu falecido pai Sylvio e aos meus irmãos
Ana Clara, Antônio Carlos, Ana Rita e
Ricardo Manoel.*

Agradecimentos

Gostaria de agradecer, primeiramente a minha mãe Rita e aos meus irmãos Ana Clara, Antônio Carlos, Ana Rita e Ricardo Manuel por todo amor, suporte e apoio durante minha trajetória acadêmica.

Gostaria de agradecer também ao João Paulo e Jéssica Sayuri por todo suporte, apoio, motivação e por sempre estarem ao meu lado quando precisei.

Agradeço também à minha orientadora Dra. Maria Helena pela dedicação, paciência e por ter me aceito como orientanda para o mestrado. Aprendi imensamente com a senhora. E aos meus colegas de Mestrado em Dinâmica Celeste, que sempre me auxiliaram, obrigada! Gostaria de agradecer também ao Alan pela grande ajuda com a obtenção dos gráficos que foram essenciais para a interpretação dos meus resultados.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

"Você não pode esperar construir um mundo melhor sem melhorar os indivíduos. Para esse fim, cada um de nós deve trabalhar para o seu próprio aperfeiçoamento e, ao mesmo tempo, compartilhar uma responsabilidade geral por toda a humanidade."

Marie Curie

Resumo

As ressonâncias seculares no Sistema Solar são mecanismos importantes para explicar instabilidade ou transporte de asteroides e cometas entre diferentes regiões. Por exemplo, asteroides localizados na ressonância ν_6 tornam-se NEOs (Nears Earth Objects) por aumento da excentricidade devido a esta ressonância [8]. Os estudos sobre ressonâncias seculares encontrados na literatura foram desenvolvidos em sua maioria para órbitas prógradas.

Os asteroides experimentam ressonâncias seculares quando suas frequências de precessão são ressonantes com uma das frequências de oscilação fundamentais das órbitas dos planetas que compõem o sistema (semelhante aos osciladores harmônicos acoplados). Podemos dividir as órbitas em órbitas prógradas, isto é, $0^\circ < I < 90^\circ$ e órbitas retrógradas, $90^\circ < I < 180^\circ$.

Neste trabalho é apresentada a modelagem analítica de ressonâncias seculares para órbitas prógradas e retrógradas de planetas e satélites, dando mais enfoque na última. Esta nova abordagem analítica para expansão da função perturbadora para o caso retrógrado permitiu-nos obter as localizações das ressonâncias seculares. Mostraremos evidências sobre ressonâncias seculares para órbitas retrógradas, quando ocorrem e quando são importantes.

As simulações numéricas usando condições iniciais em torno dos valores calculados do semieixo maior confirmaram a libração dos ângulos seculares, que são previstos pelos resultados teóricos.

Palavras-chave: Ressonância secular, Órbita retrógrada, Asteroides, Dinâmica celeste, Perturbação gravitacional, Simulação de N-corpos.

Abstract

Secular resonances in the Solar System are an important mechanism to explain the instability or transport of asteroids between different regions. For example, asteroids located in the resonance ν become NEOs (Near Earth Objects) by increasing eccentricity due to this resonance. The studies on secular resonances found were mostly developed for prograde literature.

Asteroids experience secular resonances when their oscillation frequencies are resonant with one of the oscillation frequencies of the orbiting of the planets that compose the system (similar to coupled harmonic oscillators). We can divide the orbits into prograde orbits, $0^\circ < I < 90^\circ$ and retrograde orbits, $90^\circ < I < 180^\circ$.

In this work, we will show the analytical modeling of secular resonances for prograde and retrograde orbits of planets and satellites is presented, focusing on the last one. This new analysis for expansion of the perturbing function to the retrograde case, allowed us to obtain the locations of the secular resonances. We will show images about secular resonances for retrograde orbits, when they occur and when they are important.

Numerical simulations using initial conditions of the calculated semi-major axis values confirmed the libration of the secular angles, which are predicted by the theoretical results.

Keywords: Secular resonance, Retrograde orbit, Asteroid, Celestial Dynamics, Gravitational Perturbation, N-body simulation.

Lista de Figuras

1.1	Diagrama dos planetas do Sistema Solar e sua direção [20].	23
1.2	Diagrama da nuvem de Oort, Cinturão de Kuiper e do Cinturão de Asteroides em escala com o sistema planetário [22].	24
1.3	Localização das ressonâncias seculares em função da inclinação e do semi-eixo maior (ua) [24].	26
2.1	Vetores posição com relação ao corpo central m_c e com relação a um ponto inercial no espaço [16].	30
2.2	Ilustração dos parâmetros angulares [16].	32
2.3	Gráfico da frequência $A(\text{graus/ano})$ em função do semi-eixo maior.	42
2.4	Frequência $A(\text{graus/ano})$ em função do semi-eixo maior com a contribuição das perturbações gravitacionais dos 8 planetas do Sistema Solar no intervalo de 0(ua) à 5.5(ua).	42
2.5	Frequência $A(\text{graus/ano})$ em função do semi-eixo maior com a contribuição das perturbações gravitacionais dos 8 planetas do Sistema Solar no intervalo de 9(ua) à 40(ua).	43
3.1	Frequência A em função do semi-eixo maior a (ua).	55

3.2	Curva em preto: Semi-eixo: 3,059 UA, Inclinação: 180° , Excentricidade: 0,01. Curva em preto: frequência: $-g_6 + 2s_6$. Curva em vermelho: frequência: $-s_6 + 2g_6$	57
4.1	Valores da frequência b no plano I e a para órbita prógrada. As curvas possuem os valores $b = g_5$ e $b = g_6$. Os pontos pretos representam as localizações das ressonâncias seculares identificadas através de simulações numéricas.	63
4.2	Valores da frequência b em função do semi-eixo-maior a para órbita prógrada.	63
4.3	Valores da frequência b no plano I e a para órbita prógrada.	64
4.4	Semi-eixo: 2,1932 ua, Inclinação: $29,1^\circ$, Excentricidade: 0,07491 e Frequência: g_6	67
4.5	Semi-eixo: 2,1421 ua, Inclinação: $29,1^\circ$, Excentricidade: 0,005044 e Frequência: g_6	68
4.6	Semi-eixo: 2,19035 ua, Inclinação: $29,1^\circ$, Excentricidade: 0,012406 e Frequência: g_6	69
4.7	Semi-eixo: 2,303457 ua, Inclinação: $29,1^\circ$, Excentricidade: 0,04843 e Frequência: g_5	70
4.8	Semi-eixo: 2,26489 ua, Inclinação: $29,1^\circ$, Excentricidade: 0,02027 e Frequência: g_5	71
4.9	Semi-eixo: 2,26461 ua, Inclinação: $29,1^\circ$, Excentricidade: 0,02718 e Frequência: g_5	72
4.10	Semi-eixo: 2,2705 ua, Inclinação: $29,1^\circ$, Excentricidade: 0,01806 e Frequência: g_5	73
4.11	Valores dos coeficientes b para movimento prógrado no plano $e - a$	76
4.12	Valores dos coeficientes b para movimento prógrado no plano $e - a$	76

4.13	Semi-eixo: 1,65135 ua, Excentricidade: 0,0625, Inclinação: 4.5633° e Frequência: s_6	78
4.14	Semi-eixo: 1,63277 ua, Excentricidade: 0,0625, Inclinação: 4,1749° e Frequência: s_6	79
4.15	Semi-eixo: 1,591263 ua, Excentricidade: 0,0625, Inclinação: 2,9579° e Frequência: s_6	80
5.1	Distribuição de asteroides em função da inclinação [1].	82
5.2	Valores da frequência b no plano I e a para órbita retrógrada para diversas frequências. Semi-eixo varia de 1 ua à 3,5 ua.	86
5.3	Valores da frequência b no plano I e a para órbita retrógrada. Semi-eixo varia de 1.8 ua à 3 ua.	86
5.4	Valores da frequência b no plano I e a para órbita retrógrada para diversas frequências. Semi-eixo varia de 1 ua à 3,5 ua.	87
5.5	Valores da frequência b no plano I e a para órbita retrógrada para diversas frequências. Semi-eixo varia de 1 ua à 3,5 ua.	87
5.6	Coeficiente b para movimento retrógrado no plano $e - a$	89
5.7	Valores dos coeficientes b para movimento prógrado no plano $e - a$	90
5.8	Valores dos coeficientes b para movimento prógrado no plano $e-a$	91
5.9	Comparação das ressonâncias seculares do modelo analítico e dos resultados numéricos.	93
5.10	Semi-eixo: 1,83 ua, Inclinação: 170°, Excentricidade: 0,001 e Frequência: $g_5 - g_6 + g_7$	94
5.11	Semi-eixo: 1,74 ua, Inclinação: 180°, Excentricidade: 0,001 e Frequência: $g_5 - g_6 + g_7$	95

5.12	Semi-eixo: 1,70 ua, Inclinação: 180° , Excentricidade: 0,001 e Frequência: $g_5 - g_6 + g_7$	96
5.13	Semi-eixo: 1,7 ua, Inclinação: $174,8^\circ$, Excentricidade: 0,015 e Frequência: g_9	97
5.14	Semi-eixo: 1,71 ua, Inclinação: $173,6^\circ$, Excentricidade: 0,0416 e Frequên- cia: g_9	98
5.15	Comparação das ressonâncias seculares do modelo analítico e dos resultados numéricos.	99
5.16	Semi-eixo: 3,219 ua, Inclinação: $135,6^\circ$, Excentricidade: 0,043 e Frequên- cia: g_6	101
5.17	Semi-eixo: 3,07 ua, Inclinação: $135,6^\circ$, Excentricidade: 0,065 e Frequên- cia: g_6	102
5.18	Semi-eixo: 3,214 ua, Inclinação: $135,6^\circ$, Excentricidade: 0,058 e Frequên- cia: g_5	103
5.19	Semi-eixo: 3,2626 ua, Inclinação: $132,36^\circ$, Excentricidade: 0,02252 e Frequência: g_6	104
5.20	Semi-eixo: 3,0281 ua, Inclinação: $137,3^\circ$, Excentricidade: 0,02068 e Frequên- cia: g_5	105
5.21	Semi-eixo: 3,2 ua, Inclinação: $137,3^\circ$, Excentricidade: 0,076531 e Frequên- cia: g_5	106
5.22	Semi-eixo: 2,7671 ua, Inclinação: $130,36^\circ$, Excentricidade: 0,042768 e Frequência: g_5	107
5.23	Semi-eixo: 2,8869 ua, Inclinação: $130,36^\circ$, Excentricidade: 0,07389 e Frequência: g_5	108
5.24	Semi-eixo: 2,8970 ua, Inclinação: $130,36^\circ$, Excentricidade: 0,06296 e Frequência: g_6	109

5.25	Semi-eixo: 2,8589 ua, Inclinação: $123,2^\circ$, Excentricidade: 0,006846 e	
	Frequência: g_5	110

Lista de Tabelas

B.1	Constantes astronômicas [16].	123
B.2	Massa dos planetas [16].	123
B.3	Elementos orbitais a_0 (semi-eixo maior), e_0 (excentricidade), I_0 (inclinação), Ω_0 (longitude do nodo ascendente), ω_0 (argumento do pericentro), $\varpi_0 = \omega_0 + \Omega_0$ (longitude do pericentro) [16].	124
B.4	Valores das frequência seculares [19].	124
B.5	Valores das frequência seculares [19].	124

Sumário

1	Introdução	23
2	Dinâmica Secular Linear para Órbitas Prógradas	29
2.1	Função Perturbadora	29
2.1.1	Dinâmica de uma partícula teste em órbita com o Sol sofrendo perturbações de Júpiter e Saturno	38
3	Dinâmica Secular Linear para Órbitas Retrógradas	45
3.1	Órbita Retrógrada	46
3.1.1	Simulação Numérica	56
4	Dinâmica Secular Não Linear para Órbitas Prógradas	59
4.1	Equações de movimento para as variáveis h e k	59
4.1.1	Simulação Numérica	64
4.2	Equações de movimento para as variáveis p e q	73
4.2.1	Simulação Numérica	75
5	Dinâmica Secular Não Linear para Órbitas Retrógradas	81

5.1	Equações de movimento para as variáveis h e k	82
5.2	Equações de movimento para as variáveis p e q	86
5.2.1	Ângulo secular	91
5.3	Simulações numéricas	93
5.3.1	Gráfico 1	93
5.3.2	Gráfico 2	99
6	Discussão e Conclusão	111
A	Obtenção das Equações Planetárias de Lagrange nas variáveis h, k, p e q.	113
A.1	Equações Planetárias de Lagrange para as variáveis h e k	113
A.1.1	Órbita prógrada	113
A.1.2	Órbita Retrógrada	115
A.2	Equações Planetárias de Lagrange para as variáveis p e q	117
A.2.1	Órbita prógrada	117
A.2.2	Órbita retrógrada	118
B	Tabelas	123
	Referências	125

1 Introdução

O Sistema Solar foi formado a 4,5 bilhões de anos a partir de uma nuvem interestelar de gás e poeira, que após seu colapso gravitacional formou-se um disco em rotação dando origem ao Sol e aos planetas. Isto explica o fato dos planetas, do cinturão de asteroides e dos asteroides Transneptunianos orbitarem na mesma direção e de serem aproximadamente coplanares.

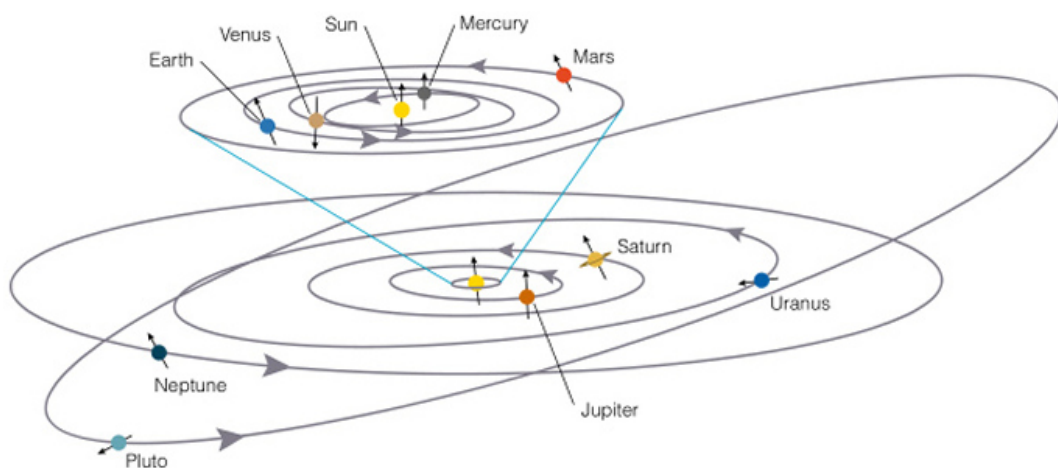


Figura 1.1: Diagrama dos planetas do Sistema Solar e sua direção [20].

No final da formação do Sistema Solar parte dos detritos foram expulsos das órbitas dos planetas e formaram uma casca esférica, através das forças de maré da Galáxia, dando origem a nuvem de Oort. Esta tem formato esférico e abriga milhões de objetos que orbitam em diversas direções, inclusive em direções opostas as órbitas dos planetas [11]. A Figura 1.2 exhibe a distribuição das famílias de asteroides e outros pequenos objetos presentes no Sistema Solar. Os asteroides do cinturão principal estão em sua grande maioria entre as órbitas dos planetas Terra e Júpiter, enquanto que os asteroides Trans-

neptunianos orbitam regiões próximas da órbita de Netuno. A nuvem de Oort começa a tomar a forma de casca esférica próxima de 5000 UA, estendendo-se a aproximadamente 100.000 UA, como mostra a figura a seguir.

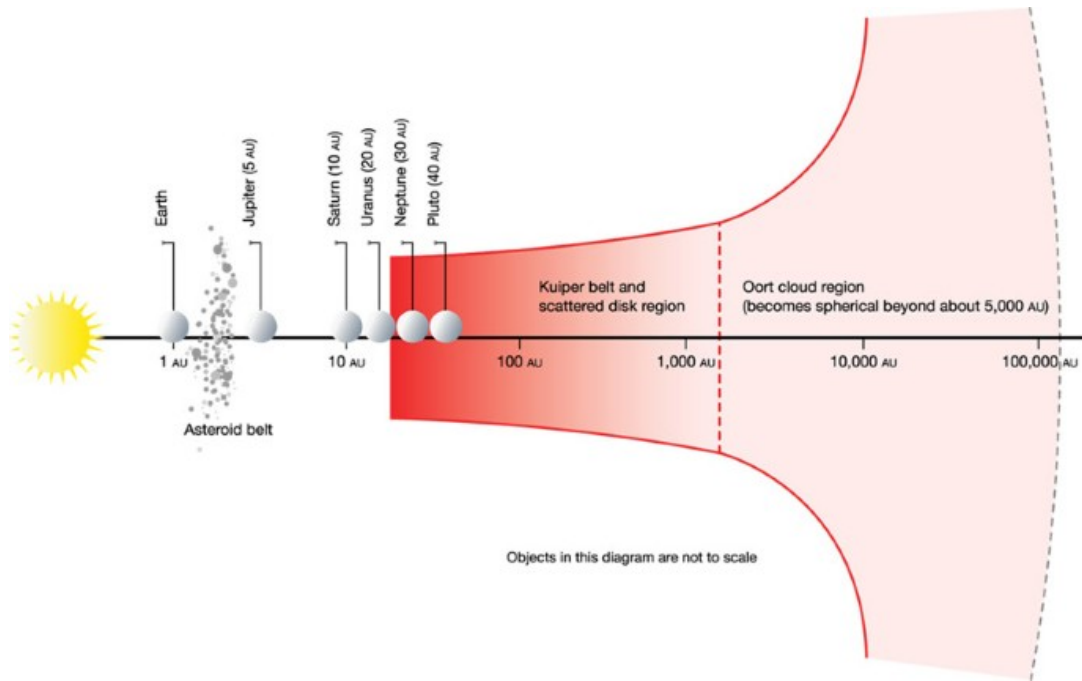


Figura 1.2: Diagrama da nuvem de Oort, Cinturão de Kuiper e do Cinturão de Asteróides em escala com o sistema planetário [22].

Os asteroides com órbitas polares e retrógradas, cujas inclinações estão próximas a $I \approx 90^\circ$ e $90^\circ < I < 180^\circ$, respectivamente, existem em sua maioria entre as órbitas dos planetas gigantes (Centauros), no cinturão de Kuiper (Transneptunianos) e na nuvem de Oort. Este último é um grande reservatório de cometas. Estudos indicam que Centauros retrógrados tiveram origem na nuvem de Oort, bem depois que os planetas se estabeleceram dinamicamente [15]. Investigar a natureza do movimento retrógrado pode ajudar a compreender como se deu a evolução do Sistema Solar. Por exemplo, entender a origem do asteroide 2015BZ509, que está em ressonância coorbital retrógrada com Júpiter, pode ser a chave para explicar a existência de asteroides extrassolares no Sistema Solar [15]. Estudos mostraram que uma ressonância retrógrada em sistemas de dois planetas é mais estável do que uma órbita prógrada equivalente, uma vez que a duração do cruzamento dos planetas é menor devido suas velocidades relativas, isto é, o tempo de duração das perturbações mútuas é menor [18]. Simulações estatísticas mostraram que pequenos corpos em ressonância coorbital retrógrada com o planeta hospedeiro têm maior probabilidade de

serem capturados [12]. Estudos realizados com o grupo de satélites que orbitam Júpiter, denominado Himalaia, mostraram que a maioria dos satélites irregulares estão em órbitas retrógradas, uma vez que o fenômeno de eveção pode excitar mais a excentricidade de satélites em movimento prógrado, tornando sua órbita mais instável [3].

Existem milhões de pequenos corpos celestes que orbitam o Sol e que estão próximos das órbitas dos planetas. Uma categoria destes objetos que são especialmente monitorados são os chamados Objetos Próximos da Terra (sigla em inglês NEO's, Near Earth Asteroids). Acredita-se que os NEO's são injetados em órbitas que se aproximam da Terra através de canais ressonantes, isto é, pela passagem de ressonâncias de movimento médio 3/1 com Júpiter e da ressonância secular ν_6 . As ressonâncias seculares podem mudar substancialmente as excentricidades e inclinações sem alterar o valor do seu semi-eixo. A ressonância secular é um mecanismo que pode explicar a instabilidade ou transporte de asteroides entre diferentes regiões [8].

O estudo da ressonância secular pode ser dividido em duas categorias. A primeira categoria é denominada ressonância secular linear, onde a comensurabilidade entre as frequências de precessão ocorre para a longitude do pericentro, g , ou para a longitude do nodo ascendente, s . A segunda categoria de ressonância secular é a não linear que ocorre quando há uma combinação de frequências de precessão.

As ressonâncias seculares são caracterizadas por períodos com evolução de longo prazo, podendo chegar a milhões de anos. Os asteroides experimentam ressonâncias seculares quando as frequências associadas a precessão dos ângulos que definem a orientação da órbita são ressonantes com uma das frequências de oscilação fundamentais das órbitas dos planetas que compõem o sistema. Comportamento semelhante aos osciladores harmônicos acoplados.

As ressonâncias seculares lineares mais importantes no Sistema Solar são $\nu_5 = g_5$, $\nu_6 = g_6$ e $\nu_{16} = s_6$; e estão relacionadas às comensurabilidades de precessão da longitude do pericentro de Júpiter e Saturno e da longitude do nodo ascendente de Júpiter, respectivamente. Para o caso não linear existem muitas combinações destes ângulos, como por exemplo, $-g_5 + 2g_6$ e $s_7 + g_5 + g_6$, [19], [21], [7].

Quando um asteroide possui uma comensurabilidade da frequência de precessão

dos ângulos ϖ ou Ω próximo às frequências fundamentais dos planetas do Sistema Solar, sua excentricidade e/ou inclinação podem aumentar consideravelmente. As regiões próximas às curvas das ressonâncias seculares são pouco povoadas por asteroides, conforme ilustrado na Figura 1.3.

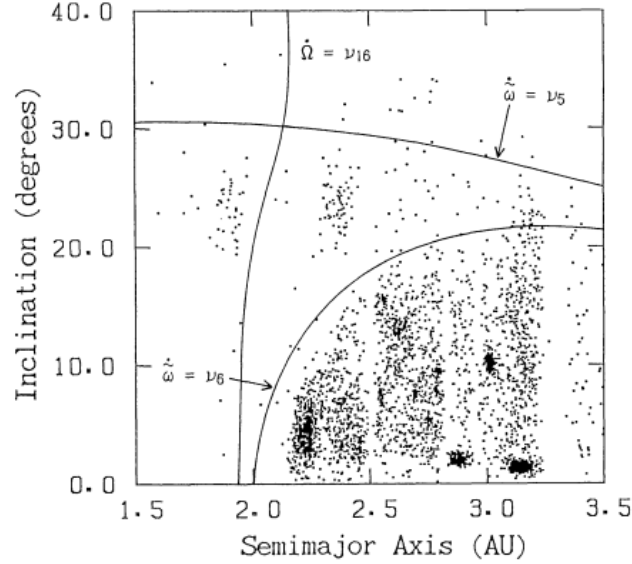


Figura 1.3: Localização das ressonâncias seculares em função da inclinação e do semi-eixo maior (ua) [24].

Uma maneira de estudar a dinâmica de um sistema de N -corpos que interagem gravitacionalmente é por meio da análise das acelerações gravitacionais dos corpos que compõem o sistema, onde o campo gravitacional dominante é produzido pelo corpo central (Sol). Entretanto, é bem conhecido que o problema de $N \geq 3$ corpos não pode ser resolvido analiticamente, isto é, não é um problema integrável. Um procedimento consiste em desenvolver uma função perturbadora por meio da Segunda Lei de Newton, considerando apenas os termos seculares desta função. Ou seja, desprezando os argumentos que contém longitudes médias, isto é, oscilações de curto período, é possível obter uma equação de movimento com o uso das equações planetárias de Lagrange. Este modelo permite obter as localizações das ressonâncias seculares no espaço o que possibilita explicar parte dos comportamentos dos asteroides no Sistema Solar [8] e [16].

Os estudos sobre ressonâncias seculares presentes na literatura foram realizados quase que exclusivamente para órbitas prógradas, com as localizações das ressonâncias seculares conhecidas. Este trabalho mostrou evidências sobre ressonâncias seculares para

órbitas retrógradas, explicando quando ocorrem e quando são importantes. O modelo analítico desenvolvido forneceu valores que foram utilizados como condições iniciais em integrações numéricas realizadas com o Software Mercury6. Os resultados obtidos confirmaram a libração dos ângulos seculares, que são previstos pelos resultados teóricos [2].

O presente trabalho irá estudar a dinâmica secular de uma partícula teste em órbita retrógrada. Através da função perturbadora calculada para o modelo Linear e Não Linear, respectivamente foi possível obter o comportamento dos ângulos orbitais em função do tempo fazendo uso das equações planetárias de Lagrange. Através do modelo analítico obtido, iremos testar a validade deste modelo por meio de simulações numéricas com o software Mercury6.

O estudo realizado ao longo do trabalho foi dividido em:

- Capítulo 1: Introdução: Apresentação do assunto a ser abordado e principais motivações.
- Capítulo 2: Dinâmica Secular Linear para Órbitas Prógradas: nesta seção é apresentada a construção da função perturbadora de segunda ordem nas excentricidades e inclinações baseada nos cálculos de Brouwer e van Woerkom (1950) [23] e como obteve-se a parte secular da função perturbadora. Posteriormente, com o uso das Equações Planetárias de Lagrange foi possível estudar a dinâmica secular de uma partícula teste em movimento prógrado.
- Capítulo 3: Dinâmica Secular Linear para Órbitas Retrógradas: neste caso foi obtida uma função perturbadora de segunda ordem nas excentricidades e inclinações de maneira análoga ao movimento prógrado, mas redefinindo alguns parâmetros orbitais responsáveis por definir a orientação da órbita, como inclinação e longitude do pericentro como, $c = \cos(I/2)$ e $\varpi = -\omega + \Omega$, respectivamente. Obteve-se as Equações Planetárias de Lagrange utilizando estes novos parâmetros orbitais para o caso linear. Deste modo foi possível estudar o comportamento da dinâmica secular de uma partícula teste em órbita retrógrada.
- Capítulo 4: Dinâmica Secular Não Linear para Órbitas Prógradas: o estudo da di-

nâmica secular realizada nesta seção foi dividido em duas análises. Primeiramente utilizamos a função perturbadora de quarta ordem nas excentricidades e de segunda ordem nas inclinações desenvolvido no trabalho [24]. Em seguida utilizamos a função perturbadora de quarta ordem nas inclinações e de segunda ordem nas excentricidades estudada em [6]. Posteriormente, com o uso das Equações Planetárias de Lagrange de ordem superior foi possível estudar a dinâmica secular de uma partícula teste em movimento prógrado. Reproduzimos alguns resultados já publicados e também obtivemos novos resultados ao estudar o comportamento secular variando as inclinações de 0° e 90° .

- Capítulo 5: Dinâmica Secular Não Linear para Órbitas Retrógradas: o estudo da dinâmica secular realizada nesta seção também foi dividido em duas análises. Obtivemos uma função perturbadora de quarta ordem nas excentricidades e de segunda ordem nas inclinações. Em seguida obtivemos a função perturbadora de quarta ordem nas inclinações e de segunda ordem nas excentricidades. Para isso redefinimos os parâmetros orbitais responsáveis por definir a orientação da órbita, como inclinação e longitude do pericentro como, $c = \cos(I/2)$ e $\varpi = -\omega + \Omega$, respectivamente. Posteriormente, com o uso das Equações Planetárias de Lagrange de ordem superior utilizando estes novos parâmetros orbitais foi possível estudar a dinâmica secular de uma partícula teste em movimento retrógrado. Obtivemos novos resultados ao estudar o comportamento secular variando as inclinações de 90° e 180° .
- Capítulo 6: Discussão e Conclusão.

2 Dinâmica Secular Linear para Órbitas Prógradas

O impacto das interações gravitacionais entre os N-corpos celestes podem ser estudados através da função perturbadora. O problema de três corpos ou mais não pode ser resolvido analiticamente, isto é, não é um problema integrável. Entretanto é possível estudar o comportamento dos elementos angulares dos astros por meio da análise das acelerações relativas dos planetas.

A teoria de perturbação linear desenvolvida neste capítulo é baseada nos cálculos de Brouwer e van Woerkom (1950) [23]. Realiza-se a expansão da função perturbadora (R_p) de segundo grau nas excentricidades e inclinações, e depois substitui-se nas equações planetárias de Lagrange de ordem mais baixa para obtenção das equações de movimento do sistema e estudo da evolução dos parâmetros orbitais.

2.1 Função Perturbadora

Considere um corpo central m_c , também denominado de corpo primário, orbitado por outros dois corpos secundários com massas m_i e m_j e com distâncias ao corpo primário dadas por r_i e r_j , respectivamente, de acordo com a Figura 2.1.

Para obtenção de uma expressão das acelerações relativas dos planetas é necessário primeiro determinar os vetores posição dados por R_c , R_i e R_j em relação ao referencial inercial O .

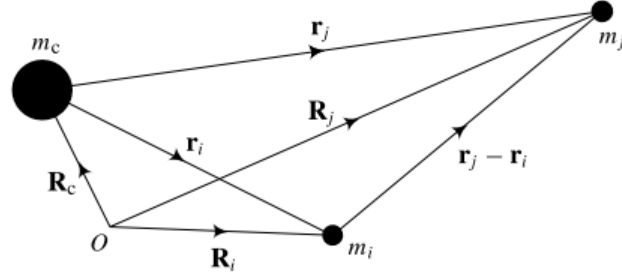


Figura 2.1: Vetores posição com relação ao corpo central m_c e com relação a um ponto inercial no espaço [16].

A partir da Segunda Lei de Newton, as forças resultantes dos corpos com respeito ao referencial inercial são

$$m_c \ddot{\vec{R}}_c = Gm_c m_i \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} + Gm_c m_j \frac{\vec{r}_j}{r_j^3}, \quad (2.1)$$

$$m_i \ddot{\vec{R}}_i = Gm_i m_j \frac{(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} + Gm_i m_c \frac{\vec{r}_i}{r_i^3}, \quad (2.2)$$

$$m_j \ddot{\vec{R}}_j = Gm_j m_i \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} + Gm_j m_c \frac{\vec{r}_j}{r_j^3}. \quad (2.3)$$

Para a determinação das expressões que dependam somente da distância relativa entre os corpos, reescreve-se os vetores posição como

$$\vec{r}_i = \vec{R}_i - \vec{R}_c \quad \text{e} \quad \vec{r}_j = \vec{R}_j - \vec{R}_c. \quad (2.4)$$

Portanto,

$$\ddot{\vec{r}}_i + G(m_c + m_i) \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} = Gm_j \left(\frac{(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{(\vec{r}_j - \vec{r}_i)^3} - \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \right), \quad (2.5)$$

$$\ddot{\vec{r}}_j + G(m_c + m_j) \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} = Gm_i \left(\frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^3} - \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \right). \quad (2.6)$$

As expressões acima podem ser escritas como gradientes de duas funções escalares

$$\ddot{\vec{r}}_i = \nabla_i(U_i + R_i) , \quad \ddot{\vec{r}}_j = \nabla_j(U_j + R_j), \quad (2.7)$$

com

$$U_i = G \frac{(m_c + m_i)}{r_i} \quad \text{e} \quad U_j = G \frac{(m_c + m_j)}{r_j},$$

$$R_i = G \frac{m_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} - Gm_j \frac{|\vec{r}_i \vec{r}_j|}{r_j^3} \quad \text{e} \quad R_j = G \frac{m_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} - Gm_i \frac{|\vec{r}_i \vec{r}_j|}{r_j^3}, \quad (2.8)$$

onde os operadores ∇_i e ∇_j representam a operação gradiente. As variáveis $U_{i,j}$ são os potenciais gravitacionais dos corpos m_i e m_j , e as variáveis $R_{i,j}$ são chamadas de funções perturbadoras.

As funções perturbadoras acima estão definidas em termos das massas e das distâncias $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$. Reescrevendo (2.8) como

$$R = \frac{\mu'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \mu' \frac{|\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'|}{r'^3}, \quad (2.9)$$

$$R' = \frac{\mu}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \mu \frac{|\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'|}{r^3}, \quad (2.10)$$

onde $\mu = Gm$ e $\mu' = Gm'$. A função perturbadora para órbita prógrada será designada por R_p . Cada corpo secundário que compõe o sistema possui uma função perturbadora, o corpo interno m possui a função perturbadora R_p e o corpo externo de massa m' possui a função perturbadora R'_p .

Para obtenção da função perturbadora que dependa dos elementos orbitais, considere que os vetores $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$ formam um ângulo ψ . Logo,

$$R_p = \frac{\mu'}{a'} \left(\frac{a'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \frac{\mu'}{a'} \alpha \left(\left(\frac{r}{a} \right) \left(\frac{a'}{r'} \right)^2 \cos \psi \right) = \frac{\mu'}{a'} R_D + \frac{\mu'}{a'} \alpha R_E, \quad (2.11)$$

$$R'_p = \frac{\mu}{a'} \left(\frac{a'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \frac{\mu'}{a'} \frac{1}{\alpha^2} \left(\left(\frac{r'}{a'} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^2 \cos \psi \right) = \frac{\mu'}{a'} R_D + \frac{\mu}{a'} \frac{1}{\alpha^2} R_I, \quad (2.12)$$

onde $\alpha = \frac{a}{a'}$ e $|\mathbf{r}\mathbf{r}'| = rr' \cos \psi$. O termo R_D designa a parte direta da função perturbadora e R_E e R_I designam as partes indiretas das funções perturbadoras R_p e R'_p , respectivamente. Como adotou-se referencial astrocêntrico, não haverá termos seculares nas partes indiretas das funções perturbadoras dos corpos celestes interno e externo. Esta escolha pelo referencial astrocêntrico facilita o estudo desenvolvido neste trabalho uma vez que obtém-se uma função perturbadora mais simplificada.

Para determinar a função perturbadora em termos dos elementos orbitais a (semi-eixo maior), e (excentricidade), I (inclinação), Ω (longitude do nodo ascendente), ω (argumento do pericentro), $\varpi = \omega + \Omega$ (longitude do pericentro) e λ (longitude média), pode-se escrever

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi.$$

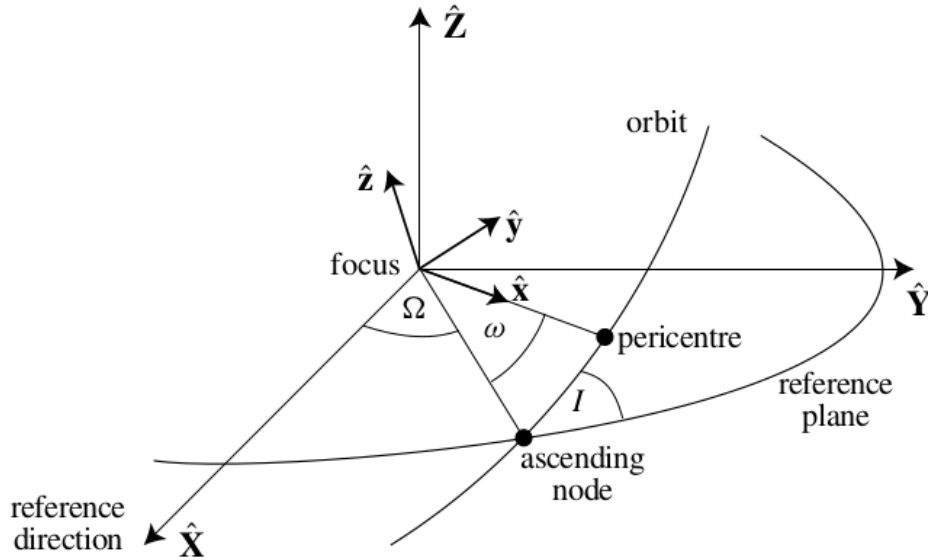


Figura 2.2: Ilustração dos parâmetros angulares [16].

Como foi visto, $|\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'| = rr' \cos \psi$, logo

$$\cos \psi = \frac{|\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'|}{rr'} = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'}. \quad (2.13)$$

Definindo um novo ângulo

$$\Psi = \cos \psi - \cos(\theta - \theta'), \quad (2.14)$$

onde $\theta = \varpi + f$ e $\theta' = \varpi' + f'$, considere a parte direta da função perturbadora

$$R_D = \frac{a'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \Rightarrow \frac{R_D}{a'} = \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'(\Psi + \cos(\theta - \theta'))}}, \quad (2.15)$$

onde $\Delta = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$.

Realizando a expansão em série de Taylor de $\frac{1}{\Delta}$ em relação a Ψ , obtém-se

$$\frac{1}{\Delta} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i)!}{(i!)^2} \left(\frac{1}{2} rr' \Psi \right)^i \frac{1}{\Delta_0^{2i+1}}, \quad (2.16)$$

onde $\Delta_0 = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')}$.

Desenvolvendo agora a expansão de Taylor de ordem 2 de $\frac{1}{\Delta_0}$ em torno de (a, a') , temos de acordo com [9],

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} = \frac{1}{\Delta_0^{2i+1}(a, a')} + (r-a) \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}(a, a')} \right) + (r'-a') \frac{\partial}{\partial a'} \left(\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}(a, a')} \right) + \dots, \quad (2.17)$$

onde

$$\Delta_0^{2i+1}(a, a') = \rho_0^{2i+1} = \sqrt{a^2 + a'^2 - 2aa' \cos(\theta - \theta')}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} &= \frac{1}{\rho_0^{2i+1}} + (r-a) \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{\rho_0^{2i+1}} \right) + (r'-a') \frac{\partial}{\partial a'} \left(\frac{1}{\rho_0^{2i+1}} \right) + \\
&\frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2}{\partial a^2} \left(\frac{1}{\rho_0^{2i+1}} \right) (r-a) + 2 \frac{\partial^2}{\partial a \partial a'} \left(\frac{1}{\rho_0^{2i+1}} \right) (r-a)(r'-a') + \frac{\partial^2}{\partial a'^2} \left(\frac{1}{\rho_0^{2i+1}} \right) (r'-a') \right] \\
&+ \cdots + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \frac{\partial^k}{\partial a^k \partial a'^{l-k}} \left(\frac{1}{\rho_0^{2i+1}} \right) (r-a)^k (r'-a')^{l-k}. \quad (2.18)
\end{aligned}$$

Definindo um operador diferenciação como

$$D_{m,n} = a^m a'^n \frac{\partial^{m+n}}{\partial a^m \partial a'^n}, \quad (2.19)$$

e escolhendo $\varepsilon = \frac{r}{a-1}$, a expressão (2.18) reescreve-se como

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} = \left[1 + \varepsilon D_{1,0} + \varepsilon' D_{0,1} + \frac{1}{2!} (\varepsilon^2 D_{2,0} + 2\varepsilon\varepsilon' D_{1,1} + \varepsilon'^2 D_{0,2}) + \cdots \right] \frac{1}{\rho_0^{2i+1}}. \quad (2.20)$$

Reescrevendo ρ_0^{2i+1} ,

$$\frac{1}{\rho_0^{2i+1}} = a'^{-(2i+1)} \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} b^{(j)}_{i+1/2}(\alpha) \cos j(\theta - \theta'), \quad (2.21)$$

Definindo um novo operador, tem-se

$$A_{i,j,m,n} = D_{m,n} \left(a'^{-(2i+1)} b^{(j)}_{i+1/2}(\alpha) \right). \quad (2.22)$$

Portanto,

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} = \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \varepsilon^k \varepsilon'^{l-k} A_{i,j,k,l-k} \right] \cos j(\theta - \theta'). \quad (2.23)$$

Substituindo (2.23) em (2.16) e depois em (2.15), tem-se

$$R_D = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i)!}{(i!)^2} \left(\frac{1}{2} \frac{r}{a} \frac{r'}{a'} \Psi \right)^i \frac{a^i}{a'^{i+1}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \varepsilon^k \varepsilon'^{l-k} A_{i,j,k,l-k} \right] \cos j(\theta - \theta'). \quad (2.24)$$

Uma forma de obter uma expressão para a função perturbadora que seja função dos elementos orbitais é reescrever (2.14) utilizando as relações de ângulos,

$$\frac{x}{r} = \cos \Omega \cos(\omega + f) - \sin \Omega \sin(\omega + f) \cos I, \quad (2.25)$$

$$\frac{y}{r} = \sin \Omega \cos(\omega + f) - \cos \Omega \sin(\omega + f) \cos I, \quad (2.26)$$

$$\frac{z}{r} = \sin(\omega + f) \sin I, \quad (2.27)$$

Os termos da parte direta da função perturbadora que correspondem à perturbação secular são aqueles que não contém longitudes médias, uma vez que estes são de rápida variação no tempo, isto é, argumentos do cosseno $j = 0$.

Inicialmente, obteve-se uma função perturbadora para dois corpos secundários orbitando um corpo central primário. Pode-se estender esse conceito para quantos corpos secundários se queira. É possível também estender este conceito para estudar a dinâmica de uma partícula teste sofrendo a influência gravitacional dos corpos secundários que compõem o sistema.

Para pequenas inclinações, pode-se empregar as relações

$$\cos I = 1 - 2s^2$$

e

$$\sin I \approx 2s,$$

onde $s = \sin(I/2)$. O mesmo é válido para I' .

A partir de relações entre ângulos presentes em [16], obtém-se a parte direta da função perturbadora para o caso secular

$$R_D^{(secular)} = \frac{1}{8}[2\alpha_{12}D + \alpha^2 D^2]b_{1/2}^{(0)}(e_1^2 + e_2^2) - \frac{1}{2}\alpha b_{3/2}^{(1)}(s_1^2 + s_2^2) +$$

$$\frac{1}{4}[2 - 2\alpha D - \alpha^2 D^2]b_{1/2}^{(1)}e_1 e_2 \cos(\varpi_1 - \varpi_2) + \alpha b_{3/2}^{(1)}s_1 s_2 \cos(\Omega_1 - \Omega_2). \quad (2.28)$$

Para que as séries dos coeficientes de Laplace converjam é necessário que $\alpha < 1$.

Logo

$$\alpha = \begin{cases} a_j/a & \text{se } a_j < a, \\ a/a_j & \text{se } a_j > a \end{cases} \quad (2.29)$$

e

$$\bar{\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{se } a_j < a, \\ a/a_j & \text{se } a_j > a. \end{cases} \quad (2.30)$$

Empregando as propriedades das derivadas dos coeficientes de Laplace, tem-se

$$2\alpha \frac{db_{1/2}^{(0)}}{d\alpha} + \alpha^2 \frac{d^2 b_{1/2}^{(0)}(\alpha)}{d\alpha^2} = \alpha b_{3/2}^{(1)}, \quad 2b_{1/2}^{(1)} - 2\alpha \frac{db_{1/2}^{(1)}}{d\alpha} - \alpha^2 \frac{d^2 b_{1/2}^{(1)}}{d\alpha^2} = -\alpha b_{3/2}^{(2)}(\alpha). \quad (2.31)$$

Portanto, a expressão reduz-se a

$$R_D^{(secular)} = \frac{1}{8}\alpha b_{3/2}^{(1)}(e_1^2 + e_2^2) - \frac{1}{2}\alpha b_{3/2}^{(1)}(s_1^2 + s_2^2) -$$

$$\alpha b_{3/2}^{(2)}(\alpha)e_1 e_2 \cos(\varpi_1 - \varpi_2) + \alpha b_{3/2}^{(1)}s_1 s_2 \cos(\Omega_1 - \Omega_2). \quad (2.32)$$

Entretanto, decorre de (2.11) e (2.12) que

$$R_p = \frac{\mu}{a'} R_D^{(secular)} = \frac{Gm_j}{a'} \left[\frac{1}{8} \alpha b_{3/2}^{(1)} (e_1^2 + e_2^2) - \frac{1}{2} \alpha b_{3/2}^{(1)} (s_1^2 + s_2^2) - \right. \\ \left. \alpha b_{3/2}^{(2)}(\alpha) e_1 e_2 \cos(\varpi_1 - \varpi_2) + \alpha b_{3/2}^{(1)} s_1 s_2 \cos(\Omega_1 - \Omega_2) \right], \quad (2.33)$$

onde $Gm_c \approx n^2 a^3$.

É possível obter uma função perturbadora para estudar a dinâmica tanto de um planeta quanto de uma partícula teste. Neste estudo será desenvolvida uma função perturbadora para estudar o movimento de partículas testes, ou seja, a massa do corpo em comparação com as massas dos planetas que compõem o sistema é desprezível. Multiplicando a expressão acima por $\frac{m_j}{m_c}$ a função perturbadora, tem-se

$$R_p = na^2 \left(\frac{1}{2} A e^2 + \frac{1}{2} B I^2 + \sum_{j=1} A_j e e_j \cos(\varpi - \varpi_j) + \sum_{j=1} B_j s s_j \cos(\Omega - \Omega_j) \right), \quad (2.34)$$

onde

$$A = \frac{n}{4} \sum_{j=1}^2 \frac{m_j}{m_c} \alpha_j \bar{\alpha}_j b_{3/2}^{(1)}(\alpha), \quad (2.35)$$

$$A_j = -\frac{n}{4} \frac{m_j}{m_c} \alpha_j \bar{\alpha}_j b_{3/2}^{(2)}(\alpha), \quad (2.36)$$

$$B = -\frac{n}{4} \sum_{j=1}^2 \frac{m_j}{m_c} \alpha_j \bar{\alpha}_j b_{3/2}^{(1)}(\alpha), \quad (2.37)$$

$$B_j = \frac{n}{4} \frac{m_j}{m_c} \alpha_j \bar{\alpha}_j b_{3/2}^{(1)}(\alpha). \quad (2.38)$$

É possível observar que $A = -B$. A expressão (2.35) depende somente das massas do Sol, dos planetas e dos semi-eixo maior dos planetas e da partícula teste.

2.1.1 Dinâmica de uma partícula teste em órbita com o Sol sofrendo perturbações de Júpiter e Saturno

Considere uma partícula teste em movimento prógrado, com inclinação próxima do plano orbital ($I \approx 0^\circ$), órbita circular ($e \approx 0$) sobre efeito gravitacional de Júpiter e Saturno.

As equações que descrevem a evolução dos elementos orbitais com relação ao tempo são obtidas por meio das equações planetárias de Lagrange

$$\dot{e} = -\frac{1}{na^2e} \frac{\partial R_p}{\partial \varpi}, \quad \dot{\varpi} = +\frac{1}{na^2e} \frac{\partial R_p}{\partial e}, \quad (2.39)$$

$$\dot{I} = -\frac{1}{4na^2s} \frac{\partial R_p}{\partial \Omega}, \quad \dot{\Omega} = +\frac{1}{4na^2s} \frac{\partial R_p}{\partial I}. \quad (2.40)$$

onde $s = \sin(I/2)$.

Reescrevendo as excentricidades e as inclinações nas novas variáveis para a partícula teste, tem-se

$$h = e \sin \varpi, \quad (2.41)$$

$$k = e \cos \varpi, \quad (2.42)$$

$$p = s \sin \Omega, \quad (2.43)$$

$$q = s \cos \Omega. \quad (2.44)$$

Multiplica-se o terceiro e quarto termos de (2.34) por $\frac{2}{2}$ e $\frac{4}{4}$, respectivamente. As variáveis com subíndices h_j , k_j , p_j e q_j são referentes aos planetas. Reescrevendo (2.34) nas novas variáveis, tem-se

$$R_p = na^2 \left(\frac{1}{2} A(h^2 + k^2)^2 + \frac{1}{2} \frac{2}{2} B(p^2 + q^2)^2 + \sum_{j=1}^2 A_j(hh_j + kk_j) + \frac{4}{4} \sum_{j=1}^2 B_j(pp_j + qq_j) \right), \quad (2.45)$$

ou ainda

$$R_p = na^2 \left(\frac{1}{2}A(h^2 + k^2)^2 + \frac{1}{2}2B(p^2 + q^2)^2 + \sum_{j=1}^2 A_j(hh_j + kk_j) + 4 \sum_{j=1}^2 B_j(pp_j + qq_j) \right). \quad (2.46)$$

A frequência A está relacionada como a taxa de variação temporal da longitude do pericentro. A frequência B está relacionada com a taxa de variação temporal da longitude do nodo ascendente. É possível notar pelas expressões acima que $A = -B$.

Realiza-se uma nova transformação que permite obter uma relação entre as novas e antigas variáveis simplificando as equações diferenciais do problema, sendo possível a obtenção de um sistema de equações de movimento

$$\dot{h} = + \frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial k}, \quad (2.47)$$

$$\dot{k} = - \frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial h}, \quad (2.48)$$

$$\dot{p} = + \frac{1}{4na^2s} \frac{\partial R}{\partial q}, \quad (2.49)$$

$$\dot{q} = - \frac{1}{4na^2s} \frac{\partial R}{\partial p}. \quad (2.50)$$

Substituindo a expressão (2.46) nas novas equações Planetárias de Lagrange, tem-se

$$\dot{h} = +Ak + \sum_{j=1}^2 A_j k_j, \quad \dot{k} = -Ah - \sum_{j=1}^2 A_j h_j, \quad (2.51)$$

$$\dot{p} = +Bq + \sum_{j=1}^2 B_j q_j, \quad \dot{q} = -Bp - \sum_{j=1}^2 B_j p_j. \quad (2.52)$$

onde

$$h_j = e_j \sin(\varpi_j) = \sum_{i,j=1}^8 e_{ji} \sin(g_i t + \beta_i), \quad (2.53)$$

$$k_j = e_j \cos(\varpi_j) = \sum_{i,j=1}^8 e_{ji} \cos(g_i t + \beta_i), \quad (2.54)$$

$$p_j = c_j \sin(\Omega_j) = \sum_{i,j=1}^8 e_{ji} \sin(f_i t + \gamma_i), \quad (2.55)$$

$$q_j = c_j \cos(\Omega_j) = \sum_{i,j=1}^8 e_{ji} \cos(f_i t + \gamma_i), \quad (2.56)$$

sendo j os subíndices dos 8 planetas do Sistema Solar e i os subíndices referentes aos auto-valores do sistema.

Derivando novamente (2.51) e substituindo os valores das primeiras derivadas, tem-se

$$\ddot{h} = +A(-Ah - \sum_{j=1}^2 A_j \sum_{i=1}^2 e_{ji} \sin(g_i t + \beta_i)) - \sum_{j=1}^2 A_j \sum_{i=1}^2 e_{ji} g_i \sin(g_i t + \beta_i), \quad (2.57)$$

$$\ddot{h} = -A^2 h - \sum_{i=1}^2 \nu_i (A + g_i) \sin(g_i t + \beta_i). \quad (2.58)$$

O mesmo procedimento é aplicado para a variável k

$$\ddot{k} = -A(Ak + \sum_{j=1}^2 A_j \sum_{i=1}^2 e_{ji} \cos(g_i t + \beta_i)) - \sum_{j=1}^2 A_j \sum_{i=1}^2 e_{ji} g_i \cos(g_i t + \beta_i), \quad (2.59)$$

$$\ddot{k} = -A^2 k - \sum_{i=1}^2 \nu_i (A + g_i) \cos(g_i t + \beta_i). \quad (2.60)$$

Derivando novamente (2.52) e substituindo os valores das primeiras derivadas, tem-se

$$\ddot{p} = +B(-Bp - \sum_{j=1}^2 B_j \sum_{i=1}^2 s_{ji} \sin(f_i t + \gamma_i)) - \sum_{j=1}^2 B_j \sum_{i=1}^2 s_{ji} f_i \sin(f_i t + \gamma_i), \quad (2.61)$$

$$\ddot{p} = -B^2 p - \sum_{i=1}^2 \mu_i (B + f_i) \sin(f_i t + \gamma_i). \quad (2.62)$$

O mesmo vale para a variável q

$$\ddot{q} = -B(Bq + \sum_{j=1}^2 B_j \sum_{i=1}^2 s_{ji} \cos(f_i t + \gamma_i)) - \sum_{j=1}^2 B_j \sum_{i=1}^2 s_{ji} f_i \cos(f_i t + \gamma_i), \quad (2.63)$$

$$\ddot{q} = -B^2 q - \sum_{i=1}^2 \mu_i (B + f_i) \cos(f_i t + \gamma_i). \quad (2.64)$$

As soluções das equações de movimento, presentes em [16], de um asteroide em movimento prógrado são dadas por:

$$h(t) = e_{free} \sin(At + \beta) - \sum_{i=1}^2 \frac{\nu_j}{(A - g_i)} \sin(g_i t + \beta_i), \quad (2.65)$$

$$k(t) = e_{free} \cos(At + \beta) - \sum_{i=1}^2 \frac{\nu_j}{(A - g_i)} \cos(g_i t + \beta_i), \quad (2.66)$$

$$p(t) = s_{free} \sin(Bt + \gamma) - \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_j}{(B - f_i)} \sin(f_i t + \gamma_i), \quad (2.67)$$

$$q(t) = s_{free} \cos(Bt + \gamma) - \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_j}{(B - f_i)} \cos(f_i t + \gamma_i). \quad (2.68)$$

As frequências dadas por g_i são referentes à precessão apsidal, relacionada com a excentricidade, e as frequências f_i são referentes à precessão nodal, relacionada com a inclinação. Isto é, quando o valor da taxa de precessão apsidal do asteroide (ou do planeta) for igual a taxa de precessão apsidal de algum dos planetas do sistema solar ($A = g_i$), acontecerá um aumento da excentricidade do asteroide. Quando o valor da taxa de precessão da longitude do nodo ascendente do asteroide (ou do planeta) for igual a taxa de precessão da longitude do nodo ascendente de algum dos planetas do sistema solar ($B = f_i$), acontecerá um aumento da inclinação do asteroide.

É possível localizar as ressonâncias seculares por meio da análise das frequências dada por (2.35). Na Figura 2.3, as retas horizontais são os valores das frequências g_5 (curva azul) e g_6 (curva verde). A curva em vermelho foi obtida com a contribuição das perturbações gravitacionais de Júpiter e Saturno, isto é, $j = 5$ e $j = 6$. A intersecção do gráfico com as retas fornece a localização no espaço das ressonâncias seculares ¹.

Considerando as contribuições das interações gravitacionais dos 8 planetas do Sistema Solar é possível obter mais localizações de ressonâncias seculares presentes no

¹Gráfico produzido com o software MAPLE.

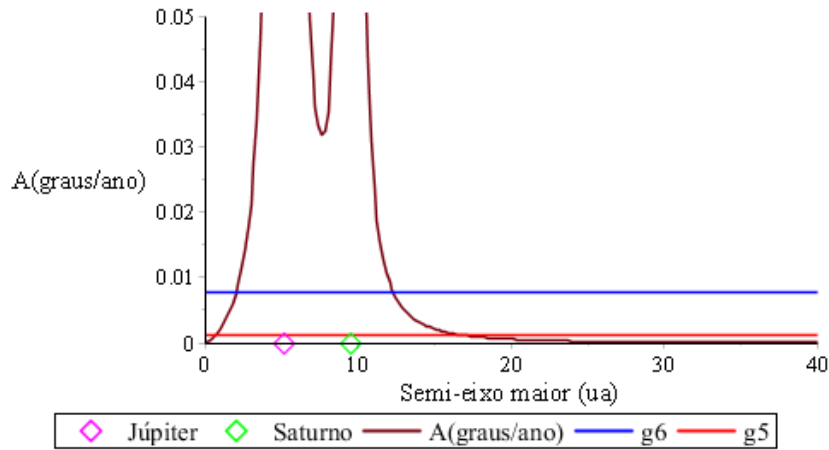


Figura 2.3: Gráfico da frequência $A(gaus/ano)$ em função do semi-eixo maior.

espaço uma vez que as retas horizontais passam a intersectar a curva A em mais pontos, pois a curva desta função se estende para mais localizações, como ilustrado nas figuras 2.4 e 2.5. A curva da frequência do asteroide referente a frequência A (associada à frequência da longitude do pericentro) difere da frequência B (associada à frequência da longitude do nodo ascendente) por um sinal menos. As retas horizontais são obtidas a partir dos valores das frequências g_5 e g_6 , ver Tabela B.1. As figuras 2.4 e 2.5 consideram os 8 planetas do Sistema Solar.

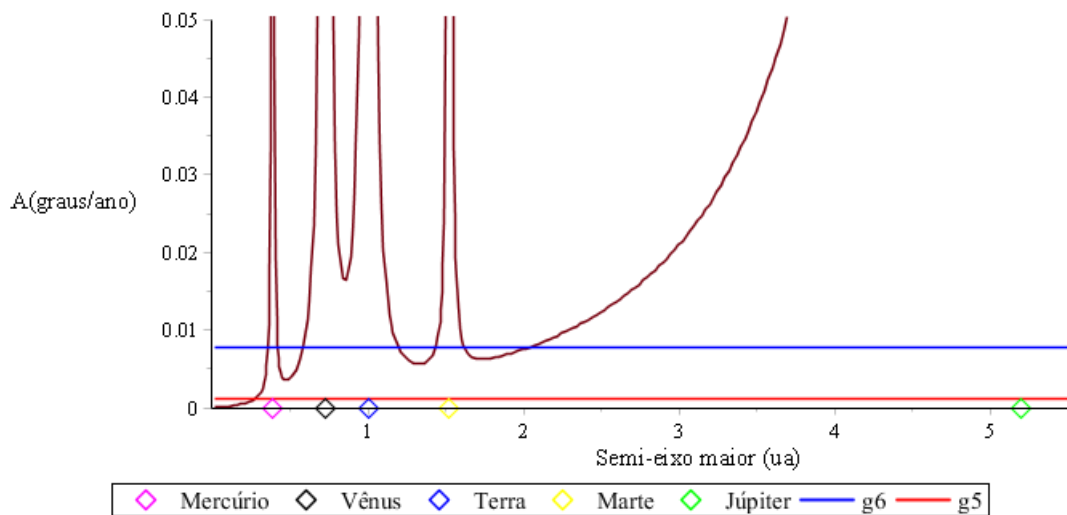


Figura 2.4: Frequência $A(gaus/ano)$ em função do semi-eixo maior com a contribuição das perturbações gravitacionais dos 8 planetas do Sistema Solar no intervalo de 0(ua) à 5.5(ua).

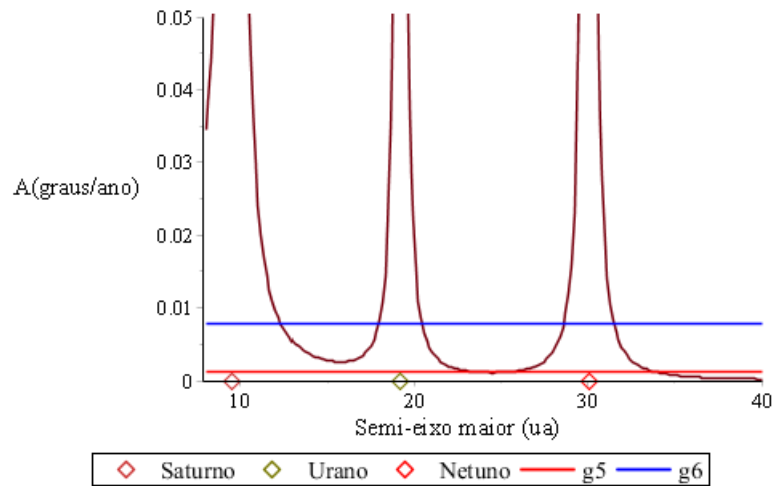


Figura 2.5: Frequência $A(\text{graus/ano})$ em função do semi-eixo maior com a contribuição das perturbações gravitacionais dos 8 planetas do Sistema Solar no intervalo de 9(ua) à 40(ua).

As figuras 2.3, 2.4 e 2.5 reproduz resultados já conhecidos sobre ressonâncias seculares para o caso linear na literatura, o que valida o uso dele para estudar dinâmicas prógradas e retrógradas.

3 Dinâmica Secular Linear para Órbitas Retrógradas

A ressonância secular é um mecanismo que pode excitar os elementos orbitais excentricidade e inclinação, causando instabilidade no movimento. Neste capítulo será reproduzida a análise da dinâmica secular para o caso linear considerando uma partícula teste em órbita retrógrada. A orientação da partícula teste em movimento retrógrado é dada por órbitas planares cujas inclinações I estão próximas de 180° . Para isso são estabelecidos novos valores para os parâmetros angulares da inclinação e do argumento do pericentro - os ângulos que definem a orientação da órbita do asteroide.

Por definição, a orientação de uma órbita prógrada dá-se no sentido anti-horário e uma órbita retrógrada no sentido horário. Para alterar o sentido de rotação que será usado como referência pode-se substituir $s = \sin\left(\frac{I}{2}\right)$ por $c = \cos\left(\frac{I}{2}\right)$ na expansão da função perturbadora. O argumento do pericentro é definido como o ângulo entre o pericentro (ω), que determina onde o plano orbital do asteroide cruza com o plano orbital de referência, e a longitude do nodo ascendente (Ω). Para uma órbita retrógrada este ângulo assume o valor $-\omega$, uma vez que o sentido de rotação é oposto ao sentido de rotação do sistema de referência. A longitude do pericentro altera-se para $\varpi = -\omega + \Omega$. Estes novos parâmetros descreve o novo sistema e possibilitará obter a função perturbadora para órbita retrógrada.

3.1 Órbita Retrógrada

Primeiramente será apresentado o estudo de ressonâncias seculares de uma partícula teste em movimento retrógrado sob influencia gravitacional do Sol, de Júpiter e de Saturno. Em seguida será discutido o estudo ressonâncias seculares de uma partícula teste em movimento retrógrado sob influencia gravitacional de todos os 8 planetas do Sistema Solar.

Para órbita prógrada foi definido o parâmetro inclinação do sistema como sendo $\sin(I)$, entretanto para pequenas inclinações, isto é, $I \approx 0^\circ$, este parâmetro se anula para órbitas coplanares. Deste modo este parâmetro foi redefinido para $\sin(I/2)$. Para órbita retrógrada define-se como parâmetro de inclinação $\cos(I/2)$, uma vez que para pequenas inclinações $I \approx 180^\circ$.

A função perturbadora R_r (retrógrada) de segunda ordem nas variáveis excentricidade e inclinação descrita pela teoria linear é dada por

$$\begin{aligned} R_D^{(secular)} = & \frac{1}{8} [2\alpha D + \alpha^2 D^2] b_{1/2}^{(0)}(e_1^2 + e_2^2) + \frac{1}{4} [2 - 2\alpha D - \alpha^2 D^2] b_{1/2}^{(1)} e_1 e_2 \cos(\varpi_1 - \varpi_2) \\ & + \frac{1}{2} \alpha b_{3/2}^{(1)} (s_1^2 + c_2^2) - \alpha b_{3/2}^{(1)} s_1 c_2 \cos(\Omega_1 - \Omega_2). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Usando as identidades derivadas dos Coeficientes de Laplace (2.31), têm-se

$$\begin{aligned} R_r = \frac{\mu}{a'} R_D^{(secular)} = & \frac{Gm_j}{a'} \left[\frac{1}{8} \alpha b_{3/2}^{(1)} (e_1^2 + e_2^2) - \frac{1}{4} \alpha b_{3/2}^{(1)} (s_1^2 + c_2^2) - \right. \\ & \left. \alpha b_{3/2}^{(2)} (\alpha) e_1 e_2 \cos(\varpi_1 - \varpi_2) - \alpha b_{3/2}^{(1)} s_1 s_2 \cos(\Omega_1 - \Omega_2) \right], \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde $Gm_c \approx n^2 a^3$ e $\mu = Gm$.

Reescrevendo os parâmetros e e c em termos das novas variáveis para a partícula teste, obtém-se

$$h = e \sin(\varpi), \quad (3.3)$$

$$k = e \cos(\varpi), \quad (3.4)$$

$$p = c \sin(\Omega), \quad (3.5)$$

$$q = c \cos(\Omega), \quad (3.6)$$

onde $c = \cos\left(\frac{I}{2}\right)$.

E para os planetas, as novas variáveis são

$$h_j = e_j \sin(\varpi_j), \quad (3.7)$$

$$k_j = e_j \cos(\varpi_j), \quad (3.8)$$

$$p_j = c_j \sin(\Omega_j), \quad (3.9)$$

$$q_j = c_j \cos(\Omega_j), \quad (3.10)$$

onde j representa os subíndices dos 8 planetas do Sistema Solar.

Multiplicando o terceiro e quarto termos de (3.2) por $\frac{2}{2}$ e $\frac{4}{4}$, respectivamente, obtém-se

$$R_r = na^2 \left(\frac{1}{2}A(h^2 + k^2) + \sum_{j=1}^2 A_j(hh(j) + kk(j)) + \frac{2}{2}B(p^2 + q^2) - \frac{4}{4}\sum_{j=1}^2 B_j(pp(j) + qq(j)) \right), \quad (3.11)$$

ou ainda

$$R_r = na^2 \left(\frac{1}{2}A(h^2 + k^2) + \sum_{j=1}^2 A_j(hh(j) + kk(j)) + 2B(p^2 + q^2) - 4\sum_{j=1}^2 B_j(pp(j) + qq(j)) \right). \quad (3.12)$$

onde

$$A = +n \frac{1}{4} \frac{m_j}{m_c} \alpha_{12} \bar{\alpha}_{12} b_{3/2}^{(1)}(\alpha_{12}), \quad (3.13)$$

$$A_j = -n \frac{1}{4} \frac{m_j}{m_c} \alpha_{12} \bar{\alpha}_{12} b_{3/2}^{(2)}(\alpha_{12}), \quad (3.14)$$

$$B = -n \frac{1}{4} \frac{m_j}{m_c} \alpha_{12} \bar{\alpha}_{12} b_{3/2}^{(1)}(\alpha_{12}), \quad (3.15)$$

$$B_j = +n \frac{1}{4} \frac{m_j}{m_c} \alpha_{12} \bar{\alpha}_{12} b_{3/2}^{(1)}(\alpha_{12}). \quad (3.16)$$

A frequência A está relacionada como a taxa de variação da longitude do pericentro. A frequência B está relacionada com a taxa de variação temporal da longitude do nodo ascendente. É possível notar pelas expressões acima que $A = -B$.

As equações planetárias de Lagrange para o movimento retrógrado são dadas por

$$\dot{e} = + \frac{1}{na^2 e} \frac{\partial R_r}{\partial \varpi}, \quad (3.17)$$

$$\dot{\varpi} = - \frac{1}{na^2 e} \frac{\partial R_r}{\partial e}, \quad (3.18)$$

$$\dot{c} = + \frac{1}{4na^2 c} \frac{\partial R_r}{\partial \Omega}, \quad (3.19)$$

$$\dot{\Omega} = - \frac{1}{4na^2 c} \frac{\partial R_r}{\partial c}. \quad (3.20)$$

Nas novas variáveis, as equações planetárias tornam-se

$$\dot{h} = - \frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial k}, \quad (3.21)$$

$$\dot{k} = + \frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial h}, \quad (3.22)$$

$$\dot{p} = -\frac{1}{4na^2} \frac{\partial R}{\partial q}, \quad (3.23)$$

$$\dot{q} = +\frac{1}{4na^2} \frac{\partial R}{\partial p}. \quad (3.24)$$

Substituindo (3.12) nas expressões acima obtém-se

$$\dot{h} = -Ak - \sum_{j=1}^2 A_j h_j = -Ak - \sum_{j=1}^2 A_j \sum_{i=1}^2 e_{ji} \cos(g_i t + \beta_i), \quad (3.25)$$

$$\dot{k} = +Ah + \sum_{j=1}^2 A_j h_j = +Ah + \sum_{j=1}^2 A_j \sum_{i=1}^2 e_{ji} \sin(g_i t + \beta_i), \quad (3.26)$$

$$\dot{p} = -Bq + \sum_{j=1}^2 B_j q_j = -Bq + \sum_{j=1}^2 B_j c_{ji} \cos(f_i t + \gamma_i), \quad (3.27)$$

$$\dot{q} = +Bp - \sum_{j=1}^2 B_j p_j = +Bp - \sum_{j=1}^2 B_j c_{ji} \sin(f_i t + \gamma_i). \quad (3.28)$$

As derivadas de segunda ordem das expressões acima são dadas por

$$\ddot{h} = -A(+Ah + \sum_{j=1}^2 A_j \sum_{i=1}^2 e_{ji} \sin(g_i t + \beta_i)) + \sum_{j=1}^2 A_j \sum_{i=1}^2 e_{ji}(g_i) \sin(g_i t + \beta_i), \quad (3.29)$$

$$\ddot{k} = +A(-Ak - \sum_{j=1}^2 A_j \sum_{i=1}^2 e_{ji} \cos(g_i t + \beta_i)) + \sum_{j=1}^2 A_j \sum_{i=1}^2 e_{ji}(g_i) \cos(g_i t + \beta_i), \quad (3.30)$$

$$\ddot{p} = -B(+Bp - \sum_{j=1}^2 B_j p_j \sin(f_i t + \gamma_i)) - \sum_{j=1}^2 B_j c_{ji}(f_i) \sin(f_i t + \gamma_i), \quad (3.31)$$

$$\ddot{q} = +B(-Bq + \sum_{j=1}^2 B_j q_j \cos(f_i t + \gamma_i)) - \sum_{j=1}^2 B_j c_{ji}(f_i) \cos(f_i t + \gamma_i). \quad (3.32)$$

Definindo $\nu_i = \sum_{j=1}^2 A_j e_{ji}$ e $\mu_i = \sum_{j=1}^2 B_j c_{ji}$, tem-se

$$\ddot{h} = -A^2 h - \sum_{i=1}^2 \nu_i (A - g_i) \sin(g_i t + \beta_i), \quad (3.33)$$

$$\ddot{k} = -A^2 k - \sum_{i=1}^2 \nu_i (A - g_i) \cos(g_i t + \beta_i), \quad (3.34)$$

$$\ddot{p} = -B^2 p + \sum_{i=1}^2 \mu_j (B - f_i) \sin(f_i t + \gamma_i), \quad (3.35)$$

$$\ddot{q} = -B^2 q + \sum_{i=1}^2 \mu_j (B - f_i) \cos(f_i t + \gamma_i). \quad (3.36)$$

As expressões obtidas são equações diferenciais ordinárias de segunda ordem cuja solução completa é a soma das soluções homogênea e particular. Para determinar a solução geral, calcula-se a solução particular e a homogênea da expressão $\ddot{h}$. Considere como proposta de solução particular

$$h_p(t) = a \sin(g_i t + \beta_i), \quad (3.37)$$

onde a é uma constante arbitrária. As derivadas de primeira e segunda ordem são, respectivamente,

$$\dot{h}(t) = a g_i \cos(g_i t + \beta_i), \quad (3.38)$$

$$\ddot{h}(t) = -a g_i^2 \sin(g_i t + \beta_i). \quad (3.39)$$

Substituindo estas derivadas em (3.33), resulta

$$(-g_i^2 + A^2) a \sin(g_i t + \beta_i) = -\nu_i (A - g_i) \sin(g_i t + \beta_i),$$

que por sua vez implica em

$$(A - g_i)(A + g_i)a = -\nu_i(A - g_i)$$

$$a = \frac{-\nu_i}{(A + g_i)}.$$

Dessa forma a solução particular é dada por

$$h_p(t) = -\sum_{i=1}^2 \frac{\nu_i \sin(g_i t + \beta_i)}{(A + g_i)}. \quad (3.40)$$

A solução da equação diferencial homogênea é dada por

$$h_h(t) = e_{free} \sin(-At + \beta), \quad (3.41)$$

com as constantes arbitrárias do sistema e_{free} e β dependendo das condições iniciais.

Portanto, a solução da equação diferencial (3.33) é dada por

$$h(t) = e_{free} \sin(-At + \beta) - \sum_{i=1}^2 \frac{\nu_i}{(A + g_i)} \sin(g_i t + \beta_i). \quad (3.42)$$

A solução completa para a EDO (3.34) possui a forma

$$k(t) = e_{free} \cos(-At + \beta) + k_p(t) \quad (3.43)$$

onde $k_p(t)$ é a solução particular da EDO. Analogamente, para obtenção da solução particular, considere a proposta de solução

$$k_p(t) = b \cos(g_i t + \beta_i), \quad (3.44)$$

onde b é uma constante arbitrária. A primeira e segunda derivadas são

$$\dot{k}_p(t) = -bg_i \sin(g_i t + \beta_i), \quad (3.45)$$

$$\ddot{k}_p(t) = -bg_i^2 \cos(g_it + \beta_i). \quad (3.46)$$

Substituindo as derivadas em (3.34), tem-se

$$-bg_i^2 \cos(g_it + \beta_i) + A^2 k_p \cos(g_it + \beta_i) = -\nu_i(A - g_i) \cos(g_it + \beta_i),$$

$$b(-g_i^2 + A^2) = -\nu_i(A - g_i),$$

ou ainda

$$b = -\frac{\nu_i}{(A + g_i)}.$$

Logo,

$$k_p(t) = -\sum_{i=1}^2 \frac{\nu_i}{(A + g_i)} \cos(g_it + \beta_i). \quad (3.47)$$

A solução da equação diferencial homogênea é obtida de forma análoga ao caso $\ddot{h}$ e dada por

$$k(t) = e_{free} \cos(-At + \beta) - \sum_{i=1}^2 \frac{\nu_i}{(A + g_i)} \cos(g_it + \beta_i). \quad (3.48)$$

A solução completa para (3.35) possui a forma

$$p(t) = c_{free} \sin\left(\frac{-B}{4}t + \gamma\right) + p_p(t), \quad (3.49)$$

onde $p_p(t)$ é a solução particular, com as constantes c_{free} e γ dependentes das condições iniciais.

Para calcular a solução particular considere a proposta de solução

$$p_p(t) = m \operatorname{sen}(f_i t + \gamma_i), \quad (3.50)$$

onde m é uma constante arbitrária. As derivadas de primeira e segunda ordem são

$$\dot{p}_p(t) = m f_i \cos(f_i t + \gamma_i), \quad (3.51)$$

$$\ddot{p}_p(t) = -m f_i^2 \operatorname{sen}(f_i t + \gamma_i). \quad (3.52)$$

Substituindo-as em (3.35), tem-se

$$-m f_i^2 \operatorname{sen}(f_i t + \gamma) + B^2 m \operatorname{sen}(f_i t + \gamma) = \mu_j (B - f_i) \operatorname{sen}(f_i t + \gamma_i), \quad (3.53)$$

$$(-f_i + B^2)m = \mu_j (B - f_i),$$

$$(B + f_i)(B - f_i)p_p = \mu_j (B - f_i),$$

$$m = \frac{\mu_j}{(B + f_i)}.$$

Logo

$$p(t) = c_{free} \operatorname{sen}(-Bt + \gamma) + \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_j}{(B + f_i)} \operatorname{sen}(f_i t + \gamma_i), \quad (3.54)$$

ou ainda

$$p(t) = \cos\left(\frac{I_{free}}{2}\right) \operatorname{sen}(-Bt + \gamma) + \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_j}{(B + f_i)} \operatorname{sen}(f_i t + \gamma_i) \quad (3.55)$$

A solução completa para a EDO $\ddot{q}$ tem a forma

$$q(t) = c_{free} \cos(-Bt + \gamma) + q_p(t) \quad (3.56)$$

onde $q_p(t)$ é a solução particular. Para obter a solução particular considere a proposta de solução

$$q_p(t) = d \cos(f_i t + \gamma_i), \quad (3.57)$$

onde d é uma constante arbitrária. Derivando

$$\dot{q}_p(t) = -df_i \sin(f_i t + \gamma_i), \quad (3.58)$$

$$\ddot{q}_p(t) = -df_i^2 \cos(f_i t + \gamma_i).$$

Substituindo em (3.36), obtém-se

$$-df_i^2 \cos(f_i t + \gamma) + {}^2 d \cos(f_i t + \gamma) = \mu_j (B - 4f_i) \cos(f_i t + \gamma_i),$$

$$(-f_i + B^2)d = \mu_j (B - f_i),$$

$$(B + f_i)(B - f_i)d = \mu_j (B - f_i),$$

$$d = \frac{\mu_j}{(B + f_i)}. \quad (3.59)$$

Assim,

$$q(t) = c_{free} \cos(-Bt + \gamma) + \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_j}{(B + f_i)} \cos(f_i t + \gamma_i), \quad (3.60)$$

ou ainda

$$q(t) = \cos\left(\frac{I_{free}}{2}\right) \cos(-Bt + \gamma) + \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_j}{(B + f_i)} \cos(f_i t + \gamma_i). \quad (3.61)$$

A frequência da partícula teste em (3.13) depende da sua localização, das massas dos planetas e da massa do Sol. As constantes de integração e_{free} , ϖ_{free} , c_{free} e Ω_{free} são chamadas de excentricidade própria, longitude própria do periélio, inclinação própria e longitude do nodo ascendente própria, respectivamente.

Para a uma partícula teste em movimento retrógrado, pode-se observar pelas soluções encontradas em (3.42) e (3.48) ou em (3.54) e (3.60) que $A + g_i \approx 0$ e $B + f_i \approx 0$. Isto é, as ressonâncias seculares ocorrem quando $A = -g_i$ e $B = -f_i$ a teoria linear para ressonâncias seculares de corpos em movimento retrógrado abrange valores negativos de autofrequências do sistema.

A Figura 3.2 apresenta o comportamento da frequência A da partícula teste resultante das interações gravitacionais com os 8 planetas do Sistema Solar. As retas horizontais são obtidas a partir dos valores das frequências dos planetas.

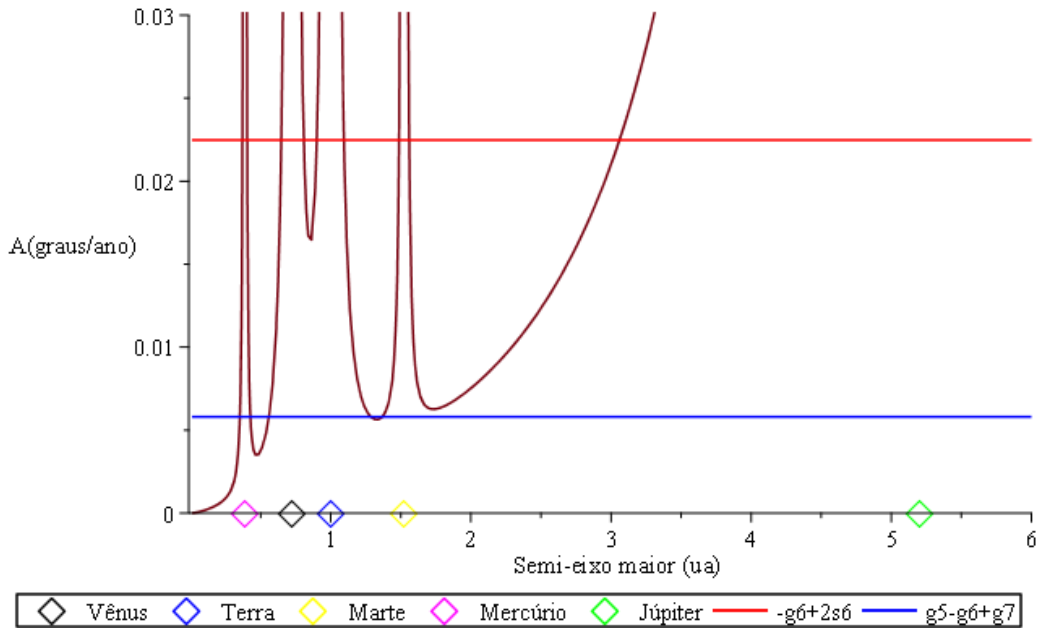


Figura 3.1: Frequência A em função do semi-eixo maior a (ua).

Por meio das frequências fornecidas na Tabela (B.4), pode-se determinar as localizações das ressonâncias seculares. Para confirmar suas localizações no espaço obtidas pelo modelo analítico, utiliza-se o integrador numérico de N-corpos MERCURY [2] que fornece as librações dos ângulos seculares. Utiliza-se como condições iniciais os valores teóricos e analisa-se a evolução dos parâmetros orbitais ao longo do tempo. A intersecção da curva com as retas horizontais fornece a localização no espaço das ressonâncias seculares.

3.1.1 Simulação Numérica

A partir das condições iniciais fornecida pelo modelo analítico foi possível identificar as localizações das ressonâncias seculares. Os resultados a seguir [10] foram obtidos por meio de simulação numérica utilizando o software Mercury6.

A libração do ângulo secular inicia-se em 1×10^7 anos até aproximadamente $1,7 \times 10^7$. É possível observar que a excentricidade aumenta simultaneamente com a libração deste ângulo. Ao final da libração, a curva em preto passa a circular. As partículas testes em órbita retrógrada experienciam as ressonâncias seculares quando suas frequências de precessão são próximas ou iguais às frequências de precessão dos planetas do Sistema Solar, entretanto com sinal oposto, pois quando $A + g_i \approx 0$ e $B + f_i \approx 0$.

Para uma partícula teste que atravessa uma ressonância secular do tipo A , ou seja, ressonância secular relacionada à longitude do pericentro o parâmetro angular que será excitado será a excentricidade. Para uma partícula teste que atravessa uma ressonância secular do tipo B , ou seja, ressonância secular relacionada à longitude do nodo ascendente o parâmetro angular que será excitado será a inclinação. É possível observar numericamente um aumento da excentricidade ou inclinação no momento em que se observa a libração do ângulo secular.

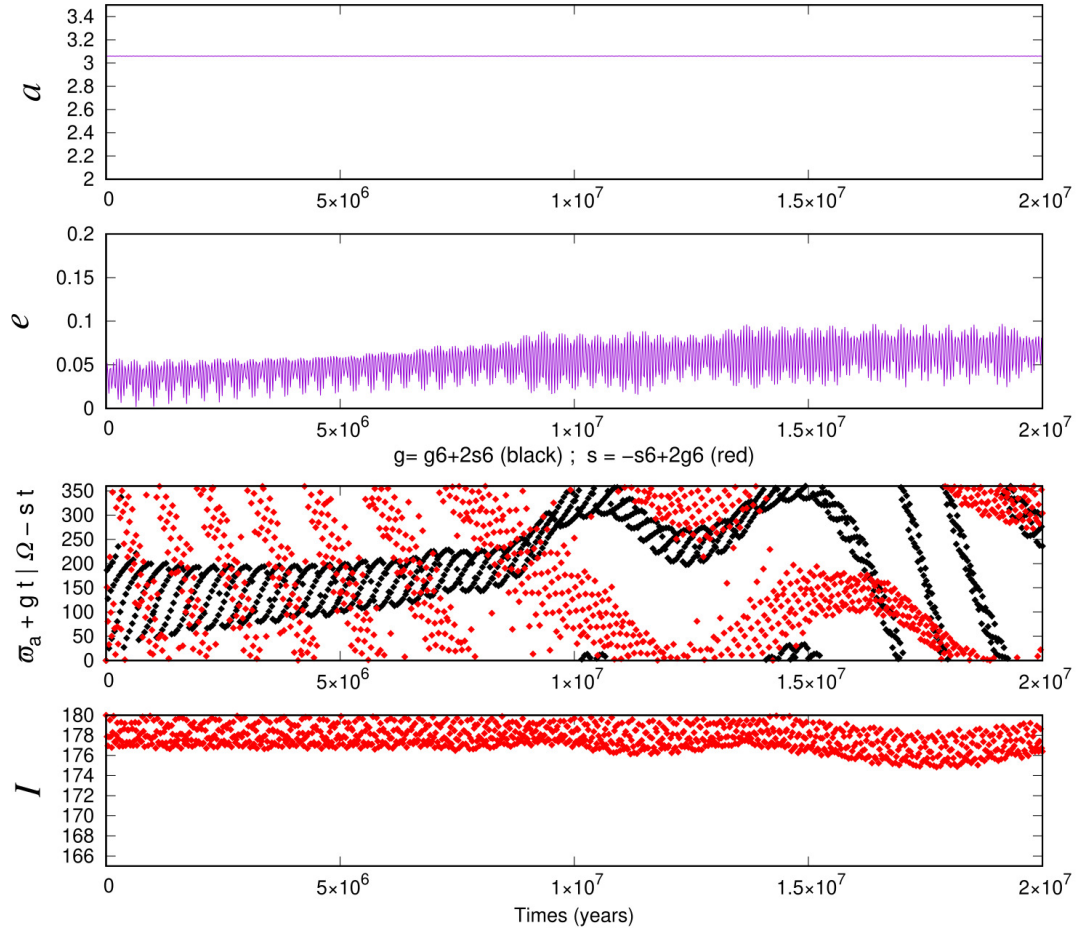


Figura 3.2: Curva em preto: Semi-eixo: 3,059 UA, Inclinação: 180° , Excentricidade: 0,01. Curva em preto: frequência: $-g_6 + 2s_6$. Curva em vermelho: frequência: $-s_6 + 2g_6$.

4 Dinâmica Secular Não Linear para Órbitas Prógradas

A modelagem do movimento dos corpos celestes cuja dinâmica é caracterizada por longo período pode ser estudada através da função perturbadora gerada pela análise das interações gravitacionais entre os planetas do sistema em estudo, como demonstrado nos capítulos 2 e 3.

Os trabalhos [8] e [24] demonstraram por meio de simulações numéricas de N-corpos a distribuição dos asteroides próximos às ressonâncias seculares ν_5 , ν_6 no intervalo 1.5 UA a 3.5 UA, e apontaram que a distribuição dos asteroides sobreviventes nas proximidades de ν_{16} possuem uma alta variação de inclinação, de $I = 0^\circ$ até $I = 40^\circ$. No Sistema Solar as ressonâncias seculares são um importante mecanismo para explicar a instabilidade e o transporte de asteroides entre diferentes regiões, uma vez que tais ressonâncias são responsáveis pela excitação das excentricidades e ou inclinações dos corpos.

4.1 Equações de movimento para as variáveis h e k

Para obtenção das equações de movimento de um corpo prógrado foi considerado termos de até quarta ordem nas excentricidades e de segunda ordem nas inclinações para a função perturbadora da partícula teste [24]. Com esta nova função perturbadora, é possível obter as soluções das suas equações de movimento por meio das equações planetárias de Lagrange. As variáveis a, e, I, Ω, ϖ correspondem à partícula teste e $a_j, e_j, I_j, \Omega_j, \varpi_j$ são referentes às quantidades dos corpos secundários.

A expansão da função perturbadora fornecida em [24] é dada por

$$R = \sum_{j=1}^8 Gm_j [A_j e^2 + B_j e^4 + C_j \sin^2(I/2) + D_j e^2 \sin^2(I/2) + E_j e e_j \cos(\varpi - \varpi_j)], \quad (4.1)$$

ou ainda

$$R = \sum_{j=1}^8 Gm_j [A_j e^2 + B_j e^4 + C_j s^2 + D_j e^2 s^2 + E_j e e_j \cos(\varpi - \varpi_j)], \quad (4.2)$$

onde $s = \sin(I/2)$ e os coeficientes são

$$A_j = \frac{1}{8a'} \alpha b_{3/2}^{(1)}, \quad (4.3)$$

$$B_j = \frac{1}{16a'} \left[\frac{\alpha^3}{2} \frac{d^3 b_{1/2}^{(0)}}{d\alpha^3} + \frac{\alpha^4}{8} \frac{d^4 b_{1/2}^{(0)}}{d\alpha^4} \right], \quad (4.4)$$

$$C_j = -\frac{1}{8a'} \alpha b_{3/2}^{(1)}, \quad (4.5)$$

$$D_j = \frac{1}{16a'} \left[-\alpha b_{3/2}^{(1)} - 2\alpha^2 \frac{db_{3/2}^{(1)}}{d\alpha} - \alpha^3 \frac{d^2 b_{3/2}^{(1)}}{d\alpha^2} \right], \quad (4.6)$$

$$E_j = -\frac{1}{4a'} \alpha b_{3/2}^{(2)}. \quad (4.7)$$

onde $A_j = -C_j$ e α pode assumir os seguintes valores

$$\alpha = \begin{cases} a/a_j & e \quad a' = a_j, \quad \text{se } a_j > a. \\ a_j/a & e \quad a' = a, \quad \text{se } a_j < a, \end{cases} \quad (4.8)$$

Os coeficientes de Laplace são calculados por meio da expressão

$$b_s^{(m)}(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(m\theta)}{(1 - 2\alpha \cos(\theta) + \alpha^2)^s} d\theta, \quad (4.9)$$

e são convergentes quando $\alpha < 1$.

Para obtenção das soluções das equações de movimento realiza-se uma nova transformação, que permite obter uma relação entre as novas variáveis h e k com as antigas variáveis e e ϖ , simplificando assim as equações diferenciais do problema. Reescrevendo (5.1) em termos de h e k e substituindo em (A.9) e (A.15), tem-se

$$R = \sum_{j=1}^8 Gm_j [A_j(h^2 + k^2) + B_j(h^2 + k^2)^2 + C_j \sin^2(I/2) + D_j(h^2 + k^2) \sin^2(I/2) + E_j(hh_j + kk_j)], \quad (4.10)$$

onde $ee_j \cos(\varpi - \varpi_j) = e \cos(\varpi) e_j \cos(\varpi_j) + e \sin(\varpi) e_j \sin(\varpi_j) = (kk_j + hh_j)$.

$$\frac{dh}{dt} = \frac{Gm_j}{na^2} \left(1 - \frac{(h^2 + k^2)}{2} \right) [A_j(2k) + 4B_jk(h^2 + k^2) +$$

$$2D_jk \sin^2(I/2) + E_jk_j + k \operatorname{tg}(I/2)(C_j \sin(I)/2 + D_j(h^2 + k^2) \sin(I)/2)], \quad (4.11)$$

Portanto,

$$\frac{dh}{dt} = bk + ck(h^2 + k^2) - \sum_i d_i \cos(\nu_i t + \beta_i), \quad (4.12)$$

onde

$$b = \frac{1}{na^2} \sum_{j=1}^8 Gm_j (2A_j + 2D_j \sin^2(I/2) + C_j \sin^2(I/2)), \quad (4.13)$$

$$c = \frac{1}{na^2} \sum_{j=1}^8 Gm_j (4B_j - A_j), \quad (4.14)$$

$$d_i = \frac{1}{na^2} \sum_{j=1}^8 Gm_j E_{ji} M_{ji}. \quad (4.15)$$

Os termos selecionados da equação de movimento foram propostos em [24]. Para a variável k são feitos os mesmos passos

$$\frac{dk}{dt} = \frac{Gm_j}{na^2} \left(1 - \frac{(h^2 + k^2)}{2} \right) [-A_j(2h) - 4B_jh(h^2 + k^2) -$$

$$2D_jh \sin^2(I/2) - E_jh_j) - h \operatorname{tg}(I/2)(C_j \sin(I)/2 - D_j(h^2 + k^2) \sin(I)/2)], \quad (4.16)$$

Logo,

$$\frac{dk}{dt} = -bh - ch(h^2 + k^2) + \sum_i d_i \sin(\nu_i t + \beta_i), \quad (4.17)$$

onde

$$b = \frac{1}{na^2} \sum_{j=1}^8 Gm_j(2A_j + 2D_j^2(I) + C_j s^2), \quad (4.18)$$

$$c = \frac{1}{na^2} \sum_{j=1}^8 Gm_j(4B_j - A_j), \quad (4.19)$$

$$d_i = \frac{1}{na^2} \sum_{j=1}^8 Gm_j E_{ji} M_{ji}. \quad (4.20)$$

A partir da expressão (4.13) é possível obter as localizações das ressonâncias seculares em função da inclinação e do semi-eixo-maior, como mostradas nas figuras 4.1 e 4.2. Entretanto, este modelo analítico tem uma limitação, pois envolve pequenas excentricidades.

As curvas da Figura 4.2 mostram valores para as frequências b em função do semi-eixo maior a para valores fixos de inclinação.

As figuras 4.1 e 4.2 reproduz resultados já conhecidos sobre ressonâncias seculares para o caso não linear na literatura, o que valida o uso dele para estudar dinâmicas prógradas e retrógradas.

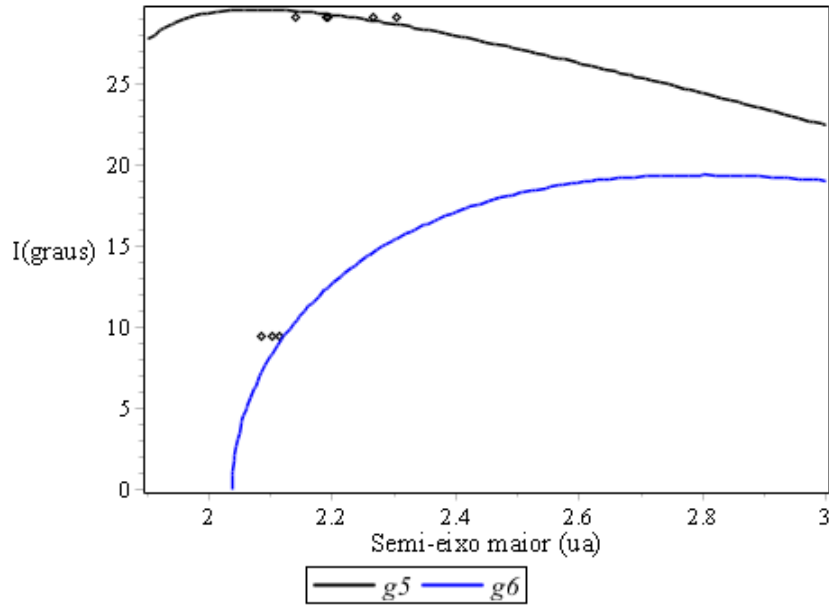


Figura 4.1: Valores da frequência b no plano I e a para órbita prógrada. As curvas possuem os valores $b = g_5$ e $b = g_6$. Os pontos pretos representam as localizações das ressonâncias seculares identificadas através de simulações numéricas.

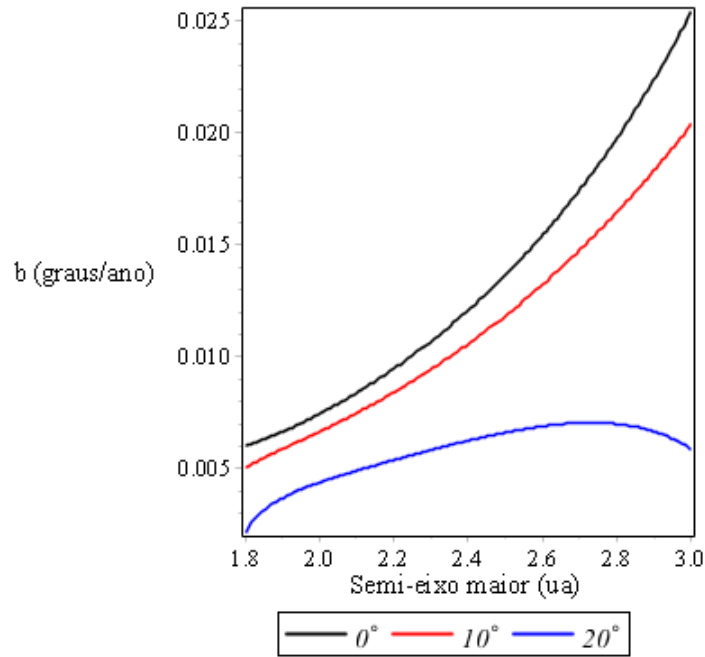


Figura 4.2: Valores da frequência b em função do semi-eixo-maior a para órbita prógrada.

No trabalho [19], as frequências de precessão do Sistema Solar foram obtidas por meio da Análise de Fourier, sendo possível observar valores de frequências positivas

e negativas. A teoria linear para órbitas prógradas indica que $A \approx +g_i$, isto é, utiliza-se somente frequências positivas. Entretanto, neste trabalho obteve-se um novo resultado. A partir da construção da superfície referente às frequências b em função de todo o intervalo de inclinações para órbita prógrada, isto é, $0^\circ < I < 90^\circ$ obtido a partir da expressão (4.18) têm-se frequências positivas e negativas.

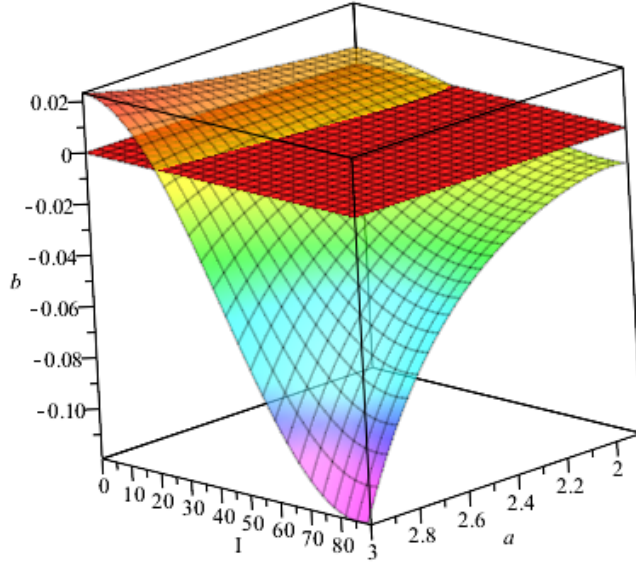


Figura 4.3: Valores da frequência b no plano I e a para órbita prógrada.

O plano (em vermelho) na figura 4.3 foi inserido para auxiliar na visualização das frequências positivas e negativas obtidas por meio da expressão b .

4.1.1 Simulação Numérica

A partir das condições iniciais fornecidas pelo modelo analítico foi possível identificar ressonâncias seculares. O resultado a seguir foi obtido por meio de uma simulação numérica utilizando o software Mercury6.

A ressonância secular linear é um importante mecanismo de transporte e ejeção de pequenos objetos como asteroides, cometas e luas. Estes pequenos corpos em órbita prógrada experienciam as ressonâncias seculares quando suas frequências de precessão são próximas ou iguais às frequências de precessão dos planetas do Sistema Solar, isto é, quando $A - g_i \approx 0$ e $B - f_i \approx 0$. A teoria linear limita o estudo da dinâmica de corpos

celestes a pequenas excentricidades e inclinações.

Para uma partícula teste que atravessa uma ressonância secular do tipo A , ou seja, ressonância secular relacionada à longitude do pericentro, o parâmetro angular que será excitado será a excentricidade.

Verifica-se na maioria dos resultados das simulações presentes nas figuras a seguir que a excentricidade está em fase com o ângulo secular, isto é, quando o ângulo está librando a taxa de variação da excentricidade aumenta, e quando o ângulo secular está circulando a taxa de variação da excentricidade diminui.

Na Figura 4.4 é possível observar a libração do ângulo secular acompanhada do aumento expressivo da excentricidade. A libração deste ângulo está presente nos intervalos de 0 ano a $1,7 \times 10^6$ ano, 3×10^6 anos a 4×10^6 anos e $4,4 \times 10^6$ anos a 5×10^6 anos. Nestes intervalos onde foi possível observar a libração do ângulo secular houve aumento da excentricidade de 0,075 chegando a 0,3. Entre os intervalos de libração ocorreu circulação do ângulo acompanhada com diminuição da excentricidade. O semi-eixo maior não variou ao longo da simulação o que confirma a natureza do comportamento secular. A inclinação varia ao longo do movimento em torno de $29,1^\circ$. Na Figura 4.5 é possível observar a libração do ângulo secular acompanhada do aumento expressivo da excentricidade nos intervalos 1×10^6 ano a 2×10^6 anos e $4,2 \times 10^6$ anos a $5,5 \times 10^6$ anos. Nestes intervalos onde foi possível observar a libração do ângulo secular houve aumento da excentricidade de 0 chegando a 0,4. Entre os intervalos de libração ocorreu circulação do ângulo acompanhada com diminuição da variação excentricidade. O semi-eixo maior não variou ao longo da simulação. A inclinação varia ao longo do movimento em torno de $29,1^\circ$. Já na Figura 4.6 é possível observar a libração do ângulo secular acompanhada do aumento da excentricidade desde o começo da simulação até aproximadamente $4,2 \times 10^6$ anos. Nestes intervalos onde foi possível observar a libração do ângulo secular houve aumento grau de variação da excentricidade de 0,012 chegando a 0,3. A partir de $4,2 \times 10^6$ anos o ângulo passa a circular e a taxa de variação da excentricidade diminui. O semi-eixo maior se manteve constante ao longo da simulação. É possível observar a diminuição da inclinação no momento que o ângulo secular passa a circular e isso pode acontecer nas próximas simulações. Não está claro o motivo deste fenômeno ocorrer. Estes resultados só avaliam a libração do ângulo secular e não outros fenômenos que podem ocorrer

simultaneamente.

A libração do ângulo secular visto na Figura 4.7 está presente nos intervalos $1,2 \times 10^6$ ano a $1,8 \times 10^6$ ano, $2,5 \times 10^6$ anos a $3,2 \times 10^6$ anos e $3,5 \times 10^6$ anos a $4,8 \times 10^6$ anos. O aumento da excentricidade ocorreu em fase com o ângulo secular, variando de 0,048 até aproximadamente 0,5. Entre as librações há circulação do ângulo acompanhada de diminuição do grau de variação da excentricidade. A inclinação varia em torno do valor $29,1^\circ$ que foi utilizado como parâmetro inicial nas integrações. Na Figura 4.8 observa-se o efeito da ressonância secular a partir de $1,4 \times 10^6$ anos seguidas de circulações em $2,6 \times 10^6$ anos, $3,5 \times 10^6$ anos e 4×10^6 anos seguida de um decréscimo da taxa de variação da excentricidade ao longo do tempo. O aumento da excentricidade ocorreu em fase com o ângulo secular. O semi-eixo maior se manteve constante ao longo da simulação o que confirma a natureza do comportamento secular. A inclinação pouco varia, o que confere com a teoria secular uma vez que a frequência em análise é a g_5 (relacionada a longitude do pericentro) de Júpiter.

Na Figura 4.9 o aumento da excentricidade ocorreu em fase com o ângulo secular, isto é, quando o ângulo secular librava a excentricidade aumentava simultaneamente. O semi-eixo maior permanece invariante ao longo da integração e a inclinação aumentou sutilmente e em fase com o ângulo secular estava a librar. A libração ocorre nos intervalos aproximados $1,6 \times 10^6$ ano a $1,7 \times 10^6$ ano, $2,2 \times 10^6$ anos a $2,5 \times 10^6$ anos, $2,9 \times 10^6$ anos a $3,3 \times 10^6$ anos, $3,7 \times 10^6$ anos a $2,6 \times 10^6$ anos a $4,3 \times 10^6$ anos, $4,5 \times 10^6$ anos a 5×10^6 anos e 5×10^6 anos a $5,5 \times 10^6$ anos. A inclinação varia muito pouco, o que confere com a teoria secular uma vez que a frequência em análise é a g_5 (relacionada a longitude do pericentro) de Júpiter.

A Figura 4.10 também exibe libração nos intervalos aproximados de $1,2 \times 10^6$ ano a $1,6 \times 10^6$ ano, 2×10^6 anos a $2,5 \times 10^6$ anos, $2,6 \times 10^6$ anos a $4,2 \times 10^6$ anos e 5×10^6 anos a $5,5 \times 10^6$ anos acompanhada de aumento na taxa de variação da excentricidades. Entre estes intervalos há circulação do ângulo junto com decréscimo da variação da excentricidade. A inclinação oscila próximo ao valor de $29,1^\circ$ e o semi-eixo maior permanece constante em toda a integração.

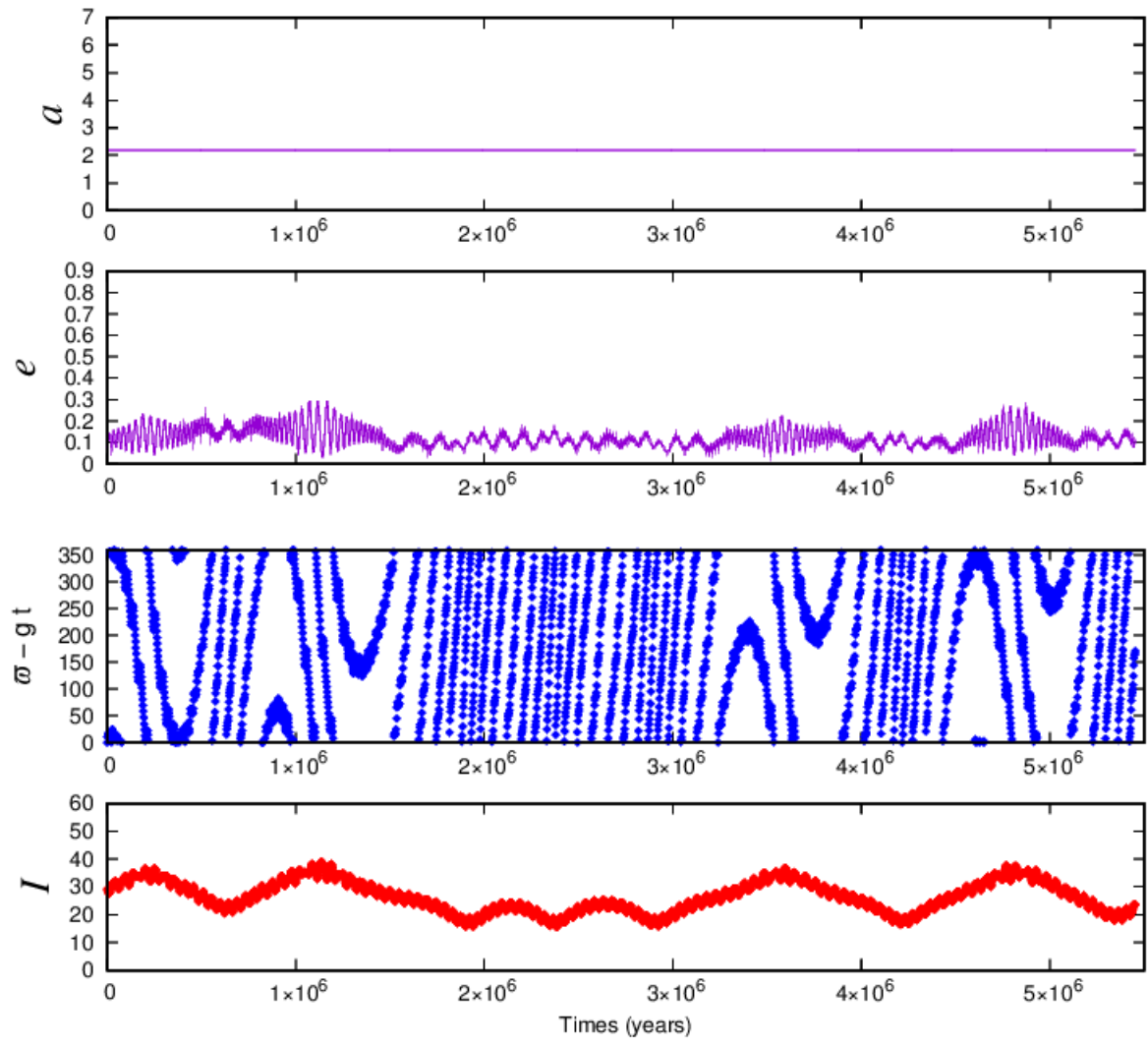


Figura 4.4: Semi-eixo: 2,1932 ua, Inclinação: $29,1^\circ$, Excentricidade: 0,07491 e Frequência: g_6 .

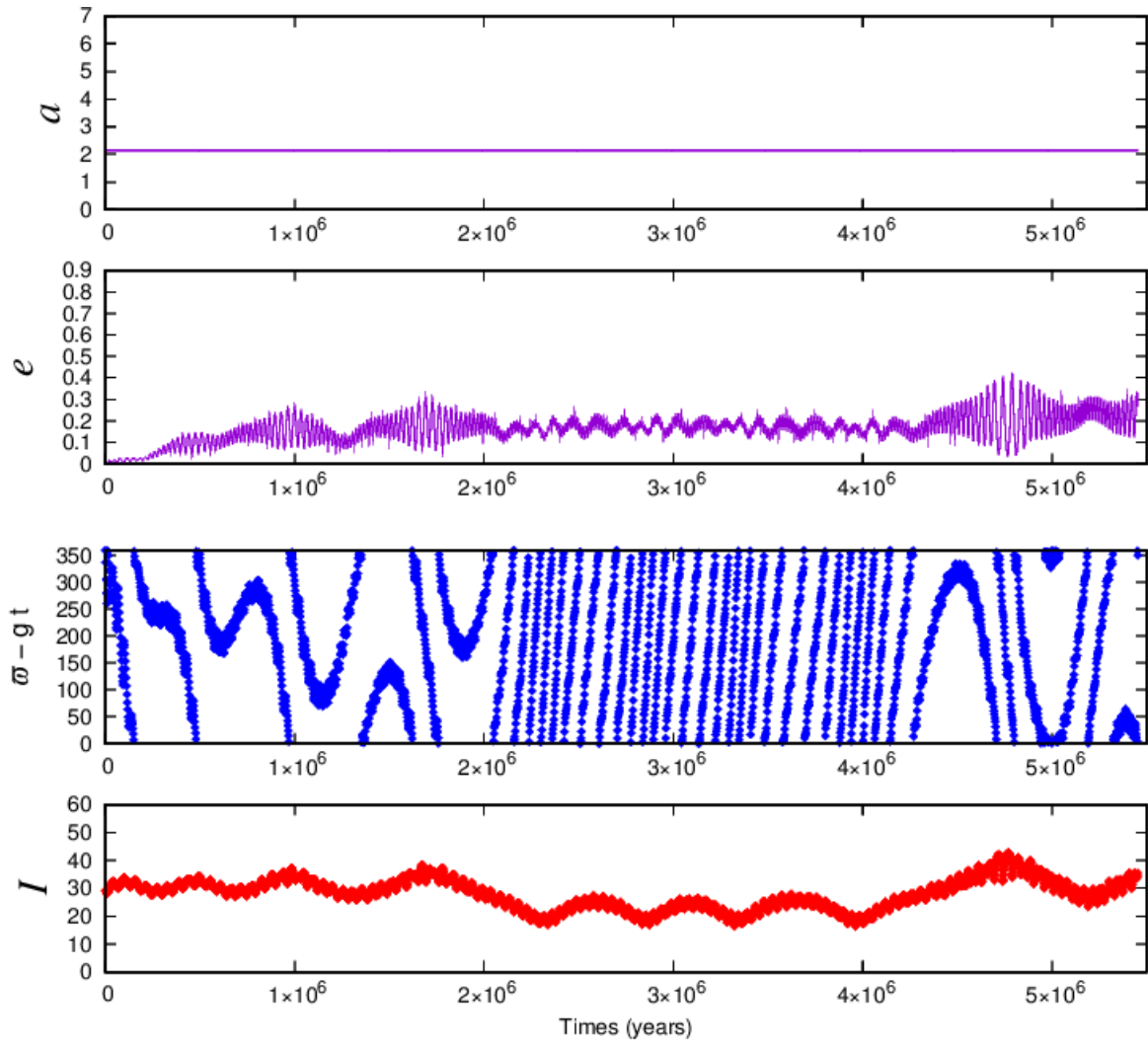


Figura 4.5: Semi-eixo: 2,1421 ua, Inclinação: $29,1^\circ$, Excentricidade: 0,005044 e Frequência: g_6 .

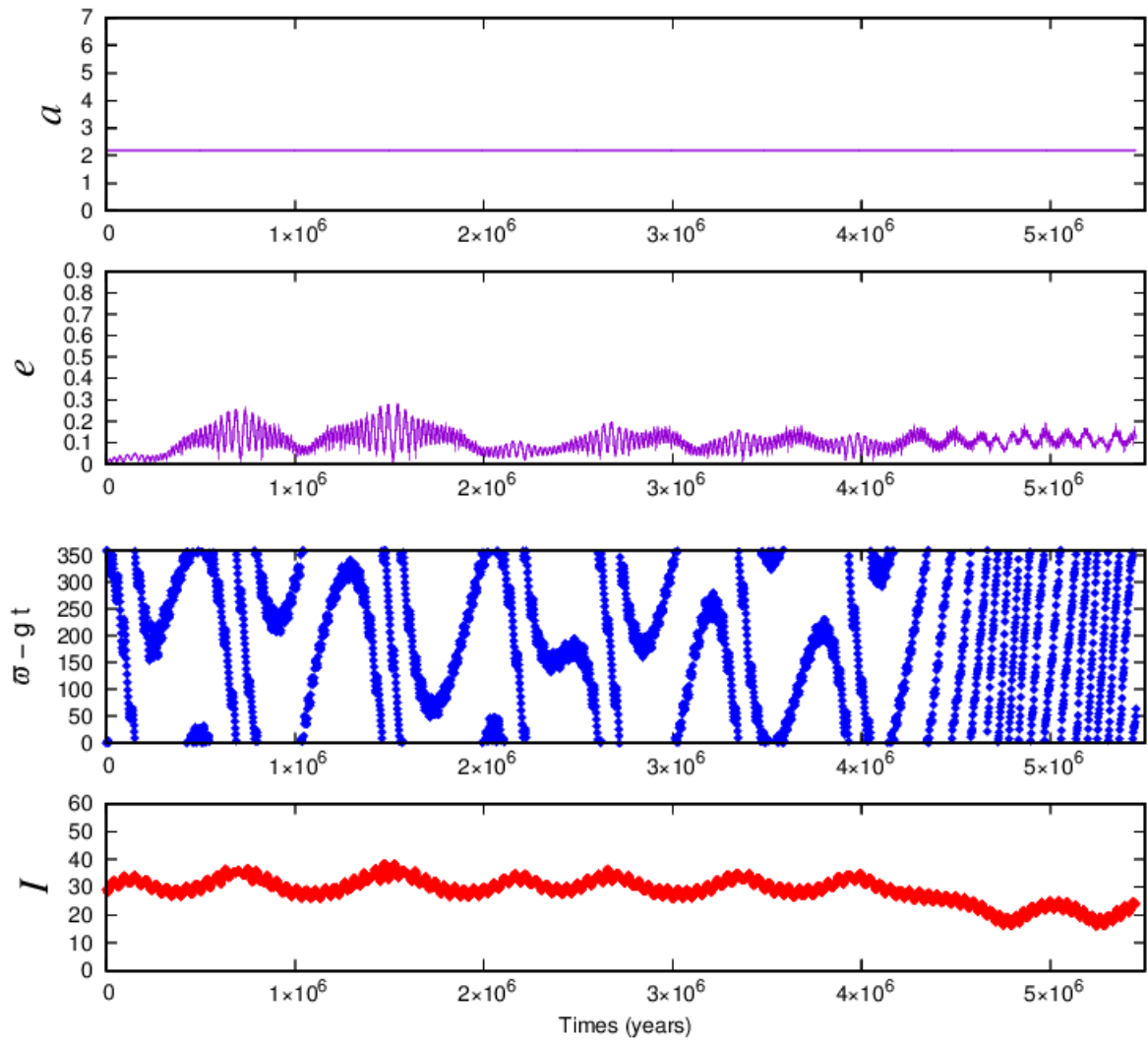


Figura 4.6: Semi-eixo: 2,19035 ua, Inclinação: $29,1^\circ$, Excentricidade: 0,012406 e Frequência: $g6$.

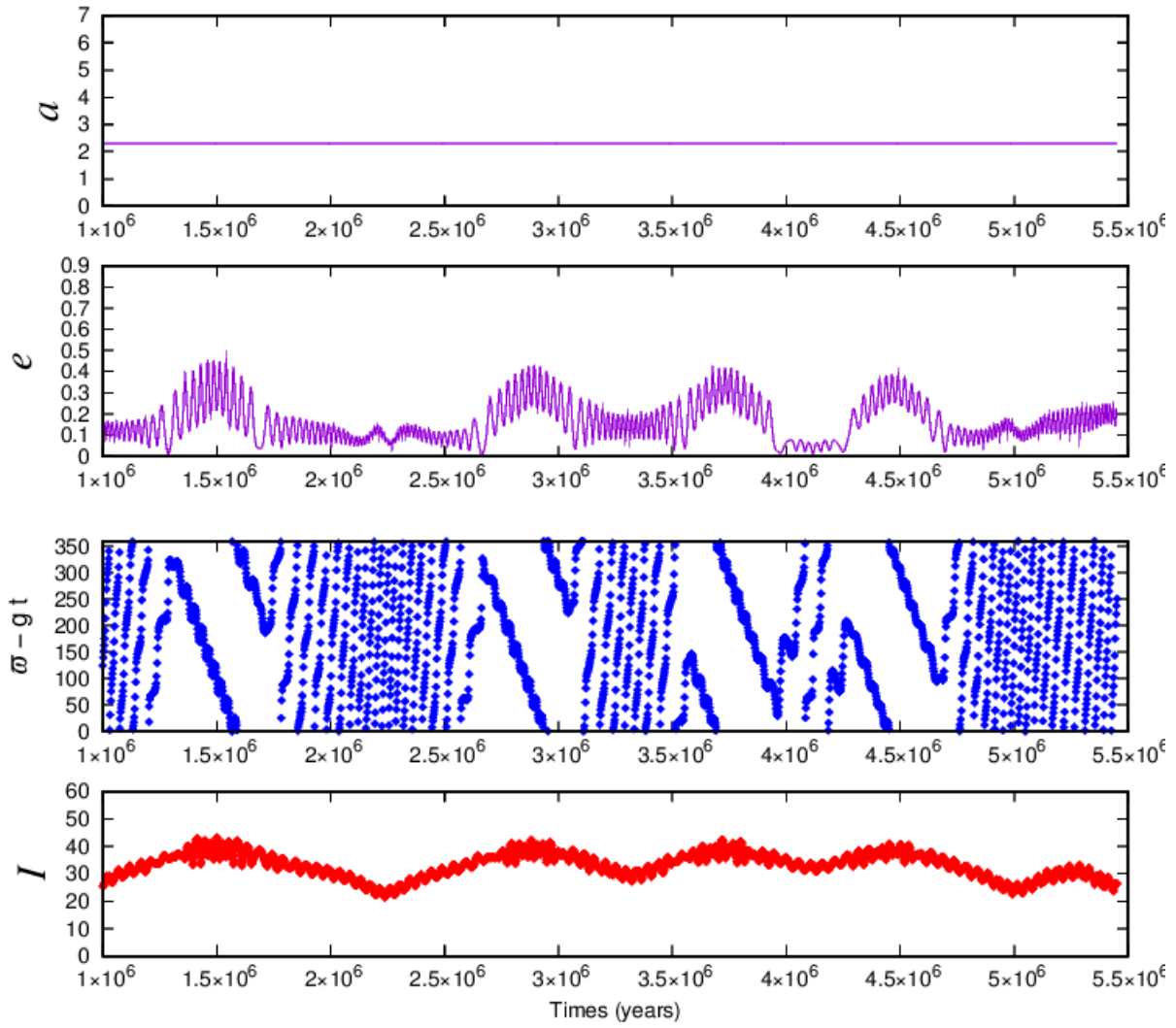


Figura 4.7: Semi-eixo: 2,303457 ua, Inclinação: $29,1^\circ$, Excentricidade: 0,04843 e Frequência: g_5 .

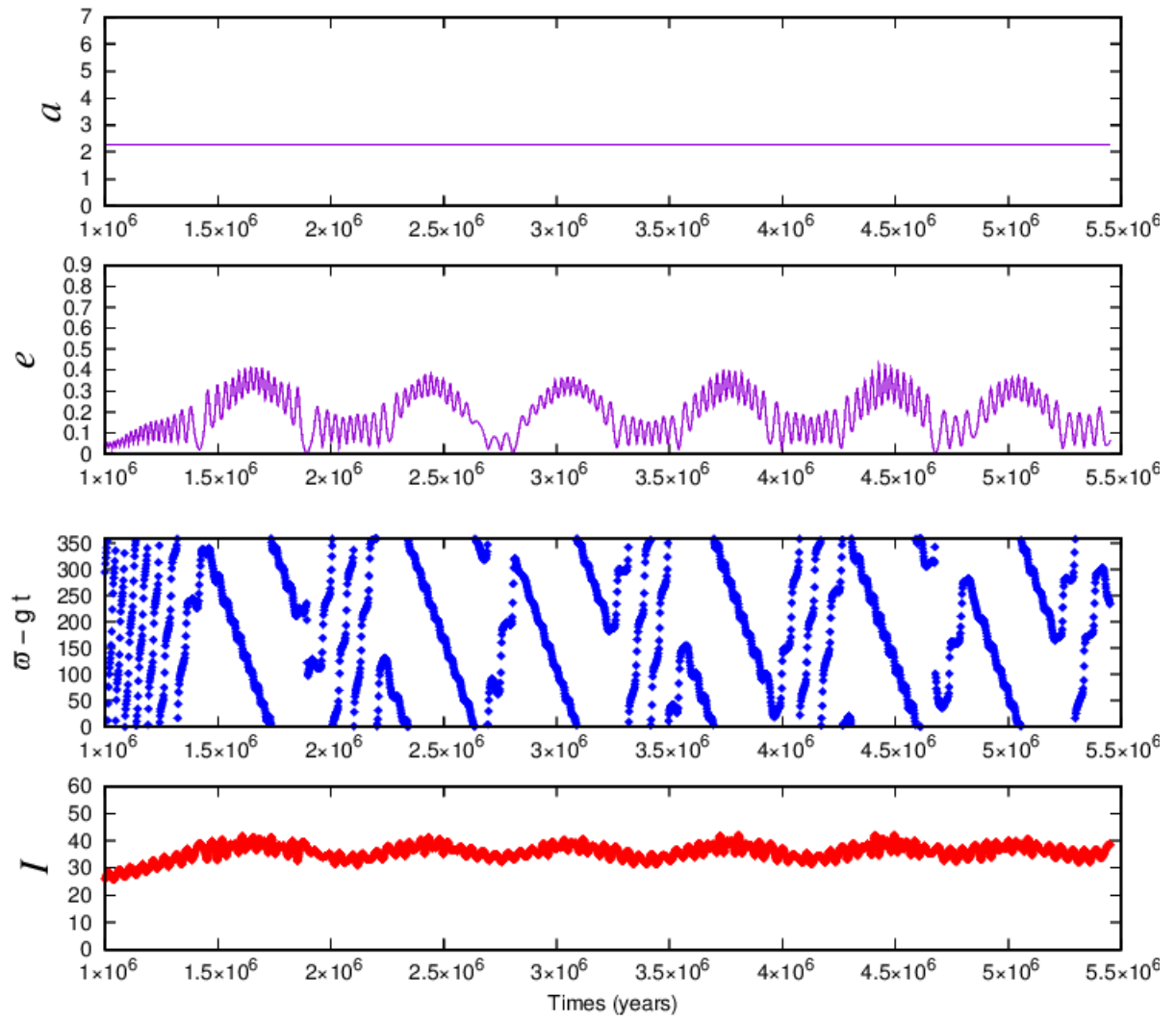


Figura 4.8: Semi-eixo: 2,26489 ua, Inclinação: $29,1^\circ$, Excentricidade: 0,02027 e Frequência: g_5 .

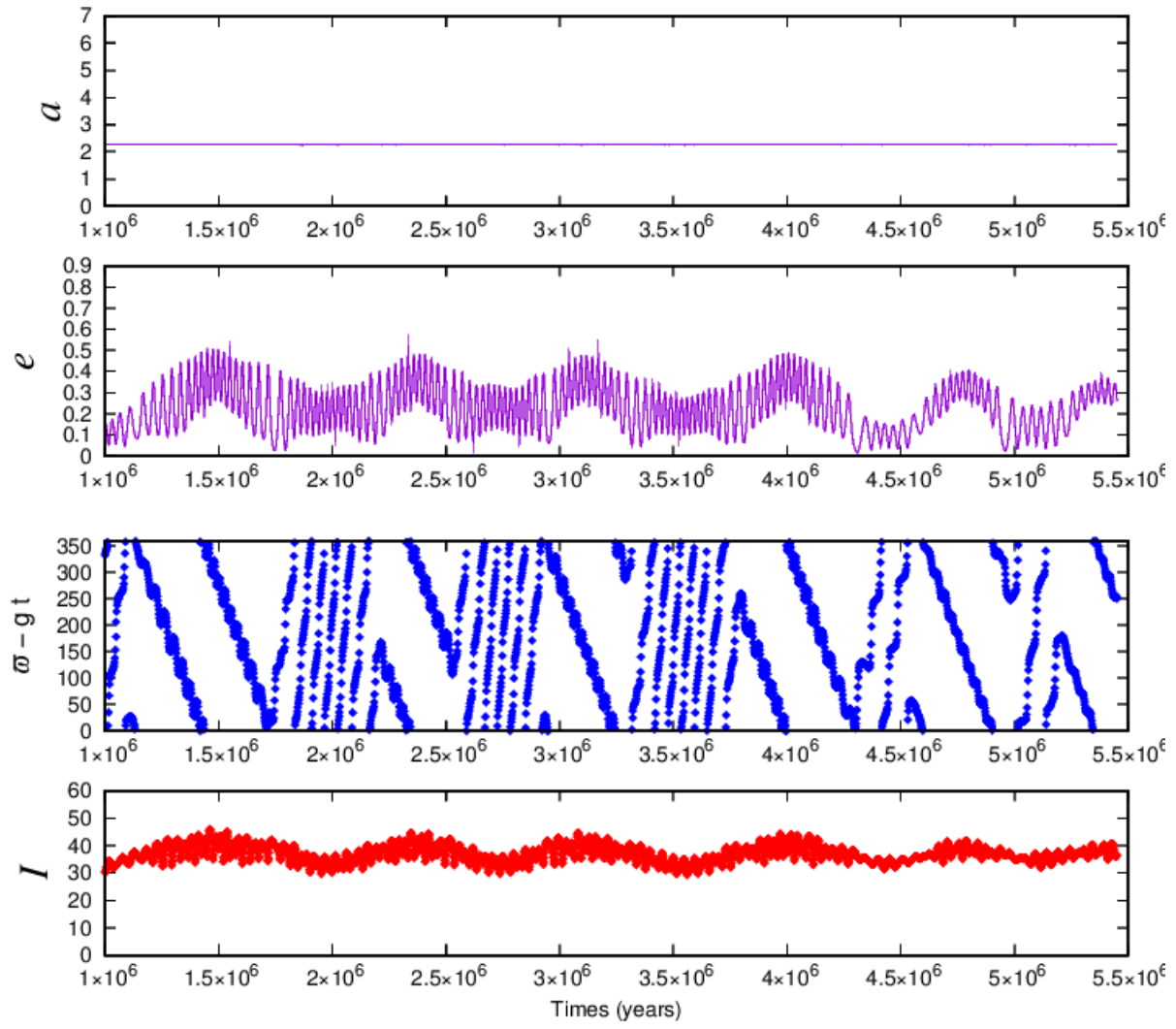


Figura 4.9: Semi-eixo: 2,26461 ua, Inclinação: $29,1^\circ$, Excentricidade: 0,02718 e Frequência: $g5$.

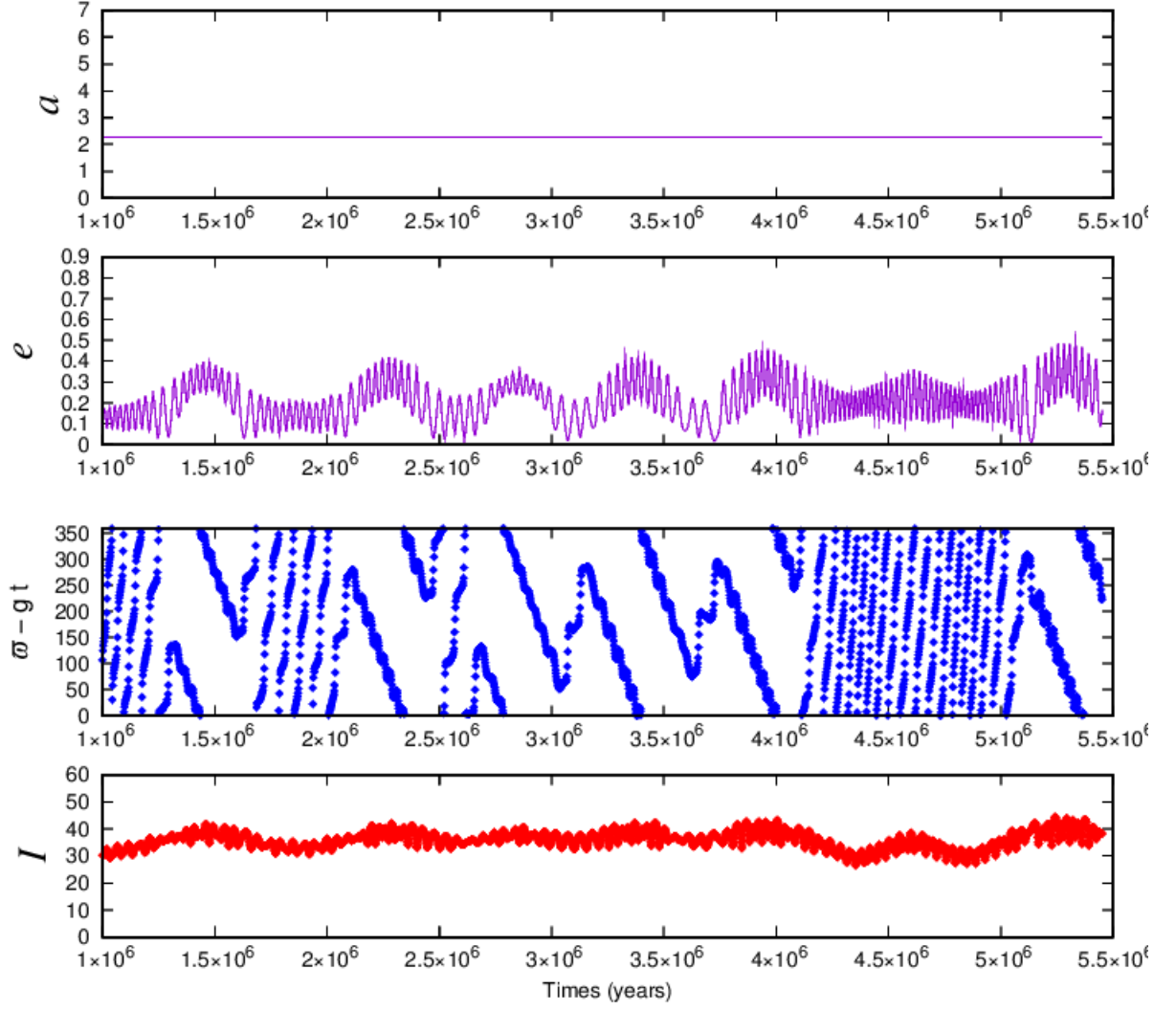


Figura 4.10: Semi-eixo: 2,2705 ua, Inclinação: $29,1^\circ$, Excentricidade: 0,01806 e Frequência: g_5 .

4.2 Equações de movimento para as variáveis p e q

Considere a função perturbadora [6]

$$R = \sum_{j=1}^8 Gm_j [A_j e^2 + C_j \sin^2(I/2) + D_j e^2 \sin^2(I/2) + F_j \sin^4(I) + G_j \sin(I) \sin(I_j) \cos(\Omega - \Omega_j)]. \quad (4.21)$$

Redefinindo as novas variáveis na forma

$$p = s \sin \Omega,$$

$$q = s \cos \Omega.$$

Reescrevendo a função perturbadora nas variáveis p e q , tem-se

$$R = \sum_{j=1}^8 Gm_j [A_j(h^2 + k^2) + C_j(p^2 + q^2) + F_j(p^2 + q^2)^2 + D_j(h^2 + k^2)(p^2 + q^2) + G_j(pp_j + qq_j)], \quad (4.22)$$

onde

$$\begin{aligned} \sin(I) \sin(I_j) \cos(\Omega - \Omega_j) &= \sin(I) \cos(\Omega) \sin(I_j) \cos(\Omega_j) + \\ \sin(I) \sin(\Omega) \sin(I_j) \sin(\Omega_j) &= (pp_j + qq_j). \end{aligned}$$

Expandindo em série de Taylor obtém-se

$$\frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \approx 1 - \frac{e^2}{2}, \quad \cos(I) \approx 1. \quad (4.23)$$

Substituindo (4.22) em (A.66), resulta

$$\frac{dp}{dt} = \sum_{j=1}^8 \frac{Gm_j}{na^2} \left(1 - \frac{e^2}{2}\right) [2qC_j + 4q(p^2 + q^2)F_j + q_jG_j + 2qe^2D_j], \quad (4.24)$$

ou ainda

$$\frac{dp}{dt} = bq + cq(p^2 + q^2) - d_i \cos(f_i t + \gamma_i), \quad (4.25)$$

onde

$$b = \frac{1}{na^2} \sum_{j=1}^8 Gm_j (2C_j + 2D_j e^2), \quad (4.26)$$

$$c = \frac{1}{na^2} \sum_{j=1}^8 Gm_j (4F_j - 2F_j e^2), \quad (4.27)$$

$$d_i = -\frac{1}{na^2} \sum_{j=1}^8 Gm_j (G_j N_{ji}). \quad (4.28)$$

Analogamente, substituindo (4.22) em (A.68) obtém-se

$$\frac{dq}{dt} = \sum_{j=1}^8 \frac{Gm_j}{na^2} \left(1 - \frac{e^2}{2}\right) [2pC_j + 4p(p^2 + q^2)F_j + p_jG_j + 2pe^2D_j], \quad (4.29)$$

ou ainda

$$\frac{dq}{dt} = -bp - cp(p^2 + q^2) + d_i \sin(f_i t + \gamma_i), \quad (4.30)$$

onde

$$b = \frac{1}{na^2} \sum_{j=1}^8 Gm_j (2C_j + 2D_j e^2), \quad (4.31)$$

$$c = \frac{1}{na^2} \sum_{j=1}^8 Gm_j (4F_j - 2F_j e^2), \quad (4.32)$$

$$d_i = -\frac{1}{na^2} \sum_{j=1}^8 Gm_j (G_j N_{ji}). \quad (4.33)$$

É possível obter uma relação entre a presença de asteroides nos cinturões com as ressonâncias seculares tanto em função da excentricidade quanto em função da inclinação. O gráfico da Figura 4.11 mostra as curvas das frequências b no plano $e - a$. Os valores das frequências plotados estão na Tabela B.4.

No trabalho [19], as frequências de precessão do Sistema Solar foram obtidas por meio da Análise de Fourier, sendo possível observar valores de frequências positivas e negativas para as variáveis p e q . A teoria linear para órbitas prógradas indica que $A \approx +g_i \approx -f_i$, isto é, utiliza-se somente frequências negativas para as taxas das frequências de precessão.

A Figura 4.12 exhibe as frequências b no plano $e - a$. Note que este resultado está de acordo com a teoria linear, exibindo somente frequências negativas.

4.2.1 Simulação Numérica

A partir das condições iniciais fornecidas pelo modelo analítico foi possível identificar ressonâncias seculares. Os resultados a seguir foram obtidos por meio de uma

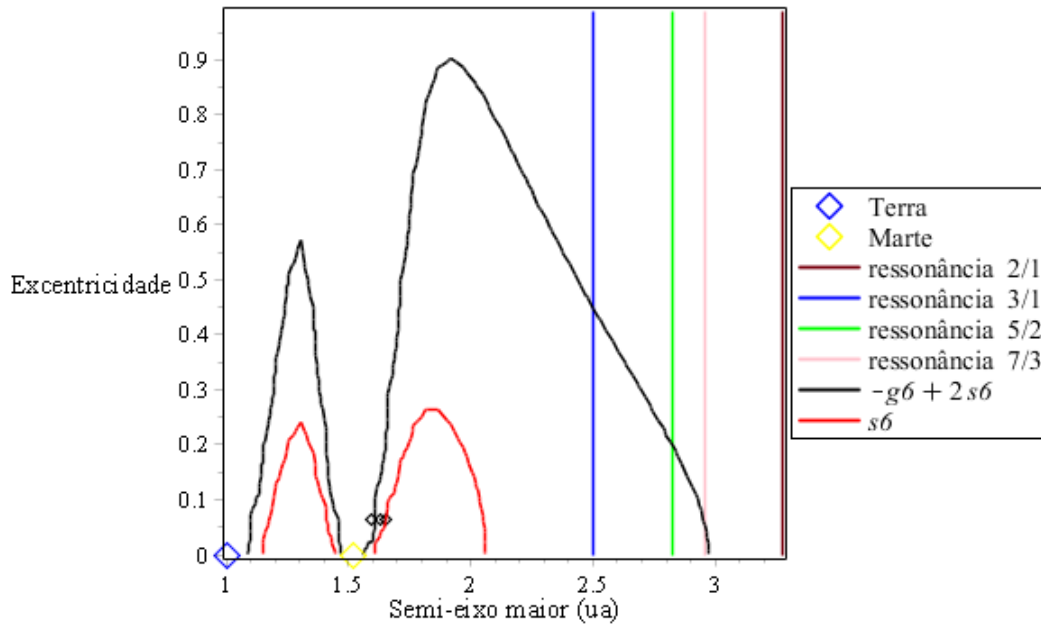


Figura 4.11: Valores dos coeficientes b para movimento prógrado no plano $e - a$.

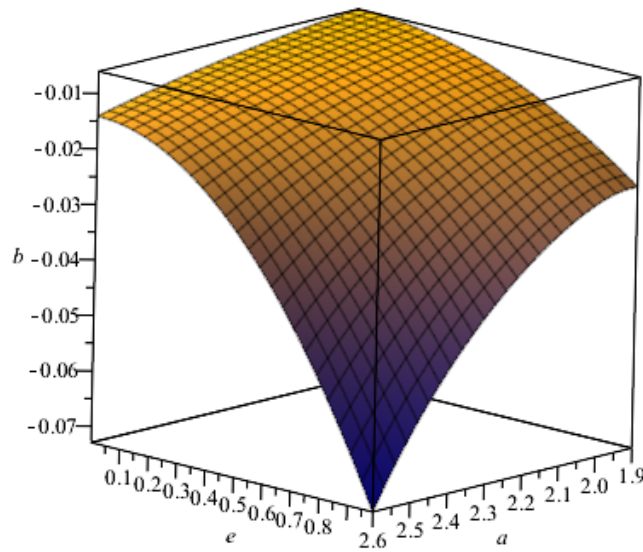


Figura 4.12: Valores dos coeficientes b para movimento prógrado no plano $e - a$.

simulação numérica utilizando o software Mercury6.

Para uma partícula teste que atravessa uma ressonância secular do tipo B , ou seja, ressonância secular relacionada à longitude do nodo ascendente, o parâmetro angular que será excitado será a inclinação. É possível observar numericamente um aumento da

excentricidade ou inclinação no momento em que se observa a libração do ângulo secular. Os pontos presentes na Figura 4.11 são as localizações de onde foram identificadas as librações dos ângulos seculares nas simulações numéricas. As curvas em azul e em preto são as localizações das ressonâncias seculares geradas por meio do modelo analítico.

Nas simulações presentes nas figuras 4.13, 4.14 e 4.15 é possível observar o crescimento abrupto da excentricidade concomitante à libração do ângulo secular, o que não era esperado uma vez que a frequência secular analisada é a s_6 , que por sua vez está associada a taxa de variação da longitude no nodo ascendente de Saturno. A simulação numérica considerou a perturbação gravitacional de todos os 8 planetas do Sistema Solar e fenômenos ressonantes podem estar ocorrendo em conjunto com a ressonância secular. Neste trabalho contemplamos somente a descrição matemática e física da dinâmica secular o que não prejudica o estudo aqui realizado, uma vez que a libração do ângulo secular ocorre de forma clara com semi-eixo maior constante acompanhada da excitação da inclinação.

Na Figura 4.13 a libração do ângulo secular inicia-se em $1,3 \times 10^6$ ano aproximadamente até o final da simulação. O semi-eixo maior permanece constante e a inclinação aumenta significativamente com o início da libração variando de $4,5^\circ$ atingindo o valor de 25° . O comportamento presente na Figura 4.14 é semelhante ao apresentado na simulação anterior. No início da simulação observa-se a circulação do ângulo que passa a librar em aproximadamente 1×10^6 ano acompanhada do aumento da inclinação de $4,17^\circ$ chegando a 15° . O semi-eixo maior permanece constante durante a integração, o que confere com a teoria secular. Já na Figura 4.15 a integração inicia-se com a circulação do ângulo com pouco aumento da inclinação. A libração do ângulo secular inicia-se próximo a $1,6 \times 10^6$ ano junto com aumento expressivo da inclinação que varia ao longo da integração de $2,96^\circ$ chegando a 25° . Semi-eixo maior permanece inalterado.

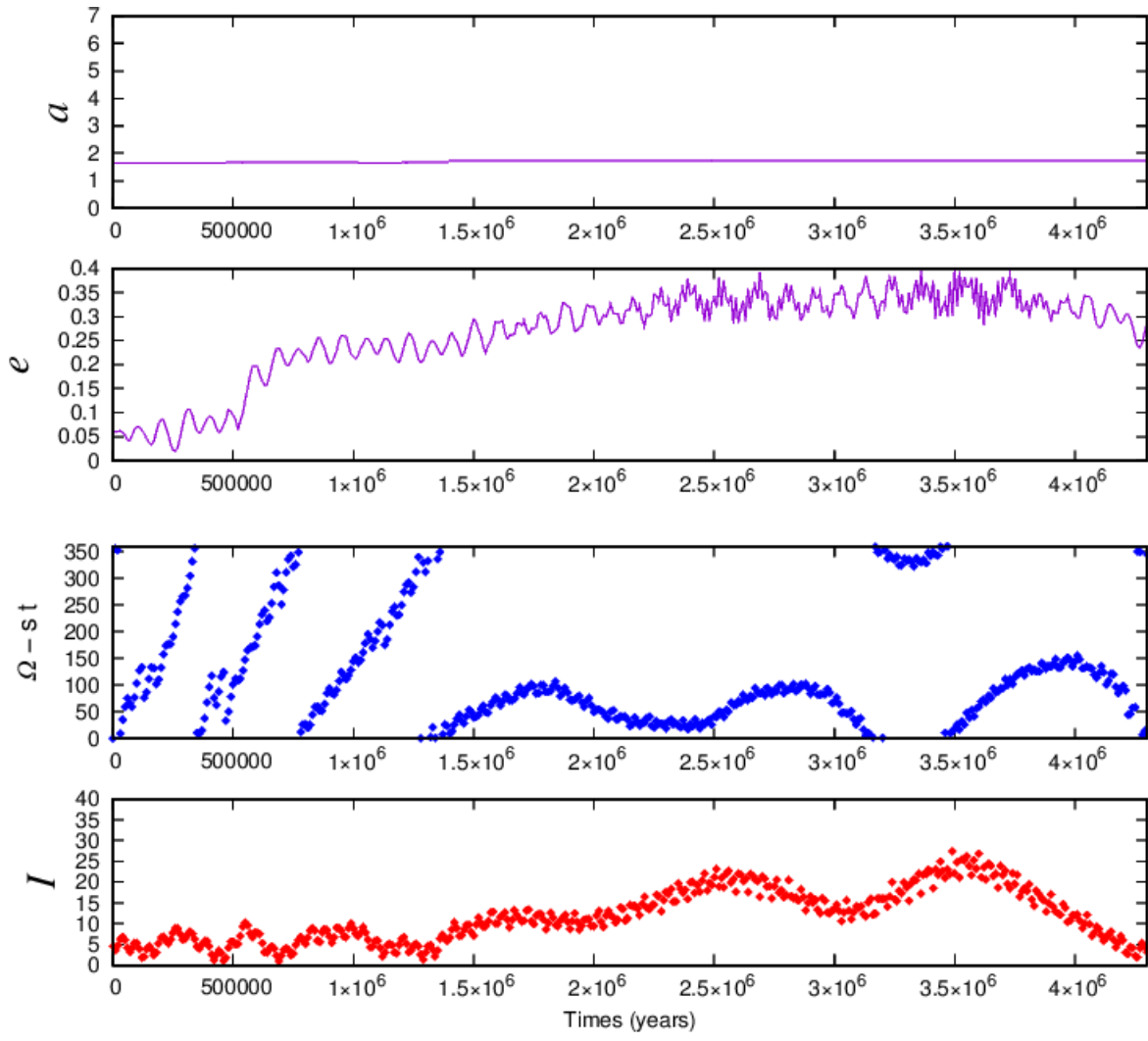


Figura 4.13: Semi-eixo: 1,65135 ua, Excentricidade: 0,0625, Inclinação: 4.5633° e Frequência: s_6 .

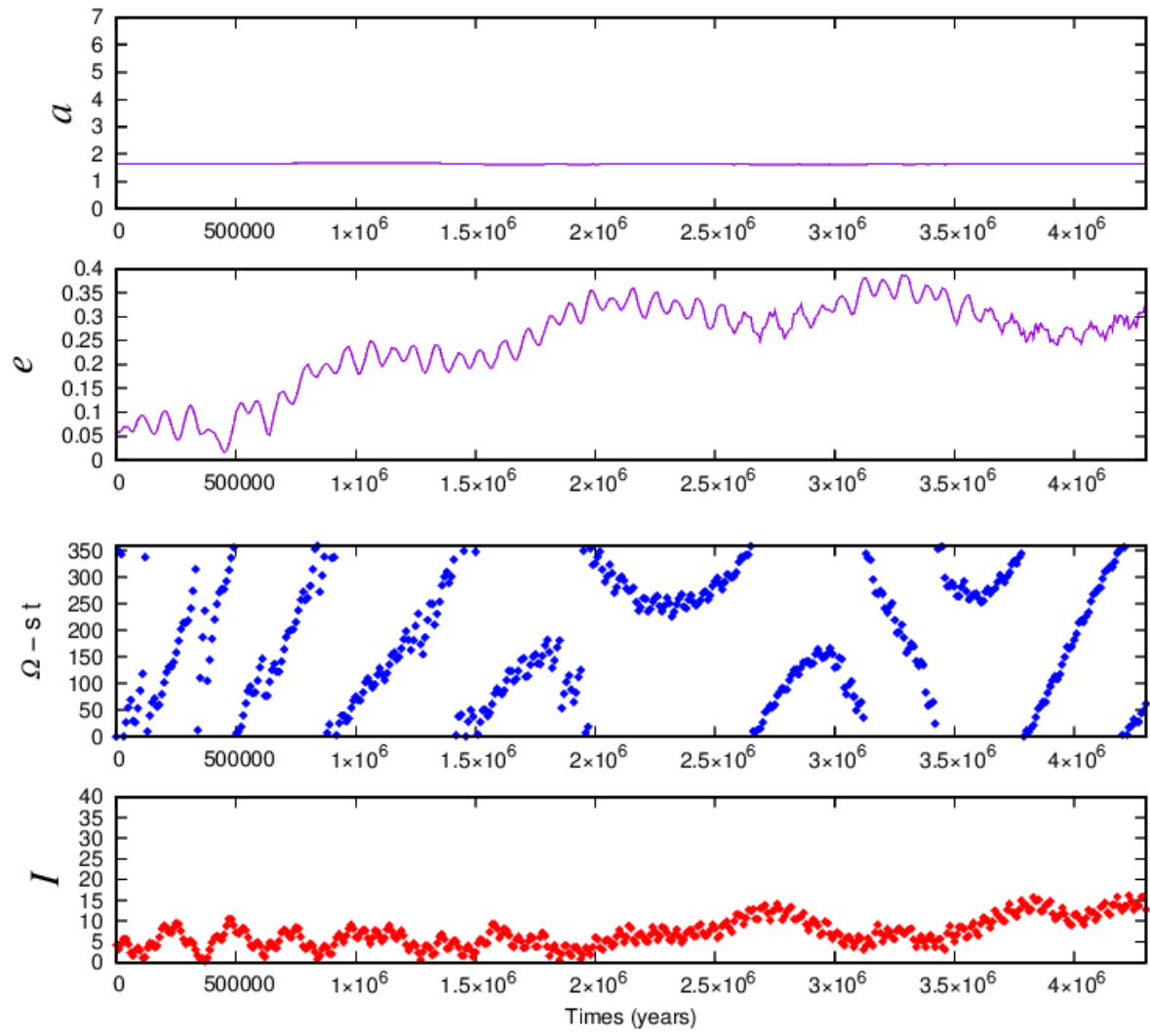


Figura 4.14: Semi-eixo: 1,63277 ua, Excentricidade: 0,0625, Inclinação: $4,1749^\circ$ e Frequência: s_6 .

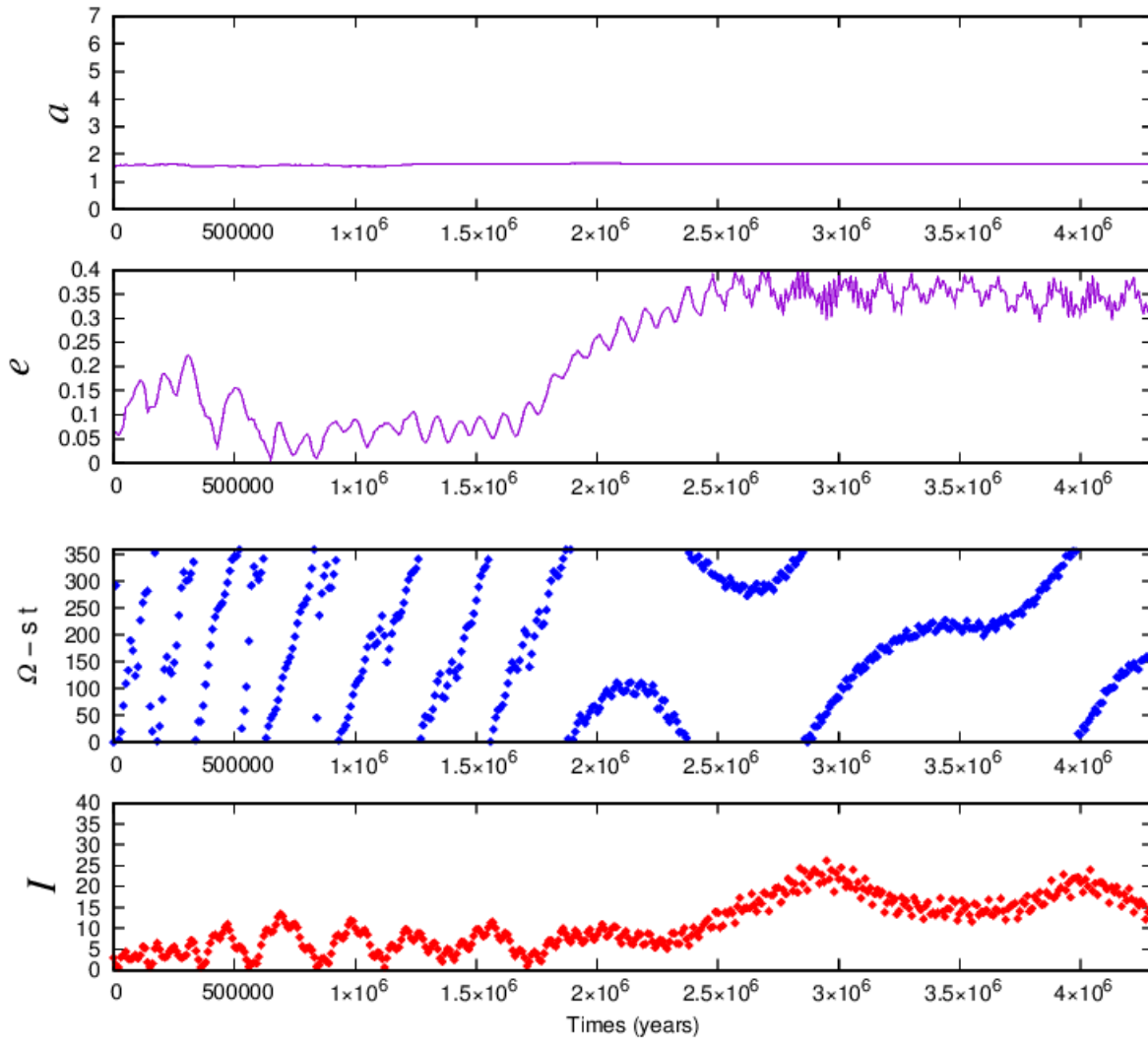


Figura 4.15: Semi-eixo: 1,591263 ua, Excentricidade: 0,0625, Inclinação: $2,9579^\circ$ e Frequência: s_6 .

5 Dinâmica Secular Não Linear para Órbitas Retrógradas

Na literatura, os estudos sobre ressonâncias seculares estavam restritos em sua maioria para orbitas prógradas. Neste capítulo serão mostradas evidências sobre ressonâncias seculares para órbitas retrógradas. Convencionou-se que para órbitas prógradas a inclinação do corpo astronômico esteja restrita ao intervalo de $0^\circ < I < 90^\circ$, e para órbitas em movimento retrógrado no intervalo $90^\circ < I < 180^\circ$.

Mediante o uso de termos de ordem superior, tanto das equações planetárias de Lagrange quanto da função secular, é possível estudar a dinâmica dos corpos celestes cujas órbitas não sejam coplanares e ou circulares.

Por exemplo, asteroides que atravessam a ressonância secular ν_6 podem se tornar NEOs devido ao aumento da sua excentricidade [8]. Já os asteroides localizados próximos a 2 ua, denominados Hungarias, possuem elevada inclinação ($I \approx 20^\circ$), como exibido na Figura 5.1. Estes e outros exemplos citados neste trabalho são algumas das situações que evidenciam a importância de se aprofundar no estudo de órbitas não coplanares.

A teoria de perturbação linear possibilita descrever a dinâmica de corpos celestes para pequenas excentricidades e inclinações. Para objetos cujo movimento não está mais contido no plano é necessário obter uma função perturbadora que contenha termos de ordem superior a dois nas excentricidades e inclinações. É possível desenvolver diferentes funções perturbadoras para descrever um sistema de corpos celestes. A depender da abordagem adotada é possível estudar a dinâmica de um satélite, como por exemplo em

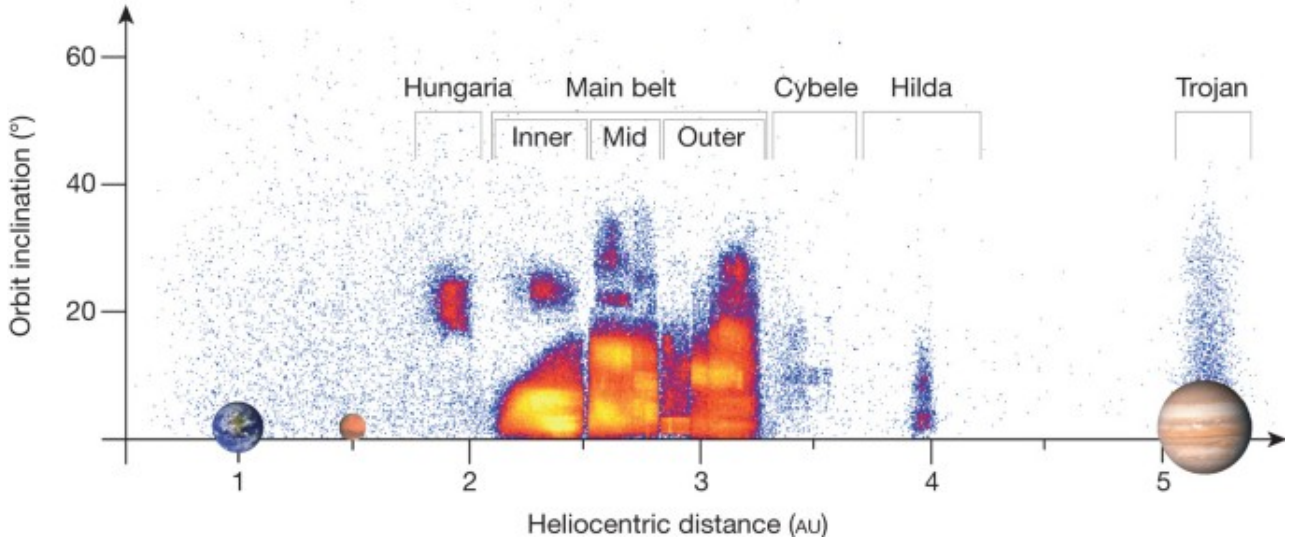


Figura 5.1: Distribuição de asteroides em função da inclinação [1].

[5]. Neste trabalho desenvolveu-se uma função perturbadora para descrever a dinâmica de um satélite perturbado gravitacionalmente por Netuno e seu maior satélite, Tritão. Esta configuração é única no Sistema Solar, uma vez que Tritão tem movimento retrógrado, elevada inclinação e sua presença interfere nas órbitas dos satélites vizinhos. Outros trabalhos que desenvolveram funções perturbadoras para inclinações arbitrárias foram objeto de estudo em [13] e [14].

Órbitas retrógradas no Sistema Solar estão restritas a pequenos corpos como satélites, asteroides e cometas. Tanto os Centauros como os objetos provenientes da nuvem de Oort podem ter órbitas retrógradas com elevadas inclinações. A abordagem analítica explorada em [24] aplicada ao caso da órbita retrógrada permite obter as localizações das ressonâncias seculares.

5.1 Equações de movimento para as variáveis h e k

A expansão da função perturbadora para o movimento retrógrado que permita obter as equações de movimento para as variáveis h e k serão apresentadas no trabalho [4] como resultado parcial desta dissertação.

A expansão da função perturbadora fornecida em [24] é dada por

$$R = \sum_{j=1}^8 Gm_j [A_j e^2 + B_j e^4 + C_j \sin^2(I/2) + D_j e^2 \sin^2(I/2) + E_j e e_j \cos(\varpi - \varpi_j)], \quad (5.1)$$

onde $s = \sin(I/2)$ e os coeficientes são

$$A_j = \frac{1}{8a'} \alpha b_{3/2}^{(1)}, \quad (5.2)$$

$$B_j = \frac{1}{16a'} \left[\frac{\alpha^3}{2} \frac{d^3 b_{1/2}^{(0)}}{d\alpha^3} + \frac{\alpha^4}{8} \frac{d^4 b_{1/2}^{(0)}}{d\alpha^4} \right], \quad (5.3)$$

$$C_j = -\frac{1}{8a'} \alpha b_{3/2}^{(1)}, \quad (5.4)$$

$$D_j = \frac{1}{16a'} \left[-\alpha b_{3/2}^{(1)} - 2\alpha^2 \frac{db_{3/2}^{(1)}}{d\alpha} - \alpha^3 \frac{d^2 b_{3/2}^{(1)}}{d\alpha^2} \right], \quad (5.5)$$

$$E_j = -\frac{1}{4a'} \alpha b_{3/2}^{(2)}, \quad (5.6)$$

com os valores de α definidos por

$$\alpha = \begin{cases} a/a_j & e & a' = a_j & \text{se } a_j > a, \\ a_j/a & e & a' = a & \text{se } a_j < a. \end{cases} \quad (5.7)$$

O coeficiente de Laplace é dado pela expressão

$$b_s^{(m)}(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(m\theta)}{(1 - 2\alpha \cos(\theta) + \alpha^2)^s} d\theta. \quad (5.8)$$

Reescrevendo a função perturbadora em termos das novas variáveis, tem-se

$$R = \sum_{j=1}^8 Gm_j [A_j(h^2 + k^2) + B_j(h^2 + k^2)^2 + C_j c^2(I/2) + D_j c^2(h^2 + k^2) + E_j(hh_j + kk_j)], \quad (5.9)$$

onde $c = \cos(I/2)$.

Substituindo (5.9) em (A.9) e (A.15), onde

$$ee_j \cos(\varpi - \varpi_j) = e \cos(\varpi) e_j \cos(\varpi_j) + e \sin(\varpi) e_j \sin(\varpi_j) = (kk_j + hh_j),$$

resulta

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} = \frac{Gm_j}{na^2} \left(1 - \frac{(h^2 + k^2)}{2} \right) [-A_j(2k) - 4B_jk(h^2 + k^2) - \\ 2D_jk \cos^2(I/2) - E_jk_j + k \cot g(I/2)(C_j(-\sin(I) \cos(I))/2 + D_j(h^2 + k^2)(-\sin(I) \cos(I))/2)], \end{aligned} \quad (5.10)$$

Logo,

$$\frac{dh}{dt} = -bk - ck(h^2 + k^2) + \sum_{i=1}^8 d_i \cos(\nu_i t + \beta_i), \quad (5.11)$$

onde

$$b = \sum_{j=1}^8 \frac{Gm_j}{na^2} [2A_j + 2D_j c^2 + C_j c^2], \quad (5.12)$$

$$c = \sum_{j=1}^8 \frac{Gm_j}{na^2} (4B_j - A_j), \quad (5.13)$$

$$d = - \sum_{j=1}^8 \frac{Gm_j}{na^2} E_j M_{ji}. \quad (5.14)$$

Para a variável k os mesmos passos fornecem

$$\frac{dk}{dt} = \frac{Gm_j}{na^2} \left(1 - \frac{(h^2 + k^2)}{2} \right) [+A_j(2h) + 4B_jh(h^2 + k^2) +$$

$$2D_j h \cos^2(I/2) + E_j h_j - h \cot g(I/2) (C_j (-\sin(I) \cos(I))/2 + D_j (h^2 + k^2) (-\sin(I) \cos(I))/2)], \quad (5.15)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{dk}{dt} = +bh + ch(h^2 + k^2) - \sum_i d_i \sin(\nu_i t + \beta_i). \quad (5.16)$$

Entretanto, a parte homogênea da solução geral das equações de movimento indica que a taxa de precessão da partícula teste em órbita retrógrada é dada por $-A$. Logo, a taxa de precessão dada em (5.12) deverá assumir o valor $-b$. Vale ressaltar que a mudança do sinal está relacionada ao sentido de rotação da partícula em estudo. Isto é, a frequência positiva representa a órbita prógrada e frequência negativa representa a órbita retrógrada. Portanto, os resultados a seguir foram obtidos por meio da expressão

$$b = -\frac{1}{na^2} \sum_{j=1}^8 Gm_j (2A_j + 2D_j c^2 - C_j c^2). \quad (5.17)$$

Para a uma partícula teste em movimento retrógrado, pode-se observar pelas soluções encontradas em (3.42) e (3.48) ou em (3.54) e (3.60) que $A + g_i \approx 0$ e $B + f_i \approx 0$. Como foi visto anteriormente, $A = -B$. Deste modo, $A \approx -g_i \approx +f_i$.

Ao considerar o semi-eixo maior assumindo valores em um intervalo de maior amplitude, observa-se que as curvas convergem para uma região próxima de 180° . Estas regiões de convergência coincidem com as localizações dos planetas Terra e Marte.

Entretanto, a Figura 5.3 exibe valores positivos e negativos. Nota-se a dependência dos sinais das frequências com a inclinação da órbita da partícula teste. Neste caso, não há uma relação direta com a excentricidade, o que dificulta a obtenção da localização das librações dos ângulos seculares. Contudo, a análise desenvolvida na próxima subseção mostra o comportamento da frequência com relação à excentricidade e semi-eixo maior.

Por meio do resultado anterior é possível estudar uma das ressonâncias seculares positivas mais importantes do Sistema Solar, g_5 e g_6 . Uma vez que a teoria linear para ressonâncias seculares para órbitas retrógradas não contemplava valores positivos de frequências.

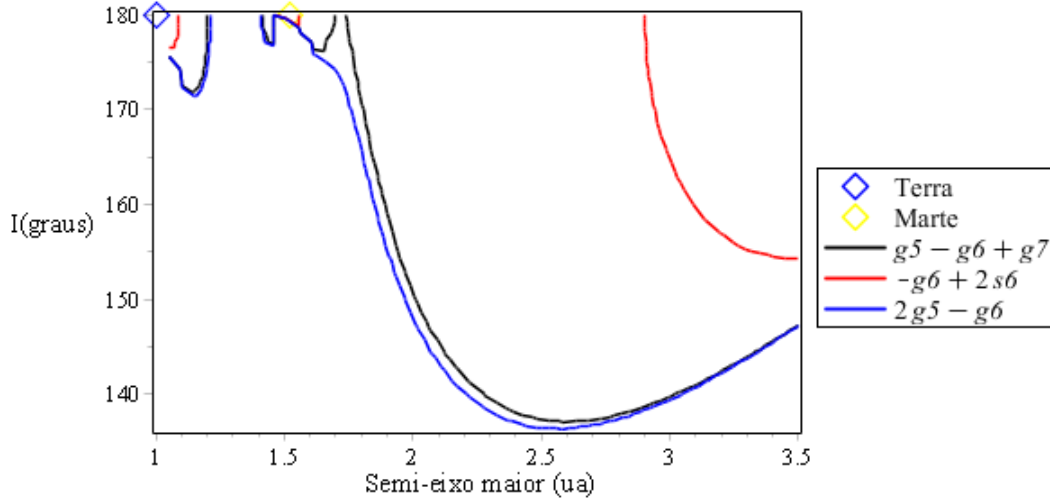


Figura 5.2: Valores da frequência b no plano I e a para órbita retrógrada para diversas frequências. Semi-eixo varia de 1 ua à 3,5 ua.

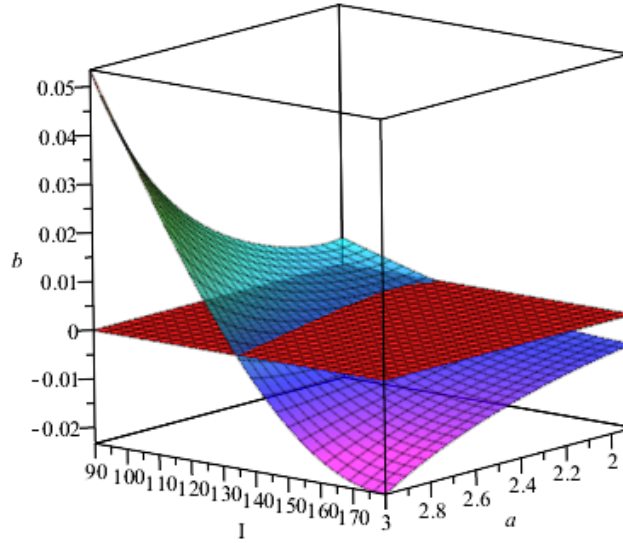


Figura 5.3: Valores da frequência b no plano I e a para órbita retrógrada. Semi-eixo varia de 1.8 ua à 3 ua.

5.2 Equações de movimento para as variáveis p e q

Para obter as equações de movimento para um corpo retrógrado foi considerado termos de até quarta ordem nas excentricidades e de segunda ordem nas inclinações [4].

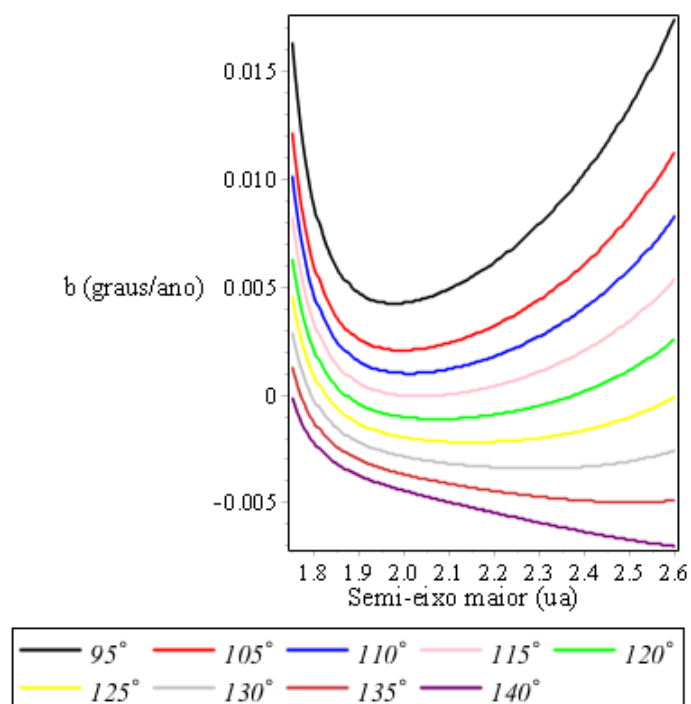


Figura 5.4: Valores da frequência b no plano I e a para órbita retrógrada para diversas frequências. Semi-eixo varia de 1 ua à 3,5 ua.

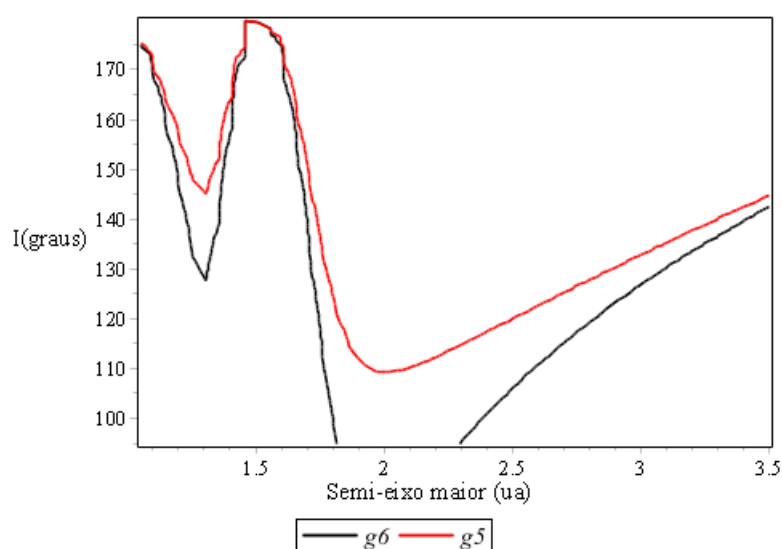


Figura 5.5: Valores da frequência b no plano I e a para órbita retrógrada para diversas frequências. Semi-eixo varia de 1 ua à 3,5 ua.

É possível escrever expressões p e q para os planetas que fazem parte do sistema na forma

$$p_j = I_j \sin(\Omega_j) = \sum_i N_{ji} \sin(f_i t + \gamma_i), \quad (5.18)$$

$$q_j = I_j \cos(\Omega_j) = \sum_i N_{ji} \cos(f_i t + \gamma_i), \quad (5.19)$$

onde N_{ji} , f_i e γ_i são constantes conhecidas. Considere a função perturbadora

$$R = \sum_{j=1}^8 Gm_j [A_j e^2 + C_j \cos^2(I/2) + D_j e^2 \cos^{(I/2)}(I) + F_j \cos^4(I/2) + G_j \cos(I/2) \sin(I_j) \cos(\Omega - \Omega_j)]. \quad (5.20)$$

A função perturbadora nas variáveis p e q é dada por

$$R = \sum_{j=1}^8 Gm_j [A_j e^2 + C_j (p^2 + q^2) + F_j (p^2 + q^2)^2 + D_j e^2 (p^2 + q^2) + G_j (pp_j + qq_j)], \quad (5.21)$$

onde

$$\cos(I/2) \sin(I_j) \cos(\Omega - \Omega_j) = \cos(I/2) \cos(\Omega) \sin(I_j) \cos(\Omega_j) +$$

$$\cos(I/2) \sin(\Omega) \sin(I_j) \sin(\Omega_j) = (pp_j + qq_j).$$

Substituindo (5.21) em (A.52), obtém-se

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{Gm_j}{4na^2} \left(1 - \frac{e^2}{2}\right) (2qC_j + 4q(p^2 + q^2)F_j + 2qe^2D_j + G_jq_j), \quad (5.22)$$

ou ainda

$$\frac{dp}{dt} = -bq - cq(p^2 + q^2) + d_i \cos(f_i t + \gamma_i), \quad (5.23)$$

onde

$$b = -\frac{1}{4na^2} \sum_{j=1}^8 Gm_j (2C_j + 2D_j e^2), \quad (5.24)$$

$$c = \frac{1}{4na^2} \sum_{j=1}^8 Gm_j(4F_j - 2F_j e^2), \quad (5.25)$$

$$d_i = -\frac{1}{4na^2} \sum_{j=1}^8 Gm_j(G_j N_{ji}). \quad (5.26)$$

Substituindo (5.21) em (A.56), tem-se

$$\frac{dq}{dt} = +\frac{Gm_j}{4na^2} \left(1 - \frac{e^2}{2}\right) (2pC_j + 4p(p^2 + q^2)F_j + 2pe^2 D_j + G_j p_j), \quad (5.27)$$

$$\frac{dq}{dt} = +bp + cp(p^2 + q^2) - d_i \sin(f_i t + \gamma_i), \quad (5.28)$$

É possível analisar a relação entre excentricidade e frequências ressonantes dos planetas por meio da expressão (5.24).

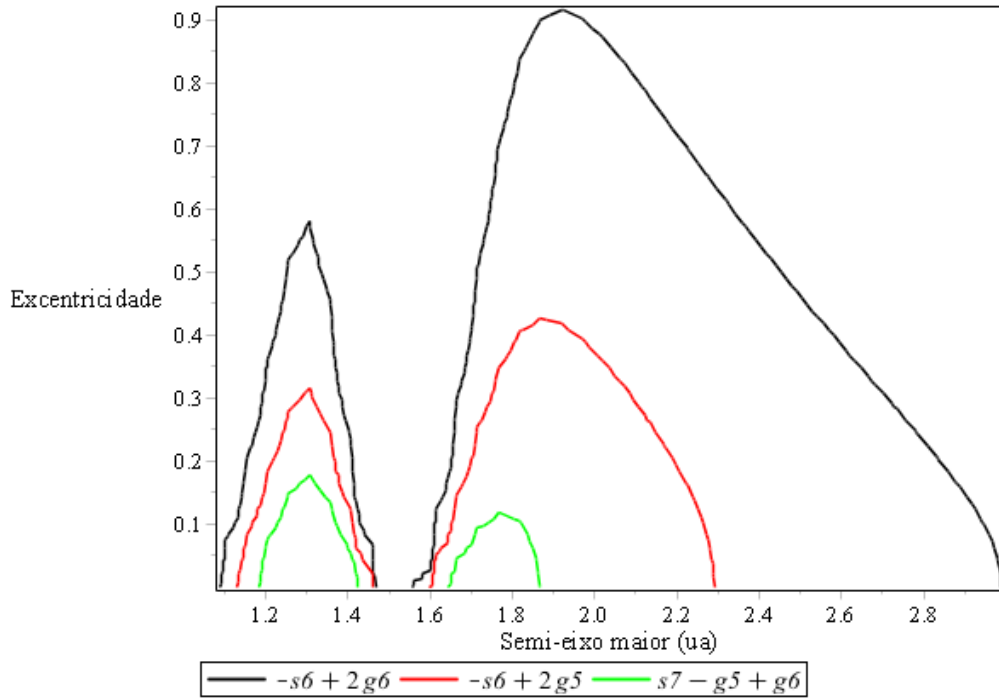


Figura 5.6: Coeficiente b para movimento retrógrado no plano $e - a$.

A Figura 5.6 exibe o comportamento das frequências de precessão. As curvas convergem nas localizações dos planetas Terra e Marte devido aos coeficientes de Laplace divergirem para razões $a/a_j \rightarrow 1$.

Um resultado importante da teoria linear é de que a taxa da frequência do objeto sob influência gravitacional dos oito planetas do Sistema Solar é $-A = +B$. No trabalho [19], as frequências para as variáveis p e q do Sistema Solar foram obtidas por meio da Análise de Fourier. A teoria linear para órbitas prógradas sugere que $A \approx -g_i \approx +f_i$, isto é, utiliza-se somente frequências positivas.

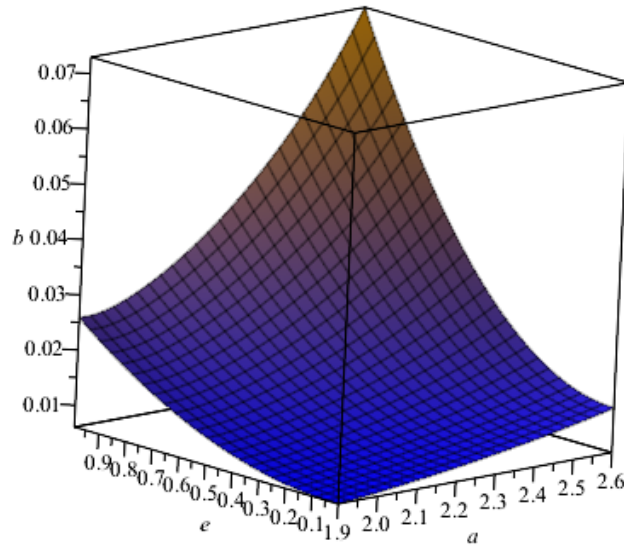


Figura 5.7: Valores dos coeficientes b para movimento prógrado no plano $e - a$.

A Figura 5.7 exibe as frequências b no plano $a - e$. Note que este resultado está de acordo com a teoria linear, exibindo somente frequências positivas.

A figura 5.8 exibe as frequências b das taxas de precessão do nodo ascendente B para órbitas prógrada e retrógrada. O plano (na cor vermelha), como mencionado anteriormente auxilia na visualização dos planos positivo e negativo. O plano correspondente aos valores positivos são referentes ao movimento retrógrado e o plano correspondente aos valores negativos são referentes ao movimento prógrado da partícula teste. Vale ressaltar que a diferença das equações que descrevem este plano para ambos os movimentos é de

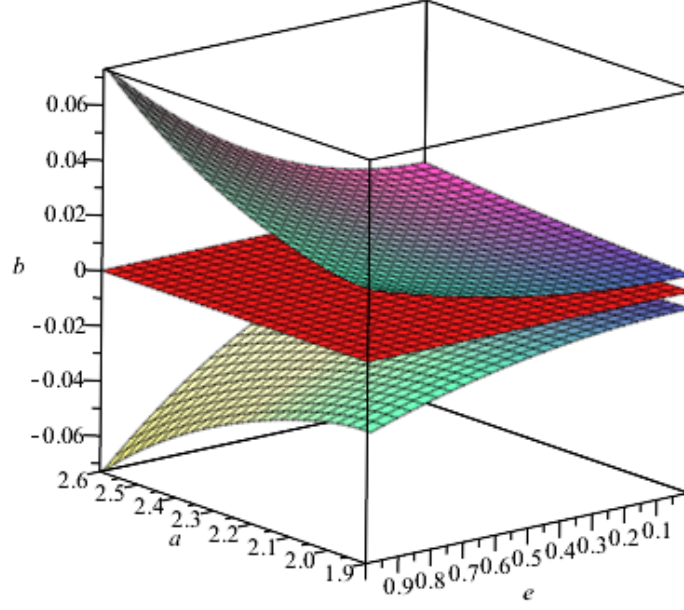


Figura 5.8: Valores dos coeficientes b para movimento prógrado no plano e - a .

um sinal, gerando uma imagem simétrica.

5.2.1 Ângulo secular

A identificação da passagem de uma partícula teste por uma ressonância secular pode ser definida pela libração do ângulo secular ao longo de um período. Este ângulo secular pode variar de acordo com a direção da órbita do corpo analisado (geralmente asteroide, lua ou planeta), isto é, se a órbita é prógrada ou retrógrada.

O comportamento qualitativo do ângulo secular que permite a identificação da passagem do asteroide por uma ressonância secular ocorre quando há uma libração em torno de 0° ou 360° . Esta libração ocorre quando o ângulo secular assume o valor $\Delta\varpi_{\text{secular}} = \Delta\Omega_{\text{secular}} = 0$.

- Órbita prógrada

De acordo com (2.65), (2.66), (2.67) e (2.68), a ressonância secular deve satisfazer a relação

$$A = \varpi_{\text{próprio}} = g_i \quad e \quad B = \Omega_{\text{próprio}} = f_i.$$

onde $\varpi_{próprio}$ e $\Omega_{próprio}$ são quantidades ditas fundamentais da partícula teste.

Como $\Delta\varpi_{secular} = 0$, o ângulo secular para dinâmica prógrada é dado por

$$\Delta\varpi_{secular} = \varpi - g_i t. \quad (5.29)$$

De maneira semelhante para as variáveis p e q , têm-se

$$\Delta\Omega_{secular} = \Omega - f_i t. \quad (5.30)$$

- Órbita retrógrada

De acordo com (3.42), (3.48), (3.54) e (3.60), ressonância secular ocorre quando

$$-A = \varpi_{próprio} = g_i \quad e \quad -B = \Omega_{próprio} = f_i.$$

onde $\varpi_{próprio}$ e $\Omega_{próprio}$ são quantidades ditas fundamentais da partícula teste.

Logo,

$$\Delta\varpi_{secular} = \varpi - g_i t. \quad (5.31)$$

De maneira semelhante para as variáveis p e q , têm-se

$$\Delta\Omega_{secular} = \Omega - f_i t, \quad (5.32)$$

onde $\varpi = \Omega - \omega$.

Para obter o ângulo secular a quantidade $\Delta\varpi_{secular} = 0$ deve ser satisfeita. Tal condição permitiu construir os ângulos seculares tanto para órbitas prógradas quanto para órbitas retrógradas.

5.3 Simulações numéricas

Por meio das condições iniciais obtidas a partir do modelo analítico foram realizadas simulações com o software Mercury6 para estudar a evolução dos parâmetros orbitais ao longo do tempo, utilizando o integrador numérico Hybrid. As órbitas são integradas utilizando-se as condições iniciais obtidas em (5.3). A partir dos resultados destes experimentos é possível identificar se houve libração dos ângulos seculares da partícula simulada.

Analisando a variação temporal dos ângulos seculares próximos as curvas referentes às frequências, é possível observar uma dependência da excentricidade com a libração do ângulo secular apsidal e a dependência da inclinação com a libração do ângulo secular relacionado a precessão nodal, expressos, respectivamente, por $\Delta\varpi_{\text{secular}}$ ou $\Delta\Omega_{\text{secular}}$.

5.3.1 Gráfico 1

Os pontos presentes na Figura 5.9 são as localizações das librações dos ângulos seculares nas simulações numéricas. As curvas de libração em azul e em preto são as localizações das ressonâncias seculares geradas por meio do modelo analítico.

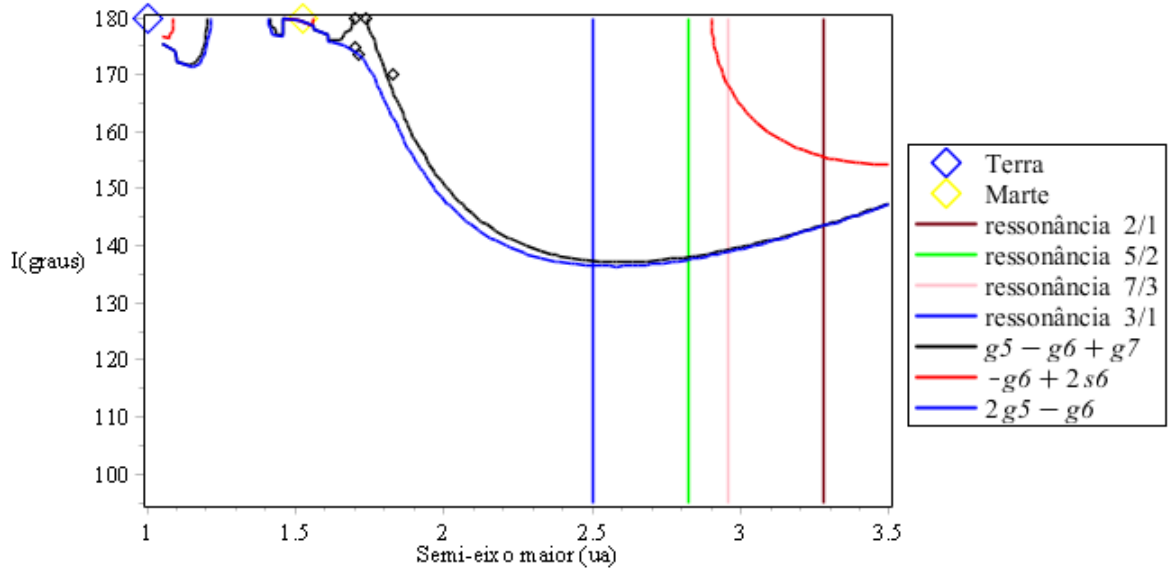


Figura 5.9: Comparação das ressonâncias seculares do modelo analítico e dos resultados numéricos.

As figuras 5.10, 5.11 e 5.13 exibem o comportamento de libração do ângulo secular que predomina durante toda a integração numérica acompanhada de aumento gradativo da excentricidade. O semi-eixo maior permanece constante. Na Figura 5.12 é possível verificar a libração do ângulo secular principalmente próximos do início da integração até 8×10^6 anos. Neste momento há uma queda do valor da excentricidade e o ângulo secular passa a circular a medida que a excentricidade cresce, enquanto que a taxa de variação permanece pequena. Na Figura 5.14 a libração está localizada no intervalo de $7,5 \times 10^6$ anos a $2,5 \times 10^7$ anos aproximadamente acompanhada do crescimento da excentricidade que está em fase com o ângulo secular. Neste exemplo a inclinação pouco varia e o semi-eixo maior permanece constante.

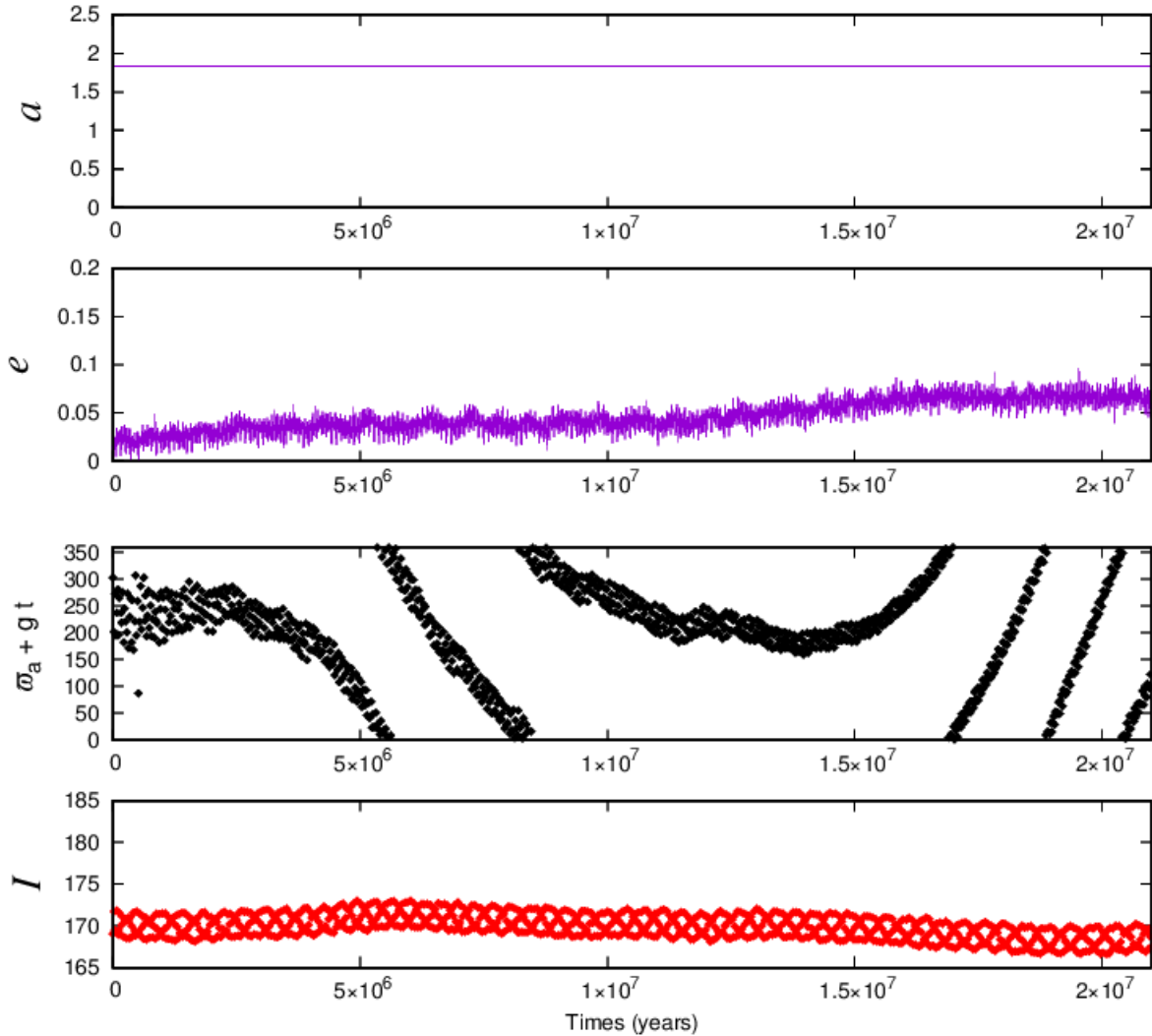


Figura 5.10: Semi-eixo: 1,83 ua, Inclinação: 170° , Excentricidade: 0,001 e Frequência: $g_5 - g_6 + g_7$.

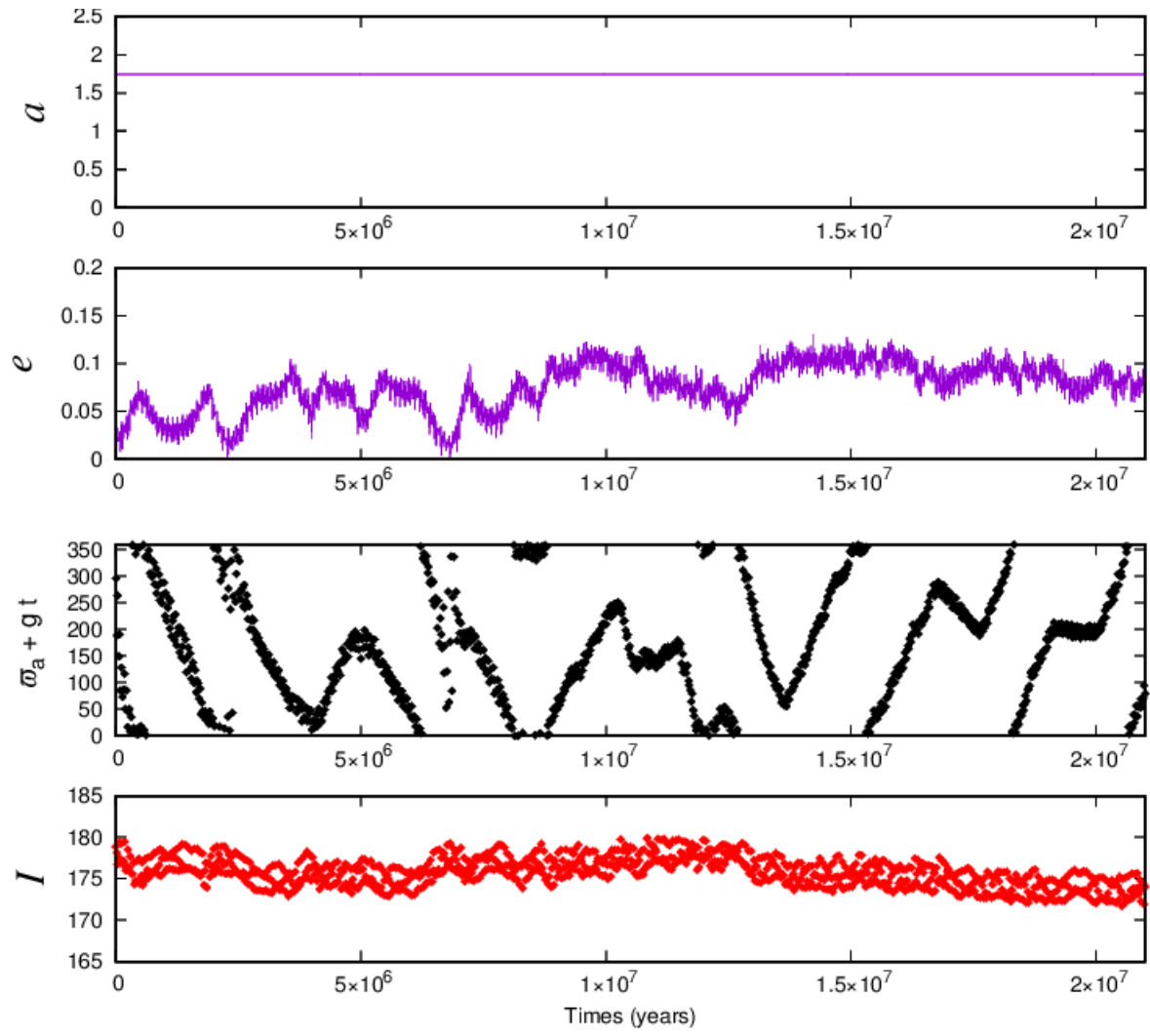


Figura 5.11: Semi-eixo: 1,74 ua, Inclinação: 180° , Excentricidade: 0,001 e Frequência: $g_5 - g_6 + g_7$.

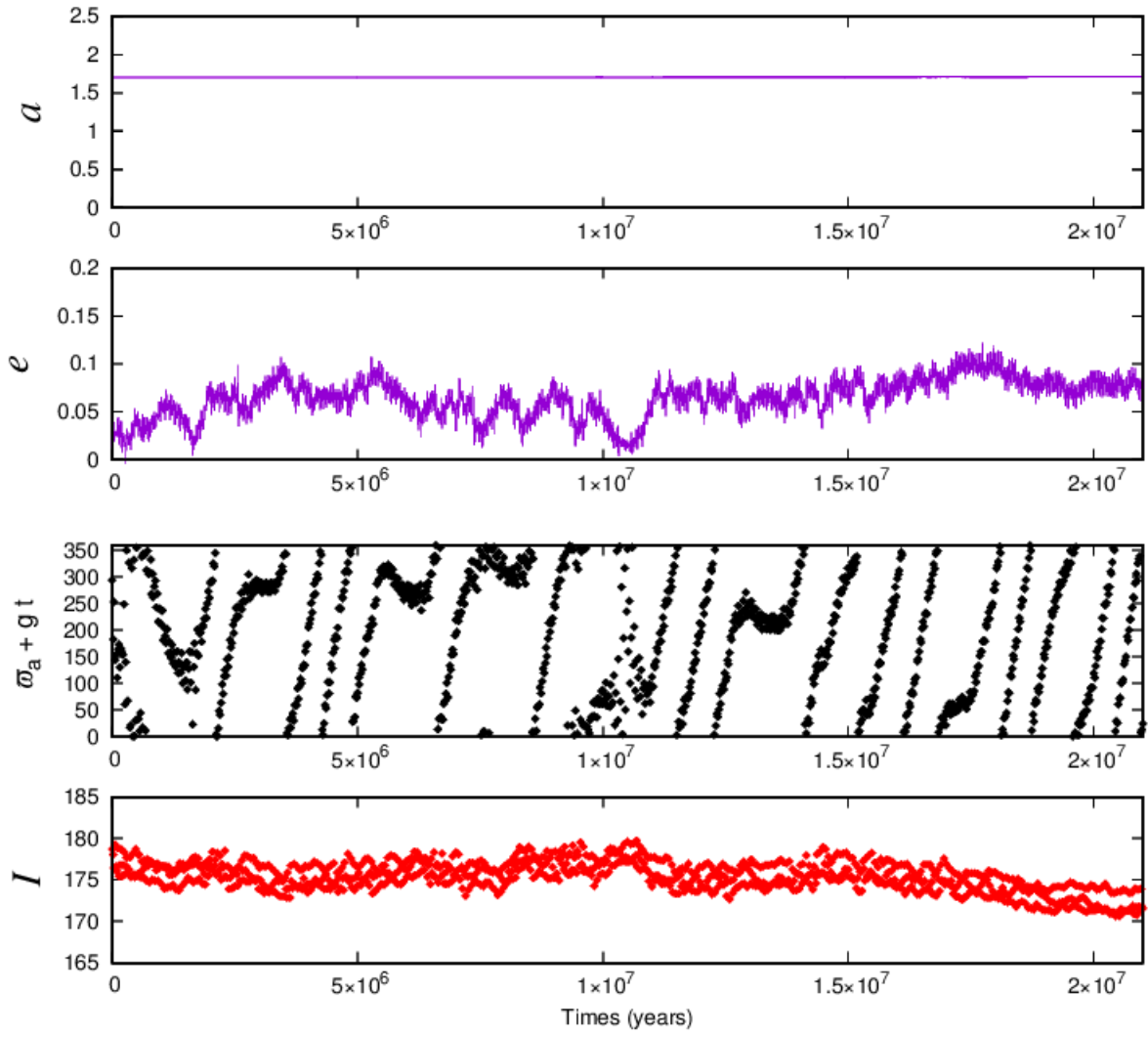


Figura 5.12: Semi-eixo: 1,70 ua, Inclinação: 180° , Excentricidade: 0,001 e Frequência: $g_5 - g_6 + g_7$.

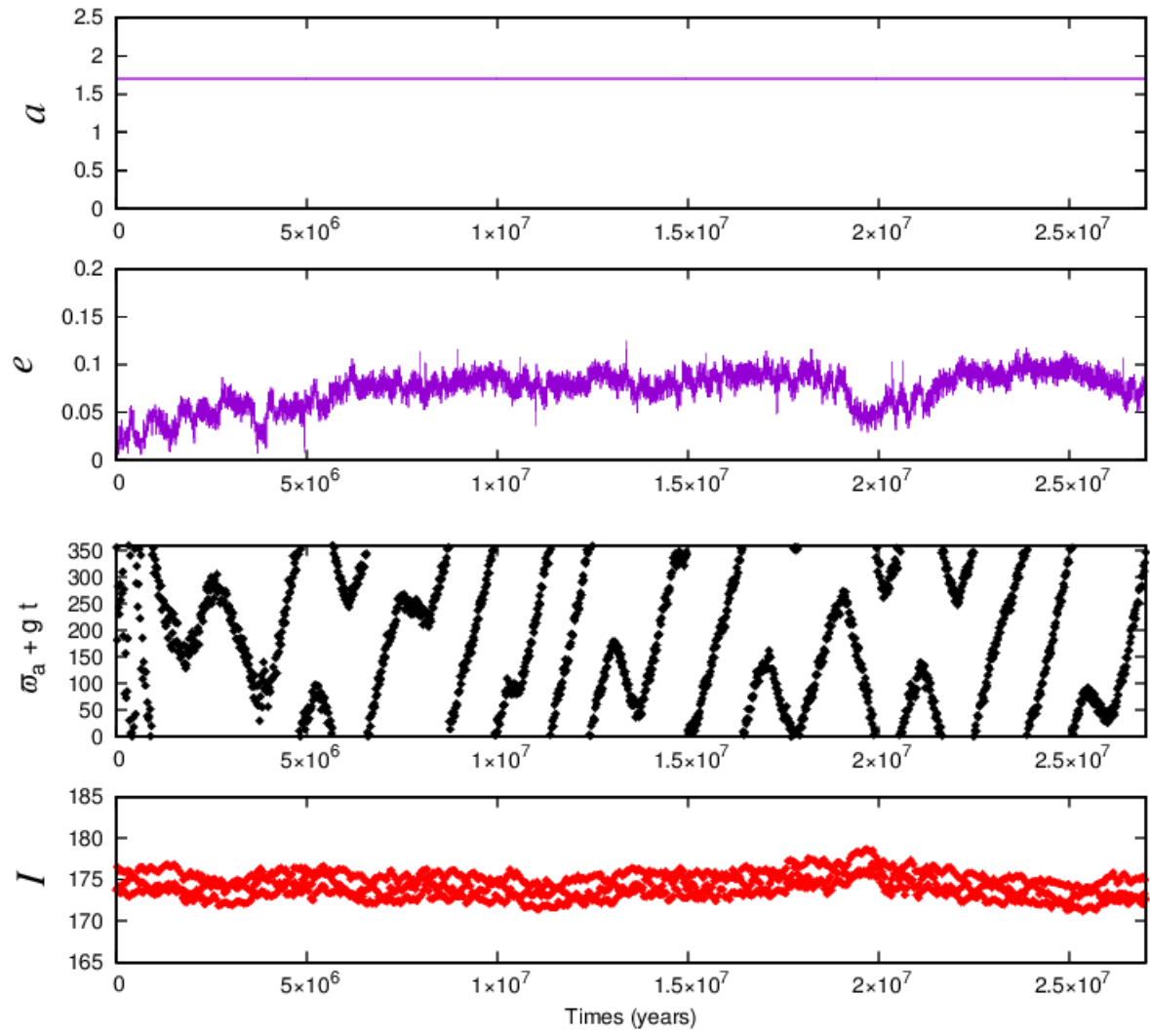


Figura 5.13: Semi-eixo: 1,7 ua, Inclinação: $174,8^\circ$, Excentricidade: 0,015 e Frequência: g_9 .

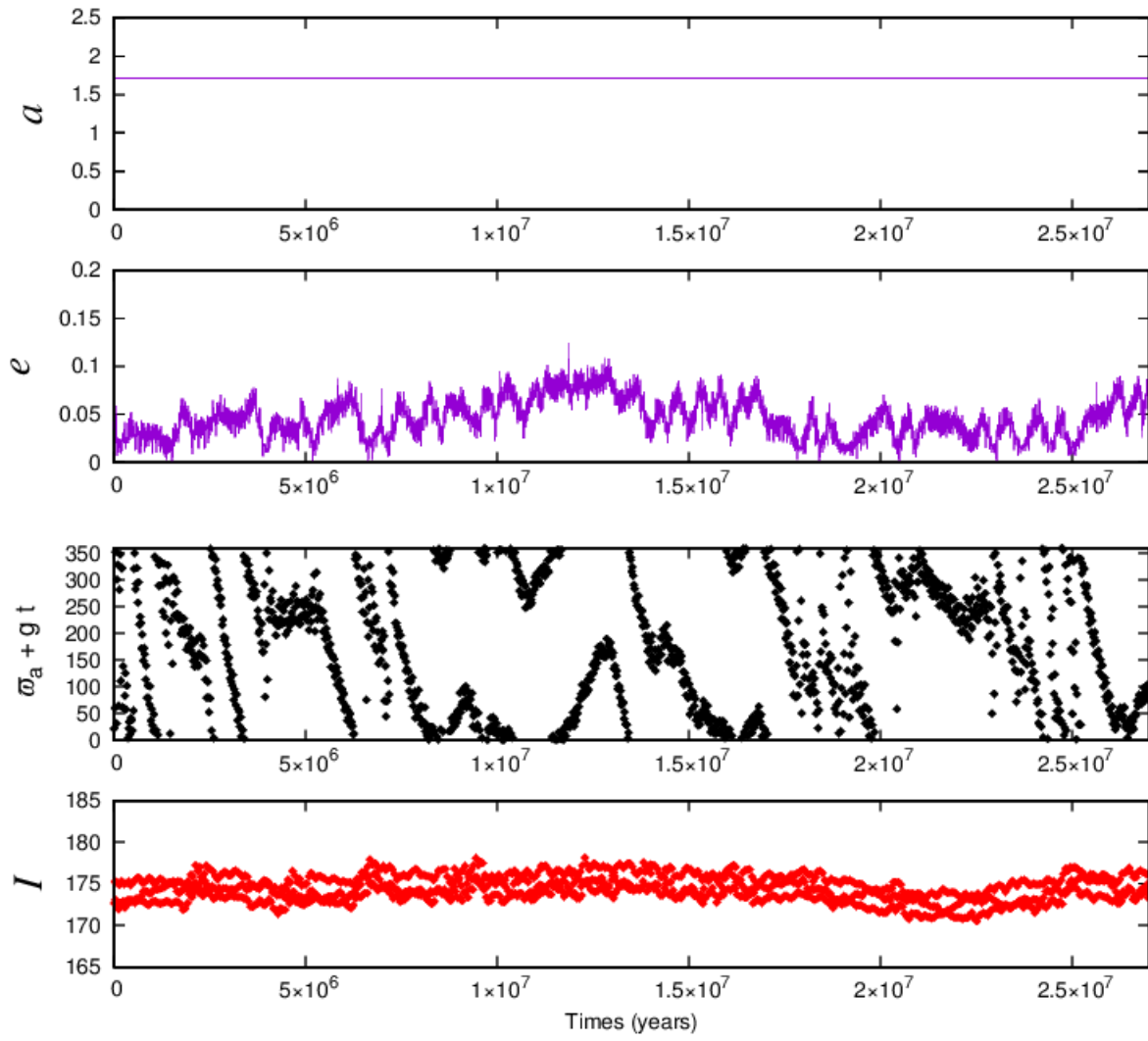


Figura 5.14: Semi-eixo: 1,71 ua, Inclinação: $173,6^\circ$, Excentricidade: 0,0416 e Frequência: g_9 .

5.3.2 Gráfico 2

Os pontos presentes na Figura 5.15 são as localizações das librações dos ângulos seculares nas simulações numéricas. As curvas em azul e em preto são as localizações das ressonâncias seculares geradas por meio do modelo analítico.

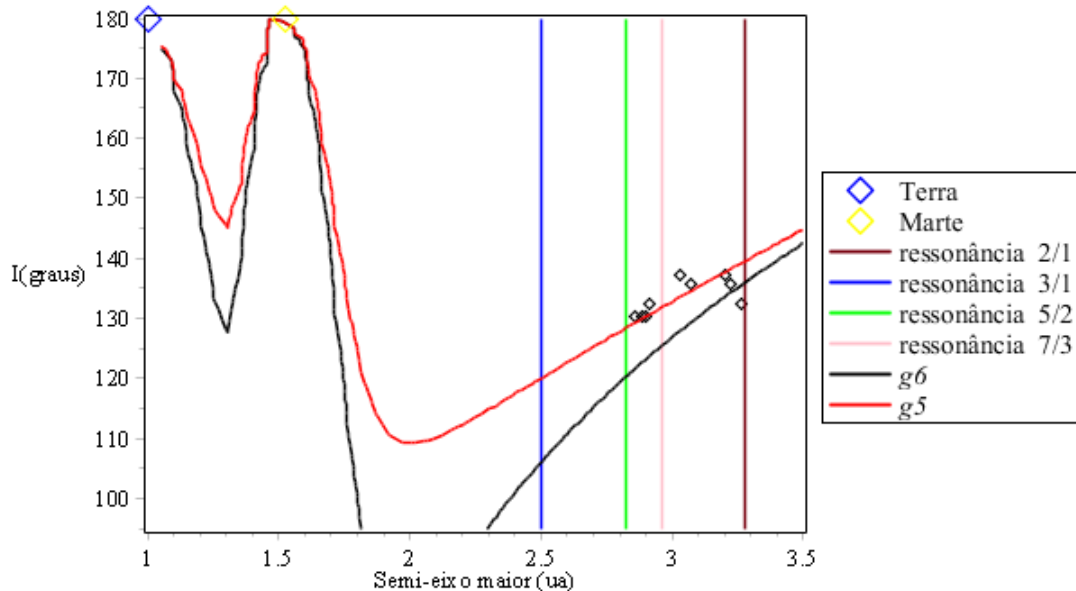


Figura 5.15: Comparação das ressonâncias seculares do modelo analítico e dos resultados numéricos.

As integrações para as frequências g_5 e g_6 presentes nesta seção foram realizadas considerando a perturbação gravitacional dos 8 planetas do Sistema Solar. A evolução dos parâmetros orbitais obtidos foram avaliados em 750 mil anos, isto é, foi necessário reduzir o intervalo de tempo para observar com mais nitidez o comportamento dos elementos orbitais.

A libração presente na Figura 5.16 é observada no início da integração, finalizando aproximadamente em 200 mil anos seguida da circulação do ângulo secular. É possível verificar que a excentricidade está em fase com o ângulo secular, isto é, quando o ângulo está librando a taxa de variação da excentricidade aumenta, e quando o ângulo está circulando a taxa de variação da excentricidade diminui. O ângulo libra novamente em 350 mil anos até aproximadamente 450 mil anos acompanhada de um crescimento abrupto da excentricidade. A libração na integração na Figura 5.17 também está presente desde o começo da integração e finaliza próximo a 100 mil anos. Neste intervalo

a excentricidade varia de 0,065 até aproximadamente 0,6. Quando o ângulo passa a circular a taxa de variação da excentricidade diminui. O ângulo volta a librar próximo de 360 mil anos acompanhado do aumento abrupto da excentricidade.

A libração presentes nas figuras 5.18, 5.19 e 5.24 ocorre logo no início da simulação e em ambos os casos são intercaladas com a circulação do ângulo secular acompanhado de uma diminuição expressiva da excentricidade. Em todos os casos citados nesta seção o ângulo secular está em fase com a excentricidade, uma vez que o crescimento da excentricidade acompanha o ângulo secular. O semi-eixo maior permanece constante e a inclinação varia próximo da condição inicial utilizada na simulação.

Nas figuras 5.20, 5.21 e 5.23 o ângulo secular circula antes do início da libração. Nestes exemplos é possível observar claramente o ângulo secular em fase com a excentricidade. Em nenhum dos casos acima houve variação significativa do semi-eixo maior e da inclinação. Já nas figuras 5.18, 5.22 e 5.25 o ângulo secular libra desde o início da integração com o crescimento simultâneo da excentricidade. Logo após a libração ocorre a circulação do ângulo acompanhada da diminuição do valor da excentricidade.

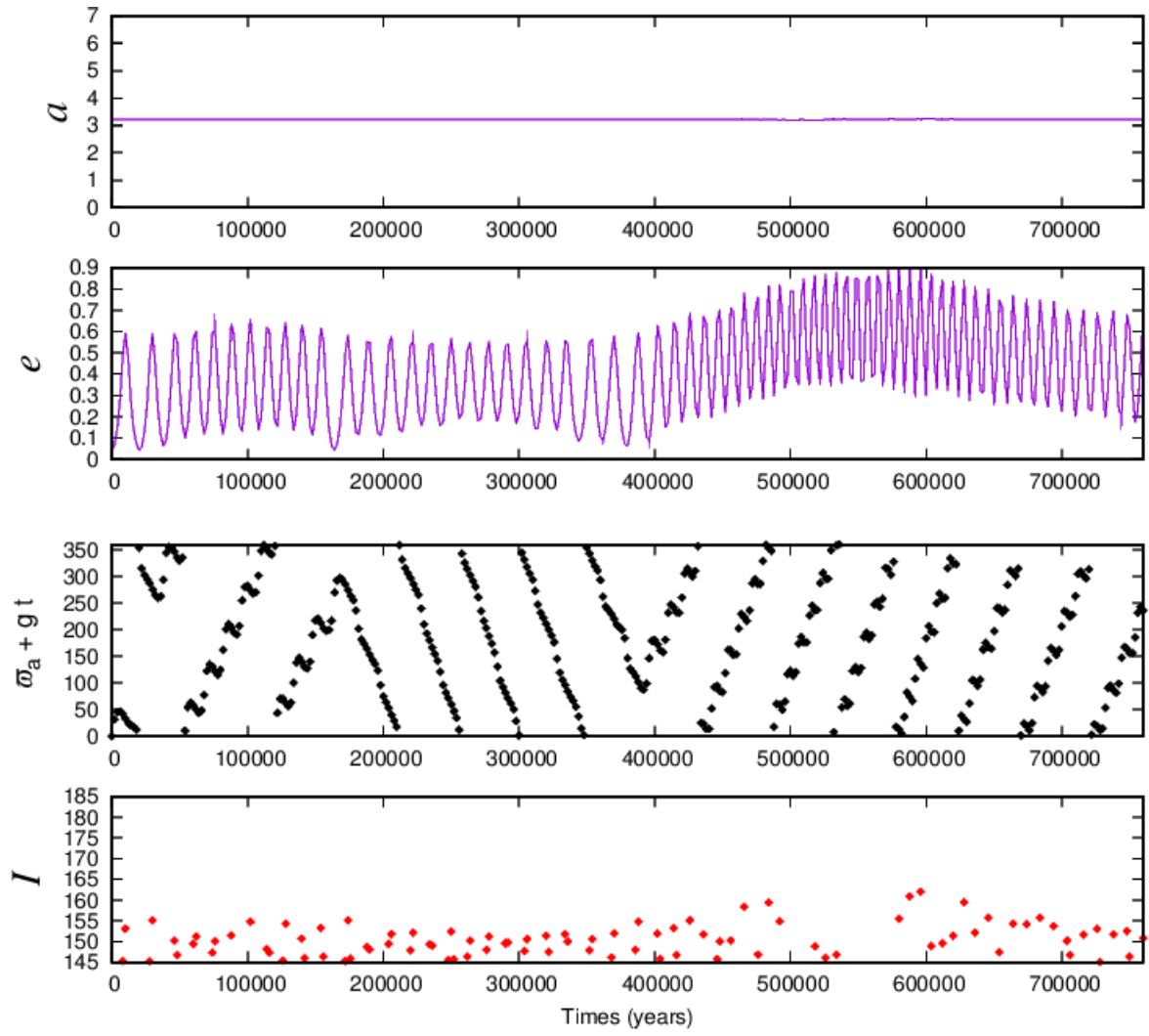


Figura 5.16: Semi-eixo: 3,219 ua, Inclinação: $135,6^\circ$, Excentricidade: 0,043 e Frequência: g_6 .

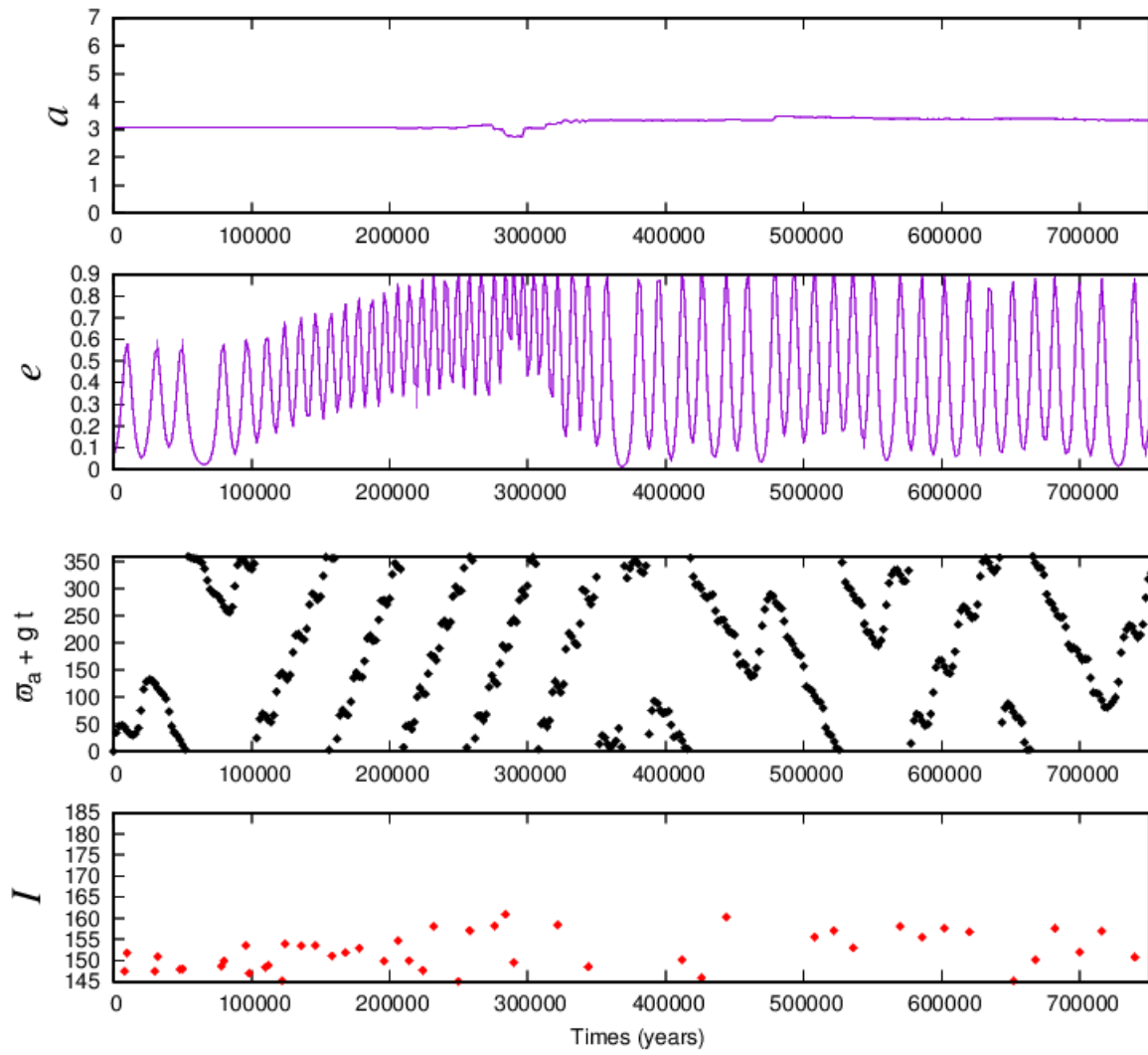


Figura 5.17: Semi-eixo: 3,07 ua, Inclinação: $135,6^\circ$, Excentricidade: 0,065 e Frequência:

g_6 .

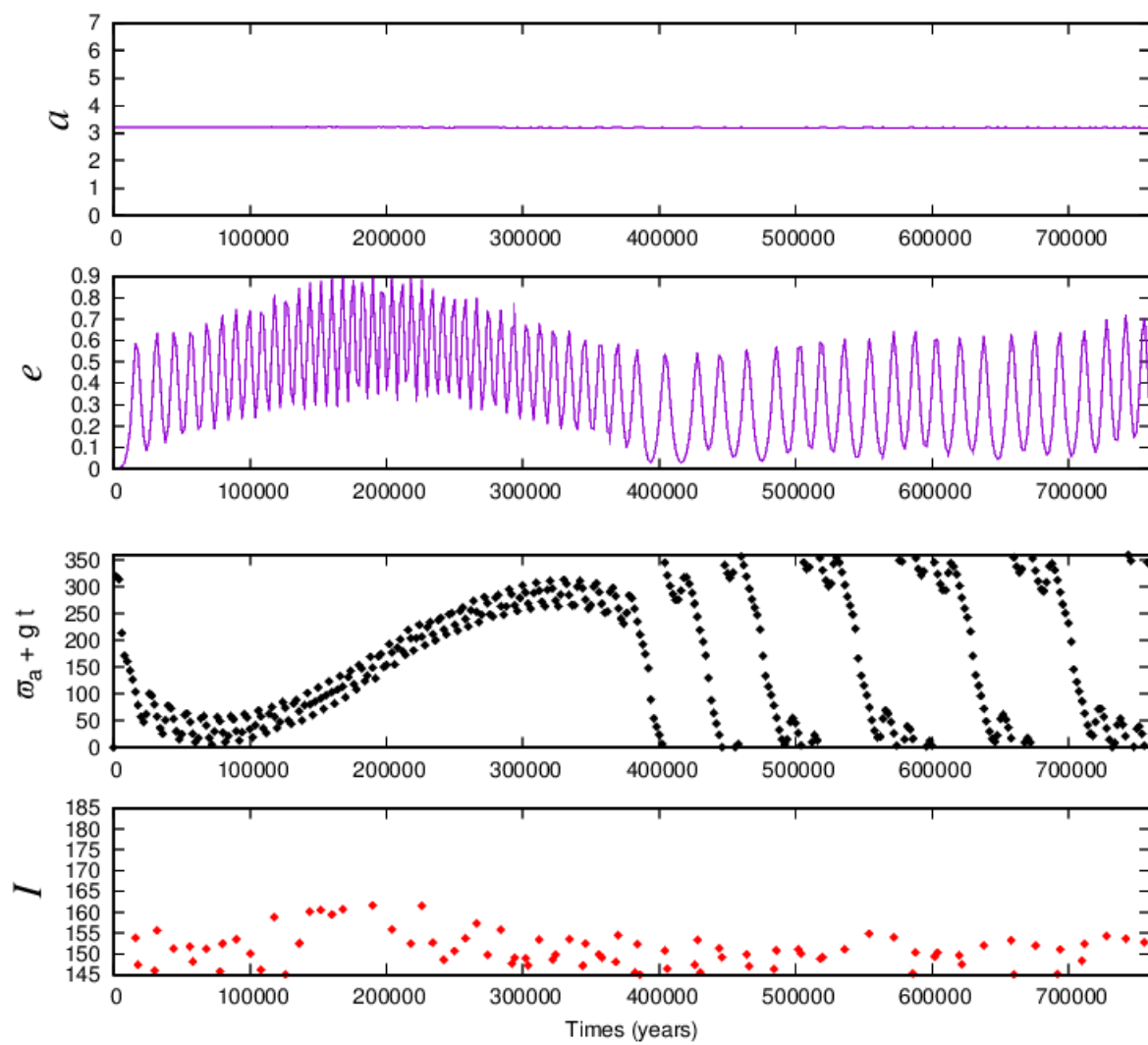


Figura 5.18: Semi-eixo: 3,214 ua, Inclinação: $135,6^\circ$, Excentricidade: 0,058 e Frequência: g_5 .

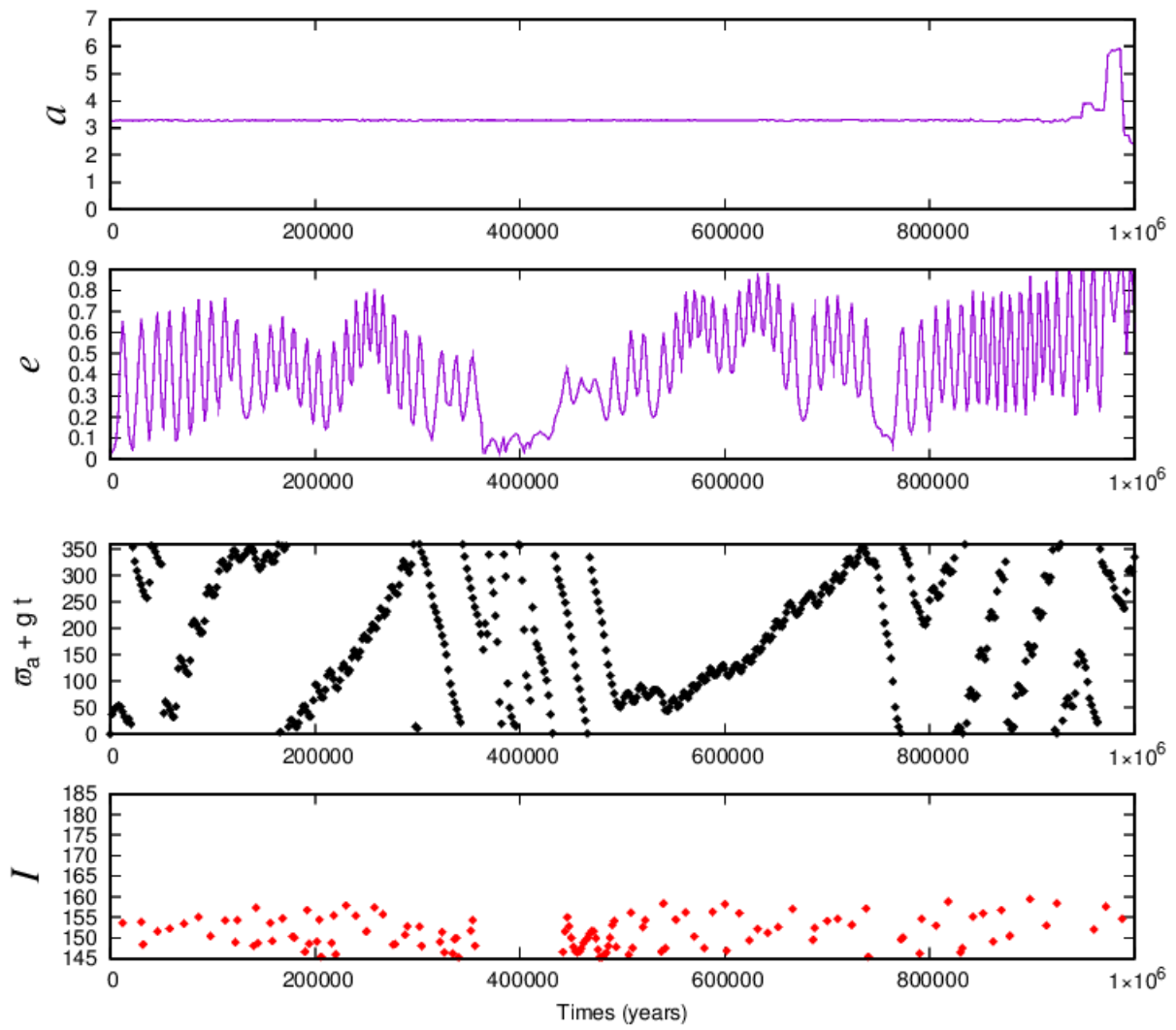


Figura 5.19: Semi-eixo: 3,2626 ua, Inclinação: $132,36^\circ$, Excentricidade: 0,02252 e Frequência: g_6 .

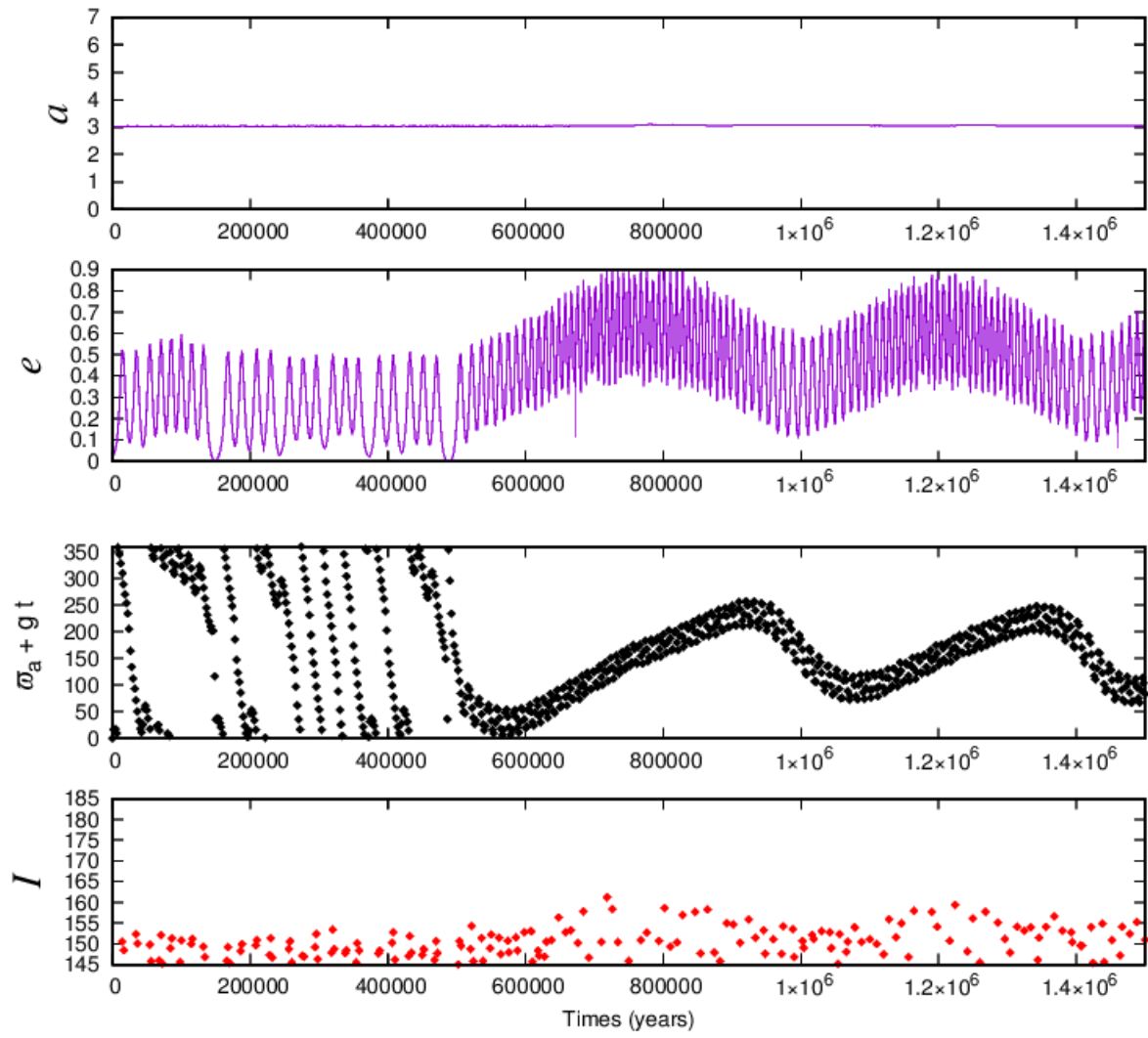


Figura 5.20: Semi-eixo: 3,0281 ua, Inclinação: $137,3^\circ$, Excentricidade: 0,02068 e Frequência: g_5 .

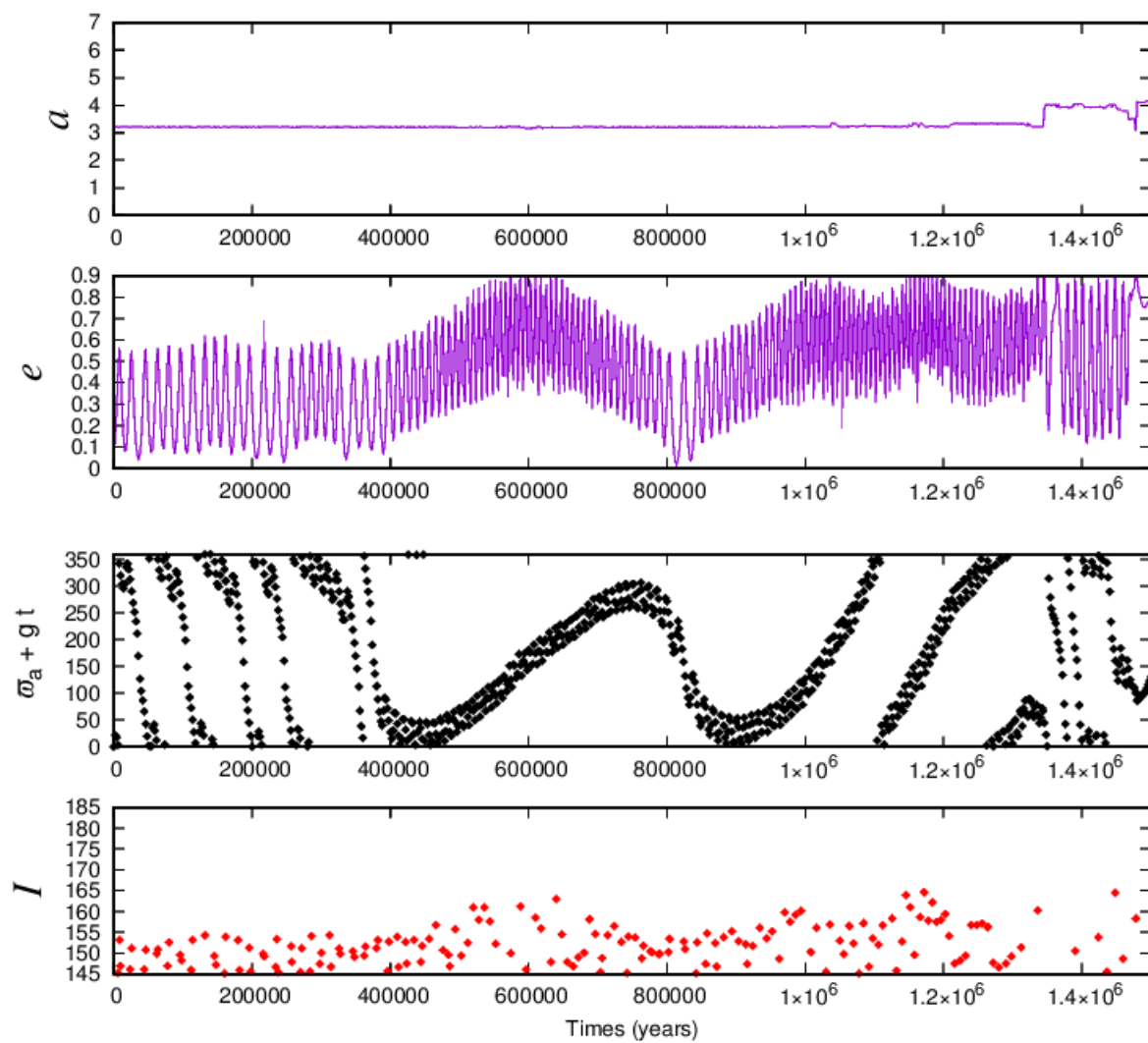


Figura 5.21: Semi-eixo: 3,2 ua, Inclinação: $137,3^\circ$, Excentricidade: 0,076531 e Frequência: g_5 .

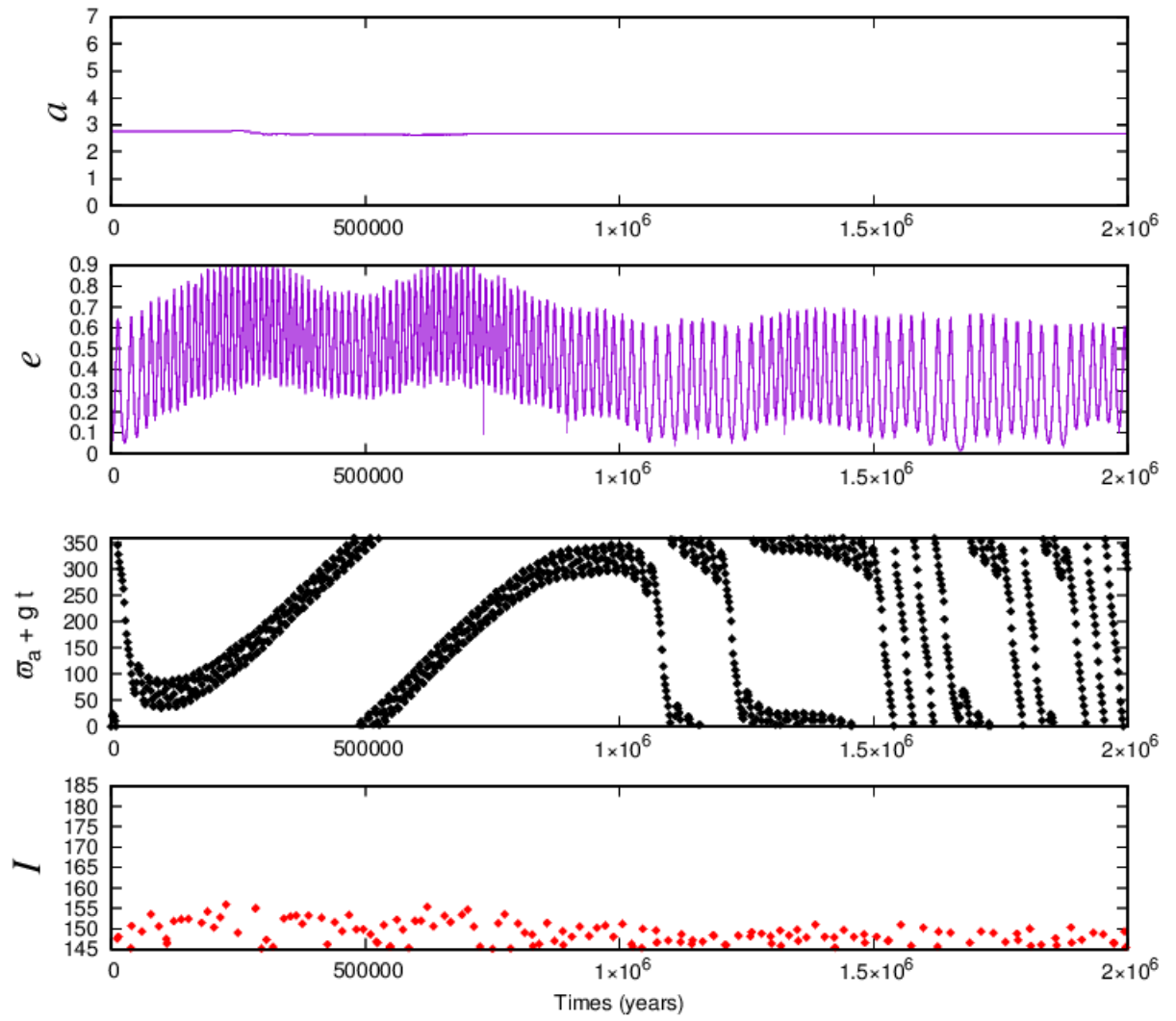


Figura 5.22: Semi-eixo: 2,7671 ua, Inclinação: $130,36^\circ$, Excentricidade: 0,042768 e Frequência: g_5 .

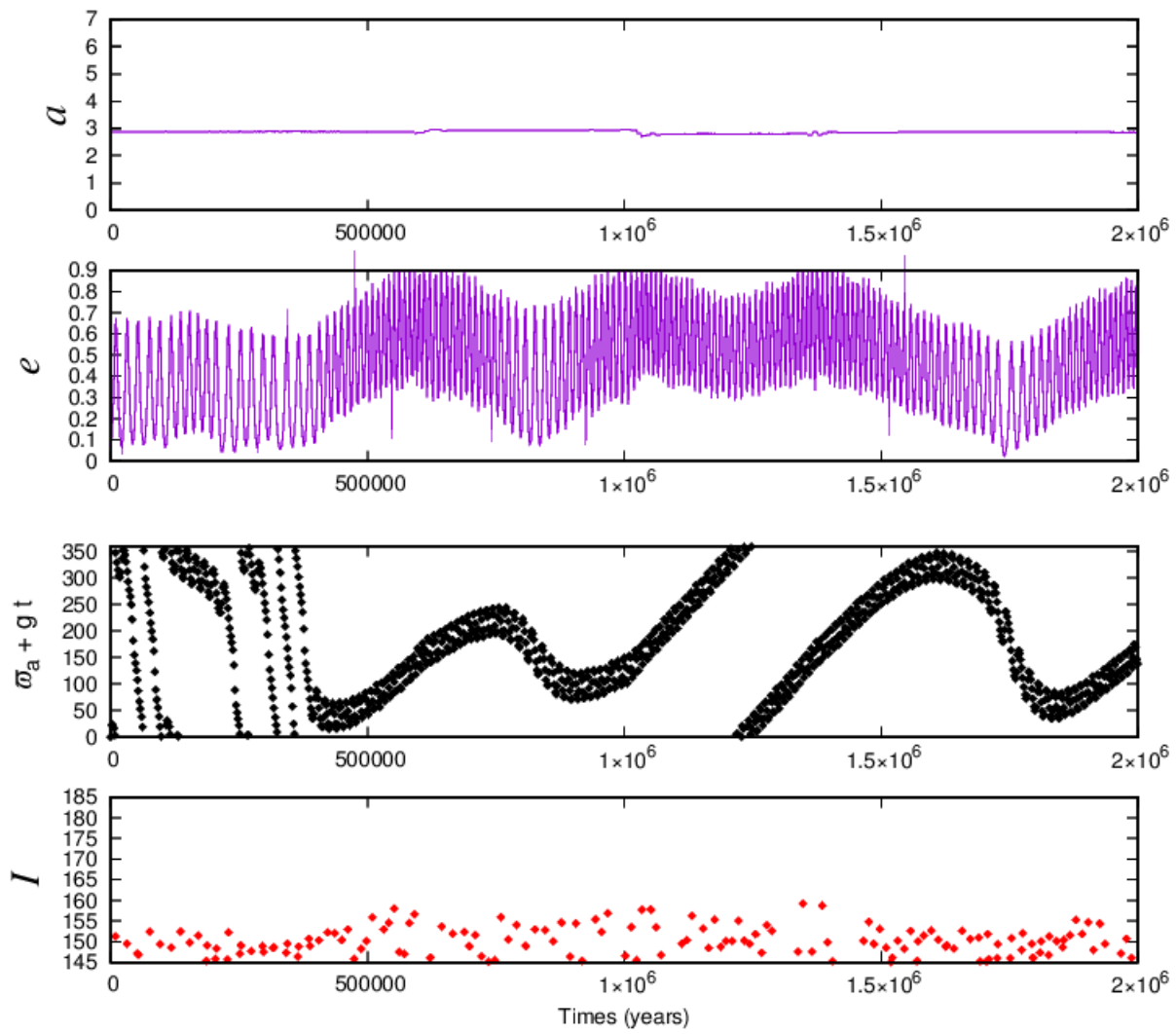


Figura 5.23: Semi-eixo: 2,8869 ua, Inclinação: $130,36^\circ$, Excentricidade: 0,07389 e Frequência: g_5 .

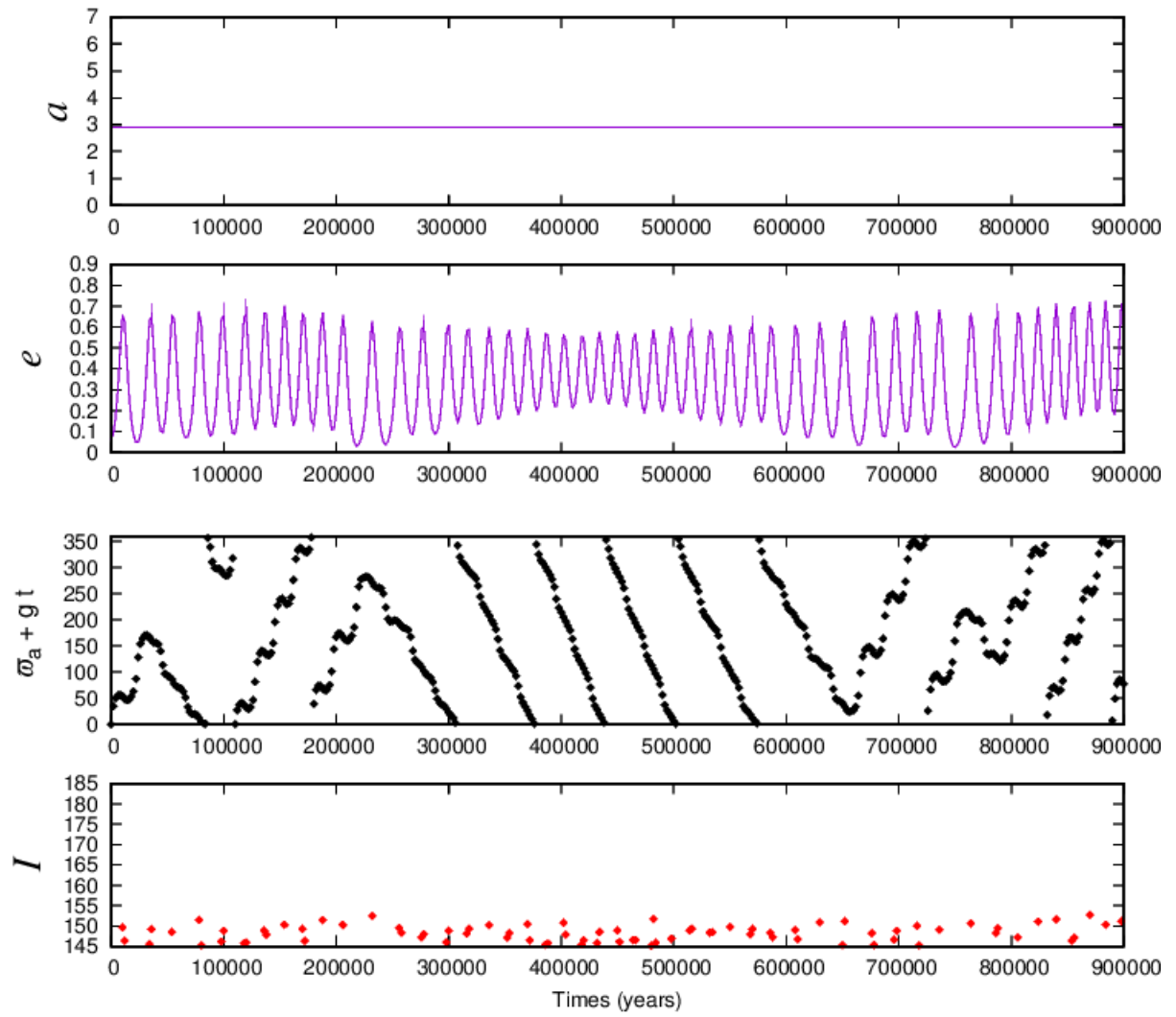


Figura 5.24: Semi-eixo: 2,8970 ua, Inclinação: $130,36^\circ$, Excentricidade: 0,06296 e Frequência: g_6 .

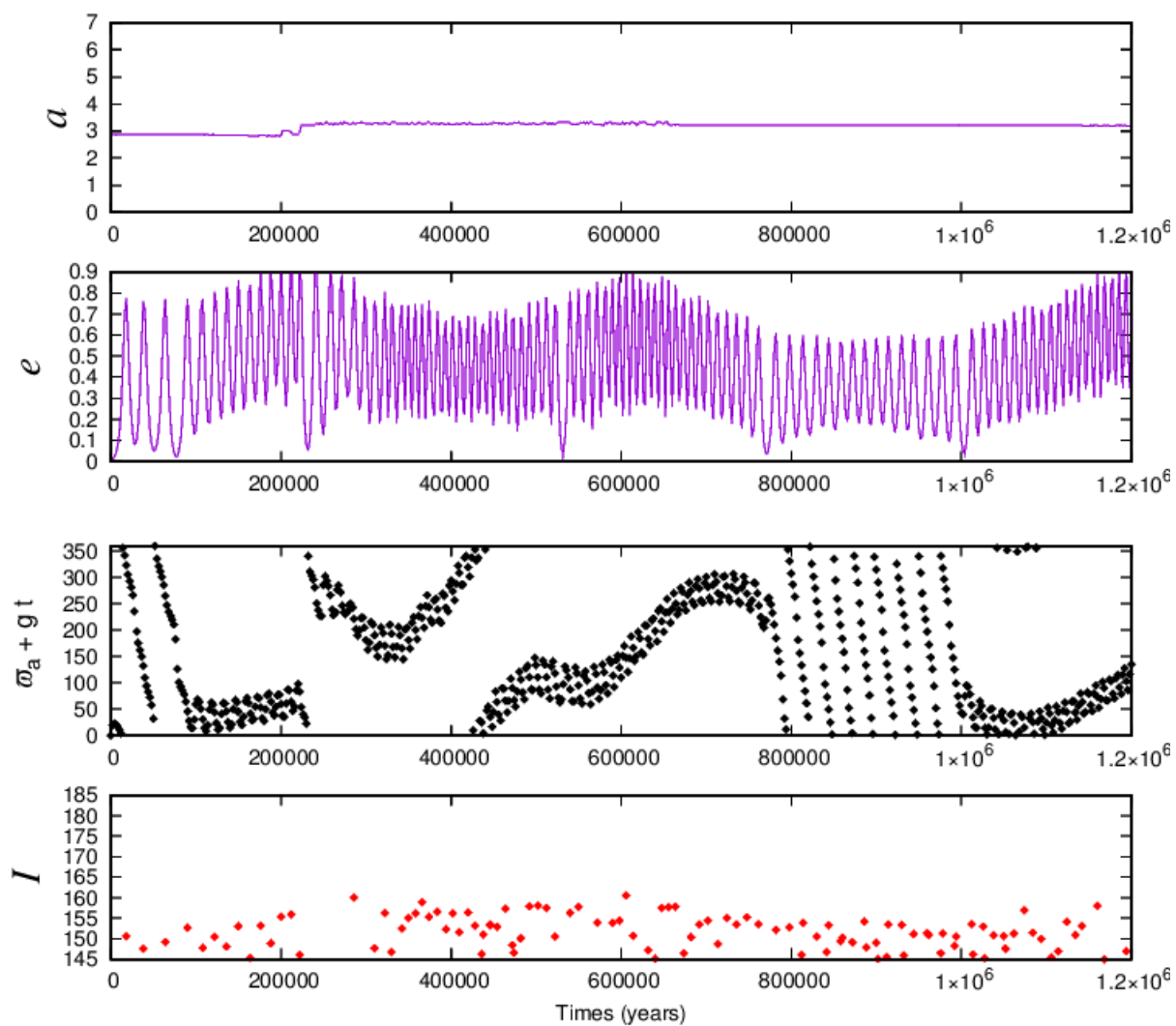


Figura 5.25: Semi-eixo: 2,8589 ua, Inclinação: $123,2^\circ$, Excentricidade: 0,006846 e
Frequência: g_5 .

6 Discussão e Conclusão

Este trabalho teve como foco principal o estudo de órbitas retrógradas. Foram realizadas modelagens das órbitas construindo primeiramente duas expansões para a função de perturbação: uma de segunda ordem nas excentricidades e inclinações; e outra de quarta ordem nas excentricidades e de segunda ordem nas inclinações.

A função perturbadora e as equações planetárias de Lagrange para o movimento retrógrado foram calculadas a partir de resultados já conhecidos na literatura sobre ressonâncias seculares para órbitas prógradas (caso linear e não linear). Para isso foi redefinido os parâmetros responsáveis por descrever a orientação da órbita. Por meio da primeira expansão, desenvolveu-se uma teoria linear para ressonância secular, ou seja, válida para pequenas excentricidades e inclinações próximas a 180° . Na segunda expansão, desenvolveu-se a teoria não-linear para ressonância secular, isto é, para altas excentricidades e inclinações.

A abordagem analítica para a expansão da função perturbadora para o caso retrógrado permitiu-nos obter as localizações das ressonâncias seculares. As simulações numéricas empregando as condições iniciais dos valores calculados do semi-eixo maior confirmaram a libração dos ângulos seculares que são previstos pelos resultados teóricos.

Neste trabalho obteve-se novos resultados ao estudar a superfície das frequências responsáveis por descrever o comportamento da taxa de precessão da longitude do pericentro. Tanto no caso prógrado quanto no caso retrógrado foi verificado a existência de frequências positivas e negativas, contradizendo o resultado da teoria linear.

As condições iniciais obtidas com o modelo analítico e implementadas nas inte-

grações numéricas realizadas com o software Mercury6 permitiu confirmar os resultados teóricos. Foi observado nas soluções das equações de movimento, obtidas por meio das equações planetárias de Lagrange, que houve a libração dos ângulos seculares.

A Obtenção das Equações Planetárias de Lagrange nas variáveis h , k , p e q .

A.1 Equações Planetárias de Lagrange para as variáveis h e k

A.1.1 Órbita prógrada

Considere as Equações Planetárias de Lagrange de ordem maior [16]

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \frac{\partial R}{\partial \varpi} \quad (\text{A.1})$$

e

$$\frac{d\varpi}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\text{tg}(I/2)}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial I}. \quad (\text{A.2})$$

Uma vez que a função h e k depende das variáveis e e ϖ , pode-se escrever a derivada da variável h na forma

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial e} \frac{de}{dt} + \frac{\partial h}{\partial \varpi} \frac{d\varpi}{dt}. \quad (\text{A.3})$$

Usando as equações (A.2), (A.1) e reescrevendo as derivadas parciais, levando em consideração que $\partial e = \partial k(e/k)$ e que $\partial \varpi = -\partial k/h$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{h}{e} \left(\frac{-\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \varpi} \right) + k \left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\text{tg}(I/2)}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial I} \right), \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{h^2}{e^2} \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \frac{\partial R}{\partial k} + \frac{k^2}{e^2} \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \frac{\partial R}{\partial k} + \frac{k \text{tg}(I/2)}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial I}, \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{dh}{dt} = \left(\frac{h^2 + k^2}{e^2} \right) \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \frac{\partial R}{\partial k} + \frac{k \text{tg}(I/2)}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial I}. \quad (\text{A.6})$$

Portanto,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \frac{\partial R}{\partial k} + \frac{k \text{tg}(I/2)}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial I}. \quad (\text{A.7})$$

Expandindo em série de Taylor os termos

$$\frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \approx 1, \quad \sqrt{1-e^2} \approx 1 - \frac{e^2}{2}. \quad (\text{A.8})$$

Logo,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{(1-e^2/2)}{na^2} \frac{\partial R}{\partial k} + \frac{k \text{tg}(I/2)}{na^2} \frac{\partial R}{\partial I}. \quad (\text{A.9})$$

Analogamente para a variável k :

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\partial k}{\partial e} \frac{de}{dt} + \frac{\partial k}{\partial \varpi} \frac{d\varpi}{dt}. \quad (\text{A.10})$$

Reescrevendo as derivadas parciais, levando em consideração que $\partial \varpi = \partial h/k$ e que $\partial e = \partial h(e/h)$, tem-se

$$\frac{dk}{dt} = \frac{k}{e} \left(\frac{-\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \varpi} \right) - h \left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\text{tg}(I/2)}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial I} \right), \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{dk}{dt} = -\frac{k^2}{e^2} \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \frac{\partial R}{\partial h} - \frac{h^2}{e^2} \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \frac{\partial R}{\partial h} - \frac{h \operatorname{tg}(I/2)}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial I}, \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{dk}{dt} = -\left(\frac{h^2 + k^2}{e^2}\right) \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \frac{\partial R}{\partial h} - \frac{k \operatorname{tg}(I/2)}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial I}. \quad (\text{A.13})$$

Portanto,

$$\frac{dk}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \frac{\partial R}{\partial h} - \frac{h \operatorname{tg}(I/2)}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial I}. \quad (\text{A.14})$$

Substituindo (A.7), resulta em

$$\frac{dk}{dt} = -\frac{(1-e^2/2)}{na^2} \frac{\partial R}{\partial h} - \frac{h \operatorname{tg}(I/2)}{na^2} \frac{\partial R}{\partial I}. \quad (\text{A.15})$$

A.1.2 Órbita Retrógrada

A partir das equações planetárias de Lagrange para o caso retrógrado presente em [17], foi possível obter as equações que descrevem a variação da excentricidade e longitude do pericentro dadas por

$$\frac{de}{dt} = +\frac{\eta}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \varpi}, \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = -\frac{\eta}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\cotg I/2}{na^2 \eta} \frac{\partial R}{\partial I}, \quad (\text{A.17})$$

onde $\eta = \sqrt{1-e^2}$.

Mudando as equações de movimento para novas variáveis h e k , tem-se

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial e} \frac{de}{dt} + \frac{\partial h}{\partial \varpi} \frac{d\varpi}{dt}, \quad (\text{A.18})$$

onde $\partial e = \partial k(e/k)$ e $\partial \varpi = -\partial k/h$, tem-se

$$\frac{dh}{dt} = \frac{h}{e} \left(+ \frac{\eta}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \varpi} \right) + k \left(- \frac{\eta}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\cotg I/2}{na^2 \eta} \frac{\partial R}{\partial I} \right). \quad (\text{A.19})$$

Logo

$$\frac{dh}{dt} = - \frac{\eta}{na^2} \frac{\partial R}{\partial k} + \frac{k \cotg(I/2)}{na^2 \eta} \frac{\partial R}{\partial I}. \quad (\text{A.20})$$

O mesmo vale para obter k . A variação de k no tempo é dada pela expressão:

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\partial k}{\partial e} \frac{de}{dt} + \frac{\partial k}{\partial \varpi} \frac{d\varpi}{dt}, \quad (\text{A.21})$$

onde $\partial h / \partial e = k/e$ e $\partial k / \partial \varpi = -h$. Substituindo (A.16) e (A.17), obtém-se

$$\frac{dk}{dt} = \frac{k}{e} \left(+ \frac{\eta}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \varpi} \right) - h \left(- \frac{\eta}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\cotg I/2}{na^2 \eta} \frac{\partial R}{\partial I} \right). \quad (\text{A.22})$$

Logo

$$\frac{dk}{dt} = + \frac{\eta}{na^2} \frac{\partial R}{\partial h} - \frac{k \cotg(I/2)}{na^2 \eta} \frac{\partial R}{\partial I}. \quad (\text{A.23})$$

Expandindo em série de Taylor

$$\frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \approx 1, \quad \sqrt{1-e^2} \approx 1 - \frac{e^2}{2}. \quad (\text{A.24})$$

Substituindo os valores das expansões nas expressões $\frac{dh}{dt}$ e $\frac{dk}{dt}$

$$\frac{dh}{dt} = - \frac{(1-e^2/2)}{na^2} \frac{\partial R}{\partial k} + \frac{k \cotg(I/2)}{na^2} \frac{\partial R}{\partial I}, \quad (\text{A.25})$$

$$\frac{dk}{dt} = + \frac{(1-e^2/2)}{na^2} \frac{\partial R}{\partial h} - \frac{k \cotg(I/2)}{na^2} \frac{\partial R}{\partial I}. \quad (\text{A.26})$$

A.2 Equações Planetárias de Lagrange para as variáveis p e q

A.2.1 Órbita prógrada

Considere as equações Planetárias de Lagrange presentes em [16] dada por

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{\text{tg}(I/2)}{na^2\eta} \frac{\partial R}{\partial \varpi} - \frac{1}{na^2\eta \sin(I)} \frac{\partial R}{\partial \Omega}, \quad (\text{A.27})$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = +\frac{1}{na^2\eta \sin(I)} \frac{\partial R}{\partial I}. \quad (\text{A.28})$$

Escrevendo a quantidade $\sin(I/2)$ na forma

$$p = \sin(I/2) \sin(\Omega), \quad (\text{A.29})$$

$$q = \sin(I/2) \cos(\Omega). \quad (\text{A.30})$$

onde

$$\frac{\partial p}{\partial I} = \frac{1}{2} \cos(I) \sin(\Omega) = \cos(I) \sin(\Omega) \frac{\sin(I)}{\sin(I)} = \frac{p \cos(I)}{2 \sin(I)}, \quad (\text{A.31})$$

$$\frac{\partial q}{\partial I} = \frac{1}{2} \cos(I) \sin(\Omega) = \cos(I) \cos(\Omega) \frac{\sin(I)}{\sin(I)} = \frac{q \cos(I)}{2 \sin(I)}, \quad (\text{A.32})$$

$$\frac{\partial p}{\partial \Omega} = q, \quad (\text{A.33})$$

$$\frac{\partial q}{\partial \Omega} = -p. \quad (\text{A.34})$$

A derivada temporal da variável p é dada por:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial I} \frac{dI}{dt} + \frac{\partial p}{\partial \Omega} \frac{d\Omega}{dt}. \quad (\text{A.35})$$

Substituindo as expressões (A.57) e (A.58) e as derivadas parciais (A.59) com relação a I e Ω , temos

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p \cos(I)}{2 \sin(I)} \left(-\frac{\text{tg}(I/2)}{na^2\eta} \frac{\partial R}{\partial \varpi} - \frac{1}{na^2\eta \sin(I)} \frac{\partial R}{\partial \Omega} \right) + p \left(\frac{1}{na^2\eta \sin(I)} \frac{\partial R}{\partial I} \right), \quad (\text{A.36})$$

ou ainda,

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{p}{2na^2\eta} \frac{\cos(I)}{(1 + \cos(I))} \left(k \frac{\partial R}{\partial h} - h \frac{\partial R}{\partial k} \right) + \frac{\cos(I)}{na^2\eta} \frac{\partial R}{\partial q}. \quad (\text{A.37})$$

A derivada temporal da variável q é dada por

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial I} \frac{dI}{dt} + \frac{\partial q}{\partial \Omega} \frac{d\Omega}{dt}. \quad (\text{A.38})$$

Substituindo as expressões (A.57) e (A.58) e as derivadas parciais (A.60) com relação a I e Ω , temos

$$\frac{dq}{dt} = \frac{q \cos(I)}{2 \sin(I)} \left(-\frac{\text{tg}(I/2)}{na^2\eta} \frac{\partial R}{\partial \varpi} - \frac{1}{na^2\eta \sin(I)} \frac{\partial R}{\partial \Omega} \right) - p \left(\frac{1}{na^2\eta \sin(I)} \frac{\partial R}{\partial I} \right), \quad (\text{A.39})$$

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{2na^2\eta} \frac{\cos(I)}{(1 + \cos(I))} \left(k \frac{\partial R}{\partial h} - h \frac{\partial R}{\partial k} \right) - \frac{\cos(I)}{na^2\eta} \frac{\partial R}{\partial p}. \quad (\text{A.40})$$

A.2.2 Órbita retrógrada

As equações planetárias de Lagrange para o caso retrógrado são [17]

$$\frac{dI}{dt} = +\frac{\cotg(I/2)}{na^2\eta} \frac{\partial R}{\partial \varpi^*} - \frac{1}{na^2\eta \sin(I)} \frac{\partial R}{\partial \Omega} \Rightarrow \frac{dI}{dt} = -\frac{\cotg(I/2)}{na^2\eta} \frac{\partial R}{\partial \varpi} - \frac{1}{na^2\eta \sin(I)} \frac{\partial R}{\partial \Omega}, \quad (\text{A.41})$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\eta \sin(I)} \frac{\partial R}{\partial I}. \quad (\text{A.42})$$

Escrevendo a quantidade $\cos\left(\frac{I}{2}\right)$ na forma

$$p = \cos(I/2) \sin(\Omega), \quad (\text{A.43})$$

$$q = \cos(I/2) \cos(\Omega), \quad (\text{A.44})$$

onde

$$\frac{\partial p}{\partial I} = -\frac{\sin(I/2)}{2} \sin(\Omega) = -\frac{\sin(I/2)}{2} \sin(\Omega) \frac{\cos(I/2)}{\cos(I/2)} = -\frac{p}{2} \text{tg}(I/2), \quad (\text{A.45})$$

$$\frac{\partial q}{\partial I} = -\frac{\text{sen}(I/2)}{2} \cos(\Omega) = -\frac{\text{sen}(I/2)}{2} \cos(\Omega) \frac{\cos(I/2)}{\cos(I/2)} = -\frac{q}{2} \text{tg}(I/2), \quad (\text{A.46})$$

onde

$$\frac{\partial p}{\partial \Omega} = q, \quad (\text{A.47})$$

$$\frac{\partial q}{\partial \Omega} = -p. \quad (\text{A.48})$$

A derivada temporal da variável p é dada por

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial I} \frac{dI}{dt} + \frac{\partial p}{\partial \Omega} \frac{d\Omega}{dt}. \quad (\text{A.49})$$

Substituindo as expressões (A.41) e (A.42) e as derivadas parciais A.43 com relação a I e Ω , obtém-se

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{p}{2} \text{tg}(I/2) \left(-\frac{\text{cotg}(I/2)}{na^2\eta} \frac{\partial R}{\partial \varpi} - \frac{1}{na^2\eta \text{sen}(I)} \frac{\partial R}{\partial \Omega} \right) + q \left(\frac{1}{na^2\eta \text{sen}(I)} \frac{\partial R}{\partial I} \right), \quad (\text{A.50})$$

$$\frac{dp}{dt} = +\frac{p}{2na^2\eta} \left(k \frac{\partial R}{\partial h} - h \frac{\partial R}{\partial k} \right) - \frac{\text{tg}(I/2)}{2na^2\eta \text{sen}(I)} \frac{\partial R}{\partial q}, \quad (\text{A.51})$$

onde

$$\frac{\text{tg}(I/2)}{\text{sen}(I)} = \frac{\text{sen}(I)}{1 + \cos(I)} \frac{1}{\text{sen}(I)} = \frac{1}{2 \cos^2(I/2)}.$$

Expandindo em série de Taylor

$$\frac{1}{2 \cos^2(I/2)} \approx \frac{1}{2}, \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} = 1 - \frac{e^2}{2}.$$

Substituindo os valores das expansões nas expressões $\frac{dp}{dt}$ e $\frac{dq}{dt}$

$$\frac{dp}{dt} = +\frac{p}{2na^2\eta} \left(k \frac{\partial R}{\partial h} - h \frac{\partial R}{\partial k} \right) - \frac{1}{4na^2\eta} \frac{\partial R}{\partial q}. \quad (\text{A.52})$$

A derivada temporal da variável q é dada por

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial I} \frac{dI}{dt} + \frac{\partial q}{\partial \Omega} \frac{d\Omega}{dt}. \quad (\text{A.53})$$

Substituindo as expressões (A.41) e (A.42) e as derivadas parciais (A.44) com relação a I e Ω , tem-se

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{2} \operatorname{tg}(I/2) \left(-\frac{\cotg(I/2)}{na^2\eta} \frac{\partial R}{\partial \varpi} - \frac{1}{na^2\eta \operatorname{sen}(I)} \frac{\partial R}{\partial \Omega} \right) - p \left(\frac{1}{na^2\eta \operatorname{sen}(I)} \frac{\partial R}{\partial I} \right), \quad (\text{A.54})$$

$$\frac{dq}{dt} = +\frac{q}{2na^2\eta} \left(k \frac{\partial R}{\partial h} - h \frac{\partial R}{\partial k} \right) + \frac{\operatorname{tg}(I/2)}{2na^2\eta \operatorname{sen}(I)} \frac{\partial R}{\partial p}, \quad (\text{A.55})$$

ou ainda,

$$\frac{dq}{dt} = +\frac{q}{2na^2\eta} \left(k \frac{\partial R}{\partial h} - h \frac{\partial R}{\partial k} \right) + \frac{1}{4na^2\eta} \frac{\partial R}{\partial p}. \quad (\text{A.56})$$

As equações Planetárias de Lagrange para o movimento prógrado são

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{\operatorname{tg}(I/2)}{na^2\eta} \frac{\partial R}{\partial \varpi} - \frac{1}{na^2\eta \operatorname{sen}(I)} \frac{\partial R}{\partial \Omega}, \quad (\text{A.57})$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = +\frac{1}{na^2\eta \operatorname{sen}(I)} \frac{\partial R}{\partial I}. \quad (\text{A.58})$$

Escrevendo a quantidade $\operatorname{sen}(I)$ na forma

$$p = \operatorname{sen}(I) \operatorname{sen}(\Omega), \quad (\text{A.59})$$

$$q = \text{sen}(I) \cos(\Omega). \quad (\text{A.60})$$

de modo que

$$\frac{\partial p}{\partial I} = \cos(I) \text{sen}(\Omega) = \cos(I) \text{sen}(\Omega) \frac{\text{sen}(I)}{\text{sen}(I)} = p \frac{\cos(I)}{\text{sen}(I)}, \quad (\text{A.61})$$

$$\frac{\partial q}{\partial I} = \cos(I) \text{sen}(\Omega) = \cos(I) \cos(\Omega) \frac{\text{sen}(I)}{\text{sen}(I)} = q \frac{\cos(I)}{\text{sen}(I)}, \quad (\text{A.62})$$

onde

$$\frac{\partial p}{\partial \Omega} = q, \quad (\text{A.63})$$

$$\frac{\partial q}{\partial \Omega} = -p. \quad (\text{A.64})$$

A derivada temporal da variável p é dada por

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial I} \frac{dI}{dt} + \frac{\partial p}{\partial \Omega} \frac{d\Omega}{dt}. \quad (\text{A.65})$$

Substituindo as expressões (A.57) e (A.58) e as derivadas parciais (A.59) com relação a I e Ω , obtém-se

$$\frac{dp}{dt} = p \frac{\cos(I)}{\text{sen}(I)} \left(-\frac{\text{tg}(I/2)}{na^2\eta} \frac{\partial R}{\partial \varpi} - \frac{1}{na^2\eta \text{sen}(I)} \frac{\partial R}{\partial \Omega} \right) + p \left(\frac{1}{na^2\eta \text{sen}(I)} \frac{\partial R}{\partial I} \right), \quad (\text{A.66})$$

ou ainda,

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{p}{na^2\eta} \frac{\cos(I)}{(1 + \cos(I))} \left(k \frac{\partial R}{\partial h} - h \frac{\partial R}{\partial k} \right) + \frac{\cos(I)}{na^2\eta} \frac{\partial R}{\partial q}. \quad (\text{A.67})$$

A derivada temporal da variável q é dada por

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial I} \frac{dI}{dt} + \frac{\partial q}{\partial \Omega} \frac{d\Omega}{dt}. \quad (\text{A.68})$$

Substituindo as expressões (A.57) e (A.58) e as derivadas parciais (A.60) com relação a I e Ω , resulta em

$$\frac{dq}{dt} = q \frac{\cos(I)}{\sin(I)} \left(-\frac{\text{tg}(I/2)}{na^2\eta} \frac{\partial R}{\partial \varpi} - \frac{1}{na^2\eta \sin(I)} \frac{\partial R}{\partial \Omega} \right) - p \left(\frac{1}{na^2\eta \sin(I)} \frac{\partial R}{\partial I} \right), \quad (\text{A.69})$$

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{na^2\eta} \frac{\cos(I)}{(1 + \cos(I))} \left(k \frac{\partial R}{\partial h} - h \frac{\partial R}{\partial k} \right) - \frac{\cos(I)}{na^2\eta} \frac{\partial R}{\partial p}. \quad (\text{A.70})$$

B Tabelas

As tabelas a seguir fornecem valores de parâmetros utilizados ao longo deste trabalho.

Constantes	Valores
Massa do Sol (m_c)	$1,98911 \times 10^{30} kg$
Constante gravitacional (G)	$6,672 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$
Unidade astronômica (1UA)	$1.495978707^{11} m$

Tabela B.1: Constantes astronômicas [16].

Planeta	$m(10^{24} kg)$
Mercúrio	0,3302
Venus	4.8685
Terra	5,9736
Marte	0,64185
Júpiter	1898,6
Saturno	568,46
Urano	86,832
Netuno	102,43

Tabela B.2: Massa dos planetas [16].

Planeta	a_0 (ua)	e_0	$I_0(^{\circ})$	$\varpi_0(^{\circ})$	$\Omega_0(^{\circ})$
Mercúrio	0,38709893	0,20563069	7,00487	77,45645	48,33167
Venus	0,72333199	0,00677323	3,39471	131,53298	76,68069
Terra	1,00000011	0,01671022	0,00005	102,94719	348,73936
Marte	1,52366231	0,09341233	1,85061	336,04084	49,57854
Júpiter	5,20336301	0,04839266	1,30530	14,75385	100,55615
Saturno	9,53707032	0,05415060	2,48446	92,43194	113,71504
Urano	19,19126393	0,38709893	0,76986	170,96424	74,22988
Netuno	30,06896348	0,38709893	1,76917	44,97135	131,72169

Tabela B.3: Elementos orbitais a_0 (semi-eixo maior), e_0 (excentricidade), I_0 (inclinação), Ω_0 (longitude do nodo ascendente), ω_0 (argumento do pericentro), $\varpi_0 = \omega_0 + \Omega_0$ (longitude do pericentro) [16].

Frequência associadas a longitude do pericentro	Valores (graus/ano)
g_5	0,001179083
g_6	0,007844045
$g_9 = 2g_5 - g_6$	-0,005485878
$-g_6 + 2s_6$	-0,022476919

Tabela B.4: Valores das frequência seculares [19].

Frequência associada a Longitude do nodo	Valores (graus/ano)
$-s_6 + 2g_6$	0,023004518
s_6	-0,0073166667
$-s_6 + g_5 + g_6$	0,016339565
$-s_6 + 2g_5$	0,009674
$-s_7 + g_5 + g_6$	0,009854
$s_7 - g_6 + g_7$	-0,007817848
$s_8 + g_5 - g_6$	-0,006857025

Tabela B.5: Valores das frequência seculares [19].

Referências

- [1] F. E. DeMeo; B. Carry. Solar system evolution from compositional mapping of the asteroid belt. *Nature*, 505:629–634, 2014.
- [2] J. E. Chambers. A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 304:793–799, 1999.
- [3] L. Daohai; A. A. Christou. Secular resonances between bodies on close orbits: A case study of the himalia prograde group of jovian irregular satellites. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 125:133–160, 2016.
- [4] M. H. M. Morais; A. V. Martinheira; A. C. Signor; G. Carita; L. R. Damin. An expansion of the disturbing function for the retrograde planetary problem. *Em preparação*, 2022.
- [5] T. Yokoyama; C. do Nascimento; M. T. Santos. Inner satellites of neptune: I the disturbing function. *Elsevier*, 36:569–577, 2005.
- [6] A. Lemaitre; P. Dubru. Secular resonances in the primitive solar nebula. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 52:57–78, 1991.
- [7] M. Huaman et al. The asteroid population in g-type non-linear secular resonances. *Monthly Notices Of The Royal Astronomical Society*, 468:4982–4991, 2017.
- [8] P. Michel; C. Froeschlé; P. Farinella. Dynamical evolution of neas: Close encounters, secular perturbations and resonances. *Earth, Moon and Planets*, 62:151–164, 1996.

-
- [9] H. L. Guidorizzi. *Um curso de Cálculo - Volume 2*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 5 edition, 2001.
- [10] A. V. Martinheira; A. C. Signor; G. Carita; L. R. Damin; M. H. M. Morais. Secular resonance for retrograde orbits. *XX Colóquio Brasileiro de Dinâmica Orbital*, 2021.
- [11] F. Namouni; H. Morais. Reckless orbiting in the solar system. *Nature*, 543:635–636, 2017.
- [12] F. Namouni; M. H. M. Morais. Coorbital capture at arbitrary inclination. *Computational and Applied Mathematics*, 37:65–71, 2017.
- [13] F. Namouni; M. H. M. Morais. The disturbing function for polar centaurs and trans-neptunian objects. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 471:2097–2110, 2017.
- [14] F. Namouni; M. H. M. Morais. The disturbing function for polar centaurs and trans-neptunian objects. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 474:157–176, 2018.
- [15] F. Namouni; M. H. M. Morais. An interstellar origin for jupiter’s retrograde co-orbital asteroid. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 477:117–121, 2018.
- [16] S. F. Dermott; C. D. Murray. *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press, 2 edition, 1999.
- [17] H. Kinoshita; H. Nakai. A note on secular perturbations between a retrograde body and a prograde body. *Celestial Mechanics*, 42:279–292, 1988.
- [18] M. H. M. Morais; F. Namouni. Retrograde resonance in the planar three-body problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 117:405–421, 2013.
- [19] M. Carpino ; A. Milani; A. M. Nobili. Long-term numerical integrations and synthetic theories for the motion of the outer planets. *Astronomy and Astrophysics*, 181:182–194, 1987.

-
- [20] University of North Florida. *Astronomy Lectures*.
<https://www.unf.edu/20n00006757/astromylectures/solarsystemformation-layoutb.htm>, Setembro, 2021.
- [21] C. Froeschle; H. Scholl. The three principal secular resonances $\nu(5)$, $\nu(6)$, and $\nu(16)$ in the asteroidal belt. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 46:231–251, 1989.
- [22] S. A. Stern. The evolution of comets in the oort cloud and kuiper belt. *Nature*, 424:639–642, 2003.
- [23] D. Brouwer; A. J. J. Van Woerkom. The secular variation of the orbital elements of the principal planets. *Astronomical Papers*, 13:81–107, 1950.
- [24] M. Yoshikawa. A simple analytical model for the secular resonance ν_6 in the asteroidal belt. *Celestial Mechanics*, 40:233–272, 1987.