

Argélia Maria de Santis Caligares

**A Phase - Lag e o Erro de Amplificação
para Métodos de Runge - Kutta Explícitos**



**A PHASE-LAG E O ERRO DE
AMPLIFICAÇÃO PARA MÉTODOS DE
RUNGE-KUTTA EXPLÍCITOS**

Argélia Maria de Santis Caligares

**Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada e
Computacional
MAC-017**

Argélia Maria de Santis Caligares

sob orientação do Prof. Dr. Sebastião Pereira Martins

S.J. - Rio Preto, Dezembro de 1996.



A Phase-lag e o Erro de Amplificação para Métodos de Runge-Kutta Explícitos

Os homens destituídos de planos estão à mercê dos ventos errantes da sorte... Aqueles que têm plano e determinação para seguir, têm o controle do destino. Os prêmios ambicionados que a vida pode oferecer, estão nas mãos daqueles que planejam e agem. As sobras ficam com os que não têm ideal.

Argélia Maria de Santis Caligares

sob orientação do **Prof. Dr. Sebastião Pereira Martins**

S.J. Rio Preto, Dezembro de 1996.



755/98

6.



Os homens destituídos de planos estão à mercê dos ventos errantes da sorte...Aqueles que têm plano e determinação para seguir, têm o controle do destino. Os prêmios ambicionados que a vida pode oferecer, estão nas mãos daqueles que planejam e agem.As sobras ficam com os que não têm ideal.

José Ingenieros



Agradecimentos

Cumpro-me, nesta oportunidade, agradecer profundamente a todos e a cada um dos colegas, professores e demais funcionários do departamento que de alguma forma auxiliaram-me.

A amiga Débora Andrea B. e ao amigo André Lagatta, por todo apoio e incentivo neste trabalho.

Em especial, ao Prof. Sebastião Pereira, por sua paciência, compreensão e humildade orientou-me.

A CAPES-pelo apoio financeiro.

ao Luiz Fernando, esposo e companheiro querido,
a mamãe,
a minha filha Gabriela e ao meu bebê,
dedico.

RESUMO

Agradecimentos

Cumpre-me, nesta oportunidade, agradecer penhoradamente a todos e a cada um dos colegas, professores e demais funcionários do departamento que de alguma forma auxiliaram-me.

À amiga Débora Andrea Pereira pelo grande incentivo e estímulo inicial deste trabalho.

Em especial, ao Prof. Sebastião Pereira Martins que com atenção, tolerância e humildade orientou-me.

À CAPES-pelo apoio financeiro.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é estudar os conceitos de phase-lag e erro de amplificação, que permitem construir métodos numéricos com desempenho favorável, quando aplicados a problemas de valor inicial para sistemas de equações diferenciais ordinárias com solução oscilante. Consideramos a aplicação desses conceitos à classe dos métodos de Runge-Kutta explícitos e desenvolvemos uma relação entre a ordem de consistência do método e as ordens da phase-lag e do erro de amplificação, concluindo que essa relação depende do número de estágios do método e eventualmente de alguns de seus coeficientes.

ABSTRACT

The main purpose of this work is to study the concepts of phase-lag and error amplification, which allow the construction of numeric techniques with favourable performance, when applied to initial value problems for ordinary differential equations systems with oscillating solution.

We consider the application of this concepts to the class of explicit Runge-Kutta methods and develop a relation between order of consistence and the orders of phase-lag and amplification error, concluding that this relation depends on the number of stages of the method and occasionally of some of its coefficients.

3.2	O problema teste	11
3.3	A phase-lag e o erro de amplificação	13
4	A Relação entre as Ordens Phase-Lag e de Consistência	19
4.1	Introdução	19
4.2	A ordem phase-lag para $p=2$	20
4.3	A ordem phase-lag para $p=3$	23
4.4	A ordem phase-lag para $p=4$	27
4.5	A ordem phase-lag para $p=5$	29

Índice

1	Introdução	1
2	Métodos de Runge-Kutta	4
2.1	Introdução	4
2.2	Conceitos Básicos	5
3	Phase-lag e o Erro de Amplificação	10
3.1	Introdução	10
3.2	O problema teste	11
3.3	A phase-lag e o erro de amplificação	13
4	A Relação entre as Ordens Phase-Lag e de Consistência	19
4.1	Introdução	19
4.2	A ordem phase-lag para $p=2$	20
4.3	A ordem phase-lag para $p=3$	23
4.4	A ordem phase-lag para $p=4$	27
4.5	A ordem phase-lag para $p=5$	29



5	A Relação entre as Ordens Dissipativa e de Consistência	33
5.1	A ordem dissipativa para $p=2$	33
5.2	A ordem dissipativa para $p=3$	35
5.3	A ordem dissipativa para $p=4$	37
5.4	A ordem dissipativa para $p=5$	38
6	Alguns pares de métodos de Runge-Kutta embutidos e respectivas ordens phase-lag e dissipativa	41
6.1	Introdução	41
6.2	Par embutido de Runge-Kutta	42
6.3	O par MRK(3,4)	43
6.4	As ordens phase-lag e dissipativa do MRK(3,4)	44
6.5	O par MRK(4,5)	47
7	Considerações Finais	53
	Bibliografia	56



Capítulo 1

Introdução

A obtenção de uma aproximação para a solução de um problema de valor inicial para sistemas de equações diferenciais ordinárias tem sido, em muitas situações práticas, uma opção fundamental.

Durante muitos anos essa busca da aproximação foi considerada apenas para pontos equidistantes no intervalo de existência da solução, em função da dificuldade em se estimar o erro de truncamento cometido a cada passo e do escasso acesso aos recursos computacionais.

Estimulados em encontrar técnicas eficientes para o controle do erro muitos pesquisadores se dedicaram ao problema e obtiveram resultados importantes.

Os métodos de Runge-Kutta, uma das duas classes mais consideradas no tratamento numérico de um problema de valor inicial, dispõe hoje de uma técnica bastante eficiente para a obtenção de estimativa para o erro de truncamento local. Assim, dispomos de códigos computacionais eficientes, por exemplo o RKF45, que permitem gerar aproximações com uma precisão pré-fixada, trabalhando com integração a passo variável. Isso tornou essa classe



de métodos uma ferramenta computacionalmente eficiente e competitiva.

Porém, quando durante a integração nos deparamos com intervalos onde a solução do problema de valor inicial apresenta oscilações mais acentuadas, o tamanho do passo normalmente sofre severas reduções para que se consiga a precisão desejada.

A utilização de métodos que minimizem essas reduções, como consequência de propriedades adequadas a eles incorporadas, tem hoje um papel de destaque.

Brusa e Nigro [1], procurando construir um método eficiente para a integração de sistema de equações de segunda ordem para uma estrutura dinâmica linear, introduziram uma propriedade hoje definida como “phase-lag”.

Desde então, vários trabalhos tem sido publicados considerando essa propriedade para a construção de novos métodos.

Na classe dos métodos de Runge-Kutta destacamos os trabalhos de Houwen e Sommeijer [7], [9], [10], Sideridis e Simos [14], [15].

Para os métodos lineares de passo múltiplo destacamos os trabalhos de Cash [3], Chawla [4], Chawla e Rao [5], Houwen e Sommeijer [8], Raptis e Simos [13], Simos [16] e Thomas [17].

Neste trabalho consideraremos, para a classe dos métodos de Runge-Kutta explícitos, os conceitos de phase-lag e de erro de amplificação.

Os principais resultados e definições relacionados com a classe dos métodos de Runge-Kutta, necessários para o desenvolvimento deste trabalho, são apresentados no capítulo 2.

No capítulo 3, são introduzidos os conceitos de phase-lag e de erro de amplificação e demonstrado um resultado que permite expressar, de forma mais algébrica, o conceito de



phase-lag, a partir do qual se desenvolve o capítulo 4, onde procuramos estabelecer relações entre a ordem de consistência do método de Runge-Kutta e sua ordem phase-lag considerando as classes de métodos explícitos com ordens de dois a cinco.

No capítulo 5, à semelhança das relações estabelecidas no capítulo anterior, são desenvolvidas relações entre a ordem de consistência e a ordem dissipativa.

Finalmente, no capítulo 6 apresentamos o par de métodos de Runge-Kutta embutidos com ordem 3 e 4, respectivamente, construídos por Sideridis e Simos [15] e um outro par embutido, com ordem 4 e 5, respectivamente, por nós construído utilizando as condições de ordem e de simplificação apresentadas por Martins e Basso [12]. Para esses dois pares de métodos são estudadas as respectivas ordens phase-lag e dissipativa.

O capítulo 7 apresenta algumas conclusões e considerações sobre os resultados obtidos neste trabalho e algumas possibilidades de continuidade do trabalho.



2.2 Conceitos Básicos

Capítulo 2

Métodos de Runge-Kutta

2.1 Introdução

A necessidade de se obter aproximações para a solução de uma Equação Diferencial Ordinária (E.D.O.), cuja solução exata não é determinável analiticamente, tem estimulado a busca de métodos numéricos que permitam gerar, com o menor esforço computacional possível, aproximações com a precisão desejada. Podemos destacar duas classe de métodos numéricos bastante utilizados e que tem merecido intensa investigação, os métodos lineares de passo múltiplo e os métodos de Runge-Kutta. Vamos, neste capítulo, apresentar alguns conceitos qualitativos e resultados relacionados com os métodos de Runge-Kutta, sobre os quais serão desenvolvidos os próximos capítulos.



2.2 Conceitos Básicos

Consideremos o problema de valor inicial (p.v.i.) para equações diferenciais ordinárias, definido por:

$$y' = f(x, y), \quad (2.1)$$

$$y(a) = y_0,$$

onde, por hipótese, admitimos que $y(x)$ existe de maneira única num intervalo $[a, b]$.

Vamos considerar uma discretização de $[a, b]$ em pontos x_n , definidos por $x_n = x_0 + nh$, para $n = 1, 2, \dots$, onde h será identificado como o comprimento do passo de integração. Denotaremos por y_n a aproximação para a solução exata $y(x)$ em $x = x_n$.

Definição 2.1 Dado o pvi (2.1) denominamos **método de Runge-Kutta com s estágios** a todo método numérico de passo um definido por:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i, \quad (2.2)$$

$$k_i = f(x_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j), \quad i = 1(1)s, \quad (2.3)$$

onde a_{ij} , c_i e b_i são constantes.

Observações:

1. Os valores c_i e a_{ij} sempre serão tomados considerando-se:

$$0 \leq c_i \leq 1$$

$$c_i = \sum_{j=1}^s a_{ij}, \quad i = 1(1)s.$$



2. Podemos representar os coeficientes de um Método de Runge-Kutta (MRK) com s estágios numa forma matricial, denominada representação de Butcher, dada por:

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \dots & b_s \end{array}$$

Se definirmos as matrizes $c = (c_1 c_2 \dots c_s)^t$, $A = (a_{ij})_{s \times s}$ e $b^t = (b_1 b_2 \dots b_s)$ a representação de Butcher para os coeficientes do MRK será dada por:

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^t \end{array}$$

3. A classe dos MRK pode ser dividida em 3 sub-classes, em função da forma da matriz A :

- Se $a_{ij} = 0$ para $i \leq j$, isto é, A é estritamente triangular inferior, teremos a sub-classe dos métodos de Runge-Kutta explícitos.
- Se $a_{ij} \neq 0$ para algum $j \geq i$, isto é, A não é estritamente triangular inferior, teremos a classe dos métodos de Runge-Kutta implícitos;
- Na sub-classe dos métodos de Runge-Kutta implícitos, podemos destacar aqueles métodos em que $a_{ij} = 0$ para $j > i$ e $a_{ij} \neq 0$ para algum i , isto é, A é triangular



inferior (mas não estritamente), neste caso teremos os métodos de Runge-Kutta semi-implícitos.

4. Todo este trabalho será desenvolvido considerando-se somente a classe dos métodos de Runge-Kutta explícitos.

Definição 2.2 Denominamos erro de truncamento local de um método de Runge-Kutta com s estágios, em $x = x_{n+1}$ e denotaremos por T_{n+1} , o valor:

$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y(x_n) - h \sum_{j=1}^s b_j k_j, \quad (2.4)$$

onde os valores k_j são todos determinados através de (2.3), mas considerando-se a solução exata $y(x)$ em $x = x_n$ em lugar de y_n .

Ao utilizarmos (2.2) e (2.3), se admitirmos que para $x = x_n$ se verifica a hipótese local $y_n = y(x_n)$, denotaremos a aproximação y_{n+1} daí gerada por $\tilde{y}_{n+1}$.

Logo, sob essa hipótese local, podemos facilmente observar que:

$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - \tilde{y}_{n+1}. \quad (2.5)$$

Isto é, sob a hipótese local o erro de truncamento local nada mais é do que a diferença entre a solução exata e a solução numérica no ponto x_{n+1} .

Se efetuarmos em (2.5) o desenvolvimento de T_{n+1} em Série de Taylor na vizinhança do ponto $x = x_n$, vamos obter:

$$T_{n+1} = w_1 h + w_2 h^2 + w_3 h^3 + w_4 h^4 + \dots + w_p h^p + O(h^{p+1}). \quad (2.6)$$



Definição 2.3 Dizemos que um método de Runge-Kutta tem ordem de consistência p , se este for o maior inteiro positivo tal que:

$$T_{n+1} = O(h^{p+1}), \quad (2.7)$$

$$\text{ou seja, } w_1 = w_2 = \dots = w_p = 0. \quad (2.8)$$

É importante registrar que os w_i são constituídos por expressões que envolvem os coeficientes do método multiplicados por derivadas parciais da função $f(x, y)$. Logo, para que possamos ter $w_i = 0$, para $i = 1, 2, \dots, p$ (independente do p.v.i.), é preciso que as expressões que envolvem os coeficientes do método sejam nulas, daí gerando equações que são denominadas **Condições de Ordem do Método de Runge-Kutta**.

Na prática, para construirmos um método de Runge-Kutta com ordem de consistência p consideramos as expansões em Série de Taylor de $y(x_{n+1})$ e $\tilde{y}_{n+1}$ numa vizinhança de $x = x_n$, que, substituídas em (2.5) e considerando (2.7) e (2.8), geram as equações que os coeficientes de um método de Runge-Kutta com s estágios devem satisfazer para que este tenha ordem de consistência p . No que segue diremos simplesmente que o método tem ordem p .

Relacionamos, a seguir, o sistema com 17 equações que um MRK explícito com s estágios deve satisfazer para que este tenha ordem cinco, isto é, suas condições de ordem.

$$\sum_{i=1}^s b_i = 1 \quad (2.9)$$

$$\sum_{i=1}^s b_i c_i = \frac{1}{2} \quad (2.10)$$

$$\sum_{i=1}^s b_i c_i^2 = \frac{1}{3} \quad (2.11)$$

$$\sum_{i=3}^s b_i \sum_{j=2}^{s-1} a_{ij} c_j = \frac{1}{6} \quad (2.12)$$



$$\sum_{i=1}^s b_i c_i^3 = \frac{1}{4} \quad (2.13)$$

$$\sum_{i=3}^s b_i c_i \sum_{j=2}^{i-1} a_{ij} c_j = \frac{1}{8} \quad (2.14)$$

$$\sum_{i=3}^s b_i \sum_{j=2}^{i-1} a_{ij} c_j^2 = \frac{1}{12} \quad (2.15)$$

$$\sum_{i=4}^s b_i \sum_{j=3}^{i-1} a_{ij} \sum_{k=2}^{j-1} a_{jk} c_k = \frac{1}{24} \quad (2.16)$$

$$\sum_{i=1}^s c_i^4 = \frac{1}{5} \quad (2.17)$$

$$\sum_{i=3}^s b_i c_i^2 \sum_{j=2}^{i-1} a_{ij} c_j = \frac{1}{10} \quad (2.18)$$

$$\sum_{i=3}^s b_i c_i \sum_{j=2}^{i-1} a_{ij} c_j^2 = \frac{1}{15} \quad (2.19)$$

$$\sum_{i=4}^s b_i c_i \sum_{j=3}^{i-1} a_{ij} \sum_{k=2}^{j-1} a_{jk} c_k = \frac{1}{30} \quad (2.20)$$

$$\sum_{j=3}^s b_j \sum_{k=2}^s a_{jk} c_k^3 = \frac{1}{20} \quad (2.21)$$

$$\sum_{i=3}^s \left(\sum_{j=2}^{i-1} a_{ij} c_j \right)^2 = \frac{1}{20} \quad (2.22)$$

$$\sum_{i=4}^s \sum_{j=3}^{i-1} a_{ij} c_j \sum_{k=2}^{j-1} a_{jk} c_k = \frac{1}{40} \quad (2.23)$$

$$\sum_{i=4}^s b_i \sum_{j=3}^{i-1} a_{jk} \sum_{k=2}^{j-1} a_{jk} c_k^2 = \frac{1}{60} \quad (2.24)$$

$$\sum_{i=5}^s b_i \sum_{j=4}^{i-1} a_{ij} \sum_{k=3}^{j-1} a_{jk} \sum_{m=2}^{k-1} a_{km} c_m = \frac{1}{120} \quad (2.25)$$

Se desse sistema excluirmos as equações de (2.17) a (2.25) então alcançaremos apenas ordem 4 para o MRK explícito daí obtido.

Se além dessas também excluirmos as equações de (2.13) a (2.16) apenas teremos a garantia de ordem 3. Finalmente, as equações (2.9) e (2.10) nos fornecem a classe dos métodos explícitos com ordem 2 e s estágios.



Capítulo 3

Phase-lag e o Erro de Amplificação

3.1 Introdução

Ao trabalharmos com métodos de Runge-Kutta a passo variável para a integração de problemas de valor inicial (p.v.i.) cuja solução é oscilante, podemos ter severas reduções no tamanho do passo para que se tenha garantida uma precisão pré-fixada para a aproximação.

Procurando minimizar tais reduções novos métodos tem sido construídos considerando-se as propriedades “phase-lag” e “erro de amplificação” introduzidas por Brusa e Nigro [1].

Neste capítulo, para a classe dos métodos de Runge-Kutta explícitos definiremos os conceitos de phase-lag e de erro de amplificação, e apresentaremos um resultado que permite caracterizar uma sub-classe de métodos de Runge-Kutta explícitos, voltados para p.v.i. que apresentam solução oscilante.



3.2 O problema teste

Consideremos o problema teste:

$$\begin{cases} y' = ivy & , \quad v \in \mathbb{R}, \\ y(x_0) = y_0 & , \end{cases} \quad (3.1)$$

cuja solução é $y(x) = y_0 e^{ivx}$.

Aplicando um método de Runge-Kutta explícito definido por (2.2) e (2.3) ao p.v.i.(3.1) obtemos:

$$\begin{aligned} k_1 &= ivy_n \\ k_2 &= iv(y_n + hc_2k_1) \\ k_3 &= iv[y_n + h(a_{31}k_1 + a_{32}k_2)] \\ &\vdots \\ k_s &= iv[y_n + h(a_{s1}k_1 + a_{s2}k_2 + \dots + a_{s,s-1}k_{s-1})] \end{aligned}$$

que substituindo de forma recorrente nos dão:

$$\begin{aligned} k_2 &= (iv - hc_2v^2)y_n \\ k_3 &= (iv - a_{31}v^2h - a_{32}v^2h - ic_2a_{32}v^3h^2)y_n \\ k_4 &= (iv - a_{41}v^2h - a_{42}v^2h - a_{43}v^2h - ic_2a_{42}v^3h^2 - \\ &\quad - ia_{31}a_{43}v^3h^2 - ia_{32}a_{43}v^3h^2 + c_2a_{32}a_{43}v^4h^3)y_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Daí, podemos determinar:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h(b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3 + \dots + b_s k_s) \\ &= y_n + ivhb_1y_n + ivhb_2y_n - b_2c_2v^2h^2y_n + \\ &\quad + ivhb_3y_n - v^2h^2b_3a_{31}y_n - v^2h^2b_3a_{32}y_n - iv^3h^3b_3a_{32}c_2y_n + \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

Considerando $H=vh$ obtemos:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= (1 + iHb_1 + iHb_2 - H^2b_2c_2 + iHb_3 - H^2b_3c_3 - iH^3b_3a_{32}c_2 + \dots)y_n \\ &= (1 + iz_1H + z_2H^2 + iz_3H^3 + z_4H^4 + \dots + \alpha z_sH^s)y_n \end{aligned}$$

onde para s par teremos $\alpha = 1$ e para s ímpar teremos $\alpha = i$.

Isto é, podemos reescrever a aproximação y_{n+1} como:

$$y_{n+1} = \{[(1 + z_2H^2 + z_4H^4 + \dots + z_{m_1}H^{m_1})] + i[z_1H + z_3H^3 + \dots + z_{m_2}H^{m_2}]\}y_n, \quad (3.2)$$

onde:

$$\begin{aligned} z_1 &= \sum_{i=1}^s b_i \\ z_2 &= -\sum_{i=2}^s b_i c_i \\ z_3 &= -\sum_{i=3}^s b_i \sum_{j=2}^{i-1} a_{ij} c_j \\ z_4 &= \sum_{i=4}^s b_i \sum_{j=3}^{i-1} a_{ij} \sum_{k=2}^{j-1} a_{jk} c_k \\ z_5 &= \sum_{i=5}^s b_i \sum_{j=4}^{i-1} a_{ij} \sum_{k=3}^{j-1} a_{jk} \sum_{l=2}^{k-1} a_{kl} c_l \\ z_6 &= -\sum_{i=6}^s b_i \sum_{j=5}^{i-1} a_{ij} \sum_{k=4}^{j-1} a_{jk} \sum_{l=3}^{k-1} a_{kl} \sum_{m=2}^{l-1} a_{lm} c_m \\ z_7 &= -\sum_{i=7}^s b_i \sum_{j=6}^{i-1} a_{ij} \sum_{k=5}^{j-1} a_{jk} \sum_{l=4}^{k-1} a_{kl} \sum_{m=3}^{l-1} a_{lm} \sum_{n=2}^{m-1} a_{mn} c_n \\ z_8 &= \sum_{i=8}^s b_i \sum_{j=7}^{i-1} a_{ij} \sum_{k=6}^{j-1} a_{jk} \sum_{l=5}^{k-1} a_{kl} \sum_{m=4}^{l-1} a_{lm} \sum_{n=3}^{m-1} a_{mn} \sum_{o=2}^{n-1} a_{no} c_o \end{aligned}$$

e, assim por diante.

Definindo os polinômios em H^2 :

$$A_s(H^2) = 1 + z_2H^2 + z_4H^4 + \dots + z_{m_1}H^{m_1}, \quad (3.3)$$

$$B_s(H^2) = z_1 + z_3 H^2 + z_5 H^4 + \dots + z_{m_2} H^{m_2-1}, \quad (3.4)$$

com $m_1 = s$ e $m_2 = s - 1$ para $\alpha = 1$ e $m_1 = s - 1$ e $m_2 = s$ para $\alpha = i$, podemos reescrever (3.2) como:

$$y_{n+1} = [A_s(H^2) + iHB_s(H^2)]y_n. \quad (3.5)$$

Logo, considerando $n=0,1,2,\dots$, podemos finalmente reescrever y_{n+1} como:

$$y_{n+1} = [a_s(H^2)]^{n+1}y_0, \quad (3.6)$$

onde:

$$a_s(H^2) = A_s(H^2) + iHB_s(H^2). \quad (3.7)$$

3.3 A phase-lag e o erro de amplificação

A partir de $a_s(H^2)$ Sideridis e Simos [15] definem os conceitos que a seguir apresentaremos, denotando por $\arg(z)$ o argumento do número complexo z .

Definição 3.1 Denomina-se *phase-lag* de um método de Runge-Kutta com s estágios e denotamos por $p(H)$ a quantidade:

$$p(H) = H - \arg(a_s(H^2)) \quad (3.8)$$

Definição 3.2 Denomina-se *erro de amplificação* de um método de Runge-Kutta com s estágios e denotamos por $a(H)$ a quantidade:

$$a(H) = 1 - |a_s(H^2)| \quad (3.9)$$



Definição 3.3 Se $p(H) = O(H^{r+1})$ e $a(H) = O(H^{q+1})$, então o método de Runge-Kutta é dito ter, respectivamente, **ordem phase-lag** r e **ordem dissipativa** q .

Considerando $y(x_n)$ e y_n como vetores do plano complexo, vamos tentar interpretar geometricamente os conceitos que acabamos de definir.

Temos que:

$$y(x_n) = y_0 e^{i v x_n} = y_0 e^{i n H} = y_0 (\cos nH + i \operatorname{sen} nH),$$

$$y_n = y_0 [a_s(H^2)]^n = y_0 [A_s(H^2) + i H B_s(H^2)]^n.$$

Logo,

$$\arg(y(x_n)) - \arg(y_n) = y_0 [\arg(\cos nH + i \operatorname{sen} nH) - \arg(A_s(H^2) + i H B_s(H^2))^n].$$

Mas,

$$\arg(\cos nH + i \operatorname{sen} nH) = nH,$$

e

$$\arg(A_s(H^2) + i H B_s(H^2))^n = n \arg(a_s(H^2)).$$

Logo, concluímos que:

$$\arg(y(x_n)) - \arg(y_n) = n y_0 [H - \arg(a_s(H^2))] = n y_0 p(H).$$

Isto é, a phase-lag $p(H)$ é proporcional à diferença angular entre o vetor solução exata $y(x_n)$ e o vetor aproximação y_n .



Consideremos agora a diferença de amplitude entre esses dois vetores:

$$\begin{aligned} |y(x_n)| - |y_n| &= |y_0| [|e^{inH}| - |(a_s(H^2))^n|] \\ &= |y_0| [|\cos nH + isennH| - |(a_s(H^2))^n|] \\ &= |y_0| [1 - |(a_s(H^2))^n|]. \end{aligned}$$

Isto é, o erro de amplificação $a(H) = 1 - |a_s(H^2)|$ é proporcional à diferença de amplitude entre o vetor solução exata $y(x_n)$ e o vetor aproximação y_n .

O conceito de phase-lag, na forma como foi definido em (3.8), apresenta dificuldades para sua utilização como uma característica que se deseja incorporar ao método. O resultado que enunciamos e demonstramos a seguir nos dá uma representação melhor para a phase-lag.

Teorema 3.1 *Se o método de Runge-Kutta possui ordem phase-lag r então, vale:*

$$\operatorname{tg} H - \frac{HB_s(H^2)}{A_s(H^2)} = cH^{r+1} + O(H^{r+3}),$$

onde c é a constante phase-lag do método.

Demonstração: Por definição temos que:

$$p(H) = H - \arg(a_s(H^2)) = H - \arctg \left[\frac{HB_s(H^2)}{A_s(H^2)} \right]. \quad (3.10)$$

Usando (3.3) e (3.4) podemos escrever:

$$\begin{aligned} \frac{HB_s(H^2)}{A_s(H^2)} &= HB_s(H^2) \cdot (A_s(H^2))^{-1} \\ &= H[z_1 + z_3H^2 + \dots + z_{m_2}H^{m_2-1}][1 + z_2H^2 + z_4H^4 + \dots + z_{m_1}H^{m_1}]^{-1}. \end{aligned}$$

Considerando o desenvolvimento Binomial, temos que:



$$\begin{aligned}
[1 + (z_2 H^2 + z_4 H^4 + \dots + z_{m_1} H^{m_1})]^{-1} &= 1 - (z_2 H^2 + z_4 H^4 + \dots + z_{m_1} H^{m_1}) \\
&\quad + (z_2 H^2 + z_4 H^4 + \dots + z_{m_1} H^{m_1})^2 \\
&\quad - (z_2 H^2 + z_4 H^4 + \dots + z_{m_1} H^{m_1})^3 + \dots
\end{aligned}$$

que substituindo nos dá:

$$\begin{aligned}
HB_s(H^2) \cdot (A_s(H^2))^{-1} &= \\
&= (z_1 H + z_3 H^3 + z_5 H^5 + z_{m_2} H^{m_2}) \cdot (1 - (z_2 H^2 + z_4 H^4 + \dots + z_{m_1} H^{m_1}) \\
&\quad + (z_2 H^2 + z_4 H^4 + \dots + z_{m_1} H^{m_1})^2 + (z_2 H^2 + z_4 H^4 + \dots + z_{m_1} H^{m_1})^3 + \dots) \\
&= z_1 H + z_3 H^3 + z_5 H^5 + z_{m_2} H^{m_2} - (z_1 H + z_3 H^3 + z_5 H^5 + z_{m_2} H^{m_2}) \\
&\quad \times (z_2 H^2 + z_4 H^4 + \dots + z_{m_1} H^{m_1}) + (z_1 H + z_3 H^3 + z_5 H^5 + z_{m_2} H^{m_2}) \\
&\quad \times (z_2 H^2 + z_4 H^4 + \dots + z_{m_1} H^{m_1})^2 + \dots \\
&= z_1 H + z_3 H^3 + z_5 H^5 + z_{m_2} H^{m_2} - z_1 z_2 H^3 - z_1 z_4 H^5 - \dots - z_1 z_{m_1} H^{m_1+1} + \dots
\end{aligned}$$

Isto é ,

$$\frac{HB_s(H^2)}{A_s(H^2)} = \alpha_1 H + \alpha_2 H^3 + \alpha_3 H^5 + \dots + \alpha_r H^{2r-1} + \dots \quad (3.11)$$

Logo, considerando-se o desenvolvimento em Série de Taylor da função arctg e usando (3.11), temos:

$$\begin{aligned}
\text{arctg} \left(\frac{HB_s(H^2)}{A_s(H^2)} \right) &= \frac{HB_s(H^2)}{A_s(H^2)} - \frac{1}{3} \left[\frac{HB_s(H^2)}{A_s(H^2)} \right]^3 + \frac{1}{5} \left[\frac{HB_s(H^2)}{A_s(H^2)} \right]^5 + \dots \\
&= \alpha_1 H + \alpha_2 H^3 + \alpha_3 H^5 + \dots + \alpha_r H^{2r+1} \\
&\quad - \frac{1}{3} [\alpha_1 H + \alpha_2 H^3 + \alpha_3 H^5 + \dots + \alpha_s H^{2s+1}]^3 + \dots \\
&= \alpha_1 H + \beta_1^* H^3 + \beta_2^* H^5 + \dots + \beta_r^* H^{2r+1} + \dots
\end{aligned}$$

Voltando em (3.10), obtemos:

$$p(H) = \beta_0 H + \beta_1 H^3 + \beta_2 H^5 + \dots + \beta_r H^{2r+1} + \dots \quad (3.12)$$

onde $\beta_0 = 1 - \alpha_1$ e $\beta_i = -\beta_i^*$, para $i = 1, 2, \dots$

Portanto, usando (3.12) e considerando que o método de Runge-Kutta possui ordem phase-lag r ou seja, $p(H) = O(H^{r+1})$ podemos escrever:

$$p(H) = \beta_{r^*} H^{r+1} + \beta_{r^*+1} H^{r+3} + \dots,$$

onde $r^* = r/2$ e β_{r^*} será a constante phase-lag do método.

Isto é,

$$p(H) = cH^{r+1} + O(H^{r+3}). \quad (3.13)$$

Novamente, considerando (3.10) e aplicando em ambos os membros da igualdade a função tangente, obtemos:

$$\text{tg}(p(H)) = \text{tg}(H) - \text{tg}\left(\arctg\left(\frac{HB_s(H^2)}{A_s(H^2)}\right)\right) = \text{tg}(H) - \frac{HB_s(H^2)}{A_s(H^2)}. \quad (3.14)$$

Por outro lado, considerando-se o desenvolvimento em Série de Taylor de $\text{tg}(p(H))$ e a equação (3.13), obtemos:

$$\begin{aligned} \text{tg}(p(H)) &= p(H) + \frac{1}{3}(p(H))^3 + \frac{2}{15}(p(H))^5 + \dots \\ &= cH^{r+1} + O(H^{r+3}) + \frac{1}{3}[cH^{r+1} + O(H^{r+3})]^3 + \dots \end{aligned}$$

Então,

$$\text{tg}(p(H)) = cH^{r+1} + O(H^{r+3}). \quad (3.15)$$



De (3.14) e (3.15), vem:

$$\operatorname{tg}(H) - \frac{HB_s(H^2)}{A_s(H^2)} = cH^{r+1} + O(H^{r+3}),$$

o que completa a demonstração.

Como consequência desse resultado temos que se o método de Runge-Kutta tem ordem phase-lag r , então podemos reescrever $p(H)$ como:

$$p(H) = \operatorname{tg}(H) - \frac{HB_s(H^2)}{A_s(H^2)} \quad (3.16)$$

Essa nova expressão para a phase-lag é bastante interessante e será útil para resultados que serão obtidos no próximo capítulo.

Uma outra conclusão a ser tirada da demonstração do teorema 2.1 é apresentada a seguir.

Corolário 3.1 *A ordem phase-lag de um método de Runge-Kutta será sempre um valor par.*

Demonstração: Por (3.12) temos que $p(H)$ se expressa em potências ímpares de H .

Logo, usando a definição 3.3 concluímos que a ordem phase-lag será sempre um valor par, independente da ordem de consistência assumida pelo método de Runge-Kutta ou de seu número de estágios.



Capítulo 4

A Relação entre as Ordens Phase-Lag e de Consistência

4.1 Introdução

Para a classe dos métodos de Runge-Kutta com s estágios e ordem p sabemos da existência de uma relação entre o valor mínimo a ser assumido por s e p . Em particular, para a classe dos métodos explícitos, se $p \leq 4$ o número mínimo de estágios será $s = p$ e para $p = 5$ necessitamos de pelo menos 6 estágios.

Neste capítulo, procuramos estabelecer, para a classe dos métodos de Runge-Kutta (MRK) explícitos, uma relação entre sua ordem de consistência e sua ordem phase-lag alcançável, concluindo que essa relação não apenas existe mas depende, também, do número de estágios considerado.



4.2 A ordem phase-lag para $p=2$

Para a classe dos métodos de Runge-Kutta explícitos com ordem $p = 2$ e utilizando resultados e relações apresentadas no capítulo anterior, vamos estabelecer uma relação entre a ordem phase-lag e a sua ordem de consistência, em função do número de estágios considerado.

De (3.5), (3.6) e (3.7) temos que:

$$y_{n+1} = [A_s(H^2) + iHB_s(H^2)]^{n+1}y_0, \quad (4.1)$$

com $H=vh$, onde $A_s(H^2)$ e $B_s(H^2)$ são os polinômios em H^2 definidos em (3.3) e (3.4), que têm como coeficientes expressões envolvendo os coeficientes do método de Runge-Kutta considerado que, por sua vez, dependem do número s de estágios.

Considerando, inicialmente, o número mínimo de estágios necessários para a obtenção de um método da classe dos de Runge-Kutta explícitos com ordem dois, isto é, dois estágios, encontramos que:

$$y_{n+1} = [A_2(H^2) + iHB_2(H^2)]^{n+1}y_0$$

onde, de (3.3) e (3.4), temos que:

$$A_2(H^2) = 1 + z_2H^2, \quad (4.2)$$

$$B_2(H^2) = z_1, \quad (4.3)$$

com

$$z_1 = b_1 + b_2 \quad \text{e} \quad z_2 = -b_2c_2.$$

Porém, considerando as condições de ordem para métodos de Runge-Kutta explícitos com ordem dois e dois estágios temos, de (2.9) e (2.10), que $b_1 + b_2 = 1$ e $b_2c_2 = \frac{1}{2}$.



Logo,

$$A_2(H^2) = 1 - \frac{1}{2}H^2, \quad (4.4)$$

$$B_2(H^2) = 1, \quad (4.5)$$

e, de (3.7), determinamos $a_2(H^2) = \left(1 - \frac{1}{2}H^2\right) + iH$.

Ainda, se considerarmos a relação (3.16), podemos escrever:

$$p(H) = \operatorname{tg} H - \frac{H}{1 - \frac{1}{2}H^2} = \operatorname{tg} H - (1 - \frac{1}{2}H^2)^{-1} \quad (4.6)$$

Daí, considerando as expansões em série de potências em H , de $\operatorname{tg} H$ e de $(1 - \frac{1}{2}H^2)^{-1}$ e substituindo em (4.6) determinamos, para $p(H)$, a expressão :

$$p(H) = -\frac{1}{6}H^3 - \frac{7}{60}H^5 - \frac{179}{2520}H^7 + O(H^9).$$

Observe que $p(H) = O(H^3)$ independente dos valores assumidos pelos coeficientes do método de Runge-Kutta considerado. Logo, concluímos que todo método de Runge-Kutta explícito com ordem dois e dois estágios terá ordem phase-lag dois.

Ainda para a classe dos métodos explícitos com ordem dois, mas agora com $s = 3$ estágios, vamos investigar se a ordem phase-lag do método permanecerá igual a dois ou poderá ser maior.

Como $s = 3$ temos que:

$$y_{n+1} = [A_3(H^2) + iHB_3(H^2)]^{n+1}y_0,$$

com

$$A_3(H^2) = 1 + z_2H^2, \quad (4.7)$$

$$B_3(H^2) = z_1 + z_3H^2, \quad (4.8)$$



onde, agora:

$$z_1 = b_1 + b_2 + b_3, \quad (4.9)$$

$$z_2 = -(b_2c_2 + b_3c_3), \quad (4.10)$$

$$z_3 = -b_3a_{32}c_2. \quad (4.11)$$

Daí, considerando novamente as condições de ordem para métodos com ordem dois, encontramos que $z_1 = 1$ e $z_2 = -\frac{1}{2}$, mas nada podemos concluir com relação a z_3 .

Logo ;

$$A_3(H^2) = 1 - \frac{1}{2}H^2, \quad (4.12)$$

$$B_3(H^2) = 1 + z_3H^2. \quad (4.13)$$

Daí, por raciocínio análogo ao considerado no caso anterior, temos que:

$$\begin{aligned} p(H) = & \left(-\frac{1}{6} + a_{32}b_3c_2\right)H^3 + \left(-\frac{7}{60} + \frac{a_{32}b_3c_2}{2}\right)H^5 \\ & + \left(-\frac{179}{2520} + \frac{a_{32}b_3c_2}{4}\right)H^7 + O(H^9). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Assim, a ordem phase-lag do método de Runge-Kutta será quatro se:

$$b_3a_{32}c_2 = \frac{1}{6}, \quad (4.15)$$

pois, nesse caso, teremos que $p(H) = -\frac{1}{30}H^5 + O(H^7)$. Caso contrário continuará sendo dois.

Isto é, ao aumentarmos um estágio podemos conseguir, para a classe dos métodos de Runge-Kutta explícitos com ordem dois e três estágios, ordem phase-lag quatro se a condição (4.15) se verificar. Caso contrário, continuará sendo dois.



Assim, ao construirmos um método de Runge-Kutta explícito com ordem dois e três estágios torna-se interessante considerarmos, além das duas condições de ordem, também a condição (4.15).

A família dos MRK explícitos com três estágios, ordem de consistência dois e ordem phase-lag quatro, tendo c_2 , c_3 e b_3 como parâmetros livres, com $c_2 b_3 \neq 0$, é dada por:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ c_2 & c_2 & \\ c_3 & \frac{6c_2c_3b_3 - 1}{6c_2b_3} & \frac{1}{6c_2b_3} \\ \hline & 1 - \frac{1 - 2(c_3 - c_2)b_3}{2c_2} & \frac{1 - 2c_3b_3}{2c_2} \quad b_3 \end{array}$$

4.3 A ordem phase-lag para $p=3$

Considerando agora a classe dos métodos de Runge-Kutta explícitos com ordem três e três estágios e, novamente de (3.5) e (3.6), encontramos:

$$y_{n+1} = [A_3(H^2) + iHB_3(H^2)]^{n+1}y_0,$$

onde $A_3(H^2)$ e $B_3(H^2)$ são definidos, respectivamente, por (4.7) e (4.8), com z_1, z_2 e z_3 definidos por (4.9), (4.10) e (4.11), respectivamente. Porém, agora, por serem condições de ordem para a classe de métodos com ordem três temos que $z_1 = 1$, $z_2 = -\frac{1}{2}$ e $z_3 = -\frac{1}{6}$.

Assim, temos:

$$A_3(H^2) = 1 - \frac{1}{2}H^2, \tag{4.16}$$

$$B_3(H^2) = 1 - \frac{1}{6}H^2. \tag{4.17}$$



Logo,

$$p(H) = \tan H - \frac{H(z_1 + z_3 H^2)}{1 + z_2} = \tan H - H\left(1 - \frac{1}{6}H^2\right)\left(1 - \frac{1}{2}H^2\right)^{-1} \quad (4.18)$$

de onde, considerando o desenvolvimento em série potências em H de $\tan H$ e de $(1 - \frac{1}{2}H^2)^{-1}$ e substituindo em (4.18), obtemos:

$$p(H) = -\frac{1}{30}H^5 - \frac{37}{1260}H^7 + O(H^9). \quad (4.19)$$

Assim, podemos concluir que todo método de Runge-Kutta explícito com ordem 3 e 3 estágios terá ordem phase-lag quatro.

Considerando agora a classe dos métodos de Runge-Kutta explícitos com ordem 3 e 4 estágios, ou seja, aumentando um estágio, obtemos:

$$y_{n+1} = [A_4(H^2) + iHB_4(H^2)]^{n+1}y_0,$$

com

$$A_4(H^2) = 1 + z_2 H^2 + z_4 H^4,$$

$$B_4(H^2) = z_1 + z_3 H^2,$$

onde:

$$z_1 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4, \quad (4.20)$$

$$z_2 = -(b_2 c_2 + b_3 c_3 + b_4 c_4), \quad (4.21)$$

$$z_3 = -(b_3 a_{32} c_2 + b_4 a_{42} c_2 + b_4 a_{43} c_3), \quad (4.22)$$

$$z_4 = b_4 a_{43} a_{32} c_2. \quad (4.23)$$



Considerando as condições de ordem para a classe dos métodos de Runge-Kutta explícitos com ordem três e quatro estágios encontramos que $z_1 = 1$, $z_2 = \frac{1}{2}$ e $z_3 = -\frac{1}{6}$. Mas em relação a z_4 nada podemos concluir.

Assim,

$$A_4(H^2) = 1 - \frac{1}{2}H^2 + b_4a_{43}a_{32}c_2H^4, \quad (4.24)$$

$$B_4(H^2) = 1 - \frac{1}{6}H^2. \quad (4.25)$$

Daí, por construção análoga à considerada nos casos anteriores, obtemos:

$$p(H) = \left(-\frac{1}{30} + b_4a_{43}a_{32}c_2\right)H^5 + \left(-\frac{37}{1260} + \frac{5b_4a_{43}a_{32}c_2}{6}\right)H^7 + O(H^9) \quad (4.26)$$

Portanto, se considerarmos válida a condição:

$$b_4a_{43}a_{32}c_2 = \frac{1}{30} \quad (4.27)$$

observamos que a expressão de $p(H)$ em (4.26) terá o coeficiente de H^5 igual a zero mas o coeficiente de H^7 não se anulará. Isto é,

$$p(H) = \left(-\frac{1}{630}\right)H^7 + O(H^9),$$

o que nos permite concluir que para a classe dos métodos de Runge-Kutta explícitos com ordem três e quatro estágios podemos encontrar métodos com ordem phase-lag seis se a condição (4.27) se verificar. Caso contrário, mesmo considerando quatro estágios, os MRK explícitos com ordem de consistência três, terão ordem phase-lag quatro.



A família dos MRK explícitos com quatro estágios, ordem de consistência três e ordem phase-lag seis, tendo c_2 , c_3 , a_{32} e b_2 como parâmetros livres, com $c_2 \neq 0$, $c_3 \neq 0$, $c_4 \neq 0$, $a_{32} \neq 0$, $M_2 \neq 0$ e $c_3 \neq c_4$ é dada por:

0	0			
c_2	c_2			
c_3	$a_{32} - c_3$	a_{32}		
c_4	$\frac{c_4 M_3}{5a_{32}c_2^2c_3M_2}$	$\frac{c_4 M_1}{5a_{32}c_2^2c_3M_2}$	$\frac{c_4(-c_3 + c_4)}{5a_{32}c_2M_2}$	
	$\frac{M_4}{6c_3c_4}$	b_2	$\frac{M_5}{6c_3(-c_3 + c_4)}$	$\frac{M_6}{6c_4(-c_3 + c_4)}$

onde:

$$M_1 = 10a_{32}^2c_2^2 - 30a_{32}^2b_2c_2^4 - 5a_{32}c_2c_3^2 + c_3^3 - 15a_{32}^2c_2^2c_4 + 30a_{32}^2b_2c_2^3c_4 + 5a_{32}c_2c_3c_4 - c_3^2c_4,$$

$$M_2 = 2 - 6b_2c_2^2 - 3c_3 + 6b_2c_2c_3,$$

$$M_3 = c_2c_3^2 - c_2c_3c_4 - M_1 + 5a_{32}c_2^2c_3M_2,$$

$$M_4 = 2 - 6b_2c_2^2 - 3c_3 + 6b_2c_2c_3 - 3c_4 + 6b_2c_2c_4 + 6c_3c_4 - 6b_2c_3c_4,$$

$$M_5 = -2 + b_2c_2^2 + 3c_4 - 6b_2c_2c_4,$$

$$M_6 = 2 - 6b_2c_2^2 - 3c_3 + 6b_2c_2c_3.$$

4.4 A ordem phase-lag para $p=4$

Para métodos de Runge-Kutta explícitos com ordem quatro e quatro estágios, encontramos:

$$y_{n+1} = [A_4(H^2) + iHB_4(H^2)]^{n+1}y_0,$$

com :

$$A_4(H^2) = 1 + z_2H^2 + z_4H^4,$$

$$B_4(H^2) = z_1 + z_3H^2,$$

onde z_1, z_2, z_3 e z_4 são definidos por (4.20), (4.21), (4.22) e (4.23), respectivamente. Os três primeiros, por serem condições de ordem para métodos com ordem três e quatro estágios, satisfazem $z_1 = 1$, $z_2 = -\frac{1}{2}$ e $z_3 = -\frac{1}{6}$. Ainda, $z_4 = \frac{1}{24}$, pois é uma das condições de ordem para métodos com ordem quatro e quatro estágios.

Assim :

$$A_4(H^2) = 1 - \frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{24}H^4, \quad (4.28)$$

$$B_4(H^2) = 1 - \frac{1}{6}H^2. \quad (4.29)$$

Logo,

$$p(H) = \tan H - \frac{\frac{6H-H^3}{6}}{\frac{24-12H^2+H^4}{24}} = \tan H - \frac{24H - 4H^3}{24 - 12H^2 + H^4}.$$

Assim, usando o mesmo procedimento dos casos anteriores, temos:

$$p(H) = \frac{1}{120}H^5 + \frac{3}{560}H^7 + O(H^9). \quad (4.30)$$

Logo, todo método de Runge-Kutta explícito com ordem quatro e quatro estágios tem ordem phase-lag quatro, independente dos valores assumidos pelos coeficientes do método.



Vejamos, agora, ao aumentarmos um estágio, ou seja, trabalhando com métodos de Runge-Kutta explícito com ordem quatro e cinco estágios, qual será a ordem phase-lag do método.

Neste caso, temos que:

$$y_{n+1} = [A_5(H^2) + iHB_5(H^2)]^{n+1}y_0,$$

com

$$A_5(H^2) = 1 + z_2H^2 + z_4H^4,$$

$$B_5(H^2) = z_1 + z_3H^2 + z_5H^4,$$

onde z_1 , z_2 , z_3 e z_4 assumem os mesmos valores do caso anterior, pois continuam sendo condições de ordem para métodos de ordem quatro, agora com cinco estágios. Contudo, em relação a $z_5 = b_5a_{54}a_{43}a_{32}c_2$, nada podemos concluir.

Assim, temos:

$$A_5(H^2) = 1 - \frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{24}H^4, \quad (4.31)$$

$$B_5(H^2) = 1 - \frac{1}{6}H^2 + b_5a_{54}a_{43}a_{32}c_2H^4. \quad (4.32)$$

Daí, analogamente, obtemos:

$$p(H) = \left(\frac{1}{120} - b_5a_{54}a_{43}a_{32}c_2\right)H^5 + \left(\frac{3}{560} - \frac{b_5a_{54}a_{43}a_{32}c_2}{2}\right)H^7 + O(H^9). \quad (4.33)$$

Isto é, ao aumentarmos um estágio conseguimos que a ordem phase-lag do método passe de quatro para seis se for verificada a condição :

$$b_5a_{54}a_{43}a_{32}c_2 = \frac{1}{120}. \quad (4.34)$$



Caso contrário, a ordem phase-lag continuará sendo quatro, mesmo aumentando um estágio ao método.

4.5 A ordem phase-lag para $p=5$

Para métodos de Runge-Kutta explícitos com ordem cinco e seis estágios, obtemos:

$$y_{n+1} = [A_6(H^2) + iHB_6(H^2)]^{n+1}y_0,$$

com

$$A_6(H^2) = 1 + z_2H^2 + z_4H^4 + z_6H^6,$$

$$B_6(H^2) = z_1 + z_3H^2 + z_5H^4,$$

onde:

$$z_1 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6, \quad (4.35)$$

$$z_2 = -(b_2c_2 + b_3c_3 + b_4c_4 + b_5c_5 + b_6c_6), \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} z_3 = & -(b_3a_{32}c_2 + b_4a_{42}c_2 + b_4a_{43}c_3 \\ & + b_5a_{52}c_2 + b_5a_{53}c_3 + b_5a_{54}c_4 \\ & + b_6a_{62}c_2 + b_6a_{63}c_3 + b_6a_{64}c_4 + b_6a_{65}c_5), \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} z_4 = & b_4a_{43}a_{32}c_2 + b_5a_{53}a_{32}c_2 + b_5a_{54}a_{42}c_2 \\ & + b_5a_{54}a_{43}c_3 + b_6a_{63}a_{32}c_2 + b_6a_{64}a_{42}c_2 \\ & + b_6a_{64}a_{43}c_3 + b_6a_{65}a_{53}c_3 + b_6a_{65}a_{54}c_4, \end{aligned} \quad (4.38)$$



$$\begin{aligned}
 z_5 = & b_5 a_{54} a_{43} a_{32} c_2 + b_6 a_{64} a_{43} a_{32} c_2 \\
 & + b_6 a_{65} a_{54} a_{32} c_2 + b_6 a_{65} a_{54} a_{42} c_2 \\
 & + b_6 a_{65} a_{54} a_{43} c_3,
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

$$z_6 = -b_6 a_{65} a_{54} a_{43} a_{32} c_2. \tag{4.40}$$

Da mesma forma que nos casos anteriores, com excessão de z_6 , as expressões dos z_i nos levam a condições de ordem para métodos de Runge-Kutta explícitos com ordem cinco e seis estágios. Assim, $z_1 = 1$, $z_2 = -\frac{1}{2}$, $z_3 = -\frac{1}{6}$, $z_4 = \frac{1}{24}$, $z_5 = \frac{1}{120}$ e nada podemos concluir com relação a z_6 .

Daí, obtemos :

$$A_6(H^2) = 1 - \frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{24}H^4 - b_6 a_{65} a_{54} a_{43} a_{32} c_2 H^6, \tag{4.41}$$

$$B_6(H^2) = 1 - \frac{1}{6}H^2 + \frac{1}{120}H^4. \tag{4.42}$$

Procedendo de maneira análoga aos casos anteriores, encontramos que:

$$p(H) = \left(\frac{1}{840} + z_6\right)H^7 + O(H^9), \tag{4.43}$$

com

$$z_6 = -b_6 a_{65} a_{54} a_{43} a_{32} c_2. \tag{4.44}$$

Nesse caso, a ordem phase-lag do método considerado depende do valor assumido por z_6 , ou seja, se :

$$b_6 a_{65} a_{54} a_{43} a_{32} c_2 = \frac{1}{840}, \tag{4.45}$$



então o método com ordem cinco e seis estágios terá ordem phase-lag igual a oito. Caso contrário, será seis.

Acrescentando um estágio ao método e procedendo como nos casos anteriores encontramos:

$$A_7(H^2) = 1 - \frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{24}H^4 + z_6H^6, \quad (4.46)$$

com

$$z_6 = (c_2a_{32})(b_6a_{65}a_{54}a_{43} + b_7a_{75}a_{54}a_{43} + b_7a_{76}a_{64}a_{43} + b_7a_{76}a_{65}a_{53}) + b_7a_{76}a_{65}a_{54}a_{42}c_2 + b_7a_{76}a_{65}a_{54}a_{43}c_3.$$

e,

$$B_7(H^2) = 1 - \frac{1}{6}H^2 + \frac{1}{120}H^4 + z_7H^6, \quad (4.47)$$

com

$$z_7 = -b_7a_{76}a_{65}a_{54}a_{43}a_{32}c_2.$$

Consequentemente, procedendo do mesmo modo que nos outros casos, ou seja, substituindo (4.46) e (4.47) em (3.16) e efetuando os desenvolvimentos pertinentes, vem:

$$p(H) = \left(\frac{1}{840} + z_6 - z_7\right)H^7 + O(H^9). \quad (4.48)$$

Portanto, concluímos que não vale a pena aumentarmos um estágio ao método, pois mesmo impondo a condição $(z_6 - z_7) = -\frac{1}{840}$, sua ordem phase-lag será oito.

Isto é, a mesma ordem phase-lag alcançada anteriormente quando consideramos um estágio a menos.

Resumindo, para métodos de Runge-Kutta explícitos com ordem de consistência no máximo cinco são válidos os resultados do teorema que a seguir enunciamos.



Teorema 4.1 *Se um método de Runge-Kutta explícito com s estágios tem ordem de consistência p e ordem phase-lag r então, temos:*

$$a_1) \quad r = 2, \quad \text{se} \quad p = s = 2,$$

$$a_2) \quad r = 4, \quad \text{se} \quad p = 2, s = 3 \quad \text{e} \quad b_3 a_{32} c_2 = \frac{1}{6},$$

$$a_3) \quad r = 4, \quad \text{se} \quad p = s = 3,$$

$$a_4) \quad r = 6, \quad \text{se} \quad p = 3, s = 4 \quad \text{e} \quad b_4 a_{43} a_{32} c_2 = \frac{1}{30},$$

$$a_5) \quad r = 4, \quad \text{se} \quad p = s = 4,$$

$$a_6) \quad r = 6, \quad \text{se} \quad p = 4, s = 5 \quad \text{e} \quad b_5 a_{54} a_{43} a_{32} c_2 = \frac{1}{120},$$

$$a_7) \quad r = 8, \quad \text{se} \quad p = 5, s = 6 \quad \text{e} \quad b_6 a_{65} a_{54} a_{43} a_{32} c_2 = \frac{1}{840},$$

$$a_8) \quad r = 6, \quad \text{se} \quad p = 5, s = 6 \quad \text{e} \quad b_6 a_{65} a_{54} a_{43} a_{32} c_2 \neq \frac{1}{840}.$$

Como no capítulo anterior, vamos procurar estabelecer uma relação entre a ordem de consistência do método de Runge-Kutta e sua ordem dissipativa. Considerando, para cada valor assumido pela ordem de consistência, o número mínimo de estágios, determinaremos qual a correspondente ordem dissipativa, independente dos valores assumidos pelos coeficientes do método considerado. Em seguida, acrescentamos mais um estágio ao método e investigamos qual será sua ordem dissipativa.

5.1 A ordem dissipativa para $p=2$

Utilizando resultados apresentados no capítulo anterior, vamos, a seguir, estabelecer uma relação entre a ordem dissipativa e a ordem de consistência para a classe dos métodos de Runge-Kutta explícitos com ordem 2, em função do número de estágios considerado.



Capítulo 5

A Relação entre as Ordens Dissipativa e de Consistência

Como no capítulo anterior, vamos procurar estabelecer uma relação entre a ordem de consistência do método de Runge-Kutta e sua ordem dissipativa. Considerando, para cada valor assumido pela ordem de consistência, o número mínimo de estágios, determinamos qual a correspondente ordem dissipativa, independente dos valores assumidos pelos coeficientes do método considerado. Em seguida, acrescentamos mais um estágio ao método e investigamos qual será sua ordem dissipativa.

5.1 A ordem dissipativa para $p=2$

Utilizando resultados apresentados no capítulo anterior vamos, a seguir, estabelecer uma relação entre a ordem dissipativa e a ordem de consistência para a classe dos métodos de Runge-Kutta explícitos com ordem 2, em função do número de estágios considerado.



De (3.5) e (3.6) temos que:

$$y_{n+1} = [A_s(H^2) + iHB_s(H^2)]^{n+1}y_0,$$

com $H=vh$ e $A_s(H^2)$ e $B_s(H^2)$ são os polinômios em H^2 definidos em (3.3) e (3.4).

Considerando inicialmente $s = 2$ estágios, que é o número mínimo de estágios necessários para a obtenção de um método da classe dos Runge-Kutta explícitos com ordem 2, encontramos, por (4.4) e (4.5), os polinômios $A_2(H^2)$ e $B_2(H^2)$ a partir dos quais determinamos $a_2(H)$, definido por (3.7), que será dado por:

$$a_2(H^2) = 1 - \frac{1}{2}H^2 + iH.$$

Daí, o erro de amplificação $a(H)$ será:

$$\begin{aligned} a(H) &= 1 - |1 - \frac{1}{2}H^2 + iH| \\ &= 1 - \left[\left(1 - \frac{1}{2}H^2\right)^2 + H^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Finalmente, considerando o desenvolvimento binomial, obtemos:

$$a(H) = -\frac{1}{8}H^4 + \frac{1}{36}H^8 - \frac{1}{64}H^{12} + O(H^{16}). \quad (5.1)$$

Observe que $a(H) = O(H^4)$ independente dos valores assumidos pelos coeficientes do método de Runge-Kutta considerado. Assim, podemos concluir que todo método de Runge-Kutta explícito com ordem dois e dois estágios terá ordem dissipativa três.

Aumentando um estágio, ou seja, trabalhando com a classe dos métodos com ordem dois e três estágios, vamos investigar se a ordem dissipativa do método permanecerá igual a três ou poderá ser maior.



Usando $A_3(H^2)$ e $B_3(H^2)$ obtidos em (4.12) e (4.13), determinamos :

$$a_3(H^2) = 1 - \frac{1}{2}H^2 + iH(1 - b_3a_{32}c_2H^2).$$

Daí, o erro de amplificação $a(H)$ é da forma:

$$\begin{aligned} a(H) &= 1 - |1 - \frac{1}{2}H^2 + iH(1 - b_3a_{32}c_2H^2)| = \\ &= 1 - \left(\left(1 - \frac{1}{2}H^2\right)^2 + \left(H - b_3a_{32}c_2H^3\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Efetuada o desenvolvimento binomial, obtemos:

$$a(H) = -\left(\frac{1}{8} - b_3a_{32}c_2\right)H^4 - \frac{1}{2}(b_3^2a_{32}^2c_2^2)H^6 - O(H^8). \quad (5.2)$$

Desta forma, a ordem dissipativa do método de Runge-Kutta será cinco se

$$b_3a_{32}c_2 = \frac{1}{8}. \quad (5.3)$$

Caso contrário, continuará sendo três.

Verificamos, então, que para aumentarmos a ordem dissipativa da classe dos métodos de Runge-Kutta explícitos com ordem dois e três estágios, devemos impor a condição (5.3).

5.2 A ordem dissipativa para $p=3$

Considerando agora a classe dos métodos de Runge-Kutta explícitos com ordem três e três estágios, e substituindo (4.16) e (4.17) na equação (3.7), obtemos:

$$a_3(H^2) = \left(1 - \frac{1}{2}H^2\right) + iH\left(1 - \frac{1}{6}H^2\right).$$



Substituindo na definição de erro de amplificação encontramos:

$$\begin{aligned} a(H) &= 1 - \left| \left(1 - \frac{1}{2}H^2\right) + iH\left(1 - \frac{1}{6}H^2\right) \right| = \\ &= 1 - \left(\left(1 - \frac{1}{2}H^2\right)^2 + \left(H - \frac{1}{6}H^3\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Então, considerando o desenvolvimento binomial, encontramos:

$$a(H) = \frac{1}{24}H^4 - \frac{1}{72}H^6 + O(H^8).$$

Logo, podemos concluir que todo método de Runge-Kutta explícito com ordem três e três estágios terá ordem dissipativa três.

Novamente, aumentando um estágio, ou seja, trabalhando com a classe dos métodos de Runge-Kutta explícitos com ordem três e quatro estágios, e substituindo $A_4(H^2)$ e $B_4(H^2)$ dados em (4.24) e (4.25), na equação (3.7), obtemos:

$$a_4(H^2) = 1 - \frac{1}{2}H^2 + b_4a_{43}a_{32}c_2H^4 + iH\left(1 - \frac{1}{6}H^2\right).$$

Pela definição de erro de amplificação, vem:

$$\begin{aligned} a(H) &= 1 - \left| 1 - \frac{1}{2}H^2 + b_4a_{43}a_{32}c_2H^4 + iH\left(1 - \frac{1}{6}H^2\right) \right| \\ &= 1 - \left(\left(1 - \frac{1}{2}H^2 + b_4a_{43}a_{32}c_2H^4\right)^2 + \left(H - \frac{1}{6}H^3\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

o que, considerando o desenvolvimento binomial, nos dá:

$$a(H) = \left(\frac{1}{24} - b_4a_{43}a_{32}c_2\right)H^4 + \left(-\frac{1}{72} + \frac{1}{2}b_4a_{43}a_{32}c_2\right)H^6 - O(H^8).$$

Portanto, se considerarmos válida a condição:

$$b_4a_{43}a_{32}c_2 = \frac{1}{24} \tag{5.4}$$

concluimos que podemos encontrar métodos com ordem dissipativa cinco, se a condição acima for satisfeita. Caso contrário, continuará sendo três.



5.3 A ordem dissipativa para $p=4$

Considerando métodos de Runge-Kutta explícitos com ordem quatro e quatro estágios e de maneira análoga ao caso anterior, ou seja, substituindo $A_4(H^2)$ e $B_4(H^2)$, dados em (4.28) e (4.29), na equação (3.7), obtemos:

$$a_4(H^2) = 1 - \frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{24}H^4 + iH(1 - \frac{1}{6}H^2).$$

Analogamente, da definição 3.9 vem :

$$\begin{aligned} a(H) &= 1 - |1 - \frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{24}H^4 + iH(1 - \frac{1}{6}H^2)| \\ &= 1 - \left((1 - \frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{24}H^4)^2 + (H - \frac{1}{6}H^3)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

chegamos, então, que

$$a(H) = \frac{1}{144}H^6 - \frac{1}{1052}H^8 - O(H^{10}).$$

Logo, todo método dessa classe tem ordem dissipativa cinco, independente dos valores assumidos pelos coeficientes do método.

Vejamos agora, acrescentando um estágio, qual será a ordem dissipativa do método.

Considerando (4.31) e (4.32), substituindo na equação (3.7) e procedendo de maneira análoga aos casos anteriores, encontramos :

$$a(H) = 1 - |(1 - \frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{24}H^4) + iH(1 - \frac{1}{6}H^2 + b_5a_{54}a_{43}a_{32}c_2H^4)|.$$

Daí:

$$a(H) = (\frac{1}{144} - b_5a_{54}a_{43}a_{32}c_2)H^6 + (\frac{1}{1052} - \frac{b_5a_{54}a_{43}a_{32}c_2}{6})H^8 + O(H^{10}). \quad (5.6)$$



Neste caso, ao aumentarmos um estágio conseguimos que a ordem dissipativa do método passe de cinco para sete se for verificada a condição :

$$b_5 a_{54} a_{43} a_{32} c_2 = \frac{1}{144}, \quad (5.5)$$

caso contrário, a ordem dissipativa continuará sendo cinco, mesmo aumentando um estágio ao método.

5.4 A ordem dissipativa para $p=5$

Primeiramente consideremos o número mínimo de estágios, ou seja, a classe dos métodos de Runge-Kutta explícitos com ordem cinco e seis estágios. Substituindo $A_6(H^2)$ e $B_6(H^2)$ de (4.41) e (4.42) na equação (3.7, encontramos:

$$a_6(H^2) = 1 - \frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{24}H^4 - b_6 a_{65} a_{54} a_{43} a_{32} c_2 H^6 + iH(1 - \frac{1}{6}H^2 + \frac{1}{120}H^4).$$

Pela definição 3.9, vem:

$$\begin{aligned} a(H) &= 1 - |1 - \frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{24}H^4 - b_6 a_{65} a_{54} a_{43} a_{32} c_2 H^6 + iH(1 - \frac{1}{6}H^2 + \frac{1}{120}H^4)| \\ &= 1 - \left[\left(1 - \frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{24}H^4 - b_6 a_{65} a_{54} a_{43} a_{32} c_2 H^6\right)^2 + \left(H - \frac{1}{6}H^3 + \frac{1}{120}H^5\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

e, considerando o desenvolvimento binomial, temos:

$$a(H) = \left(-\frac{1}{720} + b_6 a_{65} a_{54} a_{43} a_{32} c_2\right) H^6 + \left(\frac{1}{1920} - \frac{b_6 a_{65} a_{54} a_{43} a_{32} c_2}{2}\right) H^8 + O(H^{10}).$$

Concluimos que a ordem dissipativa do método considerado depende do valor assumido por alguns dos coeficientes do método, ou seja, se

$$b_6 a_{65} a_{54} a_{43} a_{32} c_2 = \frac{1}{720} \quad (5.6)$$



então o método com ordem cinco e seis estágios terá ordem dissipativa igual a sete, caso contrário, será cinco.

Acrescentando um estágio ao método e procedendo como nos casos anteriores encontramos:

$$a(H) = \left(-\frac{1}{720} + z_6\right)H^6 + \left(\frac{1}{1920} - z_6 + z_7\right)H^8 + O(H^{10}),$$

onde z_6 e z_7 são os mesmos citados no capítulo anterior (quando trabalhamos com ordem cinco e sete estágios).

Portanto, concluímos que não se torna interessante aumentarmos mais um estágio ao método, pois mesmo verificando a condição:

$$z_6 = \frac{1}{720}, \quad (5.7)$$

a sua ordem dissipativa será sete, que é a mesma alcançada anteriormente quando trabalhamos com um estágio a menos.

Os resultados deste capítulo nos permitem enunciar o seguinte teorema:

Teorema 5.1 *Se um método de Runge-Kutta explícito com s estágios, tem ordem de consistência p e ordem dissipativa q , então temos:*

$$a_1) \quad q = 3 \quad , \quad \text{se} \quad p = s = 2,$$

$$a_2) \quad q = 5 \quad , \quad \text{se} \quad p = 2, s = 3 \quad \text{e} \quad b_3 a_{32} c_2 = \frac{1}{8},$$

$$a_3) \quad q = 3 \quad , \quad \text{se} \quad p = s = 3,$$

$$a_4) \quad q = 5 \quad , \quad \text{se} \quad p = 3, s = 4 \quad \text{e} \quad b_4 a_{43} a_{32} c_2 = \frac{1}{24},$$

$$a_5) \quad q = 5 \quad , \quad \text{se} \quad p = s = 4,$$

- $a_6) \quad q = 7 \quad , \quad se \quad p = 4 \quad , \quad s = 5 \quad e \quad b_5 a_{54} a_{43} a_{32} c_2 = \frac{1}{144},$
 $a_7) \quad q = 7 \quad , \quad se \quad p = 5 \quad , \quad s = 6 \quad e \quad b_6 a_{65} a_{54} a_{43} a_{32} c_2 = \frac{1}{720},$
 $a_8) \quad q = 5 \quad , \quad se \quad p = 5 \quad , \quad s = 6 \quad e \quad b_6 a_{65} a_{54} a_{43} a_{32} c_2 \neq \frac{1}{720}.$

Capítulo 6

Alguns pares de métodos de

Runge-Kutta embutidos e respectivas

ordens phase-lag e dissipativa

6.1 Introdução

Sideridis e Simos constroem em [13] um par de fórmulas de Runge-Kutta embutidas com ordem 3 e 4, respectivamente, voltadas para problemas com solução oscilante. Apresentamos, a seguir, esse par de métodos bem como suas ordens phase-lag e dissipativa.

A seguir, apresentamos os passos por nós considerados para a obtenção de um par de métodos de Runge-Kutta embutidos com ordem 4 e 5, respectivamente, e analisamos as ordens phase-lag e dissipativa de cada um deles, obtendo um método voltado para problemas com solução oscilante de ordem superior ao produzido por Sideridis e Simos.



6.2 Par embutido de Runge-Kutta

Ao se trabalhar com um método de Runge-Kutta com ordem p , a técnica mais eficiente e atualmente bastante considerada para se eliminar o erro de truncamento local, utiliza um

Capítulo 6

Runge-Kutta mas com ordem superior a p .
Além de minimizar o esforço computacional dispendido a cada passo de integração no cálculo das derivadas de $f(x, y)$ podemos considerar dois métodos de Runge-Kutta tais que

Alguns pares de métodos, que a seguir definiremos.

Runge-Kutta embutidos e respectivas ordens phase-lag e dissipativa

6.1 Introdução

Sideridis e Simos constroem em [15] um par de fórmulas de Runge-Kutta embutidas com ordem 3 e 4, respectivamente, voltadas para problemas com solução oscilante. Apresentamos, a seguir, esse par de métodos bem como suas ordens phase-lag e dissipativa.

A seguir, apresentamos os passos por nós considerados para a obtenção de um par de métodos de Runge-Kutta embutidos com ordem 4 e 5, respectivamente, e analisamos as ordens phase-lag e dissipativa de cada um deles, obtendo um método voltado para problemas com solução oscilante de ordem superior ao produzido por Sideridis e Simos.



6.2 Par embutido de Runge-Kutta

Ao se trabalhar com um método de Runge-Kutta com ordem p , a técnica mais eficiente e atualmente bastante considerada para se estimar o erro de truncamento local, utiliza um outro método também de Runge-Kutta mas com ordem superior a p .

Afim de minimizar o esforço computacional dispendido a cada passo de integração no cálculo das derivadas de $f(x, y)$ podemos considerar dois métodos de Runge-Kutta tais que as derivadas de um sejam também derivadas do outro. Para isso, introduziremos o conceito de par embutido de métodos, que a seguir definimos.

Definição 6.1 *Dados dois métodos de Runge-Kutta, (c, A, b^t) com ordem p e s estágios e (c^*, A^*, b^{*t}) com ordem p^* e s^* estágios, tal que $p^* > p$, dizemos que o método com ordem p está embutido no método com ordem p^* se:*

$$c^* = \begin{pmatrix} c \\ r \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{s^*} \quad e \quad A^* = \left(\begin{array}{c|c} A & \theta_1 \\ \hline A' & \theta_2 \end{array} \right)_{s^* \times s^*}$$

com θ_1 e θ_2 vetores nulos e A' é uma matriz de dimensão $(s^* - s) \times s$.

Em particular, torna-se de valor prático o caso $p^* = p + 1$ e $s^* = s + 1$, com:

$$c^* = \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} \quad e \quad A^* = \left(\begin{array}{c|c} A & \theta \\ \hline b^t & 0 \end{array} \right) \quad (6.1)$$

Ao considerarmos um par de métodos de Runge-Kutta onde o de ordem p está embutido no de ordem $p + 1$, o representaremos por $\text{MRK}(p, p + 1)$.

6.3 O par MRK(3,4)

Sideridis e Simos [15] construíram um par de métodos de Runge-Kutta embutidos com ordem 3 e 4 e com 4 e 5 estágios respectivamente, cujos coeficientes apresentamos a seguir.

Na representação de Butcher e considerando as restrições $c_3 \neq 0$, $c_3 \neq \frac{1}{3}$, $c_3 \neq \frac{2}{3}$, $S_1 \neq 0$ e $S_2 \neq 0$, esta é a forma matricial dos coeficientes desse par de fórmulas:

0	0			
$\frac{3c_3-1}{3c_3}$	$\frac{3c_3-1}{3c_3}$			
c_3	$\frac{-c_3 S_3}{2(3c_3-1)}$	$\frac{3c_3^2}{2(3c_3-1)}$		
$\frac{c_3}{2S_1}$	$\frac{c_3 S_4}{8S_1^2}$	$\frac{3c_3^3(3c_3-2)}{8S_1^3}$	$-\frac{c_3 S_2}{8S_1^3}$	
1	$-\frac{S_5}{6c_3^2}$	0	$\frac{S_7}{6c_3^2 S_2}$	$\frac{2(3c_3-2)S_1^2}{3c_3^2 S_2}$
	$-\frac{S_6}{6c_3^2}$	0	$-\frac{3c_3-1}{6c_3^2 S_2}$	$\frac{2S_1^3}{3c_3^2 S_2(3c_3-2)}$ $\frac{2c_3-1}{2(3c_3-2)}$

onde:

$$S_1 = 3c_3^2 - 3c_3 + 1,$$

$$S_2 = 6c_3^2 - 6c_3 + 1,$$

$$S_3 = 3c_3^2 - 6c_3 + 2,$$

$$S_4 = 12c_3^2 - 15c_3 + 5,$$

$$S_5 = 18c_3^3 - 36c_3^2 + 21c_3 - 4,$$

$$S_6 = 6c_3^3 - 12c_3^2 + 6c_3 - 1,$$

$$S_7 = 12c_3^2 - 15c_3 + 4.$$

Na representação (6.1) do par de métodos embutidos temos, para o método de ordem 3, as seguintes matrizes:

$$c = \left(0, \frac{3c_3-1}{3c_3}, c_3, \frac{c_3}{2S_1} \right)^t,$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3c_3-1}{3c_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-c_3 S_3}{2(3c_3-1)} & \frac{3c_3^2}{2(3c_3-1)} & 0 & 0 \\ \frac{c_3 S_4}{8S_1^2} & \frac{3c_3^3(3c_3-2)}{8S_1^3} & -\frac{c_3 S_2}{8S_1^3} & 0 \end{pmatrix},$$

$$b^t = \left(-\frac{S_5}{6c_3^2}, 0, \frac{S_7}{6c_3^2 S_2}, \frac{2(3c_3-2)S_1^2}{3c_3^2 S_2} \right).$$

Para o método de ordem 4, temos:

$$c^* = (c, 1)^t, \quad b^{*t} = \left(-\frac{S_6}{6c_3^2}, 0, -\frac{3c_3-1}{6c_3^2 S_2}, \frac{2S_1^3}{3c_3^2 S_2(3c_3-2)}, \frac{2c_3-1}{2(3c_3-2)} \right),$$

$$A^* = \left(\begin{array}{c|c} A & \theta \\ \hline b^t & 0 \end{array} \right) \quad \text{com} \quad \theta = (0, 0, 0, 0)^t.$$

6.4 As ordens phase-lag e dissipativa do MRK(3,4)

Considerando o método (c, A, b^t) de ordem 3 proposto por Sideridis e Simos e utilizando os resultados do capítulo 2, encontramos:

$$A_4(H^2) = 1 - \frac{1}{2}H^2 - \left(c_3 \frac{3c_3 - 2}{24(3c_3^2 - 3c_3 + 1)}\right)H^4, \quad (6.2)$$

$$B_4(H^2) = 1 - \frac{1}{6}H^2, \quad (6.3)$$

que, substituindo em (3.16), nos dá:

$$p(H) = - \left(\frac{27c_3^2 - 22c_3 + 4}{120(3c_3^2 - 3c_3 + 1)} \right) H^5 - \left(\frac{969c_3^2 - 794c_3 + 148}{5040(3c_3^2 - 3c_3 + 1)} \right) H^7 + O(H^9).$$

Logo, se:

$$27c_3^2 - 22c_3 + 4 = 0 \quad \text{e} \quad 3c_3^2 - 3c_3 + 1 \neq 0,$$

o método terá phase-lag com ordem 6, caso contrário sua ordem phase-lag será 4.

Para $c_3 = \frac{1}{27}(11 + \sqrt{13})$, que é uma das raízes do polinômio $27c_3^2 - 22c_3 + 4$, obtemos:

$$p(H) = -\frac{1}{630}H^7 + O(H^9),$$

isto é, sua constante phase-lag é igual a $-\frac{1}{630}$.

Para este mesmo valor de c_3 , o erro de amplificação do método é expresso por:

$$a(H) = -\frac{1}{120}H^4 + O(H^6).$$

Isto é, o método terá ordem dissipativa 3. Usando o mesmo raciocínio obtemos, para o método de Runge-Kutta explícito com ordem quatro e cinco estágios:

$$A_5(H^2) = 1 - \frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{24}H^4,$$

$$B_5(H^2) = 1 - \frac{1}{6}H^2 - \left(\frac{c_3(2c_3 - 1)}{48(3c_3^2 - 3c_3 + 1)} \right) H^4,$$

que, substituindo em (3.16), nos dá:

$$p(H) = \left(\frac{16c_3^2 - 11c_3 + 2}{240(3c_3^2 - 3c_3 + 1)} \right) H^5 + \left(\frac{124c_3^2 - 89c_3 + 18}{3360(3c_3^2 - 3c_3 + 1)} \right) H^7 + O(H^9). \quad (6.4)$$

Analogamente, para conseguirmos que o método tenha ordem phase-lag máxima devemos ter:

$$16c_3^2 - 11c_3 + 2 = 0 \quad (6.5)$$

$$\text{e} \quad 3c_3^2 - 3c_3 + 1 \neq 0. \quad (6.6)$$

Considerando $c_3 = \frac{1}{27}(11 + \sqrt{13})$, que permite ao MRK com ordem 3 alcançar ordem phase-lag 6 e que verifica (6.6) mas não verifica (6.5), obtemos para (6.4):

$$p(H) = \frac{1}{144} \left(1 + \frac{1}{5}\sqrt{13} \right) H^5 + O(H^7).$$

Para o mesmo valor de c_3 encontramos, para o erro de amplificação do método de ordem quatro:

$$a(H) = \frac{1}{90} \left(1 + \frac{1}{4}\sqrt{13} \right) H^6 + O(H^8),$$

ou seja, sua ordem dissipativa será cinco.

Assim, Sideridis e Simos construíram um par embutido de fórmulas de Runge-Kutta com ordem de consistência 3 e 4 respectivamente, onde, para $c_3 = \frac{1}{27}(11 + \sqrt{13})$, concluímos que o método com ordem de consistência 3 tem ordem phase-lag 6 e ordem dissipativa 3, enquanto que o método com ordem 4 terá ordem phase-lag 4 e dissipativa igual a 5.



6.5 O par MRK(4,5)

Conforme registramos no capítulo 1, um método de Runge-Kutta explícito terá ordem cinco se seus coeficientes verificarem as dezessete condições de ordem, relacionadas de (2.9) a (2.25).

Vale também lembrar que se um método de Runge-Kutta tem ordem 4 então devem ser verificadas as condições de (2.9) a (2.16). Conforme Butcher [2], a fim de minimizar o esforço a ser dispendido na obtenção de um método de Runge-Kutta, podemos considerar algumas equações auxiliares, denominadas “condições de simplificação”. Quando elas são consideradas, algumas das condições de ordem são automaticamente satisfeitas, logo podem ser excluídas do sistema sem qualquer prejuízo para a obtenção do método de Runge-Kutta com a ordem desejada.

Como as condições de simplificação são, como equações, mais simples (muitas delas lineares em suas incógnitas) do que as condições de ordem eliminadas, tornamos o problema de obtenção dos coeficientes do método algo menos complexo. Daí serem tais equações denominadas condições de simplificação. Para a construção do par de métodos com ordem 4 e 5 respectivamente vamos considerar as seguintes condições de simplificação :

$$b_2 = 0, \quad (6.7)$$

$$\sum_{i=3}^s b_i a_{i2} = 0, \quad (6.8)$$

$$\sum_{i=3}^s b_i c_i a_{i2} = 0, \quad (6.9)$$

$$\sum_{i=4}^s b_i a_{i3} = 0, \quad (6.10)$$

$$\sum_{j=5}^s b_j \sum_{k=4}^{j-1} a_{jk} a_{k2} = 0, \quad (6.11)$$



$$\sum_{j=2}^{i-1} a_{ij} c_j = \frac{c_i^2}{2}, \quad i = 3, 4, \dots, s, \quad (6.12)$$

$$\sum_{j=2}^{i-1} a_{ij} c_j = \frac{c_i^3}{3}, \quad i = 3, 4, \dots, s. \quad (6.13)$$

Conforme Horn [6] e Martins e Basso [12], o novo sistema de equações, a ser considerado para a obtenção de um método com ordem 5, será constituído por todas as equações de simplificação citadas acima, com excessão de (6.12) para $i = 3$, mais as condições de ordem (2.9), (2.10), (2.11), (2.12), (2.13) e (2.17).

Escolhendo $c_3 = \frac{3}{2}c_2$, $c_4 = \frac{1}{4}$, $c_5 = \frac{1}{4}$, $c_6 = \frac{3}{4}$ e $c_7 = \frac{3}{8}$ e resolvendo as equações do novo sistema chegamos ao seguinte par embutido de métodos de Runge-Kutta com ordem 4 e 5 respectivamente, com $c_2 \neq 0$, $c_2 \neq \frac{1}{3}$, $c_2 \neq \frac{1}{6}$, $c_2 \neq \frac{73}{90}$, $d_3 \neq 0$, $d_4 \neq 0$, $d_7 \neq 0$, $d_{11} \neq 0$, $d_{15} \neq 0$, $d_{18} \neq 0$, $w_2 w_3 w_4 \neq 0$:

0	0						
c_2	c_2						
$\frac{3}{2}c_2$	$\frac{3}{8}c_2$	$\frac{9}{8}c_2$					
$\frac{1}{2}$	$\frac{d_1}{36c_2^2}$	$\frac{-2+9c_2}{24c_2^2}$	$\frac{1-3c_2}{18c_2^2}$				
$\frac{1}{4}$	$\frac{d_2}{192c_2^2d_3}$	$\frac{d_8}{192c_2^2d_3}$	$\frac{(1-6c_2)d_{12}}{96c_2^2d_4}$	$\frac{(1-6c_2)(4+585c_2)}{96d_4}$			
$\frac{3}{4}$	$\frac{d_5}{2880c_2^2d_4}$	$\frac{(1-6c_2)d_9}{64c_2^2d_3}$	$\frac{d_{13}}{1440c_2^2d_4}$	$\frac{d_{16}}{480d_4}$	$\frac{8}{15}$		
$\frac{3}{8}$	$\frac{3d_6}{512c_2^2d_7}$	$\frac{9d_{10}}{512c_2^2d_{11}}$	$\frac{9(1-4c_2)d_{14}}{256c_2^2d_{15}}$	$\frac{9d_{17}}{256d_{18}}$	0	$\frac{3(1-4c_2)}{-292+360c_2}$	
1	$\frac{-101(1-2c_2)}{900c_2}$	0	$\frac{101}{900c_2(1-9c_2+18c_2^2)}$	$\frac{-203+306c_2}{300(-1+2c_2)}$	$\frac{203-6c_2}{150(-1+6c_2)}$	$\frac{199}{450}$	
	$\frac{32w_1}{135c_2}$	0	$\frac{101}{11520w_2w_3w_4}$	$\frac{-16w_5}{15(-w_3)}$	$\frac{32w_6}{15(-w_4)}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-128w_7}{45w_2}$

onde

$$d_1 = 18c_2^2 - \frac{15}{2}c_2 + 1,$$

$$d_2 = -46 + 619c_2 - 3672c_2^2 + 7260c_2^3,$$

$$d_3 = -67 + 200c_2,$$

$$d_4 = 67 - 401c_2 + 600c_2^2,$$

$$d_5 = 6090 - 22523c_2 - 119159c_2^2 + 498168c_2^3 - 468900c_2^4,$$

$$d_6 = 9186 - 114045c_2 + 596352c_2^2 - 1318148c_2^3 + 898000c_2^4,$$

$$d_7 = 4891 - 20630c_2 + 18000c_2^2,$$

$$d_8 = 138 - 1045c_2 + 90c_2^2,$$

$$d_9 = -406 + 615c_2,$$

$$d_{10} = -9186 + 78253c_2 - 180950c_2^2 + 114600c_2^3,$$

$$d_{11} = 4891 - 20630c_2 + 18000c_2^2,$$

$$d_{12} = 46 - 75c_2 + 10c_2^2,$$

$$d_{13} = -6090 + 53657c_2 - 134080c_2^2 + 110700c_2^3,$$

$$d_{14} = -3062 + 17057c_2 - 33000c_2^2 + 19100c_2^3,$$

$$d_{15} = -4891 + 35303c_2 - 79890c_2^2 + 54000c_2^3,$$

$$d_{16} = +19896 - 115507c_2 + 140550c_2^2,$$

$$d_{17} = -3812 + 50595c_2 - 185938c_2^2 + 178200c_2^3,$$

$$w_1 = \frac{101}{128} - \frac{45c_2}{64},$$



$$\begin{aligned}
w_2 &= \frac{3}{8} - \frac{3c_2}{2}, \\
w_3 &= \frac{1}{2} - \frac{3c_2}{2}, \\
w_4 &= \frac{-1}{4} + \frac{3c_2}{2}, \\
w_5 &= \frac{171}{128} - \frac{105c_2}{64}, \\
w_6 &= \frac{267}{256} - \frac{195c_2}{128}, \\
w_7 &= \frac{73}{64} - \frac{45c_2}{32}.
\end{aligned}$$

Agora, vamos determinar a ordem phase-lag do método de ordem quatro e logo em seguida a do de ordem cinco. Para métodos com ordem 4 e 6 estágios obtemos, através de (3.3) e (3.4):

$$A_6(H^2) = 1 - \frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{24}H^4 + z_6H^6, \quad (6.14)$$

$$B_6(H^2) = 1 - \frac{1}{6}H^2 + z_6H^4. \quad (6.15)$$

Observe que a ordem phase-lag desse método será expressa em função dos coeficientes do método que aparecem em z_6 . Assim, usando $A_6(H^2)$ e $B_6(H^2)$, dados em (6.14) e (6.15), em (3.16), temos:

$$p(H) = \frac{(232147 - 1695717c_2 + 2635110c_2^2)}{324000(-67 + 200c_2)}H^5 + O(H^7). \quad (6.16)$$

Logo, para que o método tenha ordem phase-lag seis, devemos ter $c_2 \neq \frac{67}{200}$ e considerar para c_2 uma das raízes da equação:

$$232147 - 1695717c_2 + 2635110c_2^2 = 0. \quad (6.17)$$

Resolvendo (6.17) encontramos:

$$c_2 = \frac{565239 - \sqrt{47613846601}}{1756740}, \quad (6.18)$$



que, substituindo em (6.16), nos dá:

$$p(H) = O(H^7) .$$

Do mesmo modo, trabalhando com o método de ordem $p = 5$ e $s = 7$ estágios encontramos:

$$A_7(H^2) = 1 - \frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{24}H^4 + z_6H^6, \quad (6.19)$$

$$B_7(H^2) = 1 - \frac{1}{6}H^2 + \frac{1}{120}H^4 + z_7H^6, \quad (6.20)$$

o que nos leva a:

$$p(H) = \frac{(158948 - 1208913c_2 + 1940400c_2^2)}{907200(-67 + 200c_2)}H^7 + O(H^9) .$$

Considerando o valor de c_2 obtido em (6.18) e as expressões de $A_7(H^2)$ e $B_7(H^2)$ fornecidas por (6.19) e (6.20), obtemos:

$$p(H) = \frac{13607449773269 - 387964931\sqrt{47613846601}}{177079392000(-232689 - 10\sqrt{47613846601})}H^7 + O(H^9) .$$

Isto é, o método terá ordem phase-lag 6. Agora, calculando o erro de amplificação do método com ordem quatro e considerando o valor de c_2 fornecido por (6.18), obtemos:

$$a(H) = \omega_1 H^6 + O(H^8) , \quad \text{com} \quad \omega_1 \neq 0 .$$

Assim, concluímos que o método com ordem de consistência quatro terá ordem dissipativa cinco.

Analogamente, substituindo c_2 na expressão do erro de amplificação do método de ordem cinco encontramos que ele será dado por:

$$a(H) = \omega_2 H^6 + O(H^8) , \quad \omega_2 \neq 0 .$$



Daí, concluímos que tanto o método com ordem de consistência quatro como o com ordem cinco tem ordem dissipativa cinco. Observe que em ambos os casos trabalhamos com um número de estágios superior ao mínimo necessário.

Capítulo 7

Considerações Finais

Problemas de valor inicial para sistemas de equações diferenciais ordinárias cuja solução apresenta oscilações ou é periódica, têm um papel de destaque como modelo matemático de problemas reais.

A utilização de pares embutidos de métodos de Runge-Kutta para a integração numérica de problemas de valor inicial superou grandes barreiras até então existentes e colocou esta classe de métodos em lugar de destaque entre as ferramentas disponíveis para a resolução numérica de tais problemas.

Assim, o estudo de métodos dessa família que tragam incorporado à sua construção propriedades que lhe permitam ter um melhor desempenho, quando o problema for do tipo oscilante, tem merecido, nos últimos anos, consideráveis investigações.

Os conceitos de phase-lag e de erro de amplificação, por serem definidos sobre o problema teste $y' = iy$, transformarão-se em propriedades como as que mencionamos no parágrafo anterior, permitindo que os métodos de Runge-Kutta, construídos de forma a incorporá-las,



Capítulo 7

Considerações Finais

Problemas de valor inicial para sistemas de equações diferenciais ordinárias cuja solução apresenta oscilações ou é periódica, têm um papel de destaque como modelo matemático de problemas reais.

A utilização de pares embutidos de métodos de Runge-Kutta para a integração numérica de problemas de valor inicial superou grandes barreiras até então existentes e colocou essa classe de métodos em lugar de destaque entre as ferramentas disponíveis para a resolução numérica de tais problemas.

Assim, o estudo de métodos dessa família que tragam incorporado à sua construção propriedades que lhe permitam ter um melhor desempenho, quando o problema for do tipo oscilante, tem merecido, nos últimos anos, consideráveis investigações.

Os conceitos de phase-lag e de erro de amplificação, por serem definidos sobre o problema teste $y' = ivy$, transformaram-se em propriedades como as que mencionamos no parágrafo anterior, permitindo que os métodos de Runge-Kutta, construídos de forma a incorporá-las,



tenham um melhor desempenho computacional.

Esperamos deixar, com este trabalho, uma contribuição teórica aos interessados no assunto. No capítulo 3, apresentamos um desenvolvimento que nos permite interpretar os conceitos de phase-lag e de erro de amplificação geometricamente.

O teorema 4.1, enunciado ao final do capítulo 4, permite estabelecer uma relação entre a ordem de consistência do método de Runge-Kutta para as ordens entre dois e cinco e sua ordem phase-lag, em função do número de estágios considerados pelo método.

De maneira análoga, o teorema 5.1 apresentado ao final do capítulo 5 nos dá uma relação entre a ordem de consistência do método de Runge-Kutta explícito e sua ordem dissipativa, mostrando que também aí essa relação depende do número de estágios do método.

Dos dois teoremas podemos tirar uma observação interessante, qual seja, a ordem phase-lag assumirá sempre valor par, enquanto que a ordem dissipativa assumirá sempre valor ímpar.

Outra constatação, a partir dos mesmos teoremas é que podemos melhorar a ordem phase-lag e do erro de amplificação quando consideramos, na construção do método, mais estágios do que o mínimo necessário. Porém, como pode ser constatado, as relações a serem verificadas quando consideramos cada uma das ordens de consistência, envolvem os mesmos coeficientes do método e numa mesma expressão, mas assumindo valores distintos. Assim, deveremos sempre optar entre melhorar a ordem da phase-lag ou do erro de amplificação.

No capítulo 6, apresentamos dois pares de fórmulas embutidas de Runge-Kutta, um par contruido por Sideridis e Simos [15], com ordens de consistência 3 e 4 respectivamente e um outro por nós construido, com ordem 4 e 5 respectivamente. Para cada um deles são



analisados os valores assumíveis pelos coeficientes do método, a fim de que tenham um bom desempenho quando aplicados a problemas de valor inicial com solução oscilante.

Uma constatação do desempenho computacional do par com ordem 3 e 4 pode ser encontrada em [15], onde são apresentados os resultados da aplicação do par de métodos a vários problemas teste.

Como já registramos, o objetivo deste trabalho foi o de oferecer uma contribuição teórica aos interessados no assunto. Procuramos apresentar os conceitos de uma forma que julgamos organizada, clara e de fácil entendimento.

Como continuidade deste trabalho pretendemos investigar a aplicação dos conceitos de phase-lag e de erro de amplificação à classe dos métodos de Runge-Kutta semi-implícitos e implícitos. Adiantamos que para essas duas classes de métodos teremos algumas dificuldades adicionais a serem superadas quando da construção das derivadas de $f(x, y)$.

Uma outra investigação interessante é a do desempenho computacional do par de fórmulas por nós construído.

[4] Chawla, M.M. - Two-step fourth order P-stable methods for second order differential equations, BIT 21, p.190-193, 1981.

[5] Chawla, M.M. e P.S.Rao - An explicit sixth-order method with phase-lag of order eight for $y'' = f(x, y)$, Journal of Computational and Applied Mathematics 17(3), p.363-368, 1987.

[6] Horn, M.K. - Fourth and fifth order Runge-Kutta algorithms for treating dense output, SIAM Journal Numerical Analysis vol.20, p.359-369, 1983.



Bibliografia

- [1] Brusa, L. e L. Nigro. - *A one-step method for direct integration of structural dynamic equations*, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 15, p.685-699, 1980
- [2] Butcher, J.C. - *The numerical analysis of ordinary differential equations: Runge-Kutta and general linear methods*, John Wiley & Sons, N.Y., 1987
- [3] Cash, J.R. - *High order P-stable formulae for numerical integration of periodic initial value problems*, *Numerische Mathematik* 37, p.355-370, 1981
- [4] Chawla, M.M. - *Two-step fourth order P-stable methods for second order differential equations*, *BIT* 21, p.190-193, 1981.
- [5] Chawla, M.M. e P.S. Rao - *An explicit sixth-order method with phase-lag of order eight for $y'' = f(x, y)$* , *Journal of Computational and Applied Mathematics* 17(3), p.365-368, 1987.
- [6] Horn, M.K. - *Fourth and fifth escaled Runge-Kutta algoritms for treating dense output*, *SIAM Journal Numerical Analysis* vol.20, p.559-569, 1983.



- [7] Houwen, P.J.Vander e B.P.Sommeijer -*Explicit Runge-Kutta-Nystron methods with reduced phase errors for computing oscillating solutions*, *SIAM Journal Numerical Analysis* 24, p.595-617, 1987.
- [8] —————-*Predictor-Corretor methods for periodic second-order initial-value problems*, *JMA Journal of Numerical Analysis*, 7, p.407-422, 1987.
- [9] —————-*Phase-lag analysis of implicit Runge-Kutta methods*, *SIAM Journal Numerical Analysis* 24, p.565-617, 1987.
- [10] —————-*Diagonally implicit Runge-Kutta- Nystrom methods for oscillatory problems*, *SIAM Journal Numerical Analysis* 26, p.214-229, 1989.
- [11] Lambert, J.D. -*Numerical methods for ordinary differential systems: The initial value problem*, John Wiley & Sons, 1993.
- [12] Martins, S.P. e F.V.T.Basso -*Condições para a obtenção de métodos de Runge-Kutta explícitos com ordem cinco*, *Anais do XIX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*, p.326-327, 1996.
- [13] Raptis, A.D. e T.E.Simos -*A four-step phase fitted methods for the numerical integration of second order initial-value problems*, *BIT* 31, p.89-121, 1990.
- [14] Sideridis, A.B. e T.E.Simos -*An accurate numerical approximation to Richards function*, *Report TR-48, Informatics Laboratory, Agricultural University of Athens*, 1991.



- [15] ————— -A low-order embedded Runge-Kutta method for periodic initial value problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 44, p.235-244, 1992.
- [16] Simos, T.E. -A two-step method with phase-lag of order infinity for the numerical integration of second order initial-value problems, *International Journal Computational Mathematics* 39, p.135-140, 1990.
- [17] Thomas, R.M. -Phase properties of high order, almost P-stable formulae, *BIT* 24, p.225-238, 1984.



