



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Campus de Rio Claro

# O Problema Isoperimétrico e Aplicações para o Ensino Médio

**Fabiana Adala Moreto**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora  
**Profa. Dra. Thaís Fernanda Mendes Monis**

**2013**

111      Moreto, Fabiana Adala  
X111x      O Problema Isoperimétrico e Aplicações para o Ensino Médio/  
Fabiana Adala Moreto- Rio Claro: [s.n.], 2013.  
63 f.: fig., tab.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.  
Orientadora: Thaís Fernanda Mendes Monis

1. Geometria. 2. Área. 3. Perímetro. 4. Problema isoperimétrico. I. Título

# TERMO DE APROVAÇÃO

Fabiana Adala Moreto

## O PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO E APLICAÇÕES PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Thaís Fernanda Mendes Monis  
Orientadora

Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso  
IGCE - Unesp/Rio Claro

Prof. Dr. Welington Vieira Assunção  
CMCC - UFABC/Santo André

**Rio Claro, julho de 2013**

*Aos meus pais  
Oswair e Eleny  
À minha avó  
Emília (in memoriam)  
Aos meus irmãos  
Bruna e Lucas*

# Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus pela minha vida e por estar sempre comigo me fortalecendo frente às dificuldades.

Um agradecimento mais do que especial aos meus pais, Eleny e Oswair, pelo apoio incondicional. Pessoas em quem sempre procurei me espelhar, responsáveis por toda a formação que tive. Incansavelmente, mostraram-me o quão importante é estudar e se dedicar. Filha de professora de matemática, acredito que o gosto pelos números já tenha vindo do berço.

Aos meus irmãos, Bruna e Lucas, por estarem sempre me apoiando e torcendo por mim.

Agradeço também aos professores do Colégio Imaculada, de Campinas, escola em que estudei por 11 anos, responsáveis por minha formação. Em especial, à professora de matemática Malu, que sempre me incentivou a monitorar os demais alunos e que, por sua competência e dedicação, foi uma das grandes responsáveis pela base matemática que hoje possuo.

Agradeço aos professores da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), em especial à Professora Doutora Claudina Izepe Rodrigues, por sua orientação na iniciação científica, sua amizade, incentivo e grande dedicação em auxiliar-me em tudo o que precisei neste mestrado.

Aos professores da Unesp Rio Claro, em especial, à Professora Doutora Suzinei Aparecida Siqueira Marconato, pela coordenação do Profmat e pelo apoio. À Professora Doutora Thaís Fernanda Mendes Monis, por toda a sua atenção e orientação na realização deste trabalho.

Um agradecimento especial também ao professor e amigo Eduardo Luis Estrada, pela troca de ideias e pelas sugestões de grande valia na elaboração deste trabalho.

A todos os meus amigos que, direta ou indiretamente, participaram desta conquista, em especial às amigas Eliane Fernades, Eliane Rodrigues, Eliane Lepesteur, Aline Amsberg, Lenita Vieira e Érica Rovedo, pela parceria, apoio e torcida.

Por fim, um agradecimento aos amigos do mestrado, em especial, Anderson Afuso, Denis Silva, Henrique Figo, Juliana Silveira e Mauro Munsignatti Junior, pelo companheirismo, parceria e por fazerem de cada encontro aos sábados, nestes dois anos, um dia único.

*Nossa mente é finita, mas, mesmo nessas circunstâncias de finitude, estamos cercados por possibilidades infinitas, e o propósito da vida é abarcar tanto quanto pudermos da inifinitude.*

Alfred North Whitehead , matemático inglês

# Resumo

Neste trabalho, estudamos alguns problemas clássicos envolvendo máximos e mínimos na Geometria Euclidiana e discutimos o Problema Isoperimétrico (dentre as curvas de perímetro fixo, a circunferência é a que engloba a maior área) que podem ser utilizados nos Ensinos Fundamental e Médio, incluindo: (i) aspectos históricos, (ii) deduções formais do problema utilizando apenas Geometria Euclidiana e (iii) contextualizações em problemas de otimização.

**Palavras-chave:** Geometria, Área, Perímetro, Problema isoperimétrico.

# Abstract

In this work, we study some classical problems involving maxima and minima in the Euclidean Geometry and we discuss the Isoperimetric Problem (among all closed plane curves of a given length, that one whose encloses the largest area is the circle) which can be used in middle or high school classrooms, including: (i) historical aspects, (ii) formal deductions and (iii) contextualizations of optimization problems.

**Keywords:** Geometry, Area, Perimeter, Isoperimetric problem.

# Lista de Figuras

Figura 1.1	19
Figura 1.2	19
Figura 1.3	20
Figura 1.4	21
Figura 1.5	21
Figura 1.6	22
Figura 1.7	22
Figura 1.8	23
Figura 1.9	24
Figura 1.10	24
Figura 1.11	25
Figura 1.12	26
Figura 1.13	27
Figura 1.14	27
Figura 1.15	28
Figura 1.16	29
Figura 1.17	29
Figura 1.18	30
Figura 1.19	31
Figura 2.1	35
Figura 2.2	37
Figura 2.3	37
Figura 2.4	38
Figura 2.5	39
Figura 2.6	40
Figura 2.7	41
Figura 3.1 <i>Mapa de Paris</i>	44
Figura 3.2 <i>Mapa de Colônia</i>	44
Figura 3.3 <i>Mapa de Braga</i>	44
Figura 3.4	45
Figura 3.5 <i>Imagem de Dido e seu povo cortando o couro de um boi</i>	46

Figura 3.6	<i>A personagem, a obra e o autor</i> . . . . .	46
Figura 3.7	. . . . .	47
Figura 3.8	. . . . .	48
Figura 3.9	. . . . .	49
Figura 3.10	. . . . .	49
Figura 4.1	. . . . .	52
Figura 4.2	. . . . .	53
Figura 4.3	. . . . .	53
Figura 4.4	. . . . .	55
Figura 4.5	. . . . .	57
Figura 4.6	. . . . .	59
Figura 4.7	. . . . .	60

# Sumário

<b>1</b>	<b>Áreas</b>	<b>19</b>
1.1	Comprimento da circunferência e o número $\pi$ . . . . .	26
1.2	Área do Círculo . . . . .	28
1.3	Um pouco de história . . . . .	32
<b>2</b>	<b>Maximizando a área e minimizando o perímetro de polígonos</b>	<b>35</b>
2.1	Problemas . . . . .	36
2.1.1	Problema 1 . . . . .	36
2.1.2	Problema 2 . . . . .	37
2.1.3	Problema 3 . . . . .	39
2.1.4	Problema 4 . . . . .	41
<b>3</b>	<b>O Problema Isoperimétrico</b>	<b>43</b>
3.1	Um pouco de história . . . . .	43
3.2	Demonstração usando apenas geometria plana . . . . .	46
<b>4</b>	<b>O Problema Isoperimétrico - Aplicações</b>	<b>51</b>
4.1	Otimização de janelas . . . . .	51
4.1.1	Janelas retangulares . . . . .	53
4.1.2	Qual o melhor retângulo? . . . . .	55
4.2	Guia do professor para o vídeo “A Lenda de Dido” (versão texto) . . . . .	56
4.2.1	Sugestões de atividades . . . . .	60
	<b>Referências</b>	<b>63</b>

# Introdução

O objetivo deste trabalho é explorar questões de máximo e mínimo na geometria euclidiana, em particular o Problema Isoperimétrico. A escolha por este tema deu-se em função de que problemas envolvendo otimização têm grande proximidade com o cotidiano dos alunos, sejam eles de ensino médio ou superior. A busca pela resposta a um problema de natureza isoperimétrica possibilita ao professor mostrar a necessidade e a relevância da construção de alguns resultados prévios, possibilitando ao aluno compreender melhor a estruturação da matemática envolvida.

A geometria que se estuda hoje nas escolas provém de um livro extraordinário, intitulado “Elementos”, escrito por volta do ano 300 *a.C.* por um professor da Universidade de Alexandria chamado Euclides. Desde então, os *Elementos* de Euclides foram publicados em mais de um milhão de edições, nos mais diversos idiomas, antigos e modernos. Até recentemente ainda eram usados nas escolas da Europa, e os textos atuais de geometria que o substituem são todos baseados nessa obra imortal, na qual pela primeira vez se organizou, de modo sistemático e com refinado bom gosto, o conhecimento matemático de uma época.

A seguir, apresentaremos como está organizada a dissertação: no Capítulo 1, apresentamos postulados envolvendo áreas de regiões planas. Chegamos à área de uma região triangular e, a partir dela, às áreas de regiões poligonais arbitrárias. Numa segunda etapa, trabalhamos comprimento de arco e área de um setor circular, momento em que novamente utilizamos áreas de regiões triangulares, só que desta vez, tendo por base as chamadas “uniões aproximadas” de tais regiões. No final do capítulo, apresentamos uma nota histórica sobre o assunto abordado.

No Capítulo 2, apresentamos quatro problemas que abordam a maximização da área e minimização do perímetro de polígonos. Os dois primeiros problemas relacionam-se a triângulos e os outros dois, a polígonos, em geral, e sempre partimos de demonstrações de proposições que fundamentam as respectivas resoluções. Trata-se de problemas interessantes que podem ser abordados pelo professor, tanto no ensino fundamental, como no médio.

No Capítulo 3, tratamos de alguns aspectos históricos do Problema Isoperimétrico e discutimos a formalização da solução do problema, devida à Jakob Steiner (1796-1863), utilizando somente elementos de geometria plana e não nos reportando a questões de existência.

Por fim, no Capítulo 4, apresentamos algumas aplicações do Problema Isoperimétrico que podem ser abordadas pelos professores dos Ensinos Fundamental e Médio. Para tanto, utilizamos os programas computacionais e vídeos desenvolvidos para o Projeto M3, parceria MEC-UNICAMP para a produção de material didático de matemática para o ensino médio. São de livre uso e atualmente disponíveis para utilização no endereço <http://m3.mat.br> ([1]). Alguns desses programas abordam especificamente problemas de otimização de áreas a partir de perímetros fixos. Mostramos o programa computacional “Otimização de Janelas” e finalizamos apresentando, como aplicação, o material audiovisual intitulado “A Lenda de Dido”.

As ilustrações do trabalho, exceto as indicadas no texto, foram construídas com o software *Cabri-Géomètre II*, que permite, entre outros recursos, construir pontos, retas, triângulos, polígonos, círculos e outros objetos básicos e também aplicar transformações geométricas como translação, dilatação, rotação, reflexão, simetria e inversão a objetos geométricos.

# 1 Áreas

Neste capítulo, apresentamos postulados envolvendo áreas de regiões planas. Definimos a área de uma região triangular e, a partir dela, as áreas de regiões poligonais.

Numa segunda etapa, trabalhamos com o comprimento de arco e área de um setor circular, onde novamente utilizamos áreas de regiões triangulares, mas desta vez a partir de “uniões aproximadas” de tais regiões, tendo por base as referências [2] e [3].

**Definição 1.1.** *Seja  $\widehat{AB}$  um arco de circunferência de centro  $O$  e raio  $r$ . Chamamos setor circular, ou simplesmente setor, à reunião de todos os segmentos  $\overline{OP}$ , onde  $P$  é um ponto qualquer de  $\widehat{AB}$ . O arco  $\widehat{AB}$  é chamado arco de setor ou arco de fronteira e  $r$  é o seu raio.*

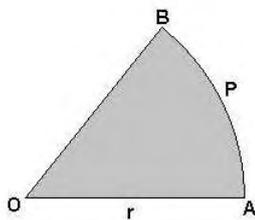


Figura 1.1

**Definição 1.2.** *Uma região triangular é um conjunto de pontos do plano formado por todos os segmentos cujas extremidades estão sobre os lados de um triângulo. O triângulo é chamado de fronteira da região triangular. O conjunto de pontos de uma região triangular que não pertence a sua fronteira é chamado de interior da região triangular.*



Figura 1.2

**Definição 1.3.** *Uma região poligonal é a união de um número finito de regiões triangulares que, duas a duas, não possuem pontos interiores em comum.*



Figura 1.3

Vamos considerar uma classe  $M$  de regiões tal que nela estejam contidas pelo menos todas as regiões poligonais e todos os setores circulares e círculos.

**Postulado 1.1.** *A cada região de  $M$  corresponde um único número real positivo.*

**Definição 1.4.** *A área de uma região é um número real que lhe corresponde pelo Postulado 1.1. Denotamos a área de uma região  $R$  por  $A(R)$ .*

**Postulado 1.2.** *Se  $R$  e  $S$  são duas regiões de  $M$ , com  $R \subset S$ , então  $A(R) < A(S)$ .*

**Postulado 1.3.** *Se uma região  $R$  é igual à união de duas regiões, ou seja, se  $R = R_1 \cup R_2$ , com  $R_1$  e  $R_2$  interseccionando-se no máximo em um número finito de pontos ou segmentos, então  $A(R) = A(R_1) + A(R_2)$ .*

**Definição 1.5.** *Dois segmentos são congruentes se possuem a mesma medida ou comprimento e dois ângulos são congruentes quando possuem a mesma medida.*

**Definição 1.6.** *Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.*

**Postulado 1.4.** *Se dois triângulos são congruentes, então suas regiões triangulares têm a mesma área.*

**Postulado 1.5.** *Se uma região quadrada tem lado de comprimento  $a$ , então sua área é  $a^2$ .*

Ora em diante, usaremos a expressão “área de um polígono” ao invés de “área de uma região poligonal”.

**Teorema 1.1.** *A área de um retângulo é igual ao produto das medidas de dois de seus lados não paralelos.*

*Demonstração.* Consideremos um retângulo  $R$  com lados não paralelos,  $b$  e  $h$ , na seguinte construção:

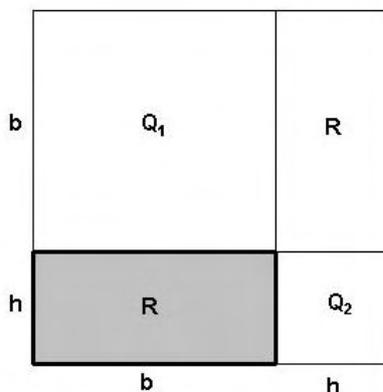


Figura 1.4

A partir do retângulo, construímos um quadrado  $Q$  de lado  $b + h$ , o qual será composto pela união dos quadrados  $Q_1$  e  $Q_2$  com o retângulo  $R$  e com outro retângulo congruente a  $R$ , o qual, pelo Lema 1.1, exibido abaixo, possui a mesma área que  $R$ . Pelo Postulado 1.3, temos:

$$A(Q) = A(Q_1) + A(Q_2) + 2A(R), \quad (1.1)$$

e, pelo Postulado 1.5, temos:

$$A(Q) = (b + h)^2 = b^2 + 2bh + h^2. \quad (1.2)$$

De (1.1) e (1.2), e novamente usando o Postulado 1.5, obtemos  $A(R) = bh$ .  $\square$

**Lema 1.1.** *Se dois retângulos são congruentes, então suas regiões correspondentes são iguais.*

*Demonstração.* Consideremos dois retângulos congruentes,  $R_1$  e  $R_2$ , com lados não paralelos  $b$  e  $h$ , como na seguinte construção:

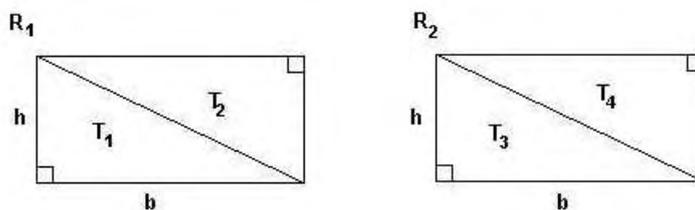


Figura 1.5

Traçando uma das diagonais desses retângulos, dividimos  $R_1$  em dois triângulos,  $T_1$  e  $T_2$ , e  $R_2$ , em dois triângulos,  $T_3$  e  $T_4$ . Os triângulos  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  e  $T_4$  são congruentes entre si pelo caso LAL, donde, pelo Postulado 1.4, temos:

$$A(T_1) = A(T_2) = A(T_3) = A(T_4) \quad (1.3)$$

e, pelo Postulado 1.3,

$$A(R_1) = A(T_1) + A(T_2) \text{ e } A(R_2) = A(T_3) + A(T_4). \quad (1.4)$$

Das equações (1.3) e (1.4), segue então que  $A(R_1) = A(R_2)$ .  $\square$

**Teorema 1.2.** *A área de um triângulo retângulo é igual à metade do produto de seus catetos.*

*Demonstração.* Consideremos o triângulo  $QRP$ , retângulo em  $R$  e com catetos de medidas  $a$  e  $b$ , como segue:

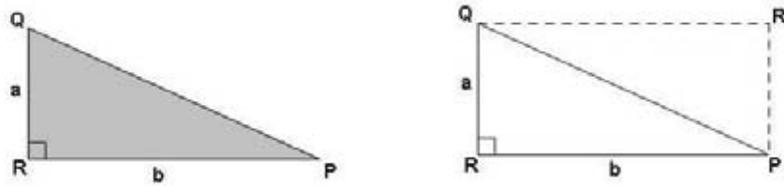


Figura 1.6

Seja  $R'$  a intersecção entre a reta paralela a  $\overleftrightarrow{QR}$  passando por  $P$  e a reta paralela a  $\overleftrightarrow{PR}$  passando por  $Q$ . O quadrilátero  $QRPR'$  assim formado é um retângulo. Pelo caso de congruência LLL, os triângulos  $QRP$  e  $QR'P$  são congruentes, tendo, pelo Postulado 1.4, a mesma área.

Pelo Postulado 1.3, temos que  $A(QRPR') = 2A(QRP)$  e, pelo Teorema 1.1,  $A(QRPR') = ab$ . Logo,  $A(QRP) = ab/2$ .  $\square$

A partir deste teorema, podemos obter a fórmula da área de qualquer triângulo. Mas antes precisamos do seguinte lema:

**Lema 1.2.** *Num triângulo, o produto de cada um dos seus lados pela altura relativa a este lado é constante.*

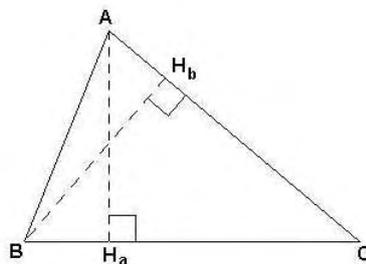


Figura 1.7

*Demonstração.* Consideremos, como na figura anterior, o triângulo  $ABC$  e as alturas  $\overline{AH_a}$  e  $\overline{BH_b}$  relativas aos lados  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$ , respectivamente. Suponhamos que o ortocentro do triângulo seja um ponto interior a ele. Os triângulos  $AH_aC$  e  $BH_bC$ , retângulos em  $H_a$  e  $H_b$ , respectivamente, são semelhantes pelo caso AA, logo, vale a relação:

$$\frac{AH_a}{BH_b} = \frac{AC}{BC},$$

ou seja,

$$BC \cdot AH_a = AC \cdot BH_b = k.$$

□

**Teorema 1.3.** *A área de um triângulo é igual à metade do produto de qualquer de seus lados pela altura correspondente.*

*Demonstração.* Consideremos o triângulo  $ABC$  e a altura  $\overline{AH_a}$ , relativa ao lado  $\overline{BC}$ , como na figura:

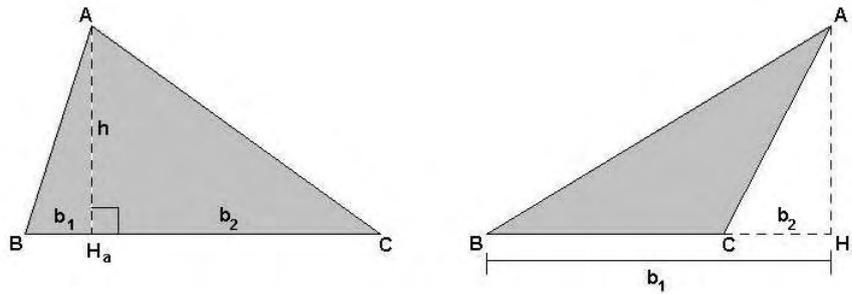


Figura 1.8

Denotemos por  $b$  e  $h$  as medidas dos lados  $\overline{BC}$  e da altura  $\overline{AH_a}$ , respectivamente. Usando o Lema 1.2, basta mostrar que  $A(ABC) = \frac{bh}{2}$ .

Se  $H_a$  coincidir com  $B$  ou com  $C$ , não há o que demonstrar.

Assim, vamos supor inicialmente que  $H_a$  esteja entre  $B$  e  $C$ . Assim,  $\overline{AH_a}$  divide o triângulo  $ABC$  em dois triângulos,  $AH_aB$  e  $AH_aC$ , ambos retângulos em  $H_a$  e com catetos medindo  $b_1$  e  $h$ , e  $b_2$  e  $h$ , respectivamente, com  $b_1 + b_2 = b$ .

Do Teorema 1.2 e do Postulado 1.3, segue que:

$$A(ABC) = A(AH_aB) + A(AH_aC) = \frac{b_1h}{2} + \frac{b_2h}{2} = \frac{(b_1 + b_2)h}{2} = \frac{bh}{2}.$$

Por outro lado, se  $C$  estiver entre  $B$  e  $H_a$ , ocorrerá  $b + b_2 = b_1$ , como na figura acima, e, então,

$$A(ABH_a) = A(ABC) + A(ACH_a),$$

ou seja,

$$A(ABC) = \frac{b_1h}{2} - \frac{b_2h}{2} = \frac{(b_1 - b_2)h}{2} = \frac{bh}{2}.$$

Para o caso em que  $B$  esteja entre  $H_a$  e  $C$ , a demonstração é análoga. □

**Teorema 1.4.** A área de um paralelogramo é igual ao produto de qualquer uma de suas bases pela altura correspondente.

*Demonstração.* Consideremos o paralelogramo  $PQRS$ , e escolhamos como base  $\overline{QR}$ , de medida  $b$ , e  $\overline{PH}$ , a altura correspondente, de medida  $h$ .

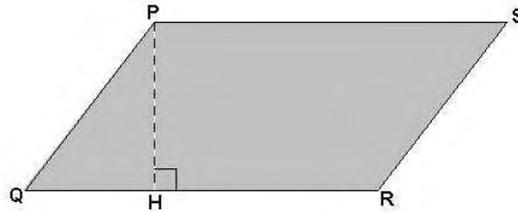


Figura 1.9

A diagonal  $\overline{PR}$  divide o paralelogramo em dois triângulos congruentes,  $PQR$  e  $RSP$ , os quais, pelo Teorema 1.3, possuem a mesma área  $\frac{bh}{2}$ . Dessa maneira, pelo Postulado 1.3,

$$A(PQRS) = \frac{bh}{2} + \frac{bh}{2} = bh.$$

□

**Teorema 1.5.** A área de um trapézio é igual à metade do produto de sua altura pela soma de suas bases.

*Demonstração.* Seja  $ABCD$  um trapézio cujas bases são os lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ . Tracemos a diagonal  $\overline{AC}$  para dividir o trapézio em dois triângulos:

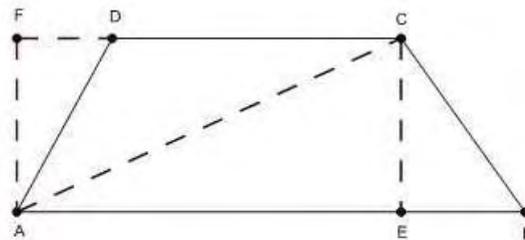


Figura 1.10

Tracemos, ainda, as alturas  $\overline{CE}$ , do triângulo  $ABC$ , e  $\overline{AF}$ , do triângulo  $ACD$ . Então teremos que  $AF = CE$ , já que os lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são paralelos. Usando o Postulado 1.3 e o Teorema 1.3, temos:

$$\begin{aligned} A(ABCD) &= A(ABC) + A(ACD) \\ &= \frac{AB \cdot CE}{2} + \frac{CD \cdot AF}{2} \\ &= \frac{(AB + CD) \cdot CE}{2} \end{aligned}$$

□

**Teorema 1.6.** A área de um polígono regular<sup>1</sup> de  $n$  lados é igual a  $\frac{p^2}{n \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}$ , sendo  $p$  o semiperímetro<sup>2</sup> do polígono.

*Demonstração.* O  $n$ -ágono regular (polígono regular de  $n$  lados) é a união de  $n$  triângulos isósceles, como na figura abaixo, em que  $O$  corresponde ao centro do polígono,  $\overline{AB}$  é um lado e  $\overline{OC}$  é o apótema<sup>3</sup> do polígono.

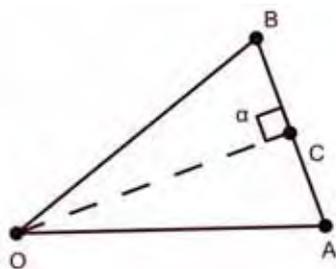


Figura 1.11

Considerando  $A(n)$  a área desse  $n$ -ágono,  $P$  o seu perímetro,  $p$  seu semiperímetro,  $AB = l$  e  $OC = a$ , temos:

$$P = nl \quad (1.5)$$

e

$$A(n) = n \cdot \frac{al}{2} \quad (1.6)$$

Como o apótema é perpendicular ao lado e, sendo o ângulo  $\angle COA$  igual a  $\frac{180^\circ}{n}$ , no triângulo  $COA$ , podemos estabelecer a seguinte relação:

$$\frac{l}{2} = a \operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right). \quad (1.7)$$

Assim, de (1.5), (1.6) e (1.7), obtemos:

$$A(n) = \frac{P^2}{4n \operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right)},$$

e, como  $P = 2p$ , podemos reescrever essa última equação da seguinte maneira:

$$A(n) = \frac{p^2}{n \operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}.$$

□

<sup>1</sup>Polígono regular é aquele que possui os lados congruentes e os ângulos internos congruentes.

<sup>2</sup>Semiperímetro é a metade do perímetro.

<sup>3</sup>O apótema de um polígono é definido como o raio da circunferência nele inscrita. No caso de polígonos regulares, o centro dessa circunferência e o centro do polígono coincidem, e os referidos triângulos isósceles que o compõem terão como altura relativa à base justamente o tal apótema.

**Teorema 1.7.** *A área de um polígono regular de  $n$  lados inscrito numa circunferência de raio  $R$  é igual a  $\frac{nR^2 \operatorname{sen}\left(\frac{360^\circ}{n}\right)}{2}$ .*

*Demonstração.* Seja  $O$  o centro do círculo. Ligando-se cada um dos vértices do polígono ao ponto  $O$ , formam-se  $n$  triângulos isósceles cujas bases são os lados do polígono, os lados são iguais e de comprimento igual a  $R$  e o ângulo do topo mede  $\frac{360^\circ}{n}$ .

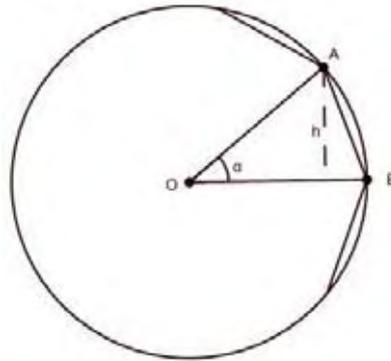


Figura 1.12

Sendo  $OAB$  um desses triângulos - os quais são todos congruentes -, tracemos a altura partindo do vértice  $A$ . Esta altura mede  $R \operatorname{sen}\left(\frac{360^\circ}{n}\right)$  e o lado  $\overline{OB}$  mede  $R$ . Logo, a área desse triângulo é igual a  $\frac{R^2 \operatorname{sen}\left(\frac{360^\circ}{n}\right)}{2}$  e a área total do polígono, portanto, é igual a  $\frac{nR^2 \operatorname{sen}\left(\frac{360^\circ}{n}\right)}{2}$ .  $\square$

## 1.1 Comprimento da circunferência e o número $\pi$

Consideremos um polígono  $P_n = A_1A_2 \dots A_n$ , tais que os  $A_i$ 's, para cada  $i$ , sejam seus vértices, inscrito em uma circunferência, e denotemos por  $p_n = \sum_{i=2}^n A_{i-1}A_i + A_nA_1$  o seu perímetro. Vamos definir o comprimento da circunferência em termos de  $p_n$ :

**Definição 1.7.** *Seja  $\mathcal{P}$  o conjunto de todos os números  $p_n$  que são perímetros de polígonos  $A_1A_2 \dots A_n$  inscritos numa circunferência. O comprimento  $c$  da circunferência é definido por<sup>4</sup>  $c = \sup \mathcal{P}$ , valor cuja existência é garantida pelo próximo teorema.*

**Teorema 1.8.** *Seja  $\mathcal{P}$  o conjunto dos números  $p_n$ , perímetros de todos os polígonos  $A_1 \dots A_n$  inscritos numa circunferência, isto é,  $\mathcal{P} = \{p_n \mid p_n = (\sum_{i=2}^n A_{i-1}A_i) + A_nA_1\}$ . Então  $\mathcal{P}$  admite supremo.*

*Demonstração.* Consideremos o polígono  $A_1 \dots A_n$  inscrito na circunferência  $C = C(O, r)$ , e seja  $Q$  um quadrado contendo essa circunferência em seu interior.

<sup>4</sup>O número  $\sup \mathcal{P}$  representa o supremo do conjunto  $\mathcal{P}$ , segundo [4].

Vamos considerar, na fronteira de  $Q$ , os pontos  $Q_1 \dots Q_n$  tais que  $Q_i$  é o ponto em que  $\overrightarrow{OA_i}$  intersecta  $Q$ , para  $i = 1, \dots, n$ , como na seguinte figura:

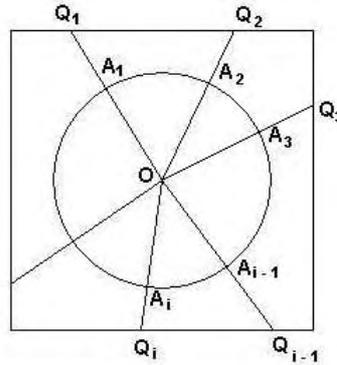


Figura 1.13

Afirmamos, pois, que o perímetro do quadrado é um limitante superior para  $p_n$ . De fato, basta mostrarmos que, para cada  $i$ , vale a relação  $A_{i-1}A_i < Q_{i-1}Q_i$ .

Para tanto, consideremos o triângulo isósceles  $OA_{i-1}A_i$ , com base  $\overline{A_{i-1}A_i}$ , e os correspondentes pontos  $Q_{i-1}$  e  $Q_i$  em  $Q$ , com  $OQ_{i-1} > OQ_i$ , como na figura:

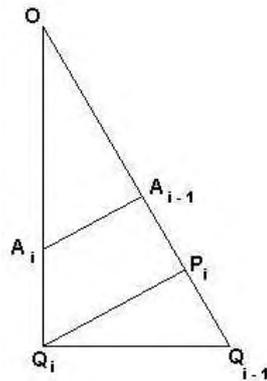


Figura 1.14

Tracemos por  $Q_i$  o segmento  $\overline{P_iQ_i}$ , paralelo a  $\overline{A_{i-1}A_i}$ , determinando assim outro triângulo isósceles,  $OP_iQ_i$ , semelhante ao triângulo  $OA_{i-1}A_i$ .

Como  $OA_i < OQ_i$ , temos  $A_{i-1}A_i < P_iQ_i$ . Ainda, como  $\angle Q_iP_iQ_{i-1}$  é um ângulo obtuso do respectivo triângulo, então  $\angle Q_iQ_{i-1}P_i$  é agudo, de modo que teremos  $Q_{i-1}Q_i > P_iQ_i$ .

Logo,  $A_{i-1}A_i < Q_{i-1}Q_i$ , e, assim,  $p_n$  é sempre menor do que  $\sum_{i=1}^n Q_{i-1}Q_i$ , e então  $p_n$  é sempre menor do que o perímetro do quadrado, sendo este perímetro, portanto, um limitante superior para  $\mathcal{P}$ .

Pelo Axioma do Completamento<sup>5</sup> dos números reais,  $\mathcal{P}$  admite supremo. □

O teorema seguinte nos diz que a razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro é a mesma para todas as circunferências.

<sup>5</sup>Todo subconjunto de números reais não vazio e limitado superiormente admite supremo.

**Teorema 1.9.** *Sejam dadas duas circunferências,  $C = C(O, r)$  e  $C' = C(O, r')$  de comprimentos  $c$  e  $c'$ , respectivamente. Então  $\frac{c}{2r} = \frac{c'}{2r'}$ .*

*Demonstração.* Seja  $\overline{AB}$  um dos lados de um polígono  $P_n$  inscrito em  $C$ , ao qual corresponderá o lado  $\overline{A'B'}$  de um polígono  $P'_n$  inscrito em  $C'$ , obtido pelo prolongamento dos raios que contêm os vértices, como na figura:

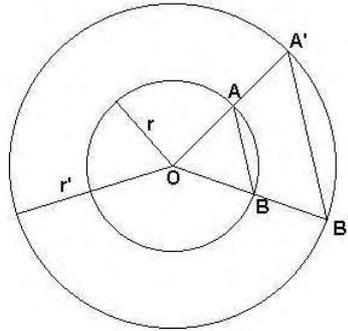


Figura 1.15

Como os triângulos isósceles  $OAB$  e  $OA'B'$  são semelhantes, obtemos que  $\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = \frac{r'}{r}$ . Se  $p_n$  e  $p'_n$  denotarem, respectivamente, os perímetros dos polígonos  $P_n$  e  $P'_n$ , vale  $\frac{p'_n}{p_n} = \frac{r'}{r}$ , ou seja,  $p'_n = \frac{r'}{r}p_n$ . Denotando  $\mathcal{P} = \{p_n\}$  e  $\mathcal{P}' = \{p'_n\}$ , como na Definição 1.7, temos<sup>6</sup>  $\mathcal{P}' = \frac{r'}{r}\mathcal{P}$ , donde, por propriedades do supremo de um subconjunto dos números reais<sup>7</sup>, segue:

$$\sup \mathcal{P}' = \sup \frac{r'}{r}\mathcal{P} = \frac{r'}{r} \sup \mathcal{P} \Rightarrow c' = \frac{r'}{r}c,$$

e, portanto,  $\frac{c}{2r} = \frac{c'}{2r'}$ . □

A razão constante  $\frac{c}{2r}$  é representada pela letra grega  $\pi$ . Como ela é a mesma para todas as circunferências, obtemos a fórmula  $c = 2\pi r$  para o comprimento de qualquer circunferência de raio  $r$ .

## 1.2 Área do Círculo

**Lema 1.3.** *Seja  $C$  uma circunferência de comprimento  $c = \sup \mathcal{P}$ , sendo  $\mathcal{P}$  o conjunto dos perímetros  $p_n$  de todos os polígonos  $P_n$  inscritos em  $C$ . Chamemos de malha de*

<sup>6</sup> Sendo  $\mathcal{P}$  um subconjunto dos números reais e  $k$  uma constante, denotamos por  $k\mathcal{P}$  o conjunto dos números da forma  $kp$ , com  $p \in \mathcal{P}$ .

<sup>7</sup> É válida a seguinte propriedade em relação ao supremo de um subconjunto dos números reais: “Sejam  $\mathcal{P}$  um conjunto limitado de números reais positivos e  $k$  um número positivo. Então  $\sup k\mathcal{P} = k \sup \mathcal{P}$ ”.

um polígono o comprimento do seu maior lado. Para todo número  $\varepsilon > 0$ , existe um número  $\delta > 0$  tal que, se a malha de  $P_n$  é menor do que  $\delta$ , então  $p_n > c - \varepsilon$ . Dizemos que  $p_n$  se aproxima de  $c$  quando a malha se aproxima de zero.

*Demonstração.* Dado  $\varepsilon > 0$ , seja  $Q_s = B_1B_2 \dots B_s$  um polígono de perímetro  $q_s$  inscrito na circunferência  $C$ , tal que  $q_s > c - \frac{\varepsilon}{2}$ , cuja existência se verifica pela definição de  $c$ .

Seja  $P_n = A_1A_2 \dots A_n$  um outro polígono de perímetro  $p_n$  inscrito em  $C$ , cuja malha é menor do que  $\delta$ , com  $\delta < \frac{\varepsilon}{2s}$ .

Consideremos o polígono  $S_m = C_1C_2 \dots C_m$ , de perímetro  $s_m$ , formado pela união dos vértices de  $P_n$  com os de  $Q_s$ . Por exemplo, se  $P_3 = A_1A_2A_3$  e  $Q_3 = B_1B_2B_3$ , então  $S_m$  é tal que  $m \leq 6$  e, no máximo, teremos  $S_m = C_1C_2 \dots C_6$ .

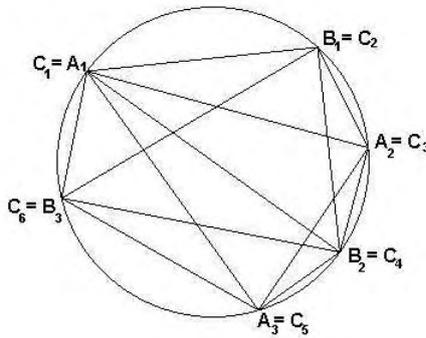


Figura 1.16

Aplicando a desigualdade triangular repetidas vezes, obtemos  $s_m \geq q_s$ , ou seja,

$$s_m > c - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.8}$$

Isto quer dizer que, à medida que acrescentamos vértices, o perímetro aumenta. Na verdade, dados três vértices,  $P$ ,  $Q$  e  $R$ , de  $S_m$ , sendo  $P$  e  $R$  vértices de  $P_n$  como na figura, temos  $PR < PQ + QR$ , e o aumento é  $PQ + QR - PR$ , o qual aparece no máximo  $s$  vezes, já que há no máximo  $s$  possibilidades para  $Q$ .

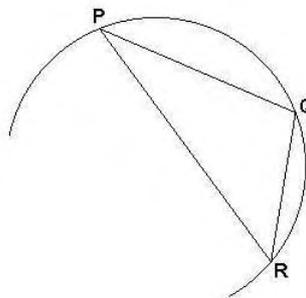


Figura 1.17

Ainda ocorre que  $PQ + QR - PR \leq PR$ , pois  $\overline{PR}$  é o maior lado do triângulo  $PQR$ .

Sendo  $\delta$  a malha de  $P_n$ , temos:

$$s_m - p_n \leq s \cdot \delta < s \cdot \frac{\varepsilon}{2s} = \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1.9)$$

De (1.8) e (1.9), chegamos a:

$$c - p_n < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Os dois teoremas que seguem dão, respectivamente, uma aproximação por falta e uma por excesso para a área de um círculo:

**Teorema 1.10.** *Seja  $C$  um círculo de raio  $r$ . Existe uma sequência de regiões poligonais regulares  $R_1, R_2, \dots$ , todas interiores a  $C$ , tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(R_n) = \pi r^2.$$

*Demonstração.* Consideremos, como na figura, o círculo  $C$  de centro  $O$  e raio  $r$ . Seja  $R_n$  uma região poligonal regular  $A_1A_2 \dots A_n$ , inscrita na circunferência fronteira de  $C$ . Seja  $b_n$  a medida de cada um de seus lados e  $a_n$  o apótema correspondente.

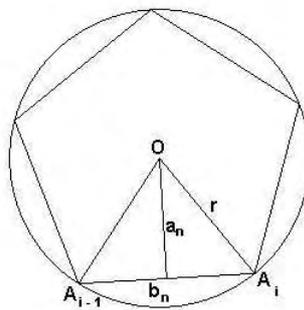


Figura 1.18

A área da região poligonal  $R_n$  é dada por  $A(R_n) = n \frac{a_n b_n}{2}$ . Vejamos o que acontece com  $A(R_n)$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Como  $nb_n$  é o perímetro da linha poligonal  $A_1A_2 \dots A_n$ , temos  $nb_n \leq 2\pi r$ , ou seja,  $b_n \leq \frac{2\pi r}{n}$ .

Logo, a malha de  $R_n$  ( $b_n$ ) tende a zero quando  $n$  tende a infinito, e isso implica que  $\lim_{n \rightarrow \infty} nb_n = 2\pi r$ . De fato, para comprovar isso, precisamos mostrar que, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0$  tal que  $2\pi r - \varepsilon < nb_n$  sempre que  $n > n_0$ . O Lema 1.3 nos garante que, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que, se  $Q$  está inscrito em  $C$  e se a malha de  $Q$  é menor do que  $\delta$ , então o perímetro de  $Q$  é maior do que  $2\pi r - \varepsilon$ . Como a malha de  $R_n$  é  $b_n$ , que tende a zero, deve existir  $n_0$  tal que, para  $n > n_0$ ,  $b_n < \delta$ .

Logo,  $nb_n > 2\pi r - \varepsilon$  para todo  $n > n_0$ , donde  $\lim_{n \rightarrow \infty} nb_n = 2\pi r$ .

Por sua vez, no triângulo  $A_{i-1}OA_i$ , temos

$$r < a_n + \frac{b_n}{2} \Rightarrow r - \frac{b_n}{2} < a_n < r.$$

Logo, como  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ , temos  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = r$ , e, portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(R_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{a_n b_n}{2} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n b_n = \frac{1}{2} r \cdot 2\pi r = \pi r^2.$$

□

**Teorema 1.11.** *Seja  $C$  um círculo de raio  $r$  e  $\varepsilon$  um número positivo qualquer. Então existe uma região poligonal  $S$ , contendo  $C$ , tal que*

$$A(S) < \pi r^2 + \varepsilon.$$

*Demonstração.* Consideremos o círculo  $C$  de centro  $O$  e raio  $r$ . Seja  $C'$  outro círculo de centro  $O$ , mas de raio  $r' > r$ . Sejam  $c$  e  $c'$  os comprimentos das circunferências de  $C$  e  $C'$ , respectivamente.

Seja  $S = A'_1 A'_2 \dots A'_n$  um polígono regular inscrito na circunferência de  $C'$ , e seja  $Q = A_1 A_2 \dots A_n$  o correspondente polígono regular inscrito na circunferência de  $C$ .

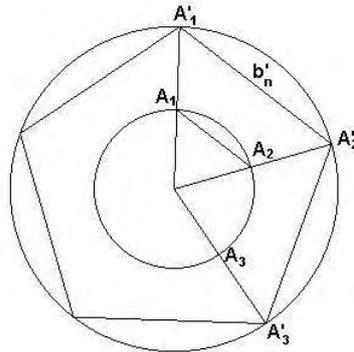


Figura 1.19

Sejam  $b'_n$  a medida de cada lado de  $S$ ,  $a'_n$  o apótema correspondente e  $a_n$  o apótema correspondente ao lado de  $Q$ . Então  $A(S) = n \frac{a'_n b'_n}{2}$ .

Pelo Teorema 1.9, temos  $\frac{c}{r} = \frac{c'}{r'}$  e, portanto,  $c' = \frac{r'}{r}c$ , donde  $nb'_n \leq \frac{r'}{r}c$ .

Por semelhança, temos  $\frac{a'_n}{a_n} = \frac{r'}{r}$  e, então,  $a'_n = \frac{r'}{r}a_n$ . Assim, como  $a_n < r$ , temos:

$$A(S) = n \frac{a'_n b'_n}{2} = \frac{1}{2} \cdot a'_n \cdot nb'_n \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{r'}{r} a_n \cdot \frac{r'}{r} c < \frac{r'^2}{2r} c,$$

e isto vale para todo  $n$  e para todo  $r' > r$ .

Escolhemos, pois,  $r' > r$  tal que  $r' \leq \sqrt{r^2 + 2\varepsilon \frac{r}{c}}$ . Com esse  $C'$  de raio  $r'$  escolhido, temos:

$$A(S) < \frac{1}{2r} \left( r^2 + 2\varepsilon \frac{r}{c} \right) c = \frac{rc}{2} + \varepsilon.$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} a'_n = r'$ , segue que  $a'_n > r$  para algum  $n$ , o qual nos dará a região poligonal  $S$  que contém o círculo  $C$ . Como  $c = 2\pi r$ , temos

$$A(S) < \frac{r \cdot 2\pi r}{2} + \varepsilon = \pi r^2 + \varepsilon.$$

□

**Teorema 1.12** (Fórmula para Área do Círculo). *A área do círculo  $C$  de raio  $r$  é dada por  $A(C) = \pi r^2$ .*

*Demonstração.* Consideremos o círculo  $C$  de raio  $r$ . Seja  $R_1, R_2, \dots$ , uma sequência de regiões poligonais regulares como no Teorema 1.10. Então  $A(R_n) \leq A(C)$ , para todo  $n$ . Portanto,  $\pi r^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} A(R_n) \leq A(C)$ .

Afirmamos que não podemos ter  $\pi r^2 < A(C)$ . De fato, supondo que isso ocorra, seja  $\varepsilon = A(C) - \pi r^2$  e seja  $S$  uma região poligonal como no Teorema 1.11.

Então  $A(C) \leq A(S) < \pi r^2 + \varepsilon = A(C)$ , uma contradição. Logo,  $A(C) = \pi r^2$ . □

### 1.3 Um pouco de história

Em seu Livro XII, Euclides prova que as áreas de dois círculos quaisquer estão entre si como os quadrados de seus diâmetros. Denotando por  $D$  um círculo de raio  $r$ , este resultado implica que  $A(D) = cr^2$ , para uma constante positiva  $c$ , que independe do particular círculo escolhido. Além disso, ele já conhecia o fato de que a razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro era uma constante  $k$  que também não dependia da particular circunferência tomada. Porém, foi Arquimedes quem provou que  $c$  e  $k$  são, na verdade, a mesma constante, a qual, a partir de 1737, foi chamada, por Euler, de  $\pi$ .

A área de um círculo de raio igual a 1 já havia sido estimada pelos babilônios em 3,125, e, pelos egípcios, em 3,16, cerca de 2 mil anos antes de Cristo.

Por volta do ano de 250 a.C., Arquimedes, começando com o triângulo equilátero inscrito em um círculo de raio 1, por duplicação do número de lados, chegou a uma aproximação por falta para  $\pi$ , de  $48l$ , sendo  $l$  a medida do lado do polígono de 96 lados. Trabalhando com polígonos circunscritos obteve a aproximação, por excesso, de  $22/7$ . Já no ano de 264, na China, Liu Hui obteve para  $\pi$  o valor 3,14159, isto é, com cinco algarismos exatos.

No decorrer dos tempos, inúmeros estudiosos se ocuparam em obter aproximações para  $\pi$  com um número cada vez maior de casas decimais, prática que ainda continua com os supercomputadores. Em um artigo publicado na revista Science News, 1989, David e Gregory Chudnovski, da Universidade Columbia, nos Estados Unidos, calcularam um valor aproximado de  $\pi$  com 1 bilhão de algarismos exatos, segundo [5].

Por sua vez, a referência [6] informa que a unidade radiano para medida de ângulos deve ter sido adotada objetivando a simplificação de fórmulas matemáticas e físicas

---

como derivadas e integrais de funções trigonométricas e as expressões para velocidade e aceleração em movimentos curvilíneos. Ao que parece, a necessidade dessa nova medida angular foi considerada independentemente pelo matemático Thomas Muir e pelo físico James T. Thomson. Posteriormente, foi discutida a sua necessidade, tendo sido para ela adotado o nome de *radian* (radiano) como uma combinação de *radial angle*. O termo radiano apareceu impresso pela primeira vez em um exame escrito aplicado por Thomson em 1873, embora os professores Oliver, Wait e Jones, da Cornell University, na primeira reprodução de seu manuscrito *Notes on Trigonometry* (1880), e em sua segunda edição impressa, ainda não usavam o termo “radiano”, mas se referiam a essa unidade como “ $\pi$ -medida”, “circular” ou “medida arcual”.

## 2 Maximizando a área e minimizando o perímetro de polígonos

Neste capítulo apresentamos quatro problemas envolvendo o assunto do título, tendo por base [7]. Os dois primeiros relacionados a triângulos e os outros dois, a polígonos, em geral. Primeiramente demonstramos uma proposição que fundamenta a resolução desses problemas.

**Proposição 2.1.** *Dados dois pontos,  $P$  e  $Q$ , do mesmo lado de uma reta  $r$  num plano, a curva<sup>1</sup> de menor comprimento ligando  $P$  a  $Q$  e tocando  $r$  é formada pelos segmentos de reta  $\overline{PA}$  e  $\overline{AQ}$ , sendo  $A \in r$  tal que os ângulos  $\angle PAN$  e  $\angle NAQ$  são iguais. Designamos por  $\overrightarrow{AN}$  a semirreta ortogonal a  $r$  que tem origem  $A$  e que está contida no mesmo lado que os pontos  $P$  e  $Q$ . Veja a figura:*

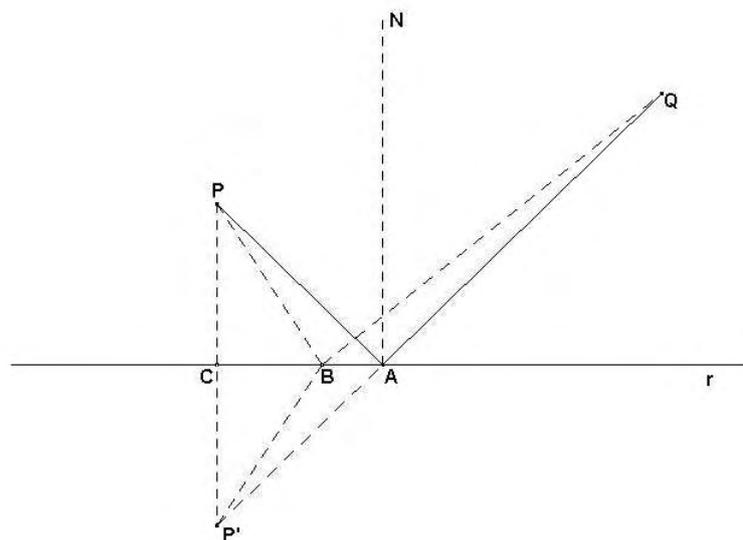


Figura 2.1

*Demonstração.* O argumento todo se baseia no fato que a curva de menor comprimento ligando dois pontos é o segmento de reta com extremidades nesses pontos. Usando isso,

---

<sup>1</sup>Definimos uma linha através de pontos sucessivos que se deslocam no espaço, porém, se esses pontos mudam de direção, a figura descrita é definida como curva.

vemos o seguinte:

1. A curva  $\gamma$  de comprimento mínimo toca  $r$  em apenas um ponto;  
De fato, suponha, por contradição, que  $\gamma$  toca  $r$  em dois pontos,  $A$  e  $A'$ . Seja  $M$  um ponto de  $\gamma$  fora de  $r$  e tal que ao se percorrer a curva de  $A$  para  $M$ , passa-se por  $A'$ . Então a curva  $\gamma'$  obtida a partir de  $\gamma$  pela substituição do trecho  $AM$  pelo segmento de reta  $\overline{AM}$  tem comprimento menor do que o comprimento de  $\gamma$ .
2. A curva  $\gamma$  deve ser formada por dois segmentos de reta;  
De fato, seja  $A$  o ponto em que  $\gamma$  toca  $r$ . Então, necessariamente, o trecho  $PA$  da curva é um segmento de reta.
3. O ponto  $A$  é obtido como a intersecção da reta  $r$  com o segmento  $\overline{P'Q}$ , sendo o ponto  $P'$  simétrico a  $P$  com relação a  $r$ . [ou seja,  $\overline{PP'}$  é perpendicular à reta  $r$  e os comprimentos dos segmentos  $\overline{PC}$  e  $\overline{C'P'}$  são iguais]  
De fato, se o ponto de contato de  $\gamma$  com  $r$  fosse um outro ponto  $B$ , teríamos uma curva de maior comprimento do que aquela tocando em  $A$ . Para constatá-lo, observe que os triângulos  $PCB$  e  $P'CB$  são congruentes, bem como os triângulos  $PCA$  e  $P'CA$ .

Assim, temos que:

$$PA = P'A \text{ e } PB = P'B,$$

e, como  $P'A + AQ \leq P'B + BQ$ , obtemos que:

$$P'A + AQ \leq P'B + BQ.$$

Finalmente, a igualdade entre os ângulos  $\angle PAN$  e  $\angle NAQ$  é estabelecida pelo seguinte argumento: os triângulos  $PCA$  e  $P'CA$  são congruentes, donde os ângulos  $\angle APC$  e  $\angle AP'C$  são iguais. Por outro lado, pelo *Teorema das Paralelas Cortadas por uma Transversal*<sup>2</sup>, temos que:

1. Os ângulos  $\angle APC$  e  $\angle PAN$  são iguais como ângulos alternos internos;
2. Os ângulos  $\angle AP'C$  e  $\angle NAQ$  são iguais como ângulos correspondentes.

□

## 2.1 Problemas

### 2.1.1 Problema 1

*Dentre todos os triângulos de mesma área, qual é o de menor perímetro?*

<sup>2</sup>Consulte referência bibliográfica [2].

É razoável esperar que exista tal triângulo de menor perímetro, embora aqui não tratemos de sua existência, apenas presumindo-a. Assim, afirmamos que se trata do triângulo equilátero. De fato, suponhamos o contrário, isto é, que o triângulo  $ABC$  possui dois lados,  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$ , de comprimentos diferentes. Seja  $r$  a reta que passa pelo ponto  $B$  e é paralela ao lado  $\overline{AC}$  e seja  $D$  a intersecção da reta  $r$  com a reta  $s$ , perpendicular a  $r$  passando pelo ponto médio de  $AC$ . Veja a figura a seguir:

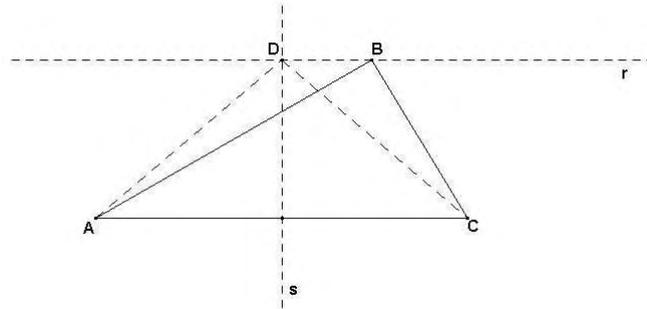


Figura 2.2

Logo, pela Proposição 2.1, o triângulo  $ADC$  tem perímetro menor do que o do triângulo  $ABC$  e, por outro lado, ambos os triângulos têm a mesma área, por terem mesma base e altura, uma contradição. Logo, a solução deve ser um triângulo equilátero.

### 2.1.2 Problema 2

*Entre todos os triângulos de mesmo perímetro, qual é o de maior área?*

Novamente, supondo que o problema admite solução, afirmamos que se trata do triângulo equilátero. De fato, suponhamos que o triângulo  $ABC$  possui dois lados,  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$ , de comprimentos diferentes. Usemos as mesmas construções da resolução do Problema 1, e, então, façamos uso do seguinte fato: “existe um ponto  $D'$  sobre a reta  $s$ , acima de  $D$ , tal que:

$$AD' + D'C = AB + BC.”$$

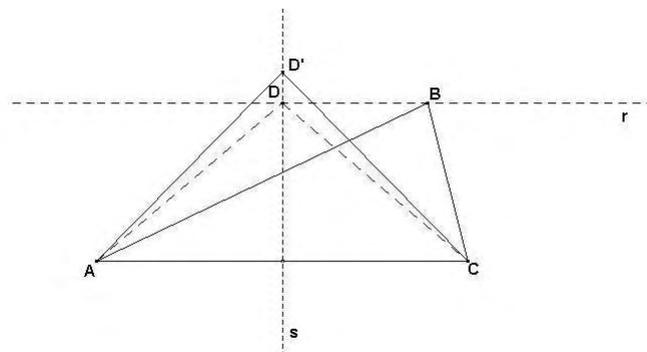


Figura 2.3

Logo, a área do triângulo  $AD'C$  é maior do que a área do triângulo  $ADC$ , a qual é igual à área do triângulo  $ABC$ . Ademais, os triângulos  $AD'C$  e  $ABC$  têm o mesmo perímetro.

Uma observação importante consiste em que o “fato” usado na resolução deste problema segue de um outro fato mais básico, que é o seguinte: “dado um ponto  $P$  fora de uma reta  $r$ , seja  $O$  o ponto de intersecção de  $r$  com a reta  $s$ , perpendicular a  $r$  passando por  $P$ . Os pontos de  $r$  podem ser correspondidos biunivocamente com os números reais de modo que  $O$  corresponde ao zero e o ponto  $A_1$ , tal que  $OA_1 = 1$ , corresponde ao número real 1”. Veja a figura:

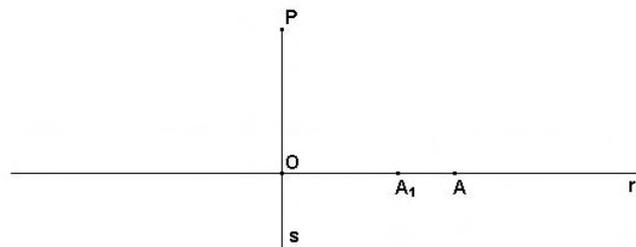


Figura 2.4

Assim, como a cada ponto arbitrário  $A$  corresponde um número real  $x$ , então o comprimento  $PA$  é uma função contínua em  $x$ . Além disso,  $PA$  assume o seu mínimo quando  $A = O$ , e é monótona crescente, tendendo a  $\infty$  quando  $A$  se afasta de  $O$ . Isso segue trivialmente da expressão  $PA = \sqrt{PO^2 + x^2}$ .

O lema abaixo, de certo modo, complementa a informação fornecida pela Proposição 2.1. Numa linguagem intuitiva, ele essencialmente estabelece o seguinte, tendo por referência a Figura 2.1: “imagine que o ponto  $B$  seja móvel; então  $PB + BQ$  é monótona em cada uma das semirretas em que o ponto de mínimo,  $A$ , divide a reta  $r$ ”.

**Lema 2.1.** *Seja  $A$  a solução do problema de minimização estudado na Proposição 2.1. Sejam  $B$  e  $B_1$  pontos da reta  $r$  tais que  $B_1$  se situa (estritamente) entre  $A$  e  $B$ . Então:*

$$PB + BQ > PB_1 + B_1Q.$$

*Demonstração.* Como na Proposição 2.1, seja  $P'$  o ponto simétrico a  $P$  em relação a  $r$ . Então a desigualdade a provar é equivalente a:

$$P'B + BQ > P'B_1 + B_1Q.$$

Observe que  $B_1$  é um ponto do interior do triângulo  $P'BQ$ . Logo, o nosso problema se reduz à seguinte asserção:

*Sublema:* “Seja  $D$  um ponto do triângulo  $ABC$ , com  $D \neq B$ . Então

$$AB + BC > AD + DC”.$$

Para demonstrar essa asserção, seja  $E$  a intersecção da reta passando por  $A$  e  $D$  com o segmento  $\overline{BC}$  (suponha que  $D$  não pertence ao lado  $\overline{AC}$ , pois, de outro modo, a asserção seria trivial). Agora, usamos sucessivamente o fato de que, num triângulo, qualquer de seus lados é menor do que a soma dos outros dois. Assim,

$$DE + EC > DC,$$

o que implica

$$AE + EC > AD + DC. \tag{2.1}$$

Por outro lado, temos:

$$AB + BE > AE$$

e, daí,

$$AB + BC > AE + EC. \tag{2.2}$$

Portanto, a desigualdade a provar segue de (2.1) e (2.2).  $\square$

### 2.1.3 Problema 3

*Dentre todos os polígonos de  $n$  lados e mesma área, qual deles tem o menor perímetro?*

Ainda no espírito de não tratar da questão existencial, apenas supondo-a, afirmamos que se trata do  $n$ -ágono (*i.e.*, polígono de  $n$  lados) *regular*, que é aquele que tem todos os lados de mesmo comprimento e todos os ângulos internos iguais. Seja  $\varphi$  a solução. Então:

- $\varphi$  deve ser equilátero;

Suponha por contradição que  $\varphi$ , que tem o menor perímetro, possui dois lados,  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$ , de comprimentos diferentes. Seja  $r$  a reta paralela a  $\overline{AC}$ , como na figura a seguir:

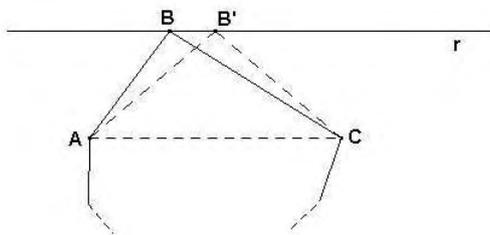


Figura 2.5

Pela Proposição 2.1, existe  $B'$  sobre  $r$  tal que:

$$AB' + B'C < AB + BC.$$

Logo, o polígono obtido substituindo-se os lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  por  $\overline{AB'}$  e  $\overline{B'C}$  tem a mesma área do polígono original  $\varphi$ , mas um perímetro menor. Logo, o polígono  $\varphi$  deve ser equilátero.

- $\varphi$  deve ser equiângulo;

Considere três lados consecutivos,  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{CD}$ , que já sabemos terem todos o mesmo comprimento. Suponhamos, ainda, que os ângulos  $\angle ABC$  e  $\angle BCD$  são diferentes. Para fixar as ideias, suponha que o primeiro ângulo (de medida  $a$ ) é maior do que o segundo (de medida  $a'$ ). Veja a figura a seguir:

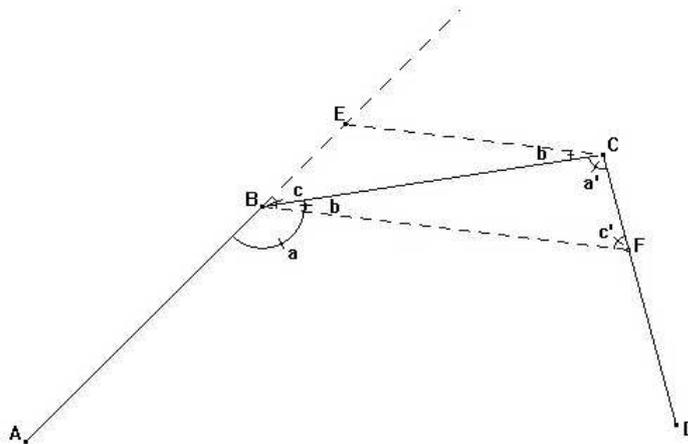


Figura 2.6

Agora, escolhamos o ponto  $F$  sobre  $\overline{CD}$  de modo que o ângulo  $\angle CBF$  (de medida  $b$ ) seja tal que  $2b < a - a'$ . Seja  $E$  o ponto sobre o prolongamento de  $\overline{AB}$  de modo que  $\overline{EC}$  seja paralelo a  $\overline{BF}$ . Seja  $c$  a medida do ângulo  $\angle EBF$  e  $c'$  a medida do ângulo  $\angle BFC$ . Temos, então:

$$a + c - b = 180^\circ \text{ e } a' + c' + b = 180^\circ,$$

donde:

$$c' - c = a - a' - 2b,$$

o que implica  $c' > c$ . Segue, então, do Lema 2.1 (demonstração da desigualdade na sequência) que:

$$BE + EF < BC + CF, \quad (2.3)$$

e, substituindo a parte  $ABCD$  do polígono  $\varphi$  por  $AEFD$ , obtemos um outro polígono de mesma área e perímetro menor do que o de  $\varphi$ , o que é uma contradição. Portanto,  $\varphi$  é de fato o  $n$ -ágono regular.

*Demonstração da desigualdade (2.3)*

Vamos reformular a questão a fim de não repousar na figura anterior, uma vez que o ângulo  $c'$  pode ser até mesmo obtuso. Assim, a questão é a seguinte: “Seja  $BECF$  um quadrilátero cujos lados  $\overline{BF}$  e  $\overline{EC}$  são paralelos e os ângulos  $\angle EBF$  e  $\angle CFB$ , de medidas respectivamente iguais a  $c$  e  $c'$ , são tais que  $c < c'$ . Então vale a desigualdade (2.3).

Para demonstrar esse fato, seja  $X$  a intersecção da reta  $s$ , perpendicular a  $\overline{BF}$  passando pelo ponto médio, com a reta suporte de  $\overline{EC}$ . Então há duas possibilidades: (i)  $E$  e  $C$  estão do mesmo lado de  $X$ , e aí o resultado segue do Lema 2.1; ou (ii)  $E$  e  $C$  estão em diferentes lados de  $X$  e, neste caso, se designarmos por  $C'$  o ponto simétrico a  $C$  com relação à reta  $s$ , então a desigualdade (2.3) é equivalente a:

$$BE + EF < BC' + C'F,$$

que é precisamente o caso (i), pois  $C'$  e  $B$  estão do mesmo lado de  $X$ .

### 2.1.4 Problema 4

*Dentre todos os polígonos de  $n$  lados e mesmo perímetro, qual deles tem a maior área?*

Partindo das mesmas considerações existenciais anteriores, afirmamos que se trata, também, do  $n$ -ágono regular.

Vamos utilizar o resultado da Subseção 2.1.3. Seja  $\psi$  o  $n$ -ágono de maior área dentre todos os  $n$ -ágono que têm o mesmo perímetro  $L$ . Designemos por  $S$  a área de  $\psi$ . Se  $\psi$  não for regular, existe um  $n$ -ágono (regular)  $\psi'$  de área  $S$  e perímetro  $L' < L$ . Agora, vamos construir, a partir de  $\psi'$ , um  $n$ -ágono,  $\psi''$ , de perímetro  $L$  e área  $S'' > S$ , o que será um absurdo. Tome dois lados consecutivos de  $\psi'$ ,  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$ , como na figura abaixo:

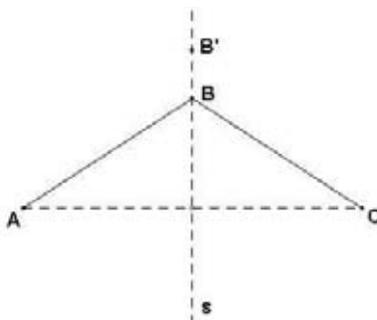


Figura 2.7

Agora, escolha um ponto  $B'$  sobre a reta  $s$ , perpendicular a  $\overline{AC}$ , de modo que:

$$[AB' + B'C] - [AB + BC] = L - L'.$$

O polígono  $\psi''$  é então obtido de  $\psi'$  substituindo-se os lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  por  $\overline{AB'}$  e  $\overline{B'C}$ .

## 3 O Problema Isoperimétrico

Neste capítulo abordaremos alguns aspectos históricos do Problema Isoperimétrico, a partir de [1], [8] e [9] e [10]. Será apresentada uma demonstração para o Problema Isoperimétrico utilizando somente elementos de geometria Euclidiana plana, com base na referência [9].

### 3.1 Um pouco de história

Um exemplo importante do problema de otimização de áreas diz respeito a figuras isoperimétricas: dado um perímetro fixo, que formatos ou proporções de contorno otimizam (maximizam) a área contida nesse contorno.

O Problema Isoperimétrico aparece em escritos gregos de Zenódor e Pappus. Porém, não é conhecida desde esta época nenhuma demonstração formal de que é a circunferência, a curva que maximiza a área para um perímetro fixo, embora o resultado já fosse aceito. Uma demonstração formal surgiu apenas em 1870, com Weierstrass. Outros matemáticos obtiveram provas mais concisas do problema, como o alemão Erhard Schmidt, em 1939, cuja demonstração é apresentada em [11].

As demonstrações que existiam antes da apresentada por Weierstrass consideravam a existência de uma curva que maximizava a área, e, a partir daí, apresentavam argumentos para mostrar que essa curva seria a circunferência. Assim, não eram demonstrações formais.

Durante a Idade Média, o resultado do Problema Isoperimétrico já era muito utilizado para a construção de muros de proteção para as cidades. Tais muros eram de pedra e a construção era cara e trabalhosa. Sendo assim, era necessário utilizar-se de um perímetro mínimo para obter a área máxima. Consultando os mapas da época, de fato, encontramos muros com formatos circulares ou semicirculares.

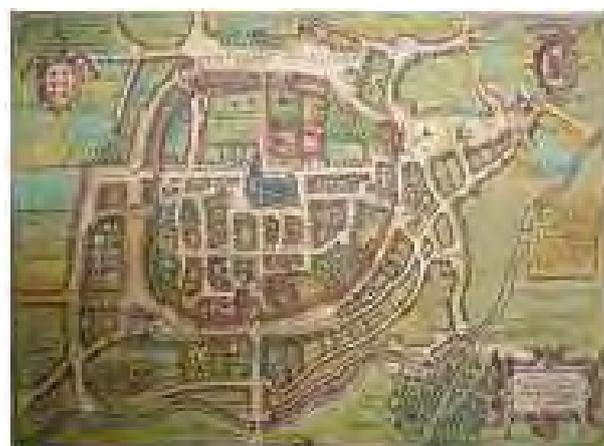
Consideremos, por exemplo, os mapas das cidades de Paris - França (semicircular), Colônia - Alemanha (semicircular) e Braga - Portugal (circular).



*Figura 3.1: Mapa de Paris*



*Figura 3.2: Mapa de Colônia*



*Figura 3.3: Mapa de Braga*

Referências históricas para a solução do problema aparecem também na literatura.

A obra épica “Eneida”, escrita pelo famoso poeta Virgílio (70 *a.C.* a 19 *a.C.*) (vide referência [8]), retrata a solução do problema através da história de um de seus personagens, a rainha de Cartago, Dido, também conhecida como Elisa.

O quadro abaixo, do século VI *d.C.*, que se encontra na Biblioteca Apostólica Romana, é referente a uma passagem da Lenda de Dido que faz parte do Canto I do referido clássico “Eneida”:



*Figura 3.4*

Dido foi uma princesa fenícia no século IX *a.C.*, na cidade de Tiro, às margens do Mediterrâneo, localizada onde hoje é o Líbano. Seu irmão, o rei Pigmalião, assassinou seu marido, o grande sacerdote Arquebas, para subtrair-lhe seus tesouros. Temendo sua própria morte, Dido fugiu em um navio com um grande número de seguidores dispostos a fundar uma nova cidade, “Qart Hadash” (Cartago). No lugar escolhido para a cidade (norte da África, também às margens do Mediterrâneo, onde hoje é a Tunísia), ela tentou comprar terras do rei local, Jarbas, para que pudessem se estabelecer. O arranjo que conseguiu com o rei foi que só teria em terras o que pudesse abranger com a pele de um boi. Dido e seu grupo decidiram, então, cortar a pele em tiras tão finas quanto possível, emendá-las e com elas englobar, em forma de semicírculo, um terreno beirando o mar. Observe-se a figura a seguir:



Figura 3.5: Imagem de Dido e seu povo cortando o couro de um boi

A obra “Eneida” é a epopéia de Enéas de Tróia que, depois de ter a cidade tomada por Agamenon, fugiu de navio com seus seguidores. Ele viajou, através do Mar Mediterrâneo, da Ásia Menor até finalmente aportar na Itália e fundar Roma. Na viagem, parou em Cartago e conheceu Dido, que por ele se apaixonou. Júpiter interveio, ordenando Enéas que a abandonasse, e este, desesperado, suicidou-se.

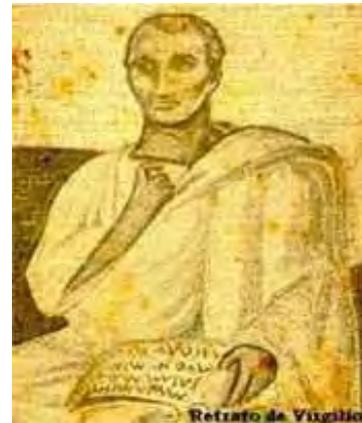


Figura 3.6: A personagem, a obra e o autor

## 3.2 Demonstração usando apenas geometria plana

Temos o objetivo de responder à seguinte pergunta: “Dado um determinado comprimento, qual a curva plana, simples<sup>1</sup> e fechada com esse comprimento que delimita a maior área possível?”

Para tanto, observaremos que, dentre os triângulos que possuem dois lados de medidas fixas, o triângulo retângulo é o que possui maior área. Deste resultado, mostraremos

<sup>1</sup>Dizemos que uma dada curva é *simples* se ela não se autointersecta.

que a semicircunferência é a curva plana aberta, com extremos em dois pontos de uma reta, que engloba a maior área e, a partir de então, concluiremos que a circunferência é a curva plana fechada que engloba a maior área.

Resolveremos esse problema utilizando alguns resultados que virão na sequência, mas antes apresentaremos e discutiremos a seguinte definição:

**Definição 3.1.** *Uma curva plana é uma função contínua definida em um intervalo  $I$  com valores em  $\mathbb{R}^2$ . Seja  $P : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva. Os pontos  $P(a)$  e  $P(b)$  são chamados extremos da curva.*

Nas figuras abaixo, apresentamos algumas curvas. Na primeira, os extremos são distintos ( $P(a) \neq P(b)$ ) - chamamo-la de aberta - e ela se autointersecta, isto é, dois valores distintos de  $t$  originam o mesmo ponto (parte (a)). Na segunda curva, como  $P(a) = P(b)$ , chamamo-la de fechada, embora ela também se autointersecte num ponto diferente dos extremos (parte (b)). Quando uma curva não possui autointersecções (além dos extremos, eventualmente), dizemos que a curva é *simples* (parte (c)).

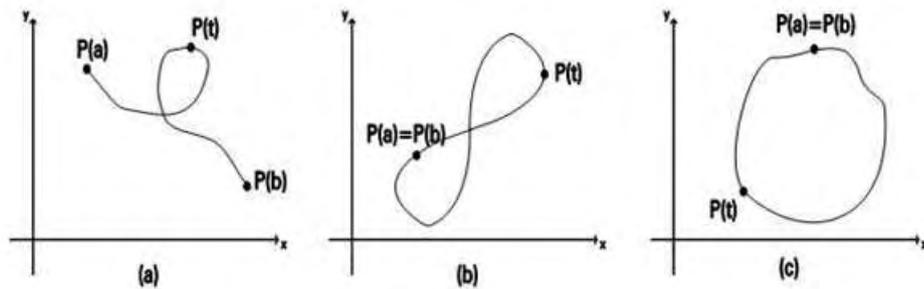


Figura 3.7

**Definição 3.2.** *Um conjunto convexo é um conjunto com a seguinte propriedade: dados dois de seus pontos, o segmento de reta que os une também está inteiramente contido no conjunto.*

**Proposição 3.1.** *Seja  $F_1$  uma figura plana limitada não convexa, cuja fronteira seja uma curva plana simples e fechada,  $C_1$ . Então é possível encontrar uma figura plana convexa,  $F'_1$ , de área maior do que a de  $F_1$ , tal que sua fronteira,  $C'_1$ , seja uma curva plana simples e fechada, de comprimento igual ao de  $C_1$ .*

*Demonstração.* Como  $F_1$  não é convexa, existem pontos  $P$  e  $Q$  em  $F_1$  tais que o segmento  $\overline{PQ}$  não esteja contido em  $F_1$ . Sendo  $A$  e  $B$  os pontos de intersecção do segmento  $\overline{PQ}$  com  $C_1$  tal que  $\overline{AB} \cap C_1 = \{A, B\}$ , refletimos uma das partes de  $C_1$  com extremos em  $A$  e  $B$  em relação à reta que contém  $\overline{PQ}$ , obtendo uma nova figura,  $F'_1$ , com fronteira  $C'_1$ , de mesmo comprimento que o de  $C_1$ , porém com área maior do que a de  $F_1$ . Observe a figura a seguir:

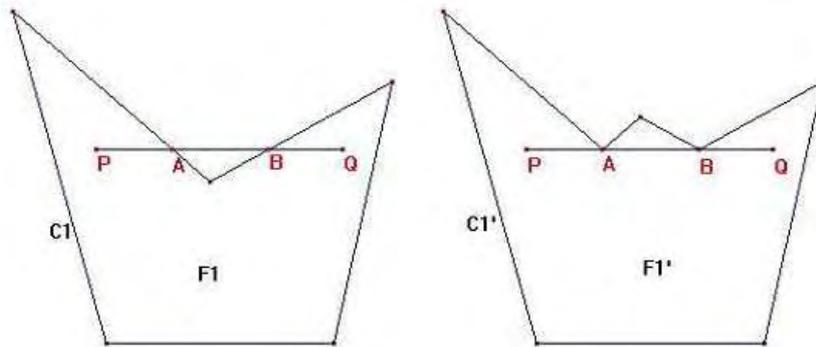


Figura 3.8

Se  $F_1'$  ainda não for convexa, repetimos o raciocínio até encontrarmos uma figura  $F_2$  convexa<sup>2</sup>.  $\square$

Com base na proposição anterior, podemos concluir que figuras isoperimétricas são sempre convexas.

Além disso, a proposição anterior nos conduz ao seguinte corolário, cuja demonstração é semelhante, uma vez que o segmento  $\overline{AB}$  permanece inalterado na sequência de figuras obtidas de  $F_1$ .

**Corolário 3.1.** *Seja  $C_1$  uma curva plana, simples e aberta, situada de um mesmo lado de uma reta  $r$  e com extremos  $A$  e  $B$  nessa reta. Suponhamos que a curva fechada  $C_1 \cup \overline{AB}$  seja fronteira de uma figura limitada,  $F_1$ , não convexa. Então existe uma curva  $C_2$ , plana, simples e aberta, de mesmo perímetro que o de  $C_1$ , com os mesmos extremos  $A$  e  $B$  em  $r$ , tal que  $C_2 \cup \overline{AB}$  seja fronteira de uma curva convexa com área maior do que a de  $F_1$ .*

**Proposição 3.2.** *Dentre todos os triângulos com dois lados de comprimentos fixos, o de maior área é o triângulo retângulo que possui esses lados como catetos.*

*Demonstração.* Sejam  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$  dois segmentos de medidas fixas  $a$  e  $b$ , respectivamente. Sejam  $\alpha$  a medida do ângulo  $\angle ACB$  e  $h$  a medida da altura do triângulo  $ABC$  relativa ao vértice  $A$ , como na figura:

A área  $S$  desse triângulo pode ser calculada por:

$$S = \frac{ah}{2} = \frac{ab \operatorname{sen} \alpha}{2},$$

observando-se que  $h = b \operatorname{sen} \alpha$  independentemente de  $\alpha$  ser agudo, reto ou obtuso, devendo-se, nesse último caso, observar que  $\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$ .

Como  $0 \leq \operatorname{sen} \alpha \leq 1$  para  $0 \leq \alpha \leq \pi$ , concluímos que  $S$  assume o maior valor possível quando  $\operatorname{sen} \alpha = 1$ , ou seja,  $\alpha = \pi/2$ , como queríamos demonstrar.  $\square$

<sup>2</sup>Dependendo da escolha dos pontos  $P$  e  $Q$  em cada nova figura construída, pode ser que  $F_2$  seja encontrada por um “processo limite” de figuras obtidas a partir de  $F_1$ . No entanto, escolhas convenientes de  $P$  e  $Q$  conduzem a um número finito de figuras.

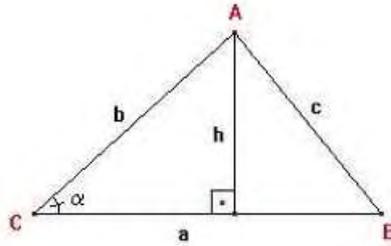


Figura 3.9

**Proposição 3.3.** *Seja  $F_1$  uma figura plana convexa cuja fronteira seja composta por uma curva  $C_1$  plana, simples, aberta, de extremos  $A$  e  $B$  e de comprimento  $p$ , unida com o segmento  $\overline{AB}$ . Suponhamos que, nessas condições,  $F_1$  tenha área máxima. Então  $F_1$  é um semicírculo.*

*Demonstração.* Vamos supor que  $F_1$  não seja um semicírculo. Então existe um ponto  $C \in C_1$  tal que  $ABC$  não é um triângulo retângulo, uma vez que, se  $ABC$  fosse retângulo para todo  $C \in C_1$ ,  $F_1$  seria um semicírculo.

Como  $F_1$  é convexa, os segmentos  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  estão contidos em  $F_1$ , isto é, o triângulo  $ABC$  está contido em  $F_1$ . Sejam  $F_2$  e  $F_3$  as figuras sobre  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$ , de tal modo que  $F_1 = F_2 \cup \triangle ABC \cup F_3$ .

Consideramos agora o triângulo  $A'B'C'$ , retângulo em  $C'$ , de tal modo que  $\overline{A'C'} \cong \overline{AC}$  e  $\overline{B'C'} \cong \overline{BC}$ . Pela Proposição 3.2, a área de  $A'B'C'$  é maior do que a área de  $ABC$ . Consideramos, então, a figura  $F'_1 = F_2 \cup A'B'C' \cup F_3$ , denominando sua fronteira por  $C_2 \cup \overline{A'B'}$ . Portanto,  $F'_1$  tem fronteira composta por uma curva  $C_2$  plana, simples e aberta, de extremos  $A'$  e  $B'$  e comprimento  $p$ , unida com o segmento  $\overline{A'B'}$ . No entanto, a área de  $F'_1$  é maior do que a de  $F_1$ , contrariando a hipótese.

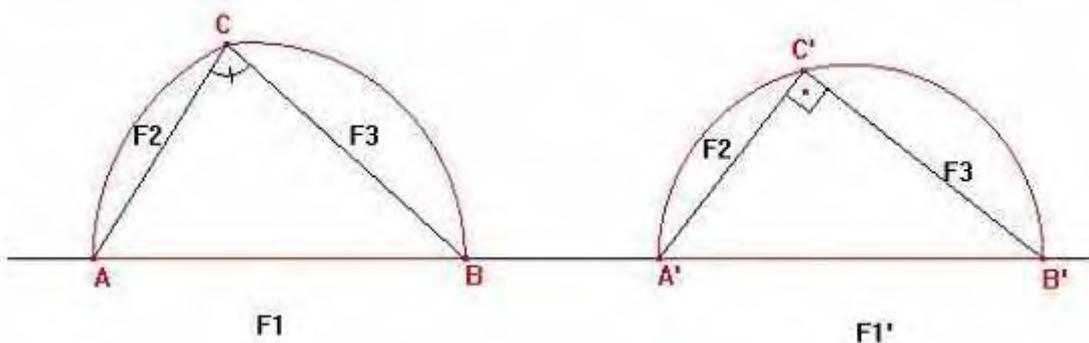


Figura 3.10

Caso  $F'_1$  não seja convexa, pelo Corolário 3.1, é possível tomar  $F''_1$  convexa, com fronteira  $C_3 \cup \overline{A'B'}$  e área maior do que a de  $F'_1$ , contrariando as condições da hipótese, que diz que  $F_1$  tem área máxima.

Logo,  $F_1$  é um semicírculo. □

**Teorema 3.1** (Teorema Isoperimétrico). *Dado um comprimento fixo, dentre todas as figuras planas, fechadas, convexas e de perímetro igual a esse comprimento, o círculo é a que possui maior área.*

*Demonstração.* Suponhamos que a figura de maior área,  $F_1$ , não seja um círculo. Seja  $2p$  o comprimento da fronteira  $C_1$  de  $F_1$ . Tomemos os pontos  $A$  e  $B$  em  $C_1$  de modo que o comprimento da curva, em  $C_1$ , de  $A$  até  $B$ , seja igual a  $p$ . Denominemos as duas partes de  $C_1$ , determinadas por  $A$  e  $B$ , por  $C_2$  e  $C_3$ . Logo,  $F_1 = F_2 \cup F_3$ , sendo  $F_2$  a figura com fronteira  $C_2 \cup \overline{AB}$  e  $F_3$  a figura com fronteira  $C_3 \cup \overline{AB}$ , ambas com área máxima. Assim,  $F_2$  ou  $F_3$  não é um semicírculo e possui área máxima, contradizendo a Proposição 3.3.  $\square$

# 4 O Problema Isoperimétrico - Aplicações

Problemas envolvendo maximização de áreas para perímetros fixos podem ser muito motivadores tanto nos Ensinos Fundamental e Médio quanto no Ensino Superior.

Neste capítulo apresentaremos algumas aplicações que podem ser abordadas pelos professores, tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio. Utilizaremos um programa computacional e um vídeo desenvolvidos para o Projeto M3, parceria MEC-UNICAMP para a produção de material didático de matemática para o Ensino Médio. São de livre utilização, atualmente disponíveis no endereço <http://m3.mat.br>.

Alguns dos programas computacionais desenvolvidos dentro do Projeto M3 tratam especificamente de problemas de otimização de áreas a partir de perímetros fixos.

Mostraremos nesta seção o programa computacional ‘Otimização de Janelas’; o material audiovisual “A Lenda de Dido”, o qual, para melhor compreensão, recomendamos assistir previamente ao vídeo, disponibilizado atualmente no mesmo endereço supracitado.

## 4.1 Otimização de janelas

### Sinopse

Este *software* ilustra um processo de otimização utilizando polinômios do segundo grau. Nele, é considerada uma situação hipotética em que o objetivo é encontrar a janela retangular que tem a maior área dentre as que têm perímetro fixo. As funções que descrevem estas situações são polinômios do segundo grau com domínio restrito. O caminho de investigação proposto parte da percepção visual dos valores por meio de gráficos dinâmicos e induz à modelagem do problema por funções.

### Conteúdos

- Funções: função quadrática;
- Geometria: perímetro e área.

## Objetivos

1. Despertar a percepção da variação de valores de uma função de uma variável;
2. Modelar matematicamente uma situação por meio de uma função determinando restrições em seu domínio;
3. Investigar o comportamento da função polinomial do segundo grau, particularmente com respeito a valores máximos e mínimos.

## Duração

Uma aula dupla.

## Recomendação de uso

Sugerimos que a unidade seja utilizada em duplas e que os alunos levem papel e lápis para a sala de informática.

## Material relacionado

- *Experimentos*: ‘Otimização da Cerca’, ‘Polígonos e Círculo’ e ‘Qual é o prisma de maior volume?’
- *Vídeos*: ‘A Lenda de Dido’ e ‘Roda de Samba’.
- *Softwares*: ‘Otimização do Arco Ferradura’, ‘Otimização de Janelas com topo triangular’ e ‘Otimização do Arco Romano’.
- *Áudio*: ‘O que é uma parábola?’

## Introdução



Figura 4.1

No dia-a-dia, é muito comum encontrarmos problemas que exigem otimização. Por exemplo, numa fábrica, estamos sempre interessados em minimizar o tempo de produção e maximizar o lucro. Do ponto de vista da matemática, isto equivale, em geral, a procurar valores máximos e mínimos de uma função. Neste *software*, você terá a oportunidade de realizar atividades que ilustram um processo de otimização, utilizando polinômios do segundo grau. No caso de uma janela, uma maior iluminação está

vinculada a uma maior área. Nos problemas aqui propostos, vamos considerar uma situação hipotética em que, a partir de uma medida fixa de contorno, procuramos a janela que possui a maior área.

Problemas dessa natureza são denominados *isoperimétricos*, e sempre estiveram presentes na história da matemática.

## Estrutura do *software*

Este *software* é composto por duas atividades, a primeira mais longa e que conduz o aluno desde as primeiras impressões sobre o problema até a sua algebrização, análise do gráfico da função e conclusão; e na segunda, por sua vez, o objetivo é visualizar o problema mais geral e permitir uma melhor compreensão das expressões algébricas envolvidas.

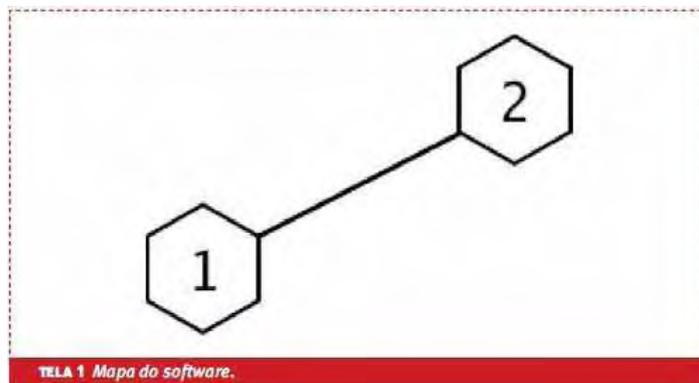


Figura 4.2

### 4.1.1 Janelas retangulares

O problema aqui apresentado é o de otimização de janelas retangulares.

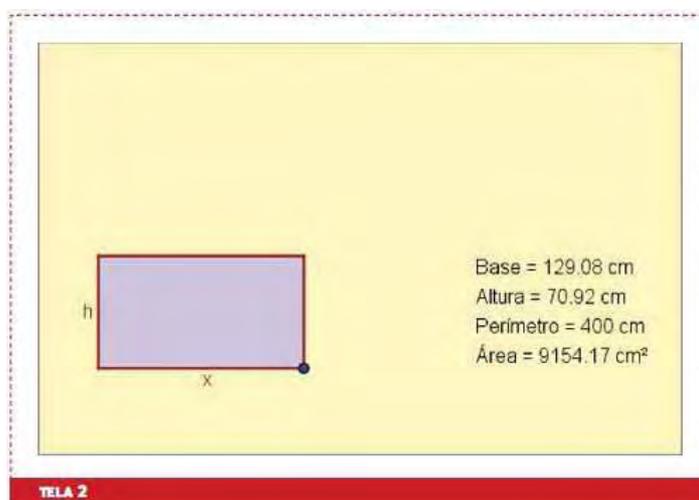


Figura 4.3

Esta atividade é dividida em 5 partes, além de uma parte final, com o objetivo de consolidar e generalizar as conclusões da atividade 1.

O objetivo das 3 primeiras partes é investigar e analisar, por meio da visualização dinâmica, como varia a área do retângulo à medida que a base aumenta, mas o perímetro permanece fixo e igual a 400 cm. Além disso, o desenvolvimento é direcionado a investigar as medidas possíveis para a base da janela retangular (domínio da função).

Ao final da parte 3, é apresentada uma pergunta a ser respondida no caderno, a qual poderá ser comentada pelo professor em algum momento apropriado, como, por exemplo, durante o fechamento na aula seguinte ao uso do *software*.

Na parte 4, é solicitada uma expressão para a área da janela retangular em termos de sua base, de forma que, denotando por  $x$  a medida da base do retângulo, obtém-se a regra que define sua função área,  $A(x)$ .

Na parte 5, é apresentado o gráfico dessa função com o objetivo de, por meio da visualização e da movimentação de um ponto, investigar a maior área possível e, também, as dimensões aproximadas do retângulo de área máxima.

Finalmente, a parte final, chamada  $C$ , apresenta algumas conclusões para o problema, com algumas perguntas a fim de que o aluno reflita sobre os fatos observados.

Ao final desta parte, é citado o seguinte resultado mais geral:

**“Dentre todos os retângulos de mesmo perímetro, o quadrado é aquele que tem a maior área.”**

Esse resultado pode ser justificado da seguinte forma. Sendo  $p$  o perímetro fixo e  $x$  a medida da base do retângulo, sua altura é  $h = \frac{p}{2} - x$  e sua área é  $A(x) = hx = -x^2 + \frac{p}{2}x$ , com  $x$  variando entre 0 e  $p/2$ .

Vamos determinar, então, o valor da base  $x$  – em função de  $p$  – para o qual a área do retângulo correspondente é máxima. Somando e subtraindo  $p^2/16$  à expressão da área, temos:

$$\begin{aligned} A(x) &= -x^2 + \frac{p}{2}x \\ &= \frac{p^2}{16} - \frac{p^2}{16} - x^2 + \frac{p}{2}x \\ &= \frac{p^2}{16} - \left( x^2 - \frac{p}{2}x + \frac{p^2}{16} \right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$A(x) = \frac{p^2}{16} - \left( x - \frac{p}{4} \right)^2 \quad (*)$$

Como  $x$  varia entre 0 e  $p/2$ , o maior valor de  $A(x)$  ocorre quando  $x = p/4$ . Neste caso,  $h = \frac{p}{2} - x = \frac{p}{2} - \frac{p}{4} = \frac{p}{4}$ . Portanto, as dimensões do retângulo de área máxima com perímetro  $p$  são  $x = h = p/4$ , ou seja, é um quadrado cuja área é igual a  $A(p/4) = (p/4)^2 = p^2/16$ . Notemos que, no gráfico da função  $A(x)$ , o ponto  $(p/4, A(p/4))$  é o vértice da parábola.

### 4.1.2 Qual o melhor retângulo?

A atividade 2 apresenta uma animação comparando as áreas de um retângulo e de um quadrado de mesmo perímetro. Ela pode ser vista quantas vezes forem necessárias, e permite perceber claramente que a área do quadrado é maior do que a área do retângulo. Além disso, a animação sugere uma forma simples para calcular o quanto a área do quadrado é maior do que a do retângulo. Finalmente, outra parte da atividade solicita que a expressão dessa diferença seja apresentada em função do perímetro.

Note-se que a expressão final (\*) da área do retângulo, exibida na seção referente à atividade 1, descreve exatamente a relação ilustrada na animação, pois a área do retângulo pode ser vista como a área do quadrado maior menos a área do quadrado menor.

## Conclusões

A seguir, vamos comentar as questões do final da parte 3 da atividade 1, sugeridas para serem respondidas no caderno:

### Questão para o caderno: 1A (atividade 1)

*“Analisando os valores da tabela, descreva como varia a área do retângulo à medida que a base aumenta. Ao escrever, diga se é verdade que, quanto maior é a base, maior é a área.”*

Perímetro	Base (x)	Altura (h)	Área
400	89.31	110.69	9885.72
400	200	0	0.00
400	189.91	10.09	1916.19
400	181.33	18.67	3385.43
400	154.04	45.96	7079.68
400	65.14	134.86	8784.78
400	54.22	145.78	7904.19
400	42.52	157.48	6696.05
400	30.04	169.96	5105.60
400	18.34	181.66	3331.64

TELA 3

Figura 4.4

Nesta questão, é esperado que os alunos concluam que, ao variar a medida da base entre 0 e 100, a área do retângulo aumenta. A partir de 100, a área começa a diminuir.

É provável que os alunos não localizem exatamente o valor 100, a partir do qual a área começa a diminuir, mas deverão pelo menos notar que, à medida que a base varia de zero a 100, a área começa a aumentar e, após algum valor, começa a diminuir. Talvez seja o caso do professor sugerir uma melhor distribuição de valores para a base.

### Questão para o caderno: 2A (atividade 1)

*“Encontre dois retângulos com perímetro igual a 400 cm e que tenham a mesma área, mas cujas bases sejam diferentes. O que você pode dizer sobre eles?”*

Nesta questão, é esperado que os alunos notem que se invertermos a ordem dos valores das medidas da base e da altura da janela, as áreas correspondentes não se alteram.

Uma sugestão para aprofundar a discussão de problemas de natureza isoperimétrica com os alunos é dada no esquema a seguir. Para um perímetro  $p$  fixado, comparar e fornecer o percentual de aumento:

- A área do quadrado com a do hexágono;
- A área de um hexágono com a área do círculo;
- A área de um polígono regular de  $n$  lados com a área do círculo.

## 4.2 Guia do professor para o vídeo “A Lenda de Dido” (versão texto)

### Série

Matemática na Escola.

### Conteúdo

O problema isoperimétrico.

Área Máxima.

### Duração

Aproximadamente 10 minutos.

### Objetivos

1. Apresentar o problema isoperimétrico;
2. Apresentar aspectos históricos relativos ao problema;
3. Aplicar as soluções do problema em situações reais, com restrições.

## Material relacionado

- *Experimentos*: Otimização da Cerca, Caixa de Papel.
- *Vídeos*: Naturalmente.
- *Softwares*: Otimização de Janelas, Janelas em arco romano, Janelas em arco ferradura.

## Sinopse

A fazendeira Elisa comprou tela para fazer um cercado para as ovelhas na sua fazenda e, na busca do melhor formato para o cercado, ela acaba conhecendo a princesa Dido. As duas descobrem que possuem algumas coisas em comum.

## Sobre a série

A série “Matemática na Escola” aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas dessa série usualmente são informativos e introdutórios em relação a um assunto a ser estudado em sala de aula pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

## Sobre o programa

O programa aborda um problema isoperimétrico em uma situação real. A fazendeira Elisa tem oitenta metros de tela e pretende fazer um cercado para suas ovelhas. A princesa Dido surge para ajudá-la a escolher o melhor formato para tal cerca.

A apresentação da Lenda de Dido, presente no épico *Eneida* do poeta Virgílio, escrito no século I *a.C.* ilustra que a solução do problema isoperimétrico já era conhecida há muito tempo, aparecendo em escritos dos gregos Zenódoro e Pappus ([12]).

O primeiro resultado apresentado no programa é que, dado um polígono não convexo, é sempre possível encontrar um outro polígono convexo de mesmo perímetro e área maior.



Figura 4.5

Neste caso, utiliza-se uma reflexão de um vértice  $V$  que caracterize o polígono como não convexo através da reta definida pelos dois vértices adjacentes àquele. Como pode ser também observado, se considerarmos o polígono em que as duas arestas que partem

de  $V$  são substituídas por uma única aresta que liga os dois vértices adjacentes a  $V$ , obtemos um polígono convexo com número de lados menor, perímetro menor e área maior ([13]).

Dentre todos os polígonos convexos com o mesmo número de lados e mesmo perímetro, o polígono regular é o que possui maior área. Uma demonstração para este fato pode ser feita por indução sobre o número de lados ([11]). A partir de um polígono qualquer, constrói-se inicialmente um polígono equilátero<sup>1</sup> e depois um regular, mantendo o número de lados e aumentando a área a cada passo.

No programa é realizada uma comparação entre dois quadriláteros: um quadrado de lados medindo 20 metros e um retângulo de lados medindo 10 metros por 30 metros. Mantendo fixo o perímetro de 80 metros, é possível utilizar máximos e mínimos de uma função do segundo grau para mostrar que, dentre todos os retângulos, o quadrado é o que possui maior área. De fato, sejam  $a$  e  $b$  os lados do retângulo, de modo que  $2a + 2b = 80$ , ou seja,  $a + b = 40$  (i). A função área é dada por:  $A = a \cdot b$  (ii); assim, isolando-se  $b$  em (i) e depois substituindo-o em (ii), teremos  $A = a(40 - a) = -a^2 + 40a$ , com  $a$  variando de 0 a 40 metros. O gráfico da função área será, portanto, uma parábola côncava para baixo. Enxergando  $A$  como função de  $a$ , temos que o seu valor máximo é atingido em  $a = 20$ , que é associado, no gráfico, ao vértice da parábola, o ponto  $(20, 400)$ .

Por outro lado, quando se comparam apenas polígonos regulares de mesmo perímetro, verifica-se que o de maior área é justamente aquele com maior número de lados, e a verificação disto pode ser realizada utilizando-se a expressão geral para o cálculo da área de um polígono regular de  $n$  lados, já deduzida no Teorema 1.6, a saber:

$$A_n = \frac{p^2}{n \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)},$$

na qual  $p$  representa o semiperímetro do polígono, isto é, a metade do seu perímetro, e  $n$ , o número de lados da figura<sup>2</sup>. Como a sequência de áreas  $(A_n)$  é crescente<sup>3</sup>, temos que a área cresce em função do número de lados,  $n$ . A partir de uma consideração envolvendo polígonos regulares de  $n$  lados, inscritos e circunscritos a uma mesma circunferência, pode-se concluir que a área do polígono de  $n$  lados e perímetro fixo converge para a área de um círculo de mesmo perímetro ([11]). É interessante observar que a dedução de Arquimedes para a área do círculo utiliza justamente essa aproximação.

Tudo isso é equivalente a dizer que o limite da sequência  $n \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)$  é o número que tradicionalmente denominamos  $\pi$ , de sorte que a sequência  $(A_n)$  converge para  $\frac{p^2}{\pi}$ .

<sup>1</sup>Polígono equilátero é um polígono que tem todos os lados de medidas iguais.

<sup>2</sup>Em textos atuais de matemática, quando não se especifica a unidade de medida do ângulo, assume-se que é o radiano, abreviado *rd*, e definido por:  $1 \text{ rd} = (180/\pi)^\circ$ .

<sup>3</sup>Uma forma de provar este fato é através do cálculo diferencial. Mostra-se inicialmente que a função  $f(y) = \frac{\operatorname{tg} y}{y}$  é crescente e, então, conclui-se que, para  $y = \pi/n$ , quanto maior o valor de  $n$ , menor o valor da função que está no denominador da expressão de  $A_n$ .

A prova de que, para um perímetro fixo, a circunferência é, de fato, a curva que contorna a maior área possível é estabelecida no clássico teorema da desigualdade isoperimétrica:

**Teorema 4.1** (Desigualdade Isoperimétrica). *Toda curva fechada simples de comprimento  $l$  cerca uma área menor do que ou igual a  $\frac{l^2}{4\pi}$ , e esse valor só é atingido se a curva em questão for um círculo de raio  $\frac{l}{2\pi}$ .*

Há diversas demonstrações para essa desigualdade, utilizando geometria plana ou mesmo cálculo diferencial. Uma referência é o artigo [11].

No programa, entretanto, o problema isoperimétrico é abordado com algumas restrições. A primeira delas é construir um cercado com maior área possível, tendo um dos lados definidos, a saber, a margem de um rio. Neste caso, a demonstração do resultado é feita por contradição, utilizando o teorema anterior. Como, na margem do rio, não será utilizada nenhuma cerca, a solução para este problema isoperimétrico deve ser um semicírculo. De fato, se a solução fosse outra curva  $C$ , ao adicionarmos a tal curva a sua reflexão relativa à margem do rio (suposta retilínea), obteríamos uma curva diferente do círculo como curva fechada de maior área e perímetro igual ao dobro do comprimento de  $C$ .



Figura 4.6

A outra restrição diz respeito ao uso de mourões para a construção das cercas. No programa, a restrição é de quatro mourões, e, neste caso, um argumento semelhante ao utilizado acima mostra que a solução do problema isoperimétrico é a metade de um hexágono regular. Uma proposta de solução com base na metade de um quadrado é explorada no vídeo, contrastando com a solução real, que é a metade de um hexágono regular.

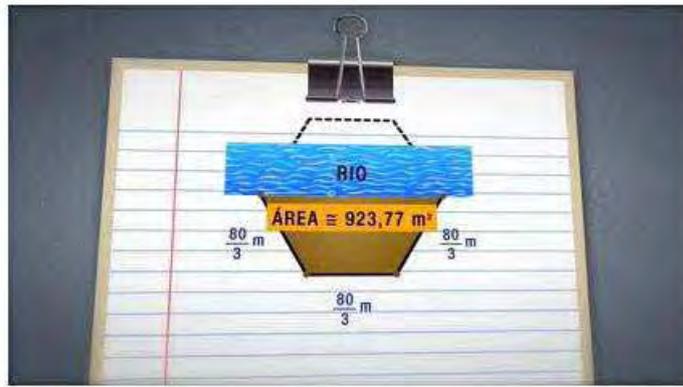


Figura 4.7

No caso geral, que pode ser discutido com os alunos, a solução para o uso de  $n$  mourões será a metade do polígono de  $2(n - 1)$  lados.

#### 4.2.1 Sugestões de atividades

##### Antes da execução do vídeo

Solicitar aos alunos que calculem a área de diversos polígonos de mesmo perímetro, para que verifiquem que figuras com mesmo perímetro podem ter áreas diferentes. Por exemplo, dado um perímetro de 120 cm, calcular as áreas de retângulos diversos, quadrado, triângulos, inclusive o equilátero e o hexágono regular.

##### Depois da execução do vídeo

Sugestões de atividades para os alunos:

**Polígonos não convexos:** A partir de um polígono não convexo fornecido, o professor pode solicitar aos alunos que encontrem um polígono convexo com maior área. Se os alunos apresentarem como resultado um polígono convexo de mesmo número de lados, propor então que eles encontrem um com menor número de lados, maior área e menor perímetro.

**Retângulos de mesmo perímetro:** Propor que os alunos demonstrem que, de todos os retângulos de mesmo perímetro, o quadrado é o que possui maior área.

**Fórmula da área de um polígono regular de  $n$  lados:** Deduzir, a partir da decomposição em triângulos e expressões trigonométricas, a fórmula para o cálculo da área  $A_n = \frac{p^2}{n \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)}$  de um polígono regular de  $n$  lados e semiperímetro  $p$ .

**Construção de gráficos:** O professor pode solicitar aos alunos que calculem o valor das áreas de diversos polígonos regulares de mesmo perímetro com o uso de uma calculadora científica ou programas computacionais e depois façam a representação gráfica dos valores. Após a apresentação dos gráficos, o professor

pode explorar a idéia de limite, mostrando que a sequência dos valores das áreas converge para a área do círculo de mesmo perímetro.

**Problemas semelhantes:** Solicitar aos alunos que resolvam problemas semelhantes ao apresentado no programa, alterando o número de mourões, ou ainda colocando outras restrições.

# Referências

- [1] PROJETO M3. Disponível em: <<http://m3.mat.br>>. Acesso em: Abril de 2013.
- [2] REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. *Geometria Euclidiana plana e construções geométricas*. 2. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2008.
- [3] BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana plana*. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [4] LIMA, E. L. *Análise Real*. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA - Coleção Matemática Universitária, 2002.
- [5] LIMA, E. L. *Medida e forma em geometria*. Rio de Janeiro: SBM, 1991.
- [6] KENNEDY, E. S. *Tópicos em história da matemática para uso em sala de aula - Trigonometria*. São Paulo: Atual Editora, 1994.
- [7] FIGUEIREDO, D. G. Problemas de máximo e mínimo na geometria euclidiana. *Matemática Universitária*, v. 9/10, p. 69–108, 1989.
- [8] VIRGÍLIO, P. Eneida (Tradução de Manuel Odorico Mendes). Disponível em: <<http://www.ebooksbrasil.org/eLibris/eneida.html>>. Acesso em: Fevereiro de 2013.
- [9] AGUSTINI, E. et al. O teorema isoperimétrico e o problema da cerca. *FAMAT em Revista - Revista Eletrônica de Iniciação Científica da Faculdade de Matemática da UFU*, Uberlândia, p. 141–152, 2005.
- [10] LIMBERGER, R. *Abordagens do problema isoperimétrico*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, 2011.
- [11] MOREIRA, C. G. T. A.; SALDANHA, N. C. A desigualdade isoperimétrica. *Matemática Universitária*, v. 15, p. 13–19, 1993.
- [12] CAVALCANTI, G. R. *Problemas variacionais geométricos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, 2000.
- [13] SOUZA, C. R. A. *Dois demonstrações da desigualdade isoperimétrica*. 1. ed. Belo Horizonte: UFMG, 2006.