

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**“Controle Robusto com Realimentação Derivativa de Sistemas Não Lineares
via LMI”**

MANOEL RODRIGO MOREIRA

Matemático - FEIS/UNESP

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia - UNESP - Campus de Ilha Solteira, para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de Conhecimento: Automação.

Ilha Solteira - SP

Fevereiro / 2011

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação
Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da UNESP - Ilha Solteira.

M838c Moreira, Manoel Rodrigo.
 Controle robusto com realimentação derivativa de sistemas não lineares
via LMI / Manoel Rodrigo Moreira. - Ilha Solteira : [s.n.], 2011
 115 f.

 Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de
Engenharia de Ilha Solteira. Área de Conhecimento: Automação, 2011

 Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
 Inclui bibliografia

 1. Desigualdades matriciais lineares. 2. Controladores robustos.
 3. Sistemas não lineares. 4. Realimentação derivativa



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO: Controle robusto com realimentação derivativa de sistemas não lineares via LMI

AUTOR: MANOEL RODRIGO MOREIRA

ORIENTADOR: Prof. Dr. MARCELO CARVALHO M TEIXEIRA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica ,
Área: AUTOMAÇÃO, pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. MARCELO CARVALHO M TEIXEIRA

Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO

Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. CELSO PASCOLI BOTTURA

Departamento de Máquinas Componentes e Sistemas Inteligentes / Universidade Estadual de
Campinas

Data da realização: 28 de fevereiro de 2011.

*À minha família, em especial aos meus pais Messias e Jocerlinda,
por todo o amor, apoio e confiança, à minha irmã Florizette,
pelo carinho, compreensão e incentivo
para comigo em todos os momentos.*

*“O único lugar onde o sucesso vem antes
do trabalho é no dicionário.”*

Albert Einstein (1879-1955)

Agradecimentos

Presto meus sinceros agradecimentos a todos os familiares, amigos, professores e funcionários da FEIS-UNESP, que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho. Em especial, dedico meus agradecimentos:

- A Deus, que me deu força e saúde para chegar até aqui;
- Aos meus pais e minha irmã pelo carinho, apoio, incentivo e por sempre terem acreditado em mim;
- Ao Prof. Dr. Marcelo C. M. Teixeira, por todo ensinamento, incentivo, confiança e orientação;
- Ao Prof. Dr. Edvaldo Assunção, pelo acompanhamento nas bancas examinatórias, sugestões, incentivo e palavras de paz sempre presentes na minha caminhada que perdurarão por toda a minha vida;
- À Prof^a. Dr^a. Célia Aparecida dos Reis por todo o apoio, incentivo e ensinamentos valiosos desde a graduação que levarei para toda a minha vida;
- À Prof^a. Dr^a. Neusa A. P. da Silva por todo o ensinamento nos primeiros passos no trabalho com LMIs;
- Aos meus amigos e colegas do laboratório, Edson, Talita, Wallysonn, Máira, Rodrigo Cardim, Flávio A. Faria, Luciano, Émerson, Luiz, André, Jefferson, Fábio, Gisele e Fernando que de forma direta ou indiretamente me ajudaram;
- Aos meus amigos da FEIS-UNESP, em especial: Cibele, Marlon, Joel, Érica;
- Aos meus grandes amigos de Santa Fé do Sul/SP, pelo companheirismo e força em todas as horas;
- À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela oportunidade e base financeira.

Resumo

Em alguns problemas práticos, por exemplo, no controle de vibrações de sistemas mecânicos utilizando acelerômetros como sensores, é mais fácil obter a da derivada do vetor de estado do que o vetor de estado. Esta dissertação mostra que plantas lineares e invariantes no tempo descritas pelas matrizes $\{A, B, C, D\}$, cuja saída é a derivada do vetor de estado, são não observáveis e não estabilizáveis com realimentação da saída, quando $\det(A) = 0$. A impossibilidade de rejeição de distúrbios constantes, somados à entrada da planta quando $\det(A) \neq 0$, realimentando-se a saída com controladores estáticos, foi também demonstrada. Adicionalmente, são propostas novas técnicas de controle para uma classe de sistemas não lineares com incertezas variantes no tempo. Condições na forma de desigualdades matriciais lineares, em inglês *Linear Matrix Inequalities* (LMIs), para o projeto de sistemas de controle empregando realimentação derivativa estática da derivada do vetor de estado, que ao mesmo tempo estabiliza a planta e maximiza o limite de incerteza do termo não linear, são estabelecidas com base em funções quadráticas de Lyapunov. Posteriormente estendem-se as condições de estabilidade robusta para sistemas não lineares com incertezas variantes no tempo e incertezas politópicas, que podem também representar falhas estruturais. O projeto do controlador é realizado através de condições baseadas em LMIs que, quando factíveis, podem ser resolvidas facilmente utilizando técnicas de programação convexa. Essa metodologia permite a inclusão de restrições de desempenho no projeto, como por exemplo, na taxa de decaimento e na norma de ganho dos controladores, de modo a atender às restrições do projeto. São apresentadas análises e resultados considerando o sinal de controle nulo e empregando realimentação derivativa estática do vetor de estado. A elaboração da teoria para sistemas com n não linearidades é exemplificada através de exemplos abordando uma única não linearidade, com e sem incertezas politópicas (e falhas estruturais), e duas não linearidades, com e sem incertezas politópicas (e falhas estruturais).

Palavras chave: Desigualdades matriciais lineares (LMIs), Projeto de controladores robustos, Sistemas não lineares, Estabilidade segundo Lyapunov, Taxa de decaimento, Falhas estruturais, Realimentação derivativa.

Abstract

In some practical problems, for instance in the control of mechanical systems using accelerometers as sensors, it is easier to obtain the state-derivative vectors than the state vectors. This dissertation shows that (i) linear time-invariant plants given by the state-space model matrices $\{A, B, C, D\}$ with output equal to the state-derivative vector are not observable and can not be stabilizable by using an output feedback if $\det(A) = 0$ and (ii) the rejection of a constant disturbance added to the input of the aforementioned plants, considering $\det(A) \neq 0$, and a static output feedback controller is not possible. The proposed results can be useful in the analysis and design of control systems with state-derivative feedback. Additionally, a new procedure for the control of a class of nonlinear systems with time-varying uncertainties using static state-derivative feedback is proposed. Conditions based on Linear Matrix Inequalities (LMIs) for the design of robust controllers using state-derivative feedback, which simultaneously stabilizes the system and maximizes the uncertainty bound of the nonlinear term are proposed. Robust stability conditions for nonlinear systems with uncertainties and time-varying polytopic uncertainties, known as structural failures, are also presented. The controller design are based on LMIs which, when feasible, can be easily solved using convex programming techniques. This methodology allows the inclusion of performance constraints on the design, such as the decay rate and gain bounds in order to meet the design requirements. The dissertation considered cases where the control signal is equal to zero and with a state-derivative feedback. The elaboration of the theory for systems with n nonlinearities is illustrated through examples covering a single nonlinearity, with and without two polytopic uncertainties (and structural failures), and two nonlinearities, with or without polytopic uncertainties (and structural failures).

Keywords: Linear matrix inequalities (LMIs), Robust controller design, Nonlinear systems, Lyapunov stability, Decay rate, Structural failure, State-derivative feedback.

Lista de Siglas e Abreviações

- LMIs: *Linear Matrix Inequalities*.
- TVI: *Teorema do Valor Inicial*.
- TVF: *Teorema do Valor Final*.
- MIMO: *Multiple Input Multiple Output*.

Lista de Figuras

3.1	Sistema Multivariável (MI) massa-mola com amortecedor.	32
3.2	Resposta transitória do sistema controlado (3.18), com $x(0) = [0, 1 \ 0 \ 0, 1 \ 0]^T$	35
3.3	Simulação do sinal de controle do sistema (3.18) com $x(0) = [0, 1 \ 0 \ 0, 1 \ 0]^T$	36
5.1	Suspensão Ativa do assento de um carro.	57
5.2	Simulação do sistema não-realimentado com uma não linearidade.	60
5.3	Simulação do sistema realimentado com uma não linearidade.	61
5.4	Simulação do sinal de controle do sistema realimentado com uma não linearidade.	62
5.5	Simulação do sistema realimentado com uma não linearidade.	63
5.6	Simulação do sinal de controle do sistema realimentado com uma não linearidade.	64
5.7	Simulação do sistema realimentado com uma não linearidade.	66
5.8	Simulação do sinal de controle do sistema realimentado com uma não linearidade.	66
5.9	Suspensão ativa do assento de um carro.	68
5.10	Simulação do sistema realimentado com duas não linearidades.	72
5.11	Simulação do sinal de controle do sistema realimentado com duas não linearidades.	72
5.12	Simulação do sistema realimentado com duas não linearidades.	74
5.13	Simulação do sinal de controle do sistema realimentado com duas não linearidades.	74
5.14	Simulação do sistema realimentado com duas não linearidades.	76
5.15	Simulação do sinal de controle do sistema realimentado com duas não linearidades.	76
5.16	Simulação do sistema realimentado com incertezas politópicas e uma não linearidade, com o controlador com objetivo de estabilidade.	92

5.17	Simulação do sinal de controle do sistema realimentado com incertezas politópicas e uma não linearidade.	92
5.18	Simulação do sistema realimentado com incertezas politópicas e uma não linearidade, com o controlador com objetivo de estabilidade e taxa de decaimento. .	94
5.19	Simulação do sinal de controle do sistema realimentado com incertezas politópicas e uma não linearidade.	95
5.20	Simulação do sistema realimentado com incertezas politópicas e uma não linearidade, com restrição na norma do controlador.	97
5.21	Simulação do sinal de controle do sistema realimentado com incertezas politópicas e uma não linearidade.	97
5.22	Simulação do sistema realimentado com incertezas politópicas e duas não linearidades, com restrição na norma do controlador.	102
5.23	Simulação do sinal de controle do sistema realimentado com incertezas politópicas e uma não linearidade, com restrição na norma do controlador.	102
5.24	Simulação do sistema realimentado com incertezas politópicas e duas não linearidades, com restrição na norma do controlador.	104
5.25	Simulação do sinal de controle do sistema realimentado com incertezas politópicas e uma não linearidade, com restrição na norma do controlador.	105
5.26	Simulação do sistema realimentado com incertezas politópicas e uma não linearidade, com restrição na norma do controlador.	106
5.27	Simulação do sinal de controle do sistema realimentado com incertezas politópicas e uma não linearidade, com restrição na norma do controlador.	107

Lista de Tabelas

3.1	<i>Distúrbios e ganhos do controlador do sistema simulado.</i>	34
5.1	<i>Valores de γ, α para $u(t) = 0$ do Exemplo 1.</i>	60
5.2	<i>Valores de γ, α e $\ K\$ para $u(t) = -K\dot{x}(t)$ do Exemplo 1.</i>	61
5.3	<i>Valores de γ, α e $\ K\$ para $u(t) = -K\dot{x}(t)$ do Exemplo 1.</i>	63
5.4	<i>Valores de γ, α e $\ K\$ para $u(t) = -K\dot{x}(t)$ do Exemplo 1.</i>	65
5.5	<i>Valores de γ_1, γ_2, α_1, α_2</i>	70
5.6	<i>Valores de γ_1, γ_2, α_1, α_2 e $\ K\$ do Exemplo 2.</i>	71
5.7	<i>Valores de γ_1, γ_2, α_1, α_2 e $\ K\$ do Exemplo 2.</i>	73
5.8	<i>Valores de γ_1, γ_2, α_1, α_2 e $\ K\$ do Exemplo 2.</i>	75
5.9	<i>Valores de γ, α e $\ K\$ do Exemplo 3.</i>	91
5.10	<i>Simulação com falha no amortecedor b_1 e m_s incerta.</i>	91
5.11	<i>Valores de γ, α, ϕ e $\ K\$ do Exemplo 3.</i>	93
5.12	<i>Simulação com falha no amortecedor b_1 e m_s incerta, do Exemplo 3</i>	94
5.13	<i>Valores de γ, α e $\ K\$ do Exemplo 3</i>	96
5.14	<i>Simulação com falha no amortecedor b_1 e m_s incerta, do Exemplo 3</i>	96
5.15	<i>Valores de γ_1, γ_2, α_1, α_2 e $\ K\$ no Exemplo 4.</i>	101
5.16	<i>Simulação com falha nos amortecedores b_1, b_2 e m_s incerta, do Exemplo 4.</i>	101
5.17	<i>Valores de γ, α, ϕ e $\ K\$ do Exemplo 4.</i>	103
5.18	<i>Simulação com falhas nos amortecedores b_1, b_2 e m_s incerta do Exemplo 4.</i>	104
5.19	<i>Valores de γ, α e $\ K\$ do Exemplo 4</i>	106

Sumário

Introdução	14
Apresentação da Dissertação	16
1 Conceitos Fundamentais	18
1.1 Sistemas Lineares Invariantes no Tempo	18
1.2 Propriedades	18
1.3 Condições de Observabilidade	19
1.4 Desigualdade de Sylvester	20
1.5 Zeros de Transmissão	20
1.6 Teorema do Valor Inicial (TVI) e Teorema do Valor Final (TVF)	21
1.7 Complemento de Schur	21
1.8 Sistemas Descritores	22
2 Projetos de Controladores com a Realimentação da Derivada do Vetor de Estado	23
2.1 Resultados Obtidos com a Realimentação Derivativa	23
2.2 Resultados Obtidos com a Realimentação Derivativa via LMI.	24
3 Novos Resultados sobre Estabilizabilidade e Rejeição de Distúrbios com Realimentação da Derivada do Vetor de Estado	26
3.1 Introdução	26
3.2 Observabilidade e Estabilizabilidade de Sistemas com Realimentação Derivativa	27
3.3 Rejeição de Distúrbios com Realimentação Derivativa	29

3.4	Rejeição de Distúrbios Adicionados à Entrada da Planta	29
3.4.1	Exemplo 1: Sistema massa-mola com amortecedor, com distúrbios adicionados à entrada da planta	31
3.4.2	Conclusões Parciais	36
4	Técnica Existente de Controle Robusto de Sistemas Não Lineares Baseada em LMIs	37
4.1	Análise de Estabilidade para Sistemas Livres	37
4.2	Projeto de Controlador com Lei de Controle $u(t) = Kx$	38
5	Técnica Proposta de Controle Robusto de Sistemas Não Lineares Baseada em LMIs	41
5.1	Controle Robusto de Sistemas Não Lineares	42
5.2	Sistemas com Múltiplas Não Linearidades	42
5.2.1	Conjunto H_α para Múltiplas Não Linearidades	45
5.2.2	Sistema Não Forçado com Múltiplas Não Linearidades	46
5.2.3	Projeto de Controlador com Realimentação da Derivada do Vetor de Estado e Múltiplas Não Linearidades	48
5.3	Restrição da Taxa de Decaimento para Sistemas com Múltiplas Não Linearidades	51
5.3.1	Restrição da Norma da Matriz de Ganho do Controlador K	55
5.3.2	Exemplo 1: Suspensão ativa do assento de um carro.	56
5.3.3	Exemplo 2: Suspensão ativa do assento de um carro com duas não linearidades.	67
5.4	Sistemas Não Lineares e Incertos	77
5.4.1	Sistemas com Incertezas Politópicas	77
5.4.2	Sistemas Não Lineares com Incertezas Politópicas	78
5.4.3	Estabilidade Robusta de Sistemas Não Lineares com Incertezas Politópicas	78
5.5	Projeto de Controlador por Realimentação da Derivada do Vetor de Estado	79

5.5.1	Análise de Estabilidade Robusta de Sistemas Livres com Múltiplas Não Linearidades e Incertezas Politópicas	83
5.5.2	Projeto de Controlador Robusto com $u(t) = -K\dot{x}(t)$, Múltiplas Não linearidades e Incertezas Politópicas	84
5.5.3	Exemplo 3: Suspensão ativa do assento de um carro com uma não linearidade, incertezas politópicas, restrições na taxa de decaimento e na norma do controlador.	88
5.5.4	Exemplo 4: Suspensão ativa do assento de um carro com duas não linearidades e com incertezas politópicas, restrições na taxa de decaimento e na norma do controlador.	98
6	Conclusões e Perspectivas para Pesquisas Futuras	108
	Referências	110
	Apêndice A – Demonstração do Complemento de Schur (COVACIC, 2006)	114
	Apêndice B – Publicações	116
B.1	Artigos em Congressos Nacionais	116
B.2	Artigos em Periódicos Internacionais	116

Introdução

Na teoria de Controle Moderno existe uma vasta literatura sobre o conceito de realimentação de sistemas (OGATA, 2003; DORF; BISHOP, 2001; CHEN, 1999). Sabe-se que as técnicas mais usadas para realimentar os sistemas são as realimentações da saída e das variáveis de estado. Porém, é conhecido da teoria de controle que a realimentação da derivada das variáveis de estado (ou, realimentação derivativa) pode ser muito útil e em alguns casos, essencial para a obtenção do desempenho desejado (LEWIS; SYRMOS, 1991). A existência de problemas práticos, nos quais é mais fácil observar as derivadas das variáveis de estado do que as variáveis de estado, torna interessante o controle com a realimentação derivativa. Por exemplo, em sistemas mecânicos que usam acelerômetros como sensores. Sua importância reside no fato de que a partir da aceleração é possível obter a velocidade com boa precisão, porém a complexidade aumenta e a precisão diminui quando se trata de se obter o deslocamento (ABDELAZIZ; VALÁŠEK, 2004). Devido a este fato, os sinais usados para realimentar esses sistemas são: as acelerações e as velocidades. Justamente as derivadas das velocidades e das posições, respectivamente, que podem representar as variáveis de estado do sistema mecânico.

A utilização de acelerômetros nas indústrias tem se tornado cada vez maior, devido ao seu baixo custo. A aplicação de acelerômetros ocorre em vários sistemas, como por exemplo: em sistemas de suspensão de carros (REITHMEIER; LEITMANN, 2003), em controle de oscilações de sistemas mecânicos (ABDELAZIZ; VALÁŠEK, 2004), no controle de vibrações dos componentes de aterrissagem de aviões (KWAK; WASHINGTON; YEDAVALLI, 2002) e no controle de cabos de pontes suspensas (DUAN; NI; KO, 2005).

O desenvolvimento de métodos similares aos já existentes, para a realimentação das variáveis de estado tem chamado a atenção de alguns pesquisadores nesta área. Para explorar o uso de realimentação derivativa, (CARDIM et al., 2007b) apresentaram uma nova forma de se obter o ganho de um controlador para a realimentação da derivada das variáveis de estado a partir de um ganho adequado de realimentação das variáveis de estado, projetado com técnicas amplamente disponíveis. Em (ABDELAZIZ; VALÁŠEK, 2004) os autores desenvolveram uma fórmula similar à de Ackermann, para sistemas lineares com uma entrada e uma saída, sob realimentação derivativa. A metodologia apresentada em (CARDIM et al., 2007b) permite que as técnicas clássicas de controle usando a realimentação das variáveis de estado possam

ser diretamente aplicadas no projeto de realimentação da derivada das variáveis de estado. Tais técnicas serão descritas no início deste trabalho.

A formulação da solução de problemas de controle através da solução de Desigualdades Matriciais Lineares (LMI, do inglês, *Linear Matrix Inequalities*) teve início com Lyapunov (BOYD et al., 1994). Nesta dissertação, os resultados apresentados quanto à análise de estabilidade e o projeto de controladores são reduzidos a problemas descritos por LMIs. A teoria de Lyapunov (BOYD et al., 1994) abriu as portas para o desenvolvimento de pesquisas que com o decorrer do tempo, cresceriam muito. Ela forneceu uma gama de possibilidades quanto à abordagem em análise de estabilidade robusta de sistemas lineares (LEITE et al., 2004), controle robusto $\mathcal{H}_2$ (APKARIAN; TUAN; BERNUSSOU, 2001), sistemas não lineares (TEIXEIRA; ASSUNÇÃO; AVELLAR, 2003) e projeto de controladores robustos de sistemas não lineares sujeitos a falhas estruturais, com realimentação derivativa (SILVA, 2009).

Adicionalmente, projetos baseados em LMIs podem ser, em geral, estendidos para tratar sistemas que possuem incertezas nos parâmetros da planta ou que estejam sujeitos a falhas estruturais (ISERMANN; BALLÉ, 1997).

Devido a essas flexibilidades, as LMIs têm sido cada vez mais usadas para resolver diversos tipos de problemas de controle (SILVA et al., 2009ab, 2009ba; ASSUNÇÃO; FARIA; TEIXEIRA, ; ASSUNÇÃO et al., 2007; FARIA et al., 2009b).

A utilização de pacotes computacionais tornou-se imprescindível no projeto baseado em LMIs, possibilitando-se assim resolver problemas que até então não possuíam solução conhecida. Esses pacotes computacionais especializados (GAHINET et al., 1995) possibilitaram que as LMIs tornassem ferramentas importantes para a teoria de controle. Exemplos de pacotes disponíveis, são o LMISol (OLIVEIRA; FARIAS; GEROMEL, 1997) ou os pacotes "LMI control toolbox"(GAHINET et al., 1995) e "SeDuMi"(STURM, 1999) do MATLAB. Nesses programas, a solução ótima, quando existe, é encontrada usando algoritmos com tempo de convergência polinomial.

Ressalta-se um aspecto importante no projeto de controladores robustos, explorados neste trabalho: no decorrer das simulações observou-se que o tempo de estabelecimento do sistema considerado, pode ser consideravelmente alto para as especificações no projeto, tornando-se assim necessária a utilização de mecanismos que diminuam este tempo. Um destes mecanismos abordados neste trabalho, é a taxa de decaimento, ou seja, a aplicação de novas restrições às LMIs utilizadas, através da inserção de mais um parâmetro nas LMIs, chamado aqui de ϕ .

Uma contribuição relevante é apresentada no Capítulo 3. Neste capítulo são propostos re-

sultados sobre a estabilizabilidade e rejeição de distúrbios com realimentação da derivada do vetor de estado. As condições de observabilidade e estabilizabilidade de uma classe de sistemas lineares e invariantes no tempo, nos quais a saída é a derivada do vetor de estado, são analisadas com detalhes e relacionada com a invertibilidade da matriz A . O ponto chave deste estudo reside na interpretação da derivada do vetor de estado $\dot{x}(t)$ como a saída disponível do sistema $y(t)$. Resultados conclusivos sobre estabilizabilidade, observabilidade e rejeição distúrbios de plantas lineares e invariantes no tempo com saída igual à derivada do vetor de estado culminaram em publicações no XVIII Congresso Brasileiro de Automática, Bonito-MS, 2010, (MOREIRA et al.,), e na revista *Mathematical Problems Engineering*, DOI:10.1155/2010/123751 (MOREIRA et al., 2010).

Posteriormente, apresentam-se resultados sobre a estabilidade robusta utilizando realimentação derivativa, de uma classe de sistemas lineares sem incertezas e/ou incertos, sujeitos a perturbações, que são funções não lineares e descontínuas no tempo. As perturbações são incertas mas limitadas e satisfazem uma desigualdade quadrática. Uma vantagem desta nova abordagem é que o controlador derivativo projetado estabiliza o sistema e, ao mesmo tempo, maximiza a classe de perturbações incertas que podem ser toleradas pelo sistema estabilizado. O método proposto considera também a existência de falhas estruturais e parâmetros incertos. Um dos objetivos da dissertação foi mostrar como uma solução para tal problema complexo pode ser obtida através da teoria de estabilidade de Lyapunov e da aplicação de ferramentas eficientes utilizando LMI.

Apresentação da Dissertação

As seções deste trabalho se apresentam da seguinte forma:

- Capítulo 1: Conceitos necessários ao desenvolvimento teórico no decorrer deste trabalho;
- Capítulo 2: Resultados de projeto de controladores com realimentação derivativa via LMI;
- Capítulo 3: Resultados sobre observabilidade, estabilizabilidade e rejeição de distúrbios de sistemas lineares utilizando realimentação derivativa. O comportamento do sistema diante da adição de distúrbios na entrada do sistema é ilustrado através de exemplo;
- Capítulo 4: Técnica existente no tratamento de controle robusto de sistemas não lineares com incertezas variantes no tempo;
- Capítulo 5: Resultados sobre a estabilidade com restrições na taxa de decaimento e na norma de ganho do controlador de sistemas não lineares com incertezas politópicas utilizando

realimentação derivativa. Tais resultados são ilustrados através de quatro exemplos.

- Conclusões e Perspectivas para Pesquisas Futuras.
- Referências Bibliográficas.
- Apêndice A: Demonstração do Complemento de Schur.
- Apêndice B: Publicações.

1 Conceitos Fundamentais

O objetivo deste capítulo é apresentar alguns conceitos fundamentais que são utilizados nesta dissertação. Inicialmente apresentamos as condições de observabilidade e a definição de zeros de transmissão. Em seguida apresentamos o Complemento de Schur, que é uma ferramenta importante para o desenvolvimento de todo o estudo.

1.1 Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

Considere o seguinte sistema controlável, linear e invariante no tempo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$. O projeto de controladores com a realimentação da derivada do vetor de estado, consiste em encontrar uma matriz constante $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tal que o sistema (1.1), realimentado com a entrada

$$u(t) = -K\dot{x}(t). \quad (1.2)$$

seja assintoticamente estável.

De (1.1) e (1.2), o sistema pode então ser reescrito da seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = (I + BK)^{-1}Ax(t), \quad \text{considerando } \det(I + BK) \neq 0. \quad (1.3)$$

1.2 Propriedades

Propriedade 1.1. (SLOTINE; LI, 1991) Para toda matriz Z não simétrica ($Z \neq Z^T$), se $Z + Z^T < 0$, então Z é invertível.

1.3 Condições de Observabilidade

Condições sobre observabilidade e controlabilidade são abordadas em (CHEN, 1999). Tais condições são importantes para conclusões sobre estabilidade e instabilidade de sistemas lineares realimentados.

Definição 1.1. (CHEN, 1999) O sistema linear (1.1) é dito observável se para qualquer condição inicial desconhecida, existir um número finito $t_1 > 0$ tal que o conhecimento da entrada $u(t)$ e da saída $y(t)$ no intervalo $t \in [0, t_1]$ é suficiente para determinar o vetor de estado inicial $x(0)$. Caso contrário, o sistema é dito não observável.

Teorema 1.1. (CHEN, 1999) As seguintes condições são equivalentes

(i) O par de dimensão n (isto é, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$)(A, C) é observável;

(ii) A matriz $n \times n$

$$W_0(t) = \int_0^t e^{A\tau} C^T C e^{A\tau} d\tau$$

é não singular para todo $t > 0$;

(iii) A matriz de observabilidade $nq \times n$,

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

tem posto n (posto das linhas completo).

(iv) A matriz $(n+q) \times n$,

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}$$

tem posto das linhas completo para todo autovalor λ de A ;

(v) Se, adicionalmente, todos os autovalores de A têm parte real negativa, então a única solução de

$$A^T W_0 + W_0 A = -C^T C$$

é positiva definida. A solução é chamada de Gramiano de Observabilidade e pode ser dada

por

$$W_o = \int_0^\infty e^{A\tau} C^T C e^{A\tau} d\tau.$$

As condições (i) e (iii) do teorema serão utilizadas no próximo capítulo para obtenção de resultados sobre sistemas lineares invariantes no tempo com realimentação derivativa.

1.4 Desigualdade de Sylvester

Dada a matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e o vetor $y \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, existe uma solução $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ para $Ax = y$, se e somente se y pertencer ao espaço de A , ou seja

$$\text{posto}(A) = \text{posto}([A \ y])$$

sendo que $[A \ y]$ é uma matriz $m \times (n + 1)$.

Se B é uma matriz $n \times n$ não singular, tem-se

$$\text{posto}(A) + \text{posto}(B) - n = \text{posto}(A) \leq \text{posto}(AB) \leq \min(\text{posto}(A), n) \leq \text{posto}(A)$$

Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Então

$$\text{posto}(AC) = \text{posto}(A) \ ; \ \text{posto}(DA) = \text{posto}(A)$$

para quaisquer matrizes $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$ não singulares. O posto de uma matriz não se altera ao ser multiplicada à esquerda ou à direita por uma matriz não singular.

1.5 Zeros de Transmissão

Os zeros de transmissão podem ser definidos através da realização mínima de $\hat{G}(s)$. Considere $\{A, B, C, D\}$ qualquer realização mínima de dimensão n de uma matriz própria racional $\hat{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \in \mathbb{R}^{q \times p}$, com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{q \times p}$. Então, os zeros de transmissão são os valores de $s = \lambda \in \mathbb{C}$, tais que (COVACIC, 2006)

$$\text{posto} \begin{bmatrix} \lambda I - A & B \\ -C & D \end{bmatrix} < n + \min(p, q).$$

1.6 Teorema do Valor Inicial (TVI) e Teorema do Valor Final (TVF)

Os teoremas do valor inicial (TVI) e do valor final (TVF) permitem que se descubra o valor inicial $x(0^+)$ e o valor final $x(\infty)$ de sinais $x(t)$ cujas Transformadas de Laplace $X(s)$ são conhecidas (OGATA, 2003).

- Teorema do Valor Inicial (TVI)

$$x(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s).$$

- Teorema do Valor Final (TVF)

$$x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s).$$

se todas as raízes do denominador de $sX(s)$ apresentarem parte real negativa.

1.7 Complemento de Schur

O Complemento de Schur é um método que possibilita converter um conjunto de desigualdades não lineares convexas em LMIs, que quando factíveis, podem ser facilmente resolvidas com softwares disponíveis (FERON; APKARIAN; GAHINET, 1996; OLIVEIRA; FARIAS; GEROMEL, 1997) A ideia básica é a seguinte: a LMI

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (1.4)$$

sendo que $Q(x) = Q^T(x)$, $R(x) = R^T(x)$ e $S(x)$ têm uma dependência afim de x , é equivalente a:

$$R(x) > 0, \quad Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S^T(x) > 0. \quad (1.5)$$

Em outras palavras, o conjunto de desigualdades acima pode ser representado pela LMI inicial. Assim podemos representar

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} R(x) > 0 \\ Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S^T(x) > 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} R(x) & S^T(x) \\ S(x) & Q(x) \end{bmatrix} > 0. \quad (1.6)$$

A demonstração do Complemento de Schur pode ser encontrada no Apêndice deste trabalho.

Maiores detalhes sobre o Complemento de Schur podem ser encontrados em (BOYD et al., 1994).

1.8 Sistemas Descritores

Sistemas descritores podem ser encontrados na modelagem de vários problemas de engenharia, por exemplo, em circuitos elétricos ou robótica (BUNSE-GERSTNER; MEHRMANN; NICHOLS, 1999). A realimentação derivativa vem sendo bastante utilizada por pesquisadores para o projeto de controladores de sistemas descritores (LEWIS; SYRMOS, 1991; DUAN; NI; KO, 2005; CARDIM et al., 2008).

Considere o sistema descritor definido da seguinte forma:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.7)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Se E é invertível, então o sistema (1.7) é equivalente a um sistema linear na forma padrão.

$$\dot{x}(t) = A_F x(t) + B_F u(t), \text{ sendo } A_F = E^{-1}A, \ B_F = E^{-1}B.$$

O processo em que se consegue transformar o sistema (1.7) para o formato padrão é chamado de *processo de padronização*. Os sistemas em que é possível efetuar essa transformação, ($\det(E) \neq 0$), são chamados de sistemas padronizáveis. Considerando a lei de controle dada por:

$$u(t) = -K\dot{x}(t). \quad (1.8)$$

De (1.7) e (1.8) tem-se que

$$\dot{x}(t) = (E + BK)^{-1}Ax(t) = A_E x(t), \quad A_E = (E + BK)^{-1}A, \quad (1.9)$$

se $(E + BK)$ for invertível.

2 *Projetos de Controladores com a Realimentação da Derivada do Vetor de Estado*

Muitas pesquisas vêm sendo feitas utilizando a realimentação da derivada do vetor de estado, abordando aspectos como falhas estruturais, incertezas politópicas, taxa de decaimento, restrição no ganho do controlador, entre outros (ABDELAZIZ; VALÁŠEK, 2004; TEIXEIRA et al., 2009; ASSUNÇÃO et al., 2007).

2.1 Resultados Obtidos com a Realimentação Derivativa

Na literatura vários autores trabalham com a realimentação do vetor de estado, porém visto a utilização da realimentação da derivada do vetor de estado ser muito interessante e útil em muitos casos, vários trabalhos abordando a utilização de ambos os temas vem a se destacar nas pesquisas. Em (CARDIM et al., 2009a) os autores propuseram para sistemas descritores um método para trabalhar com realimentação derivativa a partir da realimentação usual do vetor de estado. Vejamos alguns resultados interessantes que serão úteis no decorrer deste trabalho.

Lema 2.1. *Considere a matriz $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$, com $\text{posto}(Z) = n$ e autovalores iguais a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Então, os autovalores de Z^{-1} são os seguintes: $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$.*

Teorema 2.1. *Defina as matrizes: $A_n = A^{-1}E$ e $B_n = A^{-1}B$ e suponha que (A_n, B_n) é controlável. Seja K_d a matriz de ganho de realimentação, tal que, $\{\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\}$ são os pólos do sistema de malha fechada*

$$\begin{cases} \dot{x}_n(t) &= A_n x_n(t) + B_n u_n(t), \\ u_n(t) &= -K_d x_n(t), \end{cases} \quad (2.1)$$

sendo que $\lambda_i \in \mathbb{C}$ e $\lambda_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, são arbitrariamente especificados. Então para este ganho K_d , $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ são os pólos do sistema controlado com a realimentação derivativa (1.3) com $K = K_d$.

Prova: (CARDIM et al., 2009a) ■

2.2 Resultados Obtidos com a Realimentação Derivativa via LMI.

Nesta seção são apresentados resultados que utilizaram a realimentação da derivada do vetor de estado, também conhecida como realimentação derivativa do vetor de estados. Esses resultados (FARIA, 2005; FARIA et al., 2009b, 2009c; CARDIM et al., 2008) foram importantes para o contínuo desenvolvimento de pesquisas na área.

Considere o sistema linear invariante no tempo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (2.2)$$

e a lei de controle

$$u(t) = -K\dot{x}(t). \quad (2.3)$$

Note que o sistema controlado (2.2) e (2.3) pode ser representado por

$$\dot{x}(t) = (I + BK)^{-1}Ax(t) \quad (2.4)$$

se $(I + BK)$ é invertível. Em particular quando abordados os sistema descritores tome o sistema da seguinte forma

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.5)$$

que com a lei de controle (2.3) pode ser representado por

$$\dot{x}(t) = (E + BK)^{-1}Ax(t), \quad (2.6)$$

supondo $(E + BK)$ invertível.

Lema 2.2. *Suponha que o sistema (2.2) não tenha pólos na origem (isto é, $\det(A) \neq 0$). Então, o sistema (2.4) é estabilizável com lei de controle (2.3), se e somente se, existe uma matriz simétrica Q e uma matriz Y satisfazendo as LMIs:*

$$AQ + QA^T + AY^T B^T + BYA^T < 0, \quad Q > 0.$$

Quando as LMIs acima são factíveis, um ganho do controlador que estabiliza o sistema é dado por $K = YQ^{-1}$ e $\det(I + BK) \neq 0$.

Prova: (FARIA, 2005) ■

Teorema 2.2. *Supondo que o sistema (2.2) não possui pólos na origem (isto é, $\det(A) \neq 0$), o sistema (2.6) é estabilizável com a lei de controle (2.3), se e somente se, existe uma matriz simétrica $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tais que:*

$$AQE^T + EQA^T + BYA^T + AY^T B^T < 0, \quad Q > 0.$$

Neste caso o ganho do controlador pode ser obtido com:

$$K = YQ^{-1}$$

e adicionalmente, $\det(I + BK) \neq 0$.

Prova: (FARIA, 2005) ■

Condição de Estabilidade com Restrição na Taxa de Decaimento

Em (BOYD et al., 1994), a taxa de decaimento de um sistema linear é definida como o maior número real positivo ϕ tal que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\phi t} \|x(t)\| = 0,$$

para toda solução $x(t)$ do sistema, $t \geq 0$.

Teorema 2.3. *Considere que o sistema (2.6) não apresenta pólos na origem (ou, $\det(A) \neq 0$). Se existirem uma matriz simétrica $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tais que:*

$$Q > 0, \quad \begin{bmatrix} AQE^T + EQA^T + BYA^T + AY^T B^T & EQ + BY \\ QE^T + Y^T B^T & -Q/2\phi \end{bmatrix},$$

então o sistema é estabilizável com taxa de decaimento maior que ϕ , e um ganho para o controlador pode ser obtido como descrito abaixo:

$$K = YQ^{-1}$$

e ainda, $\det(I + BK) \neq 0$.

Prova: (FARIA, 2005) ■

3 *Novos Resultados sobre Estabilizabilidade e Rejeição de Distúrbios com Realimentação da Derivada do Vetor de Estado*

Nesta seção serão estudados métodos de projeto de controladores para uma classe de sistemas lineares invariantes no tempo, nas quais a saída do sistema é a derivada do vetor de estado. Condições necessárias e suficientes para garantir a observabilidade e a estabilidade do sistema serão apresentadas. Os resultados serão ilustrados através de um exemplo. Contribuições relevantes deste capítulo proporcionaram publicações no XVIII Congresso Brasileiro de Automação, Bonito-MS, 2010 (MOREIRA et al.,) e na revista *Mathematical Problems Engineering* (MOREIRA et al., 2010).

3.1 Introdução

No controle de sistemas lineares, representados na forma de variáveis de estado através das matrizes $\{A, B, C, D\}$, o projeto da realimentação da derivada do vetor de estado usualmente supõe que $\det(A) \neq 0$ (ABDELAZIZ; VALÁŠEK, 2004; ASSUNÇÃO et al., 2007a; CARDIM et al., 2007b, 2008; SILVA et al., 2009aa, 2009bb; FARIA; ASSUNÇÃO; TEIXEIRA, 2009; FARIA et al., 2010; TEIXEIRA et al., 2006; ARAÚJO; CASTRO; SANTOS, 2009). Neste trabalho, esta condição é analisada com detalhes e relacionada com a observabilidade e estabilidade do sistema realimentado. O ponto chave desse estudo foi a interpretação da derivada do vetor de estado $\dot{x}(t)$ como a saída disponível do sistema $y(t)$.

3.2 Observabilidade e Estabilizabilidade de Sistemas com Realimentação Derivativa

Lema 3.1. *Considere o sistema linear e invariante no tempo, com entrada $u(t)$ e saída $y(t)$ dado por:*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad (3.1)$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $x(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ e $u(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$. Então esse sistema não é observável, se e somente se, $\det(A) = 0$.

Prova: Note que as matrizes do sistema (3.1) são as seguintes: $\{A, B, C, D\} = \{A, B, A, B\}$. Então a matriz de observabilidade do sistema (3.1) é dada por (CHEN, 1999):

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ A^2 \\ A^3 \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n \\ A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^{n-1} \end{pmatrix} A. \quad (3.2)$$

Logo, de (3.2) e da Desigualdade de Sylvester, o sistema (3.1) é não observável, se e somente se,

$$\text{posto}(\mathcal{O}) = \text{posto} \left(\begin{pmatrix} I_n \\ A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^{n-1} \end{pmatrix} A \right) = \text{posto}(A) < n,$$

o que é equivalente à condição $\det(A) = 0$. ■

O lema a seguir apresenta resultados adicionais referentes aos pólos e sobre a observabilidade do sistema (3.1), quando $\det(A) = 0$.

Lema 3.2. *Suponha que a matriz A no sistema (3.1) é tal que $\det(A) = 0$ e $\text{posto}(A) = q < n$. Então o sistema (3.1) pode ser decomposto em dois subsistemas, sendo um deles não observável e com $n - q$ pólos em $s = 0$.*

Prova: Como $\det(A) = 0$ e $\text{posto}(A) = q < n$, pode-se representar a matriz A da seguinte forma:

$$A = RA_0, \quad (3.3)$$

sendo que $R \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $A_0 \in \mathbb{R}^{q \times n}$ e $\text{posto}(A_0) = q$. Defina agora $A_{01} \in \mathbb{R}^{n-q \times n}$, tal que $\text{posto}(A_{01}) = n - q$ e $A_0 A_{01}^T = 0$. Então, realizando a transformação linear

$$z = Tx, \quad T = \begin{bmatrix} A_{01} \\ [A_0 \ A_0^T]^{-1} A_0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

no sistema (3.1), note que

$$\begin{cases} \dot{z} &= (TAT^{-1})z + TBu, \\ y &= (AT^{-1})z + Bu, \end{cases} \quad (3.5)$$

sendo que

$$T^{-1} = [A_{01}^T [A_{01} A_{01}^T]^{-1} A_0^T]. \quad (3.6)$$

De (3.3)-(3.6) observe que

$$AT^{-1} = RA_0 [A_{01}^T [A_{01} A_{01}^T]^{-1} A_0^T] = [0 \ RA_0 A_0^T]. \quad (3.7)$$

Assim, de (3.5)-(3.7) e definindo-se $z^T = [z_a^T \ z_b^T]$, $z_a \in \mathbb{R}^{n-q}$ e $z_b \in \mathbb{R}^q$, tem-se que

$$y = AT^{-1}z + Bu = RA_0 A_0^T z_b + Bu. \quad (3.8)$$

Agora, de (3.3)-(3.6) note que

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{bmatrix} \dot{z}_a \\ \dot{z}_b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{01} \\ [A_0 A_0^T]^{-1} A_0 \end{bmatrix} RA_0 \begin{bmatrix} A_{01} \\ [A_0 A_0^T]^{-1} A_0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} z_a \\ z_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{01} \\ [A_0 A_0^T]^{-1} A_0 \end{bmatrix} Bu \\ &= \begin{bmatrix} 0 & A_{01} RA_0 A_0^T \\ 0 & [A_0 A_0^T]^{-1} A_0 RA_0 A_0^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_a \\ z_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{01} B \\ [A_0 A_0^T]^{-1} A_0 B \end{bmatrix} u. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Logo, de (3.9) observe que $\dot{z}_b$ não depende de z_a , assim como em (3.8), y não depende de z_a .

Portanto o subsistema com vetor de estado z_a é não observável.

Agora, de (3.9) tem-se que

$$\dot{z}_a = A_{01} RA_0 A_0^T z_b + A_{01} Bu, \quad (3.10)$$

onde nota-se a existência $n - q$ pólos em $s = 0$ e a demonstração do lema está concluída. ■

O Lema 3.3, dado na Seção 3.3, aborda a estabilização do sistema (3.1).

3.3 Rejeição de Distúrbios com Realimentação Derivativa

São apresentados resultados sobre a rejeição de distúrbios constantes, somados à entrada da planta, considerando uma realimentação derivativa do vetor de estado da planta. Inicialmente será demonstrada a existência de zeros em $s = 0$ na planta (3.1), quando $\det(A) \neq 0$.

Lema 3.3. Quando $\det(A) = 0$, o sistema (3.1) não é estabilizável através da realimentação da saída y .

Prova: Como $\det(A) = 0$, considere que $\text{posto}(A) = q < n$. Então, aproveitando o equacionamento realizado na prova do Lema 3.2, considere uma realimentação arbitrária da saída, $u = f(y)$. De (3.8) note que:

$$u = f(y) = f(RA_0A_0^T z_b + Bu). \quad (3.11)$$

Assim, u depende somente de z_b : $u = u(z_b)$.

Considere que $u = f(y)$ é tal que a existência de um eventual *looping* algébrico resulte em uma expressão bem definida para $u = g(z_b)$. Por exemplo, se $u = -Ky$ e $\det(I + KB) \neq 0$, então de (3.8) tem-se que:

$$u = -Ky = -KRA_0A_0^T z_b - KBu, \quad (3.12)$$

$$u = -(I + KB)^{-1} KRA_0A_0^T z_b. \quad (3.13)$$

Agora, de (3.10) observe que o subsistema com vetor de estado z_a da planta controlada (3.9) pode ser representado na seguinte forma:

$$\dot{z}_a = A_{01}RA_0A_0^T z_b + A_{01}Bu(z_b). \quad (3.14)$$

Desta forma, como de (3.9) $\dot{z}_b$ não depende de $z_a \in \mathbb{R}^{n-q}$, então o subsistema (3.14) é instável pois apresenta $n - q$ pólos em $s = 0$, independentemente do sinal de controle u descrito em (3.11). ■

3.4 Rejeição de Distúrbios Adicionados à Entrada da Planta

São apresentados resultados sobre a rejeição de distúrbios constantes, somados à entrada da planta, considerando uma realimentação derivativa do vetor de estado. Inicialmente será demonstrada a existência de pelo menos um zero em $s = 0$ na planta (3.1), quando $\det(A) \neq 0$.

Lema 3.4. Quando $\det(A) \neq 0$, o sistema (3.1) apresenta zeros de transmissão na origem.

Prova: Considere o sistema (3.1), dado por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = \dot{x}(t) \end{cases}$$

Aplicando a Transformada de Laplace e considerando as condições iniciais nulas, tem-se:

$$\begin{aligned} sX(s) &= AX(s) + BU(s) \\ sX(s) - AX(s) &= BU(s) \\ (sI - A)X(s) &= BU(s) \\ X(s) &= (sI - A)^{-1}BU(s) \end{aligned} \tag{3.15}$$

e

$$Y(s) = sX(s). \tag{3.16}$$

Substituindo (3.15) em (3.16) temos

$$Y(s) = s(sI - A)^{-1}BU(s).$$

Então, como $\det(A) \neq 0$, temos garantida a existência de A^{-1} . Logo,

$$s(sI - A)^{-1}B|_{s=0} = -sA^{-1}B = 0 \tag{3.17}$$

o que comprova a existência de zeros em $s = 0$. ■

A existência de zeros em $s = 0$ quando $\det(A) \neq 0$, demonstrada no Lema 3.4, dificulta a rejeição de distúrbios constantes somados à entrada da planta. O Lema 3.5 comprova esse fato.

Lema 3.5. Considere a planta com realimentação derivativa, com entrada $u(t)$, saída $y(t)$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B(u(t) + \xi), \\ y(t) = \dot{x}(t) = Ax(t) + B(u(t) + \xi), \end{cases} \tag{3.18}$$

sendo que $\det(A) \neq 0$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t)$ e $\xi \in \mathbb{R}^m$ e ξ é um distúrbio desconhecido mas constante. Suponha que o ponto de equilíbrio do sistema (3.18), com o controlador

$$u(t) = -K\dot{x}(t), \quad \det(I + BK) \neq 0 \tag{3.19}$$

é globalmente assintoticamente estável, quando $\xi = 0$.

Então,

$$x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = -A^{-1}B\xi \quad (3.20)$$

e independe de K .

Prova: De (3.18) e (3.19) note que

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B(-K\dot{x}(t) + \xi), \\ (I + BK)\dot{x}(t) &= Ax(t) + B\xi, \\ \dot{x}(t) &= (I + BK)^{-1}Ax(t) + (I + BK)^{-1}B\xi. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Aplicando a transformada de Laplace em (3.21), note que

$$X(s) = (sI - (I + BK)^{-1}A)^{-1} ((I + BK)^{-1}B\xi s^{-1} + x(0)). \quad (3.22)$$

Como o sistema realimentado (3.18) e (3.19) é globalmente estável, então $\det(sI - (I + BK)^{-1}A)$ tem todas raízes com parte real negativa.

Então, de (3.22) e pelo Teorema do Valor Final (TVF), vide item (1.4) do Capítulo 1:

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = -A^{-1}B\xi. \quad (3.23)$$

A prova está concluída. ■

O Lema 3.5 mostra que o valor de regime $x(\infty)$, dado em (3.20), independe da matriz do controlador K , definido em (3.19). Este fato ilustra a dificuldade de atenuar a influência de ξ em $x(\infty)$, para planta da forma dada em (3.18) com a lei de controle (3.19).

Felizmente, a principal aplicação da realimentação derivativa é no controle de vibrações em sistemas mecânicos, nos quais em geral os distúrbios apresentam valores médios nulos.

Apresentaremos agora um exemplo para ilustrar a teoria e comprovar os resultados obtidos, descritos nos Lemas 3.1 – 3.5.

3.4.1 Exemplo 1: Sistema massa-mola com amortecedor, com distúrbios adicionados à entrada da planta

Considere o sistema massa-mola com amortecedor, mostrado na Figura 3.1. Neste exemplo, a ideia foi ilustrar os resultados propostos no Lema 5. Este sistema é um amortecedor de vibração controlado, com o intuito de reduzir as oscilações das massas m_1 e m_2 . Os coeficientes de elasticidade das molas 1 e 2 são dados por k_1 e k_2 , respectivamente, e b_1 é o coeficiente

de amortecimento. Neste caso, o sistema contém duas entradas de controle, $u_1(t)$ e $u_2(t)$, e dois distúrbios desconhecidos mas constantes, ξ_1 e ξ_2 , que são aplicados nas massas m_1 e m_2 , respectivamente. Este sistema é descrito pelas seguintes equações (CARDIM et al., 2007b):

$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1(t) + b_1 (\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)) + k_1 y_1(t) = u_1(t) + \xi_1, \\ m_2 \ddot{y}_2(t) + b_1 (\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)) + k_2 y_2(t) = u_2(t) + \xi_2. \end{cases} \quad (3.24)$$

A forma de espaço de estados do sistema mecânico, ilustrado na Figura 3.1 pode ser representado pela equação (3.25), considerando as variáveis de estado $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]^T$, onde $x_1(t) = y_1(t)$, $x_2(t) = \dot{y}_1(t)$, $x_3(t) = y_2(t)$, $x_4(t) = \dot{y}_2(t)$, $u(t) = [u_1(t) \ u_2(t)]^T$, $\xi = [\xi_1 \ \xi_2]^T$.

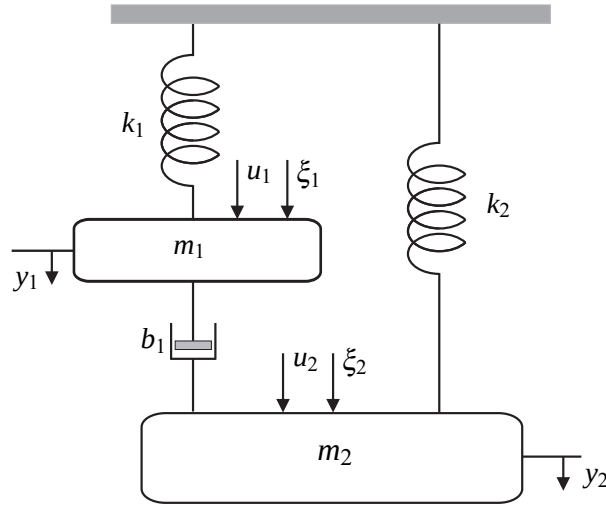


Figura 3.1: Sistema Multivariável (MI) massa-mola com amortecedor.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-k_1}{m_1} & \frac{-b_1}{m_1} & 0 & \frac{b_1}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{b_1}{m_2} & \frac{-k_2}{m_2} & \frac{-b_1}{m_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Considere a lei de controle com realimentação derivativa (3.19). Então, o sistema controlado (3.18), (3.19) e (3.25) pode ser descrito por (3.21) e o ganho K será obtido usando o Teorema 2.1.

Teorema 1 (CARDIM et al., 2008)

Defina as matrizes: $A_n = A^{-1}E$ e $B_n = A^{-1}B$ e suponha que (A_n, B_n) é controlável. Seja K_d a matriz de ganho de realimentação, tal que, $\{\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\}$ são os pólos do sistema de

malha fechada

$$\begin{cases} \dot{x}_n(t) = A_n x_n(t) + B_n u_n(t), \\ u_n(t) = -K_d x_n(t), \end{cases}$$

onde $\lambda_i \in \mathbb{C}$ e $\lambda_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, são arbitrariamente especificados. Então para este ganho K_d , $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ são os pólos do sistema controlado com a realimentação derivativa.

Considera-se então as seguintes matrizes:

$$A_n = A^{-1} \quad \text{e} \quad B_n = -A^{-1}B, \quad \text{onde} \quad E = I_n. \quad (3.26)$$

Então de (3.25), (3.26) e $m_1 = 10 \text{ kg}$, $m_2 = 30 \text{ kg}$, $k_1 = 2.5 \text{ kN/m}$, $k_2 = 1.5 \text{ kN/m}$ e $b_1 = 30 \text{ Ns/m}$, tem-se que:

$$A_n = \begin{bmatrix} -0,012 & -0,004 & 0,012 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,02 & 0 & -0,02 & -0,02 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_n = \begin{bmatrix} 0,4 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0,6667 \times 10^{-3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Note que (A_n, B_n) é controlável.

O objetivo do Teorema 2.1 foi projetar o ganho da realimentação da derivada do vetor de estado, utilizando o projeto do ganho de realimentação do vetor de estado, que pode ser projetado utilizando-se técnicas convencionais.

Por exemplo, suponha os seguintes pólos de malha fechada desejados para o sistema controlado (3.21):

$$\lambda_1 = -10, \quad \lambda_2 = -15, \quad \lambda_{3,4} = -2 \pm 10i.$$

Considere agora o seguinte sistema em malha fechada definido por (CARDIM et al., 2008):

$$\dot{x}_n(t) = A_n x(t) + B_n u_n(t), \quad (3.28)$$

sendo que

$$u_n(t) = -K x_n(t). \quad (3.29)$$

De (3.28) e (3.29) tem-se que:

$$\dot{x}_n(t) = (A_n - B_n K) x_n(t). \quad (3.30)$$

Então projete a matriz de ganho K tal que o sistema (3.30) apresente pólos iguais a λ_1^{-1} , λ_2^{-1} , λ_3^{-1} , λ_4^{-1} . Note que de (3.26) com $\lambda_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3, 4$,

$$(A_n - B_n K)^{-1} = (A^{-1} + A^{-1} B K)^{-1} = (A^{-1} (I + B K))^{-1} = (I + B K)^{-1} A \quad (3.31)$$

e de (3.30) e Lema 2.1 (CARDIM et al., 2008), λ_1 , λ_2 , λ_3 e λ_4 são os autovalores de $(I + BK)^{-1}A$. Entretanto, λ_1 , λ_2 , λ_3 e λ_4 também são os pólos do sistema controlado (3.18), (3.19) e (3.25), descrito em (3.21).

Do Teorema 2.1 (CARDIM et al., 2008), os pólos do novo sistema em malha fechada com realimentação do vetor de estados (3.30), com A_n e B_n dado em (3.25) são os seguintes :

$$\lambda_1^{-1} = -0,1000, \quad \lambda_2^{-1} = -0.0667, \quad \lambda_{3,4}^{-1} = -0.0192 \pm 0.0962i.$$

Portanto, com esses parâmetros, pode-se facilmente obter através do comando *place* do MATLAB, a matriz de ganho de realimentação K_0 :

$$K_0 = \begin{bmatrix} 178.9532 & -6.4647 & 323.3542 & 19.8478 \\ -79.6370 & -11.4321 & 152.3204 & -26.1863 \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

tal que, para $K = K_0$, os pólos de (3.30) são iguais a λ_1^{-1} , λ_2^{-1} , λ_3^{-1} e λ_4^{-1} .

Tabela 3.1: *Distúrbios e ganhos do controlador do sistema simulado.*

Tempo (s)	ξ_1 [N]	ξ_2 [N]	K	$x_e = -A^{-1}B[\xi_1 \quad \xi_2]^T$
0 $\vdash$ 20	0	0	K_0	$[\quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$
20 $\vdash$ 40	300	0	K_0	$[0, 12 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$
40 $\vdash$ 60	0	-300	K_0	$[\quad 0 \quad 0 \quad -0,2 \quad 0]^T$
60 $\vdash$ 80	300	0	0	$[0, 12 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$
80 $\vdash$ 100	0	-300	0	$[\quad 0 \quad 0 \quad -0,2 \quad 0]^T$

Note que, para $K = 0$, os pólos do sistema dados em (3.21) são iguais a:

$$\lambda_{1,2} = -0,14962 \pm 15,6198i, \quad \lambda_{3,4} = -0,5038 \pm 7,1074i.$$

A Tabela 3.1 acima, mostra os valores de ξ_1 , ξ_2 e K nos intervalos de tempo correspondentes, utilizados nas simulações digitais do sistema controlado (3.21) e (3.25), e mostram os resultados da simulações do sistema controlado (3.18), (3.19) e (3.25), que podem ser dados

por (3.21), com a condição inicial

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \\ 0,1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e as outras condições são descritas na Tabela 3.1. Adotando valores para $\xi = [\xi_1 \ \xi_2]^T = [300 \ 0]^T$, em $t \in [20, 40)$ e $t \in [60, 80)$, então do Lema 5, (3.20) e (3.25) tem-se que:

$$x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = -A^{-1}B\xi = \begin{bmatrix} 0,12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e para $\xi = [\xi_1 \ \xi_2]^T = [0 \ -300]^T$, em $t \in [40, 60)$ e $t \in [80, 100)$ então do Lema 5, (3.20) e (3.25) tem-se que

$$x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = -A^{-1}B\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A Figura 3.2 mostra a resposta transitória do sistema, onde a cor azul ilustra o comportamento do deslocamento da massa m_1 , já a cor vermelha ilustra o comportamento do deslocamento da massa m_2 .

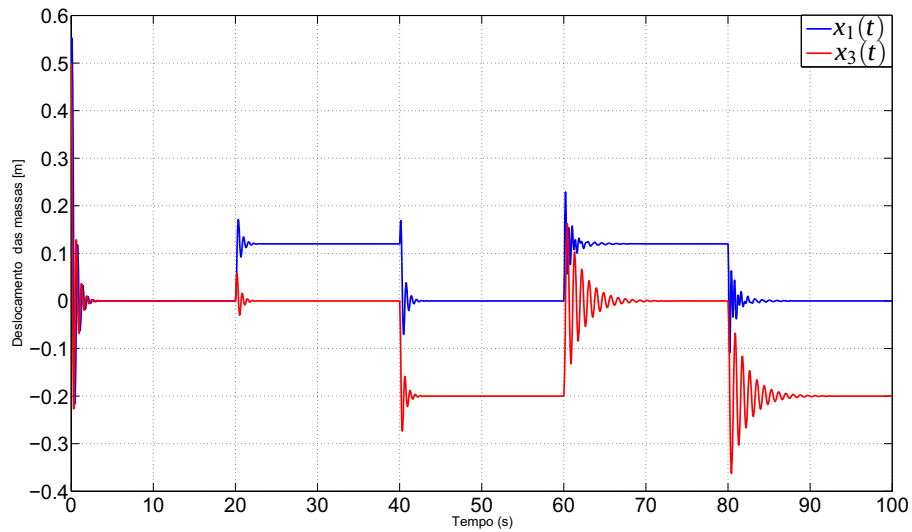


Figura 3.2: Resposta transitória do sistema controlado (3.18), com $x(0) = [0,1 \ 0 \ 0,1 \ 0]^T$.

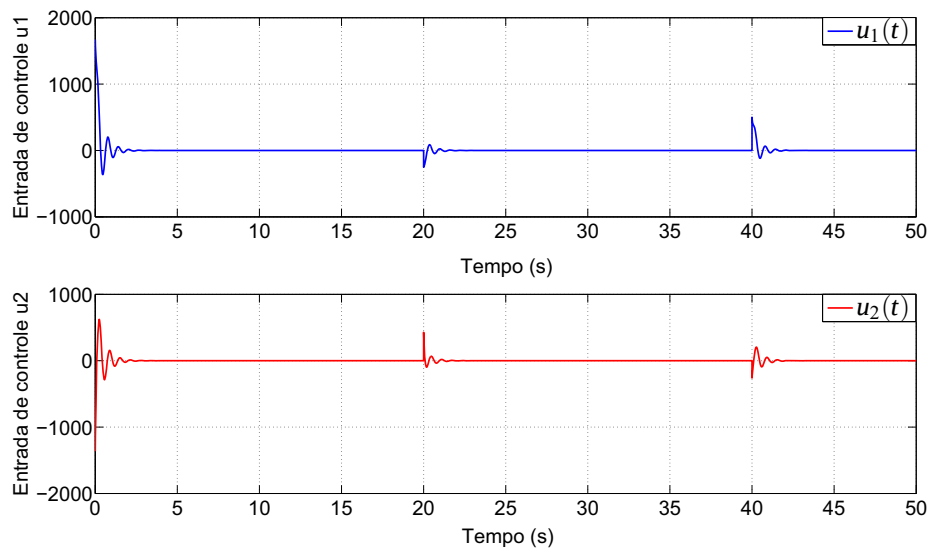


Figura 3.3: Simulação do sinal de controle do sistema (3.18) com $x(0) = [0, 1 \ 0 \ 0, 1 \ 0]^T$.

3.4.2 Conclusões Parciais

Foram apresentados resultados conclusivos sobre plantas $\{A, B, C, D\}$ cuja saída é a derivada do vetor de estado e $\det(A) = 0$: a planta é não observável e não estabilizável realimentando-se a saída. Esse fato mostra a impossibilidade do controle desta planta, realimentando-se a saída da mesma, quando $\det(A) = 0$. Adicionalmente, foi mostrado que esta planta, quando $\det(A) \neq 0$, possui zeros na origem, o que dificulta a rejeição de distúrbios constantes, somados à entrada da planta. Mais especificamente, foi demonstrado que esta rejeição é impossível, realimentando-se a saída com controladores estáticos. Este é um assunto para pesquisas futuras. Este capítulo apresentou alguns resultados conclusivos sobre a observabilidade, estabilizabilidade e rejeição de distúrbios de plantas lineares e invariantes no tempo com a saída igual à derivada do vetor de estado. Tais resultados podem ser úteis na análise e projeto de sistemas de controle com realimentação da derivada do vetor de estado.

Como foi dito no início do capítulo, os resultados propostos neste capítulo foram bem recebidos pela comunidade científica através de publicação no XVIII Congresso Brasileiro de Automática, Bonito-MS/2010 (MOREIRA et al.,) e na revista *Mathematical Problems Engineering* (MOREIRA et al., 2010).

4 *Técnica Existente de Controle Robusto de Sistemas Não Lineares Baseada em LMIs*

A realimentação de sistemas é a base da teoria de controle e a técnica comumente utilizada é a realimentação do vetor de estado (DORF; BISHOP, 2001; OGATA, 2003; CHEN, 1999). Vários autores estudaram a estabilização robusta através da estabilidade quadrática, usando para isso a realimentação linear, $u(t) = Kx(t)$ (D.D.ŠILJAK; STIPANOVIĆ, 2000; D.D.ŠILJAK; A.I.ZEČEVIĆ, 2005; SILVA; BOTTURA, 2010). Em (D.D.ŠILJAK; STIPANOVIĆ, 2000) os autores exploraram a flexibilidade proporcionada pelas LMIs e utilizando a realimentação linear do vetor de estado, obtiveram resultados interessantes, mais pontualmente na área de sistemas interconectados e controle descentralizado, utilizando entre várias técnicas, o *procedimento S*.

4.1 *Análise de Estabilidade para Sistemas Livres*

Considere o sistema não linear invariante no tempo dado por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + h(t, x) \quad (4.1)$$

sendo que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado do sistema, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz do sistema, sendo A Hurwitz, $h(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ representa a parte não linear do sistema (D.D.ŠILJAK; STIPANOVIĆ, 2000). Uma suposição fundamental sobre a função não linear $h(t, x)$ é que ela é incerta e em seu domínio ($\mathbb{R}^{n+1}$), ela satisfaz a seguinte desigualdade quadrática

$$h^T(t, x)h(t, x) \leq \alpha^2 x^T(t)H^T Hx(t), \quad \alpha > 0. \quad (4.2)$$

Note que para qualquer matriz H dada, a desigualdade (4.2) define uma classe de funções localmente contínuas

$$H_\alpha = \{h : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n | h^T h \leq \alpha^2 x^T H^T Hx\}.$$

A classe H_α é formada por funções que satisfazem $h(t, 0) = 0$ no seu domínio de continuidade, e $x = 0$ é um ponto de equilíbrio do sistema (4.1).

Definição 4.1. (D.D.ŠILJAK; STIPANOVIĆ, 2000) O sistema (4.1) é robustamente estável com grau α se o ponto de equilíbrio $x = 0$ é globalmente assintoticamente estável para todo $h(t, x) \in H_\alpha$.

Teorema 4.1. (D.D.ŠILJAK; STIPANOVIĆ, 2000) O sistema (4.1) é robustamente estável com grau α se o problema de otimização é factível:

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma \\ \text{s.a} \quad & Y > 0 \\ & \begin{bmatrix} AY + YA^T & I & YH^T \\ I & -I & 0 \\ HY & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

sendo que $\gamma = \alpha^{-2} > 0$, $Y = \tau P^{-1}$ e $\tau > 0$.

Prova: A prova deste teorema pode ser encontrada em (D.D.ŠILJAK; STIPANOVIĆ, 2000).

4.2 Projeto de Controlador com Lei de Controle $u(t) = Kx$

Quando a parte linear da planta não é estável, os autores em (D.D.ŠILJAK; STIPANOVIĆ, 2000) procuraram então trabalhar com a lei de controle linear, $u(t) = Kx(t)$, com o objetivo de obter condições para a estabilização do sistema, e ao mesmo tempo, maximizar a tolerância a perturbações não lineares incertas. Considere agora o sistema dado por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + h(t, x) \quad (4.4)$$

sendo que $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é uma matriz constante, $u(t) \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é lei de controle da realimentação linear dada por

$$u(t) = Kx(t) \quad (4.5)$$

e $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é a matriz de ganho do controlador. Supõe-se que o par (A, B) é estabilizável. O sistema em malha fechada é dado por

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + h(t, x). \quad (4.6)$$

Definição 4.2. (D.D.ŠILJAK; STIPANOVIĆ, 2000) O sistema (4.4) é robustamente estabilizável pela lei de controle (4.5) se o sistema (4.6) for robustamente estável com grau α .

Teorema 4.2. (D.D.ŠILJAK; STIPANOVIĆ, 2000) O sistema (4.4) é robustamente estabilizável com grau α pela lei de controle (4.5) se o seguinte problema de otimização é factível:

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma \\ \text{s.a} \quad & Y > 0 \\ & \begin{bmatrix} AY + YA^T + BL + L^T B^T & I & YH^T \\ I & -I & 0 \\ HY & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

sendo que $\gamma = \alpha^{-2} > 0$, $Y = \tau P^{-1}$, $\tau > 0$ e $K = LY^{-1}$.

Visando uma melhora no desempenho no projeto do controlador, alguns índices de desempenho foram propostos neste sentido, como por exemplo, uma restrição no controlador K , com a finalidade de buscar limitar a norma da matriz de ganho K e ao mesmo tempo, garantir uma margem satisfatória α , obtendo assim o maior conjunto possível H_α .

Podemos restringir a norma do ganho do controlador por meio de restrições em L e Y^{-1} (CHEN; YU; CHU, 1999) visto que em (D.D.ŠILJAK; STIPANOVIĆ, 2000) utiliza-se $K = LY^{-1}$ (BERNUSSOU; PERES; GEROMEL, 1989). Suponhamos que exista um escalar K tal que,

$$\|K^T K\| < K_0,$$

$$\|K^T K\| = \|(Y^{-T} L^T)(LY^{-1})\| = \|Y^{-1}(L^T L)Y^{-1}\|.$$

Suponha agora que exista um escalar $K_L \in \mathbb{R}$, tal que, $L^T L < K_L I$.

$$\|Y^{-1}(L^T L)Y^{-1}\| < \|Y^{-1} K_L Y^{-1}\|.$$

Analogamente, tome o escalar $K_Y \in \mathbb{R}$, tal que, $Y^{-1} < K_Y I$. Então

$$\|Y^{-1} K_L Y^{-1}\| < \|K_Y K_L K_Y\|,$$

$$\|K^T K\| < \|K_L K_Y^2\|.$$

Portanto tome $\|K_L K_Y^2\| = K_0$.

Utilizando o Complemento de Schur em $L^T L < K_L I$ temos que

$$K_L I - L^T (I)^{-1} L > 0.$$

Sendo equivalente à seguinte LMI

$$\begin{bmatrix} -K_L I & L^T \\ L & -I \end{bmatrix} < 0, \text{ ou } \begin{bmatrix} K_L I & L^T \\ L & I \end{bmatrix} > 0. \quad (4.8)$$

Analogamente, consideremos a seguinte restrição $Y^{-1} < K_Y I$ temos que

$$K_Y I - IY^{-1}I > 0, \text{ logo}$$

$$\begin{bmatrix} -K_Y I & I \\ I & -Y \end{bmatrix} < 0, \text{ ou } \begin{bmatrix} K_Y I & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0. \quad (4.9)$$

Assim o problema de otimização com restrição na norma do controlador é dado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma + K_L + K_Y \\ \text{s.a} \quad & Y > 0 \\ & \begin{bmatrix} AY + YA^T + BL + L^T B^T & I & YH^T \\ & I & -I & 0 \\ & HY & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \\ & \begin{bmatrix} -K_L I & L^T \\ L & -I \end{bmatrix} < 0 \\ & \begin{bmatrix} K_Y I & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

sendo que $\gamma = \alpha^{-2} > 0$, $K_L > 0$, $K_Y > 0$, $Y = \tau P^{-1}$, $\tau > 0$ e $K_0 = K_L K_Y^2$.

5 *Técnica Proposta de Controle Robusto de Sistemas Não Lineares Baseada em LMIs*

O objetivo deste capítulo foi encontrar condições para a estabilidade de sistemas não lineares utilizando somente uma realimentação estática da derivada do vetor de estado. Os resultados propostos são aplicáveis a sistemas não lineares com várias entradas e várias saídas (*Multi-Input e Multi-Output (MIMO)*) e são obtidos como soluções de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs). Uma peculiaridade quando se trabalha com LMIs é a vantagem de possibilitar a inclusão de restrições adicionais, tais como restrição na norma da matriz de ganho, incertezas paramétricas e condições que impliquem em atrasos no tempo (*delays*). Devido a estas flexibilidades, as LMIs tem se tornado uma importante ferramenta para resolver diferentes tipos de problemas de controle (ASSUNÇÃO et al., 2007d; ASSUNÇÃO; ANDREA; TEIXEIRA, 2007b; FARIA; ASSUNÇÃO; TEIXEIRA, 2009). O uso do software MATLAB (GAHINET et al., 1995) ou do software LMISol (OLIVEIRA; FARIAS; GEROMEL, 1997), tornaram a análise e o projeto de controladores para plantas nominais, facilmente generalizados para aqueles nas quais a planta possui incertezas paramétricas e/ou está sujeita a falhas estruturais (ISERMANN; BALLÉ, 1997). Uma importante contribuição dos resultados propostos aqui em relação aos que são encontrados na vasta literatura em controle robusto (D.D.ŠILJAK; STIPANOVIĆ, 2000; REITHMEIER; LEITMANN, 2003), é que procurou-se determinar uma lei de controle, com a realimentação estática da derivada do vetor de estado, que estabilize o sistema não linear e, ao mesmo tempo, maximize a classe de perturbações (funções não lineares) incertas, considerando também sistemas não lineares com incertezas politópicas (sujeitos a falhas estruturais).

5.1 Controle Robusto de Sistemas Não Lineares

Todo modelo matemático de um sistema físico é na verdade uma aproximação do sistema físico real. Consequentemente, o modelo matemático obtido pode apresentar diferentes tipos de incertezas, decorrentes de dinâmicas não modeladas, incertezas paramétricas, ruídos, linearização, entre outras mais. É de extrema importância que as incertezas sejam levadas em conta na análise e projeto de controladores para o sistema. Para isso é conveniente representar o modelo físico por um sistema incerto, por exemplo, construído a partir do modelo matemático ideal e considerando incertezas adicionadas a este modelo.

Porém várias dificuldades surgem ao se trabalhar com sistemas não lineares incertos. Uma das principais dificuldades encontradas é como modelar e descrever as incertezas e não linearidades do sistema. Este processo de busca de solução para o controle de sistemas envolvendo o sistema nominal e uma família de incertezas em torno dele, é denominado Controle Robusto. No Controle Robusto busca-se também minimizar o efeito de certas variáveis do sistema devido às perturbações externas a este, por exemplo, ruídos, mudanças de temperatura, rajadas de vento, entre outros. Com o aprimoramento das pesquisas e utilização das LMIs e com o surgimento de pacotes computacionais eficientes, uma excelente ferramenta na procura de soluções para os mais diversos problemas de controle se apresenta disponível para o avanço das pesquisas. Uma das grandes virtudes da abordagem com LMI é a de possibilitar o tratamento simultâneo de vários requisitos de performance e robustez.

Em muitas situações na teoria de controle, o projetista não está apenas interessado em assegurar a estabilidade de um sistema. Muitas vezes além da estabilidade existem outros requisitos para o sistema de controle, como por exemplo: se a velocidade de convergência (tempo de estabelecimento) para o ponto de equilíbrio é rápida o suficiente para atender as especificações; se a norma do sinal de controle é suficientemente pequena; se os sinais externos indesejados influenciam o mínimo possível o sinal de saída de um sistema. Por isso um ponto interessante do estudo apresentado aqui reside no fato de que busca-se a estabilidade do sistema explorado, atendendo os requisitos de desempenho, e ao mesmo tempo, busca-se maximizar a classe de perturbações incertas que o sistema pode tolerar, preservando a sua estabilidade.

5.2 Sistemas com Múltiplas Não Linearidades

Em algumas situações, as não linearidades presentes nas plantas podem ser representadas como a soma de termos não lineares que dependem de variáveis distintas. Um exemplo deste

fato é a suspensão ativa do assento de um carro, estudado neste capítulo. Esta foi a motivação para o estudo a seguir.

Consideremos o seguinte sistema não linear invariante no tempo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + h(t, x(t)) \quad (5.1)$$

sendo que

$$h(t, x(t)) = \sum_{i=1}^n h_i(t, x(t)).$$

Lema 5.1. *Sejam $h_i, h_k : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ funções não lineares localmente contínuas. Então*

$$h_i^T(t, x)h_k(t, x) + h_k^T(t, x)h_i(t, x) \leq h_i^T(t, x)h_i(t, x) + h_k^T(t, x)h_k(t, x) \quad (5.2)$$

para $i, k = 1, \dots, n$ e $i \neq k$.

Prova: É sabido que toda matriz multiplicada por sua transposta é positiva semi-definida. Logo temos que

$$(h_i(t, x) - h_k(t, x))^T (h_i(t, x) - h_k(t, x)) \geq 0,$$

e realizando a multiplicação entre as funções note que

$$(h_i^T(t, x)h_i(t, x)) - (h_i^T(t, x)h_k(t, x)) - (h_k^T(t, x)h_i(t, x)) + (h_k^T(t, x)h_k(t, x)) \geq 0.$$

Então, separamos em membros diferentes da desigualdade os termos com produtos entre funções diferentes

$$-(h_i^T(t, x)h_k(t, x)) - (h_k^T(t, x)h_i(t, x)) \geq -(h_i^T(t, x)h_i(t, x)) - (h_k^T(t, x)h_k(t, x)),$$

e logo temos que

$$(h_i^T(t, x)h_k(t, x)) + (h_k^T(t, x)h_i(t, x)) \leq (h_i^T(t, x)h_i(t, x)) + (h_k^T(t, x)h_k(t, x)).$$

sendo que $i, k = 1, \dots, n$ e $i \neq k$. $\square$

Lema 5.2. *Sejam $h, h_i, h_k : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ funções não lineares localmente contínuas. Se $h(t, x) = \sum_{i=1}^n h_i(t, x)$, então*

$$h^T(t, x)h(t, x) \leq n \sum_{i=1}^n (h_i^T(t, x)h_i(t, x)). \quad (5.3)$$

Prova: Sejam $h(t, x)$, $h_i(t, x)$ e $h_k(t, x)$ funções não lineares localmente contínuas. Como

$h(t, x) = \sum_{i=1}^n h_i(t, x)$, temos que

$$\begin{aligned} h^T(t, x)h(t, x) &= h_1^T(t, x)h_1(t, x) + h_1^T(t, x)h_2(t, x) + \dots + h_1^T(t, x)h_n(t, x) + \\ &\quad h_2^T(t, x)h_1(t, x) + h_2^T(t, x)h_2(t, x) + \dots + h_2^T(t, x)h_n(t, x) + \\ &\quad \vdots \\ &\quad h_n^T(t, x)h_1(t, x) + h_n^T(t, x)h_2(t, x) + \dots + h_n^T(t, x)h_n(t, x). \end{aligned}$$

Logo

$$h^T(t, x)h(t, x) = \sum_{i=j=1}^n h_i^T(t, x)h_j(t, x) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n h_i^T(t, x)h_j(t, x)$$

sendo que

$$\begin{aligned} \sum_{i=j=1}^n h_i^T(t, x)h_j(t, x) &= h_1^T(t, x)h_1(t, x) + h_2^T(t, x)h_2(t, x) + \dots + h_n^T(t, x)h_n(t, x), \\ \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n h_i^T(t, x)h_j(t, x) &= h_1^T(t, x)h_2(t, x) + h_1^T(t, x)h_3(t, x) + \dots + h_1^T(t, x)h_n(t, x) + \\ &\quad h_2^T(t, x)h_1(t, x) + h_2^T(t, x)h_3(t, x) + \dots + h_2^T(t, x)h_n(t, x) + \\ &\quad \vdots \\ &\quad h_n^T(t, x)h_1(t, x) + h_n^T(t, x)h_2(t, x) + \dots + h_n^T(t, x)h_{n-1}(t, x). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Podemos reescrever (5.4) da seguinte forma

$$\begin{aligned} h^T(t, x)h(t, x) &= h_1^T(t, x)h_1(t, x) + h_2^T(t, x)h_2(t, x) + \dots + h_n^T(t, x)h_n(t, x) + \\ &\quad h_1^T(t, x)h_2(t, x) + h_2^T(t, x)h_1(t, x) + \dots + h_1^T(t, x)h_n(t, x) + h_n^T(t, x)h_1(t, x) + \\ &\quad h_2^T(t, x)h_3(t, x) + h_3^T(t, x)h_2(t, x) + \dots + h_2^T(t, x)h_n(t, x) + h_n^T(t, x)h_2(t, x) + \\ &\quad h_3^T(t, x)h_4(t, x) + h_4^T(t, x)h_3(t, x) + \dots + h_3^T(t, x)h_n(t, x) + h_n^T(t, x)h_3(t, x) + \\ &\quad \vdots \\ &\quad h_{n-1}^T(t, x)h_n(t, x) + h_n^T(t, x)h_{n-1}(t, x). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Utilizando o Lema 5.1 em (5.5) tem-se que

$$\begin{aligned} h^T(t, x)h(t, x) &\leq h_1^T(t, x)h_1(t, x) + h_2^T(t, x)h_2(t, x) + \dots + h_n^T(t, x)h_n(t, x) + \\ &\quad (n-1)(h_1^T(t, x)h_1(t, x)) + h_2^T(t, x)h_2(t, x) + \dots + h_n^T(t, x)h_n(t, x) + \\ &\quad (n-2)(h_2^T(t, x)h_2(t, x)) + h_3^T(t, x)h_3(t, x) + \dots + h_n^T(t, x)h_n(t, x) + \\ &\quad (n-3)(h_3^T(t, x)h_3(t, x)) + h_4^T(t, x)h_4(t, x) + \dots + h_n^T(t, x)h_n(t, x) + \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$h_{n-1}^T(t, x)h_{n-1}(t, x) + h_n^T(t, x)h_n(t, x).$$

Assim, tem-se

$$h^T(t, x)h(t, x) \leq nh_1^T(t, x)h_1(t, x) + nh_2^T(t, x)h_2(t, x) + \dots + nh_{n-1}^T(t, x)h_{n-1}(t, x) + nh_n^T(t, x)h_n(t, x).$$

Portanto

$$\begin{aligned} h^T(t, x)h(t, x) &\leq n \left(\sum_{i=1}^n h_i^T(t, x)h_i(t, x) \right) \\ &\leq n(h_1(t, x)^T h_1(t, x) + h_2(t, x)^T h_2(t, x) + \dots + h_n(t, x)^T h_n(t, x)) \\ &\leq n(h_1(t, x)^T h_1(t, x)) + n(h_2(t, x)^T h_2(t, x)) + \dots + n(h_n(t, x)^T h_n(t, x)). \end{aligned}$$

□

5.2.1 Conjunto H_α para Múltiplas Não Linearidades

Do Lema 5.2 temos que

$$h^T(t, x)h(t, x) \leq n \left(\sum_{i=1}^n h_i^T(t, x)h_i(t, x) \right).$$

Considerando que $h_i(t, x)^T h_i(t, x) \leq \alpha_i^2 x^T(t) H_i^T H_i x(t)$, temos que

$$h^T(t, x)h(t, x) \leq n \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 x^T(t) H_i^T H_i x(t) \right).$$

Definição 5.1. Sejam $h_i(t, x)$ funções não lineares localmente contínuas. As funções $h_i(t, x) \in H_{\bar{\alpha}_i}$ se a seguinte desigualdade for satisfeita

$$H_{\bar{\alpha}_i} = \left\{ h : h^T(t, x)h(t, x) \leq n \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 x^T(t) H_i^T H_i x(t) \right) \right\} \quad (5.6)$$

sendo que, $\bar{\alpha}_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, $h(t, x) = \sum_{i=1}^n h_i(t, x)$ e n é o número de termos não lineares que compõem $h(t, x)$.

5.2.2 Sistema Não Forçado com Múltiplas Não Linearidades

Nesta vertente, considere agora o seguinte sistema não linear invariante no tempo dado por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + h(t, x(t)) \quad (5.7)$$

sendo que

$$h(x(t)) = \sum_{i=1}^n h_i(t, x(t)) \text{ e } h_i(t, x)^T h_i(t, x) \leq \alpha_i^2 x^T(t) H_i^T H_i x(t),$$

para $i = 1, \dots, n$.

Teorema 5.1. *O sistema (5.7) é robustamente estável com grau $(\bar{\alpha})$ se o problema de otimização é factível:*

$$\begin{aligned} \min \quad & \bar{\gamma} \\ \text{s.a} \quad & P > 0 \\ & \begin{bmatrix} A^T P + PA & P & H_1^T & \dots & H_n^T \\ P & -I & 0 & \dots & 0 \\ H_1 & 0 & -I\gamma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_n & 0 & 0 & \dots & -I\gamma_n \end{bmatrix} < 0, \end{aligned} \quad (5.8)$$

sendo que

$$\bar{\gamma} = \sum_{i=1}^n \gamma_i, \quad \gamma_i = (n\alpha_i^2)^{-1} > 0, \quad i = 1, \dots, n \text{ e } P = P^T.$$

Prova: Considere a seguinte candidata a função quadrática de Lyapunov

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t), \text{ onde } P > 0. \quad (5.9)$$

Pelo segundo método de Lyapunov, vamos impor que

$$\dot{V}(x) = x^T(A^T P + PA)x + x^T Ph + h^T Px < 0, \quad x \neq 0. \quad (5.10)$$

Da Definição 5.1, considere a desigualdade quadrática

$$h^T(t, x)h(t, x) \leq n \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 x^T(t) H_i^T H_i x(t) \right) \Rightarrow n \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 x^T(t) H_i^T H_i x(t) \right) - h^T(t, x)h(t, x) \geq 0, \quad (5.11)$$

que pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} x^T & h^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 H_i^T H_i & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ h \end{bmatrix} \geq 0.$$

Uma condição suficiente para (5.10), considerando (5.11) é que

$$\dot{V}(x) \leq x^T (A^T P + PA)x + x^T Ph + h^T Px - h^T h + n \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 x^T H_i^T H_i x \right) < 0. \quad (5.12)$$

Podemos reescrever (5.12) da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} x^T & h^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T P + PA + n \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 H_i^T H_i & P \\ P & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ h \end{bmatrix} < 0$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + n \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 H_i^T H_i & P \\ P & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (5.13)$$

Decomponha (5.13) como

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + n \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 H_i^T H_i & P \\ P & -I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T P + PA & P \\ P & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} n\alpha_1^2 I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n\alpha_2^2 I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & n\alpha_n^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_n \end{bmatrix} < 0. \quad (5.14)$$

Então, aplicando o Complemento de Schur em (5.14)

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & P & H_1^T & \dots & H_n^T \\ P & -I & 0 & \dots & 0 \\ H_1 & 0 & -I\gamma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_n & 0 & 0 & \dots & -I\gamma_n \end{bmatrix} < 0, \quad (5.15)$$

sendo que $\gamma_i = (n\alpha_i^2)^{-1} > 0$ para $i = 1, \dots, n$.

No intuito de encontrar a maior classe possível para $H_{\bar{\alpha}}$, com $\bar{\alpha} = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ deve-se maximizar $\bar{\alpha}$ o que, de certa maneira, implica em minimizar $\bar{\gamma}$. Este objetivo pode ser atingido, resolvendo-

se a seguinte LMI em função de X e $\bar{\gamma}$:

$$\begin{aligned} \min \quad & \bar{\gamma} \\ \text{s.a} \quad & P > 0 \\ & \begin{bmatrix} A^T P + PA & P & H_1^T & \dots & H_n^T \\ P & -I & 0 & \dots & 0 \\ H_1 & 0 & -I\gamma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_n & 0 & 0 & \dots & -I\gamma_n \end{bmatrix} < 0, \end{aligned}$$

sendo $\bar{\gamma} = \sum_{i=1}^n \gamma_i$, $\gamma_i = (n\alpha_i^2)^{-1} > 0$ para $i = 1, \dots, n$ e $P = P^T$. $\square$

5.2.3 Projeto de Controlador com Realimentação da Derivada do Vetor de Estado e Múltiplas Não Linearidades

Considere o seguinte sistema não linear invariante no tempo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + h(t, x(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (5.16)$$

com a lei de controle

$$u(t) = -K\dot{x}(t). \quad (5.17)$$

Logo, supondo que $(I + BK)$ é invertível, então de (5.16) e (5.17) pode-se reescrever o sistema da seguinte forma

$$\dot{x}(t) = (I + BK)^{-1}Ax(t) + (I + BK)^{-1}h(t, x(t)) \quad (5.18)$$

sendo

$$h(x(t)) = \sum_{i=1}^n h_i(t, x(t)).$$

Definição 5.2. O sistema (5.16) é robustamente estabilizável pela lei de controle (5.17) se o sistema (5.18) é robustamente estável com grau $\bar{\alpha}$.

Teorema 5.2. O sistema (5.16) é robustamente estabilizável pela lei de controle (5.17) se o

problema de otimização é factível:

$$\begin{aligned} \min \quad & \bar{\gamma} \\ \text{s.a} \quad & X > 0 \\ & \begin{bmatrix} A(X+BM)^T + (X+BM)A^T & I & (X+BM)H_1^T & \dots & (X+BM)H_n^T \\ I & -I & 0 & \dots & 0 \\ H_1(X+BM)^T & 0 & -I\gamma_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_n(X+BM)^T & 0 & 0 & 0 & -I\gamma_n \end{bmatrix} < 0, \end{aligned} \quad (5.19)$$

sendo $\bar{\gamma} = \sum_{i=1}^n \gamma_i$, $\gamma_i = (n\alpha_i^2)^{-1} > 0$ para $i = 1, \dots, n$ e $X = X^T$.

Além disso, quando (5.19) é factível, então a matriz de ganho de realimentação da derivada do vetor de estado é dada por

$$K = MX^{-1}, \quad (5.20)$$

sendo que $(I + BK)$ é invertível.

Prova: De (5.16) e (5.17) temos que

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B(-K\dot{x}) + h(x), \\ &= (I + BK)^{-1}Ax(t) + (I + BK)^{-1}h(x), \end{aligned}$$

supondo $\det(I + BK) \neq 0$ e sendo

$$h(x(t)) = \sum_{i=1}^n h_i(t, x(t)).$$

Derivando a função candidata a função de Lyapunov (5.9) e substituindo (5.18) na mesma, temos a seguinte igualdade

$$\dot{V}(x) = x^T (P(I + BK)^{-1}A + A^T(I + BK)^{-T}P)x + x^T P(I + BK)^{-1}h + h^T(I + BK)^{-T}Px. \quad (5.21)$$

Da Definição 5.1 tem-se:

$$n \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 x^T H_i^T H_i x \right) - h^T(x)h(x) \geq 0, \quad (5.22)$$

Somando-se (5.22) ao membro direito da igualdade (5.21) tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) \leq & x^T (P(I + BK)^{-1}A + A^T(I + BK)^{-T}P)x + \\ & x^T P(I + BK)^{-1}h(x) + h(x)^T(I + BK)^{-T}Px + \end{aligned}$$

$$n \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 x^T H_i^T H_i x \right) - h^T(x) h(x). \quad (5.23)$$

Então, (5.23) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\dot{V}(x) \leq \begin{bmatrix} x^T & h^T \end{bmatrix} \varphi \begin{bmatrix} x \\ h \end{bmatrix} < 0$$

sendo que φ é dada por

$$\begin{bmatrix} P(I+BK)^{-1}A + A^T(I+BK)^{-T}P + n \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 H_i^T H_i \right) & P(I+BK)^{-1} \\ (I+BK)^{-T}P & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (5.24)$$

Considere $P^{-1} = X$, $KX = M$ em (5.24)

$$\begin{bmatrix} (X+BM)^{-1}A + A^T(X+BM)^{-T} + n \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 H_i^T H_i \right) & (X+BM)^{-1} \\ (X+BM)^{-T} & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (5.25)$$

Multiplicando (5.25) à esquerda e à direita, pelas seguintes matrizes

$$\begin{bmatrix} (X+BM) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} (X+BM)^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

obtem-se:

$$\begin{bmatrix} A(X+BM)^T + (X+BM)A^T + (X+BM)n \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 H_i^T H_i \right) (X+BM)^T & I \\ I & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (5.26)$$

Realizando o Complemento de Schur em (5.26) tem-se:

$$\begin{bmatrix} A(X+BM)^T + (X+BM)A^T & I & (X+BM)H_1^T & \dots & (X+BM)H_n^T \\ I & -I & 0 & \dots & 0 \\ H_1(X+BM)^T & 0 & -I\gamma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_n(X+BM)^T & 0 & 0 & \dots & -I\gamma_n \end{bmatrix} < 0. \quad (5.27)$$

sendo que $\gamma_i = (n\alpha_i^2)^{-1} > 0$ para $i = 1, \dots, n$, e n é o número de termos não lineares que compõe $h(t, x)$.

No intuito de encontrar a maior classe possível para $H_{\bar{\alpha}}$, $\bar{\alpha} = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, deve-se maximizar $\bar{\alpha}$ o que implica em minimizar $\bar{\gamma}$, resolvendo a seguinte LMI em função de X e $\bar{\gamma}$.

Assim pode-se representar (5.27) através do seguinte problema de otimização em X e γ_i

$$\begin{aligned} \min \quad & \bar{\gamma} \\ \text{s.a} \quad & X > 0 \\ & \begin{bmatrix} A(X + BM)^T + (X + BM)A^T & I & (X + BM)H_1^T & \dots & (X + BM)H_n^T \\ I & -I & 0 & \dots & 0 \\ H_1(X + BM)^T & 0 & -I\gamma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_n(X + BM)^T & 0 & 0 & \dots & -I\gamma_n \end{bmatrix} < 0, \end{aligned}$$

sendo que

$$\bar{\gamma} = \sum_{i=1}^n \gamma_i, \quad \gamma_i = (n\alpha_i^2)^{-1} > 0.$$

Além disso, quando (5.81) é factível, a matriz de ganho de realimentação da derivada do vetor de estado é dada por

$$K = MX^{-1}.$$

Finalmente, note que $(I + BK)$ é invertível, pois a condição dada em (5.31) implica que

$$A(X + BM)^T + (X + BM)A^T < 0. \quad (5.28)$$

Considerando que a definição em (5.32), $K = MX^{-1}$, tem-se $M = KX$. Desta forma (5.28) é equivalente a

$$\begin{aligned} A(X + BM)^T + (X + BM)A^T &< 0, \\ AX(I + BK)^T + (I + BK)XA^T &< 0. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Então, utilizando a Propriedade 1.1, (5.29) implica que $Z = (I + BK)XA^T$ é invertível. Desta forma, $(I + BK)$ é invertível, como suposto inicialmente na prova do teorema. $\square$

5.3 Restrição da Taxa de Decaimento para Sistemas com Múltiplas Não Linearidades

Definição 5.3. Em (BOYD et al., 1994), a taxa de decaimento de uma sistema linear é definida como o maior número real positivo ϕ , tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\phi t} \|x(t)\| = 0 \quad (5.30)$$

para toda solução $x(t)$ do sistema, $t \geq 0$.

A restrição na taxa de decaimento pode ser usada para diminuir o tempo de estabelecimento do sistema. O próximo teorema apresenta condições suficientes para que (5.16) tenha taxa de decaimento maior que ϕ .

Teorema 5.3. *O sistema (5.16) é robustamente estabilizável pela lei de controle (5.17) e tem taxa de decaimento maior ou igual a ϕ se o problema de otimização é factível*

$$\begin{aligned} \min \quad & \bar{\gamma} \\ \text{s.a} \quad & X > 0 \\ & \begin{bmatrix} A(X+BM)^T + (X+BM)A^T & I & (X+BM) & (X+BM)H_1^T & \dots & (X+BM)H_n^T \\ I & -I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ (X+BM)^T & 0 & \frac{-X}{2\phi} & 0 & \dots & 0 \\ H_1(X+BM)^T & 0 & 0 & -I\gamma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_n(X+BM)^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -I\gamma_n \end{bmatrix} < 0, \end{aligned} \quad (5.31)$$

sendo que

$$\bar{\gamma} = \sum_{i=1}^n \gamma_i, \quad \gamma_i = (n\alpha_i^2)^{-1} > 0 \text{ e } \phi > 0.$$

Além disso, quando (5.31) é factível, a matriz de ganho de realimentação da derivada do vetor de estado é dada por

$$K = MX^{-1}, \quad (5.32)$$

sendo $(I + BK)$ é invertível.

Prova: Da definição da taxa de decaimento

$$\dot{V}(x) \leq -2\phi V(x). \quad (5.33)$$

Supondo $(I + BK)$ invertível, temos

$$\dot{V}(x) = x^T (P(I + BK)^{-1}A + A^T(I + BK)^{-T}P)x + x^T P(I + BK)^{-1}h + h^T(I + BK)^{-T}Px. \quad (5.34)$$

Da Definição 5.1 tem-se

$$n \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 x^T H_i^T H_i x \right) - h^T(x)h(x) \geq 0. \quad (5.35)$$

Considerando-se (5.33), (5.35) e (5.34), obtêm-se

$$\dot{V}(x) \leq x^T (P(I + BK)^{-1}A + A^T(I + BK)^{-T}P)x +$$

$$x^T P(I+BK)^{-1}h(x) + h(x)^T (I+BK)^{-T}Px + n \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 x^T H_i^T H_i x \right) - h^T(x)h(x) + 2\phi x^T Px. \quad (5.36)$$

Pode-se reescrever (5.36) da seguinte forma, impondo que $\dot{V}(x) < 0$ para $x \neq 0$

$$\dot{V}(x) = \begin{bmatrix} x^T & h^T \end{bmatrix} \varphi \begin{bmatrix} x \\ h \end{bmatrix} < 0,$$

sendo que φ é dada por

$$\begin{bmatrix} P(I+BK)^{-1}A + A^T(I+BK)^{-T}P + n \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 H_i^T H_i \right) + 2\phi P & P(I+BK)^{-1} \\ (I+BK)^{-T}P & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (5.37)$$

Considere $P^{-1} = X$, $KX = M$ em (5.37)

$$\begin{bmatrix} (X+BM)^{-1}A + A^T(X+BM)^{-T} + n \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 H_i^T H_i \right) + 2\phi X^{-1} & (X+BM)^{-1} \\ (X+BM)^{-T} & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (5.38)$$

por (5.38) e considerando $(X+BM) = Q$ obtém-se

$$\begin{bmatrix} AQ^T + QA^T + Qn \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 H_i^T H_i \right) Q^T + Q2\phi X^{-1}Q^T & I \\ I & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (5.39)$$

Para utilizar o Complemento de Schur, deve-se reescrever (5.39) da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} AQ^T + QA^T + Qn \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 H_i^T H_i \right) Q^T & I \\ I & -I \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} Q2\phi X^{-1}Q^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} Q \\ 0 \end{bmatrix} (2\phi X^{-1}) \begin{bmatrix} Q^T & 0 \end{bmatrix}} < 0$$

Assim pelo Complemento de Schur temos

$$\begin{bmatrix} AQ^T + QA^T + Q \left(n \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 H_i^T H_i \right) Q^T & I & Q \\ I & -I & 0 \\ Q^T & 0 & \frac{-X}{2\phi} \end{bmatrix} < 0.$$

Buscando aplicar novamente o Complemento de Schur deve-se reescrever a matriz da seguinte

forma

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} AQ^T + QA^T & I & Q \\ I & -I & 0 \\ Q^T & 0 & \frac{-X}{2\phi} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} Q \left(n \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 H_i^T H_i \right) Q^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{matriz simétrica}} < 0 \\
 & \begin{bmatrix} H_1 Q_1^T \\ \vdots \\ H_n Q_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n\alpha_1^2 I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n\alpha_2^2 I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & n\alpha_n^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 Q_1^T & \dots & H_n Q_n^T \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.40}$$

Assim pelo Complemento de Schur temos que (5.40) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} AQ^T + QA^T & I & Q & QH_i^T \\ I & -I & 0 & 0 \\ Q^T & 0 & \frac{-X}{2\phi} & 0 \\ H_i Q^T & 0 & 0 & (n\alpha_i^2)^{-1} \end{bmatrix} < 0 \tag{5.41}$$

Finalmente, substituindo $Q = (X + BM)$ em (5.41) obtém-se a seguinte expressão matricial

$$\begin{bmatrix} A(X + BM)^T + (X + BM)A^T & I & (X + BM) & (X + BM)H_i^T \\ I & -I & 0 & 0 \\ (X + BM)^T & 0 & \frac{-X}{2\phi} & 0 \\ H_i(X + BM)^T & 0 & 0 & (n\alpha_i^2)^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

Considerando $i = 1, \dots, n$ temos o seguinte problema de otimização

$$\begin{aligned}
 & \min \quad \bar{\gamma} \\
 & \text{s.a} \quad X > 0 \\
 & \begin{bmatrix} A(X + BM)^T + (X + BM)A^T & I & (X + BM) & (X + BM)H_1^T & \dots & (X + BM)H_n^T \\ I & -I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ (X + BM)^T & 0 & \frac{-X}{2\phi} & 0 & \dots & 0 \\ H_1(X + BM)^T & 0 & 0 & -I\gamma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_n(X + BM)^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -I\gamma_n \end{bmatrix} < 0,
 \end{aligned}$$

sendo que

$$\bar{\gamma} = \sum_{i=1}^n \gamma_i, \quad \gamma_i = (n\alpha_i^2)^{-1} > 0 \text{ e } \phi > 0.$$

Além disso, quando o problema de minimização é factível, a matriz de ganho de realimentação da derivada do vetor de estado é dada por

$$K = MX^{-1}.$$

Finalmente, note que $(I + BK)$ é invertível, pois a condição dada em (5.31) implica que

$$A(X + BM)^T + (X + BM)A^T < 0. \quad (5.42)$$

Considerando a definição em (5.32), $K = MX^{-1}$, tem-se $M = KX$. Desta forma (5.42) é equivalente a

$$\begin{aligned} A(X + BM)^T + (X + BM)A^T &< 0, \\ AX(I + BK)^T + (I + BK)XA^T &< 0. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Então, utilizando a Propriedade 1.1, (5.43) implica que $Z = (I + BK)XA^T$ é invertível. Desta forma, $(I + BK)$ é invertível, como suposto inicialmente na prova do teorema. $\square$

5.3.1 Restrição da Norma da Matriz de Ganho do Controlador K

Entre as técnicas que podem ser utilizadas para atender os parâmetros exigidos nos projetos, a restrição da norma da matriz de ganho do controlador é uma importante ferramenta nos projetos de controle.

Teorema 5.4. *O sistema (5.16) é robustamente estabilizável pela lei de controle (5.17) e tem taxa de decaimento maior ou igual a ϕ se o problema de otimização é factível*

$$\begin{aligned} \min \quad & \bar{\gamma} + K_M + K_X \\ \text{s.a} \quad & X > 0 \\ & \begin{bmatrix} A(X + BM)^T + (X + BM)A^T & I & (X + BM) & (X + BM)H_1^T & \dots & (X + BM)H_n^T \\ I & -I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ (X + BM)^T & 0 & \frac{-X}{2\phi} & 0 & \dots & 0 \\ H_1(X + BM)^T & 0 & 0 & -I\gamma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_n(X + BM)^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -I\gamma_n \end{bmatrix} < 0, \\ & \begin{bmatrix} -K_M I & M^T \\ M & -I \end{bmatrix} < 0, \\ & \begin{bmatrix} K_X I & I \\ I & X \end{bmatrix} > 0, \end{aligned} \quad (5.44)$$

sendo que

$$\bar{\gamma} = \sum_{i=1}^n \gamma_i, \quad \gamma_i = (n\alpha_i^2)^{-1} > 0, \quad \phi > 0, \quad K_X > 0 \text{ e } K_M > 0.$$

Além disso, quando (5.44) é factível, a matriz de ganho de realimentação da derivada do vetor de estado é dada por

$$K = MX^{-1}, \quad (5.45)$$

sendo $\|K^T K\| \leq K_X K_M^2$ e $(I + BK)$ invertível.

Prova: A demonstração deste teorema pode ser acompanhada pela prova do Teorema 5.4 acompanhado das LMIs (4.8) e (4.9).

Pesquisadores (FARIA, 2005; SILVA, 2009) utilizaram o exemplo a seguir, desconsiderando as não linearidades presentes nas molas do carro e do assento. Em (SILVA, 2009) os autores abordaram este exemplo utilizando uma não linearidade, quando considerado o coeficiente não linear da elasticidade da mola $k_m(x_1(t))$.

O Exemplo 1 aborda o problema mecânico com uma não linearidade, em $k_1(x_1(t))$, já no Exemplo 2, o mesmo problema é abordado com duas não linearidades, em $k_1(x_1(t))$ e $k_2(x_2(t))$.

5.3.2 Exemplo 1: Suspensão ativa do assento de um carro.

Consideraremos a suspensão ativa do carro dado em (REITHMEIER; LEITMANN, 2003), com duas entradas de controle $u_1(t)$ e $u_2(t)$ mostradas na Figura 5.1. As massas presentes neste modelo são a massa do carro, M_c , e a massa do (assento+motorista), m_s . Vibrações verticais causadas por buracos, lombadas, entre outros obstáculos, podem ser parcialmente atenuadas pelo amortecedor do carro, b_1 , e pela mola do carro k_1 . No entanto, o condutor pode ainda estar sujeito a vibrações indesejáveis. Estas vibrações, novamente, podem ser reduzidas por elementos na suspensão do assento do motorista, como por exemplo: mola, k_2 , e amortecedor, b_2 . Através de mudanças na entrada de controle $u_1(t)$ e $u_2(t)$ (forças externas aplicadas), pode-se obter uma maior amortecimento das vibrações das massas M_c e m_s . Como em (REITHMEIER; LEITMANN, 2003), para ser realizada a realimentação, somente os sinais de aceleração $\ddot{x}_1(t)$ e $\ddot{x}_2(t)$ estão disponíveis, já que podem ser medidos por sensores como acelerômetros. As velocidades $\dot{x}_1(t)$ e $\dot{x}_2(t)$ são estimadas a partir de suas derivadas medidas no tempo e o vetor de estado é definido por $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dot{x}_1(t) \ \dot{x}_2(t)]^T$.

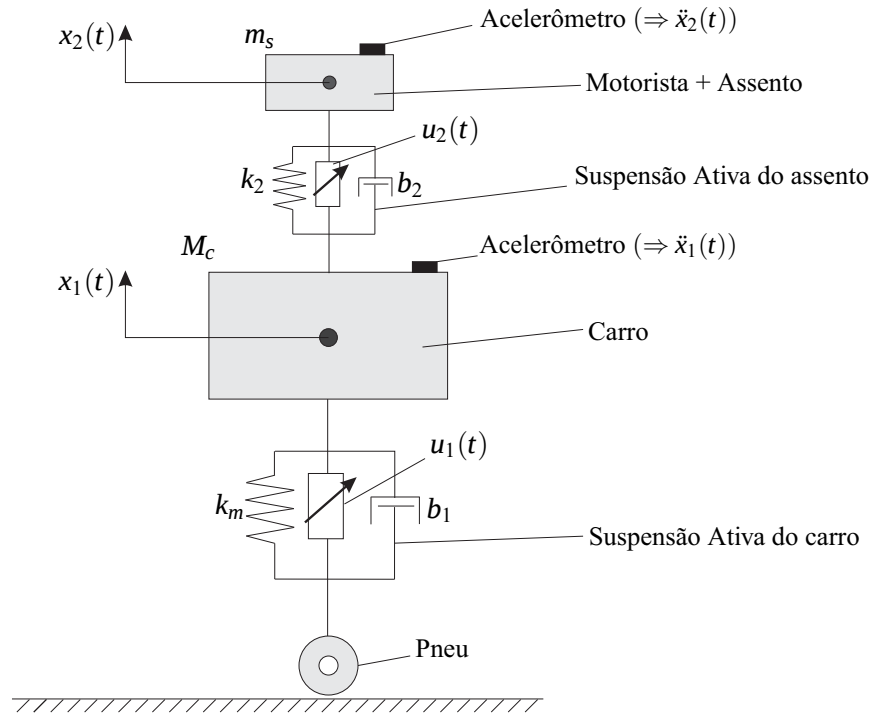


Figura 5.1: Suspensão Ativa do assento de um carro.

O sistema mecânico mostrado na Figura 5.1 é descrito pela equação diferencial

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(x)x(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (5.46)$$

sendo

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k_m - k_2}{M_c} & \frac{k_2}{M_c} & \frac{-b_1 - b_2}{M_c} & \frac{b_2}{M_c} \\ \frac{k_2}{m_s} & \frac{-k_2}{m_s} & \frac{b_2}{m_s} & \frac{-b_2}{m_s} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{M_c} & \frac{-1}{M_c} \\ 0 & \frac{1}{m_s} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nesta equação k_m representa o parâmetro não linear da mola que relaciona a força com o deslocamento e, $k_m = k_1(1 + d^2 x_1^2(t))$, sendo que k_1 é a constante de elasticidade da mola do carro e a constante d são conhecidas. Neste exemplo foi adotado $d = 1$.

O sistema pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + h(t, x(t)) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (5.47)$$

sendo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k_1-k_2}{M_c} & \frac{k_2}{M_c} & \frac{-b_1-b_2}{M_c} & \frac{b_2}{M_c} \\ \frac{k_2}{m_s} & \frac{-k_2}{m_s} & \frac{b_2}{m_s} & \frac{-b_2}{m_s} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{M_c} & \frac{-1}{M_c} \\ 0 & \frac{1}{m_s} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$h(x_1(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-k_1 x_1^2(t)}{M_c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}.$$

Os sinais das acelerações e velocidades estão disponíveis (derivadas das variáveis de estado). Logo, pode-se utilizar da metodologia proposta para resolver o problema. Suponha que $M_c = 1500 \text{ kg}$ (massa do carro), $m_s = 90 \text{ kg}$ (massa do assento (20 kg) + peso do motorista (70 kg)), $k_1 = 4 \times 10^4 \text{ N/m}$ (constante de elasticidade da mola do carro), $b_1 = 4 \times 10^3 \text{ Ns/m}$ (constante do amortecedor do carro), $d = 1 \text{ m}^{-1}$, $k_2 = 5 \times 10^3 \text{ N/m}$ (constante de elasticidade da mola do assento), e $b_2 = 5 \times 10^2 \text{ Ns/m}$ (constante do amortecedor do assento).

Observe que nesta planta, o termo não linear depende de $x_1(t)$. Então, considera-se que a variável $x_1(t)$ está limitada no intervalo de $-0,2 \leq x_1(t) \leq 0,2$ durante a operação de uso. Neste intervalo temos que a função não linear é contínua.

Note que

$$-0,2 \leq x_1(t) \leq 0,2 \Rightarrow |x_1(t)| \leq 0,2 \Rightarrow x_1^2(t) \leq (0,2)^2 = 0.04. \quad (5.48)$$

Observe que

$$h(t, x_1(t)) = x_1^2(t) H x(t) = x_1^2(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-k_1}{M_c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}. \quad (5.49)$$

De (5.49), tem-se que

$$h^T(t, x_1(t)) h(t, x_1(t)) = x_1^4 x^T H^T H x.$$

Para a não linearidade $h(t, x_1(t)) \in H_\alpha$ deve-se ter que

$$h^T(t, x_1(t)) h(t, x_1(t)) = x_1^4 x^T H^T H x \leq \alpha^2 x^T H^T H x.$$

Como $\alpha > 0$ temos

$$x_1^4(t) \leq \alpha^2 \Rightarrow x_1^2(t) \leq \alpha. \quad (5.50)$$

De (5.48) e (5.50)

$$x_1^2(t) \leq 0,04 \leq \alpha \quad (5.51)$$

Assim conclui-se que para $|x_1(t)| \leq 0,2$, $\alpha \geq 0,04$. Devido ao Complemento de Schur temos que

$$\gamma = \frac{1}{\alpha^2}. \quad (5.52)$$

Logo de (5.52), γ é inversamente proporcional a α , ou seja, ao maximizar α estamos minimizando γ , assim para $\alpha = 0,04$ tem-se que

$$\gamma = \frac{1}{0,04^2} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{0,0016} \Rightarrow \gamma = 625.$$

Logo de (5.51), (5.52) temos que

$$\alpha \geq 0,04 \Rightarrow \gamma \leq 625. \quad (5.53)$$

- Sistema Livre

- • Teorema 5.1

A partir do Teorema (5.1), os modelos locais e a matriz P foram obtidos utilizando-se o software MATLAB, por meio do solver "lmilab"(FERON; APKARIAN; GAHINET, 1996). As matrizes da planta e P obtidos são

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -30 & 3,3333 & -3 & 0,3333 \\ 55,5556 & -55,5556 & 5,5556 & -5,5556 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 7 \times 10^{-4} & 7 \times 10^{-4} \\ 0 & 1,11 \times 10^{-2} \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 7,1810 & -2,8816 & 0,5826 & -0,3923 \\ -2,8816 & 2,3308 & -0,0652 & 0,1666 \\ 0,5826 & -0,0652 & 0,1859 & -0,0613 \\ -0,3923 & 0,1666 & -0,0613 & 0,0583 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Os valores de γ e α obtidos, considerando o sistema (5.47) livre, por meio do Teorema 5.1 são descritos na tabela a seguir:

Tabela 5.1: Valores de γ , α para $u(t) = 0$ do Exemplo 1.

γ	α
0,2015	2,2275

Observe que os valores de γ e α obtidos pelo Teorema 5.1, atendem as restrições (5.53), pois $\gamma = 0,2015 < 625$ e $\alpha = 2,2275 > 0,04$. Portanto obtêm-se o seguinte conjunto para $n = 1$ (número de não linearidades):

$$H_{2,22750} = \{h : h^T h \leq \alpha^2 x^T H^T H x\} = \{h : h^T h \leq 4,9617 x^T H^T H x\}. \quad (5.54)$$

Observe que considerando o sistema (5.47) livre, com condição inicial $x(0) = [0, 1 \ 0, 15 \ 0 \ 0]^T$, tem-se pela Figura 5.2 que o sistema é naturalmente estável.

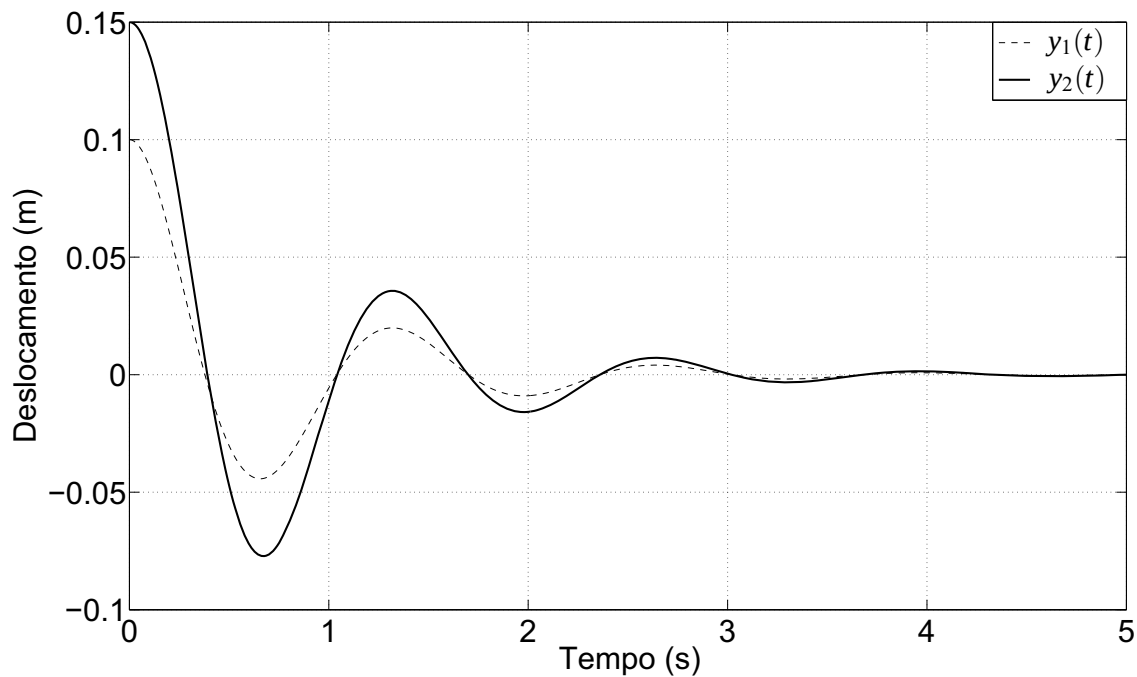


Figura 5.2: Simulação do sistema não-realimentado com uma não linearidade.

- Entrada de controle $u(t) = -K\dot{x}(t)$
- • Teorema 5.2

Utilizando o Teorema 5.2 e o software MATLAB, por meio do solver "lmiLab" (FERON; APKARIAN; GAHINET, 1996), interfaciado pelo YALMIP (Yet Another LMI Parser) (LOFBERG, 2004), as matrizes P e de ganho do controlador projetado, que é dada por $K = MX^{-1}$,

obtidos foram as seguintes:

$$P = \begin{bmatrix} 4,1039 & 0 & 0,0359 & 0 \\ 0 & 0,6 \times 10^{-3} & 0 & 2 \times 10^{-3} \\ 0,0359 & 0 & 0,6 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0,2 \times 10^{-3} & 0 & 0,6 \times 10^{-3} \end{bmatrix},$$

$$K = 10^3 \begin{bmatrix} -2,1832 & 0 & -1,4851 & -0,09 \\ 0,5551 & 1,4834 & 0,0088 & 5,2694 \end{bmatrix}. \quad (5.55)$$

Os valores de γ , α e $\|K\|$ obtidos para o sistema (5.47) por meio do Teorema 5.2 são descritos na tabela a seguir:

Tabela 5.2: Valores de γ , α e $\|K\|$ para $u(t) = -K\dot{x}(t)$ do Exemplo 1.

γ	α	$\ K\ $
0,0132	8,7039	$5,5132 \times 10^3$

Portanto obtêm-se o seguinte conjunto

$$H_{8,7039} = \{h : h^T h \leq \alpha^2 x^T H^T H x\} = \{h : h^T h \leq 75,7578 x^T H^T H x\}. \quad (5.56)$$

As Figuras 5.3 e 5.4 mostram as simulações do sistema em malha fechada (5.47) com os controladores (5.54) para a condição inicial $x(0) = [0,1 \ 0,15 \ 0 \ 0]^T$.

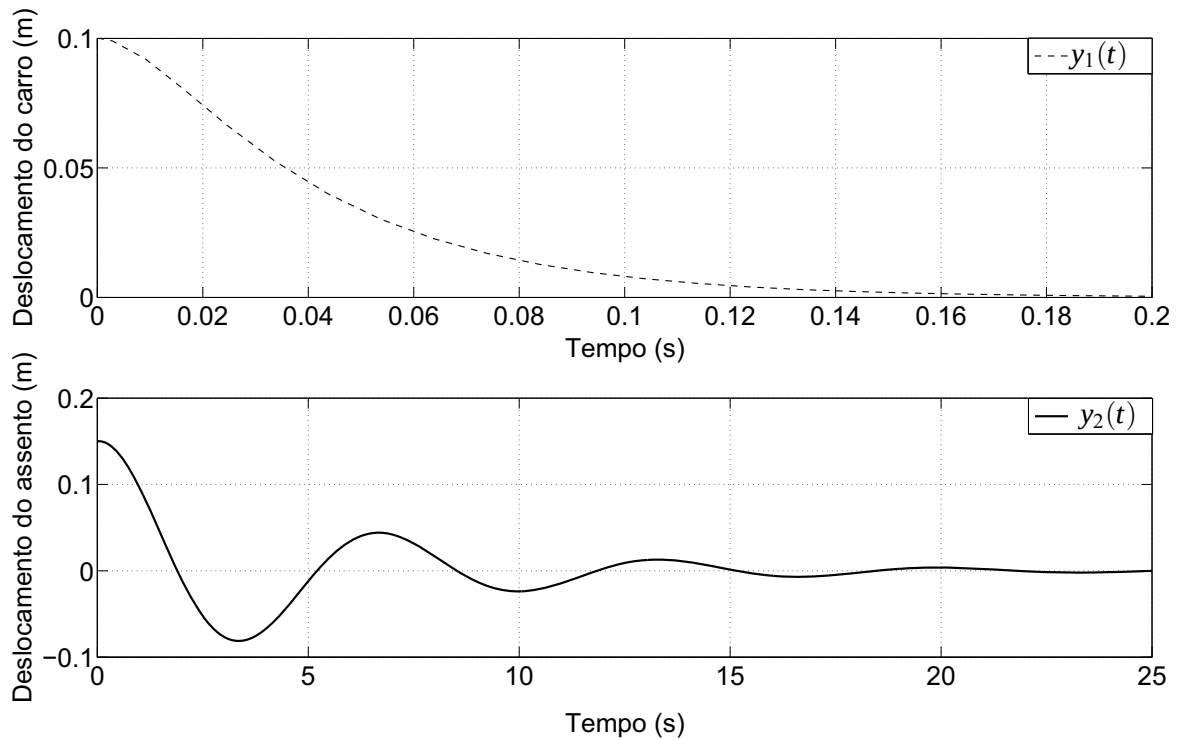


Figura 5.3: Simulação do sistema realimentado com uma não linearidade.

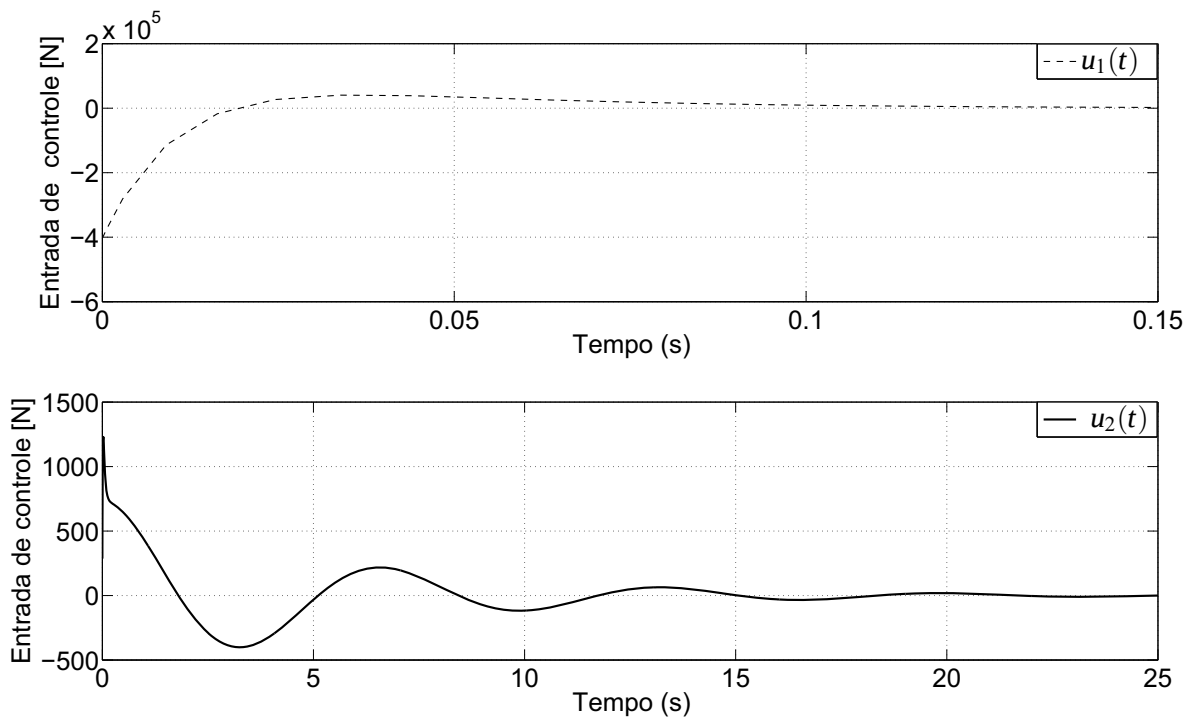


Figura 5.4: Simulação do sinal de controle do sistema realimentado com uma não linearidade.

Comentários

Considerando-se (5.56) e (5.54), observa-se que a introdução do controlador ampliou significativamente a classe de não linearidades que asseguram a estabilidade, de $H_{2,22750}$ para $H_{8,7039}$. Utilizando o Teorema 5.3 com $\phi = 1$, pode-se obter uma resposta do sistema com menor tempo de estabelecimento. Este fato pode ser observado a seguir.

- Entrada de controle $u(t) = -K\dot{x}(t)$
- • Teorema 5.3

As matrizes P e de ganho do controlador projetado obtidos foram as seguintes:

$$P = \begin{bmatrix} 2,0527 & 0,0032 & 0,0157 & 0,0003 \\ 0,0032 & 0,0187 & -0,0002 & 0,0014 \\ 0,0157 & -0,0002 & 0,0003 & 0,0000 \\ 0,0003 & 0,0014 & 0,0000 & 0,0002 \end{bmatrix},$$

$$K = 10^3 \begin{bmatrix} -3,0428 & 0,0013 & -1,4937 & -0,0898 \\ 0,2296 & 0,0135 & 0,0052 & -0,0692 \end{bmatrix}. \quad (5.57)$$

Os valores de γ , α e $\|K\|$ obtidos para o sistema (5.47) por meio do Teorema 5.3 são descritos

na tabela a seguir:

Tabela 5.3: Valores de γ , α e $\|K\|$ para $u(t) = -K\dot{x}(t)$ do Exemplo 1.

γ	α	ϕ	$\ K\ $
0,0138	8,5126	1	$3,3971 \times 10^3$

Portanto obtêm-se o seguinte conjunto

$$H_{8,5126} = \{h : h^T h \leq 72,4638 \, x^T H^T H x\} \quad (5.58)$$

Na Figura 5.5 está ilustrado o comportamento do sistema controlado (5.47), e na Figura 5.6 o sinal de controle com condição inicial $x(0) = [0,1 \ 0,15 \ 0 \ 0]^T$.

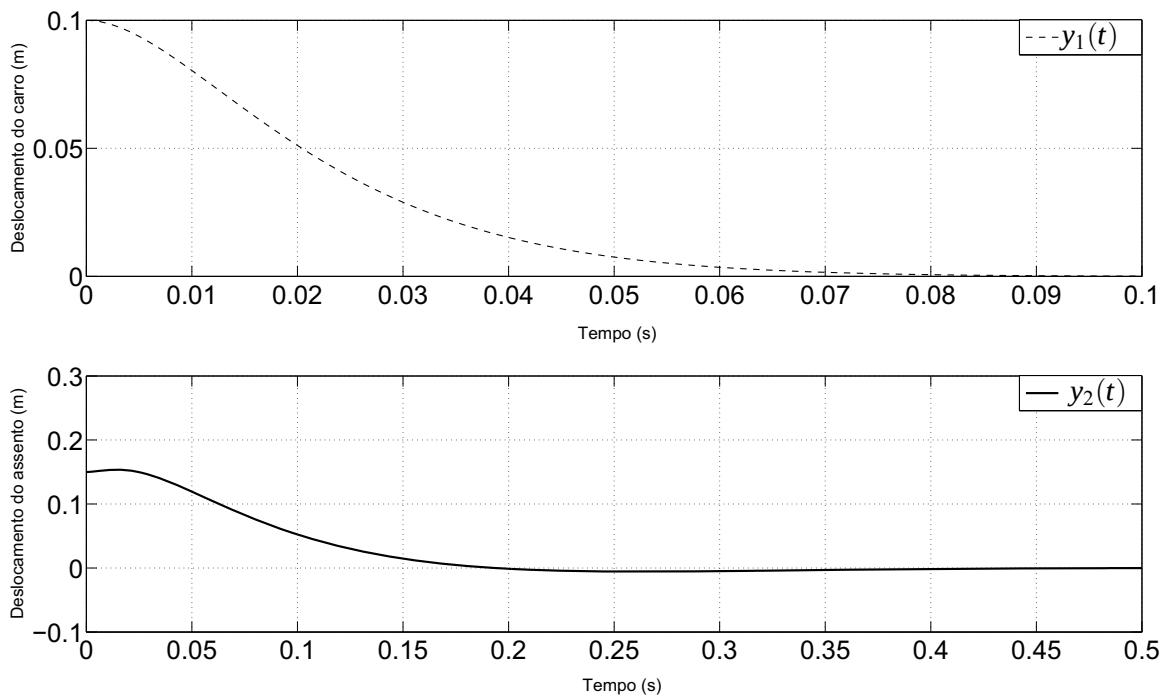


Figura 5.5: Simulação do sistema realimentado com uma não linearidade.

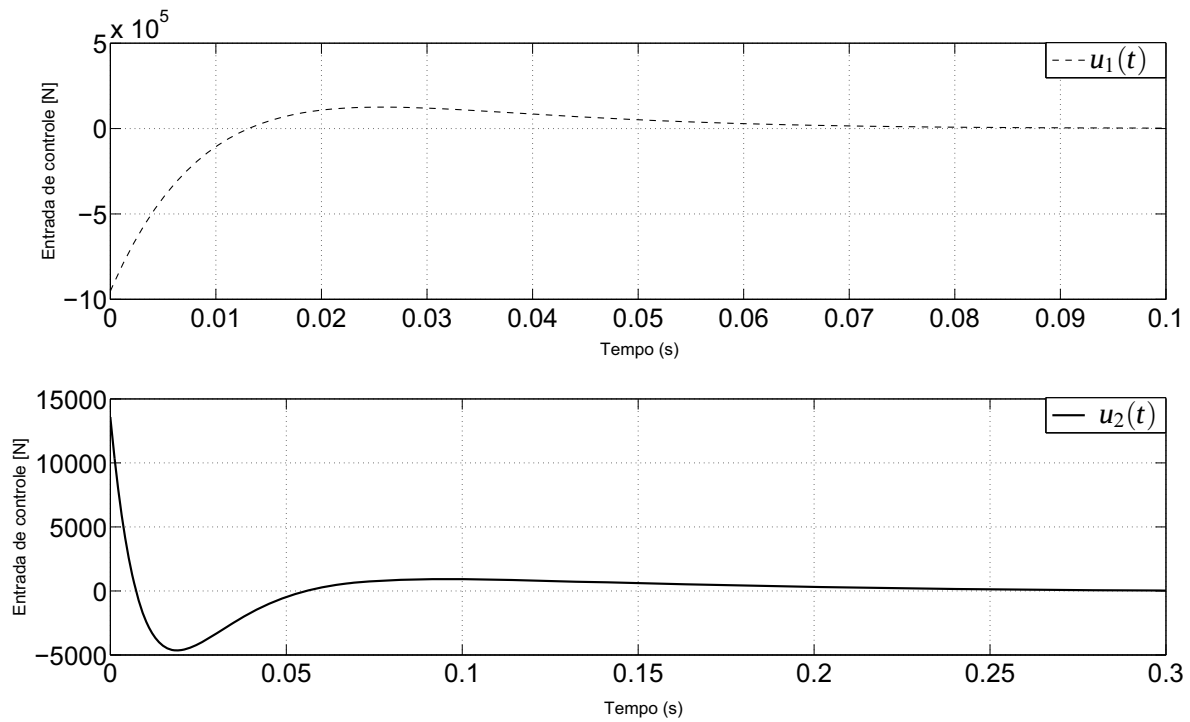


Figura 5.6: Simulação do sinal de controle do sistema realimentado com uma não linearidade.

Comentários

Na Figura 5.5 verificou-se que o tempo de estabelecimento do sistema foi reduzido. Esta redução foi de 50% para a componente $y_1(t)$, com um tempo de estabelecimento aproximado de 0,1 s, e de 98% para a componente $y_2(t)$, com um tempo de estabelecimento aproximado de 0,5 s. Porém na Figura 5.6 notou-se um aumento na magnitude do sinal de controle $u(t)$. Visando diminuir este esforço realizado pelo controlador, adiciona-se uma restrição na norma da matriz do controlador, projetando-se assim um novo controlador. Utilizando o Teorema 5.4, projeta-se um novo controlador que estabilize o sistema e diminua o esforço realizado pelo sistema, considerando $\phi = 1$. Este fato pode ser observado a seguir.

- Entrada de controle $u(t) = -K\dot{x}(t)$
- • Teorema 5.4

As matrizes P , de ganho do controlador projetado e os parâmetros K_M e K_X obtidos foram

as seguintes:

$$P = \begin{bmatrix} 0.3827 & 0.0368 & 0.0220 & 0.0018 \\ 0.0368 & 0.0040 & 0.0024 & 0.0002 \\ 0.0220 & 0.0024 & 0.0156 & 0.0016 \\ 0.0018 & 0.0002 & 0.0016 & 0.0002 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} 0.0053 & 0.0005 & 0.0003 & 0.0000 \\ 0.0040 & 0.0004 & 0.0002 & 0.0000 \end{bmatrix}. \quad (5.59)$$

$$K_M = 0,0011 \text{ e } K_X = 0,3876$$

Os valores de γ , α e $\|K\|$ obtidos para o sistema (5.47) com $\phi = 1$ por meio do Teorema 5.4 são descritos na tabela a seguir:

Tabela 5.4: Valores de γ , α e $\|K\|$ para $u(t) = -K\dot{x}(t)$ do Exemplo 1.

γ	α	ϕ	$\ K\ $
5,5910	0,4229	1	0,0067

Portanto obtêm-se o seguinte conjunto

$$H_{0,4229} = \{h : h^T h \leq \alpha^2 x^T H^T H x\} = \{h : h^T h \leq 0,1789 x^T H^T H x\}.$$

A Figura 5.7 ilustra o comportamento do sistema com as restrições obtidas a partir do Teorema 5.4, e na Figura 5.8 ilustra o comportamento do sinal de entrada de controle do sistema (5.47).

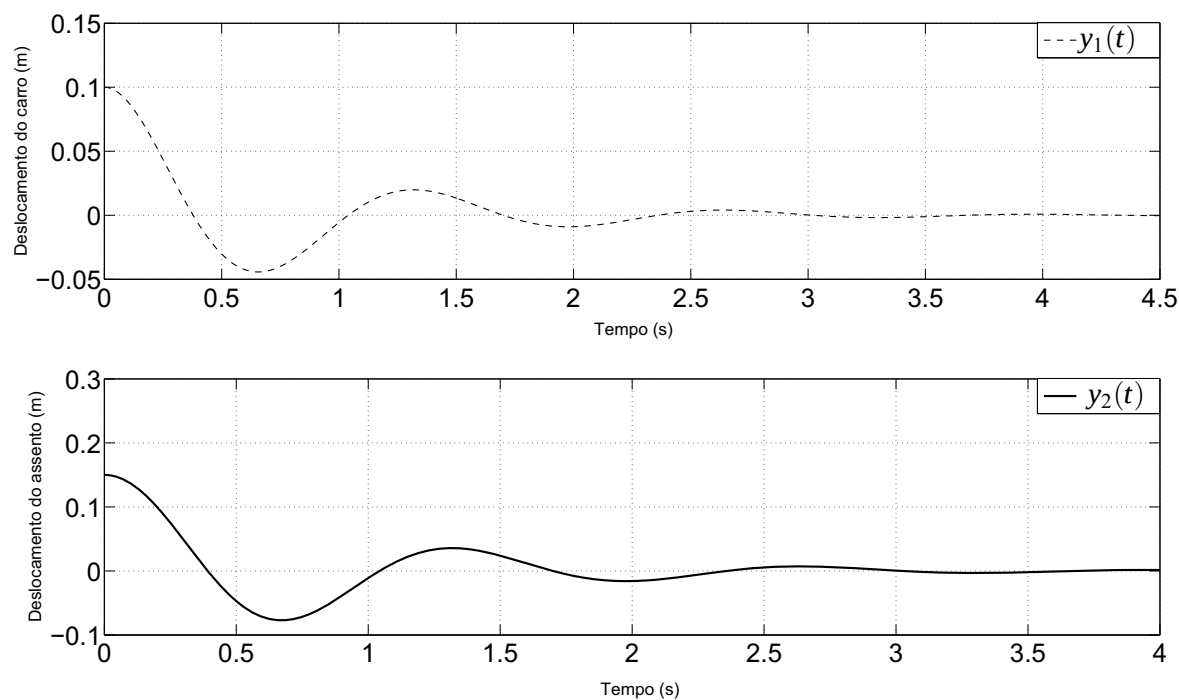


Figura 5.7: Simulação do sistema realimentado com uma não linearidade.

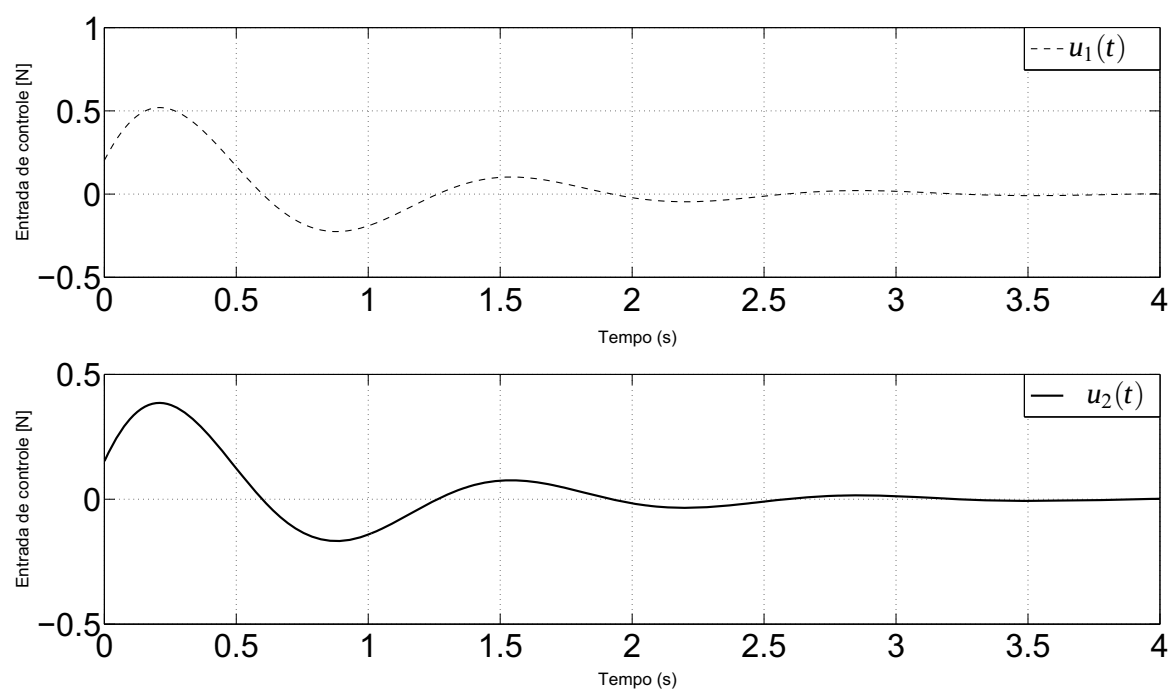


Figura 5.8: Simulação do sinal de controle do sistema realimentado com uma não linearidade.

Comentários

Observe pela Figura 5.8, que a magnitude do sinal de controle foi significativamente reduzida. Contudo é notável que a componente $y_2(t)$ obteve uma redução expressiva quanto ao tempo de estabelecimento, apresentada na Figura 5.3, de 25 para 4 s. Observou-se que a inserção das restrições na taxa de decaimento e no ganho do controlador projetado, ocasionou a perda de tolerância da classe de sistemas não lineares às perturbações. Tal fato pode ser verificado através das LMIs (5.19) e (5.20) que geraram o conjunto de tolerância $H_{8,7039}$, já as LMIs (5.31) e (5.32) geraram o conjunto $H_{8,5126}$, por fim, as LMIs (5.44) e (5.45) geraram o conjunto $H_{0,3327}$.

5.3.3 Exemplo 2: Suspensão ativa do assento de um carro com duas não linearidades.

Consideremos o sistema de controle da suspensão ativa do assento de um carro (REITHMEIER; LEITMANN, 2003), semelhante ao Exemplo 1, porém com a existência de duas não linearidades, nas molas do assento do motorista e do carro. Então, k_m representa o parâmetro não linear da mola e, $k_m = k_1(1 + x_1^2(t))$, sendo k_1 a constante de elasticidade da mola do carro, e k_n representa o parâmetro não linear da mola do assento do motorista, dado por $k_n = k_2(1 + x_2^2(t))$, sendo k_2 a constante de elasticidade da mola do assento do motorista. Consideremos novamente os mesmos valores para $M_c = 1500kg$ (massa do carro), $m_s = 90kg$ (massa do assento (20kg) + peso do motorista (70kg)), $k_1 = 4 \times 10^4 N/m$ (constante de elasticidade da mola do carro), $b_1 = 4 \times 10^3 Ns/m$ (amortecedor do carro), $d = 1m^{-1}$ (endurecimento da mola), $k_2 = 5 \times 10^3 N/m$ (constante de elasticidade da mola do assento), e $b_2 = 5 \times 10^2 Ns/m$ (amortecedor do assento). Então, considera-se que a variável de estado $x_1(t)$ está limitada no intervalo de $-0,2 \leq x_1(t) \leq 0,2$ e que $x_2(t)$ está limitada em $-0,15 \leq x_2(t) \leq 0,15$. Nestes intervalos temos que as funções não lineares são contínuas. As velocidades $\dot{x}_1(t)$ e $\dot{x}_2(t)$ são estimadas a partir de suas derivadas medidas no tempo e vetor de estado é definido por $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dot{x}_1(t) \ \dot{x}_2(t)]^T$.

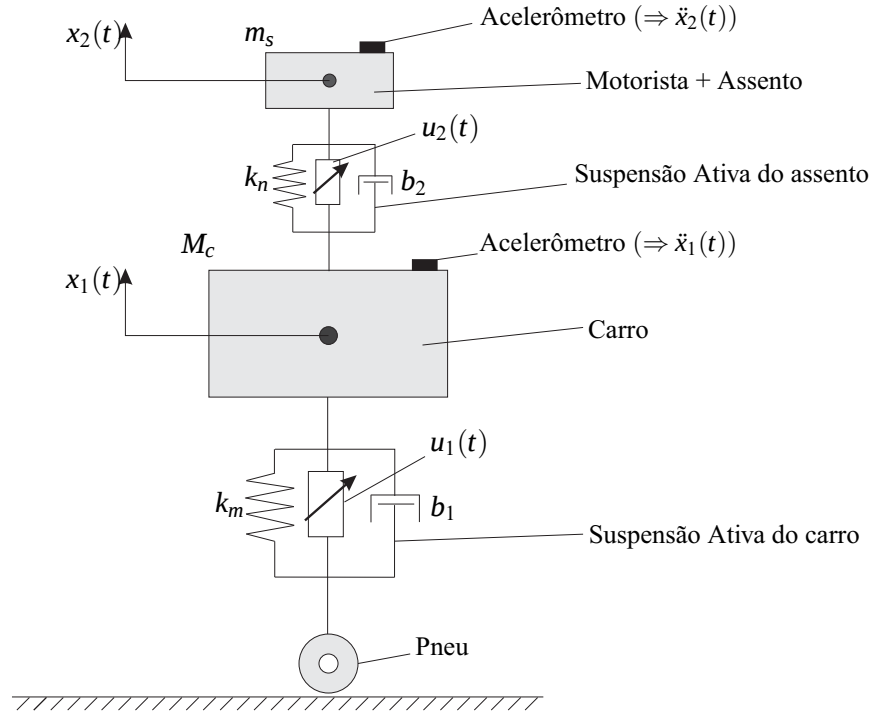


Figura 5.9: Suspensão ativa do assento de um carro.

Como as variáveis de estado $x_1(t)$ e $x_2(t)$ estão restritas aos intervalos $-0,2 \leq x_1(t) \leq 0,2$ e $-0,15 \leq x_2(t) \leq 0,15$, tem-se que

$$\begin{aligned} x_1(t) \in [-0,2 ; 0,2] &\Rightarrow |x_1(t)| \leq 0,2 \Rightarrow x_1^2(t) \leq (0,2)^2 = 0,04, \\ x_2(t) \in [-0,15 ; 0,15] &\Rightarrow |x_2(t)| \leq 0,15 \Rightarrow x_2^2(t) \leq (0,15)^2 = 0,0225. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} h(t, x_1(t)) &= x_1^2 H_1 x(t) \Rightarrow x_1^4(t) \leq \alpha_1^2 \Rightarrow x_1^2(t) \leq \alpha_1. \\ h(t, x_2(t)) &= x_2^2 H_2 x(t) \Rightarrow x_2^4(t) \leq \alpha_2^2 \Rightarrow x_2^2(t) \leq \alpha_2. \end{aligned}$$

Para a não linearidade $h(t, x_2(t)) \in H_\alpha$ tem-se

$$h^T(t, x_2(t)) h(t, x_2(t)) = x_2^4 x^T H^T H x \leq \alpha_2^2 x^T H^T H x$$

Ou seja,

$$x_2^4(t) \leq \alpha_2^2 \Rightarrow x_2^2(t) \leq \alpha_2.$$

Assim conclui-se que para $|x_2(t)| \leq 0,15$, $\alpha_2 \geq 0,0225$. Pela Definição do conjunto $H_{\bar{\alpha}}$ temos que ao maximizar α_2 estamos automaticamente minimizando γ_2 . Logo, para o menor valor de

α_2 , ou seja, $\alpha_2 = 0,0225$ tem-se que

$$\gamma_2 = \frac{1}{2\alpha_2^2} = \frac{1}{2 \times 0,0225^2} \Rightarrow \gamma_2 = \frac{1978,3}{2} \Rightarrow \gamma_2 = 987,654 \quad (5.60)$$

De (5.61) e (5.60) tem-se que

$$\alpha_2 \geq 0,0225 \Rightarrow \gamma_2 \leq 987,654$$

Do Exemplo 1 temos que

$$x_1^2(t) \leq 0,04 \leq \alpha_1 \quad (5.61)$$

Então γ_1 é dado por

$$\gamma_1 = \frac{1}{2\alpha_1^2} = \frac{1}{2 \times 0,04^2} \Rightarrow \gamma_1 = \frac{625}{2} \Rightarrow \gamma_1 = 625$$

Temos então o seguinte sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (5.62)$$

sendo

$$A(x(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k_m - k_n}{M_c} & \frac{k_n}{M_c} & \frac{-b_1 - b_2}{M_c} & \frac{b_2}{M_c} \\ \frac{k_n}{m_s} & \frac{-k_n}{m_s} & \frac{b_2}{m_s} & \frac{-b_2}{m_s} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{M_c} & \frac{-1}{M_c} \\ 0 & \frac{1}{m_s} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O sistema pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + h_1(t, x_1(t)) + h_2(t, x_2(t)), \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (5.63)$$

sendo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k_1 - k_2}{M_c} & \frac{k_2}{M_c} & \frac{-b_1 - b_2}{M_c} & \frac{b_2}{M_c} \\ \frac{k_2}{m_s} & \frac{-k_2}{m_s} & \frac{b_2}{m_s} & \frac{-b_2}{m_s} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{M_c} & \frac{-1}{M_c} \\ 0 & \frac{1}{m_s} \end{bmatrix},$$

$$h_1(t, x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-k_1 x_1^2(t)}{M_c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = x_1^2(t) H_1 x(t),$$

$$h_2(t, x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-k_2 x_2^2(t)}{M_c} & \frac{k_2 x_2^2(t)}{M_c} & 0 & 0 \\ \frac{k_2 x_2^2(t)}{m_s} & \frac{-k_2 x_2^2(t)}{m_s} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = x_2^2(t) H_2 x(t).$$

Utilizando o "LMI control toolbox" para resolver a LMI do Teorema 5.1 os seguintes resultados foram obtidos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -30,0000 & 3,3333 & -3 & 0,3 \\ 55,5556 & -55,5556 & 5,5556 & -5,5556 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 6.6705 & -2.5455 & 0.5457 & -0.3029 \\ -2.5455 & 2.2577 & -0.0831 & 0.1630 \\ 0.5457 & -0.0831 & 0.1922 & -0.0487 \\ -0.3029 & 0.1630 & -0.0487 & 0.0497 \end{bmatrix}.$$

Do Teorema 5.1 temos os seguintes valores para γ_i e α_i , $i = 1, 2$.

Tabela 5.5: Valores de γ_1 , γ_2 , α_1 , α_2

γ_1	γ_2	α_1	α_2
0,4355	0,5577	1,0715	0,9469

Portanto obtêm-se o seguinte conjunto

$$H_{1,0715+0,9469} = \{h : h^T h \leq 2x^T(t) ((1,0715^2)H_1^T H_1) + ((0,9469^2)H_2^T H_2)x(t)\},$$

$$H_{1,0715+0,9469} = \{h : h^T h \leq 2x^T(t) ((1,1481)H_1^T H_1) + (0,8966)H_2^T H_2)x(t)\}. \quad (5.64)$$

A simulação do sistema (5.63) livre é semelhante a simulação ilustrada na Figura 5.2.

• Entrada de controle $u(t) = -K\dot{x}(t)$

• • Teorema 5.2

Utilizando o "LMI control toolbox" para resolver a LMI do Teorema 5.2 os seguintes resul-

tados foram obtidos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -30,0000 & 3,3333 & -3 & 0,3 \\ 55,5556 & -55,5556 & 5,5556 & -5,5556 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 7 \times 10^{-4} & 7 \times 10^{-4} \\ 0 & 1,11 \times 10^{-2} \end{bmatrix}.$$

As matrizes P e de ganho do controlador projetado obtidos foram as seguintes:

$$P = \begin{bmatrix} 4,3071 & -0,6902 & 0,0244 & 0,0019 \\ -0,6902 & 3,9810 & 0,0020 & 0,0244 \\ 0,0244 & 0,0020 & 0,0003 & 0,0000 \\ 0,0019 & 0,0244 & 0,0000 & 0,0003 \end{bmatrix},$$

$$K = 10^3 \begin{bmatrix} -1,9390 & 0,2190 & -1,4881 & -0,0854 \\ 0,2702 & -0,2562 & -0,0009 & -0,0889 \end{bmatrix}. \quad (5.65)$$

Os valores de γ_1 , γ_2 , α_1 , α_2 e $\|K\|$ obtidos para o sistema (5.58) por meio do Teorema 5.2 são descritos na tabela a seguir:

Tabela 5.6: Valores de γ_1 , γ_2 , α_1 , α_2 e $\|K\|$ do Exemplo 2.

γ_1	γ_2	α_1	α_2	$\ K\ $
0,0168	0,0191	5,4554	5,1164	$2,4666 \times 10^3$

Portanto obtêm-se o seguinte conjunto

$$H_{5,4554+5,1164} = \{h : h^T h \leq 2x^T(t)((5,4554^2)H_1^T H_1) + ((5,1164^2)H_2^T H_2)x(t)\},$$

$$H_{10,5718} = \{h : h^T h \leq 2x^T(t)((29,7614)H_1^T H_1) + (26,1775)H_2^T H_2)x(t)\}. \quad (5.66)$$

A Figura 5.10 ilustra a simulação do sistema em malha fechada (5.63) com o controlador (5.65) e a Figura 5.11 o comportamento do sinal de entrada de controle do sistema com condição inicial $x(0) = [0,1 \ 0,15 \ 0 \ 0]^T$.

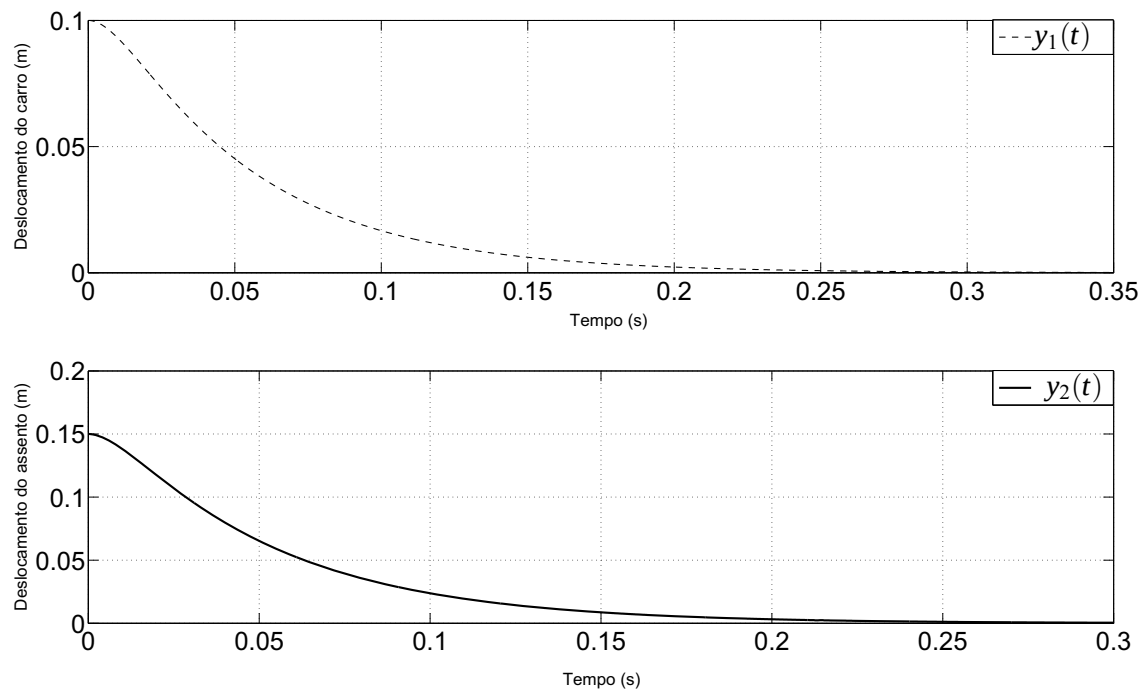


Figura 5.10: Simulação do sistema realimentado com duas não linearidades.

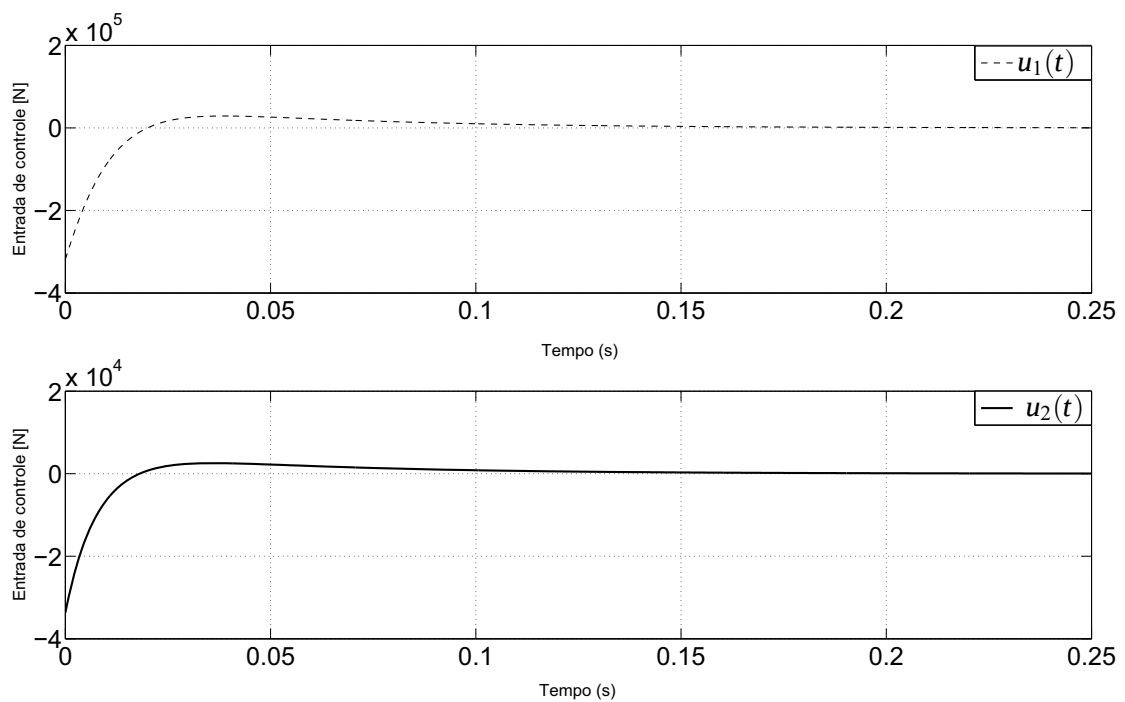


Figura 5.11: Simulação do sinal de controle do sistema realimentado com duas não linearidades.

Comentários

Observe que na Figura 5.10 o tempo de estabelecimento do sistema controlado é de 0,35 s para a componente $y_1(t)$ e de 0,3 s para $y_2(t)$. Note que a utilização do controlador projetado ampliou significativamente a classe de não linearidades que asseguram a estabilidade do sistema. De (5.64) e (5.66) nota-se o ganho de $H_{2,0184}$ para $H_{10,5718}$. Visando um menor tempo de estabelecimento do sistema controlado, adiciona-se ao projeto do controlador uma restrição na taxa de decaimento, utilizando o Teorema 5.3 com $\phi = 1$.

- Entrada de controle $u(t) = -K\dot{x}(t)$
- • Teorema 5.3

As matrizes P e de ganho do controlador projetado obtidos foram as seguintes:

$$P = \begin{bmatrix} 1,8112 & -0,3073 & 0,0096 & 0,0008 \\ -0,3073 & 1,7128 & 0,0007 & 0,0097 \\ 0,0096 & 0,0007 & 0,0002 & 0,0000 \\ 0,0008 & 0,0097 & 0,0000 & 0,0002 \end{bmatrix},$$

$$K = 10^3 \begin{bmatrix} -3,0772 & 0,0759 & -1,4954 & -0,0882 \\ 0,3941 & -0,3921 & -0,0004 & -0,0896 \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

Os valores de γ_1 , γ_2 , α_1 , α_2 e $\|K\|$ obtidos para o sistema (5.58) por meio do Teorema 5.3 são descritos na tabela a seguir:

Tabela 5.7: Valores de γ_1 , γ_2 , α_1 , α_2 e $\|K\|$ do Exemplo 2.

γ_1	γ_2	α_1	α_2	ϕ	$\ K\ $
0,018	0,02	5,2705	5	1	$3,4425 \times 10^3$

Portanto obtêm-se o seguinte conjunto

$$H_{5,2705+5} = \{h : h^T h \leq 2x^T(t)((5,2705^2)H_1^T H_1) + ((5^2)H_2^T H_2)x(t)\}$$

ou seja,

$$H_{10,2705} = \{h : h^T h \leq 2x^T(t)((27,7778)H_1^T H_1) + (25)H_2^T H_2)x(t)\}$$

A Figura 5.6 mostra a simulação do sistema em malha fechada (5.63) com o controlador (5.67) e a Figura 5.13 está ilustrado o comportamento do sinal de entrada de controle do sistema com condição inicial $x(0) = [0,1 \ 0,15 \ 0 \ 0]^T$

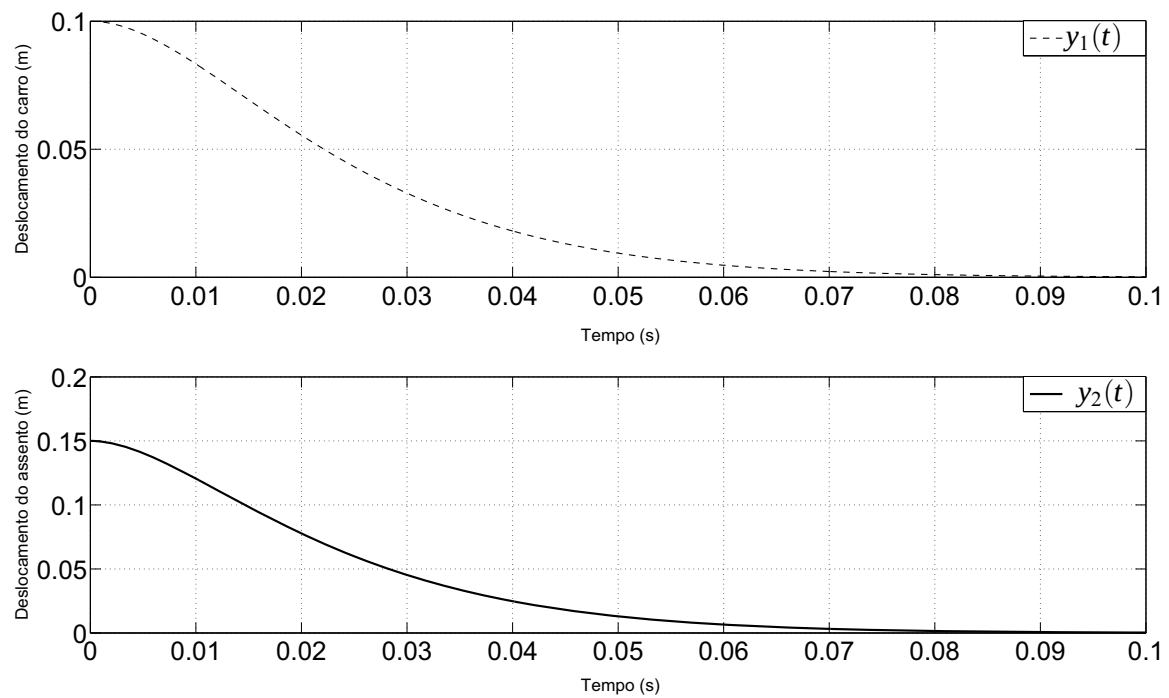


Figura 5.12: Simulação do sistema realimentado com duas não linearidades.

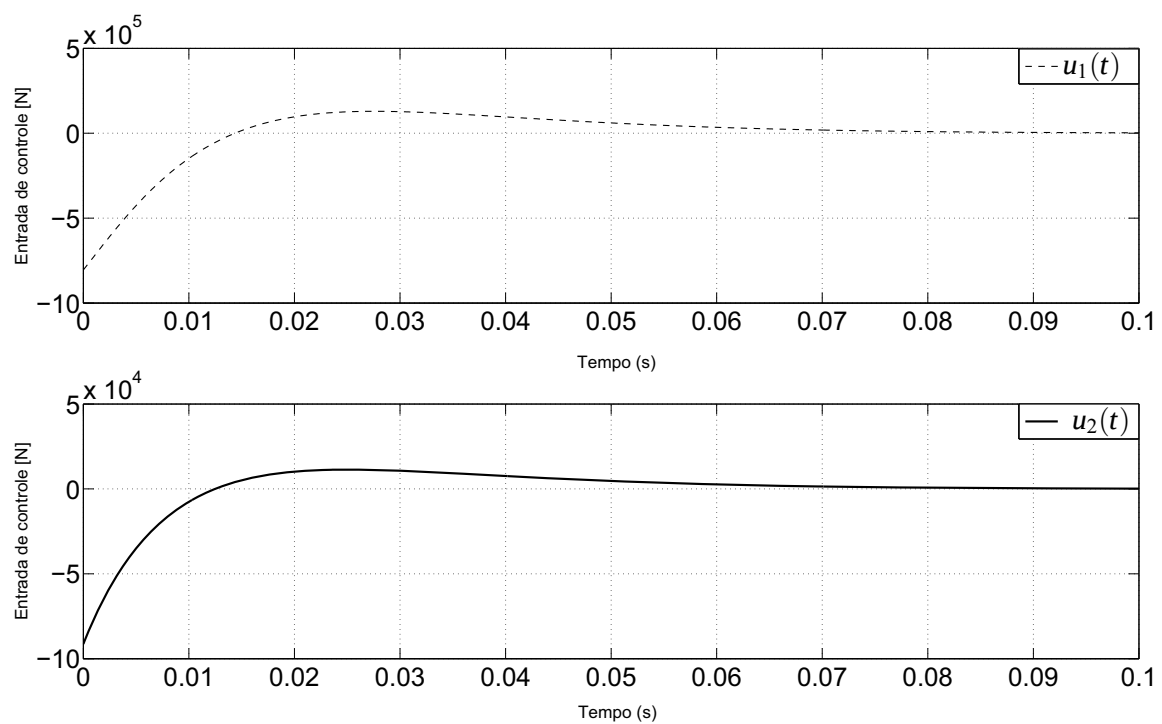


Figura 5.13: Simulação do sinal de controle do sistema realimentado com duas não linearidades.

Comentários

Na Figura 5.12 percebeu-se uma redução significativa no tempo de estabelecimento do sistema controlado, sendo de 0,1 s. Obtém-se os valores de $\alpha_1 = 5,2705$ e de $\alpha_2 = 5$, assim o conjunto de tolerância do sistema à perturbações é dado por $H_{10,2705}$. Contudo, nota-se um aumento na magnitude do sinal de controle $u(t)$. Visando diminuir o esforço, adiciona-se uma restrição na norma da matriz do controlador. Utilizando o Teorema 5.4, projeta-se um novo controlador que estabilize o sistema, com $\phi = 1$. Este fato pode ser observado a seguir.

- Entrada de controle $u(t) = -K\dot{x}(t)$
- • Teorema 5.4

As matrizes P e os parâmetros $K_M = e$ e $K_X =$, de ganho do controlador projetado obtidos foram as seguintes:

$$\begin{aligned}
 P &= \begin{bmatrix} 0,3977 & 0,0342 & 0,0231 & 0,0030 \\ 0,0342 & 0,0156 & 0,0008 & 0,0009 \\ 0,0231 & 0,0008 & 0,0165 & 0,0017 \\ 0,0030 & 0,0009 & 0,0017 & 0,0003 \end{bmatrix}, \\
 K &= \begin{bmatrix} 0,0258 & 0,0023 & 0,0015 & 0,0002 \\ 0,0191 & 0,0017 & 0,0009 & 0,0001 \end{bmatrix} \\
 K_M &= 0,0072 \text{ e } K_X = 0,4030
 \end{aligned} \tag{5.68}$$

Os valores de γ_1 , γ_2 , α_1 , α_2 e $\|K\|$ obtidos para o sistema (5.58) por meio do Teorema 5.4 são descritos na tabela a seguir:

Tabela 5.8: Valores de γ_1 , γ_2 , α_1 , α_2 e $\|K\|$ do Exemplo 2.

γ_1	γ_2	α_1	α_2	ϕ	$\ K\ $
14,8066	24,5838	0,1838	0,1426	1	0,0323

Portanto obtêm-se o seguinte conjunto

$$H_{0,1838+0,1426} = \{h : h^T h \leq 2x^T(t)((0,1838^2)H_1^T H_1) + ((0,1426^2)H_2^T H_2)x(t)\}$$

ou seja,

$$H_{0,3264} = \{h : h^T h \leq 2x^T(t)((0,0338)H_1^T H_1) + (0,0203)H_2^T H_2)x(t)\}$$

A Figura 5.14 mostra a simulação do sistema em malha fechada (5.63) com o controlador

(5.68) e a Figura 5.15 ilustra o comportamento do sinal da entrada de controle do sistema para condição inicial $x(0) = [0, 1 \ 0, 15 \ 0 \ 0]^T$.

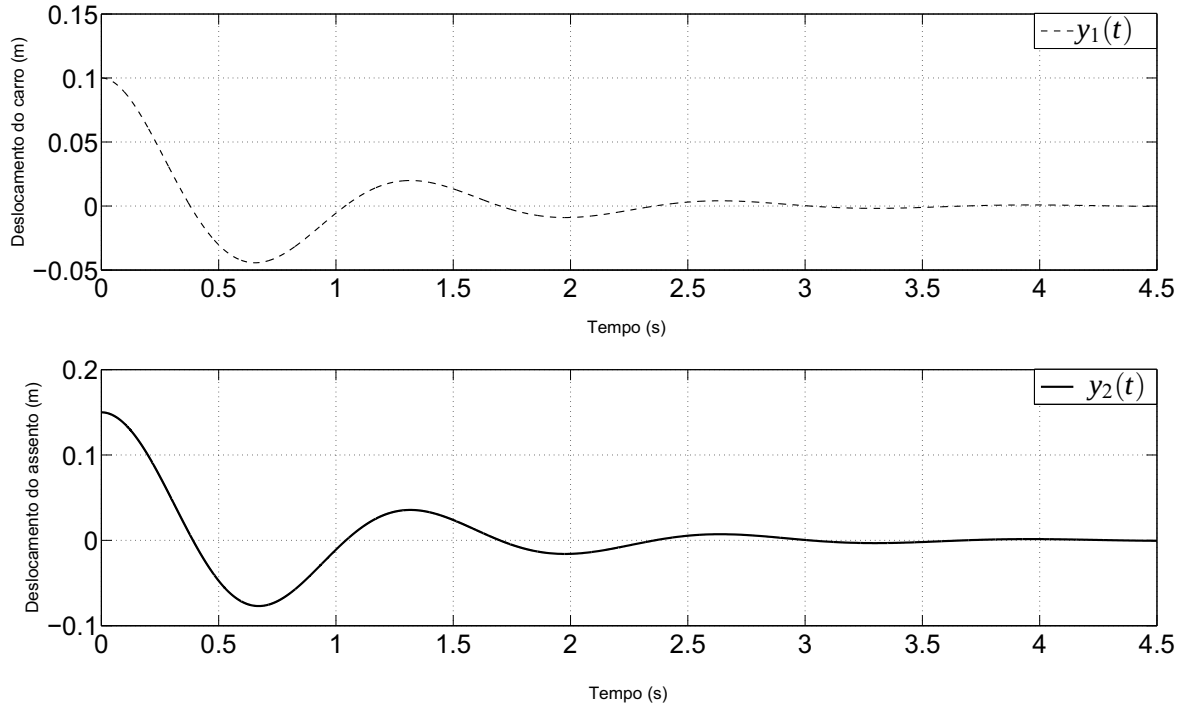


Figura 5.14: Simulação do sistema realimentado com duas não linearidades.

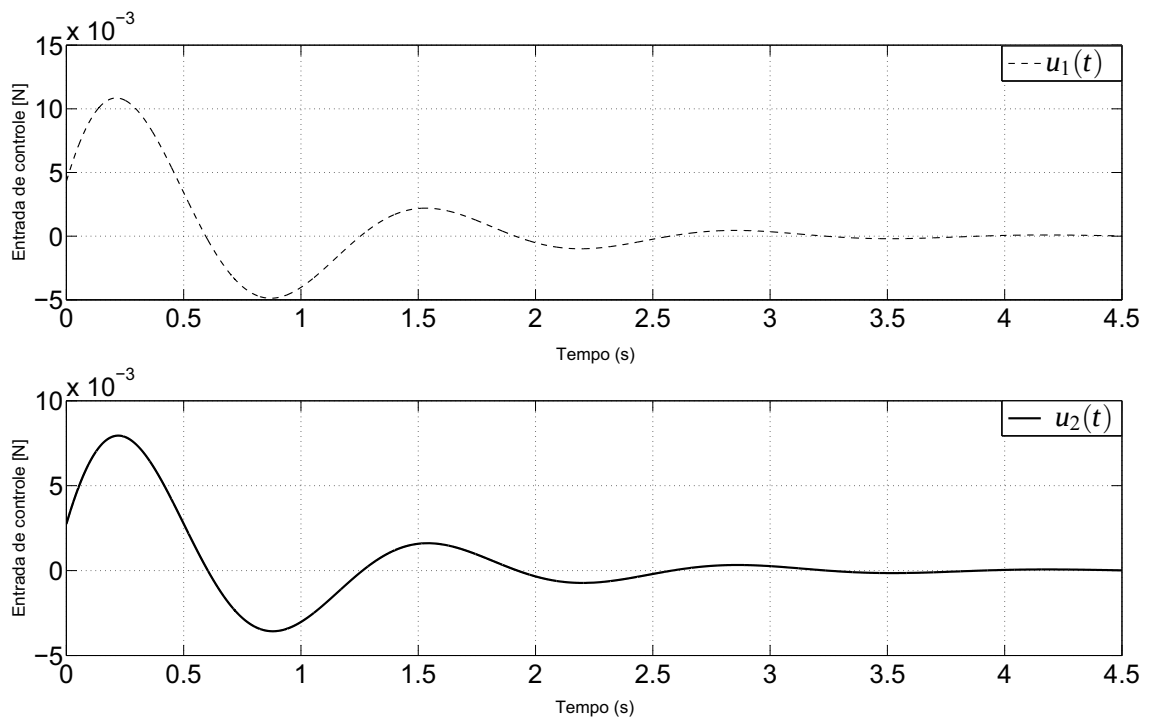


Figura 5.15: Simulação do sinal de controle do sistema realimentado com duas não linearidades.

Comentários

Observe nas Figuras 5.14 e 5.15, que através do Teorema 5.4 conseguiu-se atenuar a magnitude do sinal de controle no sistema. Assim a componente $u_1(t)$ teve um redução de $1 \times 10^5 N$ para $11 \times 10^{-3} N$, a componente $u_2(t)$ teve um redução de $1 \times 10^4 N$ para $7,5 \times 10^{-3} N$. Além disso, o tempo de estabelecimento do sistema foi de 4,5 s, garantindo um bom desempenho do projeto do controlador. Os conjuntos de tolerância obtidos foram: as LMIs (5.19) e (5.20) geraram o conjunto de tolerância $H_{10,5718}$, já as LMIs (5.31) e (5.32) geraram o conjunto $H_{10,2705}$, por fim, as LMIs (5.44) e (5.45) geraram o conjunto $H_{0,3264}$.

5.4 Sistemas Não Lineares e Incertos

5.4.1 Sistemas com Incertezas Politópicas

Quando a parte linear do sistema (5.1) não é estável, podemos introduzir a realimentação da derivada do vetor de estado para estabelecer a estabilidade do sistema global e, ao mesmo tempo, maximizar sua tolerância para perturbações incertas não lineares. Um assunto a ser explorado com grande interesse aqui é a existência de falhas ou distúrbios esporádicos ou ininterruptos, que podem provocar mudanças permanentes no modelo matemático do equipamento. Tais falhas possuem diversas possíveis origens, como por exemplo, o desgaste natural de algum componente do sistema, quebra por fatores externos, quebra por manuseio incorreto, entre outras possibilidades. A estas falhas que acabamos de descrever, denominamos falhas estruturais. A ocorrência de uma possível falha estrutural em sistema pode ser descrita por meio de incertezas do tipo politópicas.

Considere os sistema linear e invariante no tempo com incertezas politópicas na planta, com falhas estruturais, descrito na forma de variáveis de estado, dado por:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\beta)x(t) + B(\beta)u(t) \\ y(t) = C(\beta)x(t) \end{cases} \quad (5.69)$$

As matrizes $A(\beta)$, $B(\beta)$ e $C(\beta)$ são representadas pela combinação convexa de vértices, descritas abaixo (BOYD et al., 1994):

$$A(\beta) = \sum_{j=1}^p \beta_j A_{\beta_j}, \quad B(\beta) = \sum_{j=1}^p \beta_j B_{\beta_j}, \quad C(\beta) = \sum_{j=1}^p \beta_j C_{\beta_j}, \quad (5.70)$$

$$\beta_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^p \beta_j = 1, \quad j = 1, \dots, p, \quad (5.71)$$

sendo que $\beta = [\beta_1 \dots \beta_p]^T$, em que p é dado pela relação $p = 2^w$, w é o número de parâmetros incertos das matrizes $A(\beta)$, $B(\beta)$ e $C(\beta)$ na planta e A_{β_j} , B_{β_j} e C_{β_j} representam os vértices do politopo.

5.4.2 Sistemas Não Lineares com Incertezas Politópicas

Como descrito anteriormente, todo sistema pode estar sujeito a incertezas politópicas (ou falhas estruturais) em sua estrutura devido a vários fatores. Porém pode-se encontrar sistemas mais complexos, que apresentam além das incertezas politópicas, também elementos não lineares em sua estrutura. Elementos não lineares podem ocorrer em decorrência de dispositivos com certas limitações no sistema de controle e na planta, tais como, sensores, atuadores, molas, circuitos eletrônicos, entre outras causas.

5.4.3 Estabilidade Robusta de Sistemas Não Lineares com Incertezas Politópicas

Considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\sigma, \beta)x(t) + B(\sigma, \beta)u(t) \\ y(t) = C(\sigma, \beta)x(t), \end{cases} \quad (5.72)$$

sendo $A(\sigma, \beta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(\sigma, \beta) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C(\sigma, \beta) \in \mathbb{R}^{q \times n}$, matrizes que representam a dinâmica da planta do sistema não linear com incertezas politópicas, sendo que σ representa as não linearidades, e β representa as incertezas politópicas (ou falhas) da planta, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de saída e $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle do sistema.

Neste momento vamos supor que as matrizes $A(\sigma, \beta)$, $B(\sigma, \beta)$ e $C(\sigma, \beta)$ podem ser representadas pelas combinações convexas de vértices descritas abaixo (BOYD et al., 1994).

$$\begin{aligned} A(\sigma, \beta) &= \sum_{i=1}^r \sigma_i A_{\sigma_i} + \sum_{j=1}^p \beta_j A_{\beta_j}, \\ B(\sigma, \beta) &= \sum_{i=1}^r \sigma_i B_{\sigma_i} + \sum_{j=1}^p \beta_j B_{\beta_j}, \\ C(\sigma, \beta) &= \sum_{i=1}^r \sigma_i C_{\sigma_i} + \sum_{j=1}^p \beta_j C_{\beta_j} \end{aligned}$$

sendo que $i = 1, 2, \dots, r$, $\sigma = [\sigma_1 \dots \sigma_r]^T$, em que r é dado pela relação $r = 2^s$, s é o número de parâmetros não lineares das matrizes $A(\sigma, \cdot)$, $B(\sigma, \cdot)$ e $C(\sigma, \cdot)$ na planta e A_{σ_i} , B_{σ_i} e C_{σ_i} representam os vértices do politopo; e ainda para $j = 1, 2, \dots, p$, $\beta = [\beta_1 \dots \beta_p]^T$, em que p é dado pela equação $p = 2^w$, w é o número de parâmetros incertos das matrizes $A(\cdot, \beta)$, $B(\cdot, \beta)$ e $C(\cdot, \beta)$ na planta e A_{β_j} , B_{β_j} e C_{β_j} representam os vértices do politopo.

Novamente, como se trata de combinações convexas, temos que:

$$\sum_{i=1}^r \sigma_i = 1, \quad \sigma_i \geq 0, \quad \sum_{j=1}^p \beta_j = 1, \quad \beta_j \geq 0. \quad (5.73)$$

Para o projeto do controlador robusto, realiza-se a separação das matrizes não lineares incertas, em matrizes não lineares (modelos representados pela funções não lineares pertencentes ao conjunto convexo H_α) e matrizes incertas (falhas, modelos representados pela combinação convexa de politopos), sendo que os modelos obtidos são utilizados nas LMIs responsáveis pelos projetos dos controladores. Isto é visto na próxima seção.

5.5 Projeto de Controlador por Realimentação da Derivada do Vetor de Estado

Considere o seguinte sistema:

$$\dot{x}(t) = A(\sigma, \beta)x(t) + B(\sigma, \beta)u(t) \quad (5.74)$$

sendo $A(\sigma, \beta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(\sigma, \beta) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, matrizes que contém as não linearidades que dependem de σ e as incertezas politópicas que dependem de β , $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle e $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado do sistema.

Neste sistema o parâmetro β é desconhecido (pois representa o modelo de incertezas politópicas, com ou sem falhas estruturais) porém o parâmetro σ é conhecido, e sua disponibilidade será explorada no decorrer deste trabalho.

Abordemos agora a decomposição das matrizes do sistema.

Decomposição das Matrizes $A(\sigma, \beta)$ e $B(\sigma, \beta)$

Consideremos a matriz $A(\sigma, \beta)$ com não linearidades representadas pelo parâmetro σ e incertezas politópicas representadas pelo parâmetro β , descrita da seguinte forma:

$$A(\sigma, \beta) = \begin{bmatrix} a_{11}(\sigma, \beta) & a_{12}(\sigma, \beta) & \dots & a_{1n}(\sigma, \beta) \\ a_{21}(\sigma, \beta) & a_{22}(\sigma, \beta) & \dots & a_{2n}(\sigma, \beta) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(\sigma, \beta) & a_{n2}(\sigma, \beta) & \dots & a_{nn}(\sigma, \beta) \end{bmatrix}.$$

Observação 5.1. O objetivo nesta etapa é decompor a matriz $A(\sigma, \beta)$ como a soma de somente duas matrizes $A_\sigma(\sigma)$ e $A_\beta(\beta)$. Porém pode ocorrer que em alguns sistemas, um elemento como por exemplo $a_{22}(\sigma, \beta)$, não possa ser decomposto em $a_{22}(\sigma, \beta) = a_{22\sigma}(\sigma) + a_{22\beta}(\beta)$. Nesse caso denotemos $a_{22}(\sigma, \beta) = a_{22\sigma}(\sigma) + a_{22\beta}(\beta) + a_{22\sigma_\beta}(\sigma_\beta)$. Logo será conveniente adotarmos que $A(\sigma, \beta, \sigma_\beta) = A_\sigma(\sigma) + A_\beta(\beta) + A_{\sigma_\beta}(\sigma_\beta)$.

Assim temos

$$A(\alpha, \beta) = A_\sigma(\sigma) + A_{\sigma_\beta}(\sigma_\beta) + A_\beta(\beta) = \quad (5.75)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11\sigma}(\sigma) & a_{12\sigma}(\sigma) & \dots & a_{1n\sigma}(\sigma) \\ a_{21\sigma}(\sigma) & a_{22\sigma}(\sigma) & \dots & a_{2n\sigma}(\sigma) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1\sigma}(\sigma) & a_{n2\sigma}(\sigma) & \dots & a_{nn\sigma}(\sigma) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22\sigma_\beta}(\sigma_\beta) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11\beta}(\beta) & a_{12\beta}(\beta) & \dots & a_{1n\beta}(\beta) \\ a_{21\beta}(\beta) & a_{22\beta}(\beta) & \dots & a_{2n\beta}(\beta) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1\beta}(\beta) & a_{n2\beta}(\beta) & \dots & a_{nn\beta}(\beta) \end{bmatrix}.$$

Observação 5.2. O elemento $a_{22}(\sigma, \beta)$ é definido como sendo um elemento da matriz $A(\sigma, \beta)$ que possui uma não linearidade com incerteza politópica e não é possível, ou conveniente, efetuar sua decomposição. Um exemplo será apresentado no decorrer deste trabalho. Portanto, foi adicionada às matrizes $A_\sigma(\sigma)$ e $A_\beta(\beta)$ uma nova matriz, $A_{\sigma_\beta}(\sigma_\beta)$, que possui uma não linearidade dependente de uma incerteza politópica.

Considere agora a matriz $B(\sigma, \beta)$ que pode ser decomposta como soma de matrizes que contém não linearidades σ e matrizes com incertezas politópicas β , da seguinte maneira:

$$B(\sigma, \beta) = \begin{bmatrix} b_{11}(\sigma, \beta) & \dots & b_{1m}(\beta) \\ b_{21}(\sigma, \beta) & \dots & b_{2m}(\sigma) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}(\beta) & \dots & b_{nm}(\beta) \end{bmatrix}.$$

Analogamente ao que foi feito em $A(\sigma, \beta)$, a decomposição da matriz $B(\sigma, \beta)$ em parte não linear B_σ e parte das incertezas politópicas B_β é dada da seguinte forma:

$$B(\sigma, \beta) = B_\sigma(\sigma) + B_\beta(\beta) + B_{\sigma_\beta}(\sigma_\beta) + =$$

$$\begin{bmatrix} b_{11\sigma}(\sigma) & \dots & b_{1m\sigma}(\sigma) \\ b_{21\sigma}(\sigma) & \dots & b_{2m\sigma}(\sigma) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1\sigma}(\sigma) & \dots & b_{nm\sigma}(\sigma) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ b_{21\sigma_\beta}(\sigma_\beta) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11\beta}(\beta) & \dots & b_{1m\beta}(\beta) \\ b_{21\beta}(\beta) & \dots & b_{2m\beta}(\beta) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1\beta}(\beta) & \dots & b_{nm\beta}(\beta) \end{bmatrix}.$$

Então, após as decomposições das matrizes podemos concluir que as matrizes podem ser dadas da seguinte forma:

$$A(\sigma, \beta) = A_\sigma(\sigma) + A_\beta(\beta) + A_{\sigma_\beta}(\sigma_\beta) \text{ e } B(\sigma, \beta) = B_\sigma(\sigma) + B_\beta(\beta) + B_{\sigma_\beta}(\sigma_\beta).$$

Observação 5.3. Se existir um elemento de um sistema não linear qualquer, descrito como $e_{ij}(\sigma, \beta)$, tal que, seja uma combinação não linear (σ) com incertezas politópicas (β), então esse elemento deverá ser separado em $e_{ij}(\sigma, \beta) = e_{ij}(\sigma) + e_{ij}(\beta)$. Caso isto não seja possível, o método proposto mantém sua eficácia e aplicabilidade.

Observação 5.4. Quanto aos elementos constantes a_{ij} e b_{ij} das matrizes $A(\sigma, \beta)$ e $B(\sigma, \beta)$, respectivamente, podemos alocá-los em qualquer matriz resultante da decomposição $A(\sigma)$ ou $A(\beta)$, $B(\sigma)$ ou $B(\beta)$, respectivamente. Outra opção é dividir seu valor em ambas as matrizes, com o objetivo de evitar matrizes nulas (evitando assim a não controlabilidade na parcela). Em ambas possibilidades, não ocorre alteração no resultado final.

O sistema pode ser assim representado:

$$\dot{x}(t) = A(\sigma, \beta)x(t) + B(\sigma, \beta)u(t),$$

considerando a decomposição, temos

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \left(A_\sigma(\sigma) + A_\beta(\beta) + A_{\sigma_\beta}(\sigma_\beta) \right) x(t) + \left(B_\sigma(\sigma) + B_{\sigma_\beta}(\sigma_\beta) + B_\beta(\beta) \right) u(t), \\ &= \left(\sum_{i=1}^r \sigma_i A_{\sigma_i} + \sum_{j=1}^p \beta_j A_{\beta_j} + \sum_{k=1}^q \sigma_{\beta_k} A_{\sigma_{\beta_k}} \right) x(t) + \left(\sum_{i=1}^r \sigma_i B_{\sigma_i} + \sum_{j=1}^p \beta_j B_{\beta_j} + \sum_{k=1}^q \sigma_{\beta_k} B_{\sigma_{\beta_k}} \right) u(t),\end{aligned}$$

sendo

$$\sum_{k=1}^q \sigma_{\beta_k} A_{\sigma_{\beta_k}} = \sum_{k=1}^q \left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^p \sigma_i \beta_j A_{\sigma_i, \beta_j, k} \right),$$

e

$$\begin{aligned}\sigma_i \geq 0, \quad \beta_j \geq 0, \quad \sigma_{\beta_k} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^r \sigma_i = 1, \quad \sum_{j=1}^p \beta_j = 1, \\ i = 1, 2, \dots, r, \quad j = 1, 2, \dots, p, \quad k = 1, 2, \dots, q.\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_\beta(\beta)x(t) + (A_\sigma(\sigma) + A_{\sigma_\beta}(\sigma_\beta))x(t) \\ &= A_\beta(\beta)x(t) + h(t, x),\end{aligned}$$

sendo

$$h(t, x) = \left(\sum_{i=1}^r \sigma_i A_{\sigma_i} + \sum_{k=1}^q \left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^p \sigma_i \beta_j A_{\sigma_i, \beta_j, k} \right) \right) x(t)$$

e como $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_p = 1$, então

$$h(t, x) = \sum_{i=1}^r \sigma_i \left(\sum_{j=1}^p \beta_j \left(A_{\sigma_i} + \sum_{k=1}^q A_{\sigma_i, \beta_j, k} \right) \right) x(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\beta),$$

sendo

$$h_i(\beta) = \sigma_i \sum_{j=1}^p \beta_j \left(A_{\sigma_i} + \sum_{k=1}^q A_{\sigma_i, \beta_j, k} \right) x(t).$$

Assim, como foi suposto no Teorema 5.1, considere a existência de matrizes constantes H_{β_i} e escalares $\alpha_i > 0$ tais que,

$$h_i^T(\beta) h_i(\beta) \leq \alpha_i^2 x^T H_{\beta_i}^T H_{\beta_i} x, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

sendo que

$$H_{\beta_i} = \sum_{j=1}^p \beta_j \left(A_{\sigma_i} + \sum_{k=1}^q A_{\sigma_i, \beta_j, k} \right) = \sum_{j=1}^p \beta_j H_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Realmente, pois como $\sigma_i \in [0, 1]$, $\sigma_i^2 \in [0, 1]$ e assim, note que

$$\begin{aligned} h_i^T(\beta)h_i(\beta) &= \left(\sigma_i \sum_{j=1}^p \beta_j H_{ij} x \right)^T \left(\sigma_i \sum_{j=1}^p \beta_j H_{ij} x \right) \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^p \beta_j H_{ij} x \right)^T \left(\sum_{j=1}^p \beta_j H_{ij} x \right) \\ &\leq \alpha_i^2 x^T H_{\beta_i}^T H_{\beta_i} x, \quad i = 1, 2, \dots, r. \end{aligned}$$

5.5.1 Análise de Estabilidade Robusta de Sistemas Livres com Múltiplas Não Linearidades e Incertezas Politópicas

Considere o sistema não linear incerto invariante no tempo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\sigma, \beta)x(t) = (A_\sigma(\sigma) + A_\beta(\beta) + A_{\sigma\beta}(\sigma, \beta))x(t) \\ &= \left(\sum_{i=1}^r \sigma_i A_{\sigma_i} + \sum_{j=1}^p \beta_j A_{\beta_j} + \sum_{k=1}^q \sigma_{\beta_k} A_{\sigma_{\beta_k}} \right) x(t), \end{aligned} \quad (5.76)$$

Teorema 5.5. *O sistema (5.76) é robustamente estável com grau $(\bar{\alpha})$ se o problema de otimização é factível.*

$$\begin{aligned} \min \quad & \bar{\gamma} \\ \text{s.a} \quad & P > 0 \\ & \begin{bmatrix} A_{\beta_j}^T P + P A_{\beta_j} & P & H_{1j}^T & \dots & H_{rj}^T \\ P & -I & 0 & \dots & 0 \\ H_{1j} & 0 & -I\gamma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{rj} & 0 & 0 & \dots & -I\gamma_n \end{bmatrix} < 0, \quad j = 1, 2, \dots, p, \end{aligned} \quad (5.77)$$

sendo que

$$\begin{aligned} H_{ij} &= A_{\sigma_i} + \sum_{k=1}^q A_{\sigma_i, \beta_j, k}, \\ \bar{\gamma} &= \sum_{i=1}^r \gamma_i, \quad \gamma_i = (r\alpha_i^2)^{-1} > 0, \quad i = 1, \dots, r \text{ e } P = P^T. \end{aligned}$$

Prova: Aplicando-se o Teorema 5.1 ao sistema (5.76), note que (5.8) é dada por

$$\sum_{j=1}^p \beta_j \begin{bmatrix} A_{\beta_i}^T P + P A_{\beta_i} & P & H_{1j}^T & \dots & H_{rj}^T \\ P & -I & 0 & \dots & 0 \\ H_{1j} & 0 & -I\gamma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{rj} & 0 & 0 & \dots & -I\gamma_n \end{bmatrix} < 0, \quad j = 1, 2, \dots, p,$$

sendo que $\gamma_i = (r\sigma_i^2)^{-1}$ e $P = P^T$, considerando que $\beta_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, p$ e $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_p = 1$.

Como visto anteriormente,

$$H_{ij} = A_{\sigma_i} + \sum_{k=1}^q A_{\sigma_i, \beta_j, k}$$

as condições acima são equivalentes à condição dada em (5.77) e o teorema está demonstrado.

5.5.2 Projeto de Controlador Robusto com $u(t) = -K\dot{x}(t)$, Múltiplas Não linearidades e Incertezas Politópicas

Consideremos o sistema não linear invariante no tempo definido por

$$\dot{x}(t) = A(\sigma, \beta)x(t) + B(\sigma, \beta)u(t). \quad (5.78)$$

Considerando a decomposição (5.75), temos

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A_\sigma(\sigma) + A_{\sigma_\beta}(\sigma_\beta) + A_\beta(\beta))x(t) + (B_\sigma(\sigma) + B_{\sigma_\beta}(\sigma_\beta) + B_\beta(\beta))u(t), \\ &= \left(\sum_{i=1}^r \sigma_i A_{\sigma_i} + \sum_{k=1}^q \sigma_{\beta_k} A_{\sigma_{\beta_k}} + \sum_{j=1}^p \beta_j A_{\beta_j} \right) x(t) + \left(\sum_{i=1}^r \sigma_i B_{\sigma_i} + \sum_{k=1}^q \sigma_{\beta_k} B_{\sigma_{\beta_k}} + \sum_{j=1}^p \beta_j B_{\beta_j} \right) u(t), \end{aligned}$$

sendo a lei controle dada por

$$u(t) = -K\dot{x}(t). \quad (5.79)$$

Então o sistema em malha fechada é definido por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \left(I + \left(\sum_{i=1}^r \sigma_i B_{\sigma_i} + \sum_{k=1}^q \sigma_{\beta_k} B_{\sigma_{\beta_k}} + \sum_{j=1}^p \beta_j B_{\beta_j} \right) K \right)^{-1} \left(\sum_{j=1}^p \beta_j A_{\beta_j} \right) x(t) + \\ &\quad \left(I + \left(\sum_{i=1}^r \sigma_i B_{\sigma_i} + \sum_{j=1}^p \beta_j B_{\beta_j} + \sum_{k=1}^q \sigma_{\beta_k} B_{\sigma_{\beta_k}} \right) K \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^r \sigma_i A_{\sigma_i} + \sum_{k=1}^q \sigma_{\beta_k} A_{\sigma_{\beta_k}} \right) x(t), \end{aligned}$$

onde considera-se que

$$\det \left(I + \left(\sum_{i=1}^r \sigma_i B_{\sigma_i} + \sum_{j=1}^p \beta_j B_{\beta_j} + \sum_{k=1}^q \sigma_{\beta_k} B_{\sigma_{\beta_k}} \right) K \right) \neq 0.$$

Então temos que

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \left(I + (B_{\sigma}(\sigma) + B_{\beta}(\beta))K \right)^{-1} (A_{\beta}(\beta))x(t) + \\ & \left(I + (B_{\sigma}(\sigma) + B_{\beta}(\beta) + B_{\sigma_{\beta}}(\sigma_{\beta}))K \right)^{-1} \left(A_{\sigma}(\sigma) + A_{\sigma_{\beta}}(\sigma_{\beta}) \right) x(t), \end{aligned}$$

Logo

$$\dot{x}(t) = (I + B(\sigma, \beta)K)^{-1} A_{\beta}(\beta)x(t) + (I + B(\sigma, \beta)K)^{-1} (A(\sigma, \sigma_{\beta}))x(t). \quad (5.80)$$

Observação 5.5. Com o objetivo de facilitar a notação que utilizaremos no decorrer deste trabalho, torna-se interessante considerar uma mudança de notação, que não altere os resultados, mas possibilite a adoção dos conceitos utilizados na literatura.

Notação: Consideremos as matrizes resultantes da decomposição de $A(\sigma, \beta)$ com as não-linearidades da seguinte forma:

$$A(\sigma, \sigma_{\beta_k}) = A_{\sigma}(\sigma) + A_{\sigma_{\beta_k}}(\sigma_{\beta_k}) = H(\sigma, \sigma_{\beta_k}) = H_{\sigma}(\sigma) + H_{\sigma_{\beta_k}}(\sigma_{\beta_k}),$$

onde a matriz $H_{\sigma}(\sigma)$ representa as matrizes que contém as não linearidades e $H_{\sigma_{\beta_k}}(\sigma_{\beta_k})$ representa as matrizes que possuem não linearidades e incertezas politópicas.

Observe que o projeto de controladores para sistemas usando realimentação da derivada do vetor de estado, deve levar em consideração que a matriz $(I + B(\sigma, \beta)K)$ seja invertível, ou seja, não singular (ASSUNÇÃO et al., 2007a).

Definição 5.4. O sistema (5.78) é robustamente estabilizável pela lei de controle (5.79) se o sistema (5.80) é robustamente estável com grau $\bar{\alpha}$.

Teorema 5.6. O sistema (5.78) é robustamente estabilizável pela lei de controle (5.79), com

$B(\alpha, \beta) = B(\beta)$, se o problema de otimização é factível

$$\begin{aligned} \min \quad & \bar{\gamma} \\ \text{s.a} \quad & X > 0 \\ & \begin{bmatrix} A_{\beta_j}(X + B_{\beta_j}M)^T + (X + B_{\beta_j}M)A_{\beta_j}^T & I & (X + B_{\beta_j}M)H_{1j}^T & \dots & (X + B_{\beta_j}M)H_{rj}^T \\ I & -I & 0 & \dots & 0 \\ H_{1j}(X + B_{\beta_j}M)^T & 0 & -I\gamma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{rj}(X + B_{\beta_j}M)^T & 0 & 0 & 0 & -I\gamma_n \end{bmatrix} < 0, \end{aligned} \quad (5.81)$$

sendo

$$H_{ij} = A_{\sigma_i} + \sum_{k=1}^q A_{\sigma_i, \beta_j, k}, \quad j = 1, 2, \dots, p,$$

$$\bar{\gamma} = \sum_{i=1}^r \gamma_i, \quad \gamma_i = (r\alpha_i^2)^{-1} > 0, \quad i = 1, \dots, r \text{ e } X = X^T.$$

Além disso, quando (5.81) é factível, então a matriz de ganho de realimentação da derivada do vetor de estado é dada por

$$K = MX^{-1}, \quad (5.82)$$

sendo $(I + B(\beta)K)$ invertível.

Prova: Aplicando-se o Teorema 5.2 ao sistema (5.79) e (5.80), note que (5.19) e (5.20) são dadas por

$$\sum_{j=1}^p \beta_j \begin{bmatrix} A_{\beta_j}(X + B_{\beta_j}M)^T + (X + B_{\beta_j}M)A_{\beta_j}^T & I & (X + B_{\beta_j}M)H_{1j}^T & \dots & (X + B_{\beta_j}M)H_{rj}^T \\ I & -I & 0 & \dots & 0 \\ H_{1j}(X + B_{\beta_j}M)^T & 0 & -I\gamma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{rj}(X + B_{\beta_j}M)^T & 0 & 0 & 0 & -I\gamma_n \end{bmatrix} < 0,$$

sendo $\gamma_i = (r\sigma_i^2)^{-1}$ e $X = X^T$, considerando que $\beta_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, p$ e $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_p = 1$.

Tendo em vista que

$$H_{ij} = A_{\sigma_i} + \sum_{k=1}^q A_{\sigma_i, \beta_j, k}$$

as condições acima são equivalentes à condição dada em (5.81) e o teorema está demonstrado.

Teorema 5.7. O sistema (5.78) é robustamente estabilizável pela lei de controle (5.79) com $B(\alpha, \beta) = B(\beta)$ e tem taxa de decaimento maior ou igual a ϕ se o problema de otimização é

factível

$$\begin{aligned}
 & \min \quad \bar{\gamma} \\
 & \text{s.a} \quad X > 0 \\
 & \left[\begin{array}{cccccc}
 A_{\beta_j} Q_{\beta_j}^T + Q_{\beta_j} A_{\beta_j}^T & I & Q_{\beta_j} & Q_{\beta_j} H_{1j}^T & \dots & Q_{\beta_j} H_{rj}^T \\
 I & -I & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 Q_{\beta_j}^T & 0 & \frac{-X}{2\phi} & 0 & \dots & 0 \\
 H_{1j} Q_{\beta_j}^T & 0 & 0 & -I\gamma_1 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 H_{rj} Q_{\beta_j}^T & 0 & 0 & 0 & \dots & -I\gamma_n
 \end{array} \right] < 0, \quad j = 1, 2, \dots, p
 \end{aligned} \quad (5.83)$$

sendo

$$Q_{\beta_j} = (X + B_{\beta_j} M), \quad H_{ij} = A_{\sigma_i} + \sum_{k=1}^q A_{\sigma_i, \beta_j, k},$$

$$\bar{\gamma} = \sum_{i=1}^r \gamma_i, \quad \gamma_i = (r\alpha_i^2)^{-1} > 0, \quad i = 1, \dots, r, \quad \phi > 0 \text{ e } X = X^T.$$

Além disso, quando (5.83) é factível, a matriz de ganho da realimentação da derivada do vetor de estado é dada por

$$K = MX^{-1}, \quad (5.84)$$

sendo $(I + B(\beta)K)$ invertível.

Prova: Aplicando-se o Teorema 5.3 ao sistema (5.79) e (5.80), note que (5.31) e (5.32) são dadas por

$$\begin{aligned}
 & \min \quad \bar{\gamma} \\
 & \text{s.a} \quad X > 0 \\
 & \sum_{j=1}^p \beta_j \left[\begin{array}{cccccc}
 A_{\beta_j} Q_{\beta_j}^T + Q_{\beta_j} A_{\beta_j}^T & I & Q_{\beta_j} & Q_{\beta_j} H_{1j}^T & \dots & Q_{\beta_j} H_{rj}^T \\
 I & -I & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 Q_{\beta_j}^T & 0 & \frac{-X}{2\phi} & 0 & \dots & 0 \\
 H_{1j} Q_{\beta_j}^T & 0 & 0 & -I\gamma_1 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 H_{rj} Q_{\beta_j}^T & 0 & 0 & 0 & \dots & -I\gamma_n
 \end{array} \right] < 0, \quad j = 1, 2, \dots, p,
 \end{aligned}$$

sendo que $\gamma_i = (r\sigma_i^2)^{-1} > 0$, $\phi > 0$ e $X = X^T$, considerando que $\beta_j \geq 0$, $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_p = 1$ e $Q_{\beta_j} = (X + B_{\beta_j} M)$

Como visto anteriormente,

$$H_{ij} = A_{\sigma_i} + \sum_{k=1}^q A_{\sigma_i, \beta_j, k}$$

as condições acima são equivalentes à condição dada em (5.83) e o teorema está demonstrado.

Teorema 5.8. *O sistema (5.78) é robustamente estabilizável pela lei de controle (5.79) com $B(\alpha, \beta) = B(\beta)$ se o problema de otimização é factível*

$$\begin{aligned}
 & \min \quad \bar{\gamma} \\
 & \text{s.a} \quad X > 0 \\
 & \left[\begin{array}{cccccc}
 A_{\beta_j}(X + B_{\beta_j}M)^T + (X + B_{\beta_j}M)A_{\beta_j}^T & I & (X + B_{\beta_j}M)H_{1j}^T & \dots & (X + B_iM)H_{rj}^T \\
 & I & -I & 0 & \dots & 0 \\
 & H_{1j}(X + B_{\beta_j}M)^T & 0 & -I\gamma_1 & \dots & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 & H_{rj}(X + B_{\beta_j}M)^T & 0 & 0 & 0 & -I\gamma_n
 \end{array} \right] < 0, \\
 & \left[\begin{array}{cc}
 -K_M I & M^T \\
 M & -I
 \end{array} \right] < 0, \\
 & \left[\begin{array}{cc}
 K_X I & I \\
 I & X
 \end{array} \right] > 0,
 \end{aligned} \tag{5.85}$$

sendo

$$\bar{\gamma} = \sum_{i=1}^n \gamma_i, \quad \gamma_i = (r\alpha_i^2)^{-1} > 0, \quad \phi > 0$$

$$i = 1, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, p,$$

$$K_M > 0, \quad K_X > 0 \quad e \quad \|K^T K\| \leq K_X K_M^2.$$

Além disso, quando (5.85) é factível, a matriz de ganho da realimentação da derivada do vetor de estados é dada por

$$K = MX^{-1}, \tag{5.86}$$

sendo $(I + B(\beta)K)$ invertível.

Prova: A demonstração deste teorema é análoga à realizada em Teorema 5.6, acompanhada de (4.8) e (4.9). Por isso será aqui omitida.

5.5.3 Exemplo 3: Suspensão ativa do assento de um carro com uma não linearidade, incertezas politópicas, restrições na taxa de decaimento e na norma do controlador.

Consideremos o sistema de controle da suspensão ativa do assento de um carro (REITH-MEIER; LEITMANN, 2003), nas mesmas condições do Exemplo 1, porém aqui abordaremos incertezas politópicas. As incertezas politópicas estão relacionadas com o amortecedor do carro

(b_1) , que estará sujeito a falhas, e à massa do assento do carro (m_s), que tem valores incertos. Assim supondo que haja falha no amortecedor do sistema de suspensão do carro (b_1), tal que, $b_1 = [0; 4 \times 10^3] \text{ Ns/m}$, $b_1 = 4 \times 10^3 \text{ Ns/m}$ enquanto o amortecedor está em perfeito estado e $b_1 = 0$ quando o amortecedor está quebrado. Suponha também que a massa do motorista é incerta, sendo $70 \text{ kg} \leq m_s \leq 120 \text{ kg}$. Considere $k_m = k_1(1 + x_1^2(t))$ o termo que possui a não linearidade.

Consideremos o sistema não linear incerto

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\sigma, \beta)x(t) + B(\beta)u(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (5.87)$$

sendo

$$A(\sigma, \beta) = A_\sigma(\sigma) + A_\beta(\beta)$$

onde $A(\sigma)$ representa a matriz com as não linearidades, neste caso, $(x_1^2(t))$ e $A(\beta)$ representa a matriz com as incertezas politópicas, $(b_1 \text{ e } m_s)$.

Assim temos

$$A(\sigma, \beta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k_m - k_2}{M_c} & \frac{k_2}{M_c} & \frac{-b_1 - b_2}{M_c} & \frac{b_2}{M_c} \\ \frac{k_2}{m_s} & \frac{-k_2}{m_s} & \frac{b_2}{m_s} & \frac{-b_2}{m_s} \end{bmatrix}, B_\beta(\beta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{M_c} & \frac{-1}{M_c} \\ 0 & \frac{1}{m_s} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O sistema pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_\beta(\beta)x(t) + B_\beta(\beta)u(t) + A_\sigma(\sigma)x(t), \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (5.88)$$

sendo que

$$A_\beta(\beta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k_1 - k_2}{M_c} & \frac{k_2}{M_c} & \frac{-b_1 - b_2}{M_c} & \frac{b_2}{M_c} \\ \frac{k_2}{m_s} & \frac{-k_2}{m_s} & \frac{b_2}{m_s} & \frac{-b_2}{m_s} \end{bmatrix}, B_\beta(\beta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{M_c} & \frac{-1}{M_c} \\ 0 & \frac{1}{m_s} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_\sigma(\sigma)x(t) = h(t, x) = x_1^2(t)Hx(t) = x_1^2(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-k_1}{M_c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}.$$

Do Teorema 5.6 os seguintes modelos locais são obtidos, considerando-se os vértices do politopo:

$$\begin{aligned} (b_1 \text{ (Ns/m)}, m_s \text{ (kg)}) &= A_{\beta_1} : (0, 70), & A_{\beta_2} : (4 \times 10^3, 70), \\ &A_{\beta_3} : (4 \times 10^3, 120), & A_{\beta_4} : (0, 120) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{\beta_1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -30 & 3,3333 & -3 & 0,3333 \\ 71,4286 & -71,4286 & 7,1429 & -7,1429 \end{bmatrix}, \\ A_{\beta_2} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -30 & 3,3333 & -0,3333 & 0,3333 \\ 71,4286 & -71,4286 & 7,1429 & -7,1429 \end{bmatrix}, \\ A_{\beta_3} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -30 & 3,3333 & -3 & 0,3333 \\ 41,6667 & -41,6667 & 4,1667 & -4,1667 \end{bmatrix}, \\ A_{\beta_4} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -30 & 3,3333 & -0,3333 & 0,3333 \\ 41,6667 & -41,6667 & 4,1667 & -4,1667 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

(5.89)

Analogamente, para a matriz B tem-se os vértices do politopo:

$$(m_s \text{ (kg)}) = B_{\beta_1} : (70), \quad B_{\beta_2} : (120)$$

$$B_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0007 & -0,0007 \\ 0 & 0,0143 \end{bmatrix}, \quad B_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0007 & -0,0007 \\ 0 & 0,0083 \end{bmatrix}.$$

• Entrada de controle $u(t) = -K\dot{x}(t)$

• • Teorema 5.6

As matrizes P e de ganho do controlador projetado obtidos foram as seguintes:

$$P = \begin{bmatrix} 123.3278 & 31.6863 & 6.8882 & 12.3033 \\ 31.6863 & 15.8852 & 1.8329 & 4.7336 \\ 6.8882 & 1.8329 & 0.4314 & 0.7440 \\ 12.3033 & 4.7336 & 0.7440 & 1.8121 \end{bmatrix},$$

$$K = 10^4 \begin{bmatrix} 2.6828 & 0.8156 & 0.0039 & 0.2849 \\ 0.9608 & 0.3299 & 0.0585 & 0.1264 \end{bmatrix} \quad (5.90)$$

Os valores de γ , α e $\|K\|$ obtidos para o sistema (5.88) com controlador projetado (5.90) por meio do Teorema 5.6 são descritos na tabela a seguir:

Tabela 5.9: Valores de γ , α e $\|K\|$ do Exemplo 3.

γ_1	α_1	$\ K\ $
0,0130	8,7706	$2,9984 \times 10^4$

Portanto obtêm-se o seguinte conjunto

$$H_{8,7706} = \{h : h^T h \leq 76,9231 x^T H^T H x\}$$

Para a análise do comportamento do sistema, foram utilizadas as condições $x(0) = x(9) = x(15) = x(24) = [0, 1 \ 0, 15 \ 0 \ 0]^T$, a simulação do sistema em malha fechada (5.88) com o controlador (5.90), é mostrada na Figura 5.16. A tabela abaixo visa esclarecer com detalhes os momentos da simulação, onde ilustraremos falhas no amortecedor:

Tabela 5.10: Simulação com falha no amortecedor b_1 e m_s incerta.

Tempo (s)	m_s (kg)	b_1
0 $\vdash$ 9	70	funcionando ($b_1 = 4 \times 10^3$ Ns/m)
9 $\vdash$ 15	70	não funcionando ($b_1 = 0$)
15 $\vdash$ 24	120	funcionando ($b_1 = 4 \times 10^3$ Ns/m)
24 $\vdash$ 32	120	não funcionando ($b_1 = 0$)

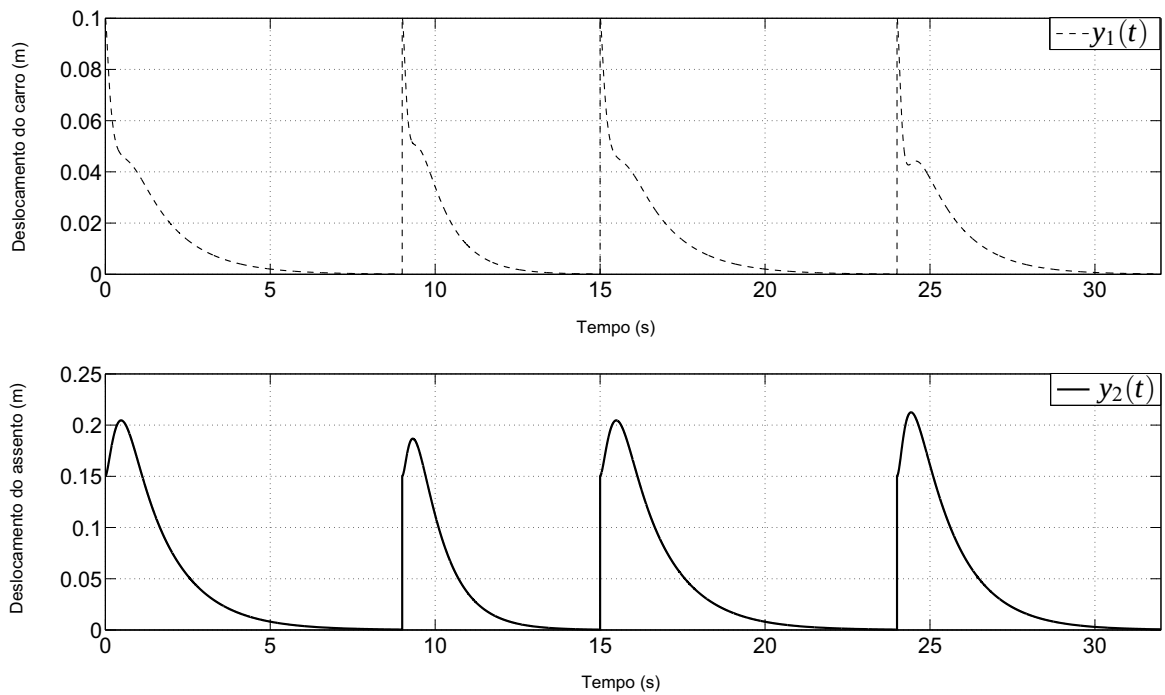


Figura 5.16: Simulação do sistema realimentado com incertezas politópicas e uma não linearidade, com o controlador com objetivo de estabilidade.

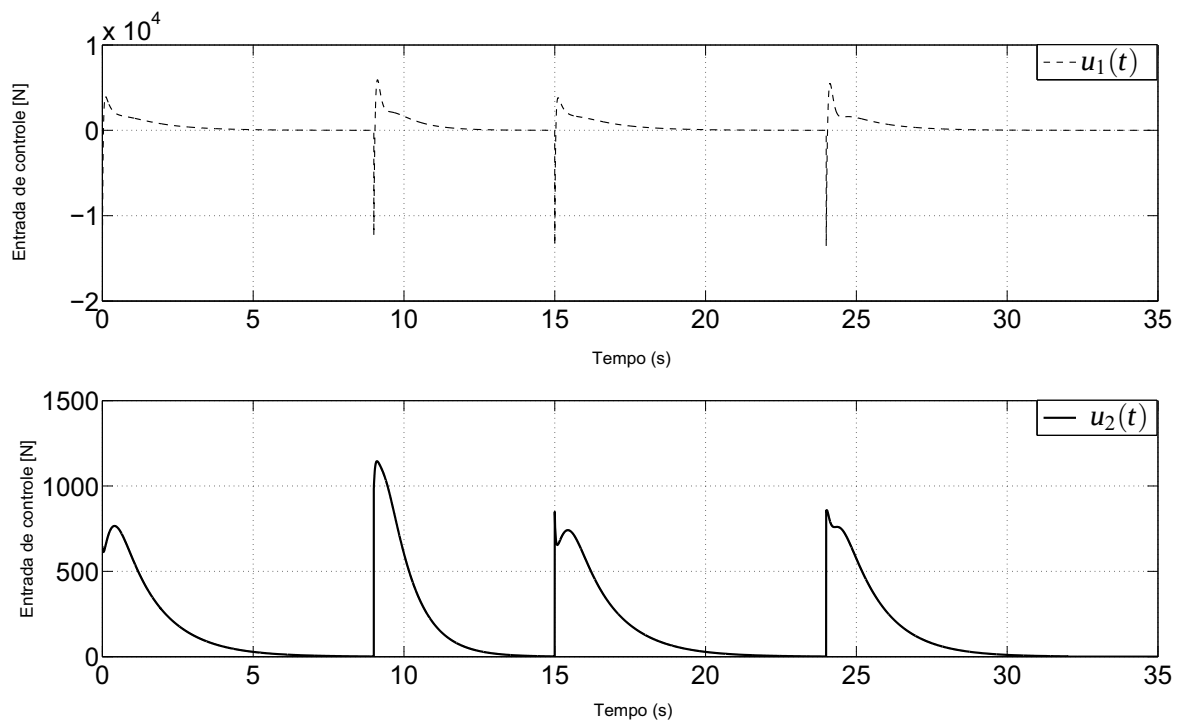


Figura 5.17: Simulação do sinal de controle do sistema realimentado com incertezas politópicas e uma não linearidade.

Comentários

Percebeu-se que na Figura 5.16 a dinâmica do sistema é mantida, mesmo diante de perturbações, como foi descrito pela Tabela 5.9. A eficácia do controlador fica assim evidenciada. Note que obteve-se o conjunto $H_\alpha = H_{8,7706}$ para o sistema. Utilizamos o Teorema 5.7 para inserir a restrição na taxa de decaimento do sistema.

- Entrada de controle $u(t) = -K\dot{x}(t)$

- • Teorema 5.7

As matrizes P e de ganho do controlador projetado obtidos foram as seguintes:

$$P = \begin{bmatrix} 8,1711 & -0,0280 & 0,0015 & -0,0050 \\ -0,0280 & 0,1211 & 0,0000 & 0,0255 \\ 0,0015 & 0,0000 & 0,0001 & 0,0000 \\ -0,0050 & 0,0255 & 0,0000 & 0,0093 \end{bmatrix},$$

$$K = 10^3 \begin{bmatrix} 0,4105 & 0,0111 & -1,4995 & -0,0932 \\ 0,4085 & 1,2553 & 0,0001 & 0,1747 \end{bmatrix}. \quad (5.91)$$

Para a análise do comportamento do sistema, foram utilizadas as condições $x(0) = x(1,5) = x(3,0) = x(4,5) = [0,1 \ 0,15 \ 0 \ 0]^T$, as simulações do sistema em malha fechada (5.88) com os controladores (5.91) estão ilustrados pela Figura 5.18.

Os valores de γ , α e $\|K\|$ obtidos para o sistema (5.88) por meio do Teorema 5.7 são descritos na tabela a seguir:

Tabela 5.11: Valores de γ , α , ϕ e $\|K\|$ do Exemplo 3.

γ	α	ϕ	$\ K\ $
0,017	7,6696	1	$1,5701 \times 10^3$

Portanto obtêm-se o seguinte conjunto

$$H_{7,6696} = \{h : h^T h \leq \alpha^2 x^T H^T H x\} = \{h : h^T h \leq 58,8227 x^T H^T H x\}$$

Tabela 5.12: Simulação com falha no amortecedor b_1 e m_s incerta, do Exemplo 3

Tempo (s)	m_s (kg)	b_1
0,0 ┤ 1,5	70	funcionando ($b_1 = 4 \times 10^3$ Ns/m)
1,5 ┤ 3,0	70	não funcionando ($b_1 = 0$)
3,0 ┤ 4,5	120	funcionando ($b_1 = 4 \times 10^3$ Ns/m)
4,5 ┤ 6,0	120	não funcionando ($b_1 = 0$)

Para a condição inicial $x(0) = [0,1 \ 0,15 \ 0 \ 0]^T$, a simulação do sistema em malha fechada (5.88) com o controlador (5.91) está ilustrada na Figura 5.18.

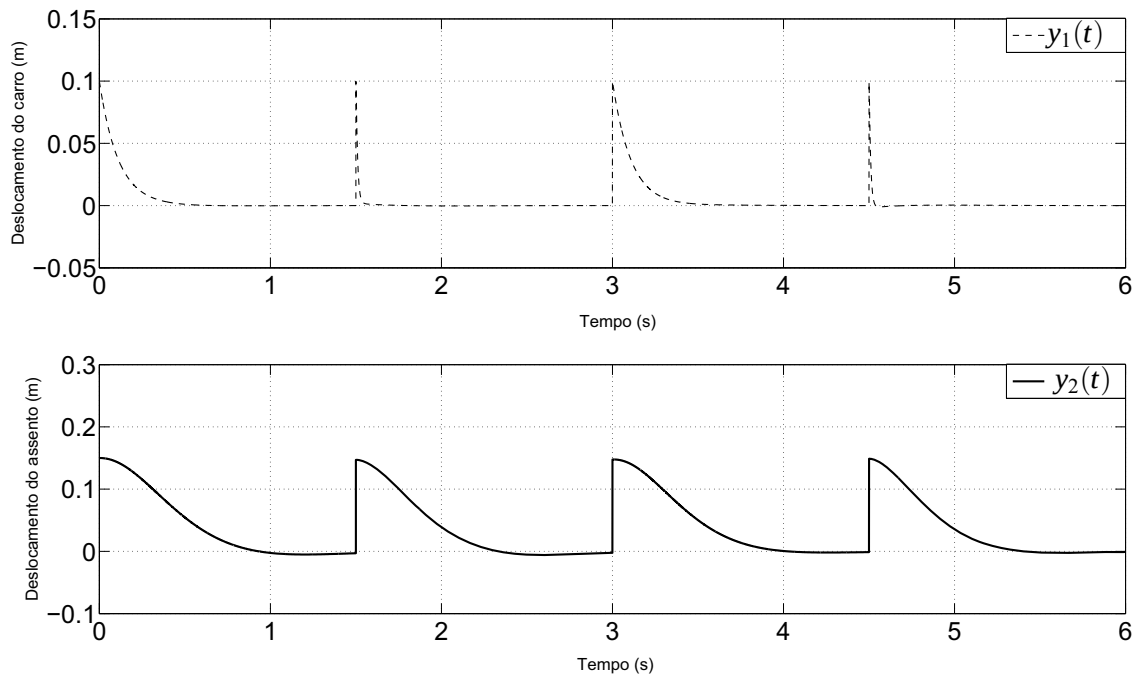


Figura 5.18: Simulação do sistema realimentado com incertezas politópicas e uma não linearidade, com o controlador com objetivo de estabilidade e taxa de decaimento.

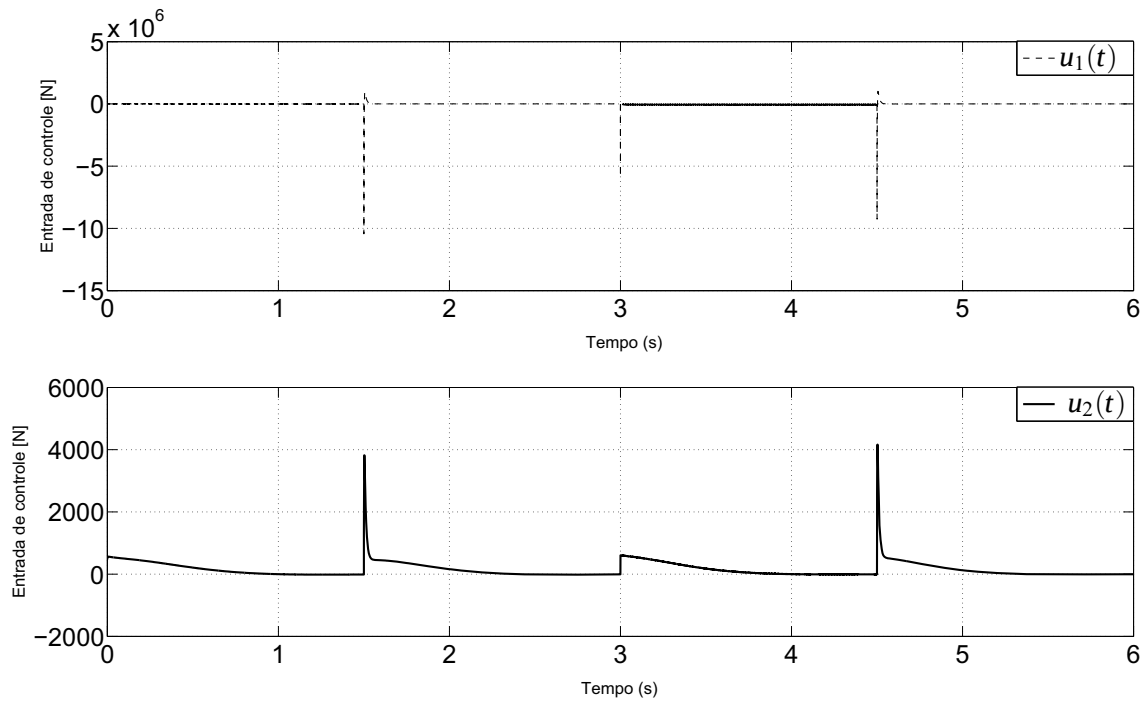


Figura 5.19: Simulação do sinal de controle do sistema realimentado com incertezas politópicas e uma não linearidade.

Comentários

Pela Figura 5.18 observa-se redução no tempo de estabelecimento do sistema controlado, passando para aproximadamente 1,5 s. Assim tem-se atendido o desempenho desejado do controlador. Observe que o conjunto $H_{7,6696}$ proporcionou ao sistema uma maior factibilidade a não linearidades (perturbações). Contudo, a magnitude do sinal de controle apresenta valores de 10^6 N e 6×10^3 N para as componentes $u_1(t)$ e $u_2(t)$, respectivamente, como pode ser visto na Figura 5.19. Na busca por reduzir este esforço realizado pelo controlador, utiliza-se o Teorema 5.8.

- Entrada de controle $u(t) = -K\dot{x}(t)$
- • Teorema 5.8

As matrizes P e de ganho do controlador projetado obtidos e os parâmetros K_M e K_X foram os seguintes:

$$P = \begin{bmatrix} 0,0960 & 0,0039 & 0,0007 & -0,0004 \\ 0,0039 & 0,0018 & 0,0007 & 0,0001 \\ 0,0007 & 0,0007 & 0,0036 & 0,0003 \\ -0,0004 & 0,0001 & 0,0003 & 0,0001 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} 877,8320 & 32,8762 & -1,2569 & -4,6184 \\ 344,6821 & 24,6115 & 24,5490 & 0,6263 \end{bmatrix}. \quad (5.92)$$

$$K_M = 4,992 \times 10^6 \quad \text{e} \quad K_X = 6,182 \times 10^5$$

Os valores de γ , α e $\|K\|$ obtidos para o sistema (5.88) por meio do Teorema 5.8 são descritos na tabela a seguir:

Tabela 5.13: Valores de γ , α e $\|K\|$ do Exemplo 3

γ	α	$\ K\ $
25	0,2	943,9495

Portanto obtêm-se o seguinte conjunto

$$H_{0,2} = \{h : h^T h \leq \alpha^2 x^T H^T H x\} = \{h : h^T h \leq 0,04 x^T H^T H x\}$$

Consideremos agora o caso em que haja falha no amortecedor e variação da massa. A tabela abaixo visa esclarecer com detalhes os momentos da simulação:

Tabela 5.14: Simulação com falha no amortecedor b_1 e m_s incerta, do Exemplo 3

Tempo (s)	m_s (kg)	b_1
0 $\vdash$ 20	70	funcionando ($b_1 = 4 \times 10^3 \text{ Ns/m}$)
20 $\vdash$ 40	70	não funcionando ($b_1 = 0$)
40 $\vdash$ 60	120	funcionando ($b_1 = 4 \times 10^3 \text{ Ns/m}$)
60 $\vdash$ 80	120	não funcionando ($b_1 = 0$)

Para a análise do comportamento do sistema, foram utilizadas as condições $x(0) = x(20) = x(40) = x(60) = [0, 1 \ 0, 15 \ 0 \ 0]^T$, as simulações do sistema em malha fechada (5.88) com os controladores (5.92) estão ilustrados pelas Figuras 5.20 e 5.21.

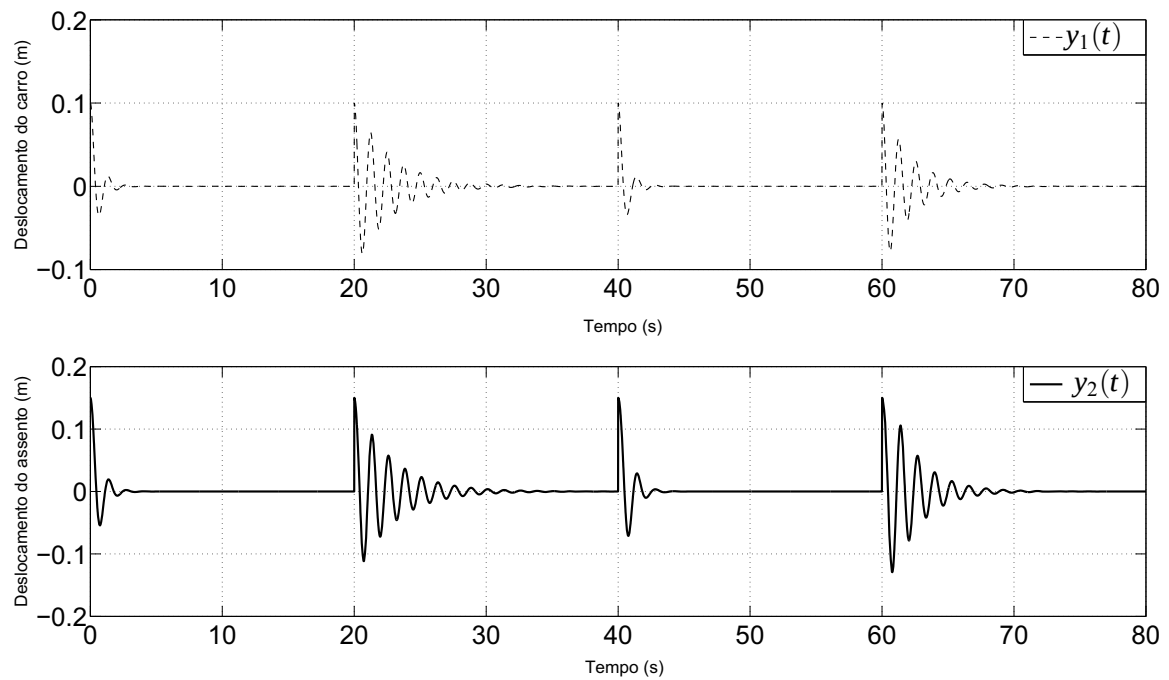


Figura 5.20: Simulação do sistema realimentado com incertezas politópicas e uma não linearidade, com restrição na norma do controlador.

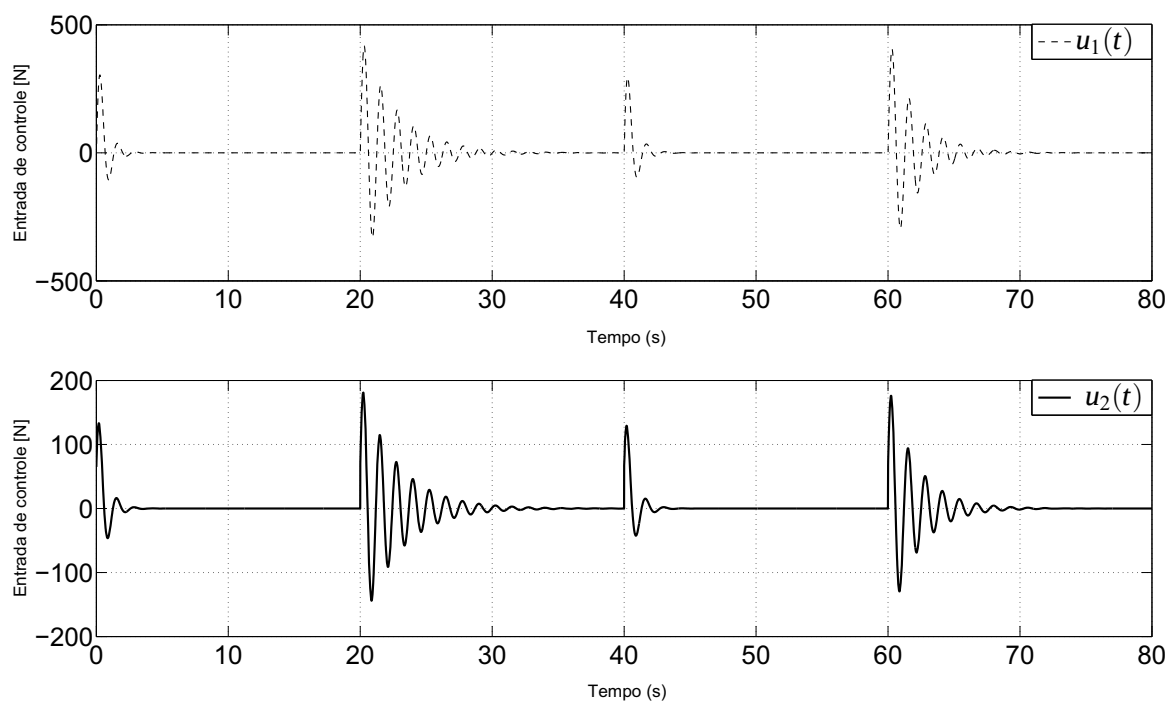


Figura 5.21: Simulação do sinal de controle do sistema realimentado com incertezas politópicas e uma não linearidade.

Comentários

Através da Figura 5.21 pode-se perceber que a magnitude do sinal de controle foi atenuada. O tempo de estabelecimento do sistema controlado é de aproximadamente 3 s quando não ocorrem falhas nos amortecedores, e de 13 s quando o amortecedor b_1 apresenta falhas. Assim observamos que o tempo de estabelecimento do sistema controlado é menor que o tempo de estabelecimento do sistema original, como pode ser observado pelas Figuras 5.16. Os conjuntos de tolerância obtidos foram: as LMIs (5.81) e (5.82) geraram o conjunto de tolerância $H_{1,2910}$, já as LMIs (5.83) e (5.84) geraram o conjunto $H_{7,6696}$, por fim, as LMIs (5.85) e (5.86) geraram o conjunto $H_{0,2}$.

5.5.4 Exemplo 4: Suspensão ativa do assento de um carro com duas não linearidades e com incertezas politópicas, restrições na taxa de decaimento e na norma do controlador.

Consideremos o sistema de controle da suspensão ativa do assento de um carro (REITH-MEIER; LEITMANN, 2003), nas mesmas condições do Exemplo 2 com incertezas politópicas, ou seja, supomos que os amortecedores do carro (b_1) e do assento (b_2) estão sujeitos a falhas e m_s (massa do assento) é incerta.

O sistema é dado da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\sigma, \sigma_\beta, \beta)x(t) + B_\beta(\beta)u(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (5.93)$$

Logo temos o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\sigma, \sigma_\beta, \beta} x(t) + B_\beta u(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (5.94)$$

sendo

$$A_{\sigma, \sigma_\beta, \beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k_m - k_n}{M_c} & \frac{k_n}{M_c} & \frac{-b_1 - b_2}{M_c} & \frac{b_2}{M_c} \\ \frac{k_n}{m_s} & \frac{-k_n}{m_s} & \frac{b_2}{m_s} & \frac{-b_2}{m_s} \end{bmatrix}, \quad B_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{M_c} & \frac{-1}{M_c} \\ 0 & \frac{1}{m_s} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O sistema (5.94) pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_\beta x(t) + B_\beta u(t) + h_\sigma(x) + h_{\sigma_\beta}(x), \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (5.95)$$

onde

$$A_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k_1-k_2}{M_c} & \frac{k_2}{M_c} & \frac{-b_1-b_2}{M_c} & \frac{b_2}{M_c} \\ \frac{k_2}{m_s} & \frac{-k_2}{m_s} & \frac{b_2}{m_s} & \frac{-b_2}{m_s} \end{bmatrix}, \quad B_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{M_c} & \frac{-1}{M_c} \\ 0 & \frac{1}{m_s} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$h_\sigma(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-k_1 x_1^2(t)}{M_c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}, \quad h_{\sigma_\beta}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-k_2 x_2^2(t)}{M_c} & \frac{k_2 x_2^2(t)}{M_c} & 0 & 0 \\ \frac{k_2 x_2^2(t)}{m_s} & \frac{-k_2 x_2^2(t)}{m_s} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}$$

Utilizando o Teorema 5.6, os seguintes modelos locais foram obtidos, considerando-se os vértices do politopo:

$$\begin{aligned} (b_1, b_2, m_s) &= A_{\beta_1} = (0, 0, 70), & A_{\beta_2} &= (0, 5 \times 10^2, 70), \\ A_{\beta_3} &= (4 \times 10^3, 0, 70), & A_{\beta_4} &= (4 \times 10^3, 5 \times 10^2, 70), \\ A_{\beta_5} &= (0, 0, 120), & A_{\beta_6} &= (0, 5 \times 10^2, 120), \\ A_{\beta_7} &= (4 \times 10^3, 0, 120), & A_{\beta_8} &= (4 \times 10^3, 5 \times 10^2, 120). \end{aligned}$$

$$A_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -30 & 3,3333 & 0 & 0 \\ 71,4286 & -71,4286 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -30 & 3,3333 & -0,3333 & 0,3333 \\ 71,4286 & -71,4286 & 7,1429 & -7,1429 \end{bmatrix},$$

$$A_{\beta_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -30 & 3,3333 & -2,6667 & 0 \\ 71,4286 & -71,4286 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{\beta_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -30 & 3,3333 & -3 & 0,3333 \\ 71,4286 & -71,4286 & 7,1429 & -7,1429 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
A_{\beta_5} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -30 & 3,3333 & 0 & 0 \\ 41,6667 & -41,6667 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
A_{\beta_6} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -30 & 3,3333 & -0,3333 & 0,3333 \\ 41,6667 & -41,6667 & 4,1667 & -4,1667 \end{bmatrix}, \\
A_{\beta_7} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -30 & 3,3333 & -2,6667 & 0 \\ 41,6667 & -41,6667 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
A_{\beta_8} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -30 & 3,3333 & -3 & 0,3333 \\ 41,6667 & -41,6667 & 4,1667 & -4,1667 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Analogamente, para a matriz B tem-se os vértices do politopo:

$$(m_s \text{ (kg)}) = B_{\beta_1} : (70), B_{\beta_2} : (120)$$

$$B_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0007 & -0,0007 \\ 0 & 0,0143 \end{bmatrix}, \quad B_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0007 & -0,0007 \\ 0 & 0,0083 \end{bmatrix}.$$

• Entrada de controle $u(t) = -K\dot{x}(t)$

• • Teorema 5.6

As matrizes P e de ganho do controlador projetado obtidos foram as seguintes:

$$P = \begin{bmatrix} 72,8412 & 2,6149 & 0,2703 & 3,1195 \\ 2,6149 & 38,6421 & -0,0227 & 3,5290 \\ 0,2703 & -0,0227 & 0,0024 & 0,0079 \\ 3,1195 & 3,5290 & 0,0079 & 0,4755 \end{bmatrix}, \quad (5.96)$$

$$K = 10^4 \begin{bmatrix} 5,6634 & 3,5932 & -0,1309 & 0,5441 \\ 0,0890 & 0,5671 & -0,0003 & 0,0457 \end{bmatrix} \quad (5.97)$$

Os valores de γ_1 , γ_2 , α_1 , α_2 e $\|K\|$ obtidos para o sistema (5.95) por meio do Teorema 5.6 são descritos na tabela a seguir:

Tabela 5.15: Valores de γ_1 , γ_2 , α_1 , α_2 e $\|K\|$ no Exemplo 4.

γ_1	γ_2	α_1	α_2	$\ K\ $
0,0205	0,0180	4,9331	5,2728	$6,7412 \times 10^4$

Portanto obtêm-se o seguinte conjunto

$$H_{4,9331+5,2728} = \{h : h^T h \leq 2x^T(t)((4,9331^2)H_1^T H_1) + ((5,2728^2)H_2^T H_2)x(t)\},$$

$$H_{10,2059} = \{h : h^T h \leq 2x^T(t)((24,3355)H_1^T H_1) + (27,8024)H_2^T H_2)x(t)\}.$$

Para a análise do comportamento do sistema, foram utilizadas as condições $x(0) = x(20) = x(40) = x(60) = x(80) = x(100) = [0,1 \ 0,15 \ 0 \ 0]^T$. As simulações do sistema em malha fechada (5.88) com o controlador (5.97) estão ilustrados pelas Figuras 5.22 e 5.23.

Consideremos o caso em que haja falha nos amortecedores e variação da massa. A tabela abaixo visa esclarecer com detalhes os momentos da simulação:

Tabela 5.16: Simulação com falha nos amortecedores b_1 , b_2 e m_s incerta, do Exemplo 4.

Tempo (s)	m_s (kg)	b_1	b_2
0 ┤ 20	70	funcionando (4×10^3)	funcionando (5×10^2)
20 ┤ 40	70	não funcionando	funcionando (5×10^2)
40 ┤ 60	70	não funcionando	não funcionando
60 ┤ 80	120	funcionando (4×10^3)	funcionando (5×10^2)
80 ┤ 100	120	não funcionando	funcionando (5×10^2)
100 ┤ 120	120	não funcionando	não funcionando

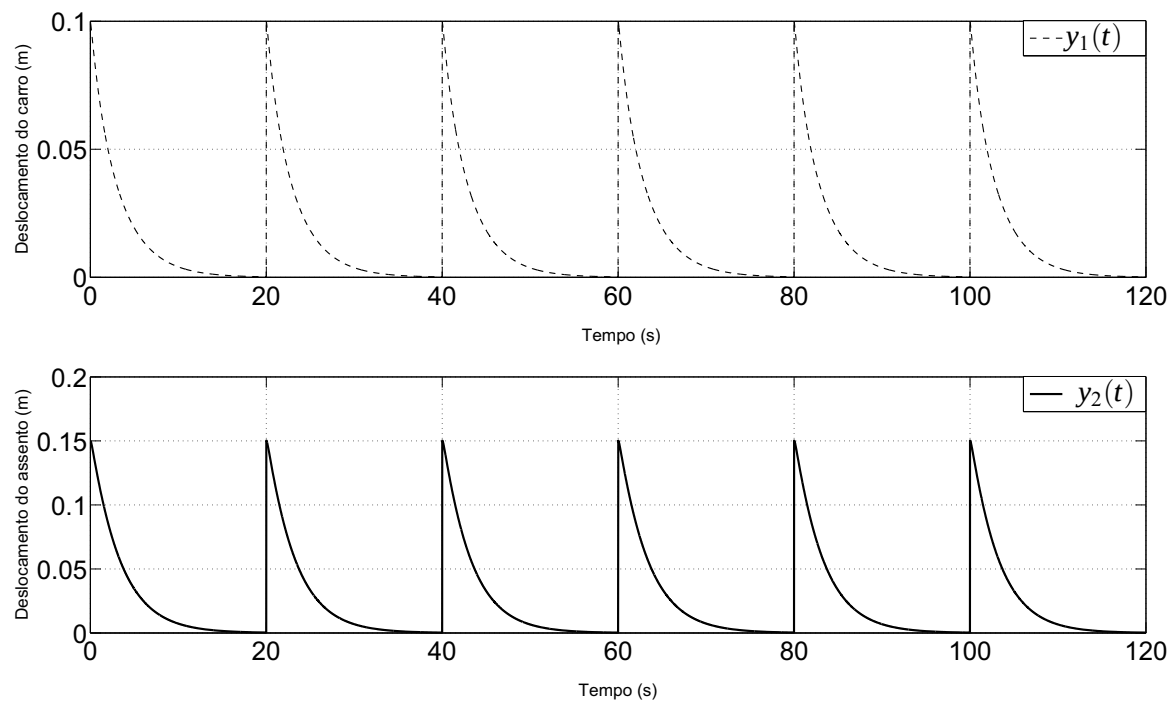


Figura 5.22: Simulação do sistema realimentado com incertezas politópicas e duas não linearidades, com restrição na norma do controlador.

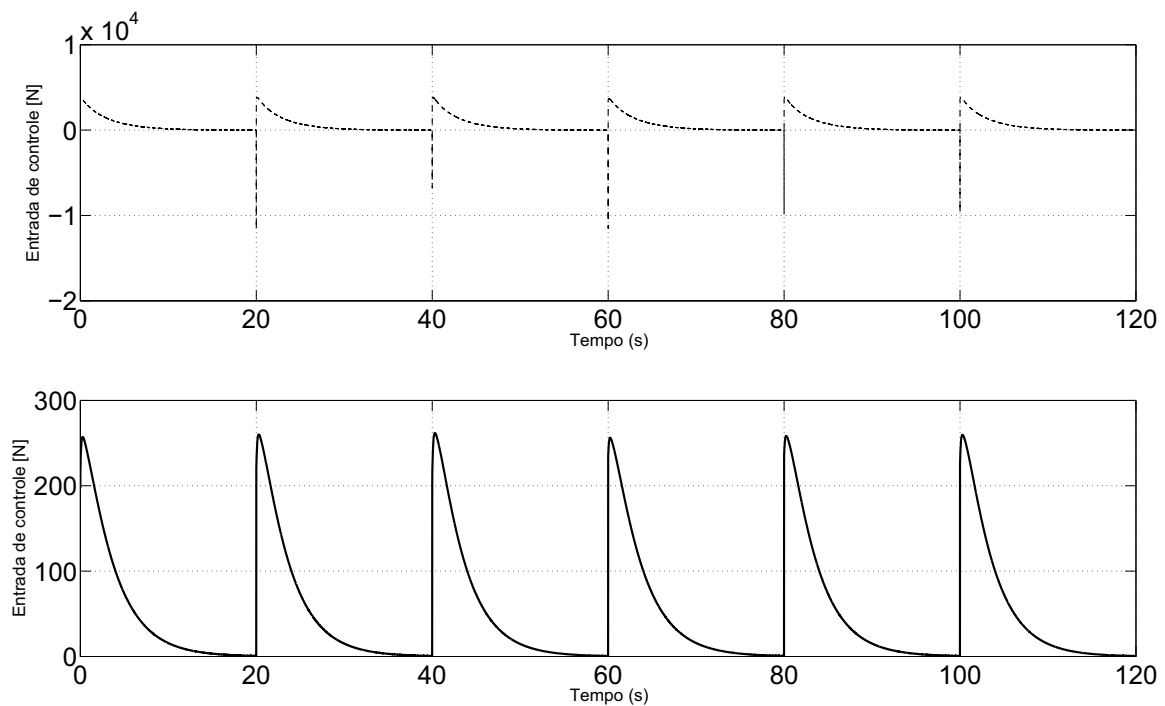


Figura 5.23: Simulação do sinal de controle do sistema realimentado com incertezas politópicas e uma não linearidade, com restrição na norma do controlador.

Comentários

Percebeu-se na Figura 5.22 que o tempo de estabelecimento do sistema controlado é de aproximadamente 20 s, mesmo diante a falhas nos amortecedores b_1 e b_2 , conforme a Tabela 5.15. Assim as falhas nos amortecedores em determinados instantes de tempo e a variação da massa não afetaram significativamente a resposta dinâmico do sistema. O conjunto de tolerância obtido foi $H_\alpha = H_{10,2059}$.

Exigindo do projeto do controlador um menor tempo de estabelecimento do sistema, inserimos a restrição a taxa de decaimento, com $\phi = 1$. Utilizando o Teorema 5.6 obtivemos os resultados a seguir.

- Entrada de controle $u(t) = -K\dot{x}(t)$
- • Teorema 5.7

Assim obtivemos a seguinte matriz P e a matriz de ganho K

$$P = \begin{bmatrix} 7,6642 & -2,9751 & 0,0011 & 0,0010 \\ -2,9751 & 7,1428 & -0,0005 & 0,5150 \\ 0,0011 & -0,0005 & 0,0001 & 0,0000 \\ 0,0010 & 0,5150 & 0,0000 & 0,0827 \end{bmatrix},$$

$$K = 10^3 \begin{bmatrix} -0,0676 & 3,5388 & -1,4998 & 0,2278 \\ -0,0771 & 0,6669 & -0,0001 & -0,0340 \end{bmatrix} \quad (5.98)$$

Tabela 5.17: Valores de γ , α , ϕ e $\|K\|$ do Exemplo 4.

γ_1	γ_2	α_1	α_2	ϕ	$\ K\ $
0,0255	0,0231	4,4263	4,6519	1	$3,8994 \times 10^3$

Portanto obtêm-se o seguinte conjunto

$$H_{4,4263+4,6519} = \{h : h^T h \leq 2x^T(t)((4,4263^2)H_1^T H_1) + ((4,6519^2)H_2^T H_2)x(t)\}$$

ou seja,

$$H_{9,0782} = \{h : h^T h \leq 2x^T(t)((19,5921)H_1^T H_1) + (21,6401)H_2^T H_2)x(t)\}.$$

A tabela possibilitará uma melhor compreensão da simulação.

Tabela 5.18: Simulação com falhas nos amortecedores b_1 , b_2 e m_s incerta do Exemplo 4.

Tempo (s)	m_s (kg)	b_1	b_2
0,0 ┆ 1,5	120	funcionando	funcionando
1,5 ┆ 3,0	120	não funcionando	funcionando
3,0 ┆ 4,5	120	não funcionando	não funcionando
4,5 ┆ 6,0	70	funcionando	funcionando
6,0 ┆ 7,5	70	não funcionando	funcionando
7,5 ┆ 9,0	70	não funcionando	não funcionando

Para a análise do comportamento do sistema, foram utilizadas as condições $x(0) = x(1,5) = x(3,0) = x(4,5) = x(6,0) = x(7,5) = [0,1 \ 0,15 \ 0 \ 0]^T$. As Figuras 5.24 e 5.25 ilustram simulação do sistema em malha fechada (5.95) com o controlador (5.98).

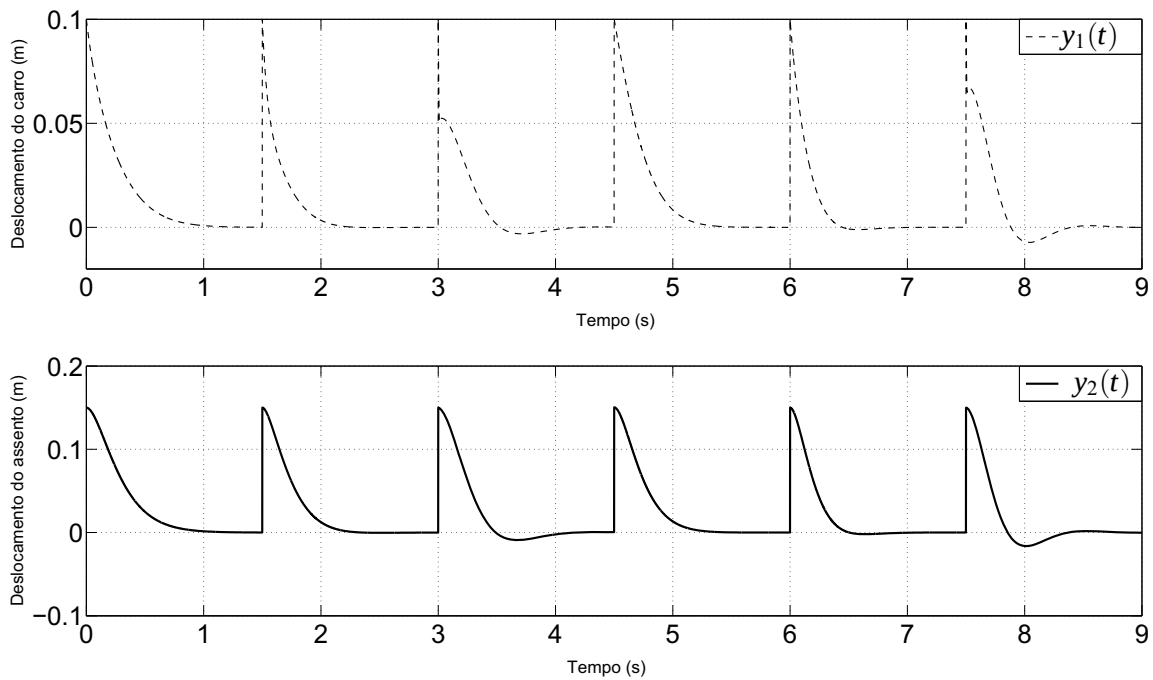


Figura 5.24: Simulação do sistema realimentado com incertezas politópicas e duas não linearidades, com restrição na norma do controlador.

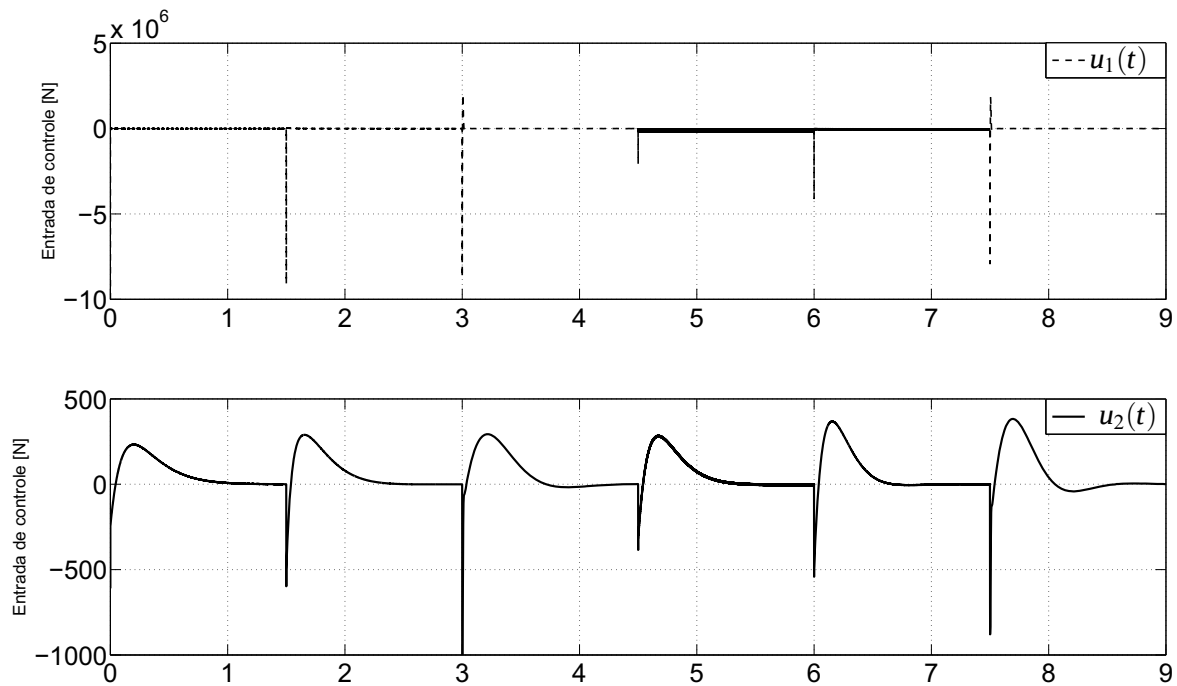


Figura 5.25: Simulação do sinal de controle do sistema realimentado com incertezas politópicas e uma não linearidade, com restrição na norma do controlador.

Comentários

Observe que na Figura 5.24 que o tempo de estabelecimento do sistema é de 1,5 s, significando uma redução de 92,5% do valor original, 20 s (Figura 5.22). O conjunto obtido para H_α é $H_{9,0782}$. Pela Figura 5.25 nota-se a necessidade da redução da magnitude do sinal de controle no sistema, para isso utiliza-se o Teorema 5.8. Os resultados obtidos são expostos a seguir.

- Entrada de controle $u(t) = -K\dot{x}(t)$

- • Teorema 5.8

Assim foram obtidas, com $K_X = 4,75 \times 10^4$ e $K_M = 1,36 \times 10^6$, a seguinte matriz P e a matriz de ganho K

$$P = \begin{bmatrix} 2,3206 & -0,4341 & 0,1224 & -0,0236 \\ -0,4341 & 0,3517 & -0,0348 & 0,0162 \\ 0,1224 & -0,0348 & 0,0735 & -0,0045 \\ -0,0236 & 0,0162 & -0,0045 & 0,0071 \end{bmatrix},$$

$$K = 10^3 \begin{bmatrix} 2,6986 & -0,5079 & 0,1429 & -0,0275 \\ -0,4843 & 0,4012 & -0,0473 & 0,0189 \end{bmatrix} \quad (5.99)$$

Portanto obtêm-se a seguinte tabela:

Tabela 5.19: Valores de γ , α e $\|K\|$ do Exemplo 4

γ_1	γ_2	α_1	α_2	$\ K\ $
132,5	132,5	0,0614	0,0614	$2,8053 \times 10^3$

Observe que o conjunto obtido é

$$H_{0,0614+0,0614} = \{h : h^T h \leq 2x^T(t)((0,0614^2)H_1^T H_1) + ((0,0614^2)H_2^T H_2)x(t)\},$$

$$H_{0,1228} = \{h : h^T h \leq 2x^T(t)((0,0037)H_1^T H_1) + (0,0037)H_2^T H_2)x(t)\}.$$

As Figuras 5.26 e 5.27 ilustram simulação do sistema em malha fechada (5.95) com o controlador (5.99) e o comportamento da entrada de controle do sistema, para a condição inicial $x(0) = [0,1 \ 0,15 \ 0 \ 0]^T$

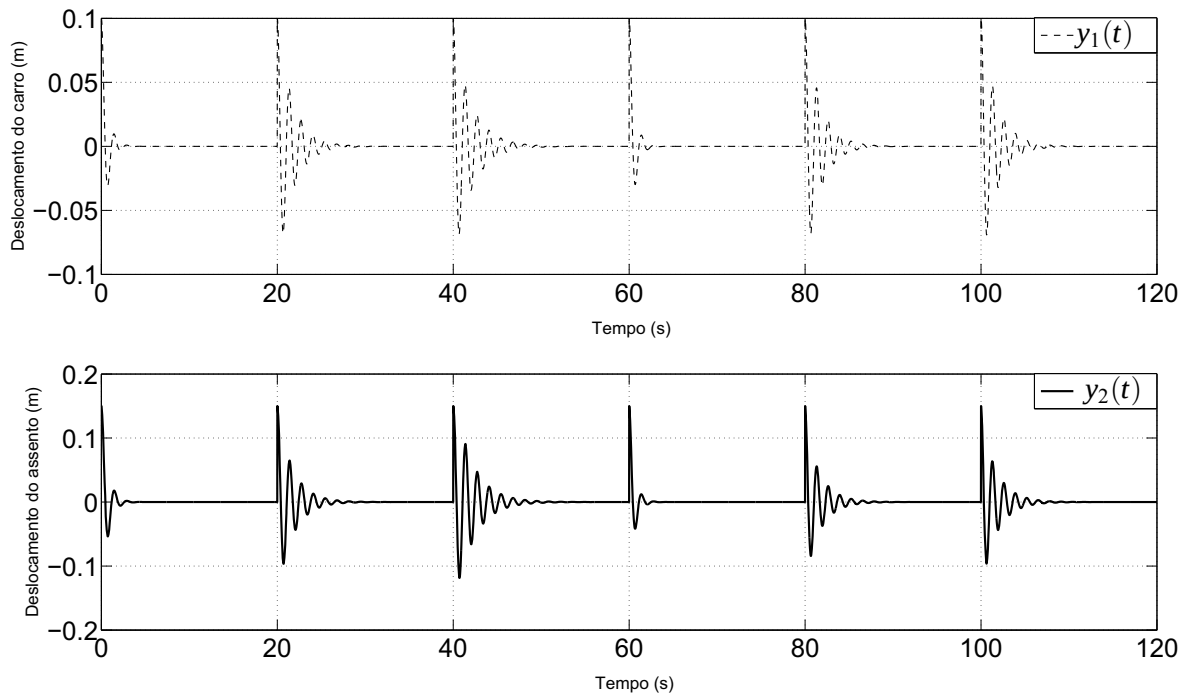


Figura 5.26: Simulação do sistema realimentado com incertezas politópicas e uma não linearidade, com restrição na norma do controlador.

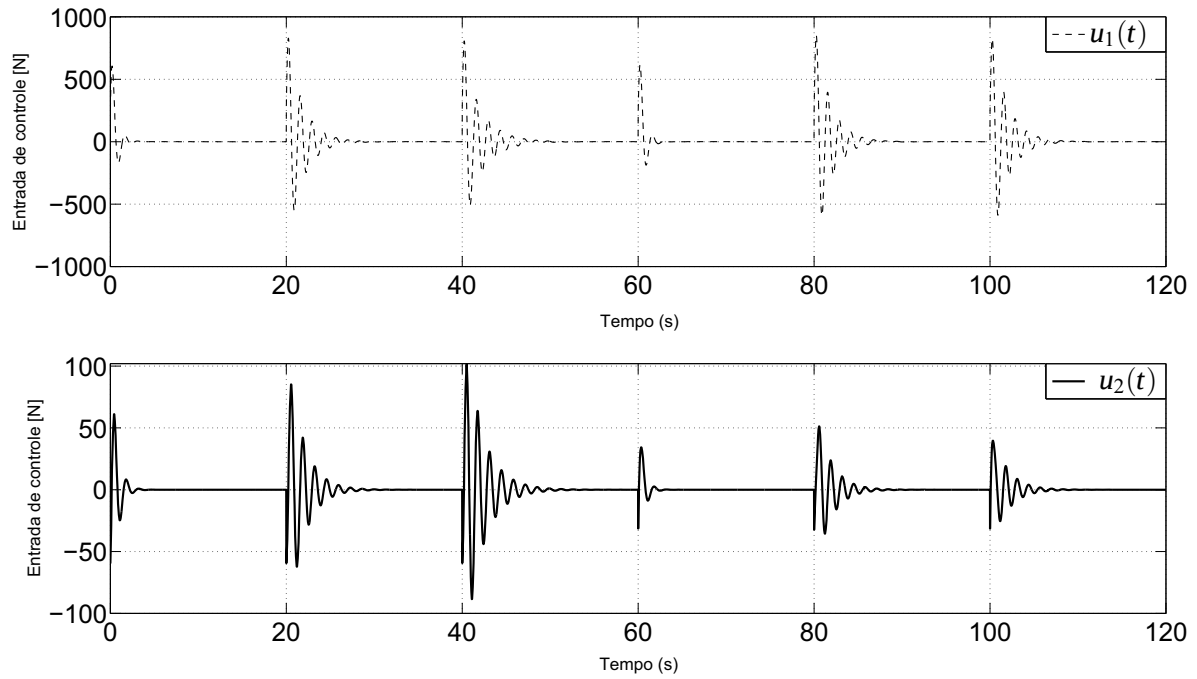


Figura 5.27: Simulação do sinal de controle do sistema realimentado com incertezas politópicas e uma não linearidade, com restrição na norma do controlador.

Comentários

Pela Figura 5.27 verificou-se que a magnitude da entrada de sinal de controle, em comparação a Figura 5.23, foi reduzida, como desejado. Observe que, quando o sistema possui massa máxima ($m_s = 120 \text{ kg}$) e com uma falha em ambos amortecedores (b_1 e b_2), eleva-se o esforço do controlador para a estabilização do sistema. Nesse momento a entrada $u_2(t)$ atinge 100 N (em $t = 40 \text{ s}$). Os conjuntos de tolerância obtidos foram: as LMIs (5.81) e (5.82) geraram o conjunto de tolerância $H_{5,2059}$, já as LMIs (5.83) e (5.84) geraram o conjunto $H_{9,0782}$, por fim, as LMIs (5.85) e (5.86) geraram o conjunto $H_{0,1228}$.

6 *Conclusões e Perspectivas para Pesquisas Futuras*

Inicialmente foram apresentados resultados completos relativos a plantas lineares e invariantes no tempo descrita na forma de variáveis de estado pelas matrizes $\{A, B, C, D\}$, cuja saída é a derivada do vetor de estado e $\det(A) = 0$: a planta é não observável e não estabilizável realimentando-se a saída. Esse fato mostra a impossibilidade do controle desta planta, empregando a realimentação da saída da mesma, quando $\det(A) = 0$. Em seguida, mostrou-se que esta planta, quando $\det(A) \neq 0$, possui zeros na origem, o que dificulta a rejeição de distúrbios constantes, somados à entrada da planta. Mais especificamente, foi demonstrado que esta rejeição é impossível quando $\det(A) = 0$, realimentando-se a saída com controladores estáticos. Um exemplo, cujos resultados foram apresentados na Figura 3.1, ilustrou a validade destes resultados. Tais resultados podem ser úteis na análise e projeto de sistemas de controle com realimentação do vetor de estado. Estes resultados, descritos no Capítulo 3, proporcionaram publicações no XVIII Congresso Brasileiro de Automática, Bonito-MS/2010 (MOREIRA et al.,) e no periódico *Mathematical Problems Engineering* (MOREIRA et al., 2010). Tais fatos confirmam a relevância deste trabalho, e motivam a continuidade destas pesquisas.

Abordando-se sistemas não lineares, desenvolveu-se uma metodologia para o projeto de controladores estáticos com realimentação da derivada do vetor de estado, para a estabilização de uma classe de sistemas não lineares que apresentam incertezas politópicas e falhas (representadas como incertezas paramétricas do tipo politópicas). Foram propostas LMIs para o tratamento adequado das não linearidades e das incertezas politópicas, para o projeto de um controlador único que estabiliza o sistema, utilizando a realimentação derivativa, cujo controlador é dado por $u(t) = -K\dot{x}(t)$. Salienta-se que as não linearidades e as falhas são tratadas de forma distinta com a finalidade da obtenção de resultados satisfatórios e seguros.

Para o projeto dos controladores utilizou-se o *solver* padrão LMILAB, e o pacote LMIEDIT para a representação de LMIs. Suas respectivas simulações foram feitas através do software MATLAB (GAHINET et al., 1995), sendo que o modelo de planta utilizado foi o não linear.

Estes métodos de projetos são equacionados na forma de LMI, que podem ser facilmente resolvidos utilizando-se algoritmos de convergência polinomial (BOYD et al., 1994), quando factíveis.

Os resultados de simulação mostram que o sistema não linear estudado, com incertezas variantes no tempo e incertezas politópicas, é robusto a falhas e ainda pode-se eficientemente diminuir o tempo de estabilização impondo restrição de taxa de decaimento. É possível ainda diminuir a magnitude do controlador, impondo restrições no ganho do controlador projetado.

Perspectivas para pesquisas futuras no tema:

- Adição de um novo parâmetro de desempenho no projeto, tal como restrição na saída da planta, que é de fácil inclusão nos projetos baseados em LMIs (BOYD et al., 1994);
- Desenvolvimento do estudo para sistemas descritores;
- Desenvolvimento do estudo para o caso discreto no tempo.

Referências

- ABDELAZIZ, T.; VALÁŠEK, M. Pole placement for siso linear systems by state-derivative feedback. *IEEE Proceedings-Control Theory and Applications*, New York, v. 151, n. 4, p. 377–385, 2004.
- APKARIAN, P.; TUAN, H. D.; BERNUSSOU, J. Continuous-time analysis, eigenstructure assignment, and $\mathcal{H}_2$ synthesis with enhanced linear matrix inequalities LMI characterizations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Notre Dame, v. 46, n. 12, p. 1941–1946, 2001.
- ARAÚJO, J. M.; CASTRO, A. C.; SANTOS, E. T. F. Alocação de pólos em sistemas lineares invariantes no tempo utilizando realimentação da derivada de estados e a equação de Lyapunov. *Controle & Automação*, v. 20, n. 3, p. 263–270, 2009.
- ASSUNÇÃO, E.; ANDREA, C. Q.; TEIXEIRA, M. C. M. $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ -optimal control for the tracking problem with zero variation. *IET Control Theory Applications*, Stevenage, v. 1, n. 3, p. 682–688, 2007b.
- ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A.; TEIXEIRA, M. C. M. Controle robusto de sistemas lineares sujeitos à falhas estruturais usando realimentação derivativa. In: BRAZILIAN CONFERENCE ON DYNAMICS, CONTROL AND APPLICATIONS. [S.l.].
- ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R. Realimentação da derivada dos estados em sistemas fuzzy (Takagi-Sugeno). In: *Anais do 8º Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*. [S.l.]: SBA, 2007a. 6p. (Artigo 29542).
- ASSUNÇÃO, E.; MARCHESI, H. F.; TEIXEIRA, M. C. M.; PERES, P. L. D. Global optimization for the $\mathcal{H}_\infty$ -norm model reduction problem. *International Journal of Systems Science*, Hants, v. 38, n. 2, p. 125–138, 2007d.
- ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; FARIA, F. A.; SILVA, N. A. P. D.; CARDIM, R. Robust state-derivative feedback lmi-based designs for multivariable linear systems. *International Journal of Control*, v. 80, n. 8, p. 1260–1270, 2007.
- BERNUSSOU, J.; PERES, P. L. D.; GEROMEL, J. C. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. *Systems and Control Letters*, v. 13, n. 1, p. 65–72, 1989.
- BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. 2nd. ed. [S.l.]: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994. 193 p. (Studies in Applied Mathematics, 15).
- BUNSE-GERSTNER, A.; MEHRMANN, V.; NICHOLS, N. Feedback design for regularizing descriptor system. *Linear Algebra and its Applications*, New York, v. 299, n. 1/3, p. 119–151, 1999.

- CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; COVACIC, M. R. Design of state-derivative feedback controllers using a state feedback control design. In: *3rd IFAC Symposium on System, Structure and Control*. [S.l.: s.n.], 2007b. v. 1, p. 135–141.
- CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A. Control designs for linear systems using state-derivative feedback. In: *Systems, Structure and Control*. Vienna, Austria: In-Teh, 2008. p. 1–28. Disponível em: <<http://books.i-techonline.com/book.php?id=73>>. Acesso em: 06 Setembro 2009.
- CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; COVACIC, M. R. Variable-Structure Control Design of Switched Systems With an Application to a DC-DC Power Converter. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, New York, v. 56, n. 9, p. 3505–3513, 2009a.
- CHEN, C. *Linear system theory and design*. 3rd. ed. New York: Oxford, 1999. 352 p. (Oxford Series in Electrical and Computer Engineering).
- CHEN, G.; YU, L.; CHU, J. Decentralized stabilization of large-scale linear systems with time-delay. In: *14th IFAC Congress*. [S.l.: s.n.], 1999. p. 284–289.
- COVACIC, M. R. *Síntese de sistemas ERP baseada em LMIs e controle com estrutura variável*. 2006. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2006. Disponível em: <<http://www.dee.feis.unesp.br/pos/teses/2006/teses.php>>.
- D.D.ŠILJAK; A.I.ZEČEVIĆ. Control of large-scale systems:beyond decentralized feedback. *Anunual Reviews in Control*, 2005.
- D.D.ŠILJAK; STIPANOVIĆ, D. M. Robust stabilization on nonlinear systems: The lmi approach. *Mathemarical Problems in Engineering*, 2000.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. *Sistemas de controle moderno*. 8th. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. 684 p.
- DUAN, Y.; NI, Y.; KO, J. State-derivative feedback control of cable vibration using semiactive magnetorheological dampers. *Computer-Aided Civil and Ingrastructure Engineering*, New York, v. 20, n. 6, p. 431–449, 2005.
- FARIA, F. A. *Alocação de Pólos com Realimentação da Derivada dos Estados usando LMIs*. 2005. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2005.
- FARIA, F. A.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M. Realimentação da derivada dos estados em sistemas multivariáveis lineares usando LMIs. *Controle & Automação*, v. 20, n. 1, p. 83–93, 2009.
- FARIA, F. A.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R. Robust state-derivative feedback LMI-based designs for linear descriptor systems. *Mathematical Problems in Engineering*, Nasr City, v. 82, n. 1, p. 1–12, 2009b.
- FARIA, F. A.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; SILVA, N. A. P. da. Robust state-derivative pole placement LMI-based designs for linear systems. *International Journal of Control*, London, v. 82, n. 1, p. 1–12, 2009c.

- FARIA, F. A.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R. Robust state-derivative feedback LMI-based designs for linear descriptor systems. *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2010, p. 1–15, 2010. ISSN 1024-123X.
- FERON, E.; APKARIAN, P.; GAHINET, P. Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Notre Dame, v. 41, n. 7, p. 1041–1046, 1996.
- GAHINET, P.; NEMIROVSKI, A.; LAUB, A. J.; CHILALI, M. *LMI Control Toolbox: For use with MATLAB*. [S.l.], 1995. Disponível em: <<http://www.mathworks.com>>. Acesso em: 02 Fev. 2011.
- ISERMANN, R.; BALLÉ, P. Trend in the application of model-based fault detection and diagnosis of technical processes. *Control Engineering Practice*, Oxford, v. 5, n. 5, p. 709–719, 1997.
- KWAK, S.; WASHINGTON, G.; YEDAVALLI, R. Acceleration feedback-based active and passive vibration control of landing gear components. *Journal of Aerospace Engineering*, New York, v. 15, n. 1, p. 1–9, 2002.
- LEITE, V. J. S.; MONTAGNER, V. F.; OLIVEIRA, P. J.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Estabilidade robusta de sistemas lineares através de desigualdades matriciais lineares. *Revista Controle & Automação*, Campinas, v. 15, n. 1, p. 24–40, 2004.
- LEWIS, F.; SYRMOS, V. A geometric theory for derivative feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 36, n. 9, p. 1111–1116, 1991.
- LOFBERG, J. Yalmip : a toolbox for modeling and optimization in matlab. In: *Computer Aided Control Systems Design, 2004 IEEE International Symposium on*. [S.l.: s.n.], 2004. p. 284–289.
- MOREIRA, M. R.; JUNIOR, E. I. M.; ESTEVES, T. T.; CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A. Estabilidade e rejeição de distúrbios com realimentação da derivada do vetor de estados. *XVIII Congresso Brasileiro de Automática*, Bonito-MS, Brazil.
- MOREIRA, M. R.; JUNIOR, E. I. M.; ESTEVES, T. T.; CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A. Stability and disturbance rejection with state-derivative feedback. *Mathematical Problems Engineering*, 2010, p. 1–12, 2010.
- OGATA, K. *Engenharia de controle moderno*. 4th. ed. New York: Prentice Hall, 2003. 800 p.
- OLIVEIRA, M. C. de; FARIAS, D. P.; GEROMEL, J. C. *LMISol, User's guide*. UNICAMP, Campinas-SP, Brazil, 1997. Disponível em: <<http://www.dt.fee.unicamp.br/~mauricio/software.html>>. Acesso em: 06 Setembro 2009.
- REITHMEIER, E.; LEITMANN, G. Robust vibration control of dynamical systems based on the derivative of the state. *Archive of Applied Mechanics*, New York, v. 72, n. 11-12, p. 856–864, 2003.
- SILVA, E. R. P. *Controle Robusto de Sistemas Não-Lineares Sujeitos a Falhas Estruturais*. 2009. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2009.

- SILVA, E. R. P. da; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A. Controle robusto de sistemas não-lineares sujeitos a falhas estruturais. In: *Proceedings of the 8th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Applications*. [S.l.: s.n.], 2009a. 6p.
- SILVA, E. R. P. da; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A. Controle robusto de sistemas não-lineares sujeitos a falhas estruturais usando realimentação da derivada dos estados. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE, 9., 2009, Brasília. Brasília: [s.n.], 2009a. 6p. (Artigo 54988).
- SILVA, E. R. P. da; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A. Controle robusto de sistemas não-lineares sujeitos a falhas estruturais. In: PROCEEDINGS OF THE BRAZILIAN CONFERENCE ON DYNAMICS, CONTROL AND APPLICATIONS, 8., 2009, Bauru. Bauru: Unesp, 2009b. 6p.
- SILVA, E. R. P. da; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A. Controle robusto de sistemas não-lineares sujeitos a falhas estruturais usando realimentação da derivada dos estados. In: *Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*. [S.l.]: SBA, 2009b. 6p.(Artigo 54988).
- SILVA, M. P. da; BOTTURA, C. P. Controle robusto descentralizado de sistemas não-lineares com incertezas variantes no tempo limitadas em norma. *XVIII Congresso Brasileiro de Automação*, Bonito-MS,Brazil, p. 486–491, 2010.
- SLOTINE, J. J. E.; LI, W. *Applied Nonlinear Control*. 1st. ed. [S.l.]: USA: Prentice Hall, 1991. 352 p.
- STURM, J. F. Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, v. 11–12, p. 625–653, 1999. Disponível em: <<http://citeseer.ist.psu.edu/sturm99using.html>>.
- TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; AVELLAR, R. G. On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, v. 11, n. 5, p. 613–623, oct. 2003. ISSN 1063-6706.
- TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R.; COVACIC, M. R. Realimentação da derivada dos estados a partir do projeto com realimentação de estados. In: *Anais do 16º Congresso Brasileiro de Automação*. [S.l.]: CBA, 2006. p. 726–731.
- TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; FARIA, F. A.; ASSUNÇÃO, E.; CASTELÃO, S. Projeto da realimentação derivativa discreta no tempo utilizando o projeto com realimentação não-derivativa contínua no tempo. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE, 9., 2009, Brasília. Brasília: [s.n.], 2009. 6p. (Artigo 55652).

APÊNDICE A – Demonstração do Complemento de Schur (COVACIC, 2006)

Parte-se do pressuposto de que, segundo o complemento de Schur, a seguinte LMI:

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0,$$

sendo que $Q(x) = Q(x)^T$, $R(x) = R(x)^T$ e $S(x)$ têm uma dependência afim de x , é equivalente a:

$$R(x) > 0 \text{ e } Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0.$$

($\Rightarrow$) Suponha que:

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.1})$$

e defina:

$$F(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Então

$$F(u, v) > 0, \forall [u, v] \neq 0 \quad (\text{A.3})$$

Considere, inicialmente, $u = 0$. Então:

$$F(0, v) = v^T R(x) v > 0, \forall v \neq 0 \Rightarrow R(x) > 0.$$

Adote, agora,

$$v = -R(x)^{-1}S(x)^T u, \text{ com } u \neq 0.$$

Então,

$$\begin{aligned} F(u, v) &= u^T (Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T) u > 0, \forall u \neq 0 \\ &\Rightarrow Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0. \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Suponha que:

$$Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0, R(x) > 0. \quad (\text{A.4})$$

Fixando-se u e otimizando-se em termos de v , $F(u, v)$ definido em (A.2), obtém-se:

$$\nabla_v F^T = 2R(x)v + 2S(x)^T u = 0 \quad (\text{A.5})$$

Desde que $R(x) > 0$, de (A.5), segue que:

$$v = -R(x)^{-1}S(x)^T u. \quad (\text{A.6})$$

Substituindo (A.6) em (A.2), então:

$$F(u) = u^T (Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T)u.$$

Desde que $(Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T) > 0$, o mínimo de $F(u)$ ocorre para $u = 0$, que também implica que $v = 0$. Então, o mínimo de $F(u, v)$ ocorre em $(0, 0)$ e é igual a zero. Portanto, $F(u, v) > 0, \forall [u, v] \neq 0$, isto é,

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0.$$

APÊNDICE B – Publicações

Parte dos resultados apresentados nesta dissertação, assim como os trabalhos desenvolvidos até o momento, foram publicados em congressos e periódicos internacionais. Esta produção bibliográfica é listada abaixo:

B.1 Artigos em Congressos Nacionais

- Estabilidade e rejeição de distúrbios com realimentação da derivada do vetor de estados. *XVIII Congresso Brasileiro de Automática*. 2010, Bonito-MS, Brasil, v.5, n.5. Manoel R. Moreira, Edson I. M. Junior, Talita T. Esteves, Rodrigo Cardim, Marcelo C. M. Teixeira, Edvaldo Assunção, Flávio A. Faria. Disponível em:

<www.labplan.ufsc.br/congressos/CBA2010/Artigos/66380_1.pdf>

B.2 Artigos em Periódicos Internacionais

- Stability and disturbance rejection with state-derivative feedback. *Mathematical Problems Engineering*. 2010, p.1 – 12. Manoel R. Moreira, Edson I. M. Junior, Talita T. Esteves, Rodrigo Cardim, Marcelo C. M. Teixeira, Edvaldo Assunção, Flávio A. Faria. Disponível em:

<<http://downloads.hindawi.com/journals/mpe/2010/123751.pdf>>.