UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"Júlio de Mesquita Filho"
FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE ILHA SOLTEIRA

Sobre Funções Generalizadas de Heaviside e Soluções na Forma de Onda de Choque para Certos Sistemas de Equações Diferenciais Parciais

Francisco Villarreal Alvarado

Tese apresentada à
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA
da
UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"Júlio de Mesquita Filho"
para a obtenção do título de livre docente

1210001243

Área de concentração: Análise–Equações diferenciais parciais

Ilha Solteira, SP, maio de 2001

Proc. 040/2001-NRD 122/01
UNESP - "CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA"
SERVIÇO TÉC. DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO
DATA DE CHEGADA 02/10/01
DATA DE TOMBO 30/10/01
Aiza
Te. 1243
AQUISIÇÃO doação autor R$10,00
CLASSIFICAÇÃO
1210001243

Sobre Funções Generalizadas de Heaviside e Soluções na Forma de Onda de Choque para Certos Sistemas de Equações Diferenciais Parciais

Francisco Villarreal Alvarado

Tese apresentada à
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA
da
UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"Júlio de Mesquita Filho"
para a obtenção do título de livre docente

Área de concentração: Análise–Equações diferenciais parciais

Ilha Solteira, SP, 24 de maio de 2001

10102051
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

À minha mãe Melania,
aos meus filhos Roque e Francisco
e à minha esposa Dalva
que me souberam compreender.

Agradecimentos

Ao amigo Prof. Dr. Jorge Alfredo Aragona Vallejo pelo permanente apoio e incentivo.

Aos amigos da FEIS-UNESP, Ilha Solteira, em particular aos Professores Ernandes Rocha de Oliveira e Roseli Arbach F. de Oliveira.

À minha esposa Dalva, pelo estímulo e incansável compreensão.

A todas as pessoas que, direta ou indiretamente, colaboraram na execução deste trabalho.

unesp

Resumo

Neste trabalho estudamos a existência e a não existência de soluções na forma de onda de choque para certos sistemas de equações diferenciais parciais não lineares. Os estudos são desenvolvidos no contexto da teoria das funções generalizadas de Colombeau, usando a igualdade (no sentido estrito) e a relação de associação (que é a igualdade fraca) de funções generalizadas. As soluções na forma de onda de choque para os sistemas considerados são dadas em termos das funções generalizadas que têm a função de Heaviside, nos respectivos espaços, como aspecto macroscópico. Isso significa que as soluções são procuradas na forma de seqüências de regularizações que têm como limite, no sentido de distribuições, a função de Heaviside, as quais têm que satisfazer uma parte das equações no sentido estrito e outra parte das equações no sentido de associação.

Abstract

In this work we study the existence and nonexistence of generalized shock wave solutions for systems of non linear partial differential equations. The study is developed in the context of Colombeau's theory of generalized functions. This study uses the equality in the strict sense and the association (that is the weak equality) of generalized functions. The shock wave solutions are given in terms of generalized functions that have the Heaviside function, in the respective spaces, as macroscopic aspect. This means that solutions are sought in the form of sequences of regularizations to the Heaviside function, in de distributional limit sense, that have to satisfy part of the equations in the strict sense and part of the equations in the sense of association.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

Sumário

Introdução ii

Índice de Notações e Convenções viii

1 A Álgebra $\mathcal{G}(\Omega; F)$ das Funções Generalizadas 1

1.1 Definições e resultados preliminares 2

1.2 Algumas propriedades das derivadas parciais de funções generalizadas 7

2 Associação e Funções Generalizadas de Heaviside 14

2.1 A relação de associação em $\mathcal{G}(\Omega; \mathbb{K}^\ell)$ 14

2.2 Funções generalizadas de Heaviside no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ 18

2.3 Funções generalizadas de Heaviside no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ . . 31

3 Composição, Inversibilidade e Funções na Forma de Onda de Choque 43

3.1 Algumas propriedades da função composta e das funções auxiliares y, y^*, π_m, π_{n+m} e (y^*, π_{n+m}) 44

3.2 Composição e inversibilidade para uma classe de funções generalizadas 58

3.3 Sobre funções na forma de onda de choque 61

4 Alguns Sistemas de Equações Diferenciais Parciais não Lineares 81

4.1 Funções generalizadas de Heaviside no espaço $\mathbb{R}^n$ e soluções na forma de onda de choque na álgebra $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ para sistemas de EDPs homogêneos 83

4.2 Funções generalizadas de Heaviside em $\mathbb{R}$ e soluções na forma de onda de choque na álgebra $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ para sistemas de EDPs não homogêneos 90

4.3 Funções generalizadas de Heaviside no espaço $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ e soluções na forma de onda de choque na álgebra $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ para sistemas de EDPs não homogêneos 97

4.4 Funções generalizadas de Heaviside no espaço $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ e soluções na forma de onda de choque na álgebra $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ para o sistema $(\tilde{S})$. 109

4.5 Funções generalizadas de Heaviside no espaço euclidiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ e a não resolubilidade do sistema (S) na álgebra $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ 127

Referências Bibliográficas **140**

Introdução

Sabemos que na Teoria das Funções Generalizadas de Colombeau, dado um subconjunto aberto não vazio Ω de $\mathbb{R}^n$, existe uma álgebra diferencial $\mathcal{G}(\Omega)$ de *funções generalizadas em* Ω, a qual contém, de modo natural, o espaço $\mathcal{D}'(\Omega)$ das distribuições em Ω como um subespaço vetorial, no sentido de que existe uma aplicação linear injetora natural de $\mathcal{D}'(\Omega)$ em $\mathcal{G}(\Omega)$ (ver [1], [2], [4], [5], [6], [8]). Sabemos também que existe uma versão mais simples da álgebra, $\mathcal{G}_s(\Omega)$, que é suficiente para muitas aplicações à Física, Engenharia, etc. (ver [1] - [6] e [8] - [12]). Apesar dessa subálgebra conter a álgebra $C^\infty(\Omega)$ e ser suficiente para muitas aplicações, não contém naturalmente o espaço $\mathcal{D}'(\Omega)$ (embora existam infinitas aplicações lineares injetoras de $\mathcal{D}'(\Omega)$ em $\mathcal{G}_s(\Omega)$). Tendo em vista que os dados de nosso problema (objeto de estudo) envolvem apenas funções de classe C^∞ e elementos de $\mathcal{G}_s(\Omega)$, para o desenvolvimento deste trabalho, usaremos somente a álgebra simplificada de funções generalizadas.

Dados $\alpha_* = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e $\beta_* = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ em $\tilde{\mathbb{R}}^3$ com $0 \leq \alpha_* < \beta_*$ e uma função $\nu_* = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ em $C^\infty\left(\mathbb{R}_+^*; [\alpha_*, \beta_*[\right)$ tal que cada componente de ν_* é uma função crescente, consideremos a função $\nu \in C^\infty\left((\mathbb{R}_+^*)^3; [\alpha, \beta[\right)$ definida por

$$\nu(y_1, y_2, y_3) := \nu_1(y_1) + \nu_2(y_2) + \nu_3(y_3) \ \text{ (resp. } \ \nu(y_1, y_2, y_3) := \nu_1(y_1)\nu_2(y_2)\nu_3(y_3))$$

onde $\alpha := \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ (resp. $\alpha := \alpha_1\alpha_2\alpha_3$) e $\beta := \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ (resp. $\beta := \beta_1\beta_2\beta_3$). Para a função ν_*, sujeita ainda a outras condições adicionais a serem introduzidas oportunamente (no Capítulo 4), consideremos os sistemas $(\tilde{S})$ e (S) de equações diferenciais parciais da hidrodinâmica com viscosidade ν (ver [3] e [11]). O sistema

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

$(\tilde{S})$ é formado pelas seguintes equações

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x \approx 0 \\ (\rho u)_t + (p + \rho u^2)_x \approx \{[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha] u_x\}_x \\ e_t + [(e+p)u]_x \approx \{[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha] u u_x\}_x \\ e \approx \lambda p + \frac{1}{2}\rho u^2\,, \qquad \lambda \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

onde ρ é a densidade, u a velocidade, p a pressão, e a energia total e o símbolo $\approx$ denota a relação de associação em $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$(ver 2.1.1). O sistema (S) é formado pelas três últimas equações acima e pela equação seguinte

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0\,.$$

A finalidade do presente trabalho é, basicamente, o estudo da existência e da não existência de soluções na forma de onda de choque de sistemas de EDPs, sugeridos pelos (ou associados aos) sistemas $(\tilde{S})$ e (S) (ver definições 4.1.1, 4.2.2, 4.3.2 e 4.4.8). O estudo é desenvolvido no contexto da teoria de Colombeau, usando a igualdade (no sentido estrito) e a relação de associação (que é a igualdade fraca) de funções generalizadas. As soluções na forma de onda de choque, para os sistemas considerados, são dadas em termos das funções generalizadas que têm a função de Heaviside, nos respectivos espaços (ver 2.2.5 e 2.3.5), como aspecto macroscópico (ver 2.2.7 e 2.3.7). Tais funções são chamadas funções generalizadas de Heaviside. Observemos que na teoria das distribuições, considerada no espaço bidimensional (x,t) (espaço este que é a parte central de nosso trabalho), existe uma única distribuição $\mathbb{Y}$ (chamada de Heaviside em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ver 2.3.5) de modo que $\mathbb{Y}|_{\mathbb{R}^*_- \times \mathbb{R}} = 0$, $\mathbb{Y}|_{\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}} = 1$ e $\partial_\lambda \mathbb{Y} = \delta \circ \pi$ (ver (2.3.4)), em que δ é a medida de Dirac em $\mathbb{R}$ e π é a projeção na primeira variável sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Lembremos também que para toda função generalizada de Heaviside H em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tem-se $H|_{\mathbb{R}^*_- \times \mathbb{R}} \approx 0$, $H|_{\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}} \approx 1$ e $\partial_\lambda H \approx \delta_* \circ \pi$ (ver 2.3.9) para qualquer função generalizada δ_* que tem a medida de Dirac como aspecto macroscópico.

Os principais resultados do trabalho são os teoremas 4.1.9, 4.4.5, 4.4.12 e 4.5.4. Como casos particulares obtemos resultados sobre soluções na forma de onda de choque para os sistemas $(\tilde{S})$ e (S) acima considerados (ver teoremas 4.4.7,

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

4.4.15 e 4.5.5) e para um sistema sugerido pelo sistema $(\tilde{S})$ (ver teorema 4.1.11). Em muitas aplicações da Física - Matemática é necessário o cálculo de derivadas de ordem superior de funções generalizadas e, como essas derivadas são dadas em termos de aplicações multilineares, faz-se necessário definir funções generalizadas em espaços de Banach. Neste trabalho, a menos de menção explícita em contrário, E, $F_1, \ldots, F_m$ e G denotam espaços de Banach; F indica uma álgebra (bem como um espaço) de Banach e Ω (resp. Ω') denota um subconjunto aberto de E (resp. F). O trabalho consiste de quatro capítulos, os quais passamos a descrever de forma suscinta. De um modo geral, podemos afirmar que nos três primeiros capítulos coletamos os resultados a serem usados no último.

No Capítulo 1, fixamos as notações básicas e apresentamos os resultados relativos à teoria das funções generalizadas, os quais serão usados no desenvolvimento do trabalho. Em particular, apresentamos algumas propriedades das derivadas parciais de funções generalizadas. No Capítulo 2, quando $E = \mathbb{R}^n$, introduzimos a relação de associação em $\mathcal{G}(\Omega; \mathbb{K}^\ell)$. Além disso, nas seções 2.2 e 2.3, respectivamente, são introduzidas as noções de função generalizada de Heaviside na variável x em $\mathbb{R}^n$ e nas variáveis (x,t) em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, e são consideradas algumas propriedades dessas funções a serem usadas nos dois últimos capítulos.

Numa primeira parte do Capítulo 3, coletamos algumas propriedades da função composta relativas, basicamente, às funções generalizadas de Heaviside. Os resultados apresentados em 3.1.1, 3.1.7 e 3.1.15 são fundamentais para o estudo da resolubilidade dos sistemas de EDPs, considerados no trabalho. Numa segunda parte, introduzimos a função composta $\varphi \circ f$ para uma certa classe de aplicações generalizadas f em $\mathcal{G}(\Omega;]\alpha, \beta[)$ e φ em $C^\infty(]\alpha, \beta[; G)$, onde $]\alpha, \beta[\subset \tilde{\mathbb{R}}^m_+$, e (quando E é de dimensão finita) apresentamos um resultado acerca de inversibilidade para uma classe de funções em $\mathcal{G}(\Omega; \mathbb{R})$. Na terceira parte deste capítulo, são estudadas algumas propriedades de funções generalizadas da forma $\varphi \circ (a_1 H_1 + b_1, \ldots, a_\ell H_\ell + b_\ell)$, em que $H_1, \ldots, H_\ell$ são funções generalizadas de Heaviside sob certas condições. Nesta parte, os resultados apresentados em 3.3.3, 3.3.8 e 3.3.11 são de fundamental importância para o estudo da resolubilidade dos sistemas de EDPs, considerados neste trabalho. A proposição 3.3.8 é usada, inicialmente, para a obtenção de soluções



na forma de onda de choque de acordo com a definição 4.2.2 e, depois, usando-se essas soluções, obtem-se soluções de acordo com a definição 4.4.8 (ver prova dos teoremas 4.2.6 e 4.4.12). A proposição 3.3.11 é usada para mostrar que sistemas de EDPs, sugeridos pelo sistema (S) acima considerado, não possuem soluções na forma de onda de choque, no sentido da definição 4.4.8 (ver os resultados 4.5.3 e 4.5.4). Usando-se a proposição 4.5.3, mostramos que esses sistemas também não têm soluções na forma de onda de choque, agora, de acordo com a definição 4.2.2 " enfraquecida " (ver a definição 4.5.7 e os resultados 4.5.9 e 4.5.10).

No Capítulo 4, é que estudamos, propriamente, o problema proposto. Com a finalidade de facilitar a descrição dos resultados obtidos neste capítulo, denotaremos com (S_0) o sistema homogêneo de EDPs, considerado na seção 4.1, o qual foi sugerido pelo sistema $(\tilde{S})$, no caso em que $\nu(\rho, p, e) = \alpha$. Da mesma forma, denotaremos com $(\tilde{S}_m)$ e com (S_m), os sistemas de EDPs considerados nas seções 4.2 e 4.3, sistemas estes que foram sugeridos, respectivamente, pelos sistemas $(\tilde{S})$ e (S) acima considerados. Inicialmente, apresentamos um resultado (teorema 4.1.9) sobre resolubilidade do homogêneo sistema (S_0) (ver também 4.1.11). De acordo com o resultado, o sistema homogêneo tem solução na forma de onda de choque, no sentido da definição 4.1.1, se, e somente se, são válidas as clássicas condições de salto da hidrodinâmica. As soluções são dadas em termos de funções generalizadas de Heaviside na variável x em $\mathbb{R}^n$. Na segunda seção, apresentamos alguns resultados relacionados às soluções na forma de onda de choque, de acordo com a definição 4.2.2 para os sistemas $(\tilde{S}_m)$ e $(\bar{S}_m)$ (ver teoremas 4.2.6 e 4.2.9), em que $(\bar{S}_m)$ é obtido, substituindo a relação de associação pela igualdade de funções generalizadas nas duas primeiras equações do sistema $(\tilde{S}_m)$. Na seção 4.3, introduzimos a noção de $\mathcal{H}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$-solução do tipo de forma de onda de choque na álgebra $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$, no sentido de que as soluções são elementos de $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ e são dadas em termos de funções de classe C^∞ e de funções generalizadas de Heaviside nas variáveis (x, t) em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ (ver definição 4.3.2). A noção introduzida aqui é uma tentativa de generalizar a idéia clássica de solução na forma de onda de choque, considerada, por exemplo, em [3] (Seção 3) ou em [11] (Definição 5.1). No entanto, a pretendida generalização é ilusória, como é mostrado com os resultados apresentados em



4.4.5 e em 4.4.9. Na seção 4.4, inicialmente, apresentamos um resultado (teorema 4.4.5) sobre resolubilidade do sistema $(\tilde{S}_m)$. De acordo com o mesmo, uma condição necessária e suficiente para que o sistema $(\tilde{S}_m)$ possua soluções na forma de onda de choque, conforme a definição 4.3.2, é que, basicamente, estejam satisfeitas as clássicas condições de salto da hidrodinâmica e as duas relações seguintes

$$[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]u_x \approx 0 \quad \text{e} \quad [\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]uu_x \approx 0.$$

Usando-se os resultados 4.2.6 e 4.4.11 obtem-se um resultado (teorema 4.4.12) sobre existência de soluções, de acordo com o qual o sistema $(\tilde{S}_m)$ tem soluções na forma de onda de choque, no sentido da definição 4.4.8, se, e somente se, as condições de salto da hidrodinâmica estiverem satisfeitas. Em particular, obtem-se soluções na forma de onda de choque para o sistema $(\tilde{S})$, as quais são dadas em termos de funções generalizadas de Heaviside nas variáveis (x, t) em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (ver teorema 4.4.15). Na seção final do capítulo, usando-se as proposições 3.3.11 e 4.5.1, mostramos que as duas primeiras equações do sistema (S_m) não podem ter soluções na forma de onda de choque, de acordo com a definição 4.3.2 (ver proposição 4.5.3), a qual nos fornece um resultado de não existência de soluções para o sistema (S_m) (ver teorema 4.5.4). Em particular, o sistema (S) também não tem soluções na forma de onda de choque no sentido da definição 4.3.2 (ver teorema 4.5.5).

Lembramos que em [3], [9] e [11] estudamos a existência de $\mathcal{H}(\mathbb{R})$-soluções na forma de onda de choque dos sistemas $(\tilde{S})$ e $(\bar{S})$, no sentido da definição 4.2.2 (para o caso $m = 1$). O presente trabalho constitue um considerável avanço dos resultados obtidos nesses trabalhos. De fato, as componentes da função solução (ρ, u, p, e), quando consideradas nos referidos trabalhos, são dadas em termos de funções generalizadas de Heaviside na variável (espaço) x em $\mathbb{R}$; essas funções generalizadas no contexto deste trabalho, são dadas em termos de funções generalizadas de Heaviside nas variáveis (espaço-tempo) (x, t) em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, apenas para destacar o assunto, objetivo principal do trabalho. Naturalmente, as aplicações dos resultados aqui obtidos são maiores. Entretanto, é bom resaltar que os trabalhos desenvolvidos nas referências acima citadas deram um suporte técnico decisivo para a elaboração do presente trabalho.



As referências básicas para a teoría de Colombeau são [1], [2], [4], [6] e [8]. As notações gerais não mencionadas neste trabalho são as mesmas que as de [1] e [2]. A técnica das demonstrações de alguns resultados apresentados neste trabalho são as mesmas das demonstrações dos resultados correspondentes que aparccem em [1], [2], [3] ou em [11], e quando for o caso citaremos pelo menos uma dessas referências.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

Índice de Notações e Convenções

- A := B (resp. A =: B) significa que A (resp. B) esta sendo definida como igual a B (resp. A)
- $\mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{N}^*$) é o conjunto dos números inteiros não negativos (resp. positivos)
- $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}^*_-$, $\mathbb{R}^*_+$) é o corpo (resp. conjunto) dos números reais (resp. reais não negativos, reais não nulos, reais negativos, reais positivos)
- $\tilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $\tilde{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, $\tilde{\mathbb{R}}^*_+ := \mathbb{R}^*_+ \cup \{+\infty\}$
- $(\mathbb{R}^+_-)^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_j < 0 \quad \text{para algum} \quad j = 1, \ldots, n\}$
- $\mathbb{K}$ denota indistintamente $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, onde $\mathbb{C}$ é o corpo dos números complexos
- $B_r(a)$ é a bola aberta de centro a e raio $r > 0$
- $B_r[a]$ é a bola fechada de centro a e raio $r > 0$
- $K \subset\subset \Omega$ significa que K é uma parte compacta de Ω
- $\mathcal{D}(\Omega)$ é a álgebra de funções C^∞ em Ω com suporte compacto, $\mathcal{D}'(\Omega)$ é o espaço vetorial das distribuições em Ω e $< T, \varphi >$ denota o valor de $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ em $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$
- $X \setminus Y$ indica o complementar de Y em X, se $Y \subset X$
- $X \dot{\cup} Y$ significa reunião disjunta dos conjuntos X e Y
- $f_n \xrightarrow{u} f$ em A, significa que f_n converge uniformemente para f em A
- Para $a, b \in \mathbb{R}$, $a \wedge b := \min\{a, b\}$ e $a \vee b := \max\{a, b\}$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

- Para $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$ e

$$\partial_x^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

- Para $k \leq n$, $\partial_x^k := \partial^k / \partial x_1 \cdots \partial x_k$

- f_x, g_λ, etc. denota a derivada parcial: de f em relação a x, de g em relação a λ, etc.

- Se S é uma transformação diferenciável de $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^n$, J_S indica o jacobiano de S

- Para $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ em $\tilde{\mathbb{R}}^n$ escrevemos $x \leq y$ (resp. $x < y$) se $x_i \leq y_i$ (resp. $x_i < y_i$) para $1 \leq i \leq n$

- Para $a = (a_1, \ldots, a_m)$ e $b = (b_1, \ldots, b_m)$ em $\tilde{\mathbb{R}}^m$ com $a \leq b$ usaremos as seguintes notações

$$I_a^b := \prod_{i=1}^m]a_i, b_i[,\ [a, b] := \prod_{i=1}^m [a_i, b_i],\ [a, b[:= \prod_{i=1}^m [a_i, b_i[,\ ]a, b] := \prod_{i=1}^m]a_i, b_i]$$

- A expressão " espaço de Banach " (resp. " álgebra de Banach ") significa " $\mathbb{K}$ – espaço de Banach " (resp. " $\mathbb{K}$ – álgebra de Banach ")

- Fórmulas que precisam ser destacadas que aparecem em algum enunciado (definição, proposição, etc.) ou na prova de um resultado, têm a enumeração derivada a partir da enumeração do enunciado em questão. Por exemplo, as fórmulas 1.1.4(1) e 1.1.4(2) relacionadas à proposição 1.1.4. Fórmulas que precisam ser destacadas, não incluídas nos casos anteriores, têm enumeração derivada a partir da enumeração do capítulo e da seção onde aparecem e são indicadas entre parênteses. Por exemplo, (1.2.1) é a primeira fórmula destacada da seção 1.2. Finalmente, itens que precisam ser destacados, e que aparecem em algum enunciado, têm a enumeração derivada a partir da enumeração do enunciado em questão. Por exemplo, os itens 2.1.3(a) e 2.1.3(b) relacionadas à proposição 2.1.3

- $\nabla_t f$, $\mathrm{div}_x f_t$ e $f_{t,x}$ ver convenção 1.2.5 e observação 1.2.6

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

- $\mathcal{E}_M(F)$, $\mathcal{N}(F)$ e $\bar{F}$: ver definição 1.1.3
- $\mathcal{G}_{\ell b}(\Omega; F)$: ver definição 1.1.4
- $\mathcal{E}[\Omega; \Omega']$, $\mathcal{E}_M[\Omega; \Omega']$, $\mathcal{E}_{M,*}[\Omega; \Omega']$, $\mathcal{G}(\Omega; \Omega')$ e $\mathcal{G}_*(\Omega; \Omega')$ ver definição 1.1.6
- $\mathbb{Y}$ e $\mathbb{Y}_n$: ver definição 2.2.5 e $\mathbb{Y}_{nm}$: ver definição 2.3.5
- $\Lambda(n)$: ver notação 2.2.2
- $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$: ver ver definição 2.2.7 e $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$: ver definição 2.3.7
- $\mathcal{H}_p(\mathbb{R}^n)$: ver definição 2.2.9 e $\mathcal{H}_p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$: ver definição 2.3.10
- $\mathcal{H}_r(\mathbb{R}^n)$: ver definição 2.2.13 e $\mathcal{H}_r(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$: ver definição 2.3.13
- $\mathcal{H}_\Lambda(\mathbb{R}^n)$: ver notaçaõ 2.2.18 e $\mathcal{H}^n_\Lambda(\mathbb{R}^n)$: ver observaçaõ 2.2.19
- $\mathcal{H}_\Lambda(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ e $\mathcal{H}^{n,m}_\Lambda(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$: ver notação 2.3.16
- $\mathcal{E}_{M,\oslash}[\Omega; I^\beta_\alpha]$, $\mathcal{E}_{M,\otimes}[\Omega; I^\beta_\alpha]$ e $\mathcal{G}_\otimes(\Omega; I^\beta_\alpha)$: ver definição 3.2.1
- $\mathcal{E}_{QM}[I^\beta_\alpha; G]$ e $C^\infty_{QM}[I^\beta_\alpha; G]$: ver definição 3.2.2
- $\mathcal{E}_{M,\odot}[\Omega; \mathbb{R}^*]$, $\mathcal{E}_{M,\circ}[\Omega; \mathbb{R}^*]$ e $\mathcal{G}_\circ(\Omega; \mathbb{R}^*)$: ver definição 3.2.6
- $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$-solução na forma de onda de choque em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$: ver definição 4.1.1
- $\mathcal{H}(\mathbb{R})$-solução na forma de onda de choque em $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$: ver definição 4.2.2 (ver também definição 4.5.7)
- $\mathcal{H}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$-solução do tipo de forma de onda de choque em $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$: ver definição 4.3.2
- $\mathcal{H}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$-solução na forma de onda de choque em $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$: ver definição 4.4.8

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

Capítulo 1

A Álgebra $\mathcal{G}(\Omega; F)$ das Funções Generalizadas

Na seção 1.1 serão introduzidos a álgebra das *aplicações generalizadas simples* $\mathcal{G}_s(\Omega; F)$ e a álgebra dos *vetores generalizados simples* $\bar{F}_s$. Neste trabalho, da mesma forma como foi feito em [9], escreveremos por comodidade $\mathcal{G}(\Omega; F)$ em vez de $\mathcal{G}_s(\Omega; F)$ e $\bar{F}$ em vez de $\bar{F}_s$ (uma notação similar é aplicada aos conjuntos que dão origem a $\mathcal{G}_s(\Omega; F)$ e $\bar{F}_s$). Para uma comodidade maior ainda, no caso $F = \mathbb{K}$, escreveremos $\mathcal{G}(\Omega)$ em vez de $\mathcal{G}(\Omega; \mathbb{K})$ e uma notação similar é usada para os conjuntos que geram (bem como para os subconjuntos de) $\mathcal{G}(\Omega; \mathbb{K})$. Chamaremos simplesmente de aplicações (ou funções) generalizadas às aplicações (ou funções) generalizadas simples, de funções moderadas (resp. nulas) às funções moderadas (resp. nulas) simples e de vetores generalizados (resp. elementos moderados) aos vetores generalizados (resp. elementos moderados) simples. Na seção 1.1, fixamos também as notações básicas e apresentamos os resultados relativos à álgebra das funções generalizadas $\mathcal{G}(\Omega; F)$, os quais serão usados no desenvolvimento deste trabalho. Na seção 1.2 apresentamos algumas propriedades das derivadas parciais de funções generalizadas. O resultado 1.2.4 nos permitirá estudar a não resolubilidade do sistema (S) na seção 4.5. O lema 1.2.7 será muito útil para o estudo da resolubilidade de certos sistemas de EDPs na seção 4.1. É importante também destacar a convenção 1.2.5 e a observação 1.2.6. Usando as notações constantes nesses itens apresentamos, no

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

capítulo 4, sistemas de EDPs associados aos sistemas $(\tilde{S})$ e (S), considerados na Introdução, na sua forma compacta.

1.1 Definições e resultados preliminares

Denotamos pelo mesmo símbolo, $|\cdot|$, as normas dos espaços E, F, $F_1, \ldots, F_m$ e G considerados na Introdução. Consideraremos o espaço produto $F_1 \times \cdots \times F_m$ munido da norma *euclidiana*

$$(y_1, \ldots, y_m) \in F_1 \times \cdots \times F_m \mapsto \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^2 \right)^{1/2} \in \mathbb{R}_+.$$

Em vez dessa norma, pode ser considerada uma outra norma equivalente qualquer, (por exemplo a norma $\sup |y_i|$ ou $\sum |y_i|$). O símbolo $\mathcal{L}(F_1, \ldots, F_m; G)$ denota o espaço das aplicações m - lineares contínuas do espaço produto $F_1 \times \cdots \times F_m$ em G munido da norma

$$|\cdot|_{\dot{m}} : A \in \mathcal{L}(F_1, \ldots, F_m; G) \mapsto \sup_{\substack{|y_i|=1 \\ 1 \le i \le m}} |A(y_1, \ldots, y_m)| \in \mathbb{R}_+.$$

Se $F_1 = \cdots = F_m = F$ este espaço é denotado por $\mathcal{L}({}^mF; G)$ e $\mathcal{L}({}^0F; G) =: G$.

Denotamos por $\mathcal{E}[\Omega; F]$ o espaço das funções u de $]0,1] \times \Omega$ em F tais que a aplicação $u(\varepsilon, \cdot) : x \in \Omega \mapsto u(\varepsilon, x) \in F$ é de classe C^∞ para cada $\varepsilon \in]0,1]$. Se $p \in \mathbb{N}$ consideremos a aplicação $u \in \mathcal{E}[\Omega; F] \mapsto u^{(p)} \in \mathcal{E}[\Omega; \mathcal{L}({}^pE; F)]$, onde

$$u^{(p)}(\varepsilon, x) := [u(\varepsilon, \cdot)]^{(p)}(x), \quad ((\varepsilon, x) \in]0,1] \times \Omega). \tag{1.1.1}$$

Indicamos por $\mathcal{E}_M[\Omega; F]$ o espaço de todas as funções $u \in \mathcal{E}[\Omega; F]$ tais que para cada $K \subset\subset \Omega$ e cada $p \in \mathbb{N}$ existem $N \in \mathbb{N}$, $C > 0$ e $\eta \in]0,1]$ satisfazendo

$$\sup_{x \in K} |u^{(p)}(\varepsilon, x)|_p \le C\varepsilon^{-N}, \quad (0 < \varepsilon < \eta).$$

Denotamos por $\mathcal{N}[\Omega; F]$ o conjunto de todas as funções $u \in \mathcal{E}[\Omega; F]$ tais que para cada $K \subset\subset \Omega$ e cada $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ existem $C > 0$ e $\eta \in]0,1]$ satisfazendo

$$\sup_{x \in K} |u^{(p)}(\varepsilon, x)|_p \le C\varepsilon^q, \quad (0 < \varepsilon < \eta).$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Os elementos de $\mathcal{E}_M[\Omega; F]$ (resp. $\mathcal{N}[\Omega; F]$) são chamados *aplicações moderadas* (resp. *nulas*) *em* Ω *a valores em* F. Definimos a álgebra quociente

$$\mathcal{G}(\Omega; F) := \frac{\mathcal{E}_M[\Omega; F]}{\mathcal{N}[\Omega; F]}$$

das *aplicações generalizadas em* Ω *a valores em* F.

A aplicação $f \in C^\infty(\Omega; F) \mapsto \widehat{f} + \mathcal{N}[\Omega; F] \in \mathcal{G}(\Omega; F)$, onde

$$\widehat{f}\colon (\varepsilon, x) \in]0, 1] \times \Omega \mapsto \widehat{f}(\varepsilon, x) := f(x) \in F \tag{1.1.2}$$

é um homomorfismo injetivo de álgebras, por meio do qual identificamos $C^\infty(\Omega; F)$ com uma subálgebra de $\mathcal{G}(\Omega; F)$. Sendo assim, podemos escrever

$$C^\infty(\Omega; F) \subset \mathcal{G}(\Omega; F).$$

Se V é um subconjunto aberto não vazio de Ω e se $f \in \mathcal{G}(\Omega; F)$, a *restrição* de f a V, denotado por $f|_V$, é definido por

$$f|_V := \widehat{f}|_{]0,1]\times V} + \mathcal{N}[V; F] \tag{1.1.3}$$

onde $\widehat{f} \in \mathcal{E}_M[\Omega; F]$ é um representante qualquer de f.

1.1.1 Definição. Se $p \in \mathbb{N}$ e $f \in \mathcal{G}(\Omega; F)$, a *derivada intrínsica de ordem* p de f, denotado por $f^{(p)}$, é definido como sendo (ver (1.1.1))

$$f^{(p)} := \widehat{f}^{(p)} + \mathcal{N}[\Omega; \mathcal{L}(^pE; F)]$$

onde $\widehat{f} \in \mathcal{E}_M[\Omega; F]$ é um representante qualquer de f.

O resultado dado a seguir é de grande utilidade para o estudo das aplicações nulas (ver [9], Lema 1.2.5).

1.1.2 Lema. (I). *Seja* $u \in \mathcal{E}[\Omega; F]$ *tal que, para cada* $K \subset\subset \Omega$, *existem* $\eta \in]0, 1]$ *e um conjunto aberto* V *com* $K \subset V \subset \Omega$ *e* $u \equiv 0$ *em* $]0, 1] \times V$. *Então,* $u \in \mathcal{N}[\Omega; F]$. *Se* $\dim E < +\infty$, *para ter* $u \in \mathcal{N}[\Omega; F]$ *é suficiente que, para cada conjunto aberto não vazio* V, *com* $\overline{V} \subset\subset \Omega$, *exista* $\eta \in]0, 1]$ *de modo que* $u \equiv 0$ *em* $]0, \eta[\times V$.
(II). *Toda* $u \in \mathcal{N}[\Omega; F]$ *satisfaz as seguintes propriedades.*

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

(a) *Se* $p \in \mathbb{N}$ *e* $K \subset\subset \Omega$ *então,* $u^{(p)}(\varepsilon,\cdot) \xrightarrow{u} 0$ *em* K *quando* $\varepsilon \downarrow 0$.

(b) *Para cada* $K \subset\subset \Omega$, *existem* $C > 0$ *e* $\eta \in]0,1]$ *satisfazendo*

$$\sup_{x\in K} |u(\varepsilon,x)| \leq C, \quad (0 < \varepsilon < \eta)\,.$$

(c) *No caso* $E = \mathbb{R}^n$ *e* $F = \mathbb{K}$, *temos* $u(\varepsilon,\cdot) \to 0$ *em* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *quando* $\varepsilon \downarrow 0$.

1.1.3 Definição. Denotamos por:

(a) $\mathcal{E}_M(F)$ o conjunto de todas as funções μ de $]0,1]$ em F tais que existem $N \in \mathbb{N}$, $C > 0$ e $\eta \in]0,1]$ satisfazendo

$$|\mu(\varepsilon)| \leq C\varepsilon^{-N}, \quad (0 < \varepsilon < \eta).$$

Os elementos de $\mathcal{E}_M(F)$ são chamados *elementos moderados em* F.

(b) $\mathcal{N}(F)$ o conjunto de todas as funções μ de $]0,1]$ em F tais que para cada $q \in \mathbb{N}$ existem $C > 0$ e $\eta \in]0,1]$ satisfazendo

$$|\mu(\varepsilon)| \leq C\varepsilon^{q}, \quad (0 < \varepsilon < \eta).$$

(c) $\bar{F}$ a álgebra quociente dos *vetores generalizados em* F; isto é

$$\bar{F} := \frac{\mathcal{E}_M(F)}{\mathcal{N}(F)}.$$

As aplicções naturais

$$y \in F \mapsto \operatorname{class}(\varepsilon \mapsto y) \in \bar{F} \quad \text{e} \quad \mu \in \mathcal{E}_M(F) \mapsto [(\varepsilon,\lambda) \mapsto \mu(\varepsilon)] \in \mathcal{E}_M[\Omega; F]$$

são injetoras. Então, podemos identificar F com uma subálgebra de $\bar{F}$ e $\bar{F}$ com uma subálgebra de $\mathcal{G}(\Omega; F)$. De acordo com essas observações podemos escrever

$$F \subset \bar{F} \subset \mathcal{G}(\Omega; F)\,.$$

Os elementos da imagem de $\bar{F}$ em $\mathcal{G}(\Omega; F)$ são chamados *constantes generalizadas.*

unesp

1.1.4 Definição. Indicamos com $\mathcal{G}_{\ell b}(\Omega; F)$ o conjunto de todas as aplicações f em $\mathcal{G}(\Omega; F)$ as quais tem um representante $\widehat{f}$ tal que para cada $K \subset\subset \Omega$ existem $C > 0$ e $\eta \in]0, 1]$ satisfazendo

$$\sup_{x \in K} |\widehat{f}(\varepsilon, x)| \leq C, \quad (0 < \varepsilon < \eta).$$

Do lema 1.1.2(b) segue que, se $f \in \mathcal{G}(\Omega; F)$ e $f = 0$ então $f \in \mathcal{G}_{\ell b}(\Omega; F)$. Por outro lado, é claro que $f \in \mathcal{G}_{\ell b}(\Omega; F)$ para todo $f \in C^\infty(\Omega; F)$ (ver (1.1.2)). Podemos escrever então

$$C^\infty(\Omega; F) \subset \mathcal{G}_{\ell b}(\Omega; F) \subset \mathcal{G}(\Omega; F).$$

1.1.5 Definição. Se $f_i \in \mathcal{G}(\Omega; F_i)$, $1 \leq i \leq m$, denotamos com $(f_1, \ldots, f_m)$ a classe da função

$$(\widehat{f_1}, \ldots, \widehat{f_m})\colon (\varepsilon, x) \in]0, 1] \times \Omega \mapsto \left(\widehat{f_1}(\varepsilon, x), \ldots, \widehat{f_m}(\varepsilon, x)\right) \in F_1 \times \cdots \times F_m$$

em $\mathcal{G}(\Omega; F_1 \times \cdots \times F_m)$, onde $\widehat{f_i}$ é um representante qualquer de f_i. Nesse caso, as funções generalizadas $f_1, \ldots, f_m$ são chamadas as *componentes* de $(f_1, \ldots, f_m)$.

Observemos que, se $f = (f_1, \ldots, f_m) \in \mathcal{G}(\Omega; F_1 \times \cdots \times F_m)$ então, f é um elemento de $\mathcal{G}_{\ell b}(\Omega; F_1 \times \cdots \times F_m)$ se, e somente se, $f_i \in \mathcal{G}_{\ell b}(\Omega; F_i)$ para cada $i = 1, \ldots, m$.

A seguir serão introduzidas as notações a serem usadas no estudo da composição de funções generalizadas.

1.1.6 Definição. Denotamos com:

(a) $\mathcal{E}[\Omega; \Omega'] := \{u \in \mathcal{E}[\Omega; F] \mid u(]0, 1] \times \Omega) \subset \Omega'\}$.

(b) $\mathcal{E}_M[\Omega; \Omega'] := \mathcal{E}_M[\Omega; F] \cap \mathcal{E}[\Omega; \Omega']$.

(c) $\mathcal{E}_*[\Omega; \Omega']$ o conjunto de todos os elementos $u \in \mathcal{E}[\Omega; \Omega']$ tais que para cada $K \subset\subset \Omega$ existem $K' \subset\subset \Omega'$ e $\eta \in]0, 1]$ tais que $u(]0, \eta[\times K) \subset K'$.

(d) $\mathcal{E}_{M,*}[\Omega; \Omega'] := \mathcal{E}_M[\Omega; F] \cap \mathcal{E}_*[\Omega; \Omega']$.

(e) $\mathcal{G}(\Omega; \Omega')$ o conjunto de todos os elementos de $\mathcal{G}(\Omega; F)$ os quais tem pelo menos um representante em $\mathcal{E}_M[\Omega; \Omega']$.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

(f) $\mathcal{G}_*(\Omega;\Omega')$ o conjunto de todos os elementos de $\mathcal{G}(\Omega;F)$ os quais tem pelo menos um representante em $\mathcal{E}_{M,*}[\Omega;\Omega']$.

Observar que, se F é de dimensão finita então

$$\mathcal{G}_{\ell b}(\Omega;F) = \mathcal{G}_*(\Omega;F).$$

1.1.7 Definição. Se $(u,w) \in \mathcal{E}[\Omega;\Omega'] \times \mathcal{E}[\Omega';G]$, seja $w \circ u \in \mathcal{E}[\Omega;G]$ definida por

$$(w \circ u)(\varepsilon,x) := w(\varepsilon, u(\varepsilon,x)), \quad ((\varepsilon,x) \in]0,1] \times \Omega).$$

Para uma prova do resultado seguinte ver [9] (Proposição 3.1.9) ou [12] (Teorema 3.4).

1.1.8 Proposição. *Para cada* $(u,v) \in \mathcal{E}_{M,*}[\Omega;\Omega'] \times \mathcal{E}_M[\Omega;\Omega']$ *são válidas as afirmações seguintes.*

(a) *Se* $w \in \mathcal{E}_M[\Omega';G]$ *então,* $w \circ u \in \mathcal{E}_M[\Omega;G]$ *e se* $w \in \mathcal{N}[\Omega';G]$ *então,* $w \circ u$ *é um elemento de* $\mathcal{N}[\Omega;G]$.

(b) *Se* $w_1, w_2 \in \mathcal{E}[\Omega';G]$ *e* $w_1 - w_2 \in \mathcal{N}[\Omega';G]$ *então,* $w_1 \circ u - w_2 \circ u \in \mathcal{N}[\Omega;G]$.

Além disso, se F *for de dimensão finita valem ainda as asserções seguintes.*

(c) *Se* $u - v \in \mathcal{N}[\Omega;F]$ *e* $w \in \mathcal{E}_M[\Omega';G]$ *então,* $w \circ u - w \circ v \in \mathcal{N}[\Omega;G]$.

(d) *Se* $u - v \in \mathcal{N}[\Omega;F]$ *e se* $w_1, w_2 \in \mathcal{E}_M[\Omega';G]$ *são tais que* $w_1 - w_2 \in \mathcal{N}[\Omega';G]$ *então,* $w_1 \circ u - w_2 \circ v \in \mathcal{N}[\Omega;G]$.

A proposição anterior nos permite dar a definição seguinte.

1.1.9 Definição. Se $\dim F < +\infty$ e $(f,g) \in \mathcal{G}_*(\Omega;\Omega') \times \mathcal{G}(\Omega';G)$ definimos a *função composta*

$$g \circ f := \widehat{g} \circ \widehat{f} + \mathcal{N}[\Omega;G]$$

onde $\widehat{f} \in \mathcal{E}_M[\Omega;\Omega']$ e $\widehat{g}$ são representantes arbitrários de f e g, respectivamente.

É clara a validade da observação seguinte.

unesp

1.1.10 Observação. Se $\dim F < +\infty$ e $(f, g) \in \mathcal{G}_*(\Omega; \Omega') \times \mathcal{G}_{\ell b}(\Omega'; G)$ então, a função composta $g \circ f \in \mathcal{G}_{\ell b}(\Omega; G)$.

No resultado seguinte suporemos que $E = \mathbb{R}^n$ e $F = \mathbb{K}^m$. Uma prova do mesmo pode ser encontrada em [9] (Proposição 3.1.14).

1.1.11 Proposição. *Se* $(f_1, \ldots, f_m) \in \mathcal{G}_*(\Omega; \Omega')$ *e* $g \in \mathcal{G}(\Omega'; G)$ *então, vale a fórmula*

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[g \circ (f_1, \ldots, f_m)\right] = \sum_{i=1}^{m} \left[\frac{\partial g}{\partial y_i} \circ (f_1, \ldots, f_m)\right] \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \qquad (1 \leq j \leq m).$$

1.2 Algumas propriedades das derivadas parciais de funções generalizadas

Nesta seção, serão considerados os casos $E = \mathbb{R}^n$ e $E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. No ambiente da álgebra das funções generalizadas em espaços euclidianos serão consideradas algumas propriedades das derivadas parciais dessas funções. Destacamos os resultados 1.2.4 e 1.2.7. A proposição 1.2.4 afirma que "*uma condição necessária e suficiente para que uma função generalizada* $f = f(\lambda, t)$ *em* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ *seja independente da variável* λ *é que a sua derivada parcial* f_λ *seja a função generalizada nula*". Esse resultado será de grande utilidade para o estudo da não resolubilidade do sistema (S), considerado na Introdução (ver prova da proposição 4.5.1). Já o lema 1.2.7 será também importante para o estudo da resolubilidade de sistemas de equações diferenciais parciais na seção 4.1, via os resultados 2.2.11(d) e 3.1.9(2) (ver, por exemplo, prova das proposições 4.1.5, 4.1.7 e 4.1.8).

No caso $E = \mathbb{R}^n$, para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, consideremos a aplicação linear

$$\partial^\alpha : u \in \mathcal{E}[\Omega; F] \mapsto \partial^\alpha u \in \mathcal{E}[\Omega; F]$$

onde $\partial^\alpha u : (\varepsilon, x) \in]0, 1] \times \Omega \mapsto \partial^\alpha u(\varepsilon, x) := [\partial^\alpha u(\varepsilon, \cdot)](x) \in F$.

Se $(\alpha, f) \in \mathbb{N}^n \times \mathcal{G}(\Omega, F)$, a *derivada parcial de ordem* α de f é definida por

$$\partial^\alpha f := \partial^\alpha \widehat{f} + \mathcal{N}[\Omega; F]$$

onde $\widehat{f}$ é um representante qualquer de f.

Uma prova do resultado seguinte pode ser encontrada em [2] (Proposição 2.1.5) ou em [9] (Proposição 1.2.19).

1.2.1 Proposição. *Para cada $u \in \mathcal{E}[\Omega; F]$ são válidas as asserções seguintes.*

(a) *Temos $u \in \mathcal{E}_M[\Omega; F]$ se, e somente se, para cada $K \subset\subset \Omega$ e cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, existem $N \in \mathbb{N}$, $C > 0$ e $\eta \in]0, 1]$ satisfazendo*

$$\sup_{x \in K} |\partial^\alpha u(\varepsilon, x)| \leq C\varepsilon^{-N}, \quad (0 < \varepsilon < \eta).$$

(b) *Temos $u \in \mathcal{N}[\Omega; F]$ se, e somente se, para cada $K \subset\subset \Omega$ e cada $(\alpha, q) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}$, existem $C > 0$ e $\eta \in]0, 1]$ satisfazendo*

$$\sup_{x \in K} |\partial^\alpha u(\varepsilon, x)| \leq C\varepsilon^q, \quad (0 < \varepsilon < \eta).$$

Até o final desta seção serão considerados espaços euclidianos do tipo $F = \mathbb{K}^\ell$. Quando for considerado o espaço $F = \mathbb{K}$ serão usadas as notações descritas na introdução do presente capítulo.

1.2.2 Definição. Seja $i = 1, \ldots, n$ fixado.

(a) Para cada $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, seja $\check{x}_i \colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ a função definida por

$$\check{x}_i(t) := (x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n), \quad (t \in \mathbb{R}).$$

(b) Dizemos que uma função $u \in \mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$ *independe da variável x_i* se

$$u(\varepsilon, \check{x}_i(s)) = u(\varepsilon, \check{x}_i(t)), \quad (s, t \in \mathbb{R},\ (\varepsilon, x) \in]0, 1] \times \mathbb{R}^n,\ x = (x_1, \ldots, x_n)).$$

(c) Dizemos que um elemento $f \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$ *independe da variável x_i* se f possui um representante que independe da variável x_i.

Observar que, para cada $i = 1, \ldots, n$ e cada $u \in \mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$, as afirmações seguintes são equivalentes.

- A função u independe da variável x_i

- Existe uma função $u_i \in \mathcal{E}[\mathbb{R}^{n-1}]$ tal que

$$u(\varepsilon, x) = u_i(\varepsilon, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n), \quad ((\varepsilon, x) \in]0,1] \times \mathbb{R}^n,\ x = (x_1, \ldots, x_n))$$

- Temos $\frac{\partial u}{\partial x_i} \equiv 0$ em $]0,1] \times \mathbb{R}^n$.

Observar também que, se $f \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$ independe da variável x_i então $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$. Vale também a recíproca (ver proposição 1.2.4).

Para comodidade do leitor, demonstraremos os dois resultados seguintes. As provas, essencialmente são as mesmas apresentadas em [1] (Proposições 4.4.3 e 4.4.4, respectivamente).

1.2.3 Proposição. *Fixados os elementos $i = 1, \ldots, n$, $a_i \in \mathbb{R}$ e $U \in \mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$, seja $u\colon]0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ a função definida por*

$$u(\varepsilon, x) := \int_{a_i}^{x_i} U\left(\varepsilon, \check{x}_i(t)\right) dt, \quad ((\varepsilon, x) \in]0,1] \times \mathbb{R}^n,\ x = (x_1, \ldots, x_n)).$$

Nestas condições temos $u \in \mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$ e

(a) *se $U \in \mathcal{E}_M[\mathbb{R}^n]$ então, $u \in \mathcal{E}_M[\mathbb{R}^n]$*

(b) *se $U \in \mathcal{N}[\mathbb{R}^n]$ então, $u \in \mathcal{N}[\mathbb{R}^n]$.*

Demonstração. Verificaremos somente a afirmação (b). A prova do item (a) é análoga. Inicialmente, observemos que, se $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $\alpha_i = 0$, da definição de u e por derivação sob o sinal de integração, é válida a condição seguinte

$$(1) \qquad \partial_x^\alpha u(\varepsilon, x) = \int_{a_i}^{x_i} \partial^\alpha U\left(\varepsilon, \check{x}_i(t)\right) dt, \quad ((\varepsilon, x) \in]0,1] \times \mathbb{R}^n,\ x = (x_1, \ldots, x_n)).$$

Por outro lado, se $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $\alpha_i \geq 1$ e $\beta := \check{\alpha}_i(\alpha_i - 1)$, temos que

$$(2) \qquad \partial_x^\alpha u(\varepsilon, x) = \partial_x^\beta U(\varepsilon, x), \quad ((\varepsilon, x) \in]0,1] \times \mathbb{R}^n).$$

As fórmulas (1) e (2) mostram que $u \in \mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$. Para que $u \in \mathcal{N}[\mathbb{R}^n]$, em virtude da proposição 1.2.1(b), fixados um subconjunto compacto K de $\mathbb{R}^n$ e um par (α, q) em $\mathbb{N}^n \times \mathbb{N}$, devemos achar constantes $C > 0$ e $\eta \in]0,1]$ de modo que

$$(3) \qquad \sup_{x \in K} |\partial^\alpha u(\varepsilon, x)| \leq C\varepsilon^q, \quad (0 < \varepsilon < \eta).$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

De fato, considerando as projeções

$$\pi_j\colon (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mapsto x_j\in\mathbb{R},\quad (j=1,\ldots,n)$$

e escolhendo um intervalo fechado $[a,b]$ contendo o ponto a_i e o conjunto compacto $\pi_i(K)$, podemos construir uma bola fechada B, centrada na origem, de modo que

$$K_i := \prod_{j=1}^{i-1}\pi_j(K)\times[a,b]\times\prod_{j=i+1}^{n}\pi_j(K)\subset B. \tag{4}$$

Como $U\in\mathcal{N}[\mathbb{R}^n]$, pela proposição 1.2.1(b), associado a $B\subset\subset\mathbb{R}^n$ e a cada par (ν,q) com $\nu\in\mathbb{N}^n$, existem constantes $C_\nu>0$ e $\eta_\nu\in]0,1]$ satisfazendo

$$\sup_{x\in B}|\partial^\nu U(\varepsilon,x)|\le C_\nu\varepsilon^q,\quad (0<\varepsilon<\eta_\nu). \tag{5}$$

Caso em que $\alpha_i=0$. Fixado um ponto $x=(x_1,\ldots,x_n)\in K$ qualquer, é claro que

$$\check{x}_i(s)=(x_1,\ldots,x_{i-1},s,x_{i+1},\ldots,x_n)\in K_i,\ \text{ para }\ s=a\,,b.$$

Então, pela inclusão (4) e pela convexidade de B, o segmento fechado de extremos $\check{x}_i(a)$ e $\check{x}_i(b)$ está contido em B. Sendo assim, temos a propriedade seguinte

$$\check{x}_i(t)\in B,\quad (t\in[a,b],\ x=(x_1,\ldots,x_n)\in K)\,. \tag{6}$$

Como $\{a_i\}\cup\pi_i(K)\subset[a,b]$, para cada $x=(x_1,\ldots,x_n)\in K$, usando (1), temos

$$|\partial^\alpha u(\varepsilon,x)|\le\left|\int_{a_i}^{x_i}|\partial^\alpha U\,(\varepsilon,\check{x}_i(t))\,|dt\right|\le\int_a^b|\partial^\alpha U\,(\varepsilon,\check{x}_i(t))\,|dt,\ \ (\varepsilon\in]0,1])$$

o que junto com as propriedades (5) (com $\nu=\alpha$) e (6) implica a condição (3),

$$|\partial^\alpha u(\varepsilon,x)|\le C_\alpha(b-a)\varepsilon^q,\quad ((\varepsilon,x)\in]0,\eta_\alpha[\times K)\,.$$

Caso em que $\alpha_i\ge 1$. Como o intervalo $[a,b]$ contém o conjunto $\pi_i(K)$ é claro que $K\subset K_i\subset B$. Então, por (2) e (5) (com $\nu=\beta=\check{\alpha}_i(\alpha_i-1)$), temos a condição

$$|\partial^\alpha u(\varepsilon,x)|=|\partial^\beta U(\varepsilon,x)|\le C_\beta\varepsilon^q,\quad ((\varepsilon,x)\in]0,\eta_\beta[\times K)$$

a qual verifica a desigualdade (3), com $C:=C_\beta$ e $\eta:=\eta_\beta$. □

1.2.4 Proposição. *Sejam $i = 1, \ldots, n$ e $f \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$. Temos $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ se, e somente se, existe $\Phi \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$ independente da variável x_i tal que $f = \Phi$.*

Demonstração. Fixemos $a \in \mathbb{R}$ e $\widehat{f}$ um representante qualquer de f. Consideremos a função $u\colon]0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ definida por

$$u(\varepsilon, x) := \int_a^{x_i} \frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_i}(\varepsilon, \check{x}_i(t))\, dt, \quad ((\varepsilon, x) \in]0,1] \times \mathbb{R}^n, \ \ x = (x_1, \ldots, x_n)).$$

Sendo $\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_i} \in \mathcal{N}[\mathbb{R}^n]$, pelo lema 1.2.3(b), temos que $u \in \mathcal{N}[\mathbb{R}^n]$. Por outro lado, pela definição de u, temos $u(\varepsilon, x) = \widehat{f}(\varepsilon, x) - \widehat{f}(\varepsilon, \check{x}_i(a))$; isto é,

$$\widehat{f}(\varepsilon, x) = u(\varepsilon, x) + \widehat{f}(\varepsilon, \check{x}_i(a)), \quad ((\varepsilon, x) \in]0,1] \times \mathbb{R}^n).$$

Como $u \in \mathcal{N}[\mathbb{R}^n]$, essa igualdade implica que

$$f = \operatorname{class}(\widehat{f}) = \operatorname{class}\Big((\varepsilon, x) \mapsto \widehat{f}(\varepsilon, \check{x}_i(a))\Big). \tag{1}$$

Seja $\Phi \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$ a classe da função $\widehat{\Phi}\colon]0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ definida por

$$\widehat{\Phi}(\varepsilon, x) := \widehat{f}(\varepsilon, x_1, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_n), \ \ ((\varepsilon, x) \in]0,1] \times \mathbb{R}^n, \ \ x = (x_1, \ldots, x_n)).$$

É claro que Φ independe da variável x_i e que $\Phi = f$ (por (1)). Reciprocamente, se $f = \Phi$ e Φ independe da variável x_i temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0.$$

□

Com o objetivo de facilitar a apresentação dos resultados, faremos como no caso clássico, a convenção a seguir. Essa convenção, junto com a observação que se segue, também nos permite escrever os sistemas (S) e $(\bar{S})$ na sua forma compacta, sistemas estes considerados na Introdução.

1.2.5 Convenção. Sejam W um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$. Suponhamos que

$$(x, t) = (x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_m)$$

denota um ponto genérico de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.



(a) Se $f \in \mathcal{G}(W \times \Omega; \mathbb{R})$ então

- $\nabla_t f$ denotará a aplicação $\left(\frac{\partial f}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial t_m}\right)$
- f_ℓ denotará a aplicação $(f, \ldots, f) \in \mathcal{G}(W \times \Omega; \mathbb{R}^\ell)$.

(b) Se $f \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$, $\operatorname{div}_x f$ denotará a aplicação $\operatorname{div}_x(f_n)$; isto é,

$$\operatorname{div}_x f := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

(c) Se $f \in \mathcal{G}(W \times \Omega)$ então

- $\partial_x^\alpha f$ denotará a aplicação $\partial^{|\alpha|} f / \partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}$, para $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$
- $\partial_x^n f$ denotará a aplicação $\partial^n f / \partial x_1 \cdots \partial x_n$.

(d) Se $g = (g_1, \ldots, g_\ell) \in \mathcal{G}(W \times \Omega; \mathbb{K}^\ell)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$, usaremos a seguinte notação

$$\partial_x^\alpha g := (\partial_x^\alpha g_1, \ldots, \partial_x^\alpha g_\ell).$$

1.2.6 Observação. De acordo com a convenção anterior, se $\ell \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{G}(W \times \Omega; \mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$, temos

$$\partial_x^\alpha(f_\ell) := (\partial_x^\alpha f, \ldots, \partial_x^\alpha f) = (\partial_x^\alpha f)_\ell.$$

Tendo em vista essa propriedade, para uma comodidade maior ainda, as aplicações

$$(\partial_x^\alpha f, \ldots, \partial_x^\alpha f), \quad (\operatorname{div}_x f, \ldots, \operatorname{div}_x f) \in \mathcal{G}(W \times \Omega; \mathbb{R}^\ell)$$

serão denotadas, respectivamente, somente por $\partial_x^\alpha f_\ell$ e $\operatorname{div}_x f_\ell$; isto é,

$$\partial_x^\alpha f_\ell := \partial_x^\alpha(f_\ell) = (\partial_x^\alpha f)_\ell \quad \text{e} \quad \operatorname{div}_x f_\ell := \operatorname{div}_x(f_\ell) = (\operatorname{div}_x f)_\ell.$$

No caso em que $n = 1$, a aplicação

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x}\right) \in \mathcal{G}(W \times \Omega; \mathbb{R}^\ell)$$

será denotada somente por $f_{\ell,x}$; isto é,

$$f_{\ell,x} := \frac{\partial}{\partial x}(f_\ell) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_\ell.$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

Uma propriedade importante do operador div_x que será usada na seção 4.1 é dada pelo resultado seguinte.

1.2.7 Lema. *Existe uma função $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\int_{(\mathbb{R}_+^*)^n} \mathrm{div}_\lambda\, \psi(\lambda) d\lambda \neq 0\,.$$

Demonstração. Fixado um número real $R > 0$, seja $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$ em $\mathbb{R}^n$ e $\psi \equiv 1$ em uma vizinhança de $B_R[0]$. Observemos que (ver definição 1.2.2(a))

$$\int_{(\mathbb{R}_+^*)^n} \mathrm{div}_\lambda\, \psi(\lambda) d\lambda = \sum_{i=1}^{n} \int_{(\mathbb{R}_+^*)^{n-1}} \int_0^{+\infty} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_i}(\lambda) d\lambda_i d\widehat{\lambda}_i = -\sum_{i=1}^{n} \int_{(\mathbb{R}_+^*)^{n-1}} \psi\left(\check{\lambda}_i(0)\right) d\widehat{\lambda}_i$$

onde $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ e $d\widehat{\lambda}_i := d\lambda_1 \cdots d\lambda_{i-1} d\lambda_{i+1} \cdots d\lambda_n$. Por outro lado, para cada $i = 1, \ldots, n$ temos que

$$\int_{(\mathbb{R}_+^*)^{n-1}} \psi\left(\check{\lambda}_i(0)\right) d\widehat{\lambda}_i \geq \int_{[0,r]^{n-1}} \psi\left(\check{\lambda}_i(0)\right) d\widehat{\lambda}_i$$

onde $r := R/2$ e $[0,r]^{n-1} := [0,r] \times \cdots \times [0,r]$ ($n-1$ vezes). Das condições acima temos a desigualdade seguinte

$$\int_{(\mathbb{R}_+^*)^n} \mathrm{div}_\lambda\, \psi(\lambda) d\lambda \leq -\sum_{i=1}^{n} \int_{[0,r]^{n-1}} \psi\left(\check{\lambda}_i(0)\right) d\widehat{\lambda}_i\,.$$

Donde, como $\psi \equiv 1$ em $B_R[0]$ segue que

$$\int_{(\mathbb{R}_+^*)^n} \mathrm{div}_\lambda\, \psi(\lambda) d\lambda \leq -nr^{n-1}\,.$$

□

Capítulo 2

Associação e Funções Generalizadas de Heaviside

No presente capítulo, serão considerados como casos particulares dos espaços de Banach, fixados na Introdução, espaços euclidianos do tipo $E = \mathbb{R}^k$ (ou $E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$), $F = \mathbb{K}^\ell$ e $G = \mathbb{K}^m$. Lembremos que Ω indica um subconjunto aberto não vazio, qualquer de E, que será mantido fixo. Escreveremos $\mathcal{G}(\Omega)$ em lugar de $\mathcal{G}(\Omega;\mathbb{K})$, e uma notação similar será usada para os conjuntos que geram (bem como para os subconjuntos de) $\mathcal{G}(\Omega;\mathbb{K})$, de acordo com as notações descritas na introdução do capítulo anterior. Na seção 2.1, serão dadas a noção e algumas propriedades da relação de associação em $\mathcal{G}(\Omega;\mathbb{K}^\ell)$. Na seçaõ 2.2 (resp. 2.3), serão introduzidas funções generalizadas de Heaviside em $\mathbb{R}^n$ (resp. em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$), e serão consideradas algumas propriedades dessas funções generalizadas a serem usadas nos dois últimos capítulos deste trabalho. Na seção 2.2, merecem destaque os resultados apresentados em 2.2.11, 2.2.15 e 2.2.20, os quais serão usados no capítulo 3. Na seção 2.3, as proposições 2.3.9 e 2.3.11 serão usados fortemente nos dois últimos capítulos.

2.1 A relação de associação em $\mathcal{G}(\Omega;\mathbb{K}^\ell)$

Nesta seção, serão considerados os casos particulares $E = \mathbb{R}^n$ (ou $E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$) e $F = \mathbb{K}^\ell$. No ambiente das funções generalizadas em $\mathcal{G}(\Omega;\mathbb{K}^\ell)$, coletamos algumas

propriedades elementares relativas à relação de associação. O resultado 2.1.3 é útil, entre outros, para a construção da escala das funções generalizadas de Heaviside (ver por exemplo as provas de 2.2.12(a) e 2.3.11(d), e as observações 2.2.19 e 2.3.17). Já o resultado apresentado em 2.1.4 é usado para o estudo da resolubilidade do sistema $(\tilde{S})$ (considerado na Introdução), via proposição 3.1.15 (ver a prova deste último resultado).

2.1.1 Definição. Dizemos que um elemento $f \in \mathcal{G}(\Omega)$ *é associado com* 0 (o que se indica pela notação $f \approx 0$) se existe um representante $\widehat{f}$ de f tal que $\widehat{f}(\varepsilon, \cdot) \to 0$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ quando $\varepsilon \downarrow 0$. Dizemos que dois elementos $f, g \in \mathcal{G}(\Omega)$ *são associados* ($f \approx g$) se $f - g \approx 0$. Dizemos que uma aplicação $f = (f_1, \ldots, f_\ell)$ em $\mathcal{G}(\Omega; \mathbb{K}^\ell)$ *é associada com* 0 ($f \approx 0$) se $f_j \approx 0$ para cada $j = 1, \ldots, \ell$. Dizemos que duas aplicações f e g em $\mathcal{G}(\Omega; \mathbb{K}^\ell)$ *são associadas* ($f \approx g$) se $f - g \approx 0$.

O resultado seguinte reúne as propriedades primárias do cálculo com associação que são de importância fundamental nas aplicações. Observamos que o item (d) do resultado será usado nas aplicações no caso em que $n = 1$. A prova que apresentamos em relação a esse item, basicamente, é a mesma daquela que é feita em [2] (Teorema 6.3.1, para o caso $n = 1$).

2.1.2 Teorema. *São válidas as afirmaçoes seguintes.*

(a) *Se* $(f, g) \in \mathcal{G}(\Omega) \times \mathcal{G}(\Omega)$, $f \approx 0$ *e* $g \approx 0$ *então,* $f + g \approx 0$.

(b) *Se* $(\varphi, f) \in C^\infty(\Omega) \times \mathcal{G}(\Omega)$ *e* $f \approx 0$ *então,* $\varphi f \approx 0$.

(c) *Se* $(f, \alpha) \in \mathcal{G}(\Omega) \times \mathbb{N}^n$ *e* $f \approx 0$ *então,* $\partial_x^\alpha f \approx 0$.

(d) *Se* $f \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ *e* $\partial_x^n f \approx 0$ *então, existe* $\Phi \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ *tal que* $\partial_x^n \Phi = 0$ *e* $f \approx \Phi$. *Em particular, se* $n = m = 1$, Φ *é uma constante generalizada.*

Demonstração. Provaremos somente a afirmação (d). Uma prova dos itens (a) - (c) pode ser encontrada em [1] (Teorema 6.3.2). Fixemos um representante qualquer $\widehat{f}$ de f e uma função $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1. \tag{1}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Indicando por $(x,t) = (x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_m)$ um elemento genérico do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ usaremos as seguintes notações $dx := dx_1 \cdots dx_n$ e $dt := dt_1 \cdots dt_m$. Se $\widehat{\Phi} \in \mathcal{E}_M[\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m]$ é a função definida por

$$\widehat{\Phi}(\varepsilon, x, t) = \widehat{\Phi}(\varepsilon, t) := \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\varepsilon, x, t)\varphi(x)dx, \quad ((\varepsilon, x, t) \in]0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$$

e se Φ é a classe de $\widehat{\Phi}$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ temos que $\partial_x^n \Phi = 0$. A seguir provaremos que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} \left(\widehat{f} - \widehat{\Phi}\right)(\varepsilon, x, t)\psi(x,t)dxdt = 0\,, \quad (\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)). \tag{2}$$

Seja $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ fixada. Por um resultado conhecido (ver, por exemplo, [7], pg. 336), a função ψ pode ser escrita na forma

$$\psi(x,t) = \varphi(x)\varphi_0(t) + \partial_x^n \psi_0(x,t), \quad ((x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$$

onde $\psi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ e $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ é dada por

$$\varphi_0(t) := \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x,t)dx, \quad (t \in \mathbb{R}^m). \tag{3}$$

Então, para cada $\varepsilon \in]0,1]$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \int \widehat{f}(\varepsilon, x, t)\psi(x,t)dxdt = & \int \widehat{f}(\varepsilon, x, t)\varphi(x)\varphi_0(t)dxdt + \\ & \int \widehat{f}(\varepsilon, x, t)\partial_x^n \psi_0(x,t)dxdt. \end{aligned} \tag{4}$$

Como

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} \widehat{f}(\varepsilon, x, t)\varphi(x)\varphi_0(t)dxdt = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi_0(t) \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\varepsilon, x, t)\varphi(x)dxdt$$

da definição de $\widehat{\Phi}$ segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} \widehat{f}(\varepsilon, x, t)\varphi(x)\varphi_0(t)dxdt = \int_{\mathbb{R}^m} \widehat{\Phi}(\varepsilon, x, t)\varphi_0(t)dt.$$

Donde, usando (3), vem

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} \widehat{f}(\varepsilon, x, t)\varphi(x)\varphi_0(t)dxdt = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} \widehat{\Phi}(\varepsilon, x, t)\psi(x,t)dxdt$$

unesp

o que, junto com (4) e a integração por partes, implica

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m} \left(\widehat{f}-\widehat{\Phi}\right)(\varepsilon,x,t)\psi(x,t)dxdt = (-1)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m} \partial_x^n \widehat{f}(\varepsilon,x,t)\psi_0(x,t)dxdt.$$

Por outro lado, como $\partial_x^n f \approx 0$ temos

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m} \partial_x^n \widehat{f}(\varepsilon,x,t)\psi_0(x,t)dxdt = 0$$

e portanto, pela igualdade anterior, é válida a condição (2). □

O proximo resultado segue do teorema da convergência dominada (ver [9], 1.3.14).

2.1.3 Proposição. *Sejam $\phi\colon \Omega \to \mathbb{K}$ uma funcão e $f \in \mathcal{G}_{\ell b}(\Omega)$ tais que $\widehat{f}(\varepsilon,\cdot) \to \phi$ q.s. em Ω quando $\varepsilon \downarrow 0$, para algum representante $\widehat{f}$ de f. Então, $\widehat{f}(\varepsilon,\cdot) \to \phi$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ quando $\varepsilon \downarrow 0$. Em particular, se $\phi \in C^\infty(\Omega)$ então $f \approx \phi$.*

Lembremos que a associação de distribuições como funções generalizadas é a igualdade de distribuições e que a igualdade de funções contínuas, como distribuições, é a igualdade de funções no sentido usual. Portanto, a associação de funções contínuas, como funções generalizadas, é a igualdade de funções no sentido usual. Por outro lado, o espaço das funções generalizadas simplificadas (o espaço em que estamos trabalhando) não contém, de modo canônico, o espaço das distribuições. Diante dessas situações, para a comodidade do leitor, apresentamos uma prova do resultado seguinte, o qual afirma que a associação de funções de classe C^∞, como funções generalizadas, é a igualdade de funções no sentido usual.

2.1.4 Proposição. *Seja $\varphi \in C^\infty(\Omega;\mathbb{K}^\ell)$ tal que $\varphi \approx 0$. Então, $\varphi \equiv 0$ em Ω.*

Demonstração. Basta fazer a prova para o caso $\ell = 1$. Suponhamos, por absurdo, que existe um ponto $x_0 \in \Omega$ tal que $\varphi(x_0) \neq 0$. Supondo, sem perda de generalidade, que $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ e que $\varphi(x_0) > 0$, sejam $C > 0$ e $r > 0$ tais que $B_r(x_0) \subset \Omega$ e

$$\varphi(x) > C, \quad (x \in B_r(x_0)). \tag{1}$$

Se $\varrho = r/2$, seja ψ uma funçaõ em $\mathcal{D}(\Omega)$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$ em Ω, $\psi \equiv 1$ em $B_\varrho[x_0]$ e $\operatorname{supp}(\psi) \subset B_r(x_0)$. Então, observando que

$$\int\limits_{\Omega} \varphi(x)\psi(x)dx = \int\limits_{B_r(x_0)} \varphi(x)\psi(x)dx \geq \int\limits_{B_\varrho[x_0]} \varphi(x)\psi(x)dx = \int\limits_{B_\varrho[x_0]} \varphi(x)dx$$

unesp

e usando a condição (1), temos a seguinte desigualdade

$$\int_{\Omega} \varphi(x)\psi(x)dx \geq \int_{B_\varrho[x_0]} \varphi(x)dx \geq Cm(B_\varrho[x_0])$$

onde $m(B_\varrho[x_0])$ é a medida de Lebesgue da bola fechada $B_\varrho[x_0]$. Assim, existe uma função $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\Omega} \widehat{\varphi}(\varepsilon, x)\psi(x)dx > 0$$

onde $\widehat{\varphi}$: $(\varepsilon, x) \in]0,1] \times \Omega \mapsto \widehat{\varphi}(\varepsilon, x) := \varphi(x) \in \mathbb{R}$ (ver (1.1.2)). Isso mostra que, de acordo com a definição 2.1.1, φ não é associado com zero. □

2.2 Funções generalizadas de Heaviside no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$

Nesta seção, serão considerados os espaços $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{K}$ e $G = \mathbb{R}$. Em [9] (Capítulo 2), utilizando a clássica função escada de Heaviside, foi construída uma escala de funções generalizadas de Heaviside em $\mathbb{R}$. Aqui, usando produtos da função de Heaviside real (ver definição 2.2.5), serão introduzidos os conceitos e coletadas algumas propriedades de funções generalizadas de Heaviside em $\mathbb{R}^n$. As propriedades dessas funções generalizadas, bem como os argumentos usados para a verificação das mesmas, são similares àquelas que temos para o caso das funções generalizadas de Heaviside em $\mathbb{R}$. Entretanto, para comodidade do leitor e por razões técnicas, as quais são decorrentes devido à natureza das funções generalizadas com que trabalharemos, serão feitas as demonstraçãoes das propriedades consideradas.

2.2.1 Definição. Se Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, dizemos que um elemento $f \in \mathcal{G}(\Omega)$ *tem à distribuição T como aspecto macroscópico* se para algum representante $\widehat{f}$ de f temos $\widehat{f}(\varepsilon, \cdot) \to T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ quando $\varepsilon \downarrow 0$.

Indicamos com δ_n a medida de Dirac em $\mathbb{R}^n$ no ponto $x = 0$; isto é,

$$\delta_n \colon \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \mapsto \varphi(0) \in \mathbb{K}.$$

unesp

Um elemento $\delta \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$ é chamado *função generalizada de Dirac em* $\mathbb{R}^n$ se este elemento tem à medida de Dirac como aspecto macroscópico.

2.2.2 Notação. Denotamos com

$$\Lambda(n) := \{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \mid \varphi \geq 0,\ \varphi(0) > 0,\ \mathrm{supp}(\varphi) \subset B_1[0] \quad \mathrm{e} \quad \int \varphi = 1\}.$$

Para a verificação do resultado seguinte ver [9] (Proposições 1.2.21 e 2.1.1).

2.2.3 Proposição. *Seja* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *tal que* $\varphi(0) \neq 0$ *e* $\mathrm{supp}(\varphi) \subset B_1[0]$. *Se*

$$\widehat{\delta}_\varphi \colon (\varepsilon, x) \in]0,1] \times \mathbb{R}^n \mapsto \varepsilon^{-n}\varphi\left(\varepsilon^{-1}x\right) \in \mathbb{K}$$

e δ_φ *é a classe de* $\widehat{\delta}_\varphi$ *em* $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$ *então*

$$\delta_\varphi \neq 0,\ \ \delta_\varphi|_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} = 0,\ \ \mathrm{supp}(\delta_\varphi) = \{0\}$$

e δ_φ *é uma função generalizada de Dirac em* $\mathbb{R}^n$.

A verificação da proposição seguinte segue da definição de função generalizada de Dirac e da proposição 2.2.3 (ver [9], 2.1.4).

2.2.4 Proposição. *Se* δ *e* δ_* *são funções generalizadas de Dirac em* $\mathbb{R}^n$ *temos*

(a) $\delta \approx \delta_*$, $\delta|_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \approx 0$ *e* δ *não é associado com* 0 *(e portanto* $\delta \neq 0$*)*

(b) *se* $z \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$ *é uma constante generalizada então,* $z\delta \approx 0$ *se e só se* $z \approx 0$*; e como conseqüência,* $k\delta \approx 0$ *se e só se* $k = 0$, *para* $k \in \mathbb{K}$.

2.2.5 Definição. Indicamos por $\mathbb{Y}$ a clássica função escada de Heaviside em $\mathbb{R}$; isto é, é a função definida por

$$\mathbb{Y}(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{para } \lambda < 0 \\ 1, & \text{para } \lambda > 0. \end{cases}$$

A *função de Heaviside em* $\mathbb{R}^n$ é a função $\mathbb{Y}_n \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ definida por

$$\mathbb{Y}_n := (\mathbb{Y} \circ p_1) \cdots (\mathbb{Y} \circ p_n) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{Y} \circ p_j$$

onde $p_j \colon (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \lambda_j \in \mathbb{R}$; isto é, é a função $\mathbb{Y}_n$ definida por

$$\mathbb{Y}_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \mathbb{Y}(\lambda_1) \cdots \mathbb{Y}(\lambda_n) = \begin{cases} 0, & \text{se } \lambda_j < 0 \text{ para algum } j = 1, \ldots, n \\ 1, & \text{se } \lambda_j > 0 \text{ para cada } j = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Uma propriedade envolvendo a medida de Dirac e a função de Heaviside em $\mathbb{R}^n$ é dada no resultado seguinte (ver Índice de notações e 1.2.5 - 1.2.6).

2.2.6 Lema. *As funções de Heaviside e de Dirac em* $\mathbb{R}^n$ *verificam a fórmula seguinte*

$$\partial_\lambda^n \mathbb{Y}_n = \delta_n \quad em \quad \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. Fixada uma função $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, sejam $a_1, \ldots, a_n$ em $\mathbb{R}_+^*$ tais que

(1) $$\text{supp}(\varphi) \subset [-a_1, a_1] \times \cdots \times [-a_n, a_n].$$

Como $\mathbb{Y}_n \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, observando que

$$< \partial_\lambda^n \mathbb{Y}_n, \varphi >= (-1)^n < \mathbb{Y}_n, \partial_\lambda^n \varphi >= (-1)^n \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{Y}_n(\lambda) \partial_\lambda^n \varphi(\lambda) d\lambda$$

onde $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ e $d\lambda := d\lambda_1 \cdots \lambda_n$, temos

$$< \partial_\lambda^n \mathbb{Y}_n, \varphi >= (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{Y}_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \partial_\lambda^n \varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) d\lambda_1 \cdots d\lambda_n;$$

donde, pela definição de $\mathbb{Y}_n$ e por (1), segue que

$$< \partial_\lambda^n \mathbb{Y}_n, \varphi >= (-1)^n \int_0^{a_n} \cdots \int_0^{a_1} \frac{\partial_\lambda^n \varphi}{\partial \lambda_1 \cdots \partial \lambda_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) d\lambda_1 \cdots d\lambda_n.$$

Então, como

$$\int_0^{a_n} \cdots \int_0^{a_1} \frac{\partial_\lambda^n \varphi}{\partial \lambda_1 \cdots \partial \lambda_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) d\lambda_1 \cdots d\lambda_n = (-1)^n \varphi(0)$$

temos que $< \partial_\lambda^n \mathbb{Y}_n, \varphi >= (-1)^{2n} \varphi(0) =< \delta_n, \varphi >$. □

Usando a função $\mathbb{Y}_n$ podemos introduzir a definição seguinte.

2.2.7 Definição. Um elemento $H \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$ é chamado *função generalizada de Heaviside em* $\mathbb{R}^n$ se H tem à funçao $\mathbb{Y}_n$ como aspecto macroscópico; isto é, se H possui um representante $\widehat{H}$ tal que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{H}(\varepsilon, \lambda) \psi(\lambda) d\lambda = \int_{(\mathbb{R}_+^*)^n} \psi(\lambda) d\lambda, \ \ (\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)).$$

Indicamos com $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ o conjunto de todas as funções generalizadas de Heaviside em $\mathbb{R}^n$.

unesp

2.2.8 Lema. *Se* $p_j\colon (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n\mapsto\lambda_j\in\mathbb{R}$, *para cada* $j=1,\ldots,n$, *temos*

$$(K\circ p_1)\cdots(K\circ p_n)\in\mathcal{H}(\mathbb{R}^n),\quad (K\in\mathcal{H}(\mathbb{R})\cap\mathcal{G}_{\ell,b}(\mathbb{R}))\,.$$

Demonstração. Fixada $K\in\mathcal{H}(\mathbb{R})\cap\mathcal{G}_{\ell,b}(\mathbb{R})$, seja $\widehat{K}$ um representante qualquer de K. É claro que $(\widehat{K}\circ p_1)\cdots(\widehat{K}\circ p_n)$ é um representante de $(K\circ p_1)\cdots(K\circ p_n)$. A seguir, para cada $\psi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ fixado, provaremos a validade da fórmula seguinte

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{K}(\varepsilon,\lambda_1)\cdots\widehat{K}(\varepsilon,\lambda_n)\psi(\lambda)d\lambda=\int_{(\mathbb{R}_+^*)^n}\psi(\lambda)d\lambda,\tag{1}$$

onde $\lambda:=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ e $d\lambda:=d\lambda_1\cdots d\lambda_n$. Inicialmente observemos que, se u_1 (em $\mathcal{E}_M[\mathbb{R}^{n-1}]$) e φ_1 (em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$) são as funções definidas, respectivamente, por

$$u_1\colon(\varepsilon,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\in]0,1]\times\mathbb{R}^{n-1}\mapsto u_1(\varepsilon,\lambda_2,\ldots,\lambda_n):=\int_{\mathbb{R}}\widehat{K}(\varepsilon,\lambda_1)\psi(\lambda)d\lambda_1\in\mathbb{K}$$

$$\varphi_1\colon(\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^{n-1}\mapsto\varphi_1(\lambda_2,\ldots,\lambda_n):=\int_{\mathbb{R}}\mathbb{Y}(\lambda_1)\psi(\lambda)d\lambda_1\in\mathbb{K}$$

então, como $K\in\mathcal{H}(\mathbb{R})$ e $[\lambda_1\mapsto\psi(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)]\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, temos que

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}u_1(\varepsilon,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)=\varphi_1(\lambda_2,\ldots,\lambda_n),\quad\big((\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^{n-1}\big)\,.$$

Pelo processo de indução, para cada $j=2,\ldots,n-1$ fixado, sejam $u_j\in\mathcal{E}_M[\mathbb{R}^{n-j}]$ e $\varphi_j\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-j})$ as funções definidas, respectivamente, por

$$u_j\colon(\varepsilon,\lambda_{j+1},\ldots,\lambda_n)\mapsto u_j(\varepsilon,\lambda_{j+1},\ldots,\lambda_n):=\int_{\mathbb{R}}\widehat{K}(\varepsilon,\lambda_j)u_{j-1}(\varepsilon,\lambda_j,\ldots,\lambda_n)d\lambda_j$$

$$\varphi_j\colon(\lambda_{j+1},\ldots,\lambda_n)\mapsto\varphi_j(\lambda_{j+1},\ldots,\lambda_n):=\int_{\mathbb{R}}\mathbb{Y}(\lambda_j)\varphi_{j-1}(\lambda_j,\ldots,\lambda_n)d\lambda_j.$$

Seja $(\lambda_{j+1},\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^{n-j}$ fixado. Então, como $K\in\mathcal{G}_{\ell,b}(\mathbb{R})$, usando a condição

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}u_{j-1}(\varepsilon,\lambda_j,\ldots,\lambda_n)=\varphi_{j-1}(\lambda_j,\ldots,\lambda_n),\quad(\lambda_j\in\mathbb{R})\,,\tag{2}$$

pelo teorema da convergencia dominada podemos concluir que

$$u_{j-1}(\varepsilon,\cdot,\lambda_{j+1},\ldots,\lambda_n)|_L\to\varphi_{j-1}(\cdot,\lambda_{j+1},\ldots,\ldots,\lambda_n)|_L\ \text{ quando }\varepsilon\downarrow 0,\ (L\subset\subset\mathbb{R})\,.$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Donde, usando adequadamente as inclusões $\text{supp}\,[\varphi_{j-1}(\cdot,\lambda_{j+1},\ldots,\lambda_n)] \subset p_j\,[\text{supp}(\psi)]$ e $\text{supp}\,[u_{j-1}(\varepsilon,\cdot,\lambda_{j+1},\ldots,\lambda_n)] \subset p_j\,[\text{supp}(\psi)]$, para cada $\varepsilon \in]0,1]$, segue a propriedade seguinte

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}} u_{j-1}(\varepsilon,\lambda_j,\ldots,\lambda_n)d\lambda_j = \int_{\mathbb{R}} \varphi_{j-1}(\lambda_j,\ldots,\lambda_n)d\lambda_j. \tag{3}$$

A seguir provaremos que

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} u_j(\varepsilon,\lambda_{j+1},\ldots,\lambda_n) = \varphi_j(\lambda_{j+1},\ldots,\lambda_n). \tag{4}$$

De fato, podemos escrever

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\widehat{K}(\varepsilon,\lambda_j)u_{j-1}(\varepsilon,\lambda_j,\ldots,\lambda_n) - \mathbb{Y}(\lambda_j)\varphi_{j-1}(\lambda_j,\ldots,\lambda_n)\right] d\lambda_j = \mu_1(\varepsilon) + \mu_2(\varepsilon), \tag{5}$$

para cada $\varepsilon \in]0,1]$, onde $\mu_1,\ \mu_2 \in \mathcal{E}_M(\mathbb{K})$ são as funções definidas por

$$\mu_1 \colon \varepsilon \in]0,1] \mapsto \mu_1(\varepsilon) := \int_{\mathbb{R}} \widehat{K}(\varepsilon,\lambda_j)\,[u_{j-1}(\varepsilon,\lambda_j,\ldots,\lambda_n) - \varphi_{j-1}(\lambda_j,\ldots,\lambda_n)]\,d\lambda_j \in \mathbb{K}$$

$$\mu_2 \colon \varepsilon \in]0,1] \mapsto \mu_2(\varepsilon) := \int_{\mathbb{R}} \left[\widehat{K}(\varepsilon,\lambda_j) - \mathbb{Y}(\lambda_j)\right] \varphi_{j-1}(\lambda_j,\ldots,\lambda_n)d\lambda_j \in \mathbb{K}.$$

Como $K \in \mathcal{G}_{\ell,b}(\mathbb{R})$, usando a condição (3), temos que $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mu_1(\varepsilon) = 0$. Por outro lado, como $K \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$ e $[\lambda_j \mapsto \varphi_{j-1}(\lambda_j,\ldots,\lambda_n)] \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, temos também que $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mu_2(\varepsilon) = 0$. Essas duas últimas condições, junto com (5), implicam a propriedade (4). Em particular, para $j = n-1$ em (4), temos

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} u_{n-1}(\varepsilon,\lambda_n) = \varphi_{n-1}(\lambda_n).$$

E daí, pelo mesmo argumento usado para obter (4) a partir de (2), temos que

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}} \widehat{K}(\varepsilon,\lambda_n)u_{n-1}(\varepsilon,\lambda_n)d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{Y}(\lambda_n)\varphi_{n-1}(\lambda_n)d\lambda_n. \tag{6}$$

Finalmente, observando que

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{K}(\varepsilon,\lambda_n)u_{n-1}(\varepsilon,\lambda_n)d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{K}(\varepsilon,\lambda_1)\cdots\widehat{K}(\varepsilon,\lambda_n)\psi(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)d\lambda_1\cdots d\lambda_n$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

para cada $\varepsilon \in]0,1]$, e que

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{Y}(\lambda_n)\varphi_{n-1}(\lambda_n)d\lambda_n = \int_{(\mathbb{R}_+^*)^n} \psi(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)d\lambda_1\cdots d\lambda_n$$

da condição (6) segue a validade da afrimação (1). □

2.2.9 Definição. Um elemento $H \in \mathcal{G}_{\ell b}(\mathbb{R}^n)$ é chamado *função generalizada de Heaviside própria em* $\mathbb{R}^n$ se $\widehat{H}(\varepsilon,\cdot) \to \mathbb{Y}_n$ em $(\mathbb{R}^*)^n$ quando $\varepsilon \downarrow 0$, para algum representante $\widehat{H}$ de H. Denotamos com $\mathcal{H}_p(\mathbb{R}^n)$ o conjunto de todas as funções generalizadas de Heaviside própria em $\mathbb{R}^n$.

2.2.10 Lema. *Se* $p_j\colon (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \lambda_j \in \mathbb{R}$, *para cada* $j = 1,\ldots,n$, *temos*

$$(K\circ p_1)\cdots(K\circ p_n) \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R}^n), \quad (K \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R}))\,.$$

Demonstração. Fixado $K \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R})$ seja $\widehat{K}$ um representante qualquer de K. É claro que $(K\circ p_1)\cdots(K\circ p_n) \in \mathcal{G}_{\ell,b}(\mathbb{R}^n)$. Como $\widehat{K}(\varepsilon,\cdot) \to \mathbb{Y}$ em $\mathbb{R}^*$ quando $\varepsilon \downarrow 0$ temos que $(\widehat{K}\circ p_j)(\varepsilon,\cdot) \to (\mathbb{Y}\circ p_j)$ em $(\mathbb{R}^*)^n$ quando $\varepsilon \downarrow 0$, para cada $j = 1,\ldots,n$. Donde segue que $[(\widehat{K}\circ p_1)\cdots(\widehat{K}\circ p_n)](\varepsilon,\cdot) \to \mathbb{Y}_n$ em $(\mathbb{R}^*)^n$ quando $\varepsilon \downarrow 0$. □

Os próximos dois resultados reúnem algumas propriedades básicas das funções generalizadas de Heaviside anteriormente definidas. Lembremos que (ver Índice de Notações)

$$(\mathbb{R}_-^+)^n := \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_j < 0 \quad \text{para algum} \quad j = 1,\ldots,n\}\,.$$

2.2.11 Proposição. *Para cada* $H \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ *são válidas as afirmações seguintes.*

(a) $\partial_\lambda^n H$ *é uma função generalizada de Dirac em* $\mathbb{R}^n$ *e, portanto,* $(\partial_\lambda^n H)\,|_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \approx 0$ *e* $\partial_\lambda^n H$ *não é associado com zero.*

(b) $H|_{(\mathbb{R}_-^+)^n} \approx 0$ *e* $H|_{(\mathbb{R}_+^*)^n} \approx 1$.

(c) $H \approx K$ *para cada* $K \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$.

(d) *Se* $z \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$ *é uma constante generalizada e* $k \in \mathbb{K}$ *então,*



- $z \operatorname{div}_\lambda H \approx 0$ *se e só se* $z \approx 0$; *e portanto,* $k \operatorname{div}_\lambda H \approx 0$ *se e só se* $k = 0$
- $zH \approx 0$ *se e só se* $z \approx 0$; *e portanto,* $kH \approx 0$ *se e só se* $k = 0$.

Demonstração. O item (**a**) segue do lema 2.2.6 e da proposição 2.2.4(a). Fixemos um representante qualquer $\widehat{H}$ de H.

(**b**) Fixada uma função $\varphi \in \mathcal{D}((\mathbb{R}_+^*)^n)$, seja $\widetilde{\varphi}$ em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ a extensão de φ a $\mathbb{R}^n$, nula fora de $(\mathbb{R}_+^*)^n$. Usando a igualdade

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{(\mathbb{R}_+^*)^n} \widehat{H}(\varepsilon, \lambda)\varphi(\lambda)d\lambda = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{H}(\varepsilon, \lambda)\widetilde{\varphi}(\lambda)d\lambda$$

pela definição 2.2.7, obtemos a condição (a qual mostra que $H|_{(\mathbb{R}_+^*)^n} \approx 1$)

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{(\mathbb{R}_+^*)^n} \left[\widehat{H}(\varepsilon, \lambda) - 1\right] \varphi(\lambda)d\lambda = 0\,.$$

Para a verificação da segunda relação fixemos uma função $\varphi \in \mathcal{D}((\mathbb{R}_-^+)^n)$. Por um raciocínio análogo ao que foi feito acima, temos

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{(\mathbb{R}_-^+)^n} \widehat{H}(\varepsilon, \lambda)\varphi(\lambda)d\lambda = \int_{(\mathbb{R}_+^*)^n} \varphi(\lambda)d\lambda$$

donde, como $(\mathbb{R}_-^+)^n \cap (\mathbb{R}_+^*)^n = \emptyset$, segue que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{(\mathbb{R}_-^+)^n} \widehat{H}(\varepsilon, \lambda)\varphi(\lambda)d\lambda = 0.$$

(**c**) Se $\widehat{K}$ é um representante qualquer de K temos $\widehat{H}(\varepsilon, \cdot) \to \mathbb{Y}_n$ e $\widehat{K}(\varepsilon, \cdot) \to \mathbb{Y}_n$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ quando $\varepsilon \downarrow 0$, donde $(\widehat{H} - \widehat{K})(\varepsilon, \cdot) \to 0$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ quando $\varepsilon \downarrow 0$.

(**d**) Se $\widehat{z}$ é um representante qualquer de z, observando que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\widehat{z} \operatorname{div}_\lambda \widehat{H}\right)(\varepsilon, \lambda)\varphi(\lambda)d\lambda = -\widehat{z}(\varepsilon) \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{H}(\varepsilon, \lambda) \operatorname{div}_\lambda \varphi(\lambda)d\lambda, \quad (0 < \varepsilon \leq 1)$$

em virtude da definição 2.2.7, temos que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\widehat{z} \operatorname{div}_\lambda \widehat{H}\right)(\varepsilon, \lambda)\varphi(\lambda)d\lambda = \left(\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \widehat{z}(\varepsilon)\right) \int_{(\mathbb{R}_+^*)^n} \operatorname{div}_\lambda \varphi(\lambda)d\lambda, \ \ (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n))\,.$$

unesp

A condição necessária segue então usando o lema 1.2.7. A condição suficiente é clara, lembrando que $z \approx 0$ se e só se $\widehat{z}(\varepsilon) \to 0$ quando $\varepsilon \downarrow 0$, para cada representante $\widehat{z}$ de z. A última afirmação segue de modo análogo. □

2.2.12 Proposição. *São válidas as afirmações seguintes.*

(a) $\mathcal{H}_p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$.

(b) *Se* $(\alpha_j, H_j) \in \mathbb{N}^* \times \mathcal{H}_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq j \leq m$, *então* $H_1^{\alpha_1} \cdots H_m^{\alpha_m} \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. O item (a) segue da proposição 2.1.3 e o item (b) é claro, basta observar que $(\mathbb{Y} \circ p_j)^k = \mathbb{Y} \circ p_j$ para cada $j = 1, \ldots, n$ e cada $k \in \mathbb{N}^*$ (ver definição 2.2.5). □

2.2.13 Definição. Dizemos que uma função $\widehat{H}\colon]0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *verifica a propriedade* $(\mathcal{H}_r)^n$ se existe uma função $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)\colon \varepsilon \in]0,1] \mapsto \mu(\varepsilon) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tal que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mu(\varepsilon) = 0 \quad \text{e} \quad \widehat{H}(\varepsilon, \lambda) = \begin{cases} 0, & \text{se } \lambda_j < -\mu_j(\varepsilon) \text{ para algum } j = 1, \ldots, n \\ 1, & \text{se } \lambda_j > \mu_j(\varepsilon) \text{ para cada } j = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Indicamos com $\mathcal{H}_r(\mathbb{R}^n)$ o conjunto de todos os elementos de $\mathcal{G}_{\ell b}(\mathbb{R}^n)$ que tem, pelo menos, um representante verificando a propriedade $(\mathcal{H}_r)^n$. Cada elemento de $\mathcal{H}_r(\mathbb{R}^n)$ é chamado *função generalizada de Heaviside restrita em* $\mathbb{R}^n$.

O lema seguinte mostra que também $\mathcal{H}_r(\mathbb{R}^n)$ é fechado por produtos dos seus elementos.

2.2.14 Lema. **(a)** *Se* $p_j\colon (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \lambda_j \in \mathbb{R}$, *para cada* $j = 1, \ldots, n$, *temos*

$$(K \circ p_1) \cdots (K \circ p_n) \in \mathcal{H}_r(\mathbb{R}^n), \quad (K \in \mathcal{H}_r(\mathbb{R}))\,.$$

(b) *Se* $(\alpha_j, H_j) \in \mathbb{N}^* \times \mathcal{H}_r(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq j \leq m$, *então* $H_1^{\alpha_1} \cdots H_m^{\alpha_m} \in \mathcal{H}_r(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. (a). Fixado $K \in \mathcal{H}_r(\mathbb{R})$ seja $\widehat{K}$ um representante de K verificando a propriedade $(\mathcal{H}_r)^1$. Então, existe uma função $\mu\colon]0,1] \to \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mu(\varepsilon) = 0 \quad \text{e} \quad \widehat{K}(\varepsilon, x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < -\mu(\varepsilon) \\ 1, & \text{se } x > \mu(\varepsilon) \end{cases}, \quad (\varepsilon \in]0,1]).$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Considerando as funções

$$\mu_n : \varepsilon \in]0,1] \mapsto (\mu(\varepsilon), \ldots, \mu(\varepsilon)) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \quad \text{e} \quad \widehat{H} := (\widehat{K} \circ p_1) \cdots (\widehat{K} \circ p_n)$$

é claro que o par $(\widehat{H}, \mu_n)$ satisfaz as duas condições da definição 2.2.13.

(b). Por indução basta provar que, se H, $K \in \mathcal{H}_r(\mathbb{R}^n)$ então, $HK \in \mathcal{H}_r(\mathbb{R}^n)$. Sejam $\widehat{H}$ e $\widehat{K}$ representantes, respectivamente, de H e K verificando a propriedade $(\mathcal{H}_r)^n$. Sejam $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ e $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ funções de $]0,1]$ em $(\mathbb{R}_+^*)^n$ tais que os pares $(\widehat{H}, \mu)$ e $(\widehat{K}, \nu)$ satisfazem as duas condições da definição 2.2.13. Então, considerando a função $\chi = (\chi_1, \ldots, \chi_n)$ de $]0,1]$ em $(\mathbb{R}_+^*)^n$ definida por

$$\chi_j(\varepsilon) := \max\{\mu_j(\varepsilon), \nu_j(\varepsilon)\}, \quad (\varepsilon \in]0,1], \quad j = 1, \ldots, n)$$

é claro que

$$(\widehat{H}\widehat{K})(\varepsilon, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{cases} 1, & \text{se } \lambda_j > \chi_j(\varepsilon) \text{ para cada } j = 1, \ldots, n \\ 0, & \text{se } \lambda_j < -\chi_j(\varepsilon) \text{ para algum } j = 1, \ldots, n \end{cases}$$

$((\varepsilon, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in]0,1] \times \mathbb{R}^n)$. Por outro lado, das propriedades

$$\chi_j(\varepsilon) = \frac{1}{2}\left[\mu_j(\varepsilon) + \nu_j(\varepsilon)\right] + \frac{1}{2}|\mu_j(\varepsilon) + \nu_j(\varepsilon)|, \quad (\varepsilon \in]0,1], \quad j = 1, \ldots, n)$$

segue que $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \chi(\varepsilon) = 0$. □

O lema seguinte é útil para a construção de exemplos de funções generalizadas de Heaviside.

2.2.15 Lema. *Se $\widehat{H} :]0,1 \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função verificando a propriedade $(\mathcal{H}_r)^n$ então, são válidas as afirmações seguintes.*

(a) *$\widehat{H}(\varepsilon, \cdot) \to \mathbb{Y}_n$ em $(\mathbb{R}^*)^n$ quando $\varepsilon \downarrow 0$ e, portanto, $\mathcal{H}_r(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{H}_p(\mathbb{R}^n)$.*

(b) *Para cada $K \subset\subset (\mathbb{R}^*)^n$ existe $\eta \in]0,1]$ tal que $0 \leq \widehat{H} \leq 1$ em $]0, \eta[\times K$.*

(c) *Se $\widehat{H} \in \mathcal{E}_M[\mathbb{R}^n; \mathbb{R}]$ e H é a classe de $\widehat{H}$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ então*

$$H|_{(\mathbb{R}_-^*)^n} = 0, \quad H|_{(\mathbb{R}_+^*)^n} = 1 \quad e \quad \frac{\partial H}{\partial \lambda_j}|_{(\mathbb{R}^*)^n} = 0, \quad (1 \leq j \leq n).$$



Demonstração. Consideremos o espaço $\mathbb{R}^n$ munido da norma euclidiana

$$|\cdot|: \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto |\lambda| := \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2 \right)^{1/2} \in \mathbb{R}_+.$$

(a). Fixado um elemento $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, provaremos que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \widehat{H}(\varepsilon, \lambda) = \mathbb{Y}_n(\lambda). \tag{1}$$

Suponhamos que $\lambda_j > 0$ para cada $j = 1, \ldots, n$. Então, pela definição de $\mathbb{Y}_n$ (ver 2.2.5) temos que $\mathbb{Y}_n(\lambda) = 1$. Além disso, usando a condição $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mu(\varepsilon) = 0$, podemos encontrar um $\eta \in]0, 1]$ tal que $\mu_j(\varepsilon) < \lambda_j$, para cada $j = 1, \ldots, n$ e cada $\varepsilon \in]0, \eta[$. Então, pela segunda condição da definição 2.2.13, temos que $\widehat{H}(\varepsilon, \lambda) = 1$ para cada $\varepsilon \in]0, \eta[$, o que implica evidentemente a validade da afirmação (1). De modo análogo, se $\lambda_j < 0$ para algum $j = 1, \ldots, n$, existe um $\eta \in]0, 1]$ tal que $\lambda_j < -\mu_j(\varepsilon)$ para cada $\varepsilon \in]0, \eta[$. Então, pela segunda condição de 2.2.13 temos $\widehat{H}(\varepsilon, \lambda) = 0 = \mathbb{Y}_n(\lambda)$ para cada $\varepsilon \in]0, \eta[$, o que implica a afirmação (1).

(b). É claro que, usando a condição $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mu(\varepsilon) = 0$, podemos obter a propriedade seguinte

$$(\forall K \subset\subset (\mathbb{R}^*)^n)\,(\exists \eta \in]0, 1])\mid K \subset \Omega_\mu(\varepsilon), \quad (\varepsilon \in]0, \eta[) \tag{2}$$

o que junto com a segunda condição da definição 2.2.13 implica a afirmação (b), onde cada $\Omega_\mu(\varepsilon)$ é o subconjunto aberto de $(\mathbb{R}^*)^n$ definido por (ver Índice de notações)

$$\Omega_\mu(\varepsilon) := \{\lambda \mid \lambda > \mu(\varepsilon)\} \,\dot\cup\, \{\lambda \mid \lambda_j < -\mu_j(\varepsilon) \text{ para algum } j = 1, \ldots, n\}. \tag{3}$$

(c). Da segunda condição da definição 2.2.13 temos também

$$\frac{\partial \widehat{H}}{\partial \lambda_j}(\varepsilon, \lambda) = 0 \text{ para cada } (\varepsilon, \lambda) \in]0, 1] \times \mathbb{R}^n \text{ com } \lambda \in \Omega_\mu(\varepsilon), \ (j = 1, \ldots, n). \tag{4}$$

Em virtude do lema 1.1.2(I), fixado $j = 1, \ldots, n$, para termos

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_j}\Big|_{(\mathbb{R}^*)^n} = 0$$

basta que, para cada subconjunto aberto V de $\mathbb{R}^n$ com $\overline{V} \subset\subset (\mathbb{R}^*)^n$, exista $\eta \in]0, 1]$ tal que

$$\frac{\partial \widehat{H}}{\partial \lambda_j} \equiv 0 \text{ em }]0, \eta[\times V. \tag{5}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

Fixado um subconjunto V nessas condições, pela condição (2), existe $\eta \in]0,1]$ tal que $\overline{V} \subset \Omega_\mu(\varepsilon)$, para cada $\varepsilon \in]0,\eta[$, o que junto com a condição (4) implica (5). □

Do lema 1.1.2(b), da definição 1.1.4 e do item (c) do lema anterior segue a observação seguinte.

2.2.16 Observação. Se $H \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ tem um representante verificando a propriedade $(\mathcal{H}_r)^n$ então

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_j}|_{(\mathbb{R}^*)^n} \in \mathcal{G}_{\ell b}\left((\mathbb{R}^*)^n\right), \quad (1 \leq j \leq n).$$

A proposição seguinte exibe exemplos concretos de funções generalizadas de Heaviside em $\mathbb{R}^n$.

2.2.17 Proposição. *Fixada $\varphi \in \Lambda(n)$ (ver 2.2.2), consideremos as funções $\widehat{\delta}_\varphi$ e δ_φ definidas na proposição 2.2.3. Se $\widehat{H}_\varphi\colon]0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é definida por*

$$\widehat{H}_\varphi\colon (\varepsilon,\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \mapsto \widehat{H}_\varphi(\varepsilon,\lambda_1,\ldots,\lambda_n) := \int_{-\infty}^{\lambda_1}\cdots\int_{-\infty}^{\lambda_n}\widehat{\delta}_\varphi(\varepsilon,t)dt$$

onde $t=(t_1,\ldots,t_n)$ e $dt := dt_1\cdots dt_n$, então, $0 \leq \widehat{H}_\varphi \leq 1$ em $]0,1]\times\mathbb{R}^n$ e

$$\widehat{H}_\varphi(\varepsilon,\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = \begin{cases} 1, & \text{se } \lambda_j \geq \varepsilon \text{ para cada } j=1,\ldots,n \\ 0, & \text{se } \lambda_j \leq -\varepsilon \text{ para algum } j=1,\ldots,n \end{cases}, \quad (\varepsilon \in]0,1]).$$

Além disso, se H_φ é a classe de $\widehat{H}_\varphi$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$ então $H_\varphi \in \mathcal{H}_r(\mathbb{R}^n)$ e $\partial_\lambda^n H_\varphi = \delta_\varphi$.

Demonstração. Como $\widehat{\delta}_\varphi \geq 0$, para cada $(\varepsilon,\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in]0,1]\times\mathbb{R}^n$, temos

$$0 \leq \widehat{H}_\varphi(\varepsilon,\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n}\widehat{\delta}_\varphi(\varepsilon,t)dt = \int\limits_{B_\varepsilon[0]}\varepsilon^{-n}\varphi(\varepsilon^{-1}t)dt = 1$$

o que mostra que $H_\varphi \in \mathcal{G}_{\ell b}(\mathbb{R}^n)$. Agora, sejam $\varepsilon \in]0,1]$ e $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ fixados. Inicialmente suponhamos que $\lambda_j \geq \varepsilon$ para cada $j=1,\ldots,n$. Nessas condições, como $\mathrm{supp}[\widehat{\delta}_\varphi(\varepsilon,\cdot)] \subset B_\varepsilon[0]$, para cada $j=1,\ldots,n$ e cada $t_j \in [\varepsilon,\lambda_j]$ temos

$$\widehat{\delta}_\varphi(\varepsilon,t_1,\ldots,t_j,\ldots,t_n) = 0, \qquad (t_i \in]-\infty,\lambda_i], \quad i=1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n).$$



Donde segue que

$$\widehat{H}_\varphi(\varepsilon, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \cdots \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \widehat{\delta}_\varphi(\varepsilon, t)dt = \int\limits_{B_\epsilon[0]} \widehat{\delta}_\varphi(\varepsilon, t)dt = 1.$$

Por outro lado, se $\lambda_j \leq -\varepsilon$ para algum $j = 1, \ldots, n$ é claro que $\widehat{H}_\varphi(\varepsilon, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 0$ levando em conta que, para cada $i = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$ e cada $t_i \in]-\infty, \lambda_i]$, se tem $\widehat{\delta}_\varphi(\varepsilon, t_1, \ldots, t_j, \ldots, t_n) = 0$. Verificada as duas propriedades do enunciado, pela definição 2.2.13, segue que $H_\varphi \in \mathcal{H}_r(\mathbb{R}^n)$. Finalmente, como $\partial^n_\lambda \widehat{H}_\varphi = \widehat{\delta}_\varphi$ temos que $\partial^n H_\varphi = \delta_\varphi$. □

2.2.18 Notação. Indicamos com $\mathcal{H}_\Lambda(\mathbb{R}^n)$ o conjunto de todas as funções de Heaviside em $\mathbb{R}^n$ determinado pelo conjunto $\Lambda(n)$ (ver notação 2.2.2); isto é

$$\mathcal{H}_\Lambda(\mathbb{R}^n) := \{H_\varphi \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n) \mid \varphi \in \Lambda(n)\}$$

onde H_φ é definida como na proposição anterior.

2.2.19 Observação. **(a)** Dada $\psi \in \Lambda(1)$ seja $K_\psi \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$ a classe da função $\widehat{K}_\psi$ definida na proposição 2.2.17, para o caso $n = 1$. Então, se

$$p_j \colon (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \lambda_j \in \mathbb{R}, \quad \text{para cada} \quad j = 1, \ldots, n$$

é claro que $(K \circ p_1) \cdots (K \circ p_n) = H_\varphi$, onde $\varphi := (\psi \circ p_1) \cdots (\psi \circ p_n)$ e H_φ é a classe da função $(\widehat{K}_\psi \circ p_1) \cdots (\widehat{K}_\psi \circ p_n)$. Em conseqüência, temos a inclusão seguinte

$$\mathcal{H}^n_\Lambda(\mathbb{R}^n) := \{(K \circ p_1) \cdots (K \circ p_n) \mid K \in \mathcal{H}_\Lambda(\mathbb{R})\} \subset \mathcal{H}_\Lambda(\mathbb{R}^n).$$

(b) De 2.2.12(a), 2.2.15(a) e 2.2.17 seguem as seguintes inclusões

$$\mathcal{H}^n_\Lambda(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{H}_\Lambda(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{H}_r(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{H}_p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{H}(\mathbb{R}^n).$$

Cabe observar que $\mathcal{H}^n_\Lambda(\mathbb{R}^n)$ é um conjunto não vazio já que $\Lambda(1)$ é também um conjunto não vazio. Na realidade, $\mathcal{H}^n_\Lambda(\mathbb{R}^n)$ é um conjunto com infinitos elementos, considerando que $K_\varphi \neq K_\psi$ para todo (φ, ψ) em $\Lambda(1) \times \Lambda(1)$ tal que $\varphi(0) \neq \psi(0)$.

A seguir apresentamos um resultado auxiliar para a proposição 3.3.5.



2.2.20 Proposição. *Seja $\mu \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R})$ tal que $\mu \geq 1$ em $]0,1]$. Então, existe $\widehat{V} \in \mathcal{E}_M[\mathbb{R}^n;\mathbb{R}]$ verificando a propriedade $(\mathcal{H}_r)^n$ e, para cada $\varepsilon \in]0,1]$, as condições seguintes*

$$0 \leq \widehat{V}(\varepsilon,\cdot) \leq \mu(\varepsilon) \quad em \quad \mathbb{R}^n \tag{1}$$

$$\widehat{V}(\varepsilon,\cdot) \equiv \mu(\varepsilon) \ em \ A_\varepsilon \tag{2}$$

onde $A_\varepsilon := \cup_{i=1}^n \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| \leq \varepsilon \ e \ x_j \geq -\varepsilon, \ (j=1,\ldots,n, j \neq i)\}$. Além disso, se V é a classe de $\widehat{V}$ então $V \notin \mathcal{H}_\Lambda(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Fixada $\varphi \in \Lambda(n)$ consideremos a função

$$u\colon (\varepsilon,x) \in]0,1] \times \mathbb{R}^n \mapsto u(\varepsilon,x) := \left[\chi(\varepsilon,\cdot) * \widehat{\delta}_\varphi\left(\frac{\varepsilon}{4},\cdot\right)\right](x) \in \mathbb{R}$$

onde $\widehat{\delta}_\varphi\colon (\varepsilon,x) \mapsto \varepsilon^{-n}\varphi(\varepsilon^{-n}x)$ e $\chi(\varepsilon,\cdot)$ é a função característica do conjunto

$$B_\varepsilon := \bigcup_{i=1}^n \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| \leq 3\frac{\varepsilon}{2} \ \text{e} \ x_j \geq -3\frac{\varepsilon}{2}, \ (j=1,\ldots,n, j \neq i)\right\}.$$

Seja $\varepsilon \in]0,1]$ fixado. Por um resultado conhecido temos que $u(\varepsilon,\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ e que $\operatorname{supp}[u(\varepsilon,\cdot)] \subset \operatorname{supp}[\chi(\varepsilon,\cdot)] + \operatorname{supp}[\widehat{\delta}_\varphi(\frac{\varepsilon}{4},\cdot)] = D_\varepsilon$, onde

$$D_\varepsilon := \bigcup_{i=1}^n \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| \leq 7\frac{\varepsilon}{4} \ \text{e} \ x_j \geq -7\frac{\varepsilon}{4}, \ (j=1,\ldots,n, j \neq i)\right\}.$$

Das condições $0 \leq \chi(\varepsilon,\cdot) \leq 1$, $\varphi \geq 0$ e $\int \varphi = 1$ segue que $0 \leq u(\varepsilon,\cdot) \leq 1$ em $\mathbb{R}^n$. Além disso, como

$$\partial^\alpha u(\varepsilon,x) := \left[\chi(\varepsilon,\cdot) * \left(\partial^\alpha \widehat{\delta}_\varphi\right)\left(\frac{\varepsilon}{4},\cdot\right)\right](x) \ \text{e} \ \left(\partial^\alpha \widehat{\delta}_\varphi\right)\left(\frac{\varepsilon}{4},\cdot\right) = 4^{|\alpha|}\varepsilon^{-|\alpha|}\widehat{\delta}_{\partial^\alpha\varphi}\left(\frac{\varepsilon}{4},\cdot\right)$$

claramente temos a desigualdade seguinte

$$|\partial^\alpha u(\varepsilon,x)| \leq 4^{|\alpha|}\varepsilon^{-|\alpha|}\int |\partial^\alpha\varphi(y)|\,dy, \quad ((\varepsilon,x) \in]0,1] \times \mathbb{R}^n, \ \alpha \in \mathbb{N}^n)$$

a qual mostra que $u \in \mathcal{E}_M[\mathbb{R}^n;\mathbb{R}]$. Considerando o conjunto aberto

$$Q_\varepsilon := \bigcup_{i=1}^n \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| < 5\frac{\varepsilon}{4} \ \text{e} \ x_j > -5\frac{\varepsilon}{4}, \ (j=1,\ldots,n, j \neq i)\right\}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

temos que $Q_\varepsilon - \text{supp}[\widehat{\delta}_\varphi(\frac{\varepsilon}{4},\cdot)] \subset \overset{\circ}{B}_\varepsilon$, onde

$$\overset{\circ}{B}_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| < 3\frac{\varepsilon}{2} \text{ e } x_j > -3\frac{\varepsilon}{2},\ (j = 1, \ldots, n,\ j \neq i) \right\}.$$

Então, para cada $x \in Q_\varepsilon$ e cada $y \in \text{supp}[\widehat{\delta}_\varphi(\frac{\varepsilon}{4},\cdot)]$ tem-se $\chi(\varepsilon, x-y) = 1$. Logo

$$u(\varepsilon,x) = \int\limits_{\text{supp}[\widehat{\delta}_\varphi(\frac{\varepsilon}{4},\cdot)]} \widehat{\delta}_\varphi\left(\frac{\varepsilon}{4}, y\right) \chi(\varepsilon, x-y)dy = \int \widehat{\delta}_\varphi\left(\frac{\varepsilon}{4}, y\right) dy = 1,\ \ (x \in Q_\varepsilon).$$

Se $v \in \mathcal{E}_M[\mathbb{R}^n;\mathbb{R}]$ é a função definida por

$$v(\varepsilon,x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \ x_i < 5\frac{\varepsilon}{4} \ \text{ para algum } i = 1,\ldots,n \\ u(\varepsilon,x), & \text{se } \ x_i \geq 5\frac{\varepsilon}{4} \ \text{ para todo } i = 1,\ldots,n \end{cases}$$

temos: $0 \leq v(\varepsilon,\cdot) \leq 1$ em $\mathbb{R}^n$, $v(\varepsilon,\cdot) \equiv 1$ em $\{x \mid x_i < 5\frac{\varepsilon}{4} \text{ para algum } i = 1,\ldots,n\}$ e $\text{supp}[v(\varepsilon,\cdot)] \subset \{x \mid x_i \leq 7\frac{\varepsilon}{4} \text{ para algum } i = 1,\ldots,n\}$, para cada $\varepsilon \in]0,1]$. A função

$$\widehat{V}\colon (\varepsilon,x) \in]0,1] \times \mathbb{R}^n \mapsto 1 + v(\varepsilon,x)[\mu(\varepsilon)u(\varepsilon,x) - 1] \in \mathbb{R}$$

satisfaz as condições: (1) (pois $\mu \geq 1$ em $]0,1]$) e (2) (pois $u(\varepsilon,\cdot) \equiv 1 \equiv v(\varepsilon,\cdot)$ em $Q_\varepsilon \supset A_\varepsilon$). Por outro lado, considerando a função

$$\mu_*\colon \varepsilon \in]0,1] \mapsto \mu_*(\varepsilon) := \left(7\frac{\varepsilon}{4},\ldots,7\frac{\varepsilon}{4}\right) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$$

vemos que o par $(\widehat{V},\mu_*)$ verifica as condições da definição 2.2.13. Finalmente, observemos que (ver proposição 2.2.17)

$$\left(\widehat{H}_\varphi - \widehat{V}\right) \notin \mathcal{N}[\mathbb{R}^n;\mathbb{R}] \quad (\text{e portanto } \ H_\varphi \neq V), \qquad (\varphi \in \Lambda(n))$$

e, em conseqüência, $V \notin \mathcal{H}_\Lambda(\mathbb{R}^n)$. De fato, se $\widehat{H}_\varphi - \widehat{V}$ fôsse uma função nula se teria que $(\partial_\lambda^n \widehat{H}_\varphi)(\varepsilon,0) - (\partial_\lambda^n \widehat{V})(\varepsilon,0) \to 0$ para $\varepsilon \downarrow 0$; donde, usando a fórmula (2) e $\partial_\lambda^n \widehat{H}_\varphi = \partial_\lambda^n \widehat{\delta}_\varphi$, teriamos que $\widehat{\delta}(\varepsilon,0) \to 0$ para $\varepsilon \downarrow 0$, o que é falso. □

2.3 Funções generalizadas de Heaviside no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

Nesta seção, serão considerados, como casos particulares dos espaços de Banach, fixados na introdução deste trabalho, espaços euclidianos do tipo $E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ (ou

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

$E = \mathbb{R}^k$), $F = \mathbb{R}^\ell$ e $G = \mathbb{K}^r$. Lembremos que F indica também uma álgebra de Banach, a qual será mantida ainda nesse contexto até o lema 2.3.4. Convencionamos que, quando for considerado o espaço euclidiano $E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, denotaremos por

$$(\lambda, t) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n, t_1, \ldots, t_m)$$

um elemento genérico desse espaço. No que se segue, serão introduzidas as noções (e será dado o esquema de construção da escala) de funções generalizadas de Heaviside em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Consideraremos algumas propriedades dessas funções a serem usadas nos dois últimos capítulos do trabalho. O estudo dessas propriedades não é mais difícil do que as das correspondentes propriedades de funções generalizadas de Heaviside em $\mathbb{R}^n$, consideradas na seção anterior. Cabe mencionar aqui que o fato fundamental que motivou a introdução das funções generalizadas, acima citadas, foi a tentativa de resolver o problema, de achar soluções na forma de onda de choque de sistemas de equações diferenciais parciais da Hidrodinâmica, que seriam funções generalizadas em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, obtidas em termos de funções generalizadas dependendo do par de variáveis (x, t), em que x indica o espaço, e t o tempo. Lembramos também que, em [3], [9] e [11], foram estudadas a existência e a não existência de soluções na forma de onda de choque, que são funções generalizadas em $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ obtidas em termos de funções generalizadas de Heaviside em $\mathbb{R}$, na variável x.

2.3.1 Definição. Dados $t \in \mathbb{R}^m$ e $u \in \mathcal{E}[\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; F]$, denotemos por $u(\cdot, t)$ o elemento de $\mathcal{E}[\mathbb{R}^n; F]$ definido por

$$[u(\cdot, t)](\varepsilon, \lambda) := u(\varepsilon, \lambda, t), \quad ((\varepsilon, \lambda) \in]0, 1] \times \mathbb{R}^n).$$

Dado $\alpha \in \mathbb{N}^n$ indicamos com $\alpha_0 \in \mathbb{N}^{m+n}$ o seguinte elemento

$$\alpha_0 := (\alpha, 0) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^m, \quad \text{onde} \quad 0 = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{N}^m.$$

Observemos que, para cada $(\alpha, t) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{R}^m$ e cada $u \in \mathcal{E}[\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; F]$, vale a fórmula

$$\partial^\alpha [u(\cdot, t)] = [\partial^{\alpha_0} u](\cdot, t) \quad \text{em} \quad]0, 1] \times \mathbb{R}^n.$$

Tendo em vista essa observação (ou fazendo-se a identificação $\alpha \equiv \alpha_0$), usaremos por comodidade a notação seguinte

$$(2.3.1) \qquad \partial^\alpha u(\cdot, t) := \partial^\alpha [u(\cdot, t)], \qquad ((\alpha, t) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{R}^m, \quad u \in \mathcal{E}[\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; F]).$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Com as notações e convenções introduzidas acima, damos a proposição seguinte.

2.3.2 Proposição. *Para cada $t \in \mathbb{R}^m$ valem as afirmações seguintes.*

(a) *Se $u \in \mathcal{E}_M[\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; F]$ então, $u(\cdot, t) \in \mathcal{E}_M[\mathbb{R}^n; F]$.*

(b) *Se u e v são elementos de $\mathcal{E}[\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; F]$ tais que $(u - v) \in \mathcal{N}[\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; F]$ então $[u(\cdot, t) - v(\cdot, t)] \in \mathcal{N}[\mathbb{R}^n; F]$.*

Demonstração. Basta observar que, se $K \subset\subset \mathbb{R}^n$ então $K \times \{t\} \subset\subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. □

Em virtude da proposição anterior, podemos dar a definição seguinte.

2.3.3 Definição. Se $t \in \mathbb{R}^m$ e $f \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; F)$, denotamos por $f(\cdot, t)$ a função generalizada, em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n; F)$, definida por

$$f(\cdot, t) := \widehat{f}(\cdot, t) + \mathcal{N}[\mathbb{R}^n; F]$$

onde $\widehat{f}(\cdot, t)$ é a função definida em 2.3.1 e $\widehat{f}$ é um representante qualquer de f.

2.3.4 Lema. *Se $\pi_m : (\lambda, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \lambda \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}^m$, valem as afirmações seguintes.*

(a) *Se $f \in \mathcal{G}_{\ell b}(\mathbb{R}^n; F)$ então, $f \circ \pi_m \in \mathcal{G}_{\ell b}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$.*

(b) *Se $f \in \mathcal{G}_{\ell b}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; F)$ então, $f(\cdot, t) \in \mathcal{G}_{\ell b}(\mathbb{R}^n; F)$.*

(c) *Se $f \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; \mathbb{K})$ então, $f(\cdot, t) \approx 0$ se, e somente se, $\widehat{f}(\varepsilon, \cdot, t) \to 0$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ quando $\varepsilon \downarrow 0$, para qualquer representante $\widehat{f}$ de f.*

Demonstração. O item (a) segue da observação 1.1.10. O item (b) segue obsarvando que, se $K \subset\subset \mathbb{R}^n$ então $K \times \{t\} \subset\subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. O item (c) é claro. □

Se $f \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; F)$ e $(\alpha, t) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{R}^m$, usaremos por comodidade, a notação seguinte

$$\partial_\lambda^\alpha f(\cdot, t) := \partial_\lambda^\alpha [f(\cdot, t)] \tag{2.3.2}$$

isto é (ver (2.3.1)),

$$\partial_\lambda^\alpha f(\cdot, t) = \partial_\lambda^\alpha \widehat{f}(\cdot, t) + \mathcal{N}[\mathbb{R}^n; F]$$



onde $\widehat{f}$ é um representante qualquer de f.

A seguir, introduziremos uma função (auxiliar) que será usada para definir as funções generalizadas de Heaviside em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

2.3.5 Definição. A *função de Heaviside em* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ é a função $\mathbb{Y}_{nm}$ definida por

$$\mathbb{Y}_{nm} := \mathbb{Y}_n \circ \pi_m$$

onde $\pi_m\colon (\lambda, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \lambda \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbb{Y}_n$ é a função de Heaviside em $\mathbb{R}^n$ introduzida em 2.2.5; isto é, a *função de Heaviside em* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ é a função $\mathbb{Y}_{nm}$ definida por

$$\mathbb{Y}_{nm}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, t) = \begin{cases} 0, & \text{se } \lambda_j < 0 \text{ para algum } j = 1, \ldots, n \\ 1, & \text{se } \lambda_j > 0 \text{ para cada } j = 1, \ldots, n \end{cases}, \quad (t \in \mathbb{R}^m).$$

Uma propriedade útil, envolvendo à função $\mathbb{Y}_{nm}$, é dada no resultado seguinte.

2.3.6 Lema. *São válidas as afirmações seguintes.*

(a) $\nabla_t \mathbb{Y}_{nm} = 0$ *e* $\operatorname{div}_t \mathbb{Y}_{nm} = 0$ *em* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$.

(b) *Dados* a *e* b *em* $\mathbb{R}$ *com* $a < b$, *seja* $X \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ *a função definida por*

$$X(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, t) := \begin{cases} b, & \text{se } \lambda_j < 0 \text{ para algum } j = 1, \ldots, n \\ a, & \text{se } \lambda_j > 0 \text{ para cada } j = 1, \ldots, n \end{cases}, \quad (t \in \mathbb{R}^m).$$

Então, $\nabla_t X = 0$ *e* $\operatorname{div}_t X = 0$ *em* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$.

Demonstração. A afirmação **(b)** segue observando que

$$X \equiv (a - b)\mathbb{Y}_{nm} + b \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

(a) Fixada uma função $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$, sejam $(a_1, b_1), \ldots, (a_m, b_m)$ em $\mathbb{R}^2$ tais que

(1) $$\operatorname{supp}[\varphi(\lambda, \cdot)] \subset [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_m, b_m], \quad (\lambda \in \mathbb{R}^n).$$

Fixado $i = 1, \ldots, n$, sendo válida a igualdade

$$< \frac{\partial \mathbb{Y}_{nm}}{\partial t_i}, \varphi > = - < \mathbb{Y}_{nm}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} > = - \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} \mathbb{Y}_{nm}(\lambda, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t_i}(\lambda, t) d\lambda dt$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

onde $(\lambda, t) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n, t_1, \ldots, t_m)$, $d\lambda := d\lambda_1 \cdots d\lambda_n$ e $dt := dt_1 \cdots dt_m$, temos

$$< \frac{\partial \mathbb{Y}_{nm}}{\partial t_i}, \varphi >= - \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{Y}_{nm}(\lambda, t_1, \ldots, t_m) \frac{\partial \varphi}{\partial t_i}(\lambda, t_1, \ldots, t_m) d\lambda dt_1 \cdots dt_m$$

donde, pela definição de $\mathbb{Y}_{nm}$ e por (1), segue que

$$< \frac{\partial \mathbb{Y}_{nm}}{\partial t_i}, \varphi >= - \int_{(\mathbb{R}_+^*)^n} \int_{a_m}^{b_m} \cdots \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_i}^{b_i} \frac{\partial \varphi}{\partial t_i}(\lambda, t_1, \ldots, t_m) dt_i dt_1 \cdots dt_m d\lambda.$$

Então, usando a notação introduzida em 1.2.2(a), podemos escrever

$$< \frac{\partial \mathbb{Y}_{nm}}{\partial t_i}, \varphi >= \int_{(\mathbb{R}_+^*)^n} \int_{a_m}^{b_m} \cdots \int_{a_1}^{b_1} \left[\varphi(\lambda, \check{t}_i(a_i)) - \varphi(\lambda, \check{t}_i(b_i)) \right] dt_1 \cdots dt_m d\lambda.$$

Em conseqüência como

$$\varphi(\lambda, \check{t}_i(a_i)) = \varphi(\lambda, \check{t}_i(b_i)) = 0, \quad \left(\lambda \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \ \ t \in [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_m, b_m] \right)$$

temos que

$$< \frac{\partial \mathbb{Y}_{nm}}{\partial t_i}, \varphi >= 0, \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m), \ \ i = 1, \ldots, n).$$

□

Escrevendo $\pi_m = (p_{1m}, \ldots, p_{nm})$, onde $p_{jm} \colon (\lambda, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \lambda_j \in \mathbb{R}$, para cada $j = 1, \ldots, n$, tem-se $\mathbb{Y}_{nm} = \mathbb{Y}_n \circ (p_{1m}, \ldots, p_{nm})$. Então, como $(p_{jm})_{t_i} = 0$, a afirmação (a) do lema anterior poderia ter sido provada, usando-se a regra da cadeia para funções generalizadas no contexto da álgebra geral (observar que $\mathbb{Y}_n \notin \mathcal{G}_s(\mathbb{R}^n)$). Por outro lado, como $\partial_\lambda^n \mathbb{Y}_n = \delta_n$ (ver lema 2.2.6) e $(p_{im})_{\lambda_j} = \delta_{ij}$ (delta de Kronecker) para cada $i, j = 1, \ldots, n$ pode-se concluir que

$$\partial_\lambda^n \mathbb{Y}_{nm} = \delta_n \circ \pi_m \,. \tag{2.3.4}$$

2.3.7 Definição. Um elemento $H \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ é chamado *função generalizada de Heaviside em* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ se H tem à função $\mathbb{Y}_{nm}$ como aspecto macroscópico; isto é, se H possui um representante $\widehat{H}$ tal que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} \widehat{H}(\varepsilon, \lambda, t) \psi(\lambda, t) d\lambda dt = \int_{(\mathbb{R}_+^*)^n \times \mathbb{R}^m} \psi(\lambda, t) d\lambda dt, \quad (\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m))$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

onde $(\lambda, t) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n, t_1, \ldots, t_m)$, $d\lambda := d\lambda_1 \cdots d\lambda_n$ e $dt := dt_1 \cdots dt_m$. Indicamos com $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ o conjunto de todas as funções generalizadas de Heaviside em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

2.3.8 Proposição. *São válidas as afirmações seguintes.*

(a) *Se* $H \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ *então,* $\widehat{H}(\varepsilon, \cdot) \to \mathbb{Y}_{nm}$ *em* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ *quando* $\varepsilon \downarrow 0$, *para qualquer representante* $\widehat{H}$ *de* H.

(b) *Se* $K \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ *e* $\pi_m \colon (\lambda, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \lambda \in \mathbb{R}^n$ *então,* $K \circ \pi_m \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$.

(c) *Se* $H \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ *e* $t \in \mathbb{R}^m$ *então,* $H(\cdot, t) \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. O item (a). segue da definição 2.3.7 usando o lema 1.1.2(c).
(b). Fixado um representante qualquer $\widehat{K}$ de K, provaremos a seguir que, se tivermos $\widehat{K}(\varepsilon, \cdot) \to \mathbb{Y}_n$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ então, $(\widehat{K} \circ \pi_m)(\varepsilon, \cdot) \to \mathbb{Y}_n \circ \pi_m$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$, quando $\varepsilon \downarrow 0$. De fato, fixada uma função $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$, temos

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} \left(\widehat{K} \circ \pi_m\right)(\varepsilon, \lambda, t)\psi(\lambda, t)d\lambda dt = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{K}(\varepsilon, \lambda)\varphi(\lambda)d\lambda\,, \quad (\varepsilon \in]0, 1])$$

onde φ é a função definida por

$$\varphi \colon \lambda \in \mathbb{R}^n \mapsto \varphi(\lambda) := \int\limits_{\mathbb{R}^m} \psi(\lambda, t)dt \in \mathbb{K}.$$

Como $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e $< \widehat{K}(\varepsilon, \cdot), \varphi > \to < \mathbb{Y}_n, \varphi >$ quando $\varepsilon \downarrow 0$, usando a igualdade anterior, obtemos

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} \left(\widehat{K} \circ \pi_m\right)(\varepsilon, \lambda, t)\psi(\lambda, t)d\lambda dt = \int\limits_{(\mathbb{R}_+^*)^n} \varphi(\lambda)d\lambda = \int\limits_{(\mathbb{R}_+^*)^n \times \mathbb{R}^m} \psi(\lambda, t)d\lambda dt.$$

(c). Fixada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, escolhendo uma função $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ cuja integral é igual a 1, consideremos a função $\psi \colon (\lambda, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \varphi(\lambda)\phi(t) \in \mathbb{K}$. Temos então que $\mathrm{supp}(\psi) = \mathrm{supp}(\varphi) \times \mathrm{supp}(\phi)$ e que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{H}(\varepsilon, \lambda, t)\varphi(\lambda)d\lambda = \int\limits_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} \widehat{H}(\varepsilon, \lambda, t)\psi(\lambda, t)d\lambda dt, \quad (\varepsilon \in]0, 1])$$

donde, como $H \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$, pelo item (a) temos

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} \widehat{H}(\varepsilon, \lambda, t)\psi(\lambda, t)d\lambda dt = \int_{(\mathbb{R}_+^*)^n \times \mathbb{R}^m} \varphi(\lambda)\phi(t)d\lambda dt = \int_{(\mathbb{R}_+^*)^n} \varphi(\lambda)d\lambda,$$

e portanto

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{H}(\varepsilon, \lambda, t)\varphi(\lambda)d\lambda = \int_{(\mathbb{R}_+^*)^n} \varphi(\lambda)d\lambda\,.$$

□

2.3.9 Proposição. *Para cada $H \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ são válidas as afirmações seguintes.*

(a) $\nabla_t H \approx 0$ *e* $\operatorname{div}_t H \approx 0$.

(b) $H|_{(\mathbb{R}_+^*)^n \times \mathbb{R}^m} \approx 1$ *e* $H|_{(\mathbb{R}_-^+)^n \times \mathbb{R}^m} \approx 0$.

(c) *Se* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *e* $\alpha \neq 0$) *então,* $(\partial_\lambda^\alpha H)\,|_{(\mathbb{R}^*)^n \times \mathbb{R}^m} \approx 0$.

(d) *Se* $K \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ *então,* $H \approx K$. *Em particular,* $H \approx K \circ \pi_m$ *para qualquer* $K \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, *onde* $\pi_m\colon (\lambda, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \lambda \in \mathbb{R}^n$.

(e) *Se* $z \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ *é uma constante generalizada, temos* $zH \approx 0$ *se e só se* $z \approx 0$; *e em conseqüência,* $kH \approx 0$ *se e só se* $k = 0$, *para* $k \in \mathbb{K}$.

Demonstração. A afirmação (c) segue de (b). A verificação das afirmações (b), (d) e (e) segue de modo análogo às provas, respectivamente, dos itens (b) - (d) da proposição 2.2.11. No item (d), que $H \approx K \circ \pi_m$ segue usando a proposição 2.3.8(b). (a). Fixado um representante qualquer $\widehat{H}$ de H, em virtude da proposição 2.3.8(a), temos que $\widehat{H}(\varepsilon, \cdot) \to \mathbb{Y}_{nm}$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ quando $\varepsilon \downarrow 0$. Portanto, valem as convergências

$$\nabla_t \widehat{H}(\varepsilon, \cdot) \to \nabla_t \mathbb{Y}_{nm} = 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{div}_t \widehat{H}(\varepsilon, \cdot) \to \operatorname{div}_t \mathbb{Y}_{nm} = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$$

quando $\varepsilon \downarrow 0$ (ver 1.2.5(a) e 2.3.6(a)). □

2.3.10 Definição. Um elemento $H \in \mathcal{G}_{\ell b}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ é chamado *função generalizada de Heaviside própria em* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ se $\widehat{H}(\varepsilon, \cdot) \to \mathbb{Y}_{nm}$ em $(\mathbb{R}^*)^n \times \mathbb{R}^m$ quando $\varepsilon \downarrow 0$, para algum representante $\widehat{H}$ de H. Denotamos com $\mathcal{H}_p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ o conjunto de todas as funções generalizadas de Heaviside própria em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

No resultado seguinte, reunimos algumas propriedades das funções generalizadas de Heaviside própria.

2.3.11 Proposição. *São válidas as afirmações seguintes.*

(a) *Se* $H \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ *então,* $\widehat{H}(\varepsilon, \cdot) \to \mathbb{Y}_{nm}$ *em* $(\mathbb{R}^*)^n \times \mathbb{R}^m$ *quando* $\varepsilon \downarrow 0$, *para qualquer representante* $\widehat{H}$ *de* H.

(b) *Se* $H \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ *e* $t \in \mathbb{R}^m$ *então,* $H(\cdot, t) \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R}^n)$.

(c) *Se* $K \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R}^n)$ *e* $\pi_m \colon (\lambda, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \lambda \in \mathbb{R}^n$ *então,* $K \circ \pi_m \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$.

(d) $\mathcal{H}_p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \subset \mathcal{H}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$.

(e) *Se* $(\alpha_j, H_j) \in \mathbb{N}^* \times \mathcal{H}_p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$, $1 \leq j \leq k$, *então,* $H_1^{\alpha_1} \cdots H_k^{\alpha_k} \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$.

Demonstração. O item (a) segue usando o lema 1.1.2(a). As afirmações (b), (c) e (e) são claras (ver 2.3.4). Em virtude da proposição 2.1.3 é válida a inclusão dada em (d). □

O resultado seguinte nos permite aproveitar resultados conhecidos sobre $\mathcal{H}(\mathbb{R})$-soluções na forma de onda de choque dos sistemas $(\tilde{S})$ e (S) (ver definição 4.2.2), consideradas na Introdução deste trabalho, para o estudo das $\mathcal{H}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$-soluções na forma de onda de choque desses sistemas (ver definição 4.4.8).

2.3.12 Proposição. *Seja* $K \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R}^n)$ *verificando as duas propriedades seguintes*

$$(1) \qquad \frac{\partial K}{\partial \lambda_j}|_{(\mathbb{R}^*)^n} \in \mathcal{G}_{\ell b}\left((\mathbb{R}^*)^n\right) \;\; e \;\; H\frac{\partial K}{\partial \lambda_j}|_{(\mathbb{R}^*)^n} \approx 0\,, \;\; (1 \leq j \leq n\,, \;\; H \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R}^n))\,.$$

Então, se $\pi_m \colon (\lambda, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \lambda \in \mathbb{R}^n$, *a função* $K \circ \pi_m$ *satisfaz a condição seguinte*

$$(2) \qquad \left[H\frac{\partial}{\partial \lambda_j}(K \circ \pi_m)\right]|_{(\mathbb{R}^*)^n \times \mathbb{R}^m} \approx 0\,, \quad (1 \leq j \leq n\,, \;\; H \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m))\,.$$

Demonstração. Sejam $H \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ e $\psi \in \mathcal{D}((\mathbb{R}^*)^n \times \mathbb{R}^m)$ fixados. Temos

$$(3) \qquad H(\cdot, t) \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R}^n) \quad \text{e} \quad \psi(\cdot, t) \in \mathcal{D}((\mathbb{R}^*)^n), \quad (t \in \mathbb{R}^m)$$

com $\text{supp}[\psi(\cdot,t)] \subset \pi_m[\text{supp}(\psi)] \subset\subset (\mathbb{R}^*)^n$. Sejam $\widehat{H}$ e $\widehat{K}$ representantes quaisquer de H e K, respectivamente. Para cada $j = 1, \ldots, n$ fixado e cada $\varepsilon \in]0,1]$, é válida a igualdade seguinte

$$\int\limits_{(\mathbb{R}^*)^n \times \mathbb{R}^m} \left[\widehat{H}(\widehat{K} \circ \pi_m)_{\lambda_j}\right](\varepsilon,\lambda,t)\psi(\lambda,t)d\lambda dt = \int\limits_{(\mathbb{R}^*)^n \times \mathbb{R}^m} \widehat{H}(\varepsilon,\lambda,t)(\widehat{K})_{\lambda_j}(\varepsilon,\lambda)\psi(\lambda,t)d\lambda dt.$$

Se $U_j \in \mathcal{E}[\mathbb{R}^m]$ é a função definida por

$$U_j(\varepsilon,t) := \int\limits_{(\mathbb{R}^*)^n} \widehat{H}(\varepsilon,\lambda,t)(\widehat{K})_{\lambda_j}(\varepsilon,\lambda)\psi(\lambda,t)d\lambda, \quad ((\varepsilon,t) \in]0,1 \times \mathbb{R}^m)$$

da igualdade anterior temos a condição seguinte

$$\int\limits_{(\mathbb{R}^*)^n \times \mathbb{R}^m} \left[\widehat{H}(\widehat{K} \circ \pi_m)_{\lambda_j}\right](\varepsilon,\lambda,t)\psi(\lambda,t)d\lambda dt = \int\limits_{\mathbb{R}^m} U_j(\varepsilon,t)dt, \ \ (0 < \varepsilon \leq 1).$$

Sendo assim, para termos a relação em (2) basta provar que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int\limits_{\mathbb{R}^m} U_j(\varepsilon,t)dt = 0, \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{4}$$

Seja $j = 1, \ldots, n$ fixado. Usando-se a segunda condição dada em (1), as condições dadas em (3), a proposição 2.3.11(b) e a definição de associação temos

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} U_j(\varepsilon,t) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int\limits_{(\mathbb{R}^*)^n} \left[\widehat{H}(\cdot,t)(\widehat{K})_{\lambda_j}\right](\varepsilon,\lambda)\left[\psi(\cdot,t)\right](\lambda)d\lambda = 0, \quad (t \in \mathbb{R}^m). \tag{5}$$

Observemos também que

$$\text{supp}\left[U_j(\varepsilon,\cdot)\right] \subset \pi_{m+n}\left[\text{supp}(\psi)\right], \quad (0 < \varepsilon \leq 1) \tag{6}$$

onde $\pi_{m+n}\colon (\lambda,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto t \in \mathbb{R}^m$. Por outro lado, como

$$K_{\lambda_j}|_{(\mathbb{R}^*)^n} \in \mathcal{G}_{\ell b}((\mathbb{R}^*)^n) \quad \text{e} \quad \psi H \in \mathcal{G}_{\ell b}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$$

podemos achar constantes $C > 0$ e $\eta \in]0,1]$ satisfazendo

$$|\widehat{H}(\varepsilon,\lambda,t)(\widehat{K})_{\lambda_j}(\varepsilon,\lambda)\psi(\lambda,t)| \leq C, \quad ((\varepsilon,\lambda,t) \in]0,\eta[\times \pi_m[\text{supp}(\psi)] \times \pi_{m+n}[\text{supp}(\psi)]).$$

Donde, observando que

$$U_j(\varepsilon,t)=\int\limits_{\pi_m[\mathrm{supp}(\psi)]}\widehat{H}(\varepsilon,\lambda,t)(\widehat{K})_{\lambda_j}(\varepsilon,\lambda)\psi(\lambda,t)d\lambda,\quad((\varepsilon,t)\in]0,1]\times\mathbb{R}^m)$$

obtemos a desigualdade seguinte

$$|U_j(\varepsilon,t)|\leq C\mathrm{m}\left(\pi_m[\mathrm{supp}(\psi)]\right),\quad((\varepsilon,t)\in]0,\eta[\times\pi_{m+n}[\mathrm{supp}(\psi)])$$

onde $\mathrm{m}(\pi_m[\mathrm{supp}(\psi)])$ é a medida de Lebesgue de $\pi_m[\mathrm{supp}(\psi)]$. Esta última condição, junto com (5), (6) e o teorema da convergência dominada de Lebesgue, implica a validade da fórmula dada em (4). □

2.3.13 Definição. Dizemos que uma função $\widehat{H}\colon]0,1]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ *verifica a propriedade* $(\mathcal{H}_r)^n_m$ se existe uma função $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_n)\colon]0,1]\to(\mathbb{R}^*_+)^n$ satisfazendo as duas condições seguintes: $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mu(\varepsilon)=0$ e

$$\widehat{H}(\varepsilon,\lambda,t)=\begin{cases}1, & \text{se } \lambda_j>\mu_j(\varepsilon) \text{ para cada } j=1,\ldots,n\\ 0, & \text{se } \lambda_j<-\mu_j(\varepsilon) \text{ para algum } j=1,\ldots,n\end{cases},\quad((\varepsilon,t)\in]0,1]\times\mathbb{R}^m).$$

Dizemos que um elemento $H\in\mathcal{G}_{\ell b}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)$ é uma *função generalizada de Heaviside restrita em* $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ se H possui pelo menos um representante verificando a propriedade $(\mathcal{H}_r)^n_m$. Indicamos com $\mathcal{H}_r(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)$ o conjunto de todas as funções generalizadas de Heaviside restrita em $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$.

2.3.14 Proposição. *São válidas as afirmações seguintes.*

(a) *Se* $(\alpha_j,H_j)\in\mathbb{N}^*\times\mathcal{H}_r(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)$, $1\leq j\leq k$, *então,* $H_1^{\alpha_1}\cdots H_k^{\alpha_k}\in\mathcal{H}_r(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)$.

(b) *Se* $K\in\mathcal{H}_r(\mathbb{R}^n)$ *e* $\pi_m\colon(\lambda,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\mapsto\lambda\in\mathbb{R}^n$ *então,* $K\circ\pi_m\in\mathcal{H}_r(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)$.

(c) *Se* $H\in\mathcal{H}_r(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)$ *e* $t\in\mathbb{R}^m$ *então,* $H(\cdot,t)\in\mathcal{H}_r(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. A verificação da afirmação (a) é similar à prova do lema 2.2.14(b). O item (b) segue diretamente das definições 2.2.13, 2.3.13 e do lema 2.3.4(a). O item (c) segue de modo análogo (ver 2.3.1 e 2.3.4(b)). □

A demonstração do resultado seguinte é similar à prova do lema 2.2.15.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

2.3.15 Proposição. *Se* $\widehat{H}\colon]0,1]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ *é uma função que verifica a propriedade* $(\mathcal{H}_r)^n_m$ *então, são válidas as afirmações seguintes.*

(a) $\widehat{H}(\varepsilon,\cdot)\to\mathbb{Y}_{nm}$ *em* $(\mathbb{R}^*)^n\times\mathbb{R}^m$ *quando* $\varepsilon\downarrow 0$ *e, portanto,* $\mathcal{H}_r(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)$ *é um subconjunto de* $\mathcal{H}_p(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)$.

(b) *Para cada* $K\subset\subset(\mathbb{R}^*)^n$ *existe* $\eta\in]0,1]$ *tal que* $0\le\widehat{H}\le 1$ *em* $]0,\eta[\times K\times\mathbb{R}^m$.

(c) *Se* $\widehat{H}\in\mathcal{E}_M[\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m;\mathbb{R}]$ *e* H *é a classe de* $\widehat{H}$ *em* $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$ *então,*

$$H|_{(\mathbb{R}^+_-)^n\times\mathbb{R}^m}=0,\ \ H|_{(\mathbb{R}^*_+)^n\times\mathbb{R}^m}=1\ \ e\ \ \frac{\partial H}{\partial\lambda_j}|_{(\mathbb{R}^*)^n\times\mathbb{R}^m}=0,\quad (1\le j\le n).$$

2.3.16 Notação. Indicamos com (ver 2.2.17 a 2.2.19)

$$\mathcal{H}_\Lambda(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m):=\{H\circ\pi_m\mid H\in\mathcal{H}_\Lambda(\mathbb{R}^n)\}$$

$$\mathcal{H}^{n,m}_\Lambda(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m):=\{H\circ\pi_m\mid H\in\mathcal{H}^n_\Lambda(\mathbb{R}^n)\}$$

onde $\pi_m\colon(\lambda,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\mapsto\lambda\in\mathbb{R}^n$. Observemos que

$$\mathcal{H}_\Lambda(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)=\{H_\varphi\circ\pi_m\mid\varphi\in\Lambda(n)\}$$

onde H_φ é definida como na proposição 2.2.17.

2.3.17 Observação. (a) Em virtude da proposição 2.2.17 temos claramente que

$$\mathcal{H}_\Lambda(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)\subset\mathcal{H}_r(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)$$

o que junto com 2.3.11(d) e 2.3.15(a) implica a validade das seguintes inclusões, que constituem uma escala de funções generalizadas de Heaviside em $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$

$$\mathcal{H}^{n,m}_\Lambda(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)\subset\mathcal{H}_\Lambda(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)\subset\mathcal{H}_r(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)\subset\mathcal{H}_p(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)\subset\mathcal{H}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m).$$

(b) Pela observação 2.2.19, o conjunto $\mathcal{H}^{n,m}_\Lambda(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)$ é não vazio. Na realidade é um conjunto com infinitos elementos.

2.3.18 Proposição. *Cada* $H\in\mathcal{H}_\Lambda(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)$ *verifica as propriedades seguintes*

(1) $$K\frac{\partial H}{\partial\lambda_j}|_{(\mathbb{R}^*)^n\times\mathbb{R}^m}=0,\quad (1\le j\le n,\ K\in\mathcal{H}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m))\ .$$

Além disso, cada H tem um representante $\widehat{H}$ verificando as duas condições seguintes

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}^n}\left|\widehat{H}(\varepsilon,\lambda,t)\right| \leq \frac{a(t)\varepsilon - b(t)}{(a-b)(t)}, \quad ((\varepsilon,t)\in]0,1]\times\mathbb{R}^m) \tag{2}$$

$$\sup_{(\varepsilon,\lambda,t)\in]0,\eta[\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m}\left|\widehat{H}(\varepsilon,\lambda,t)\right| < \inf_{t\in L}\left\{-\frac{b(t)}{(a-b)(t)}\right\} \tag{3}$$

para cada $L\subset\subset\mathbb{R}^m$ e cada (a,b) em $C^\infty(\mathbb{R}^m)\times C^\infty(\mathbb{R}^m)$ tal que

$$0 < a(t) < b(t), \qquad (t\in\mathbb{R}^m). \tag{4}$$

Demonstração. Sendo $\mathcal{H}_\Lambda(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)\subset\mathcal{H}_\tau(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)$, pela proposição 2.3.15(c), é claro que H satisfaz a condição (1). Por outro lado, seja $K\in\mathcal{H}_\Lambda(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$H = K\circ\pi_m$$

onde $\pi_m\colon(\lambda,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\mapsto\lambda\in\mathbb{R}^n$. Se $\widehat{K}$ é o representante de K definido na proposição 2.2.17 temos

$$0\leq\widehat{K}(\varepsilon,\lambda)\leq 1, \qquad ((\varepsilon,\lambda)\in]0,1]\times\mathbb{R}^n). \tag{5}$$

Então, fixado (a,b) em $C^\infty(\mathbb{R}^m)\times C^\infty(\mathbb{R}^m)$ satisfazendo a condição (4), em virtude da desigualdade

$$1\leq\frac{a(t)\varepsilon - b(t)}{(a-b)(t)}, \qquad ((\varepsilon,t)\in]0,1]\times\mathbb{R}^m)$$

é claro que $\widehat{H} := \widehat{K}\circ\pi_m$ verifica a condição (2). Finalmente, fixado $L\subset\subset\mathbb{R}^m$, usando a desigualdade

$$1 < -\frac{b(t)}{(a-b)(t)}, \qquad (t\in\mathbb{R}^m)$$

podemos achar uma constante $C>0$ de modo que

$$1 + C \leq \inf_{t\in L}\left\{-\frac{b(t)}{(a-b)(t)}\right\}.$$

Então, levando-se em conta a propriedade (5), é claro que $\widehat{H}$ verifica também a condição (3). □

Capítulo 3

Composição, Inversibilidade e Funções na Forma de Onda de Choque

Neste capítulo, de um modo geral, são estudadas algumas propriedades envolvendo as funções generalizadas de Heaviside, a composição e a relação de associação de funções generalizadas. Na primeira seção, são coletados alguns resultados relacionados a esses tópicos. Nesta seção, consideramos como fundamentais os resultados apresentados nas proposições 3.1.1, 3.1.7 e 3.1.15. Desses resultados decorrem uma série de outros resultados necessários para o estudo da resolubilidade dos sistemas $(\tilde{S})$ e (S), considerados na Introdução deste trabalho. Observamos que os resultados coletados vão além do que precisamos. No entanto, pensando em outras possíveis direções de pesquisa, em torno dos sistemas considerados, preferimos deixar no trabalho os resultados que foram obtidos. Na segunda seção, são consideradas algumas propriedades sobre a composição e inversibilidade, para uma certa classe de funções generalizadas, necessárias para o desenvolvimento do trabalho. Informações mais detalhadas sobre os assuntos em referência podem ser encontrados em [9] ou em [10].

Na seção 3.3, estudamos algumas propriedades de funções generalizadas da forma $\varphi \circ (a_1 H_1 + b_1, \ldots, a_\ell H_\ell + b_\ell)$, onde $H_1, \ldots, H_\ell$ são funções generalizadas de Heaviside

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

sob certas condições. Nesta seção, consideramos de fundamental importância os resultados apresentados em 3.3.3, 3.3.6, 3.3.8 e 3.3.11. A proposição 3.3.3 é usada tanto para o estudo da resolubilidade, bem como para o estudo da não resolubilidade dos sistemas de equações diferenciais parciais, considerados no trabalho. Usando a proposição 3.3.6, mostramos que sistemas os quais têm pelo menos uma das equações no sentido estrito da igualdade de funções generalizadas, não possuem soluções na forma de onda de choque, no sentido da definição 4.2.2. Já a proposição 3.3.11 é usada para a obtenção dos mesmos resultados, agora no sentido da definição 4.4.8. A proposição 3.3.8 é usada, inicialmente, para a obtenção de soluções na forma de onda de choque de acordo com a definição 4.2.2, para depois, usando essas soluções, obter soluções de acordo com a definição 4.4.8.

3.1 Algumas propriedades da função composta e das funções auxiliares y, y^*, π_m, π_{n+m} e (y^*, π_{n+m})

Nesta seção, serão considerados, como casos particulares dos espaços de Banach fixados na Introdução, espaços euclidianos do tipo $E = \mathbb{R}^n$ (ou $E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$), $F = \mathbb{K}^\ell$ e $G = \mathbb{K}^m$. No ambiente desses espaços, serão estudadas algumas propriedades, envolvendo a composição de funções generalizadas, bem como a relação de associação e as funções generalizadas de Heaviside, introduzidas nas seções 2.2 e 2.3. Tais propriedades, principalmente os resultados 3.1.1, 3.1.4, 3.1.7, 3.1.9, 3.1.10 e 3.1.15, são ferramentas muito importantes para o estudo da resolubilidade dos sistemas $(\tilde{S})$ e (S), considerados na Introdução. Do mesmo modo como foi feito nos dois capítulos anteriores, serão usadas as notações descritas na introdução do capítulo 1.

O resultado apresentado a seguir, o qual envolve a relação de associação, a igualdade, a composição e a restrição, de funções generalizadas, será de grande utilidade para a obtenção de alguns resultados nesta seção; resultados estes a serem usados no próximo capítulo. A prova desse resultado é a mesma que a demonstração da Proposição 3.1.15, apresentada em [9]. Para comodidade do leitor será refeita aqui

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

a prova, considerando que esse resultado é mais geral do que foi obtido em [9].

3.1.1 Proposição. (a) *Sejam* $g \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n;\mathbb{K}^\ell)$, Ω *um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^n$ *e* S *um* C^∞ *- difeomorfismo de* $\mathbb{R}^n$ *sobre* $\mathbb{R}^n$ *tal que* $J_S(x) > 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$. *Então, são válidas as seguintes equivalências*

$$(1) \qquad (g \circ S)|_\Omega \approx 0 \quad \textit{se e só se} \quad g|_{S(\Omega)} \approx 0$$

$$(2) \qquad (g \circ S)|_\Omega = 0 \quad \textit{se e só se} \quad g|_{S(\Omega)} = 0$$

(**b**) *Se* $f \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n;\mathbb{K}^\ell)$, $\pi_m\colon (\lambda,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \lambda \in \mathbb{R}^n$ *e* W *é um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^n$ *então, valem as seguintes equivalências*

$$(3) \qquad (f \circ \pi_m)|_{W\times\mathbb{R}^m} \approx 0 \quad \textit{se e só se} \quad f|_W \approx 0$$

$$(4) \qquad (f \circ \pi_m)|_{W\times\mathbb{R}^m} = 0 \quad \textit{se e só se} \quad f|_W = 0.$$

Demonstração. Pela definição 2.1.1 basta verificar os resultados para o caso em que $\ell = 1$. A verificação do resultado com igualdade, no caso do item (a), segue usando a proposição 1.1.8(a). E no caso (b), o resultado com igualdade, segue usando também a proposição 1.1.8(a) e a fórmula seguinte (ver convenção 1.2.5(c)).

$$\partial_x^\alpha\left(\widehat{f}\circ\pi_m\right) = \left(\partial_\lambda^\alpha \widehat{f}\right)\circ\pi_m, \qquad \left(\alpha\in\mathbb{N}^n,\ \widehat{f}\in\mathcal{E}[\mathbb{R}^n]\right).$$

(**a**). Se $\widehat{g}$ é um represente qualquer de g e $\varphi \in \mathcal{D}(S(\Omega))$, pelo teorema de mudança de varáveis, temos

$$\int\limits_{\text{supp }(\varphi)} \widehat{g}(\varepsilon,\lambda)\varphi(\lambda)d\lambda = \int\limits_{S^{-1}(\text{supp }(\varphi))} (\widehat{g}\circ S)(\varepsilon,x)(\varphi\circ S)(x)J_S(x)dx, \ \ (\varepsilon\in]0,1]).$$

Se $\psi := (\varphi \circ S)J_S$ temos $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ com $\text{supp}(\psi) = S^{-1}(\text{supp}(\varphi))$. Então, se for válida a relação $(g \circ S)|_\Omega \approx 0$ é claro que $< \widehat{g}(\varepsilon,\cdot),\varphi > = < (\widehat{g}\circ S)(\varepsilon,\cdot),\psi > \to 0$ quando $\varepsilon \downarrow 0$. Reciprocamente, se for válida a relação $g|_{S(\Omega)} \approx 0$, fazendo $U := S(\Omega)$, pelo que foi provado acima, temos que $(g \circ S)|_\Omega = (g \circ S)|_{S^{-1}(U)} \approx 0$.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

(**b**). Se $\widehat{f}$ é um representante qualquer de f então $f \circ \pi_m$ é a classe em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ da função

$$\widehat{f} \circ \pi_m \colon (\varepsilon, \lambda, t) \in]0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \widehat{f}(\varepsilon, \pi_m(\lambda, t)) = \widehat{f}(\varepsilon, \lambda) \in \mathbb{K}$$

onde $(\lambda, t) := (\lambda_1, \ldots, \lambda_n, t_1, \ldots, t_m)$. Se $\varphi \in \mathcal{D}(W)$ e $\varphi_\circ \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, com $\int \varphi_\circ = 1$, temos (aqui $d\lambda := d\lambda_1 \ldots d\lambda_n$ e $dt := dt_1 \ldots dt_m$)

$$< \widehat{f}(\varepsilon, \cdot), \varphi >= \int\limits_{\mathrm{supp}(\varphi) \times \mathrm{supp}(\varphi_\circ)} \left(\widehat{f} \circ \pi_m\right)(\varepsilon, \lambda, t)\varphi(\lambda)\varphi_\circ(t) d\lambda dt, \quad (\varepsilon \in]0,1]) .$$

Se ψ é a função definida por $\psi \colon (\lambda, t) \in W \times \mathbb{R}^m \mapsto \varphi(\lambda)\varphi_\circ(t) \in \mathbb{K}$ temos que $\psi \in \mathcal{D}(W \times \mathbb{R}^m)$ com $\mathrm{supp}(\psi) = \mathrm{supp}(\varphi) \times \mathrm{supp}(\varphi_\circ)$. Então, se $(f \circ \pi_m)|_{W \times \mathbb{R}^m} \approx 0$ é claro que $< \widehat{f}(\varepsilon, \cdot), \varphi >=< (\widehat{f} \circ \pi_m)(\varepsilon, \cdot), \psi > \to 0$ quando $\varepsilon \downarrow 0$. Reciprocamente, se $\psi \in \mathcal{D}(W \times \mathbb{R}^m)$ e $\varphi \colon \lambda \in W \mapsto < 1, \psi(\lambda, \cdot) > \in \mathbb{K}$ temos que $\varphi \in \mathcal{D}(W)$ e é claro que $< (\widehat{f} \circ \pi_m)(\varepsilon, \cdot), \psi >=< \widehat{f}(\varepsilon, \cdot), \varphi > \to 0$ quando $\varepsilon \downarrow 0$. □

3.1.2 Corolário. *Se $f \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n; \mathbb{K}^\ell)$, Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e S é um C^∞ - difeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^n$ tal que $J_S(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ então, são válidas as seguintes equivalências*

(1) $$(f \circ S^{-1})|_{S(\Omega)} \approx 0 \quad \textit{se e só se} \quad f|_\Omega \approx 0$$

(2) $$(f \circ S^{-1})|_{S(\Omega)} = 0 \quad \textit{se e só se} \quad f|_\Omega = 0.$$

As funções auxiliares y, y^*, π_m, π_{n+m} e (y^*, π_{n+m})

Fixada uma função $y \in C^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$, consideremos a função auxiliar associada $y^* \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ definida por

(3.1.1) $$y^*(x,t) := x - y(t), \quad ((x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, (x,t) = (x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_m)) .$$

A transformação de coordenadas associada (y^*, π_{n+m}) definida por

(3.1.2) $$(y^*, \pi_{n+m}) : (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto (y^*, \pi_{n+m})(x,t) := (y^*(x,t), t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

em que $\pi_{n+m}\colon (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto t \in \mathbb{R}^m$, é um C^∞ - difeomorfismo, com inversa como sendo a função

(3.1.3) $$(y^*, \pi_{n+m})^{-1}\colon (\lambda, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto (\lambda + y(t), t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

Os respectivos jacobianos satisfazem

$$J_{(y^*,\pi_{n+m})}(x,t) = 1 = J_{(y^*,\pi_{n+m})^{-1}}(\lambda,t).$$

Se $\pi_m\colon (\lambda, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \lambda \in \mathbb{R}^n$ é a projeção na primeira variável, temos

(3.1.4) $$y^* = \pi_m \circ (y^*, \pi_{n+m}) \text{ em } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \quad (\text{e portanto } \quad y^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n).$$

Consideremos também os seguintes subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, associados à função y, definidos por

(3.1.5) $$\Omega_-^+ := \{(x,t) \mid y_j^*(x,t) < 0 \text{ para algum } j = 1, \ldots, n\}$$

(3.1.6) $$\Omega_+ := \{(x,t) \mid y_j^*(x,t) > 0 \text{ para todo } j = 1, \ldots, n\} \quad \text{e} \quad \Omega^* := \Omega_-^+ \cup \Omega_+$$

onde $y_1^*, \ldots, y_n^*$ são as funções componentes de y^* associadas respectivamente às funções componentes de $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Temos as seguintes igualdades (ver Índice de Notações e Convenções)

(3.1.7) $$(y^*, \pi_{n+m})(\Omega_-^+) = (\mathbb{R}_-^+)^n \times \mathbb{R}^m, \qquad (y^*, \pi_{n+m})(\Omega_+) = (\mathbb{R}_+^*)^n \times \mathbb{R}^m$$

(3.1.8) $$(y^*, \pi_{n+m})(\Omega^*) = (\mathbb{R}^*)^n \times \mathbb{R}^m$$

e em conseqüência valem as seguintes propriedades

(3.1.9) $$(\mathbb{R}_-^+)^n = y^*(\Omega_-^+), \ (\mathbb{R}_+^*)^n = y^*(\Omega_+) \text{ e } (\mathbb{R}^*)^n = y^*(\Omega^*).$$

Pelo que precede resulta

(3.1.10) $$(y^*, \pi_{n+m})(\Omega) = y^*(\Omega) \times \mathbb{R}^m, \quad \text{para} \quad \Omega = \Omega_-^+, \Omega_+, \Omega^*, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

Usando as propriedades (a) e (b) da proposição 3.1.1, seguem os três resultados apresentados a seguir. Várias aplicações desses resultados serão usadas no estudo de resolubilidade dos sistemas $(\tilde{S})$ e (S), considerados na Introdução deste trabalho.

unesp

3.1.3 Corolário. *Para cada* $(y, f) \in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n) \times \mathcal{G}(\mathbb{R}^n;\mathbb{K}^\ell)$ *e para cada aberto* Ω *de* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *tal que* $(y^*, \pi_{n+m})(\Omega) = y^*(\Omega) \times \mathbb{R}^m$ *são válidas as seguintes equivalências*

(1) $$(f \circ y^*)|_\Omega \approx 0 \quad \textit{se, e somete se,} \quad f|_{y^*(\Omega)} \approx 0$$

(2) $$(f \circ y^*)|_\Omega = 0 \quad \textit{se, e somente se,} \quad f|_{y^*(\Omega)} = 0.$$

Demonstração. Se $S := (y^*, \pi_{n+m})$ e $g := f \circ \pi_m$, usando a fórmula (3.1.4), temos que $g \circ S = f \circ y^*$ e portanto, pela proposição 3.1.1(a), vale

$$(f \circ y^*)|_\Omega \approx 0 \Longleftrightarrow (f \circ \pi_m)|_{S(\Omega)} \approx 0.$$

Por outro lado, como $S(\Omega) = y^*(\Omega) \times \mathbb{R}^m$, pela proposição 3.1.1(b) com $W = y^*(\Omega)$, vale também

$$(f \circ \pi_m)|_{S(\Omega)} \approx 0 \Longleftrightarrow f|_{y^*(\Omega)} \approx 0.$$

Dessas equivalências segue a propriedade (1). A equivalência (2) segue de modo análogo. □

3.1.4 Corolário. *Se* $y \in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ *e* $(\alpha_j, H_j) \in \mathbb{N}^* \times \mathcal{H}_p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$, $1 \leq j \leq \ell$, *então, vale a propriedade*

$$(H_1^{\alpha_1} \dots H_\ell^{\alpha_\ell}) \circ (y^*, \pi_{n+m}) \approx H \circ (y^*, \pi_{n+m}), \qquad (H \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)).$$

Em conseqüência, para cada $K \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$, *temos*

$$K^\ell \circ (y^*, \pi_{n+m}) \approx H \circ (y^*, \pi_{n+m}), \qquad (H \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)).$$

Demonstração. O resultado segue das proposições 2.3.9(d), 2.3.11(e) e 3.1.1(1), lembrando que $(y^*, \pi_{n+m})(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. □

A propriedade seguinte, também considerada em [9] (Corolário 3.1.18(III)) para os casos $m = n = 1$, pode ser obtida, usando de modo conveniente os resultados apresentados anteriormente.



3.1.5 Corolário. *Se* $(\alpha_j, H_j) \in \mathbb{N}^* \times \mathcal{H}_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq j \leq \ell$, *então, vale*

$$(H_1^{\alpha_1} \dots H_\ell^{\alpha_\ell}) \circ y^* \approx H \circ y^*, \qquad ((y, H) \in C^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n) \times \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)).$$

Em conseqüência, para cada $K \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R}^n)$, *temos*

$$K^\ell \circ y^* \approx H \circ y^*, \qquad ((y, H) \in C^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n) \times \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)).$$

Demonstração. Fixemos um par qualquer (y, H) em $C^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n) \times \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$. Pelas proposições 2.3.8(b) e 2.3.11(c) temos respectivamente

$$H \circ \pi_m \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \qquad \text{e} \qquad H_j \circ \pi_m \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m), \quad (1 \leq j \leq \ell).$$

Então, pelo corolário anterior, vale a relação

$$[(H_1^{\alpha_1} \circ \pi_m) \cdots (H_\ell^{\alpha_\ell} \circ \pi_m)] \circ (y^*, \pi_{n+m}) \approx (H \circ \pi_m) \circ (y^*, \pi_{n+m})$$

isto é, $(H_1^{\alpha_1} \cdots H_\ell^{\alpha_\ell}) \circ [\pi_m \circ (y^*, \pi_{n+m})] \approx H \circ [\pi_m \circ (y^*, \pi_{n+m})]$. Donde, usando a igualdade $y^* = \pi_m \circ (y^*, \pi_{n+m})$, segue a validade da afirmação. □

3.1.6 Observação. Se $\varphi = \varphi(t) \in C^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{K}^\ell)$ e $\pi_{n+m}\colon (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto t \in \mathbb{R}^m$, usando a seguinte identificação $\varphi \equiv \varphi \circ \pi_{n+m}$, temos que $\varphi \circ (y^*, \pi_{n+m}) \equiv \varphi$ em $\mathbb{R}^m$. De fato, a igualdade segue usando a fórmula $\pi_{n+m} \circ (y^*, \pi_{n+m}) = \pi_{n+m}$.

Os próximos dois resultados serão usados fortemente no estudo da resolubilidade do sistema $(\tilde{S})$ e (S) no próximo capítulo. Para a apresentação desses resultados usaremos as notações e convenções dadas em 1.2.5 e em 1.2.6.

3.1.7 Proposição. *Se* $f = f(\lambda, t)$, $g = g(x, t) \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ *e* $y \in C^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$, *com* $y = (y_1, \dots, y_n)$, *então, valem as fórmulas seguintes*

(1) $$\operatorname{div}_x [f \circ (y^*, \pi_{n+m})] = (\operatorname{div}_\lambda f) \circ (y^*, \pi_{n+m})$$

(2) $$\partial_x^\alpha [f \circ (y^*, \pi_{n+m})] = (\partial_\lambda^\alpha f) \circ (y^*, \pi_{n+m}), \quad (\alpha \in \mathbb{N}^n)$$

(3) $$\nabla_t [f \circ (y^*, \pi_{n+m})] = -\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial \lambda_i} \circ (y^*, \pi_{n+m})\right] \nabla y_i + (\nabla_t f) \circ (y^*, \pi_{n+m})$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

(4) $$\partial_\lambda^\alpha \left[g \circ (y^*, \pi_{n+m})^{-1}\right] = (\partial_x^\alpha g) \circ (y^*, \pi_{n+m})^{-1}, \quad (\alpha \in \mathbb{N}^n)$$

(5) $$\nabla_t \left[g \circ (y^*, \pi_{n+m})^{-1}\right] = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial g}{\partial x_i} \circ (y^*, \pi_{n+m})^{-1}\right] \nabla y_i + (\nabla_t g) \circ (y^*, \pi_{n+m})^{-1}.$$

Demonstração. Observando que $y^* = (y_1^*, \ldots, y_n^*)$ e que $\pi_{n+m} = (P_1, \ldots, P_m)$, onde $y_1^*, \ldots, y_n^*$ são as funções associadas respectivamente às funções componentes de $(y_1, \ldots, y_n)$ e P_i: $(x,t) = (x, t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto t_i \in \mathbb{R}$, $(1 \leq i \leq m)$, a transformação (y^*, π_{n+m}) pode ser escrita na forma

(6) $$(y^*, \pi_{n+m}) = (y_1^*, \ldots, y_n^*, P_1, \ldots, P_m).$$

Então, para cada $j = 1, \ldots, n$ fixado, usando a regra da cadeia (ver 1.1.11) temos

$$[f \circ (y^*, \pi_{n+m})]_{x_j} = \sum_{i=1}^{n} [f_{\lambda_i} \circ (y^*, \pi_{n+m})]\, (y_i^*)_{x_j} + \sum_{i=1}^{m} [f_{t_i} \circ (y^*, \pi_{n+m})]\, (P_i)_{x_j}.$$

Donde, usando as igualdades

$$(y_i^*)_{x_j} \equiv \delta_{ij}\,, \ (1 \leq i \leq n) \qquad \text{e} \qquad (P_i)_{x_j} \equiv 0, \ (1 \leq i \leq m)$$

segue a validade das fórmulas seguintes

(7) $$[f \circ (y^*, \pi_{n+m})]_{x_j} = f_{\lambda_j} \circ (y^*, \pi_{n+m}), \quad (1 \leq j \leq n).$$

E daí segue claramente a validade das fórmulas (1) e (2). Por outro lado, fixado $j = 1, \ldots, m$, pela fórmula (6) e pela regra da cadeia, temos

$$[f \circ (y^*, \pi_{n+m})]_{t_j} = \sum_{i=1}^{n} [f_{\lambda_i} \circ (y^*, \pi_{n+m})]\, (y_i^*)_{t_j} + \sum_{i=1}^{m} [f_{t_i} \circ (y^*, \pi_{n+m})]\, (P_i)_{t_j}.$$

Então, levando-se em conta as igualdades

$$(y_i^*)_{t_j} \equiv -(y_i)_{t_j}\,, \ (1 \leq i \leq n) \qquad \text{e} \qquad (P_i)_{t_j} \equiv \delta_{ji}, \ (1 \leq i \leq m)$$

temos as fórmulas

$$[f \circ (y^*, \pi_{n+m})]_{t_j} = -\sum_{i=1}^{n} [f_{\lambda_i} \circ (y^*, \pi_{n+m})]\, (y_i)_{t_j} + f_{t_j} \circ (y^*, \pi_{n+m}), \quad (1 \leq j \leq m).$$

unesp

Donde segue a afirmação (3). As fórmulas (4) e (5) seguem de (2) e (3), respectivamente, fazendo $f := g \circ (y^*, \pi_{n+m})^{-1}$. Para a obtenção de (5) usamos também (4), as fórmulas (o que decorre de (7))

$$\left[g \circ (y^*, \pi_{n+m})^{-1}\right]_{\lambda_j} = g_{x_j} \circ (y^*, \pi_{n+m})^{-1}, \quad (1 \leq j \leq n)$$

e as igualdades $\nabla y_i \circ (y^*, \pi_{n+m}) = \nabla y_i$, $(1 \leq i \leq m)$, (ver observação 3.1.6). □

Da proposição anterior segue o resultado seguinte.

3.1.8 Proposição. *Se $f = f(\lambda) \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n) \in C^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ então, valem as fórmulas seguintes*

(1) $$\operatorname{div}_x (f \circ y^*) = (\operatorname{div}_\lambda f) \circ y^*$$

(2) $$\partial_x^\alpha (f \circ y^*) = (\partial_\lambda^\alpha f) \circ y^*, \quad (\alpha \in \mathbb{N}^n)$$

(3) $$\nabla_t (f \circ y^*) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (f \circ y^*)}{\partial x_i} \nabla y_i$$

Demonstração. As fórmulas requeridas seguem, respectivamente, dos itens (1), (2) e (3) da proposição anterior, usando a função $f \circ \pi_m$ e as seguintes fórmulas

$$y^* = \pi_m \circ (y^*, \pi_{n+m}), \ \nabla_t (f \circ \pi_m) = 0, \ \partial_\lambda^\alpha (f \circ \pi_m) = (\partial_\lambda^\alpha f) \circ \pi_m, \quad (\alpha \in \mathbb{N}^n).$$

□

O resultado apresentado a seguir, considerado em [9] (Corolário 3.1.18(I)) para o caso $y \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, pode ser obtido também como conseqüência da proposição anterior e do corolário 3.1.3 (ver 1.2.5, (b) e (c)).

3.1.9 Corolário. *Se $(H, y) \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n) \times C^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ e $k \in \mathbb{K}$ então, valem as seguintes propriedades.*

(1) $$k[\partial_x^n (H \circ y^*)] \approx 0 \quad \textit{se, e somente se,} \quad k = 0$$

(2) $$k[\operatorname{div}_x (H \circ y^*)] \approx 0 \quad \textit{se, e somente se,} \quad k = 0$$

(3) $$k(H \circ y^*) \approx 0 \quad \textit{se, e somente se,} \quad k = 0.$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

Demonstração. Sendo $\partial\lambda^n H$ uma função de Dirac em $\mathbb{R}^n$, pela proposição 2.2.4(b), temos $k\partial\lambda^n H \approx 0$ se, e somente se, $k = 0$. Então, a equivalência (1) segue usando as seguintes propriedades: 3.1.3(1), 3.1.8(2),

$$(y^*, \pi_{n+m})(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) = y^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^m \quad \text{e} \quad y^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n.$$

De modo análogo, usando as proposições 3.1.3(1), 2.2.11(d) e 3.1.8(1) segue a validade das equivalências (2) e (3). □

Usando as proposições 2.3.9, 3.1.1, 3.1.7 e 3.1.8 temos o resultado seguinte.

3.1.10 Proposição. *Se $H \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ e $y \in C^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ então, valem*

(1) $$[H \circ (y^*, \pi_{n+m})]\,|_{\Omega_+} \approx 1 \quad e \quad [H \circ (y^*, \pi_{n+m})]\,|_{\Omega_-^+} \approx 0$$

(2) $$\{\partial_x^\alpha\,[H \circ (y^*, \pi_{n+m})]\}\,|_{\Omega^\bullet} \approx 0, \quad (\alpha \in \mathbb{N}^n,\ \alpha \neq 0)$$

(3) $$(\nabla_t H) \circ (y^*, \pi_{n+m}) \approx 0 \ \ e \ \ \nabla_t\,[H \circ (y^*, \pi_{n+m})] \approx -\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial H}{\partial \lambda_i} \circ (y^*, \pi_{n+m})\right] \nabla y_i.$$

Demonstração. (1). Sendo válidas as condições (ver 2.3.9(b) e (3.1.7))

$$H|_{(\mathbb{R}_+^*)^n \times \mathbb{R}^m} \approx 1 \qquad \text{e} \qquad (y^*, \pi_{n+m})(\Omega_+) = (\mathbb{R}_+^*)^n \times \mathbb{R}^m$$

e sendo a transformação $S := (y^*, \pi_{n+m})$ um C^∞ - difeomorfismo sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ com $J_S \equiv 1$, usando a proposição 3.1.1(1), segue a primeira afirmação. A segunda relação segue de modo análogo, usando as propriedades

$$H|_{(\mathbb{R}_-^+)^n \times \mathbb{R}^m} \approx 0 \qquad \text{e} \qquad (y^*, \pi_{n+m})(\Omega_-^+) = (\mathbb{R}_-^+)^n \times \mathbb{R}^m.$$

(2). A afirmação segue usando a proposição 3.1.1(1) e as seguintes propriedades: $(y^*, \pi_{n+m})(\Omega^*) = (\mathbb{R}^*)^n \times \mathbb{R}^m$,

$$\partial_x^\alpha\,[H \circ (y^*, \pi_{n+m})] = (\partial_\lambda^\alpha H) \circ (y^*, \pi_{n+m}) \quad \text{e} \quad (\partial_\lambda^\alpha H)|_{(\mathbb{R}^\bullet)^n \times \mathbb{R}^m} \approx 0$$

(ver (3.1.8), 3.1.8(1) e 2.3.9(c), respectivamente).

(3). Como $(y^*, \pi_{n+m})(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ e $\nabla_t H \approx 0$ (ver 2.3.9(a)), usando a proposição 3.1.1(1) segue a validade da primeira afirmação. Em conseqüência, a segunda afirmação segue usando a fórmula 3.1.7(3). □

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Como conseqüência da proposição anterior, temos o resultado apresentado a seguir (o mesmo é considerado em [9] (Corolário 3.1.18) para os casos $n = m = 1$).

3.1.11 Corolário. *Se $H \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ e $y \in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ então, valem*

$$(H \circ y^*)|_{\Omega_+} \approx 1, \quad (H \circ y^*)|_{\Omega_-^+} \approx 0 \quad e \quad (H \circ y^*)_x|_{\Omega^\bullet} \approx 0\,.$$

Demonstração. As funções $H \circ \pi_m \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ (ver 2.3.8(b)) e (y^*, π_{n+m}) satisfazem as relações dadas em (1) e (2) da proposição 3.1.10. A afirmação segue então usando a igualdade $y^* = \pi_m \circ (y^*, \pi_{n+m})$. □

O resultado seguinte ilustra uma relação entra as funções generalizadas de Heaviside em $\mathbb{R}^n$ e em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, via associação em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$.

3.1.12 Proposição. *Se $H \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ e $K \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ então, vale a relação*

$$(1) \qquad H \circ (y^*, \pi_{n+m}) \approx K \circ y^*, \qquad (y \in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n))\,.$$

Demonstração. Fixada uma função $y \in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$, sendo $y^* = \pi_m \circ (y^*, \pi_{n+m})$, a relação dada em (1) pode ser escrita na forma

$$(2) \qquad [H - (K \circ \pi_m)] \circ (y^*, \pi_{n+m}) \approx 0.$$

Portanto, para termos (1), basta provar essa relação. De fato, pela proposição 2.3.9(d), temos que $H \approx K \circ \pi_m$. Então, como $(y^*, \pi_{n+m})(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, pela propriedade 3.1.1(1) (aplicada às funções $g = H - K \circ \pi_m$ e $S = (y^*, \pi_{n+m})$), é válida a relação dada em (2). □

Das proposições 2.3.11 e 3.1.12 obtemos o seguinte resultado.

3.1.13 Corolário. *Se $(\alpha_j, H_j) \in \mathbb{N}^* \times \mathcal{H}_p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$, $1 \le j \le \ell$, então*

$$(H_1^{\alpha_1} \cdots H_\ell^{\alpha_\ell}) \circ (y^*, \pi_{n+m}) \approx K \circ y^*, \qquad ((y, K) \in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n) \times \mathcal{H}(\mathbb{R}^n))\,.$$

Em conseqüência, para cada $H \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$, temos

$$H^\ell \circ (y^*, \pi_{n+m}) \approx K \circ y^*, \qquad ((y, K) \in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n) \times \mathcal{H}(\mathbb{R}^n))\,.$$

unesp

Nos próximos três resultados, serão usadas as convenções e as notações introduzidas em 1.2.5 e em 1.2.6. As aplicações no capítulo 4 (nas seções 4.4 e 4.5) serão dadas para o caso em que $n = 1$.

3.1.14 Proposição. *Dada uma função* $y \in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$, *seja* $\Phi \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m;\mathbb{K}^\ell)$ *tal que* $\partial_x^n \Phi = 0$ *e* $\Phi|_\Omega \approx 0$ *para algum subconjunto aberto não vazio* Ω *de* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *tal que* $(y^*, \pi_{n+m})(\Omega) = y^*(\Omega) \times \mathbb{R}^m$. *Então,* $\Phi \approx 0$.

Demonstração. Em virtude da definição 2.1.1 basta provar o resultado para o caso $\ell = 1$. Suponhamos que $\Omega \neq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ e seja $\widehat{\Phi}$ um representante qualquer de Φ. Levando em conta que $(y^*, \pi_{n+m})(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, para termos $\Phi \approx 0$, em virtude de 3.1.2(1), basta verificar que $\Phi \circ (y^*, \pi_{n+m})^{-1} \approx 0$; isto é,

$$(1) \qquad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left\langle \left[\widehat{\Phi} \circ (y^*, \pi_{n+m})^{-1}\right](\varepsilon, \cdot), \psi \right\rangle = 0, \quad (\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)).$$

Fixemos uma $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$. Considerando uma função $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ de tal modo que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset y^*(\Omega)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\lambda) d\lambda = 1$$

por um resultado conhecido (ver, por exemplo, [7], pg. 336), existe um par (φ_0, ψ_0) em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ tal que

$$\psi(\lambda, t) = \varphi(\lambda)\varphi_0(t) + \partial_\lambda^n \psi_0(\lambda, t), \quad ((\lambda, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m).$$

Temos que $\left\langle \left[\widehat{\Phi} \circ (y^*, \pi_{n+m})^{-1}\right](\varepsilon, \cdot), \psi \right\rangle = \mu_1(\varepsilon) + \mu_2(\varepsilon)$, $(\varepsilon \in]0, 1])$, onde

$$\mu_1(\varepsilon) := \left\langle \left[\widehat{\Phi} \circ (y^*, \pi_{n+m})^{-1}\right](\varepsilon, \cdot), \psi_1 \right\rangle, \quad \mu_2(\varepsilon) := \left\langle \left[\widehat{\Phi} \circ (y^*, \pi_{n+m})^{-1}\right](\varepsilon, \cdot), \partial_\lambda^n \psi_0 \right\rangle$$

e $\psi_1 \colon (\lambda, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \varphi(\lambda)\varphi_0(t) \in \mathbb{K}$. Para termos (1) basta que $\mu_1(\varepsilon) \to 0$ e que $\mu_2(\varepsilon) \to 0$, quando $\varepsilon \downarrow 0$. De fato, por hipótese e 3.1.2(1), temos

$$\left[\Phi \circ (y^*, \pi_{n+m})^{-1}\right]|_{(y^*, \pi_{n+m})(\Omega)} \approx 0$$

donde, como $\operatorname{supp}(\psi_1) = \operatorname{supp}(\varphi) \times \operatorname{supp}(\varphi_0) \subset y^*(\Omega) \times \mathbb{R}^m = (y^*, \pi_{n+m})(\Omega)$, segue que $\mu_1(\varepsilon) \to 0$ quando $\varepsilon \downarrow 0$. Por outro lado, sendo válidas as fórmulas (ver 3.1.7(4))

$$\partial_\lambda^n \left[\Phi \circ (y^*, \pi_{n+m})^{-1}\right] = (\partial_x^n \Phi) \circ (y^*, \pi_{n+m})^{-1}, \ (y^*, \pi_{n+m})(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

unesp

e $\partial_x^n \Phi = 0$, por 3.1.2(2), resulta que

$$\partial_\lambda^n \left[\Phi \circ (y^*, \pi_{n+m})^{-1}\right] = (\partial_x^n \Phi) \circ (y^*, \pi_{n+m})^{-1} = 0\,.$$

Donde, como

$$\mu_2(\varepsilon) = (-1)^n \left\langle \left\{\partial_\lambda^n \left[\widehat{\Phi} \circ (y^*, \pi_{n+m})^{-1}\right]\right\}(\varepsilon, \cdot), \psi_0 \right\rangle$$

e $\psi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$, pelo lema 1.1.2(c), segue que $\mu_2(\varepsilon) \to 0$ quando $\varepsilon \downarrow 0$. □

Também o resultado seguinte será uma ferramenta importantíssima para o estudo da resolubilidade sistema $(\tilde{S})$ (proposto na Introdução do trabalho) na seção 4.4 do capítulo 4. As aplicações serão dadas para o caso em que $n = 1$. Ver, por exemplo, as provas das proposições 4.4.1 - 4.4.4.

3.1.15 Proposição. *Se $y \in C^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ e $(\phi, \varphi) \in C^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{K}^\ell) \times C^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{K}^\ell)$ são válidas as seguintes afirmações.*

(a) *Se $H \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ e $f \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; \mathbb{K}^\ell)$ é uma função generalizada tal que $f|_{\Omega^*} \approx 0$ e*

$$(1) \qquad [H \circ (y^*, \pi_{n+m})]\,\phi + \{\partial_x^n [H \circ (y^*, \pi_{n+m})]\}\,\varphi \approx \partial_x^n f$$

então, $\varphi \equiv \phi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^m$ e $f \approx 0$.

(b) *Se $H \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ e ψ é um elemento de $C^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{K}^\ell)$ verificando a relação*

$$(2) \qquad [H \circ (y^*, \pi_{n+m})]\,\phi + \{\partial_x^n [H \circ (y^*, \pi_{n+m})]\}\,\varphi \approx \psi$$

então, $\psi \equiv \varphi \equiv \phi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^m$.

Demonstração. Aqui, quando for considerado a restrição da função χ ao conjunto Ω ($\chi|_\Omega$), para $\chi = \phi$, φ, ψ e $\Omega = \Omega_-^+$, Ω_+, Ω^*, estaremos considerando a seguinte identificação: $\chi \equiv \chi \circ \pi_{n+m}$.

(a). Por restrição ao conjunto Ω_+, usando as seguintes relações (ver (1) e (2) em 3.1.10)

$$[H \circ (y^*, \pi_{n+m})]\,|_{\Omega_+} \approx 1, \quad \{\partial_x^n [H \circ (y^*, \pi_{n+m})]\}\,|_{\Omega_+} \approx 0, \quad (\partial_x^n f)|_{\Omega_+} \approx 0$$

e usando as condições (b) e (c) do teorema 2.1.2 (aplicada às funções componentes de ϕ), podemos obter a relação

$$\phi|_{\Omega_+} \approx 0.$$

Donde, em virtude das propriedades (3.1.10) e 3.1.14, segue que $\phi \approx 0$. Em conseqüência, sendo $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{K}^\ell)$, pela proposição 2.1.4, vale a igualdade

$$\phi \equiv 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^m \tag{3}$$

o que junto com a condição (1) acarreta a propriedade seguinte

$$\{\partial_x^n [H \circ (y^*, \pi_{n+m})]\} \varphi \approx \partial_x^n f .$$

Usando o teorema 2.1.2(d) podemos achar uma aplicação $\Phi \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; \mathbb{K}^\ell)$ tal que $\partial_x^n \Phi = 0$ e

$$[H \circ (y^*, \pi_{n+m})] \varphi \approx f + \Phi. \tag{4}$$

Por restrição ao conjunto Ω_-^+, usando as relações

$$[H \circ (y^*, \pi_{n+m})] |_{\Omega_-^+} \approx 0, \qquad f|_{\Omega_-^+} \approx 0$$

e o teorema 2.1.2(c) podemos ver que a função Φ satisfaz a condição

$$\Phi|_{\Omega_-^+} \approx 0$$

e portanto, por 3.1.14, temos que $\Phi \approx 0$. Levando essa condição em (4) obtemos

$$[H \circ (y^*, \pi_{n+m})] \varphi \approx f. \tag{5}$$

E daí, por restrição ao conjunto Ω_+ e por um argumento similar ao que foi feito acima, para a obtenção da condição dada em (3), concluimos que $\varphi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^m$. Sendo assim, da condição (5) segue que $f \approx 0$.

(b). A prova é similar a do item (a). Sendo válidas as condições

$$[H \circ (y^*, \pi_{n+m})] |_{\Omega_-^+} \approx 0 \qquad \text{e} \qquad \{\partial_x^n [H \circ (y^*, \pi_{n+m})]\} |_{\Omega_-^+} \approx 0$$

em virtude do teorema 2.1.2(b) vale também a relação

$$\{[H \circ (y^*, \pi_{n+m})]\, \phi\}\,|_{\Omega_-^+} + \{\partial_x^n\, [H \circ (y^*, \pi_{n+m})]\, \varphi\}\,|_{\Omega_-^+} \approx 0$$

Então, da condição (2), por restrição ao conjunto Ω_-^+, obtemos

$$\psi|_{\Omega_-^+} \approx 0.$$

Donde, usando as propriedades (3.1.10), 3.1.14 e 2.1.4, segue que $\psi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^m$. Essa condição junto com (2) implica

$$[H \circ (y^*, \pi_{n+m})]\, \phi + \{\partial_x^n\, [H \circ (y^*, \pi_{n+m})]\}\, \varphi \approx 0.$$

Em conseqüência, pelo item (a), concluímos que $\varphi \equiv \phi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^m$. □

Como um caso particular da proposição anterior, usando as propriedades 2.3.8(b) e (3.1.4), temos o resultado correspondente para o caso das funções generalizadas de Heaviside em $\mathbb{R}^n$.

3.1.16 Corolário. *Se $y \in C^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ e $(\phi, \varphi) \in C^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{K}^\ell) \times C^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{K}^\ell)$ são válidas as seguintes afirmações.*

(a) *Se $H \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ e $f \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; \mathbb{K}^\ell)$ é uma função generalizada tal que $f|_{\Omega^\bullet} \approx 0$ e $(H \circ y^*)\, \phi + [\partial_x^n\, (H \circ y^*)]\, \varphi \approx \partial_x^n f$ então, $\varphi \equiv \phi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^m$ e $f \approx 0$.*

(b) *Se $H \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{K}^\ell)$ e $(H \circ y^*)\, \phi + [\partial_x^n\, (H \circ y^*)]\, \varphi \approx \psi$ então, $\psi \equiv \varphi \equiv \phi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^m$.*

Como conseqüência do corolário anterior (para o caso $n = 1$) temos também o corolário seguinte.

3.1.17 Corolário. *Se $y \in C^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{R})$ e $(\phi, \varphi) \in C^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{K}^\ell) \times C^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{K}^\ell)$ são válidas as seguintes afirmações.*

(a) *Se $H \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$ e $f \in \mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m; \mathbb{K}^\ell)$ é uma função generalizada tal que $f|_{\Omega^\bullet} \approx 0$ e $(H \circ y^*)\, \phi + (H \circ y^*)_x\, \varphi \approx f_x$ então, $\varphi \equiv \phi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^m$ e $f \approx 0$.*

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

(b) *Se* $H \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$, $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{K}^\ell)$ *e* $(H\circ y^*)\,\phi+(H\circ y^*)_x\,\varphi \approx \psi$ *então,* $\psi \equiv \varphi \equiv \phi \equiv 0$ *em* $\mathbb{R}^m$.

Para os casos particulares $n = m = \ell = 1$ temos ainda o resultado seguinte.

3.1.18 Corolário. *Se* $(y, H) \in C^\infty(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}(\mathbb{R})$ *e* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *são válidas as seguintes afirmações.*

(a) *Se* $f \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$, $f|_{\Omega^*} \approx 0$ *e* $a\,(H\circ y^*) + b\,(H\circ y^*)_x \approx f_x$ *então,* $a = b = 0$ *e* $f \approx 0$.

(b) *Se* $c \in \mathbb{R}$ *e* $a\,(H\circ y^*) + b\,(H\circ y^*)_x \approx c$ *então,* $a = b = c = 0$.

3.2 Composição e inversibilidade para uma classe de funções generalizadas

Nesta seção, introduziremos a noção de função composta e apresentaremos um resultado sobre inversibilidade, para uma certa classe de funções generalizadas. Outras informações adicionais sobre esses assuntos podem ser encontrados em [9] ou [10].

Composição

Nesta parte são fixados E e G espaços de Banach, Ω um subconjunto aberto de E e suporemos que $F = \mathbb{R}^m$. Dados $a = (a_1, \ldots, a_m)$ e $b = (b_1, \ldots, b_m)$ em $\tilde{\mathbb{R}}^m$, com $a \leq b$, usaremos as seguintes notações

$$I_a^b := \prod_{i=1}^m]a_i, b_i[,\ \ [a,b] := \prod_{i=1}^m [a_i, b_i],\ \ [a,b[:= \prod_{i=1}^m [a_i, b_i[\ \text{ e }\ ]a,b] := \prod_{i=1}^m]a_i, b_i].$$

Serão mantidos fixos os elementos $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ e $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ em $\tilde{\mathbb{R}}_+^m$ com $\alpha < \beta$ e será considerado o caso

$$\Omega' = I_\alpha^\beta \subset (\tilde{\mathbb{R}}_+^*)^m.$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

3.2.1 Definição. (a) Denotamos por $\mathcal{E}_{M,\oslash}[\Omega; I_\alpha^\beta]$ o conjunto de todos os elementos $u \in \mathcal{E}_M[\Omega; \mathbb{R}^m]$ tais que para cada $K \subset\subset \Omega$ existem (η, a, b) em $]0,1] \times I_\alpha^\beta \times I_\alpha^\beta$, com $a < b$, e uma função $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)\colon]0,1] \to]\alpha, a]$ de modo que

$$u(\varepsilon, x) \in [\mu(\varepsilon), b],\ ((\varepsilon, x) \in]0, \eta[\times K) \ \text{ e } \ [\varepsilon \mapsto (\mu_i(\varepsilon) - \alpha_i)^{-1}] \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R}),\ (1 \leq i \leq m).$$

(b) Indicamos com $\mathcal{G}_\otimes(\Omega; I_\alpha^\beta)$ o conjunto de todos os elementos de $\mathcal{G}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, os quais têm pelo menos um representante em (ver definição 1.1.6(b))

$$\mathcal{E}_{M,\otimes}[\Omega; I_\alpha^\beta] := \mathcal{E}_M[\Omega; I_\alpha^\beta] \cap \mathcal{E}_{M,\oslash}[\Omega; I_\alpha^\beta].$$

3.2.2 Definição. (a) Denotamos por $\mathcal{E}_{QM}[I_\alpha^\beta; G]$ o conjunto de todas as funções $w \in \mathcal{E}[I_\alpha^\beta; G]$ tais que para cada (p, a, b) em $\mathbb{N} \times I_\alpha^\beta \times I_\alpha^\beta$, com $a < b$, e para cada função $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$ de $]0,1]$ em $]\alpha, a]$ tal que $[\varepsilon \mapsto (\mu_i(\varepsilon) - \alpha_i)^{-1}] \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R})$, $(1 \leq i \leq m)$, existem $N \in \mathbb{N}$, $C > 0$ e $\eta \in]0,1]$ satisfazendo

$$\sup_{y \in [\mu(\varepsilon), b]} |w^{(p)}(\varepsilon, y)|_p \leq C\varepsilon^{-N}, \quad (0 < \varepsilon < \eta).$$

(b) Definimos

$$C_{QM}^\infty[I_\alpha^\beta; G] := C^\infty(I_\alpha^\beta; G) \cap \mathcal{E}_{QM}[I_\alpha^\beta; G].$$

Para uma prova do resultado seguinte ver [10] (Teorema 3.3) (ou [9], Teorema 3.1.26).

3.2.3 Teorema. *Se $u \in \mathcal{E}_{M,\otimes}[\Omega; I_\alpha^\beta]$ e $\varphi \in C_{QM}^\infty[I_\alpha^\beta; G]$ então, $\varphi \circ u \in \mathcal{E}_M[\Omega; G]$ e $(\varphi \circ u - \varphi \circ v) \in \mathcal{N}[\Omega; G]$, para cada $v \in \mathcal{E}_M[\Omega; I_\alpha^\beta]$ tal que $(u - v) \in \mathcal{N}[\Omega; \mathbb{R}^m]$.*

Em vista do resultado anterior, podemos dar a definição seguinte.

3.2.4 Definição. Se $(f, \varphi) \in \mathcal{G}_\otimes(\Omega; I_\alpha^\beta) \times C_{QM}^\infty[I_\alpha^\beta; G]$ definimos a *função composta*

$$\varphi \circ f := \varphi \circ \widehat{f} + \mathcal{N}[\Omega; G]$$

onde $\widehat{f} \in \mathcal{E}_M[\Omega; I_\alpha^\beta]$ é um representante qualquer de f.

A prova do resultado seguinte segue da definição 3.2.2(a) por um argumento similar ao usado em [2], Proposição 2.1.5 (ou em [9], Proposição 1.2.19).

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

3.2.5 Proposição. *Temos $w \in \mathcal{E}_{QM}[I_\alpha^\beta; G]$ se, e somente se, para cada (γ, a, b) em $\mathbb{N}^m \times I_\alpha^\beta \times I_\alpha^\beta$, com $a < b$, e para cada função $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$ de $]0,1]$ em $]\alpha, a]$ tal que $[\varepsilon \mapsto (\mu_i(\varepsilon) - \alpha_i)^{-1}] \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R})$, $(1 \leq i \leq m)$, existem $N \in \mathbb{N}$, $C > 0$ e $\eta \in]0,1]$ satisfazendo*

$$\sup_{y \in [\mu(\varepsilon), b]} |\partial^\gamma w(\varepsilon, y)| \leq C\varepsilon^{-N}, \quad (0 < \varepsilon < \eta).$$

Inversibilidade

Nesta parte, são fixados um espaço de Banach E e um subconjunto aberto Ω de E. Consideraremos os casos $F = G = \mathbb{R}$ e $\Omega' = \mathbb{R}^*$.

3.2.6 Definição. (a) Denotamos por $\mathcal{E}_{M,\odot}[\Omega; \mathbb{R}^*]$ o conjunto de todas as funções $u \in \mathcal{E}_M[\Omega; \mathbb{R}]$ tais que para cada $K \subset\subset \Omega$ existem $\eta \in]0,1]$ e uma função μ de $]0,1]$ em $\mathbb{R}_+^*$ tais que

$$\left[\varepsilon \mapsto \mu(\varepsilon)^{-1}\right] \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \mu(\varepsilon) \leq |u(\varepsilon, x)|, \quad ((\varepsilon, x) \in]0, \eta[\times K).$$

(b) Indicamos com $\mathcal{G}_o(\Omega; \mathbb{R}^*)$ o conjunto de todos os elementos de $\mathcal{G}(\Omega; \mathbb{R})$, os quais têm pelo menos um representante em (ver definição 1.1.6(b))

$$\mathcal{E}_{M,o}[\Omega; \mathbb{R}^*] := \mathcal{E}_M[\Omega; \mathbb{R}^*] \cap \mathcal{E}_{M,\odot}[\Omega; \mathbb{R}^*].$$

Para a verificação do resultado seguinte ver [10], Proposição 3.4 e Teorema 3.5 (ou [9], Teorema 3.1.22(II) e Proposição 3.1.29).

3.2.7 Proposição. *Se $\dim E < +\infty$ e $f \in \mathcal{G}_o(\Omega; \mathbb{R}^*)$ então, f possui um inverso multiplicativo em $\mathcal{G}(\Omega; \mathbb{R})$ e $\widehat{f}^{-1}$ é um representante de f^{-1}, para qualquer representante $\widehat{f} \in \mathcal{E}_M[\Omega; \mathbb{R}^*]$ de f.*

Fixados α e β em $\tilde{\mathbb{R}}_+$ com $\alpha < \beta$, no próximo resultado será usado a notação $I_\alpha^\beta :=]\alpha, \beta[$. O resultado segue de 3.2.7 notando que $\mathcal{E}_{M,\oslash}[\Omega; I_\alpha^\beta] \subset \mathcal{E}_{M,\odot}[\Omega; \mathbb{R}^*]$.

3.2.8 Proposição. *Se $\dim E < +\infty$ e $f \in \mathcal{G}_\otimes(\Omega; I_\alpha^\beta)$ então, f (resp. $f - \alpha$) possui um inverso multiplicativo em $\mathcal{G}(\Omega; \mathbb{R})$ e a função $\widehat{f}^{-1}$ (resp. $(\widehat{f} - \alpha)^{-1}$) é um representante da função generalizada f^{-1} (resp. $(f-\alpha)^{-1}$), para cada $\widehat{f} \in \mathcal{E}_M[\Omega; I_\alpha^\beta]$ representante de f.*

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

3.3 Sobre funções na forma de onda de choque

Nesta seção, serão consideradas funções generalizadas a valores reais. Se Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}^*$, escrevemos $\mathcal{G}(\Omega)$ em lugar de $\mathcal{G}(\Omega;\mathbb{R})$. Uma notação similar será usada para indicar o conjunto das funções moderadas e nulas sobre Ω, bem como para os subconjuntos de $C^\infty(\Omega;\mathbb{R})$, $\mathcal{E}_{QM}[\Omega;\mathbb{R}]$ e $\mathcal{G}(\Omega;\mathbb{R})$.

3.3.1 Hipótese. (Para a definição 3.3.2 e as proposições 3.3.3, 3.3.8 e 3.3.12) São considerados os seguintes dados.

(A) Dois elementos $a = (a_1, \ldots, a_\ell)$ and $b = (b_1, \ldots, b_\ell)$ em $C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^\ell)$ tais que

$$0 < a(t) < b(t), \quad (t \in \mathbb{R}^m)\,.$$

Para cada $i = 1, \ldots, \ell$ consideremos a função $\Delta_i \in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^*_-)$ definida por

$$\Delta_i(t) := a_i(t) - b_i(t), \quad (t \in \mathbb{R}^m).$$

(B) Dois elementos $\alpha_* = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ e $\beta_* = (\beta_1, \ldots, \beta_\ell)$ em $\tilde{\mathbb{R}}^\ell_+$ com $\alpha_* < \beta_*$ e uma função $\nu_* = (\nu_1, \ldots, \nu_\ell)$ em $C^\infty(\mathbb{R}^*_+;\mathbb{R}^\ell)$ tal que cada componente de ν_* é uma função crescente. Vamos supor que o conjunto $\{1, \ldots, \ell\}$ é uma reunião de duas partes disjuntas $\mathbb{I}$ e $\mathbb{J}$ tais que

- para cada $i \in \mathbb{I}$, ν_i é estritamente crescente com $\mathrm{Im}(\nu_i) =]\alpha_i, \beta_i[$
- para cada $j \in \mathbb{J}$, ν_j não é estritamente crescente com $\mathrm{Im}(\nu_j) \subset [\alpha_j, \beta_j[$.

3.3.2 Definição. Suponhamos verificada a hipótese 3.3.1.

(A) Sejam

$$\alpha_{(s)} := \alpha_1 + \cdots + \alpha_\ell \quad \text{e} \quad \beta_{(s)} := \beta_1 + \cdots + \beta_\ell.$$

Consideremos a função $\nu_{(s)} \in C^\infty\left((\mathbb{R}^*_+)^\ell;]\alpha_{(s)}, \beta_{(s)}[\right)$ definida por

$$\nu_{(s)}(y_1, \ldots, y_\ell) := \sum_{i=1}^{\ell} \nu_i(y_i), \qquad \left((y_1, \ldots, y_\ell) \in (\mathbb{R}^*_+)^\ell\right).$$

unesp

(B) Suponhamos que $\alpha_j > 0$ para todo $j \in \mathbb{J}$. Sejam

$$\alpha_{(\pi)} := \alpha_1 \dots \alpha_\ell \quad \text{e} \quad \beta_{(\pi)} := \beta_1 \dots \beta_\ell.$$

Consideremos a função $\nu_{(\pi)} \in C^\infty\left((\mathbb{R}_+^*)^\ell;]\alpha_{(\pi)}, \beta_{(\pi)}[\right)$ definida por

$$\nu_{(\pi)}(y_1, \dots, y_\ell) := \prod_{i=1}^{\ell} \nu_i(y_i), \quad \left((y_1, \dots, y_\ell) \in (\mathbb{R}_+^*)^\ell\right).$$

(C) Com as notações introduzidas em (A) e (B), para cada $\nu = \nu_{(s)}, \nu_{(\pi)}$ consideremos a aplicação $(\nu_r, \nu_\ell, \Delta\nu)$, cujas funções componentes são definidas por

$$\nu_r := \nu \circ a, \quad \nu_\ell := \nu \circ b \quad \text{e} \quad \Delta\nu := \nu_r - \nu_\ell.$$

Com as notações dadas na definição anterior é fácil ver que

$$\Delta\nu(t) < 0, \quad (t \in \mathbb{R}^m).$$

Recordemos que a função $\mathbb{Y}_{nm}$ foi introduzida na definição 2.3.5 como sendo dada por

$$\mathbb{Y}_{nm} := \mathbb{Y}_n \circ \pi_m = \begin{cases} 0, & \text{em } (\mathbb{R}_-^+)^n \times \mathbb{R}^m \\ 1, & \text{em } (\mathbb{R}_+^*)^n \times \mathbb{R}^m \end{cases}$$

onde $\pi_m\colon (\lambda, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \lambda \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbb{Y}_n$ é a função de Heaviside em $\mathbb{R}^n$ introduzida na definição 2.2.5.

Para comodidade do leitor, demonstraremos a proposição seguinte. A prova, essencialmente, é a mesma daquela apresentada em [9] (Proposição 3.2.4) ou em [10] (Proposição 4.2) resultado este no caso em que a e b são vetores no espaço euclidiano $\mathbb{R}^\ell$.

3.3.3 Proposição. *Suponhamos verificada a hipótese 3.3.1 e indiquemos com (ν, α, β) qualquer uma das ternas $(\nu_{(s)}, \alpha_{(s)}, \beta_{(s)})$ ou $(\nu_{(\pi)}, \alpha_{(\pi)}, \beta_{(\pi)})$ definidas em 3.3.2(C). Dada $(H_1, \dots, H_\ell)$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^\ell)$, seja*

$$f = (f_1, \dots, f_\ell) := (\Delta_1 H_1 + b_1, \dots, \Delta_\ell H_\ell + b_\ell) \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^\ell).$$

Supondo que cada H_i, $1 \le i \le \ell$, tem um representante $\widehat{H}_i$ tal que

$$(1) \qquad \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^n} |\widehat{H}_i(\varepsilon, \lambda, t)| \le \frac{a_i(t)\varepsilon - b_i(t)}{\Delta_i(t)}, \quad ((\varepsilon, t) \in]0, 1] \times \mathbb{R}^m)$$



são válidas as asserções descritas a seguir.

(A) $\widehat{f} = (\widehat{f}_1, \ldots, \widehat{f}_\ell) := (\Delta_1 \widehat{H}_1 + b_1, \ldots, \Delta_\ell \widehat{H}_\ell + b_\ell) \in \mathcal{E}_{M,\otimes}[\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; (\mathbb{R}^*_+)^\ell]$.

Se cada componente da função $\nu_* = (\nu_1, \ldots, \nu_\ell)$ é um elemento de $\mathcal{E}_{QM}[\mathbb{R}^*_+]$ valem ainda as afirmações seguintes.

(B) *A função ν é um elemento de $\mathcal{E}_{QM}[(\mathbb{R}^*_+)^\ell]$ (e portanto, pela definição 3.2.4, $\nu \circ \widehat{f}$ é um representante de $\nu \circ f$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$).*

(C) *Se $\widehat{H}_i(\varepsilon, \cdot) \to \mathbb{Y}_{nm}$ em $(\mathbb{R}^*)^n \times \mathbb{R}^m$ quando $\varepsilon \downarrow 0$, para cada $i = 1, \ldots, m$, então*

$$V := (\Delta\nu)^{-1}(\nu \circ f - \nu_\ell) \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m).$$

(D) *Se $1 \in \mathbb{I}$ e $[\varepsilon \mapsto (\nu_1(r\varepsilon) - \alpha_1)^{-1}] \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R})$ para cada $r > 0$ então, a função $\nu \circ \widehat{f} \in \mathcal{E}_{M,\otimes}[\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; I^\beta_\alpha]$, $(\nu_1 \circ f_1 - \alpha_1)(\nu \circ f - \alpha)^{-1} \in \mathcal{G}_{\ell b}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ e*

$$\left(\frac{\nu_1 \circ \widehat{f}_1 - \alpha_1}{\nu \circ \widehat{f} - \alpha}\right)(\varepsilon, \cdot) \to \begin{cases} \lambda_\ell & \text{em } (\mathbb{R}^+_-)^n \times \mathbb{R}^m \\ \lambda_r & \text{em } (\mathbb{R}^*_+)^n \times \mathbb{R}^m \end{cases} \quad \text{quando } \varepsilon \downarrow 0$$

onde $\lambda_\ell := [\nu_1(b_1) - \alpha_1](\nu_\ell - \alpha)^{-1}$ e $\lambda_r := [\nu_1(a_1) - \alpha_1](\nu_r - \alpha)^{-1}$. No caso em que $(\nu, \alpha, \beta) = (\nu_{(\pi)}, \alpha_{(\pi)}, \beta_{(\pi)})$ fazemos a hipótese adicional $\alpha_k > 0$ sempre que $2 \leq k \leq \ell$.

Demonstração. Pela definição 1.1.5, a função $\widehat{f} = (\widehat{f}_1, \ldots, \widehat{f}_\ell)$ é um representante de $f = (f_1, \ldots, f_\ell)$. Da condição (1) e da definição de $\widehat{f}$ vem

$$\varepsilon a(t) \leq \widehat{f}(\varepsilon, \lambda, t) \leq 2b(t), \quad ((\varepsilon, \lambda, t) \in]0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \tag{2}$$

o que mostra que $\widehat{H} \in \mathcal{E}_M[\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; (\mathbb{R}^*_+)^\ell]$, pois $0 < a(t) < b(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}^m$. Por outro lado, fixado $K \subset\subset \mathbb{R}^m$, sejam $a_0 = (a^0_1, \ldots, a^0_\ell)$ e b_0 em $(\mathbb{R}^*_+)^\ell$ tais que

$$a_0 < b_0, \quad a_0 \leq a(t) \quad \text{e} \quad 2b(t) \leq b_0, \qquad (t \in K)$$

o que junto com (2) implica

$$\widehat{f}(\varepsilon, \lambda, t) \in [\varepsilon a_0, b_0], \quad ((\varepsilon, \lambda, t) \in]0, 1] \times \mathbb{R}^n \times K) \tag{3}$$



e, portanto, é claro que $\widehat{f} \in \mathcal{E}_{M,\infty}[\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; (\mathbb{R}_+^*)^\ell]$. Assim, a condição (A) está verificada. Como cada componente de ν_* é um elemento de $\mathcal{E}_{QM}[\mathbb{R}_+^*]$, a afirmação (B) segue da proposição 3.2.5, usando as fórmulas seguintes:

$$\partial^\gamma \nu_{(s)}(y) = \sum_{i=1}^{\ell} \nu_i^{(\gamma_i)}(y_i) \quad \text{e} \quad \partial^\gamma \nu_{(\pi)}(y) = \prod_{i=1}^{\ell} \nu_i^{(\gamma_i)}(y_i)$$

para cada $y = (y_1, \ldots, y_\ell) \in (\mathbb{R}_+^*)^\ell$ e cada $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_\ell) \in \mathbb{N}^\ell$.

(C). Para cada $i = 1, \ldots, \ell$, da hipótese e da definição de $\widehat{f}_i$, segue que

$$\widehat{f}_i(\varepsilon, \cdot) \to \Delta_i \mathbb{Y}_{nm} + b_i \text{ em } (\mathbb{R}^*)^n \times \mathbb{R}^m \text{ quando } \varepsilon \downarrow 0$$

uma vez que $|\Delta_i(t)| > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}^m$. Portanto

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\nu_i \circ \widehat{f}_i\right)(\varepsilon, \cdot) = \begin{cases} \nu_i \circ a_i & \text{em } (\mathbb{R}_+^*)^n \times \mathbb{R}^m \\ \nu_i \circ b_i & \text{em } (\mathbb{R}_-^+)^n \times \mathbb{R}^m \end{cases} \tag{4}$$

donde segue a condição

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\nu \circ \widehat{f}\right)(\varepsilon, \cdot) = \begin{cases} \nu_\ell & \text{em } (\mathbb{R}_-^+)^n \times \mathbb{R}^m \\ \nu_r & \text{em } (\mathbb{R}_+^*)^n \times \mathbb{R}^m. \end{cases} \tag{5}$$

Por outro lado, como cada componente de ν_* é uma função crescente, de (2), vem

$$\left(\nu \circ \widehat{f}\right)(\varepsilon, \lambda, t) \in [\nu(\varepsilon a(t)), \nu(2b(t))], \quad ((\varepsilon, \lambda, t) \in]0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m). \tag{6}$$

Então, a função $\widehat{V}\colon (\varepsilon, \lambda, t) \in]0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \widehat{V}(\varepsilon, \lambda, t) \in \mathbb{R}$ definida por

$$\widehat{V}(\varepsilon, \lambda, t) := \frac{\left(\nu \circ \widehat{f}\right)(\varepsilon, \lambda, t) - \nu_\ell(t)}{\Delta\nu(t)}$$

verifica a condição seguinte

$$\left|\widehat{V}(\varepsilon, \lambda, t)\right| \leq -\frac{\nu(2b(t)) + \nu(b(t))}{\Delta\nu(t)}, \quad ((\varepsilon, \lambda, t) \in]0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m).$$

Sendo $\widehat{V}$ um representante de V, e sendo a função

$$t \in \mathbb{R}^m \mapsto -\frac{\nu(2b(t)) + \nu(b(t))}{\Delta\nu(t)} \in \mathbb{R}_+$$

de classe C^∞, segue que $V \in \mathcal{G}_{\ell b}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$. Finalmente, pela condição (5), temos que $\widehat{V}(\varepsilon, \cdot) \to \mathbb{Y}_{nm}$ em $(\mathbb{R}^*)^n \times \mathbb{R}^m$ quando $\varepsilon \downarrow 0$ e portanto $V \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

(D). Considerando a função $\mu : \varepsilon \in]0,1] \mapsto \nu(\varepsilon a_0) \in]\alpha, \nu(a_0)]$, afirmamos que a função $[\varepsilon \mapsto (\mu(\varepsilon) - \alpha)^{-1}] \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R})$, o que, em virtude da condição (3), implicará a validade da primeira asserção relativa à função $\nu \circ \widehat{f}$. Ora, no caso $\nu = \nu_{(s)}$, por hipótese, a asserção segue da condição $\nu_1(a_1^0\varepsilon) - \alpha_1 \leq \mu(\varepsilon) - \alpha$, $(\varepsilon \in]0,1])$. No caso $\nu = \nu_{(\pi)}$, usando a igualdade

$$\mu(\varepsilon) - \alpha = \sum_{\imath=1}^{\ell} \nu_1(a_1^0\varepsilon) \dots \nu_{\imath-1}(a_{\imath-1}^0\varepsilon)(\nu_\imath(a_\imath^0\varepsilon) - \alpha_\imath)\alpha_{\imath+1} \dots \alpha_\ell$$

temos a condição $(\nu_1(a_1^0\varepsilon) - \alpha_1)\alpha_2 \dots \alpha_\ell \leq \mu(\varepsilon) - \alpha$, $(\varepsilon \in]0,1])$; donde, como $\alpha_\imath > 0$, $(2 \leq \imath \leq \ell)$, segue a afirmação. Por outro lado, no caso $\nu = \nu_{(s)}$, da condição

$$(\nu_1 \circ \widehat{f}_1 - \alpha_1) \leq \nu \circ \widehat{f} - \alpha \quad \text{em} \quad]0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

segue que $(\nu_1 \circ f_1 - \alpha_1)(\nu \circ f - \alpha)^{-1} \in \mathcal{G}_{\ell b}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$; e no caso $\nu = \nu_{(\pi)}$ a asserção segue da condição

$$(\nu_1 \circ \widehat{f}_1 - \alpha_1)(\nu \circ \widehat{f} - \alpha)^{-1} \leq (\alpha_2 \dots \alpha_\ell)^{-1} \quad \text{em} \quad]0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m .$$

Finalmente, usando as condições (4) e (5) segue a última afirmação. □

3.3.4 Hipótese. (Para as proposições 3.3.5 e 3.3.6) São fixados (α, β) em $\mathbb{R}_+ \times \tilde{\mathbb{R}}_+$ com $\alpha < \beta$ e (a, b) em $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ com $a < b$. Sejam $\Delta := a - b$ e $\nu \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ uma função estritamente crescente tal que $\mathrm{Im}(\nu) = I_\alpha^\beta$. Sejam $\nu_r := \nu(a)$, $\nu_\ell := \nu(b)$, $\Delta\nu := \nu_r - \nu_\ell$ e $\theta := (\Delta\nu)^{-1}(\alpha - \nu_\ell)$.

Também a prova da proposição seguinte é, basicamente, a mesma daquela apresentada em [9] (Proposição 3.2.2) ou [11] (Prposição 4.1). Para comodidade do leitor, faremos a demosntração. O mesmo é um resultado auxiliar para a proposição 3.3.8.

3.3.5 Proposição. *Suponhamos verificada a hipótese 3.3.4. Se* $\nu^{-1} \in \mathcal{E}_{QM}[I_\alpha^\beta]$ *então para cada função* $\mu\colon]0,1] \to [1, \theta[$ *tal que satisfaz as duas condições seguintes*

(1) $$[\varepsilon \in]0,1] \mapsto (\Delta\nu\mu(\varepsilon) + \nu_\ell - \alpha)^{-1} \in \mathbb{R}] \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R})$$

(2) $$\nu(a\varepsilon) \leq \Delta\nu\mu(\varepsilon) + \nu_\ell, \qquad (\varepsilon \in]0,1])$$

unesp

existe uma função $\widehat{H} \in \mathcal{E}_M[\mathbb{R}^n]$ *verificando a propriedade* $(\mathcal{H}_r)^n$ *e as três condições seguintes*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\widehat{H}(\varepsilon,x)| \leq \frac{a\varepsilon - b}{\Delta}, \quad (\varepsilon \in]0,1]) \tag{3}$$

$$(\forall K \subset\subset (\mathbb{R}^*)^n)(\exists \eta \in]0,1]) \mid \sup_{(\varepsilon,x)\in]0,\eta[\times K} |\widehat{H}(\varepsilon,x)| < -\frac{b}{\Delta} \tag{4}$$

$$\widehat{H}(\varepsilon,\cdot) \equiv \mu^*(\varepsilon) \quad em \quad A_\varepsilon, \quad (\varepsilon \in]0,1]) \tag{5}$$

onde $\mu^*\colon \varepsilon \in]0,1] \mapsto \Delta^{-1}[\nu^{-1}(\Delta\nu\mu(\varepsilon) + \nu_\ell) - b] \in [1, -b\Delta^{-1}[$ *e*

$$A_\varepsilon := \bigcup_{i=1}^{n} \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| \leq \varepsilon \ \ e \ \ x_j \geq -\varepsilon, \ \ (j = 1,\ldots,n,\ j \neq i)\} \ .$$

Além disso, se H *é a classe de* $\widehat{H}$ *então,* $H \in \mathcal{H}_r(\mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{H}_\Lambda(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Seja $\widehat{V}$ uma função satisfazendo as propriedades descritas na proposição 2.2.20. Consideremos as funções

$$\widehat{H} := \Delta^{-1}[\nu^{-1} \circ (\Delta\nu\widehat{V} + \nu_\ell) - b] \quad \text{e} \quad \chi\colon \varepsilon \in]0,1] \mapsto \chi(\varepsilon) := (\Delta\nu\mu(\varepsilon) + \nu_\ell) \in]\alpha, \nu_r] \, .$$

Sendo $\Delta\nu < 0$, da condição (1) da proposição 2.2.20, vem

$$\chi(\varepsilon) \leq \Delta\nu\widehat{V}(\varepsilon,x) + \nu_\ell \leq \nu_\ell, \quad ((\varepsilon,x) \in]0,1] \times \mathbb{R}^n) \tag{6}$$

e, pela condição (1) acima, temos que $[\varepsilon \mapsto (\chi(\varepsilon) - \alpha)^{-1}] \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R}^n)$. Então, a função $\Delta\nu\widehat{V} + \nu_\ell \in \mathcal{E}_{M,\otimes}[\mathbb{R}^n; I_\alpha^\beta]$. Em conseqüência, se V é a classe de $\widehat{V}$, $\nu^{-1} \circ (\Delta\nu\widehat{V} + \nu_\ell)$ é um representante de $\nu^{-1} \circ (\Delta\nu V + \nu_\ell)$ e, portanto, a função $\widehat{H}$ é um representante de $H := \Delta^{-1}[\nu^{-1} \circ (\Delta\nu V + \nu_\ell) - b]$. Usando as condições (2) e (6) obtemos (3) e da condição (2) da proposição 2.2.20 segue (5). Por outro lado, se μ_* é uma função tal que o par $(\widehat{V}, \mu_*)$ satisfaz a propriedade $(\mathcal{H}_r)^n$ é claro que o par $(\widehat{H}, \mu_*)$ satisfaz também essa propriedade. Então, pelo lema 2.2.15(b), observando que $-b\Delta^{-1} > 1$, segue a condição (4). Finalmente, que $H \notin \mathcal{H}_\Lambda(\mathbb{R}^n)$ segue usando (5), por um raciocínio análogo ao que foi feito na parte final da prova da proposição 2.2.20. □

unesp

Para uma prova do resultado apresentado a seguir, ver [9] (Proposição 3.2.7) ou [11] (Prposição 4.4).

3.3.6 Proposição. *Suponhamos verificada a hipótese 3.3.4. Seja* $\widehat{H} \in \mathcal{E}_M[\mathbb{R}^n]$ *tal que* $(\widehat{H}, a, b, \Delta)$ *verifica a condição* (3) *da proposição 3.3.5 e seja* f *a classe de* $\Delta\widehat{H} + b$. *Se* $\nu \in \mathcal{E}_{QM}[\mathbb{R}^*_+]$ *então, para cada* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, *existe uma função estritamente crescente* $\varphi \in C^\infty_{QM}[\mathbb{R}^*_+]$ *tal que*

$$\frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial \lambda_j} = (\nu \circ f - \alpha) f^{-n} \frac{\partial f}{\partial \lambda_j}, \quad (1 \leq j \leq n).$$

Além disso, se $\widehat{H}(\varepsilon, \cdot) \to \mathbb{Y}_n$ *em* $(\mathbb{R}^*)^n$ *quando* $\varepsilon \downarrow 0$ *e se* $(\widehat{H}, b, \Delta)$ *verifica a condição* (4) *da proposição 3.3.5 então,* $(\varphi \circ f)|_{(\mathbb{R}^+_-)^n} \approx \varphi(b)$ *e* $(\varphi \circ f)|_{(\mathbb{R}^*_+)^n} \approx \varphi(a)$.

A seguir, apresentaremos um resultado que será de grande utilidade para resolver o sistema $(\tilde{S})$ considerado na Introdução deste trabalho. Para tanto, suporemos que os elementos a e b fixados na hipótese 3.3.1(A) são funções constantes. Mais precisamente, damos a hipótese seguinte.

3.3.7 Hipótese. (E notações para as proposições 3.3.8 e 3.3.12) São considerados dois elementos $a = (a_1, \ldots, a_\ell)$ e $b = (b_1, \ldots, b_\ell)$ em $\mathbb{R}^\ell$ tais que $0 < a < b$. Nessas condições, para cada $i = 1, \ldots, \ell$, definimos

$$\Delta_i := a_i - b_i.$$

Com as notações dadas em (A) e (B) da definição 3.3.2, para cada $\nu = \nu_{(s)}, \nu_{(\pi)}$ a terna $(\nu_r, \nu_\ell, \Delta\nu)$ definida em 3.3.2(C), tem suas componentes dadas por

$$\nu_r := \nu(a), \quad \nu_\ell := \nu(b) \quad \text{e} \quad \Delta\nu := \nu_r - \nu_\ell.$$

3.3.8 Proposição. *Suponhamos verificadas as hipóteses 3.3.1(B) e 3.3.7, e indiquemos com* (ν, α, β) *qualquer uma das ternas* $(\nu_{(s)}, \alpha_{(s)}, \beta_{(s)})$ *ou* $(\nu_{(\pi)}, \alpha_{(\pi)}, \beta_{(\pi)})$ *definidas nos itens* (A) *e* (B) *de 3.3.2. Suponhamos ainda que* $\nu_i \in \mathcal{E}_{QM}[\mathbb{R}^*_+]$ *e* $\nu_i^{-1} \in \mathcal{E}_{QM}[I^{\beta_i}_{\alpha_i}]$ *para cada* $i \in \mathbb{I}$ *e que* $\nu_j \equiv \alpha_j$ *em* $\mathbb{R}^*_+$ *para cada* $j \in \mathbb{J}$. *Então, existem* $H_1, \ldots, H_\ell$ *em* $\mathcal{H}_r(\mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{H}_\Lambda(\mathbb{R}^n)$ *verificando as seguintes propriedades*

(a) *Cada* H_i, $i = 1, \ldots, \ell$, *possui um representante* $\widehat{H}_i$ *tal que*

(1) $$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}^n} \left|\widehat{H}_i(\varepsilon, \lambda)\right| \leq \frac{a_i\varepsilon - b_i}{\Delta_i}, \qquad (\varepsilon \in]0, 1])$$

(2) $$(\forall K \subset\subset (\mathbb{R}^*)^n)\,(\exists \eta \in]0,1])\mid \sup_{(\varepsilon,\lambda)\in]0,\eta[\times K} \left|\widehat{H}_i(\varepsilon,\lambda)\right| < -\frac{b_i}{\Delta_i}.$$

(**b**) *Para cada* $H \in \mathcal{H}^n_\Lambda(\mathbb{R}^n)$ *e cada* $j = 1,\ldots,n$ *são válidas as seguintes relações, em* $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$

(3) $$[\nu \circ (\Delta_1 H_1 + b_1,\ldots,\Delta_\ell H_\ell + b_\ell) - \alpha]\frac{\partial H}{\partial \lambda_j} \approx 0$$

(4) $$[\nu \circ (\Delta_1 H_1 + b_1,\ldots,\Delta_\ell H_\ell + b_\ell) - \alpha]H\frac{\partial H}{\partial \lambda_j} \approx 0.$$

(**c**) *Para cada* $H \in \mathcal{H}_\Lambda(\mathbb{R}^n)$ *são válidas as seguintes relações, em* $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$

(5) $$[\nu \circ (\Delta_1 H_1 + b_1,\ldots,\Delta_\ell H_\ell + b_\ell) - \alpha]\partial^n_\lambda H \approx 0$$

(6) $$[\nu \circ (\Delta_1 H_1 + b_1,\ldots,\Delta_\ell H_\ell + b_\ell) - \alpha]H\partial^n_\lambda H \approx 0.$$

Demonstração. Fixado $j \in \mathbb{J}$, como

$$-\frac{b_j}{\Delta_j} > 1 \qquad \text{e} \qquad \mu_j(\varepsilon) := \frac{a_j\varepsilon - b_j}{\Delta_j} \geq 1\,, \quad (\varepsilon \in]0,1])$$

pela proposição 2.2.20 e pelo lema 2.2.15(b), existe $H_j \in \mathcal{H}_r(\mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{H}_\Lambda(\mathbb{R}^n)$ tendo um representante $\widehat{H}_j$ verificando as condições da afirmação (a). Por outro lado, como cada ν_i, $i \in \mathbb{I}$, é uma função estritamente crescente, com imagem $I^{\beta_i}_{\alpha_i}$, podemos escolher um $\eta \in]0,1]$ tal que

$$\nu_i(a_i)\varepsilon + \nu_i(a_i\varepsilon) \leq \nu_i(a_i)\,, \quad (0 < \varepsilon < \eta)\,.$$

Fixado $i \in \mathbb{I}$, considerando $\Delta\nu_i := \nu_i(a_i) - \nu_i(b_i)$, $\theta_i := (\Delta\nu_i)^{-1}[\alpha_i - \nu_i(b)]$ e a função μ_i de $]0,1]$ em $[1,\theta_i[$ definida por

$$\mu_i(\varepsilon) := \begin{cases} (\Delta\nu_i)^{-1}[\nu_i(a_i)\varepsilon + \nu_i(a_i\varepsilon) - \nu_i(b_i)], & \text{para } \varepsilon \in]0,\eta[\\ 1, & \text{para } \varepsilon \in [\eta,1] \end{cases}$$

temos $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mu_i(\varepsilon) = \theta_i$ e $\nu_i(a_i\varepsilon) \leq \Delta\nu_i\mu_i(\varepsilon) + \nu_i(b)$ para cada $\varepsilon \in]0,1]$. Além disso, como

$$\Delta\nu_i\mu_i(\varepsilon) + \nu_i(b) - \alpha_i = \nu_i(a_i)\varepsilon + \nu_i(a_i\varepsilon) - \alpha_i \geq \nu_i(a_i)\varepsilon\,, \quad (\varepsilon \in]0,1])$$

unesp

temos também que $[\varepsilon \mapsto (\Delta\nu_i\mu_i(\varepsilon) + \nu_i(b) - \alpha_i)^{-1}] \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R})$. Então, como ν_i^{-1} é um elemento de $\mathcal{E}_{QM}[I_{\alpha_i}^{\beta_i}]$, pela proposição 3.3.5, existe $H_i \in \mathcal{H}_r(\mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{H}_\Lambda(\mathbb{R}^n)$ tendo um representante $\widehat{H}_i$ satisfazendo as condições da afirmação (a) e tal que

$$\widehat{H}_i(\varepsilon, \cdot) \equiv \mu_i^*(\varepsilon) \quad \text{em} \quad A_\varepsilon\,, \quad (\varepsilon \in]0,1]) \tag{5}$$

onde $\mu_i^* : \varepsilon \in]0,1] \mapsto \Delta_i^{-1}[\nu_i^{-1}(\Delta\nu_i\mu_i(\varepsilon) + \nu_i(b_i)) - b_i] \in [1, -b_i\Delta_i^{-1}[$ e

$$A_\varepsilon := \bigcup_{k=1}^{n} \{\lambda \in \mathbb{R}^n \mid |\lambda_k| \leq \varepsilon \text{ e } \lambda_r \geq -\varepsilon,\ (r = 1, \ldots, n,\ r \neq k)\}\,.$$

Como cada componente de ν_* é um elemento de $\mathcal{E}_{QM}[\mathbb{R}_+^*]$, pela condição (1) e pela proposição 3.3.3(B) a função $\nu \circ (\Delta_1\widehat{H}_1 + b_1, \ldots, \Delta_\ell\widehat{H}_\ell + b_\ell)$ é um representante de $\nu \circ (\Delta_1 H_1 + b_1, \ldots, \Delta_\ell H_\ell + b_\ell)$. Se

$$\widehat{f} := \nu \circ \left(\Delta_1\widehat{H}_1 + b_1, \ldots, \Delta_\ell\widehat{H}_\ell + b_\ell\right)$$

como $\nu_j \equiv \alpha_j$ em $\mathbb{R}_+^*$ para cada $j \in \mathbb{J}$, temos as seguintes fórmulas

$$\nu_{(s)} \circ \widehat{f} = \sum_{i \in \mathbb{I}} \nu_i \circ \left(\Delta_i\widehat{H}_i + b_i\right) + \sum_{j \in \mathbb{J}} \alpha_j \tag{6}$$

$$\nu_{(\pi)} \circ \widehat{f} = \prod_{i \in \mathbb{I}} \left[\nu_i \circ \left(\Delta_i\widehat{H}_i + b_i\right)\right] \prod_{j \in \mathbb{J}} \alpha_j\,. \tag{7}$$

Da condição (5) vem as identidades seguintes

$$\left[\nu_i \circ \left(\Delta_i\widehat{H}_i\right) + b_i\right](\varepsilon, \cdot) \equiv \Delta\nu_i\mu_i(\varepsilon) + \nu_i(b_i) \text{ em } A_\varepsilon\,, \quad (\varepsilon \in]0,1]\,,\ i \in \mathbb{I})\,. \tag{8}$$

Se $\mu_{(s)} :]0,1] \to [\alpha_{(s)}, \nu_{(s)}(a)[$ é a função definida por

$$\mu_{(s)}(\varepsilon) := \sum_{i \in \mathbb{I}} [\Delta\nu_i\mu_i(\varepsilon) + \nu_i(b_i)] + \sum_{j \in \mathbb{J}} \alpha_j\,, \quad (\varepsilon \in]0,1])$$

das fórmulas (6) e (8) vem

$$\left(\nu_{(s)} \circ \widehat{f}\right)(\varepsilon, \cdot) \equiv \mu_{(s)}(\varepsilon) \text{ em } A_\varepsilon\,, \quad (\varepsilon \in]0,1]) \tag{9}$$

e como $\mu_i(\varepsilon) \to \theta_i$ quando $\varepsilon \downarrow 0$, para cada $i \in \mathbb{I}$, temos que $\mu_{(s)}(\varepsilon) \to \alpha_{(s)}$ quando $\varepsilon \downarrow 0$. De modo análogo, se $\mu_{(\pi)} :]0,1] \to [\alpha_{(\pi)}, \nu_{(\pi)}(a)[$ é a função definida por

$$\mu_{(\pi)}(\varepsilon) := \prod_{i \in \mathbb{I}} [\Delta\nu_i\mu_i(\varepsilon) + \nu_i(b_i)] \prod_{j \in \mathbb{J}} \alpha_j\,, \quad (\varepsilon \in]0,1])$$



temos que $\mu_{(\pi)}(\varepsilon) \to \alpha_{(\pi)}$ quando $\varepsilon \downarrow 0$ e, das fórmulas (7) e (8) temos que

$$\left(\nu_{(\pi)} \circ \widehat{f}\right)(\varepsilon, \cdot) \equiv \mu_{(\pi)}(\varepsilon) \text{ em } A_\varepsilon\,, \quad (\varepsilon \in]0,1])\,. \tag{10}$$

No que se segue, indicaremos por μ qualquer uma das funções $\mu_{(s)}$ ou $\mu_{(\pi)}$. Temos então que $\mu(\varepsilon) \to \alpha$ quando $\varepsilon \downarrow 0$ e, por (9) e (10), temos que

$$\left(\nu \circ \widehat{f}\right)(\varepsilon, \cdot) \equiv \mu(\varepsilon) \text{ em } A_\varepsilon\,, \quad (\varepsilon \in]0,1])\,. \tag{11}$$

(**b**). Agora, passaremos a verificar as fórmulas descritas em (3) e (4). Fixada $\phi \in \Lambda(1)$, seja H a classe da função $\widehat{H}\colon]0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$\widehat{H}(\varepsilon, \lambda) := \widehat{K}(\varepsilon, \lambda_1) \cdots \widehat{K}(\varepsilon, \lambda_n)\,, \quad ((\varepsilon, \lambda) \in]0,1] \times \mathbb{R}^n\,,\ \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n))$$

onde (ver proposição 2.2.17 e observação 2.2.19)

$$\widehat{K} = \widehat{K}_\phi\colon (\varepsilon, s) \in]0,1] \times \mathbb{R} \mapsto \int_{-\varepsilon}^{s} \widehat{\delta}(\varepsilon, t)dt \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \widehat{\delta}\colon (\varepsilon, t) \mapsto \varepsilon^{-1}\phi(\varepsilon^{-1}t)\,.$$

Para mostrar que a função H verifica as relações (3) e (4), serão usadas a fórmula (11) e a condição $\mu(\varepsilon) \to \alpha$ quando $\varepsilon \downarrow 0$. Por comodidade e por simplicidade de notações, trabalharemos com a função $\frac{\partial H}{\partial \lambda_1}$. Para termos (3), fixada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ basta ver que $I(\varepsilon) \to 0$ quando $\varepsilon \downarrow 0$, onde

$$I(\varepsilon) := \int_{\mathbb{R}^n} \left[\left(\nu \circ \widehat{f}\right)(\varepsilon, \lambda) - \alpha\right] \frac{\partial \widehat{H}}{\partial \lambda_1}(\varepsilon, \lambda)\varphi(\lambda)d\lambda\,, \quad (\varepsilon \in]0,1])\,.$$

Como $\frac{\partial \widehat{H}}{\partial \lambda_1}(\varepsilon, \lambda) = \widehat{\delta}(\varepsilon, \lambda_1)\widehat{K}(\varepsilon, \lambda_2) \cdots \widehat{K}(\varepsilon, \lambda_n)$ e

$$\text{supp}\left[\frac{\partial \widehat{H}}{\partial \lambda_1}(\varepsilon, \cdot)\right] \subset \{\lambda \in \mathbb{R}^n \mid |\lambda_1| \leq \varepsilon \text{ e } \lambda_k \geq -\varepsilon\,, \text{ para algum } k = 2, \ldots, n\} \subset A_\varepsilon$$

pela condição (11) temos

$$I(\varepsilon) = [\mu(\varepsilon) - \alpha] \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \widehat{\delta}(\varepsilon, \lambda_1)u(\varepsilon, \lambda_1)d\lambda_1$$

onde $u\colon (\varepsilon, \lambda_1) \in]0,1] \times \mathbb{R} \mapsto u(\varepsilon, \lambda_1) \in \mathbb{R}$ é a função definida por

$$u(\varepsilon, \lambda_1) := \int_{-\varepsilon}^{+\infty} \cdots \int_{-\varepsilon}^{+\infty} \widehat{K}(\varepsilon, \lambda_2) \cdots \widehat{K}(\varepsilon, \lambda_n)\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)d\lambda_2 \cdots d\lambda_n\,.$$

unesp

Escolhendo $C > 0$ tal que $|u(\varepsilon, \lambda_1)| \leq C$ para todo $(\varepsilon, \lambda_1) \in]0,1] \times \mathbb{R}$ (ver proposição 2.2.17, para o caso $n = 1$), temos

$$|I(\varepsilon)| \leq C|\mu(\varepsilon) - \alpha| \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \widehat{\delta}(\varepsilon, \lambda_1) d\lambda_1 = C|\mu(\varepsilon) - \alpha|\,, \quad (\varepsilon \in]0,1])$$

donde segue que $I(\varepsilon) \to 0$ quando $\varepsilon \downarrow 0$. De modo análogo, para termos (4), fixada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ basta verificar que $J(\varepsilon) \to 0$ quando $\varepsilon \downarrow 0$, onde

$$J(\varepsilon) := \int_{\mathbb{R}^n} \left[\left(\nu \circ \widehat{f} \right)(\varepsilon, \lambda) - \alpha \right] \widehat{H}(\varepsilon, \lambda) \frac{\partial \widehat{H}}{\partial \lambda_1}(\varepsilon, \lambda) \varphi(\lambda) d\lambda\,, \quad (\varepsilon \in]0,1])\,.$$

Como $\left(\widehat{H} \frac{\partial \widehat{H}}{\partial \lambda_1} \right)(\varepsilon, \lambda) = (\widehat{\delta} K)(\varepsilon, \lambda_1) \widehat{K}^2(\varepsilon, \lambda_2) \cdots \widehat{K}^2(\varepsilon, \lambda_n)$ e

$$\operatorname{supp} \left[\left(\widehat{H} \frac{\partial \widehat{H}}{\partial \lambda_1} \right)(\varepsilon, \cdot) \right] \subset B_\varepsilon \subset A_\varepsilon$$

onde $B_\varepsilon := \{\lambda \in \mathbb{R}^n \mid |\lambda_1| \leq \varepsilon \text{ e } \lambda_k \geq -\varepsilon, \text{ para algum } k = 2, \ldots, n\}$, da condição (11) vem

$$J(\varepsilon) = [\mu(\varepsilon) - \alpha] \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \widehat{\delta}(\varepsilon, \lambda_1) v(\varepsilon, \lambda_1) d\lambda_1 \tag{12}$$

onde $v\colon (\varepsilon, \lambda_1) \in]0,1] \times \mathbb{R} \mapsto v(\varepsilon, \lambda_1) \in \mathbb{R}$ é a função definida por

$$v(\varepsilon, \lambda_1) := \widehat{K}(\varepsilon, \lambda_1) \int_{-\varepsilon}^{+\infty} \cdots \int_{-\varepsilon}^{+\infty} \widehat{K}^2(\varepsilon, \lambda_2) \cdots \widehat{K}^2(\varepsilon, \lambda_n) \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) d\lambda_2 \cdots d\lambda_n\,.$$

Sendo válida a desigualdade seguinte (ver proposição 2.2.17, para o caso $n = 1$)

$$|v(\varepsilon, \lambda_1)| \leq \int_{-\varepsilon}^{+\infty} \cdots \int_{-\varepsilon}^{+\infty} |\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)|\, d\lambda_2 \cdots d\lambda_n\,, \quad ((\varepsilon, \lambda_1) \in]0,1] \times \mathbb{R})$$

da fórmula (12) segue que $J(\varepsilon) \to 0$ quando $\varepsilon \downarrow 0$.

(c). A verificação das fórmulas (5) e (6) é análoga às das relações (3) e (4). De fato, fixada $\phi \in \Lambda(n)$, seja H a classe da função $\widehat{H} = \widehat{H}_\phi\colon]0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$\widehat{H}(\varepsilon, \lambda) := \int_{-\infty}^{\lambda_1} \cdots \int_{-\infty}^{\lambda_n} \widehat{\delta}(\varepsilon, t) dt\,, \quad ((\varepsilon, \lambda) \in]0,1] \times \mathbb{R}^n\,,\ \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n))$$

onde $t = (t_1, \ldots, t_n)$, $dt := dt_1 \cdots dt_n$ e $\widehat{\delta}\colon (\varepsilon, t) \mapsto \varepsilon^{-n} \phi(\varepsilon^{-n} t)$. Para termos (5), fixada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ devemos verificar que $I_\varphi(\varepsilon) \to 0$ quando $\varepsilon \downarrow 0$, onde

$$I_\varphi(\varepsilon) := \int_{\mathbb{R}^n} \left[\left(\nu \circ \widehat{f} \right)(\varepsilon, \lambda) - \alpha \right] \partial_\lambda^n \widehat{H}(\varepsilon, \lambda) \varphi(\lambda) d\lambda\,, \quad (\varepsilon \in]0,1])\,.$$



Como $(\partial_\lambda^n \widehat{H})(\varepsilon,\lambda) = \widehat{\delta}(\varepsilon,\lambda)$ e $\mathrm{supp}[\partial_\lambda^n \widehat{H}(\varepsilon,\cdot)] \subset B_\varepsilon[0] \subset A_\varepsilon$ pela condição (11) temos que

$$I_\varphi(\varepsilon) = [\mu(\varepsilon) - \alpha] \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\delta}(\varepsilon,\lambda)\varphi(\lambda)d\lambda = [\mu(\varepsilon) - \alpha] \left\langle \widehat{\delta}(\varepsilon,\cdot), \varphi \right\rangle , \quad (\varepsilon \in]0,1]) .$$

Donde, como $\mu(\varepsilon) \to \alpha$ e $\left\langle \widehat{\delta}(\varepsilon,\cdot), \varphi \right\rangle \to \varphi(0)$ segue que $I_\varphi(\varepsilon) \to 0$, quando $\varepsilon \downarrow 0$. De modo análogo, para termos (6), devemos verificar que $J_\varphi(\varepsilon) \to 0$ quando $\varepsilon \downarrow 0$, onde

$$J_\varphi(\varepsilon) := \int_{\mathbb{R}^n} \left[\left(\nu \circ \widehat{f} \right)(\varepsilon,\lambda) - \alpha \right] \widehat{H}(\varepsilon,\lambda)\partial_\lambda^n \widehat{H}(\varepsilon,\lambda)\varphi(\lambda)d\lambda , \quad (\varepsilon \in]0,1]) .$$

Como $(\widehat{H}\partial_\lambda^n \widehat{H})(\varepsilon,\lambda) = (\widehat{H}\widehat{\delta})(\varepsilon,\lambda)$ e $\mathrm{supp}[(\widehat{H}\partial_\lambda^n \widehat{H})(\varepsilon,\cdot)] \subset B_\varepsilon[0] \subset A_\varepsilon$ da condição (11) vem

$$J_\varphi(\varepsilon) = [\mu(\varepsilon) - \alpha] \int_{B_\varepsilon[0]} \widehat{\delta}(\varepsilon,\lambda)w(\varepsilon,\lambda)d\lambda , \quad (\varepsilon \in]0,1])$$

onde $w\colon (\varepsilon,\lambda) \in]0,1] \times \mathbb{R}^n \mapsto w(\varepsilon,\lambda) := \widehat{H}(\varepsilon,\lambda)\varphi(\lambda) \in \mathbb{R}$. Escolhendo $C > 0$ de tal modo que $|w(\varepsilon,\lambda)| \leq C$ para todo $(\varepsilon,\lambda) \in]0,1] \times \mathbb{R}^n$ (ver proposição 2.2.17), temos

$$|J_\varphi(\varepsilon)| \leq C|\mu(\varepsilon) - \alpha| \int_{B_\varepsilon[0]} \widehat{\delta}(\varepsilon,\lambda)d\lambda = C|\mu(\varepsilon) - \alpha| , \ (\varepsilon \in]0,1])$$

donde segue que $J_\varphi(\varepsilon) \to 0$ quando $\varepsilon \downarrow 0$. □

A seguir, apresentamos um lema auxiliar à proposição 3.3.11.

3.3.9 Lema. *Dados $\theta > 0$, (α,β) em $\tilde{\mathbb{R}}_+^* \times \tilde{\mathbb{R}}_+^*$ com $\alpha < \beta$ e $\nu \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ com $\mathrm{Im}(\nu) =]\alpha,\beta[$ consideremos a função*

$$\varphi\colon y \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \varphi(y) := \int_\theta^y [\nu(s) - \alpha]\, s^{-2} ds \in \mathbb{R}.$$

Se ν é uma função estritamente crescente e $\nu \in \mathcal{E}_{QM}[\mathbb{R}_+^*]$ então, φ é estritamente crescente, $\varphi \in C_{QM}^\infty[\mathbb{R}_+^*]$ e ela verifica a condição

(1)
$$\left| \begin{array}{l} |\varphi(y)| \leq [\nu(\theta) - \alpha] \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{\theta} \right), \quad se\ y < \theta \\ |\varphi(y)| \leq [\nu(y) - \alpha] \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{y} \right), \quad se\ y \geq \theta. \end{array} \right.$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Demonstração. Em virtude das seguintes condições

$$\varphi'(y) = (\nu(y) - \alpha)\, y^{-2} \quad \text{e} \quad \nu(y) > \alpha, \quad (y > 0)$$

segue que φ é uma função estritamente crescente e, portanto, ela verifica a propriedade

(2) | para cada $(A, B) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, $A < B$, e cada $y \in [A, B]$ temos $|\varphi(y)| \leq |\varphi(A)|$ ou $|\varphi(y)| \leq |\varphi(B)|$.

De fato, se $y \geq \theta$ temos $|\varphi(y)| = \varphi(y) \leq \varphi(B)$. E se $y < \theta$ temos $\varphi(A) \leq \varphi(y) < 0$; donde $|\varphi(y)| \leq |\varphi(A)|$.

Para termos $\varphi \in \mathcal{E}_{QM}[\mathbb{R}_+^*]$ (ver definição 3.2.2(a)), fixados (p, a, b) em $\mathbb{N} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, $a < b$, e uma função μ de $]0, 1]$ em $]0, a]$ tal que $[\varepsilon \mapsto \mu(\varepsilon)^{-1}] \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, devemos achar constantes $N \in \mathbb{N}$, $C > 0$ e $\eta \in]0, 1]$ verificando

$$\sup_{y \in [\mu(\varepsilon), b]} |\varphi^{(p)}(y)| \leq C\varepsilon^{-N}, \quad (0 < \varepsilon < \eta). \tag{3}$$

De fato, como $\nu \in \mathcal{E}_{QM}[\mathbb{R}_+^*]$ e

$$\varphi^{(p)} = \sum_{q=0}^{p-1} C_q^p (\nu - \alpha)^{(q)}(y) y^{q-p-n+1}, \quad (y > 0,\, p \geq 1),$$

onde

$$C_q^p := (-1)^{p-q-1} n(n+1)\ldots(n+p-q-2) \begin{pmatrix} p-1 \\ q \end{pmatrix}$$

basta verificar (3) no caso $p = 0$. Para $b' := \theta \vee b$, sejam $N \in \mathbb{N}$, $C > 0$ e $\eta \in]0, 1]$ tais que

$$\sup_{s \in [\mu(\varepsilon), b']} |\nu(s) - \alpha| \leq C\varepsilon^{-N}, \quad (0 < \varepsilon < \eta). \tag{4}$$

Fixados $\varepsilon \in]0, 1]$ e $y \in [\mu(\varepsilon), b]$, por (2), temos $|\varphi(y)| \leq |\varphi(b)|$ ou $|\varphi(y)| \leq |\varphi(\mu(\varepsilon))|$. No último caso, usando a condição (4), segue que

$$|\varphi(y)| \leq C\varepsilon^{-N} \left| \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\mu(\varepsilon)} \right|, \quad (0 < \varepsilon < \eta, \quad y > 0)$$

o que junto com a condição $[\varepsilon \mapsto \mu(\varepsilon)^{-1}] \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R})$ implica a afirmação (3).

unesp

Para verificar as desigualdades dadas em (1), seja $y \in \mathbb{R}_+^*$ fixado. Se $y < \theta$ temos

$$\varphi(y) = \int_\theta^y [\nu(s) - \alpha]\, s^{-2} ds = \int_y^\theta [\alpha - \nu(s)]\, s^{-2} ds$$

donde, sendo $\nu(s) > \alpha$ para $s > 0$, vem

$$|\varphi(y)| \leq \int_y^\theta |\alpha - \nu(s)| s^{-2} ds = \int_y^\theta [\nu(s) - \alpha]\, s^{-2} ds$$

e portanto, como $\nu(s) \leq \nu(\theta)$ para $s \in [y, \theta]$, temos

$$|\varphi(y)| \leq [\nu(\theta) - \alpha] \int_y^\theta s^{-2} ds = [\nu(\theta) - \alpha] \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{\theta}\right)$$

o que verifica a primeira condição em (1). Por outro lado, se $y \geq \theta$ temos

$$|\varphi(y)| = \varphi(y) = \int_\theta^y [\nu(s) - \alpha]\, s^{-2} ds$$

e daí, sendo $\alpha(s) \leq \nu(y)$ para $s \in [\theta, y]$, vem

$$|\varphi(y)| \leq [\nu(y) - \alpha] \int_\theta^y s^{-2} ds = [\nu(y) - \alpha] \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{y}\right)$$

o que verifica a outra desigualdade em (1). □

3.3.10 Hipótese. (Para a proposição 3.3.11) Vamos supor que estejam fixados todos os elementos (e notações) descritos nos itens (a), (b) e (c) dados a seguir.

(a) Fixamos um par de elementos (α, β) em $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ com $\alpha < \beta$ e uma função $\nu \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ com $\mathrm{Im}(\nu) =]\alpha, \beta[$.

(b) Para cada $\tau = \rho, u$ serão considerados

- uma função (τ_r, τ_ℓ) em $C^\infty(\mathbb{R}^m) \times C^\infty(\mathbb{R}^m)$ tal que

$$0 < \tau_r(t) < \tau_\ell(t), \quad (t \in \mathbb{R}^m)$$

- a função $\Delta\tau \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ definida por $\Delta\tau := \tau_r - \tau_\ell$
- uma função $\widehat{H}_\tau \in \mathcal{E}_M[\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m]$ satisfazendo as duas seguintes condições

(1) $$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}^n} |\widehat{H}_\tau(\varepsilon, \lambda, t)| \leq \frac{\tau_r(t)\varepsilon - \tau_\ell(t)}{\Delta\tau(t)}, \quad ((\varepsilon, t) \in]0, 1] \times \mathbb{R}^m)$$

(2) $$\widehat{H}_\tau(\varepsilon, \cdot) \to \mathbb{Y}_{nm} \text{ em } (\mathbb{R}^*)^n \times \mathbb{R}^m \text{ quando } \varepsilon \downarrow 0$$

- a função generalizada τ_* como sendo a classe em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ da função

$$\widehat{\tau}_* := \Delta\tau \widehat{H}_\tau + \tau_\ell. \tag{3}$$

O resultado seguinte será de grande utilidade para o estudo da não resolubilidade de sistemas de equações diferenciais parciais no capítulo 4 (ver seção 4.5).

3.3.11 Proposição. *Suponhamos verificada a hipótese 3.3.10. Se ν é uma função estritamente crescente e $\nu \in \mathcal{E}_{QM}[\mathbb{R}^*_+]$ então, existe uma função estritamente crescente $\varphi \in C^\infty_{QM}[\mathbb{R}^*_+]$ satisfazendo as seguintes condições*

$$\frac{\partial(\varphi \circ \rho_*)}{\partial \lambda_j} = (\nu \circ \rho_* - \alpha)(\rho_*)^{-2} \frac{\partial \rho_*}{\partial \lambda_j}, \quad (1 \leq j \leq n) \tag{1}$$

$$\nabla_t(\varphi \circ \rho_*) = (\nu \circ \rho_* - \alpha)(\rho_*)^{-2} \nabla_t \rho_* \tag{2}$$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} [\widehat{\rho}_*(\varphi \circ \widehat{\rho}_*)](\varepsilon, \cdot) = (\Delta\rho \mathbb{Y}_{nm} + \rho_\ell)[\varphi \circ (\Delta \mathbb{Y}_{nm} + \rho_\ell)] \quad \text{em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \tag{3}$$

$$\left| \begin{array}{l} [(u_* - c)\rho_*(\varphi \circ \rho_*)]\,|_{(\mathbb{R}^+_-)^n \times \mathbb{R}^m} \approx \rho_\ell(u_\ell - c)(\varphi \circ \rho_\ell) \\ [(u_* - c)\rho_*(\varphi \circ \rho_*)]\,|_{(\mathbb{R}^*_+)^n \times \mathbb{R}^m} \approx \rho_r(u_r - c)(\varphi \circ \rho_r) \end{array} \right. \tag{4}$$

para todo $c \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$. Em particular, se c, (ρ_r, ρ_ℓ) e (u_r, u_ℓ) são funções constantes temos

$$\nabla_t [\rho_*(\varphi \circ \rho_*)] \approx 0 \tag{5}$$

$$\left| \begin{array}{l} [(u_* - c)\rho_*(\varphi \circ \rho_*)]\,|_{(\mathbb{R}^+_-)^n \times \mathbb{R}^m} \approx \rho_\ell(u_\ell - c)\varphi(\rho_\ell) \\ [(u_* - c)\rho_*(\varphi \circ \rho_*)]\,|_{(\mathbb{R}^*_+)^n \times \mathbb{R}^m} \approx \rho_r(u_r - c)\varphi(\rho_r). \end{array} \right. \tag{6}$$

Demonstração. Fixemos um $\theta > 0$ qualquer. Pelo lema 3.3.9 a função

$$\varphi\colon y \in \mathbb{R}^*_+ \mapsto \varphi(y) := \int_\theta^y [\nu(s) - \alpha]\, s^{-2} ds \in \mathbb{R}$$

é estritamente crescente, $\varphi \in C^\infty_{QM}[\mathbb{R}^*_+]$ e satisfaz as desigualdades descritas em (1) do referido lema. Da condição (1) da hipótese 3.3.10 e da definição de $\widehat{\tau}_*$, $\tau = \rho, u$ (ver fórmula (3) em 3.3.10), resulta que

$$\widehat{\tau}_*(\varepsilon, \lambda, t) \in [\varepsilon\tau_r(t), 2\tau_\ell(t)], \quad ((\varepsilon, \lambda, t) \in]0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m).$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Fixado $K \subset\subset \mathbb{R}^m$, para cada $\tau = \rho, u$, sejam $A_\tau > 0$ e $B_\tau > 0$ tais que

$$A_\tau \leq \tau_r(t) \text{ e } 2\tau_\ell(t) \leq B_\tau, \quad (t \in K).$$

Das condições acima vem

$$(7) \qquad \widehat{\tau}_*(\varepsilon, \lambda, t) \in [A_\tau \varepsilon, B_\tau], \quad ((\varepsilon, \lambda, t) \in]0,1] \times \mathbb{R}^n \times K, \tau = \rho, u).$$

Essa condição mostra que $\widehat{\rho}_* \in \mathcal{E}_{M,\otimes}[\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^*_+]$ (ver 3.2.1(b)). Pela proposição 3.2.7, ρ_* tem um inverso multiplicativo em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ e $(\widehat{\rho}_*)^{-1}$ é um representante de ρ_*^{-1}. Pela definição 3.2.4, as funções $\nu \circ \widehat{\rho}_*$, $\varphi \circ \widehat{\rho}_*$ e $\varphi' \circ \widehat{\rho}_*$ são representantes de $\nu \circ \rho_*$, $\varphi \circ \rho_*$ e $\varphi' \circ \rho_*$, respectivamente. Por outro lado, pela regra da cadeia temos

$$(8) \qquad \left| \begin{array}{l} (\varphi \circ \rho_*)_{\lambda_j} = (\varphi' \circ \rho_*)(\rho_*)_{\lambda_j}, \quad (j = 1, \ldots, n) \\ (\varphi \circ \rho_*)_{t_i} = (\varphi' \circ \rho_*)(\rho_*)_{t_i}, \quad (i = 1, \ldots, m). \end{array} \right.$$

Da condição $\varphi'(y) = [\nu(y) - \alpha]y^{-2}$ segue que $\varphi' \circ \widehat{\rho}_* = (\nu \circ \widehat{\rho}_* - \alpha)(\widehat{\rho}_*)^{-2}$ e portanto

$$\varphi' \circ \rho_* = (\nu \circ \rho_* - \alpha)(\rho_*)^{-2}$$

o que junto com as fórmulas dadas em (8) implica as igualdades requeridas em (1) e (2).

Verificação das condições (3), (4) **e** (5). Inicialmente, afirmamos que

$$(9) \qquad \rho_*(\varphi \circ \rho_*), \ (u_* - c)\rho_*(\varphi \circ \rho_*) \in \mathcal{G}_{\ell b}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m).$$

De fato, usando as condições descritas em (1) do lema 3.3.9, temos

$$|y\varphi(y)| \leq [\nu(\theta) - \alpha]\left(1 - \frac{y}{\theta}\right), \qquad \text{se } y < \theta$$

$$|y\varphi(y)| \leq [\nu(y) - \alpha]\left(\frac{y}{\theta} - 1\right), \qquad \text{se } y \geq \theta.$$

Assim, para cada $(\varepsilon, \lambda, t) \in]0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, valem

$$|[\widehat{\rho}_*(\varphi \circ \widehat{\rho}_*)](\varepsilon, \lambda, t)| \leq [\nu(\theta) - \alpha]\left(1 - \frac{\widehat{\rho}_*(\varepsilon, \lambda, t)}{\theta}\right), \qquad \text{se } \widehat{\rho}_*(\varepsilon, \lambda, t) < \theta$$

$$|[\widehat{\rho}_*(\varphi \circ \widehat{\rho}_*)](\varepsilon, \lambda, t)| \leq [(\nu \circ \widehat{\rho}_*)(\varepsilon, \lambda, t) - \alpha]\left(\frac{\widehat{\rho}_*(\varepsilon, \lambda, t)}{\theta} - 1\right), \quad \text{se } \widehat{\rho}_*(\varepsilon, \lambda, t) \geq \theta$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

donde, usando a condição (7), segue

$$|[\widehat{\rho}_*(\varphi \circ \widehat{\rho}_*)]\,(\varepsilon,\lambda,t)| \le [\nu(\theta)-\alpha]\left(1-\frac{\widehat{\rho}_*(\varepsilon,\lambda,t)}{\theta}\right), \qquad \text{se } \widehat{\rho}_*(\varepsilon,\lambda,t)<\theta$$

$$|[\widehat{\rho}_*(\varphi \circ \widehat{\rho}_*)]\,(\varepsilon,\lambda,t)| \le [\nu(B_\rho)-\alpha]\left(\frac{\widehat{\rho}_*(\varepsilon,\lambda,t)}{\theta}-1\right), \qquad \text{se } \widehat{\rho}_*(\varepsilon,\lambda,t)\ge\theta$$

para cada $(\varepsilon,\lambda,t)\in]0,1]\times\mathbb{R}^n\times K$. Da primeira desigualdade vem

$$|\,[\widehat{\rho}_*(\varphi \circ \widehat{\rho}_*)]\,(\varepsilon,\lambda,t)| \le [\nu(\theta)-\alpha]\,, \text{ se } \widehat{\rho}_*(\varepsilon,\lambda,t)<\theta$$

e da segunda desigualdade, usando (7), segue

$$|\,[\widehat{\rho}_*(\varphi \circ \widehat{\rho}_*)]\,(\varepsilon,\lambda,t)| \le [\nu(B_\rho)-\alpha]\left(\frac{B_\rho}{\theta}-1\right), \text{ se } \widehat{\rho}_*(\varepsilon,\lambda,t)\ge\theta$$

para cada $(\varepsilon,\lambda,t)\in]0,1]\times\mathbb{R}^n\times K$. Assim, se

$$M := [\nu(\theta)-\alpha]\vee\left\{[\nu(B_\rho)-\alpha]\left(\frac{B_\rho}{\theta}-1\right)\right\}$$

temos

$$\sup_{(\lambda,t)\in\mathbb{R}^n\times K}|[\widehat{\rho}_*(\varphi \circ \widehat{\rho}_*)]\,(\varepsilon,\lambda,t)| \le M, \quad (0<\varepsilon\le 1),$$

o que junto com a condição (7) implica

$$\sup_{(\lambda,t)\in\mathbb{R}^n\times K}|[(\widehat{u}_*-c)\widehat{\rho}_*(\varphi \circ \widehat{\rho}_*)]\,(\varepsilon,\lambda,t)| \le M(B_u+B_c), \quad (0<\varepsilon\le 1),$$

onde $B_c>0$ é tal que

$$\sup_{t\in K}|c(t)|\le B_c.$$

Dessas duas últimas condições seguem as afirmações dadas em (9).

De 3.3.10(2) e da definição de $\widehat{\tau}_*$ (ver 3.3.10(3)), observando que $|\Delta\tau(t)|>0$ para todo $t\in\mathbb{R}^m$, temos

(10) $\quad \widehat{\tau}_*(\varepsilon,\cdot)\to\Delta\tau\mathbb{Y}_{nm}+\tau_\ell$ em $(\mathbb{R}^*)^n\times\mathbb{R}^m$ quando $\varepsilon\downarrow 0$, $\quad(\tau=\rho,u)$

donde

$$(\varphi \circ \widehat{\rho}_*)(\varepsilon,\cdot)\to\varphi\circ(\Delta\rho\mathbb{Y}_{nm}+\rho_\ell) \text{ em } (\mathbb{R}^*)^n\times\mathbb{R}^m \text{ quando } \varepsilon\downarrow 0.$$

unesp

Das duas últimas condições vem

$$(11)\quad \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left[\widehat{\rho}_*(\varphi\circ\widehat{\rho}_*)\right](\varepsilon,\cdot)=(\Delta\rho\mathbb{Y}_{nm}+\rho_\ell)\left[\varphi\circ(\Delta\rho\mathbb{Y}_{nm}+\rho_\ell)\right]\ \text{ em }\ (\mathbb{R}^*)^n\times\mathbb{R}^m.$$

Sendo assim, por (9) e pela proposição 2.1.3, a condição (3) está verificada. Agora, usando as propriedades (10) e (11), temos

$$\left[(\widehat{u}_*-c)\widehat{\rho}_*(\varphi\circ\widehat{\rho}_*)\right](\varepsilon,\cdot)\to\rho_\ell(u_\ell-c)(\varphi\circ\rho_\ell)\ \text{ em }\ (\mathbb{R}^+_-)^n\times\mathbb{R}^m\ \text{ quando }\ \varepsilon\downarrow 0$$

e

$$\left[(\widehat{u}_*-c)\widehat{\rho}_*(\varphi\circ\widehat{\rho}_*)\right](\varepsilon,\cdot)\to\rho_r(u_r-c)(\varphi\circ\rho_r)\ \text{ em }\ (\mathbb{R}^*_+)^n\times\mathbb{R}^m\ \text{ quando }\ \varepsilon\downarrow 0.$$

Em conseqüência, sendo

$$\rho_\ell(u_\ell-c)(\varphi\circ\rho_\ell),\ \ \rho_r(u_r-c)(\varphi\circ\rho_r)\in C^\infty(\mathbb{R}^m)$$

por (9) e pela proposição 2.1.3, são válidas as relações dadas em (4). Finalmente, se ρ_r e ρ_ℓ são constantes temos

$$(\Delta\rho\mathbb{Y}_{nm}+\rho_\ell)\left[\varphi\circ(\Delta\rho\mathbb{Y}_{nm}+\rho_\ell)\right]=\begin{cases}\rho_\ell\varphi(\rho_\ell), & \text{em }\ (\mathbb{R}^+_-)^n\times\mathbb{R}^m\\ \rho_r\varphi(\rho_r), & \text{em }\ (\mathbb{R}^*_+)^n\times\mathbb{R}^m\end{cases}$$

e portanto, pelo lema 2.3.6(b), temos

$$\frac{\partial}{\partial t_i}\left\{(\Delta\rho\mathbb{Y}_{nm}+\rho_\ell)\left[\varphi\circ(\Delta\rho\mathbb{Y}_{nm}+\rho_\ell)\right]\right\}=0\ \text{ em }\ \mathcal{D}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m),\quad (i=1,\ldots,n).$$

Por outro lado, da condição (3) vem

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left\{\frac{\partial}{\partial t_i}\left[\widehat{\rho}_*(\varphi\circ\widehat{\rho}_*)\right]\right\}(\varepsilon,\cdot)=\frac{\partial}{\partial t_i}\left\{(\Delta\rho\mathbb{Y}_{nm}+\rho_\ell)\left[\varphi\circ(\Delta\rho\mathbb{Y}_{nm}+\rho_\ell)\right]\right\}\ \text{ em }\ \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)$$

para cada $i=1,\ldots,n$. Dessas duas últimas condições segue a afirmação (5). □

A seguir, apresentamos um resultado que é útil para a resolução de sistemas de equações diferenciais parciais de acordo com a definição 4.4.8.

3.3.12 Proposição. *Suponhamos verificadas as hipóteses 3.3.1(B) e 3.3.7, e indiquemos com (ν,α,β) qualquer uma das ternas $(\nu_{(s)},\alpha_{(s)},\beta_{(s)})$ ou $(\nu_{(\pi)},\alpha_{(\pi)},\beta_{(\pi)})$*

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

definidas nos itens (A) e (B) de 3.3.2. Suponhamos ainda que $\nu_i \in \mathcal{E}_{QM}[\mathbb{R}_+^*]$ *e* $\nu_i^{-1} \in \mathcal{E}_{QM}[I_{\alpha_i}^{\beta_i}]$ *para cada* $i \in \mathbb{I}$ *e que* $\nu_j \equiv \alpha_j$ *em* $\mathbb{R}_+^*$ *para cada* $j \in \mathbb{J}$. *Então, existem* $H_1, \ldots, H_\ell$ *em* $\mathcal{H}_r(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \setminus \mathcal{H}_\Lambda(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ *verificando as seguintes propriedades*

(**a**) *Cada* H_i, $i = 1, \ldots, \ell$, *possui um representante* $\widehat{H}_i$ *tal que*

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m} \left|\widehat{H}_i(\varepsilon, x, t)\right| \leq \frac{a_i\varepsilon - b_i}{\Delta_i}, \qquad (\varepsilon \in]0,1])$$

$$(\forall K \subset\subset (\mathbb{R}^*)^n)\,(\exists \eta \in]0,1])\mid \sup_{(\varepsilon,x,t)\in]0,\eta[\times K\times\mathbb{R}^m} \left|\widehat{H}_i(\varepsilon, x, t)\right| < -\frac{b_i}{\Delta_i}.$$

(**b**) *Para cada* $H \in \mathcal{H}_\Lambda^{n,m}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ *e cada* $j = 1, \ldots, n$ *são válidas as seguintes relações, em* $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$

$$[\nu \circ (\Delta_1 H_1 + b_1, \ldots, \Delta_\ell H_\ell + b_\ell) - \alpha]\frac{\partial H}{\partial x_j} \approx 0$$

$$[\nu \circ (\Delta_1 H_1 + b_1, \ldots, \Delta_\ell H_\ell + b_\ell) - \alpha]H\frac{\partial H}{\partial x_j} \approx 0.$$

(**c**) *Para cada* $H \in \mathcal{H}_\Lambda(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ *são válidas as seguintes relações, em* $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$

$$[\nu \circ (\Delta_1 H_1 + b_1, \ldots, \Delta_\ell H_\ell + b_\ell) - \alpha]\partial_x^n H \approx 0$$

$$[\nu \circ (\Delta_1 H_1 + b_1, \ldots, \Delta_\ell H_\ell + b_\ell) - \alpha]H\partial_x^n H \approx 0.$$

Demonstração. Pela proposição 3.3.8, existem $K_1, \ldots, K_\ell \in \mathcal{H}_r(\mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{H}_\Lambda(\mathbb{R}^n)$ verificando as seguintes propriedades

(d) Cada K_i, $i = 1, \ldots, \ell$, possui um representante $\widehat{K}_i$ tal que

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}^n} \left|\widehat{K}_i(\varepsilon, \lambda)\right| \leq \frac{a_i\varepsilon - b_i}{\Delta_i}, \qquad (\varepsilon \in]0,1])$$

$$(\forall L \subset\subset (\mathbb{R}^*)^n)\,(\exists \eta \in]0,1])\mid \sup_{(\varepsilon,\lambda)\in]0,\eta[\times L} \left|\widehat{K}_i(\varepsilon, \lambda)\right| < -\frac{b_i}{\Delta_i}.$$

(e) Para cada $K \in \mathcal{H}_\Lambda^n(\mathbb{R}^n)$ e cada $j = 1, \ldots, n$ são válidas as seguintes relações, em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$

$$[\nu \circ (\Delta_1 K_1 + b_1, \ldots, \Delta_\ell K_\ell + b_\ell) - \alpha]\frac{\partial K}{\partial \lambda_j} \approx 0$$

$$[\nu \circ (\Delta_1 K_1 + b_1, \ldots, \Delta_\ell K_\ell + b_\ell) - \alpha]K\frac{\partial K}{\partial \lambda_j} \approx 0.$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

(f) Para cada $K \in \mathcal{H}_\Lambda(\mathbb{R}^n)$ são válidas as seguintes relações, em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$

$$[\nu \circ (\Delta_1 K_1 + b_1, \ldots, \Delta_\ell K_\ell + b_\ell) - \alpha]\partial_\lambda^n K \approx 0$$

$$[\nu \circ (\Delta_1 K_1 + b_1, \ldots, \Delta_\ell K_\ell + b_\ell) - \alpha] K \partial_\lambda^n K \approx 0.$$

Para cada $i = 1, \ldots, \ell$, seja H_i a classe de $\widehat{H}_i := \widehat{K}_i \circ \pi_m$. Como $K_1, \ldots, K_\ell$ são elementos de $\mathcal{H}_r(\mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{H}_\Lambda(\mathbb{R}^n)$, pelas proposições 2.3.14(b) e 3.1.1(4) temos que $H_1, \ldots, H_\ell \in \mathcal{H}_r(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \setminus \mathcal{H}_\Lambda(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$. Por outro lado, pelo item (d), é claro que cada $\widehat{H}_i$, $i = 1, \ldots, \ell$, satisfaz as condições descritas no item (a). Finalmente, fixado $H \in \mathcal{H}_\Lambda^{n,m}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$, seja $K \in \mathcal{H}_\Lambda^n(\mathbb{R}^n)$ tal que $H = K \circ \pi_m$. Então, observando que

$$\frac{\partial H}{\partial x_j} = \frac{\partial K}{\partial \lambda_j} \circ \pi_m\,, \quad (1 \leq j \leq \ell)$$

pelo item (e) e pela proposição 3.1.1(3), é também claro que H satisfaz as relações requeridas no item (b). De modo análogo, se $H := K \circ K$, onde $K \in \mathcal{H}_\Lambda(\mathbb{R}^n)$, lembrando que $\partial_x^n H = \partial_\lambda^n K \circ \pi_m$, pelo item (f) e pela proposição 3.1.1(3) seguem as relações dadas em (c). □

Capítulo 4

Alguns Sistemas de Equações Diferenciais Parciais não Lineares

Neste capítulo, serão consideradas funções generalizadas a valores reais. Se Ω é um subconjunto aberto do espaço euclidiano $\mathbb{R}^k$ ou de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$, $k \geq 1$, escreveremos por comodidade $\mathcal{G}(\Omega)$ em lugar de $\mathcal{G}(\Omega; \mathbb{R})$. Uma notação similar será usada para os subconjuntos de $C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$, $\mathcal{E}_{QM}[\Omega; \mathbb{R}]$ e $\mathcal{G}(\Omega; \mathbb{R})$.

Em continuação, estudaremos as soluções na forma de onda de choque para certos sistemas de EDPs não lineares. Para esse fim, serão usadas as funções generalizadas de Heaviside em $\mathbb{R}^n$ e em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ introduzidas, respectivamente, nas seções 2.2 e 2.3. Os sistemas aqui considerados, foram motivados por sistemas de EDPs da hidrodinâmica estudados, por exemplo, em [3] e em [9] (ou em [11]).

Na seção 4.1 obtemos soluções na forma de onda de choque, para certos sistemas de EDPs não lineares, que são funções generalizadas em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$, dadas em termos das funções generalizadas de Heaviside em $\mathbb{R}^n$ (ver teoremas 4.1.9 e 4.1.11). Essas soluções são chamadas $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$-soluções na forma de onda de choque em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ (ver definição 4.1.1). Na seção 4.2, coletamos alguns resultados (ver teoremas 4.2.6 e 4.2.9), relacionados às $\mathcal{H}(\mathbb{R})$-soluções na forma de onda de choque em $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ (ver definição 4.2.2) para certos sistemas de EDPs não lineares. Omitimos as provas dos mesmos por serem similares às provas dos resultados correspondentes, obtidos em [9] (e em [11]). Na seção 4.3, introduzimos a noção de

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

$\mathcal{H}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$-solução do tipo de forma de onda de choque na álgebra $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$, no sentido de que as soluções são elementos de $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ e são dadas em termos das funções generalizadas de Heaviside em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ (ver definição 4.3.2). A noção introduzida aqui é uma tentativa de generalizar a idéia clássica de solução na forma de onda de choque, considerada por exemplo em [3] (Seção 3), [9] (Definição 4.1.1) ou em [11] (Definição 5.1). No entanto, a pretendida generalização é ilusória, como é mostrado com os resultados apresentados em 4.4.5 e em 4.4.9. Nesta seção, são coletados também alguns resultados preliminares a serem usados nas seções seguintes.

Na seção 4.4, apresentamos um resultado (teorema 4.4.5) sobre resolubilidade de sistemas de EDPs, sugeridos pelo sistema $(\tilde{S})$, considerado na Introdução do trabalho. De acordo com o mesmo, os sistemas considerados têm soluções do tipo de forma de onda de choque na álgebra $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ (de acordo com a definição 4.3.2) se, e somente se, são válidas as clássicas condições de salto da hidrodinâmica e outras três condições adicionais de natureza técnica. Usando o teorema 4.4.5, obtemos uma caracterização das soluções do tipo de forma de onda de choque para sistemas de EDPs da hidrodinâmica (ver teorema 4.4.7) e obtemos soluções na forma de onda de choque (de acordo com a definição 4.4.8) para sistemas de EDPs (ver resultados 4.4.9, 4.4.11 e 4.4.12). As $\mathcal{H}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$-soluções são obtidas, usando as $\mathcal{H}(\mathbb{R})$-soluções, conseguidas através do teorema 4.2.6. Em particular, obtemos $\mathcal{H}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$-soluções para sistemas de EDPs da hidrodinâmica (ver teorema 4.4.15). Na parte final da seção, apresentamos alguns resultados relativos aos sistemas de EDPs que contém, nos segundos membros, expressões quando a função ν "depende de uma variável", e quando ν "depende de duas variáveis".

Na seção 4.5, usando as proposições 3.3.11 e 4.5.1, mostramos que sistemas de EDPs sugeridos pelo sistema (S), considerado na Introdução, os quais têm a primeira equação ou as duas primeiras equações no sentido estrito da igualdade de funções generalizadas (ver início da seção 4.3), não têm $\mathcal{H}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$-soluções na forma de onda de choque (ver teoremas 4.5.4 e 4.5.6) e, em conseqüência (particularizando bastante a definição 4.2.2), esses sistemas também não têm $\mathcal{H}(\mathbb{R})$-soluções na forma de onda de choque, na álgebra $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ (ver definição 4.5.7 e teoremas 4.5.10 e 4.5.11). Da mesma forma, sistemas de EDPs da hidrodinâmica,



com essas características, não têm $\mathcal{H}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ e $\mathcal{H}(\mathbb{R})$-soluções na forma de onda de choque (ver teoremas 4.5.5 e 4.5.11, para o caso $m=1$).

4.1 Funções generalizadas de Heaviside no espaço $\mathbb{R}^n$ e soluções na forma de onda de choque na álgebra $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)$ para sistemas de EDPs homogêneos

Consideremos o seguinte sistema homogêneo de equações diferencias parciais, sugerido pelo sistema $(\tilde{S})$, fixado na Introdução do trabalho, no caso em que $\nu=0$ e $\alpha=0$ (ver convenções e notações introduzidas em 1.2.5 e em 1.2.6)

$$(S_0)\qquad \begin{cases} (E_1) & \nabla_t\rho+\operatorname{div}_x(\rho u)_m\approx 0\\ (E_2) & \nabla_t(\rho u)+\operatorname{div}_x(p+\rho u^2)_m\approx 0\\ (E_3) & \nabla_t e+\operatorname{div}_x\left[(e+p)u\right]_m\approx 0\\ (E_4) & e_m\approx \lambda p_m+\frac{1}{2}(\rho u^2)_m \end{cases}$$

onde $\approx$ é a relação de associação em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^m)$ (ver 2.1.1). Nesta seção, mostraremos que o sistema homogêneo (S_0) tem soluções na forma de onda de choque, no sentido da definição 4.1.1, dada a seguir.

4.1.1 Definição. Uma $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$-*solução na forma de onda de choque em* $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)$ do sistema (S_0) é qualquer elemento (ρ,u,p,e) de $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^4)$ tal que as funções componentes são dadas na forma

$$(S_1)\quad \rho=\Delta\rho H_\rho\circ y^*+\rho_\ell \qquad (S_2)\quad u=\Delta u H_u\circ y^*+u_\ell$$
$$(S_3)\quad p=\Delta p H_p\circ y^*+p_\ell \qquad (S_4)\quad e=\Delta e H_e\circ y^*+e_\ell$$

as quais são soluções do sistema (S_0) e satisfazem as hipóteses seguintes:

(a) $y^*\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ é a função associada a $y\in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ (ver (3.1.1)), dada por $y\colon t=(t_1,\dots,t_m)\in\mathbb{R}^m\mapsto y(t):=(t_1+\cdots+t_m)c_n\in\mathbb{R}^n$; isto é,

$$y^*\colon (x,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\mapsto y^*(x,t):=x-\sum_{i=1}^m t_i c_n\in\mathbb{R}^n$$

onde $c_n := (c, \ldots, c) \in \mathbb{R}^n$, para algum $c \in \mathbb{R}$.

(b) Denotamos com τ qualquer um dos símbolos ρ, u, p ou e. Existe $(\tau_r, \tau_\ell) \in \mathbb{R}^2$ tal que $0 < \tau_r < \tau_\ell$ e definimos $\Delta\tau := \tau_r - \tau_\ell$.

(c) H_ρ, H_u, H_p, $H_e \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R}^n)$.

Nas condições da definição anterior, introduzindo as seguintes funções generalizadas

$$\begin{aligned} \rho_* &:= \Delta\rho H_\rho + \rho_\ell \qquad & u_* &:= \Delta u H_u + u_\ell \\ p_* &:= \Delta p H_p + p_\ell \qquad & e_* &:= \Delta e H_e + e_\ell \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

as funções componentes da solução (ρ, u, p, e) podem ser escritas na forma

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_* \circ y^* \qquad & u &= u_* \circ y^* \\ p &= p_* \circ y^* \qquad & e &= e_* \circ y^* . \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Nesta seção, a menos de menção explícita em contrário, assumimos a hipótese seguinte.

4.1.2 Hipótese. São fixados $c \in \mathbb{R}$ e, para cada $\tau = \rho, u, p, e$, os elementos

- (τ_r, τ_ℓ) em $\mathbb{R}^2$ tal que $0 < \tau_r < \tau_\ell$
- $H_\tau \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R}^n)$.

Nessas condições serão considerados:

- os elementos y^* e $(\Delta\rho, \Delta u, \Delta p, \Delta e)$ introduzidos, respectivamente, nos itens (a) e (b) da definição 4.1.1
- a função generalizada (ρ_*, u_*, p_*, e_*) em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^4)$ cujas componentes são definidas em (4.1.1)
- a função generalizada (ρ, u, p, e) em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^4)$ de modo que as suas componentes são definidas, respectivamente, pelas fórmulas (S_1), (S_2), (S_3) e (S_4) na definição 4.1.1.

unesp

4.1.3 Condições de salto. Consideraremos também as fórmulas descritas a seguir, chamadas *fórmulas ou condições da salto* das equações diferenciais parciais da hidrodinâmica (ver o sistema descrito no teorema 4.1.11), as quais são relações entre os elementos c, (ρ_r, u_r, p_r, e_r) e $(\rho_\ell, u_\ell, p_\ell, e_\ell)$ fixados na hipótese 4.1.2:

$$(j_1)\ c = \Delta u(1 + \tfrac{\rho_\ell}{\Delta\rho}) + u_\ell \qquad (j_2)\ \tfrac{\Delta p}{\Delta u^2} = \rho_\ell(1 + \tfrac{\rho_\ell}{\Delta\rho})$$
$$(j_3)\ \Delta p(1 + \tfrac{u_\ell}{\Delta u}) = \rho_\ell \tfrac{\Delta e}{\Delta\rho} - e_\ell - p_\ell \qquad (j_4)\ e_k = \lambda p_k + \tfrac{1}{2}\rho_k u_k^2,\ k = r, l.$$

Nas condições e notações, dadas anteriormente, temos os resultados apresentados em continuação.

4.1.4 Lema. *São válidas as afirmações seguintes.*

(a) *Se $a_1, \ldots, a_6$ são os números reais definidos por*

$$a_1 := u_\ell(u_\ell - c)\Delta\rho \qquad a_2 := \rho_\ell(2u_\ell - c)\Delta u \quad a_3 := \Delta p$$
$$a_4 := (2u_\ell - c)\Delta\rho\Delta u \quad a_5 := \rho_\ell \Delta u^2 \qquad a_6 := \Delta\rho\Delta u^2$$

e se $a := a_1 + \cdots + a_6$ então, é válida a propriedade seguinte

(1) *Se vale a fórmula (j_1) então, vale a fórmula (j_2) se e só se $a = 0$.*

(b) *Se $b_1, \ldots, b_5$ são os números reais definidos por*

$$b_1 := (e_\ell + p_\ell)\Delta u \quad b_2 := u_\ell \Delta p \quad b_3 := (u_\ell - c)\Delta e$$
$$b_4 := \Delta u \Delta p \qquad b_5 := \Delta u \Delta e$$

e se $b := b_1 + \cdots + b_5$ então, é válida a propriedade seguinte

(2) *Se vale a fórmula (j_1) então, vale a fórmula (j_3) se e só se $b = 0$.*

Demonstração. **(a)** Levando os valores de a_j, $j = 1, \ldots, 6$, na expessão de a temos

$$a = \Delta p + u_\ell(u_\ell - c)\Delta\rho + \rho_r(2u_\ell - c)\Delta u + \rho_r \Delta u^2$$

isto é, $a = \Delta p + u_\ell(u_\ell - c)\Delta\rho + \rho_r u_\ell \Delta u + \rho_r(u_\ell - c)\Delta u + \rho_r \Delta u^2$. Assim, se for válida a fórmula (j_1), substituindo os valores

$$u_\ell - c = -\Delta u\left(1 + \frac{\rho_\ell}{\Delta\rho}\right) \quad \text{e} \quad 1 + \frac{\rho_\ell}{\Delta\rho} = \frac{\rho_r}{\Delta\rho}$$



na igualdade anterior obtemos

$$a = \Delta p + \rho_r \Delta u^2 \left(1 - \frac{\rho_r}{\Delta \rho}\right) = \Delta p - \rho_\ell \Delta u^2 \frac{\rho_r}{\Delta \rho} = \Delta p - \rho_\ell \Delta u^2 \left(1 + \frac{\rho_\ell}{\Delta \rho}\right)$$

donde segue a propriedade (1).

(**b**) Levando os valores de cada b_j, $j = 1, \ldots, 5$, em b temos

$$b = u_r \Delta p + (u_r - c)\Delta e + (e_\ell + p_\ell)\Delta u.$$

Assim, se for válida a fórmula (j_1), observando que

$$c = \Delta u \left(1 + \frac{\rho_\ell}{\Delta \rho}\right) + u_\ell \Longleftrightarrow u_r - c = -\Delta u \frac{\rho_\ell}{\Delta \rho}$$

obtemos a igualdade

$$b = u_r \Delta p - \Delta u \left(\rho_\ell \frac{\Delta e}{\Delta \rho} - e_\ell - p_\ell\right).$$

Donde, como

$$1 + \frac{u_\ell}{\Delta u} = \frac{u_r}{\Delta u}$$

segue a validade da propriedade (2). □

A seguir apresentaremos quatro resultados que nos permitirão estudar a resolubilidade do sistema (S_0). Para esse fim, usaremos as notações e convenções introduzidas em 1.2.5, 1.2.6, 2.1.1 e 4.1.2.

4.1.5 Proposição. *A função generalizada (ρ, u) é uma solução da equação*

$$(E_1) \qquad \nabla_t \rho + \operatorname{div}_x (\rho u)_m \approx 0$$

se, e somente se, é válida a condiçaõ de salto (j_1).

Demonstração. Seja H em $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ qualquer fixado. Usando as fórmulas

$$\rho = \rho_* \circ y^*, \qquad y_j(t) = c \sum_{i=1}^{m} t_i, \qquad (t \in \mathbb{R}^m, \ 1 \leq j \leq n)$$

e a regra da cadeia temos (ver proposição 3.1.8(3) e (S_1))

$$\nabla_t \rho = -\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_j}\right) \nabla y_j = -(\operatorname{div}_x \rho) c_m$$

o que implica $\nabla_t \rho = \operatorname{div}_x(-c\rho)_m$. Usando essa igualdade, podemos escrever

$$\nabla_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho u)_m = \operatorname{div}_x[\rho(u-c)]_m. \tag{1}$$

Por outro lado, das fórmulas (S_1) e (S_2), usando o corolário 3.1.5, temos

$$\rho(u-c) \approx \Delta\rho \left[u_\ell - c + \left(1 + \frac{\rho_\ell}{\Delta\rho}\right) \Delta u \right] H \circ y^* + \rho_\ell (u_\ell - c)$$

o que junto com o teorema 2.1.2(c) e a fórmula (1) implica

$$\nabla_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho u)_m \approx \Delta\rho \left[u_\ell - c + \left(1 + \frac{\rho_\ell}{\Delta\rho}\right) \Delta u \right] \operatorname{div}_x(H \circ y^*)_m .$$

Como $\Delta\rho \neq 0$, usando o corolário 3.1.9(2), segue a afirmação. □

Para uma prova do resultado dado a seguir ver [3] (3.5) ou [9] (4.2.2).

4.1.6 Proposição. *A função generalizada (ρ, u, p, e) é uma solução da equação*

$$e \approx \lambda p + \tfrac{1}{2}\rho u^2 \tag{E_4}$$

se, e somente se, é válida a condiçaõ de salto (j_4), onde $\approx$ é a relação de associação em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$.

Os dois resultados apresentados em continuação completam a parte preliminar para o estudo na íntegra da resolubilidade do sistema (S_0).

4.1.7 Proposição. *A função generalizada (ρ, u, p) é uma solução do sistema*

$$\begin{cases} (E_1) & \nabla_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho u)_m \approx 0 \\ (E_2) & \nabla_t(\rho u) + \operatorname{div}_x(p + \rho u^2)_m \approx 0 \end{cases}$$

se, e somente se, são válidas as condições de salto (j_1) e (j_2).

Demonstração. Inicialmente faremos alguns cálculos preparatórios. Das expressões

$$\rho u = (\rho_* u_*) \circ y^*, \quad y_j(t) = c \sum_{i=1}^{m} t_i, \qquad (t \in \mathbb{R}^m,\ 1 \leq j \leq n), \quad \text{e} \quad \nabla y_j = c_m$$

usando a regra da cadia obtemos $\nabla_t(\rho u) = -\operatorname{div}_x(\rho u) c_m$. Então, podemos escrever

$$\nabla_t(\rho u) + \operatorname{div}_x \left(p + \rho u^2\right)_m = \operatorname{div}_x \left[p + \rho u(u-c)\right]_m . \tag{1}$$



Por outro lado, das fórmulas (S_1), (S_2), (S_3), (S_4) e (4.1.1), após um cálculo, temos

$$p + \rho u(u-c) = a_0 + \left(a_1 H_\rho + a_2 H_u + a_3 H_p + a_4 H_\rho H_u + a_5 H_u^2 + a_6 H_\rho H_u^2\right) \circ y^*$$

onde $a_0 := p_\ell + \rho_\ell u_\ell (u_\ell - c)$ e

$$\begin{array}{lll} a_1 := u_\ell(u_\ell - c)\Delta\rho & a_2 := \rho_\ell(2u_\ell - c)\Delta u & a_3 := \Delta p \\ a_4 := (2u_\ell - c)\Delta\rho\Delta u & a_5 := \rho_\ell \Delta u^2 & a_6 := \Delta\rho\Delta u^2. \end{array}$$

Sendo válidas as relações seguintes (ver corolário 3.1.5)

$$H \circ y^* \approx H_\rho \circ y^*, \quad \text{para} \quad H = H_u,\ H_p,\ H_\rho H_u,\ H_u^2,\ H_\rho H_u^2$$

a igualdade anterior acarreta $p + \rho u(u-c) \approx a_0 + a\,(H_\rho \circ y^*)$ onde $a := a_1 + \cdots + a_6$, e, portanto, pelo teorema 2.1.2(c), temos

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{div}_x [p + \rho u(u-c)]_m \approx a \operatorname{div}_x (H_\rho \circ y^*)_m.$$

Suponhamos que a função (ρ, u, p) é uma solução das equações (E_1) e (E_2). Pela proposição 4.1.5 é válida a fórmula (j_1). Sendo (ρ, u, p) uma solução da equação (E_2), pelas condições (1) e (2) acima temos que

$$a \operatorname{div}_x (H_\rho \circ y^*) \approx 0.$$

Donde, pelo corolário 3.1.9(2), segue que $a = 0$. Assim, sendo válida a fórmula (j_1), pelo lema 4.1.4(a), é válida também a fórmula (j_2). Reciprocamente, suponhamos que são válidas as fórmulas (j_1) e (j_2). Pela proposição 4.1.5 a função (ρ, u) é uma solução da equação (E_1). Por outro lado, pelo lema 4.1.4(a), temos que $a = 0$. Então, pelas condições (1) e (2), a função (ρ, u, p) é uma solução da equação (E_2). □

4.1.8 Proposição. *A função generalizada (ρ, u, p, e) é uma solução do sistema*

$$\begin{cases} (E_1) & \nabla_t \rho + \operatorname{div}_x (\rho u)_m \approx 0 \\ (E_2) & \nabla_t (\rho u) + \operatorname{div}_x (p + \rho u^2)_m \approx 0 \\ (E_3) & \nabla_t e + \operatorname{div}_x [(e+p)u]_m \approx 0 \end{cases}$$

se, e somente se, são válidas as condições de salto (j_1), (j_2) e (j_3).

Demonstração. O argumento usado aqui é similar à da prova da proposição 4.1.7. Usando as fórmulas

$$e = e_* \circ y^*, \quad y_j(t) = c\sum_{i=1}^{m} t_i, \quad (t \in \mathbb{R}^m,\ 1 \le j \le n), \quad \nabla y_j = c_m$$

e a regra da cadeia segue que $\nabla_t e = \operatorname{div}_x(-ce)_m$. Então, podemos escrever

$$\nabla_t e + \operatorname{div}_x [(e+p)u]_m = \operatorname{div}_x [(e+p)u - ce]_m . \tag{1}$$

Por outro lado, após um cálculo, usando as fórmulas (S_1) - (S_4) e (4.1.1), temos

$$(e+p)u - ce = b_0 + (b_1 H_u + b_2 H_p + b_3 H_e + b_4 H_u H_p + b_5 H_u H_e) \circ y^*$$

onde os números reais $b_0, \ldots, b_5$ são definidos por

$$b_0 := (e_\ell + p_\ell)u_\ell - ce_\ell \quad b_1 := (e_\ell + p_\ell)\Delta u \quad b_2 := u_\ell \Delta p$$
$$b_3 := (u_\ell - c)\Delta e \qquad b_4 := \Delta u \Delta p \qquad b_5 := \Delta u \Delta e.$$

A igualdade anterior (junto com o corolário 3.1.5) acarreta

$$\operatorname{div}_x [(e+p)u - ce]_m \approx b \operatorname{div}_x (H_u \circ y^*)_m$$

onde $b := b_1 + \cdots + b_5$. Usando esta condição (juntamente com (1)), a proposição 4.1.7, o corolário 3.1.9(2) e o lema 4.1.4(b), por um argumento similar ao que foi feito na parte final da prova da proposição 4.1.7, segue a validade da afirmação. □

Em resumo, das proposições 4.1.6 e 4.1.8 temos o resultado seguinte, o qual mostra que o sistema homogêneo (S_0) tem soluções na forma de onda de choque de acordo com a definição 4.1.1.

4.1.9 Teorema. *A função generalizada (ρ, u, p, e) é uma solução do sistema*

$$(S_0) \qquad \begin{cases} \nabla_t \rho + \operatorname{div}_x (\rho u)_m \approx 0 \\ \nabla_t (\rho u) + \operatorname{div}_x (p + \rho u^2)_m \approx 0 \\ \nabla_t e + \operatorname{div}_x [(e+p)u]_m \approx 0 \\ e_m \approx \lambda p_m + \frac{1}{2}(\rho u^2)_m \end{cases}$$

se, e somente se, são válidas as condições de salto (j_1), (j_2), (j_3) e (j_4).

4.1.10 Observação. Em virtude do teorema 4.1.9, para achar soluções na forma de onda de choque do sistema (S_0), de acordo com a definição 4.1.1, basta considerar elementos $c \in \mathbb{R}$ e $(\tau_r, \tau_\ell) \in \mathbb{R}^2$, com $0 < \tau_r < \tau_\ell$ para $\tau = \rho,\ u,\ p,\ e$, satisfazendo as condições de salto (j_1) - (j_4), onde $\Delta\tau := \tau_r - \tau_\ell$. Escolher a função generalizada (ρ, u, p, e) em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^4)$ de modo que as suas funções componentes são dadas pelas fórmulas (S_1) - (S_4), em que as componentes de (H_ρ, H_u, H_p, H_e) são elementos *quaisquer* de $\mathcal{H}_p(\mathbb{R}^n)$ (ver observação 2.2.19(b)). Isto é, as funções componentes da solução procurada devem ser definidas pelas " expressões " (aqui $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$)

$$\rho(x,t) := \Delta\rho H_\rho(x - \textstyle\sum_{i=1}^n t_i c_n) + \rho_\ell \qquad u(x,t) := \Delta u H_u(x - \textstyle\sum_{i=1}^n t_i c_n) + u_\ell$$
$$p(x,t) := \Delta p H_p(x - \textstyle\sum_{i=1}^n t_i c_n) + p_\ell \qquad e(x,t) := \Delta e H_e(x - \textstyle\sum_{i=1}^n t_i c_n) + e_\ell.$$

No caso $m = 1$, denotando por (x,t) um elemento genérico de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, do teorema 4.1.9 temos o resultado seguinte, o qual envolve as equações diferenciais parcias não lieares da hidrodinâmica em dimensão n.

4.1.11 Teorema. *A função generalizada (ρ, u, p, e) é uma solução do seguinte sistema, de equações diferenciais parciais da hidrodinâmica em dimensão n*

$$\begin{cases} \rho_t + \operatorname{div}_x(\rho u) \approx 0 \\ (\rho u)_t + \operatorname{div}_x(p + \rho u^2) \approx 0 \\ e_t + \operatorname{div}_x[(e+p)u] \approx 0 \\ e \approx \lambda p + \frac{1}{2}(\rho u^2) \end{cases}$$

se, e somente se, são válidas as condições de salto (j_1), (j_2), (j_3) e (j_4), onde ρ é a densidade, u a velocidade, p a pressão, e a energia total e $\approx$ é a relação de associação em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$.

4.2 Funções generalizadas de Heaviside em $\mathbb{R}$ e soluções na forma de onda de choque na álgebra $\mathcal{G}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m)$ para sistemas de EDPs não homogêneos

Lembremos que o conjunto $\mathcal{E}_{QM}[\mathbb{R}_+^*]$ foi introduzido na definição 3.2.2(a), neste caso para $I_\alpha^\beta = I_0^{+\infty} = \mathbb{R}_+^*$ e $G = \mathbb{R}$.



4.2.1 Hipótese. Os dados fixados na hipótese 3.3.1(B) serão considerados aqui com $\ell = 3$. Desse modo, são considerados os elementos $\alpha_* = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\beta_* = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ e $\nu_* = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ de tal modo que cada componente de ν_* é uma função crescente e é um elemento de $\mathcal{E}_{QM}[\mathbb{R}^*_+]$, e o conjunto $\{1, 2, 3\}$ é uma reunião de duas partes disjuntas $\mathbb{I}$ e $\mathbb{J}$ tais que

- para cada $i \in \mathbb{I}$, ν_i é estritamente crescente com $\mathrm{Im}(\nu_i) =]\alpha_i, \beta_i[$
- para cada $j \in \mathbb{J}$, ν_j não é estritamente crescente com $\mathrm{Im}(\nu_j) \subset [\alpha_j, \beta_j[$.

Indicamos com (ν, α, β) tanto $(\nu_{(s)}, \alpha_{(s)}, \beta_{(s)})$ como $(\nu_{(\pi)}, \alpha_{(\pi)}, \beta_{(\pi)})$ (ver 3.3.2):

$$\alpha_{(s)} := \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \qquad \alpha_{(\pi)} := \alpha_1\alpha_2\alpha_3$$
$$\beta_{(s)} := \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \qquad \beta_{(\pi)} := \beta_1\beta_2\beta_3$$
$$\nu_{(s)}(y_1, y_2, y_3) := \nu_1(y_1) + \nu_2(y_2) + \nu_3(y_3) \qquad \nu_{(\pi)}(y_1, y_2, y_3) := \nu_1(y_1)\nu_2(y_2)\nu_3(y_3).$$

Fixado $\lambda \in \mathbb{R}^*$, consideremos os sistemas associados $(\tilde{S})$, $(\bar{S})$ e (S) de equações diferenciais parciais não lineares, descritos a seguir. O sistema $(\tilde{S})$ é formado pelas seguintes equações (ver as convenções e notações introduzidas em 1.2.5 e em 1.2.6)

$$\begin{cases} \nabla_t \rho + (\rho u)_{m,x} \approx 0 \\ \nabla_t (\rho u) + (p + \rho u^2)_{m,x} \approx \{[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u_x\}_{m,x} \\ \nabla_t e + [(e + p)u]_{m,x} \approx \{[\nu \circ (\rho, p, 4) - \alpha]\, u u_x\}_{m,x} \\ e_m \approx \lambda p_m + \frac{1}{2}(\rho u^2)_m. \end{cases}$$

O sistema $(\bar{S})$ é formado pelas duas últimas equações acima e pelas duas equações descritas a seguir. O sistema (S) é formado pelas três últimas equações acima e pela primeira das duas equações seguintes

$$\begin{cases} \nabla_t \rho + (\rho u)_{m,x} = 0 \\ \nabla_t (\rho u) + (p + \rho u^2)_{m,x} = \{[\nu \circ (\rho, p, E) - \alpha]\, u_x\}_{m,x}. \end{cases}$$

Nesta seção serão fixadas as notações, e serão coletados alguns resultados relativos às $\mathcal{H}(\mathbb{R})$-soluções na forma de onda de choque em $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ dos sistemas $(\tilde{S})$ e $(\bar{S})$ acima descritos (soluções de acordo com a definição 4.2.2), os quais serão usados nas seções 4.4 e 4.5. Em [9] e em [11], estudamos as $\mathcal{H}(\mathbb{R})$-soluções na forma



de onda de choque em $\mathcal{G}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, trabalhando com a função $y^* \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, associada à função $y\colon t \in \mathbb{R} \mapsto ct \in \mathbb{R}$. Os resultados relativos às $\mathcal{H}(\mathbb{R})$-soluções em $\mathcal{G}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m)$ são obtidos de modo análogo às $\mathcal{H}(\mathbb{R})$-soluções em $\mathcal{G}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, a menos de pequenas modificações decorrentes do tipo de função ($y \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$) com que trabalhamos neste caso. Em razão disso, só enunciaremos os principais resultados relativos às $\mathcal{H}(\mathbb{R})$-soluções em $\mathcal{G}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m)$. A definição apresentada a seguir, não é exatamente a definição 4.1.1 para o caso $n = 1$ (ver observação 4.2.3).

4.2.2 Definição. Se $\mathcal{S}$ indica qualquer um dos sistemas $(\tilde{S})$, $(\bar{S})$ ou (S), uma $\mathcal{H}(\mathbb{R})$-*solução na forma de onda de choque em* $\mathcal{G}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m)$ do sistema $\mathcal{S}$ é qualquer elemento (ρ, u, p, e) de $\mathcal{G}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^4)$ tal que as funções componentes são dadas na forma

$$(S_1)\quad \rho = \Delta\rho H_\rho \circ y^* + \rho_\ell \qquad (S_2)\quad u = \Delta u H_u \circ y^* + u_\ell$$
$$(S_3)\quad p = \Delta p H_p \circ y^* + p_\ell \qquad (S_4)\quad e = \Delta e H_e \circ y^* + e_\ell$$

as quais são soluções do sistema $\mathcal{S}$ e satisfazem as hipóteses seguintes:

(a) $y^* \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m)$ é a função associada a $y \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ (ver (3.1.1)), dada por $y\colon t = (t_1,\ldots,t_m) \in \mathbb{R}^m \mapsto y(t) := c\sum_{i=1}^m t_i \in \mathbb{R}$, para algum $c \in \mathbb{R}$; isto é,

$$y^*\colon (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m \mapsto y^*(x,t) := x - c\sum_{i=1}^m t_i \in \mathbb{R}\,.$$

(b) Denotamos com τ qualquer um dos símbolos ρ, u, p ou e. Existe $(\tau_r, \tau_\ell) \in \mathbb{R}^2$ tal que $0 < \tau_r < \tau_\ell$ e definimos $\Delta\tau := \tau_r - \tau_\ell$.

(c) H_ρ, H_u, H_p, $H_e \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R})$.

(d) Cada H_τ, $\tau = \rho, u, p, e$, tem um representante $\widehat{H}_\tau$ tal que

(1) $$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\left|\widehat{H}_\tau(\varepsilon,\lambda)\right| \le \frac{\tau_r\varepsilon - \tau_\ell}{\Delta\tau}, \quad (\varepsilon \in]0,1])$$

(2) $$(\forall K \subset\subset \mathbb{R}^*)(\exists \eta \in]0,1])\mid \sup_{(\varepsilon,\lambda)\in]0,\eta[\times K}\left|\widehat{H}_\tau(\varepsilon,\lambda)\right| < -\frac{\tau_\ell}{\Delta\tau}.$$

(e) $(HH'_u)|_{\mathbb{R}^*} \approx 0$ para cada H em $\mathcal{H}_p(\mathbb{R})$.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

4.2.3 Observação. È pertinente fazer aqui as observações seguintes.

(a) A rigor, na definição 4.2.2, bastaria exigir a condição (1) somente para a terna (H_ρ, H_p, H_e) e (2) somente para H_ρ. Entretanto, da prova da resolubilidade do sistema $(\tilde{S})$ (ver teorema 4.2.6) resulta que a hipóetese (d) vale na forma enunciada; isto é, a generalização dada é ilusória.

(b) Na definição habitual de solução na forma de onda de choque, exige-se apenas a validade das hipóteses (a), (b) e (c) (ver definição 4.1.1, por exemplo). Por um lado, para dar sentido à função composta $\nu \circ (\rho, p, e)$, tivemos que impor a hipótese (d). Por outro lado, por razões técnicas resultantes da forma de atacar o problema, tivemos que particularizar bastante a definição habitual, exigindo também a validade da hipótese (e). Em geral, nem toda função generalizada $H_u \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$ satisfaz a condição (e), ver Exemplo 2.2.12 em [9] ou Observação 2.2 em [11].

Nesta seção, a menos de menção explícita em contrário, além da hipótese 4.2.1, assumiremos também a hipótese seguinte.

4.2.4 Hipótese. São fixados $c \in \mathbb{R}$ e os seguintes elementos

- (τ_r, τ_ℓ) em $\mathbb{R}^2$ tal que $0 < \tau_r < \tau_\ell$ para cada $\tau = \rho, u, p, e$
- H_ρ, H_u, H_p e H_e em $\mathcal{H}_p(\mathbb{R})$.

Nessas condições serão considerados:

- os elementos y^* e $(\Delta\rho, \Delta u, \Delta p, \Delta e)$ introduzidos na definição 4.2.2
- os elementos a e b em $\mathbb{R}^3$ considerados na hipótese 3.3.7 como sendo dados por $a := (\rho_r, p_r, e_r)$ e $b := (\rho_\ell, p_\ell, e_\ell)$
- as fórmulas de salto (j_1), (j_2), (j_3) e (j_4) introduzidas em 4.1.3
- a função generalizada (ρ, u, p, e) cujas componentes são definidas, respectivamente, pelas fórmulas (S_1), (S_2), (S_3) e (S_4) na definição 4.2.2.



Nas condições e notações dadas acima, temos os resultados apresentados a seguir. Para uma prova do resultado seguinte ver [9] (Teorema 4.2.6) ou [11] (Teorema 5.1).

4.2.5 Teorema. *Suponhamos verificadas as hipóteses 4.2.1 e 4.2.4. Suponhamos ainda que (H_ρ, H_p, H_e) e H_u satisfazem, respectivamente, as condições $(d)(1)$ e (e) da definição 4.2.2. Então, a função generalizada (ρ, u, p, e) é uma solução do sistema*

$$\begin{cases} \nabla_t \rho + (\rho u)_{m,x} \approx 0 \\ \nabla_t (\rho u) + (p + \rho u^2)_{m,x} \approx \{[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u_x\}_{m,x} \\ \nabla_t e + [(e+p)u]_{m,x} \approx \{[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u u_x\}_{m,x} \\ e_m \approx \lambda p_m + \frac{1}{2}(\rho u^2)_m \end{cases}$$

se, e somente se, são válidas as condições de salto (j_i), $1 \leq i \leq 4$, e, os elementos (ρ, u, p, e) e (ν, α) satisfazem as duas relações seguintes

$$[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u_x \approx 0 \quad e \quad [\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u u_x \approx 0.$$

O resultado seguinte, decorrente do teorema anterior e dos resultados 2.2.15, 2.2.17, 3.1.3 e 3.3.8, mostra que o sistema $(\tilde{S})$ tem soluções na forma de onda de choque conforme a definição 4.2.2. O mesmo é usado para a construção de $\mathcal{H}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$-soluções na forma de onda de choque em $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ (ver definição 4.4.8 e teorema 4.4.12). Para uma verificação do resultado, ver prova do Teorema 4.2.7 em [9] ou do Toerema 5.2 em [11].

4.2.6 Teorema. *Suponhamos verificada a hipótese 4.2.1. Suponhamos ainda que $\nu_i^{-1} \in \mathcal{E}_{QM}[I_{\alpha_i}^{\beta_i}]$ para cada $i \in \mathbb{I}$ e que $\nu_j \equiv \alpha_j$ em $\mathbb{R}_+^*$ para cada $j \in \mathbb{J}$. Então, existem H_ρ, H_p e H_e em $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ satisfazendo as hipóteses (c) e (d) da definição 4.2.2 tais que se, para cada H_u em $\mathcal{H}_\Lambda(\mathbb{R})$, as componentes da função generalizada (ρ, u, p, e) são dadas, respectivamente, pelas fórmulas (S_1), (S_2), (S_3) e (S_4) na definição 4.2.2 então, são válidas as asserções seguintes.*

(a) *Os elementos (ρ, u, p, e) e (ν, α) satisfazem as duas relações*

$$[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u_x \approx 0 \quad e \quad [\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u u_x \approx 0\,.$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

(b) *A função generalizada* (ρ, u, p, e) *é uma solução do sistema*

$$\begin{cases} \nabla_t \rho + (\rho u)_{m,x} \approx 0 \\ \nabla_t (\rho u) + (p + \rho u^2)_{m,x} \approx \{[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u_x\}_{m,x} \\ \nabla_t e + [(e+p)u]_{m,x} \approx \{[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u u_x\}_{m,x} \\ e_m \approx \lambda p_m + \frac{1}{2}(\rho u^2)_m, \end{cases}$$

se, e somente se, são válidas as condições de salto (j_i), $1 \leq i \leq 4$.

No caso $m = 1$, denotando por (x, t) um elemento genérico de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, do teorema 4.2.6, temos o resultado seguinte, o qual envolve as equações diferenciais parciais da hidrodinâmica em dimensão 1. O mesmo foi obtido em [9] (Teorema 4.2.7) e em [11] (Teorema 5.2).

4.2.7 Teorema. *Suponhamos verificada a hipótese 4.2.1. Suponhamos ainda que* $\nu_i^{-1} \in \mathcal{E}_{QM}[I_{\alpha_i}^{\beta_i}]$ *para cada* $i \in \mathbb{I}$ *e que* $\nu_j \equiv \alpha_j$ *em* $\mathbb{R}_+^*$ *para cada* $j \in \mathbb{J}$. *Então, existem* H_ρ, H_p *e* H_e *em* $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ *satisfazendo as hipóteses* (c) *e* (d) *da definição 4.2.2 tais que se, para cada* H_u *em* $\mathcal{H}_\Lambda(\mathbb{R})$, *as componentes da função generalizada* (ρ, u, p, e) *são dadas, respectivamente, pelas fórmulas* (S_1), (S_2), (S_3) *e* (S_4) *na definição 4.2.2 então, são válidas as asserções seguintes.*

(a) *Os elementos* (ρ, u, p, e) *e* (ν, α) *satisfazem as duas relações*

$$[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u_x \approx 0 \quad e \quad [\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u u_x \approx 0\,.$$

(b) *A função generalizada* (ρ, u, p, e) *é uma solução do sistema*

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x \approx 0 \\ (\rho u)_t + (p + \rho u^2)_x \approx \{[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u_x\}_x \\ e_t + [(e+p)u]_x \approx \{[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u u_x\}_x \\ e \approx \lambda p + \frac{1}{2}\rho u^2 \end{cases}$$

se, e somente se, são válidas as condições de salto (j_i), $1 \leq i \leq 4$, *onde* ρ *é a densidade,* u *a velocidade,* p *a pressão,* e *a energia total e* $\approx$ *é a relação de associação em* $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

unesp

4.2.8 Observação. Para cada $i = 1, \ldots, m$, seja $y_i \in C^\infty(\mathbb{R})$ a função definida por

$$y_i(s) := c\frac{s}{m}, \qquad (s \in \mathbb{R}).$$

Então, a função y considerada na definição 4.2.2 pode ser escrita na forma

$$y(t) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i(t_i), \qquad (t = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m).$$

Se $y_i^*\colon (x, s) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x - y_i(s) \in \mathbb{R}$ é a função associada a y_i temos

$$\sum_{i=1}^{m} y_i^*(x, t_i) = nx - \sum_{i=1}^{m} y_i(t_i) = nx - ny(t), \ ((x, t) = (x, t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m).$$

Assim, a função associada y^* (a função y) pode ser escrita na forma

$$y^*(x, t) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i^*(x, t_i), \quad ((x, t) = (x, t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$$

ou

$$y^* = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i^* \circ (\pi_m, P_i), \quad \text{em} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \tag{1}$$

onde $\pi_m\colon (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \mapsto x \in \mathbb{R}$ e $P_i\colon (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \mapsto t_i \in \mathbb{R}$. Cabe observar aqui que, para provar o teorema 4.2.6, somos tentados a usar o Teorema 4.2.7 de [9] (ou o Teorema 5.2 de [11]). Acontece que podemos aplicar o Teorema 4.2.7 às funçoes y_i^* associados aos elementos $y_i \in C^\infty(\mathbb{R})$. Quando tentamos fazer isso deparamo-nos com uma dificuldade técnica considerável, devido a expressão de y^*, dada pela fórmula (1) acima.

O resultado apresentado na proposição 3.3.3(D) nos permite estudar as soluções na forma de onda de choque, de acordo com a definição 4.2.2, do sistema $(\bar{S})$, considerado no início desta seção. O resultado seguinte decorre da proposição 3.3.3(D) (com $n = 1$ e $\ell = 3$) e da proposição 3.3.6 (com $n = 1$). Para uma prova do mesmo ver [9] (Teorema 4.3.5) ou [11] (Teorema 5.3). O resultado mostra que o sistema $(\bar{S})$ não tem soluções na forma de onda de choque de acordo com a definição 4.2.2.

unesp

4.2.9 Teorema. *Suponhamos verificada a hipótese 4.2.1. Suponhamos ainda que* $1 \in \mathbb{I}$ *e que* $\left[\varepsilon \mapsto (\nu_1(r\varepsilon) - \alpha_1)^{-1}\right] \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R})$, *para cada* $r > 0$. *Então, o sistema*

$$\begin{cases} \nabla_t \rho + (\rho u)_{m,x} = 0 \\ \nabla_t (\rho u) + (p + \rho u^2)_{m,x} = \{[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u_x\}_{m,x} \\ \nabla_t e + [(e+p)u]_{m,x} \approx \{[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u u_x\}_{m,x} \\ e_m \approx \lambda p_m + \frac{1}{2}(\rho u^2)_m, \end{cases}$$

não possui nenhuma $\mathcal{H}(\mathbb{R})$*-solução na forma de onda de choque em* $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$. *No caso em que* $(\nu, \alpha, \beta) = (\nu_{(\pi)}, \alpha_{(\pi)}, \beta_{(\pi)})$ *fazemos a hipótese adicional* $\alpha_k > 0$ *sempre que* $k = 2,\ 3$.

4.3 Funções generalizadas de Heaviside no espaço $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ e soluções na forma de onda de choque na álgebra $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ para sistemas de EDPs não homogêneos

Nesta seção, para cada $y \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ fixada, serão consideradas as funções associadas y^* e (y^*, π_{1+m}), introduzidas na seção 3.1 (ver (3.1.1) e (3.1.2)), as quais são definidas por

$$(4.3.1)\quad y^*(\lambda, t) := \lambda - y(t) \quad \text{e} \quad (y^*, \pi_{1+m})(\lambda, t) := (y^*(\lambda, t), t), \quad ((\lambda, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$$

onde $\pi_{1+m}\colon (\lambda, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \mapsto \lambda \in \mathbb{R}$. Será considerado também o conjunto associado $\Omega^* \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ definido por (ver (3.1.5) e (3.1.6))

$$(4.3.2)\qquad \Omega^* := \Omega_- \cup \Omega_+ = \{(\lambda, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \mid \lambda \neq y(t)\}.$$

Lembremos que o conjunto $\mathcal{E}_{QM}[\mathbb{R}^*_+]$ foi introduzido na definição 3.2.2(a).

4.3.1 Hipótese. Os dados fixados na hipótese 3.3.1(B) serão considerados aqui com $\ell = 3$. Assim, são considerados os elementos $\alpha_* = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\beta_* = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ e $\nu_* = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ de tal modo que cada componente de ν_* é uma função crescente

e é um elemento de $\mathcal{E}_{QM}[\mathbb{R}_+^*]$, e o conjunto $\{1,2,3\}$ é uma reunião de duas partes disjuntas $\mathbb{I}$ e $\mathbb{J}$ tais que

- para cada $i \in \mathbb{I}$, ν_i é estritamente crescente com $\mathrm{Im}(\nu_i) =]\alpha_i, \beta_i[$
- para cada $j \in \mathbb{J}$, ν_j não é estritamente crescente com $\mathrm{Im}(\nu_j) \subset [\alpha_j, \beta_j[$.

Indicamos com (ν, α, β) tanto $(\nu_{(s)}, \alpha_{(s)}, \beta_{(s)})$ como $(\nu_{(\pi)}, \alpha_{(\pi)}, \beta_{(\pi)})$ os elementos cujas componentes são definidas da maneira seguinte (ver 3.3.2)

$$\alpha_{(s)} := \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \qquad \alpha_{(\pi)} := \alpha_1\alpha_2\alpha_3$$
$$\beta_{(s)} := \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \qquad \beta_{(\pi)} := \beta_1\beta_2\beta_3$$
$$\nu_{(s)}(y_1,y_2,y_3) := \nu_1(y_1) + \nu_2(y_2) + \nu_3(y_3) \qquad \nu_{(\pi)}(y_1,y_2,y_3) := \nu_1(y_1)\nu_2(y_2)\nu_3(y_3).$$

Fixado $\lambda \in \mathbb{R}^*$, consideremos os sistemas $(\tilde{S})$, (S) e $(\bar{S})$, de equações diferenciais parciais não lineares, descritos a seguir. O sistema $(\tilde{S})$ é formado pelas equações (ver as notaões e convenções introduzidas em 1.2.5 e em 1.2.6)

$$\begin{cases} (E_1) & \nabla_t \rho + (\rho u)_{m,x} \approx 0 \\ (E_2) & \nabla_t(\rho u) + (p + \rho u^2)_{m,x} \approx \{[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u_x\}_{m,x} \\ (E_3) & \nabla_t e + [(e+p)u]_{m,x} \approx \{[\nu \circ (\rho, p, 4) - \alpha]\, u u_x\}_{m,x} \\ (E_4) & e_m \approx \lambda p_m + \frac{1}{2}(\rho u^2)_m \end{cases}$$

em que $\approx$ é a relação de associação em $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$ (ver 2.1.1). O sistema $(\bar{S})$ é formado pelas equações $(\bar{E}_1)$, $(\bar{E}_2)$, (E_3) e (E_4), e o sistema (S) é formado pelas equações $(\bar{E}_1)$, (E_2), (E_3) e (E_4), onde

$$\begin{cases} (\bar{E}_1) & \nabla_t \rho + (\rho u)_{m,x} = 0 \\ (\bar{E}_2) & \nabla_t(\rho u) + (p + \rho u^2)_{m,x} = \{[\nu \circ (\rho, p, E) - \alpha]\, u_x\}_{m,x}. \end{cases}$$

4.3.2 Definição. Se $\mathcal{S}$ denota qualquer um dos sistemas $(\tilde{S})$, $(\bar{S})$ ou (S), uma $\mathcal{H}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$-*solução do tipo de forma de onda de choque em* $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ do sistema $\mathcal{S}$ é qualquer elemento (ρ, u, p, e) de $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^4)$ tal que as funções componentes são dadas na forma

$$(S_1) \quad \rho = \Delta\rho H_\rho \circ (y^*, \pi_{1+m}) + \rho_\ell \qquad (S_2) \quad u = \Delta u H_u \circ (y^*, \pi_{1+m}) + u_\ell$$
$$(S_3) \quad p = \Delta p H_p \circ (y^*, \pi_{1+m}) + p_\ell \qquad (S_4) \quad e = \Delta e H_e \circ (y^*, \pi_{1+m}) + e_\ell$$

as quais são soluções do sistema $\mathcal{S}$ e satisfazem as hipóteses seguintes:

(A_1) $y^* \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m)$ e $(y^*, \pi_{1+m}) \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m; \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m)$ são as funções associadas a alguma função $y \in C^\infty(\mathbb{R})$ (ver (4.3.1)) tal que $y(0) = 0$.

(A_2) Para cada $\tau = \rho, u, p, e$, existe (τ_r, τ_ℓ) em $C^\infty(\mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^*_+$ tal que

$$0 < \tau_r(t) < \tau_\ell, \quad (t \in \mathbb{R}^m).$$

Nesse caso, $\Delta\tau \in C^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^*_-)$ é a função em definida por

$$\Delta\tau(t) := \tau_r(t) - \tau_\ell, \qquad (t \in \mathbb{R}^m).$$

(A_3) $H_\rho, H_u, H_p, H_e \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$.

(A_4) Cada H_τ, $\tau = \rho, u, p, e$, tem um representante $\widehat{H}_\tau$ tal que

(1) $$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \left|\widehat{H}_\tau(\varepsilon, \lambda, t)\right| \leq \frac{\tau_r(t)\varepsilon - \tau_\ell}{\Delta\tau(t)}, \quad ((\varepsilon, t) \in]0, 1] \times \mathbb{R}^m)$$

(2) $$(\forall K \subset\subset \mathbb{R}^*)(\forall L \subset\subset \mathbb{R}^m)\,(\exists \eta \in]0, 1])\mid$$
$$\sup_{(\varepsilon,\lambda,t)\in]0,\eta[\times K\times L} \left|\widehat{H}_\tau(\varepsilon, \lambda, t)\right| < \inf_{t\in L} \left\{-\tfrac{\tau_\ell}{\Delta\tau(t)}\right\}.$$

$(\mathbf{A_5})$ Para cada $H \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ se tem $[H(H_u)_\lambda]\,|_{\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^m} \approx 0$.

4.3.3 Observação. **(a)** Para cada $H \in \mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ e cada $\tau = \rho, u, p, e$, se $\Delta\tau$ é como no item (A_2) da definição 4.3.2, temos

$$(\Delta\tau H) \circ (y^*, \pi_{1+m}) = \Delta\tau[H \circ (y^*, \pi_{1+m})]\,.$$

(b) A hipótese (A_5) da definição 4.3.2 é equivalente à condição (ver (4.3.2))

$$\{[H \circ (y^*, \pi_{1+m})]u_x\}\,|_{\Omega^*} \approx 0\,, \quad (H \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)).$$

De fato, a afirmação (a) segue da observação 3.1.6. Por outro lado, das fórmulas (S_2) e 3.1.7(2), temos que $u_x = \Delta u\,[(H_u)_\lambda \circ (y^*, \pi_{1+m})]$. Donde, como

$$(y^*, \pi_{1+m})(\Omega^*) = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^m, \quad \Delta u \in C^\infty(\mathbb{R}^m) \quad \text{e} \quad \Delta u(t) \neq 0, \quad (t \in \mathbb{R}^m)$$

pelo teorema 2.1.2(b) e pela proposição 3.1.1(1) segue a afirmação (b).

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Nas condições e notações da definição 4.3.2, introduzindo as seguintes funções generalizadas

$$\begin{aligned} \rho_* &:= \Delta\rho H_\rho + \rho_\ell \qquad & u_* &:= \Delta u H_u + u_\ell \\ p_* &:= \Delta p H_p + p_\ell \qquad & e_* &:= \Delta e H_e + e_\ell \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

as funções componentes da solução (ρ, u, p, e) podem ser escritas na forma

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_* \circ (y^*, \pi_{1+m}) \qquad & u &= u_* \circ (y^*, \pi_{1+m}) \\ p &= p_* \circ (y^*, \pi_{1+m}) \qquad & e &= e_* \circ (y^*, \pi_{1+m}). \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

Portanto, a função generalizada (ρ, u, p, e) pode ser escrita assim

$$(\rho, u, p, e) = (\rho_*, u_*, p_*, e_*) \circ (y^*, \pi_{1+m}). \tag{4.3.5}$$

Nesta seção, a menos de menção explícita em contrário, assumiremos a hipótese seguinte.

4.3.4 Hipótese. Vamos considerar fixados os seguintes elementos.

(a) Uma função $y \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ tal que $y(0) = 0$.

(b) Para cada $\tau = \rho,\ u,\ p,\ e$ um elemento (τ_r, τ_ℓ) em $C^\infty(\mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}_+^*$ de modo que $0 < \tau_r(t) < \tau_\ell$ para todo $t \in \mathbb{R}^m$.

(c) Uma função generalizada (H_ρ, H_u, H_p, H_e) de modo que suas funções componentes são elementos de $\mathcal{H}_p(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$.

Nessas condições serão considerados:

- as funções y^*, (y^*, π_{1+m}) e $(\Delta\rho, \Delta u, \Delta p, \Delta e)$ introduzidas, respectivamente, nos itens (A_1) e (A_2) da definição 4.3.2
- os elementos a e b fixados na hipótese 3.3.1(A) como sendo dados por

$$a := (\rho_r, p_r, e_r) \in C^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^3) \quad \text{e} \quad b := (\rho_\ell, p_\ell, e_\ell) \in \mathbb{R}^3$$

- a função generalizada (ρ_*, u_*, p_*, e_*), cujas componentes são definidas em (4.3.3)

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

- a função generalizada (ρ, u, p, e) de modo que as suas funções componentes são definidas, respectivamente, pelas fórmulas (S_1), (S_2), (S_3) e (S_4), dadas na definição 4.3.2.

Serão importantes também, para o estudo de resolubilidade dos sistemas de EDPs, as fórmulas apresentadas a seguir.

4.3.5 Condições de salto. (Em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$) Serão consideradas também as fórmulas descritas em continuação, chamadas *fórmulas ou condições de salto em* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ das equações diferenciais parciais da hidrodinâmica, as quais são relações entre os elementos y, (ρ_r, u_r, p_r, e_r) e $(\rho_\ell, u_\ell, p_\ell, e_\ell)$, fixados nos itens (a) e (b) da hipótese 4.3.4 (ver convenção 1.2.5(a))

$$(j_1^m)\ \nabla y = [\Delta u(1 + \tfrac{\rho_\ell}{\Delta\rho}) + u_\ell]_m \qquad (j_2)\ \tfrac{\Delta p}{\Delta u^2} = \rho_\ell(1 + \tfrac{\rho_\ell}{\Delta\rho})$$
$$(j_3)\ \Delta p(1 + \tfrac{u_\ell}{\Delta u}) = \rho_\ell \tfrac{\Delta e}{\Delta\rho} - (e_\ell + p_\ell) \qquad (j_4)\ e_k = \lambda p_k + \tfrac{1}{2}\rho_k u_k^2,\ k = r, l.$$

Observemos que, se $m = 1$ e $y' \equiv c$ para algum $c \in \mathbb{R}$ e, se (ρ_r, u_r, p_r, e_r) é uma função constante, então as fórmulas $(j_1^m) - (j_4)$ dadas em 4.3.5 são exatamente as fórmulas de salto $(j_1) - (j_4)$ dadas em 4.1.3.

Nas condições e notações dadas em 4.3.1, 4.3.4 e 4.3.5 temos os resultados apresentados a seguir.

4.3.6 Lema. *Se ρ_r e u_r são funções constantes então, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$(j_1) \qquad c = \Delta u \left(1 + \frac{\rho_\ell}{\Delta\rho}\right) + u_\ell\,.$$

Nesse caso, vale a fórmula (j_1^m) se, e somente se,

$$(1) \qquad y(t) = c\sum_{i=1}^{m} t_i, \qquad (t = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m)\,.$$

Demonstração. Se (ρ_r, u_r) é uma função constante, escolhendo

$$c := \Delta u \left(1 + \frac{\rho_\ell}{\Delta\rho}\right) + u_\ell$$

segue a validade da primeira afirmação. Se os elementos y, (ρ_r, u_r) e (ρ_ℓ, u_ℓ) verificam a fórmula (j_1^m), usando a fórmula (j_1), temos

$$\frac{\partial y}{\partial t_i} \equiv c \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^m \qquad (1 \le i \le m).$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

Donde, lembrando que $y(0) = 0$, segue que o par (y, c) verifica a fórmula (1). Por outro lado, sendo válida a condição de salto (j_1), a recíproca da segunda afirmação é clara. □

Os próximos três resultados, juntamente com o lema 4.3.6 e a proposição 3.1.15, nos permitirão estudar a resolubilidade do sistema $(\tilde{S})$.

4.3.7 Proposição. *Se* $\phi := \phi_1 + \cdots + \phi_5$ *e* $\varphi := (\phi + \Delta p)_m - \psi \nabla y$, *onde*

$$\psi := \Delta u(\Delta\rho + \rho_\ell) + u_\ell \Delta\rho \qquad \phi_2 := 2\rho_\ell u_\ell \Delta u \qquad \phi_4 := \rho_\ell (\Delta u)^2$$
$$\phi_1 := u_\ell^2 \Delta\rho \qquad \phi_3 := 2u_\ell \Delta\rho \Delta u \qquad \phi_5 := \Delta\rho(\Delta u)^2$$

então, são válidas as asserções seguintes.

(a) *Se* ρ_r *é uma função constante então,* $\nabla\psi \equiv 0$ *em* $\mathbb{R}^m$ *se, e só se,* $\nabla(\Delta u) \equiv 0$ *em* $\mathbb{R}^m$.

(b) *Se é válida a fórmula* (j_1^m) *então, vale a condição* (j_2) *se, e só se,* $\varphi \equiv 0$ *em* $\mathbb{R}^m$.

(c) *Para cada* $H \in \mathcal{H}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ *é válida a condição seguinte*

$$(1) \qquad \nabla_t (\rho u) + \left(p + \rho u^2\right)_{m,x} \approx \left[H \circ (y^*, \pi_{1+m})\right] \nabla\psi + \left[H \circ (y^*, \pi_{1+m})\right]_x \varphi.$$

Demonstração. **(a)** Se $\Delta\rho$ é uma função constante então, as funções $\Delta\rho + \rho_\ell$ e $u_\ell \Delta\rho$ são também constantes, com $\Delta\rho + \rho_\ell > 0$. Então, a validade da afirmação se segue usando a igualdade $\nabla\psi \equiv (\Delta\rho + \rho_\ell)\nabla(\Delta u)$ em $\mathbb{R}^m$.

(b) Escrevendo a função ϕ na forma

$$\phi = \phi_5 + \phi_4 + \rho_\ell(\Delta u)^2 + (\Delta u)^2 \frac{\rho_\ell^2}{\Delta\rho} + \phi_3 + \phi_2 + \phi_1 - \rho_\ell(\Delta u)^2 \left(1 + \frac{\rho_\ell}{\Delta\rho}\right)$$

e substituindo as expresões das funções $\phi_1, \ldots, \phi_5$ nessa igualdade obtemos

$$\phi = \Delta\rho \left[\Delta u \left(1 + \frac{\rho_\ell}{\Delta\rho}\right) + u_\ell\right]^2 - \rho_\ell(\Delta u)^2 \left(1 + \frac{\rho_\ell}{\Delta\rho}\right).$$

Donde segue a identidade

$$(3) \qquad \Delta\rho \left[\Delta u \left(1 + \frac{\rho_\ell}{\Delta\rho}\right) + u_\ell\right]^2 = \phi + \rho_\ell(\Delta u)^2 \left(1 + \frac{\rho_\ell}{\Delta\rho}\right).$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Por outro lado, substituindo as igualdades

$$\nabla y = \left[\Delta u\left(1+\frac{\rho_\ell}{\Delta\rho}\right)+u_\ell\right]_m \quad \text{e} \quad \psi = \Delta\rho\left[\Delta u\left(1+\frac{\rho_\ell}{\Delta\rho}\right)+u_\ell\right]$$

na expressão da função φ, temos

$$\varphi = -\Delta\rho\left\{\left[\Delta u\left(1+\frac{\rho_\ell}{\Delta\rho}\right)+u_\ell\right]^2\right\}_m + (\phi+\Delta p)_m$$

o que junto com a igualdade (3) acarreta por sua vez

$$\varphi = \left[\Delta p - \rho_\ell(\Delta u)^2\left(1+\frac{\rho_\ell}{\Delta\rho}\right)\right]_m .$$

A afirmação segue então usando essa fórmula.

(**c**) Seja K em $\mathcal{H}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m)$ fixado. Para a obtenção da fórmula (1) serão usados os resultados apresentados em 2.1.2, 3.1.4, 3.1.7 e 3.1.10. Das expressões de ρ e u dadas, respectivamente, pelas fórmulas (S_1) e (S_2) temos

$$\rho u = \rho_\ell u_\ell + u_\ell\Delta\rho H_\rho\circ(y^*,\pi_{1+m}) + \rho_\ell\Delta u H_u\circ(y^*,\pi_{1+m}) + \Delta\rho\Delta u(H_\rho H_u)\circ(y^*,\pi_{1+m}).$$

Pelo corolário 3.1.4 valem as relações

$$H\circ(y^*,\pi_{1+m}) \approx K\circ(y^*,\pi_{1+m}), \quad \text{para} \quad H = H_\rho,\ H_u,\ H_\rho H_u.$$

Dessas duas condições usando o teorema 2.1.2(b) obtemos a relação

$$\rho u \approx \rho_\ell u_\ell + \psi\left[K\circ(y^*,\pi_{1+m})\right].$$

Então, como (ver as fórmulas 3.1.7(3) e 3.1.10(3))

$$\nabla_t\left[K\circ(y^*,\pi_{1+m})\right] \approx -\left[K\circ(y^*,\pi_{1+m})\right]_x\nabla y$$

usando o teorema 2.1.2(c) temos

$$\nabla_t(\rho u) \approx \left[K\circ(y^*,\pi_{1+m})\right]\nabla\psi - \psi\left[K\circ(y^*,\pi_{1+m})\right]_x\nabla y. \tag{4}$$

Por outro lado, das fórmulas (S_1) e (S_2), temos também a igualdade

$$\rho u^2 = \rho_\ell u_\ell^2 + \left(\phi_1 H_\rho + \phi_2 H_u + \phi_3 H_\rho H_u + \phi_4 H_u^2 + \phi_5 H_\rho H_u^2\right)\circ(y^*,\pi_{1+m})$$

donde, usando as propriedades 2.1.2(b) e 3.1.4, vem

$$\rho u^2 \approx \rho_\ell u_\ell^2 + \phi\,[K \circ (y^*, \pi_{1+m})]$$

e, portanto, pela propriedade 2.1.2(c), temos

(5) $$(\rho u^2)_x \approx \phi\,[K \circ (y^*, \pi_{1+m})]_x \ .$$

De modo análogo, a partir da fórmula (S_3), obtemos $p_x \approx \Delta p\,[K \circ (y^*, \pi_{1+m})]_x$, o que junto com as relações (4) e (5) implica a validade da condição (1). □

4.3.8 Proposição. *Se* $\psi := \psi_1 + \cdots + \psi_5$, *onde*

$$\psi_1 := (e_\ell + p_\ell)\Delta u \quad \psi_3 := u_\ell \Delta e \qquad \psi_5 := \Delta u \Delta e$$
$$\psi_2 := u_\ell \Delta p \qquad\quad \psi_4 := \Delta u \Delta p$$

então, são válidas as asserções seguintes.

(a) *Se é válida a fórmula* (j_1^m) *então, vale a condição* (j_3) *se, e só se,* $\psi_m \equiv \Delta e \nabla y$ *em* $\mathbb{R}^m$.

(b) *Para cada* $H \in \mathcal{H}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ *temos a condição seguinte*

(1) $$\nabla_t e + [(e+p)u]_{m,x} \approx [H \circ (y^*, \pi_{1+m})]_x\,(\psi_m - \Delta e \nabla y) \ .$$

Demonstração. **(a)** Levando as expressões das funções $\psi_1, \ldots, \psi_5$ na expressão da função ψ obtemos

$$\psi = \Delta u \Delta p \left(1 + \frac{u_\ell}{\Delta u}\right) + (e_\ell + p_\ell)\Delta u + u_\ell \Delta e + \Delta u \Delta e.$$

Por outro lado, usando a fórmula (j_1^m) temos

$$\Delta e \nabla y = (\Delta u \Delta e)_m + \rho_\ell \frac{\Delta e}{\Delta \rho}(\Delta u)_m + u_\ell (\Delta e)_m.$$

Das igualdades acima a expressão da função $\psi_m - \Delta e \nabla y$ pode ser escrita na forma

$$\psi_m - \Delta e \nabla y = \left\{ \left[\Delta p \left(1 + \frac{u_\ell}{\Delta u}\right) + (e_\ell + p_\ell) \right] - \rho_\ell \frac{\Delta e}{\Delta \rho} \right\} (\Delta u)_m.$$

unesp

A afirmação segue então usando essa igualdade, lembrando que $\Delta u(t) < 0$ para todo $t \in \mathbb{R}^m$.

(**b**) Fixemos um K em $\mathcal{H}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$. O argumento usado aqui, para a obtenção da fórmula (1), é análogo ao que foi feito para a verificação da fórmula (1) da proposição 4.3.7 e, para tanto, serão usados também os resultados 2.1.2, 3.1.4, 3.1.7 e 3.1.10. Da fórmula (S_4), usando as propriedades 3.1.4 e 2.1.2(b), temos a relação

$$e \approx \Delta e\,[K \circ (y^*, \pi_{1+m})] + e_\ell$$

donde, observando que (ver as fórmulas 3.1.7(3) e 3.1.10(3))

$$\nabla_t\,[K \circ (y^*, \pi_{1+m})] \approx -\,[K \circ (y^*, \pi_{1+m})]_x\,\nabla y$$

e usando a propriedade 2.1.2(c), segue que

$$\nabla_t e \approx -\Delta e\,[K \circ (y^*, \pi_{1+m})]_x\,\nabla y. \tag{2}$$

De outro lado, das fórmulas (S_2), (S_3) e (S_4), após um cálculo, temos

$$(e+p)u = (e_\ell + p_\ell)u_\ell + (\psi_1 H_u + \psi_2 H_p + \psi_3 H_e + \psi_4 H_u H_p + \psi_5 H_u H_e) \circ (y^*, \pi_{1+m})$$

donde, usando as propriedades 3.1.4 e 2.1.2(b), vem

$$(e+p)u \approx (e_\ell + p_\ell)u_\ell + \psi\,[K \circ (y^*, \pi_{1+m})]\,.$$

Essa condição, junto com a propriedade 2.1.2(c), acarreta

$$[(e+p)u]_x \approx \psi\,[K \circ (y^*, \pi_{1+m})]_x$$

o que por sua vez, junto com a relação (2), implica a validade da condição (1). □

Para a verificação da proposição apresentada a seguir serão usados os resultados 2.1.2, 3.1.4, 3.1.7 e 3.1.10.

4.3.9 Proposição. *Se $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$ é a função definida por*

$$\phi := \Delta\rho \left\{ -\nabla y + \left[\Delta u \left(1 + \frac{\rho_\ell}{\Delta\rho} \right) + u_\ell \right]_m \right\}$$

então, para cada $H \in \mathcal{H}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$, temos a relação

$$\nabla_t \rho + (\rho u)_{m,x} \approx [H \circ (y^*, \pi_{1+m})]\,\nabla(\Delta\rho) + [H \circ (y^*, \pi_{1+m})]_x\,\phi\,. \tag{1}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Demonstração. Seja $K \in \mathcal{H}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ fixado. Da expressão de ρ dada por (S_1), usando os resultados 3.1.4 e 2.1.2(b), segue que $\rho \approx \Delta\rho\,[K \circ (y^*, \pi_{1+m})] + \rho_\ell$. Donde, observando que $\nabla_t\,[K \circ (y^*, \pi_{1+m})] \approx -\,[K \circ (y^*, \pi_{1+m})]_x\,\nabla y$ e usando a propriedade 2.1.2(c) obtem-se a relação

$$\nabla_t \rho \approx [K \circ (y^*, \pi_{1+m})]\,\nabla(\Delta\rho) - \Delta\rho\,[K \circ (y^*, \pi_{1+m})]_x\,\nabla y. \tag{2}$$

De modo análogo, das fórmulas (S_1) e (S_2), usando 2.1.2(b) e 3.1.4, obtemos

$$\rho u \approx (\Delta\rho\Delta u + \rho_\ell \Delta u + u_\ell \Delta\rho)\,[K \circ (y_*, \pi_{1+m})] + u_\ell \rho_\ell.$$

Donde, pela propriedade 2.1.2(c), vale a condição

$$(\rho u)_x \approx (\Delta\rho\Delta u + \rho_\ell \Delta u + u_\ell \Delta\rho)\,[K \circ (y^*, \pi_{1+m})]_x$$

o que junto com (2) implica a equação (1). □

4.3.10 Proposição. *Se as funções generalizadas (ρ, p, e) e u satisfazem, respectivamente, as hipóteses $(A_4)(1)$ e (A_5) da definição 4.3.2 então, valem as relações seguintes, em $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$*

$$\{[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]u_x\}\,|_{\Omega^*} \approx 0 \tag{1}$$

$$\{[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]uu_x\}\,|_{\Omega^*} \approx 0. \tag{2}$$

Demonstração. Como cada componente da função ν_* é um elemento de $\mathcal{E}_{QM}[\mathbb{R}^*_+]$, pela hipótese $(A_4)(1)$ da definição 4.3.2, pelas condições (A) e (B) da proposição 3.3.3 e pela definição 3.2.4, a função generalizada $\nu \circ (\rho_*, p_*, e_*)$ tem como representante à função $\nu \circ (\widehat{\rho}_*, \widehat{p}_*, \widehat{e}_*)$, onde $\widehat{\rho}_* = \Delta\rho\widehat{H}_\rho + \rho_\ell$, $\widehat{p}_* = \Delta p\widehat{H}_p + p_\ell$ e $\widehat{e}_* = \Delta e\widehat{H}_e + e_\ell$. Em conseqüência, pela definição 1.1.9, a função

$$\nu \circ (\widehat{\rho}_* \circ (y^*, \pi_{1+m}), \widehat{p}_* \circ (y^*, \pi_{1+m}), \widehat{e}_* \circ (y^*, \pi_{1+m}))$$

é um representante de $\nu \circ (\rho, p, e)$. Além disso, como $H_\tau \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ para cada $\tau = \rho, p, e$, pela proposição 3.3.3(C), temos que

$$V := (\Delta\nu)^{-1}\,[\nu \circ (\rho_*, p_*, e_*) - \nu_\ell] \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m) \tag{3}$$

unesp

onde

$$\Delta\nu := \nu_r - \nu_\ell, \quad \nu_r := \nu \circ (\rho_r, p_r, e_r) \text{ e } \nu_\ell := \nu(\rho_\ell, p_\ell, e_\ell). \tag{4}$$

Como $(y^*, \pi_{1+m})(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ e $\nu \circ (\rho_*, p_*, e_*) = \Delta\nu V + \nu_\ell$, pela proposição 3.1.1(2), vale

$$\nu \circ (\rho, p, e) = \Delta\nu V \circ (y^*, \pi_{1+m}) + \nu_\ell\,. \tag{5}$$

Pela proposição 2.3.9(b), temos $(H_u)_\lambda|_{\mathbb{R}^\bullet \times \mathbb{R}^m} \approx 0$ e, portanto, como $\Delta u \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, pelo teorema 2.1.2(b), obtemos $[\Delta u (H_u)_\lambda]|_{\mathbb{R}^\bullet \times \mathbb{R}^m} \approx 0$. Então, sendo válida a igualdade $u_x = \Delta u\,[(H_u)_\lambda \circ (y^*, \pi_{1+m})]$, pela proposição 3.1.1(1), temos $u_x|_{\Omega^\bullet} \approx 0$. Assim,

$$[(\nu_\ell - \alpha)u_x]\,|_{\Omega^\bullet} \approx 0 \tag{6}$$

Por outro lado, pela condição (3) acima e pela observação 4.3.3(b), temos a relação $\{[V \circ (y^*, \pi_{1+m})]\,u_x\}\,|_{\Omega^\bullet} \approx 0$ e, portanto, pelo teorema 2.1.2(b), vale

$$\{[\Delta u V \circ (y^*, \pi_{1+m})]\,u_x\}\,|_{\Omega^\bullet} \approx 0. \tag{7}$$

Das condições (5), (6) e (7) segue a condição (1). De modo análogo ao que foi feito acima, levando em conta que $u_x|_{\Omega^\bullet} \approx 0$ e que

$$\begin{aligned}[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]uu_x = \;& \Delta u \Delta\nu [(V H_u) \circ (y^*, \pi_{1+m})]u_x + u_\ell \Delta\nu\,[V \circ (y^*, \pi_{1+m})]\,u_x + \\ & (\nu_\ell - \alpha)\Delta u\,[H_u \circ (y^*, \pi_{1+m})]\,u_x + u_\ell(\nu_\ell - \alpha)u_x,\end{aligned}$$

usando a hipótese (A_5), segundo a qual valem as relações seguintes

$$\{[H_u \circ (y^*, \pi_{1+m})]\,u_x\}\,|_{\Omega^\bullet} \approx 0, \quad \{[V \circ (y^*, \pi_{1+m})]\,u_x\}\,|_{\Omega^\bullet} \approx 0$$

$$\{[(V H_u) \circ (y^*, \pi_{1+m})]\,u_x\}\,|_{\Omega^\bullet} \approx 0$$

e usando a proposição 2.1.2(b), obtemos também a relação dada em (2). □

4.3.11 Lema. *Com as hipóteses da proposição 4.3.10, são válidas as afirmações descritas a seguir*

(a) *Se* $K := H_u$ *então, é válida a equivalência seguinte*

$$[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u_x \approx 0 \Longleftrightarrow VK_\lambda \approx \frac{\alpha - \nu_\ell}{\Delta\nu} K_\lambda$$

onde V *e* $(\nu_r, \nu_\ell, \Delta\nu)$ *são dadas, respectivamente, pelas fórmulas* (3) *e* (4) *na demonstração da proposição 4.3.10.*

(b) *Se as condições equivalentes de* (a) *são válidas então, é válida a equivalência*

$$[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, uu_x \approx 0 \Longleftrightarrow VKK_\lambda \approx \frac{1}{2}\frac{\alpha - \nu_\ell}{\Delta\nu} K_\lambda.$$

Demonstração. **(a)** Sendo $u_x = (u_*)_\lambda \circ (y^*, \pi_{1+m})$,

$$\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha = [\nu \circ (\rho_*, p_*, e_*) - \alpha] \circ (y^*, \pi_{1+m})$$

(ver (4.3.5)), $(y^*, \pi_{1+m})(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ e (y^*, π_{1+m}) um C^∞-difeomorfismo, pela propriedade 3.1.1(1), temos a equivalência

$$[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u_x \approx 0 \Longleftrightarrow [\nu \circ (\rho_*, p_*, e_*) - \alpha]\, (u_*)_\lambda \approx 0$$

donde, usando a igualdade (ver a fórmula (5) na demonstração da proposição 4.3.10) $\nu \circ (\rho_*, p_*, e_*) = \Delta\nu V + \nu_\ell$, segue que

$$(1) \qquad [\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u_x \approx 0 \Longleftrightarrow [\Delta\nu V + (\nu_\ell - \alpha)]\, (u_*)_\lambda \approx 0.$$

Como $(u_*)_\lambda = \Delta u K_\lambda$ e $\Delta u \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, usando o teorema 2.1.2(b), temos

$$(2) \qquad [\Delta\nu V + (\nu_\ell - \alpha)]\, (u_*)_\lambda \approx 0 \Longleftrightarrow \Delta\nu V K_\lambda + (\nu_\ell - \alpha) K_\lambda \approx 0.$$

Das equivalências (1) e (2) segue a equivalência requerida.

(b) Usando a propriedade 3.1.1(1) de modo análogo ao que foi feito para a obtenção da equivalência dada em (1), temos

$$(3) \qquad [\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, uu_x \approx 0 \Longleftrightarrow [\Delta\nu V + (\nu_\ell - \alpha)]\, u_*(u_*)_\lambda \approx 0.$$

Da igualdade $u_*(u_*)_\lambda = (\Delta u)^2 K K_\lambda + u_\ell K_\lambda$ segue que

$$[\Delta\nu V + (\nu_\ell - \alpha)]\, u_*(u_*)_\lambda = (\Delta u)^2\, [\Delta\nu V + (\nu_\ell - \alpha)]\, K K_\lambda + u_\ell\, [\Delta\nu V + (\nu_\ell - \alpha)]\, K_\lambda$$

unesp

donde, como $(\Delta u)^2 \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, $u_\ell > 0$ e $\Delta\nu V K_\lambda + (\nu_\ell - \alpha)K_\lambda \approx 0$ (dado que a equivalência em (a) é válida), usando o teorema 2.1.2(b), vem

$$(4) \qquad [\Delta\nu V + (\nu_\ell - \alpha)]\, u_*(u_*)_\lambda \approx 0 \Longleftrightarrow [\Delta\nu V + (\nu_\ell - \alpha)]\, K K_\lambda \approx 0.$$

Como $K^2 \approx K$ (ver 2.3.9(d) e 2.3.11(e)) temos que $(K^2)_\lambda \approx K_\lambda$; donde, como $(K^2)_\lambda = 2KK_\lambda$ (pela regra da cadeia), segue que $2KK_\lambda \approx K_\lambda$. Esta condição junto com a igualdade

$$[\Delta\nu V + (\nu_\ell - \alpha)]\, K K_\lambda = \Delta\nu V K K_\lambda + (\nu_\ell - \alpha) K K_\lambda$$

implica a equivalência seguinte

$$(5) \qquad [\Delta\nu V + (\nu_\ell - \alpha)]\, K K_\lambda \approx 0 \Longleftrightarrow \Delta\nu V K K_\lambda + \frac{1}{2}(\nu_\ell - \alpha) K_\lambda \approx 0.$$

Das equivalências (3), (4) e (5) segue a equivalência em questão. □

4.4 Funções generalizadas de Heaviside no espaço $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ e soluções na forma de onda de choque na álgebra $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ para o sistema $(\tilde{S})$

De posse dos resultados preparatórios, apresentados na proposição 3.1.15 e nos resultados da seção anterior, podemos estudar a resolubilidade do sistema $(\tilde{S})$, proposto na seção anterior. Os resultados necessários para tanto estão contidos nas próximas quatro proposições as quais passamos a apresentar. Serão usadas as condições e notações dadas em 4.3.1, 4.3.4 e 4.3.5.

4.4.1 Proposição. *A função generalizada (ρ, u) é uma solução da equação*

$$(E_1) \qquad \nabla_t \rho + (\rho u)_{m,x} \approx 0$$

se, e somente se, ρ_r é uma função constante e é válida a condição (j_1^m).

Demonstração. Fixemos um K em $\mathcal{H}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m)$ qualquer. Se $\phi\in C^\infty(R^m;\mathbb{R}^m)$ é a função definida por

$$\phi := \Delta\rho\left\{-\nabla y+\left[\Delta u\left(1+\frac{\rho_\ell}{\Delta\rho}\right)+u_\ell\right]_m\right\} \tag{1}$$

pela proposição 4.3.9 os elementos (ρ,u) e $(y,\Delta\rho,\phi)$ verificam a relação

$$\nabla_t\rho+(\rho u)_{m,x}\approx[K\circ(y^*,\pi_{1+m})]\,\nabla(\Delta\rho)+[K\circ(y^*,\pi_{1+m})]_x\,\phi. \tag{2}$$

Suponhamos que (ρ,u) é uma solução da equaçao (E_1). Então, pela equação anterior temos que

$$[K\circ(y^*,\pi_{1+m})]\,\nabla(\Delta\rho)+[K\circ(y^*,\pi_{1+m})]_x\,\phi\approx 0.$$

Sendo assim, pela proposição 3.1.15(b) (para $n=1$), valem as condições seguintes

$$\nabla(\Delta\rho)\equiv 0 \quad\text{em}\quad \mathbb{R}^m \qquad\text{e}\qquad \phi\equiv 0 \quad\text{em}\quad \mathbb{R}^m. \tag{3}$$

Da primeira condição, segue que $\Delta\rho$ (e portanto ρ_r) é uma função constante. Da segunda condição e da fórmula (1), observando que $\Delta\rho<0$, concluímos que os elementos y, (ρ_r,u_r) e (ρ_ℓ,u_ℓ) verificam a fórmula (j_1^m). Reciprocamente, suponhamos que ρ_r é uma função constante e que é válida a fórmula (j_1^m). Então, valem as condições dadas em (3), sendo que a segunda em virtude da fórmula (1). Levando essas condições na relação (2), vemos que o par (ρ,u) é uma solução da equação (E_1). □

Usando as proposições 4.3.7 e 4.4.1, temos o resultado seguinte.

4.4.2 Proposição. *Se as funções (H_ρ,H_p) e H_u satisfazem, respectivamente, as hipóteses $(A_4)(1)$ e (A_5) da definição 4.3.2 então, a função generalizada (ρ,u,p) é uma solução do sistema*

$$\begin{cases}(E_1) & \nabla_t\rho+(\rho u)_{m,x}\approx 0\\ (E_2) & \nabla_t(\rho u)+(p+\rho u^2)_{m,x}\approx\{[\nu\circ(\rho,p,e)-\alpha]u_x\}_{m,x}\end{cases}$$

se, e somente se, são válidas as afirmações descritas a seguir.

(a) *A função (ρ_r,u_r,p_r) é constante.*

(b) *Existe* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $y(t) = c\sum_{i=1}^{m} t_i$ *para todo* $t = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m$.

(c) *Os elementos* c, (ρ_r, u_r, p_r) *e* $(\rho_\ell, u_\ell, p_\ell)$ *verificam as fórmulas* (j_1) *e* (j_2).

(d) *Os elementos* (ρ, u, p, e) *e* (ν, α) *verificam a relação*

$$[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u_x \approx 0. \tag{1}$$

Demonstração. Fixemos um $K \in \mathcal{H}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ qualquer. Se $\phi := \phi_1 + \cdots + \phi_5$ e $\varphi := (\phi + \Delta p)_m - \psi \nabla y$, onde

$$\psi := \Delta u(\Delta\rho + \rho_\ell) + u_\ell \Delta\rho \qquad \phi_2 := 2\rho_\ell u_\ell \Delta u \qquad \phi_4 := \rho_\ell (\Delta u)^2$$
$$\phi_1 := u_\ell^2 \Delta\rho \qquad\qquad\qquad \phi_3 := 2u_\ell \Delta\rho \Delta u \qquad \phi_5 := \Delta\rho(\Delta u)^2$$

então, pela proposição 4.3.7, são válidas as propriedades seguintes

(2) Se $\Delta\rho$ é constante então, $\nabla\psi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^m \iff \nabla(\Delta u) \equiv 0$ em $\mathbb{R}^m$.

(3) Se é válida a fórmula (j_1^m) então,
vale a condição (j_2) se e só se $\varphi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^m$.

$$\nabla_t(\rho u) + (p + \rho u^2)_{m,x} \approx [K \circ (y^*, \pi_{1+m})]\, \nabla\psi + [K \circ (y^*, \pi_{1+m})]_x\, \varphi. \tag{4}$$

($\Rightarrow$). Suponhamos que a função (ρ, u, p, e) é uma solução das equações (E_1) e (E_2). Sendo (ρ, u) uma solução da equação (E_1), pela proposição 4.4.1, a função $\Delta\rho$ é constante e os elementos y, (ρ_r, u_r) e (ρ_ℓ, u_ℓ) verificam a fórmula (j_1). Sendo (ρ, u, p, e) uma solução da equação (E_2), usando a equação (4), obtemos

$$[K \circ (y^*, \pi_{1+m})]\, \nabla\psi + [K \circ (y^*, \pi_{1+m})]_x\, \varphi \approx \{[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha] u_x\}_{m,x}.$$

Então, pelas proposições 3.1.15(a) (para $n = 1$) e 4.3.10(1), são válidas a relação (1) acima e as condições seguintes

$$\nabla\psi \equiv 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^m \quad \text{e} \quad \varphi \equiv 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^m.$$

Sendo $\Delta\rho$ uma função constante, usando a propriedade (2) e a condição $\nabla\psi \equiv 0$, segue que Δu (e por tanto u_r) é uma função constante. Portanto, pelo lema 4.3.6,



existe $c \in \mathbb{R}$ tal que os elementos c, (ρ_r, u_r) e (ρ_ℓ, u_ℓ) verificam a condição de salto (j_1). Então, como os elementos y, (ρ_r, u_r) e (ρ_ℓ, u_ℓ) verificam a fórmula (j_1^m), o par (y, c) verifica a afirmação (b). Por outro lado, como $\varphi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^m$ e é válida a fórmula (j_1^m), por (3), também é válida a fórmula

$$\Delta p = \rho_\ell (\Delta u)^2 \left(1 + \frac{\rho_\ell}{\Delta \rho}\right).$$

Sendo $(\Delta\rho, \Delta u)$ uma função constante dessa fórmula, segue que Δp (e portanto p_r) é também uma função constante. Sendo assim, a fórmula anterior é exatamente a condição de salto (j_2), verificado pelos elementos (ρ_r, u_r, p_r) e $(\rho_\ell, u_\ell, p_\ell)$, como funções constantes.

$(\Leftarrow)$. Reciprocamente, suponhamos que são válidas as asserções **(a)**-**(d)**. Da fórmula (1), usando a proposição 2.1.2(c), segue que

$$\{[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u_x\}_x \approx 0. \tag{5}$$

Como (ρ_r, u_r) é uma função constante e os elementos c, (ρ_r, u_r) e (ρ_ℓ, u_ℓ) verificam a condição de salto (j_1), pelo item (b) e pelo lema 4.3.6, os elementos y, (ρ_r, u_r) e (ρ_ℓ, u_ℓ) verificam a fórmula (j_1^m). Então, pela proposição 4.4.1, a função (ρ, u) é uma solução da equação (E_1). Por outro lado, como (ρ_r, u_r, p_r) é uma função constante e como os elementos (ρ_r, u_r, p_r) e $(\rho_\ell, u_\ell, p_\ell)$ verificam a fórmula (j_2), pela condição (3), temos que $\varphi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^m$. Também, sendo $(\Delta\rho, \Delta u)$ uma função constante, usando a propriedade (2), temos que $\nabla\psi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^m$. Sendo assim, da condição (4) vem $\nabla_t(\rho u) + (p + \rho u^2)_{m,x} \approx 0$, o que junto com a equação (5), implica que (ρ, u, p, e) é uma solução da equação (E_2). □

Usando as proposições 4.3.8 e 4.4.2, obtemos o resultado seguinte que nos permitirá concluir o estudo de resolubilidade do sistema $(\tilde{S})$.

4.4.3 Proposição. *Se as funções (H_ρ, H_p, H_e) e H_u satisfazem, respectivamente, as hipóteses $(A_4)(1)$ e (A_5) da definição 4.3.2 então, a função generalizada (ρ, u, p, e)*

é uma solução do sistema

$$\begin{cases} (E_1) & \nabla_t \rho + (\rho u)_{m,x} \approx 0 \\ (E_2) & \nabla_t (\rho u) + (p + \rho u^2)_{m,x} \approx \{[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u_x\}_{m,x} \\ (E_3) & \nabla_t e + [(e+p)u]_{m,x} \approx \{[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u u_x\}_{m,x} \end{cases}$$

se, e somente se, são válidas as afirmações descritas a seguir.

(a) *A função* (ρ_r, u_r, p_r, e_r) *é constante.*

(b) *Existe* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $y(t) = c \sum_{i=1}^{m} t_i$ *para todo* $t = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m$.

(c) *Os elementos* c, (ρ_r, u_r, p_r) *e* $(\rho_\ell, u_\ell, p_\ell)$ *verificam as fórmulas* (j_1), (j_2) *e* (j_3).

(d) *Os elementos* (ρ, u, p, e) *e* (ν, α) *verificam as relações*

$$[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u_x \approx 0 \tag{1}$$

$$[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u u_x \approx 0. \tag{2}$$

Demonstração. Seja $K \in \mathcal{H}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ fixado. Se $\psi := \psi_1 + \cdots + \psi_5$, onde

$$\psi_1 := (e_\ell + p_\ell)\Delta u \quad \psi_3 := u_\ell \Delta e \qquad \psi_5 := \Delta u \Delta e$$
$$\psi_2 := u_\ell \Delta p \qquad\quad \psi_4 := \Delta u \Delta p$$

então, pela proposição 4.3.8, são válidas as propriedades seguintes.

(3) Se é válida a fórmula (j_1^m) então,
vale a condição (j_3) se e só se $\psi_m \equiv \Delta e \nabla y$ em $\mathbb{R}^m$.

$$\nabla_t e + [(e+p)u]_{m,x} \approx [K \circ (y^*, \pi_{1+m})]_x\, (\psi_m - \Delta e \nabla y)\,. \tag{4}$$

($\Rightarrow$). Suponhamos que a função (ρ, u, p, e) é uma solução das equações (E_1), (E_2) e (E_3). Pela proposição 4.4.2, a função (ρ_r, u_r, p_r) é constante, é válida a afirmação (b), os elementos c, (ρ_r, u_r, p_r) e $(\rho_\ell, u_\ell, p_\ell)$ verificam as fórmulas (j_1) e (j_2), e os elementos (ρ, u, p, e) e (ν, α) verificam a condição (1) acima. Sendo (ρ, u, p, e) uma solução da equação (E_3), da equação (4), temos que

$$[K \circ (y^*, \pi_{1+m})]_x\, (\psi_m - \Delta e \nabla y) \approx \{[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u u_x\}_{m,x}\,.$$

Então, pelas proposições 3.1.15(a) e 4.3.10(2), são válidas a relação (2) e a condição seguinte

$$\psi_m \equiv \Delta e \nabla y \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^m. \tag{5}$$

Como $(\Delta\rho, \Delta u)$ é uma função constante e como os elementos c, (ρ_r, u_r) e (ρ_ℓ, u_ℓ) verificam a fórmula (j_1), pelo item (b) e pelo lema 4.3.6, os elementos y, (ρ_r, u_r) e (ρ_ℓ, u_ℓ) verificam a fórmula (j_1^m). Então, pelas condições (3) e (5), é válida também a fórmula

$$\Delta p \left(1 + \frac{u_\ell}{\Delta u}\right) = \rho_\ell \frac{\Delta e}{\Delta \rho} - (e_\ell + p_\ell).$$

Como $(\Delta\rho, \Delta u, \Delta p)$ é uma função constante, é claro que Δe (e portanto e_r) é também uma função constante. Em conseqüência, os elementos (ρ_r, u_r, p_r, e_r) e $(\rho_\ell, u_\ell, p_\ell, e_\ell)$, como funções constantes, verificam a condição de salto (j_3).

($\Leftarrow$). Reciprocamente, suponhamos que são válidas as asserções (**a**)- (**d**). Da fórmula (2), usando a proposição 2.1.2(c), segue que

$$\{[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u u_x\}_x \approx 0. \tag{6}$$

Por outro lado, como $(\Delta\rho, \Delta u, \Delta p)$ é uma função constante e como os elementos c, (ρ_r, u_r, p_r) e $(\rho_\ell, u_\ell, p_\ell)$ verificam as fórmulas (j_1) e (j_2), pelo item (b), pela fórmula (1) e pela proposição 4.4.2, a função (ρ, u, p, e) é uma solução das equações (E_1) e (E_2). Além disso, como $(\Delta\rho, \Delta u, \Delta p, \Delta e)$ é uma função constante e como os elementos (ρ_r, u_r, p_r, e_r) e $(\rho_\ell, u_\ell, p_\ell, e_\ell)$ verificam a fórmula (j_3), pela propriedade (3), temos que $\psi_m \equiv \Delta e \nabla y$ em $\mathbb{R}^m$. Então, da condição (4), temos que

$$\nabla_t e + [(e + p)u]_{m,x} \approx O$$

o que junto com a equação (6) implica que a função (ρ, u, p, e) é uma solução da equação (E_3). □

Um outro resultado necessário para a conclusão do estudo de resolubilidade do sistema $(\tilde{S})$ é dado pela proposição seguinte. A verificação do mesmo é similar à prova da Proposição 4.2.2 em [9] (ou da Proposição 3.5 em [3]). Para comodidade do leitor, faremos a prova.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

4.4.4 Proposição. *A função generalizada (ρ, u, p, e) é uma solução da equação*

$$(E_4) \qquad e \approx \lambda p + \frac{1}{2}\rho u^2 \quad em \quad \mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$$

se, e somente se, os elementos (ρ_r, u_r, p_r, e_r) e $(\rho_\ell, u_\ell, p_\ell, e_\ell)$ verificam a condição de salto (j_4).

Demonstração. Fixada uma função generalizada $K \in \mathcal{H}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$, inicialmente faremos alguns cálculos preliminares. Da fórmula (S_4), usando a proposição 3.1.4, temos

$$(1) \qquad e \approx \Delta e\,[K \circ (y^*, \pi_{1+m})] + e_\ell$$

e das fórmulas (S_1), (S_2) e (E_3), após um cálculo, vem

$$\begin{aligned} \lambda p + \tfrac{1}{2}\rho u^2 \quad &= \lambda p_\ell + \tfrac{1}{2}\rho_\ell u_\ell^2 + \\ &(\varphi_1 H_\rho + \varphi_2 H_u + \varphi_3 H_\rho H_u + \varphi_4 H_u^2 + \varphi_5 H_\rho H_u^2 + \varphi_6 H_p) \circ (y^*, \pi_{1+m}) \end{aligned}$$

onde as funções $\varphi_i \in C^\infty(R^m)$, $i = 1, \ldots, 6$, são definidas por

$$\begin{aligned} &\varphi_1 := \tfrac{1}{2}u_\ell^2 \Delta\rho \quad \varphi_3 := u_\ell \Delta\rho \Delta u \quad \varphi_5 := \tfrac{1}{2}\Delta\rho(\Delta u)^2 \\ &\varphi_2 := \rho_\ell u_\ell \Delta u \quad \varphi_4 := \tfrac{1}{2}\rho_\ell(\Delta u)^2 \quad \varphi_6 := \lambda \Delta p. \end{aligned}$$

Donde, usando novamente a propriedade 3.1.4, segue que

$$\lambda p + \frac{1}{2}\rho u^2 \approx \lambda p_\ell + \frac{1}{2}\rho_\ell u_\ell^2 + \varphi\,[K \circ (y^*, \pi_{1+m})]$$

onde $\varphi := \sum_{i=1}^{6} \varphi_i$. Levando em conta a equação anterior temos a equivalência seguinte

$$(2) \qquad e \approx \lambda p + \frac{1}{2}\rho u^2 \text{ se e só se } e \approx \lambda p_\ell + \frac{1}{2}\rho_\ell u_\ell^2 + \varphi\,[K \circ (y^*, \pi_{1+m})]\,.$$

Por outro lado, substituindo as expressões das funções φ_i na expressão da função φ, temos

$$\varphi \equiv \lambda p + \frac{1}{2}\rho_r u_r^2 - \frac{1}{2}\rho_\ell u_\ell^2 \equiv \left(\lambda p_r + \frac{1}{2}\rho_r u_r^2\right) - \left(\lambda p_\ell + \frac{1}{2}\rho_\ell u_\ell^2\right) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^m\,.$$

Assim, dado que $\Delta e \equiv e_r - e_\ell$ em $\mathbb{R}^m$, temos a seguinte propriedade.

$$\text{Se } e_\ell = \lambda p_\ell + \frac{1}{2}\rho_\ell u_\ell^2 \text{ então, } \varphi \equiv \Delta e \text{ se e só se } e_r \equiv \lambda p_r + \frac{1}{2}\rho_r u_r^2$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

isto é, é válida a equivalência seguinte

(3) $\varphi \equiv \Delta e$ em $\mathbb{R}^m$ e $e_\ell = \lambda p_\ell + \frac{1}{2}\rho_\ell u_\ell^2$ se e só se é valida a fórmula (j_4).

($\Rightarrow$). Suponhamos que (ρ, u, p, e) é uma solução da equação (E_4). Então, das propriedades (1) e (2), temos que

$$\Delta e\,[K \circ (y^*, \pi_{1+m})] + e_\ell \approx \lambda p_\ell + \frac{1}{2}\rho_\ell u_\ell^2 + \varphi\,[K \circ (y^*, \pi_{1+m})]$$

a qual pode ser escrito na forma

$$(\varphi - \Delta e)\,[K \circ (y^*, \pi_{1+m})] \approx \left[e_\ell - \left(\lambda p_\ell + \frac{1}{2}\rho_\ell u_\ell^2\right)\right].$$

Donde, em virtude da proposição 3.1.15(b), segue a validade das seguintes condições

(4) $$\varphi \equiv \Delta e \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^m \qquad \text{e} \qquad e_\ell = \lambda p_\ell + \frac{1}{2}\rho_\ell u_\ell^2$$

e, portanto, por (3), é válida também a fórmula (j_4).

($\Leftarrow$). Reciprocamente, suponhamos que é válida a fórmula (j_4). Então, pela condição (3), são válidas as fórmulas citadas em (4). Sendo assim, usando a relação dada em (1), temos que

$$e \approx \Delta e\,[K \circ (y^*, \pi_{1+m})] + e_\ell = \lambda p_\ell + \frac{1}{2}\rho_\ell u_\ell^2 + \varphi\,[K \circ (y^*, \pi_{1+m})]$$

a qual, pela propriedade (2), implica que a função generalizada (ρ, u, p, e) é uma solução da equação (E_4). □

Os resultados obtidos nas proposições 4.4.3 e 4.4.4 podem ser resumidos no teorema enunciado a seguir.

4.4.5 Teorema. *Se as funções (H_ρ, H_p, H_e) e H_u satisfazem, respectivamente, as hipóteses $(A_4)(1)$ e (A_5) da definição 4.3.2 então, a função generalizada (ρ, u, p, e) é uma solução do sistema*

$$\begin{cases} \nabla_t \rho + (\rho u)_{m,x} \approx 0 \\ \nabla_t (\rho u) + (p + \rho u^2)_{m,x} \approx \{[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u_x\}_{m,x} \\ \nabla_t e + [(e+p)u]_{m,x} \approx \{[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u u_x\}_{m,x} \\ e_m \approx \lambda p_m + \frac{1}{2}(\rho u^2)_m \end{cases}$$

se, e somente se, são válidas as afirmações descritas a seguir.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

(a) *A função* (ρ_r, u_r, p_r, e_r) *é constante.*

(b) *Existe* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $y(t) = c\sum_{i=1}^{m} t_i$ *para todo* $t = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m$.

(c) *Os elementos* c, (ρ_r, u_r, p_r) *e* $(\rho_\ell, u_\ell, p_\ell)$ *verificam as fórmulas* (j_1)-(j_4).

(d) *Os elementos* (ρ, u, p, e) *e* (ν, α) *verificam as relações*

$$[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u_x \approx 0 \;\; e \;\; [\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u u_x \approx 0.$$

No caso em que a função (ρ, u, p, e) é uma solução do sistema $(\tilde{S})$, os elementos (ver as fórmulas (3) e (4) constantes na demostração da proposição 4.3.10)

$$V := (\Delta\nu)^{-1}\,[\nu \circ (\rho_*, p_*, e_*) - \nu_\ell], \;\; H_u \;\text{ e }\; \alpha$$

verificam certas relações de associação em $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ os quais são importantes, no caso $m = 1$, para o estudo das ondas de choque em mecânica dos meios contínuos, por exemplo. O resultado seguinte segue do lema 4.3.11 e do teorema 4.4.5.

4.4.6 Corolário. *Nas hipóteses do teorema 4.4.5, a função* (ρ, u, p, e) *é uma solução do sistema* $(\tilde{S})$ *se, e somente se, são válidas as afirmações* (a), (b) *e* (c) *citados no teorema 4.4.5 e, os elementos* $K := H_u$, K_λ *e* $(\nu_\ell, \Delta\nu, V)$ *(ver as fórmulas* (3) *e* (4) *na demostração da proposição 4.3.10) satisfazem as seguintes relações, em* $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$

$$VK_\lambda \approx \frac{\alpha - \nu_\ell}{\Delta\nu} K_\lambda \quad e \quad VKK_\lambda \approx \frac{1}{2}\frac{\alpha - \nu_\ell}{\Delta\nu} K_\lambda.$$

Nesse caso, temos que $VKK_\lambda \approx \frac{1}{2} VK_\lambda$.

No caso $m = 1$, denotando por (x, t) um elemento genérico de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, do teorema 4.4.5 temos o resultado seguinte, o qual envolve as equações diferenciais parciais da hidrodinâmica em dimensão 1.

4.4.7 Teorema. *Se as funções* (H_ρ, H_p, H_e) *e* H_u *satisfazem, respectivamente, as hipóteses* $(A_4)(1)$ *e* (A_5) *da definição 4.3.2, no caso* $m = 1$, *então, a função genera-*

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

lizada (ρ, u, p, e) *é uma solução do sistema*

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x \approx 0 \\ (\rho u)_t + (p + \rho u^2)_x \approx \{[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u_x\}_x \\ e_t + [(e + p)u]_x \approx \{[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u u_x\}_x \\ e \approx \lambda p + \frac{1}{2}\rho u^2 \end{cases}$$

se, e somente se, são válidas as afirmações descritas a seguir.

(a) *A função* (ρ_r, u_r, p_r, e_r) *é constante.*

(b) *Existe* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $y(t) = ct$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

(c) *Os elementos* c, (ρ_r, u_r, p_r) *e* $(\rho_\ell, u_\ell, p_\ell)$ *verificam as fórmulas* (j_1)-(j_4).

(d) *Os elementos* (ρ, u, p, e) *e* (ν, α) *verificam as relações, em* $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$

$$[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u_x \approx 0 \;\; e \;\; [\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u u_x \approx 0.$$

O teorema 4.4.5 motiva a introdução da definição seguinte.

4.4.8 Definição. Se $\mathcal{S}$ denota qualquer um dos sistemas $(\tilde{S})$, $(\bar{S})$ ou (S), uma $\mathcal{H}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$*-solução na forma de onda de choque em* $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ do sistema $\mathcal{S}$ é qualquer elemento (ρ, u, p, e) de $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^4)$ tal que as funções componentes são dadas na forma

$$(S_1) \quad \rho = \Delta\rho H_\rho \circ (y^*, \pi_{1+m}) + \rho_\ell \qquad (S_2) \quad u = \Delta u H_u \circ (y^*, \pi_{1+m}) + u_\ell$$
$$(S_3) \quad p = \Delta p H_p \circ (y^*, \pi_{1+m}) + p_\ell \qquad (S_4) \quad e = \Delta e H_e \circ (y^*, \pi_{1+m}) + e_\ell$$

as quais são soluções do sistema $\mathcal{S}$ e satisfazem as hipóteses seguintes:

(A_1) $y^* \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ e $(y^*, \pi_{1+m}) \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ são as funções associadas à função $y\colon t = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m \mapsto c \sum_{i=1}^m t_i \in \mathbb{R}$, para algum $c \in \mathbb{R}$; isto é,

$$y^*\colon (x, t) \mapsto x - c \sum_{i=1}^m t_i \quad \text{e} \quad (y^*, \pi_{1+m})\colon (x, t) \mapsto \left(x - c \sum_{i=1}^m t_i, t \right).$$

(A_2) Para cada $\tau = \rho$, u, p, e, existe $(\tau_r, \tau_\ell) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tal que $0 < \tau_r < \tau_\ell$. Nesse caso, definimos $\Delta\tau := \tau_r - \tau_\ell \in \mathbb{R}_-^*$.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

(A_3) H_ρ, H_u, H_p, $H_e \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$.

(A_4) Cada H_τ, $\tau = \rho$, u, p, e, tem um representante $\widehat{H}_\tau$ tal que

(1) $$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \left| \widehat{H}_\tau(\varepsilon, \lambda, t) \right| \leq \frac{\tau_r \varepsilon - \tau_\ell}{\Delta \tau}, \quad ((\varepsilon, t) \in]0, 1] \times \mathbb{R}^m)$$

(2) $$(\forall K \subset\subset \mathbb{R}^*)(\forall L \subset\subset \mathbb{R}^m)\,(\exists \eta \in]0, 1])\mid \sup_{(\varepsilon, \lambda, t) \in]0, \eta[\times K \times L} \left| \widehat{H}_\tau(\varepsilon, \lambda, t) \right| < -\frac{\tau_\ell}{\Delta \tau}\,.$$

$(\mathbf{A_5})$ Para cada $H \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ se tem $\{[H \circ (y^*, \pi_{1+m})]u_x\}|_{\Omega^\bullet} \approx 0$.

Do teorema 4.4.5, segue o resultado seguinte, o qual mostra que as noções introduzidas nas definições 4.3.2 e 4.4.8 são as mesmas; isto é a pretendida generalização através da definição 4.3.2 é ilusória.

4.4.9 Proposição. *Se $\mathcal{S}$ denota qualquer um dos sistemas $(\tilde{S})$, $(\bar{S})$ ou (S), uma função generalizada (ρ, u, p, e) é uma $\mathcal{H}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$-solução do tipo de forma de onda de choque em $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ do sistema $\mathcal{S}$ se, e somente se, (ρ, u, p, e) é uma $\mathcal{H}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$-solução na forma de onda de choque em $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ de $\mathcal{S}$.*

Nos próximos resultados desta seção, a menos de menção explícita em contrário, assumimos a hipótese seguinte.

4.4.10 Hipótese. Vamos considerar fixados os seguintes elementos.

- Um número $c \in \mathbb{R}$ e, para cada $\tau = \rho$, u, p, e, um elemento (τ_r, τ_ℓ) em $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tal que $0 < \tau_r < \tau_\ell$.
- Uma função generalizada (H_ρ, H_u, H_p, H_e) de modo que suas funções componentes são elementos de $\mathcal{H}_p(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$.

Nessas condições serão considerados:

- os elementos y^*, (y^*, π_{1+m}) e $(\Delta\rho, \Delta u, \Delta p, \Delta e)$ introduzidos, respectivamente, nos itens (A_1) e (A_2) da definição 4.4.8
- as condições de salto (j_1), (j_2), (j_3) e (j_4) introduzidas em 4.1.3

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

- Os elementos a e b em $\mathbb{R}^3$ considerados na hipótese 3.3.7 como sendo dados por $a := (\rho_r, p_r, e_r)$ e $b := (\rho_\ell, p_\ell, e_\ell)$
- a função generalizada (ρ_*, u_*, p_*, e_*), cujas componentes são definidas em (4.3.3)
- a função generalizada (ρ, u, p, e) de modo que as suas funções componentes são definidas, respectivamente, pelas fórmulas (S_1), (S_2), (S_3) e (S_4), dadas na definição 4.4.8.

Agora, consideremos um resultado auxiliar importante para estudar a resolubilidade do sistema $(\tilde{S})$, no sentido da definição 4.4.8. O mesmo decorre do teorema 4.4.5 e da proposição 4.4.9.

4.4.11 Teorema. *Se as funções (H_ρ, H_p, H_e) e H_u satisfazem, respectivamente, as hipóteses $(A_4)(1)$ e (A_5) da definição 4.4.8 então, a função generalizada (ρ, u, p, e) é uma solução do sistema*

$$\begin{cases} \nabla_t \rho + (\rho u)_{m,x} \approx 0 \\ \nabla_t (\rho u) + (p + \rho u^2)_{m,x} \approx \{[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u_x\}_{m,x} \\ \nabla_t e + [(e+p)u]_{m,x} \approx \{[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u u_x\}_{m,x} \\ e_m \approx \lambda p_m + \frac{1}{2}(\rho u^2)_m \end{cases}$$

se, e somente se, são válidas as condições de salto (j_1)-(j_4) e as seguintes relações

$$[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u_x \approx 0\,, \quad [\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u u_x \approx 0.$$

O teorema apresentado a seguir, decorrente do teorema 4.2.6 e do resultado anterior, mostra que o sistema $(\tilde{S})$ possui soluções na forma de onda de choque de acordo com a definição 4.4.8.

4.4.12 Teorema. *Suponhamos verificada a hipótese 4.3.1. Suponhamos ainda que $\nu_i^{-1} \in \mathcal{E}_{QM}[I_{\alpha_i}^{\beta_i}]$ para cada $i \in \mathbb{I}$ e que $\nu_j \equiv \alpha_j$ em $\mathbb{R}_+^*$ para cada $j \in \mathbb{J}$. Então, existem H_ρ, H_p e H_e em $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ satisfazendo as hipóteses (A_3) e (A_4) da definição 4.4.8 tais que se, para cada H_u em $\mathcal{H}_\Lambda(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$, as componentes da função generalizada (ρ, u, p, e) são dadas, respectivamente, pelas fórmulas (S_1), (S_2), (S_3) e (S_4) na definição 4.4.8 então, são válidas as asserções seguintes.*

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

(A) *Os elementos* (ρ, u, p, e) *e* (ν, α) *satisfazem as duas relações*

$$[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u_x \approx 0 \quad e \quad [\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, uu_x \approx 0\,.$$

(B) *A função generalizada* (ρ, u, p, e) *é uma solução do sistema*

$$\begin{cases} \nabla_t \rho + (\rho u)_{m,x} \approx 0 \\ \nabla_t (\rho u) + (p + \rho u^2)_{m,x} \approx \{[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u_x\}_{m,x} \\ \nabla_t e + [(e+p)u]_{m,x} \approx \{[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, uu_x\}_{m,x} \\ e_m \approx \lambda p_m + \frac{1}{2}(\rho u^2)_m, \end{cases}$$

se, e somente se, são válidas as condições de salto (j_i), $1 \leq i \leq 4$.

Demonstração. Pela hipótese do enunciado e pelo teorema 4.2.6, existem elementos K_ρ, K_p e K_e em $\mathcal{H}_p(\mathbb{R})$ satisfazendo a condição (d) da definição 4.2.2 tais que se, para cada K_u em $\mathcal{H}_\Lambda(\mathbb{R})$, as componentes da função generalizada (ρ_*, u_*, p_*, e_*) são dadas por

$$(1) \qquad \begin{aligned} \rho_* &:= \Delta\rho K_\rho + \rho_\ell \qquad & u_* &:= \Delta u K_u + u_\ell \\ p_* &:= \Delta p K_p + p_\ell \qquad & e_* &:= \Delta e K_e + e_\ell \end{aligned}$$

então, são válidas as afirmações seguintes.

(a) Os elementos (ρ_*, u_*, p_*, e_*) e (ν, α) satisfazem as duas relações seguintes

$$[\nu \circ (\rho_* \circ y^*, p_* \circ y^*, e_* \circ y^*) - \alpha]\, (u_* \circ y^*)_x \approx 0$$

$$[\nu \circ (\rho_* \circ y^*, p_* \circ y^*, e_* \circ y^*) - \alpha]\, (u_* \circ y^*)(u_* \circ y^*)_x \approx 0.$$

(b) A função generalizada $(\rho_* \circ y^*, u_* \circ y^*, p_* \circ y^*, e_* \circ y^*)$ é uma solução do sistema $(\tilde{S})$ se, e somente se, são válidas as condições de salto (j_1)- (j_4).

Fixado um H_u qualquer em $\mathcal{H}_\Lambda(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ (ver notação 2.3.16, para $n = 1$), seja K_u em $\mathcal{H}_\Lambda(\mathbb{R})$ tal que

$$(2) \qquad H_u = K_u \circ \pi_m$$

onde $\pi_m \colon (\lambda, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \mapsto \lambda \in \mathbb{R}$. Introduzindo a função generalizada (H_ρ, H_p, H_e) em $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^3)$ de modo que suas componentes são definidas por

$$(3) \qquad H_\rho := K_\rho \circ \pi_m, \qquad H_p := K_p \circ \pi_m, \qquad H_e := K_e \circ \pi_m$$

consideremos a função generalizada (ρ, u, p, e) em $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^4)$, onde as suas funções componentes são definidas da seguinte forma (ver (4.3.1))

$$(4) \qquad \begin{aligned} \rho &:= \Delta\rho H_\rho \circ (y^*, \pi_{1+m}) + \rho_\ell \qquad u := \Delta u H_u \circ (y^*, \pi_{1+m}) + u_\ell \\ p &:= \Delta p H_p \circ (y^*, \pi_{1+m}) + p_\ell \qquad e := \Delta e H_e \circ (y^*, \pi_{1+m}) + e_\ell. \end{aligned}$$

Lembrando que (ver (3.1.4)) $y^* = \pi_m \circ (y^*, \pi_{1+m})$ das fórmulas (1), (2), (3) e (4) segue claramente que

$$(\rho, u, p, e) = (\rho_* \circ y^*, u_* \circ y^*, p_* \circ y^*, e_* \circ y^*).$$

Assim, as afirmações (A) e (B) estão verificadas por (a) e (b), respectivamente. Então, resta ver se a função (H_ρ, H_p, H_e), cujas componentes são definidas pelas expressões dadas em (3), verifica as hipóteses (A_3) e (A_4) da definição 4.4.8. Como K_ρ, K_p e K_e são elementos de $\mathcal{H}_p(\mathbb{R})$, por (3) e pela proposiçaõ 2.3.11(c), temos que H_ρ, H_p, $H_e \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$. Por outro lado, para cada $\tau = \rho, p, e$, seja $\widehat{K}_\tau$ um representante de K_τ tal que

$$(5) \qquad \begin{aligned} &\text{os elementos } (\widehat{K}_\tau, \tau_\tau, \tau_\ell, \Delta\tau) \text{ e } (\widehat{K}_\tau, \tau_\ell, \Delta\tau) \text{ verificam, respectivamente,} \\ &\text{as hipóteses } (A_4)(1) \text{ e } (A_4)(2) \text{ da definição 4.2.2.} \end{aligned}$$

Agora, a função definida por $(\widehat{H}_\rho, \widehat{H}_p, \widehat{H}_e) := (\widehat{K}_\rho, \widehat{K}_p, \widehat{K}_e) \circ \pi_m$ é um representante em $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^3)$ da função generalizada (H_ρ, H_p, H_e). Por (5), é claro que os elementos $(\widehat{H}_\tau, \tau_\tau, \tau_\ell, \Delta\tau)$ e $(\widehat{H}_\tau, \tau_\ell, \Delta\tau)$, para $\tau = \rho, p, e$, verificam, respectivamente, as hipóteses $(A_4)(1)$ e $(A_4)(1)$ da definição 4.4.8. Assim, o elemento (H_ρ, H_p, H_e) verifica a condição (A_4). □

Pela observação 2.2.18 e pela proposição 2.3.18 (ambos para $n = 1$) temos a observação seguinte.

4.4.13 Observação. Cada $H \in \mathcal{H}_\Lambda(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ (ver notação 2.3.16) verifica as hipóteses (A_3), (A_4) e (A_5) das definições 4.3.2 e 4.4.8.

4.4.14 Observação. Suponhamos que são válidas as duas condições seguintes.

- $\nu_i^{-1} \in \mathcal{E}_{QM}[I_{\alpha_i}^{\beta_i}]$ para cada $i \in \mathbb{I}$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

- $\nu_j \equiv \alpha_j$ em $\mathbb{R}_+^*$ para cada $j \in \mathbb{J}$.

De acordo com o resultado 4.4.12, para resolver o sistema $(\tilde{S})$, no sentido da definição 4.4.8, basta considerar os elementos

$$c \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad (\tau_r, \tau_\ell) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad \text{com} \quad 0 < \tau_r < \tau_\ell \quad \text{para} \quad \tau = \rho,\, u,\, p,\, e$$

satisfazendo as condições de salto (j_1) - (j_4), onde $\Delta\tau := \tau_r - \tau_\ell$. Escolher (ρ, u, p, e) em $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^4)$ de modo que suas funções componentes são dadas por

$$\rho := \Delta\rho H_\rho \circ (y^*, \pi_{1+m}) + \rho_\ell \qquad u := \Delta u H_u \circ (y^*, \pi_{1+m}) + u_\ell$$
$$p := \Delta p H_p \circ (y^*, \pi_{1+m}) + p_\ell \qquad e := \Delta e H_e \circ (y^*, \pi_{1+m}) + e_\ell$$

onde as componentes da função (y^*, π_{1+m}) são definidas por

$$y^* \colon (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \mapsto x - c\sum_{i=1}^{m} t_i \in \mathbb{R}, \quad \pi_{1+m} \colon (\lambda, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \mapsto t \in \mathbb{R}^m,$$

as componentes da função generalizada (H_ρ, H_p, H_e) são elementos de $\mathcal{H}_p(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ as quais satisfazem a hipótese (A_4) da definição 4.4.8, e H_u é um elemento qualquer de $\mathcal{H}_\Lambda(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$. Isto é, as funções componentes da solução procurada devem ser definidas pelas "fórmulas" (aqui $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$)

$$\rho(x,t) := \Delta\rho H_\rho(x - c\textstyle\sum_{i=1}^m t_i, t) + \rho_\ell \qquad u(x,t) := \Delta u H_u(x - c\sum_{i=1}^m t_i, t) + u_\ell$$
$$p(x,t) := \Delta p H_p(x - c\textstyle\sum_{i=1}^m t_i, t) + p_\ell \qquad e(x,t) := \Delta e H_e(x - c\sum_{i=1}^m t_i, t) + e_\ell\,.$$

Então, essa função generalizada (ρ, u, p, e) assim escolhida será uma solução do sistema $(\tilde{S})$.

No caso $m = 1$, denotando por (x,t) um elemento genérico de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, do teorema 4.4.12, temos o resultado seguinte, o qual envolve as equações diferenciais parciais da hidrodinâmica em dimensão 1. Lembramos que, o sistema considerado no resultado, motivou a introdução dos sistemas (S_0) e $(\tilde{S})$ considerados nas seções 4.1 e 4.3, respectivamente.

4.4.15 Teorema. *Suponhamos verificada a hipótese 4.3.1. Suponhamos ainda que* $\nu_i^{-1} \in \mathcal{E}_{QM}[I_{\alpha_i}^{\beta_i}]$ *para cada* $i \in \mathbb{I}$ *e que* $\nu_j \equiv \alpha_j$ *em* $\mathbb{R}_+^*$ *para cada* $j \in \mathbb{J}$. *Então, existem*

H_ρ, H_p e H_e em $\mathcal{G}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ satisfazendo as hipóteses (A_3) e (A_4) da definição 4.4.8 tais que se, para cada H_u em $\mathcal{H}_\Lambda(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, as componentes da função generalizada (ρ,u,p,e) são dadas, respectivamente, pelas fórmulas (S_1), (S_2), (S_3) e (S_4) na definição 4.4.8, então são válidas as asserções seguintes.

(A) *Os elementos (ρ,u,p,e) e (ν,α) satisfazem as duas relações*

$$[\nu\circ(\rho,p,e)-\alpha]\,u_x\approx 0 \quad e \quad [\nu\circ(\rho,p,e)-\alpha]\,uu_x\approx 0\,.$$

(B) *A função generalizada (ρ,u,p,e) é uma solução do sistema*

$$\begin{cases} \rho_t+(\rho u)_x\approx 0\\ (\rho u)_t+(p+\rho u^2)_x\approx\{[\nu\circ(\rho,p,e)-\alpha]\,u_x\}_x\\ e_t+[(e+p)u]_x\approx\{[\nu\circ(\rho,p,e)-\alpha]\,uu_x\}_x\\ e\approx\lambda p+\frac{1}{2}\rho u^2 \end{cases}$$

se, e somente se, são válidas as condições de salto (j_i), $1\le i\le 4$, onde ρ é a densidade, u a velocidade, p a pressão, e a energia total e $\approx$ é a relação de associação em $\mathcal{G}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$.

Resolubilidade de sistemas particulares

Como conseqüência do resultado obtido no teorema 4.4.12, temos também os resultados relativos aos sistemas $(\tilde{S})$, que contém, nos segundos membros, expressões quando a função ν " depende de uma variável " e quando ν " depende de duas variáveis ". Esses sistemas são obtidos considerando o par (ν_*,α_*) (ver hipótese 4.3.1) de modo conveniente.

Nesta parte, vamos considerar três casos particulares de sistemas quando a função ν " depende de duas variávies ", quais sejam

- $\nu\circ(\rho,p,e)=\nu\circ(\rho,p)$, supondo que $3\in\mathbb{J}$. Isto é, $\nu_3\equiv\alpha_3=0$ no caso em que $(\nu,\alpha)=(\nu_{(s)},\alpha_{(s)})$ e $\nu_3\equiv\alpha_3=1$ no caso em que $(\nu,\alpha)=(\nu_{(\pi)},\alpha_{(\pi)})$
- $\nu\circ(\rho,p,e)=\nu\circ(\rho,e)$, supondo que $2\in\mathbb{J}$. Isto é, $\nu_2\equiv\alpha_2=0$ no caso em que $(\nu,\alpha)=(\nu_{(s)},\alpha_{(s)})$ e $\nu_2\equiv\alpha_2=1$ no caso em que $(\nu,\alpha)=(\nu_{(\pi)},\alpha_{(\pi)})$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

- $\nu \circ (\rho, p, e) = \nu \circ (p, e)$, supondo que $1 \in \mathbb{J}$. Isto é, $\nu_1 \equiv \alpha_1 = 0$ no caso em que $(\nu, \alpha) = (\nu_{(s)}, \alpha_{(s)})$ e $\nu_1 \equiv \alpha_1 = 1$ no caso em que $(\nu, \alpha) = (\nu_{(\pi)}, \alpha_{(\pi)})$

e três casos quando ν " depende de uma variável ", a saber

- $\nu \circ (\rho, p, e) = \nu \circ \rho$, supondo que $\mathbb{I} = \{1\}$
- $\nu \circ (\rho, p, e) = \nu \circ p$, supondo que $\mathbb{I} = \{2\}$
- $\nu \circ (\rho, p, e) = \nu \circ e$, supondo que $\mathbb{I} = \{3\}$.

Entretanto, do mesmo modo como foi feito em [9] quando estudamos as $\mathcal{H}(\mathbb{R})$-soluções na forma de onda de choque em $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, apresentaremos somente os resultados correspondentes aos casos $\nu \circ (\rho, p, e) = \nu \circ (\rho, p)$ e $\nu \circ (\rho, p, e) = \nu \circ \rho$. Tais resultados decorrem diretamente do teorema 4.4.12.

Até o fim desta, seção vamos considerar

- $\nu_3 \equiv \alpha_3 = 0$, no caso $(\nu, \alpha) = (\nu_{(s)}, \alpha_{(s)})$
- $\nu_3 \equiv \alpha_3 = 1$, no caso $(\nu, \alpha) = (\nu_{(\pi)}, \alpha_{(\pi)})$.

Estamos supondo então que $3 \in \mathbb{J}$. Com essas hipóteses temos respectivamente

$$\alpha_{(s)} = \alpha_1 + \alpha_2 \quad \text{e} \quad \nu_{(s)} \circ (\rho, p, e) = \nu_1 \circ \rho + \nu_2 \circ p =: \nu_{(s)} \circ (\rho, p)$$

$$\alpha_{(\pi)} = \alpha_1 \alpha_2 \quad \text{e} \quad \nu_{(\pi)} \circ (\rho, p, e) = (\nu_1 \circ \rho)(\nu_2 \circ p) =: \nu_{(\pi)} \circ (\rho, p)$$

sempre que a função generalizada (H_ρ, H_p, H_e) satisfaz a hipótese $(A_4)(1)$ da definição 4.4.8.

Nessas condições e notações, lembrando que $\{1, 2, 3\} = \mathbb{I} \dot{\cup} \mathbb{J}$ e que $3 \in \mathbb{J}$, temos o resultado seguinte.

4.4.16 Corolário. *Suponhamos verificada a hipótese 4.3.1. Suponhamos ainda que* $\nu_i^{-1} \in \mathcal{E}_{QM}[I_{\alpha_i}^{\beta_i}]$ *para cada* $i \in \mathbb{I}$ *e que* $\nu_j \equiv \alpha_j$ *em* $\mathbb{R}_+^*$ *para cada* $j \in \mathbb{J}$. *Então, existem* H_ρ, H_p *e* H_e *em* $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ *satisfazendo as hipóteses* (A_3) *e* (A_4) *da definição 4.4.8 tais que se, para cada* H_u *em* $\mathcal{H}_\Lambda(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$, *as componentes da função generalizada* (ρ, u, p, e) *são dadas, respectivamente, pelas fórmulas* (S_1), (S_2), (S_3) *e* (S_4) *na definição 4.4.8 então, são válidas as asserções seguintes.*

(a) *Os elementos* (ρ, u, p) *e* (ν, α) *satisfazem as duas relações*

$$[\nu \circ (\rho, p) - \alpha]\, u_x \approx 0 \quad e \quad [\nu \circ (\rho, p) - \alpha]\, uu_x \approx 0\,.$$

(b) *A função generalizada* (ρ, u, p, e) *é uma solução do sistema*

$$\begin{cases} \nabla_t \rho + (\rho u)_{m,x} \approx 0 \\ \nabla_t (\rho u) + (p + \rho u^2)_{m,x} \approx \{[\nu \circ (\rho, p) - \alpha]\, u_x\}_{m,x} \\ \nabla_t e + [(e+p)u]_{m,x} \approx \{[\nu \circ (\rho, p) - \alpha]\, uu_x\}_{m,x} \\ e_m \approx \lambda p_m + \frac{1}{2}(\rho u^2)_m, \end{cases}$$

se, e somente se, são válidas as condições de salto (j_i), $1 \leq i \leq 4$.

Agora vamos supor também que

- $\nu_2 \equiv \alpha_2 = 0$, no caso $(\nu, \alpha) = (\nu_{(s)}, \alpha_{(s)})$
- $\nu_2 \equiv \alpha_2 = 1$, no caso $(\nu, \alpha) = (\nu_{(\pi)}, \alpha_{(\pi)})$.

Estamos supondo então que $\mathbb{I} = \{1\}$ e que $\mathbb{J} = \{2, 3\}$. Com essas hipóteses temos

$$\alpha = \alpha_1 \quad \text{e} \quad \nu \circ (\rho, p, e) = \nu \circ (\rho, p) = \nu_1 \circ \rho =: \nu \circ \rho.$$

Nessas condições e notações temos o resultado seguinte.

4.4.17 Corolário. *Suponhamos verificada a hipótese 4.3.1. Suponhamos ainda que* $\nu_1^{-1} \in \mathcal{E}_{QM}[I_{\alpha_1}^{\beta_1}]$. *Então, existem* H_ρ, H_p *e* H_e *em* $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ *satisfazendo as hipóteses* (A_3) *e* (A_4) *da definição 4.4.8 tais que se, para cada* H_u *em* $\mathcal{H}_\Lambda(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$, *as componentes da função generalizada* (ρ, u, p, e) *são dadas, respectivamente, pelas fórmulas* (S_1), (S_2), (S_3) *e* (S_4) *na definição 4.4.8 então, são válidas as asserções seguintes.*

(a) *Os elementos* (ρ, u) *e* (ν, α) *satisfazem as duas relações*

$$(\nu \circ \rho - \alpha)\, u_x \approx 0 \quad e \quad (\nu \circ \rho - \alpha)\, uu_x \approx 0\,.$$

(b) *A função generalizada* (ρ, u, p, e) *é uma solução do sistema*

$$\begin{cases} \nabla_t \rho + (\rho u)_{m,x} \approx 0 \\ \nabla_t (\rho u) + (p + \rho u^2)_{m,x} \approx [(\nu \circ \rho - \alpha)\, u_x]_{m,x} \\ \nabla_t e + [(e+p)u]_{m,x} \approx [(\nu \circ \rho - \alpha)\, u u_x]_{m,x} \\ e_m \approx \lambda p_m + \frac{1}{2}(\rho u^2)_m \end{cases}$$

se, e somente se, são válidas as condições de salto (j_i), $1 \leq i \leq 4$.

4.5 Funções generalizadas de Heaviside no espaço euclidiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ e a não resolubilidade do sistema (S) na álgebra $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$

Os conceitos de $\mathcal{H}(\mathbb{R})$-solução na forma de onda de choque e de $\mathcal{H}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$-solução na forma de onda de choque, em $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$, para o sistema seguinte

$$\begin{cases} (\bar{E}_1) \quad \nabla_t \rho + (\rho u)_{m,x} = 0 \\ (E_2) \quad \nabla_t (\rho u) + (p + \rho u^2)_{m,x} \approx \{[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha]\, u_x\}_{m,x} \end{cases}$$

são introduzidos de modo análogo, respectivamente, às definições 4.2.2 e 4.3.2 (ou equivalentemente, à definição 4.4.8).

A seguir, provaremos, usando fortemente a proposição 3.3.11, que as equações $(\bar{E}_1)$ e (E_2) nem sempre tem $\mathcal{H}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$-soluções na forma de onda de choque em $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ e, em conseqüência, os sistemas (S) e $(\bar{S})$ (ver início da seção 4.3) também nem sempre têm soluções na forma de onda de choque conforme as definições 4.2.2 e 4.4.8. Para esse fim, é de fundamental importância o resultado seguinte.

Nesta seção, também serão mantidos fixos os dados considerados na hipótese 4.3.4.

4.5.1 Proposição. *Suponhamos verificada a hipótese 4.3.4. A função generalizada* (ρ, u) *é uma solução da equação*

$$(\bar{E}_1) \qquad \nabla_t \rho + (\rho u)_{m,x} = 0$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

se, e somente se, existe uma função generalizada $G \in \mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$ *tal que*

$$(1) \qquad G_x = -(\nabla_t \rho_*) \circ (y^*, \pi_{1+m}) \quad e \quad \rho(u_m - \nabla y) = G\,.$$

Nesse caso, temos

$$(2) \qquad G \approx \rho_\ell \left[(u_\ell)_m - \nabla y\right]\,.$$

Demonstração. Fixado um $\theta > 0$, para cada $i = 1, \ldots, m$, seja $g_{*,i}$ a classe em $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ da função

$$\widehat{g}_{*,i}\colon (\varepsilon, \lambda, t) \in]0,1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \mapsto \widehat{g}_{*,i}(\varepsilon, \lambda, t) := \int_\theta^\lambda (\widehat{\rho}_*)_{t_i}(\varepsilon, s, t) ds \in \mathbb{R}$$

onde $\widehat{\rho}_*$ é um representante qualquer de ρ_*. Sendo válidas as igualdades seguintes

$$(\widehat{g}_{*,i})_\lambda(\varepsilon, \lambda, t) = (\widehat{\rho}_*)_{t_i}(\varepsilon, \lambda, t), \quad ((\varepsilon, \lambda, t) \in]0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m\,,\ 1 \leq i \leq m)$$

considerando a função generalizada $g_* := (g_{*,1}, \ldots, g_{*,m}) \in \mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$ temos

$$(3) \qquad (\dot{g}_*)_\lambda = \nabla_t \rho_*.$$

Da expressão $\rho = \rho_* \circ (y^*, \pi_{1+m})$ (ver (4.3.4)), pela proposição 3.1.7(3) segue que

$$\nabla_t \rho = -\left[(\rho_*)_\lambda \circ (y^*, \pi_{1+m})\right] \nabla y + (\nabla_t \rho_*) \circ (y^*, \pi_{1+m})$$

e daí, lembrando que $(\nabla y) \circ (y^*, \pi_{1+m}) = \nabla y$ (ver observação 3.1.6), vem

$$\nabla_t \rho = -\left(\rho_* \nabla y\right)_\lambda \circ (y^*, \pi_{1+m}) + (\nabla_t \rho_*) \circ (y^*, \pi_{1+m}).$$

Donde, usando a igualdade (3), vem

$$(4) \quad \nabla_t \rho = (-\rho_* \nabla y)_\lambda \circ (y^*, \pi_{1+m}) + (g_*)_\lambda \circ (y^*, \pi_{1+m}) = (-\rho_* \nabla y + g_*)_\lambda \circ (y^*, \pi_{1+m}).$$

De modo análogo, como $\rho u = (\rho_* u_*) \circ (y^*, \pi_{1+m})$, pela proposição 3.1.7(2), temos que $(\rho u)_x = (\rho_* u_*)_\lambda \circ (y^*, \pi_{1+m})$, o que junto com (4) implica

$$\nabla_t \rho + (\rho u)_{m,x} = \left[\rho_*(u_{*m} - \nabla y) + g_*\right]_\lambda \circ (y^*, \pi_{1+m})\,.$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

E daí, sendo (y^*, π_{1+m}) um C^∞ - difeomorfismo de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, pela propriedade 3.1.1(2), segue que

$$(5) \qquad \nabla_t \rho + (\rho u)_{m,x} = 0 \Longleftrightarrow [\rho_*(u_{*m} - \nabla y) + g_*]_\lambda = 0.$$

Pela proposição 1.2.4 é válida a equivalência

$$(6) \qquad [\rho_*(u_{*m} - \nabla y) + g_*]_\lambda = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists\, f_* \in \mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m) \mid (f_*)_\lambda = 0 \text{ e} \\ \rho_*(u_{*m} - \nabla y) + g_* = f_*. \end{cases}$$

Usando novamente a proposição 3.1.1(2) temos a propriedade seguinte

$$\rho_*(u_{*m} - \nabla y) + g_* = f_* \Longleftrightarrow [\rho_*(u_{*m} - \nabla y)] \circ (y^*, \pi_{1+m}) = (f_* - g_*) \circ (y^*, \pi_{1+m})$$

donde, como $(\nabla y) \circ (y^*, \pi_{1+m}) = \nabla y$ usando as fórmulas $\rho = \rho_* \circ (y^*, \pi_{1+m})$ e $u = u_* \circ (y^*, \pi_{1+m})$ segue que

$$(7) \qquad \rho_*(u_{*m} - \nabla y) + g_* = f_* \Longleftrightarrow \rho(u_m - \nabla y) = (f_* - g_*) \circ (y^*, \pi_{1+m}).$$

Escolhendo $G \in \mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$ como sendo definida por

$$G := (f_* - g_*) \circ (y^*, \pi_{1+m})$$

usando a proposição 3.1.7(2) e a condição (3) temos

$$G_x = (f_*)_\lambda \circ (y^*, \pi_{1+m}) - (\nabla_t \rho_*) \circ (y^*, \pi_{1+m}).$$

Então, observando que (ver 3.1.1(2))

$$(f_*)_\lambda = 0 \Longleftrightarrow G_x = -(\nabla_t \rho_*) \circ (y^*, \pi_{1+m})$$

das equivalências (6) e (7) segue que

$$[\rho_*(u_{*m} - \nabla y) + g_*]_\lambda = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists G \in \mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m) \mid \rho(u_m - \nabla y) = G \text{ e} \\ G_x = -(\nabla_t \rho_*) \circ (y^*, \pi_{1+m}) \end{cases}$$

o que junto com a condição (5) implica a primeira afirmação do resultado. Por outro lado, das fórmulas (S_1) e (S_2) resulta que

$$\rho(u - y_{t_i}) = [(u_\ell - y_{t_i})\Delta\rho H_\rho + \rho_\ell \Delta u H_u + \Delta\rho \Delta u H_\rho H_u] \circ (y^*, \pi_{1+m}) + \rho_\ell (u_\ell - y_{t_i})$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

para cada $i = 1, \ldots, m$. Sendo válidas as seguintes relações (ver 3.1.4)

$$H_u \circ (y^*, \pi_{1+m}) \approx H_\rho \circ (y^*, \pi_{1+m}) \quad \text{e} \quad (H_\rho H_u) \circ (y^*, \pi_{1+m}) \approx H_\rho \circ (y^*, \pi_{1+m})$$

usando o teorema 2.1.2(b) temos

$$\rho(u_m - \nabla y) \approx \Delta\rho \left[(u_\ell)_m - \nabla y + \left(1 + \frac{\rho_\ell}{\Delta\rho}\right) (\Delta u)_m \right] H_\rho \circ (y^*, \pi_{1+m}) + \rho_\ell [(u_\ell)_m - \nabla y) \, .$$

Sendo (ρ, u) também uma solução da equação (E_1), pela proposição 4.4.1, é válida a fórmula (j_1^m). Em conseqüência, a segunda equação dada em (1) e essa última equação implicam a validade da condição (2). □

4.5.2 Hipótese. No que se segue serão considerados os seguintes casos particulares:

- $\nu_2 \equiv \alpha_2 = \alpha_3 \equiv \nu_3$, no caso $(\nu, \alpha) = (\nu_{(s)}, \alpha_{(s)})$
- $\alpha_2 \equiv \nu_2 = \nu_3 \equiv \alpha_3 = 1$, no caso $(\nu, \alpha) = (\nu_{(\pi)}, \alpha_{(\pi)})$.

Estamos supondo então que $\mathbb{I} = \{1\}$ e que $\mathbb{J} = \{2, 3\}$.

Com essa hipótese temos (ver definição 3.3.2((A) e (B)) e hipótese 4.3.1)

$$\alpha_{(s)} = \alpha_1 = \alpha_{(\pi)} \quad \text{e} \quad \nu_{(s)}(y_1) = \nu_1(y_1) = \nu_{(\pi)}(y_1) \, .$$

Sendo assim, por abuso de notação, podemos escrever

$$\alpha = \alpha_1, \quad \nu = \nu_1 \quad \text{e} \quad \nu \circ (\rho, p, e) = \nu \circ \rho \, .$$

Nessas condições e notações vale o resultado seguinte.

4.5.3 Proposição. *O sistema*

$$\begin{cases} (\bar{E}_1) & \nabla_t \rho + (\rho u)_{m,x} = 0 \\ (E_2) & \nabla_t (\rho u) + (p + \rho u^2)_{m,x} \approx [(\nu \circ \rho - \alpha) u_x]_{m,x} \end{cases}$$

não possui nenhuma $\mathcal{H}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$-solução na forma de onda de choque em $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$.

Demonstração. Suponhamos, o contrário, que existem funções ρ, u e p na álgebra $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ satisfazendo as equações $(\bar{E}_1)$ e (E_2), as quais são dadas, respectivamente,

unesp

pelas fórmulas (S_1), (S_2) e (S_3) verificando as hipóteses (A_1) - (A_5) da definição 4.3.2. A função (ρ, u, p) é também uma solução do sistema formado pelas equações

$$\begin{cases} (E_1) & \nabla_t \rho + (\rho u)_{m,x} \approx 0 \\ (E_2) & \nabla_t(\rho u) + (p + \rho u^2)_{m,x} \approx [(\nu \circ \rho - \alpha) u_x]_{m,x} \,. \end{cases}$$

Então, pela proposição 4.4.2, a função (ρ_r, u_r, p_r) é constante; existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$(1) \qquad y(t) = c \sum_{i=1}^{m} t_i, \quad (t = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m);$$

os elementos c, (ρ_r, u_r) e (ρ_ℓ, u_ℓ) verificam a fórmula

$$(j_1) \qquad c = \Delta u \left(1 + \frac{\rho_\ell}{\Delta \rho}\right) + u_\ell;$$

e os elementos (ρ, u) e (ν, α) verificam a relação seguinte

$$(2) \qquad (\nu \circ \rho - \alpha) u_x \approx 0 \,.$$

Dado $\widehat{H}_\rho$ um representante qualquer de H_ρ satisfazendo a condição $(A_4)(1)$ da definição 4.3.2, consideremos o representante de ρ_* (ver (4.3.3)) definido por

$$\widehat{\rho}_* := \Delta \rho \widehat{H}_\rho + \rho_\ell.$$

Pela proposição 3.3.3(A) temos que $\widehat{\rho}_* \in \mathcal{E}_{M,\otimes}[\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}_+^*]$ e portanto

$$\widehat{\rho}_* \circ (y^*, \pi_{1+m}) \in \mathcal{E}_{M,\otimes}[\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}_+^*]$$

que é um representante de $\rho = \rho_* \circ (y^*, \pi_{1+m})$. Assim, pela proposição 3.2.8, cada uma das funções ρ_* e ρ tem um inverso multiplicativo em $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$. Sendo (ρ, u) uma solução da equação $(\bar{E}_1)$, pela proposição 4.5.1, existe uma função generalizada $G \in \mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ verificando as fórmulas dadas em 4.5.1(1). As condições (1) acima e 4.5.1(1) acarretam

$$(3) \qquad G_x = -(\nabla_t \rho_*) \circ (y^*, \pi_{1+m}) \quad \text{e} \quad \rho(u - c)_m = G.$$

Da segunda igualdade vem $u_m = c_m + \rho^{-1} G$; donde, usando a primeira igualdade, segue que

$$u_{m,x} = -\rho^{-2} \rho_x G - \rho^{-1} \left[(\nabla_t \rho_*) \circ (y^*, \pi_{1+m})\right].$$

unesp

Multiplicando por $(\nu \circ \rho - \alpha)$ obtemos

$$-(\nu \circ \rho - \alpha)u_{m,x} = (\nu \circ \rho - \alpha)\rho^{-2}\rho_x G + (\nu \circ \rho - \alpha)\rho^{-1}\left[(\nabla_t \rho_*) \circ (y^*, \pi_{1+m})\right]$$

o que junto com a condição (2) acarreta

$$(4) \qquad (\nu \circ \rho - \alpha)\rho^{-2}\rho_x G + (\nu \circ \rho - \alpha)\rho^{-1}\left[(\nabla_t \rho_*) \circ (y^*, \pi_{1+m})\right] \approx 0\,.$$

Introduzindo a função generalizada

$$G_* := G \circ (y^*, \pi_{1+m})^{-1}$$

e usando a proposição 3.1.7(2), temos

$$G_x = (G_*)_\lambda \circ (y^*, \pi_{1+m}).$$

Então, as igualdades dadas em (3), junto com a propriedade 3.1.2(2), implicam

$$\rho_*(u_* - c)_m = G_* \quad \text{e} \quad (G_*)_\lambda = -\nabla_t \rho_*\,.$$

Como $\nu = \nu_1$ é estritamente crescente, $\nu \in C^\infty_{QM}[\mathbb{R}^*_+]$ e $H_\rho \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ satisfaz a hiótese $(A_4)(1)$ da definição 4.3.2, em virtude da proposição 3.3.11, existe uma função estritamente crescente $\varphi \in C^\infty_{QM}[\mathbb{R}^*_+]$ satisfazendo as condições seguintes

$$(\varphi\circ\rho_*)_\lambda = (\nu\circ\rho_* - \alpha)\rho_*^{-2}(\rho_*)_\lambda,\ \ \nabla_t(\varphi\circ\rho_*) = (\nu\circ\rho_* - \alpha)\rho_*^{-2}\nabla_t\rho_* \ \text{ e } \ \nabla_t\left[\rho_*(\varphi \circ \rho_*)\right] \approx 0.$$

Além disso, como $H_u \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ satisfaz a condição $(A_4)(1)$da definição 4.3.2, as funções generalizadas ρ_*, $G_* = \rho_*(u_* - c)_m$ e φ satisfazem as relações seguintes

$$\left[(\varphi \circ \rho_*)G_*\right]|_{\mathbb{R}^*_- \times \mathbb{R}^m} \approx \rho_\ell \varphi(\rho_\ell)(u_\ell - c)_m \ \text{ e } \ \left[(\varphi \circ \rho_*)G_*\right]|_{\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}^m} \approx \rho_r \varphi(\rho_r)(u_r - c)_m.$$

Usando a proposição 3.1.1(1) das condições acima, seguem respectivamente (lembrar que $(y^*, \pi_{1+m})(\Omega_-) = \mathbb{R}^*_- \times \mathbb{R}^m$ e que $(y^*, \pi_{1+m})(\Omega_+) = \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}^m$)

$$(5) \qquad (\varphi \circ \rho)_x = (\nu \circ \rho - \alpha)\rho^{-2}\rho_x$$

$$(6) \qquad \left[\nabla_t(\varphi \circ \rho_*)\right] \circ (y^*, \pi_{1+m}) = (\nu \circ \rho - \alpha)\rho^{-2}\left[(\nabla_t \rho_*) \circ (y^*, \pi_{1+m})\right]$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

(7) $$\{\nabla_t [\rho_*(\varphi \circ \rho_*)]\} \circ (y^*, \pi_{1+m}) \approx 0$$

(8) $$[(\varphi \circ \rho)G]\,|_{\Omega_-} \approx \rho_\ell \varphi(\rho_\ell)(u_\ell - c)_m$$

(9) $$[(\varphi \circ \rho)G]\,|_{\Omega_+} \approx \rho_r \varphi(\rho_r)(u_r - c)_m\,.$$

De (5) e (6) seguem, respectivamente, as igualdades

$$(\varphi \circ \rho)_x G = (\nu \circ \rho - \alpha)\rho^{-2}\rho_x G \quad \text{e}$$

$$\rho\,\{[\nabla_t(\varphi \circ \rho_*)] \circ (y^*, \pi_{1+m})\} = (\nu \circ \rho - \alpha)\rho^{-1}\,[(\nabla_t \rho_*) \circ (y^*, \pi_{1+m})]\,.$$

Levando essas igualdades em (4) vem

$$(\varphi \circ \rho)_x G + \rho\,\{[\nabla_t(\varphi \circ \rho_*)] \circ (y^*, \pi_{1+m})\} \approx 0$$

donde, como

$$(\varphi \circ \rho)_x G = [(\varphi \circ \rho)G]_x - (\varphi \circ \rho)G_x \quad \text{e} \quad G_x = -(\nabla_t \rho_*) \circ (y^*, \pi_{1+m})$$

segue que

$$[(\varphi \circ \rho)G]_x + (\varphi \circ \rho)\,[(\nabla_t \rho_*) \circ (y^*, \pi_{1+m})] + \rho\,\{[\nabla_t(\varphi \circ \rho_*)] \circ (y^*, \pi_{1+m})\} \approx 0.$$

Em conseqüência sendo

$$\{\nabla_t [\rho_*(\varphi \circ \rho_*)]\} \circ (y^*, \pi_{1+m}) = (\varphi \circ \rho)\,[(\nabla_t \rho_*) \circ (y^*, \pi_{1+m})] + \rho\,\{[\nabla_t(\varphi \circ \rho_*)] \circ (y^*, \pi_{1+m})\}$$

obtemos

$$[(\varphi \circ \rho)G]_x + \{\nabla_t [\rho_*(\varphi \circ \rho_*)]\} \circ (y^*, \pi_{1+m}) \approx 0.$$

Assim, usando (7), temos que $[(\varphi \circ \rho)G]_x \approx 0$. Usando o teorema 2.1.2(d), podemos encontrar uma função generalizada Φ em $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$ tal que $\Phi_x = 0$ e

(10) $$(\varphi \circ \rho)G \approx \Phi\,.$$

Por restrição ao conjunto Ω_-, usando (8), obtemos

$$\Phi|_{\Omega_-} \approx \rho_\ell \varphi(\rho_\ell)(u_\ell - c)_m\,.$$

Como $(y^*, \pi_{1+m})(\Omega_-) = y^*(\Omega_-) \times \mathbb{R}^m$ e $\Phi_x = 0$, pela proposição 3.1.14 (para $n = 1$), resulta que $\Phi \approx \rho_\ell \varphi(\rho_\ell)(u_\ell - c)_m$, o que junto com a relação (10) implica

$$(\varphi \circ \rho)G \approx \rho_\ell \varphi(\rho_\ell)(u_\ell - c)_m.$$

Por restrição ao conjunto Ω_+, usando a condição (9), a relação anterior implica que

$$\rho_r(u_r - c)\varphi(\rho_r) = \rho_\ell(u_\ell - c)\varphi(\rho_\ell)\,. \tag{11}$$

Por outro lado, usando a fórmula (j_1) podemos escrever $\rho_r(u_r - c) = \rho_\ell(u_\ell - c)$. Além disso, como

$$\left(1 + \frac{\rho_\ell}{\Delta\rho}\right) < 0$$

temos a condição seguinte

$$\rho_\ell(u_\ell - c) = \rho_\ell \Delta u \left(1 + \frac{\rho_\ell}{\Delta\rho}\right) < 0.$$

Sendo assim, da igualdade (11) segue que $\varphi(\rho_r) = \varphi(\rho_\ell)$, o que não pode ocorrer, dado que φ é uma função estritamente crescente e que $\rho_r < \rho_\ell$ (pela hipótese (A_2) da definição 4.3.2). Logo, o sistema acima, formado pelas equações $(\bar{E}_1)$ e (E_2), não pode ter $\mathcal{H}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$-soluções na forma de onda de choque de acordo com a definição 4.3.2 (ou definição 4.4.8). □

Da proposição 4.5.3 obtem-se o resultado seguinte.

4.5.4 Teorema. *O sistema*

$$\begin{cases} \nabla_t \rho + (\rho u)_{m,x} = 0 \\ \nabla_t (\rho u) + (p + \rho u^2)_{m,x} \approx [(\nu \circ \rho - \alpha) u_x]_{m,x} \\ \nabla_t e + [(e + p)u]_{m,x} \approx [(\nu \circ \rho - \alpha) u u_x]_{m,x} \\ e_m \approx \lambda p_m + \frac{1}{2}(\rho u^2)_m \end{cases}$$

não possui nenhuma $\mathcal{H}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$-solução na forma de onda de choque em $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$.

No caso $m = 1$, denotando por (x, t) um elemento genérico de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, do teorema anterior, temos o resultado seguinte, o qual envolve as equações diferenciais parciais da hidrodinâmica em dimensão 1.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

4.5.5 Teorema. *O sistema*

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ (\rho u)_t + (p + \rho u^2)_x \approx [(\nu \circ \rho - \alpha) u_x]_x \\ e_t + [(e+p)u]_x \approx [(\nu \circ \rho - \alpha) u u_x]_x \\ e \approx \lambda p + \frac{1}{2}\rho u^2 \end{cases}$$

não possui nenhuma $\mathcal{H}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$-solução na forma de onda de choque em $\mathcal{G}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, onde ρ é a densidade, u a velocidade, p a pressão, e a energia total e $\approx$ é a relação de associação em $\mathcal{G}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$.

Como conseqüência do teorema 4.5.4 temos também o resultado seguinte.

4.5.6 Teorema. *O sistema*

$$\begin{cases} \nabla_t \rho + (\rho u)_{m,x} = 0 \\ \nabla_t (\rho u) + (p + \rho u^2)_{m,x} = [(\nu \circ \rho - \alpha) u_x]_{m,x} \\ \nabla_t e + [(e+p)u]_{m,x} \approx [(\nu \circ \rho - \alpha) u u_x]_{m,x} \\ e_m \approx \lambda p_m + \frac{1}{2}(\rho u^2)_m \end{cases}$$

não possui nenhuma $\mathcal{H}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m)$-solução na forma de onda de choque em $\mathcal{G}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m)$.

Usando o teorema 4.5.4 (mais precisamente a proposição 4.5.3), podemos também estudar a resolubilidade dos sistemas propostos (S) e $(\bar{S})$ no sentido da definição 4.2.2. Para tanto, nos próximos três resultados (4.5.9 - 4.5.11), vamos trabalhar com a definição introduzida a seguir, bem mais particular do que a definição 4.2.2. Lembramos que podemos estudar a resolubilidade dos sistemas (S) e $(\bar{S})$ usando uma técnica semelhante ao que foi fito, por exemplo, em [9] (Teorema 4.3.5) ou em [11] (Teorema 5.3). A idéia aqui é aproveitar a ferramenta que dispomos, a saber as proposições 2.3.12 e 4.5.3. Consideraremos os sistemas $(\tilde{S})$, $(\bar{S})$ e (S), introduzidos no início da seção 4.3.

4.5.7 Definição. Se $\mathcal{S}$ indica qualquer um dos sistemas $(\tilde{S})$, $(\bar{S})$ ou (S), uma $\mathcal{H}(\mathbb{R})$-*solução na forma de onda de choque em* $\mathcal{G}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m)$ do sistema $\mathcal{S}$ é qualquer elemento (ρ, u, p, e) de $\mathcal{G}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^4)$ tal que as funções componentes são dadas na forma

$$(S_1) \quad \rho = \Delta\rho H_\rho \circ y^* + \rho_\ell \qquad (S_2) \quad u = \Delta u H_u \circ y^* + u_\ell$$
$$(S_3) \quad p = \Delta p H_p \circ y^* + p_\ell \qquad (S_4) \quad e = \Delta e H_e \circ y^* + e_\ell$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

as quais são soluções do sistema $\mathcal{S}$ e satisfazem as hipóteses seguintes:

(a) $y^* \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ é a função associada a $y \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ (ver (3.1.1)), dada por $y\colon t = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m \mapsto y(t) := c(t_1 + \cdots + t_m) \in \mathbb{R}$, para algum $c \in \mathbb{R}$.

(b) Denotamos com τ qualquer um dos símbolos ρ, u, p ou e. Existe $(\tau_r, \tau_\ell) \in \mathbb{R}^2$ tal que $0 < \tau_r < \tau_\ell$ e definimos $\Delta\tau := \tau_r - \tau_\ell$.

(c) H_ρ, H_u, H_p, $H_e \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R})$.

(d) Cada H_τ, $\tau = \rho, u, p, e$, tem um representante $\widehat{H}_\tau$ tal que

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \left|\widehat{H}_\tau(\varepsilon, \lambda)\right| \leq \frac{\tau_r \varepsilon - \tau_\ell}{\Delta\tau}, \quad (\varepsilon \in]0, 1])$$

$$(\forall K \subset\subset \mathbb{R}^*)(\exists \eta \in]0, 1]) \mid \sup_{(\varepsilon,\lambda) \in]0,\eta[\times K} \left|\widehat{H}_\tau(\varepsilon, \lambda)\right| < -\frac{\tau_\ell}{\Delta\tau}.$$

(e) $(HH'_u)|_{\mathbb{R}^\bullet} \approx 0$ para cada H em $\mathcal{H}_p(\mathbb{R})$.

(f) $(H_u)'|_{\mathbb{R}^\bullet} \in \mathcal{G}_{\ell b}(\mathbb{R}^*)$.

4.5.8 Observação. Na definição de $\mathcal{H}(\mathbb{R})$-solução na forma de onda de choque dada em [9] (Definição 4.1.1) ou em [11] (Definição 5.1) não se exige que a função H_u satisfaça também a hipótese (f) da definição anterior. Acontece que, quando das primeiras tentativas, para resolver o problema proposto na Introdução, a idéia inicial foi obter as $\mathcal{H}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$-soluções na forma de onda de choque (ver definição 4.4.8) usando as $\mathcal{H}(\mathbb{R})$-soluções na forma de onda de choque (ver definição 4.2.2). Para conseguir isso, uma forma de atacar o problema, consistia em exigir que a função H_u satisfaça também a condição (f) acima referida, enfraquecendo assim a definição 4.2.2. Mais precisamente, a referida exigência é para poder obter a condição (2) a partir de (1) na proposição 2.3.12. Convém observar também que quando estudamos a $\mathcal{H}(\mathbb{R})$-resolubilidade do sistema $(\tilde{S})$ procuramos as soluções H_u no conjunto $\mathcal{H}_r(\mathbb{R})$ (ver prova do Teorema 4.2.7 em [9] ou do Teorema 5.2 em [11]). Por outro lado, pelo lema 2.2.15(c), para os elementos K de $\mathcal{H}_r(\mathbb{R})$ se tem que $K'|_{\mathbb{R}^\bullet} = 0$. Portanto, por um lado K' satisfaz evidentemente a hipótese 4.5.7(e) e por outro, pela observação 2.2.16, se tem que $K'|_{\mathbb{R}^\bullet} \in \mathcal{G}_{\ell b}(\mathbb{R}^*)$. Diante dessas

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

situações, exigir que $(H_u)'|_{\mathbb{R}^*} \in \mathcal{G}_{\ell b}(\mathbb{R}^*)$ tem sentido e não está fora do contexto de nossos objetivos.

Como conseqüência da proposição 4.5.3 podemos obter também o resultado seguinte.

4.5.9 Proposição. *O sistema*

$$\begin{cases} (\bar{E}_1) & \nabla_t \rho + (\rho u)_{m,x} = 0 \\ (E_2) & \nabla_t(\rho u) + (p + \rho u^2)_{m,x} \approx [(\nu \circ \rho - \alpha) u_x]_{m,x} \end{cases}$$

não possui nenhuma $\mathcal{H}(\mathbb{R})$-solução na forma de onda de choque em $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$, de acordo com a definição 4.5.7.

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que existem funções ρ, u e p na álgebra $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ satisfazendo as equações $(\bar{E}_1)$ e (E_2), as quais são dadas pelas fórmulas

$$\rho := \Delta\rho K_\rho \circ y^* + \rho_\ell, \quad u := \Delta u K_u \circ y^* + u_\ell \quad \text{e} \quad p := \Delta p K_p \circ y^* + p_\ell$$

onde os elementos y^*, $(\rho_\ell, u_\ell, p_\ell)$, $(\Delta\rho, \Delta u, \Delta p)$ e (K_ρ, K_u, K_p) verificam as hipóteses (a)-(f) da definição 4.5.7. Introduzindo as funções generalizadas

$$H_\rho := K_\rho \circ \pi_m, \quad H_u := K_u \circ \pi_m \quad \text{e} \quad H_p := K_p \circ \pi_m$$

onde $\pi_m \colon (\lambda, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \mapsto \lambda \in \mathbb{R}$, e lembrando que

$$y^* = \pi_m \circ (y^*, \pi_{1+m})$$

onde $\pi_{1+m} \colon (\lambda, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \mapsto t \in \mathbb{R}^m$, das equações acima temos

$$\rho = \Delta\rho H_\rho \circ (y^*, \pi_{1+m}), \quad u = \Delta u H_u \circ (y^*, \pi_{1+m}) \quad \text{e} \quad p = \Delta p H_p \circ (y^*, \pi_{1+m}).$$

Pela proposição 2.3.11(c) temos que H_ρ, H_u, $H_p \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ e, é claro que, o elemento (H_ρ, H_u, H_p) verifica a condição (A_4) da definição 4.4.8, visto que a terna (K_ρ, K_u, K_p) verifica a condição (d) da definição 4.5.7. Por outro lado, em virtude da proposição 2.3.12, as condições (c), (e) e (f) da definição 4.5.7 implicam a validade da hipótese (A_5) da definição 4.4.8. Sendo assim, a função (ρ, u, p) é uma $\mathcal{H}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$-solução na forma de onda de choque das equações $(\bar{E}_1)$ e (E_2), o que contraria à proposição 4.5.3. Logo, o sistema considerado acima não possui também soluções na forma de onda de choque de acordo com a definição 4.5.7. □

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Como conseqüência do resultado anterior, temos o teorema seguinte.

4.5.10 Teorema. *O sistema*

$$\begin{cases} \nabla_t \rho + (\rho u)_{m,x} = 0 \\ \nabla_t (\rho u) + (p + \rho u^2)_{m,x} \approx [(\nu \circ \rho - \alpha) u_x]_{m,x} \\ \nabla_t e + [(e+p)u]_{m,x} \approx [(\nu \circ \rho - \alpha) u u_x]_{m,x} \\ e_m \approx \lambda p_m + \frac{1}{2}(\rho u^2)_m \end{cases}$$

não possui nenhuma $\mathcal{H}(\mathbb{R})$-solução na forma de onda de choque em $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$, de acordo com a definição 4.5.7.

Como conseqüência desse resultado temos ainda o seguinte teorema.

4.5.11 Teorema. *O sistema*

$$\begin{cases} \nabla_t \rho + (\rho u)_{m,x} = 0 \\ \nabla_t (\rho u) + (p + \rho u^2)_{m,x} = [(\nu \circ \rho - \alpha) u_x]_{m,x} \\ \nabla_t e + [(e+p)u]_{m,x} \approx [(\nu \circ \rho - \alpha) u u_x]_{m,x} \\ e_m \approx \lambda p_m + \frac{1}{2}(\rho u^2)_m \end{cases}$$

não possui nenhuma $\mathcal{H}(\mathbb{R})$-solução na forma de onda de choque em $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$, de acordo com a definição 4.5.7.

Lembramos que em [9] (Teorema 4.3.5) (e em [11], Teorema 5.3), obtivemos o resultado seguinte.

4.5.12 Teorema. *O sistema*

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ (\rho u)_t + (p + \rho u^2)_x = \{[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha] u_x\}_x \\ e_t + [(e+p)u]_x \approx \{[\nu \circ (\rho, p, e) - \alpha] u u_x\}_x \\ e \approx \lambda p + \frac{1}{2}\rho u^2 \end{cases}$$

não possui nenhuma $\mathcal{H}(\mathbb{R})$-solução na forma de onda de choque em $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, de acordo com a definição 4.2.2.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

Para tanto, tivemos que impor uma condição de inversibilidade extra à função ν_*, a saber (ver hipóteses 3.3.1(B) e 4.3.1)

$$1 \in \mathbb{I} \quad \text{e} \quad \left[\varepsilon \mapsto (\nu_1(r\varepsilon) - \alpha_1)^{-1}\right] \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R}), \qquad (r > 0).$$

Neste trabalho, sem usar essa condição, obtivemos um resultado (teorema 4.5.5) com apenas uma igualdade na primeira equação, mas que tem apenas também a expressão $\nu \circ \rho - \alpha$ nos seus segundos membros.

unesp

Referências Bibliográficas

[1] ARAGONA, J. *Introdução à teoria das funções generalizadas de Colombeau.* Notas de aula de MAT 829, IME-USP, São Paulo, 240p, 1989.

[2] ARAGONA, J.; BIAGIONI, H. *Intrinsic definition of the Colombeau algebra of generalized functions.* Anal. Math. T. **17**, Fasc. 2, (1991), 75–132.

[3] ARAGONA, J.; VILLARREAL, F. *Colombeau's Theory and Shock Waves in a Problem of Hydrodynamics.* Jour. D'Anal. Math. V. **61**, (1993), 113–144.

[4] BIAGIONI, H. *A Nonlinear Theory of Generalized Functions.* Lecture Notes Math., V. *1421*, Berlin: Springer–Verlag, 1990.

[5] COLOMBEAU, J. F. *Elementary Introduction to New Generalized Functions*, V. **113**. North-Holland Math. Studies, 1985.

[6] _____. *Multiplication of Distributions.* Lecture Notes Math., V. **1532**, Berlin: Springer–Verlag, 1992.

[7] HORVÁT, J. *Topological Vector Space and Distributions.* Addison–Wesley Series in Math., V. **I**, Addison–Wesley Publishing Company, 1966.

[8] OBERGUGGENBERGER, M. *Multiplication of Distributions and Applications to Partial Differential Equations.* Pitman Research Notes in Math. V. **259**. Harlow, Essex, England: Longman ST, 1993.

[9] VILLARREAL, F. *Sobre soluções na forma de onda de choque de certos sistemas de equações diferenciais parciais da hidrodinâmica.* Tese de Doutoramento, Universidade de São Paulo: IME-USP, 1990.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

[10] _____. *Composition and Invertibility for a Class of Generalized Functions in the Colombeau's Theory.* Integr. Trans. and Spec. Func., V. **6**, N$^{\underline{o}}$ 1-4, (1998), 339–345.

[11] _____. *Colombeau's theory and shock wave solutions for systems of PDEs.* Electron. J. Diff. Eqns., V. **2000**, N$^{\underline{o}}$ 21, (2000), 1–17.

[12] _____. *Composition for a Class of Generalized Functions in the Colombeau's Theory.* Integr. Trans. and Spec. Func., V. **11**, N$^{\underline{o}}$ 1, (2001), 93–100.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18