

ARIEL STARCKE BUZETTI

**Controle Chaveado de Sistemas Não Lineares com  
Incertezas utilizando Funções de Lyapunov Não  
Quadráticas**

Ilha Solteira - SP  
2021





ARIEL STARCKE BUZETTI

**Controle Chaveado de Sistemas Não Lineares com Incertezas utilizando  
Funções de Lyapunov Não Quadráticas**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual Paulista - UNESP - Campus de Ilha Solteira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica. Área de Concentração: Automação.

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira  
Orientador

Ilha Solteira - SP  
2021

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

B992c Buzetti, Ariel Starcke.  
Controle chaveado de sistemas não lineares com incertezas utilizando  
funções de Lyapunov não quadráticas / Ariel Starcke Buzetti. -- Ilha Solteira:  
[s.n.], 2021  
132 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia  
de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Controle e Automação, 2021

Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira  
Inclui bibliografia

1. Função de Lyapunov não quadrática. 2. Controle robusto. 3. Controle  
chaveado. 4. Chattering. 5. Modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno.

  
Raiane da Silva Santos



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Ilha Solteira

**CERTIFICADO DE APROVAÇÃO**

TÍTULO DA TESE: Controle Chaveado de Sistemas Não Lineares com Incertezas utilizando Funções de Lyapunov Não Quadráticas


**AUTOR: ARIEL STARKE BUZETTI**

**ORIENTADOR: MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA**

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Doutor em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: Automação pela Comissão Examinadora:

  
Prof. Dr. MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA (Participação Virtual)  
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

  
Prof. Dr. JEAN MARCOS DE SOUZA RIBEIRO (Participação Virtual)  
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

  
Prof. Dr. RODRIGO CARDIM (Participação Virtual)  
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

  
Prof. Dr. ALEXANDRE ATAÍDE CARNIATO (Participação Virtual)  
Departamento de Indústria / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - IFSP

  
Prof. Dr. UILIAM NELSON LENZION TOMAZ ALVES (Participação Virtual)  
Departamento de Eixo de Controle e Processos Industriais / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná - IFPR

Ilha Solteira, 12 de fevereiro de 2021

## **AGRADECIMENTOS**

Meus agradecimentos a todos os familiares, amigos, professores e funcionários da FEIS-UNESP, que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho. Em especial, dedico meus agradecimentos:

- Ao Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, por todo ensinamento, incentivo, confiança e orientação;
- Aos meus pais Salatiér e Wilma e ao meu irmão Bruno pelo carinho, apoio e incentivo;
- Aos meus amigos e colegas do Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC) que de forma direta ou indireta me ajudaram.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

## RESUMO

Esse trabalho propõe um novo método de controle chaveado robusto de sistemas não lineares com incertezas descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno, que utiliza várias matrizes simétricas positivas definidas. É verificado que esse método apresenta menor conservadorismo do que alguns controladores chaveados disponíveis, que costumam ser menos conservadores comparados a controladores com ganho único. Adicionalmente, permite preservar a robustez e controlar sistemas com parâmetros incertos, utilizando uma taxa de decaimento para garantir o desempenho do sistema. É proposta também uma técnica de projeto de controle chaveado que evita um chaveamento de alta frequência entre os ganhos do sistema, permitindo alterar o ganho apenas quando ocasionar uma diminuição significativa na derivada da função de Lyapunov. Essa técnica é importante porque um determinado sistema prático pode ser incapaz de chavear de forma muito rápida, e ainda este chaveamento de alta frequência pode causar desgaste no sistema e *chattering* no sinal de controle. A validação dos métodos propostos neste trabalho foi comprovada matematicamente e por meio de simulações e implementações práticas no laboratório de controle no sistema *2DOF ball balancer* da Quanser.

**Palavras-chave:** Função de Lyapunov Não Quadrática; Controle Robusto; Controle Chaveado; Chattering; Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno.

## ABSTRACT

This work proposes a switched robust control method for uncertain nonlinear systems described by Takagi-Sugeno fuzzy models, that uses several symmetric positive definite matrices. It is less conservative than other available switched controllers, which are usually less conservative than control laws with single gain, while maintaining the robustness that allows the control of systems with parametric uncertainties and the specification of the decay rate to ensure good system performance. Another switched control design technique is also proposed that prevents high frequency changes among the system's gains, allowing the system to switch the gain in use only when it lowers the time derivative of the Lyapunov function significantly. This technique is important because the system may be unable to switch too fast, and also switching in high frequencies may cause system deterioration and chattering on the control signal. The validity of all the methods presented in this work has been proven mathematically and through simulation and implementation on a *2DOF ball balancer* system.

**Keywords:** Non-Quadratic Lyapunov Function; Robust Control; Switched Control; Chattering; Takagi-Sugeno Fuzzy Models.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Factibilidade do método de controle chaveado apresentado no Teorema 2 ( $\triangle$ ), no Teorema 1 ( $\triangle$ , $\circ$ ) e em (MÁRQUEZ <i>et al.</i> , 2016) ( $\triangle$ , $\circ$ , $x$ ).	33
Figura 2	Resultado de simulação do sistema representado por (1), (2) e (27), com $a = 2$ e $b = 1,5$ , controlado por (3), considerando (28)-(30). A variável de estado $x_1(t)$ está representada com uma linha azul e a variável de estado $x_2(t)$ com uma linha pontilhada vermelha. . . . .	34
Figura 3	$\alpha_i(t)$ , $i \in \mathbb{K}_4$ , em cada instante do sistema representado por (1), (2) e (27), controlado por (28), considerando (28)-(30). . . . .	35
Figura 4	$h_j(t)$ , $j \in \mathbb{K}_4$ , em cada instante do sistema representado por (1), (2) e (27), controlado por (28), considerando (28)-(30). . . . .	36
Figura 5	$h_k^-(t)$ , $k \in \mathbb{K}_4$ , em cada instante do sistema representado por (1), (2) e (27), controlado por (28), considerando (28)-(30). . . . .	37
Figura 6	$v_l(t)$ , $l \in \mathbb{K}_4$ , em cada instante do sistema representado por (1), (2) e (27), controlado por (28), considerando (28)-(30). . . . .	38
Figura 7	Equipamento <i>2DOF ball balancer</i> , pertencente ao DEE-FEIS-LPC. . .	39
Figura 8	Planta esquemática do <i>2DOF ball balancer</i> na direção $x$ . . . . .	39
Figura 9	Resultado de simulação do sistema <i>2DOF ball balancer</i> , descrito por (1), (2), (42) e (43), controlado por (3), considerando (44)-(46). . . . .	55
Figura 10	$h_j(t)$ , $j \in \mathbb{K}_4$ , do sistema <i>2DOF ball balancer</i> em cada instante, controlado por (3), considerando (44)-(46). . . . .	56
Figura 11	$h_k^-(t)$ , $k \in \mathbb{K}_4$ , do sistema <i>2DOF ball balancer</i> em cada instante, controlado por (3), considerando (44)-(46). . . . .	57
Figura 12	$v_l(t)$ , $l \in \mathbb{K}_4$ , do sistema <i>2DOF ball balancer</i> em cada instante, controlado por (3), considerando (44)-(46). . . . .	57
Figura 13	Eixo $x$ : resultado de implementação do sistema <i>2DOF ball balancer</i> , descrito por (1), (2), (42) e (43), controlado por (3), considerando (44)-(46). . . . .	58

Figura 14	Eixo $x$ : $h_j(t)$ , $j \in \mathbb{K}_4$ , do sistema <i>2DOF ball balancer</i> em cada instante, controlado por (3), considerando (44)-(46). . . . .	59
Figura 15	Eixo $x$ : $h_k^-(t)$ , $k \in \mathbb{K}_4$ , do sistema <i>2DOF ball balancer</i> em cada instante, controlado por (3), considerando (44)-(46). . . . .	60
Figura 16	Eixo $x$ : $v_l(t)$ , $l \in \mathbb{K}_4$ , do sistema <i>2DOF ball balancer</i> em cada instante, controlado por (3), considerando (44)-(46). . . . .	60
Figura 17	Eixo $y$ : resultado de implementação do sistema <i>2DOF ball balancer</i> , descrito por (1), (2), (42) e (43), controlado por (3), considerando (44)-(46). . . . .	61
Figura 18	Eixo $y$ : $h_j(t)$ , $j \in \mathbb{K}_4$ , do sistema <i>2DOF ball balancer</i> em cada instante, controlado por (3), considerando (44)-(46). . . . .	62
Figura 19	Eixo $y$ : $h_k^-(t)$ , $k \in \mathbb{K}_4$ , do sistema <i>2DOF ball balancer</i> em cada instante, controlado por (3), considerando (44)-(46). . . . .	63
Figura 20	Eixo $y$ : $v_l(t)$ , $l \in \mathbb{K}_4$ , do sistema <i>2DOF ball balancer</i> em cada instante, controlado por (3), considerando (44)-(46). . . . .	63
Figura 21	Fluxograma da lei de chaveamento do método anti- <i>chattering</i> . . . . .	67
Figura 22	Simulação do sistema <i>2DOF ball balancer</i> , descrito por (2), (42), (43) e (47), utilizando o controlador (49) com $\psi = 2,5$ e $\beta = 0$ , considerando (67), (68) e (69). . . . .	73
Figura 23	$\lambda(t)$ e $\sigma(t)$ do sistema <i>2DOF ball balancer</i> , descrito por (2), (42), (43) e (47), utilizando o controlador (49), considerando (67), (68) e (69). . . . .	74
Figura 24	$\lambda(t)$ e $\sigma(t)$ do sistema <i>2DOF ball balancer</i> , no período entre 0 e 5 segundos. . . . .	74
Figura 25	$\lambda(t)$ e $\sigma(t)$ do sistema <i>2DOF ball balancer</i> , no período entre 0 e 0,5 segundos. . . . .	75
Figura 26	$\lambda(t)$ e $\sigma(t)$ do sistema <i>2DOF ball balancer</i> , no período entre 35 e 45 segundos. . . . .	75
Figura 27	$\lambda(t)$ e $\sigma(t)$ do sistema <i>2DOF ball balancer</i> , no período entre 40 e 40,5 segundos. . . . .	76

Figura 28	Simulação do sistema <i>2DOF ball balancer</i> , descrito por (2), (42), (43) e (47), utilizando o controlador (49) com $\psi = 0$ e $\beta = 2,5$ , considerando (67), (68) e (69). . . . .	77
Figura 29	$\sigma(t)$ do sistema <i>2DOF ball balancer</i> , descrito por (2), (42), (43) e (47), utilizando o controlador (49), considerando (67), (68) e (69). . . . .	77
Figura 30	$\sigma(t)$ do sistema <i>2DOF ball balancer</i> , nos períodos entre 0 e 5 segundos e 0 e 0,5 segundos. . . . .	78
Figura 31	$\sigma(t)$ do sistema <i>2DOF ball balancer</i> , no período entre 35 e 45 segundos e 40 e 40,5 segundos. . . . .	78
Figura 32	Eixo $x$ da implementação no sistema <i>2DOF ball balancer</i> , descrito por (2), (42), (43) e (47), utilizando o controlador (49) com $\psi = 2,5$ e $\beta = 0$ , considerando (67), (68) e (69). . . . .	79
Figura 33	Eixo $x$ : $\lambda(t)$ e $\sigma(t)$ do sistema <i>2DOF ball balancer</i> , descrito por (2), (42), (43) e (47), utilizando o controlador (49), considerando (67), (68) e (69). . . . .	80
Figura 34	Eixo $x$ : $\lambda(t)$ e $\sigma(t)$ do sistema <i>2DOF ball balancer</i> , no período entre 0 e 5 segundos. . . . .	80
Figura 35	Eixo $x$ : $\lambda(t)$ e $\sigma(t)$ do sistema <i>2DOF ball balancer</i> , no período entre 0 e 0,5 segundos. . . . .	81
Figura 36	Eixo $x$ : $\lambda(t)$ e $\sigma(t)$ do sistema <i>2DOF ball balancer</i> , no período entre 35 e 45 segundos. . . . .	81
Figura 37	Eixo $x$ : $\lambda(t)$ e $\sigma(t)$ do sistema <i>2DOF ball balancer</i> , no período entre 40 e 40,5 segundos. . . . .	82
Figura 38	Eixo $y$ da implementação no sistema <i>2DOF ball balancer</i> , descrito por (2), (42), (43) e (47), utilizando o controlador (49) com $\psi = 2,5$ e $\beta = 0$ , considerando (67), (68) e (69). . . . .	83
Figura 39	Eixo $y$ : $\lambda(t)$ e $\sigma(t)$ do sistema <i>2DOF ball balancer</i> , descrito por (2), (42), (43) e (47), utilizando o controlador (49), considerando (67), (68) e (69). . . . .	83
Figura 40	Eixo $y$ : $\lambda(t)$ e $\sigma(t)$ do sistema <i>2DOF ball balancer</i> , no período entre 0 e 5 segundos. . . . .	84

Figura 41	Eixo y: $\lambda(t)$ e $\sigma(t)$ do sistema <i>2DOF ball balancer</i> , no período entre 0 e 0,5 segundos. . . . .	84
Figura 42	Eixo y: $\lambda(t)$ e $\sigma(t)$ do sistema <i>2DOF ball balancer</i> , no período entre 35 e 45 segundos. . . . .	85
Figura 43	Eixo y: $\lambda(t)$ e $\sigma(t)$ do sistema <i>2DOF ball balancer</i> , no período entre 40 e 40,5 segundos. . . . .	85
Figura 44	Resultado de simulação do sistema representado por (70), (2) e (82), controlado por (71), considerando (83)-(85) e $\psi = 0,01$ . A variável de estado $x_1(t)$ está representada com uma linha azul e a variável de estado $x_2(t)$ com uma linha pontilhada vermelha. . . . .	96
Figura 45	$\alpha_i(t)$ , $i \in \mathbb{K}_4$ , em cada instante do sistema representado por (70), (2) e (82), controlado por (83), considerando (83)-(85) e $\psi = 0,01$ . . . . .	97
Figura 46	$h_j(t)$ , $j \in \mathbb{K}_4$ , em cada instante do sistema representado por (70), (2) e (82), controlado por (83), considerando (83)-(85) e $\psi = 0,01$ . . . . .	98
Figura 47	$h_k^-(t)$ , $k \in \mathbb{K}_4$ , em cada instante do sistema representado por (70), (2) e (82), controlado por (83), considerando (83)-(85) e $\psi = 0,01$ . . . . .	99
Figura 48	$v_l(t)$ , $l \in \mathbb{K}_4$ , em cada instante do sistema representado por (70), (2) e (82), controlado por (83), considerando (83)-(85). . . . .	100
Figura 49	Resultado de simulação do sistema representado por (70), (2) e (82), controlado por (71), considerando $\psi = 0$ . A variável de estado $x_1(t)$ está representada com uma linha azul e a variável de estado $x_2(t)$ com uma linha pontilhada vermelha. . . . .	101
Figura 50	$\alpha_i(t)$ , $i \in \mathbb{K}_4$ , em cada instante do sistema representado por (70), (2) e (82), controlado por (83), considerando $\psi = 0$ . . . . .	102
Figura 51	$h_j(t)$ , $j \in \mathbb{K}_4$ , em cada instante do sistema representado por (70), (2) e (82), controlado por (83), considerando $\psi = 0$ . . . . .	103
Figura 52	$h_k^-(t)$ , $k \in \mathbb{K}_4$ , em cada instante do sistema representado por (70), (2) e (82), controlado por (83), considerando $\psi = 0$ . . . . .	104
Figura 53	$v_l(t)$ , $l \in \mathbb{K}_4$ , em cada instante do sistema representado por (70), (2) e (82), controlado por (83), considerando $\psi = 0$ . . . . .	105

Figura 54	Ampliação do sinal de controle $u(t)$ , do resultado de simulação utilizando a teoria anti- <i>chattering</i> ( $\psi = 0,01$ ), apresentado na Figura 44, na faixa entre 2 e 3,3 segundos. . . . .	106
Figura 55	Ampliação do sinal de controle $u(t)$ , do resultado de simulação sem utilizar a teoria anti- <i>chattering</i> ( $\psi = 0$ ), apresentado na Figura 49, na faixa entre 2 e 3,3 segundos. . . . .	106
Figura 56	Resultado de simulação do sistema <i>2DOF ball balancer</i> , descrito por (70), (2), (86) e (87), controlado por (71), considerando (88)-(90). . . .	119
Figura 57	$h_j(t)$ , $j \in \mathbb{K}_4$ do sistema <i>2DOF ball balancer</i> em cada instante, controlado por (71), considerando (88)-(90). . . . .	120
Figura 58	$h_k^-(t)$ , $k \in \mathbb{K}_4$ do sistema <i>2DOF ball balancer</i> em cada instante, controlado por (71), considerando (88)-(90). . . . .	121
Figura 59	$v_l(t)$ , $l \in \mathbb{K}_4$ do sistema <i>2DOF ball balancer</i> em cada instante, controlado por (71), considerando (88)-(90). . . . .	121
Figura 60	Eixo $x$ : resultado de implementação do sistema <i>2DOF ball balancer</i> , descrito por (70), (2), (86) e (87), controlado por (71), considerando (88)-(90). . . . .	123
Figura 61	Eixo $x$ : $h_j(t)$ , $j \in \mathbb{K}_4$ , do sistema <i>2DOF ball balancer</i> em cada instante, controlado por (71), considerando (88)-(90). . . . .	124
Figura 62	Eixo $x$ : $h_k^-(t)$ , $k \in \mathbb{K}_4$ , do sistema <i>2DOF ball balancer</i> em cada instante, controlado por (71), considerando (88)-(90). . . . .	125
Figura 63	Eixo $x$ : $v_l(t)$ , $l \in \mathbb{K}_4$ , do sistema <i>2DOF ball balancer</i> em cada instante, controlado por (71), considerando (88)-(90). . . . .	125
Figura 64	Eixo $y$ : resultado de implementação do sistema <i>2DOF ball balancer</i> , descrito por (70), (2), (86) e (87), controlado por (71), considerando (88)-(90). . . . .	126
Figura 65	Eixo $y$ : $h_j(t)$ , $j \in \mathbb{K}_4$ , do sistema <i>2DOF ball balancer</i> em cada instante, controlado por (71), considerando (88)-(90). . . . .	127
Figura 66	Eixo $y$ : $h_k^-(t)$ , $k \in \mathbb{K}_4$ , do sistema <i>2DOF ball balancer</i> em cada instante, controlado por (71), considerando (88)-(90). . . . .	128

Figura 67 Eixo y:  $v_l(t)$ ,  $l \in \mathbb{K}_4$ , do sistema *2DOF ball balancer* em cada instante, controlado por (71), considerando (88)-(90). . . . . 128

## SÍMBOLOS

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$\mathbb{R}^n$	Conjunto dos vetores $n \times 1$ com elementos reais.
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Conjunto das matrizes $n \times m$ com elementos reais.
$\mathbb{K}_r$	Conjuntos dos $r$ primeiros números inteiros positivos $\{1, 2, \dots, r\}$ .
$x(t)$	Matriz de estado do sistema.
$s$	Número de vértices da planta do sistema.
$n$	Dimensão das matrizes $A$ e de $P$ .
$d$	Letra usada para designar derivada.
$P$	Matriz simétrica positiva definida.
$\alpha_i$	Valores escalares que servem para representar a planta com incertezas politópicas. Obedecem as regras: $\alpha_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^s \alpha_i = 1$ .
$A$ e $B$	Matriz planta do sistema (pode conter incerteza, sendo escrita de forma simplificada como $A = \sum_{i=r}^s \alpha_i A_i$ e $B = \sum_{i=r}^s \alpha_i B_i$ ).

$A_i$  e  $B_i$

Vértices das matrizes  $A$  e  $B$ .

$\sigma = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{h_i\}$

Menor índice  $i \in \mathbb{K}_r$  tal que, para o conjunto  $\{h_1, h_2, \dots, h_r\}$ ,  $h_i = \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{h_i\}$ ; por exemplo, dado  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ , então o conjunto  $H = \{h_1 = 4, h_2 = 2, h_3 = 5, h_4 = 3, h_5 = 2\}$ , sendo  $r = 5$ , então  $\arg \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{h_i\} = \min\{2, 5\} = 2$ .

$\lambda$

Índice do ganho (utilizado na teoria do controle chaveado anti-*chattering*).

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>19</b>
<b>2</b>	<b>Controlador Chaveado Utilizando Funções de Lyapunov com Múltiplas Matrizes Definidas Positivas</b>	<b>22</b>
2.1	Conceitos Teóricos	22
2.2	Projeto de controle	28
<b>2.2.1</b>	<b>Projeto do primeiro sistema</b>	<b>29</b>
<i>2.2.1.1</i>	<i>Resultados do primeiro sistema</i>	<i>33</i>
<b>2.2.2</b>	<b>O Sistema 2DOF Ball Balancer Quanser<sup>®</sup></b>	<b>38</b>
<b>2.2.3</b>	<b>Projeto do sistema 2DOF ball balancer</b>	<b>41</b>
<i>2.2.3.1</i>	<i>Resultados de simulação do sistema 2DOF ball balancer</i>	<i>54</i>
<i>2.2.3.2</i>	<i>Resultados de implementação no sistema 2DOF ball balancer</i>	<i>58</i>
2.3	Considerações	64
<b>3</b>	<b>Controle Chaveado com Estabilidade Assintótica do Ponto de Equilíbrio e Sem <i>Chattering</i></b>	<b>65</b>
3.1	Projeto de Controle	71
3.2	Resultados de Simulação e Implementação	72
3.3	Considerações	86
<b>4</b>	<b>Estabilidade Assintótica do Ponto de Equilíbrio via Controle Chaveado Sem <i>Chattering</i> utilizando Múltiplas Funções de Lyapunov Não Quadráticas</b>	<b>87</b>
4.1	Conceitos Teóricos	87
4.2	Projeto de controle	91

<b>4.2.1</b>	<b>Projeto do primeiro sistema</b>	<b>91</b>
<i>4.2.1.1</i>	<i>Resultados do primeiro sistema</i>	<i>95</i>
<b>4.2.2</b>	<b>Projeto do sistema 2DOF ball balancer</b>	<b>107</b>
<i>4.2.2.1</i>	<i>Resultados de simulação do sistema 2DOF ball balancer</i>	<i>118</i>
<i>4.2.2.2</i>	<i>Resultados de implementação no sistema 2DOF ball balancer</i>	<i>122</i>
4.3	Considerações	129
5	Conclusões e Perspectivas de Trabalhos Futuros	130
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>131</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A redução do conservadorismo nos métodos de controle é uma preocupação constante na comunidade científica (LAM, 2018), já que um método menos conservador possui maior flexibilidade para abordar problemas de controle como a garantia de desempenho do sistema, problemas de saturação, entrada exógena e robustez do controlador. Métodos de controle que utilizam função de Lyapunov não quadrática têm mostrado menor conservadorismo que os métodos que utilizam função de Lyapunov quadrática (ZELENTSOVSKY, 1994; TANAKA; HORI; WANG, 2003; LENDEK; GUERRA; LAUBER, 2014; CHERIFI *et al.*, 2019; COUTINHO *et al.*, 2019; VAFAMAND, 2020).

É vantajoso e muitas vezes necessário que o controlador seja robusto para controlar o sistema, mesmo que haja incertezas na planta do sistema, para garantir a segurança e a confiabilidade do sistema controlado. Um sistema de controle projetado para tolerar falhas de atuadores ou sensores, dentro de um subconjunto pré-especificado de todos os atuadores ou sensores, mantendo as propriedades desejadas do sistema de controle, é chamado de sistema de controle confiável (VEILLETTE; MEDANIC; PERKINS, 1992; MINQING, 2009).

O objetivo desse trabalho é criar um método de controle chaveado utilizando função de Lyapunov não quadrática, que seja pouco conservador, capaz de controlar sistemas com incertezas politópicas e com desempenho garantido por uma taxa de decaimento.

As principais inspirações para esse trabalho foram (MÁRQUEZ *et al.*, 2016), que demonstra como reduzir consideravelmente o conservadorismo de métodos de controle ao utilizar função de Lyapunov não quadrática e (SOUZA *et al.*, 2013), que apresenta um método de controle chaveado que é capaz de controlar sistemas com parâmetros incertos na planta do sistema. Os controladores chaveados são menos conservadores, como visto em (SOUZA *et al.*, 2013; OLIVEIRA *et al.*, 2014; SOUZA *et al.*, 2014), do que os controladores de ganho único (BOYD *et al.*, 1994).

Controladores chaveados podem ter *chattering* (chaveamento em alta frequência, teori-

camente infinita), sendo um problema já que sistemas reais não possuem chaveamento ideal, podendo não ser capaz de chavear com a frequência exigida, danificar os aparelhos ou causar *chattering* no sinal de controle (LEVANT, 2010). Esse problema já foi abordado para métodos de controle que utilizam modos deslizantes (LEE; UTKIN, 2007; BARTOLINI; FERRARA; USAI, 1998; BOIKO; FRIDMAN, 2005) e função de Lyapunov (WICKS; PELETIES; DECARLO, 1994; ISHII; FRANCIS, 2001; GEROMEL; COLANERI, 2006). Esta tese aborda o problema de *chattering* em controladores chaveados que utilizam função de Lyapunov, permitindo o chaveamento do controlador apenas quando essa comutação causar uma diminuição significativa na derivada da função de Lyapunov. Segue uma descrição dos próximos capítulos.

O Capítulo 2 apresenta o método de controle chaveado com múltiplas matrizes definidas positivas. É apresentada também uma prova matemática de que se um determinado sistema pode ser controlado utilizando um método de controle chaveado com uma única matriz definida positiva na função de Lyapunov, então considerando os mesmo parâmetros, é assegurado que o método de controle chaveado que utiliza várias matrizes definidas positivas na função de Lyapunov também será capaz de controlar o sistema. Um sistema fictício abordado em (MÁRQUEZ *et al.*, 2016) será utilizado para comparar o conservadorismo do método proposto com o método apresentado em (MÁRQUEZ *et al.*, 2016), bem como com o método de controle chaveado que utiliza apenas uma matriz definida positiva, baseado em (SOUZA *et al.*, 2014). Adicionalmente, para demonstrar eficácia do controlador chaveado proposto na prática, serão realizados o projeto, a simulação e a implementação em laboratório em um sistema *2DOF ball balancer*, sujeito a uma falha de até  $-50\%$  no atuador.

O método de controle chaveado anti-*chattering* será apresentado no Capítulo 3, junto com uma prova matemática de que o método evita *chattering* no chaveamento e no sinal de controle. Um projeto de controle para o sistema *2DOF ball balancer*, sujeito a uma falha de até  $-50\%$  no atuador, seguido pelos resultados de simulação e implementação em laboratório, será apresentado, para demonstrar a eficácia do método em um sistema real. Adicionalmente foi mostrada a simulação de um controlador chaveado sem utilizar o método anti-*chattering* para permitir comparar a frequência de chaveamento entre os controladores que utilizam o método anti-*chattering* e o que não utiliza.

O Capítulo 4 demonstra como utilizar a teoria de controle que utiliza múltiplas matrizes definidas positivas na função de Lyapunov em conjunto com a teoria anti-*chattering*. O método demonstrado nesse capítulo será utilizado em projeto e simulado no sistema

fictício apresentado em (MÁRQUEZ *et al.*, 2016) e em um sistema *2DOF ball balancer*, sujeito a falhas de até  $-50\%$  no atuador, adicionalmente foi feita a implementação em bancada no *2DOF ball balancer*. Essas simulações serão empregadas para comparar a frequência de chaveamento e o *chattering* do sinal de controle entre o controlador chaveado que utiliza várias matrizes definidas positivas na função de Lyapunov em conjunto com a teoria anti-*chattering* com o controlador chaveado robusto que utiliza várias matrizes definidas positivas na função de Lyapunov sem utilizar a teoria anti-*chattering*.

Ao longo desse trabalho foram utilizadas as seguintes notações:  $(\cdot)^T$  indica a transposição de um vetor ou matriz. O símbolo  $(*)$  denota genericamente cada bloco simétrico de uma LMI. O símbolo  $(\cdot)$  acima de uma variável simboliza sua derivada. O conjunto  $\mathbb{K}_r$  é composto pelos  $r$  primeiros números inteiros positivos,  $\{1, 2, \dots, r\}$ .

## 2 CONTROLADOR CHAVEADO UTILIZANDO FUNÇÕES DE LYAPUNOV COM MÚLTIPLAS MATRIZES DEFINIDAS POSITIVAS

A proposta desse trabalho é elaborar um procedimento de projeto de um controlador utilizando a teoria de controle chaveado (SOUZA *et al.*, 2014), baseada em uma função de Lyapunov com apenas uma matriz definida positiva, agora com múltiplas matrizes definidas positivas  $P$ s na função de Lyapunov (MÁRQUEZ *et al.*, 2016), com a intenção de criar um controlador que aproveite as vantagens de ambas as propostas: a capacidade de controlar sistemas com incertezas sem o acesso às funções de pertinência e a ampliação da região de factibilidade.

### 2.1 Conceitos Teóricos

Considerando o sistema descrito por modelos fuzzy Takagi-Sugeno:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ u(t) &= \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s h_k^-(t) v_l(t) M_{\sigma kl} \left( \sum_{l=1}^s v_l P_l \right)^{-1} x(t), \end{aligned} \quad (1)$$

sendo  $h_k^-(t)$  e  $v_l(t)$  escalares que serão definidos em (4),  $M_{\sigma kl} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado,  $P_l > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz simétrica positiva definida,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  matrizes com incertezas descritas como:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^s \alpha_i(t) A_i, \\ B &= \sum_{i=1}^s \alpha_i(t) B_i, \end{aligned} \quad (2)$$

com  $\alpha_i(t) \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^s \alpha_i(t) = 1$ ,  $i \in \mathbb{K}_s$ .  $M_{\sigma kl}$  é o ganho chaveado com a lei de chaveamento:

$$\sigma = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_s} \{x(t)^T \mathbb{P}^{-1} \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s h_k^-(t) v_l(t) Q_{ikl} \mathbb{P}^{-1} x(t)\}. \quad (3)$$

Define-se  $h_i$ ,  $h_i^-$ ,  $v_i \geq 0 \in \mathbb{K}_s$ ,  $\sum_{i=1}^s h_i = \sum_{i=1}^s h_i^- = \sum_{i=1}^s v_i = 1$ ,  $i \in \mathbb{K}_s$ ,  $Q_{ikl} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz simétrica e  $\mathbb{P}$  está definida em (5). Sendo que  $h_i$  segue a lei de chaveamento (3),  $h_i^-$  é o  $h_i$  atrasado em  $\zeta$  segundos sendo  $\zeta > 0$  uma constante dada e  $v_i$  é a integral de  $h_i$ , ou seja:

$$\begin{aligned} h_i(t) &= \begin{cases} 1, & \text{se } i = \sigma, \\ 0, & \text{se } i \neq \sigma, \end{cases} \\ h_i^-(t) &= h_i(t - \zeta), \\ v_i(t) &= \frac{1}{\zeta} \int_{t-\zeta}^t h_i(\tau) d\tau \geq 0, \\ \sum_{i=1}^s v_i(t) &= \frac{1}{\zeta} \int_{t-\zeta}^t \sum_{i=1}^s h_i(\tau) d\tau = \frac{1}{\zeta} (t - (t - \zeta)) = 1. \end{aligned} \quad (4)$$

A matriz simétrica positiva definida  $\mathbb{P} > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e a sua derivada  $\dot{\mathbb{P}}$ , considerando a definição de  $v_i(t)$  em (4), são descritas como:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} &= \sum_{l=1}^s v_l(t) P_l, \\ \dot{\mathbb{P}} &= \sum_{l=1}^s \dot{v}_l(t) P_l = \frac{1}{\zeta} \left( \sum_{j=1}^s h_j(t) P_j - \sum_{k=1}^s h_k^-(t) P_k \right). \end{aligned} \quad (5)$$

O método de controle utiliza uma candidata a função de Lyapunov do tipo não-quadrático.

$$\begin{aligned} V(x(t)) &= x(t)^T \mathbb{P}^{-1} x(t) = x(t)^T \left( \sum_{l=1}^s v_l(t) P_l \right)^{-1} x(t), \\ \dot{V}(x(t)) &= x(t)^T \mathbb{P}^{-1} \dot{x}(t) + \dot{x}(t)^T \mathbb{P}^{-1} x(t) + x(t)^T \left( \frac{d}{dt} \mathbb{P}^{-1} \right) x(t) \\ &= x(t)^T \left[ \mathbb{P}^{-1} A + \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s h_k^-(t) v_l(t) \mathbb{P}^{-1} B M_{\sigma kl} \mathbb{P}^{-1} + A^T \mathbb{P}^{-1} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s h_k^-(t) v_l(t) \mathbb{P}^{-1} M_{\sigma kl}^T B^T \mathbb{P}^{-1} + \left( \frac{d}{dt} \mathbb{P}^{-1} \right) \right] x(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x(t)^T [\mathbb{P}^{-1} \sum_{i=1}^s \alpha_i(t) A_i + \mathbb{P}^{-1} \sum_{i=1}^s \alpha_i(t) B_i \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s h_k^-(t) v_l(t) M_{\sigma kl} \mathbb{P}^{-1} + \sum_{i=1}^s \alpha_i(t) A_i^T \mathbb{P}^{-1} \\
&+ \mathbb{P}^{-1} \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s h_k^-(t) v_l(t) M_{\sigma kl}^T \sum_{i=1}^s \alpha_i(t) B_i^T \mathbb{P}^{-1} + (\frac{d}{dt} \mathbb{P}^{-1})] x(t). \quad (6)
\end{aligned}$$

**Teorema 1.** *O ponto de equilíbrio  $x(t) = 0$  do sistema controlado descrito em (1), com a lei de chaveamento dada em (3)-(5) e considerando os parâmetros incertos  $\alpha_i(t)$ ,  $i \in \mathbb{K}_s$  em (2), é globalmente assintoticamente estável, com taxa de decaimento definida por um escalar  $\beta > 0$ , se as seguintes desigualdades lineares matriciais (LMIs) forem satisfeitas:*

$$A_i P_l + B_i M_{jkl} + P_l A_i^T + M_{jkl}^T B_i^T - \frac{1}{\zeta} (P_j - P_k) - Z_{ikl} - Q_{jkl} + 2\beta P_l < 0, \quad (7)$$

$$Z_{ikl} + Q_{ikl} \leq 0, \quad (8)$$

sendo  $P_l \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrizes simétricas definidas positivas,  $Z_{ikl}, Q_{jkl} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrizes simétricas,  $M_{jkl} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $i, j, k, l \in \mathbb{K}_s$ , em que  $s$  é o número de vértices do polítopo apresentado em (2) que descreve o modelo matemático da planta.

**Prova:** Pré e pós multiplicando (7) e (8) por  $x(t)^T (\sum_{l=1}^s v_l(t) P_l)^{-1} \alpha_i(t) h_j(t) h_k^-(t) v_l(t)$  e  $(\sum_{l=1}^s v_l(t) P_l)^{-1} x(t)$  respectivamente e tomando a soma de  $i = 1$  a  $s$ ,  $j = 1$  a  $s$ ,  $k = 1$  a  $s$  e  $l = 1$  a  $s$ , levando-se em conta as definições de  $\alpha_i(t)$ ,  $h_j(t)$ ,  $h_k^-(t)$  e  $v_l(t)$ , para  $i, j, k, l \in \mathbb{K}_s$ , obtém-se para  $x(t) \neq 0$ :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s \alpha_i(t) h_j(t) h_k^-(t) v_l(t) x(t)^T [(\sum_{l=1}^s v_l(t) P_l)^{-1} A_i \\
&\quad + (\sum_{l=1}^s v_l(t) P_l)^{-1} B_i M_{jkl} (\sum_{l=1}^s v_l(t) P_l)^{-1} + A_i^T (\sum_{l=1}^s v_l(t) P_l)^{-1} \\
&\quad + (\sum_{l=1}^s v_l(t) P_l)^{-1} M_{jkl}^T B_i^T (\sum_{l=1}^s v_l(t) P_l)^{-1} - (\sum_{l=1}^s v_l(t) P_l)^{-1} \frac{1}{\zeta} (P_j - P_k) (\sum_{l=1}^s v_l(t) P_l)^{-1} \\
&\quad - (\sum_{l=1}^s v_l(t) P_l)^{-1} (Z_{ikl} + Q_{jkl}) (\sum_{l=1}^s v_l(t) P_l)^{-1} + 2\beta (\sum_{l=1}^s v_l(t) P_l)^{-1}] x(t) < 0, \quad (9)
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s \alpha_i(t) h_j(t) h_k^-(t) v_l(t) x(t)^T [(\sum_{l=1}^s v_l(t) P_l)^{-1} (Z_{ikl} + Q_{ikl}) (\sum_{l=1}^s v_l(t) P_l)^{-1}] x(t) \leq 0. \quad (10)$$

Lembrando de (5) que  $\mathbb{P} = \sum_{l=1}^s v_l(t) P_l$ ,  $\mathbb{P}^{-1} = (\sum_{l=1}^s v_l(t) P_l)^{-1}$ ,  $\dot{\mathbb{P}} = \frac{1}{\zeta} (\sum_{j=1}^s h_j(t) P_j - \sum_{k=1}^s h_k^-(t) P_k)$  e que  $\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s \alpha_i(t) h_j(t) h_k^-(t) v_l(t) = 1$ , então (9) e (10) podem

ser reescritas como:

$$\begin{aligned}
x(t)^T & \left( \mathbb{P}^{-1} \sum_{i=1}^s \alpha_i(t) A_i + \mathbb{P}^{-1} \sum_{i=1}^s \alpha_i(t) B_i \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s h_j(t) h_k^-(t) v_l(t) M_{jkl} \mathbb{P}^{-1} + \sum_{i=1}^s \alpha_i(t) A_i^T \mathbb{P}^{-1} \right. \\
& + \mathbb{P}^{-1} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s h_j(t) h_k^-(t) v_l(t) M_{jkl}^T \sum_{i=1}^s \alpha_i(t) B_i^T \mathbb{P}^{-1} - \mathbb{P}^{-1} \dot{\mathbb{P}} \mathbb{P}^{-1} \\
& - \mathbb{P}^{-1} \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s \alpha_i(t) h_k^-(t) v_l(t) Z_{ikl} \mathbb{P}^{-1} - \mathbb{P}^{-1} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s h_j(t) h_k^-(t) v_l(t) Q_{jkl} \mathbb{P}^{-1} \\
& \left. + 2\beta \mathbb{P}^{-1} \right) x(t) < 0, \quad (11)
\end{aligned}$$

$$x(t)^T \mathbb{P}^{-1} \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s (Z_{ikl} + Q_{ikl}) \mathbb{P}^{-1} x(t) \leq 0. \quad (12)$$

Agora observe que:

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dt}(\mathbb{P}^{-1}) & = -\frac{d}{dt}(\mathbb{P}^{-1} \mathbb{P} \mathbb{P}^{-1}) = -2\frac{d}{dt}(\mathbb{P}^{-1}) - \mathbb{P}^{-1}(\dot{\mathbb{P}}) \mathbb{P}^{-1} \\
& \longrightarrow -\mathbb{P}^{-1}(\dot{\mathbb{P}}) \mathbb{P}^{-1} = \frac{d}{dt}(\mathbb{P}^{-1}). \quad (13)
\end{aligned}$$

A partir de (11) e (12), considerando (2), (4), (5), (13), a candidata a função de Lyapunov (6) e a lei de chaveamento (3), para  $x(t) \neq 0$  tem-se que:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x(t)) + 2\beta V(x(t)) & = x(t)^T \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s h_k^-(t) v_l(t) (\mathbb{P}^{-1} A + \mathbb{P}^{-1} B M_{\sigma kl} \mathbb{P}^{-1} \\
& + A^T \mathbb{P}^{-1} + \mathbb{P}^{-1} M_{\sigma kl}^T B^T \mathbb{P}^{-1} + \left( \frac{d}{dt} \mathbb{P}^{-1} \right) + 2\beta \mathbb{P}^{-1}) x(t) \\
& = x(t)^T \left[ \left( \sum_{l=1}^s v_l(t) P_l \right)^{-1} \sum_{i=1}^s \alpha_i(t) A_i + \sum_{i=1}^s \alpha_i(t) A_i^T \left( \sum_{l=1}^s v_l(t) P_l \right)^{-1} \right. \\
& + \left( \sum_{l=1}^s v_l(t) P_l \right)^{-1} \sum_{i=1}^s \alpha_i(t) B_i \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s h_k^-(t) v_l(t) M_{\sigma kl} \left( \sum_{l=1}^s v_l(t) P_l \right)^{-1} \\
& + \left( \sum_{l=1}^s v_l(t) P_l \right)^{-1} \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s h_k^-(t) v_l(t) M_{\sigma kl}^T \sum_{i=1}^s \alpha_i(t) B_i^T \left( \sum_{l=1}^s v_l(t) P_l \right)^{-1} \\
& \left. + \left( \frac{d}{dt} \mathbb{P}^{-1} \right) + 2\beta \left( \sum_{l=1}^s v_l(t) P_l \right)^{-1} \right] x(t) \\
& < x(t)^T \mathbb{P}^{-1} \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s \alpha_i(t) h_k^-(t) v_l(t) (Z_{ikl} + Q_{\sigma kl}) \mathbb{P}^{-1} x(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x(t)^T \mathbb{P}^{-1} \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s \alpha_i(t) h_k^-(t) v_l(t) Z_{ikl} \mathbb{P}^{-1} x(t) \\
&+ \min_{j \in \mathbb{K}_s} \{x(t)^T \mathbb{P}^{-1} \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s h_k^-(t) v_l(t) Q_{jkl} \mathbb{P}^{-1} x(t)\} \\
&\leq x(t)^T \mathbb{P}^{-1} \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s \alpha_i(t) h_k^-(t) v_l(t) (Z_{ikl} + Q_{ikl}) \mathbb{P}^{-1} x(t) \leq 0. \quad (14)
\end{aligned}$$

E assim fica concluída a prova.  $\square$

Para demonstrar que o método de controle utilizando várias matrizes  $P_l$ , proposto neste capítulo, apresenta vantagens relacionadas à factibilidade, será feita a comparação com um controlador chaveado baseado em (SOUZA *et al.*, 2014) utilizando  $P$  constante, para o sistema descrito por (2) e:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\
u(t) &= K_\sigma x(t), \quad (15)
\end{aligned}$$

sendo  $K_\sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$  o ganho do controlador.

Função de Lyapunov:

$$\begin{aligned}
V(x(t)) &= x(t)^T P^{-1} x(t), \\
\dot{V}(x(t)) &= \dot{x}(t)^T P^{-1} x(t) + x(t)^T P^{-1} \dot{x}(t). \quad (16)
\end{aligned}$$

E a regra de chaveamento similar a (3):

$$\sigma = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_s} \{x(t)^T P^{-1} Q_i P^{-1} x(t)\}. \quad (17)$$

Projetado a partir do teorema a seguir.

**Teorema 2.** *O ponto de equilíbrio do sistema controlado descrito em (15), com a lei de chaveamento descrita em (17),  $P > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  constante e considerando que os parâmetros  $\alpha_i(t)$ ,  $i \in \mathbb{K}_s$ , em (2) são incertos, é globalmente assintoticamente estável, com taxa de decaimento definida pelo escalar  $\beta > 0$ , se as seguintes LMIs forem satisfeitas:*

$$A_i P + B_i M_j + P A_i^T + M_j^T B_i^T - Z_i - Q_j + 2\beta P < 0, \quad (18)$$

$$Z_i + Q_i \leq 0, \quad (19)$$

sendo os ganhos dados por  $K_j = M_j P^{-1}$ ,  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz simétrica definida positiva,  $Z_i, Q_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrizes simétricas,  $M_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $i, j \in \mathbb{K}_s$ , em que  $s$  é o número de vértices do polítopo apresentado em (2) que descreve o modelo matemático da planta.

**Prova:** Pré e pós multiplicando (18) e (19) por  $\alpha_i x(t)^T P^{-1}$  e  $P^{-1} x(t)$  respectivamente, lembrando que  $M_j = K_j P$  e tomando a soma de  $i = 1$  a  $s$ , obtém-se para  $x(t) \neq 0$ :

$$\sum_{i=1}^s \alpha_i x(t)^T (P^{-1} A_i + P^{-1} B_i K_j + A_i^T P^{-1} + K_j^T B_i^T P^{-1} - P^{-1} (Z_i + Q_j) P^{-1} + 2\beta P^{-1}) x(t) < 0, \quad (20)$$

$$\sum_{i=1}^s \alpha_i x(t)^T P^{-1} (Z_i + Q_i) P^{-1} x(t) \leq 0. \quad (21)$$

Considerando que  $\sum_{i=1}^s \alpha_i = 1$ , então (20) e (21) podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned} x(t)^T [P^{-1} (\sum_{i=1}^s \alpha_i A_i) + P^{-1} (\sum_{i=1}^s \alpha_i B_i) K_j + (\sum_{i=1}^s \alpha_i A_i)^T P^{-1} + K_j^T (\sum_{i=1}^s \alpha_i B_i)^T P^{-1} \\ - P^{-1} (\sum_{i=1}^s \alpha_i Z_i) P^{-1} - P^{-1} Q_j P^{-1} + 2\beta P^{-1}] x(t) < 0, \quad (22) \end{aligned}$$

$$x(t)^T P^{-1} \sum_{i=1}^s \alpha_i (Z_i + Q_i) P^{-1} x(t) \leq 0. \quad (23)$$

A partir de (22) e (23), a candidata a função de Lyapunov (16) e a lei de chaveamento (17), para  $x(t) \neq 0$  tem-se que:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) + 2\beta V(x(t)) &= x(t)^T (P^{-1} A + P^{-1} B K_\sigma + A^T P^{-1} + K_\sigma^T B^T P^{-1} + 2\beta P^{-1}) x(t) \\ &= x(t)^T [P^{-1} (\sum_{i=1}^s \alpha_i A_i) + P^{-1} (\sum_{i=1}^s \alpha_i B_i) K_\sigma + (\sum_{i=1}^s \alpha_i A_i)^T P^{-1} \\ &\quad + K_\sigma^T (\sum_{i=1}^s \alpha_i B_i)^T P^{-1} + 2\beta P^{-1}] x(t) \\ &< x(t)^T P^{-1} (\sum_{i=1}^s \alpha_i Z_i + Q_\sigma) P^{-1} x(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x(t)^T P^{-1} \left( \sum_{i=1}^s \alpha_i Z_i \right) P^{-1} x(t) + \min \{ x(t)^T P^{-1} Q_j P^{-1} x(t) \} \\
&\leq x(t)^T P^{-1} \sum_{i=1}^s \alpha_i (Z_i + Q_i) P^{-1} x(t) \leq 0.
\end{aligned} \tag{24}$$

E assim fica concluída a prova.  $\square$

O método de controle com várias matrizes definidas positivas  $P_l$ ,  $l \in \mathbb{K}_s$ , proposto no Teorema 1, tem área de factibilidade igual ou maior ao do método com  $P$  constante, proposto no Teorema 2, como pode-se verificar no teorema seguinte.

**Teorema 3.** *Se as LMIs (18) e (19) forem factíveis, então as LMIs (7) e (8) também serão.*

**Prova:** Veja que um caso particular de (7) e (8) é:  $Z_{ikl} = Z_i$ ,  $Q_{ikl} = Q_i$  e  $P_j = P_k = P_l = P$ ,  $M_{jkl} = M_j$  de forma que  $\frac{1}{\xi}(P_j - P_k) = 0$ . Assim, (7) e (8) equivalem a:

$$A_i P + B_i M_j + P A_i^T + M_j^T B_i^T - Z_i - Q_j + 2\beta P < 0, \tag{25}$$

$$Z_i + Q_i \leq 0. \tag{26}$$

Note que (25) e (26) são as mesmas LMIs do que (18) e (19). Portanto, se (18) e (19) forem factíveis, então (7) e (8) também serão. Adicionalmente, é possível ver que as leis de chaveamento (3) e (17) e a descrição do sistema (1), considerando  $K_\sigma = M_\sigma P^{-1}$  e (15) são equivalentes. E assim fica concluída a prova.  $\square$

## 2.2 Projeto de controle

Foram feitos dois projetos de controle utilizando o Teorema 1, com lei de chaveamento (3). O primeiro projeto controla um sistema fictício apresentado em (MÁRQUEZ *et al.*, 2016), que por ser difícil de controlar é adequado para verificar o conservadorismo do método. O segundo projeto foi criado para controlar um sistema *2DOF ball balancer*, com o intuito de implementar em bancada para mostrar a eficácia do método na prática.

### 2.2.1 Projeto do primeiro sistema

O sistema apresentado em (MÁRQUEZ *et al.*, 2016) pode ser representado por modelo fuzzy Takagi-Sugeno (1) e (2), sendo:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 1,59 & -7,29 \\ 0,01 & 0 \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} 0,02 & -4,64 \\ 0,35 & 0,21 \end{bmatrix}, \\
 A_3 &= \begin{bmatrix} -a & -4,33 \\ 0 & 0,05 \end{bmatrix}, & A_4 &= \begin{bmatrix} 0,89 & -5,29 \\ 0,1 & 0 \end{bmatrix}, \\
 B_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}, & B_3 &= \begin{bmatrix} -b+6 \\ -1 \end{bmatrix}, & B_4 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{27}
 \end{aligned}$$

com  $a = 2$  e  $b = 1,5$ , note que as matrizes  $A_1, A_2, A_3$  e  $A_4$  são não Hurwitz. O controlador foi projetado utilizando as desigualdades (7) e (8), com  $\beta = 0$  e  $\zeta = 0,1$  segundo, os vetores  $M_{jkl}$ , matrizes simétricas definidas positivas  $P_j$  e matrizes simétricas  $Q_{jkl}$  são apresentas a seguir:

$$\begin{aligned}
 [M_{111}|M_{112}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -3,3685 & 0,3147 & -3,2129 & 0,2662 \end{array} \right], \\
 [M_{113}|M_{114}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -3,1731 & 0,2581 & -3,2779 & 0,2932 \end{array} \right], \\
 [M_{121}|M_{122}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,2493 & 0,0422 & -0,0966 & 0,0148 \end{array} \right], \\
 [M_{123}|M_{124}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,0689 & 0,0079 & -0,1655 & 0,0274 \end{array} \right], \\
 [M_{131}|M_{132}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,1851 & 0,0368 & -0,0914 & 0,0197 \end{array} \right], \\
 [M_{133}|M_{134}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,0876 & 0,0164 & -0,1410 & 0,0263 \end{array} \right], \\
 [M_{141}|M_{142}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -1,6274 & 0,1924 & -1,0684 & 0,1370 \end{array} \right], \\
 [M_{143}|M_{144}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,9959 & 0,1289 & -1,4183 & 0,1686 \end{array} \right], \\
 [M_{211}|M_{212}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,4523 & 0,0169 & -0,5592 & 0,0201 \end{array} \right], \\
 [M_{213}|M_{214}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,5720 & 0,0186 & -0,4840 & 0,0211 \end{array} \right], \\
 [M_{221}|M_{222}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,1832 & 0,0307 & -0,1448 & 0,0232 \end{array} \right], \\
 [M_{223}|M_{224}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,1440 & 0,0210 & -0,1618 & 0,0254 \end{array} \right], \\
 [M_{231}|M_{232}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,1722 & 0,0306 & -0,1337 & 0,0227 \end{array} \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[M_{233}|M_{234}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,1340 & 0,0211 & -0,1522 & 0,0241 \end{array} \right], \\
[M_{241}|M_{242}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,3452 & 0,0528 & -0,3206 & 0,0565 \end{array} \right], \\
[M_{243}|M_{244}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,3180 & 0,0560 & -0,3358 & 0,0533 \end{array} \right], \\
[M_{311}|M_{312}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,8220 & 0,0526 & -0,6903 & 0,0304 \end{array} \right], \\
[M_{313}|M_{314}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,7217 & 0,0321 & -0,7342 & 0,0386 \end{array} \right], \\
[M_{321}|M_{322}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,1874 & 0,0331 & -0,1169 & 0,0198 \end{array} \right], \\
[M_{323}|M_{324}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,0999 & 0,0143 & -0,1495 & 0,0254 \end{array} \right], \\
[M_{331}|M_{332}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,1767 & 0,0353 & -0,0903 & 0,0216 \end{array} \right], \\
[M_{333}|M_{334}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,0965 & 0,0192 & -0,1340 & 0,0260 \end{array} \right], \\
[M_{341}|M_{342}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,4012 & 0,0375 & -0,4097 & 0,0399 \end{array} \right], \\
[M_{343}|M_{344}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,4113 & 0,0397 & -0,3958 & 0,0374 \end{array} \right], \\
[M_{411}|M_{412}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -2,0807 & 0,2459 & -2,1532 & 0,2276 \end{array} \right], \\
[M_{413}|M_{414}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -2,1901 & 0,2238 & -2,0605 & 0,2348 \end{array} \right], \\
[M_{421}|M_{422}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,2594 & 0,0420 & -0,1369 & 0,0228 \end{array} \right], \\
[M_{423}|M_{424}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,1196 & 0,0176 & -0,1956 & 0,0312 \end{array} \right], \\
[M_{431}|M_{432}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,2267 & 0,0405 & -0,1169 & 0,0232 \end{array} \right], \\
[M_{433}|M_{434}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,1155 & 0,0207 & -0,1685 & 0,0291 \end{array} \right], \\
[M_{441}|M_{442}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -1,2496 & 0,1633 & -1,0159 & 0,1366 \end{array} \right], \\
[M_{443}|M_{444}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,9973 & 0,1321 & -1,1481 & 0,1499 \end{array} \right], \tag{28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[P_1|P_2] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 0,4449 & -0,1073 & 0,1654 & -0,0706 \\ -0,1073 & 0,0325 & -0,0706 & 0,0326 \end{array} \right], \\
[P_3|P_4] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 0,1567 & -0,0664 & 0,3582 & -0,0924 \\ -0,0664 & 0,0321 & -0,0924 & 0,0322 \end{array} \right], \tag{29}
\end{aligned}$$

$$[Q_{111}|Q_{112}] = \left[ \begin{array}{cc|cc} -1,1326 & 0,2239 & -0,6427 & 0,1681 \\ 0,2239 & -0,0137 & 0,1681 & -0,0093 \end{array} \right],$$

$$\begin{aligned}
[Q_{113}|Q_{114}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,5697 & 0,1623 & -1,0524 & 0,2052 \\ 0,1623 & -0,0092 & 0,2052 & -0,0114 \end{array} \right], \\
[Q_{121}|Q_{122}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -1,1853 & 0,1792 & -1,1787 & 0,1469 \\ 0,1792 & -0,0167 & 0,1469 & -0,0108 \end{array} \right], \\
[Q_{123}|Q_{124}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -1,0857 & 0,1395 & -1,1896 & 0,1685 \\ 0,1395 & -0,0096 & 0,1685 & -0,0144 \end{array} \right], \\
[Q_{131}|Q_{132}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -1,1609 & 0,1993 & -1,2410 & 0,1708 \\ 0,1993 & -0,0202 & 0,1708 & -0,0137 \end{array} \right], \\
[Q_{133}|Q_{134}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -1,2449 & 0,1687 & -1,2054 & 0,1897 \\ 0,1687 & -0,0128 & 0,1897 & -0,0173 \end{array} \right], \\
[Q_{141}|Q_{142}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -1,4576 & 0,1847 & -1,1892 & 0,1195 \\ 0,1847 & -0,0144 & 0,1195 & -0,0119 \end{array} \right], \\
[Q_{143}|Q_{144}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -1,1454 & 0,1135 & -1,3612 & 0,1609 \\ 0,1135 & -0,0115 & 0,1609 & -0,0135 \end{array} \right], \\
[Q_{211}|Q_{212}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 8,5819 & -0,7043 & 6,3562 & -0,6309 \\ -0,7043 & -0,0096 & -0,6309 & -0,0080 \end{array} \right], \\
[Q_{213}|Q_{214}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 6,4888 & -0,6299 & 7,5091 & -0,6596 \\ -0,6299 & -0,0078 & -0,6596 & -0,0086 \end{array} \right], \\
[Q_{221}|Q_{222}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 2,4880 & -0,2953 & 1,3410 & -0,2032 \\ -0,2953 & 0,0035 & -0,2032 & -0,0018 \end{array} \right], \\
[Q_{223}|Q_{224}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 1,2071 & -0,1852 & 1,9742 & -0,2497 \\ -0,1852 & -0,0020 & -0,2497 & 0,0010 \end{array} \right], \\
[Q_{231}|Q_{232}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 2,2366 & -0,2656 & 1,2219 & -0,1889 \\ -0,2656 & 0,0013 & -0,1889 & -0,0037 \end{array} \right], \\
[Q_{233}|Q_{234}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 1,1950 & -0,1794 & 1,8103 & -0,2256 \\ -0,1794 & -0,0042 & -0,2256 & -0,0010 \end{array} \right], \\
[Q_{241}|Q_{242}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 5,9240 & -0,5511 & 5,5246 & -0,5434 \\ -0,5511 & -0,0059 & -0,5434 & -0,0035 \end{array} \right], \\
[Q_{243}|Q_{244}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 5,4543 & -0,5343 & 5,7402 & -0,5429 \\ -0,5343 & -0,0034 & -0,5429 & -0,0047 \end{array} \right], \\
[Q_{311}|Q_{312}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 3,5377 & -0,5969 & 3,3319 & -0,6733 \\ -0,5969 & -0,0021 & -0,6733 & 0,0095 \end{array} \right],
\end{aligned}$$

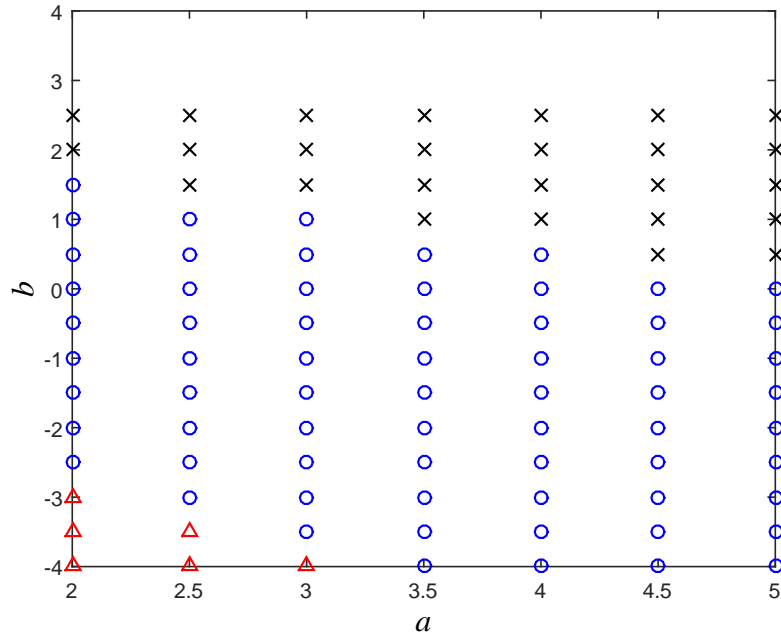
$$\begin{aligned}
[Q_{313}|Q_{314}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 3,1237 & -0,6503 & 3,7000 & -0,6543 \\ -0,6503 & 0,0074 & -0,6543 & 0,0074 \end{array} \right], \\
[Q_{321}|Q_{322}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 2,6538 & -0,3815 & 1,4852 & -0,2876 \\ -0,3815 & 0,0109 & -0,2876 & 0,0003 \end{array} \right], \\
[Q_{323}|Q_{324}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 1,4165 & -0,2701 & 2,2037 & -0,3334 \\ -0,2701 & -0,0031 & -0,3334 & 0,0050 \end{array} \right], \\
[Q_{331}|Q_{332}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 2,4709 & -0,3346 & 1,5397 & -0,2769 \\ -0,3346 & 0,0055 & -0,2769 & 0,0013 \end{array} \right], \\
[Q_{333}|Q_{334}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 1,4410 & -0,2648 & 2,1229 & -0,3033 \\ -0,2648 & -0,0001 & -0,3033 & 0,0018 \end{array} \right], \\
[Q_{341}|Q_{342}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 5,0126 & -0,7568 & 4,0965 & -0,7177 \\ -0,7568 & 0,0415 & -0,7177 & 0,0454 \end{array} \right], \\
[Q_{343}|Q_{344}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 3,9824 & -0,7031 & 4,7234 & -0,7389 \\ -0,7031 & 0,0450 & -0,7389 & 0,0419 \end{array} \right], \\
[Q_{411}|Q_{412}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,4961 & -0,0299 & -0,6420 & -0,0261 \\ -0,0299 & -0,0055 & -0,0261 & -0,0021 \end{array} \right], \\
[Q_{413}|Q_{414}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,6444 & -0,0246 & -0,5480 & -0,0292 \\ -0,0246 & -0,0023 & -0,0292 & -0,0038 \end{array} \right], \\
[Q_{421}|Q_{422}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,2990 & 0,0253 & -0,5750 & 0,0172 \\ 0,0253 & -0,0086 & 0,0172 & -0,0053 \end{array} \right], \\
[Q_{423}|Q_{424}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,5744 & 0,0158 & -0,3936 & 0,0237 \\ 0,0158 & -0,0047 & 0,0237 & -0,0074 \end{array} \right], \\
[Q_{431}|Q_{432}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,3099 & 0,0466 & -0,5852 & 0,0388 \\ 0,0466 & -0,0113 & 0,0388 & -0,0082 \end{array} \right], \\
[Q_{433}|Q_{434}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,6130 & 0,0393 & -0,4159 & 0,0457 \\ 0,0393 & -0,0077 & 0,0457 & -0,0103 \end{array} \right], \\
[Q_{441}|Q_{442}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,2792 & -0,0118 & -0,4193 & -0,0215 \\ -0,0118 & -0,0074 & -0,0215 & -0,0050 \end{array} \right], \\
[Q_{443}|Q_{444}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,4242 & -0,0214 & -0,3189 & -0,0156 \\ -0,0214 & -0,0047 & -0,0156 & -0,0065 \end{array} \right].
\end{aligned} \tag{30}$$

### 2.2.1.1 Resultados do primeiro sistema

O sistema fictício descrito em (1), (2) e (27) apresenta vértices muito diferentes e não Hurwitz, o tornando difícil de controlar, sendo por isso um bom exemplo para comparação do conservadorismo dos métodos de projeto de controladores.

A Figura 1 mostra as factibilidades dos métodos de controle chaveado apresentados no Teorema 2 ( $\triangle$ ), no Teorema 1 ( $\triangle$ ,  $\circ$ ) e no Teorema 1 apresentado em (MÁRQUEZ *et al.*, 2016) ( $\triangle$ ,  $\circ$ , x), sendo que foram adotados  $\zeta = 0,1$  e  $\beta = 0$ . E considerados em (27) valores de  $a$  e  $b$  nos intervalos:  $a \in [2, 5]$  e  $b \in [-4, 4]$ .

Figura 1 - Factibilidade do método de controle chaveado apresentado no Teorema 2 ( $\triangle$ ), no Teorema 1 ( $\triangle$ ,  $\circ$ ) e em (MÁRQUEZ *et al.*, 2016) ( $\triangle$ ,  $\circ$ , x).



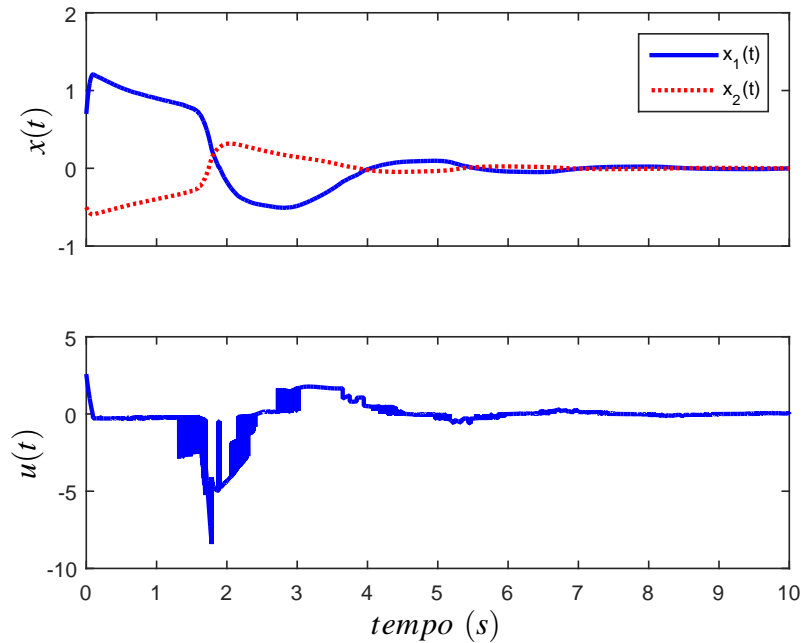
Fonte: Elaboração do autor.

Como pode-se observar na Figura 1, a factibilidade do controlador proposto no Teorema 1 é significativamente maior do que a apresentada no Teorema 2. A factibilidade do novo resultado descrito no Teorema 1 é menor do que a obtida com o procedimento de (MÁRQUEZ *et al.*, 2016), mas apresenta a vantagem de que o sistema pode ser controlado mesmo com incertezas nos parâmetros  $\alpha_i(t)$ ,  $i \in \mathbb{K}_s$ , advinda da teoria de controle chaveada proposta por (SOUZA *et al.*, 2014), enquanto o apresentado em (MÁRQUEZ *et al.*, 2016) necessita saber a situação do sistema em cada instante, ou seja, a disponibilidade dos parâmetros  $\alpha_i(t)$ ,  $i \in \mathbb{K}_s$ .

As Figuras 2 a 6 apresentam os resultados de simulação do sistema com a regra de controle (3), considerando o projeto realizado utilizando o método apresentado no Teorema 1, cujas matrizes obtidas são descritas em (28)-(30). A simulação foi feita via *Simulink*<sup>®</sup>, com o solver ode3 (Bogacki-Shampine) e passo de 1 ms.

A Figura 2 apresenta as variáveis de estado do sistema ( $x_1(t)$  (-) e  $x_2(t)$  (..)) e o sinal de controle  $u(t)$ , sendo que  $x_1(0) = 0,7$ ,  $x_2(0) = -0,5$  e os os termos incertos  $\alpha_i(t)$  variam conforme as funções:  $\omega_0^1 = \frac{1-\text{sen}(x_1)}{2}$ ,  $\omega_0^2(t) = \frac{4-x_2^2}{2}$ ,  $\omega_1^1(t) = 1 - \omega_0^1(t)$ ,  $\omega_1^2(t) = 1 - \omega_0^2(t)$ ,  $\alpha_1(t) = \omega_0^1(t)\omega_0^2(t)$ ,  $\alpha_2(t) = \omega_0^1(t)\omega_1^2(t)$ ,  $\alpha_3(t) = \omega_1^1(t)\omega_0^2(t)$ ,  $\alpha_4(t) = \omega_1^1(t)\omega_1^2(t)$ , conforme apresentado em (MÁRQUEZ *et al.*, 2016).

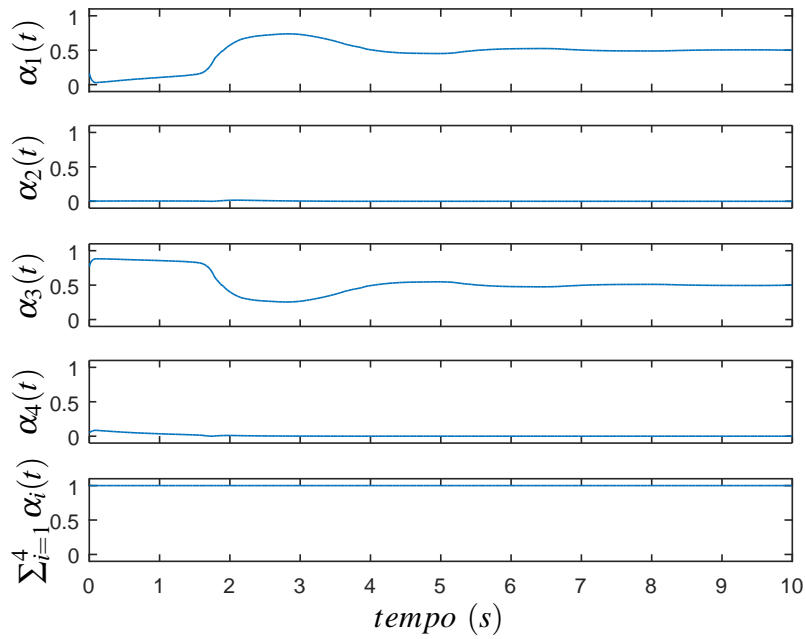
Figura 2 - Resultado de simulação do sistema representado por (1), (2) e (27), com  $a = 2$  e  $b = 1,5$ , controlado por (3), considerando (28)-(30). A variável de estado  $x_1(t)$  está representada com uma linha azul e a variável de estado  $x_2(t)$  com uma linha pontilhada vermelha.



Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 3 mostra as variáveis incertas do sistema ( $\alpha_i(t)$ ,  $i \in \mathbb{K}_4$ ). Essas variáveis são desconhecidas para o controlador.

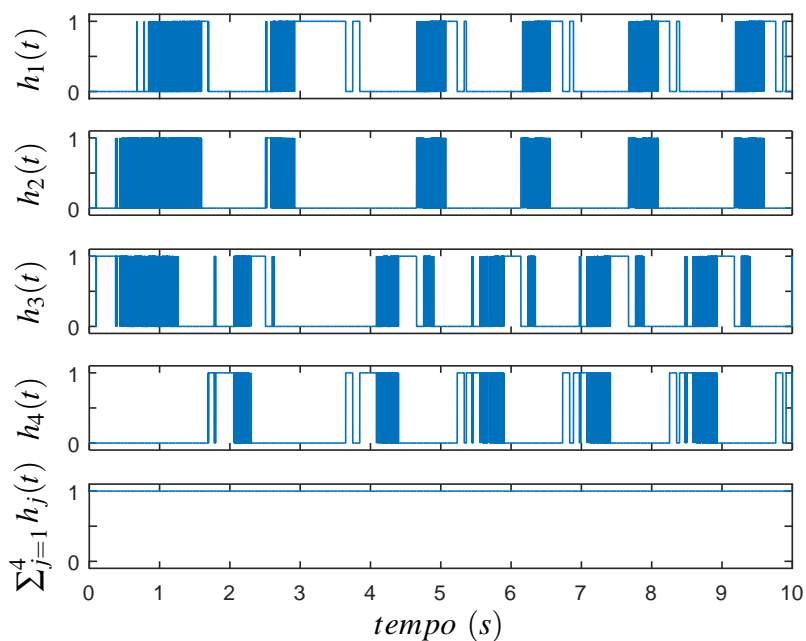
Figura 3 -  $\alpha_i(t)$ ,  $i \in \mathbb{K}_4$ , em cada instante do sistema representado por (1), (2) e (27), controlado por (28), considerando (28)-(30).



Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 4 mostra o ganho escolhido em cada instante pela lei de chaveamento (3). Para a chave escolhida  $j \in \mathbb{K}_4$ , em um certo instante  $t$ , tem-se  $h_j(t) = 1$  enquanto  $j = \sigma$ , já as demais chaves em que  $j \neq \sigma$  equivalem a  $h_j(t) = 0$ .

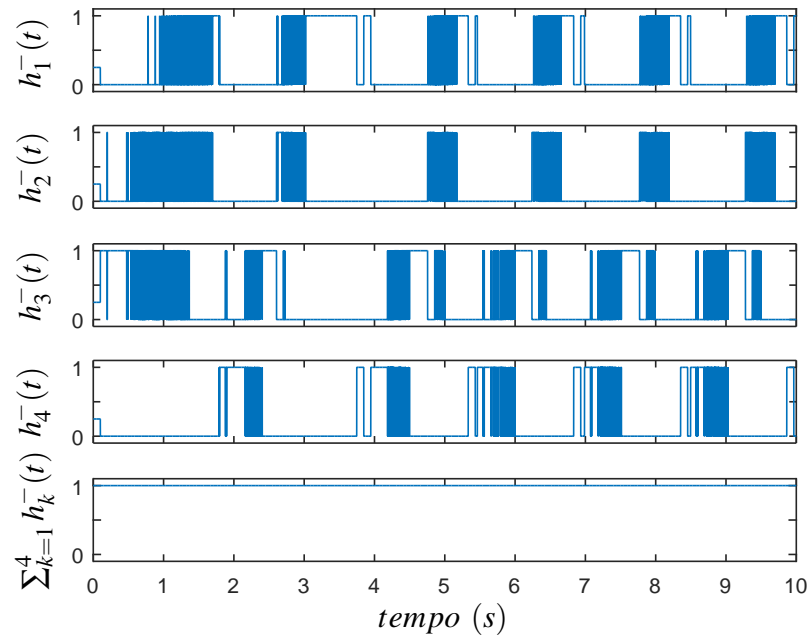
Figura 4 -  $h_j(t)$ ,  $j \in \mathbb{K}_4$ , em cada instante do sistema representado por (1), (2) e (27), controlado por (28), considerando (28)-(30).



Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 5 mostra o valor de  $h_k^-(t) = h_k(t - \zeta)$ ,  $k \in \mathbb{K}_4$ , sendo que foi adotado  $\zeta = 0,1$ . Para  $t < \zeta$ , como em  $t < 0$  ainda não foi escolhido o  $h_k(t)$  ativo, então optou-se por utilizar um valor intermediário para todos os  $h_k^-(t)$ , ou seja,  $h_k^-(t < \zeta) = \frac{1}{4}$ , para todo  $k \in \mathbb{K}_4$ . Note de (4) que essa escolha arbitrária é permitida já que as únicas exigências do projeto são que  $\sum_{k=1}^s h_k^- = 1$  e que  $h_k^- \geq 0$ , para todo  $k \in \mathbb{K}_4$ .

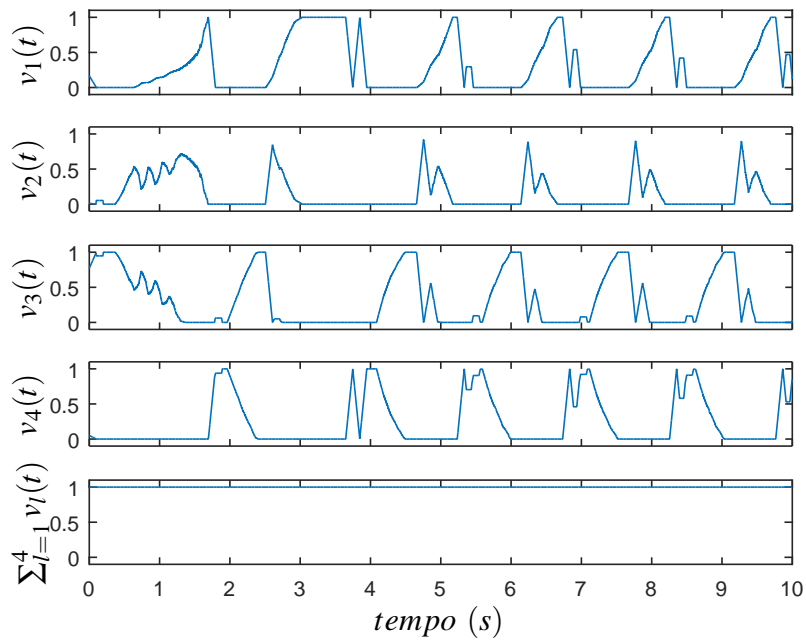
Figura 5 -  $h_k^-(t)$ ,  $k \in \mathbb{K}_4$ , em cada instante do sistema representado por (1), (2) e (27), controlado por (28), considerando (28)-(30).



Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 6 mostra o valor de  $v_l(t) = \frac{1}{\zeta} \int_{t-\zeta}^t h_l(t) dt$ ,  $l \in \mathbb{K}_4$ . Assim como na Figura 5, foi considerado que todos os  $h_l(t < 0) = \frac{1}{4}$ , sendo que  $l \in \mathbb{K}_4$ .

Figura 6 -  $v_l(t)$ ,  $l \in \mathbb{K}_4$ , em cada instante do sistema representado por (1), (2) e (27), controlado por (28), considerando (28)-(30).

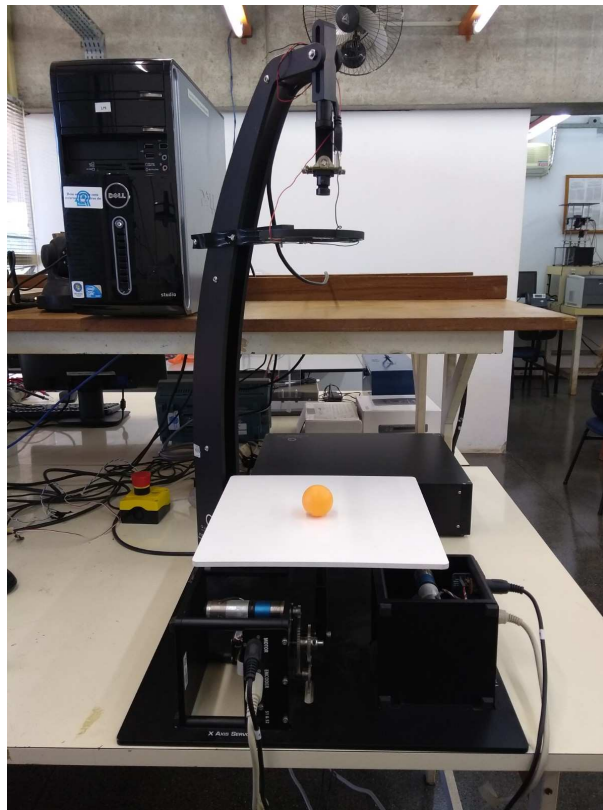


Fonte: Elaboração do autor.

### 2.2.2 O Sistema 2DOF Ball Balancer Quanser<sup>®</sup>

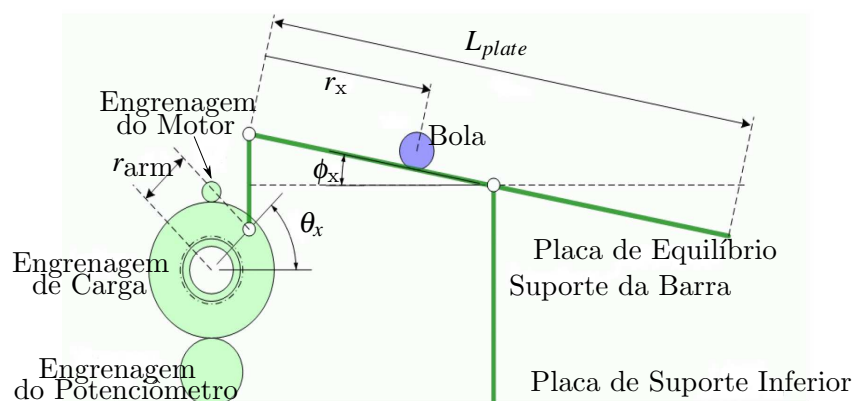
Considere o sistema *2DOF ball balancer*, fabricado pela Quanser<sup>®</sup>, mostrado na Figura 7. Seu modelo esquemático referente à direção  $x$  da placa é mostrado na Figura 8, e o modelo na direção  $y$  pode ser representada da mesma forma (QUANSER, 2008).

Figura 7 - Equipamento *2DOF ball balancer*, pertencente ao DEE-FEIS-LPC.



Fonte: Elaboração do autor.

Figura 8 - Planta esquemática do *2DOF ball balancer* na direção  $x$ .



Fonte: Quanser (2008).

O sistema consiste de uma placa quadrada sobre a qual uma bola é colocada e se move livremente. A bola pode ser posicionada em um ponto de referência fixo ou pode rastrear

uma rota determinada. Uma câmera superior é utilizada para medir a posição da bola. Existem dois servomotores, sendo que cada um deles está ligado a um dos eixos da placa. Ao controlar a posição das engrenagens de carga do servomotor, o ângulo de inclinação da placa pode ser ajustado para equilibrar a bola em uma posição plana desejada.

O modelo matemático do sistema *2DOF ball balancer* (QUANSER, 2008) é dado por:

$$\ddot{p}(t) = K_{bb} \text{sen}(\theta(t)), \quad \tau \ddot{\theta}(t) + \dot{\theta}(t) = CV_m(t), \quad (31)$$

sendo:

$p(t)$  a posição da bola, com  $p(t) = p_x$  para o eixo x e  $p(t) = p_y$  para o eixo y;

$\theta(t)$  o ângulo de carga, com  $\theta(t) = \theta_x$  para o eixo x e  $\theta(t) = \theta_y$  para o eixo y;

$V_m(t) = u(t)$  o sinal de controle, com  $u(t) = u_x$  para o eixo x e  $u(t) = u_y$  para o eixo y;

$\tau$  e  $C$  são parâmetros do fabricante, e

$$K_{bb} = \frac{2m_b g r_{arm} r_b^2}{L_{plate}(m_b r_b^2 + J_b)}.$$

As descrições e os valores das constantes citadas são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 - Parâmetros do sistema *2DOF ball balancer*.

Parâmetros	Símbolo	Valor
Massa da bola (kg)	$m_b$	0,003
Distância do eixo do motor ao ponto de fixação da barra (cm)	$r_{arm}$	2,54
Raio da bola (cm)	$r_b$	1,96
Comprimento da mesa (cm)	$L_{plate}$	27,5
Parâmetro do fabricante (rad/sV)	$C$	1,76
Parâmetro do fabricante (s)	$\tau$	0,0285
Momento de inércia de uma esfera sólida (bolinha) (kgm <sup>2</sup> )	$J_b$	0,0046
Parâmetro do sistema (m/s <sup>2</sup> rad)	$K_{bb}$	1,3
Gravidade (m/s <sup>2</sup> )	$g$	9,8

Fonte: Quanser, 2008.

O sistema (31) pode ser representado como:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (32)$$

sendo que:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{bb} \frac{\text{sen}(\theta(t))}{\theta(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{c}{\tau} \end{bmatrix}, x(t) = \begin{bmatrix} p(t) \\ \dot{p}(t) \\ \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}. \quad (33)$$

### 2.2.3 Projeto do sistema 2DOF ball balancer

Para verificar resultados do método proposto em um sistema real, foi projetado um controlador para um sistema 2DOF ball balancer (32) e (33), considerando a possibilidade de falha de até  $-50\%$  no atuador e que o ângulo da carga fica na faixa  $-\frac{\pi}{6} \leq \theta(t) \leq \frac{\pi}{6} \text{ rad}$ .

Uma função não linear pode ser representada como uma combinação convexa de seu valor máximo e mínimo (TANIGUCHI *et al.*, 2001). Na planta (33), o termo  $a_{23} = K_{bb} \frac{\text{sen}(\theta(t))}{\theta(t)}$  é não linear, sendo que para  $-\frac{\pi}{6} \leq \theta(t) \leq \frac{\pi}{6} \text{ rad}$ , o seu valor máximo ocorre quando  $\theta(t) = 0$ ,

$$a_{23max} = \lim_{\theta \rightarrow 0} K_{bb} \frac{\text{sen}(\theta(t))}{\theta(t)} = K_{bb}, \quad (34)$$

enquanto o valor mínimo ocorre em  $\theta(t) = \pm\pi/6$ :

$$a_{23min} = K_{bb} \frac{\text{sen}(\pi/6)}{\pi/6}. \quad (35)$$

Dessa forma, a matriz  $A$  pode ser escrita como uma combinação convexa:

$$\sum_{j=1}^2 \phi_j A_j = \phi_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} + \phi_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{bb} \frac{\text{sen}(\pi/6)}{\pi/6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}, \quad (36)$$

sendo  $\phi_j \geq 0$ ,  $\sum_{j=1}^2 \phi_j = 1$ ,  $j \in \mathbb{K}_2$ .

A perda de potência no atuador é representada no modelo por uma constante  $k_{falha}$  (SILVA *et al.*, 2013). Assim temos que:

$$u(t)_{falha} = k_{falha}u(t). \quad (37)$$

Então temos três situações:

1:  $k_{falha} = 0$ , implica que o atuador teve falha total, ou o sistema está em malha aberta;

2:  $k_{falha} = 1$ , representa o caso em que não há falha no atuador;

3:  $0 < k_{falha} < 1$ , significa que existe uma falha parcial no atuador.

De (37), note que:

$$Bu(t)_{falha} = Bk_{falha}u(t). \quad (38)$$

Então considerando (38), o sistema *2DOF ball balancer* (32) e (33) pode ser representado com falha no atuador por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)_{falha} = Ax(t) + Bk_{falha}u(t) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{bb} \frac{\text{sen}(\theta(t))}{\theta(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_{falha} \frac{C}{\tau} \end{bmatrix} u(t). \end{aligned} \quad (39)$$

Considerando que o atuador pode perder até 50% de sua potência, de (39) a matriz B pode ser representada como uma combinação convexa:

$$B = \sum_{k=1}^2 \varepsilon_k B_k = \varepsilon_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{C}{\tau} \end{bmatrix} + \varepsilon_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{0,5C}{\tau} \end{bmatrix}, \quad (40)$$

sendo  $\varepsilon_k \geq 0$ ,  $\sum_{k=1}^2 \varepsilon_k = 1$ ,  $k \in \mathbb{K}_2$ . Para descrever o sistema conforme (2), será utilizado:

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i = \sum_{j=1}^2 \phi_j \sum_{k=1}^2 \varepsilon_k = 1, \quad (41)$$

sendo  $i \in \mathbb{K}_4$ ,  $\alpha_1 = \phi_1 \varepsilon_1$ ,  $\alpha_2 = \phi_2 \varepsilon_1$ ,  $\alpha_3 = \phi_1 \varepsilon_2$ ,  $\alpha_4 = \phi_2 \varepsilon_2$ . Assim, de (36), (40) e (41), a planta pode ser descrita por modelo fuzzy Takagi-Sugeno (1) e (2), com:

$$\begin{aligned} A_1 = A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}, \\ A_2 = A_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{bb} \frac{\text{sen}(\pi/6)}{\pi/6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} B_1 = B_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{C}{\tau} \end{bmatrix}^T, \\ B_3 = B_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{0,5C}{\tau} \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \quad (43)$$

O controlador foi projetado por (7) e (8), com  $\beta = 2,2$  e  $\zeta = 0,1$ . Os vetores  $M_{jkl}$ , matrizes simétricas definidas positivas  $P_j$  e matrizes simétricas  $Q_{jkl}$  obtidos foram:

$$\begin{aligned} M_{111} &= \begin{bmatrix} -0,0041 & 0,0260 & -0,1426 & 0,9710 \end{bmatrix}, \\ M_{112} &= \begin{bmatrix} -0,0041 & 0,0263 & -0,1427 & 0,9654 \end{bmatrix}, \\ M_{113} &= \begin{bmatrix} -0,0039 & 0,0234 & -0,1188 & 0,6595 \end{bmatrix}, \\ M_{114} &= \begin{bmatrix} -0,0038 & 0,0233 & -0,1181 & 0,6563 \end{bmatrix}, \\ M_{121} &= \begin{bmatrix} -0,0042 & 0,0259 & -0,1425 & 0,9719 \end{bmatrix}, \\ M_{122} &= \begin{bmatrix} -0,0041 & 0,0262 & -0,1426 & 0,9662 \end{bmatrix}, \\ M_{123} &= \begin{bmatrix} -0,0039 & 0,0233 & -0,1188 & 0,6605 \end{bmatrix}, \\ M_{124} &= \begin{bmatrix} -0,0038 & 0,0233 & -0,1180 & 0,6572 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{131} &= \begin{bmatrix} -0,0042 & 0,0266 & -0,1469 & 1,0180 \end{bmatrix}, \\
M_{132} &= \begin{bmatrix} -0,0041 & 0,0269 & -0,1470 & 1,0124 \end{bmatrix}, \\
M_{133} &= \begin{bmatrix} -0,0039 & 0,0240 & -0,1229 & 0,7056 \end{bmatrix}, \\
M_{134} &= \begin{bmatrix} -0,0038 & 0,0239 & -0,1222 & 0,7023 \end{bmatrix}, \\
M_{141} &= \begin{bmatrix} -0,0042 & 0,0266 & -0,1471 & 1,0185 \end{bmatrix}, \\
M_{142} &= \begin{bmatrix} -0,0042 & 0,0269 & -0,1472 & 1,0129 \end{bmatrix}, \\
M_{143} &= \begin{bmatrix} -0,0040 & 0,0240 & -0,1232 & 0,7064 \end{bmatrix}, \\
M_{144} &= \begin{bmatrix} -0,0039 & 0,0239 & -0,1224 & 0,7031 \end{bmatrix}, \\
M_{211} &= \begin{bmatrix} -0,0041 & 0,0259 & -0,1426 & 0,9700 \end{bmatrix}, \\
M_{212} &= \begin{bmatrix} -0,0040 & 0,0262 & -0,1427 & 0,9644 \end{bmatrix}, \\
M_{213} &= \begin{bmatrix} -0,0039 & 0,0233 & -0,1189 & 0,6589 \end{bmatrix}, \\
M_{214} &= \begin{bmatrix} -0,0038 & 0,0233 & -0,1181 & 0,6556 \end{bmatrix}, \\
M_{221} &= \begin{bmatrix} -0,0041 & 0,0258 & -0,1425 & 0,9708 \end{bmatrix}, \\
M_{222} &= \begin{bmatrix} -0,0041 & 0,0261 & -0,1426 & 0,9652 \end{bmatrix}, \\
M_{223} &= \begin{bmatrix} -0,0039 & 0,0232 & -0,1189 & 0,6598 \end{bmatrix}, \\
M_{224} &= \begin{bmatrix} -0,0038 & 0,0232 & -0,1181 & 0,6565 \end{bmatrix}, \\
M_{231} &= \begin{bmatrix} -0,0042 & 0,0265 & -0,1470 & 1,0170 \end{bmatrix}, \\
M_{232} &= \begin{bmatrix} -0,0041 & 0,0268 & -0,1470 & 1,0114 \end{bmatrix}, \\
M_{233} &= \begin{bmatrix} -0,0039 & 0,0239 & -0,1231 & 0,7053 \end{bmatrix}, \\
M_{234} &= \begin{bmatrix} -0,0038 & 0,0238 & -0,1223 & 0,7020 \end{bmatrix}, \\
M_{241} &= \begin{bmatrix} -0,0042 & 0,0265 & -0,1472 & 1,0174 \end{bmatrix}, \\
M_{242} &= \begin{bmatrix} -0,0041 & 0,0268 & -0,1472 & 1,0118 \end{bmatrix}, \\
M_{243} &= \begin{bmatrix} -0,0039 & 0,0239 & -0,1233 & 0,7058 \end{bmatrix}, \\
M_{244} &= \begin{bmatrix} -0,0038 & 0,0238 & -0,1225 & 0,7024 \end{bmatrix}, \\
M_{311} &= \begin{bmatrix} -0,0063 & 0,0392 & -0,2144 & 1,4145 \end{bmatrix}, \\
M_{312} &= \begin{bmatrix} -0,0062 & 0,0397 & -0,2146 & 1,4061 \end{bmatrix}, \\
M_{313} &= \begin{bmatrix} -0,0061 & 0,0367 & -0,1850 & 0,9375 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{314} &= \begin{bmatrix} -0,0059 & 0,0365 & -0,1838 & 0,9326 \end{bmatrix}, \\
M_{321} &= \begin{bmatrix} -0,0063 & 0,0391 & -0,2144 & 1,4157 \end{bmatrix}, \\
M_{322} &= \begin{bmatrix} -0,0062 & 0,0396 & -0,2146 & 1,4072 \end{bmatrix}, \\
M_{323} &= \begin{bmatrix} -0,0061 & 0,0364 & -0,1846 & 0,9396 \end{bmatrix}, \\
M_{324} &= \begin{bmatrix} -0,0060 & 0,0363 & -0,1834 & 0,9345 \end{bmatrix}, \\
M_{331} &= \begin{bmatrix} -0,0064 & 0,0403 & -0,2221 & 1,4842 \end{bmatrix}, \\
M_{332} &= \begin{bmatrix} -0,0063 & 0,0408 & -0,2223 & 1,4757 \end{bmatrix}, \\
M_{333} &= \begin{bmatrix} -0,0062 & 0,0379 & -0,1937 & 1,0008 \end{bmatrix}, \\
M_{334} &= \begin{bmatrix} -0,0061 & 0,0378 & -0,1925 & 0,9959 \end{bmatrix}, \\
M_{341} &= \begin{bmatrix} -0,0064 & 0,0404 & -0,2226 & 1,4848 \end{bmatrix}, \\
M_{342} &= \begin{bmatrix} -0,0063 & 0,0409 & -0,2229 & 1,4762 \end{bmatrix}, \\
M_{343} &= \begin{bmatrix} -0,0063 & 0,0379 & -0,1936 & 1,0037 \end{bmatrix}, \\
M_{344} &= \begin{bmatrix} -0,0061 & 0,0378 & -0,1924 & 0,9984 \end{bmatrix}, \\
M_{411} &= \begin{bmatrix} -0,0062 & 0,0390 & -0,2142 & 1,4140 \end{bmatrix}, \\
M_{412} &= \begin{bmatrix} -0,0061 & 0,0395 & -0,2145 & 1,4055 \end{bmatrix}, \\
M_{413} &= \begin{bmatrix} -0,0061 & 0,0363 & -0,1842 & 0,9389 \end{bmatrix}, \\
M_{414} &= \begin{bmatrix} -0,0059 & 0,0362 & -0,1831 & 0,9338 \end{bmatrix}, \\
M_{421} &= \begin{bmatrix} -0,0063 & 0,0389 & -0,2143 & 1,4150 \end{bmatrix}, \\
M_{422} &= \begin{bmatrix} -0,0062 & 0,0394 & -0,2146 & 1,4064 \end{bmatrix}, \\
M_{423} &= \begin{bmatrix} -0,0061 & 0,0362 & -0,1840 & 0,9402 \end{bmatrix}, \\
M_{424} &= \begin{bmatrix} -0,0059 & 0,0361 & -0,1830 & 0,9349 \end{bmatrix}, \\
M_{431} &= \begin{bmatrix} -0,0063 & 0,0401 & -0,2220 & 1,4836 \end{bmatrix}, \\
M_{432} &= \begin{bmatrix} -0,0062 & 0,0406 & -0,2223 & 1,4749 \end{bmatrix}, \\
M_{433} &= \begin{bmatrix} -0,0062 & 0,0376 & -0,1928 & 1,0035 \end{bmatrix}, \\
M_{434} &= \begin{bmatrix} -0,0060 & 0,0375 & -0,1916 & 0,9981 \end{bmatrix}, \\
M_{441} &= \begin{bmatrix} -0,0064 & 0,0402 & -0,2227 & 1,4838 \end{bmatrix}, \\
M_{442} &= \begin{bmatrix} -0,0063 & 0,0407 & -0,2231 & 1,4750 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{443} &= \begin{bmatrix} -0,0062 & 0,0376 & -0,1930 & 1,0048 \end{bmatrix}, \\
 M_{444} &= \begin{bmatrix} -0,0061 & 0,0375 & -0,1919 & 0,9991 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \begin{bmatrix} 0,0011 & -0,0031 & 0,0052 & -0,0069 \\ -0,0031 & 0,0096 & -0,0206 & 0,0429 \\ 0,0052 & -0,0206 & 0,0617 & -0,2278 \\ -0,0069 & 0,0429 & -0,2278 & 1,8583 \end{bmatrix}, \\
 P_2 &= \begin{bmatrix} 0,0011 & -0,0031 & 0,0052 & -0,0068 \\ -0,0031 & 0,0097 & -0,0208 & 0,0436 \\ 0,0052 & -0,0208 & 0,0619 & -0,2283 \\ -0,0068 & 0,0436 & -0,2283 & 1,8478 \end{bmatrix}, \\
 P_3 &= \begin{bmatrix} 0,0011 & -0,0031 & 0,0053 & -0,0066 \\ -0,0031 & 0,0098 & -0,0212 & 0,0392 \\ 0,0053 & -0,0212 & 0,0634 & -0,2003 \\ -0,0066 & 0,0392 & -0,2003 & 1,2755 \end{bmatrix}, \\
 P_4 &= \begin{bmatrix} 0,0011 & -0,0031 & 0,0053 & -0,0064 \\ -0,0031 & 0,0098 & -0,0213 & 0,0390 \\ 0,0053 & -0,0213 & 0,0634 & -0,1989 \\ -0,0064 & 0,0390 & -0,1989 & 1,2694 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{111} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0009 & -0,0013 & 0,1314 \\ 0,0009 & -0,0024 & 0,0069 & -0,8160 \\ -0,0013 & 0,0069 & -0,0606 & 4,5621 \\ 0,1314 & -0,8160 & 4,5621 & -61,4242 \end{bmatrix}, \\
 Q_{112} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0010 & -0,0013 & 0,1296 \\ 0,0010 & -0,0024 & 0,0068 & -0,8271 \\ -0,0013 & 0,0068 & -0,0604 & 4,5687 \\ 0,1296 & -0,8271 & 4,5687 & -61,0695 \end{bmatrix}, \\
 Q_{113} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0010 & -0,0010 & 0,1298 \\ 0,0010 & -0,0025 & 0,0044 & -0,7736 \\ -0,0010 & 0,0044 & -0,0288 & 3,9986 \\ 0,1298 & -0,7736 & 3,9986 & -41,6738 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{114} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0010 & -0,0010 & 0,1263 \\ 0,0010 & -0,0025 & 0,0041 & -0,7712 \\ -0,0010 & 0,0041 & -0,0278 & 3,9744 \\ 0,1263 & -0,7712 & 3,9744 & -41,4583 \end{bmatrix}, \\
Q_{121} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0009 & -0,0012 & 0,1323 \\ 0,0009 & -0,0019 & 0,0059 & -0,8137 \\ -0,0012 & 0,0059 & -0,0596 & 4,5658 \\ 0,1323 & -0,8137 & 4,5658 & -61,4615 \end{bmatrix}, \\
Q_{122} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0009 & -0,0012 & 0,1306 \\ 0,0009 & -0,0019 & 0,0058 & -0,8252 \\ -0,0012 & 0,0058 & -0,0594 & 4,5743 \\ 0,1306 & -0,8252 & 4,5743 & -58,9820 \end{bmatrix}, \\
Q_{123} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0009 & -0,0009 & 0,1305 \\ 0,0009 & -0,0020 & 0,0035 & -0,7697 \\ -0,0009 & 0,0035 & -0,0281 & 3,9933 \\ 0,1305 & -0,7697 & 3,9933 & -41,7278 \end{bmatrix}, \\
Q_{124} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0009 & -0,0010 & 0,1270 \\ 0,0009 & -0,0020 & 0,0032 & -0,7677 \\ -0,0010 & 0,0032 & -0,0271 & 3,9712 \\ 0,1270 & -0,7677 & 3,9712 & -41,5001 \end{bmatrix}, \\
Q_{131} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0008 & -0,0006 & 0,1338 \\ 0,0008 & -0,0016 & 0,0041 & -0,8401 \\ -0,0006 & 0,0041 & -0,0508 & 4,7324 \\ 0,1338 & -0,8401 & 4,7324 & -64,2646 \end{bmatrix}, \\
Q_{132} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0008 & -0,0006 & 0,1320 \\ 0,0008 & -0,0015 & 0,0040 & -0,8516 \\ -0,0006 & 0,0040 & -0,0507 & 4,7408 \\ 0,1320 & -0,8516 & 4,7408 & -63,9029 \end{bmatrix}, \\
Q_{133} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0008 & -0,0004 & 0,1330 \\ 0,0008 & -0,0017 & 0,0018 & -0,8034 \\ -0,0004 & 0,0018 & -0,0200 & 4,1983 \\ 0,1330 & -0,8034 & 4,1983 & -44,2411 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{134} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0008 & -0,0004 & 0,1295 \\ 0,0008 & -0,0017 & 0,0015 & -0,8011 \\ -0,0004 & 0,0015 & -0,0191 & 4,1750 \\ 0,1295 & -0,8011 & 4,1750 & -44,0104 \end{bmatrix}, \\
Q_{141} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0007 & -0,0007 & 0,1352 \\ 0,0007 & -0,0011 & 0,0035 & -0,8423 \\ -0,0007 & 0,0035 & -0,0508 & 4,7496 \\ 0,1352 & -0,8423 & 4,7496 & -64,2650 \end{bmatrix}, \\
Q_{142} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0007 & -0,0007 & 0,1335 \\ 0,0007 & -0,0011 & 0,0034 & -0,8544 \\ -0,0007 & 0,0034 & -0,0507 & 4,7613 \\ 0,1335 & -0,8544 & 4,7613 & -63,8919 \end{bmatrix}, \\
Q_{143} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0008 & -0,0004 & 0,1340 \\ 0,0008 & -0,0013 & 0,0012 & -0,8026 \\ -0,0004 & 0,0012 & -0,0202 & 4,1992 \\ 0,1340 & -0,8026 & 4,1992 & -44,3000 \end{bmatrix}, \\
Q_{144} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0008 & -0,0004 & 0,1305 \\ 0,0008 & -0,0013 & 0,0010 & -0,8009 \\ -0,0004 & 0,0010 & -0,0193 & 4,1785 \\ 0,1305 & -0,8009 & 4,1785 & -44,0494 \end{bmatrix}, \\
Q_{211} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0011 & -0,0013 & 0,1312 \\ 0,0011 & -0,0039 & 0,0093 & -0,8281 \\ -0,0013 & 0,0093 & -0,0619 & 4,5627 \\ 0,1312 & -0,8281 & 4,5627 & -61,4071 \end{bmatrix}, \\
Q_{212} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0012 & -0,0013 & 0,1294 \\ 0,0012 & -0,0038 & 0,0092 & -0,8392 \\ -0,0013 & 0,0092 & -0,0618 & 4,5693 \\ 0,1294 & -0,8392 & 4,5693 & -61,0528 \end{bmatrix}, \\
Q_{213} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0012 & -0,0010 & 0,1296 \\ 0,0012 & -0,0040 & 0,0068 & -0,7843 \\ -0,0010 & 0,0068 & -0,0302 & 3,9976 \\ 0,1296 & -0,7843 & 3,9976 & -41,6510 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{214} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0012 & -0,0010 & 0,1260 \\ 0,0012 & -0,0039 & 0,0065 & -0,7819 \\ -0,0010 & 0,0065 & -0,0292 & 3,9736 \\ 0,1260 & -0,7819 & 3,9736 & -41,4369 \end{bmatrix}, \\
 Q_{221} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0011 & -0,0013 & 0,1321 \\ 0,0011 & -0,0033 & 0,0083 & -0,8258 \\ -0,0013 & 0,0083 & -0,0610 & 4,5664 \\ 0,1321 & -0,8258 & 4,5664 & -61,4451 \end{bmatrix}, \\
 Q_{222} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0011 & -0,0013 & 0,1303 \\ 0,0011 & -0,0033 & 0,0082 & -0,8373 \\ -0,0013 & 0,0082 & -0,0608 & 4,5749 \\ 0,1303 & -0,8373 & 4,5749 & -58,9662 \end{bmatrix}, \\
 Q_{223} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0011 & -0,0010 & 0,1303 \\ 0,0011 & -0,0035 & 0,0059 & -0,7804 \\ -0,0010 & 0,0059 & -0,0295 & 3,9927 \\ 0,1303 & -0,7804 & 3,9927 & -41,7090 \end{bmatrix}, \\
 Q_{224} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0011 & -0,0010 & 0,1268 \\ 0,0011 & -0,0034 & 0,0056 & -0,7784 \\ -0,0010 & 0,0056 & -0,0285 & 3,9707 \\ 0,1268 & -0,7784 & 3,9707 & -41,4827 \end{bmatrix}, \\
 Q_{231} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0009 & -0,0007 & 0,1336 \\ 0,0009 & -0,0030 & 0,0065 & -0,8522 \\ -0,0007 & 0,0065 & -0,0522 & 4,7329 \\ 0,1336 & -0,8522 & 4,7329 & -64,2487 \end{bmatrix}, \\
 Q_{232} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0010 & -0,0007 & 0,1318 \\ 0,0010 & -0,0030 & 0,0064 & -0,8637 \\ -0,0007 & 0,0064 & -0,0521 & 4,7413 \\ 0,1318 & -0,8637 & 4,7413 & -63,8877 \end{bmatrix}, \\
 Q_{233} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0010 & -0,0004 & 0,1328 \\ 0,0010 & -0,0032 & 0,0042 & -0,8141 \\ -0,0004 & 0,0042 & -0,0214 & 4,1967 \\ 0,1328 & -0,8141 & 4,1967 & -44,2113 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{234} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0010 & -0,0004 & 0,1293 \\ 0,0010 & -0,0031 & 0,0039 & -0,8118 \\ -0,0004 & 0,0039 & -0,0204 & 4,1735 \\ 0,1293 & -0,8118 & 4,1735 & -43,9829 \end{bmatrix}, \\
Q_{241} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0009 & -0,0007 & 0,1349 \\ 0,0009 & -0,0026 & 0,0059 & -0,8544 \\ -0,0007 & 0,0059 & -0,0522 & 4,7501 \\ 0,1349 & -0,8544 & 4,7501 & -64,2506 \end{bmatrix}, \\
Q_{242} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0009 & -0,0007 & 0,1332 \\ 0,0009 & -0,0026 & 0,0058 & -0,8665 \\ -0,0007 & 0,0058 & -0,0521 & 4,7618 \\ 0,1332 & -0,8665 & 4,7618 & -63,8787 \end{bmatrix}, \\
Q_{243} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0010 & -0,0004 & 0,1338 \\ 0,0010 & -0,0027 & 0,0036 & -0,8134 \\ -0,0004 & 0,0036 & -0,0215 & 4,1982 \\ 0,1338 & -0,8134 & 4,1982 & -44,2788 \end{bmatrix}, \\
Q_{244} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0010 & -0,0004 & 0,1303 \\ 0,0010 & -0,0027 & 0,0034 & -0,8116 \\ -0,0004 & 0,0034 & -0,0206 & 4,1777 \\ 0,1303 & -0,8116 & 4,1777 & -44,0307 \end{bmatrix}, \\
Q_{311} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0010 & -0,0012 & 0,0010 \\ 0,0010 & -0,0024 & 0,0048 & 0,0065 \\ -0,0012 & 0,0048 & -0,0426 & 0,0382 \\ 0,0010 & 0,0065 & 0,0382 & -1,3375 \end{bmatrix}, \\
Q_{312} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0010 & -0,0013 & 0,0011 \\ 0,0010 & -0,0024 & 0,0046 & 0,0062 \\ -0,0013 & 0,0046 & -0,0424 & 0,0397 \\ 0,0011 & 0,0062 & 0,0397 & -1,3329 \end{bmatrix}, \\
Q_{313} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0011 & -0,0011 & 0,0009 \\ 0,0011 & -0,0027 & 0,0036 & 0,0066 \\ -0,0011 & 0,0036 & -0,0200 & 0,0252 \\ 0,0009 & 0,0066 & 0,0252 & -1,3364 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{314} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0011 & -0,0011 & 0,0009 \\ 0,0011 & -0,0027 & 0,0034 & 0,0061 \\ -0,0011 & 0,0034 & -0,0194 & 0,0269 \\ -0,0011 & 0,0061 & 0,0269 & -1,3217 \end{bmatrix}, \\
Q_{321} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0009 & -0,0012 & 0,0011 \\ 0,0009 & -0,0020 & 0,0039 & 0,0061 \\ -0,0012 & 0,0039 & -0,0420 & 0,0409 \\ 0,0011 & 0,0061 & 0,0409 & -1,3279 \end{bmatrix}, \\
Q_{322} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0010 & -0,0012 & 0,0012 \\ 0,0010 & -0,0019 & 0,0038 & 0,0057 \\ -0,0012 & 0,0038 & -0,0419 & 0,0430 \\ 0,0012 & 0,0057 & 0,0430 & 0,7990 \end{bmatrix}, \\
Q_{323} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0010 & -0,0010 & 0,0010 \\ 0,0010 & -0,0022 & 0,0027 & 0,0056 \\ -0,0010 & 0,0027 & -0,0192 & 0,0303 \\ 0,0010 & 0,0056 & 0,0303 & -1,2960 \end{bmatrix}, \\
Q_{324} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0010 & -0,0011 & 0,0011 \\ 0,0010 & -0,0022 & 0,0025 & 0,0052 \\ -0,0011 & 0,0025 & -0,0187 & 0,0320 \\ 0,0011 & 0,0052 & 0,0320 & -1,2803 \end{bmatrix}, \\
Q_{331} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0008 & -0,0006 & 0,0010 \\ 0,0008 & -0,0016 & 0,0021 & 0,0065 \\ -0,0006 & 0,0021 & -0,0335 & 0,0395 \\ 0,0010 & 0,0065 & 0,0395 & -1,3175 \end{bmatrix}, \\
Q_{332} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0009 & -0,0006 & 0,0011 \\ 0,0009 & -0,0016 & 0,0020 & 0,0060 \\ -0,0006 & 0,0020 & -0,0335 & 0,0418 \\ 0,0011 & 0,0060 & 0,0418 & -1,3087 \end{bmatrix}, \\
Q_{333} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0009 & -0,0006 & 0,0007 \\ 0,0009 & -0,0020 & 0,0016 & 0,0076 \\ -0,0006 & 0,0016 & -0,0142 & 0,0200 \\ 0,0007 & 0,0076 & 0,0200 & -1,3935 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{334} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0010 & -0,0006 & 0,0008 \\ 0,0010 & -0,0020 & 0,0014 & 0,0072 \\ -0,0006 & 0,0014 & -0,0136 & 0,0221 \\ 0,0008 & 0,0072 & 0,0221 & -1,3702 \end{bmatrix}, \\
Q_{341} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0008 & -0,0006 & 0,0012 \\ 0,0008 & -0,0012 & 0,0016 & 0,0056 \\ -0,0006 & 0,0016 & -0,0339 & 0,0449 \\ 0,0012 & 0,0056 & 0,0449 & -1,2961 \end{bmatrix}, \\
Q_{342} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0008 & -0,0007 & 0,0012 \\ 0,0008 & -0,0012 & 0,0015 & 0,0049 \\ -0,0007 & 0,0015 & -0,0341 & 0,0483 \\ 0,0012 & 0,0049 & 0,0483 & -1,2809 \end{bmatrix}, \\
Q_{343} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0009 & -0,0006 & 0,0009 \\ 0,0009 & -0,0016 & 0,0010 & 0,0063 \\ -0,0006 & 0,0010 & -0,0139 & 0,0274 \\ 0,0009 & 0,0063 & 0,0274 & -1,3171 \end{bmatrix}, \\
Q_{344} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0009 & -0,0006 & 0,0010 \\ 0,0009 & -0,0016 & 0,0008 & 0,0058 \\ -0,0006 & 0,0008 & -0,0135 & 0,0296 \\ 0,0010 & 0,0058 & 0,0296 & -1,2912 \end{bmatrix}, \\
Q_{411} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0012 & -0,0012 & 0,0010 \\ 0,0012 & -0,0039 & 0,0071 & -0,0063 \\ -0,0012 & 0,0071 & -0,0428 & 0,0367 \\ 0,0010 & -0,0063 & 0,0367 & -1,3410 \end{bmatrix}, \\
Q_{412} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0012 & -0,0012 & 0,0010 \\ 0,0012 & -0,0039 & 0,0069 & -0,0065 \\ -0,0012 & 0,0069 & -0,0426 & 0,0370 \\ 0,0010 & -0,0065 & 0,0370 & -1,3395 \end{bmatrix}, \\
Q_{413} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0013 & -0,0011 & 0,0012 \\ 0,0013 & -0,0042 & 0,0060 & -0,0072 \\ -0,0011 & 0,0060 & -0,0208 & 0,0372 \\ 0,0012 & -0,0072 & 0,0372 & -1,2463 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{414} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0013 & -0,0011 & 0,0012 \\ 0,0013 & -0,0042 & 0,0058 & -0,0072 \\ -0,0011 & 0,0058 & -0,0201 & 0,0370 \\ 0,0012 & -0,0072 & 0,0370 & -1,2448 \end{bmatrix}, \\
Q_{421} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0011 & -0,0011 & 0,0010 \\ 0,0011 & -0,0034 & 0,0062 & -0,0063 \\ -0,0011 & 0,0062 & -0,0420 & 0,0368 \\ 0,0010 & -0,0063 & 0,0368 & -1,3383 \end{bmatrix}, \\
Q_{422} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0011 & -0,0012 & 0,0010 \\ 0,0011 & -0,0034 & 0,0060 & -0,0065 \\ -0,0012 & 0,0060 & -0,0418 & 0,0370 \\ 0,0010 & -0,0065 & 0,0370 & 0,7837 \end{bmatrix}, \\
Q_{423} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0012 & -0,0010 & 0,0012 \\ 0,0012 & -0,0037 & 0,0051 & -0,0072 \\ -0,0010 & 0,0051 & -0,0198 & 0,0373 \\ 0,0012 & -0,0072 & 0,0373 & -1,2455 \end{bmatrix}, \\
Q_{424} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0012 & -0,0011 & 0,0012 \\ 0,0012 & -0,0037 & 0,0049 & -0,0072 \\ -0,0011 & 0,0049 & -0,0192 & 0,0370 \\ 0,0012 & -0,0072 & 0,0370 & -1,2431 \end{bmatrix}, \\
Q_{431} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0010 & -0,0006 & 0,0009 \\ 0,0010 & -0,0031 & 0,0044 & -0,0061 \\ -0,0006 & 0,0044 & -0,0336 & 0,0359 \\ 0,0009 & -0,0061 & 0,0359 & -1,3284 \end{bmatrix}, \\
Q_{432} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0010 & -0,0006 & 0,0009 \\ 0,0010 & -0,0030 & 0,0043 & -0,0062 \\ -0,0006 & 0,0043 & -0,0334 & 0,0361 \\ 0,0009 & -0,0062 & 0,0361 & -1,3264 \end{bmatrix}, \\
Q_{433} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0011 & -0,0006 & 0,0011 \\ 0,0011 & -0,0035 & 0,0040 & -0,0066 \\ -0,0006 & 0,0040 & -0,0149 & 0,0344 \\ 0,0011 & -0,0066 & 0,0344 & -1,2456 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{434} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0011 & -0,0006 & 0,0011 \\ 0,0011 & -0,0035 & 0,0038 & -0,0066 \\ -0,0006 & 0,0038 & -0,0142 & 0,0341 \\ 0,0011 & -0,0066 & 0,0341 & -1,2437 \end{bmatrix}, \\
Q_{441} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0010 & -0,0006 & 0,0009 \\ 0,0010 & -0,0027 & 0,0038 & -0,0061 \\ -0,0006 & 0,0038 & -0,0336 & 0,0360 \\ 0,0009 & -0,0061 & 0,0360 & -1,3246 \end{bmatrix}, \\
Q_{442} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0010 & -0,0006 & 0,0009 \\ 0,0010 & -0,0026 & 0,0037 & -0,0062 \\ -0,0006 & 0,0037 & -0,0336 & 0,0361 \\ 0,0009 & -0,0062 & 0,0361 & -1,3213 \end{bmatrix}, \\
Q_{443} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0011 & -0,0006 & 0,0011 \\ 0,0011 & -0,0031 & 0,0033 & -0,0067 \\ -0,0006 & 0,0033 & -0,0144 & 0,0348 \\ 0,0011 & -0,0067 & 0,0348 & -1,2460 \end{bmatrix}, \\
Q_{444} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0011 & -0,0006 & 0,0011 \\ 0,0011 & -0,0031 & 0,0031 & -0,0067 \\ -0,0006 & 0,0031 & -0,0139 & 0,0344 \\ 0,0011 & -0,0067 & 0,0344 & -1,2432 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{46}$$

### 2.2.3.1 Resultados de simulação do sistema 2DOF ball balancer

As Figuras 9-12 mostram os resultados de simulação do sistema *2DOF ball balancer*, descrito por (33), (42) e (43), com a regra de controle (3), considerando (44)-(46).

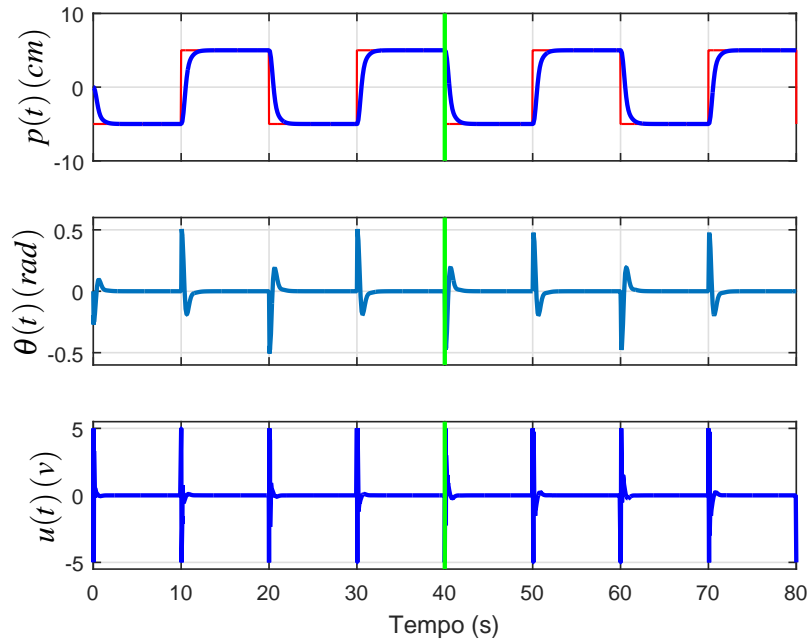
Durante a simulação os controladores devem fazer com que a bola siga uma referência, que é uma trajetória quadrada de 10 cm de lado. Foi considerado que apenas  $p$  e  $\theta$  estão disponíveis, e que  $\dot{p}$  e  $\dot{\theta}$  são estimados por meio de filtros derivativos  $G_f(s) = 20s/(s+20)$ , como sugerido pela fabricante (QUANSER, 2008).

Adicionalmente, a entrada de controle  $u(t)$  é limitada em  $\pm 5V$  através de um saturador, inserido via *Simulink*<sup>®</sup>, que seria usado em implementação para não danificar o atuador. Aos 40 segundos foi inserida uma falha no atuador de  $-50\%$ .

A simulação foi feita via *Simulink*<sup>®</sup>, com o solver ode3 (Bogacki-Shampine) e passo de 1 ms.

A Figura 9 apresenta a trajetória da bola (em azul) e a referência (em vermelho), além de mostrar o ângulo de carga  $\theta(t)$  e a entrada de controle  $u(t)$ .

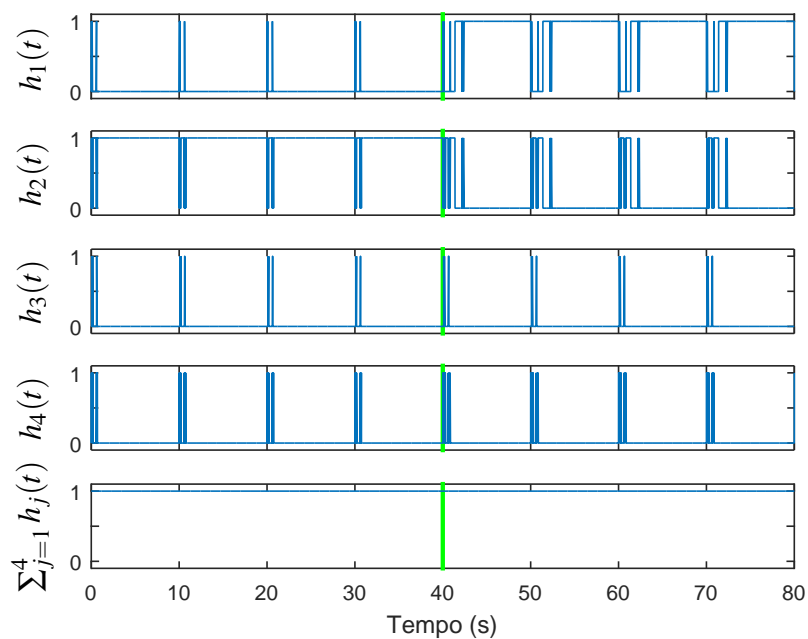
Figura 9 - Resultado de simulação do sistema *2DOF ball balancer*, descrito por (1), (2), (42) e (43), controlado por (3), considerando (44)-(46).



Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 10 mostra o ganho escolhido em cada instante pela lei de chaveamento (3). Para a chave escolhida  $j \in \mathbb{K}_4$ , em um certo instante  $t$ , tem-se  $h_j(t) = 1$  enquanto  $j = \sigma$ , já as demais chaves em que  $j \neq \sigma$  equivalem a  $h_j(t) = 0$ .

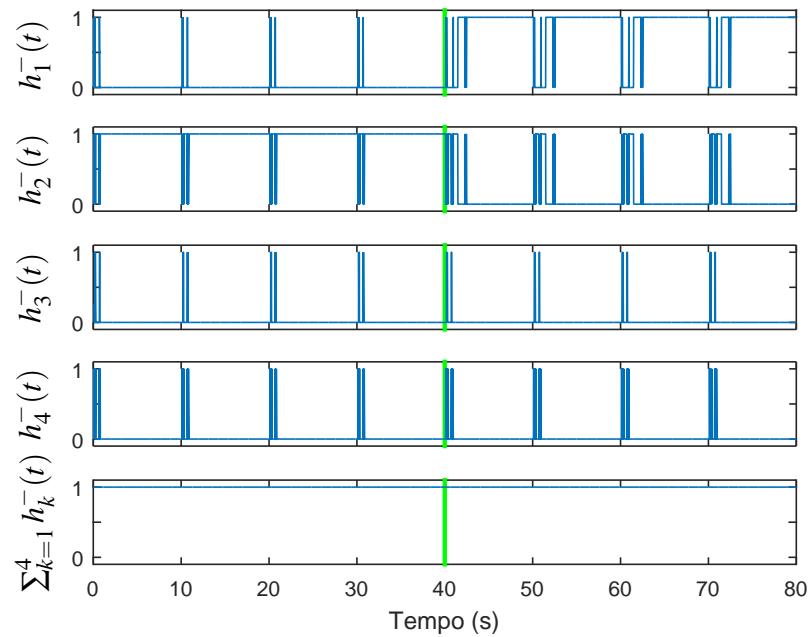
Figura 10 -  $h_j(t)$ ,  $j \in \mathbb{K}_4$ , do sistema *2DOF ball balancer* em cada instante, controlado por (3), considerando (44)-(46).



Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 11 mostra o valor de  $h_k^-(t) = h_k(t - \zeta)$ ,  $k \in \mathbb{K}_4$ , sendo que foi adotado  $\zeta = 0, 1$ . De forma similar às Figuras 4 e 5, foi considerado  $h_k(t < 0) = \frac{1}{4}$ , sendo que  $k \in \mathbb{K}_4$ .

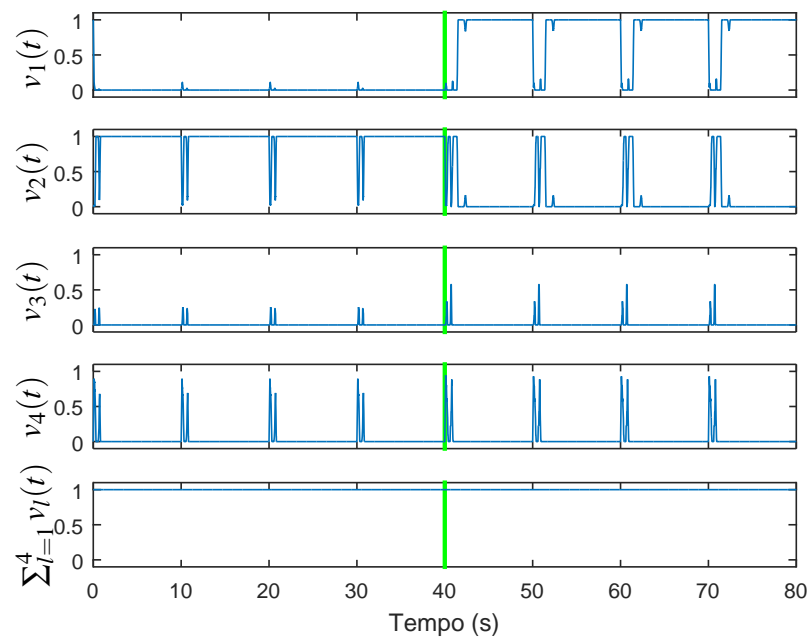
Figura 11 -  $h_k^-(t)$ ,  $k \in \mathbb{K}_4$ , do sistema *2DOF ball balancer* em cada instante, controlado por (3), considerando (44)-(46).



Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 12 mostra o valor de  $v_l(t) = \frac{1}{\zeta} \int_{t-\zeta}^t h_l(t) dt$ ,  $l \in \mathbb{K}_4$ .

Figura 12 -  $v_l(t)$ ,  $l \in \mathbb{K}_4$ , do sistema *2DOF ball balancer* em cada instante, controlado por (3), considerando (44)-(46).



Fonte: Elaboração do autor.

Note na Figura 9 que o controlador continua entregando os resultados desejados, mesmo após a falha aos 40 segundos.

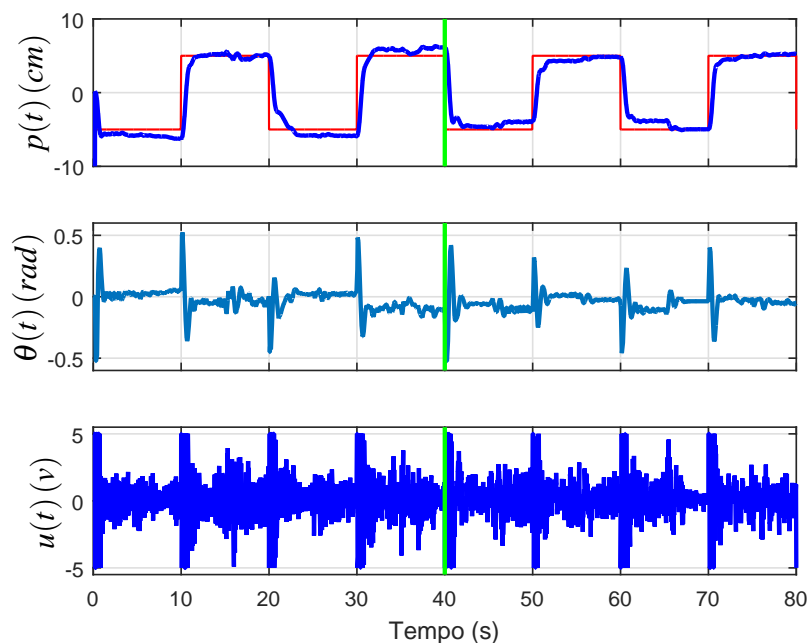
### 2.2.3.2 Resultados de implementação no sistema 2DOF ball balancer

Assim como na simulação, durante a implementação o controlador deve fazer com que a bola se mova em uma trajetória quadrada de 10 cm de lado, sendo que o atuador está limitado a  $\pm 5V$  e perde 50% de sua potência aos 40 segundos. As variáveis de estado  $\dot{p}$  e  $\dot{\theta}$  são estimadas por meio de filtros derivativos  $G_f(s) = 20s/(s+20)$ . A implementação foi feita via o *Simulink*<sup>®</sup>, com o solver ode1 (Euler) e passo de 1 ms.

As Figuras 13-16 mostram os resultados no eixo  $x$  da implementação no sistema 2DOF ball balancer, descrito por (32), (33), (42) e (43), com a regra de controle (3), considerando (44)-(46).

A Figura 13 apresenta a trajetória da bola (em azul) e a referência (em vermelho), além de mostrar o ângulo de carga  $\theta(t)$  e a entrada de controle  $u(t)$ .

Figura 13 - Eixo  $x$ : resultado de implementação do sistema 2DOF ball balancer, descrito por (1), (2), (42) e (43), controlado por (3), considerando (44)-(46).

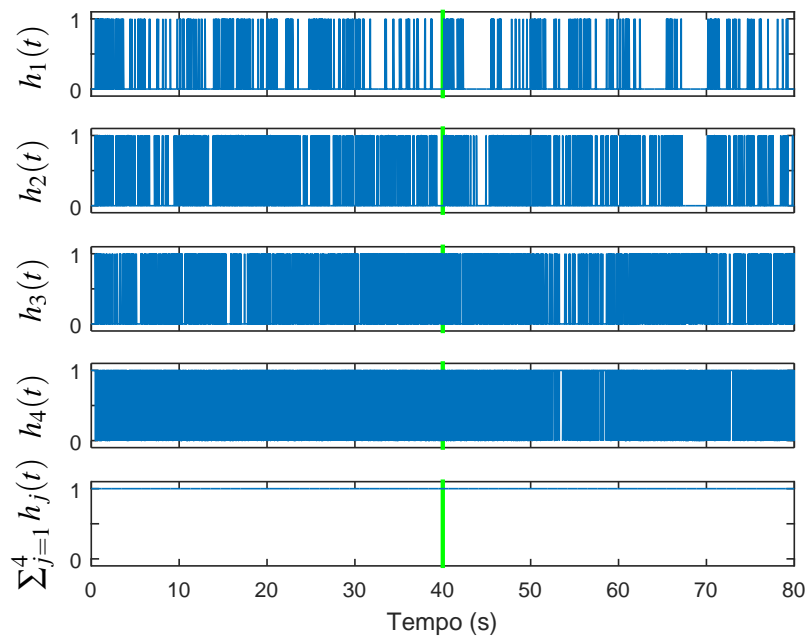


Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 14 mostra o ganho escolhido em cada instante pela lei de chaveamento (3), no eixo  $x$ . Para a chave escolhida  $j \in \mathbb{K}_4$ , em um certo instante  $t$ , tem-se  $h_j(t) = 1$  enquanto

$j = \sigma$ , já as demais chaves em que  $j \neq \sigma$  equivalem a  $h_j(t) = 0$ .

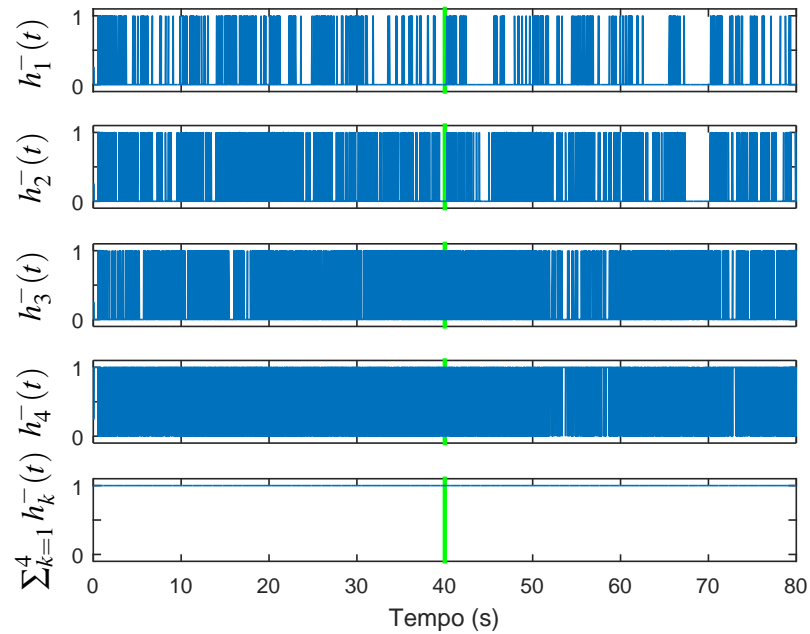
Figura 14 - Eixo  $x$ :  $h_j(t)$ ,  $j \in \mathbb{K}_4$ , do sistema *2DOF ball balancer* em cada instante, controlado por (3), considerando (44)-(46).



Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 15 mostra o valor de  $h_k^-(t) = h_k(t - \zeta)$ ,  $k \in \mathbb{K}_4$ , no eixo  $x$ . De forma similar às Figuras 4 e 5, foi considerado  $h_k(t < 0) = \frac{1}{4}$ , sendo que  $k \in \mathbb{K}_4$ .

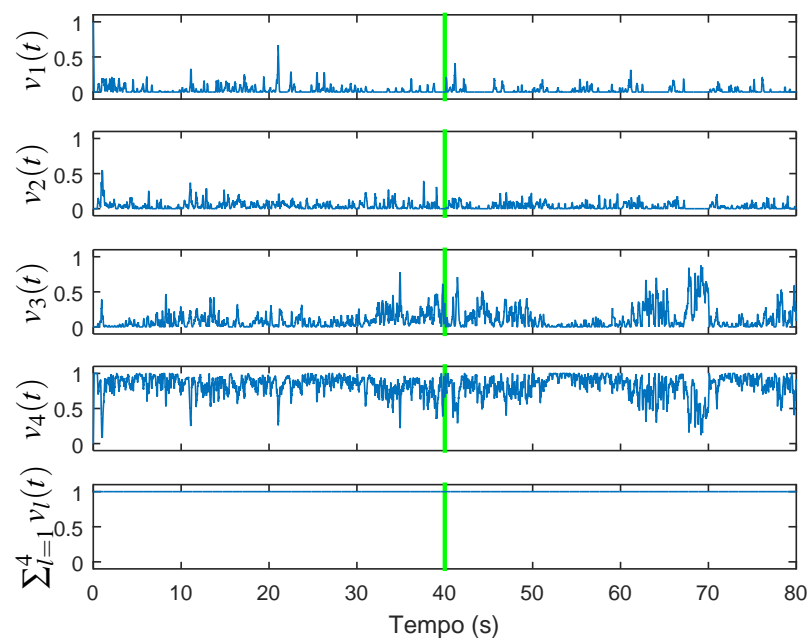
Figura 15 - Eixo  $x$ :  $h_k^-(t)$ ,  $k \in \mathbb{K}_4$ , do sistema *2DOF ball balancer* em cada instante, controlado por (3), considerando (44)-(46).



Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 16 mostra o valor de  $v_l(t) = \frac{1}{\zeta} \int_{t-\zeta}^t h_l(t) dt$ ,  $l \in \mathbb{K}_4$ , no eixo  $x$ .

Figura 16 - Eixo  $x$ :  $v_l(t)$ ,  $l \in \mathbb{K}_4$ , do sistema *2DOF ball balancer* em cada instante, controlado por (3), considerando (44)-(46).

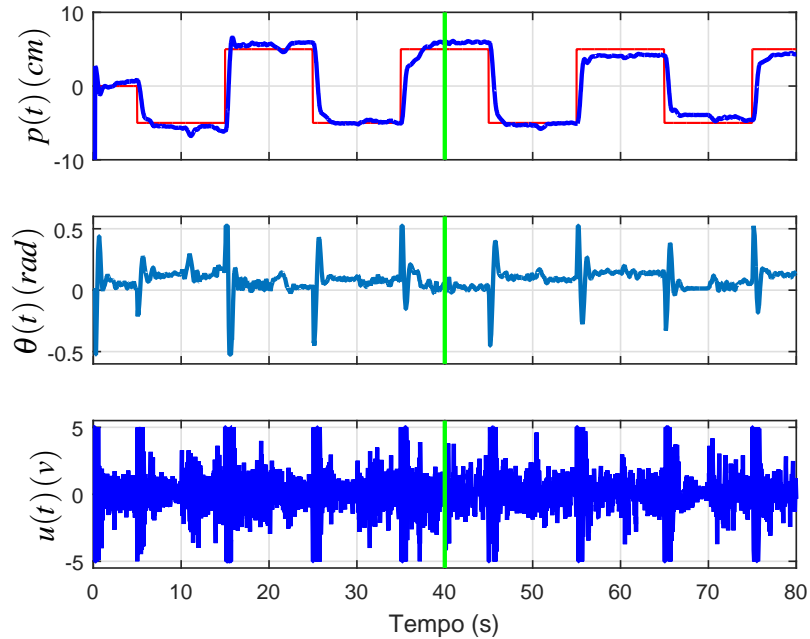


Fonte: Elaboração do autor.

As Figuras 17-20 mostram os resultados de implementação no eixo  $y$ .

A Figura 17 apresenta a trajetória da bola (em azul) e a referência (em vermelho), além de mostrar o ângulo de carga  $\theta(t)$  e a entrada de controle  $u(t)$ .

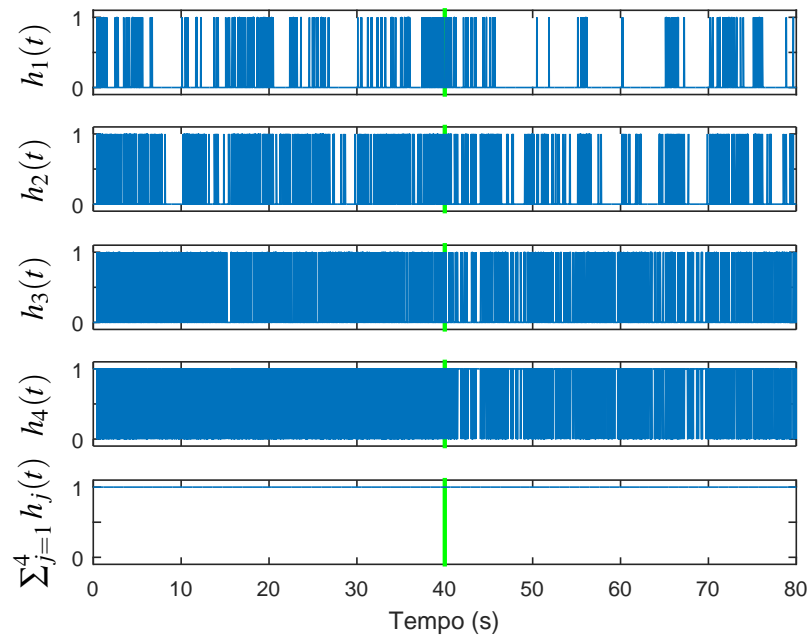
Figura 17 - Eixo  $y$ : resultado de implementação do sistema *2DOF ball balancer*, descrito por (1), (2), (42) e (43), controlado por (3), considerando (44)-(46).



Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 18 mostra o ganho escolhido em cada instante pela lei de chaveamento (3), no eixo  $y$ . Para a chave escolhida  $j \in \mathbb{K}_4$ , em um certo instante  $t$ , tem-se  $h_j(t) = 1$  enquanto  $j = \sigma$ , já as demais chaves em que  $j \neq \sigma$  equivalem a  $h_j(t) = 0$ .

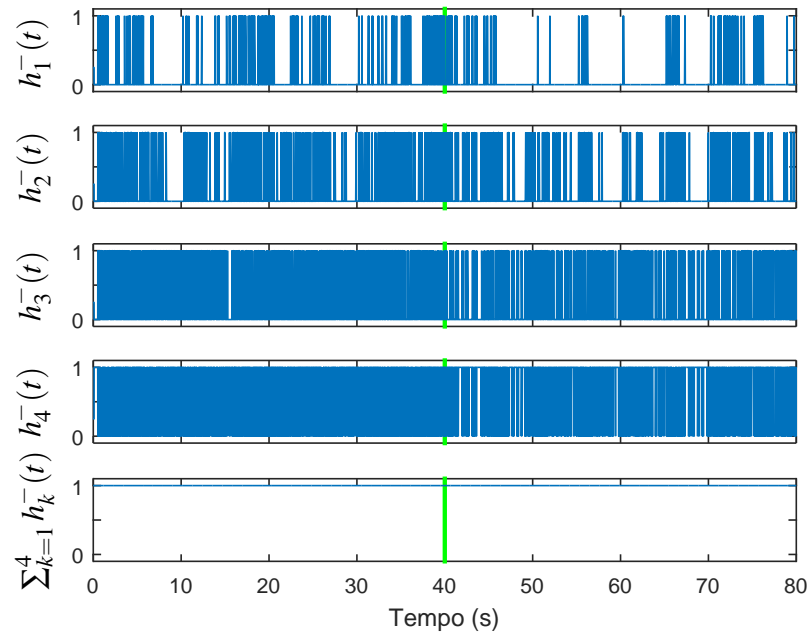
Figura 18 - Eixo  $y$ :  $h_j(t)$ ,  $j \in \mathbb{K}_4$ , do sistema *2DOF ball balancer* em cada instante, controlado por (3), considerando (44)-(46).



Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 19 mostra o valor de  $h_k^-(t) = h_k(t - \zeta)$ ,  $k \in \mathbb{K}_4$ , no eixo  $y$ . De forma similar às Figuras 4 e 5, foi considerado  $h_k(t < 0) = \frac{1}{4}$ , sendo que  $k \in \mathbb{K}_4$ .

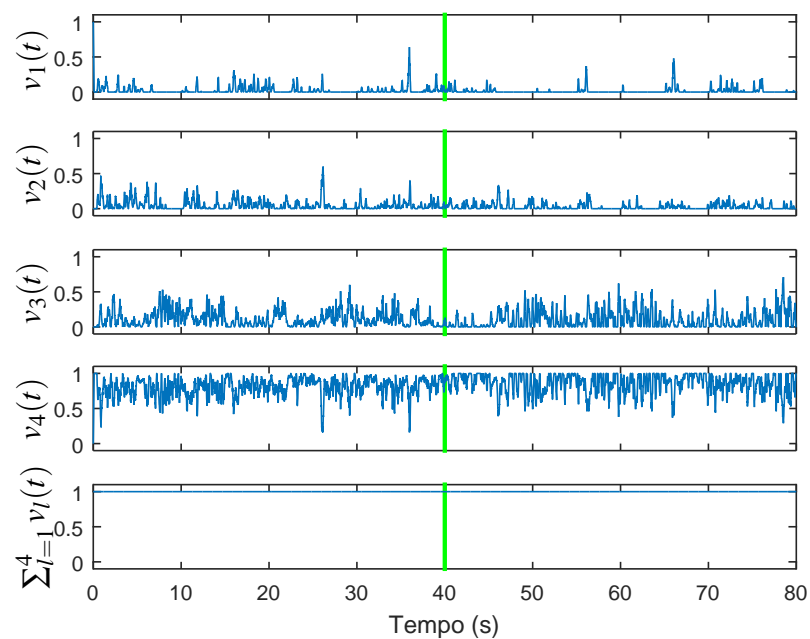
Figura 19 - Eixo y:  $h_k^-(t)$ ,  $k \in \mathbb{K}_4$ , do sistema *2DOF ball balancer* em cada instante, controlado por (3), considerando (44)-(46).



Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 20 mostra o valor de  $v_l(t) = \frac{1}{\zeta} \int_{t-\zeta}^t h_l(t) dt$ ,  $l \in \mathbb{K}_4$ , no eixo y.

Figura 20 - Eixo y:  $v_l(t)$ ,  $l \in \mathbb{K}_4$ , do sistema *2DOF ball balancer* em cada instante, controlado por (3), considerando (44)-(46).



Fonte: Elaboração do autor.

As Figuras de 13 a 20 mostram que o método proposto consegue controlar um sistema real de forma satisfatória, mesmo com a presença de uma falha de  $-50\%$  no atuador.

### 2.3 Considerações

O controlador proposto no Teorema 1, apesar de apresentar uma área de factibilidade menor do que o concebido em (MÁRQUEZ *et al.*, 2016), cumpre o seu objetivo, já que ele apresenta a vantagem em relação ao método apresentado em (MÁRQUEZ *et al.*, 2016) de controlar sistemas com incertezas, não utilizando as funções  $\alpha_i(t)$ ,  $i \in \mathbb{K}_s$ , das matrizes do modelo matemático da planta dada em (2), na obtenção da lei de controle chaveada, descrita em (1) e (3). Adicionalmente, foi provado no Teorema 3 que o procedimento proposto no Teorema 1 tem suas condições de projeto factíveis sempre que para essas mesmas condições, o procedimento baseado em (SOUZA *et al.*, 2014) e descrito no Teorema 2 forem factíveis. Um exemplo, utilizado também em (MÁRQUEZ *et al.*, 2016), foi usado para comparar os métodos estudados e foi verificado que o método de projeto do controlador proposto no Teorema 1 apresenta área de factibilidade consideravelmente maior do que o controlador que utiliza apenas uma única matriz simétrica positiva  $P$ , apresentado no Teorema 2, mas é também significativamente mais complexo. Adicionalmente, foi possível verificar a eficácia do método proposto no controle de um sistema *2DOF ball balancer*, com uma não linearidade e considerando uma falha no atuador, através de simulações numéricas e implementação no laboratório.

### 3 CONTROLE CHAVEADO COM ESTABILIDADE ASSINTÓTICA DO PONTO DE EQUILÍBRIO E SEM *CHATTERING*

As técnicas de projeto de controladores chaveados propostas em (SOUZA *et al.*, 2014; ALVES *et al.*, 2016; OLIVEIRA *et al.*, 2018), para controlar sistemas não lineares com incertezas e/ou falhas descritos por meio de modelos fuzzy Takagi-Sugeno, oferecem flexibilidade de projeto quando comparados com o emprego de controladores não chaveados. Exemplos de simulação e implementação no laboratório, em sistemas de suspensão ativa e *2DOF ball balancer* atestam a eficiência destes métodos.

Um inconveniente desses procedimentos é a possível existência de *chattering*, que é uma comutação em alta frequência nos ganhos dos controladores chaveados. Em (ALVES *et al.*, 2016) foi proposta uma lei de chaveamento suave, que elimina o *chattering*, mas o ponto de equilíbrio do sistema deixa de ser assintoticamente estável e passa a ser *ultimate bounded*. Ou seja, o sistema não converge para o ponto de equilíbrio, mas converge para uma vizinhança próxima do ponto de equilíbrio, sendo que os resultados citados permitem que o projetista especifique esta região.

O método proposto nesse capítulo tem como objetivo evitar o *chattering* no chaveamento do controlador, ou seja, evitar que os ganhos do sistema mudem em alta frequência. Adicionalmente, esta técnica permite preservar a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio do sistema. Considere o sistema realimentado descrito por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BK_{\lambda}x(t), \quad (47)$$

sendo  $A$  e  $B$  descritas por (2) e a candidata a função de Lyapunov a seguir:

$$\begin{aligned} V(x(t)) &= x(t)^T P^{-1}x(t), \quad P = P^T > 0, \\ \dot{V}(x(t)) &= \dot{x}(t)^T P^{-1}x(t) + x(t)^T P^{-1}\dot{x}(t). \end{aligned} \quad (48)$$

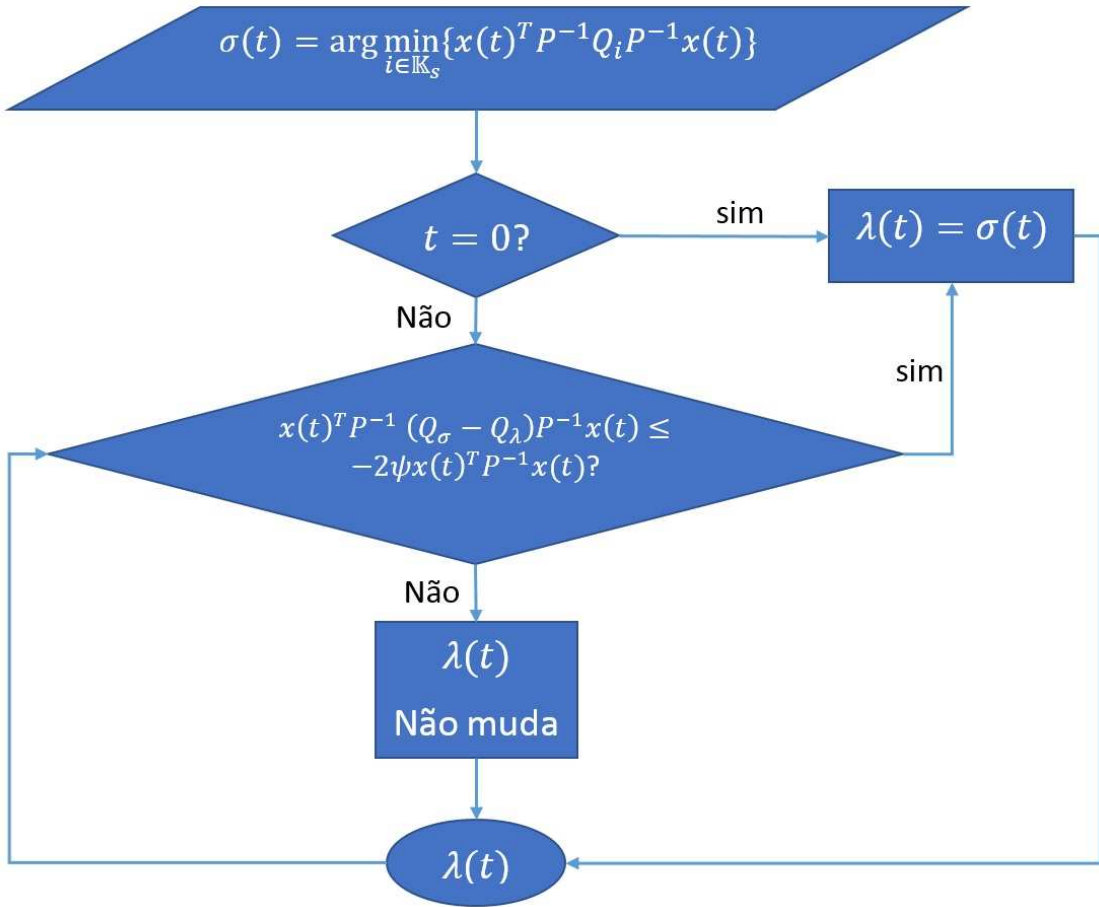
A nova estratégia de chaveamento proposta é descrita por:

$$\begin{aligned}
 \sigma(t) &= \arg \min_{i \in \mathbb{K}_s} \{x(t)^T P^{-1} Q_i P^{-1} x(t)\}, \\
 \lambda(t) &= \begin{cases} \sigma(t), & \text{em } t = 0, \\ \sigma(t), & \text{se } x(t)^T P^{-1} Q_\sigma P^{-1} x(t) - x(t)^T P^{-1} Q_\lambda P^{-1} x(t) \\ & + 2\psi x(t)^T P^{-1} x(t) \leq 0 \text{ e } t > 0, \\ \text{não muda, se } & x(t)^T P^{-1} Q_\sigma P^{-1} x(t) - x(t)^T P^{-1} Q_\lambda P^{-1} x(t) \\ & + 2\psi x(t)^T P^{-1} x(t) > 0 \text{ e } t > 0, \end{cases} \\
 u(t) &= K_\lambda x(t). \tag{49}
 \end{aligned}$$

O escalar  $\psi$  é um parâmetro de projeto e é utilizado para especificar o erro máximo que o sistema deve tolerar até a troca de  $\lambda(t)$ , e assim do ganho  $K_\lambda$ . Valores maiores de  $\psi$  farão o sistema precisar chavear menos, mas tornará o projeto de controle mais conservador.

Se  $x(t)^T P^{-1} Q_\lambda P^{-1} x(t) < x(t)^T P^{-1} Q_\sigma P^{-1} x(t) + 2\psi x(t)^T P^{-1} x(t)$ , então o ganho não muda. Assim, dado um instante  $t_n$  em que  $\lambda(t_n) = \sigma(t_n)$ , mantém  $\lambda(t) = \lambda(t_n) = \sigma(t_n)$  até que o erro  $x^T(t_{n+1}) P^{-1} (Q_\sigma - Q_\lambda) P^{-1} x(t_{n+1}) \leq -2\psi x^T(t_{n+1}) P^{-1} x(t_{n+1})$ , quando será atualizado o valor de  $\lambda(t)$  para  $\lambda(t_{n+1}) = \sigma(t_{n+1})$ . O fluxograma na Figura 21 ilustra essa regra de chaveamento:

Figura 21 - Fluxograma da lei de chaveamento do método anti-chattering.



Fonte: Elaboração do autor.

Observe de (49) e da Figura 21 que, devido à definição de  $\sigma(t)$  em (49), então para  $t \geq 0$ , sempre é satisfeita a primeira desigualdade à esquerda em (50) abaixo; a segunda desigualdade em (50) segue de (49) observando que em  $t = 0$ ,  $\lambda(0) = \sigma(0)$ ,  $Q_{\sigma(0)} = Q_{\lambda(0)}$ ,  $\lambda(t)$  fica constante e que  $\lambda(t)$  muda somente se existir um  $t = t_n > 0$  tal que  $x(t_n)^T P^{-1} (Q_{\sigma(0)} - Q_{\sigma(t_n)}) P^{-1} x(t_n) = 2\psi x(t_n)^T P^{-1} x(t_n)$  e então  $\lambda(t_n) = \sigma(t_n)$ ,  $Q_{\sigma(t_n)} = Q_{\lambda(t_n)}$  e de (49)  $\lambda(t)$  é mantido novamente no valor  $\sigma(t_n)$ . Este processo se repete em cada intervalo em que o ganho não é atualizado, e demonstra a segunda desigualdade da esquerda para a direita em (50), pois em (49), a condição com sinal “<” quando ocorre a atualização do ganho nunca vai acontecer, pois quando a condição relativa ao “=” é obtida, então o ganho já vai ser atualizado e caímos na condição “<” em (49), na qual  $\lambda(t)$  fica novamente inalterado. Na prova do Teorema 5 este fato pode ser visto com mais detalhes.

$$x(t)^T P^{-1} Q_\sigma P^{-1} x(t) \leq x(t)^T P^{-1} Q_\lambda P^{-1} x(t) \leq x(t)^T P^{-1} Q_\sigma P^{-1} x(t) + 2\psi x(t)^T P^{-1} x(t), \quad (50)$$

sendo que  $\psi > 0$ .

O Teorema 4 a seguir mostra que a lei de controle chaveada anti-*chattering* (49) assegura que o ponto de equilíbrio  $x(t) = 0$  do sistema controlado (47) é globalmente assintoticamente estável.

**Teorema 4.** *O ponto de equilíbrio  $x(t) = 0$  do sistema descrito em (47), com a lei de chaveamento descrita em (49) e as incertezas (2) é globalmente assintoticamente estável, com taxa de decaimento  $\beta$ , se as LMIs a seguir forem satisfeitas:*

$$A_i P + B_i M_j + P A_i^T + M_j^T B_i^T + 2(\beta + \psi)P - Z_i - Q_j < 0, \quad (51)$$

$$Z_i + Q_i \leq 0, \quad (52)$$

sendo que  $P > 0$ ,  $Z_i, Q_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$  são matrizes simétricas,  $M_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $i$  e  $j \in \mathbb{K}_s$ ,  $\psi$  uma constante positiva e  $s$  é o número de vértices do politopo da planta (2) e (47). Quando estas LMIs são factíveis, os ganhos do controlador são dados por  $K_j = M_j P^{-1}$ ,  $j \in \mathbb{K}_s$ .

**Prova:** Pré multiplicando (51) e (52) por  $x(t)^T P^{-1}$  e pós multiplicando por  $P^{-1} x(t)$ , sendo  $x(t) \neq 0$ , obtém-se:

$$x(t)^T (P^{-1} A_i + P^{-1} B_i K_j + A_i^T P^{-1} + K_j^T B_i^T P^{-1} - P^{-1} (Z_i + Q_j) P^{-1} + 2(\beta + \psi) P^{-1}) x(t) < 0, \quad (53)$$

$$x(t)^T P^{-1} (Z_i + Q_i) P^{-1} x(t) \leq 0. \quad (54)$$

De (53), da candidata a função de Lyapunov e sua derivada descrita em (48), da representação do sistema (2), da lei de chaveamento (49) e considerando  $M_j = K_j P$ , é possível observar que para  $x(t) \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) + 2\beta V(x(t)) &= x(t)^T \sum_{i=1}^s \alpha_i (P^{-1} A_i + P^{-1} B_i K_\lambda + A_i^T P^{-1} + K_\lambda^T B_i^T P^{-1} + 2\beta P^{-1}) x(t) \\ &< x(t)^T (P^{-1} (\sum_{i=1}^s \alpha_i Z_i + Q_\lambda) P^{-1} - 2\psi P^{-1}) x(t). \end{aligned} \quad (55)$$

Lembrando da lei de chaveamento (49) e de (50) que  $x(t)^T P^{-1} Q_\lambda P^{-1} x(t) \leq x(t)^T (P^{-1} Q_\sigma P^{-1} + 2\Psi P^{-1}) x(t)$  e considerando (54) e (55), observe que:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) + 2\beta V(x(t)) &< x(t)^T P^{-1} \left( \sum_{i=1}^s \alpha_i Z_i + Q_\sigma \right) P^{-1} x(t) \\ &= x(t)^T P^{-1} \sum_{i=1}^s \alpha_i Z_i P^{-1} x(t) + \min_{i \in \mathbb{K}_s} \{ x(t)^T P^{-1} Q_i P^{-1} x(t) \} \\ &\leq x(t)^T P^{-1} \sum_{i=1}^s \alpha_i (Z_i + Q_i) P^{-1} x(t) \leq 0. \end{aligned} \quad (56)$$

Logo  $\dot{V}(x(t)) + 2\beta V(x(t)) < 0$  para  $x(t) \neq 0$ . □

O próximo teorema demonstra que não existe *chattering* ao controlar o sistema (47) com a lei de controle chaveada (49).

**Teorema 5.** *Considere a planta (47) e a lei de chaveamento (49). Então, a mudança do ganho chaveado  $K_{\lambda(t)}$  pode ocorrer somente após um intervalo de tempo não nulo. Este fato demonstra a não existência de chattering no sinal de controle  $u(t) = K_{\lambda(t)} x(t)$  definido em (49).*

**Prova:** Da definição da lei de controle em (49), considerando um instante  $t_n$  em que  $\lambda(t_n) = \sigma(t_n)$ , então:

$$x(t_n)^T P^{-1} [Q_{\sigma(t_n)} - Q_{a(t_n)}] P^{-1} x(t_n) = x(t_n)^T 0 x(t_n) = 0. \quad (57)$$

Quando  $t$  cresce, partindo de  $t_n$ , enquanto

$$x(t)^T P^{-1} [Q_{\sigma(t > t_n)} - Q_{\sigma(t_n)}] P^{-1} x(t) + 2\Psi x(t)^T P^{-1} x(t) > 0, \quad (58)$$

continuar válida, tem-se que o ganho  $K_{\lambda(t)} = K_{\lambda(t_n)} = K_{\sigma(t_n)}$ , de acordo com a definição de  $\lambda(t)$  em (49).

Suponha que exista um intervalo de tempo  $t_n \leq t < t_{n+1}$  que satisfaz a condição (58), mas que em  $t = t_{n+1}$ :

$$x(t_{n+1})^T P^{-1} [Q_{\sigma(t_{n+1})} - Q_{\sigma(t_n)}] P^{-1} x(t_{n+1}) + 2\Psi x(t_{n+1})^T P^{-1} x(t_{n+1}) = 0, \quad (59)$$

de forma que (58) deixa de ser válida.

Neste caso, de (49), para  $t_n \leq t < t_{n+1}$ ,  $\lambda(t) = \lambda(t_n)$ ,  $K_{\lambda(t)} = K_{\lambda(t_n)}$  e agora em  $t = t_{n+1}$ ,  $\lambda(t)$  é atualizado para  $\lambda(t_{n+1}) = \sigma(t_{n+1})$ , sendo  $\sigma(t_{n+1})$  obtido utilizando a primeira equação em (49).

Defina o sinal  $z_n(t)$ , para o período  $t_n \leq t < t_{n+1}$ ,

$$z_n(t) = \frac{d}{dt}[x(t)^T P^{-1}(\mathcal{Q}_{\sigma(t_{n+1})} - \mathcal{Q}_{\sigma(t_n)})P^{-1}x(t)], \quad (60)$$

sendo  $t_n \leq t < t_{n+1}$ , com  $t_{n+i}$  representando os instantes em que o ganho  $K_{\lambda(t)}$  sofre alterações. Então considerando (47), note que de (60),

$$z_n(t) = 2x(t)^T P^{-1}[\mathcal{Q}_{\sigma(t_{n+1})} - \mathcal{Q}_{\sigma(t_n)}]P^{-1}(A - BK_{\sigma(t_n)})x(t), \quad t_n \leq t < t_{n+1}, \quad (61)$$

sendo que  $\lambda(t_n) = \sigma(t_n)$ .

Observe que  $x(t)$  para  $t_n \leq t < t_{n+1}$  é a solução do sistema (47) dada por  $\dot{x}(t) = (A - BK_{\lambda(t_n)})x(t)$ , pois como visto anteriormente, nessa situação  $K_{\lambda(t)} = K_{\lambda(t_n)} = K_{\sigma(t_n)}$ . Supondo que os elementos da matriz  $[A - BK_{\lambda(t_n)}]$  são contínuos no tempo e limitados para  $t_n \leq t < t_{n+1}$ , então  $z_i(t)$  dada em (61) é também contínua no tempo e limitada. Assim, tem-se de (60) e (61) que:

$$w_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} z_n(t)dt = x(t_{n+1})^T P^{-1}[\mathcal{Q}_{\sigma(t_{n+1})} - \mathcal{Q}_{\sigma(t_n)}]P^{-1}x(t_{n+1}) - x(t_n)^T P^{-1}[\mathcal{Q}_{\sigma(t_{n+1})} - \mathcal{Q}_{\sigma(t_n)}]P^{-1}x(t_n). \quad (62)$$

Agora, de (49) e (50),  $x(t_n)^T P^{-1}[\mathcal{Q}_{\sigma(t_{n+1})} - \mathcal{Q}_{\sigma(t_n)}]P^{-1}x(t_n) \geq 0$ . Adicionalmente, de (59),  $x(t_{n+1})^T P^{-1}[\mathcal{Q}_{\sigma(t_{n+1})} - \mathcal{Q}_{\sigma(t_n)}]P^{-1}x(t_{n+1}) = -2\psi x(t_{n+1})^T P^{-1}x(t_{n+1}) < 0$  se  $x(t_{n+1}) \neq 0$ , pois caso contrário o sistema já estaria no ponto de equilíbrio e se manteria.

Conclui-se portanto que, de (62),

$$w_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} z_1(t)dt < 0. \quad (63)$$

Logo, de (61)-(63). Assim,

$$\min_{t_n \leq t < t_{n+1}} \{z_n(t)\} < 0 \quad (64)$$

e de (60)-(63),

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \min_{t_n \leq t < t_{n+1}} \{z_n(t)\} dt = (t_{n+1} - t_n) \min_{t_n \leq t < t_{n+1}} \{z_n(t)\} \leq \int_{t_n}^{t_{n+1}} z_n(t) dt = w_1. \quad (65)$$

De (63)-(65), note que

$$t_{n+1} - t_n \geq \frac{-w_n}{-\min_{t_n \leq t < t_{n+1}} \{z_n(t)\}} = \frac{w_n}{\min_{t_n \leq t < t_{n+1}} \{z_n(t)\}} > 0. \quad (66)$$

Portanto, o primeiro período de tempo para a atualização do ganho  $K_{\lambda(t)}$ , de  $K_{\lambda(t_n)}$  em  $t = t_n$  até  $t = t_{n+1}$  com  $K_{\lambda(t_{n+1})} = K_{\sigma(t_{n+1})}$  satisfaz a condição  $t_{n+1} - t_n > 0$  dada por (66).

Isto implica que não existe *chattering* no intervalo de tempo entre  $t_n < t \leq t_{n+1}$ . Assim a prova está concluída.  $\square$

### 3.1 Projeto de Controle

Foi projetado através de (51) e (52), o controlador (49), com  $\beta = 0$  e  $\psi = 2,5$ , para o controle do sistema *2DOF ball balancer* (31) e (33) com falha de até  $-50\%$  no atuador, podendo ser representado pelos vértices (42) e (43). Gerando os ganhos  $K_j$ , matriz simétrica positiva definida  $P$  e matrizes simétricas  $Q_j$  a seguir:

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{bmatrix} -148,2878 & -82,5599 & -19,4881 & -0,6616 \end{bmatrix}, \\ K_2 &= \begin{bmatrix} -167,9001 & -93,1316 & -21,8359 & -0,7935 \end{bmatrix}, \\ K_3 &= \begin{bmatrix} -373,1426 & -207,4783 & -48,8607 & -2,1874 \end{bmatrix}, \\ K_4 &= \begin{bmatrix} -389,0817 & -216,0352 & -50,7458 & -2,2912 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (67)$$

$$P = \begin{bmatrix} 0,0001 & -0,0002 & 0,0004 & -0,0005 \\ -0,0002 & 0,0007 & -0,0018 & 0,0037 \\ 0,0004 & -0,0018 & 0,0059 & -0,0214 \\ -0,0005 & 0,0037 & -0,0214 & 0,1602 \end{bmatrix}. \quad (68)$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= 10^8 \begin{bmatrix} 1,4477 & 0,8061 & 0,1902 & 0,0102 \\ 0,8061 & 0,4488 & 0,1058 & 0,0057 \\ 0,1902 & 0,1058 & 0,0250 & 0,0013 \\ 0,0102 & 0,0057 & 0,0013 & 0,0001 \end{bmatrix}, \\ Q_2 &= 10^8 \begin{bmatrix} 1,3250 & 0,7389 & 0,1750 & 0,0093 \\ 0,7389 & 0,4120 & 0,0976 & 0,0052 \\ 0,1750 & 0,0976 & 0,0231 & 0,0012 \\ 0,0093 & 0,0052 & 0,0012 & 0,0001 \end{bmatrix}, \\ Q_3 &= 10^7 \begin{bmatrix} -6,8308 & -3,7776 & -0,8831 & -0,0559 \\ -3,7776 & -2,0898 & -0,4887 & -0,0309 \\ -0,8831 & -0,4887 & -0,1143 & -0,0072 \\ -0,0559 & -0,0309 & -0,0072 & -0,0005 \end{bmatrix}, \\ Q_4 &= 10^7 \begin{bmatrix} -7,5152 & -4,1509 & -0,9656 & -0,0609 \\ -4,1509 & -2,2933 & -0,5337 & -0,0337 \\ -0,9656 & -0,5337 & -0,1243 & -0,0079 \\ -0,0609 & -0,0337 & -0,0079 & -0,0005 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (69)$$

### 3.2 Resultados de Simulação e Implementação

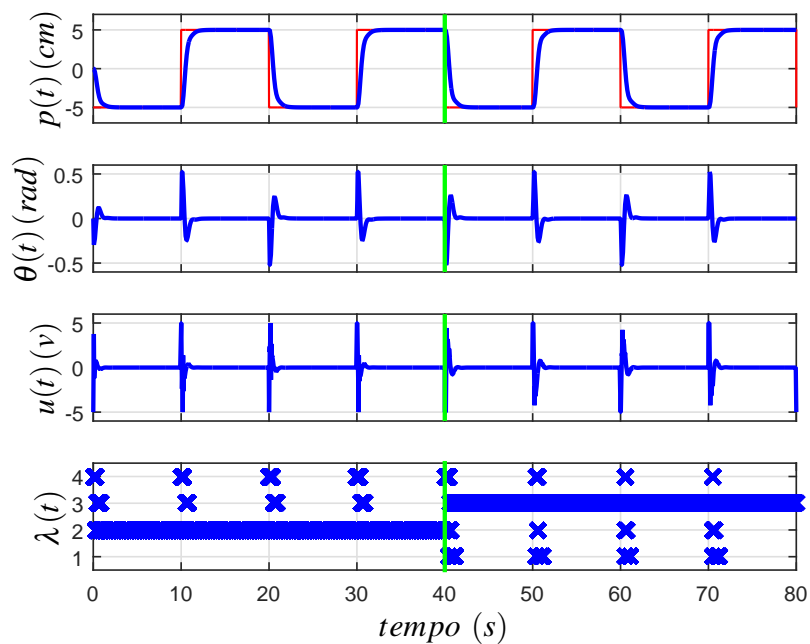
As simulações e a implementação foram feitas para o sistema *2DOF ball balancer* via *Simulink*<sup>®</sup>, com passo de 1 ms, sendo que as simulações utilizaram o solver ode3 (Bogacki-Shampine) e a implementação utilizou ode1 (Euler). Os controladores devem fazer com que a bola siga uma referência, que é uma trajetória quadrada de 10 cm de lado. Foi considerado que apenas  $p$  e  $\theta$  estão disponíveis, e que  $\dot{p}$  e  $\dot{\theta}$  são estimados por meio de filtros derivativos  $G_f(s) = 20s/(s+20)$ , como sugerido pela fabricante (QUANSER, 2008).

Adicionalmente, a entrada de controle  $u(t)$  é limitada em  $\pm 5V$  através de um saturador, inserido via *Simulink*<sup>®</sup>, que seria usado em implementação para não danificar o

atuador. Aos 40 segundos foi inserido uma falha no atuador de  $-50\%$ .

Os resultados de simulação utilizando o controlador chaveado (49), considerando os ganhos (67) e as matrizes (68) e (69), projetados com o Teorema 4 estão nas Figuras 22 a 27.

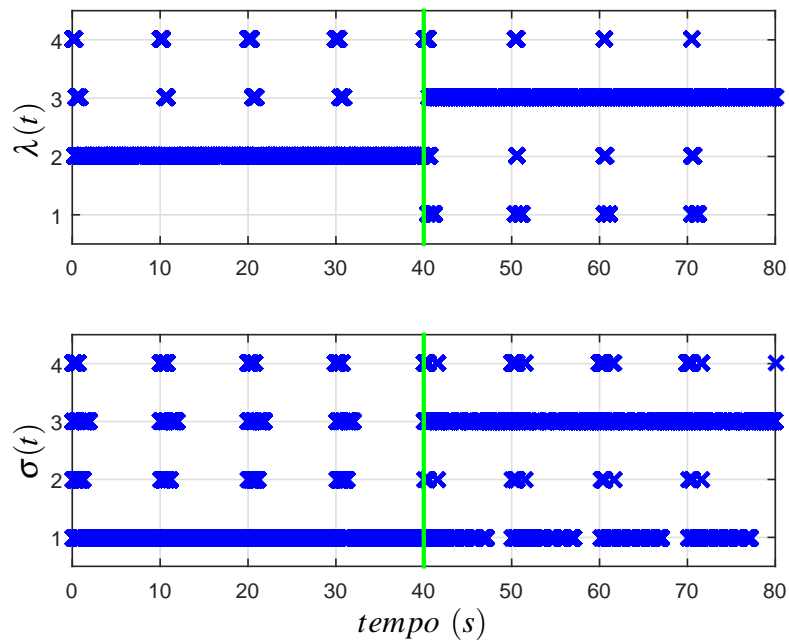
Figura 22 - Simulação do sistema *2DOF ball balancer*, descrito por (2), (42), (43) e (47), utilizando o controlador (49) com  $\psi = 2,5$  e  $\beta = 0$ , considerando (67), (68) e (69).



Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 23 mostra os valores de  $\lambda(t)$  (ganho utilizado no método anti-*chattering*) e  $\sigma(t)$  (o ganho que seria escolhido caso não fosse empregado o método anti-*chattering*):

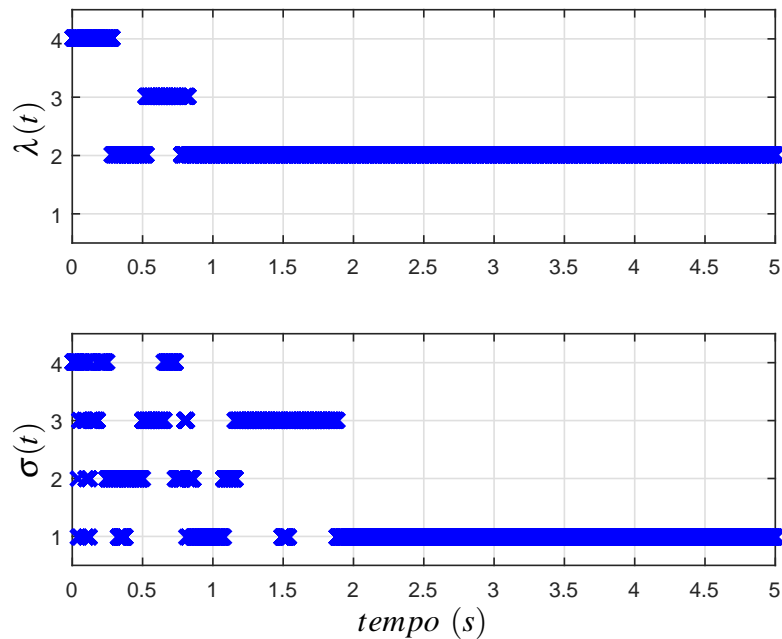
Figura 23 -  $\lambda(t)$  e  $\sigma(t)$  do sistema *2DOF ball balancer*, descrito por (2), (42), (43) e (47), utilizando o controlador (49), considerando (67), (68) e (69).



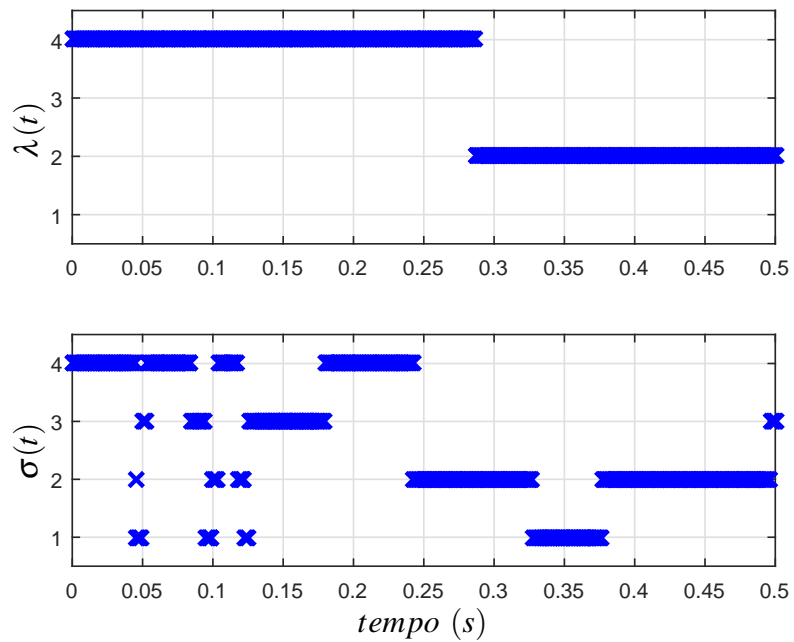
Fonte: Elaboração do autor.

Para facilitar a visualização, as Figuras 24 a 27 mostram a ampliação da Figura 23.

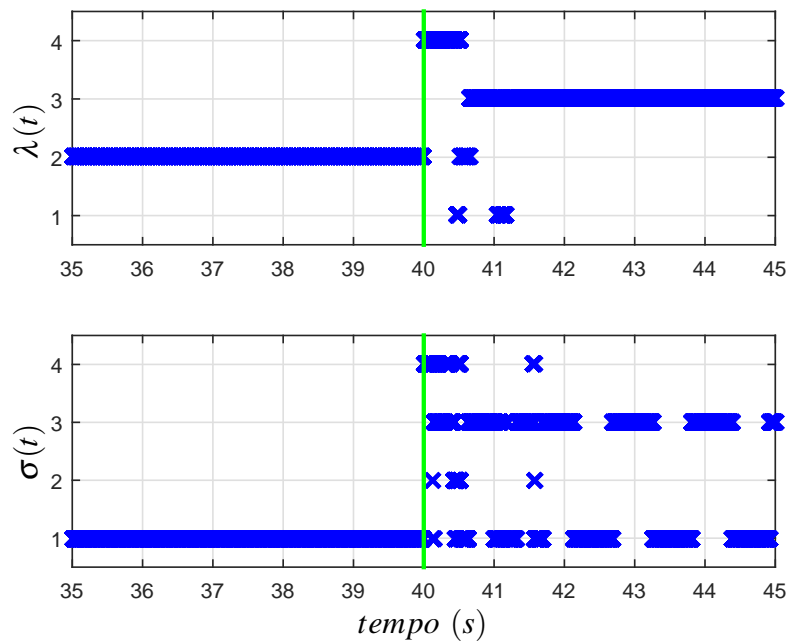
Figura 24 -  $\lambda(t)$  e  $\sigma(t)$  do sistema *2DOF ball balancer*, no período entre 0 e 5 segundos.



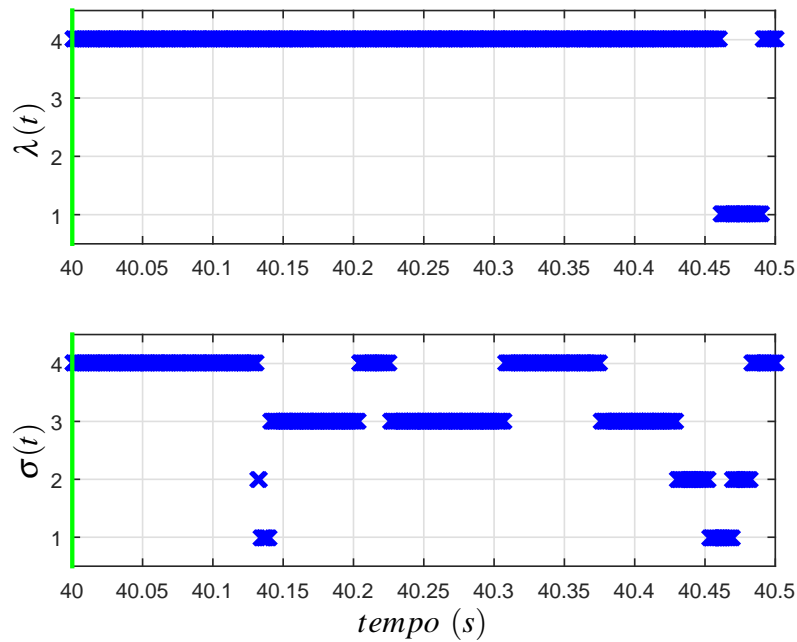
Fonte: Elaboração do autor.

Figura 25 -  $\lambda(t)$  e  $\sigma(t)$  do sistema *2DOF ball balancer*, no período entre 0 e 0,5 segundos.

Fonte: Elaboração do autor.

Figura 26 -  $\lambda(t)$  e  $\sigma(t)$  do sistema *2DOF ball balancer*, no período entre 35 e 45 segundos.

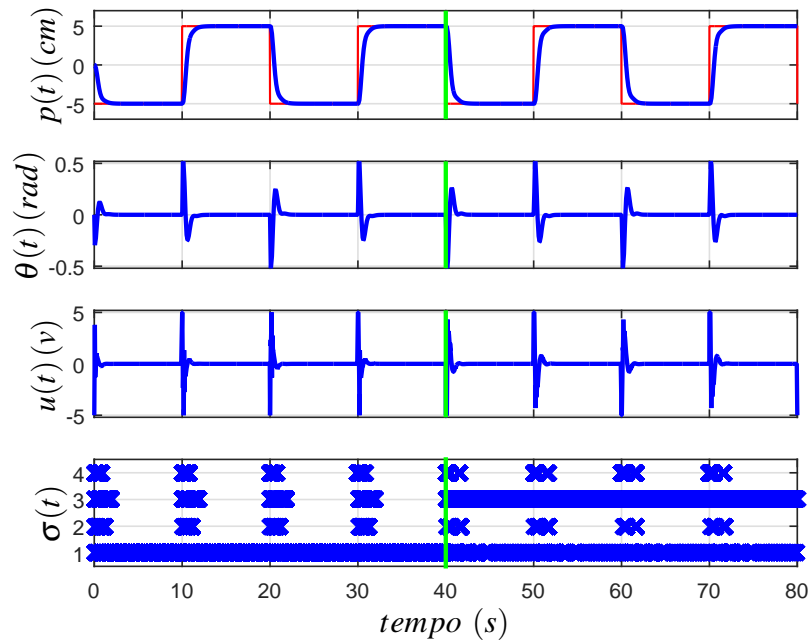
Fonte: Elaboração do autor.

Figura 27 -  $\lambda(t)$  e  $\sigma(t)$  do sistema *2DOF ball balancer*, no período entre 40 e 40,5 segundos.

Fonte: Elaboração do autor.

Um problema do método é que  $\psi$  limita o valor da taxa de decaimento  $\beta$  que o projetista pode escolher, atuando de forma similar à taxa de decaimento apenas quando  $\lambda = \sigma$ , podendo assim fazer o sistema perder desempenho conforme  $x(t)^T P^{-1} Q_\lambda P^{-1} x(t)$  se distancia de  $x(t)^T P^{-1} Q_\sigma P^{-1} x(t)$ . Para efeito de comparação, será apresentada uma simulação com as mesmas considerações feitas nas Figuras 22 a 27, mas com  $\beta = 2,5$  e  $\psi = 0$  (note que o Teorema 4 é igual ao Teorema 2, que não utiliza *anti-chattering*, quando  $\psi = 0$ ). A LMI (51) utiliza o termo  $2(\beta + \psi)P$ , o que faz com que a nova simulação utilize os mesmo ganhos e matrizes apresentados em (67), (68) e (69), mudando apenas a regra de chaveamento.

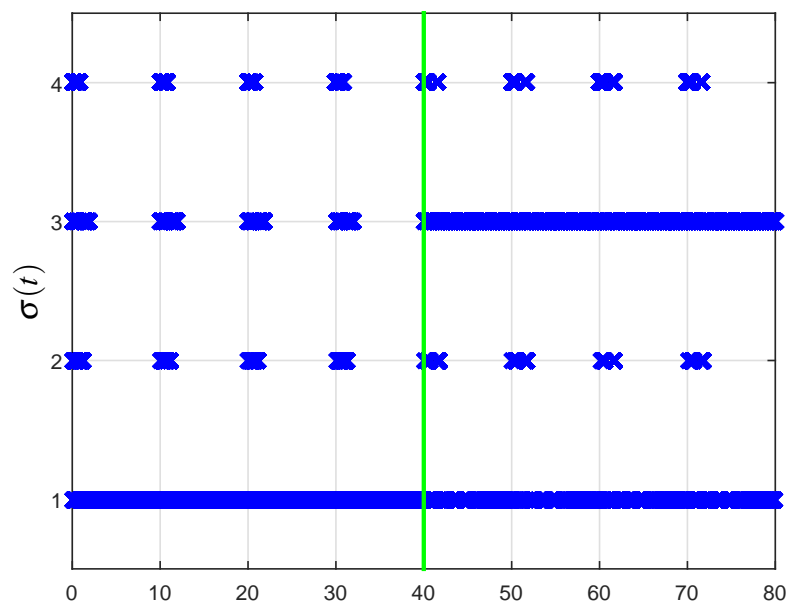
Figura 28 - Simulação do sistema *2DOF ball balancer*, descrito por (2), (42), (43) e (47), utilizando o controlador (49) com  $\psi = 0$  e  $\beta = 2,5$ , considerando (67), (68) e (69).



Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 29 mostra o chaveamento  $\sigma(t)$  do sistema:

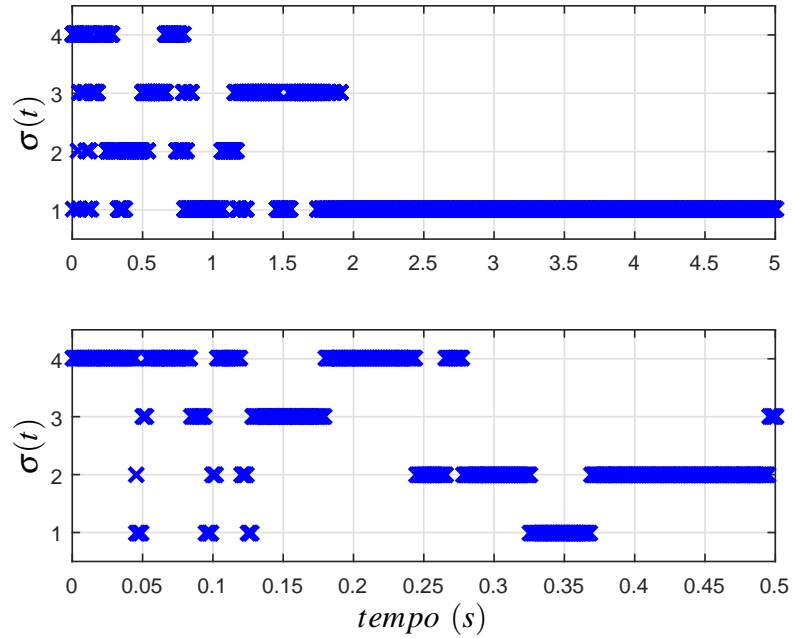
Figura 29 -  $\sigma(t)$  do sistema *2DOF ball balancer*, descrito por (2), (42), (43) e (47), utilizando o controlador (49), considerando (67), (68) e (69).



Fonte: Elaboração do autor.

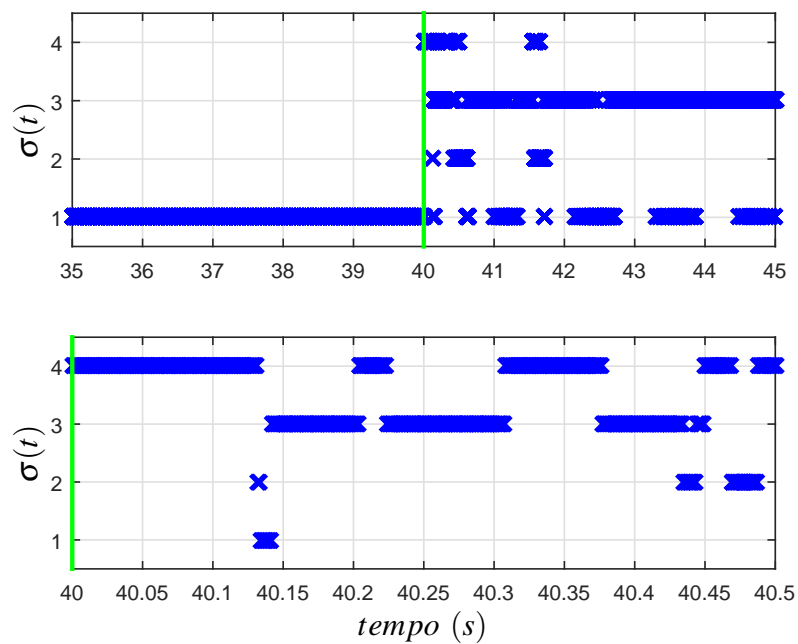
Para facilitar a visualização, as Figuras 30 e 31 mostram a ampliação da Figura 29.

Figura 30 -  $\sigma(t)$  do sistema *2DOF ball balancer*, nos períodos entre 0 e 5 segundos e 0 e 0,5 segundos.



Fonte: Elaboração do autor.

Figura 31 -  $\sigma(t)$  do sistema *2DOF ball balancer*, no período entre 35 e 45 segundos e 40 e 40,5 segundos.

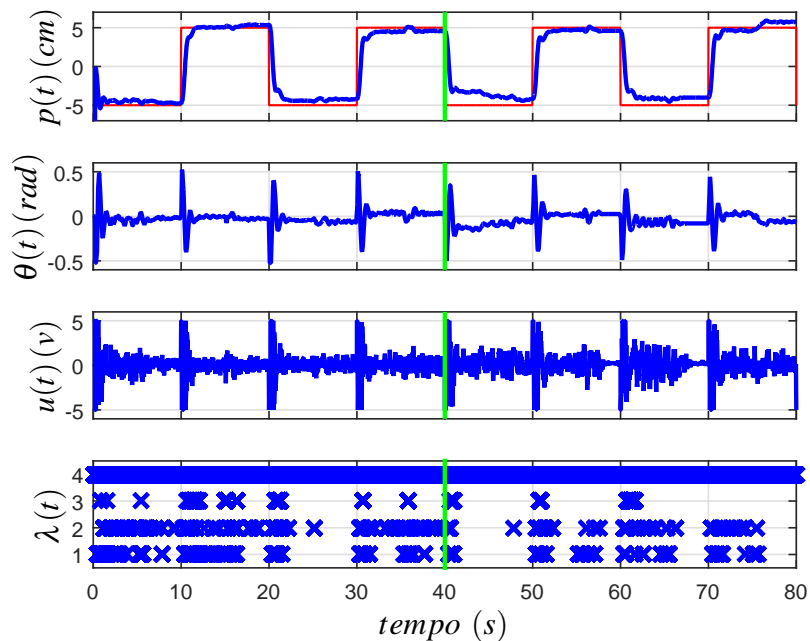


Fonte: Elaboração do autor.

Comparando os resultados apresentados nas Figuras 22 a 27 com os apresentados em Figuras 28 a 31, é possível ver que ambos tiveram bom desempenho, mas o controlador que utilizou a regra de controle anti-*chattering* precisou chavear menos. No controlador que utilizou o método anti-*chattering*, com  $\psi = 2,5$  e  $\beta = 0$ , apresentados nas Figuras 22 a 27, houve 56 comutações em  $\lambda(t)$  e 256 comutações em  $\sigma(t)$ , enquanto no controlador sem anti-*chattering*, com  $\beta = 2,5$ , apresentado nas Figuras 28 a 31, houve 2028 comutações em  $\sigma(t)$ , demonstrando que o método diminuiu o número necessário de comutações no ganho do sistema controlado.

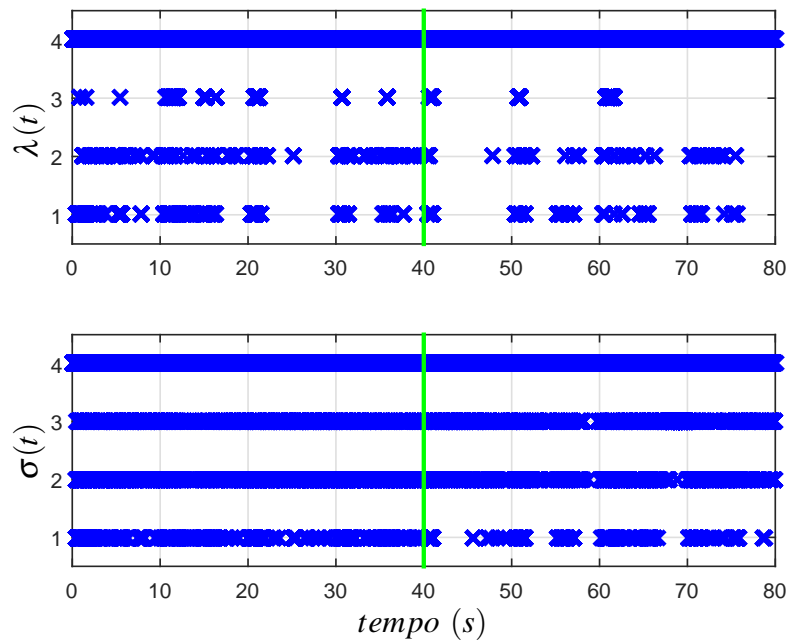
Para comprovar a eficácia do método o controlador projetado foi implementado em bancada no sistema *2DOF ball balancer*, as Figuras 32 a 37 mostram os resultados do eixo  $x$  e as Figuras 38 a 43 mostram os resultados do eixo  $y$ .

Figura 32 - Eixo  $x$  da implementação no sistema *2DOF ball balancer*, descrito por (2), (42), (43) e (47), utilizando o controlador (49) com  $\psi = 2,5$  e  $\beta = 0$ , considerando (67), (68) e (69).



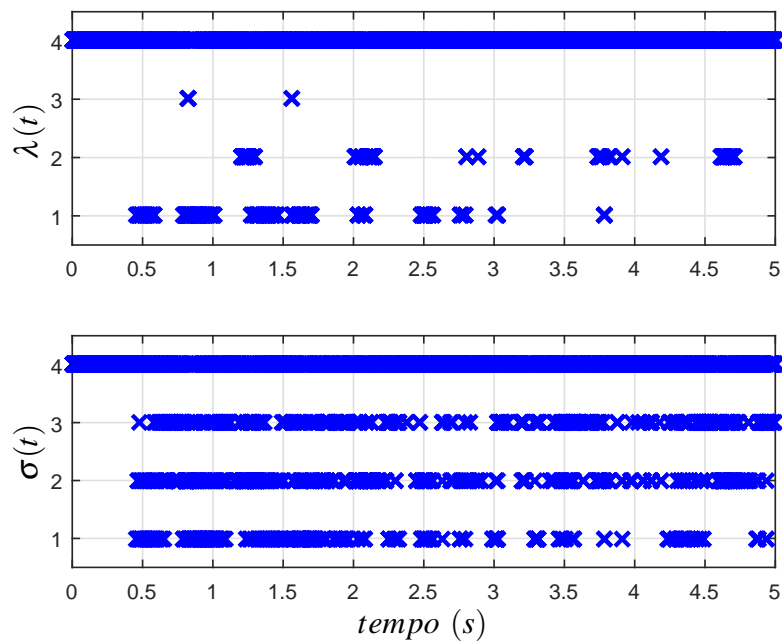
Fonte: Elaboração do autor.

Figura 33 - Eixo x:  $\lambda(t)$  e  $\sigma(t)$  do sistema *2DOF ball balancer*, descrito por (2), (42), (43) e (47), utilizando o controlador (49), considerando (67), (68) e (69).



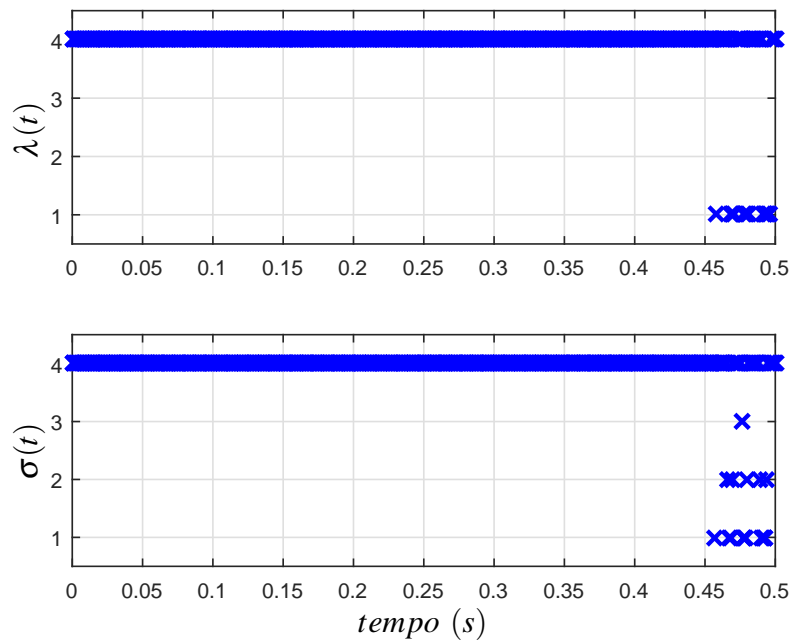
Fonte: Elaboração do autor.

Figura 34 - Eixo x:  $\lambda(t)$  e  $\sigma(t)$  do sistema *2DOF ball balancer*, no período entre 0 e 5 segundos.



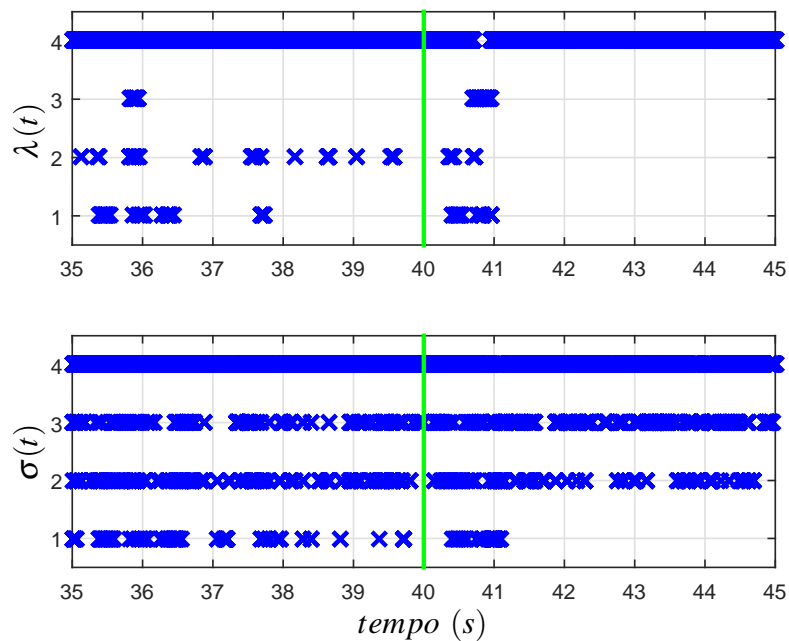
Fonte: Elaboração do autor.

Figura 35 - Eixo x:  $\lambda(t)$  e  $\sigma(t)$  do sistema *2DOF ball balancer*, no período entre 0 e 0,5 segundos.



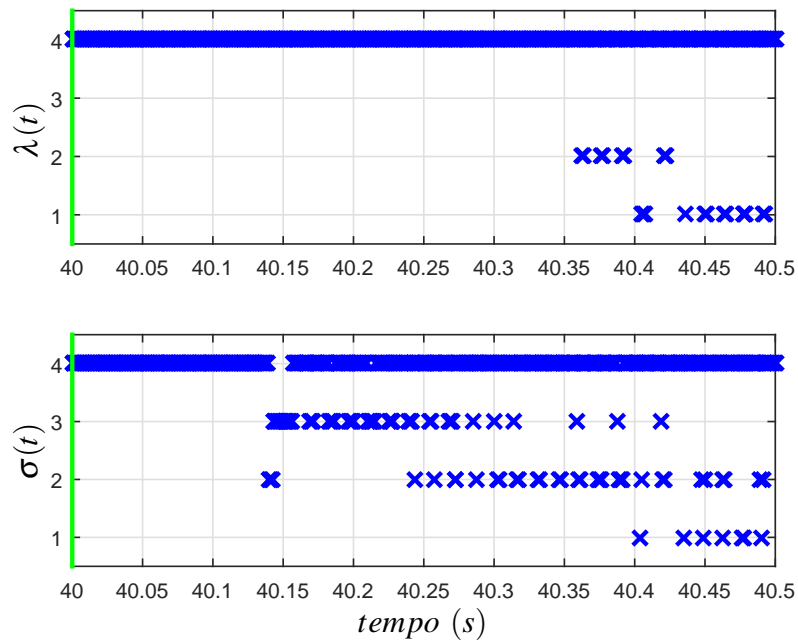
Fonte: Elaboração do autor.

Figura 36 - Eixo x:  $\lambda(t)$  e  $\sigma(t)$  do sistema *2DOF ball balancer*, no período entre 35 e 45 segundos.



Fonte: Elaboração do autor.

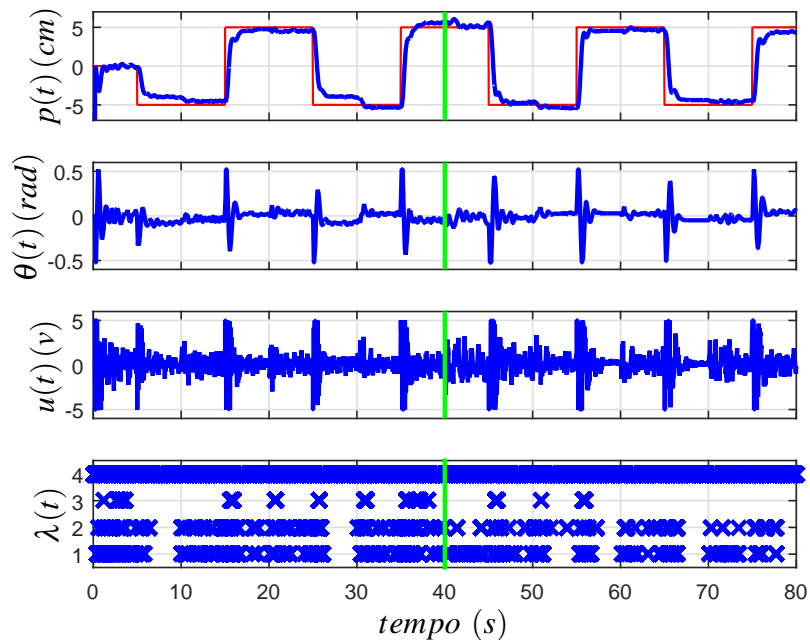
Figura 37 - Eixo  $x$ :  $\lambda(t)$  e  $\sigma(t)$  do sistema  $2DOF$  ball balancer, no período entre 40 e 40,5 segundos.



Fonte: Elaboração do autor.

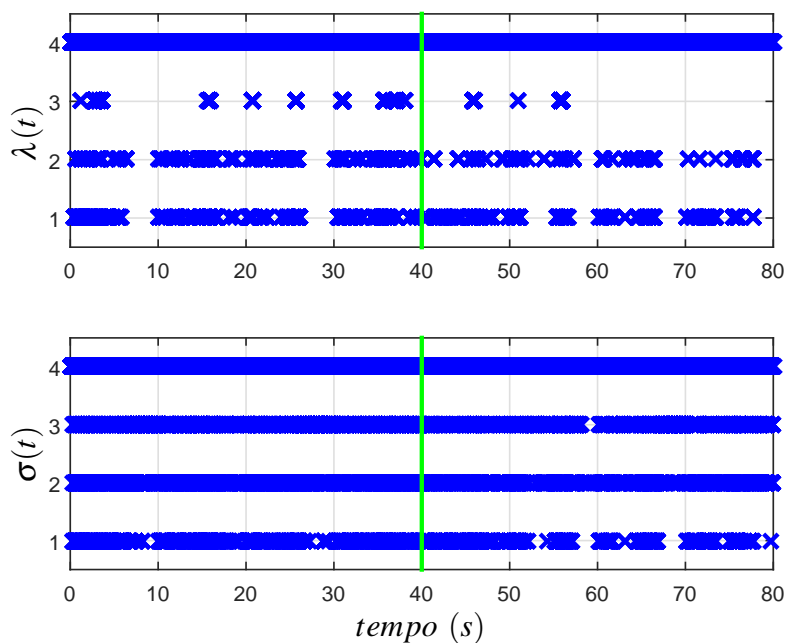
No eixo  $x$  foram feitas 1057 comutações em  $\lambda(t)$  e 6768 em  $\sigma(t)$ . A seguir será mostrado o resultado no eixo  $y$ .

Figura 38 - Eixo  $y$  da implementação no sistema  $2DOF$  ball balancer, descrito por (2), (42), (43) e (47), utilizando o controlador (49) com  $\psi = 2,5$  e  $\beta = 0$ , considerando (67), (68) e (69).



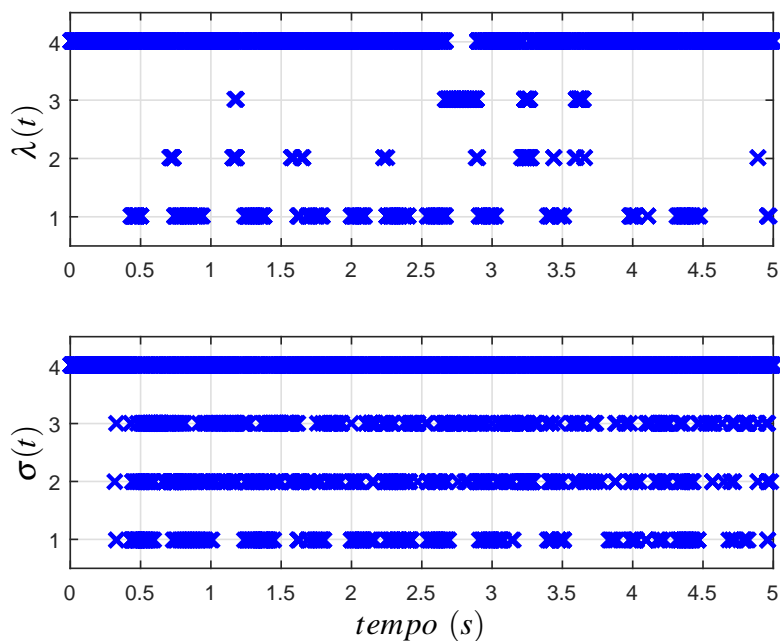
Fonte: Elaboração do autor.

Figura 39 - Eixo  $y$ :  $\lambda(t)$  e  $\sigma(t)$  do sistema  $2DOF$  ball balancer, descrito por (2), (42), (43) e (47), utilizando o controlador (49), considerando (67), (68) e (69).



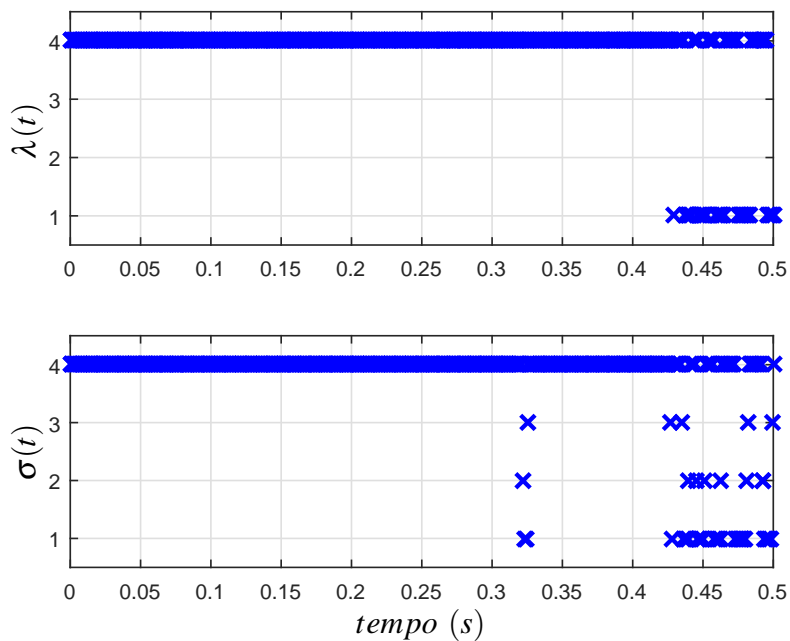
Fonte: Elaboração do autor.

Figura 40 - Eixo y:  $\lambda(t)$  e  $\sigma(t)$  do sistema *2DOF ball balancer*, no período entre 0 e 5 segundos.



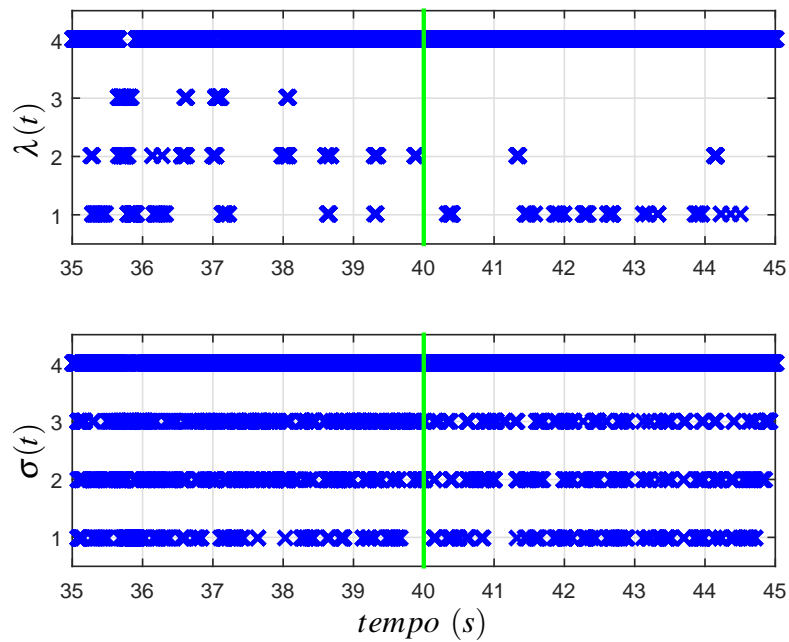
Fonte: Elaboração do autor.

Figura 41 - Eixo y:  $\lambda(t)$  e  $\sigma(t)$  do sistema *2DOF ball balancer*, no período entre 0 e 0,5 segundos.



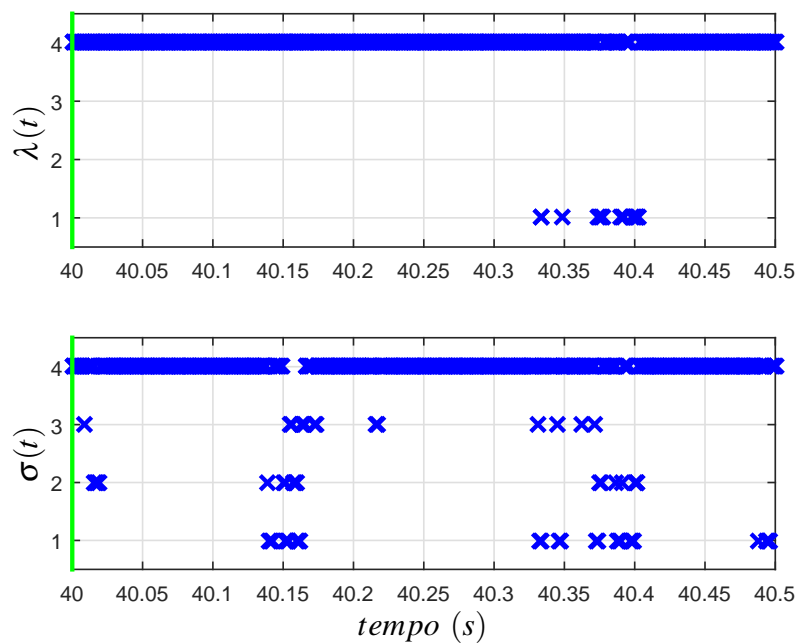
Fonte: Elaboração do autor.

Figura 42 - Eixo  $y$ :  $\lambda(t)$  e  $\sigma(t)$  do sistema  $2DOF$  ball balancer, no período entre 35 e 45 segundos.



Fonte: Elaboração do autor.

Figura 43 - Eixo  $y$ :  $\lambda(t)$  e  $\sigma(t)$  do sistema  $2DOF$  ball balancer, no período entre 40 e 40,5 segundos.



Fonte: Elaboração do autor.

Foram feitas 1491 comutações em  $\lambda(t)$  e 7731 comutações em  $\sigma(t)$  no eixo  $y$ . É possível ver nas Figuras 32 a 43 e pelo número de comutações apresentados em ambos os eixos que o método obteve sucesso em diminuir o número de comutações necessário no ganho do controlador para garantir a estabilidade do sistema.

### 3.3 Considerações

Os controladores chaveados apresentam maior flexibilidade que os controladores com ganho constante, mas podem trazer alguns problemas caso exijam que o chaveamento ocorra em uma frequência muito alta, como uma possível incapacidade do controlador chavear na velocidade em que o sistema exige, desgaste dos aparelhos e *chattering* no sinal de controle. O método de controle chaveado apresentado na Teoria 4 propõe diminuir a frequência de chaveamento para evitar os problemas citados e deixar o sistema globalmente assintoticamente estável. O Teorema 5 mostra que o controlador projetado utilizando o Teorema 4 não terá problemas de *chattering*. Foram feitas simulações em um sistema *2DOF ball balancer*, comparando o controlador chaveado sem a teoria anti-*chattering* com um controlado que utiliza a teoria anti-*chattering*, comprovando que de fato o método proposto reduz a frequência de chaveamento sem perder desempenho. O método proposto foi também implementado em bancada em um sistema *2DOF ball balancer* para comprovar sua eficácia na prática.

#### 4 ESTABILIDADE ASSINTÓTICA DO PONTO DE EQUILÍBRIO VIA CONTROLE CHAVEADO SEM *CHATTERING* UTILIZANDO MÚLTIPLAS FUNÇÕES DE LYAPUNOV NÃO QUADRÁTICAS

Neste capítulo será apresentado um procedimento que utiliza a teoria de controle robusto chaveado com múltiplas matrizes definidas positivas na função de Lyapunov, proposta no Capítulo 2, em conjunto com o novo método de projeto referente à teoria anti-*chattering*, descrito no Capítulo 3. Desta forma, será proposta uma lei de controle com condições de projeto mais relaxadas, descrita no Capítulo 2, e agora também sem a existência de *chattering* no sinal de controle e no chaveamento dos ganhos, devido à estrutura estabelecida no Capítulo 3.

##### 4.1 Conceitos Teóricos

Considerando o sistema descrito por modelos fuzzy Takagi-Sugeno:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ u(t) &= \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s h_k^-(t) v_l(t) M_{\lambda kl} \left( \sum_{l=1}^s v_l P \right)^{-1} x(t),\end{aligned}\quad (70)$$

sendo que  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  são matrizes incertas descritas em (2),  $h_k^-(t)$  e  $v_l(t)$  são escalares definidos em (4) e  $P_l > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .  $M_{\lambda kl}$  é o ganho chaveado com a lei de chaveamento:

$$\sigma = \underset{i \in \mathbb{K}_s}{\operatorname{arg\,min}} \{x(t)^T \mathbb{P}^{-1} \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s h_k^-(t) v_l(t) Q_{ikl} \mathbb{P}^{-1} x(t)\},$$

$$\lambda = \begin{cases} \sigma, & \text{em } t = 0, \\ \sigma, & \text{se } x(t)^T \mathbb{P}^{-1} \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s h_k^-(t) v_l(t) \mathcal{Q}_{\sigma kl} \mathbb{P}^{-1} x(t) \\ & - x(t)^T \mathbb{P}^{-1} \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s h_k^-(t) v_l(t) \mathcal{Q}_{\lambda kl} \mathbb{P}^{-1} x(t) + 2\psi x(t)^T \mathbb{P}^{-1} x(t) \leq 0 \text{ e } t > 0, \\ \text{não muda, se } & x(t)^T \mathbb{P}^{-1} \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s h_k^-(t) v_l(t) \mathcal{Q}_{\sigma kl} \mathbb{P}^{-1} x(t) \\ & - x(t)^T \mathbb{P}^{-1} \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s h_k^-(t) v_l(t) \mathcal{Q}_{\lambda kl} \mathbb{P}^{-1} x(t) + 2\psi x(t)^T \mathbb{P}^{-1} x(t) > 0 \text{ e } t > 0, \end{cases} \quad (71)$$

O escalar  $\psi$  é um parâmetro de projeto e é utilizado para especificar o erro máximo que o sistema deve tolerar até a troca de  $\lambda(t)$ . Valores maiores de  $\psi$  farão o sistema precisar chavear menos, mas tornará o projeto de controle mais conservador.

Se  $x(t)^T \mathbb{P}^{-1} \mathcal{Q}_{\lambda kl} \mathbb{P}^{-1} x(t) < x(t)^T \mathbb{P}^{-1} \mathcal{Q}_{\sigma kl} \mathbb{P}^{-1} x(t) + 2\psi x(t)^T \mathbb{P}^{-1} x(t)$ , então o ganho não muda. Assim, dado um instante  $t_n$  em que  $\lambda(t_n) = \sigma(t_n)$ , mantém  $\lambda(t) = \lambda(t_n) = \sigma(t_n)$  até que o erro  $x^T(t_{n+1}) \mathbb{P}^{-1} (\mathcal{Q}_{\sigma kl} - \mathcal{Q}_{\lambda kl}) \mathbb{P}^{-1} x(t_{n+1}) \leq -2\psi x^T(t_{n+1}) \mathbb{P}^{-1} x(t_{n+1})$ , quando será atualizado o valor de  $\lambda(t)$  para  $\lambda(t_{n+1}) = \sigma(t_{n+1})$ . O processo de chaveamento é similar ao apresentado no Capítulo 3, podendo ser visualizado no fluxograma da Figura 21.

A matriz simétrica positiva  $\mathbb{P} > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e a sua derivada  $\dot{\mathbb{P}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  são descritas como:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} &= \sum_{l=1}^s v_l(t) P_l, \\ \dot{\mathbb{P}} &= \sum_{l=1}^s \dot{v}_l(t) P_l = \frac{1}{\zeta} \left( \sum_{j=1}^s h_j(t) P_j - \sum_{k=1}^s h_k^-(t) P_k \right), \end{aligned} \quad (72)$$

O método de controle utiliza a candidata a função de Lyapunov do tipo não-quadrático

$$\begin{aligned} V(x(t)) &= x(t)^T \mathbb{P}^{-1} x(t) = x(t)^T \left( \sum_{l=1}^s v_l(t) P_l \right)^{-1} x(t), \\ \dot{V}(x(t)) &= \dot{x}(t)^T \mathbb{P}^{-1} x(t) + x(t)^T \mathbb{P}^{-1} \dot{x}(t) + x(t)^T \left( \frac{d}{dt} \mathbb{P}^{-1} \right) x(t) \\ &= x(t)^T \left[ A^T \mathbb{P}^{-1} + \sum_{k=1}^s \sum_{v=1}^s h_k^-(t) v_l(t) \mathbb{P}^{-1} M_{\lambda kl}^T B^T \mathbb{P}^{-1} + \mathbb{P}^{-1} A \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^s \sum_{v=1}^s h_k^-(t) v_l(t) \mathbb{P}^{-1} B M_{\lambda kl} \mathbb{P}^{-1} + \left( \frac{d}{dt} \mathbb{P}^{-1} \right) \right] x(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x(t)^T [\mathbb{P}^{-1} \sum_{i=1}^s \alpha_i(t) A_i + \mathbb{P}^{-1} \sum_{i=1}^s \alpha_i(t) B_i \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s h_k^-(t) v_l(t) M_{\lambda kl} \mathbb{P}^{-1} + \sum_{i=1}^s \alpha_i(t) A_i^T \mathbb{P}^{-1} \\
&+ \mathbb{P}^{-1} \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s h_k^-(t) v_l(t) M_{\lambda kl}^T \sum_{i=1}^s \alpha_i(t) B_i^T \mathbb{P}^{-1} + (\frac{d}{dt} \mathbb{P}^{-1})] x(t). \quad (73)
\end{aligned}$$

O desenvolvimento da derivada da candidata a função de Lyapunov apresentado em (73) é próprio do método proposto nesse trabalho, considerando (2), (4), (72) e a lei de chaveamento (71).

**Teorema 6.** *O ponto de equilíbrio  $x(t) = 0$  do sistema controlado descrito em (70), com a lei de chaveamento dada em (71), considerando que os parâmetros  $\alpha_i(t)$ ,  $i \in \mathbb{K}_s$  em (2) são incertos, é globalmente assintoticamente estável, com taxa de decaimento definida pelo escalar  $\beta$ , se as seguintes LMIs forem satisfeitas:*

$$A_i P_l + B_i M_{jkl} + P_l A_i^T + M_{jkl}^T B_i^T - \frac{1}{\zeta} (P_j - P_k) - Z_{ikl} - Q_{jkl} + 2(\beta + \psi) P_l < 0, \quad (74)$$

$$Z_{ikl} + Q_{ikl} \leq 0, \quad (75)$$

sendo  $P_l \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrizes simétricas positivas definidas,  $Z_{ikl}, Q_{jkl} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrizes simétricas,  $M_{jkl} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $i, j, k, l \in \mathbb{K}_s$ , em que  $\psi$  é uma constante positiva e  $s$  é o número de vértices do politopo apresentado em (2), que descreve o modelo matemático da planta.

**Prova:** Pré e pós multiplicando (74) e (75) por  $x(t)^T (\sum_{l=1}^s v_l(t) P_l)^{-1} \alpha_i(t) h_j(t) h_k^-(t) v_l(t)$  e  $(\sum_{l=1}^s v_l(t) P_l)^{-1} x(t)$  respectivamente e tomando a soma de  $i = 1$  a  $s$ ,  $j = 1$  a  $s$ ,  $k = 1$  a  $s$  e  $l = 1$  a  $s$ , obtém-se para  $x(t) \neq 0$ :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s \alpha_i(t) h_j(t) h_k^-(t) v_l(t) x(t)^T [(\sum_{l=1}^s v_l(t) P_l)^{-1} A_i \\
&\quad + (\sum_{l=1}^s v_l(t) P_l)^{-1} B_i M_{jkl} (\sum_{l=1}^s v_l(t) P_l)^{-1} + A_i^T (\sum_{l=1}^s v_l(t) P_l)^{-1} \\
&\quad + (\sum_{l=1}^s v_l(t) P_l)^{-1} M_{jkl}^T B_i^T (\sum_{l=1}^s v_l(t) P_l)^{-1} - (\sum_{l=1}^s v_l(t) P_l)^{-1} \frac{1}{\zeta} (P_j - P_k) (\sum_{l=1}^s v_l(t) P_l)^{-1} \\
&\quad - (\sum_{l=1}^s v_l(t) P_l)^{-1} (Z_{ikl} + Q_{jkl}) (\sum_{l=1}^s v_l(t) P_l)^{-1} + 2(\beta + \psi) (\sum_{l=1}^s v_l(t) P_l)^{-1}] x(t) < 0, \quad (76)
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s \alpha_i(t) h_j(t) h_k^-(t) v_l(t) x(t)^T (\sum_{l=1}^s v_l(t) P_l)^{-1} (Z_{ikl} + Q_{ikl}) (\sum_{l=1}^s v_l(t) P_l)^{-1} x(t) \leq 0. \quad (77)$$

Lembrando de (72) que  $\mathbb{P} = \sum_{l=1}^s v_l(t)P_l$ ,  $\mathbb{P}^{-1} = (\sum_{l=1}^s v_l(t)P_l)^{-1}$ ,  $\dot{\mathbb{P}} = \frac{1}{\zeta}(\sum_{j=1}^s h_j(t)P_j - \sum_{k=1}^s h_k^-(t)P_k)$  e que  $\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s \alpha_i(t)h_j(t)h_k^-(t)v_l(t) = 1$ , então (76) e (77) podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned} x(t)^T & (\mathbb{P}^{-1} \sum_{i=1}^s \alpha_i(t)A_i + \mathbb{P}^{-1} \sum_{i=1}^s \alpha_i(t)B_i \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s h_j(t)h_k^-(t)v_l(t)M_{jkl}\mathbb{P}^{-1} + \sum_{i=1}^s \alpha_i(t)A_i^T\mathbb{P}^{-1} \\ & + \mathbb{P}^{-1} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s h_j(t)h_k^-(t)v_l(t)M_{jkl}^T \sum_{i=1}^s \alpha_i(t)B_i^T\mathbb{P}^{-1} - \mathbb{P}^{-1}\dot{\mathbb{P}}\mathbb{P}^{-1} \\ & - \mathbb{P}^{-1} \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s \alpha_i(t)h_k^-(t)v_l(t)Z_{ikl}\mathbb{P}^{-1} - \mathbb{P}^{-1} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s h_j(t)h_k^-(t)v_l(t)Q_{jkl}\mathbb{P}^{-1} \\ & + 2(\beta + \psi)\mathbb{P}^{-1})x(t) < 0, \end{aligned} \quad (78)$$

$$x(t)^T \mathbb{P}^{-1} \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s (Z_{ikl} + Q_{ikl})\mathbb{P}^{-1} x(t) \leq 0. \quad (79)$$

A partir de (78) e (79), considerando (2), (4), (13), (72), a candidata a função de Lyapunov (73) e a lei de chaveamento (71), para  $x(t) \neq 0$  tem-se que:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) + 2\beta V(x(t)) & = x(t)^T \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s h_k^-(t)v_l(t)(\mathbb{P}^{-1}A + \mathbb{P}^{-1}BM_{\lambda kl}\mathbb{P}^{-1} \\ & + A^T\mathbb{P}^{-1} + \mathbb{P}^{-1}M_{\lambda kl}^T B^T\mathbb{P}^{-1} + (\frac{d}{dt}\mathbb{P}^{-1}) + 2\beta\mathbb{P}^{-1})x(t) \\ & = x(t)^T [(\sum_{l=1}^s v_l(t)P_l)^{-1} \sum_{i=1}^s \alpha_i(t)A_i + \sum_{i=1}^s \alpha_i(t)A_i^T (\sum_{l=1}^s v_l(t)P_l)^{-1} \\ & + (\sum_{l=1}^s v_l(t)P_l)^{-1} \sum_{i=1}^s \alpha_i(t)B_i \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s h_k^-(t)v_l(t)M_{\lambda kl} (\sum_{l=1}^s v_l(t)P_l)^{-1} \\ & + (\sum_{l=1}^s v_l(t)P_l)^{-1} \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s h_k^-(t)v_l(t)M_{\lambda kl}^T \sum_{i=1}^s \alpha_i(t)B_i^T (\sum_{l=1}^s v_l(t)P_l)^{-1} \\ & + (\frac{d}{dt}\mathbb{P}^{-1}) + 2\beta(\sum_{l=1}^s v_l(t)P_l)^{-1}]x(t) \\ & < x(t)^T [\mathbb{P}^{-1} \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s \alpha_i(t)h_k^-(t)v_l(t)(Z_{ikl} + Q_{\lambda kl})\mathbb{P}^{-1} - 2\psi\mathbb{P}^{-1}]x(t). \end{aligned} \quad (80)$$

Lembrando da lei de chaveamento (71), de forma análoga à análise realizada para as condições dadas em (50) para a lei de chaveamento (49), tem-se que  $x(t)^T \mathbb{P}^{-1} \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s$

$h_k^-(t)v_l(t)Q_{\lambda kl}\mathbb{P}^{-1}x(t) \leq x(t)^T[\mathbb{P}^{-1}\sum_{k=1}^s\sum_{l=1}^s h_k^-(t)v_l(t)Q_{\sigma kl}\mathbb{P}^{-1} + 2\psi\mathbb{P}^{-1}]x(t)$ . Então, para  $x(t) \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) + 2\beta V(x(t)) &< x(t)^T[\mathbb{P}^{-1}\sum_{i=1}^s\sum_{k=1}^s\sum_{l=1}^s \alpha_i(t)h_k^-(t)v_l(t)(Z_{ikl} + Q_{\lambda kl})\mathbb{P}^{-1} - 2\psi\mathbb{P}^{-1}]x(t) \\ &\leq x(t)^T\mathbb{P}^{-1}\sum_{i=1}^s\sum_{k=1}^s\sum_{l=1}^s \alpha_i(t)h_k^-(t)v_l(t)Z_{ikl}\mathbb{P}^{-1}x(t) \\ &+ \min_{j \in \mathbb{K}_s} \{x(t)^T\mathbb{P}^{-1}\sum_{k=1}^s\sum_{l=1}^s h_k^-(t)v_l(t)Q_{jkl}\mathbb{P}^{-1}x(t)\} \\ &\leq x(t)^T\mathbb{P}^{-1}\sum_{i=1}^s\sum_{k=1}^s\sum_{l=1}^s \alpha_i(t)h_k^-(t)v_l(t)(Z_{ikl} + Q_{ikl})\mathbb{P}^{-1}x(t) \leq 0. \end{aligned} \quad (81)$$

E assim fica concluída a prova.  $\square$

O Teorema 5, que prova que o método *anti-chattering* consegue de fato evitar *chattering* no sinal de controle, é válido também para o Teorema 6.

## 4.2 Projeto de controle

Foram feitos dois projetos de controle utilizando o Teorema 6, com lei de chaveamento (71). O primeiro projeto controla um sistema fictício apresentado em (MÁRQUEZ *et al.*, 2016), que por ser difícil de controlar é adequado para verificar o conservadorismo do método. O segundo projeto foi criado para controlar um sistema *2DOF ball balancer*, com o intuito de implementar em bancada para mostrar a eficácia do método na prática.

### 4.2.1 Projeto do primeiro sistema

O sistema pode ser representado por modelo fuzzy Takagi-Sugeno (70) e (2), sendo:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 1,59 & -7,29 \\ 0,01 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0,02 & -4,64 \\ 0,35 & 0,21 \end{bmatrix}, \\ A_3 &= \begin{bmatrix} -a & -4,33 \\ 0 & 0,05 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0,89 & -5,29 \\ 0,1 & 0 \end{bmatrix}, \\ B_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} -b+6 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (82)$$

com  $a = 2$  e  $b = 0,5$ . É possível ver na Figura 1 do Capítulo 2 que o sistema escolhido está fora da área de factibilidade da teoria que utiliza  $P$  constante (Teorema 2). O controlador foi projetado utilizando  $\psi = 0,01$ ,  $\beta = 0$  e  $\zeta = 0,1$  segundo. Foram obtidos como solução das LMIs (74) e (75), os vetores  $M_{jkl}$ , matrizes simétricas definidas positivas  $P_j$  e matrizes simétricas  $Q_{jkl}$  são apresentados a seguir:

$$\begin{aligned}
[M_{111}|M_{112}] &= \begin{bmatrix} -2,7796 & 0,2404 & | & -2,6208 & 0,2061 \end{bmatrix}, \\
[M_{113}|M_{114}] &= \begin{bmatrix} -2,5616 & 0,1963 & | & -2,6846 & 0,2239 \end{bmatrix}, \\
[M_{121}|M_{122}] &= \begin{bmatrix} -0,2281 & 0,0326 & | & -0,0938 & 0,0155 \end{bmatrix}, \\
[M_{123}|M_{124}] &= \begin{bmatrix} -0,0653 & 0,0091 & | & -0,1545 & 0,0225 \end{bmatrix}, \\
[M_{131}|M_{132}] &= \begin{bmatrix} -0,1912 & 0,0305 & | & -0,0753 & 0,0164 \end{bmatrix}, \\
[M_{133}|M_{134}] &= \begin{bmatrix} -0,0701 & 0,0138 & | & -0,1369 & 0,0221 \end{bmatrix}, \\
[M_{141}|M_{142}] &= \begin{bmatrix} -1,3305 & 0,1429 & | & -0,8411 & 0,0999 \end{bmatrix}, \\
[M_{143}|M_{144}] &= \begin{bmatrix} -0,7446 & 0,0900 & | & -1,1401 & 0,1237 \end{bmatrix}, \\
[M_{211}|M_{212}] &= \begin{bmatrix} -0,3615 & 0,0195 & | & -0,4129 & 0,0203 \end{bmatrix}, \\
[M_{213}|M_{214}] &= \begin{bmatrix} -0,4242 & 0,0185 & | & -0,3741 & 0,0211 \end{bmatrix}, \\
[M_{221}|M_{222}] &= \begin{bmatrix} -0,1649 & 0,0226 & | & -0,1235 & 0,0178 \end{bmatrix}, \\
[M_{223}|M_{224}] &= \begin{bmatrix} -0,1180 & 0,0152 & | & -0,1431 & 0,0190 \end{bmatrix}, \\
[M_{231}|M_{232}] &= \begin{bmatrix} -0,1584 & 0,0229 & | & -0,1064 & 0,0162 \end{bmatrix}, \\
[M_{233}|M_{234}] &= \begin{bmatrix} -0,1053 & 0,0147 & | & -0,1323 & 0,0179 \end{bmatrix}, \\
[M_{241}|M_{242}] &= \begin{bmatrix} -0,3025 & 0,0387 & | & -0,2783 & 0,0410 \end{bmatrix}, \\
[M_{243}|M_{244}] &= \begin{bmatrix} -0,2740 & 0,0404 & | & -0,2927 & 0,0387 \end{bmatrix}, \\
[M_{311}|M_{312}] &= \begin{bmatrix} -0,5716 & 0,0321 & | & -0,4826 & 0,0210 \end{bmatrix}, \\
[M_{313}|M_{314}] &= \begin{bmatrix} -0,5057 & 0,0213 & | & -0,5197 & 0,0257 \end{bmatrix}, \\
[M_{321}|M_{322}] &= \begin{bmatrix} -0,1667 & 0,0251 & | & -0,1031 & 0,0172 \end{bmatrix}, \\
[M_{323}|M_{324}] &= \begin{bmatrix} -0,0889 & 0,0132 & | & -0,1326 & 0,0200 \end{bmatrix}, \\
[M_{331}|M_{332}] &= \begin{bmatrix} -0,1726 & 0,0280 & | & -0,0736 & 0,0176 \end{bmatrix}, \\
[M_{333}|M_{334}] &= \begin{bmatrix} -0,0760 & 0,0152 & | & -0,1268 & 0,0211 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[M_{341}|M_{342}] &= \begin{bmatrix} -0,3141 & 0,0275 & | & -0,3102 & 0,0285 \end{bmatrix}, \\
[M_{343}|M_{344}] &= \begin{bmatrix} -0,3127 & 0,0281 & | & -0,3066 & 0,0271 \end{bmatrix}, \\
[M_{411}|M_{412}] &= \begin{bmatrix} -1,7299 & 0,1846 & | & -1,7002 & 0,1704 \end{bmatrix}, \\
[M_{413}|M_{414}] &= \begin{bmatrix} -1,7260 & 0,1660 & | & -1,6867 & 0,1758 \end{bmatrix}, \\
[M_{421}|M_{422}] &= \begin{bmatrix} -0,2354 & 0,0321 & | & -0,1233 & 0,0196 \end{bmatrix}, \\
[M_{423}|M_{424}] &= \begin{bmatrix} -0,1040 & 0,0150 & | & -0,1758 & 0,0245 \end{bmatrix}, \\
[M_{431}|M_{432}] &= \begin{bmatrix} -0,2112 & 0,0311 & | & -0,0938 & 0,0179 \end{bmatrix}, \\
[M_{433}|M_{434}] &= \begin{bmatrix} -0,0903 & 0,0157 & | & -0,1524 & 0,0228 \end{bmatrix}, \\
[M_{441}|M_{442}] &= \begin{bmatrix} -1,0562 & 0,1214 & | & -0,8188 & 0,0997 \end{bmatrix}, \\
[M_{443}|M_{444}] &= \begin{bmatrix} -0,7867 & 0,0942 & | & -0,9540 & 0,1103 \end{bmatrix}, \tag{83}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[P_1|P_2] &= \begin{bmatrix} 0,4642 & -0,0867 & | & 0,2036 & -0,0594 \\ -0,0867 & 0,0224 & | & -0,0594 & 0,0224 \end{bmatrix}, \\
[P_3|P_4] &= \begin{bmatrix} 0,1824 & -0,0542 & | & 0,3783 & -0,0752 \\ -0,0542 & 0,0218 & | & -0,0752 & 0,0221 \end{bmatrix}, \tag{84}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[Q_{111}|Q_{112}] &= \begin{bmatrix} -1,2503 & 0,1802 & | & -0,7812 & 0,1369 \\ 0,1802 & -0,0553 & | & 0,1369 & -0,0080 \end{bmatrix}, \\
[Q_{113}|Q_{114}] &= \begin{bmatrix} -0,6866 & 0,1290 & | & -1,1240 & 0,1642 \\ 0,1290 & -0,0074 & | & 0,1642 & -0,0095 \end{bmatrix}, \\
[Q_{121}|Q_{122}] &= \begin{bmatrix} -1,1470 & 0,1464 & | & -1,1526 & 0,1219 \\ 0,1464 & -0,0137 & | & 0,1219 & -0,0094 \end{bmatrix}, \\
[Q_{123}|Q_{124}] &= \begin{bmatrix} -1,0919 & 0,1155 & | & -1,1509 & 0,1381 \\ 0,1155 & -0,0083 & | & 0,1381 & -0,0120 \end{bmatrix}, \\
[Q_{131}|Q_{132}] &= \begin{bmatrix} -1,2376 & 0,1766 & | & -1,2277 & 0,1477 \\ 0,1766 & -0,0178 & | & 0,1477 & -0,0127 \end{bmatrix}, \\
[Q_{133}|Q_{134}] &= \begin{bmatrix} -1,2387 & 0,1450 & | & -1,2466 & 0,1664 \\ 0,1450 & -0,0116 & | & 0,1664 & -0,0155 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[Q_{141}|Q_{142}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -1,3357 & 0,1462 & -1,0490 & 0,0971 \\ 0,1462 & -0,0118 & 0,0971 & -0,0099 \end{array} \right], \\
[Q_{143}|Q_{144}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,9801 & 0,0897 & -1,2265 & 0,1278 \\ 0,0897 & -0,0095 & 0,1278 & -0,0111 \end{array} \right], \\
[Q_{211}|Q_{212}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 6,7597 & -0,4941 & 5,4986 & -0,4584 \\ -0,4941 & -0,0513 & -0,4584 & -0,0055 \end{array} \right], \\
[Q_{213}|Q_{214}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 5,4752 & -0,4530 & 6,2524 & -0,4739 \\ -0,4530 & -0,0050 & -0,4739 & -0,0061 \end{array} \right], \\
[Q_{221}|Q_{222}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 2,3142 & -0,2316 & 1,2755 & -0,1601 \\ -0,2316 & 0,0048 & -0,1601 & 0,0002 \end{array} \right], \\
[Q_{223}|Q_{224}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 1,1176 & -0,1422 & 1,8325 & -0,1945 \\ -0,1422 & -0,0004 & -0,1945 & 0,0026 \end{array} \right], \\
[Q_{231}|Q_{232}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 2,1083 & -0,2049 & 1,0547 & -0,1344 \\ -0,2049 & 0,0025 & -0,1344 & -0,0018 \end{array} \right], \\
[Q_{233}|Q_{234}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 0,9948 & -0,1239 & 1,6516 & -0,1689 \\ -0,1239 & -0,0026 & -0,1689 & 0,0005 \end{array} \right], \\
[Q_{241}|Q_{242}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 5,0652 & -0,4059 & 4,6269 & -0,3991 \\ -0,4059 & -0,0033 & -0,3991 & -0,0013 \end{array} \right], \\
[Q_{243}|Q_{244}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 4,5168 & -0,3876 & 4,8813 & -0,3998 \\ -0,3876 & -0,0012 & -0,3998 & -0,0023 \end{array} \right], \\
[Q_{311}|Q_{312}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 4,1239 & -0,5237 & 3,9699 & -0,5753 \\ -0,5237 & -0,0358 & -0,5753 & 0,0156 \end{array} \right], \\
[Q_{313}|Q_{314}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 3,7094 & -0,5512 & 4,2213 & -0,5578 \\ -0,5512 & 0,0138 & -0,5578 & 0,0137 \end{array} \right], \\
[Q_{321}|Q_{322}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 2,7917 & -0,3204 & 1,6299 & -0,2417 \\ -0,3204 & 0,0100 & -0,2417 & 0,0039 \end{array} \right], \\
[Q_{323}|Q_{324}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 1,4865 & -0,2195 & 2,3149 & -0,2773 \\ -0,2195 & 0,0008 & -0,2773 & 0,0060 \end{array} \right], \\
[Q_{331}|Q_{332}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 2,5242 & -0,2746 & 1,6052 & -0,2180 \\ -0,2746 & 0,0056 & -0,2180 & 0,0017 \end{array} \right], \\
[Q_{333}|Q_{334}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 1,4573 & -0,2046 & 2,1455 & -0,2424 \\ -0,2046 & 0,0009 & -0,2424 & 0,0025 \end{array} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[Q_{341}|Q_{342}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 5,1115 & -0,6193 & 4,2066 & -0,5845 \\ -0,6193 & 0,0330 & -0,5845 & 0,0357 \end{array} \right], \\
[Q_{343}|Q_{344}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 4,0030 & -0,5642 & 4,8101 & -0,6021 \\ -0,5642 & 0,0350 & -0,6021 & 0,0331 \end{array} \right], \\
[Q_{411}|Q_{412}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,3511 & -0,0204 & -0,4799 & -0,0204 \\ -0,0204 & -0,0490 & -0,0204 & -0,0023 \end{array} \right], \\
[Q_{413}|Q_{414}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,4942 & -0,0192 & -0,3936 & -0,0209 \\ -0,0192 & -0,0020 & -0,0209 & -0,0036 \end{array} \right], \\
[Q_{421}|Q_{422}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,2795 & 0,0243 & -0,5112 & 0,0186 \\ 0,0243 & -0,0070 & 0,0186 & -0,0047 \end{array} \right], \\
[Q_{423}|Q_{424}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,5254 & 0,0178 & -0,3631 & 0,0234 \\ 0,0178 & -0,0041 & 0,0234 & -0,0061 \end{array} \right], \\
[Q_{431}|Q_{432}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,3745 & 0,0519 & -0,5696 & 0,0441 \\ 0,0519 & -0,0101 & 0,0441 & -0,0079 \end{array} \right], \\
[Q_{433}|Q_{434}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,6077 & 0,0447 & -0,4600 & 0,0512 \\ 0,0447 & -0,0074 & 0,0512 & -0,0094 \end{array} \right], \\
[Q_{441}|Q_{442}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,2037 & -0,0043 & -0,3034 & -0,0140 \\ -0,0043 & -0,0061 & -0,0140 & -0,0043 \end{array} \right], \\
[Q_{443}|Q_{444}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} -0,3117 & -0,0143 & -0,2299 & -0,0079 \\ -0,0143 & -0,0039 & -0,0079 & -0,0054 \end{array} \right]. \tag{85}
\end{aligned}$$

#### 4.2.1.1 Resultados do primeiro sistema

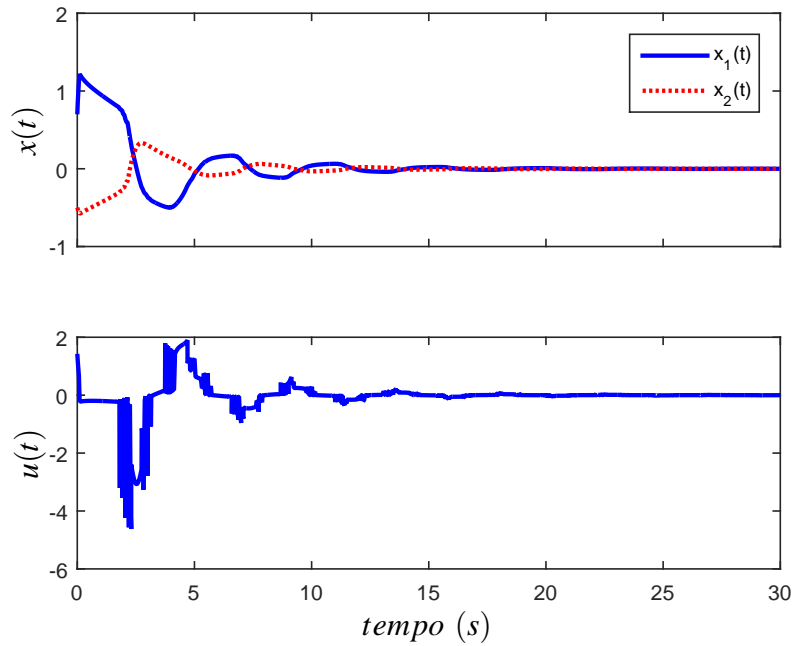
O sistema fictício descrito em (70), (2) e (82) apresenta vértices muito diferentes, o tornando difícil de controlar, sendo por isso um bom exemplo para a eficácia dos métodos de projetar controladores.

As simulações apresentadas nessa seção foram feitas via *Simulink*<sup>®</sup>, com o solver ode3 (Bogacki-Shampine) e passo de 1 ms. As Figuras 44 a 48 apresentam os resultados de simulação do sistema com a regra de controle (71), considerando (83)-(85).

A Figura 44 apresenta as variáveis de estado do sistema ( $x_1(t)$  (-) e  $x_2(t)$  (..)) e o sinal de controle  $u(t)$ , sendo  $x_1(0) = 0,7$ ,  $x_2(0) = -0,5$  e os os termos (considerados incertos neste projeto)  $\alpha_i(t)$  variam conforme as funções:  $\omega_0^1 = \frac{1-\text{sen}(x_1)}{2}$ ,  $\omega_0^2(t) = \frac{4-x_2^2}{2}$ ,  $\omega_1^1(t) = 1 - \omega_0^1(t)$ ,  $\omega_1^2(t) = 1 - \omega_0^2(t)$ ,  $\alpha_1(t) = \omega_0^1(t)\omega_0^2(t)$ ,  $\alpha_2(t) = \omega_0^1(t)\omega_1^1(t)$ ,  $\alpha_3(t) = \omega_1^1(t)\omega_0^2(t)$ ,

$$\alpha_4(t) = \omega_1^1(t)\omega_1^2(t).$$

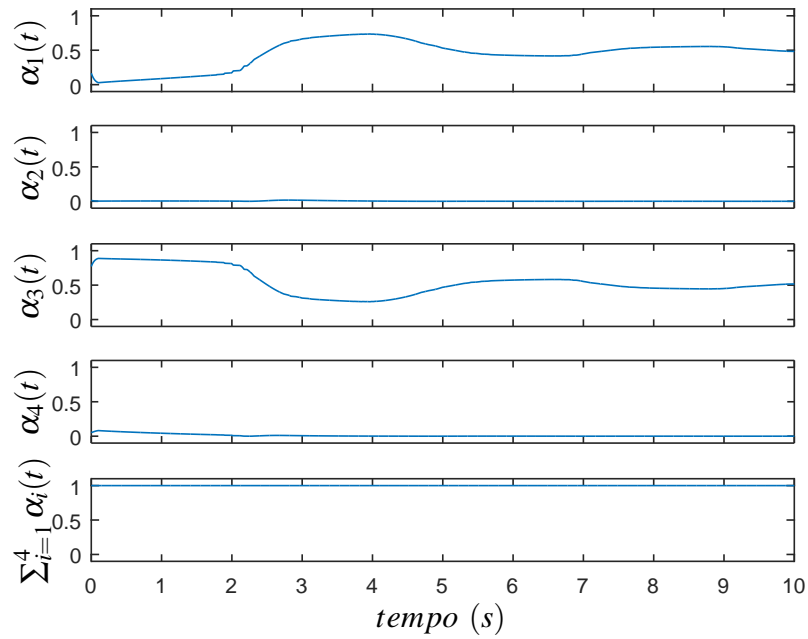
Figura 44 - Resultado de simulação do sistema representado por (70), (2) e (82), controlado por (71), considerando (83)-(85) e  $\psi = 0,01$ . A variável de estado  $x_1(t)$  está representada com uma linha azul e a variável de estado  $x_2(t)$  com uma linha pontilhada vermelha.



Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 45 mostra as variáveis incertas do sistema ( $\alpha_i(t)$ ,  $i \in \mathbb{K}_4$ ). Essas variáveis são desconhecidas para o controlador.

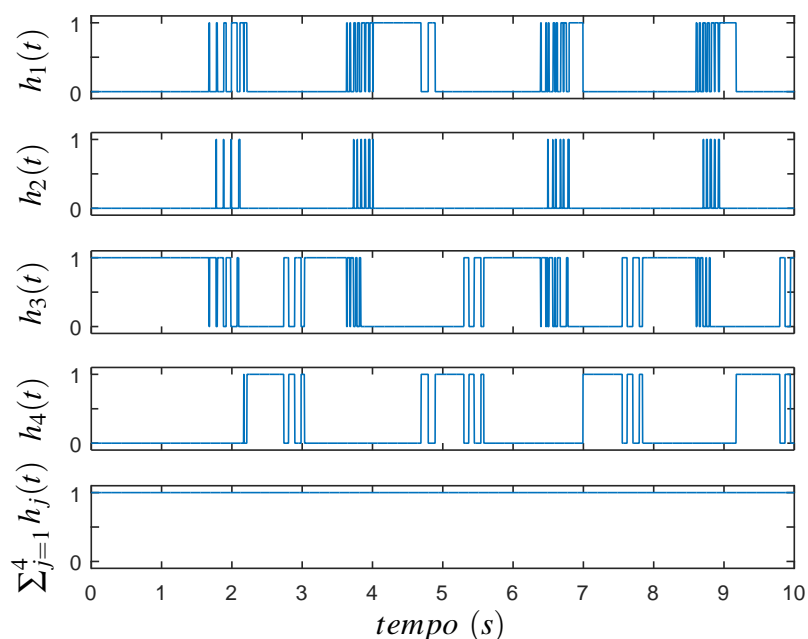
Figura 45 -  $\alpha_i(t)$ ,  $i \in \mathbb{K}_4$ , em cada instante do sistema representado por (70), (2) e (82), controlado por (83), considerando (83)-(85) e  $\psi = 0,01$ .



Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 46 mostra o ganho escolhido em cada instante pela lei de chaveamento (71). Para a chave escolhida  $j \in \mathbb{K}_4$ , em um certo instante  $t$ , tem-se  $h_j(t) = 1$  enquanto  $j = \lambda$ , já as demais chaves em que  $j \neq \lambda$  equivalem a  $h_j(t) = 0$ .

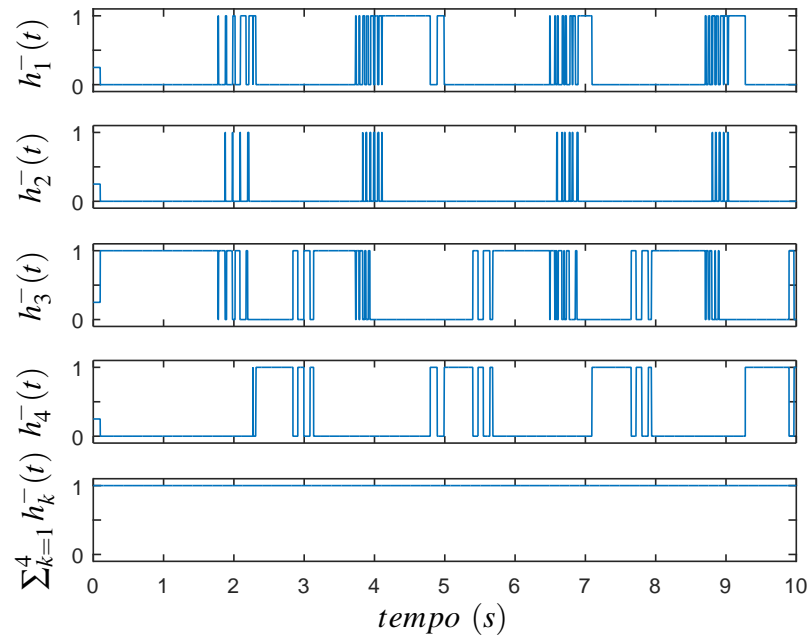
Figura 46 -  $h_j(t)$ ,  $j \in \mathbb{K}_4$ , em cada instante do sistema representado por (70), (2) e (82), controlado por (83), considerando (83)-(85) e  $\psi = 0,01$ .



Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 47 mostra o valor de  $h_k^-(t) = h_k(t - \zeta)$ ,  $k \in \mathbb{K}_4$ , sendo que foi adotado  $\zeta = 0,1$ . Para  $t < \zeta$ , como em  $t < 0$  ainda não foi escolhido o  $h_k(t)$  ativo, então optou-se por utilizar um valor intermediário para todos os  $h_k^-(t)$ , ou seja,  $h_k^-(t < \zeta) = \frac{1}{4}$ , para todo  $k \in \mathbb{K}_4$ . Note de (4) que essa escolha arbitrária é permitida já que as únicas exigências do projeto são que  $\sum_{k=1}^s h_k^- = 1$  e que  $h_k^- \geq 0$ , para todo  $k \in \mathbb{K}_4$ .

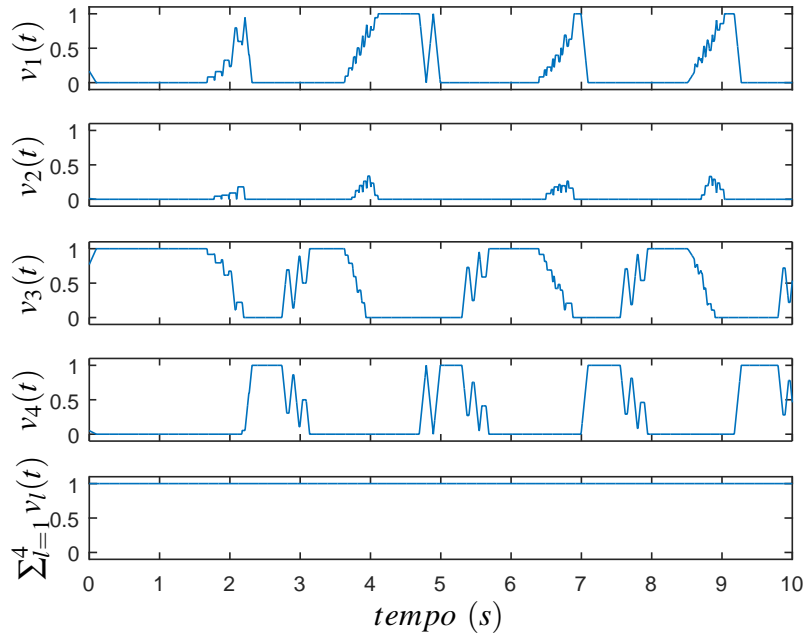
Figura 47 -  $h_k^-(t)$ ,  $k \in \mathbb{K}_4$ , em cada instante do sistema representado por (70), (2) e (82), controlado por (83), considerando (83)-(85) e  $\psi = 0,01$ .



Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 48 mostra o valor de  $v_l(t) = \frac{1}{\zeta} \int_{t-\zeta}^t h_l(t) dt$ ,  $l \in \mathbb{K}_4$ . Assim como na Figura 47, foi considerado que todos os  $h_l(t < 0) = \frac{1}{4}$ , sendo que  $l \in \mathbb{K}_4$ .

Figura 48 -  $v_l(t)$ ,  $l \in \mathbb{K}_4$ , em cada instante do sistema representado por (70), (2) e (82), controlado por (83), considerando (83)-(85).

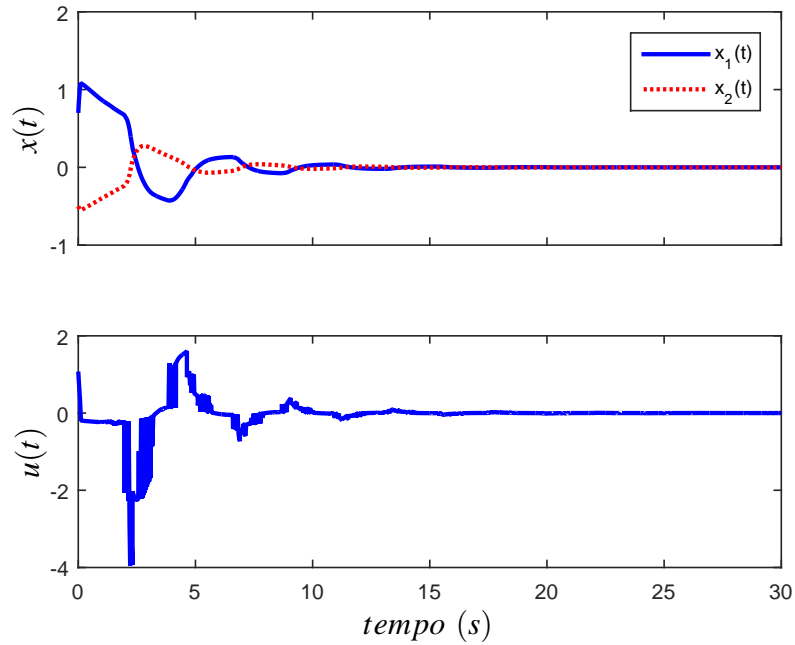


Fonte: Elaboração do autor.

O controlador apresentou 301 comutações em  $\lambda(t)$ . Para comparar o resultado apresentado nas Figuras 44 a 48 com o resultado sem utilizar a teoria anti-*chattering*, será apresentado a seguir os resultados para o caso em que  $\psi = 0$ , que é o equivalente a utilizar o Teorema 1.

A Figura 49 apresenta as variáveis de estado do sistema ( $x_1(t)$  (-) e  $x_2(t)$  (..)) e o sinal de controle  $u(t)$ , sendo  $x_1(0) = 0,7$ ,  $x_2(0) = -0,5$  e os termos incertos  $\alpha_i(t)$  variam conforme as funções:  $\omega_0^1 = \frac{1-\text{sen}(x_1)}{2}$ ,  $\omega_0^2(t) = \frac{4-x_2^2}{2}$ ,  $\omega_1^1(t) = 1 - \omega_0^1(t)$ ,  $\omega_1^2(t) = 1 - \omega_0^2(t)$ ,  $\alpha_1(t) = \omega_0^1(t)\omega_0^2(t)$ ,  $\alpha_2(t) = \omega_0^1(t)\omega_1^2(t)$ ,  $\alpha_3(t) = \omega_1^1(t)\omega_0^2(t)$ ,  $\alpha_4(t) = \omega_1^1(t)\omega_1^2(t)$ .

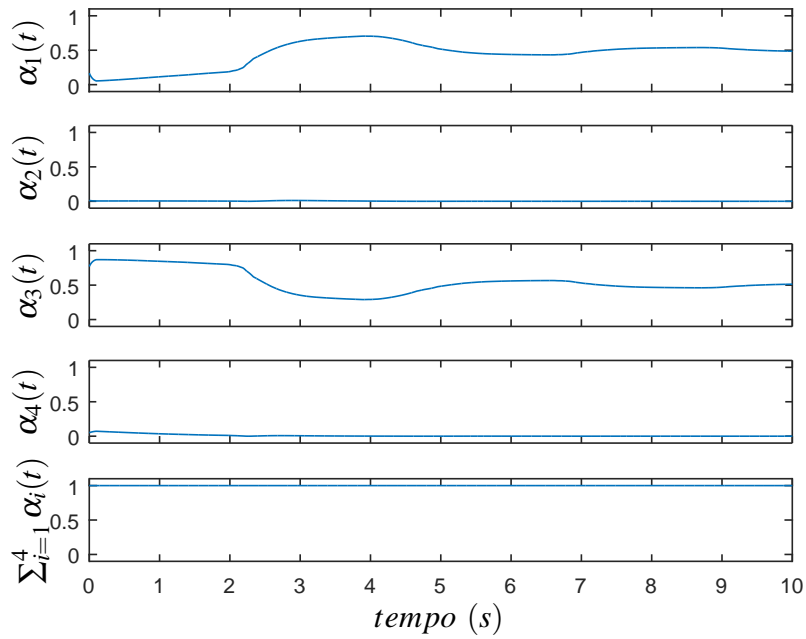
Figura 49 - Resultado de simulação do sistema representado por (70), (2) e (82), controlado por (71), considerando  $\psi = 0$ . A variável de estado  $x_1(t)$  está representada com uma linha azul e a variável de estado  $x_2(t)$  com uma linha pontilhada vermelha.



Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 50 mostra as variáveis incertas do sistema ( $\alpha_i(t)$ ,  $i \in \mathbb{K}_4$ ). Essas variáveis são desconhecidas para o controlador.

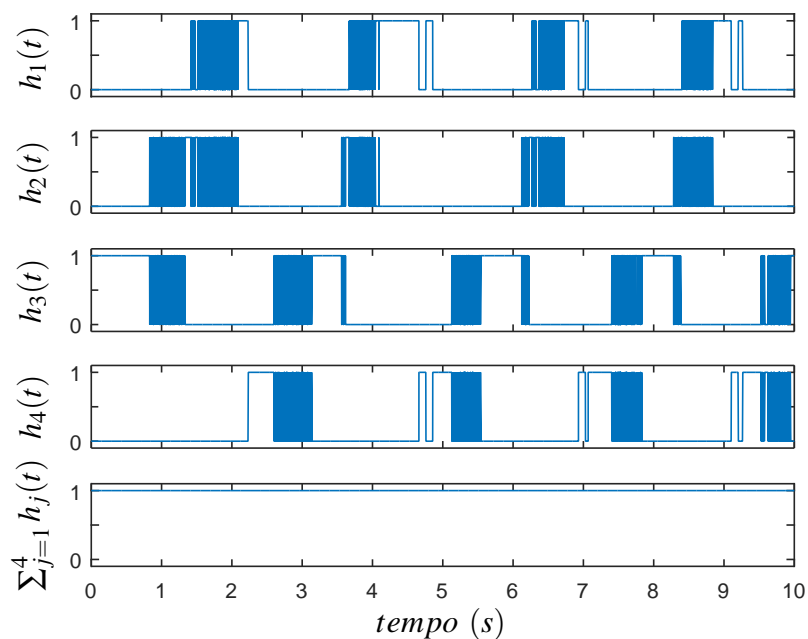
Figura 50 -  $\alpha_i(t)$ ,  $i \in \mathbb{K}_4$ , em cada instante do sistema representado por (70), (2) e (82), controlado por (83), considerando  $\psi = 0$ .



Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 51 mostra o ganho escolhido em cada instante pela lei de chaveamento (71). Para a chave escolhida  $j \in \mathbb{K}_4$ , em um certo instante  $t$ , tem-se  $h_j(t) = 1$  enquanto  $j = \sigma$ , já as demais chaves em que  $j \neq \sigma$  equivalem a  $h_j(t) = 0$ .

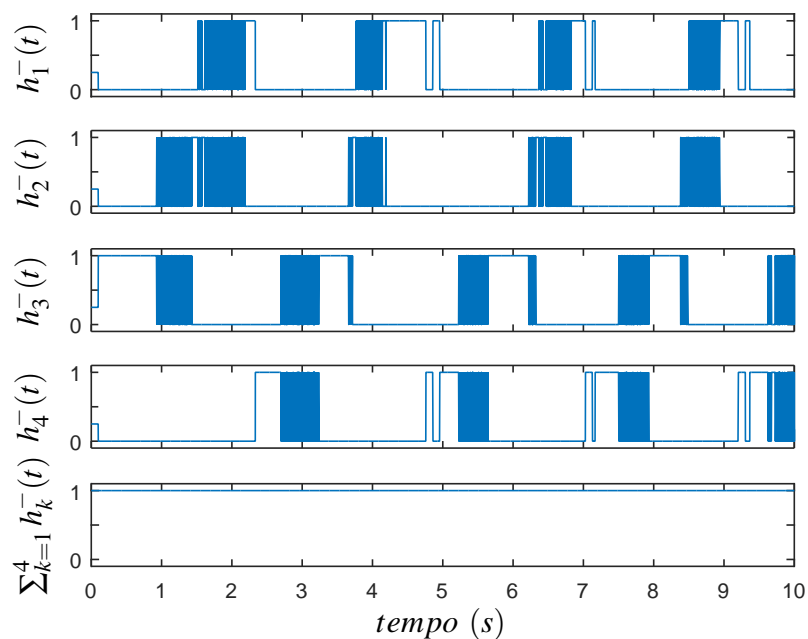
Figura 51 -  $h_j(t)$ ,  $j \in \mathbb{K}_4$ , em cada instante do sistema representado por (70), (2) e (82), controlado por (83), considerando  $\psi = 0$ .



Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 52 mostra o valor de  $h_k^-(t) = h_j(t - \zeta)$ ,  $k \in \mathbb{K}_4$ . De forma similar às Figuras (47) e (48), foi considerado  $h_k(t < 0) = \frac{1}{4}$ .

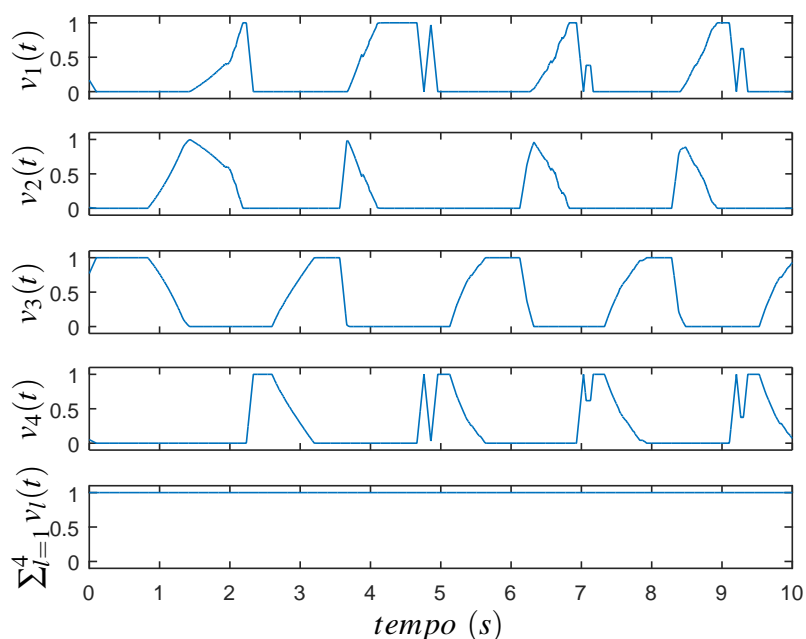
Figura 52 -  $h_k^-(t)$ ,  $k \in \mathbb{K}_4$ , em cada instante do sistema representado por (70), (2) e (82), controlado por (83), considerando  $\psi = 0$ .



Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 53 mostra o valor de  $v_l(t) = \frac{1}{\zeta} \int_{t-\zeta}^t h_l(t) dt$ ,  $l \in \mathbb{K}_4$ . Assim como nas Figuras 47 e 48, foi considerado que todos os  $h_l(t < 0) = \frac{1}{4}$ .

Figura 53 -  $v_l(t)$ ,  $l \in \mathbb{K}_4$ , em cada instante do sistema representado por (70), (2) e (82), controlado por (83), considerando  $\psi = 0$ .

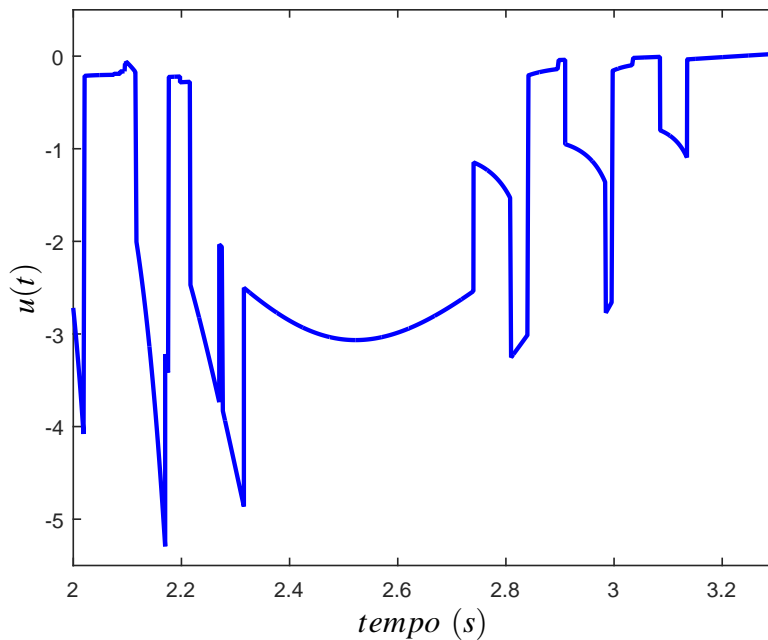


Fonte: Elaboração do autor.

O controlador apresentou 5578 comutações em  $\sigma(t)$ . Comparando as Figuras 44 a 48 com as Figuras 49 a 53, é possível ver que o chaveamento do controlador que utiliza a teoria anti-*chattering* ( $\psi = 0,01$ ) teve sua frequência de chaveamento significativamente reduzido, de 5578 comutações para 301.

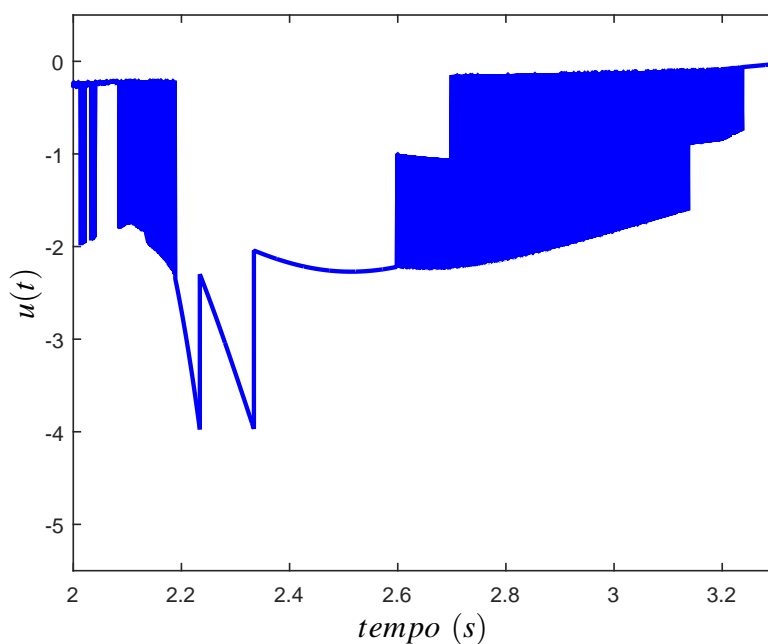
Como foi visto no Teorema 5, do Capítulo 3, o método anti-*chattering* além de evitar o chaveamento em alta frequência, ajuda também a evitar *chattering* do sinal de controle. Para ajudar a visualização, a seguir serão apresentadas as imagens ampliadas do sinal de controle das Figuras 44 e 49.

Figura 54 - Ampliação do sinal de controle  $u(t)$ , do resultado de simulação utilizando a teoria anti-chattering ( $\psi = 0,01$ ), apresentado na Figura 44, na faixa entre 2 e 3,3 segundos.



Fonte: Elaboração do autor.

Figura 55 - Ampliação do sinal de controle  $u(t)$ , do resultado de simulação sem utilizar a teoria anti-chattering ( $\psi = 0$ ), apresentado na Figura 49, na faixa entre 2 e 3,3 segundos.



Fonte: Elaboração do autor.

Nota-se que a sinal de controle mostrado na Figura 54 (utilizando o método anti-*chattering*) oscilou em uma frequência significativamente menor que o apresentado na Figura 55 (sem utilizar o método anti-*chattering*), comprovando a eficácia do método, em acordo com o que foi apresentado na Teoria 5. É importante ressaltar ainda que o sistema controlado está fora da área de factibilidade do controlador que utiliza  $P$  constante.

#### 4.2.2 Projeto do sistema 2DOF ball balancer

Para verificar resultados do método proposto em um sistema real, foi projetado um controlador para um sistema 2DOF ball balancer (33), considerando a possibilidade de falha de até  $-50\%$  no atuador e que o ângulo da carga fica na faixa  $-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$  rad. A planta pode ser descrita pelo modelo fuzzy Takagi-Sugeno dado em (70) e (2), como descrito detalhadamente em (31)-(43), com:

$$\begin{aligned}
 A_1 = A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}, \\
 A_2 = A_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{bb} \frac{\sin(\pi/6)}{\pi/6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}, \tag{86}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_1 = B_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{C}{\tau} \end{bmatrix}^T, \\
 B_3 = B_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{0,5C}{\tau} \end{bmatrix}^T. \tag{87}
 \end{aligned}$$

O controlador foi projetado por (74) e (75), com  $\psi = 0,01$ ,  $\beta = 2,2$  e  $\zeta = 0,1$ . Os vetores  $M_{jkl}$ , matrizes simétricas positivas definidas  $P_j$  e matrizes simétricas  $Q_{jkl}$  obtidos foram:

$$\begin{aligned}
 M_{111} &= \begin{bmatrix} -0,0041 & 0,0262 & -0,1442 & 0,9826 \end{bmatrix}, \\
 M_{112} &= \begin{bmatrix} -0,0041 & 0,0265 & -0,1443 & 0,9769 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{113} &= \begin{bmatrix} -0,0039 & 0,0236 & -0,1204 & 0,6700 \end{bmatrix}, \\
M_{114} &= \begin{bmatrix} -0,0038 & 0,0236 & -0,1196 & 0,6667 \end{bmatrix}, \\
M_{121} &= \begin{bmatrix} -0,0042 & 0,0261 & -0,1441 & 0,9834 \end{bmatrix}, \\
M_{122} &= \begin{bmatrix} -0,0041 & 0,0264 & -0,1442 & 0,9778 \end{bmatrix}, \\
M_{123} &= \begin{bmatrix} -0,0039 & 0,0235 & -0,1204 & 0,6710 \end{bmatrix}, \\
M_{124} &= \begin{bmatrix} -0,0038 & 0,0235 & -0,1196 & 0,6677 \end{bmatrix}, \\
M_{131} &= \begin{bmatrix} -0,0042 & 0,0268 & -0,1485 & 1,0298 \end{bmatrix}, \\
M_{132} &= \begin{bmatrix} -0,0041 & 0,0271 & -0,1486 & 1,0242 \end{bmatrix}, \\
M_{133} &= \begin{bmatrix} -0,0039 & 0,0242 & -0,1245 & 0,7163 \end{bmatrix}, \\
M_{134} &= \begin{bmatrix} -0,0038 & 0,0241 & -0,1237 & 0,7130 \end{bmatrix}, \\
M_{141} &= \begin{bmatrix} -0,0042 & 0,0268 & -0,1487 & 1,0303 \end{bmatrix}, \\
M_{142} &= \begin{bmatrix} -0,0042 & 0,0271 & -0,1488 & 1,0246 \end{bmatrix}, \\
M_{143} &= \begin{bmatrix} -0,0040 & 0,0242 & -0,1248 & 0,7171 \end{bmatrix}, \\
M_{144} &= \begin{bmatrix} -0,0039 & 0,0241 & -0,1240 & 0,7137 \end{bmatrix}, \\
M_{211} &= \begin{bmatrix} -0,0041 & 0,0260 & -0,1443 & 0,9816 \end{bmatrix}, \\
M_{212} &= \begin{bmatrix} -0,0041 & 0,0264 & -0,1443 & 0,9759 \end{bmatrix}, \\
M_{213} &= \begin{bmatrix} -0,0039 & 0,0235 & -0,1205 & 0,6694 \end{bmatrix}, \\
M_{214} &= \begin{bmatrix} -0,0038 & 0,0235 & -0,1197 & 0,6661 \end{bmatrix}, \\
M_{221} &= \begin{bmatrix} -0,0041 & 0,0259 & -0,1442 & 0,9824 \end{bmatrix}, \\
M_{222} &= \begin{bmatrix} -0,0041 & 0,0263 & -0,1442 & 0,9767 \end{bmatrix}, \\
M_{223} &= \begin{bmatrix} -0,0039 & 0,0234 & -0,1204 & 0,6703 \end{bmatrix}, \\
M_{224} &= \begin{bmatrix} -0,0038 & 0,0234 & -0,1196 & 0,6669 \end{bmatrix}, \\
M_{231} &= \begin{bmatrix} -0,0042 & 0,0266 & -0,1486 & 1,0288 \end{bmatrix}, \\
M_{232} &= \begin{bmatrix} -0,0041 & 0,0270 & -0,1487 & 1,0231 \end{bmatrix}, \\
M_{233} &= \begin{bmatrix} -0,0039 & 0,0241 & -0,1246 & 0,7159 \end{bmatrix}, \\
M_{234} &= \begin{bmatrix} -0,0038 & 0,0240 & -0,1238 & 0,7126 \end{bmatrix}, \\
M_{241} &= \begin{bmatrix} -0,0042 & 0,0266 & -0,1488 & 1,0292 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{242} &= \begin{bmatrix} -0,0041 & 0,0270 & -0,1488 & 1,0235 \end{bmatrix}, \\
M_{243} &= \begin{bmatrix} -0,0040 & 0,0241 & -0,1249 & 0,7165 \end{bmatrix}, \\
M_{244} &= \begin{bmatrix} -0,0038 & 0,0240 & -0,1241 & 0,7131 \end{bmatrix}, \\
M_{311} &= \begin{bmatrix} -0,0063 & 0,0395 & -0,2169 & 1,4318 \end{bmatrix}, \\
M_{312} &= \begin{bmatrix} -0,0062 & 0,0400 & -0,2171 & 1,4233 \end{bmatrix}, \\
M_{313} &= \begin{bmatrix} -0,0061 & 0,0370 & -0,1875 & 0,9530 \end{bmatrix}, \\
M_{314} &= \begin{bmatrix} -0,0060 & 0,0369 & -0,1862 & 0,9481 \end{bmatrix}, \\
M_{321} &= \begin{bmatrix} -0,0063 & 0,0394 & -0,2169 & 1,4330 \end{bmatrix}, \\
M_{322} &= \begin{bmatrix} -0,0062 & 0,0399 & -0,2172 & 1,4244 \end{bmatrix}, \\
M_{323} &= \begin{bmatrix} -0,0062 & 0,0368 & -0,1871 & 0,9551 \end{bmatrix}, \\
M_{324} &= \begin{bmatrix} -0,0060 & 0,0367 & -0,1859 & 0,9500 \end{bmatrix}, \\
M_{331} &= \begin{bmatrix} -0,0064 & 0,0406 & -0,2246 & 1,5017 \end{bmatrix}, \\
M_{332} &= \begin{bmatrix} -0,0063 & 0,0411 & -0,2249 & 1,4931 \end{bmatrix}, \\
M_{333} &= \begin{bmatrix} -0,0063 & 0,0382 & -0,1962 & 1,0167 \end{bmatrix}, \\
M_{334} &= \begin{bmatrix} -0,0061 & 0,0381 & -0,1949 & 1,0117 \end{bmatrix}, \\
M_{341} &= \begin{bmatrix} -0,0064 & 0,0406 & -0,2251 & 1,5023 \end{bmatrix}, \\
M_{342} &= \begin{bmatrix} -0,0064 & 0,0412 & -0,2254 & 1,4936 \end{bmatrix}, \\
M_{343} &= \begin{bmatrix} -0,0063 & 0,0382 & -0,1961 & 1,0196 \end{bmatrix}, \\
M_{344} &= \begin{bmatrix} -0,0061 & 0,0381 & -0,1949 & 1,0142 \end{bmatrix}, \\
M_{411} &= \begin{bmatrix} -0,0062 & 0,0393 & -0,2167 & 1,4313 \end{bmatrix}, \\
M_{412} &= \begin{bmatrix} -0,0062 & 0,0398 & -0,2170 & 1,4227 \end{bmatrix}, \\
M_{413} &= \begin{bmatrix} -0,0061 & 0,0367 & -0,1867 & 0,9544 \end{bmatrix}, \\
M_{414} &= \begin{bmatrix} -0,0059 & 0,0365 & -0,1855 & 0,9492 \end{bmatrix}, \\
M_{421} &= \begin{bmatrix} -0,0063 & 0,0391 & -0,2168 & 1,4323 \end{bmatrix}, \\
M_{422} &= \begin{bmatrix} -0,0062 & 0,0397 & -0,2171 & 1,4236 \end{bmatrix}, \\
M_{423} &= \begin{bmatrix} -0,0061 & 0,0365 & -0,1865 & 0,9558 \end{bmatrix}, \\
M_{424} &= \begin{bmatrix} -0,0059 & 0,0364 & -0,1854 & 0,9503 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{431} &= \begin{bmatrix} -0,0063 & 0,0403 & -0,2245 & 1,5010 \end{bmatrix}, \\
M_{432} &= \begin{bmatrix} -0,0063 & 0,0409 & -0,2248 & 1,4923 \end{bmatrix}, \\
M_{433} &= \begin{bmatrix} -0,0062 & 0,0379 & -0,1953 & 1,0194 \end{bmatrix}, \\
M_{434} &= \begin{bmatrix} -0,0060 & 0,0378 & -0,1941 & 1,0139 \end{bmatrix}, \\
M_{441} &= \begin{bmatrix} -0,0064 & 0,0404 & -0,2252 & 1,5013 \end{bmatrix}, \\
M_{442} &= \begin{bmatrix} -0,0063 & 0,0410 & -0,2256 & 1,4924 \end{bmatrix}, \\
M_{443} &= \begin{bmatrix} -0,0062 & 0,0379 & -0,1955 & 1,0206 \end{bmatrix}, \\
M_{444} &= \begin{bmatrix} -0,0061 & 0,0378 & -0,1944 & 1,0148 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{88}$$

$$\begin{aligned}
P_1 &= \begin{bmatrix} 0,0011 & -0,0031 & 0,0052 & -0,0070 \\ -0,0031 & 0,0096 & -0,0207 & 0,0432 \\ 0,0052 & -0,0207 & 0,0623 & -0,2305 \\ -0,0070 & 0,0432 & -0,2305 & 1,8811 \end{bmatrix}, \\
P_2 &= \begin{bmatrix} 0,0011 & -0,0031 & 0,0052 & -0,0068 \\ -0,0031 & 0,0097 & -0,0209 & 0,0438 \\ 0,0052 & -0,0209 & 0,0625 & -0,2310 \\ -0,0068 & 0,0438 & -0,2310 & 1,8706 \end{bmatrix}, \\
P_3 &= \begin{bmatrix} 0,0011 & -0,0031 & 0,0053 & -0,0066 \\ -0,0031 & 0,0098 & -0,0213 & 0,0395 \\ 0,0053 & -0,0213 & 0,0640 & -0,2030 \\ -0,0066 & 0,0395 & -0,2030 & 1,2962 \end{bmatrix}, \\
P_4 &= \begin{bmatrix} 0,0011 & -0,0031 & 0,0053 & -0,0064 \\ -0,0031 & 0,0098 & -0,0214 & 0,0394 \\ 0,0053 & -0,0214 & 0,0640 & -0,2015 \\ -0,0064 & 0,0394 & -0,2015 & 1,2900 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{89}$$

$$Q_{111} = \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0009 & -0,0013 & 0,1317 \\ 0,0009 & -0,0024 & 0,0069 & -0,8212 \\ -0,0013 & 0,0069 & -0,0610 & 4,6148 \\ 0,1317 & -0,8212 & 4,6148 & -62,1587 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 Q_{112} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0010 & -0,0013 & 0,1299 \\ 0,0010 & -0,0024 & 0,0068 & -0,8325 \\ -0,0013 & 0,0068 & -0,0609 & 4,6219 \\ 0,1299 & -0,8325 & 4,6219 & -61,8024 \end{bmatrix}, \\
 Q_{113} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0010 & -0,0010 & 0,1301 \\ 0,0010 & -0,0025 & 0,0044 & -0,7803 \\ -0,0010 & 0,0044 & -0,0292 & 4,0515 \\ 0,1301 & -0,7803 & 4,0515 & -42,3369 \end{bmatrix}, \\
 Q_{114} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0010 & -0,0010 & 0,1265 \\ 0,0010 & -0,0025 & 0,0041 & -0,7779 \\ -0,0010 & 0,0041 & -0,0282 & 4,0269 \\ 0,1265 & -0,7779 & 4,0269 & -42,1180 \end{bmatrix}, \\
 Q_{121} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0009 & -0,0012 & 0,1326 \\ 0,0009 & -0,0019 & 0,0059 & -0,8189 \\ -0,0012 & 0,0059 & -0,0600 & 4,6184 \\ 0,1326 & -0,8189 & 4,6184 & -62,1960 \end{bmatrix}, \\
 Q_{122} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0009 & -0,0013 & 0,1309 \\ 0,0009 & -0,0019 & 0,0058 & -0,8306 \\ -0,0013 & 0,0058 & -0,0599 & 4,6275 \\ 0,1309 & -0,8306 & 4,6275 & -58,8544 \end{bmatrix}, \\
 Q_{123} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0009 & -0,0010 & 0,1308 \\ 0,0009 & -0,0020 & 0,0035 & -0,7763 \\ -0,0010 & 0,0035 & -0,0285 & 4,0461 \\ 0,1308 & -0,7763 & 4,0461 & -42,3907 \end{bmatrix}, \\
 Q_{124} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0009 & -0,0010 & 0,1272 \\ 0,0009 & -0,0020 & 0,0032 & -0,7743 \\ -0,0010 & 0,0032 & -0,0275 & 4,0236 \\ 0,1272 & -0,7743 & 4,0236 & -42,1592 \end{bmatrix}, \\
 Q_{131} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0008 & -0,0006 & 0,1341 \\ 0,0008 & -0,0015 & 0,0041 & -0,8449 \\ -0,0006 & 0,0041 & -0,0513 & 4,7857 \\ 0,1341 & -0,8449 & 4,7857 & -65,0085 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{132} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0008 & -0,0007 & 0,1324 \\ 0,0008 & -0,0015 & 0,0040 & -0,8566 \\ -0,0007 & 0,0040 & -0,0512 & 4,7947 \\ 0,1324 & -0,8566 & 4,7947 & -64,6448 \end{bmatrix}, \\
Q_{133} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0008 & -0,0004 & 0,1333 \\ 0,0008 & -0,0017 & 0,0018 & -0,8095 \\ -0,0004 & 0,0018 & -0,0205 & 4,2510 \\ 0,1333 & -0,8095 & 4,2510 & -44,9187 \end{bmatrix}, \\
Q_{134} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0008 & -0,0004 & 0,1297 \\ 0,0008 & -0,0017 & 0,0015 & -0,8072 \\ -0,0004 & 0,0015 & -0,0195 & 4,2273 \\ 0,1297 & -0,8072 & 4,2273 & -44,6838 \end{bmatrix}, \\
Q_{141} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0007 & -0,0007 & 0,1355 \\ 0,0007 & -0,0011 & 0,0035 & -0,8471 \\ -0,0007 & 0,0035 & -0,0513 & 4,8032 \\ 0,1355 & -0,8471 & 4,8032 & -65,0085 \end{bmatrix}, \\
Q_{142} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0007 & -0,0007 & 0,1338 \\ 0,0007 & -0,0011 & 0,0034 & -0,8595 \\ -0,0007 & 0,0034 & -0,0512 & 4,8156 \\ 0,1338 & -0,8595 & 4,8156 & -64,6332 \end{bmatrix}, \\
Q_{143} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0008 & -0,0004 & 0,1342 \\ 0,0008 & -0,0013 & 0,0012 & -0,8088 \\ -0,0004 & 0,0012 & -0,0206 & 4,2521 \\ 0,1342 & -0,8088 & 4,2521 & -44,9765 \end{bmatrix}, \\
Q_{144} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0008 & -0,0004 & 0,1307 \\ 0,0008 & -0,0013 & 0,0010 & -0,8070 \\ -0,0004 & 0,0010 & -0,0197 & 4,2311 \\ 0,1307 & -0,8070 & 4,2311 & -44,7210 \end{bmatrix}, \\
Q_{211} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0011 & -0,0013 & 0,1315 \\ 0,0011 & -0,0039 & 0,0093 & -0,8334 \\ -0,0013 & 0,0093 & -0,0625 & 4,6154 \\ 0,1315 & -0,8334 & 4,6154 & -62,1415 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{212} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0012 & -0,0013 & 0,1297 \\ 0,0012 & -0,0038 & 0,0092 & -0,8448 \\ -0,0013 & 0,0092 & -0,0623 & 4,6225 \\ 0,1297 & -0,8448 & 4,6225 & -61,7856 \end{bmatrix}, \\
 Q_{213} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0012 & -0,0010 & 0,1298 \\ 0,0012 & -0,0040 & 0,0068 & -0,7912 \\ -0,0010 & 0,0068 & -0,0306 & 4,0506 \\ 0,1298 & -0,7912 & 4,0506 & -42,3137 \end{bmatrix}, \\
 Q_{214} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0012 & -0,0010 & 0,1263 \\ 0,0012 & -0,0039 & 0,0066 & -0,7887 \\ -0,0010 & 0,0066 & -0,0297 & 4,0261 \\ 0,1263 & -0,7887 & 4,0261 & -42,0962 \end{bmatrix}, \\
 Q_{221} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0011 & -0,0013 & 0,1324 \\ 0,0011 & -0,0033 & 0,0083 & -0,8311 \\ -0,0013 & 0,0083 & -0,0615 & 4,6190 \\ 0,1324 & -0,8311 & 4,6190 & -62,1795 \end{bmatrix}, \\
 Q_{222} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0011 & -0,0013 & 0,1306 \\ 0,0011 & -0,0033 & 0,0082 & -0,8429 \\ -0,0013 & 0,0082 & -0,0613 & 4,6281 \\ 0,1306 & -0,8429 & 4,6281 & -58,8385 \end{bmatrix}, \\
 Q_{223} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0011 & -0,0010 & 0,1305 \\ 0,0011 & -0,0035 & 0,0059 & -0,7872 \\ -0,0010 & 0,0059 & -0,0299 & 4,0455 \\ 0,1305 & -0,7872 & 4,0455 & -42,3716 \end{bmatrix}, \\
 Q_{224} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0011 & -0,0010 & 0,1270 \\ 0,0011 & -0,0034 & 0,0057 & -0,7852 \\ -0,0010 & 0,0057 & -0,0290 & 4,0231 \\ 0,1270 & -0,7852 & 4,0231 & -42,1415 \end{bmatrix}, \\
 Q_{231} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0009 & -0,0007 & 0,1339 \\ 0,0009 & -0,0030 & 0,0065 & -0,8571 \\ -0,0007 & 0,0065 & -0,0528 & 4,7863 \\ 0,1339 & -0,8571 & 4,7863 & -64,9925 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{232} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0010 & -0,0007 & 0,1321 \\ 0,0010 & -0,0030 & 0,0064 & -0,8689 \\ -0,0007 & 0,0064 & -0,0527 & 4,7952 \\ 0,1321 & -0,8689 & 4,7952 & -64,6295 \end{bmatrix}, \\
Q_{233} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0010 & -0,0004 & 0,1331 \\ 0,0010 & -0,0032 & 0,0042 & -0,8203 \\ -0,0004 & 0,0042 & -0,0219 & 4,2494 \\ 0,1331 & -0,8203 & 4,2494 & -44,8888 \end{bmatrix}, \\
Q_{234} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0010 & -0,0004 & 0,1295 \\ 0,0010 & -0,0031 & 0,0040 & -0,8180 \\ -0,0004 & 0,0040 & -0,0209 & 4,2258 \\ 0,1295 & -0,8180 & 4,2258 & -44,6563 \end{bmatrix}, \\
Q_{241} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0009 & -0,0007 & 0,1352 \\ 0,0009 & -0,0026 & 0,0059 & -0,8594 \\ -0,0007 & 0,0059 & -0,0528 & 4,8038 \\ 0,1352 & -0,8594 & 4,8038 & -64,9941 \end{bmatrix}, \\
Q_{242} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0009 & -0,0007 & 0,1336 \\ 0,0009 & -0,0026 & 0,0058 & -0,8717 \\ -0,0007 & 0,0058 & -0,0527 & 4,8161 \\ 0,1336 & -0,8717 & 4,8161 & -64,6200 \end{bmatrix}, \\
Q_{243} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0010 & -0,0005 & 0,1340 \\ 0,0010 & -0,0027 & 0,0037 & -0,8197 \\ -0,0005 & 0,0037 & -0,0221 & 4,2511 \\ 0,1340 & -0,8197 & 4,2511 & -44,9553 \end{bmatrix}, \\
Q_{244} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0010 & -0,0005 & 0,1305 \\ 0,0010 & -0,0027 & 0,0034 & -0,8179 \\ -0,0005 & 0,0034 & -0,0211 & 4,2303 \\ 0,1305 & -0,8179 & 4,2303 & -44,7024 \end{bmatrix}, \\
Q_{311} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0010 & -0,0012 & 0,0011 \\ 0,0010 & -0,0024 & 0,0048 & 0,0067 \\ -0,0012 & 0,0048 & -0,0427 & 0,0386 \\ 0,0011 & 0,0067 & 0,0386 & -1,3560 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{312} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0010 & -0,0013 & 0,0011 \\ 0,0010 & -0,0024 & 0,0046 & 0,0063 \\ -0,0013 & 0,0046 & -0,0426 & 0,0401 \\ 0,0011 & 0,0063 & 0,0401 & -1,3513 \end{bmatrix}, \\
Q_{313} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0011 & -0,0011 & 0,0009 \\ 0,0011 & -0,0027 & 0,0036 & 0,0067 \\ -0,0011 & 0,0036 & -0,0202 & 0,0254 \\ 0,0009 & 0,0067 & 0,0254 & -1,3562 \end{bmatrix}, \\
Q_{314} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0011 & -0,0011 & 0,0009 \\ 0,0011 & -0,0027 & 0,0034 & 0,0063 \\ -0,0011 & 0,0034 & -0,0195 & 0,0271 \\ 0,0009 & 0,0063 & 0,0271 & -1,3411 \end{bmatrix}, \\
Q_{321} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0009 & -0,0012 & 0,0011 \\ 0,0009 & -0,0020 & 0,0039 & 0,0062 \\ -0,0012 & 0,0039 & -0,0421 & 0,0414 \\ 0,0011 & 0,0062 & 0,0414 & -1,3462 \end{bmatrix}, \\
Q_{322} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0010 & -0,0012 & 0,0012 \\ 0,0010 & -0,0019 & 0,0038 & 0,0058 \\ -0,0012 & 0,0038 & -0,0420 & 0,0435 \\ 0,0012 & 0,0058 & 0,0435 & 1,6412 \end{bmatrix}, \\
Q_{323} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0010 & -0,0011 & 0,0010 \\ 0,0010 & -0,0022 & 0,0027 & 0,0057 \\ -0,0011 & 0,0027 & -0,0194 & 0,0306 \\ 0,0010 & 0,0057 & 0,0306 & -1,3151 \end{bmatrix}, \\
Q_{324} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0010 & -0,0011 & 0,0011 \\ 0,0010 & -0,0022 & 0,0025 & 0,0053 \\ -0,0011 & 0,0025 & -0,0188 & 0,0323 \\ 0,0011 & 0,0053 & 0,0323 & -1,2990 \end{bmatrix}, \\
Q_{331} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0008 & -0,0006 & 0,0010 \\ 0,0008 & -0,0016 & 0,0021 & 0,0066 \\ -0,0006 & 0,0021 & -0,0337 & 0,0401 \\ 0,0010 & 0,0066 & 0,0401 & -1,3353 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{332} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0009 & -0,0006 & 0,0011 \\ 0,0009 & -0,0016 & 0,0020 & 0,0061 \\ -0,0006 & 0,0020 & -0,0337 & 0,0424 \\ 0,0011 & 0,0061 & 0,0424 & -1,3263 \end{bmatrix}, \\
 Q_{333} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0009 & -0,0006 & 0,0007 \\ 0,0009 & -0,0020 & 0,0016 & 0,0077 \\ -0,0006 & 0,0016 & -0,0144 & 0,0206 \\ 0,0007 & 0,0077 & 0,0206 & -1,4098 \end{bmatrix}, \\
 Q_{334} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0010 & -0,0006 & 0,0008 \\ 0,0010 & -0,0020 & 0,0014 & 0,0072 \\ -0,0006 & 0,0014 & -0,0138 & 0,0227 \\ 0,0008 & 0,0072 & 0,0227 & -1,3860 \end{bmatrix}, \\
 Q_{341} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0008 & -0,0007 & 0,0012 \\ 0,0008 & -0,0012 & 0,0016 & 0,0056 \\ -0,0007 & 0,0016 & -0,0341 & 0,0456 \\ 0,0012 & 0,0056 & 0,0456 & -1,3134 \end{bmatrix}, \\
 Q_{342} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0008 & -0,0007 & 0,0013 \\ 0,0008 & -0,0012 & 0,0015 & 0,0050 \\ -0,0007 & 0,0015 & -0,0343 & 0,0490 \\ 0,0013 & 0,0050 & 0,0490 & -1,2977 \end{bmatrix}, \\
 Q_{343} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0009 & -0,0006 & 0,0009 \\ 0,0009 & -0,0016 & 0,0010 & 0,0063 \\ -0,0006 & 0,0010 & -0,0141 & 0,0281 \\ 0,0009 & 0,0063 & 0,0281 & -1,3325 \end{bmatrix}, \\
 Q_{344} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0009 & -0,0007 & 0,0010 \\ 0,0009 & -0,0016 & 0,0008 & 0,0058 \\ -0,0007 & 0,0008 & -0,0137 & 0,0303 \\ 0,0010 & 0,0058 & 0,0303 & -1,3059 \end{bmatrix}, \\
 Q_{411} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0012 & -0,0012 & 0,0010 \\ 0,0012 & -0,0039 & 0,0071 & -0,0064 \\ -0,0012 & 0,0071 & -0,0430 & 0,0372 \\ 0,0010 & -0,0064 & 0,0372 & -1,3595 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{412} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0012 & -0,0012 & 0,0010 \\ 0,0012 & -0,0039 & 0,0069 & -0,0065 \\ -0,0012 & 0,0069 & -0,0427 & 0,0375 \\ 0,0010 & -0,0065 & 0,0375 & -1,3580 \end{bmatrix}, \\
 Q_{413} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0013 & -0,0011 & 0,0012 \\ 0,0013 & -0,0042 & 0,0061 & -0,0073 \\ -0,0011 & 0,0061 & -0,0210 & 0,0376 \\ 0,0012 & -0,0073 & 0,0376 & -1,2642 \end{bmatrix}, \\
 Q_{414} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0013 & -0,0011 & 0,0012 \\ 0,0013 & -0,0042 & 0,0058 & -0,0073 \\ -0,0011 & 0,0058 & -0,0202 & 0,0374 \\ 0,0012 & -0,0073 & 0,0374 & -1,2627 \end{bmatrix}, \\
 Q_{421} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0011 & -0,0012 & 0,0010 \\ 0,0011 & -0,0034 & 0,0062 & -0,0064 \\ -0,0012 & 0,0062 & -0,0421 & 0,0373 \\ 0,0010 & -0,0064 & 0,0373 & -1,3567 \end{bmatrix}, \\
 Q_{422} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0011 & -0,0012 & 0,0010 \\ 0,0011 & -0,0034 & 0,0060 & -0,0065 \\ -0,0012 & 0,0060 & -0,0419 & 0,0375 \\ 0,0010 & -0,0065 & 0,0375 & 1,6255 \end{bmatrix}, \\
 Q_{423} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0012 & -0,0010 & 0,0012 \\ 0,0012 & -0,0037 & 0,0051 & -0,0073 \\ -0,0010 & 0,0051 & -0,0200 & 0,0377 \\ 0,0012 & -0,0073 & 0,0377 & -1,2633 \end{bmatrix}, \\
 Q_{424} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0012 & -0,0011 & 0,0012 \\ 0,0012 & -0,0037 & 0,0049 & -0,0073 \\ -0,0011 & 0,0049 & -0,0193 & 0,0374 \\ 0,0012 & -0,0073 & 0,0374 & -1,2610 \end{bmatrix}, \\
 Q_{431} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0010 & -0,0006 & 0,0009 \\ 0,0010 & -0,0031 & 0,0044 & -0,0061 \\ -0,0006 & 0,0044 & -0,0338 & 0,0364 \\ 0,0009 & -0,0061 & 0,0364 & -1,3465 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{432} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0010 & -0,0006 & 0,0009 \\ 0,0010 & -0,0030 & 0,0043 & -0,0062 \\ -0,0006 & 0,0043 & -0,0336 & 0,0366 \\ 0,0009 & -0,0062 & 0,0366 & -1,3444 \end{bmatrix}, \\
Q_{433} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0011 & -0,0006 & 0,0011 \\ 0,0011 & -0,0035 & 0,0040 & -0,0067 \\ -0,0006 & 0,0040 & -0,0151 & 0,0348 \\ 0,0011 & -0,0067 & 0,0348 & -1,2638 \end{bmatrix}, \\
Q_{434} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0011 & -0,0006 & 0,0011 \\ 0,0011 & -0,0035 & 0,0038 & -0,0067 \\ -0,0006 & 0,0038 & -0,0144 & 0,0346 \\ 0,0011 & -0,0067 & 0,0346 & -1,2619 \end{bmatrix}, \\
Q_{441} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0010 & -0,0006 & 0,0009 \\ 0,0010 & -0,0027 & 0,0038 & -0,0061 \\ -0,0006 & 0,0038 & -0,0339 & 0,0364 \\ 0,0009 & -0,0061 & 0,0364 & -1,3426 \end{bmatrix}, \\
Q_{442} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0010 & -0,0006 & 0,0009 \\ 0,0010 & -0,0026 & 0,0037 & -0,0062 \\ -0,0006 & 0,0037 & -0,0338 & 0,0366 \\ 0,0009 & -0,0062 & 0,0366 & -1,3393 \end{bmatrix}, \\
Q_{443} &= \begin{bmatrix} -0,0005 & 0,0011 & -0,0006 & 0,0011 \\ 0,0011 & -0,0031 & 0,0033 & -0,0068 \\ -0,0006 & 0,0033 & -0,0146 & 0,0352 \\ 0,0011 & -0,0068 & 0,0352 & -1,2641 \end{bmatrix}, \\
Q_{444} &= \begin{bmatrix} -0,0006 & 0,0011 & -0,0006 & 0,0011 \\ 0,0011 & -0,0031 & 0,0031 & -0,0067 \\ -0,0006 & 0,0031 & -0,0140 & 0,0349 \\ 0,0011 & -0,0067 & 0,0349 & -1,2612 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{90}$$

#### 4.2.2.1 Resultados de simulação do sistema 2DOF ball balancer

As Figuras 56-59 mostram os resultados de simulação do sistema *2DOF ball balancer*, descrito por (33), (86) e (87), com a regra de controle (71), considerando (88)-(90).

Durante a simulação os controladores devem fazer com que a bola siga uma referência,

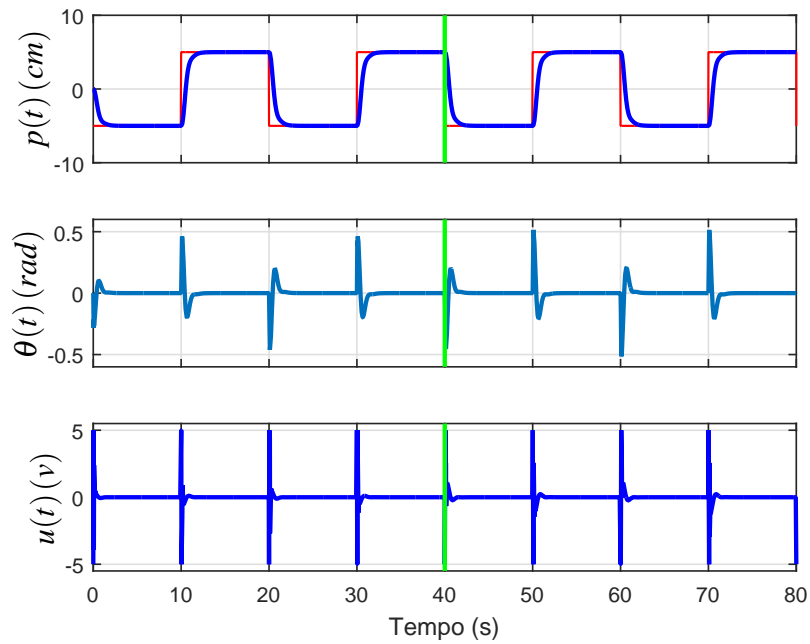
que é uma trajetória quadrada de 10 cm de lado. Foi considerado que apenas  $p$  e  $\theta$  estão disponíveis, e que  $\dot{p}$  e  $\dot{\theta}$  são estimados por meio de filtros derivativos  $G_f(s) = 20s/(s+20)$ , como sugerido pela fabricante (QUANSER, 2008).

Adicionalmente, a entrada de controle  $u(t)$  é limitada em  $\pm 5V$  através de um saturador, inserido via *Simulink*<sup>®</sup>, que seria usado em implementação para não danificar o atuador. Aos 40 segundos foi inserida uma falha no atuador de  $-50\%$ .

A simulação foi feita via *Simulink*<sup>®</sup>, com o solver ode3 (Bogacki-Shampine) e passo de 1 ms.

A Figura 56 apresenta a trajetória da bola (em azul) e a referência (em vermelho), além de mostrar o ângulo de carga  $\theta(t)$  e a entrada de controle  $u(t)$ .

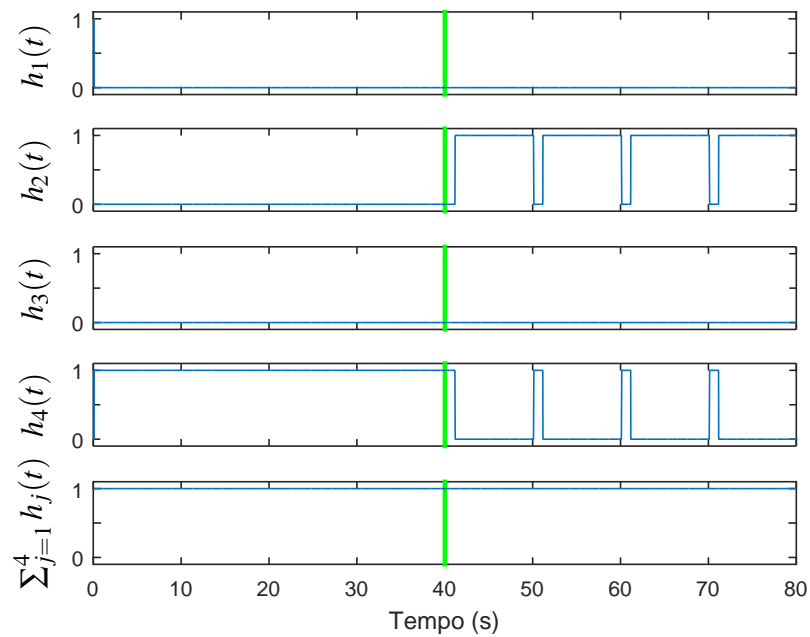
Figura 56 - Resultado de simulação do sistema *2DOF ball balancer*, descrito por (70), (2), (86) e (87), controlado por (71), considerando (88)-(90).



Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 57 mostra o ganho escolhido em cada instante pela lei de chaveamento (71). Para a chave escolhida  $j \in \mathbb{K}_4$ , em um certo instante  $t$ , tem-se  $h_j(t) = 1$  enquanto  $j = \lambda$ , já as demais chaves em que  $j \neq \lambda$  equivalem a  $h_j(t) = 0$ .

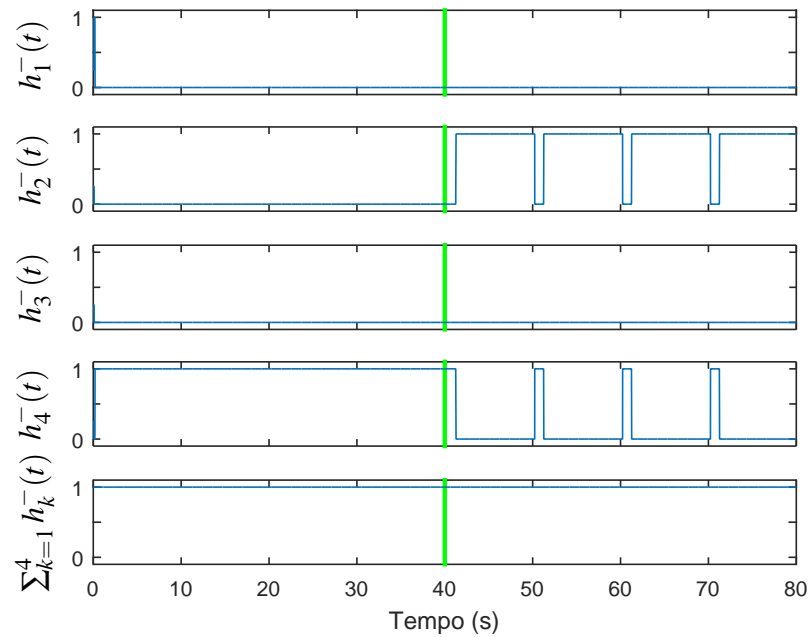
Figura 57 -  $h_j(t)$ ,  $j \in \mathbb{K}_4$  do sistema *2DOF ball balancer* em cada instante, controlado por (71), considerando (88)-(90).



Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 58 mostra o valor de  $h_k^-(t) = h_k(t - \zeta)$ ,  $k \in \mathbb{K}_4$ , sendo que foi adotado  $\zeta = 0, 1$ . De forma similar às Figuras 46 e 47, foi considerado  $h_k(t < 0) = \frac{1}{4}$ , sendo que  $k \in \mathbb{K}_4$ .

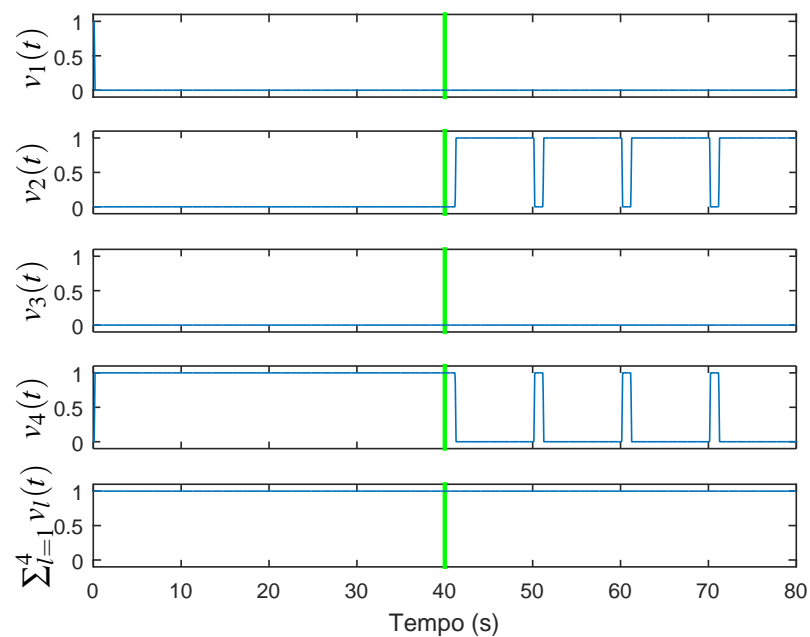
Figura 58 -  $h_k^-(t)$ ,  $k \in \mathbb{K}_4$  do sistema *2DOF ball balancer* em cada instante, controlado por (71), considerando (88)-(90).



Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 59 mostra o valor de  $v_l(t) = \frac{1}{\zeta} \int_{t-\zeta}^t h_l(t) dt$ ,  $l \in \mathbb{K}_4$ .

Figura 59 -  $v_l(t)$ ,  $l \in \mathbb{K}_4$  do sistema *2DOF ball balancer* em cada instante, controlado por (71), considerando (88)-(90).



Fonte: Elaboração do autor.

O controlador apresentou 9 comutações em  $\lambda(t)$ . Note na Figura 56 que os resultados foram satisfatórios, mesmo após a falha aos 40 segundos.

Como o método de controle utilizado nas Figuras 56 a 59 foi similar ao utilizado nas Figuras 9 a 12, sendo que ambos utilizaram taxa de decaimento  $\beta = 2,2$ , com a diferença que o controlador utilizado nas Figuras 56 a 59 empregou também o método anti-*chattering*, com  $\psi = 0,01$ , então a comparação entre os resultados obtidos na Figuras 9 a 12 e os obtidos nas Figuras 56 a 59 é uma boa forma de verificar a eficácia do método anti-*chattering*. Ambos apresentaram desempenho igualmente satisfatórios, mas o controlador que não utilizou o método anti-*chattering* (Figuras 9 a 12) apresentou 553 comutações em  $\sigma(t)$ , enquanto o controlador que utilizou o método (Figuras 56 a 59) precisou de apenas 9 comutações em  $\lambda(t)$ , comprovando a eficácia do método em reduzir o número necessário de comutações para garantir a estabilidade do sistema.

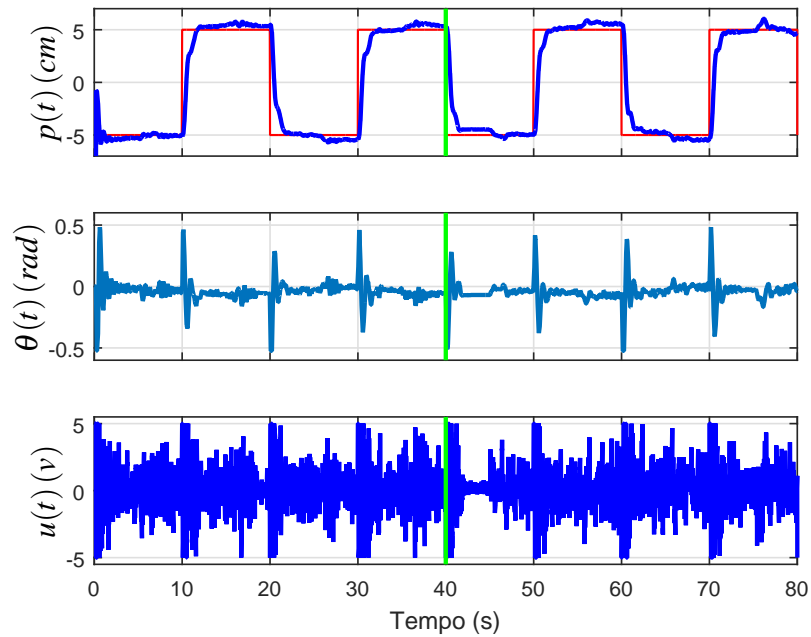
#### 4.2.2.2 Resultados de implementação no sistema 2DOF ball balancer

Assim como na simulação, durante a implementação o controlador deve fazer com que a bola se mova em uma trajetória quadrada de 10 cm de lado, sendo que o atuador está limitado a  $\pm 5V$  e perde 50% de sua potência aos 40 segundos. As variáveis de estado  $\dot{p}$  e  $\dot{\theta}$  são estimadas por meio de filtros derivativos  $G_f(s) = 20s/(s+20)$ . A implementação foi feita via *Simulink*<sup>®</sup>, com o solver ode1 (Euler) e passo de 1 ms.

As Figuras 60-63 mostram os resultados no eixo  $x$  da implementação no sistema 2DOF ball balancer, descrito por (33), (42) e (87), com a regra de controle (71), considerando (88)-(90).

A Figura 60 apresenta a trajetória da bola (em azul) e a referência (em vermelho), além de mostrar o ângulo de carga  $\theta(t)$  e a entrada de controle  $u(t)$ .

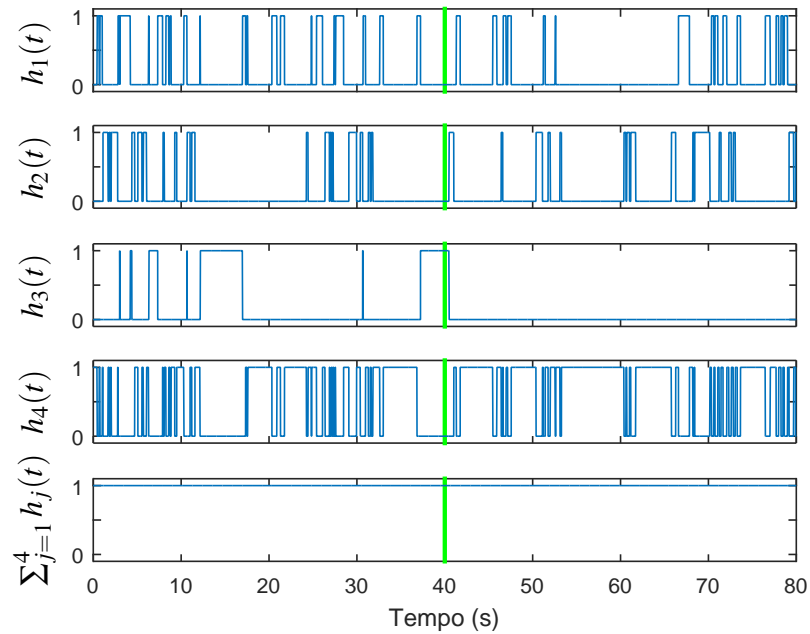
Figura 60 - Eixo  $x$ : resultado de implementação do sistema  $2DOF$  ball balancer, descrito por (70), (2), (86) e (87), controlado por (71), considerando (88)-(90).



Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 61 mostra o ganho escolhido em cada instante pela lei de chaveamento (71), no eixo  $x$ . Para a chave escolhida  $j \in \mathbb{K}_4$ , em um certo instante  $t$ , tem-se  $h_j(t) = 1$  enquanto  $j = \sigma$ , já as demais chaves em que  $j \neq \sigma$  equivalem a  $h_j(t) = 0$ .

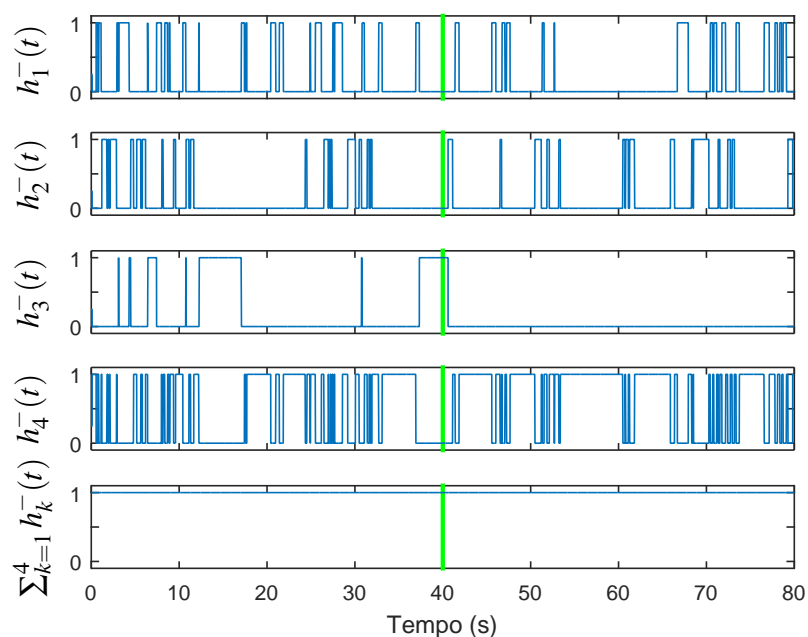
Figura 61 - Eixo  $x$ :  $h_j(t)$ ,  $j \in \mathbb{K}_4$ , do sistema *2DOF ball balancer* em cada instante, controlado por (71), considerando (88)-(90).



Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 62 mostra o valor de  $h_k^-(t) = h_k(t - \zeta)$ ,  $k \in \mathbb{K}_4$ , no eixo  $x$ . De forma similar às Figuras 4 e 5, foi considerado  $h_k(t < 0) = \frac{1}{4}$ , sendo que  $k \in \mathbb{K}_4$ .

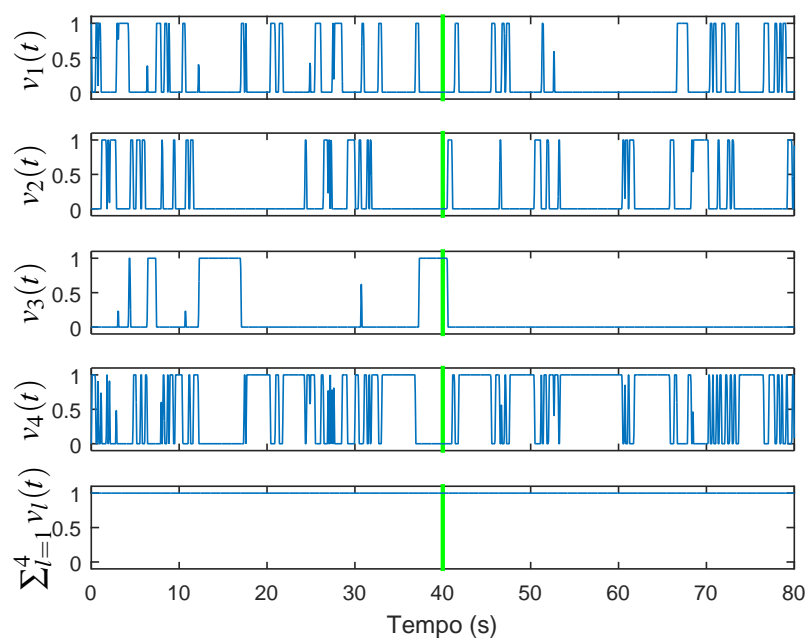
Figura 62 - Eixo  $x$ :  $h_k^-(t)$ ,  $k \in \mathbb{K}_4$ , do sistema *2DOF ball balancer* em cada instante, controlado por (71), considerando (88)-(90).



Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 63 mostra o valor de  $v_l(t) = \frac{1}{\zeta} \int_{t-\zeta}^t h_l(t) dt$ ,  $l \in \mathbb{K}_4$ , no eixo  $x$ .

Figura 63 - Eixo  $x$ :  $v_l(t)$ ,  $l \in \mathbb{K}_4$ , do sistema *2DOF ball balancer* em cada instante, controlado por (71), considerando (88)-(90).

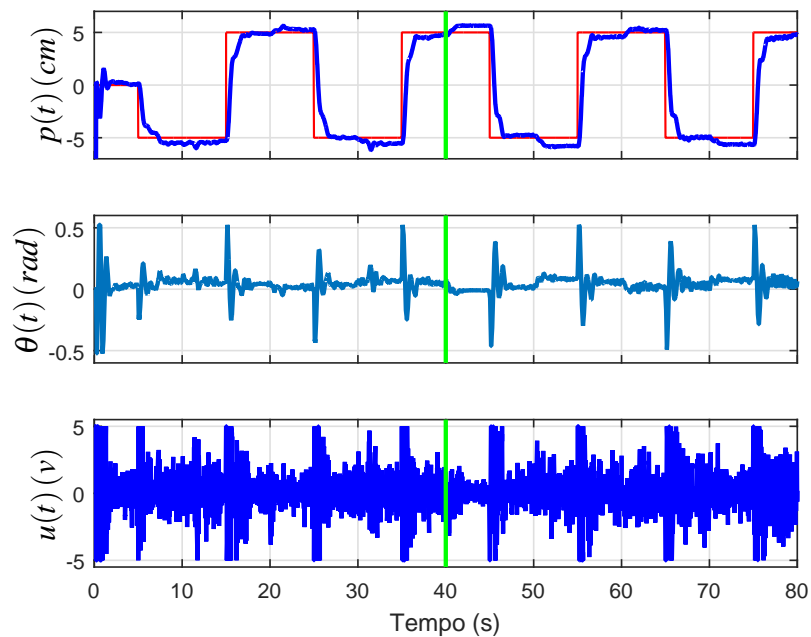


Fonte: Elaboração do autor.

No eixo  $x$  foram feitas 139 comutações em  $\lambda(t)$  e 6613 em  $\sigma(t)$ . As Figuras 64-67 mostram os resultados de implementação no eixo  $y$ .

A Figura 64 apresenta a trajetória da bola (em azul) e a referência (em vermelho), além de mostrar o ângulo de carga  $\theta(t)$  e a entrada de controle  $u(t)$ .

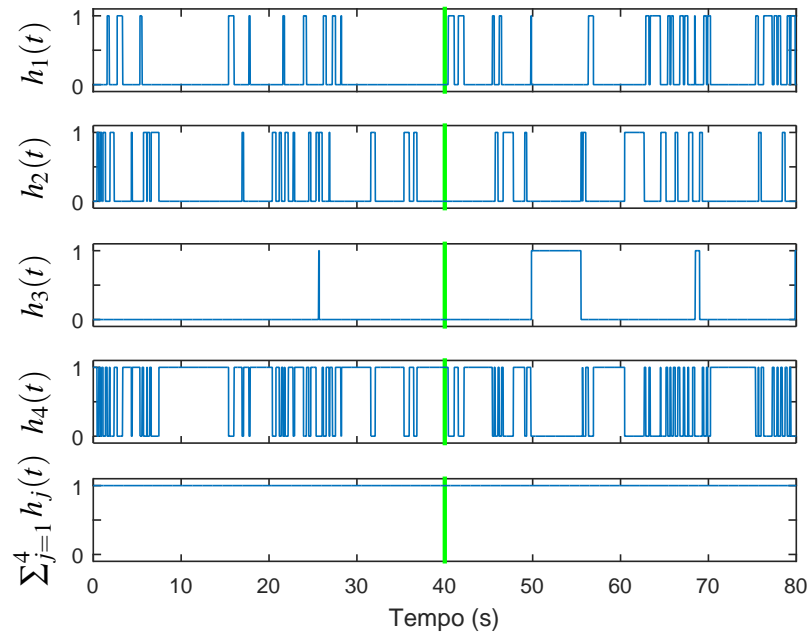
Figura 64 - Eixo  $y$ : resultado de implementação do sistema *2DOF ball balancer*, descrito por (70), (2), (86) e (87), controlado por (71), considerando (88)-(90).



Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 65 mostra o ganho escolhido em cada instante pela lei de chaveamento (71), no eixo  $y$ . Para a chave escolhida  $j \in \mathbb{K}_4$ , em um certo instante  $t$ , tem-se  $h_j(t) = 1$  enquanto  $j = \sigma$ , já as demais chaves em que  $j \neq \sigma$  equivalem a  $h_j(t) = 0$ .

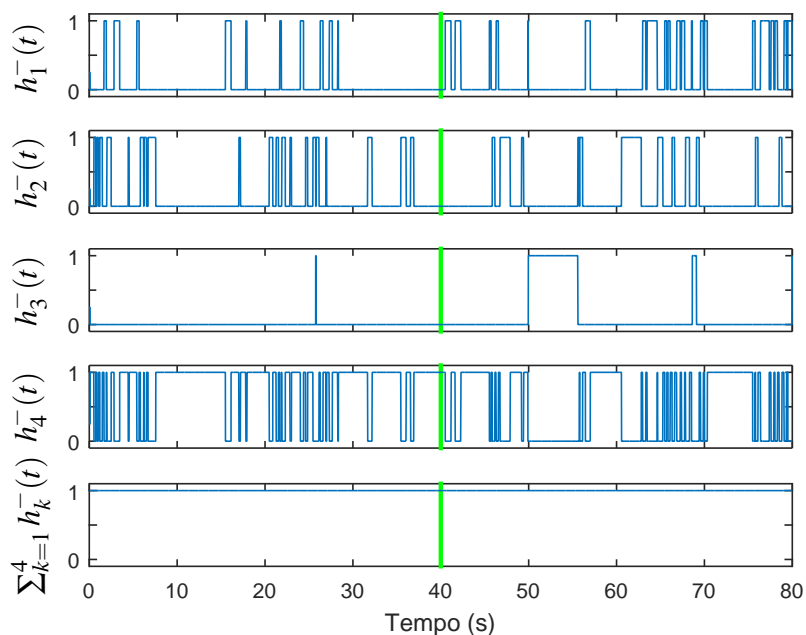
Figura 65 - Eixo y:  $h_j(t)$ ,  $j \in \mathbb{K}_4$ , do sistema *2DOF ball balancer* em cada instante, controlado por (71), considerando (88)-(90).



Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 66 mostra o valor de  $h_k^-(t) = h_k(t - \zeta)$ ,  $k \in \mathbb{K}_4$ , no eixo y. De forma similar às Figuras 4 e 5, foi considerado  $h_k(t < 0) = \frac{1}{4}$ , sendo que  $k \in \mathbb{K}_4$ .

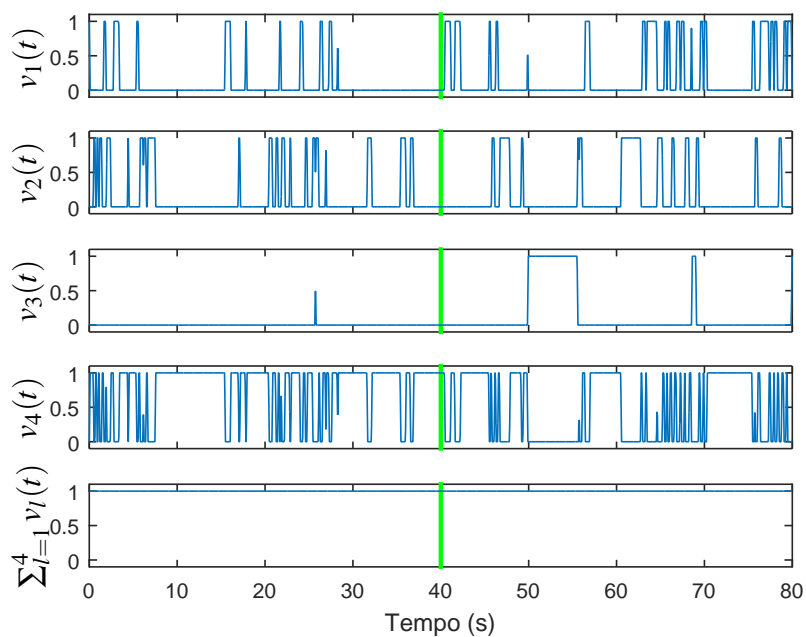
Figura 66 - Eixo y:  $h_k^-(t)$ ,  $k \in \mathbb{K}_4$ , do sistema *2DOF ball balancer* em cada instante, controlado por (71), considerando (88)-(90).



Fonte: Elaboração do autor.

A Figura 67 mostra o valor de  $v_l(t) = \frac{1}{\zeta} \int_{t-\zeta}^t h_l(t) dt$ ,  $l \in \mathbb{K}_4$ , no eixo y.

Figura 67 - Eixo y:  $v_l(t)$ ,  $l \in \mathbb{K}_4$ , do sistema *2DOF ball balancer* em cada instante, controlado por (71), considerando (88)-(90).



Fonte: Elaboração do autor.

Foram feitas 126 comutações em  $\lambda(t)$  e 6417 comutações em  $\sigma(t)$  no eixo  $y$ . É possível ver nas Figuras 60 a 67 e pelo número de comutações apresentados em ambos os eixos que o método anti-*chattering* obteve sucesso em diminuir o número de comutações necessário no ganho do controlador para garantir a estabilidade do sistema, além disso o sistema apresentou bom desempenho, mesmo após a falha de  $-50\%$  aos 40 segundos no atuador.

### 4.3 Considerações

A teoria de controle robusto chaveado com várias matrizes simétricas positivas  $P$  em conjunto com a teoria anti-*chattering*, apresentada no Teorema 6, teve resultados satisfatórios, já que conseguiu controlar um sistema que está fora da área de factibilidade do controlador que utiliza  $P$  constante, apresentado na Teoria 2, ao mesmo tempo em que conseguiu evitar o chaveamento de alta frequência e o *chattering* do sinal de controle, que ocorria quando não foi utilizada a teoria anti-*chattering*.

## 5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS

Foi proposto um controlador robusto chaveado que utiliza várias matrizes definidas positivas na definição da função de Lyapunov, que é não quadrática. Esse controlador apresenta a vantagem de ser menos conservador que outros métodos de controle chaveado que utilizam apenas uma matriz definida positiva na especificação da função de Lyapunov, além de manter a confiabilidade e garantir taxa de decaimento de  $\beta$ .

Para evitar que controladores chaveados troquem de ganho de forma muito rápida, foi proposto um método que permite ao sistema alterar o ganho utilizado apenas quando essa alteração ocasionar uma diminuição significativa na derivada da função de Lyapunov ( $\dot{V}(x(t))$ ). Evitar um chaveamento de alta frequência é importante porque o sistema real pode ser incapaz de mudar o ganho rapidamente, além de evitar problemas relacionados ao desgaste do sistema.

As teorias propostas foram demonstradas matematicamente, simuladas e implementadas em um sistema *2DOF ball balancer*.

Como trabalho futuro pretende-se projetar um controlador com falhas no vetor de estado, estimar o tempo mínimo entre os chaveamento na teoria anti-*chattering*, adicionar a teoria  $\mathcal{H}_\infty$  e considerar a saturação do sinal de controle.

## REFERÊNCIAS

- ALVES, U. N. L. T.; TEIXEIRA, M. C. M.; OLIVEIRA, D. R. de; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; SOUZA, W. A. de. Smoothing switched control laws for uncertain nonlinear systems subject to actuator saturation. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, West Sussex, v. 30, n. 8-10, p. 1408–1433, 2016. ISSN 08906327.
- BARTOLINI, G.; FERRARA, A.; USAI, E. Chattering avoidance by second-order sliding mode control. *IEEE Transactions on automatic control*, New York, v. 43, n. 2, p. 241–246, 1998.
- BOIKO, I.; FRIDMAN, L. Analysis of chattering in continuous sliding-mode controllers. *IEEE transactions on automatic control*, New York, v. 50, n. 9, p. 1442–1446, 2005.
- BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Philadelphia, PA: SIAM - Soc. Ind. Appl. Math., 1994. (Studies in Applied Mathematics, v. 15).
- CHERIFI, A.; GUELTON, K.; ARCESE, L.; LEITE, V. J. Global non-quadratic D-stabilization of Takagi–Sugeno systems with piecewise continuous membership functions. *Applied Mathematics and Computation*, Amsterdam, v. 351, p. 23–36, 2019.
- COUTINHO, P. H. S.; LAUBER, J.; BERNAL, M.; PALHARES, R. M. Efficient LMI conditions for enhanced stabilization of discrete-time Takagi–Sugeno models via delayed nonquadratic Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Piscataway, v. 27, n. 9, p. 1833–1843, 2019.
- GEROMEL, J. C.; COLANERI, P. Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, Philadelphia, v. 45, n. 5, p. 1915–1930, 2006.
- ISHII, H.; FRANCIS, B. A. Stabilizing a linear system by switching control with dwell time. In: IEEE. *Proceedings of the 2001 American Control Conference. (Cat. No. 01CH37148)*. [S.l.], 2001. v. 3, p. 1876–1881.
- LAM, H.-K. A review on stability analysis of continuous-time fuzzy-model-based control systems: From membership-function-independent to membership-function-dependent analysis. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, Amsterdam, v. 67, p. 390–408, 2018.
- LEE, H.; UTKIN, V. I. Chattering suppression methods in sliding mode control systems. *Annual reviews in control*, Amsterdam, v. 31, n. 2, p. 179–188, 2007.
- LENDEK, Z.; GUERRA, T.-M.; LAUBER, J. Controller design for ts models using

delayed nonquadratic Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Cybernetics*, New York, v. 45, n. 3, p. 439–450, 2014.

LEVANT, A. Chattering analysis. *IEEE transactions on automatic control*, New York, v. 55, n. 6, p. 1380–1389, 2010.

MÁRQUEZ, R.; GUERRA, T. M.; BERNAL, M.; KRUSZEWSKI, A. A non-quadratic Lyapunov functional for  $\mathcal{H}_\infty$  control of nonlinear systems via Takagi-Sugeno models. *Journal of the Franklin Institute*, Amsterdam, v. 353, n. 4, p. 781–796, 2016.

MINQING, X. Reliable robust guaranteed cost control of delta operator linear uncertain systems with sensor failure. In: *International Conference on Intelligent Computation Technology and Automation - Iccicta, 2., 2009, [S. L.]. Proceedings...* [S.l.: s.n.], 2009. v. 1, p. 834–837.

OLIVEIRA, D. R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ALVES, U. N. L. T.; SOUZA, W. A.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R. On local  $\mathcal{H}_\infty$  switched controller design for uncertain T-S fuzzy systems subject to actuator saturation with unknown membership functions. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 344, p. 1 – 26, 2018. ISSN 0165-0114. Theme: Control Engineering. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165011417304281>>.

OLIVEIRA, D. R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; SOUZA, W. A.; MOREIRA, M. R.; SILVA, J. H. P. Projeto de controle robusto  $\mathcal{H}_\infty$  chaveado: Implementação prática em um sistema de suspensão ativa. In: *Congresso Brasileiro De Automática - CBA, 20., 2014, Belo Horizonte. Anais...* Belo Horizonte, MG: [s.n.], 2014. p. 2194–2201.

QUANSER. *2D ball balancer control using QUARC: instructor manual*. Canadá, 2008. 87 p.

SILVA, E. R. P.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R. Robust controller implementation via state-derivative feedback in an active suspension system subjected to fault. In: *2013 Conference on Control and Fault-Tolerant Systems (SysTol)*. [S.l.: s.n.], 2013. p. 752–757.

SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. On switched regulator design of uncertain nonlinear systems using Takagi-Sugeno fuzzy models. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, Piscataway, v. 22, n. 6, p. 1720–1727, Dec 2014.

SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; SANTIM, M. P. A.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. On switched control design of linear time-invariant systems with polytopic uncertainties. *Mathematical Problems in Engineering*, New York, v. 2013, p. 10, 2013.

TANAKA, K.; HORI, T.; WANG, H. O. A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems. *IEEE Transactions on fuzzy systems*, Piscataway, v. 11, n. 4, p. 582–589, 2003.

TANIGUCHI, T.; K.; OHATAKE, H.; WANG, H. O. Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, Piscataway, v. 9, n. 4, p. 525–537, 2001.

- VAFAMAND, N. Global non-quadratic Lyapunov-based stabilization of T–S fuzzy systems: A descriptor approach. *Journal of Vibration and Control*, London, v. 26, n. 19-20, p. 1765–1778, 2020.
- VEILLETTE, R.; MEDANIC, J.; PERKINS, W. R. Design of reliable control systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, Piscataway, v. 37, n. 3, p. 290–304, Mar 1992.
- WICKS, M. A.; PELETIES, P.; DECARLO, R. A. Construction of piecewise Lyapunov functions for stabilizing switched systems. In: IEEE. *Proceedings of 1994 33rd IEEE Conference on Decision and Control*. [S.l.], 1994. v. 4, p. 3492–3497.
- ZELENTSOVSKY, A. Nonquadratic Lyapunov functions for robust stability analysis of linear uncertain systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 39, n. 1, p. 135–138, 1994.