



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ÁREA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA
MATEMÁTICA E SEUS FUNDAMENTOS FILOSÓFICO-CIENTÍFICOS

**Aspectos do Pensamento Computacional na Construção
de Fractais com o software GeoGebra**

LARA MARTINS BARBOSA

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO

2019

Lara Martins Barbosa

**Aspectos do Pensamento Computacional na Construção de Fractais com o
Software GeoGebra**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Campus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Scucuglia
Rodrigues da Silva

Rio Claro – SP
2019

B238a Barbosa, Lara Martins
Aspectos do Pensamento Computacional na Construção de
Fractais com o software GeoGebra / Lara Martins Barbosa. --
Rio Claro, 2019
168 p. : il., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista
(Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientador: Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva

1. Graduação em Matemática. 2. Ensino de Matemática. 3.
Experimento de Ensino. 4. Educação Matemática. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Lara Martins Barbosa

Aspectos do Pensamento Computacional na Construção de Fractais com o Software GeoGebra

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Campus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva – Orientador
IBILCE/UNESP/São José do Rio Preto (SP)

Prof. Dr. Marcus Vinicius Maltempi
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Profa. Dra. Daise Lago Pereira Souto
UNEMAT/Barra do Bugres (MT)

Resultado: Aprovada.

Rio Claro, SP, 11 de janeiro de 2019

Dedico esta dissertação à minha mãe Ligia Aparecida Martins Barbosa, ao meu pai Alexandre das Neves Barbosa e à minha irmã Ana Clara Martins Barbosa.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço de forma geral todas pessoas que contribuíram direta ou indiretamente para que este estudo se tornasse realidade.

Aos meus pais Ligia e Alexandre, que são meu porto seguro, cujo amparo e carinho me fizeram sentir, mesmo longe, acolhida pelo imenso amor. Obrigada por me ajudarem em todos os momentos, sempre rezando e intercedendo por mim. Obrigada por tornarem possível essa realização e me apoiarem em minhas escolhas.

Agradeço à minha irmã Ana Clara, pessoa essencial na minha vida, que nesses últimos dois anos se mostrou uma mulher madura e forte, mas que sempre será o “toquinho” da família.

Ao professor Ricardo Scucuglia pelas orientações e ensinamentos. A realização deste trabalho não seria concretizada sem sua imensa colaboração e paciência. Obrigada por todos os momentos dedicados a mim e a esta pesquisa.

Agradeço ao professor Marcus Maltempi e à professora Deise Souto pela participação nas bancas de qualificação e defesa. Obrigada pelas contribuições e por aceitarem integrar este trabalho.

Ao professor Marcelo Borba, coordenador do GPIMEM (Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática), cujos conselhos, incentivos e “caminhadas unespianas” foram de extrema importância, dando força e colaborando para minha formação profissional.

Ao GPIMEM e seus pesquisadores por me ensinarem, a cada dia que passa, ler, discutir, criticar e contribuir. Obrigada por me fazerem amadurecer como pesquisadora a cada encontro.

Agradeço a todos os colegas e amigos do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEM) que de alguma forma me influenciaram na escrita desta dissertação. As discussões após os Seminários e Jornadas me motivaram a conhecer diversos caminhos da Educação Matemática.

Agradeço à Blenda, Fabrício, Gabriel, Luana, Marcelo e Matheus, sujeitos desta pesquisa, por participarem das sessões de experimento de ensino e tornarem possível a sua produção de dados.

Aos meus amigos de graduação Anielle, Fernando e Mateus pelos encontros semanais via Skype que trouxeram alegria e conforto aos meus dias.

À Hannah, a alegria-alegria da minha vida rio-clarense. Obrigada por me fazer sentir a vida mais leve, por compartilhar emoções nos sambas e teatros e por ter me dado a oportunidade de conhecer tantos outros amigos que hoje formam nossa família.

Agradeço a Bruna e Iara, amigas que Rio Claro me deu e que compartilharam momentos festivos, e não tão festivos assim, durante todo o processo de escrita. Obrigada, todo o apoio de vocês fez com que nosso vínculo se fortalecesse.

À minha “pitica” Camila, amiga de infância que me afeta a cada ligação, encontro ou mensagem. Obrigada por ter um coração tão doce.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

Esta dissertação apresenta uma pesquisa que teve o objetivo de investigar aspectos do Pensamento Computacional (PC) emergentes em um grupo de estudantes de graduação em Matemática ao explorarem a Geometria Fractal com o software GeoGebra. Especificamente, buscou-se analisar como tais aspectos se manifestaram nesse grupo ao construírem alguns fractais no software citado. Esta pesquisa seguiu uma abordagem metodológica qualitativa. Foram realizados experimentos de ensino com três duplas de estudantes de graduação em Matemática da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP), Campus Rio Claro. Tais experimentos de ensino se constituíram de quatro sessões de ensino com cada dupla, que compuseram o cenário de pesquisa do trabalho. Os procedimentos metodológicos de registro utilizados foram: filmagens de todas as sessões de ensino; captação da tela do computador; roteiro impresso das atividades; entrevistas após cada sessão; e escrita de diários de campo. Assim, os dados desta pesquisa se constituíram de: vídeo gravações do ambiente; vídeo gravações da tela do computador; respostas das atividades; e observações dos diários de campo. Os resultados apontam que as diferentes estratégias adotadas para a construção dos fractais no software GeoGebra, possibilitaram a manifestação de diversas habilidades presentes no PC, que convergiram em cinco categorias nesse estudo: pensamento algorítmico; decomposição e generalização; padrões e abstração; representação e automação; e avaliação. Em particular, identificou-se indícios de que as habilidades completam uma a outra e que tais aspectos podem se manifestar em conjunto.

Palavras-Chave: Graduação em Matemática. Ensino de Matemática. Experimento de Ensino. Educação Matemática.

ABSTRACT

This dissertation presents a research that aims to investigate emerging aspects of Computational Thinking (PC) in a group of undergraduate students in Mathematics when exploring Fractal Geometry with GeoGebra software. Specifically, we sought to analyze how these aspects manifested themselves in this group by constructing some fractals in the cited software. This research followed a qualitative methodological approach. Teaching experiments were carried out with three pairs of undergraduate students in Mathematics from the São Paulo State University "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP), Rio Claro Campus. These teaching experiments consisted of four teaching sessions with each pair, which made up the research scenario of the work. The methodological procedures for registration used were: filming of all teaching sessions; computer screen capture; printed schedule of activities; interviews after each session; and writing of field diaries. Thus, the data of this research consisted of: video recordings of the environment; video recordings of computer screen; activity responses; and field diary observations. The results point out that the different strategies adopted for the construction of the fractals in the GeoGebra software, allowed the manifestation of several affordances present in the PC, that converged in five categories in this study: algorithmic thinking; decomposition and generalization; patterns and abstraction; representation and automation; and evaluation. In particular, evidence has been identified that one affordances complements the other, and that such aspects can manifest themselves together.

Keywords: Graduation in Mathematics. Mathematics Teaching. Teaching Experiment. Mathematical Education.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Floco de Neve de Koch.....	24
Figura 2 - Voos de Lévy	24
Figura 3 - Conjunto de Cantor.....	25
Figura 4 - Conjunto de Julia	25
Figura 5 - Representação aproximada de uma árvore, usando figuras da Geometria Euclidiana	27
Figura 6 - Representação aproximada de uma árvore, usando princípios da Geometria Fractal	27
Figura 7 - Seis iterações do Triângulo de Sierpinski.....	31
Figura 8 - Quatro iterações do Triângulo de Sierpinski	32
Figura 9 - Quatro iterações do Tapete de Sierpinski	33
Figura 10 - Duas iterações da Esponja de Menger	34
Figura 11 - Construção do Fractal Árvore Pitagórica no GeoGebra	59
Figura 12 - Quatro iterações do Fractal Árvore Pitagórica na Janela de Visualização 2D	60
Figura 13 - Quatro iterações do Fractal Árvore Pitagórica na Janela de Visualização 3D	60
Figura 14 - Fractal Árvore Pitagórica na Janela de Visualização 2D com ângulo de 15°, 30° e 65°	61
Figura 15 - Fractal Árvore Pitagórica na Janela de Visualização 3D com ângulo de 25°, 60° e 80°	61
Figura 16 - QRCode que dá acesso a GIFs da Árvore Pitagórica	62
Figura 17 - Blenda e Gabriel	62
Figura 18 - Fabrício e Matheus.....	63
Figura 19 - Luana e Marcelo	63
Figura 20 - Interface do software GeoGebra	64
Figura 21 - Exibição da Janela de Visualização 3D	65
Figura 22 - Criação de uma nova ferramenta	65
Figura 23 - Triângulo de Sierpinski e Tapete de Sierpinski gerados no GeoGebra	67
Figura 24 - Tetraedro de Sierpinski e Esponja de Menger gerados no GeoGebra	67
Figura 25 - Arquivo “Triângulo de Sierpinski”.....	69
Figura 26 - Construção do Tapete de Sierpinski apresentada aos participantes com $n = 1$ (iteração zero).....	73

Figura 27 - Construção do Tapete de Sierpinski apresentada aos participantes com $n = 5$ (terceira iteração).....	74
Figura 28 - QRCode que dá acesso as construções apresentadas na 1ª parte das atividades ...	75
Figura 29 - Início da construção - Triângulo de Sierpinski - Blenda e Gabriel (1ª Tentativa).	79
Figura 30 - Construção concluída - Triângulo de Sierpinski - Blenda e Gabriel (1ª Tentativa)	79
Figura 31 - Início da construção - Triângulo de Sierpinski - Blenda e Gabriel (2ª tentativa)..	80
Figura 32 - Construção concluída - Triângulo de Sierpinski - Blenda e Gabriel (2ª Tentativa)	81
Figura 33 - Objetos sendo condicionados - Triângulo de Sierpinski - Blenda e Gabriel (2ª tentativa)	81
Figura 34 - QRCode que dá acesso ao arquivo .ggb e ao GIF, criados por Blenda e Gabriel na primeira atividade.	82
Figura 35 - Aspectos do PC que emergiram da construção do Triângulo de Sierpinski - Blenda e Gabriel (2ª tentativa).....	84
Figura 36 - Início da construção - Triângulo de Sierpinski - Fabrício e Matheus.....	85
Figura 37 - Criação da nova ferramenta - Triângulo de Sierpinski - Fabrício e Matheus.....	86
Figura 38 - Análise dos polígonos pela Janela de Álgebra - Triângulo de Sierpinski - Fabrício e Matheus.....	87
Figura 39 - Construção concluída - Triângulo de Sierpinski - Fabrício e Matheus	88
Figura 40 - QRCode que dá acesso ao arquivo .ggb e ao GIF, criados por Fabrício e Matheus na primeira atividade.	88
Figura 41 - Aspectos do PC que emergiram da construção do Triângulo de Sierpinski - Fabrício e Matheus.....	89
Figura 42 - Criação dos pontos médios de forma algébrica - Triângulo de Sierpinski - Luana e Marcelo.....	90
Figura 43 - Início da construção - Triângulo de Sierpinski - Luana e Marcelo	91
Figura 44 - Construção concluída - Triângulo de Sierpinski - Luana e Marcelo	91
Figura 45 - QRCode que dá acesso ao arquivo .ggb e ao GIF, criados por Luana e Marcelo na primeira atividade.	92
Figura 46 - Aspectos do PC que emergiram da construção do Triângulo de Sierpinski - Luana e Marcelo	93
Figura 47 - Início da construção - Tetraedro de Sierpinski - Blenda e Gabriel.....	94
Figura 48 - Construção da primeira iteração - Tetraedro de Sierpinski - Blenda e Gabriel.....	95

Figura 49 - Avaliação na construção dos tetraedros da primeira iteração - Tetraedro de Sierpinski - Blenda e Gabriel.....	96
Figura 50 - Criação da nova ferramenta - Tetraedro de Sierpinski - Blenda e Gabriel.....	97
Figura 51 - Construção concluída - Tetraedro de Sierpinski - Blenda e Gabriel	97
Figura 52 - QRCode que dá acesso ao arquivo .ggb e ao GIF, criados por Blenda e Gabriel na segunda atividade.	98
Figura 53 - Aspectos do PC que emergiram da construção do Tetraedro de Sierpinski - Blenda e Gabriel	98
Figura 54 - Construção concluída - Tetraedro de Sierpinski - Fabrício e Matheus (1ª tentativa)	100
Figura 55 - Erro apontado pelo Geogebra durante criação da nova ferramenta - Tetraedro de Sierpinski - Fabrício e Matheus (2ª tentativa)	101
Figura 56 - Iteração zero - Tetraedro de Sierpinski - Fabrício e Matheus.....	102
Figura 57 - Iteração um - Tetraedro de Sierpinski - Fabrício e Matheus	102
Figura 58 - Construção concluída - Tetraedro de Sierpinski - Fabrício e Matheus.....	102
Figura 59 - QRCode que dá acesso ao arquivo .ggb e ao GIF, criados por Fabrício e Matheus na segunda atividade.....	103
Figura 60 - Aspectos do PC que emergiram da construção do Tetraedro de Sierpinski - Fabrício e Matheus (2ª tentativa)	103
Figura 61 - Início da construção - Tetraedro de Sierpinski - Luana e Marcelo.....	104
Figura 62 - Tetraedros da primeira iteração - Tetraedro de Sierpinski - Luana e Marcelo	105
Figura 63 - Seleção de objetos na Janela de Álgebra - Tetraedro de Sierpinski - Luana e Marcelo	106
Figura 64 - Construção concluída - Tetraedro de Sierpinski - Luana e Marcelo	106
Figura 65 - QRCode que dá acesso ao arquivo .ggb e ao GIF, criados por Luana e Marcelo na segunda atividade.	107
Figura 66 - Aspectos do PC que emergiram da construção do Tetraedro de Sierpinski - Luana e Marcelo	107
Figura 67 - Início da construção - Tapete de Sierpinski - Luana e Marcelo (1ª tentativa).....	108
Figura 68 - Criação do quadrado central - Tapete de Sierpinski - Luana e Marcelo (1ª tentativa)	109
Figura 69 - Início da construção - Tapete de Sierpinski - Luana e Marcelo (4ª tentativa).....	110
Figura 70 - Aplicação do comando homotetia - Tapete de Sierpinski - Luana e Marcelo (4ª tentativa)	111

Figura 71- Segunda aplicação do comando homotetia - Tapete de Sierpinski - Luana e Marcelo (4ª tentativa).....	111
Figura 72 - Mudança de estratégia na aplicação do comando homotetia - Tapete de Sierpinski - Luana e Marcelo (4ª tentativa).....	112
Figura 73 - Primeira iteração - Tapete de Sierpinski - Luana e Marcelo (4ª tentativa).....	113
Figura 74 - Construção concluída - Tapete de Sierpinski - Luana e Marcelo (4ª tentativa) ..	113
Figura 75 - QRCode que dá acesso ao arquivo .ggb e ao GIF, criados por Luana e Marcelo na terceira atividade.....	114
Figura 76 - Aspectos do PC que emergiram da construção do Tapete de Sierpinski - Luana e Marcelo (4ª tentativa)	114
Figura 77 - Início da construção - Tapete de Sierpinski - Blenda e Gabriel (1ª tentativa).....	116
Figura 78 - Criação dos pontos no centro do quadrado inicial - Tapete de Sierpinski - Blenda e Gabriel (1ª tentativa).....	116
Figura 79 - Objetos finais da nova ferramenta - Tapete de Sierpinski - Blenda e Gabriel (1ª tentativa)	117
Figura 80 - Aplicação da nova ferramenta - Tapete de Sierpinski - Blenda e Gabriel (1ª tentativa)	117
Figura 81 - Construção de retângulos para gerar a terceira iteração - Tapete de Sierpinski - Blenda e Gabriel (1ª tentativa).....	118
Figura 82 - Primeira iteração - Tapete de Sierpinski - Blenda e Gabriel (2ª tentativa).....	119
Figura 83 - Construção concluída - Tapete de Sierpinski - Blenda e Gabriel (2ª tentativa) ..	120
Figura 84 - QRCode que dá acesso ao arquivo .ggb e ao GIF, criados por Blenda e Gabriel na terceira atividade.....	120
Figura 85 - Aspectos do PC que emergiram da construção do Tapete de Sierpinski - Blenda e Gabriel (2ª tentativa).....	121
Figura 86 - Construção inicial - Tapete de Sierpinski - Fabrício e Matheus (1ª tentativa)	122
Figura 87 - Criação do quadrado central - Tapete de Sierpinski - Fabrício e Matheus (1ª tentativa)	123
Figura 88 - Segunda iteração - Tapete de Sierpinski - Fabrício e Matheus (1ª tentativa)	123
Figura 89 - Erro na aplicação da segunda nova ferramenta - Tapete de Sierpinski - Fabrício e Matheus (1ª tentativa).....	124
Figura 90 - Programação do ponto - Tapete de Sierpinski - Fabrício e Matheus (2ª tentativa)	124
Figura 91 - Testando a nova ferramenta - Tapete de Sierpinski - Fabrício e Matheus	125

Figura 92 - Construção concluída - Tapete de Sierpinski - Fabrício e Matheus (2ª tentativa)	126
Figura 93 - QRCode que dá acesso ao arquivo .ggb e ao GIF, criados por Fabrício e Matheus na terceira atividade.	126
Figura 94 - Aspectos do PC que emergiram da construção do Tapete de Sierpinski - Fabrício e Matheus (2ª tentativa)	127
Figura 95 - Ausência de quadrado na terceira iteração - Tapete de Sierpinski - Fabrício e Matheus	127
Figura 96 - Construção inicial - Esponja de Menger - Luana e Marcelo (1ª tentativa)	128
Figura 97 - Primeira iteração - Esponja de Menger - Luana e Marcelo (1ª tentativa)	129
Figura 98 - Aplicação da nova ferramenta - Esponja de Menger - Luana e Marcelo (1ª tentativa)	130
Figura 99 - Construção concluída - Esponja de Menger - Luana e Marcelo	131
Figura 100 - QRCode que dá acesso ao arquivo .ggb e ao GIF, criados por Luana e Marcelo na quarta atividade.	131
Figura 101 - Aspectos do PC que emergiram da construção da Esponja de Menger - Luana e Marcelo (2ª tentativa)	132
Figura 102 - Início da construção - Esponja de Menger - Fabrício e Matheus	133
Figura 103 - Criação de esfera destacando os pontos de intersecção - Esponja de Menger - Fabrício e Matheus (1ª tentativa)	134
Figura 104 - Aplicação do comando Ponto - Esponja de Menger - Fabrício e Matheus (1ª tentativa)	135
Figura 105 - Aplicação da ferramenta "CUBO1" - Esponja de Menger - Fabrício e Matheus (1ª tentativa)	135
Figura 106 - Uso da seta do teclado na digitação do comando - Esponja de Menger - Fabrício e Matheus (4ª tentativa)	136
Figura 107 - Criação do ponto U - Esponja de Menger - Fabrício e Matheus - (4ª tentativa)	137
Figura 108 - Homotetia em relação ao cubo da primeira iteração - Esponja de Menger - Fabrício e Matheus (4ª tentativa)	137
Figura 109 - QRCode que dá acesso ao arquivo .ggb e ao GIF, criados por Fabrício e Matheus na quarta atividade.	138
Figura 110 - Aspectos do PC que emergiram da construção da Esponja de Menger - Fabrício e Matheus (4ª tentativa)	138
Figura 111 - Construção inicial - Esponja de Menger - Blenda e Gabriel (1ª tentativa)	139

Figura 112 - Divisão de uma face em nove quadrados - Esponja de Menger - Blenda e Gabriel (1ª tentativa).....	140
Figura 113 - Criação de segmentos com comprimento fixo - Esponja de Menger - Blenda e Gabriel (1ª tentativa).....	140
Figura 114 - Erro na aplicação da nova ferramenta - Esponja de Menger - Blenda e Gabriel (1ª tentativa)	141
Figura 115 - Construção final - Esponja de Menger - Blenda e Gabriel (2ª tentativa)	143
Figura 116 - QRCode que dá acesso ao arquivo .ggb e ao GIF, criados por Blenda e Gabriel na quarta atividade.....	143
Figura 117 - Aspectos do PC que emergiram da construção da Esponja de Menger - Blenda e Gabriel (2ª tentativa).....	144

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Habilidades relacionadas ao Pensamento Computacional	40
Quadro 2 - Caracterizando as habilidades do Pensamento Computacional na Matemática.....	41
Quadro 3 - Habilidades do Pensamento Computacional em diferentes estudos	42
Quadro 4 - Pensamento algorítmico presente nos dados	44
Quadro 5 - Decomposição e generalização presente nos dados	46
Quadro 6 - Padrões e abstração presente nos dados	48
Quadro 7 - Representação e automação presente nos dados	50
Quadro 8 - Avaliação presente nos dados	51
Quadro 9 - Apresentação do fractal.....	68
Quadro 10 - Instrução para início da atividade 1.....	69
Quadro 11 - Questão 1 da 1ª Atividade	70
Quadro 12 - Questão de 2 a 6 da 1ª Atividade - Generalizando.....	70
Quadro 13 - Questão 7 da 1ª Atividade	71
Quadro 14 - Questão de 8 e 9 da 1ª Atividade - Generalizando.....	71
Quadro 15 - Questão 10 da 1ª Atividade - Dimensão Fractal	71
Quadro 16 - 2ª parte da 1ª Atividade - Construção.....	72
Quadro 17 - Parte do Protocolo de Construção do Triângulo de Sierpinski apresentado aos alunos.....	72
Quadro 18 - Instrução para início da atividade 3.....	73
Quadro 19 - Questões 2ª Atividade	74
Quadro 20 - 2ª parte da 2ª Atividade - Construção.....	74
Quadro 21 - Modelo de análise de vídeo	76

LISTA DE SIGLAS

CSTA – Computer Science Teachers Assossiation

IGCE – Instituto de Geociências e Ciências Exatas

IGUDI – Instituto de GeoGebra de Uberlândia

ISTE – International Society for Technology in Education

PC – Pensamento Computacional

PET – Programa de Educação Tutorial

PPGEM – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

TD – Tecnologias Digitais

UFU – Universidade Federal de Uberlândia

UNESP – Universidade Estadual Paulista

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	19
1.1 Trajetória da pesquisadora.....	19
1.2 Relevância e Objetivo.....	20
1.3 Estrutura da dissertação.....	21
2 A GEOMETRIA FRACTAL	23
2.1 Alguns dados históricos.....	23
2.2 Adotando uma concepção.....	26
2.3 Fractais explorados na pesquisa	30
2.3.1 O Triângulo de Sierpinski	31
2.3.2 O Tetraedro de Sierpinski.....	32
2.3.3 O Tapete de Sierpinski	33
2.3.4 A Esponja de Menger	33
2.4 Algumas pesquisas já realizadas com a Geometria Fractal no âmbito da Educação Matemática	34
3 O PENSAMENTO COMPUTACIONAL.....	37
3.1 O surgimento do termo e suas definições.....	37
3.2 Habilidades do Pensamento Computacional adotadas na pesquisa.....	43
3.2.1 Pensamento algorítmico	43
3.2.2 Decomposição e generalização.....	45
3.2.3 Padrões e abstração.....	46
3.2.4 Representação e automação.....	48
3.2.5 Avaliação	50
3.3 Inserção do Pensamento Computacional na Educação.....	51
4 METODOLOGIA DE PESQUISA E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....	55
4.1 Abordagem metodológica	55
4.2 Produção de dados	57
4.3 Os participantes	58
4.4 O GeoGebra e a criação de ferramentas	63
4.5 As atividades	66
4.5.1 Atividade 1 – Estudando e construindo o Triângulo de Sierpinski	68
4.5.2 Atividade 3 – Estudando e construindo o Tapete de Sierpinski	73

4.6 Método de análise de vídeos e descrição dos dados.....	75
5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS.....	77
5.1 Habilidades do Pensamento Computacional que se manifestaram na Atividade 1 - Triângulo de Sierpinski	78
5.2 Habilidades do Pensamento Computacional que se manifestaram na Atividade 2 - Tetraedro de Sierpinski	93
5.3 Habilidades do Pensamento Computacional que se manifestaram na Atividade 3 -Tapete de Sierpinski	108
5.4 Habilidades do Pensamento Computacional que se manifestaram na Atividade 4 - Esponja de Menger	128
5.5 Considerações Gerais sobre as explorações das atividades.....	144
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	147
REFERÊNCIAS	151
APÊNDICES	158
APÊNDICE A	158
Atividade 1 - Estudando e construindo o Triângulo de Sierpinski.....	158
Atividade 2 - Estudando e construindo o Tetraedro de Sierpinski	160
Atividade 3 - Estudando e construindo o Tapete de Sierpinski.....	161
Atividade 4 - Estudando e construindo a Esponja de Menger.....	162
APÊNCIDE B.....	164
Protocolo de Construção do Tapete de Sierpinski programado pela pesquisadora no GeoGebra	165
Protocolo de Construção do Esponja de Menger programado pela pesquisadora no GeoGebra	165
APÊNDICE C.....	167

1 INTRODUÇÃO

1.1 Trajetória da pesquisadora

No ano de 2010 ingressei no curso de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia (UFU), Campus Uberlândia. Já no segundo semestre do curso, tive a oportunidade de entrar como bolsista no Programa de Educação Tutorial (PET), no qual pude ter um maior contato com o mundo acadêmico. Desenvolvi pesquisas de Iniciação Científica em diferentes temas, entre eles o estudo de Frações Contínuas, Teoria dos Jogos e Computação Gráfica.

No início do quinto período da graduação fiz a escolha pela modalidade licenciatura e fui em busca de uma professora que me orientasse na escrita da monografia. A professora que me interessei sugeriu que trabalhássemos com a exploração de conceitos fractais e construção dos mesmos em diferentes softwares, entre eles o GeoGebra. No primeiro dia que conheci os fractais já me apaixonei, comecei a construí-los e investigá-los e não parei mais. Trabalhos foram apresentados em conferências e produzidos artigos sobre essa Geometria e suas conexões (BARBOSA, L. M.; BERTONE, A. M. A. ; SILVA JUNIOR, L. C., 2013; BARBOSA, L. M.; BERTONE, A. M. A., 2013a; BARBOSA, L. M.; BERTONE, A. M. A., 2013b; BARBOSA, L. M.; BERTONE, A. M. A., 2013 c; BARBOSA, L. M.; BERTONE, A. M. A., 2013 d; BERTONE, A. M. A.; BARBOSA, L. M.; MATOS, F. F. M., 2013). Todos esses estudos se compilaram em um trabalho intitulado “Fractais: Dimensão, Auto semelhança e Construções nos softwares livres” que apresentei como Trabalho Final de Curso. Essa parceria orientadora-orientanda deu tão certo que nos empenhamos para reativar o Instituto de GeoGebra de Uberlândia (IGUDI) e então pude representar o instituto em eventos. Mesmo após a graduação continuamos a parceria que rendeu outros estudos. (BARBOSA, L. M., BERTONE, A. M. A., COELHO, A G. V., 2015; BARBOSA, L. M.; BERTONE, A. M. A., 2015; BARBOSA, L. M.; BERTONE, A. M. A. ; MARTINS, J. B., 2017).

Me graduei no segundo semestre de 2013, que teve término em março de 2014. Nesse mesmo mês, fui contrata como professora substituta para atuar nas séries finais do Ensino Fundamental de um colégio da rede privada de Uberlândia, permanecendo na instituição até julho desse mesmo ano, mês em que fui convidada para atuar como professora colaboradora em um Curso Pré-Vestibular da cidade, o famoso “Cursinho”.

No ano de 2015 ingressei no curso de Ciência da Computação da UFU, fui contratada como professora efetiva do colégio já mencionado e continuei atuando como colaboradora no cursinho. De volta com o vínculo universitário retomei a parceria com a mesma orientadora e

então trabalhamos em um projeto que teve como objetivo a elaboração de atividades, no software GeoGebra, a serem implementadas em um Ambiente Virtual de Aprendizagem visando o Ensino à Distância.

No ano seguinte decidi que estava na hora de escrever um Projeto de Mestrado, e na área de Educação Matemática. Porém, relacionado a qual tema? No projeto inicial me propus a investigar a formação de professores e o uso de Tecnologias Digitais (TD). Porém, posteriormente, surgiu a ideia, por parte do professor Ricardo de investigarmos os aspectos do pensamento matemático e geométrico de graduandos em matemática a partir da construção de fractais. O que me deixou muito feliz, pois voltaria a trabalhar com as construções que sempre me encantaram.

Cursando as disciplinas, já como aluna regular do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEM), do Instituto de Geociências e Ciências Exatas (IGCE), da Universidade Estadual Paulista (UNESP) de Rio Claro, me deparei com a disciplina “Pensamento Computacional”, o que me fez rever meus objetos de estudo e reestruturar a pesquisa. Assim como diz a canção de Fred 04 interpretada pela Banda Nação Zumbi “Computadores fazem arte [...] cientistas criam o novo [...] pesquisadores avançam”. Neste estudo tive a oportunidade de fazer arte e crescer como pesquisadora.

Deste modo, apresento nas seções seguintes, o objetivo e a relevância desta pesquisa, bem como a estrutura desta dissertação.

1.2 Relevância e Objetivo

Diversas pesquisas em Matemática e em Educação Matemática têm explorado os fractais como tema principal (ALMEIDA, 2006; BALDOVINOTTI, 2011; BARBOSA, 2005; EBERSON, 2004; FARIA, 2012; MÉDICE JR, 2014; MOREIRA 2017). Tais trabalhos, mostram como a Geometria Fractal pode ser abordada em contextos distintos. Além disso, Sinclair et al. (2016) defendem que as Geometrias Plana e Espacial podem ser ensinadas de forma muito mais eficaz se o aluno vê contra exemplos de um determinado conceito ou teorema, o que pode ser explorado com outros tipos de Geometria, como a Geometria Fractal. Neste trabalho a construção de fractais é explorada de maneira atrelada as ideias de Pensamento Computacional.

Em relação ao PC inúmeras iniciativas têm surgido com intuito de promover a inserção de tal pensamento como componente curricular da educação escolar principalmente nos Estados Unidos. Associações de professores, como a *Computer Science Teachers Assossiation* (CSTA),

The Royal Society além de grandes sociedades, como a *International Society for Technology in Education* (ISTE) tem se engajado em campanhas para disseminar a ideia e disponibilizar recursos de apoio à implantação de programas que estimulem o PC.

Neste contexto, o objetivo desta pesquisa é investigar os aspectos¹ do PC emergentes em um grupo de estudantes de graduação em Matemática ao explorarem a Geometria Fractal com o software GeoGebra. Assim, a questão que norteia tal estudo é:

Quais aspectos do Pensamento Computacional emergem de estudantes de graduação em Matemática ao explorarem a Geometria Fractal com o software GeoGebra?

Para buscar respostas para tal questão realizei a produção de dados em experimentos de ensino que visavam a construção de diversos fractais. A estrutura desta dissertação e o conteúdo dos capítulos são apresentados a seguir.

1.3 Estrutura da dissertação

Na seção “A Geometria Fractal” é apresentada um breve histórico dessa Geometria. São discutidas questões relativas às características dos fractais e por fim apresento o processo de iteração dos fractais que foram explorados neste estudo e algumas pesquisas realizadas no campo da Educação Matemática acerca do tema.

Definições, fundamentos, conceitos e habilidades do PC, que guiaram a análise de dados desta pesquisa, são apresentados na seção “O Pensamento Computacional”. Além disso, os aspectos adotados neste estudo são definidos e caracterizados.

Na seção “Metodologia de pesquisa e Procedimentos Metodológicos”, são discutidos os procedimentos metodológicos de produção e de análise dos dados. O desenvolvimento das sessões de experimento de ensino é descrito, bem como, potencialidades do software GeoGebra para construção de fractais. Os sujeitos da pesquisa são identificados, assim como as ferramentas utilizadas na produção dos dados e como se deu suas análises.

A análise dos dados e os resultados da pesquisa são apresentados e discutidos na seção “Análise e Discussão dos Dados”, que é dividida em subseções em relação as atividades realizadas em cada sessão do experimento de ensino. Ao final uma discussão geral sobre os aspectos do PC que emergiram durante as atividades é realizada.

¹ Neste estudo, trato os termos “aspectos” e “habilidades” como sinônimos, me referindo a maneira que uma pessoa age e pensa ao resolver alguma questão ou problema.

Nas “Considerações Finais” as conclusões referentes a este estudo são destacadas, assim como possibilidades de estudos futuros.

2 A GEOMETRIA FRACTAL

Nesta seção apresento um histórico da Geometria Fractal e do surgimento do termo fractal, argumentando sobre seu significado e contextualização nesta pesquisa. Na sequência, as propriedades dos fractais são apontadas e exemplificadas. Encerro com a apresentação do processo de iteração dos fractais Triângulo de Sierpinski, Tetraedro de Sierpinski, Tapete de Sierpinski e Esponja de Menger, que foram explorados durante as atividades que fizeram parte da produção de dados desta pesquisa.

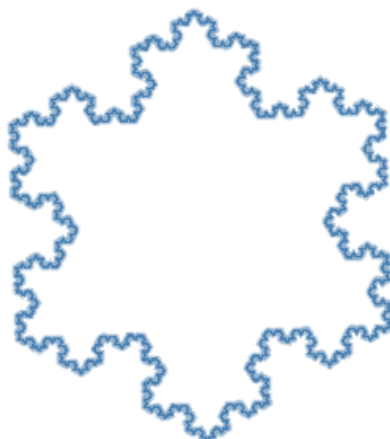
2.1 Alguns dados históricos

A Geometria Fractal nasceu na década de 1970, e faz parte das áreas de Análise Matemática, Geometria, Topologia e Matemática Aplicada (CARVALHO, 2005). O interesse pela Geometria Fractal em vários campos da ciência, assim como sua importância teórica, por ser uma linha não euclidiana de pensamento, mostra a necessidade de difundir pelo menos seus conceitos básicos entre os estudantes de Matemática em nossas universidades (SINCLAIR et al., 2016). Esta Geometria tem como objetivo se aproximar das formas, objetos e fenômenos da natureza. De fato, um dos livros clássicos de Benoit Mandelbrot (MANDELBROT, 1983), considerado o “Pai dos Fractais”, assume o seguinte título sugestivo “*A Geometria Fractal da Natureza*²”.

Os objetos que agora são chamados de fractais foram descobertos e explorados antes da palavra ser inventada. Em 1872, o matemático alemão Karl Weierstrass (1815 - 1897) encontrou o exemplo de uma função com a propriedade não intuitiva: contínua em todo ponto, mas não diferenciável em nenhum. Em 1904, o sueco Helge von Koch (1870 - 1924), insatisfeito com a definição abstrata e analítica de Weierstrass, deu uma definição geométrica de uma função similar, que agora é chamada de Floco de Neve de Koch e está representado na Figura 1. (BARROS, 2017).

²The Fractal Geometry of Nature.

Figura 1 - Floco de Neve de Koch

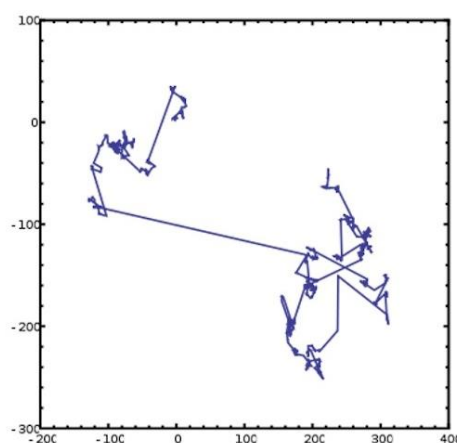


Fonte: Adaptado de BARBOSA; BERTONE (2013a)

O nome Floco de Neve de Koch provém do fato de que o fractal obtido se assemelha a um floco de neve. Esse fractal é construído a partir de um triângulo equilátero em que cada aresta é dividida em três segmentos congruentes. Um novo triângulo equilátero, tendo como base o segmento central, é criado em cada uma das arestas. A base dos novos triângulos é retirada e se inicia o mesmo processo em cada um dos novos segmentos, criando curvas auto semelhantes a cada iteração. (BARBOSA; BERTONE, 2013a).

A ideia de curvas auto semelhantes foi levada adiante pelo francês Paul Pierre Lévy (1886 - 1971) que, em 1938 descreveu uma nova curva de característica fractal, o Voos de Lévy, representado na Figura 2 (BARROS, 2017).

Figura 2 - Voos de Lévy



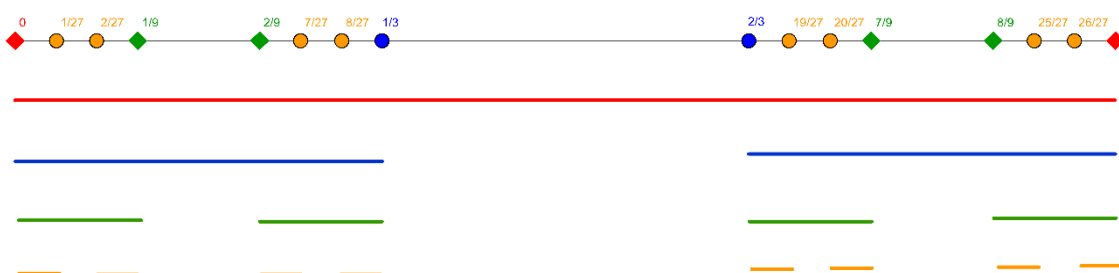
Fonte: BARROS (2017)

O Voos de Lévy é reconhecido como um fractal aleatório, que é gerado por processo estocástico, ou seja, é regido por uma distribuição probabilística, como os relâmpagos (BARROS, 2017).

O matemático alemão Georg Cantor (1845 - 1918) deu exemplos de subconjuntos da reta real, como o conhecido Conjunto de Cantor, sua construção se inicia com um segmento de comprimento um sendo dividido em três segmentos de mesmo comprimento. O segmento central é retirado e os dois segmentos restantes são divididos em três segmentos cujo o do centro é retirado, tal processo continua a cada novo segmento. (BESSA JUNIOR, 2011).

A construção do conjunto é representada na Figura 3.

Figura 3 - Conjunto de Cantor

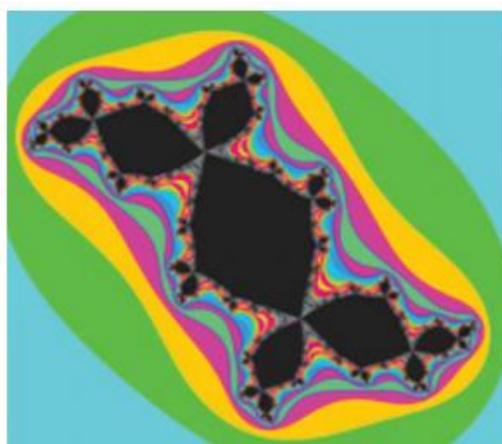


Fonte: Adaptado de BARBOSA; BERTONE (2013a)

O conjunto de Cantor é um subconjunto do intervalo $[0,1]$ e é o limite de um processo iterativo infinito. É considerado um fractal geométrico, pois é possível construir tal conjunto utilizando apenas recursos geométricos, no caso pontos e segmentos. (BESSA JUNIOR, 2011).

Outros fractais podem ser gerados apenas por funções iterativas no plano complexo, investigadas no século XIX e início do século XX por Henri Poincaré (1854 - 1912), Felix Klein (1849 - 1925), Pierre Fatou (1878 - 1929) e Gaston Julia (1893 - 1978) (BALDOVINOTTI, 2011). No entanto, sem a ajuda do computador e de softwares específicos, eles nem imaginavam a beleza dos objetos que haviam descoberto. Um exemplo pode ser visto na Figura 4, que apresenta o Conjunto de Julia.

Figura 4 - Conjunto de Julia



Fonte: REIS (2016)

O Conjunto de Julia foi nomeado em homenagem ao matemático Francês Gaston Julia (1893 - 1978), devido ao descobrimento de diversas propriedades geométricas e topológicas desse conjunto. Esse fractal é definido pela fronteira da coleção de pontos do plano complexo cujas órbitas escapam para o infinito. (REIS, 2016).

Na tentativa de entender esses objetos, matemáticos como Constantin Carathéodory (1873 - 1950) e Felix Hausdorff (1868 - 1942) generalizaram o conceito intuitivo de dimensão para incluir valores não inteiros. Esse foi parte do movimento geral na primeira metade do século XX para criar uma teoria de conjuntos descritiva, ou seja, uma continuação da direção da pesquisa de Cantor, que foi capaz de classificar os conjuntos de pontos no espaço euclidiano. A definição da dimensão de Hausdorff ³ é geométrica por natureza, embora seja tecnicamente baseada na análise matemática. (GUZMÁN et al., 1993).

Na década de 1960 Benoit Mandelbrot, começou a investigar a auto semelhança (simetria através de escalas) em artigos, perguntando questões tais como: “Qual seria o comprimento da costa da Grã-Bretanha?”. Em 1975, esse matemático criou a palavra *fractal* para descrever objetos auto semelhantes que não tinham dimensão clara. Ele derivou a palavra fractal do latim *fractus*, ou seja, quebrado ou irregular, e não da palavra fracionado como normalmente se pensa. (MANDELBROT, 1983).

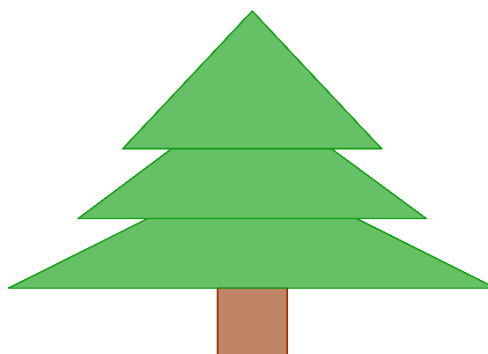
Descritas algumas questões históricas dos fractais, apresento a seguir o que está sendo entendido por fractal e quais concepções foram adoradas neste estudo.

2.2 Adotando uma concepção

Como já mencionado, a Geometria Fractal tem o objetivo de se aproximar das formas, objetos e fenômenos da natureza. Pensemos, por exemplo, em uma árvore. Qual seria a representação aproximada de uma árvore, usando figuras da Geometria Euclidiana? E qual seria a representação utilizando os princípios básicos da Geometria Fractal? Uma possível comparação pode ser vista, respectivamente, nas Figura 5 e 6.

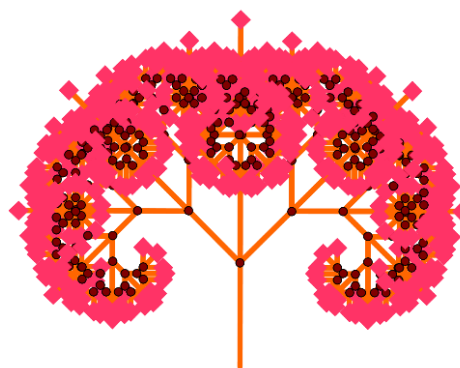
³A dimensão de Hausdor-Besicovitch é uma generalização para espaços métricos do conceito de dimensão de um espaço topológico, que permite definir uma dimensão fracionária (não inteira) para um objeto fractal (GUZMÁN et al., 1993). Porém, não será utilizada neste estudo.

Figura 5 - Representação aproximada de uma árvore, usando figuras da Geometria Euclidiana



Fonte: Arquivo Pessoal

Figura 6 - Representação aproximada de uma árvore, usando princípios da Geometria Fractal



Fonte: BARBOSA; BERTONE (2013b)

A árvore apresentada na Figura 6 é gerada a partir de um segmento vertical que é considerado o tronco da árvore. O ponto que dista $\frac{1}{3}$ da origem do tronco é criado e segmentos de comprimento $\frac{2}{3}$ do segmento inicial são traçados a partir desse ponto, formando um ângulo de 45° com o segmento inicial. O processo é repetido a cada novo segmento criado.

A característica de representar a natureza com maior representatividade que a geometria euclidiana, faz com que a Geometria Fractal seja atrativa. Mandelbrot argumenta que

Por que a geometria é frequentemente descrita como "fria" e "seca"? Uma razão está na sua incapacidade de descrever a forma de uma nuvem, uma montanha, um litoral ou uma árvore. As nuvens não são esferas, as montanhas não são cones, as linhas costeiras não são círculos e a casca não é lisa, nem os raios viajam em linha reta. Em termos mais gerais, afirmo que muitos padrões da natureza são tão irregulares e fragmentados que, comparados a Euclides - um termo usado neste trabalho para denotar toda a geometria padrão - a natureza exibe não apenas um grau mais alto, mas um nível completamente diferente de complexidade ⁴. (MANDELBROT, 1983, p. 1, tradução nossa).

⁴Why is geometry often described as "cold" and "dry"? One reason lies in its inability to describe the shape of a cloud, a mountain, a coastline, or a tree. Clouds are not spheres, mountains are not cones, coastlines are not circles, and bark is not smooth, nor does lightning travel in a straight line. More generally, I claim that many patterns of Nature are so irregular and fragmented, that, compared with Euclid-a term used in this work to denote all of standard geometry- Nature exhibits not simply a higher degree but an altogether different level of complexity. The number of distinct scales of length of natural patterns is for all practical purposes infinite.

Mas então, o que é um fractal? Para responder tal questão, devo esclarecer que do ponto de vista matemático ainda não existe uma definição formal que seja universalmente aceita. Mandelbrot, em seu primeiro ensaio sobre a teoria fractal, expõe uma série de definições informais, reconhece a falta de rigor do seu tratado e faz a seguinte indagação:

Devemos definir, de maneira rigorosa o que é uma figura fractal, para depois decidir se um objeto real é fractal conforme algum modelo? Pensando que tal formalismo seria prematuro, eu adotei um método diferente baseado em uma caracterização aberta, intuitiva, e com procedimentos sucessivos⁵. (MANDELBROT, 1975, p. 13, tradução nossa).

Certamente existem propriedades fundamentais, que de alguma forma, identificam o que é um fractal, que são: a auto semelhança, a complexidade infinita e a dimensão diferente da topológica e euclidiana (SABOGAL; ARENAS, 2011). Existe uma grande dificuldade de condensar em uma definição matematicamente precisa o que seria um fractal.

Conforme Barbosa (2005, p. 18-19) alguns autores, em suas obras conceituam os fractais de diferentes formas. Mandelbrot em seu primeiro conceito de fractal disse: “um fractal é, por definição, um conjunto para o qual a dimensão Hausdorff-Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica.”. J. Feder considera que “um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos”. K. J. Falconer afirma que “Um conjunto F é fractal se, por exemplo: - F possui alguma forma de “autossimilaridade” ainda que aproximada ou estatística; - A dimensão fractal, definida de alguma forma, é maior que dimensão topológica; - O conjunto F pode ser expresso através de um procedimento recursivo ou iterativo.”.

Dessa forma, visando uma abordagem didática pode-se dizer que “os fractais são formas geométricas que repetem sua estrutura em escalas cada vez menores.” (STEWART, 1996, p. 12). E ainda “quando variamos a ‘escala de observação’, dentro de certos limites e continuamos a encontrar o mesmo tipo de geometria, dizemos estar diante de uma estrutura fractal.” (RICINERI, 1990, p. 84).

Assim, como Moura (2011) e Faria (2012), considero que as propriedades de auto semelhança, complexidade infinita e dimensão fractal são suficientes para se reconhecer tal objeto.

A auto semelhança pode ser “visualizada nas semelhanças identificadas através das escalas, de modo que partes menores dos objetos que vão compondo os níveis de um fractal se

⁵¿Hace falta definir de manera rigurosa lo que es una figura fractal para luego decir que un objeto real es fractal si lo es la figura que conforma su modelo? pensando que tal formalismo sería prematuro, he adoptado un método distinto basado en una caracterización abierta, intuitiva, y procediendo por toques sucesivos.

assemelham com o todo” (FARIA, 2012, p. 34). Ebersson (2004, p. 18) afirma que ser auto semelhante “[...] significa dizer que pequenas partes da curva repetem a forma da curva como um todo [...]”.

A complexidade infinita está ligada ao processo iterativo infinito, em que se repete uma quantidade ilimitada de vezes um determinado padrão (FARIA, 2012). Ebersson (2004, p. 18-19) argumenta que

Esta característica básica da construção dos fractais é, em grande parte, a responsável pelo grande fascínio que estas figuras provocam pois, na maioria dos casos, os fractais são construídos a partir de “elementos” extremamente simples mas que, apesar disso, dão origem a figuras com extraordinária complexidade e riqueza de detalhes justamente graças às infinitas iterações presentes em sua construção.

Por fim, a terceira propriedade a ser destacada é a dimensão fractal. Baldovinotti (2011, p. 31) afirma que “ao contrário do que é observado na Geometria Euclidiana, em que o valor da dimensão representa a dimensionalidade do espaço em que um objeto está inserido, a Dimensão Fractal representa o nível de irregularidade de um fractal”.

A literatura fornece diversas abordagens para se estimar o cálculo da dimensão fractal de um objeto ou imagem. No entanto, a maioria delas baseia-se na Dimensão de Hausdorff, introduzida em 1918 pelo matemático Felix Hausdorff. Muitos dos desenvolvimentos técnicos utilizados para calcular essa dimensão para conjuntos altamente irregulares foram obtidos por Abrão Samoilovitch Besicovitch (1891 - 1970). Por esta razão, a dimensão de Hausdorff é muitas vezes referida como dimensão Hausdorff-Besicovitch. (SHAMSGOVARA, 2012).

Neste estudo usaremos a Dimensão de Contagem por Caixas⁶ (GUZMÁN et al., 1993, p. 45, tradução nossa), que foi baseada na dimensão de Hausdorff e devido a sua relativa facilidade nos cálculos matemáticos e sua implementação algorítmica foi escolhida. A ideia central por trás desse conceito está em cobrir um conjunto Ω por um número $N(\epsilon)$ de bolas de raio no máximo ϵ . Quando ϵ tende a zero temos que $N(\epsilon)$ cresce. Ou seja, se $N(\epsilon)$ cresce proporcionalmente a $1/\epsilon^D$ quando $\epsilon \rightarrow 0$, então dizemos que Ω tem dimensão D (GUZMÁN et al., 1993). Mais precisamente temos a seguinte definição.

Definição: Seja Ω um conjunto não vazio de pontos de uma figura fractal do espaço métrico⁷ (X, d) . Seja $\epsilon > 0$ e $N(\epsilon)$ o número mínimo de bolas de raio ϵ necessários para cobrir Ω , então, a Dimensão de Contagem por Caixas $D(\Omega)$ é definida por

⁶Dimension de recuentos por cajas.

⁷Um espaço métrico (X, d) é um conjunto X dotado de uma função $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ chamada distância que associa a cada par de elementos de X um número real positivo. Esta função deve satisfazer os seguintes axiomas:

- $d(x; y) = 0$ se e somente se $x = y$;
- $d(x; y) = d(y; x)$ (simetria);
- $d(x; z) \leq d(x; y) + d(y; z)$ (desigualdade triangular). (OLIVEIRA, 2014)

$$D = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln \epsilon}$$

Sendo $N(\epsilon)$ o número de figuras na n -ésima iteração e ϵ o fator de redução do lado da figura na n -ésima etapa.

Para ilustrar tal definição vamos calcular a dimensão do Conjunto de Cantor já apresentado na Figura 3. Tomamos como unidade de medida o segmento inicial adotado para a construção. Então, $\epsilon = 1$ para a primeira etapa da construção. Como dividimos o segmento em três partes iguais, o ϵ da definição passa a valer $\frac{1}{3}$ para a segunda etapa, sendo que o número mínimo de segmentos dessa medida que cobrem o fractal nesta etapa é $N(\epsilon) = 2$, pois o segmento do centro será retirado. Por recorrência, obtemos que para a etapa n , $\epsilon = \frac{1}{3^{n-1}}$ e $N(\epsilon) = 2^{n-1}$. Vale ressaltar que n é o número de iterações do fractal e como assume-se a complexidade infinita $n \rightarrow \infty$ quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Assim, usando a definição apresentada anteriormente temos

$$D = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^{n-1}}{\ln \frac{1}{3^{n-1}}} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^{n-1}}{\ln 1 - \ln 3^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1) \ln 2}{(n-1) \ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \cong 0,6309297$$

Logo, o Conjunto de Cantor tem dimensão $D \cong 0,6309297$, que é menor que 1, sua dimensão euclidiana.

Apresento a seguir o processo de iteração e propriedades dos fractais explorados durante as atividades que fizeram parte da produção de dados desta pesquisa.

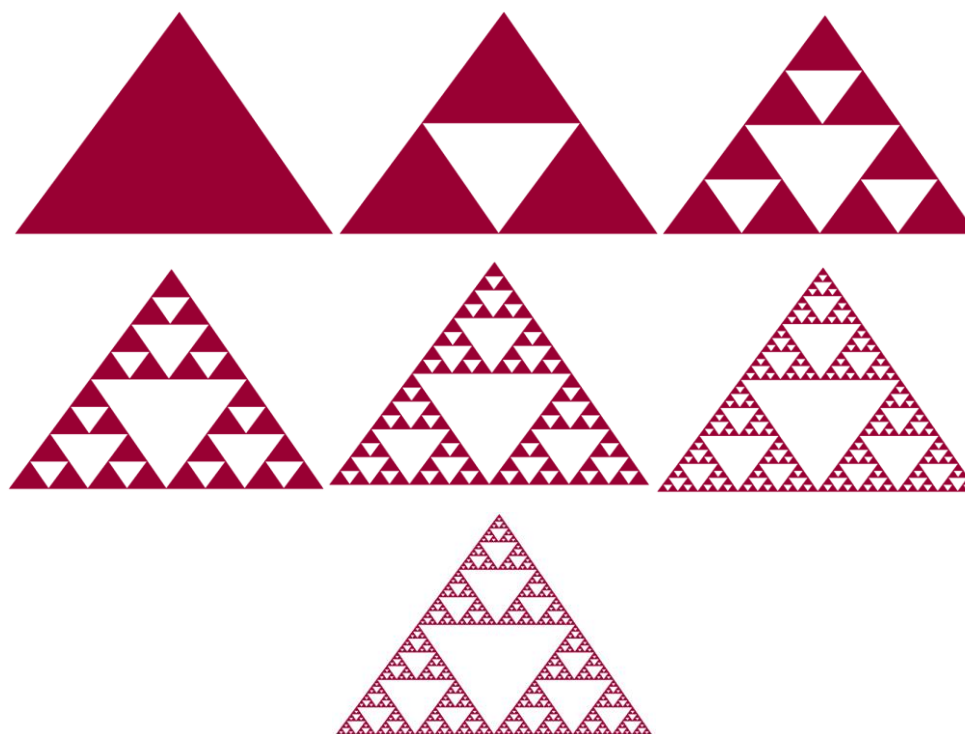
2.3 Fractais explorados na pesquisa

Durante a produção de dados desta pesquisa, que será relatada em detalhes na seção “Metodologia de Pesquisa e Procedimentos Metodológicos”, foram realizadas quatro atividades explorando características e construção de fractais. As atividades foram pensadas para que houvesse uma experimentação-com-GeoGebra (MAZZI, 2014). Nas subseções a seguir, apresento algumas características dos fractais adotados, destacando os processos de iteração que regem sua construção. A escolha por tais fractais se deu por serem fractais geométricos, ou seja, sua construção é possível de ser realizada a partir de elementos da Geometria Euclidiana, como pontos, segmentos, polígonos e poliedros. A escolha também foi pensada em fractais que pudessem ser explorados e construídos em ambientes 2D (segunda dimensão) e 3D (terceira dimensão).

2.3.1 O Triângulo de Sierpinski

O Triângulo de Sierpinski é um fractal criado por Waclaw Sierpinski (1882 - 1969), matemático polonês. Sua construção se inicia com um triângulo equilátero, que se caracteriza como iteração 0, e a partir daí se destacam os pontos médios de cada lado do triângulo, os quais são unidos por segmentos de reta, determinando assim no total quatro triângulos. O triângulo central é descartado, restando três triângulos conectados um com o outro apenas pelos pontos médios, caracterizando assim a primeira iteração do fractal. Repete-se recursivamente tal procedimento para cada novo triângulo obtido, sempre descartando o triângulo central. (SABOGAL; ARENAS, 2011). A Figura 7 traz as seis primeiras iterações da sequência de geração do triângulo.

Figura 7 - Seis iterações do Triângulo de Sierpinski



Fonte: Dados da Pesquisa

O Triângulo de Sierpinski já foi tema de questões do Exame Nacional do Ensino Médio⁸ e da prova objetiva do processo seletivo do Serviço Social da Indústria – SESI-SP e do Serviço

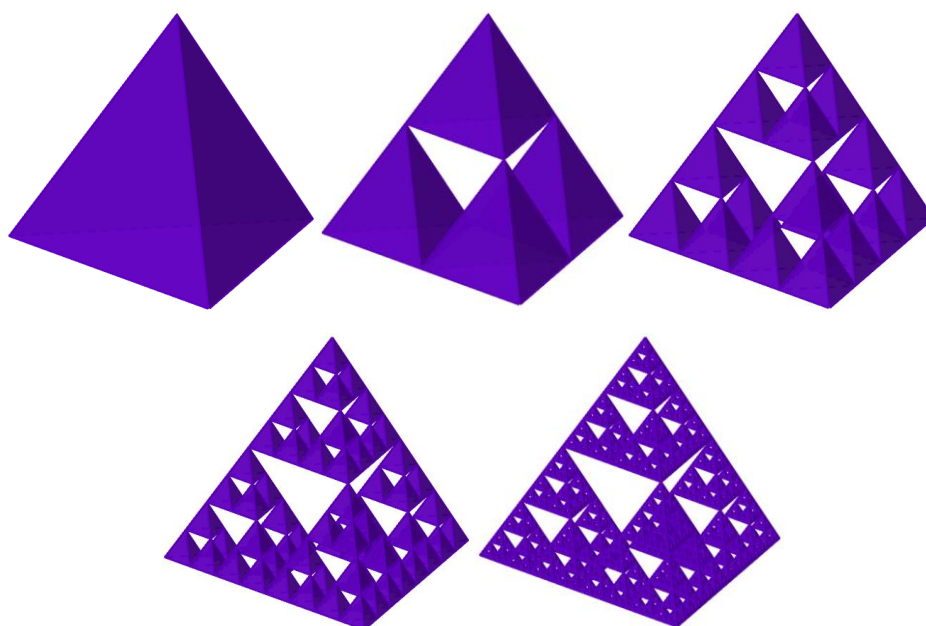
⁸Na edição de 2008 do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), exame que é realizado anualmente pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep) e Ministério da Educação (MEC), a prova abordou, em uma de suas questões, a construção do Triângulo de Sierpinski. A questão apresentava um triângulo inicial e duas iterações da construção desse fractal. O participante deveria assinalar a alternativa cujo desenho representasse a próxima iteração do triângulo. (BRASIL, 2008).

Nacional de Aprendizagem Industrial – SENAI-SP⁹. Sua exploração abrangeu para um ambiente tridimensional e o fractal gerado é apresentado na subseção a seguir.

2.3.2 O Tetraedro de Sierpinski

O Tetraedro de Sierpinski, é uma generalização tridimensional, se considerarmos a dimensão euclidiana, do famoso triângulo apresentado na subseção anterior. Sua construção se inicia com um tetraedro e a partir daí se destacam os pontos médios de cada aresta, em cada lado do tetraedro, os quais são unidos por segmentos de reta, determinando assim no total quatro novos tetraedros. Repete-se recursivamente tal procedimento para cada novo tetraedro obtido na construção. (SABOGAL; ARENAS, 2011). A Figura 8 traz as quatro primeiras iterações da sequência de geração do tetraedro.

Figura 8 - Quatro iterações do Triângulo de Sierpinski



Fonte: Dados da Pesquisa

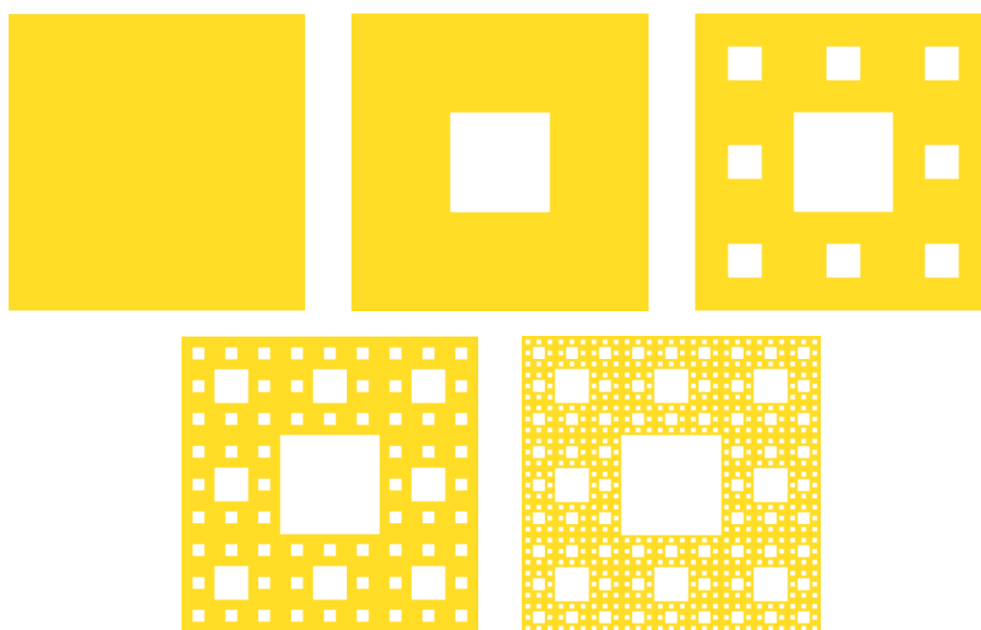
Um fato curioso do tetraedro é em relação a área e volume do tetraedro original com as demais iterações. A área do tetraedro inicial é a mesma do somatório das áreas das figuras que resultam em cada iteração (porque as faces que se perdem nos tetraedros centrais, são compensados pelas faces internas que aparecem). Por outro lado, o volume diminui e tende a zero. (SABOGAL; ARENAS, 2011).

⁹Na prova objetiva do processo seletivo 002/2016 de contratação de servidores do SESI/SENAI, em uma e suas questões, foi abordado o processo de construção do triângulo e apresentada quatro iterações do fractal. A questão interrogava sobre a quantidade de triângulos que teriam na sétima iteração do Triângulo de Sierpinski. (SESI/SENAI, 2016).

2.3.3 O Tapete de Sierpinski

A construção do Tapete de Sierpinski se inicia com um quadrado, que se caracteriza como iteração 0, e a partir daí dividimos esse quadrado em nove quadrados, cada um dos quais é congruente à contração do conjunto original pelo fator de $\frac{1}{3}$. Subtraímos dele o quadrado que foi formado no meio, restando assim oito quadrados, caracterizando a primeira iteração do fractal. Repete-se recursivamente tal procedimento para cada novo quadrado obtido, sempre descartando o quadrado central. (SABOGAL; ARENAS, 2011). A Figura 9 traz as quatro primeiras iterações da sequência de geração do tapete.

Figura 9 - Quatro iterações do Tapete de Sierpinski



Fonte: Dados da Pesquisa

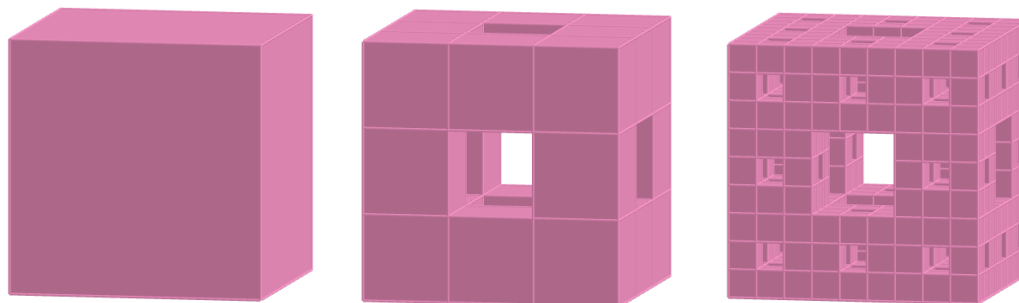
Por motivos estéticos, os segmentos dos quadrados gerados durante o processo de iteração foram retirados. Esse fractal possui uma curiosidade interessante, sua área tende ao valor zero quando seu número de iterações tende a infinito.

2.3.4 A Esponja de Menger

A Esponja de Menger criada por Karl Menger (1902 - 1985) em 1926, pode ser pensada como uma versão tridimensional, se considerarmos a dimensão euclidiana, do Tapete de Sierpinski. É construído a partir de um cubo, que é dividido em vinte e sete cubos, em que o cubo central de cada face é eliminado juntamente com o cubo central, ou seja, no total sete cubos são eliminados, restando vinte cubos, caracterizando assim a primeira iteração. Repete-

se recursivamente tal procedimento para cada novo cubo obtido. (SABOGAL; ARENAS, 2011). A Figura 10 mostra as duas primeiras iterações da sequência de geração da esponja.

Figura 10 - Duas iterações da Esponja de Menger



Fonte: Dados da Pesquisa

A esponja e todos os outros fractais que são explorados neste estudo fazem parte de um grupo de fractais que podem ser gerados por um sistema de funções iterativas, a partir de elementos da Geometria Euclidiana e são auto semelhantes, ou seja, os objetos são idênticos em diferentes escalas. Apresento a seguir algumas pesquisas relativas ao estudo de fractais juntamente com as potencialidades do uso das tecnologias digitais na construção de tais objetos.

2.4 Algumas pesquisas já realizadas com a Geometria Fractal no âmbito da Educação Matemática

Nesta subseção são apresentados os trabalhos de alguns pesquisadores (ALMEIDA, 2006; BALDOVINOTTI, 2011; BARBOSA, 2002; EBERSON, 2004; FARIA, 2012; MÉDICE, 2014; MOREIRA 2017), juntamente com uma breve explanação de suas pesquisas. Tais estudos contribuíram de alguma forma para a visão de fractais presente nesta dissertação.

Moreira (2017), em sua dissertação de mestrado, apresentou conceitos da Geometria Fractal e tópicos matemáticos que podem ser explorados a partir disso. Nesse trabalho, sugestões de atividades matemáticas são disponibilizadas, visando destacar a iteração presente na construção dos fractais, com o intuito de ampliar o interesse do aluno para as aulas de matemática. Nessa mesma perspectiva motivacional, Médice (2014) apresenta um estudo do perímetro e da área de alguns fractais, assim como sua relação com progressões geométricas. O estudo de logaritmos também é proposto a partir da abordagem da dimensão dos fractais. O autor defende que

Quando inserida nas aulas de matemática do ensino médio a geometria fractal pode ser um tema motivador e a conexão de vários tópicos matemáticos. A aplicabilidade do estudo dos fractais em áreas como a arte, a ciência e a tecnologia podem impulsionar o interesse pelo tema. (MÉDICE, 2014, p. 52).

Já a dissertação de Almeida (2006) investigou uma abordagem para o ensino da geometria dos fractais sob o olhar do professor da Educação Básica e sua receptividade no desenvolvimento de uma sequência didática. Essa investigação foi realizada em um minicurso com dois encontros, em que um panorama histórico sobre a Geometria Fractal foi apresentado explicitando suas relações com formas da natureza. Em sua conclusão, a autora afirma a hipótese de que encontros dessa natureza incentivam a conscientização e o encorajamento para os professores arriscarem atividades abordando fractais e ressalta a receptividade deles em relação ao curso.

Também, visando o trabalho com professores da Educação Básica, a pesquisa de Baldovinotti (2011, p. 24) teve a finalidade “de explorar possibilidades para que a Geometria Fractal possa ser ensinada em cursos de formação de professores de Matemática e, conseqüentemente, seja inserida na sala de aula da escola básica”. Nesse estudo foram realizadas duas oficinas com a participação de professores de Matemática atuantes e estudantes do curso de Licenciatura em Matemática. A ideia de Geometria Fractal foi introduzida a partir do emprego de recursos tecnológicos (SuperLogo¹⁰ e Geometricks¹¹) e manipuláveis (compasso, régua, tesoura e papel cartão). O pesquisador conclui que o estudo contribui para reflexões sobre os instrumentos que auxiliam no processo de aprendizagem de fractais e sobre os conceitos matemáticos envolvidos em sua exploração.

Eberson (2004) explorou a Geometria Fractal e buscou estabelecer relações entre a construção de fractais e transformações geométricas no plano. Nessa pesquisa foram utilizados quatro ambientes computacionais: MicroWorlds¹², Cabri-Géomètre II¹³, Geometer's SketchPad¹⁴ e o Geometricks, o que permitiu analisar a viabilidade da construção dos fractais em diferentes micro-mundos de Geometria. O autor destaca as potencialidades e limitações dos softwares e explicita um conjunto de concepções acerca de potenciais utilizações da Geometria Fractal assim como pela utilização de ambientes informáticos.

Barbosa (2005) em seu estudo apresenta notas históricas sobre os fractais e seu conceito em diversos pontos de vista da Matemática. Atividades com lápis e papel, materiais concretos e softwares são destacadas. O autor destaca a beleza dos fractais em suas diversas formas e argumenta que

para os fractais, em especial para a geometria fractal, faz-se necessário ao educador conseguir captar o educando com o transparecer de sua própria vibração, e talvez

¹⁰<http://www.nied.unicamp.br/?q=content/super-logo-30>

¹¹<https://www.geometrikstech.com/>

¹²<http://www.microworlds.com/>

¹³<https://cabri.com/>

¹⁴<http://www.dynamicgeometry.com/>

evidenciando o êxtase na complementação na beleza de seus visuais, conduzindo-o ao prazer pelas informações e conhecimentos culturais da vasta variedade de fractais. (BARBOSA, 2005, p. 14).

Também com o uso de um software educacional, a pesquisa de Faria (2012, p. 6) teve como principal objetivo “investigar quais contribuições a exploração de Padrões Fractais em um software de geometria dinâmica traz ao processo de generalização de conteúdos matemáticos”. Foram propostas e aplicadas seis atividades para turmas do primeiro ano do Ensino Médio em que se manipulou e analisou padrões fractais. Tais atividades foram desenvolvidas no software GeoGebra, a qual a pesquisadora destaca a importância da visualização, construção e manipulação dos fractais em diversos níveis de iteração. Tal software também foi escolhido para a produção de dados desta pesquisa e é apresentado na subseção “O GeoGebra e a criação de ferramentas”.

Assim, além da beleza propiciada pelo apelo visual das figuras e imagens que a Geometria Fractal gera, pode-se afirmar que esta Geometria constitui, atualmente, uma alternativa de trabalho na área da Educação Matemática e que neste estudo será articulada com aspectos do Pensamento Computacional. Na seção seguinte, apresento fundamentos do PC que guiaram a análise dos dados desta pesquisa.

3 O PENSAMENTO COMPUTACIONAL

Nesta seção, apresento fundamentos indicados por diversos autores em relação as categorias e as possíveis abordagens de aprendizagem a partir do PC. Uma breve discussão sobre a inserção desse pensamento na Educação Básica é exposta, assim como outros estudos fundamentados por essas ideias.

3.1 O surgimento do termo e suas definições

A proposta de inserir o ensino de programação na Educação Básica não é tão recente se comparado ao surgimento do termo “Pensamento Computacional”. Papert (1986, p. 186) defende que “o pensamento de procedimento é uma ferramenta intelectual poderosa” e sugere que programar computadores é uma estratégia para desenvolver habilidades que estimulam o desenvolvimento de novas ferramentas mentais, pois, “ao ensinar o computador a pensar, a criança embarca numa exploração sobre a maneira como ela própria pensa.” (PAPERT, 1986, p. 35).

Para Valente (2016), os computadores e softwares frequentemente têm sido utilizados nas escolas apenas como “ferramentas de escritório” no qual o aluno é um usuário da máquina. Esse panorama tem intensificado um movimento de reflexão sobre como a tecnologia pode ser utilizada de modo que o aluno passe de usuário para alguém que pense, crie e explore com os softwares. Essa preocupação já havia sido evidenciada por Seymour Papert, na década de 1970, quando criou a Linguagem LOGO¹⁵ defendendo que o computador deveria ser utilizado para que o aluno pensasse sobre o que estava fazendo e com isso pensasse junto com a máquina, sendo assim protagonista da própria aprendizagem. Ao utilizar o LOGO

é a criança que programa o computador e, ao fazê-lo, ela adquire um sentimento de domínio sobre um dos mais modernos e poderosos equipamentos tecnológicos e estabelece um contato íntimo com algumas das ideias mais profundas da ciência, da matemática e da arte de construir modelos intelectuais. (PAPERT, 1986, p. 18, grifo do autor).

Valente (1999, p. 12) corrobora esta ideia ao dizer que

Quando o aluno usa o computador para construir o seu conhecimento, o computador passa a ser uma máquina para ser ensinada, propiciando condições para o aluno descrever a resolução de problemas, usando linguagens de programação, refletir sobre os resultados obtidos e depurar suas idéias por intermédio da busca de novos conteúdos e novas estratégias.

¹⁵A proposta da linguagem LOGO era colocar a criança para comandar um robô ou uma representação de robô na tela do computador.

Em 2006, Jeannette M. Wing apresenta o termo “Computational Thinking” traduzido para “Pensamento Computacional” que se baseia no poder e nos limites de processos de computação, quer sejam eles executados por um ser humano ou por uma máquina (WING, 2006). Para esta autora, o PC envolve resolver problemas, projetar sistemas, compreender o comportamento humano, pensar recursivamente, abstrair e decompor um problema, e utilizar o raciocínio heurístico. De maneira geral o PC é “*Uma habilidade fundamental, não mecânica. Uma habilidade fundamental é algo que todo ser humano deve saber para atuar na sociedade moderna.*”¹⁶ (WING, 2006, p. 35, tradução nossa, grifo do autor). Destaca-se que

O pensamento computacional é um tipo de pensamento analítico. Compartilha com o pensamento matemático, de maneira geral, meios pelos quais podemos abordar a solução de um problema. Ele compartilha com o pensamento em engenharia as maneiras gerais pelas quais podemos abordar um projeto e a avaliação de um sistema grande e complexo que opera dentro das restrições do mundo real. Compartilha com o pensamento científico as maneiras gerais pelas quais podemos abordar a compreensão da computabilidade, da inteligência, da mente e do comportamento humano¹⁷. (WING, 2008, p. 3717, tradução nossa).

Após a inserção do termo, pesquisadores têm buscado compreender como a computação pode ser utilizada para possibilitar o desenvolvimento desse pensamento nos estudantes. Para Mannila et al. (2014, p. 2, tradução nossa) o “PC é um termo que engloba um conjunto de conceitos e processos de pensamento da ciência da computação que auxiliam na formulação de problemas e suas soluções em diferentes campos.”¹⁸.

Na mesma direção Lu e Fletcher (2009, p. 1, tradução nossa) apresentam algumas ideias relacionadas ao PC:

1) é uma maneira de resolver problemas e projetar sistemas que se baseiam em conceitos fundamentais para a ciência da computação; 2) significa criar e fazer uso de diferentes níveis de abstração, para entender e resolver problemas de forma mais eficaz; 3) significa pensar algorítmicamente e com a capacidade de aplicar conceitos matemáticos para desenvolver soluções mais eficientes, justas e seguras; 4) significa entender as consequências da escala, não só por razões de eficiência, mas também por razões econômicas e sociais.¹⁹

¹⁶*Fundamental, not rote skill.* A fundamental skill is something every human being must know to function in modern society.

¹⁷Computational thinking is a kind of analytical thinking. It shares with mathematical thinking in the general ways in which we might approach solving a problem. It shares with engineering thinking in the general ways in which we might approach designing and evaluating a large, complex system that operates within the constraints of the real world. It shares with scientific thinking in the general ways in which we might approach understanding computability, intelligence, the mind and human behaviour.

¹⁸CT is a term encompassing a set of concepts and thought processes from CS that aid in formulating problems and their solutions in different fields.

¹⁹1) it is a way of solving problems and designing systems that draws on concepts fundamental to computer science; 2) it means creating and making use of different levels of abstraction, to understand and solve problems more effectively; 3) it means thinking algorithmically and with the ability to apply mathematical concepts to develop more efficient, fair, and secure solutions; and 4) it means understanding the consequences of scale, not only for reasons of efficiency but also for economic and social reasons.

Apesar dessas compreensões acerca do PC, não há entre os pesquisadores da área uma definição consensual. Ainda assim, eles têm caminhado em direção a entender a especificidade desse pensamento e como esse pode ser incorporado no currículo das escolas.

Uma tentativa de identificar conceitos e operacionalizar o PC foi realizada por duas organizações, a *International Society for Technology in Education* (ISTE) e a *Computer Science Teachers Association* (CSTA). Pesquisadores da Ciência da Computação e das áreas de Humanas, que atuam em tais organizações, indicaram uma definição para o PC que norteasse as atividades realizadas na Educação Básica. Eles defendem que o PC é um processo de resolução de problemas que inclui, mas não se limita as seguintes características:

- Formular problemas de uma forma que nos permita usar um computador e outras ferramentas para ajudar a resolvê-los
- Organizar e analisar logicamente os dados
- Representar dados através de abstrações como modelos e simulações
- Automatizar soluções por meio de pensamento algorítmico (uma série de etapas ordenadas)
- Identificar, analisar e implementar possíveis soluções com o objetivo de alcançar a combinação mais eficiente e eficaz de etapas e recursos
- Generalizar e transferir este processo de resolução de problemas para uma ampla variedade de problemas²⁰ (ISTE/CSTA, 2011, p. 7, tradução nossa).

Essas habilidades são “apoiadas e reforçadas por uma série de disposições ou atitudes que são dimensões essenciais do PC.²¹” (ISTE/CSTA, 2011, p. 7), tais como a confiança em lidar com a complexidade, persistência em trabalhar com problemas difíceis, tolerância à ambiguidade, capacidade de lidar com problemas abertos e capacidade de comunicar e trabalhar com outras pessoas (ISTE/CSTA, 2011).

Ainda nesse documento, as organizações identificam nove habilidades que estão ligadas ao PC. São elas: coleta de dados, análise de dados, representação de dados, decomposição do problema, abstração, algoritmos e procedimentos, automação, paralelização e simulação. O Quadro 1 apresenta uma breve definição de cada uma dessas habilidades.

²⁰▪ Formulating problems in a way that enables us to use a computer and other tools to help solve them

- Logically organizing and analyzing data
- Representing data through abstractions such as models and simulations
- Automating solutions through algorithmic thinking (a series of ordered steps)
- Identifying, analyzing, and implementing possible solutions with the goal of achieving the most efficient and effective combination of steps and resources
- Generalizing and transferring this problem-solving process to a wide variety of problems

²¹These skills are supported and enhanced by a number of dispositions or attitudes that are essential dimensions of CT.

Quadro 1 - Habilidades relacionadas ao Pensamento Computacional

Habilidade	Definição
Coleta de Dados	Processo de coleta de informações apropriadas.
Análise de Dados	Encontrar sentido para os dados, buscando padrões e tirando conclusões.
Representação de Dados	Retratar e organizar dados em gráficos, mapas, palavras ou imagens apropriadas.
Decomposição do Problema	Dividir o problema em partes menores e gerenciáveis.
Abstração	Reduzir a complexidade para definir a ideia principal.
Algoritmos e Procedimentos	Série de etapas ordenadas tomadas para resolver um problema ou atingir algum objetivo.
Automação	Utilizar computadores ou máquinas que realizam tarefas repetitivas ou tediosas.
Simulação	Representar ou modelar um processo. A simulação também envolve a execução de experimentos usando modelos.
Paralelização	Organizar recursos para executar simultaneamente tarefas para alcançar um objetivo comum.

Fonte: Adaptado de ISTE/CSTA (2011)

Partindo dessas mesmas habilidades, Barr e Stephenson (2011) apresentam exemplos de como tais aspectos podem ser incorporados em disciplinas no campo da Ciência da Computação, Matemática, Ciências, Sociologia e Artes. O Quadro 2 traz aspectos que podem ser caracterizados no currículo Matemática.

Quadro 2 - Caracterizando as habilidades do Pensamento Computacional na Matemática

Habilidade	Situação Matemática
Coleta de Dados	Encontrar uma fonte de dados para um determinado problema, por exemplo, lançando moedas ou jogando dados.
Análise de Dados	Contar as ocorrências dos lançamentos de moedas e analisar os resultados. (Estatística).
Representação de Dados	Utilizar histogramas; gráfico de pizza; gráfico de barras para representar os dados. Utilizar conjuntos, listas, etc. para representar os dados coletados.
Decomposição do Problema	Aplicar corretamente a ordem de operações em uma expressão.
Abstração	Utilizar variáveis em álgebra; interpretar e identificar fatos essenciais em um problema; estudar funções em álgebra e comparar com funções em programação. Utilizar a iteração para resolver problemas.
Algoritmos e Procedimentos	Realizar operações de divisão, fatoração, adição ou subtração.
Automação	Utilizar ferramentas computacionais como The Geometer's Sketchpad ²² , StarLogo ²³ e bloco de códigos utilizando o Python ²⁴
Simulação	Representar graficamente uma função em um plano cartesiano e modificar os valores das variáveis.
Paralelização	Resolver sistemas lineares e multiplicação de matrizes.

Fonte: Adaptado de BARR; STEPHENSON (2011)

Tal trabalho também discute medidas e estratégias para que o PC seja incorporado na Educação Básica.

A The Royal Society (2012, p. 29, tradução nossa), instituição destinada à promoção do conhecimento científico, entende o PC como

[...] o processo de reconhecer aspectos da computação no mundo que nos rodeia e aplicar ferramentas e técnicas da Ciência da Computação para entender e raciocinar sobre sistemas e processos naturais e artificiais.²⁵

Tal definição está presente em um relatório que faz recomendações sobre o letramento digital na Inglaterra. Assim, tal sociedade defende que “pensar através de elementos computacionais proporciona ao ser humano a compreensão do ambiente em que este está inserido, além de dar meios para que ele interfira neste ambiente.” (GONÇAVES, 2015, p. 25).

Brennan e Resnick (2012) identificam sete habilidades que estão presentes no PC e acreditam fazer parte da lógica de programação. Tais habilidades são: 1 - Sequências: série de

²² <http://www.dynamicgeometry.com/>

²³ <http://www.slnova.org/>

²⁴ <https://www.python.org/>

²⁵ the process of recognising aspects of computation in the world that surrounds us, and applying tools and techniques from Computer Science to understand and reason about both natural and artificial systems and processes.

etapas ou instruções individuais que podem ser executadas pelo computador. 2 - Loops: execução de uma mesma sequência de ações repetidas vezes. 3 - Paralelismos: sequências de instruções que acontecem ao mesmo tempo. 4 - Eventos: ações que podem vir a causar outras ações. 5 - Condicionais: capacidade de tomar decisões com base em certas condições. 6 - Operadores: dão suporte para expressões matemáticas e lógicas permitindo manipulações numéricas. Por fim, 7 - Dados: envolvem armazenamento, recuperação e atualização de valores.

Já Gadanidis (2017) identifica cinco aspectos do PC que apoiam o ensino e aprendizagem de Matemática. O Agenciamento, que se caracteriza pela escrita de códigos e controle dos alunos; o Acesso, que permite os alunos se relacionarem com um contexto complexo e variado; a Abstração, que indica a capacidade de reduzir a complexidade de um problema; a Automação, que visa o uso da tecnologia para automatizar o processo de solução do problema; e finalmente a Audiência, que permite o compartilhamento da aprendizagem.

As habilidades apresentadas nos diferentes estudos (ISTE/CSTA, 2011; BRENNAN; RESNICK, 2012; GADANIDIS, 2017) podem ser vistas e comparadas no Quadro 3.

Quadro 3 - Habilidades do Pensamento Computacional em diferentes estudos

ISTE/CSTA (2011)	Brennan e Resnick (2012)	Gadanidis (2017)
• Coleta de dados; • Análise de dados; • Representação de dados; • Decomposição do problema; • Abstração; • Algoritmos e Procedimentos; • Automação; • Paralelização; • Simulação.	• Sequências; • Loops; • Paralelismos; • Eventos; • Condicionais; • Operadores; • Dados.	• Agenciamento; • Acesso; • Abstração; • Automação; • Audiência.

Fonte: Adaptado de ISTE/CSTA (2011), BRENNAN; RESNICK (2012) e GADANIDIS (2017)

A partir da interpretação e comparação de tais habilidades, houve uma adaptação desses aspectos para esta dissertação, convergindo em cinco categorias que trato como habilidades ou aspectos. São elas: pensamento algorítmico; decomposição e generalização; padrões e abstração; representação e automação; e avaliação. A escolha por tais aspectos sofreu influência levando em consideração o tema explorado durante as atividades da produção de dados (fractais) e na proposta de utilizar o software GeoGebra na construção de tais objetos.

Na próxima subseção apresento as definições de cada um desses aspectos do PC bem como indícios que os ilustram nos dados da pesquisa.

3.2 Habilidades do Pensamento Computacional adotadas na pesquisa

Para a elaboração das habilidades, teve-se como referência estudos apresentados na subseção acima. Nessas habilidades, há pontos que convergem em relação às definições e fundamentos identificados pelos autores estudados, se assemelhando em diversos pontos. Nas próximas subseções explico tais aspectos utilizando exemplos de dados produzidos na pesquisa para ilustrar a ocorrência dos mesmos e a compreensão de como tais habilidades se fizeram presentes. Uma análise detalhada dos dados é apresentada na Seção 5.

3.2.1 Pensamento algorítmico

O termo algoritmo é definido como uma sequência finita de instruções necessárias para realização de uma determinada tarefa e/ou resolução de um determinado problema. Assim, o entendimento de algoritmo não está, necessariamente, ligado a execução de programas de computador. (TERZIDIS, 2006; SELBY; WOOLLARD, 2014). Papert (1986) apresenta o termo “pensamento de procedimento” em seu estudo, e argumenta que tal pensamento é uma poderosa ferramenta intelectual que está relacionada à habilidade analítica, ao raciocínio heurístico e à automação.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017), documento normativo que define as aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo da Educação Básica no Brasil, define algoritmo como

uma sequência finita de procedimentos que permite resolver um determinado problema. Assim, o algoritmo é a decomposição de um procedimento complexo em suas partes mais simples, relacionando-as e ordenando-as, e pode ser representado graficamente por um fluxograma. A linguagem algorítmica tem pontos em comum com a linguagem algébrica, sobretudo em relação ao conceito de variável. (BRASIL, 2017, p. 269).

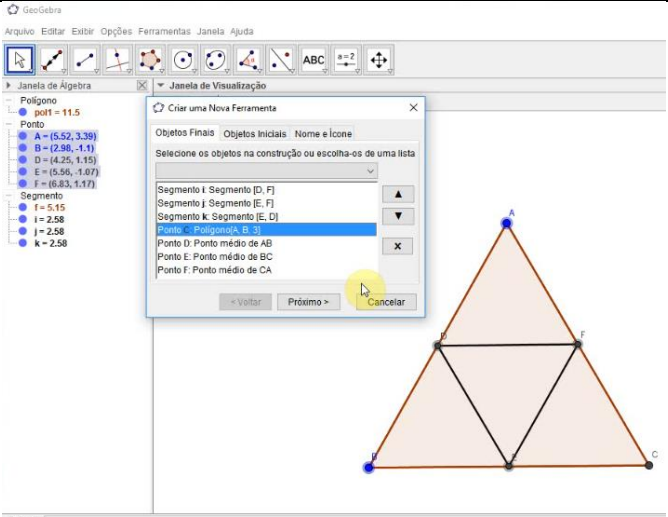
Para Sousa e Lencastre (2014, p. 257) o pensamento algorítmico é a “expressão de soluções em diferentes passos de forma a encontrar a forma mais eficaz e eficiente de resolver um problema”, pode-se dizer também que está ligado ao processo de tomada de decisões, em que se opta por certos comandos e não por outros na resolução de um problema.

Wing (2011, p. 20, tradução nossa) aborda o pensamento algorítmico como parte do PC, ela indica que o PC

[...] se sobrepõe ao pensamento lógico e ao pensamento sistêmico. Inclui o pensamento algorítmico e o pensamento paralelo, que por sua vez envolvem outros tipos de processos de pensamento, como raciocínio composicional, correspondência de padrões, pensamento procedural e pensamento recursivo.²⁶

Neste estudo, essa habilidade seguirá a definição proposta por Sousa e Lencastre (2014). Para indicar e ilustrar a compreensão do pensamento algorítmico, no Quadro 4 são indicadas falas e captura de tela retiradas dos dados da pesquisa.

Quadro 4 - Pensamento algorítmico presente nos dados

Transcrição da fala
<i>“Mas se eu colocar para ele criar um C quando eu selecionar o A e o B ele vai criar um C que vai sobrepor o F.”</i>
Construção no momento da fala
 The screenshot shows a geometry software window with a menu bar (Arquivo, Editar, Exibir, Opções, Ferramentas, Janela, Ajuda) and a toolbar. On the left, there are panels for 'Janela de Álgebra' and 'Janela de Visualização'. The 'Janela de Álgebra' lists objects: Polígono (pol1 = 11.5), Ponto (A = (5.52, 3.39), B = (2.98, -1.1), D = (4.25, 1.15), E = (5.55, 1.67), F = (6.83, 1.17)), Segmento (f = 5.15, i = 2.58, j = 2.58, k = 2.58). The 'Janela de Visualização' shows a construction of a triangle ABC with its medians intersecting at point F. A dialog box 'Criar uma Nova Ferramenta' is open, showing a list of objects and a selection of 'Ponto F: Polígono[A, B, C]'. The dialog box has buttons for 'Voltar', 'Próximo', and 'Cancelar'.

Fonte: Dados da Pesquisa

A fala apresentada no Quadro 4 expõe um momento em que estão sendo analisadas instruções a serem transmitidas para o software. Cada instrução e programação realizada tem uma ação que será efetivada. Assim, o pensamento algorítmico representa os passos lógicos de um determinado processo, indicando as diversas ações e decisões que devem ser executadas para resolver um dado problema de forma eficaz. A seguir, a habilidade decomposição e generalização é explicada e contextualizada.

²⁶Thus, computational thinking overlaps with logical thinking and systems thinking. It includes algorithmic thinking and parallel thinking, which in turn engage other kinds of thought processes, such as compositional reasoning, pattern matching, procedural thinking and recursive thinking.

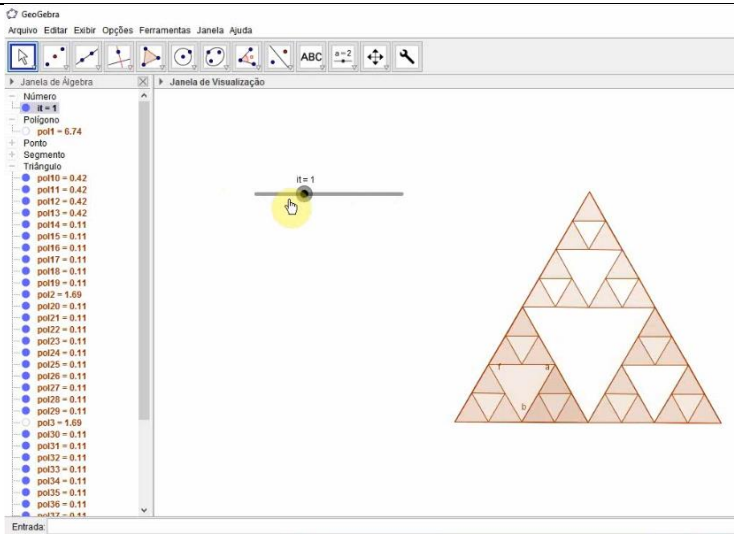
3.2.2 Decomposição e generalização

A decomposição é vista como a habilidade de dividir dados, problemas e processos em componentes menores e mais fáceis de serem solucionados. (WING, 2006; BARR; STEPHENSON, 2011; ISTE/CSTA, 2012). É uma forma de pensar sobre o produto a partir da junção de seus elementos, o que ajuda a resolver problemas complexos, a lidar com situações novas e a projetar sistemas (COSTA, 2016). Segundo Queiroz (2017, p. 79), programas podem ser divididos em partes menores, “de modo que cada uma dessas partes possa ser desenvolvida e testada separadamente, diminuindo assim a complexidade do que precisa ser analisado, por exemplo, na busca por erros.”.

A generalização permite que se transfira um processo de resolução de um determinado problema para uma ampla variedade de problemas no futuro, além de garantir o reconhecimento de padrões (ISTE/CSTA, 2012). Algumas estruturas de programação, como as de repetição e de decisão, possuem aspectos que favorecem a generalização (QUEIROZ, 2017).

Nesta pesquisa, o GeoGebra favoreceu para a decomposição e generalização, a partir da construção de novas ferramentas no software. Para indicar e ilustrar a compreensão do aspecto de decomposição e generalização, no Quadro 5 são indicadas falas e captura de tela retiradas dos dados da pesquisa.

Quadro 5 - Decomposição e generalização presente nos dados

Transcrição da fala
“É, ele [o triângulo] vai sumir. Mas a gente vai precisar fazer aparecer mais polígonos ainda. O que eu não quero são os polígonos daqui. Primeiramente deixa eu facilitar a minha vida. Eu não quero exibir os pontos. E nem segmentos. Deixa eu tirar os teimosos [pontos e segmentos] daqui. Pronto, [agora estamos] na segunda iteração. Calma, [vai] em propriedades, [e coloca] o incremento [igual a] 1. Olha, está vendo que tem uns que está ponto 11? Esses aí são todos iguais.”
Construção no momento da fala


Fonte: Dados da Pesquisa

A fala do Quadro 5 apresenta a identificação e comprovação de propriedades que se verificam nos objetos construídos. Assim, a decomposição e generalização se desenvolve a partir da análise de um caso particular, evoluindo para outros casos, sendo um processo superior de entendimento. A decomposição e generalização serão analisados em conjunto neste estudo. Entendo que ao se trabalhar com fractais, a partir do momento que se decompõe tais objetos, levando em conta suas iterações, é possível generalizar várias características, como a quantidade de figuras, perímetro, área, volume e a própria lei de formação do mesmo. A seguir, a habilidade padrões e abstração é explicada e ilustrada.

3.2.3 Padrões e abstração

De maneira geral, a palavra padrão se refere a uma disposição ou arranjo de cores, sons, formas, números, etc., em que se detecta alguma regularidade. (VALE et al., 2007). Destaca-se que

De uma forma ou de outra fica a ideia de que os padrões, em Matemática, estão associados à descoberta, à procura de relações para explicar aquilo com que nós vamos

deparando. Por vezes, as intuições assumem um papel relevante e, estas, parecem ser mais importantes do que os próprios factos uma vez que existe a excitação de descobrirmos algo, e um padrão é um achado. De facto, de repente, as quantidades encaixam (há uma ordem, uma regularidade, ...) e descobre-se uma relação. Mesmo que estejamos no campo da geometria não será necessário que esta relação seja geométrica, pois poderá ser uma relação de números ou de quaisquer outros entes que não eram óbvios anteriormente. (VALE et al., 2007, p. 14).

Tais autores também associam o conceito de padrão a termos como regularidade(s), sequência, motivo, regra e ordem. Acrescento ainda que a busca por padrões pode também realçar uma análise dos dados, dando sentido a interpretações e conclusões.

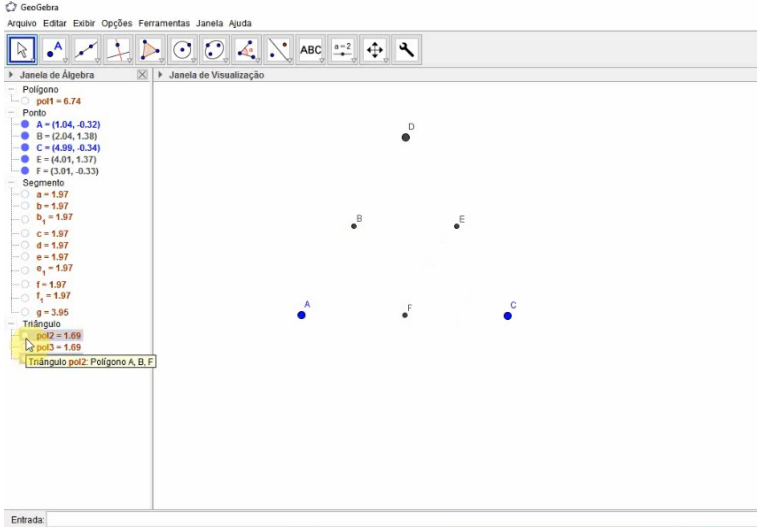
A abstração, é vista por Wing (2011) como sendo o processo cognitivo mais importante dentro do PC. Tal habilidade é considerada como uma ferramenta mental e a chave para lidar com a complexidade (WING, 2008; LURIA, 1990 apud VIEIRA, 2018). Abstrair “[...] inclui escolher as abstrações adequadas e operá-las simultaneamente em várias camadas para então definir a relação entre elas.” (VIEIRA, 2018, p. 29), permite também a exploração e o desenvolvimento do pensamento lógico e crítico agenciado pela linguagem. Para Luria (1990),

a capacidade de abstração de um indivíduo é dada a partir da possibilidade que ele tem de agrupar alguns objetos de acordo com algumas propriedades, ou então, categorias. A classificação categorial implica pensamento verbal e lógico complexo que explora o potencial da linguagem de formular abstrações e generalizações para selecionar atributos e subordinar objetos a uma categoria geral. (LURIA, 1990, p. 65 apud VIEIRA, 2018, p. 29).

A BNCC defende que para a abstração ser favorecida no ambiente escolar é necessário que os alunos elaborem novos problemas e/ou reelaborem problemas já propostos a partir de reflexões e questionamentos acerca de condições a serem modificadas no problema inicial (BRASIL, 2017).

Portanto, a habilidade de padronizar e abstrair ajuda a lidar com problemas a partir de instâncias mais específicas, permitindo-se concentrar em conceitos relevantes para a compreensão e solução do problema (GROVER; PEA, 2013). Para indicar e ilustrar a compreensão do aspecto padrões e abstração, no Quadro 6 são indicadas falas e captura de tela retiradas dos dados da pesquisa.

Quadro 6 - Padrões e abstração presente nos dados

Transcrição da fala
“A gente vai precisar dos polígonos de novo. Porque a gente vai precisar dos pontos médios. Vamos usar a ferramenta e selecionar os pontos médios, para criar os triângulos.”
Construção no momento da fala


Fonte: Dados da Pesquisa

A fala do Quadro 6 apresenta um processo superior de análise, um processo “pelo qual o espírito se desvincula das significações familiares do vivido e do mundo das percepções para construir conceitos” (JAPIASSU; MARCONDES, 2001, p.7). Assim, a ação de encontrar uma solução, dar significado a ela e fazer com que ela seja válida para diferentes problemas caracteriza o aspecto padrões e abstração. A seguir, a habilidade representação e automação é explicada e ilustrada.

3.2.4 Representação e automação

Allan Collins, professor de Educação e Política Social da Universidade Northwestern – Estados Unidos, “[...] argumentou que uma das principais características do pensamento computacional é a competência representacional, que ele descreveu como a aplicação efetiva de meios computacionais de representação do conhecimento.”²⁷ (LINN, 2010, p. 25, tradução nossa).

Nessa mesma direção, Paulo Blikstein, professor na Escola de Educação da Universidade de Columbia – Estados Unidos, destaca que a Matemática e o PC são ferramentas

²⁷[...] argued that one key feature of computational thinking is representational competence, which he described as the effective application of computational means of representation of knowledge.

para representação. Logo, pode haver uma oportunidade de usar o PC para representar processos e relacionamentos complexos de uma maneira mais compreensível do que a Matemática. Uri Wilensky, professor de Ciências da Aprendizagem e Ciência da Computação da Universidade Northwestern – Estados Unidos defende que as representações computacionais possibilitam maior poder de modelagem e maior acesso a modelos científicos. (LINN, 2010).

Para Vieira (2018, p. 37), a representação

[...] inclui a visualização de modelagem e meta-modelagem, representações computacionais que desempenham um papel de manipulação de *software* para apoio à resolução de problemas, fazendo uso de sistemas relacionados à Computação. Na Educação é possível visualizar as representações que os aprendizes realizam por meio de palavras, números, gráficos, mapas, mídias e textos, dentre outros artefatos que constroem utilizando ou não uma tecnologia computacional. Um programa de computador é uma representação computacional das ideias abstratas do aprendiz que estão apresentadas por meio de uma linguagem específica. Ao realizar pesquisas na internet, pode ser encontrada uma extensa gama de exemplos de representações criadas para facilitar atividades cotidianas. Ao pensar, utilizar e criar representações, o aprendiz está pensando sobre essas e assim entende e desenvolve seu processo de pensamento. (VIEIRA, 2018, p. 37, grifo do autor).

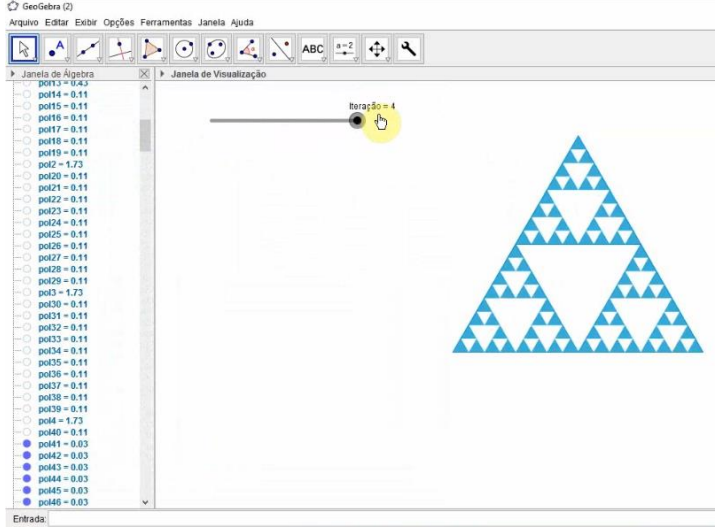
Wing (2008) diz que a automação implica sobre a necessidade de algum tipo de ferramenta para interpretar as abstrações, que pode ser uma máquina ou o próprio ser humano. Argumenta ainda que a computação é a automação de nossas abstrações.

Corroborando essa ideia, Vieira (2018, p. 46) argumenta que a

automação das abstrações para resolução de um problema não ocorre somente por meio de uma linguagem, pois é possível automatizar os pensamentos por meio de processos mecânicos, como por exemplo, um motor de um carro, ou a fechadura de uma porta, entre outros.

Na visão de Peter Lee, chefe do Departamento de Ciência da Computação da Universidade Carnegie Mellon – Estados Unidos, a automação oferece ao processo de resolução de um problema, agilidade, precisão e segurança na repetição e no processamento das informações (LINN, 2010). Para indicar e ilustrar a compreensão do processo de representação e automação, no Quadro 7 são indicadas falas e captura de tela retiradas dos dados da pesquisa.

Quadro 7 - Representação e automação presente nos dados

Transcrição da fala
<i>“Queria fazer umas vinte [iterações], imagina que legal, ia tender a um triângulo branco. Um triângulo azul tendendo a um triângulo branco.”</i>
Construção no momento da fala


Fonte: Dados da Pesquisa

A fala apresentada no Quadro 7 mostra o envolvimento entre a construção das iterações do fractal com sua mecanização através do uso de ferramentas do software. A representação e automação serão analisadas em conjunto neste estudo, uma vez que para resolver as atividades propostas, que são apresentadas e detalhadas na Seção 4, o software GeoGebra foi utilizado para a representação e automação nas etapas das atividades. A seguir, a habilidade avaliação é explicada e ilustrada.

3.2.5 Avaliação

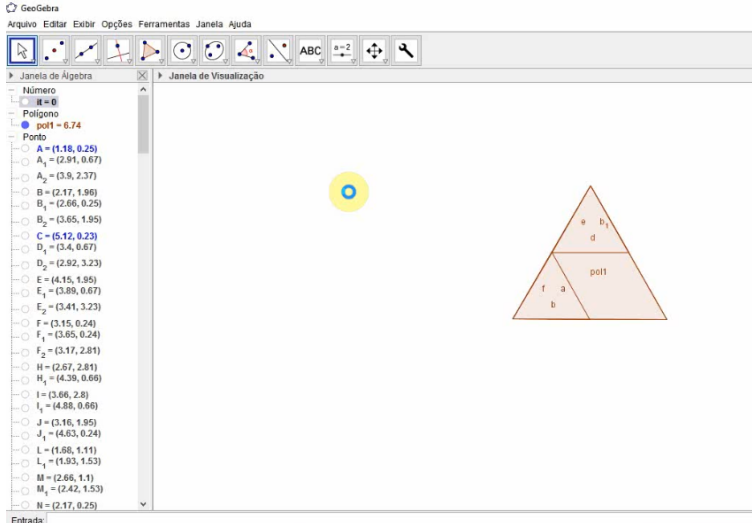
Na abordagem realizada por L’Heureux et al. (2012) a avaliação se relaciona com a capacidade de reconhecer e avaliar os resultados em termos de eficiência e utilização de recursos.

Selby e Woollard (2014) defendem que avaliar, no contexto de soluções, pode ser interpretado e comparado ao termo analisar. Argumentam que “Analisar, no contexto de problemas e dados, incorpora os termos previamente definidos de abstração e decomposição. As descrições do termo analisar, no contexto das soluções, são atribuídas ao termo avaliação.”

(SELBY; WOOLLARD, 2014, p. 12, tradução nossa²⁸). Na mesma direção, Mannila et al. (2014) afirmam que analisar os resultados é uma forma de avaliar, assim como, chegar a conclusões envolve avaliar e abstrair.

Para Catlin e Woollar (2014) de maneira sistemática, a avaliação faz julgamentos de valor, através de critérios e da heurística. Para indicar e ilustrar a compreensão do aspecto avaliação, no Quadro 8 são indicadas falas e captura de tela retiradas dos dados da pesquisa.

Quadro 8 - Avaliação presente nos dados

Transcrição da fala
<i>“Acho que está dando um problema aqui quando mexemos na exibição dos últimos pontos, são muitos! Por isso acredito que vai demorar um pouquinho”</i>
Construção no momento da fala


Fonte: Dados da Pesquisa

A fala apresentada no Quadro 8 traz o momento em que um problema ocorrido no software é avaliado, há uma argumentação crítica sobre o problema e sua correção. Assim, a avaliação neste estudo é tratada como uma forma de análise, apreciação e julgamento dos resultados obtidos. Apresento a seguir estudos que discutem a inserção do PC na Educação.

3.3 Inserção do Pensamento Computacional na Educação

As pesquisas de Valente (2016), Resnick et al. (2009) e Mannila et al. (2014) mostram diferentes estratégias e possibilidades para a inserção do PC nas escolas de Educação Básica

²⁸Analyse, in the context of problems and data, incorporates the previously defined terms of abstraction and decomposition. Descriptions of the term analyse, in the context of solutions, are attributed to the term evaluation.

realizadas em diversos países. Tais estratégias são relacionadas ao uso de TD como também a partir da chamada computação desplugada²⁹.

Valente (2016) apresenta estratégias como a implantação de atividades de Ciência da Computação (programação fora ou dentro de sala de aula) e inserção de disciplinas no currículo que usam tecnologias para explorar temas relativos ao letramento digital.

Resnick et al. (2009) discutem os princípios de *design* que orientam o desenvolvimento do Scratch³⁰ e as estratégias realizadas afim de tornar a programação acessível para todos e, mais que isso, tornar a programação uma atividade prazerosa para os alunos. O Scratch é um software de programação que se baseia em uma coleção de blocos e carrega a ideia de algo totalmente interativo, com muitas funções e opções. Também tem a ideia de diversidade e personificação na medida em que apoia tipos diferentes de projetos (histórias, jogos, animações, simulações), de modo que as pessoas com interesses amplamente variáveis são capazes de trabalhar em projetos que lhes interessam, e ainda personalizem seus projetos Scratch, importando fotos e clipes de música, gravando vozes e criando gráficos.

Mannila et al. (2014) apresentam tentativas informais e formais de desenvolvimento do PC. Algumas das tentativas informais são os clubes, concursos, programas de divulgação e atividades organizadas por professores e organizações individuais. Os autores discutem que apesar de serem interessantes oportunidades, essas atividades trazem desvantagens, como o foco num único tipo de abordagem, sendo em grande parte apenas a programação, e a desintegração com o currículo das escolas de modo que as crianças não percebem conexões com os conteúdos que precisam aprender. Com relação as tentativas formais são exibidas algumas atividades, destacando como o PC pode ser usado em uma variedade de assuntos com os alunos. Essas ações são desconectadas ou cinestésicas³¹, programação, narrativas, robótica educacional e jogos educativos, bem como práticas maiores que abarcam várias dessas intervenções, como por exemplo, projetos interdisciplinares.

A tese de Vieira (2018) analisa as diferentes aprendizagens evidenciadas em um programa de introdução ao PC desenvolvido no Laboratório de Inovação Tecnológica da Universidade do Vale do Itajaí em Itajaí, Santa Catarina. Nessa tese o PC foi definido como “um dos adjetivos do modo de pensar, que está associado às abstrações com o propósito de solucionar problemas que um computador – humano ou máquina – possa realizar por meio da

²⁹Computer Science Unplugged desenvolvido pela Universidade de Canterbury, Nova Zelandia (BELL et al., 2009 apud VALENTE, 2016).

³⁰<https://scratch.mit.edu/>

³¹Atividades cinestésicas são aquelas que não exigem o uso de caneta e papel e, em vez disso, se concentram em fazer os participantes se movimentarem enquanto participam. (MANNILA et al., 2014).

automação.” (VIEIRA, 2018, p. 71). A pesquisadora defende que o PC quando estimulado apresenta um grande potencial para o desenvolvimento de diversas aprendizagens, como o protagonismo e resolução de problemas, e ainda que a aplicação de tais práticas pode ser realizada tanto em ambientes de ensino regular quanto em atividades extraclasse.

Queiroz (2017) em seu estudo, investiga por meio do aprendizado de conceitos básicos de programação, a possibilidade de desenvolvimento e exercício de habilidades do PC em crianças dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Foi realizado um estudo de caso com sete crianças, buscando relacionar a maturidade cognitiva das mesmas, com o aprendizado de estruturas básicas de programação, verificando de que forma tal aprendizado pode apoiar o exercício de determinadas habilidades do PC. Utiliza-se recursos baseados em Tecnologia Livre³², como o Ambiente de Programação em Blocos DB4K³³, e materiais de baixo custo, associados a estratégias pedagógicas alicerçadas na Robótica Educacional.

Lummertz (2016) aborda as potencialidades do uso do software de programação Scratch para a construção da Literacia Digital³⁴ e aspectos do PC por meio da construção de jogos eletrônicos com alunos de quarto ano do Ensino Fundamental. O pesquisador defende que o PC

é caracterizado pelo envolvimento da capacidade e da competência de utilizar e lidar com componentes tecnológicos. Além de processos de pensamento, envolve o estudo dos mecanismos de inteligência que podem potencializar aplicações práticas que ampliem a inteligência humana. Sendo assim, podemos dizer que é uma maneira de formular métodos de fazer as coisas, potencializados pelo uso de softwares de apoio para a resolução de problemas. (LUMMERTZ, 2016, p. 37).

Os resultados de tal estudo apontam possibilidades frente à Literacia Digital e potencialidades frente à construção do PC e associação de conteúdos de Matemática.

A partir do desenvolvimento e aplicação de um jogo digital da categoria dos *puzzles*³⁵, Gonçalves (2015) buscou identificar relações entre a formação dos indivíduos e refletir se PC pode ser diagnosticado em um sujeito e os seus diferentes componentes coexistentes. Tal jogo foi aplicado em turmas dos cursos de Ciência da Computação, Engenharia da Computação e Psicologia, além de estudantes do Ensino Médio e Fundamental de escolas públicas. O jogo desenvolvido teve como proposta construir desafios de resolução de problemas que estivessem

³²Em sua dissertação, o pesquisador não deixa claro o que se entende por Tecnologias Livre. Porém, analisando pelo contexto do estudo acredito que tal termo possa ser entendido como Software Livre, que é uma expressão utilizada para designar qualquer programa de computador que pode ser executado, copiado, modificado e redistribuído pelos usuários gratuitamente.

³³<http://www.nce.ufrj.br/ginape/livre/paginas/db4k/db4k.html>

³⁴“A Literacia Digital [Jenkins et al. (2009).] é considerada pelo autor como a capacidade de o indivíduo compreender e usar a informação contida em vários materiais digitais de modo a desenvolver seus próprios conhecimentos.” (LUMMERTZ, 2015, p. 27).

³⁵Que remetem a ideia de um quebra-cabeça.

alinhados com os conceitos operacionais do PC definidos pela CSTA, que foram aqui apresentados na subseção 3.1.

Soman et al. (2012a, 2012b, 2012c e 2012d) em uma coletânea de quatro artigos sequenciais defendem que a implementação em planilhas eletrônicas de conceitos de fractais pode ser um ponto de partida para introduzir alunos do Ensino Médio e do Ensino Superior ao PC. No primeiro artigo apresentam diversas concepções de PC e os benefícios de se estimular esse pensamento. Dentre as definições, defendem que algumas habilidades são de extrema importância quando se fala de PC, que são: capacidade de pensar logicamente, algoritmicamente e recursivamente. Nos artigos posteriores são apresentadas construções de vários fractais, utilizando o software Excel³⁶, por meio de diversos conteúdos matemáticos e computacionais, como matrizes; sistema de funções iterativas; funções complexas e L-system. Mesmo que a proposta dos pesquisadores seja abordada em conteúdos mais avançados, eles defendem que os aspectos do PC devem ser estimulados desde a Educação Infantil. Justificam que a escolha pelos fractais se deu, pois sua produção é cativante ao mesmo tempo que oferece problemas desafiadores a todos os níveis de ensino.

Documentos curriculares como a BNCC têm relacionado o PC ao desenvolvimento de habilidades e processos matemáticos, tal documento aponta que

A linguagem algorítmica tem pontos em comum com a linguagem algébrica, sobretudo em relação ao conceito de variável. Outra habilidade relativa à álgebra que mantém estreita relação com o pensamento computacional é a identificação de padrões para se estabelecer generalizações, propriedades e algoritmos. (BRASIL, 2017, p. 269).

Contudo, são muitas as possibilidades para o desenvolvimento do PC dos alunos, atividades podem ser planejadas de acordo com as necessidades e nível escolar dos alunos. No que se refere a atividades voltadas a programação, existem programas com linguagem acessível, como o Scratch e o GeoGebra, que podem ser explorados por diferentes níveis da educação, indo desde as séries iniciais até o ensino superior e linguagens de programação avançadas, que demandarão uma familiaridade e experiência maior por parte dos estudantes.

Ainda que tímida, a literatura sobre o PC mostra que assim como a leitura ou escrita, aspectos desse pensamento são fundamentais para todo ser humano, seja ele da área de computação ou não. Sua inserção na escola ainda requer muitos esforços, como a formação de professores, para desenvolver uma prática em sua disciplina ou de modo interdisciplinar que caminhe nessa direção. Na próxima Seção, apresento a metodologia e os procedimentos metodológicos adotados para a produção e análise de dados desta pesquisa.

³⁶Editor de planilhas eletrônicas.

4 METODOLOGIA DE PESQUISA E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Nesta seção, apresento algumas características da metodologia de pesquisa qualitativa e dos procedimentos metodológicos realizados. Na sequência, detalho o processo de produção de dados, identificando aspectos relevantes sobre os experimentos de ensino. Apresento os participantes da pesquisa e as atividades desenvolvidas, assim como o modo que as análises dos vídeos foram realizadas.

4.1 Abordagem metodológica

Desde as minhas primeiras reflexões sobre esta pesquisa, que investigou *quais aspectos do Pensamento Computacional emergem de estudantes de graduação em Matemática ao explorarem a Geometria Fractal com o software GeoGebra*, procurei por uma metodologia em que fosse possível um processo de produção e uma análise dos dados. Nesse sentido, a pesquisa em questão foi desenvolvida segundo a abordagem qualitativa. Como afirmam Bogdan e Biklen, (1994, p. 209) os estudos dessa natureza “devem revelar maior preocupação pelo processo e significado e não pelas suas causas e efeitos”. Assim, o interesse está centrado em analisar a manifestação do PC nos graduandos, bem como investigar suas práticas com a Geometria Fractal e construção de fractais, incentivando-os a respeito da necessidade de se desenvolverem profissionalmente, apoiando-se na reflexão e ressignificação de saberes sobre a prática educativa e nos aspectos que as fundamentam.

Goldenberg (2004) aponta que:

Na pesquisa qualitativa a preocupação do pesquisador não é com a representatividade numérica do grupo pesquisado, mas com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, de uma instituição, de uma trajetória etc. (GOLDENBERG, 2004, p.14).

De acordo com Bicudo (2012, p. 116), a metodologia qualitativa é assim designada por englobar “[...] a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões.”, tendo ainda lhe sido atribuído o significado de envolver “noções a respeito de percepções de diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis de experiências.” (BICUDO, 2012, p. 116). Com isso, entendo que a pesquisa qualitativa está muito mais preocupada com o processo e sua compreensão do que com o produto.

Além disso, Araújo e Borba (2012) destacam os fundamentos que influenciam diretamente na consonância entre as visões de conhecimento, de Educação e de metodologia de pesquisa.

[...] em uma pesquisa em Educação (Matemática), a metodologia que embasa seu desenvolvimento deve ser coerente com as visões de Educação e de conhecimento sustentadas pelo pesquisador, o que inclui suas concepções de Matemática e de Educação Matemática. Portanto, o que o pesquisador acredita ser a Matemática e a Educação Matemática e seu entendimento de conhecimento e como é produzido (ou transmitido, ou descoberto) são fundamentos que influenciam diretamente os resultados de pesquisa. (ARAÚJO; BORBA, 2012, p. 49).

Bogdan e Biklen (1999) argumentam que um dos enfoques do pesquisador nas ciências qualitativas é o de melhor compreender o comportamento e a experiência humana. Usando a observação empírica procuram entender o processo pelo qual as pessoas constroem significados e descrevem o que representam.

Assim, entendo que a pesquisa qualitativa permite o envolvimento do pesquisador com a investigação. Para tanto, é necessário traçar um caminho para que isso ocorra. Considerando os aspectos que caracterizam a pesquisa qualitativa, bem como o objeto da presente pesquisa, optei pela realização de experimentos de ensino. Steffe e Thompson (2000, p. 273, tradução nossa) destacam que

Um experimento de ensino envolve uma sequência de sessões de ensino (Steffe, 1983). Uma sessão de ensino inclui um agente de ensino, um ou mais alunos, uma testemunha das sessões de ensino e um método de gravação do que acontece durante a sessão. Esses registros, se disponíveis, podem ser usados na preparação de sessões subsequentes, bem como na realização de uma análise conceitual retrospectiva do experimento de ensino. Estes elementos são pertinentes para todos os experimentos de ensino³⁷.

Os experimentos de ensino surgiram como uma metodologia de pesquisa capaz de investigar o aprendizado e o desenvolvimento matemático dos estudantes (STEFFE; THOMPSON, 2000) pois “alguns pesquisadores acreditavam que educadores matemáticos não poderiam apenas “se apropriar” de modelos de pesquisa de diferentes campos com a expectativa de que eles pudessem explicar o desenvolvimento da Matemática dos estudantes.” (MAZZI, 2014, p. 39, grifo do autor).

Nesta pesquisa realizei uma adaptação do que Steffe e Thompson (2000) denominam de experimentos de ensino. Destaco que a opção pela “adaptação” se dá porque neste estudo não se contou com uma testemunha durante as sessões de ensino e que o período de tempo foi inferior a um semestre ou um ano, como sugerido por Steffe e Thompson (2000).

³⁷A teaching experiment involves a sequence of teaching episodes (Steffe, 1983). A teaching episode includes a teaching agent, one or more students, a witness of the teaching episodes, and a method of recording what transpires during the episode. These records, if available, can be used in preparing subsequent episodes as well as in conducting a retrospective conceptual analysis of the teaching experiment. These elements are germane to all teaching experiments.

Algumas pesquisas (SCUCUGLIA, 2006; BARBOSA, 2009; MAZZI 2014) já realizaram variações nesse sentido, em que os alunos foram filmados e observados em períodos que dependiam dos objetivos e atividades propostos por cada pesquisador.

Steffe e Thompson (2000) denominam de sessões de ensino os encontros que acontecem durante um experimento de ensino. Em cada sessão, além da presença dos alunos e do agente de ensino, nesse caso a pesquisadora, utiliza-se um método de gravação dos dados. Nesta pesquisa, utilizei a versão gratuita do software FlashBack³⁸, que grava todos os movimentos feitos na tela do computador, sons e imagens captadas por uma webcam, além de uma filmadora fixa, sendo possível assim capturar todas as ações realizadas no computador, as imagens e os diálogos durante as sessões.

Com isso, Barbosa (2009) defende que:

Os experimentos propiciam situações em que estudantes e pesquisador podem interagir. Isso faz com que o pesquisador deixe de ser apenas um observador para se envolver e participar de forma efetiva do processo e não apenas tentar explicar a matemática dos alunos por meio de sistemas matemáticos conhecidos. (BARBOSA, 2009, p.87).

Outro aspecto relevante é que optei por separar os alunos em duplas e trabalhar com cada uma delas em sessões separadas. Tal opção se deu pelo fato de que “dois alunos trabalhando juntos produzem mais verbalização do que apenas um” (MAZZI, 2014, p.41).

Nesse contexto, os sujeitos considerados foram os alunos, graduandos do curso de Matemática da UNESP Rio Claro, nos quais, o foco da pesquisa esteve centrado. Vale salientar que os graduandos participantes ainda não haviam optado pela modalidade Licenciatura ou Bacharelado. Apresento, a seguir, detalhes sobre a fonte de dados.

4.2 Produção de dados

A produção dos dados foi dividida em quatro momentos, ou seja, foram realizadas quatro sessões de experimento com cada dupla participante. No primeiro momento foram exploradas e analisadas propriedades do fractal “Triângulo de Sierpinski”, bem como realizada sua construção no software GeoGebra. O segundo momento foi voltado para exploração e análise das propriedades do fractal “Tetraedro de Sierpinski”, bem como sua construção no software GeoGebra utilizando a Janela de Visualização 3D.

³⁸Com uma webcam e um microfone conectados ao computador, esse programa captura a imagem da tela do computador e da webcam simultaneamente, bem como o áudio do ambiente, podendo comparar o que está sendo falado pelos alunos e o que está sendo feito no computador, ao mesmo tempo. <https://www.flashbackrecorder.com/>.

A terceira etapa destinou-se à exploração e análise das propriedades do fractal “Tapete de Sierpinski”, assim como sua construção no software GeoGebra. Por fim, no quarto momento, investigou-se o fractal “Esponja de Menger”, finalizando com sua construção na Janela de Visualização 3D do software GeoGebra.

Ao fim de cada sessão do experimento, realizei uma (breve) entrevista com as duplas a fim de esclarecer dúvidas que me surgiram durante a realização da atividade e a fim de realizar questionamentos sobre os métodos de construção escolhidos e utilizados pelas duplas. Este momento também possibilitou que os sujeitos levantassem apontamentos que acharam relevantes e ainda refletissem sobre suas escolhas.

Ribeiro (2008, p.141) trata a entrevista como:

A técnica mais pertinente quando o pesquisador quer obter informações a respeito do seu objeto, que permitam conhecer sobre atitudes, sentimentos e valores subjacentes ao comportamento, o que significa que se pode ir além das descrições das ações, incorporando novas fontes para a interpretação dos resultados pelos próprios entrevistadores.

Poupart (2012, p. 246) afirma que “a entrevista qualitativa é geralmente considerada como uma via de acesso privilegiado para apreender o ponto de vista e a experiência dos atores”.

Para maior confiabilidade do estudo, Goldenberg (2004, p. 63) argumenta que a Triangulação “tem por objetivo abranger a máxima amplitude na descrição, explicação e compreensão do objeto de estudo”. Neste estudo foi utilizada a Triangulação de métodos de produção de dados, que consiste em construir conclusões não apenas nas observações, mas através de outro método, como por exemplo as entrevistas e gravações de tela, o que pode garantir maior credibilidade para o estudo (ARAÚJO; BORBA, 2012).

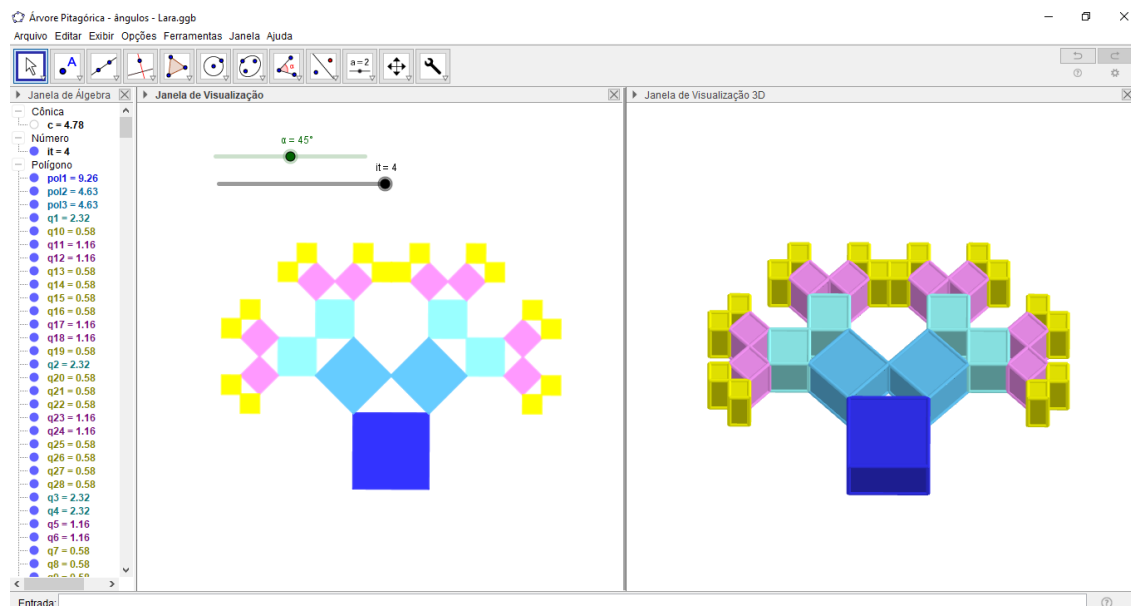
Na subseção seguinte, apresento os participantes da pesquisa, características importantes do software selecionado para realização das atividades do experimento de ensino e detalhes das atividades propostas nas sessões de ensino.

4.3 Os participantes

Os participantes desta pesquisa foram seis discentes da disciplina de Geometria Euclidiana Plana do segundo semestre da graduação em Matemática da Universidade Estadual Paulista (UNESP), Campus Rio Claro. Tudo começou quando, a meu pedido, a professora da turma cedeu duas de suas aulas para que uma oficina com o tema “Fractais” fosse ministrada com os alunos da disciplina de Geometria Plana no segundo semestre de 2017.

Nessa oficina foi realizada uma atividade introdutória sobre o conceito e definição de Fractal, em que os estudantes foram incentivados a identificar e construir figuras fractais, explorando questões como padrão, simetria e o conceito de dimensão. Ao final dessa oficina foi construído o fractal “Árvore Pitagórica” nas janelas de visualização 2D e 3D do software GeoGebra, um exemplo dessa construção pode ser visto na Figura 11.

Figura 11 - Construção do Fractal Árvore Pitagórica no GeoGebra

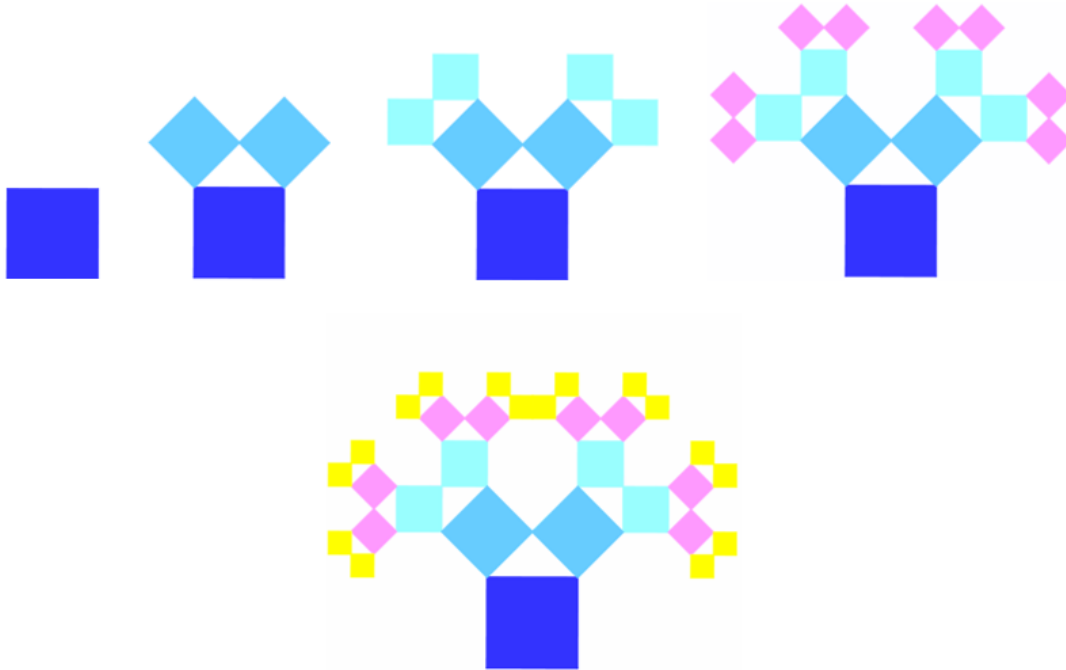


Fonte: Dados da pesquisa

A partir da construção, *GIFs*³⁹ foram gerados levando em conta as iterações do Fractal Árvore Pitagórica (Figuras 12 e 13), e ainda da variação do ângulo (Figuras 14 e 15).

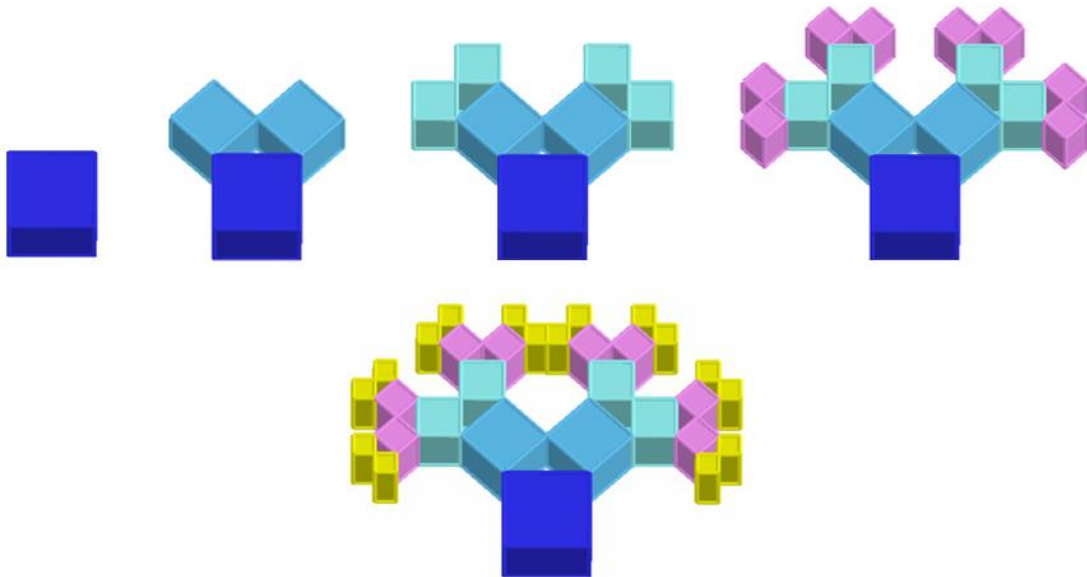
³⁹A sigla *GIF* significa Graphics Interchange Format (Formato de Mudança de Gráficos) é “[...] um formato de arquivo de imagens digitais, que podem ser utilizadas com várias cenas em um único arquivo” (MOTTA-ROTH et al., 2000, p. 39) fazendo com que as imagens se movimentem, em um tipo de animação.

Figura 12 - Quatro iterações do Fractal Árvore Pitagórica na Janela de Visualização 2D



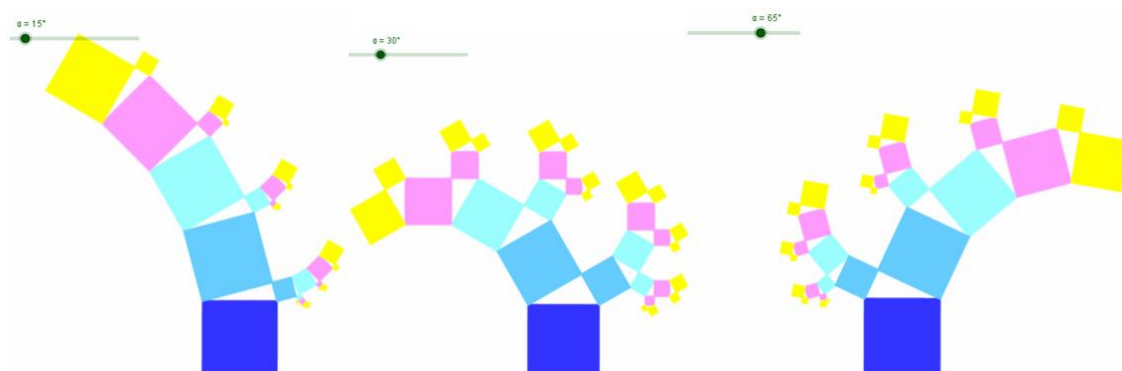
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 13 - Quatro iterações do Fractal Árvore Pitagórica na Janela de Visualização 3D



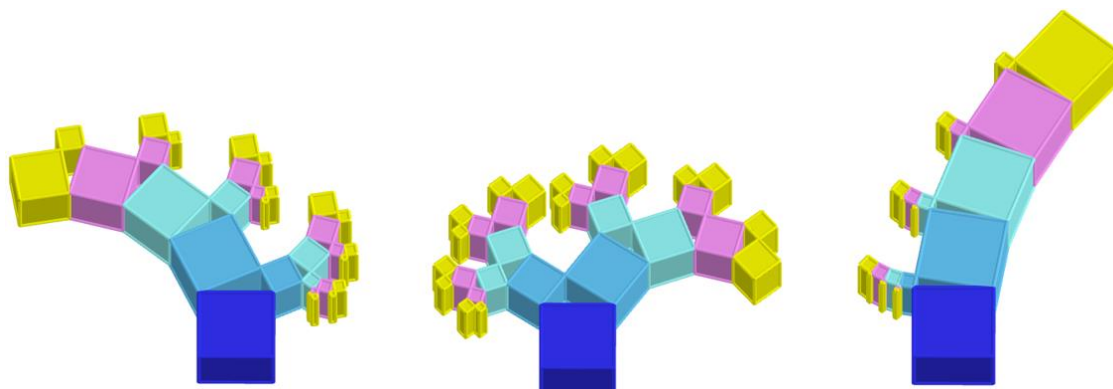
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 14 - Fractal Árvore Pitagórica na Janela de Visualização 2D com ângulo de 15°, 30° e 65°



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 15 - Fractal Árvore Pitagórica na Janela de Visualização 3D com ângulo de 25°, 60° e 80°



Fonte: Dados da pesquisa

Na Figura 15 o controle deslizante não aparece nas imagens da Janela de Visualização 3D pois o software GeoGebra permite sua criação apenas na Janela de Visualização 2D.

Os *GIFs* podem ser acessados através do QRCode⁴⁰ a seguir (Figura 16) ou através do link (<https://goo.gl/1Xfu7H>).

⁴⁰O QR Code consiste de um gráfico 2D de uma caixa preto e branca que contém informações pré-estabelecidas como textos e páginas da internet. Muitos dos celulares novos já vêm de fábrica com aplicativos leitores de códigos QR instalados. Para os demais aparelhos é necessário procurar um programa compatível.

Figura 16 - QRCode que dá acesso a *GIFs* da Árvore Pitagórica

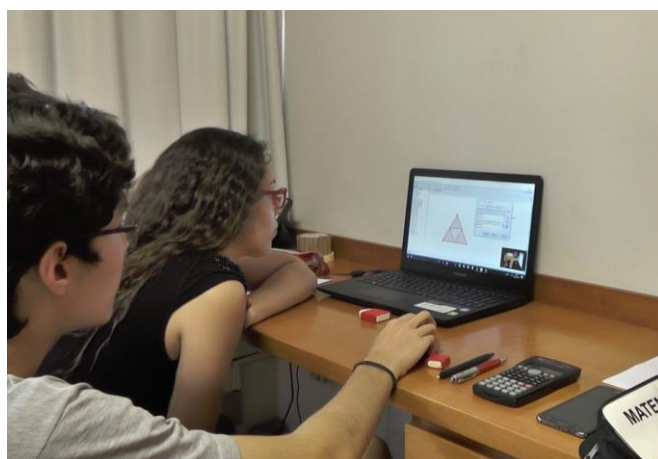


Fonte: Gerado a partir de <https://br.qr-code-generator.com/>

Essa oficina almejou familiarizar os alunos com a criação de ferramentas no software GeoGebra. Após a oficina, de exploração e construção do Fractal Árvore Pitagórica, realizada com toda a turma, convidei os alunos a participarem do experimento de ensino e oito alunos manifestaram interesse. Porém, devido à disponibilidade e compatibilidade de horários, seis alunos efetivamente aceitaram participar das sessões de ensino, que ficou dividida da seguinte maneira:

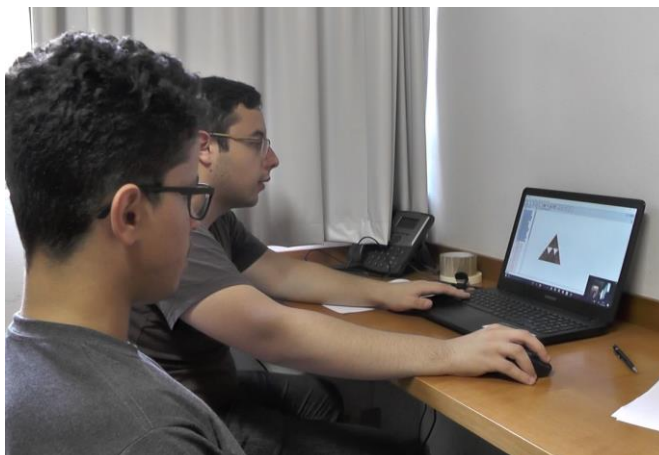
- i) Blenda e Gabriel (Figura 17);
- ii) Fabrício e Matheus (Figura 18);
- iii) Luana e Marcelo (Figura 19);

Figura 17 - Blenda e Gabriel



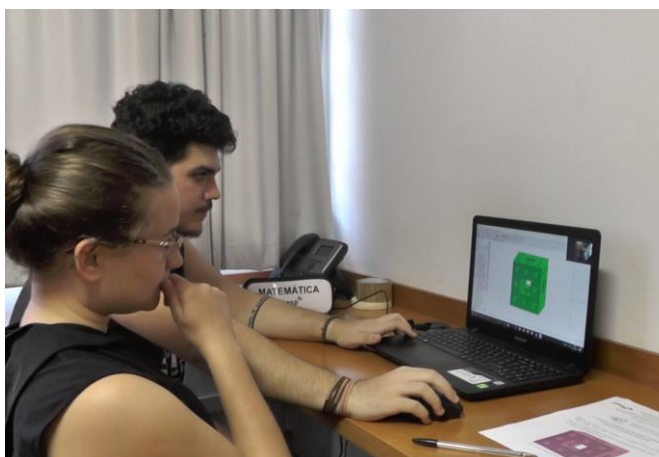
Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 18 - Fabrício e Matheus



Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 19 - Luana e Marcelo



Fonte: Dados da Pesquisa

Cada uma das três duplas de alunos do primeiro ano do curso de graduação em Matemática da Unesp de Rio Claro realizou na presente pesquisa quatro sessões de experimentos de ensino de aproximadamente duas horas cada. Foi uma sessão para cada atividade proposta na pesquisa. Todos os participantes permitiram as filmagens das sessões do experimento de ensino, assim como a divulgação de seus nomes, imagens e discussões que foram realizadas (ver modelo de formulário de autorização no Apêndice C).

4.4 O GeoGebra e a criação de ferramentas

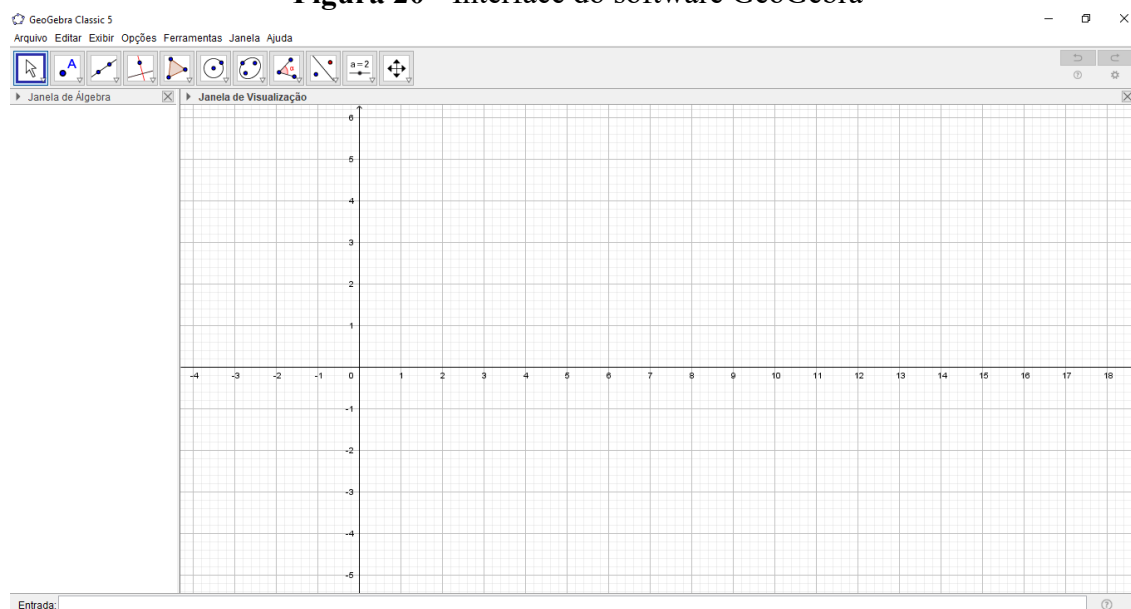
O software GeoGebra (junção das palavras Geometria e Álgebra) é um dos mais populares Softwares Educacionais Matemáticos e se tornou o fornecedor líder de software de matemática dinâmica, apoiando a educação em ciência, tecnologia, engenharia, matemática e inovações no ensino e aprendizagem em todo o mundo. A sua grande diversidade de recursos e

as várias possibilidades de sua utilização fazem com que esse seja um recurso tecnológico muito utilizado pelos educadores de todo mundo para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em um único sistema. Foi criado por Markus Hohenwarter em sua tese de Doutorado (HOHENWARTER; LAVICZA, 2007) pela Universidade de Salzburg, localizada na Áustria em que o foco era sua utilização em ambiente de sala de aula. O projeto foi iniciado em 2001, e tem prosseguido em desenvolvimento com contribuições de pessoas do mundo todo.

É possível realizar o download do instalador do software no site oficial do programa⁴¹. No site, estão disponíveis versões compatíveis com diversos sistemas operacionais de computadores, *tablets* e *smartphones*. O site conta também com uma plataforma que permite o compartilhamento de atividades desenvolvidas pelos usuários do programa ao redor do mundo.

Nesta pesquisa foi utilizada a versão 5.0 do software, que permite realizar construções geométricas com a utilização de pontos, retas, segmentos de reta, polígonos etc., permite inserir funções, criar ferramentas e alterar todos esses objetos dinamicamente, após a construção estar finalizada. Equações e coordenadas também podem ser diretamente inseridas. Além disso, nessa versão as explorações podem ocorrer de forma bidimensional na Janela de Visualização 2D ou tridimensional na Janela de visualização 3D. Sua interface pode ser vista na Figura 20.

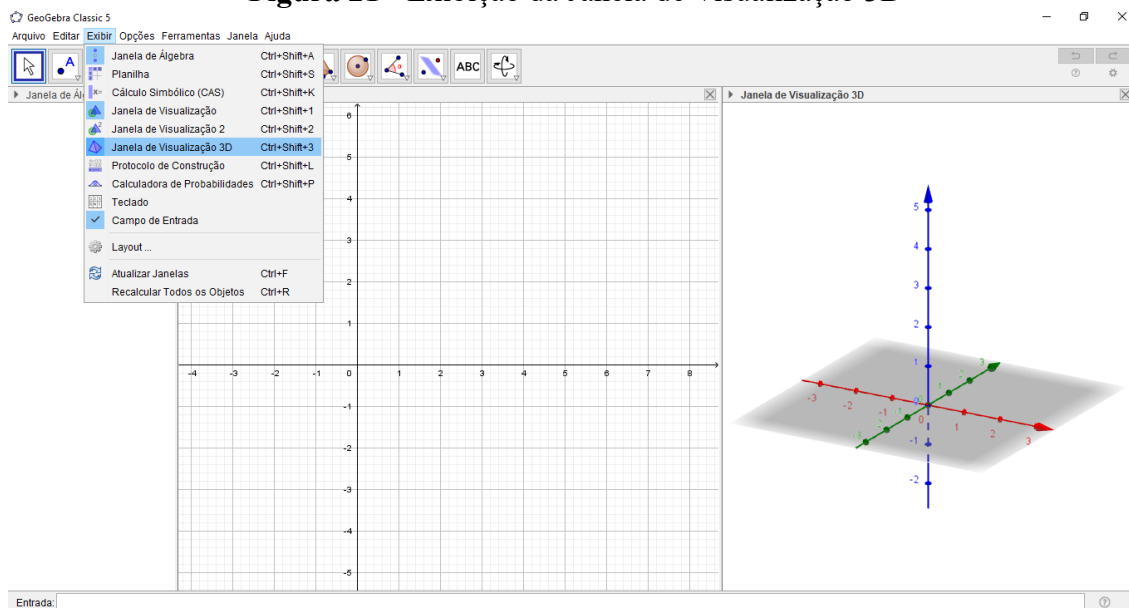
Figura 20 - Interface do software GeoGebra



Fonte: GeoGebra

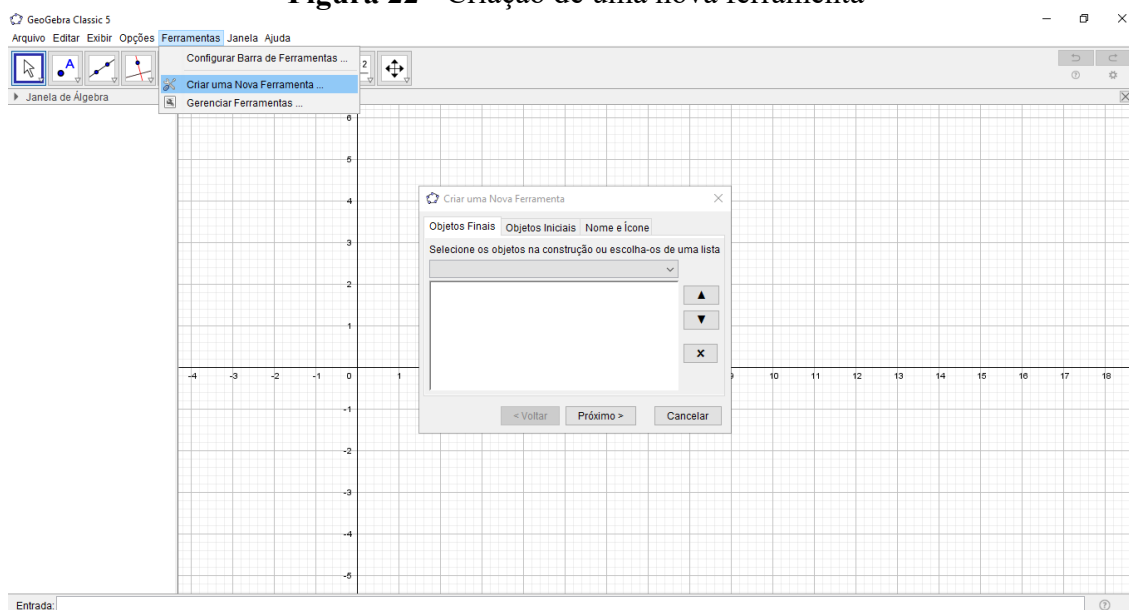
Para realizar a exploração tridimensional deve-se selecionar a Janela de Visualização 3D na opção “Exibir” da barra de ferramentas (Figura 21). As ferramentas específicas para exploração da Geometria Espacial serão acrescentadas.

⁴¹<https://www.geogebra.org/download>

Figura 21 - Exibição da Janela de Visualização 3D

Fonte: GeoGebra

Ao longo do experimento de ensino, foi utilizado um recurso do GeoGebra que terminou sendo importante para a construção dos fractais, a Criação de Ferramentas, que permite a criação de novas ferramentas pelo usuário. Esse recurso é muito útil quando estamos repetindo várias vezes os mesmos passos, como, por exemplo, quando construímos fractais, que foi um dos objetivos das atividades propostas durante as sessões. Para criar uma nova ferramenta, devemos clicar no menu ferramenta na parte superior da tela e logo em seguida em “Criar uma Nova Ferramenta”. Abrirá uma tela, como a da Figura 22, em que devemos escolher os objetos finais e iniciais da ferramenta que está sendo criada.

Figura 22 - Criação de uma nova ferramenta

Fonte: GeoGebra

Os objetos finais são os elementos que você deseja ter como resultado quando aplicar a ferramenta. Já os objetos iniciais são os elementos que serão ponto de partida para a construção desejada.

Além de todos os benefícios já apresentados sobre o software GeoGebra vale ainda destacar que sua interface favorece a interação e tem um caráter intuitivo, em que é possível obter informações sobre sua funcionalidade e utilização apenas passando o cursor do mouse sobre a ferramenta desejada.

O GeoGebra, assim como outros softwares que possibilitam a Matemática Dinâmica, nos permite realizar investigações sobre propriedades geométricas que dificilmente conseguiríamos observar utilizando apenas o quadro e o giz. Ou seja, há uma diferença qualitativa entre essas mídias do ponto de vista didático e pedagógico. Gravina (1996) afirma que:

Vemos emergir uma nova forma de ensinar e aprender Geometria; a partir de exploração experimental viável somente em ambientes informatizados, os alunos conjecturam e, com o feedback constante oferecido pela máquina, refinam ou corrigem suas conjecturas, chegando a resultados que resistem ao “desenho em movimento”, passando então para a fase abstrata de argumentação e demonstração matemática. (GRAVINA, 1996, p. 2)

Logo, o software GeoGebra proporciona a visualização de ideias matemáticas e enfatiza um aspecto fundamental, a experimentação. Tem potencial para promover também uma melhor percepção por parte do aluno, contribuindo para o descobrimento de formas mais simples de encontrar a solução de problemas. A visualização “[...] oferece meios para que conexões entre representações possam acontecer. Assim, a visualização é protagonista na produção de sentidos e na aprendizagem matemática.” (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014, p. 53).

Levando em conta a potencialidade do software GeoGebra apresento a seguir as atividades que foram propostas e desenvolvidas ao longo do experimento de ensino.

4.5 As atividades

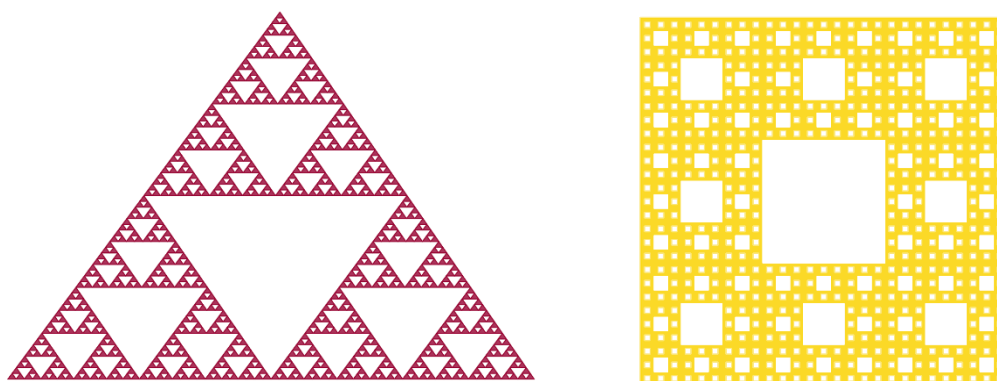
No primeiro semestre de 2017 houve o planejamento do experimento de ensino bem como a criação das atividades a serem exploradas durante as sessões de ensino. As atividades tiveram um caráter exploratório, manipulativo e investigativo. Para Ponte et al. (2003), investigar em matemática

[...] assume características muito próprias, conduzindo rapidamente à formulação de conjecturas que se procuram testar e provar, se for o caso. As investigações matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas [...] (PONTE et al., 2003, p. 10).

No total foram criadas quatro atividades, explorando quatro diferentes fractais. Em todas as atividades os alunos realizaram experimentação-com-GeoGebra (MAZZI, 2014) e, também, houve momentos em que os estudantes escreviam suas observações, respondendo alguns questionamentos propostos em uma folha de atividade.

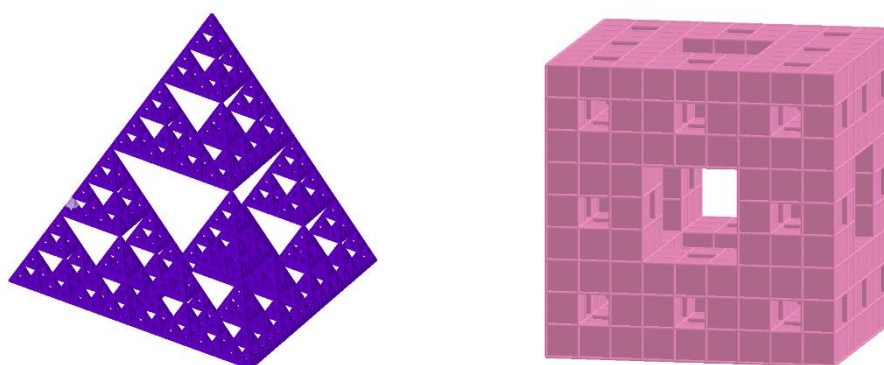
As quatro atividades foram pensadas para que os alunos se dedicassem à manipulação, exploração e investigação dos padrões fractais, buscando identificar aspectos comuns e visando alcançar a generalização das características dos fractais apresentados. As atividades tinham questões em comum, variando apenas em relação ao fractal a ser analisado e se sua exploração era na Janela de Visualização 2D, no caso do Triângulo de Sierpinski e do Tapete de Sierpinski (Figura 23), ou na Janela de Visualização 3D, no caso do Tetraedro de Sierpinski e da Esponja de Menger (Figura 24). Todas também contavam com um texto introdutório sobre o fractal a ser explorado.

Figura 23 - Triângulo de Sierpinski e Tapete de Sierpinski gerados no GeoGebra



Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 24 - Tetraedro de Sierpinski e Esponja de Menger gerados no GeoGebra



Fonte: Dados da Pesquisa

Como já mencionado, as atividades foram aplicadas na seguinte sequência:

1ª Atividade do Experimento de Ensino – Estudando e Construindo o Triângulo de Sierpinski;

- 2ª Atividade do Experimento de Ensino – Estudando e Construindo o Tetraedro de Sierpinski;
3ª Atividade do Experimento de Ensino – Estudando e Construindo o Tapete de Sierpinski; e
4ª Atividade do Experimento de Ensino – Estudando e Construindo a Esponja de Menger.

A escolha por esses fractais se deu por serem fractais geométricos e famosos entre os matemáticos. A opção pela ordem foi pensada com o intuito de explorar o fractal no plano e posteriormente explorar sua construção no espaço, tal escolha se deu pensando na maior familiaridade dos alunos com a Janela de Visualização 2D do software.

Na sequência apresento duas das atividades realizadas no experimento de ensino. O roteiro completo das atividades pode ser visto no Apêndice A.

4.5.1 Atividade 1 – Estudando e construindo o Triângulo de Sierpinski

Esta atividade explorou o fractal Triângulo de Sierpinski, em que um arquivo do GeoGebra foi apresentado às duplas e solicitada a exploração e resposta de questões acerca da construção. Os quadros abaixo apresentam as questões propostas na atividade.

Quadro 9 - Apresentação do fractal

O Triângulo de Sierpinski é um famoso fractal criado por Waclaw Sierpinski (1882 - 1969). Sua construção se inicia com um triângulo equilátero e a partir daí se destacam os pontos médios de cada lado do triângulo e os une, determinando assim no total quatro triângulos. O triângulo central é descartado, restando três triângulos conectados um com o outro apenas pelos pontos médios. Repete-se recursivamente tal procedimento para cada novo triângulo obtido, sempre descartando o triângulo central. A Figura 1 mostra sete iterações da sequência de geração do triângulo.

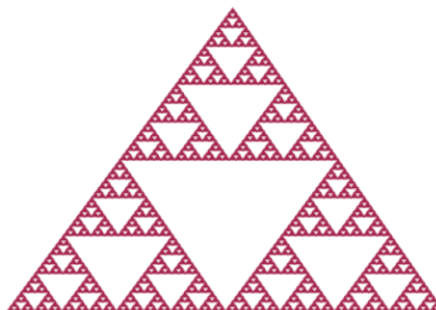


Figura 1 - Triângulo de Sierpinski com sete iterações criado no GeoGebra

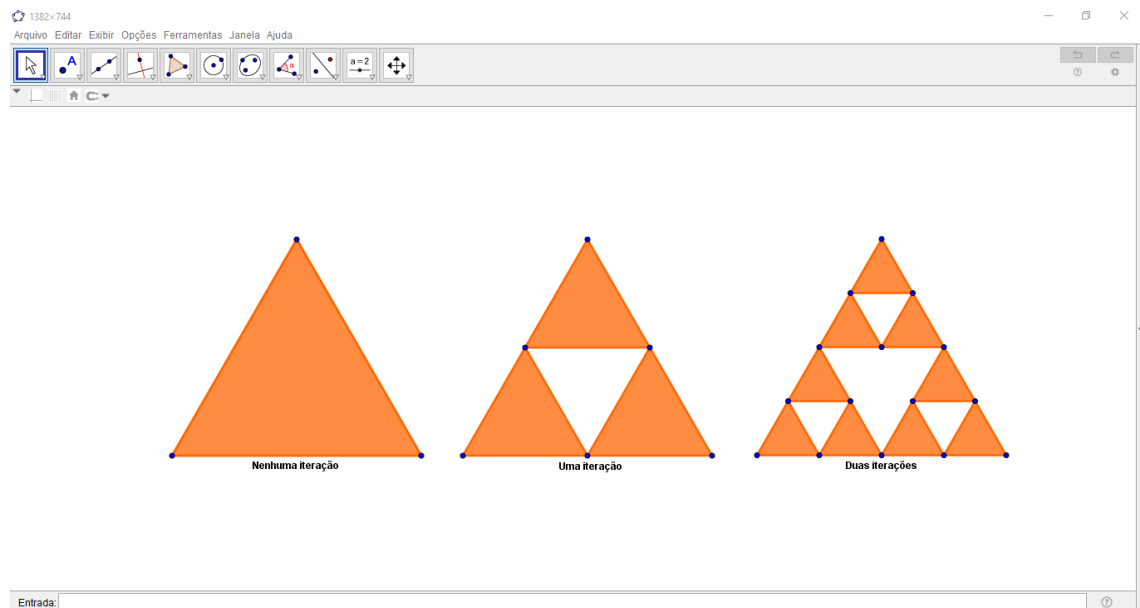
Fonte: Dados da Pesquisa

Quadro 10 - Instrução para início da atividade 1

Abra o Arquivo “Triângulo de Sierpinski”. Este arquivo apresenta três iterações do Triângulo de Sierpinski. Utilize as ferramentas do GeoGebra para responder as perguntas que seguem.

Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 25 - Arquivo “Triângulo de Sierpinski”



Fonte: Dados da Pesquisa

Vale ressaltar que há um erro nas instruções entregue às duplas. O enunciado diz três iterações enquanto o arquivo GeoGebra apresenta apenas duas. Essa informação foi corrigida com os alunos antes do início da atividade.

Por meio da análise do padrão fractal, foram investigados a quantidade de triângulos em cada iteração, bem como o comprimento do lado de cada triângulo gerado, o perímetro de cada triângulo e o perímetro total da figura.

Quadro 11 - Questão 1 da 1ª Atividade

1. Complete a tabela abaixo considerando apenas os triângulos laranjas em suas respostas.

Número de Iterações	Quantidade de triângulos	Comprimento* do lado	Perímetro de cada triângulo	Perímetro Total
0				
1				
2				

*Use a ferramenta para auxiliar sua medição



Fonte: Dados da Pesquisa

Nas questões seguintes foi proposta uma exploração para generalização das características do fractal.

Quadro 12 - Questão de 2 a 6 da 1ª Atividade - Generalizando

- Qual a quantidade de triângulos (laranjas) que terá na quarta iteração? Qual será o comprimento de seu lado? E o perímetro total da figura? Justifique.
- Encontre o termo geral que permite calcular a quantidade de triângulos (laranjas) para a n -ésima iteração do Triângulo de Sierpinski.
- Encontre o termo geral que permite calcular o comprimento do lado dos triângulos (laranjas) para a n -ésima iteração do Triângulo de Sierpinski.
- Encontre o termo geral que permite calcular o perímetro de cada triângulo (laranja) para a n -ésima iteração do Triângulo de Sierpinski.
- Encontre o termo geral que permite calcular o perímetro total para a n -ésima iteração do Triângulo de Sierpinski. Esse perímetro tende a qual valor? Justifique.

Fonte: Dados da Pesquisa

Além disso, se investigou a área de cada triângulo, bem como a área total da figura em suas respectivas iterações.

Quadro 13 - Questão 7 da 1ª Atividade

7. Complete a tabela abaixo considerando apenas os triângulos laranjas em suas respostas.

Número de Iterações	Quantidade de triângulos	Área* de cada triângulo	Área Total
0			
1			
2			

*Use a ferramenta



para auxiliar sua medição

Fonte: Dados da Pesquisa

Uma generalização quanto ao cálculo da área também foi proposta.

Quadro 14 - Questão de 8 e 9 da 1ª Atividade - Generalizando

8. Encontre o termo geral que permite calcular a área de cada triângulo (laranja) para a n -ésima iteração do Triângulo de Sierpinski.

9. Encontre o termo geral que permite calcular a área total para a n -ésima iteração do Triângulo de Sierpinski. Essa área tende a qual valor?

Fonte: Dados da Pesquisa

Uma outra questão solicitou o cálculo da dimensão do fractal.

Quadro 15 - Questão 10 da 1ª Atividade - Dimensão Fractal

10. Já vimos que uma definição de Dimensão é dada pela Dimensão de Capacidade, calculada da seguinte forma:

$$D = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln \epsilon}$$

Sendo $N(\epsilon)$ o número de figuras na n -ésima iteração e ϵ o fator de redução do lado da figura na n -ésima etapa. Calcule a dimensão do Triângulo de Sierpinski. Use o GeoGebra para o cálculo e comente o resultado.

Fonte: Dados da Pesquisa

Para finalizar a sessão, as duplas foram desafiadas a construir o fractal no software GeoGebra e gerar um *GIF* da construção, respondendo ao final duas questões.

Quadro 16 - 2ª parte da 1ª Atividade - Construção

Agora é com vocês!

Utilize as ferramentas do GeoGebra e construa o Triângulo de Sierpinski com o máximo de iterações que conseguir. Faça um GIF da construção.

1. Quais conceitos matemáticos foram importantes na obtenção do fractal? Justifique.
2. Quais conceitos matemáticos podem ser explorados durante a construção do fractal? Justifique.

Fonte: Dados da Pesquisa

O que muda na atividade em que se explora o fractal Tetraedro de Sierpinski na Janela de Visualização 3D é que não se trabalha nem com o perímetro e nem a área, mas sim com o volume do fractal. Tal atividade pode ser vista no Apêndice A.

No Quadro 17 apresento parte do protocolo da construção realizada por mim do Triângulo de Sierpinski e apresentada aos alunos com o intuito de explorar e investigar o código. O protocolo completo pode ser visto no Apêndice B assim como o protocolo das outras construções.

Quadro 17 - Parte do Protocolo de Construção do Triângulo de Sierpinski apresentado aos alunos

N.	Nome	Descrição
1	Ponto A	
2	Ponto B	
3	Ponto C	
4	Lista A1	{A, B, C}
5	Triângulo B1	Polígono A1
6	Lista A2	{{A, PontoMédio(A, B), PontoMédio(A, C)}, {PontoMédio(A, B), B, PontoMédio(B, C)}, {PontoMédio(A, C), PontoMédio(B, C), C}}
7	Lista B2	{Polígono(Elemento(A2, 1)), Polígono(Elemento(A2, 2)), Polígono(Elemento(A2, 3))}
8	Lista A3	Concatenar(Sequência({Elemento(Elemento(A2, i), 1), PontoMédio(Elemento(Elemento(A2, i), 1), Elemento(Elemento(A2, i), 2)), PontoMédio(Elemento(Elemento(A2, i), 1), Elemento(Elemento(A2, i), 3))), {Elemento(Elemento(A2, i), 2), PontoMédio(Elemento(Elemento(A2, i), 2), Elemento(Elemento(A2, i), 1)), PontoMédio(Elemento(Elemento(A2, i), 2), Elemento(Elemento(A2, i), 3))), {Elemento(Elemento(A2, i), 3), PontoMédio(Elemento(Elemento(A2, i), 3), Elemento(Elemento(A2, i), 1)), PontoMédio(Elemento(Elemento(A2, i), 3), Elemento(Elemento(A2, i), 2))}), i, 1, Comprimento(A2)))
9	Lista B3	Sequência(Polígono(Elemento(A3, i)), i, 1, Comprimento(A3))

Fonte: Dados da Pesquisa

A seguir apresento a Atividade 3.

4.5.2 Atividade 3 – Estudando e construindo o Tapete de Sierpinski

Esta atividade explorou o fractal Tapete de Sierpinski, em que um arquivo do GeoGebra foi apresentado as duplas e solicitada a exploração e resposta de questões acerca da construção. Nos quadros abaixo são apresentas as questões propostas na atividade.

Quadro 18 - Instrução para início da atividade 3

Abra o arquivo “Tapete de Sierpinski”. Este arquivo apresenta quatro iterações desse fractal. Sua quarta iteração é mostrada na Figura 1.

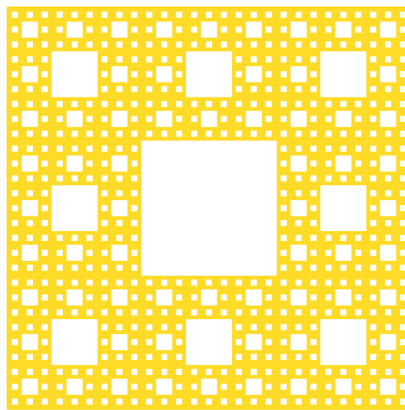
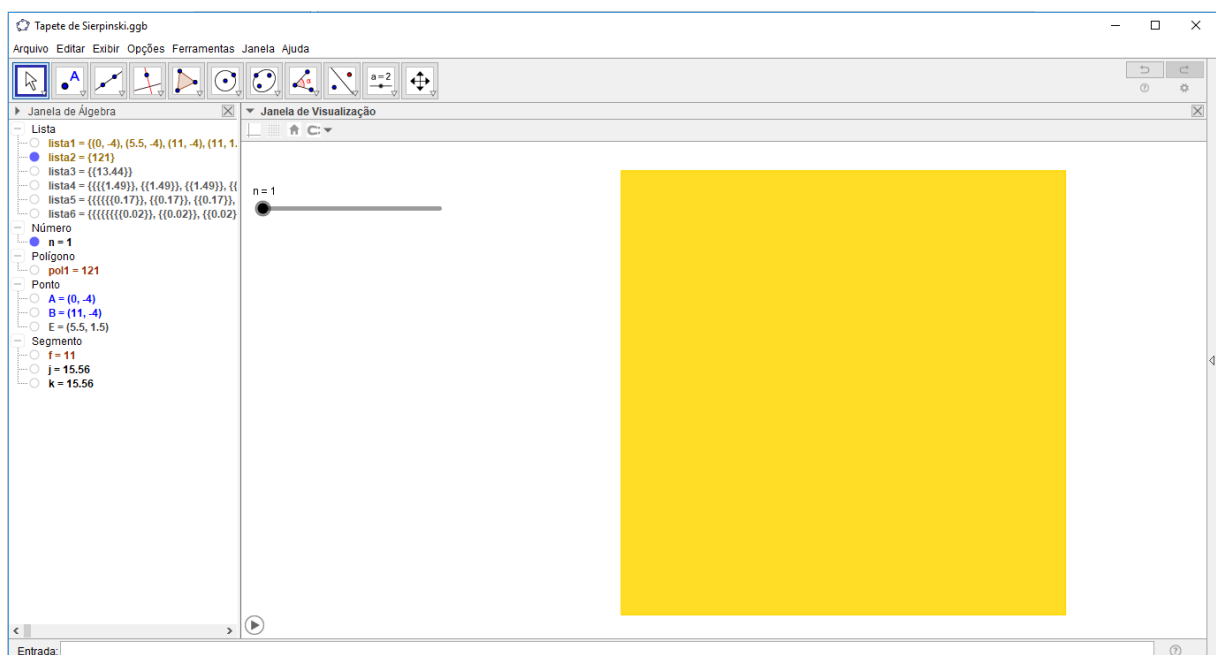


Figura 1 - Tapete de Sierpinski com quatro iterações criado no GeoGebra.

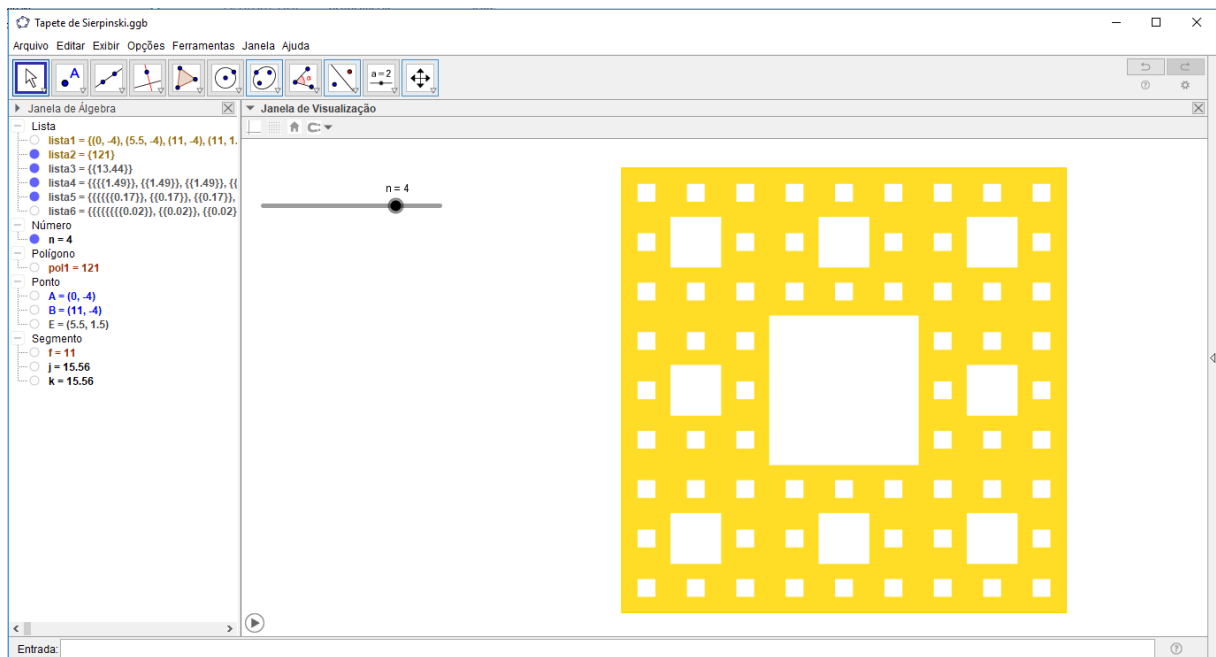
Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 26 - Construção do Tapete de Sierpinski apresentada aos participantes com $n = 1$ (iteração zero)



Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 27 - Construção do Tapete de Sierpinski apresentada aos participantes com $n = 5$ (terceira iteração)



Fonte: Dados da Pesquisa

Após a interação dos participantes com a construção foram propostas questões para generalização das características do fractal.

Quadro 19 - Questões 3ª Atividade

1. Descreva como o Tapete de Sierpinski é gerado.
2. Calcule a dimensão do Tapete de Sierpinski.
3. Quais conceitos matemáticos são importantes para a construção desse fractal? Justifique.

Fonte: Dados da Pesquisa

Assim como nas atividades anteriores, para finalizar a sessão as duplas foram desafiadas a construir o fractal no software GeoGebra e gerar um *GIF* da construção, respondendo ao final uma última questão.

Quadro 20 - 2ª parte da 3ª Atividade - Construção

Agora é com vocês!

Utilize o GeoGebra para construir o Tapete de Sierpinski com o máximo de iterações que conseguir. Faça um *GIF* da construção.

1. Quais conhecimentos foram necessários e importantes para a construção desse fractal?

Fonte: Dados da Pesquisa

As mesmas indagações realizadas nessa atividade foram realizadas na atividade quatro, em que se explora o fractal Esponja de Menger na Janela de Visualização 3D. Como já mencionado, todas as atividades aplicadas no experimento podem ser vistas no Apêndice A. No Apêndice B os protocolos de construção mostrados aos alunos ao final de cada sessão de ensino são exibidos, exceto o da Atividade 2 a qual não foi discutido com os participantes, uma vez que julguei que o mesmo não apresentava diferenciação da construção proposta pelas duplas.

As construções exploradas durante as sessões de ensino podem ser acessadas através do QRCode abaixo (Figura 28) ou através do link (<https://goo.gl/Rf2gA7>).

Figura 28 - QRCode que dá acesso as construções apresentadas na 1ª parte das atividades



Fonte: Gerado a partir de <https://br.qr-code-generator.com/>

A seguir apresento o método utilizado para análise de vídeos e descrição dos dados desta pesquisa.

4.6 Método de análise de vídeos e descrição dos dados

Segundo Bogdan e Biklen (1999) uma análise de dados

[...] é o processo de busca e de organização sistemático de transcrições de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais que foram sendo acumulados, com o objetivo de aumentar a sua própria compreensão desses mesmos materiais e de lhe permitir apresentar aos outros aquilo que encontrou. (BOGDAN; BIKLEN, 1999, p. 205).

A análise dos dados começou durante a produção dos mesmos, em que, durante a realização das sessões eu anotava acontecimentos que julgava interessantes e fatos que poderiam ser relevantes para a pesquisa. Após a conclusão dos experimentos de ensino retornei aos dados, em especial para as gravações dos experimentos.

A análise da gravação dos experimentos foi conduzida com base no modelo analítico proposto por Powell, Francisco e Maher (2004). De acordo com os autores, a capacidade de gravar em vídeo o desvelar momento a momento de sons e imagens de um fenômeno tem se transformado numa ampla e poderosa ferramenta da comunidade de pesquisa em Educação

Matemática. Utilizando os registros de vídeo como dados, pesquisadores têm produzido descrições fascinantes de professores e estudantes em cenários clínicos e de sala de aula envolvidos numa matriz de tarefas matemáticas (POWELL; FRANCISCO; MAHER, 2004).

O modelo de análise de vídeos proposto por Powell, Francisco e Maher (2004) é composto pelos seguintes procedimentos: observação dos dados, descrição dos dados, identificação de eventos críticos, transcrição, codificação, criação do enredo e composição da narrativa. Esses procedimentos são empregados de forma interativa e não lineares e são descritos no Quadro 21, a seguir.

Quadro 21 - Modelo de análise de vídeo

Etapas	Descrição
Observar	Na primeira etapa, o pesquisador deve assistir o conteúdo de vídeo para que se familiarize com ele.
Descrever	Nesta etapa, o pesquisador assiste as filmagens e descreve os dados da filmagem em determinados intervalos de tempo.
Identificar	Etapa em que o pesquisador identifica momentos significativos das filmagens, considerados eventos críticos, de acordo com seus interesses de pesquisa.
Transcrever	O pesquisador transcreve os momentos críticos que achar relevantes para sua pesquisa. Pode ocorrer a transcrição de falas ou descrição de acontecimentos.
Codificar	Etapa que “[...] objetiva identificar temas que ajudem o pesquisador a interpretar os dados.” ⁴² (POWELL; FRANCISCO; MAHER, 2013, p. 423, tradução nossa).
Construir enredo	O pesquisador, nesta etapa, conecta os eventos críticos, as transcrições e as codificações através de enredos.
Narrar	Nesta etapa, o pesquisador conecta todos os enredos e compõe uma narrativa da sua interpretação dos dados.

Fonte: Powell, Francisco e Maher (2013) apud Idem, 2017

Essa perspectiva analítica foi pertinente ao objetivo proposto com relação à investigação de aspectos do PC na construção de fractais com o GeoGebra.

Foram transcritos momentos críticos observados durante as sessões. Contudo, os dados descritos nas próximas seções contêm, além de transcrições, ilustrações da tela do GeoGebra. A utilização desses diferentes métodos constitui assim a triangulação dos dados da pesquisa. (ARAÚJO; BORBA, 2012). Na Seção que segue, apresento os dados de acordo com cada atividade.

⁴²[...] is aimed at identifying themes that help a researcher interpret data.

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

À procura de uma resposta à pergunta diretriz: “*Quais aspectos do Pensamento Computacional emergem de estudantes de graduação em Matemática ao explorarem a Geometria Fractal com o software GeoGebra?*”, e a partir das análises das atividades de construção dos fractais propostas nos experimentos de ensino, emergiram habilidades do PC neste estudo caracterizados como: pensamento algorítmico; decomposição e generalização; padrões e abstração; representação e automação; e avaliação. Para analisar tais aspectos as transcrições dos vídeos foram codificadas, referindo-se aos dados brutos (vídeos) e diários de campo, quando necessário para esclarecer os códigos.

Foram considerados os momentos de construção dos fractais explorados em cada atividade. Utilizando os aspectos heurísticos de Schoenfeld (1992) em processos de resolução de problemas faço a construção de diagramas, que foi teoricamente e metodologicamente apoiada por estudos como Schoenfeld (1992) e Wilkerson et al. (2016). Esses diagramas oferecem algumas evidências em relação as habilidades presentes do PC durante as construções. Vale salientar que os diagramas estão divididos da seguinte maneira: a linhas horizontais se referem aos aspectos do PC considerados nesta pesquisa; já as colunas representam o tempo de execução da construção do fractal durante a sessão de ensino. Foi considerada para análise apenas o momento em que as duplas iniciam uma construção e a terminam com sucesso. Cada divisão nas colunas representa um minuto e as células coloridas em azul indicam a habilidade identificada naquele determinado minuto. O amarelo em destaque indica o momento em que a nova ferramenta foi criada, já o laranja indica o momento em que o controle deslizante foi criado.

Apresento nas subseções a seguir os diagramas gerados, bem como discussões acerca da resolução das atividades propostas. As subseções estão divididas em relação as atividades realizadas em cada sessão de ensino e ao final, apresento uma discussão geral acerca dos aspectos do Pensamento Computacional que emergiram durante as sessões. Considerando a natureza da pergunta proposta na pesquisa, julgo essa forma mais adequada a apresentação da narrativa que descreve a análise de dados da pesquisa.

5.1 Habilidades do Pensamento Computacional que se manifestaram na Atividade 1 - Triângulo de Sierpinski

Relembro, que a primeira atividade das sessões de ensino teve como objetivo investigar, explorar e construir o Triângulo de Sierpinski. Além de gerar um *GIF* de tal construção.

Blenda e Gabriel foram a primeira dupla a realizar essa sessão. Na primeira parte da atividade, que visou estudar características matemáticas desse fractal, a dupla não apresentou dificuldades. Com o auxílio das ferramentas do GeoGebra calcularam os comprimentos dos lados, os perímetros e as áreas dos triângulos nas iterações zero, um e dois da construção apresentada. Para o cálculo da dimensão do fractal, item 10 da atividade, optaram pelo uso da calculadora.

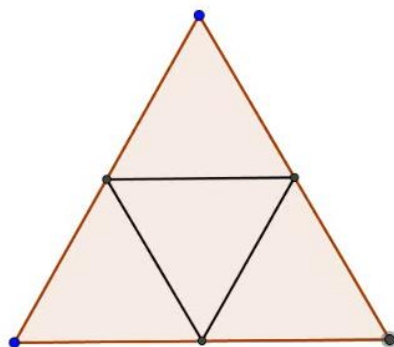
A dupla não apresentou problemas em encontrar os “termos gerais” solicitados para a n -ésima iteração do fractal. Ao terminar a primeira parte da atividade, se manifestaram favoráveis à proposta de construção do Triângulo de Sierpinski, o que se nota a partir das falas abaixo:

Blenda: *Agora a gente vai criar!*

Gabriel: *Nossa, olha que legal!*

A partir desse momento Blenda e Gabriel iniciam um novo arquivo no software. A primeira ação da dupla foi retirar os eixos e a malha, com a preocupação de que nenhum item construído ficasse, de alguma forma, dependente em algum ponto. A construção se iniciou com a criação de um triângulo equilátero (uso da ferramenta “*Polígono Regular*”) e então dos pontos médios de cada aresta desse triângulo. Para a construção dos pontos médios eles utilizaram a ferramenta do GeoGebra nomeada “*Ponto médio ou Centro*”. Em seguida, recorreram a ferramenta “*Segmento*” para unir os pontos médios que foram criados anteriormente, gerando a imagem que pode ser vista na Figura 29.

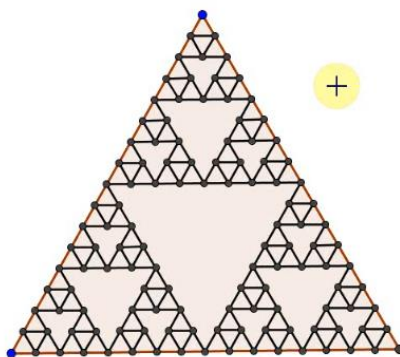
Figura 29 - Início da construção - Triângulo de Sierpinski - Blenda e Gabriel (1ª Tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa

Após tal construção, eles concluíram que já era possível construir uma nova ferramenta que automatizaria as próximas iterações do fractal. Em seguida, testaram a ferramenta criada, a qual chamaram de “*Triângulo*” e avaliaram como correta a construção que fizeram, o que pôde ser certificado pela fala de Gabriel: “*Ah, agora é trabalho braçal, a gente fica aplicando a ferramenta quantas vezes quisermos.*” Essa construção é mostrada na Figura 30.

Figura 30 - Construção concluída - Triângulo de Sierpinski - Blenda e Gabriel (1ª Tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa

Enquanto Blenda estava respondendo as questões propostas no roteiro de atividades entregue, Gabriel comentou: “*Só aqueles negocinhos de triângulo branco e triângulo laranja que eu não faço a mínima ideia de como eu faria para ficar bonitinho. Acho que é pedir demais.*”. Gabriel fez referência a construção, já pronta, que foi apresentada na primeira parte da atividade. Posteriormente, eles tentaram fazer o *GIF* da construção, porém, eu como pesquisadora, intervi e optei no momento por conduzir diversas instruções, o que pode ser visto no diálogo a seguir:

Lara: *Quantos polígonos tem na construção de vocês?*

Gabriel: *Você fala triângulos?*

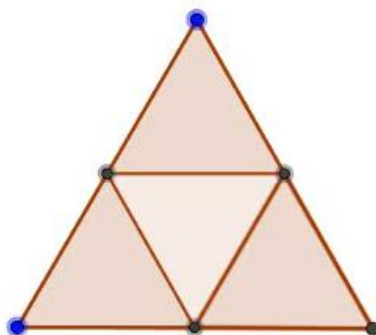
Blenda: *A gente fez quatro interações.*

Gabriel: *Então, a gente está com 81.*
 Lara: *Quantos tem no GeoGebra de vocês?*
 Gabriel: *Como assim?*
 Blenda: *Quantos segmentos?*
 Lara: *Quantos polígonos? Vocês disseram para mim que deveria ter 81.*
 Gabriel: *Isso.*
 Lara: *Então, no GeoGebra de vocês, onde está escrito 'Polígono' ou 'Triângulo' tem quantos?*
 Blenda: *Só um!*
 Gabriel: *Polígono, realmente, só um.*
 Blenda: *Meu Deus! É porque a gente só fez o segmento.*
 Gabriel: *Então, a gente montou só com segmentos e não com polígono dentro do polígono.*
 Lara: *E no triângulo de Sierpinski são polígonos ou segmentos?*
 Gabriel: *É, são polígonos (risos).*
 Blenda: *Droga, a gente tinha que ter montado um polígono dos pontos médios.*
 Gabriel: *Não, agora vamos fazer direito né? Vamos apagar tudo.*
 Blenda: *Deixa esse controle deslizante já!*

Na primeira tentativa de construção do fractal e geração do *GIF* foi possível identificar diversas habilidades do Pensamento Computacional presentes. No entanto, tais aspectos serão enfatizados e analisados na segunda tentativa de resolução.

Ao iniciarem uma nova construção optaram por já deixar o controle deslizante, pois julgaram que ele seria necessário ao final para gerar o *GIF*. Nessa nova tentativa, iniciaram com a construção de um triângulo equilátero seguido dos pontos médios de cada aresta, como na construção anterior. A próxima ação foi diferente da primeira tentativa. Dessa vez, ao invés de construírem os segmentos, eles optaram pela ferramenta “*Polígono*”. Construíram três novos polígonos, como representado na Figura 31.

Figura 31 - Início da construção - Triângulo de Sierpinski - Blenda e Gabriel (2ª tentativa)

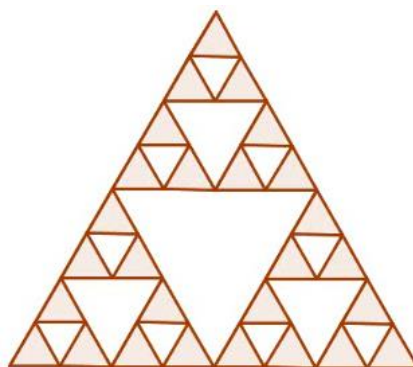


Fonte: Dados da Pesquisa

Após tal construção, decidiram criar uma nova ferramenta. Selecionaram todos os elementos da construção e analisaram quais seriam os objetos iniciais e quais seriam os objetos

finais de tal ferramenta. Escolhidos tais objetos, nomearam-na de “*Triângulo Polígono*”. Testaram a ferramenta e avaliaram a construção como correta. A construção, até a terceira iteração, pode ser vista na Figura 32.

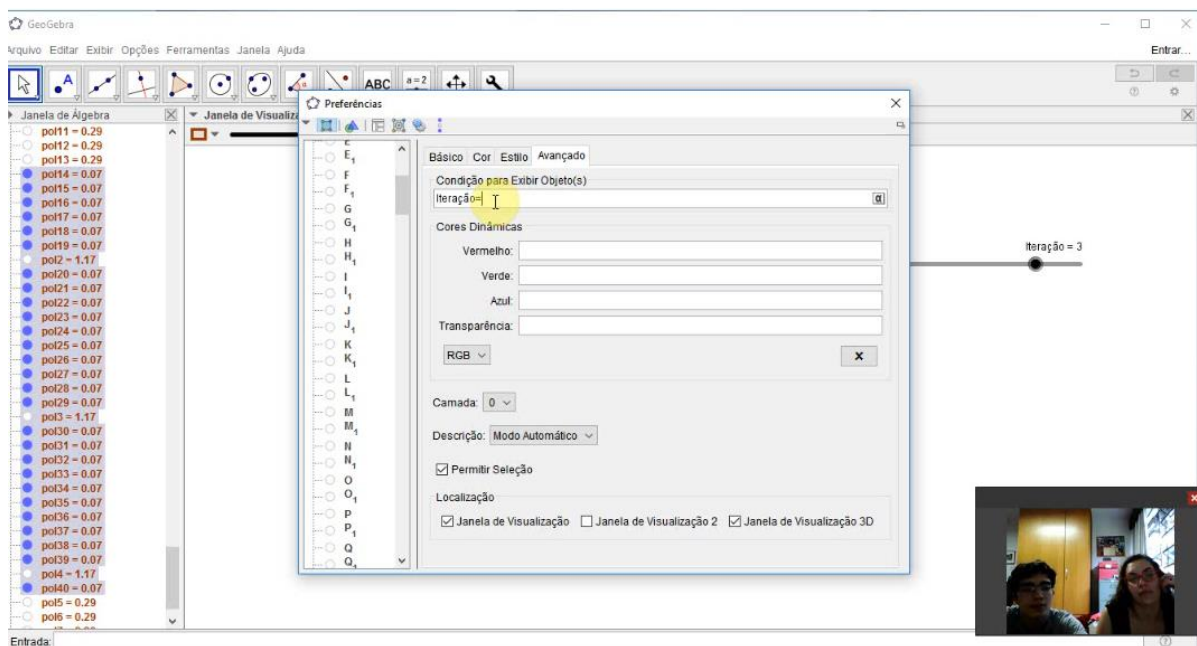
Figura 32 - Construção concluída - Triângulo de Sierpinski - Blenda e Gabriel (2ª Tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa

Para finalizar a atividade, com a construção do *GIF*, Blenda e Gabriel fizeram uma programação utilizando o controle deslizante. Condicionaram a exibição de cada objeto de acordo com o valor de tal controle, ou seja, quando o controle estivesse no zero, apenas o polígono da iteração zero seria mostrado. Quando o controle estivesse no um, apenas os polígonos da primeira iteração seriam mostrados, e assim por diante. A Figura 33 apresenta um dos momentos em que objetos estão sendo condicionados.

Figura 33 - Objetos sendo condicionados - Triângulo de Sierpinski - Blenda e Gabriel (2ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa

O arquivo *.ggb*⁴³ e o *GIF* da construção de Blenda e Gabriel podem ser acessados através do QRCode abaixo (Figura 34) ou através do link (<https://goo.gl/GMXaUE>).

Figura 34 - QRCode que dá acesso ao arquivo *.ggb* e ao *GIF*, criados por Blenda e Gabriel na primeira atividade.



Fonte: Gerado a partir de <https://br.qr-code-generator.com/>

As transcrições abaixo apresentam registros dos momentos iniciais da segunda tentativa de resolução da atividade, em que a partir deles e das manipulações no software GeoGebra, foi possível identificar as cinco habilidades do PC, que são consideradas nesta dissertação. O diálogo se iniciou da seguinte forma:

Gabriel: *Não, agora vamos fazer direito né? Vamos apagar tudo.*

Blenda: *Deixa esse controle deslizante já.*

Gabriel: *É, vamos deixar o controle.*

Blenda: *Beleza, vamos lá. Construa um polígono regular.*

Gabriel: *Calma, vai dar tudo certo.*

Blenda: *Vixi, está torto [o polígono]. Aí, arrumou. Agora constrói o ponto médio.*

Gabriel: *Vamos usar o ponto médio, cadê... [a dupla procura a ferramenta ponto médio no software].*

Blenda: *Depois da intercessão [localização da ferramenta Ponto Médio]. A partir dos pontos médios a gente vai criar um polígono, é isso?!*

Gabriel: *É, dessa vez vamos usar polígono.*

Blenda: *Mas tem que ser regular né?!*

Gabriel: *Não, não tem necessidade de ser regular.*

Blenda: *Ah é, já tem as medidas prontas.*

Gabriel: *Isso. Beleza, agora vamos sumir com esses rótulos. Ai, o C ficou aqui de novo.*

Blenda: *Esse C sempre fica, ele é ponto dependente. Agora é criar ferramenta.*

A decisão de deixar o controle deslizante, criar os pontos médios e posteriormente os polígonos caracteriza a habilidade de **padrões e abstração**, uma vez, que eles já concluíram

⁴³Os arquivos criados no software GeoGebra são salvos no formato *.ggb*, em que só é permitido abrir as construções no referido software.

que para gerar o *GIF* de forma correta o controle e os polígonos são necessários na construção, que são construções relevantes para a compreensão e solução do problema (GROVER; PEA, 2013). A habilidade **representação e automação** também se faz presente, visto que a criação dos pontos médios se deu pelo uso de uma ferramenta já presente no software. No momento em que a dupla decidiu retirar os rótulos e os pontos e concluiu que o ponto C é dependente, o aspecto **decomposição e generalização** emergiu, pois, a decisão de esconder tais objetos facilitaria futuramente a conclusão da atividade e criação do *GIF*, ou seja, uma forma de pensar no produto a partir da junção de seus elementos (COSTA, 2016). O diálogo continuou com a criação da nova ferramenta:

Gabriel: *Os objetos iniciais são [os pontos] A e B. O polígono 1 não. A gente vai montar o 2, o 3 e o 4, todos esses segmentos também não são necessários [escolha dos objetos finais].*

Blenda: *Só os de baixo, os primeiros [segmentos criados] que não precisam.*

Gabriel: *A gente não precisa do C, a gente não precisa do D. Podemos deixar de exibir tudo, a gente quer só o polígono né?!*

Blenda: *É, a gente só quer o polígono. Ah, mas se deixar de exibir o polígono já tirou tudo.*

Gabriel: *É verdade. Então, os segmentos são todos. Os pontos de novo, não precisa do C, D, E e F. Agora eu vou chamar de 'Triângulo Polígono' [nome dado a nova ferramenta criada]. Vamos ver se vai. Aí, deu tudo certo agora. Vou fazer só até a terceira [iteração], pode ser? Se a gente tiver um pouco mais de paciência a gente faz a quarta. Na verdade, antes de começarmos a fazer muitos, já vamos ver o que a gente vai exibir.*

Blenda: *É verdade, para já ir arrumando.*

A habilidade **pensamento algorítmico** foi identificada durante o processo de tomada de decisão de quais objetos, iniciais e finais, fariam parte da nova ferramenta, visto que tal processo busca tornar a ferramenta eficiente no procedimento de construção do fractal e resolução do problema proposto (SOUSA; LENCASTRE, 2014). Tal aspecto também emergiu ao final do diálogo, quando a dupla decide escolher, antecipadamente, quais polígonos serão exibidos em cada etapa. A **avaliação** se fez presente no momento em que a nova ferramenta foi testada e a dupla concluiu que “*deu tudo certo*”, fazendo um julgamento de valor na construção (CATLIN; WOOLLAR, 2014). A **representação e automação** surgiu quando a dupla definiu a quantidade de iterações que seriam construídas, uma vez que bastaria aplicar a ferramenta criada e ter “*paciência*”, como foi expressado por Gabriel, automatizando os pensamentos das etapas de construção por meio de um processo mecânico (VIEIRA, 2018).

Os diálogos destacados acima são os dois minutos iniciais da segunda tentativa de construção da dupla. A partir do momento que Blenda e Gabriel iniciaram tal construção eles

levaram 21 minutos para concluí-la, fazendo até a terceira iteração do fractal, juntamente com a criação do *GIF*. Esses 21 minutos de manipulação do software se transformaram no diagrama apresentado na Figura 35, o qual destaca os aspectos do PC que emergiram a cada minuto.

Figura 35 - Aspectos do PC que emergiram da construção do Triângulo de Sierpinski - Blenda e Gabriel (2ª tentativa)

[illegible]

Laranja: Momento de criação do controle deslizante. Amarelo: Momento de criação da nova ferramenta.

Fonte: Elaborado pela Autora

Vale salientar, que o controle deslizante nessa construção já estava criado, pois tal diagrama apresenta a segunda tentativa de construção da dupla, ou seja, quando iniciaram novamente o processo de construção optaram por não apagar o objeto, uma vez que já sabiam que precisariam dele para gerar o *GIF* ao final da construção.

A partir do diagrama, nota-se que o **pensamento algorítmico** emergiu apenas no início da construção, em que foi traçada uma estratégia para realizar a atividade. Observa-se também que a habilidade de **decomposição e generalização** se manifestou com maior frequência ao final, no momento em que começaram a construção do *GIF*, e precisaram condicionar os objetos. Note que a **avaliação** perpassa por toda atividade. Acredito, que o fato de ser a segunda tentativa de resolução, influenciou para que a dupla avaliasse sempre sua construção, a fim de chegar no final com uma construção correta e com possibilidade de criação do *GIF*.

Fabício e Matheus foram a segunda dupla a realizar essa sessão. Apresentaram algumas dificuldades na primeira parte da atividade, em especial na generalização do cálculo da área dos triângulos na n -ésima iteração. Intevi como pesquisadora e realizei indagações até que a resposta correta fosse dada. Tal dupla também utilizou as ferramentas do GeoGebra para o cálculo do comprimento, perímetro e área, e lançaram mão da calculadora como auxiliadora para os cálculos.

Já na segunda parte da atividade, a construção do fractal, um novo arquivo no software foi aberto e eles optaram por retirar a malha e os eixos, assim como a dupla anterior. Matheus comentou: “*Tira os eixos e a malha antes de começar a construção.*”

Iniciaram a construção com um segmento e a buscaram por sua mediatriz. A intenção inicial era construir um triângulo equilátero como se faz com “régua e compasso”. Porém, Matheus se atentou que o GeoGebra já possuía a ferramenta polígono regular. Abaixo apresento um trecho da discussão.

Fabrício: *A gente pega aqui, o segmento.*

Matheus: *Pega a mediatriz.*

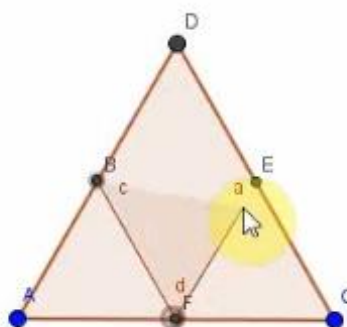
Fabrício: *Vamos ver se fazer com a mediatriz vai dar certo.*

Matheus: *Ué, coloca ali, polígono regular. Acho que um de três vértices.*

Fabrício: *Polígono regular, é mesmo.*

Continuaram a construção destacando os pontos médios dos segmentos e então escolheram a ferramenta “*Caminho Poligonal*” para unir tais pontos. Percebendo o equívoco, Fabrício disse: “*Constrói o polígono regular, normal, ali na ferramenta polígono*”, o que fez emergir a habilidade **representação e automação**, uma vez que utilizaram a ferramenta disponível no software para criar o polígono desejado, oferecendo agilidade no processo de resolução do problema (LINN, 2010). Matheus construiu um polígono no centro do triângulo inicial, o que pode ser visto na Figura 36.

Figura 36 - Início da construção - Triângulo de Sierpinski - Fabrício e Matheus



Fonte: Dados da Pesquisa

Após essa construção Fabrício interveio, o que gerou o seguinte diálogo:

Fabrício: *Eu acho que a gente tem que fazer um por um [se referindo aos triângulos da primeira iteração].*

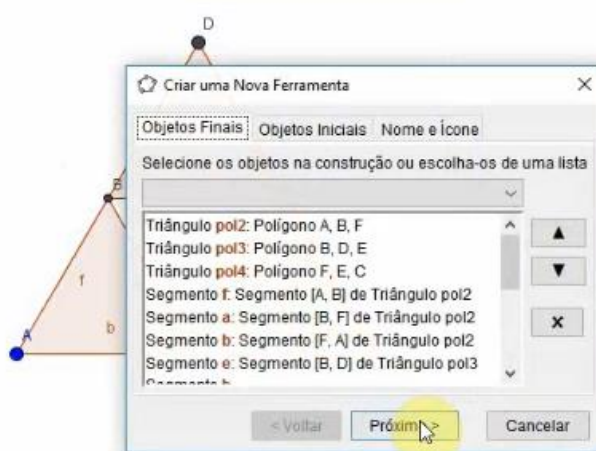
Matheus: *Como assim você fala?*

Fabrício: *Espera aí, deixa eu fazer. Me empresta aqui. Olha, vamos fazer o polígono ABF, o polígono BDE e o polígono FEC.*

Matheus: *Ah, certo. Agora a gente tem que criar a ferramenta.*

As habilidades de **avaliação** e **representação e automação** se fizeram presentes na intervenção de Fabrício, visto que o uso da ferramenta “*Caminho Poligonal*” e a criação do triângulo BEF não estariam corretos, reconhecendo e avaliando os resultados da construção com os recursos utilizados (L’HEUREUX et al., 2012). Após a construção dos três triângulos eles selecionaram todos os objetos presentes na construção e iniciaram a criação da nova ferramenta. Nesse momento eles não se preocuparam em analisar quais seriam os objetos finais e os iniciais, apenas apertaram a opção “*Próximo*” disponível na janela (Figura 37).

Figura 37 - Criação da nova ferramenta - Triângulo de Sierpinski - Fabrício e Matheus



Fonte: Dados da pesquisa

A decisão de apertar o botão “*Próximo*” sem checar quais seriam os objetos iniciais e finais fez com que a habilidade **padrões e abstração** emergisse, uma vez que a dupla, durante suas experiências anteriores com o GeoGebra notou que quando todos os objetos são selecionados o software já indica os objetos iniciais e finais, da nova ferramenta, de maneira correta, descobrindo uma relação (VALE et al., 2007) entre a forma de selecionar os objetos e a criação da nova ferramenta. Nomearam a ferramenta construída de “*Triângulo*” e a testaram. Matheus disse: “*Testa ela. Ok, está funcionando!*”. Avaliaram a construção como correta e então aplicaram a ferramenta de tal forma que a terceira iteração do Triângulo de Sierpinski foi gerada. Nesse momento, duas habilidades foram notadas, a **avaliação** ao reconhecerem a eficiência da nova ferramenta criada com a utilização dos recursos do software (L’HEUREUX et al., 2012) e também a **representação e automação** nos momentos de aplicação efetiva da ferramenta (LINN, 2010).

Posteriormente, criaram o controle deslizante, que chamaram de “*it*”, e condicionaram os objetos criados, assim como fez a dupla anterior. Porém, inicialmente condicionaram de maneira equivocada, mas logo perceberam o erro:

Fabrcio: *Ele é o inteiro, né?! Então, coloca it maior ou igual a um.*

Matheus: *Agora a gente some com ele.*

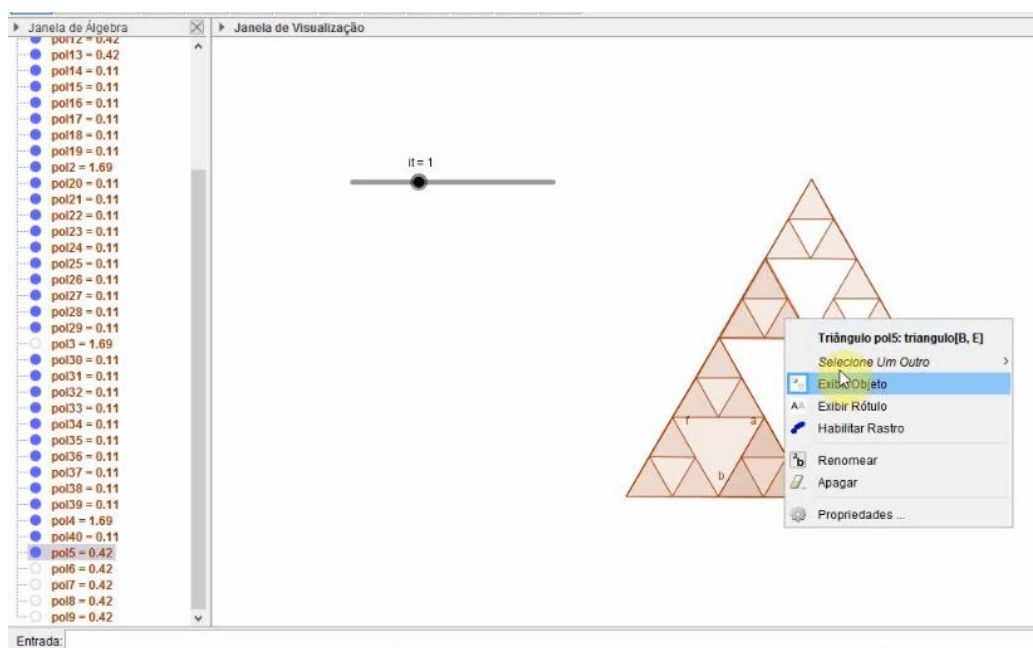
Fabrcio: *Mas está no zero. Não, ele não vai sair daí agora.*

Mateus: *Eu já sei porque. Não é it maior ou igual a zero, ele tem que ser igual a zero.*

Fabrcio: *Mas como? Se ele ficar igual a zero, quando ele for para um...Ahhh, entendi!*

O **pensamento algorítmico** se fez presente no momento dessa programação em virtude da condição que cada objeto deveria receber, determinando os passos lógicos (SOUSA; LENCASTRE, 2014) do processo de iteração do fractal. Para facilitar a seleção de tais objetos Fabrcio percebeu que objetos com valores iguais na janela de álgebra representavam polígonos que estavam na mesma iteração, logo, deveriam ser condicionados da mesma forma, ele disse: “*Olha, está vendo que tem uns que está tipo “11”?* Esses aí são todos iguais.” (Figura 38).

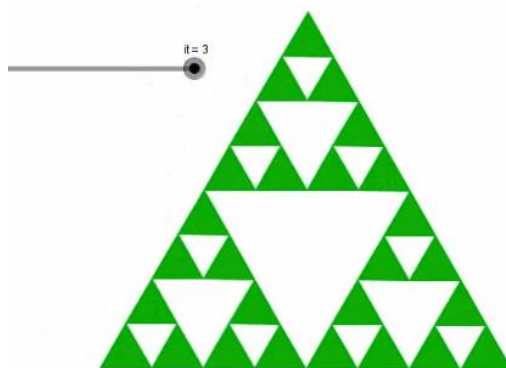
Figura 38 - Análise dos polígonos pela Janela de Álgebra - Triângulo de Sierpinski - Fabrcio e Matheus



Fonte: Dados da Pesquisa

A **decomposição e generalização** pode ser notada na observação feita por Fabrcio, pois contribuiu para que os objetos fossem condicionados de maneira eficiente e correta, e ainda que tal processo de condicionamento pudesse ser utilizado em ações futuras (COSTA, 2016). Após tais ações foi obtida a construção mostrada na Figura 39.

Figura 39 - Construção concluída - Triângulo de Sierpinski - Fabrício e Matheus



Fonte: Dados da Pesquisa

O arquivo .ggb e o *GIF* da construção de Fabrício e Matheus podem ser acessados através do QRCode a seguir (Figura 40) ou através do link (<https://goo.gl/9WUwgJ>).

Figura 40 - QRCode que dá acesso ao arquivo .ggb e ao *GIF*, criados por Fabrício e Matheus na primeira atividade.



Fonte: Gerado a partir de <https://br.qr-code-generator.com/>

A partir do momento que Fabrício e Matheus iniciaram a construção, eles levaram 22 minutos para concluí-la, até a terceira iteração, juntamente com a criação do *GIF*. Esses 22 minutos de manipulação no software se transformaram no diagrama apresentado na Figura 41, que destaca os aspectos do PC que emergiram a cada minuto.

Na segunda parte da atividade, a mesma estratégia inicial utilizada pelas duplas anteriores, de retirar os eixos e as malhas, foi aplicada. A construção se iniciou com a utilização da ferramenta “*Polígono Regular*” e a criação de um triângulo equilátero. Após tal construção ocorreu o seguinte diálogo:

Luana: *Agora, tem que criar aquela ferramentinha.*

Marcelo: *Isso. Mas ainda precisamos fazer algumas coisas.*

Luana: *É eu sei, tem que fazer os pontos médios e aí... Como vamos fazer os pontos médios?*

Marcelo: *Eu queria que tivesse uma ferramenta, não sei se tem, talvez tenha.*

A dupla não se preocupou em procurar tal ferramenta na barra de navegação e então iniciou a construção dos pontos médios algebricamente, utilizando o campo “*Entrada*”. Inicialmente digitaram no campo de entrada a seguinte expressão: $D = A + 1/2(A + B)$. Porém, o ponto não foi criado no local desejado. Continuaram com a tentativa de criação algébrica e digitaram $D = (A + B)/2$, o que criou o ponto no local desejado. Tal momento pode ser visto na Figura 42.

Figura 42 - Criação dos pontos médios de forma algébrica - Triângulo de Sierpinski - Luana e Marcelo

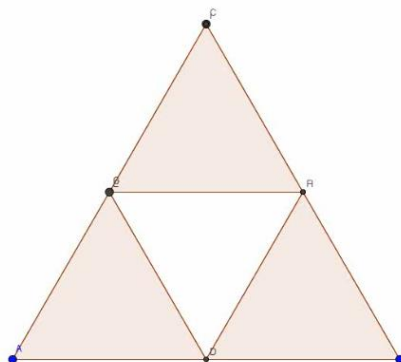


Fonte: Dados da Pesquisa

A partir desse momento os outros pontos médios foram criados, com as seguintes expressões: $E = (A + C)/2$ e $F = (C + B)/2$. Habilidades do Pensamento Computacional podem ser identificadas no início da construção e criação dos pontos médios, a **representação e automação**, e a **avaliação**. Mesmo que a dupla tenha optado por criar tais pontos de forma algébrica, tal opção não descaracteriza a **representação e automação**, visto que os pontos foram representados de forma automatizada após a **avaliação** da expressão correta que geraria os mesmos, desenvolvendo o processo de pensamento (VIEIRA, 2018) para a criação dos pontos médios. A opção pela construção algébrica fez com que os aspectos **decomposição e generalização e padrões e abstração** emergissem, uma vez que generalizaram, padronizaram e abstraíram a expressão que gera o ponto médio entre dois pontos, permitindo a transferência do processo de criação dos pontos médios em outras situações (ISTE/CSTA, 2012) e descobrindo a relação (VALE et al., 2007) entre a construção algébrica e geométrica dos pontos.

Com os pontos médios criados, utilizaram a ferramenta “*Polígono Regular*” para construir três triângulos que foram formados pelos pontos médios e os vértices do triângulo inicial (Figura 43).

Figura 43 - Início da construção - Triângulo de Sierpinski - Luana e Marcelo



Fonte: Dados da Pesquisa

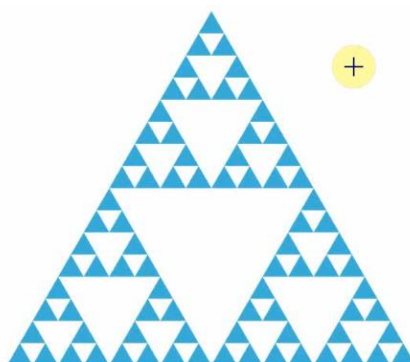
Após tal construção eles avaliaram se a ferramenta já poderia ser construída. Marcelo: “Vamos ver se já dá para criar a ferramenta desse jeito?”. Todos os objetos foram selecionados e a nova ferramenta intitulada “*Sierpinski*” foi criada. Essa dupla, assim como a anterior, não se preocupou em analisar os objetos iniciais e finais que seriam criados pela ferramenta, apenas apertaram os botões “*Próximo*” e “*Concluído*”. A ferramenta então foi criada e Marcelo disse: “Ok, vamos ver, torce!”. Aplicaram tal ferramenta e avaliaram sua construção como correta. A partir daí automatizaram seu uso.

Luana: *Eeee, deu certo. Deixa eu fazer um pouquinho?*

Marcelo: *Tudo bem, mas já vai sumindo com os triângulos, porque se não vai ficar um monte.*

A observação feita por Marcelo, de já ir “*sumindo com os triângulos*” caracteriza o **pensamento algorítmico**, uma vez que a decisão de esconder os objetos de iterações anteriores em conjunto com a aplicação da ferramenta implica em uma solução simples e eficiente (SOUSA; LENCASTRE, 2014) para a construção do *GIF*. A dupla aplicou a ferramenta de modo que a quarta iteração do Triângulo de Sierpinski pôde ser notada (Figura 44).

Figura 44 - Construção concluída - Triângulo de Sierpinski - Luana e Marcelo



Fonte: Dados da Pesquisa

Vale salientar que Luana gostaria de ter realizado mais iterações. Porém, devido a criação do *GIF* julgaram que seria muito trabalhoso realizar a programação de tantos polígonos.

Luana: *Nossa, dá para fazer muitos. Até conseguir, vamos ficar até amanhã fazendo. Nossa, mas depois tem que ficar sumindo com isso tudo. Eu não quero fazer para sempre.* [risos]. *Ah, olha que fofinho.*

Marcelo: *Tem que fazer o GIF ainda.*

Luana: *Ah, é verdade.*

Marcelo: *A gente vai parar nessa ou vai fazer mais uma? Vamos fazer mais uma.* [nesse momento eles estavam na terceira iteração].

Luana: *Mais duas.*

Marcelo: *Não, só mais uma.*

Luana: *Por que só mais uma?*

Marcelo: *É muito ponto, muita coisa para programar.*

Luana: *É só tirar os pontos.*

Marcelo: *Se der tempo a gente faz mais uma. Se bem que eu já tirei todos os pontos.*

Luana: *Que diferença faz tirar os pontos?*

Marcelo: *Precisa dos pontos para a usar a ferramenta.*

Posteriormente, o controle deslizante foi criado e os objetos condicionados visando a geração do *GIF*. Luana finaliza dizendo que gostaria de ter feito mais iterações e utilizou o seguinte argumento: “*Queria fazer umas vinte, imagina que legal, ia tender a um triângulo branco. Um triângulo azul tendendo a um triângulo branco.*”. O que demonstra sua compreensão e abstração acerca da área de tal fractal tender a zero e também da eficácia a respeito da **representação e automação** que o software GeoGebra proporciona.

O arquivo .ggb e o *GIF* da construção de Luana e Marcelo podem ser acessados através do QRCode a seguir (Figura 45) ou através do link (<https://goo.gl/TBYVwx>).

Figura 45 - QRCode que dá acesso ao arquivo .ggb e ao *GIF*, criados por Luana e Marcelo na primeira atividade.

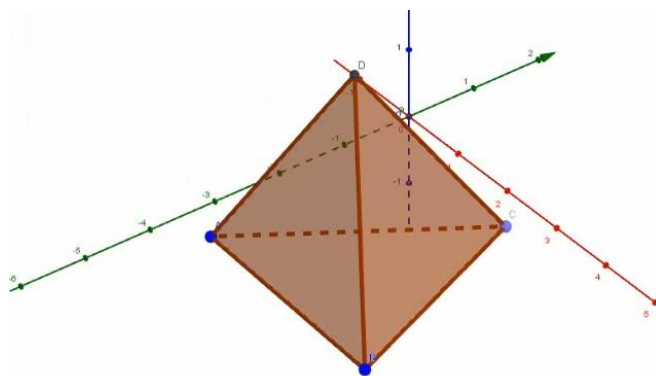


Fonte: Gerado a partir de <https://br.qr-code-generator.com/>

A partir do momento que Luana e Marcelo iniciaram a construção, eles levaram 21 minutos para concluí-la, até a quarta iteração, juntamente com a criação do *GIF*. Esses 21

comprimento dos lados, quantidade de tetraedros em cada iteração, volume e o cálculo da dimensão. Partindo para a construção do tetraedro a dupla iniciou um novo arquivo no GeoGebra, abriu a Janela de Visualização 3D e começou a construção do fractal a partir do uso da ferramenta “*Tetraedro Regular*”. Construído o tetraedro Gabriel decidiu exibir os eixos coordenados para conseguir se “guiar” na visualização 3D, emergindo a **representação e automação**, ele disse: “[...] deixa eu colocar os eixos. Cadê os eixos? Pelo o menos agora eu consigo me guiar e saber como ele gira.”, descrevendo uma aplicação efetiva do meio computacional para representar seu conhecimento (LINN, 2010). Tal momento pode ser visto na Figura 47.

Figura 47 - Início da construção - Tetraedro de Sierpinski - Blenda e Gabriel



Fonte: Dados da Pesquisa

A construção continuou com a inserção dos pontos médios em todas as arestas do tetraedro e Gabriel afirmou: “[...] esse aqui a gente não vai fazer tantas iterações não, porque vai ter mais coisas do que o outro” o que caracteriza o aspecto **decomposição e generalização**, uma vez que ele já estava pressupondo os elementos que constituiriam o fractal, pensando nos componentes do produto final e na junção de seus elementos (COSTA, 2016). A partir dos pontos médios a dupla iniciou uma discussão de como gerar os tetraedros da próxima iteração. O diálogo abaixo apresenta parte das decisões:

Gabriel: Vou fazer um polígono. Não, o que eu estou fazendo?

Blenda: Então, eu ia falar, não é nesse ponto que você tem que ligar?

Gabriel: Eu acho que não é bom eu fazer os polígonos. É que eu não sei mexer no 3D.

Blenda: Mas, não teria que fazer ligando esse ponto, com esse ponto, com esse ponto?

Gabriel: Mas assim você vai estar fazendo um polígono no meio dos três. Ele vai estar no buraco dos três.

Blenda: Ah tá!

Gabriel: Aqui olha, faz um tetraedro.

Blenda: Eita!

Gabriel: Agora tem que ver qual ponto que começa. Acho que é isso né?

Blenda: *É isso. É isso mesmo tem que ser esse ponto aqui.*

Gabriel: *Errei.*

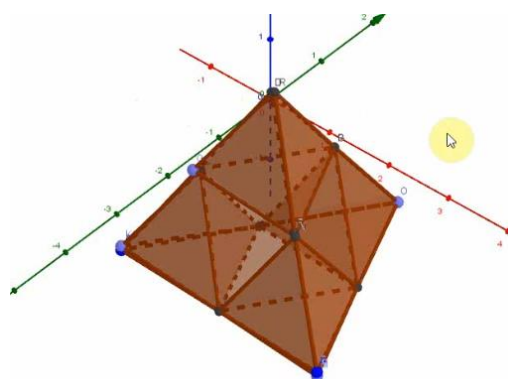
Blenda: *Tem que ser aqui e aqui!*

Gabriel: *Aqui e aqui. E aqui e aqui. Ah, agora aqui e aqui!*

Blenda: *Aí ó! Aahhhh!*

No diálogo entre Blenda e Gabriel nota-se um equívoco na construção, eles construíram polígonos nas faces. Porém, logo perceberam o erro e decidiram utilizar a ferramenta “*Tetraedro Regular*”. A criação dos tetraedros da primeira iteração do fractal pode ser vista na Figura 48.

Figura 48 - Construção da primeira iteração - Tetraedro de Sierpinski - Blenda e Gabriel

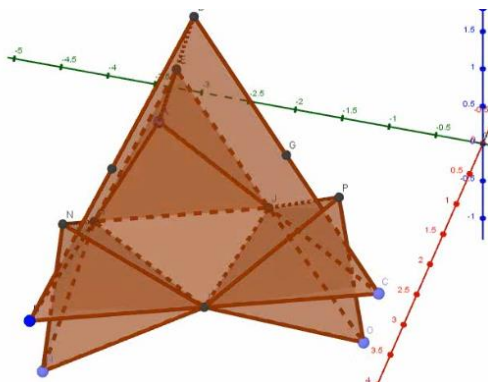


Fonte: Dados da Pesquisa

A habilidade **padrões e abstração** é notada no momento em que a dupla entende a dinâmica de quais pontos devem ser escolhidos para a criação do tetraedro no local desejado, detectando uma regularidade (VALE et al., 2007) na criação dos tetraedros da próxima iteração. As indagações de “*aqui, aqui e aqui*” apontam também para o **pensamento algorítmico**, ou seja, para uma tomada de decisão de quais pontos devem ser selecionados, definindo uma sequência de instruções (TERZIDIS, 2006).

Gabriel movimentou a janela de visualização e iniciou uma **avaliação** da construção realizada até o momento. Alegou que os tetraedros estavam “*meio tortinhos*”, reconhecendo e avaliando o erro (L’HEUREUX et al., 2012). Justificou tal acontecimento pelo fato de ter utilizado pontos dependes na construção dos tetraedros. A Figura 49 apresenta uma manipulação em que é possível ver a “movimentação” dos tetraedros.

Figura 49 - Avaliação na construção dos tetraedros da primeira iteração - Tetraedro de Sierpinski - Blenda e Gabriel



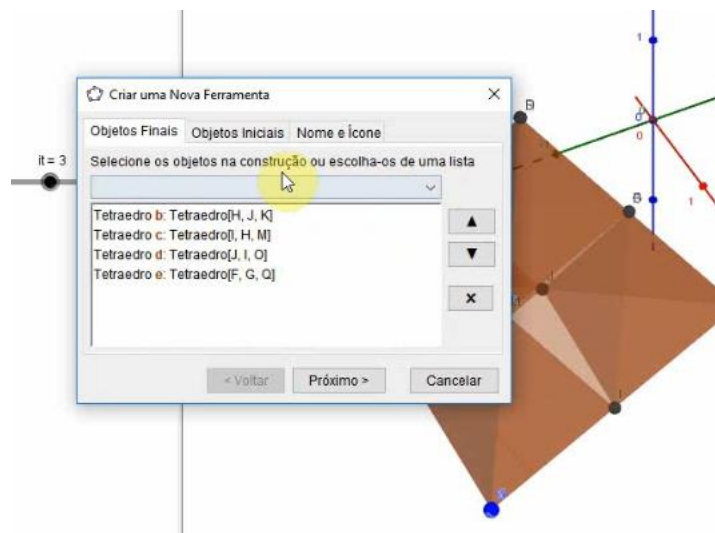
Fonte: Dados da Pesquisa

A dupla continuou a construção colocando “manualmente” os tetraedros no local desejado. Posteriormente, decidiram criar o controle deslizante e perceberam que sua criação só seria possível na Janela de Visualização 2D, o que se nota nas conclusões de Gabriel:

Ah, nada me impede de colocar em função do controle deslizante, só acontece que eu não sei como faz para exibir ele. Nada me impede também de pegar a janela 2D, criar nela, deixar nela e colocar em função dele, porque na hora do gif vai ser automático mesmo. Mas, é só questão de exibir mesmo. Eu não sei se eu consigo fazer. O que eu posso fazer? Eu crio o controle deslizante aqui. E faço em função dele aqui. O problema é que ele vai ficar aqui [na Janela de Visualização 2D] e não vai ficar lá [na Janela de Visualização 3D].

As habilidades de **decomposição e generalização** e de **padrões e abstração** emergiram na fala de Gabriel, nesse momento de decisão ele estava lidando com uma nova situação e buscando soluções acerca das condições disponíveis no software. Continuando a construção a dupla decidiu já condicionar os tetraedros acerca de seu momento de exibição. Condicionados os objetos da iteração zero Blenda e Gabriel decidiram criar uma nova ferramenta. A primeira tentativa de criação da ferramenta foi falha, pois perceberam que a ferramenta deveria ser criada antes dos objetos serem condicionados, Blenda disse: “*É por causa do it [nome dado ao controle deslizante], tinha que ter criado a ferramenta antes.*”. A condição de exibição dos objetos foi retirada e a nova ferramenta criada, sendo os objetos iniciais os pontos A e B e os objetos finais os quatro tetraedros menores (Figura 50).

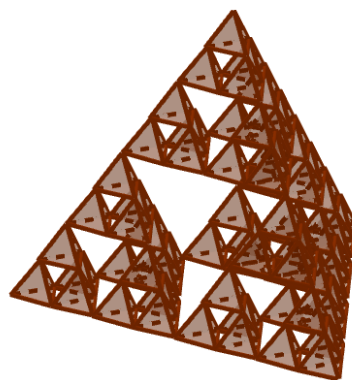
Figura 50 - Criação da nova ferramenta - Tetraedro de Sierpinski - Blenda e Gabriel



Fonte: Dados da Pesquisa

Note que nos objetos finais da nova ferramenta criada não foram gerados novos pontos médios para que a ferramenta continuasse sendo aplicada. Gabriel percebeu esse detalhe, mas decidiu criar cada um dos pontos médios utilizando a ferramenta “*Ponto Médio ou Centro*”. O resultado final da terceira iteração do Tetraedro de Sierpinski criado por Blenda e Gabriel pode ser visto na Figura 51.

Figura 51 - Construção concluída - Tetraedro de Sierpinski - Blenda e Gabriel



Fonte: Dados da Pesquisa

A escolha por criar os pontos médios de forma “braçal” e a decisão inicial de criar os tetraedros a partir de pontos dependentes fez com que o fractal ficasse levemente torto, como já havia sido alertado por Gabriel e que finalizou dizendo: “*Está bonitinho. Mas eu ainda estou inconformado pelo fato dele estar torto, mas... Eu não vou ter a paciência de ajeitar cada um como eu ajeitei apenas os quatro. São 64! Nossa gente, ficou muito bonito!*”

O arquivo .ggb e o GIF da construção de Blenda e Gabriel podem ser acessados através do QRCode a seguir (Figura 52) ou através do link (<https://goo.gl/TgTmzx>).

tal escolha a **representação e automação** pôde ser fortemente notada, os objetos começam ser condicionados e a dupla comentou do desempenho do GeoGebra.

Gabriel: *A parte braçal do GeoGebra é muito boa né? Mas, é esquisito porque alguns foram.* [alguns objetos são condicionados e outros não]

Blenda: *É, então. Eu também não entendi porque alguns foram e outros não.*

Gabriel: *O GeoGebra as vezes é meio temperamental.*

Blenda: *Ele é meio louco.*

Lara: *Vocês estão apertando o enter?*

Blenda: *Opa!*

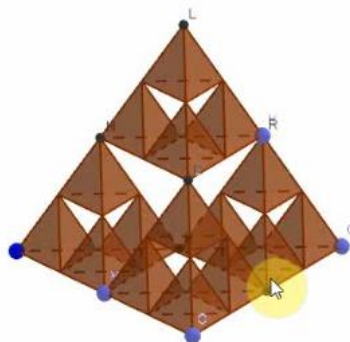
Gabriel: *Eu estou me sentindo um idiota agora de ter esquecido de dar enter.*

Na segunda metade da atividade a dupla se encarregou de condicionar a exibição dos tetraedros em cada iteração. A **representação e automação** ficou tão em evidência que eles selecionavam os tetraedros que faziam parte da mesma iteração e usavam o “Ctrl + C; Ctrl + V” para copiar e colar a condição desejada, fazendo a aplicação efetiva de meios computacionais (LINN, 2010). Porém, várias vezes esqueceram de apertar o “Enter” e a condição não ficou salva, tendo que voltar e condicioná-los de forma correta para que a atividade fosse concluída e o GIF gerado.

A segunda dupla a realizar a sessão de ensino que explorou o Tetraedro de Sierpinski foi Fabrício e Matheus. Eles resolveram a primeira parte da atividade de forma correta e sem grandes dificuldades. No momento de responder o item dois, sobre a quantidade de tetraedros que teria na quarta iteração Fabrício se espantou: “Nossa, vai dar 256. Caramba, já vamos fazendo já [risos]”.

Para a construção do tetraedro eles iniciam um novo arquivo no GeoGebra, mas deixaram a construção utilizada na primeira parte da atividade aberta. Matheus disse: “Vamos abrir em uma outra janela e deixar essa aberta para usarmos como base para a construção. Eu não sei mexer muito no 3D”. Ao abrir a Janela de Visualização 3D do software Matheus solicitou: “Tira eixo, tira malha, tira tudo!”, a dupla criou um tetraedro regular com a ferramenta disponível no software e os pontos médios em cada aresta, construíram quatro novos tetraedros a partir dos pontos médios e criaram uma nova ferramenta. A nova ferramenta criada funcionou da forma esperada, porém não criou novos pontos médios, o que limitou sua aplicação para uma próxima iteração. A Figura 54 apresenta a segunda iteração do Tetraedro de Sierpinski criada a partir da aplicação da nova ferramenta.

Figura 54 - Construção concluída - Tetraedro de Sierpinski - Fabrício e Matheus (1ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa

Após tal construção, Fabrício demonstrou a vontade de finalizar a mesma dessa maneira, mas Matheus se interessou em fazer mais uma iteração:

Matheus: *“O problema de fazer mais uma é que estamos sem os pontos [médios], não temos os pontos para aplicar a ferramenta.”*

Fabrício: *“Meu Deus, que burros! Nós tínhamos que ter deixado os pontos médios.”*

Matheus: *“Vamos fazer só até a terceira? Temos tempo.”*

A dupla tentou encontrar quais objetos deveriam fazer parte da nova ferramenta para que os pontos médios fossem criados quando aplicada. Porém, perceberam que existiam muitos pontos na construção, o que poderia acabar os confundindo. Após algumas tentativas de configurar a ferramenta de maneira correta o GeoGebra parou de funcionar, a dupla criou tantos pontos novos que o software não suportou. Uma nova janela foi aberta e uma nova construção iniciada.

A segunda tentativa teve início com a construção de um tetraedro regular e os pontos médios de cada aresta, a dupla fez esse processo de forma tão espontânea que os aspectos **padrões e abstração** e **representação e automação** foram notados, visto que a regularidade do processo (VALE et al., 2007) de formação do fractal foi entendida assim como as ferramentas que deveriam ser utilizadas para criá-lo no software. Novos tetraedros foram criados a partir dos pontos médios e se iniciou a **avaliação** da construção até então realizada: *“Perfeito, é isso que a gente quer!”*. Uma discussão se iniciou sobre quais pontos deveriam ser exibidos ou não.

Matheus: *Nós vamos sumir com o N?*

Fabrício: *Deixa o A.*

Matheus: *Nossa, parece que temos uma discrepância de pontos.*

Fabrício: *Vamos fazer o seguinte. Some com esses quatro e deixa aparecendo apenas o da primeira iteração.*

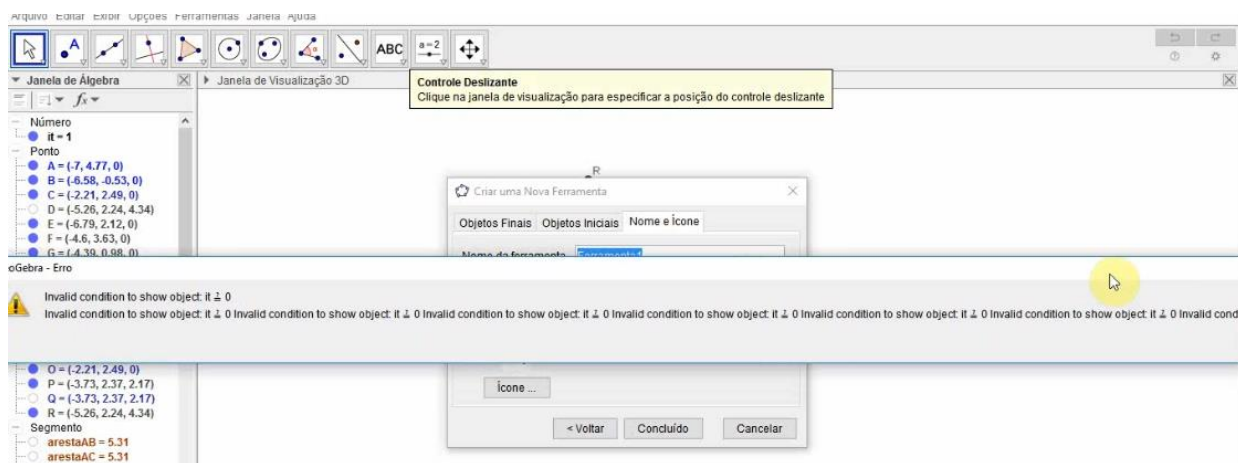
Matheus: *Sumi com todos [se referindo aos pontos da iteração zero].*

Fabrício: *Calma, me empresta [solicitando o mouse] temos que deixar esse, esse e esse e tirar esses outros.*

A decisão de quais pontos deixar na construção, fez com que o **pensamento algorítmico** fosse notado. Fabrício, na intenção de otimizar a construção (SOUSA; LENCASTRE, 2014) analisou onde cada ponto estava e quais pontos eram necessários na nova ferramenta, Matheus disse: *“Pronto, temos todos os pontos médios e os pontos iniciais, é isso que a gente quer, certo? Mas antes vamos fazer o controle deslizante para não ficarmos procurando igual loucos os tetraedros em cada iteração?”*, da decisão de criar o controle antes da nova ferramenta emergiu a **decomposição e generalização**, a justificativa aponta uma possível facilidade em momentos futuros da programação das condições de exibição de cada objeto, diminuindo a complexidade do que precisará ser analisado (QUEIROZ, 2017).

Na busca pela ferramenta *“Controle Deslizante”* eles perceberam, assim como a dupla anterior, que sua construção só seria possível na Janela de Visualização 2D. Cometeram o mesmo erro de Blenda e Gabriel, ou seja, condicionaram os objetos antes de criar a nova ferramenta. A Figura 55 apresenta a mensagem de erro apontada no GeoGebra.

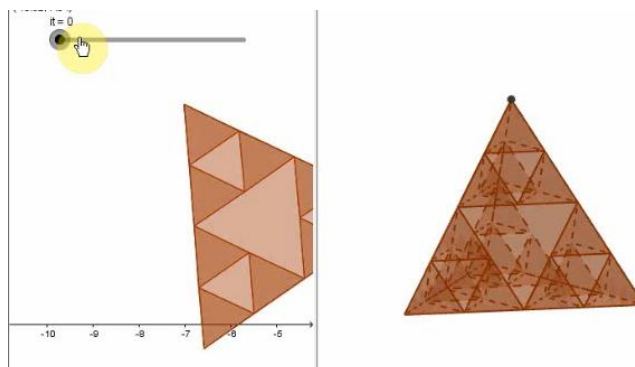
Figura 55 - Erro apontado pelo Geogebra durante criação da nova ferramenta - Tetraedro de Sierpinski - Fabrício e Matheus (2ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa

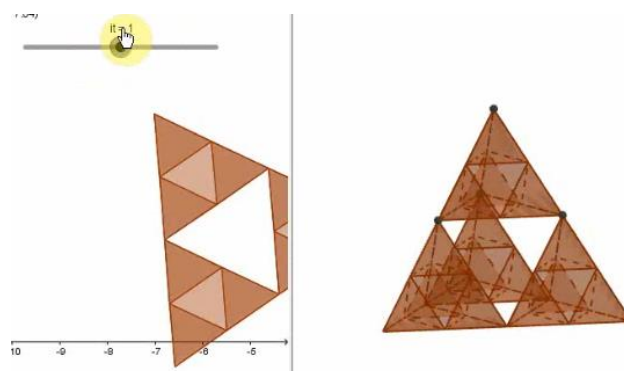
O erro apontado não os impediu de criar a ferramenta, eles pressionaram *“Ok”* e a nova ferramenta foi criada. Eles aplicaram nos pontos desejados e construíram a segunda iteração do Tetraedro de Sierpinski. Nessa segunda tentativa de resolução o objetivo inicial foi o de criar uma ferramenta que pudesse ser aplicada até gerar a terceira iteração do fractal, a ferramenta criada permitiria tal ação, porém, Matheus desistiu de tal ideia e a dupla finalizou a construção com duas iterações. Mesmo após realizar a programação na condição de exibição de cada objeto, as arestas e faces dos tetraedros da segunda iteração apareceram também nas iterações zero e um. As Figuras 56 e 57 apresentam tais momentos.

Figura 56 - Iteração zero - Tetraedro de Sierpinski - Fabrício e Matheus



Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 57 - Iteração um - Tetraedro de Sierpinski - Fabrício e Matheus



Fonte: Dados da Pesquisa

Para resolver o problema a dupla decidiu esconder todos os segmentos e triângulos presentes na construção:

Fabrício: *Esconde tudo isso, vamos ficar só com os tetraedros.*

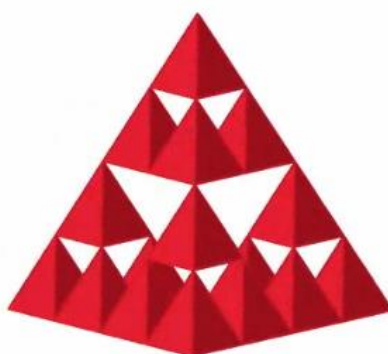
Matheus: *Beleza!*

Fabrício: *Isso, agora deu.*

Matheus: *Agora vamos pintar.*

Matheus se mostrou satisfeito com o Tetraedro de Sierpinski construído: “*Pronto, lindo! Agora é só fazer GIF*”. A construção final do fractal é apresentada na Figura 58.

Figura 58 - Construção concluída - Tetraedro de Sierpinski - Fabrício e Matheus

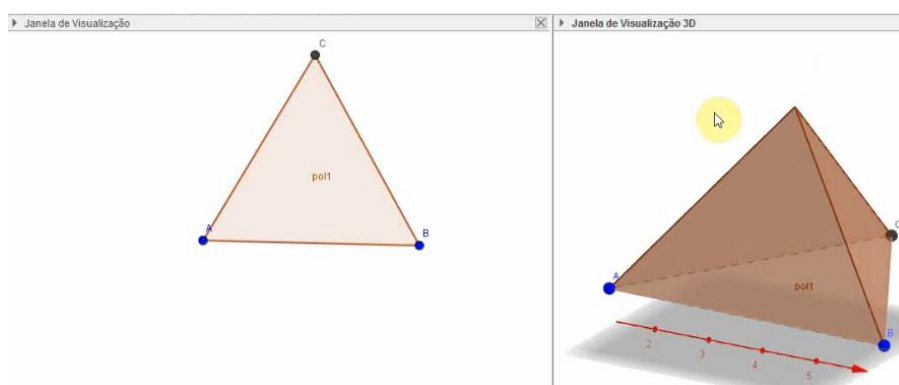


Fonte: Dados da Pesquisa

construção, em que a exibição dos tetraedros em cada iteração deveria conciliar com a mudança no incremento do controle deslizante.

A dupla que finalizou as sessões de ensino da atividade 2 foi Luana e Marcelo e assim como as anteriores utilizou recursos do GeoGebra para auxiliar nas respostas das questões da primeira parte da atividade. Ao partir para a construção do Tetraedro de Sierpinski iniciaram um novo arquivo no software, construíram um triângulo equilátero na Janela de Visualização 2D e posteriormente abriram a Janela de Visualização 3D. A ideia era gerar um tetraedro a partir do triângulo inicial utilizando a ferramenta “Fazer extrusão para Pirâmide ou Cone” (Figura 61).

Figura 61 - Início da construção - Tetraedro de Sierpinski - Luana e Marcelo



Fonte: Dados da Pesquisa

Luana contestou a decisão de utilizar tal ferramenta: “*Mas como você sabe se a altura está igual?*”, Marcelo concordou que seria complicado definir a altura correta e então procuraram uma outra maneira de criar o tetraedro inicial. Decidiram utilizar a ferramenta “*Tetraedro Regular*” já disponível no software. Construíram o tetraedro e então os pontos médios de cada aresta. Para a construção dos pontos médios utilizaram o campo de “*Entrada*” e os criaram de maneira algébrica, assim como realizado na primeira sessão durante a construção do Triângulo de Sierpinski. Os tetraedros que fazem parte da primeira iteração do fractal foram gerados, e durante suas construções surgiu o seguinte diálogo:

Marcelo: *Já está certo, agora só selecionar dois pontos que ele faz.*

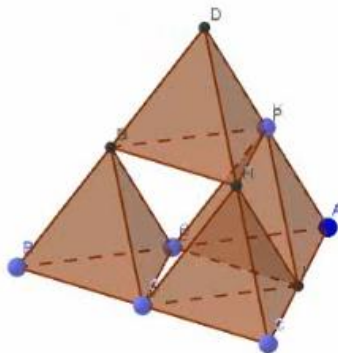
Luana: *Mais quais dois pontos?*

Marcelo: *Ai, estou confuso. Faz esse com esse ou esse com esse, a gente testa.*

A **representação e automação** se manifestou durante a fala de Marcelo, no momento em que ele pediu para Luana selecionar diferentes pontos e analisar onde o tetraedro foi gerado a representação é caracterizada pelo uso e interpretação do resultado, proporcionada pela aplicação da ferramenta, que gera agilidade no processo de resolução do problema (LINN,

2010). A Figura 62 apresenta a construção realizada dos tetraedros da primeira iteração do fractal.

Figura 62 - Tetraedros da primeira iteração - Tetraedro de Sierpinski - Luana e Marcelo



Fonte: Dados da Pesquisa

Após essa construção julgaram que a nova ferramenta já poderia ser criada. Na Janela de Álgebra, selecionaram todos os objetos que estavam sendo exibidos e criaram a nova ferramenta, sendo os objetos iniciais os pontos A e B e os objetos finais os elementos mostrados na Figura 62. Nesse momento os aspectos **padrões e abstração; decomposição e generalização** e **pensamento algorítmico** foram notados, uma vez que a dupla se preocupou em esconder os objetos da primeira iteração para que eles não fossem construídos a cada aplicação da nova ferramenta. A nova ferramenta foi nomeada “*Tetraedros*” e a dupla a testou para verificar se havia sido criada de maneira correta e se sua aplicação geraria os tetraedros da segunda iteração.

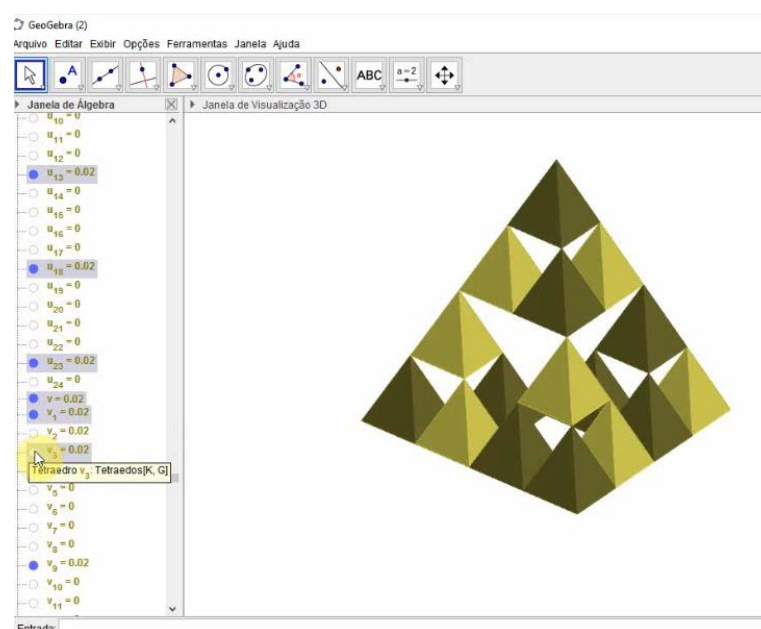
A **avaliação** se fez presente, visto que para continuar a construção do fractal a ferramenta deveria gerar tetraedros de forma correta. Assim, a dupla avaliou os resultados a partir da utilização do recurso criado (L’HEUREUX et al., 2012). Marcelo comentou: “*Ah, olha deu certo, olha que legal isso.*” e perguntou quantas iterações seriam feitas. Luana disse não saber e argumentou que seriam gerados muitos pontos e que ficaria difícil identificar os elementos de cada iteração, porém Marcelo disse: “*Acho que não vai dar tanto trabalho, é só a gente ver as medidas.*” O que fez emergir a **decomposição e abstração**, pois o ato de olhar as medidas dos objetos na Janela de Álgebra diminuiu a complexidade da busca por tetraedros da mesma iteração e do que precisaria ser analisado (QUEIROZ, 2017).

A dupla decidiu aplicar a ferramenta mais uma vez, gerando a terceira iteração do fractal, perceberam que o GeoGebra começou a travar, devido a quantidade de objetos que estavam sendo gerados a cada aplicação da nova ferramenta. Luana reforçou que na quarta

iteração eram gerados 256 tetraedros e Marcelo comentou: “*Nossa, não! Não vamos fazer até a quarta [risos]*”.

Realizada a aplicação da nova ferramenta até a terceira iteração a dupla trocou as cores dos objetos e escondeu pontos, segmentos e triângulos presentes na construção, exibindo apenas os tetraedros. O controle deslizante foi criado na Janela de Visualização 2D e os objetos condicionados de acordo com sua iteração e momento de exibição correspondente ao incremento do controle, a dupla utilizou a Janela de Álgebra para selecionar os objetos que faziam parte da mesma iteração (Figura 63).

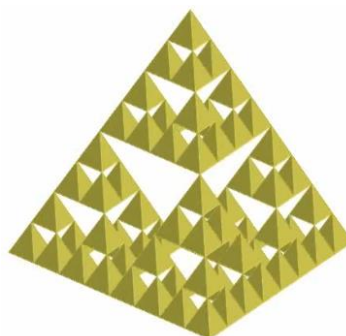
Figura 63 - Seleção de objetos na Janela de Álgebra - Tetraedro de Sierpinski - Luana e Marcelo



Fonte: Dados da Pesquisa

Finalizada a programação de condição de exibição dos objetos a dupla concluiu a construção, gerou o *GIF* e finalizou com sucesso a atividade. A Figura 64 apresenta a construção final da terceira iteração do Tetraedro de Sierpinski feita por Luana e Marcelo.

Figura 64 - Construção concluída - Tetraedro de Sierpinski - Luana e Marcelo



Fonte: Dados da Pesquisa

avaliação se intensificaram ao final da atividade, em que o tetraedro já havia sido construído e bastava condicionar os objetos que seriam exibidos a cada iteração.

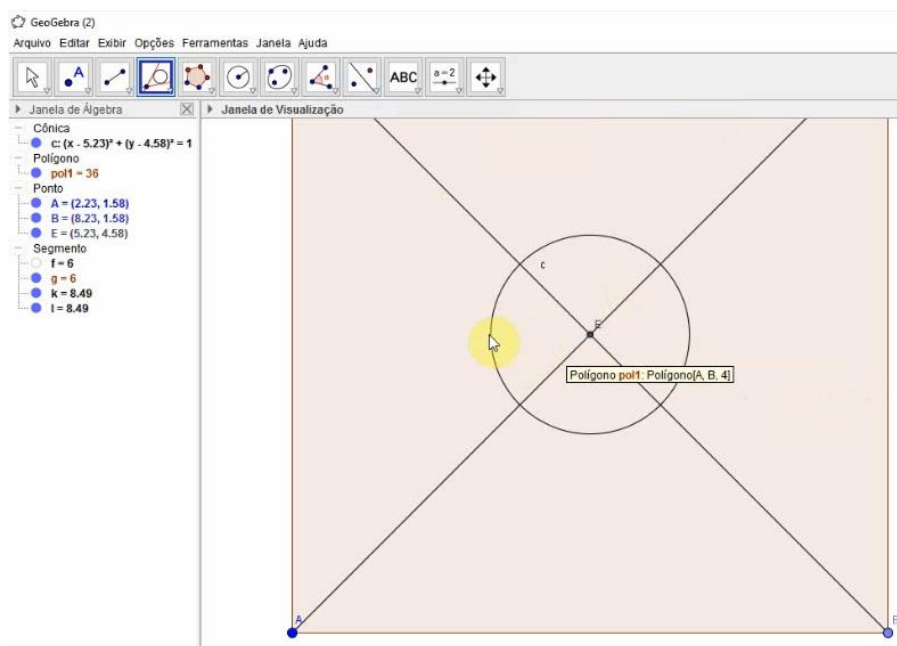
A seguir, as habilidades do Pensamento Computacional que se manifestaram na Atividade 3 são destacadas.

5.3 Habilidades do Pensamento Computacional que se manifestaram na Atividade 3 - Tapete de Sierpinski

Recordo, que a terceira atividade das sessões de ensino teve como objetivo descrever o processo de geração, construir e analisar os conceitos matemáticos presentes no fractal Tapete de Sierpinski. Além de gerar um *GIF* de tal construção.

A primeira dupla a realizar essa sessão foi Luana e Marcelo, eles descreveram com clareza o processo de geração do fractal e calcularam corretamente sua dimensão. Iniciaram a construção do tapete abrindo um novo arquivo no GeoGebra, retirado os eixos e a malha, e criando um ponto A e um segmento de seis centímetros utilizando o comando “Segmento[<Ponto>, <Comprimento>]”. Posteriormente, construíram um “Polígono Regular” de quatro lados utilizando como um dos lados o segmento anterior, criaram as diagonais do quadrado e marcaram sua intersecção. Construíram um círculo com centro na intersecção das diagonais e raio igual a um. O resultado de tais ações pode ser visto na Figura 67.

Figura 67 - Início da construção - Tapete de Sierpinski - Luana e Marcelo (1ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa

Marcelo explicou o motivo da construção:

Marcelo: *Esse quadrado grande tem seis [unidades de comprimento] e aí construí esse círculo de raio um bem no centro. E o novo quadrado vai ser gerado pela intersecção das retas tangentes.*

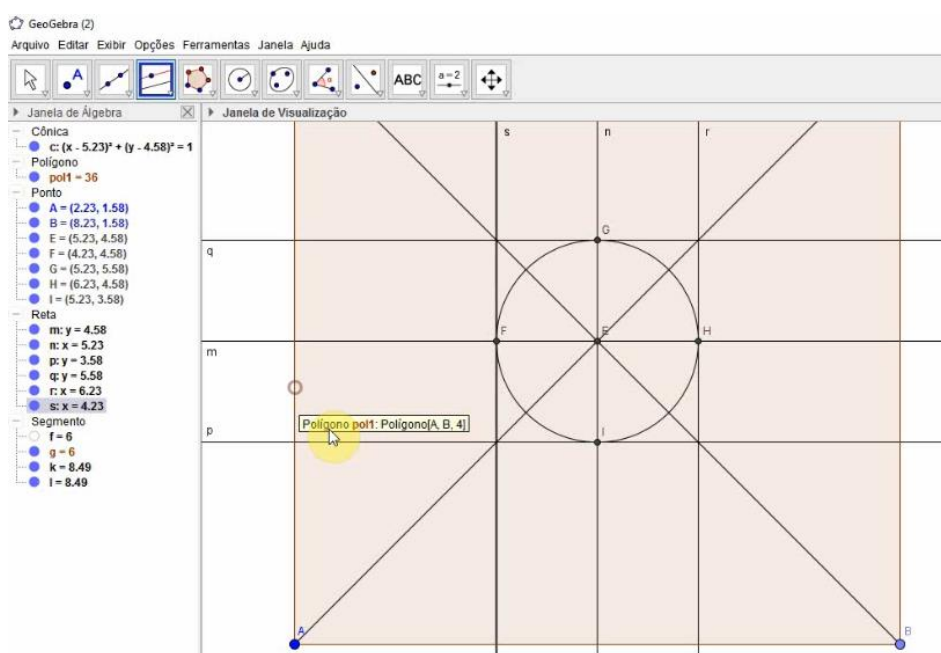
Luana: *Então aqui tem dois? [diâmetro do círculo]*

Marcelo: *Isso, daqui aqui tem dois, daqui aqui tem dois, e daqui aqui tem dois.*

Luana: *Entendi.*

Continuando a construção, retas paralelas às arestas do quadrado e tangentes ao círculo foram criadas (Figura 68).

Figura 68 - Criação do quadrado central - Tapete de Sierpinski - Luana e Marcelo (1ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa

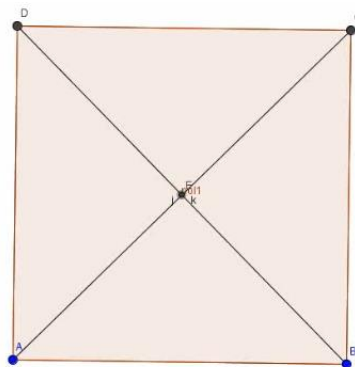
Luana questionou: “*Mas quando criarmos a ferramenta ela vai fazer tudo isso?*”, Marcelo confirmou que sim. Foram criados oito quadrados menores a partir das intersecções das retas tangentes com os lados do quadrado inicial. Uma nova ferramenta foi criada, porém não funcionou como esperado, ou seja, ela não gerou uma nova iteração do fractal. Eles desistiram da construção e iniciaram uma nova tentativa, que também falhou. Eu, como pesquisadora intervi e apresentei a dupla a função homotetia⁴⁴, mostrei como funcionava o comando no software e solicitei que a dupla fizesse uma nova tentativa de construção, que também não foi concluída como o esperado. O êxito na construção do Tapete de Sierpinski aconteceu na quarta tentativa. Foi possível identificar diversas habilidades do Pensamento

⁴⁴A homotetia é um tipo de transformação geométrica que altera o tamanho de uma figura, mas mantém as características principais, como a forma e os ângulos.

Computacional emergindo nas três primeiras construções de Luana e Marcelo. No entanto, tais aspectos serão enfatizados e analisados na resolução concluída com sucesso.

A nova construção da dupla se iniciou com um “*Polígono Regular*” de quatro lados, suas diagonais e o ponto de intersecção das mesmas. A Figura 69 apresenta tal construção.

Figura 69 - Início da construção - Tapete de Sierpinski - Luana e Marcelo (4^a tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa

Se fez presente a **representação e automação** a partir do uso das ferramentas disponíveis no software, a **decomposição e generalização** e o aspecto **padrões e abstração**, uma vez que a dupla utilizou uma estratégia inicial já avaliada como correta nas tentativas anteriores, transferindo seu processo inicial de resolução para essa.

O comando “*Homotetia[<Objeto>,<Razão>,<Centro>]*” foi digitado no campo de entrada. Nesse momento, manifestou-se o **pensamento algorítmico**, pois a decisão de qual seria a razão e o centro envolveu um processo de tomada de decisão, indicando as diversas ações e decisões que deveriam ser executadas (SOUSA; LENCASTRE, 2014). A dupla desistiu de aplicar o comando nesse momento, pois julgaram que ainda não possuíam os pontos (centros) necessários para realizarem tal transformação. As diagonais do quadrado foram retiradas e se iniciou uma discussão de quais pontos deveriam ser criados para que se aplicasse a homotetia.

Marcelo: *Agora a gente pode fazer o ponto médio.*

Luana: *Por que ponto médio?*

Marcelo: *É, teria que ser no centro [centro do quadrado inicial] né? Mas acho que dá mesmo assim.*

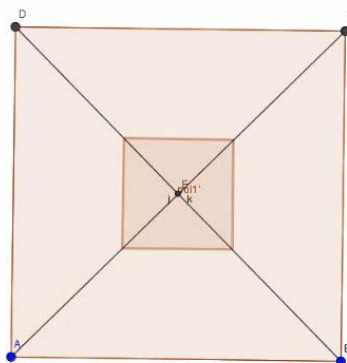
Luana: *O que você está fazendo? Ponto médio do ponto médio? [...] Eu não estou entendendo esse tanto de ponto que você criou.*

Marcelo: *É, eu também não, não sei o que eu pensei. Vamos voltar e fazer daquele jeito que já estávamos fazendo.*

A **avaliação** foi realizada no momento descrito acima, a dupla deliberou que a construção não estava correta e que não era possível continuar, fazendo um julgamento de valor através dos critérios que deveriam ser seguidos para a construção do fractal (CATLIN;

WOOLLAR, 2014). Voltaram para a construção apresentada na Figura 69 e aplicaram uma homotetia no quadrado inicial de razão $1/3$ e cujo centro foi o ponto de intersecção das diagonais. O resultado pode ser visto na Figura 70.

Figura 70 - Aplicação do comando homotetia - Tapete de Sierpinski - Luana e Marcelo (4ª tentativa)

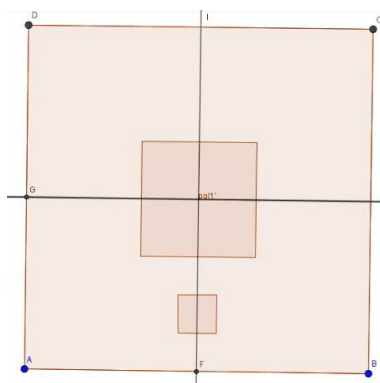


Fonte: Dados da Pesquisa

As diagonais e o ponto central foram escondidos, a reta paralela a $\overline{AD}$ e que passa pelo ponto médio de $\overline{AB}$ foi criada. Marcelo indicou que: “O ponto médio dessa reta [se referindo ao segmento contido dentro do quadrado inicial] é o centro desse quadrado. Aí, eu queria fazer isso [construção das retas] em todos. Entendeu agora?” o **pensamento algorítmico** novamente se fez presente, a indicação do que deveria ser realizado, juntamente com o resultado previsto, caracteriza tal aspecto. A reta paralela a $\overline{AB}$ e que passa pelo ponto médio de $\overline{AD}$ também foi criada.

A construção continuou com a aplicação do comando homotetia aplicado no novo quadrado gerado no centro. A transformação foi aplicada com razão $1/3$ em relação aos pontos médios das arestas do quadrado inicial (Figura 71).

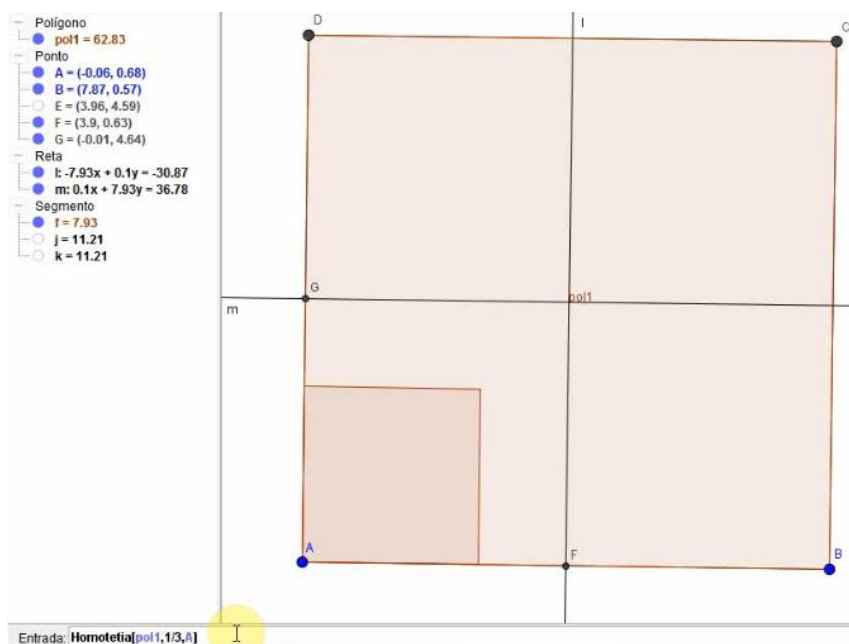
Figura 71- Segunda aplicação do comando homotetia - Tapete de Sierpinski - Luana e Marcelo (4ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa

Após alguns testes, caracterizando a **representação e automação**, a dupla decidiu mudar novamente a estratégia. Voltaram para a construção apresentada na Figura 69 e aplicaram a homotetia do quadrado inicial em relação ao ponto A e razão 1/3 (Figura 72), criando uma nova representação e desenvolvendo o processo de pensamento (VIEIRA, 2018).

Figura 72 - Mudança de estratégia na aplicação do comando homotetia - Tapete de Sierpinski - Luana e Marcelo (4ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa

A partir dessa construção surgiu a seguinte indagação:

Luana: Não, mas não é em relação a F?

Marcelo: Está certo, porque agora vamos fazer em todos.

Luana: Então, faz em relação a F.

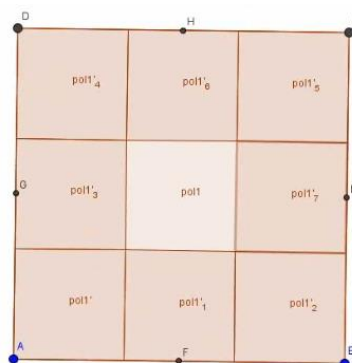
Marcelo: Olha ai...

Luana: Aaaah, é porque não precisa do [quadrado] do meio né? É verdade! Essas retas também não são necessárias, você precisa apenas dos pontos médios.

Marcelo: É verdade, vou apagar.

Marcelo e Luana **decompõem e generalizam** o método de resolução e construção que adotaram, transferindo o método e processo de resolução para gerar as demais iterações (ISTE/CSTA, 2012). Aplicaram a homotetia em relação a todos os pontos médios, gerando a primeira iteração do fractal, vista na Figura 73.

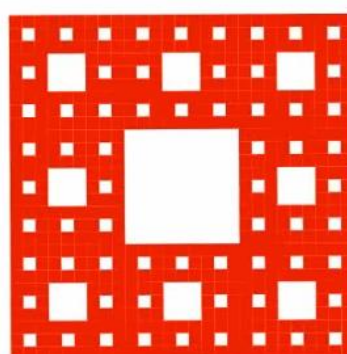
Figura 73 - Primeira iteração - Tapete de Sierpinski - Luana e Marcelo (4ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa

Após essa construção uma nova ferramenta, cujos objetos iniciais foram os pontos A e B e os objetos finais foram todos os polígonos presentes na construção, foi criada. Ao aplicar tal ferramenta a dupla **avaliou** que a mesma ainda não estava correta, uma vez que os pontos médios dos segmentos não eram gerados, o que impediria uma nova aplicação e geração da terceira iteração do fractal. Criaram outra nova ferramenta e a nomearam de “AGORAVAI”, nessa nova ferramenta os objetos iniciais foram os pontos A e B e os objetos finais todos os polígonos e pontos médios presentes na construção. A ferramenta foi aplicada até a terceira iteração do Tapete de Sierpinski ser criada. O resultado final da construção de Luana e Marcelo é visto na Figura 74.

Figura 74 - Construção concluída - Tapete de Sierpinski - Luana e Marcelo (4ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa

A Figura 74 apresenta a terceira iteração do Tapete de Sierpinski, e o arquivo *.ggb* e *GIF* da construção de Luana e Marcelo podem ser acessados através do QRCode abaixo (Figura 75) ou através do link (<https://goo.gl/kDttst>).

eles **avaliaram** como a construção e nova ferramenta haviam sido gerados e concluíram que: “*A gente não precisava dessa quantidade de pontos, apenas dos pontos médios. Deveríamos ter escondido e retirado os rótulos antes de criar a ferramenta*”, o que aponta para a **decomposição e generalização**, visto que chegaram a conclusão de que a nova ferramenta poderia ser sido criada de forma mais eficaz e poupado trabalho.

Nota-se que o **pensamento algorítmico** emergiu em mais momentos nessa atividade se comparado as sessões anteriores. Acredito, que o motivo seja a opção pelo uso do comando homotetia, uma vez que a tomada de decisões em sua aplicação se fez presente. Assim como nas atividades anteriores realizadas por Luana e Marcelo, o aspecto **avaliação** emergiu com maior frequência após a criação do controle deslizante e nos momentos em que os objetos são condicionados em relação a sua exibição. Já **representação e automação** se acentuou durante todo o processo de construção.

A segunda dupla a realizar essa sessão de ensino foi Blenda e Gabriel, eles descreveram de maneira correta como o Tapete de Sierpinski é gerado e calcularam sua dimensão. Ao iniciar a construção do fractal decidiram como iriam gerar o quadrado inicial:

Blenda: *Fazemos por polígonos ou usando o segmento?*

Gabriel: *Humm, por polígono. Ou não? É, polígono.*

Blenda: *Agora temos que dividir em nove.*

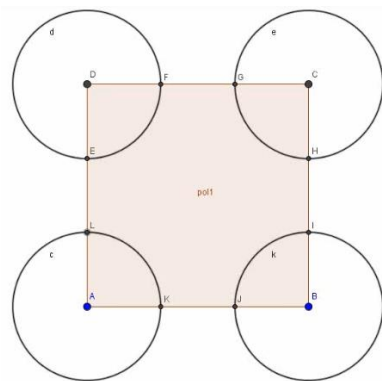
Gabriel: *Temos que pegar $1/3$, $1/3$, $1/3$,... . Deixa eu ver as ferramentas que tem aqui pra ver se tem uma maneira boa de fazer isso.*

Blenda: *Só tem ponto médio e ponto central.*

Eles não encontraram nenhuma ferramenta “pronta” do software que dividisse os segmentos em três e Blenda sugeriu que usassem o campo “*Entrada*” para construírem um terço de cada um dos segmentos. A dupla fez diversas tentativas de construção dos segmentos aplicando a ferramenta “*Segmento com Comprimento Fixo*”, porém sem êxito. Cogitaram a possibilidade de criar os pontos desejados no campo de entrada, mas Gabriel argumentou: “*Não podemos fazer desse jeito, porque depois, quando quisermos formar um outro quadrado ele [ferramenta] não vai entender, porque construímos esse ponto fixo com coordenadas fixas.*”. O argumento de Gabriel faz todo sentido, visto que quando se tem interesse em criar uma nova ferramenta não se podem ter objetos com características fixas, como pontos de coordenadas fixas, pois impedem sua movimentação.

Surgiu a ideia de criar circunferências utilizando a ferramenta “*Círculo dados Centro e Raio*”, com centros nas extremidades do quadrado e raio $1/3$ de sua aresta. Os pontos de intersecção das circunferências com as arestas do quadrado foram criados. O resultado de tal construção pode ser visto na Figura 77.

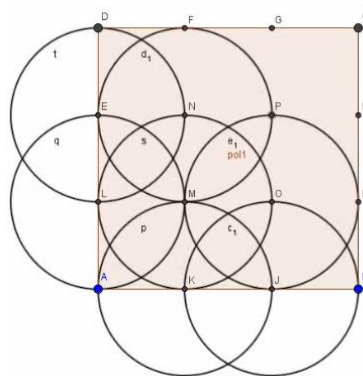
Figura 77 - Início da construção - Tapete de Sierpinski - Blenda e Gabriel (1ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa

A construção continuou com a criação de mais circunferências e pontos de intersecção, com o intuito de gerar pontos no centro do quadrado inicial (Figura 78).

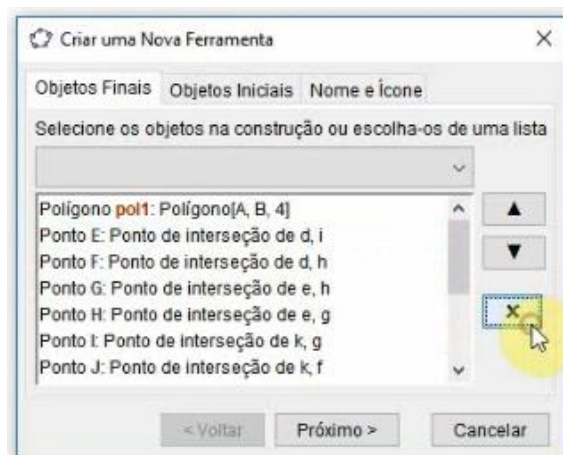
Figura 78 - Criação dos pontos no centro do quadrado inicial - Tapete de Sierpinski - Blenda e Gabriel (1ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa

Construídos os pontos desejados, a dupla escondeu todas as circunferências, retirou os rótulos de todos os objetos e alterou a transparência do quadrado, deixando a cor mais forte. Construíram o controle deslizante e já condicionaram o quadrado inicial. Criaram uma nova ferramenta, escolhendo como objetos iniciais os pontos A e B e objetos finais todos os pontos de intersecção construídos e o polígono inicial. A escolha dos objetos finais da nova ferramenta pode ser vista na Figura 79.

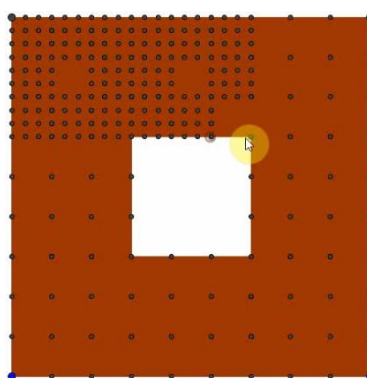
Figura 79 - Objetos finais da nova ferramenta - Tapete de Sierpinski - Blenda e Gabriel (1ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa

Gabriel explicou para Blenda como a nova ferramenta funcionaria: “Quando estivermos fazendo uma determinada iteração já estaremos criando os pontos para a próxima, porque a gente está com a iteração um [se referindo a iteração zero] com os pontos da iteração dois [se referindo a iteração um]. Então, na última, a gente não precisa usar a ferramenta, só precisamos fechar o polígono, porque se usarmos a ferramenta ele vai criar novos pontos da próxima [iteração].” Blenda compreendeu a ação da nova ferramenta e a dupla iniciou sua aplicação, já condicionando os novos quadrados criados em cada iteração. A Figura 80 exibe um momento em que a nova ferramenta foi aplicada.

Figura 80 - Aplicação da nova ferramenta - Tapete de Sierpinski - Blenda e Gabriel (1ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa

A dupla chamou a atenção para a quantidade de pontos que estavam sendo gerados:

Blenda: “É ponto pra caramba!”

Gabriel: Pois é, temos que ver se o GeoGebra vai aguentar tudo isso.

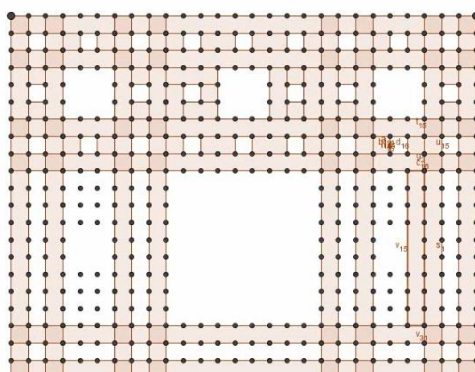
A preocupação da dupla faz sentido, o GeoGebra não tem um bom desempenho quando são criados centenas de objetos. Gabriel continuou aplicando a ferramenta e disse: “*Agora é só trabalho braçal*”. Eles decidiram fazer até a terceira iteração do fractal:

Gabriel: *Nós estamos com pontos para fazer a próxima [terceira iteração], então só precisamos desenhar os polígonos. Só que como vamos desenhar, podemos ‘dar um migué’ e desenhar retângulos.*

Blenda: *Aaah espertinho [risos].*

Como a preocupação da dupla foi com o visual que seria gerado do fractal, a ideia de criar os retângulos seria uma boa, mas não deixariam de ser trabalhosa. A Figura 90 mostra parte da construção dos retângulos.

Figura 81 - Construção de retângulos para gerar a terceira iteração - Tapete de Sierpinski - Blenda e Gabriel (1ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa

Durante a construção dos retângulos Gabriel e Blenda perceberam que a decisão de os criar não otimizou a construção da terceira iteração e manifestaram o arrependimento de não terem criado os polígonos antes de gerarem a nova ferramenta.

Gabriel: *Poderia ter sido tão mais fácil!*

Blenda: *Quer começar de novo? Vamos começar de novo e deixa esse aí.*

Gabriel: *Talvez seja mais fácil voltar lá na primeira iteração e colocar os polígonos. Nossa, mas aí teremos que...Vixi!*

Blenda: *Abre outro, começamos de novo e qualquer coisa voltamos nesse.*

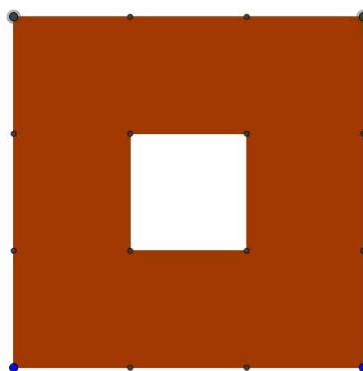
A dupla decidiu iniciar um novo arquivo e uma nova construção. Diversos aspectos do Pensamento Computacional emergiram durante a primeira tentativa de construção do Tapete de Sierpinski. Porém, tais habilidades serão destacadas na segunda tentativa de construção e finalização da atividade.

Em um novo arquivo, todo o processo realizado no início da primeira tentativa foi refeito, caracterizando a **representação e automação**, em que se teve a aplicação dos meios computacionais já conhecidos do software para representar o conhecimento acerca do início da

construção (LINN, 2010). Gabriel argumentou que o quadrado inicial poderia ter uma medida qualquer, já que as divisões das arestas seriam realizadas a partir da construção de circunferências, cujo raio seria $\frac{1}{3}$ das arestas do quadrado, o que configurou **padrões e abstração**, posto que tal reflexão e decisão se deu a partir de uma situação já conhecida em que foi detectada uma regularidade (VALE et al., 2007).

O quadrado foi criado em um lugar aleatório da Janela de Visualização. Gabriel disse que o quadrado não poderia ser criado em cima dos eixos, pois dessa maneira o objeto ficaria vinculado e a nova ferramenta, quando criada, só poderia ser aplicada em pontos sobre o eixo. O argumento dado e a opção por não criar o quadrado sobre um dos eixos fez emergir o **pensamento algorítmico**, pois está ligado ao processo de tomada de decisão (SOUSA; LENCASTRE, 2014). A construção criada antes da nova ferramenta ser gerada é mostrada na Figura 82.

Figura 82 - Primeira iteração - Tapete de Sierpinski - Blenda e Gabriel (2ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa

Após tal construção, a nova ferramenta foi criada, os objetos iniciais foram os pontos A e B. Já na decisão sobre quais seriam dos objetos finais surgiu o seguinte diálogo:

Gabriel: *Todos esses segmentos não precisam, né?!.*

Blenda: *Mas ai vai ficar com o espaço.*

Gabriel: *Mas eu acho que...Você viu a quantidade de segmentos que são gerados?*

Blenda: *Mas não vai ficar espaço entre um e outro igual ficou aquela hora?*

Gabriel: *Ah, se ficar, só vai ficar feio. Mas é melhor [deixar sem] porque se quisermos ir muito, com esse tanto de segmento, o GeoGebra vai começar a 'engasgar'*

A **decomposição e generalização** emergiram da justificativa relativa a grande quantidade de segmentos que estacam sendo gerados, Gabriel estava pensando no êxito do produto final (fractal) a partir da aplicação da ferramenta que estava sendo criada, pensando no produto a partir da junção de seus elementos (COSTA, 2016). Assim, os objetos finais da nova

ferramenta foram os oito polígonos da primeira iteração do tapete e todos os pontos de intersecção presentes na construção. Antes de aplicar a nova ferramenta o controle deslizante nomeado de “it” foi criado, seu intervalo teve valor mínimo igual a um (representando a iteração zero) e máximo igual a quatro (representando a iteração três). A exibição dos polígonos das iterações zero e um foi condicionada. A dupla aplicou a nova ferramenta e **avaliou**:

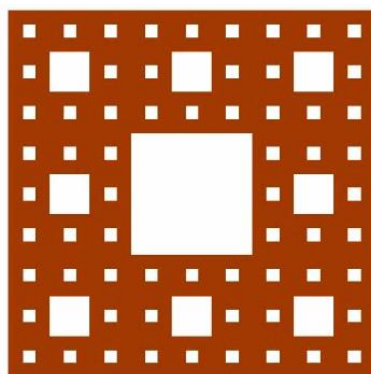
Gabriel: *Nossa, aí, muito mais fácil assim!*

Blenda: *Pois é, aquela hora achamos que estávamos facilitando, mas não.*

Gabriel: *Ah, está tão mais bonito, estou me sentindo um idiota.*

A **avaliação** feita aponta que a dupla diminuiu a complexidade da construção e a realizou de forma eficiente (QUEIROZ, 2016), tipificando a **decomposição e generalização**. O resultado final do Tapete de Sierpinski criado por Blenda e Gabriel pode ser visto na Figura 83.

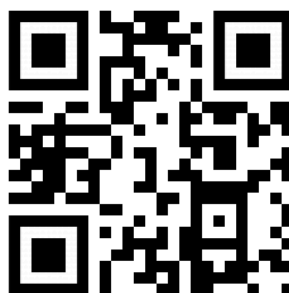
Figura 83 - Construção concluída - Tapete de Sierpinski - Blenda e Gabriel (2ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa

A figura acima apresenta a terceira iteração do fractal. O arquivo .ggb e o GIF da construção da dupla podem ser acessados através do QRCode abaixo (Figura 84) ou através do link (<https://goo.gl/t5bZnb>).

Figura 84 - QRCode que dá acesso ao arquivo .ggb e ao GIF, criados por Blenda e Gabriel na terceira atividade.



Fonte: Gerado a partir de <https://br.qr-code-generator.com/>

avaliar a construção eles retornaram o valor máximo do controle para quatro e finalizaram a atividade gerando o *GIF* contendo três iterações do fractal Tapete de Sierpinski.

A dupla que finalizou o estudo e construção do Tapete de Sierpinski foi Fabrício e Matheus. Eles responderam as questões propostas de maneira correta e partiram para a construção do fractal. Iniciaram um novo arquivo no software, retiraram os eixos e a malha e criaram um “*Polígono Regular*” de quatro lados. Optaram por já criar o controle deslizante, editaram as cores dos objetos e condicionaram o quadrado inicial. Fabrício alertou para Matheus não retirar os pontos e eles começaram a discutir como as arestas poderiam ser divididas em três.

Matheus: *Vamos ver se dá para fazer da forma como estou pensando [usar ponto médio].*

Fabrício: *Não, assim não. A não ser que você divida, pega o ponto médio, do ponto médio, do ponto médio ai vai chegar em um que seja $1/3$.*

A construção descrita por Fabrício pode ser vista na Figura 86.

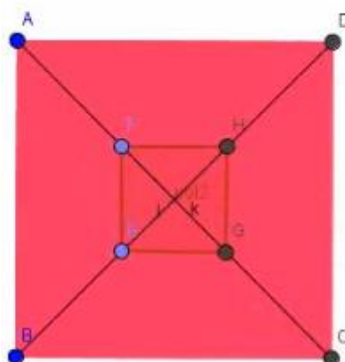
Figura 86 - Construção inicial - Tapete de Sierpinski - Fabrício e Matheus (1ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa

Fabrício destacou que o “*T*” e o “*J*” seriam os pontos necessários. Refletindo sobre a quantidade de pontos que seriam gerados em cada iteração, eles decidiram mudar de estratégia, criaram as diagonais do quadrado e utilizaram o comando “*Ponto[<Objeto>,<Parâmetro>]*” no campo de entrada. Os pontos necessários para gerar o quadrado menor do centro foram construídos, assim como o polígono (Figura 87).

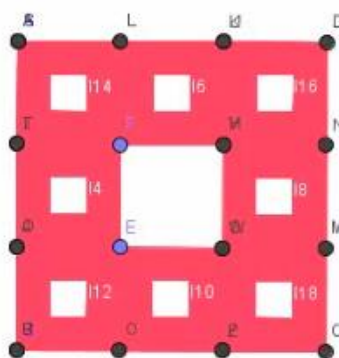
Figura 87 - Criação do quadrado central - Tapete de Sierpinski - Fabrício e Matheus (1ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa

A dupla utilizou a estratégia de colorir o quadrado central de branco, dando a impressão de que o mesmo havia sido retirado, assim não precisariam se preocupar em construir os oito quadrados da primeira iteração. A nova ferramenta foi criada e sua aplicação até a segunda iteração é vista na Figura 88.

Figura 88 - Segunda iteração - Tapete de Sierpinski - Fabrício e Matheus (1ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa

A estratégia adotada pela dupla diminui a quantidade de polígonos que foram criados a cada iteração. Porém, a condição de exibição dos objetos a cada etapa deveria ser repensada. A dupla concluiu que o quadrado (rosa) inicial deveria aparecer sempre, ou seja, o controle deslizante deveria ser maior ou igual a zero. Já o quadrado (branco) central da primeira iteração apareceria quando o controle fosse maior ou igual a um, os da segunda iteração quando o controle fosse maior ou igual a dois e assim por diante. Porém, perceberam que com a construção apresentada na Figura 88 não seria possível aplicar a nova ferramenta novamente, uma vez que os pontos dos quadrados da segunda iteração não foram gerados. Refizeram a nova ferramenta e avaliaram como correta.

A ideia de criar uma segunda nova ferramenta a partir da segunda iteração surgiu:

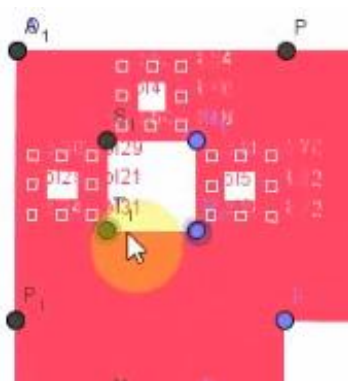
Fabício: *Seleciona toda essa construção e cria uma nova ferramenta.*

Matheus: *Por quê?*

Fabício: *Aí não vamos ter o trabalho de fazer mais outra iteração, ele já vai fazer duas de uma vez.*

A estratégia adota simplificaria o trabalho de aplicar a ferramenta para uma próxima iteração. Porém, a nova ferramenta não foi criada com sucesso, os polígonos que deveriam ser gerados na quarta iteração foram gerados “sem área”, ou seja, apenas as arestas apareceram. A aplicação da segunda nova ferramenta é vista na Figura 89.

Figura 89 - Erro na aplicação da segunda nova ferramenta - Tapete de Sierpinski - Fabício e Matheus (1ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa

Sem sucesso com a criação das novas ferramentas a dupla decidiu reiniciar toda a construção em um novo arquivo. A seguir, descrevo o novo processo de construção destacando as habilidades do Pensamento Computacional que emergiram.

O método inicial para gerar o quadrado central da primeira iteração foi o mesmo, usando o ponto de intersecção das diagonais e o comando “*Ponto[<Objeto>,<Parâmetro>]*” do software. O **pensamento algorítmico** se fez presente no momento de uso do comando, visto que a dupla precisou programar uma “instrução” indicando como e onde os pontos deveriam ser criados, definindo uma sequência de instruções necessárias para a construção e resolução do problema (TERZIDIS, 2006). O comando utilizado na criação de um dos pontos é apresentado na Figura 90.

Figura 90 - Programação do ponto - Tapate de Sierpinski - Fabício e Matheus (2ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa

A partir dos pontos, o quadrado central da primeira iteração foi gerado. A **decomposição e generalização** se evidenciaram na decisão da dupla de colorir o quadrado central para não ser necessário criar novos oito quadrados, diminuindo a complexidade (QUEIROZ, 2017) e

otimizando a construção. O aspecto **Padrões e abstração** também pôde ser notado, a dupla aplicou uma estratégia já conhecida e avaliada como correta, dando sentido as suas conclusões (VALE et al., 2007). Nessa segunda construção, a dupla não utilizou a cor branca nos novos quadrados, eles escolheram a cor azul para representar os quadrados que estavam sendo retirados.

A nova ferramenta foi criada e surgiu a decisão sobre quais pontos ela deveria ser aplicada. Fabrício disse: *“Aplica desse ponto pra esse, agora dentro desse, não faz outro. Dá um zoom e tenta fazer agora do ponto T para o ponto S. Ai, está dando.”*. A Figura 91 apresenta o experimento que a dupla fez na aplicação da nova ferramenta e emergiu a **representação e automação** e a **avaliação**, automatizando o pensamento e analisando o resultado (VIEIRA, 2018; SELBY; WOOLLARD, 2014).

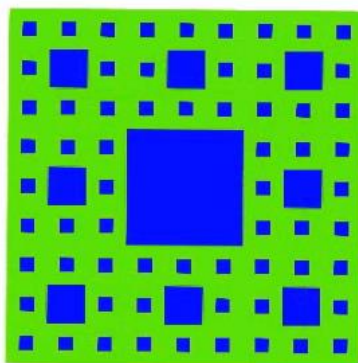
Figura 91 - Testando a nova ferramenta - Tapete de Sierpinski - Fabrício e Matheus



Fonte: Dados da Pesquisa

O **pensamento algorítmico** surgiu novamente, quando a dupla tentou criar, como na 1ª tentativa de construção, uma nova ferramenta a partir da segunda iteração do fractal. Novamente, a ferramenta quando aplicada não atuou como esperado e Fabrício propôs: *“Vamos fazer um por um, um por um, assim não teremos problema. Podemos ficar fazendo infinitas vezes”*. Eles aplicaram a ferramenta até gerar a terceira iteração do Tapete de Sierpinski apresentado na Figura 92.

Figura 92 - Construção concluída - Tapete de Sierpinski - Fabrício e Matheus (2ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa

O arquivo *.ggb* e o *GIF* da construção de Fabrício e Matheus podem ser acessados através do QRCode a seguir (Figura 93) ou através do link (<https://goo.gl/c2ko36>).

Figura 93 - QRCode que dá acesso ao arquivo *.ggb* e ao *GIF*, criados por Fabrício e Matheus na terceira atividade.



Fonte: Gerado a partir de <https://br.qr-code-generator.com/>

A partir do momento que Fabrício e Matheus iniciaram a segunda tentativa de construção, eles levaram 21 minutos para concluí-la, até a terceira iteração, juntamente com a criação do *GIF*. Esses 21 minutos de manipulação no software se transformaram no diagrama apresentado na Figura 53, que destaca os aspectos do PC que emergiram a cada minuto.

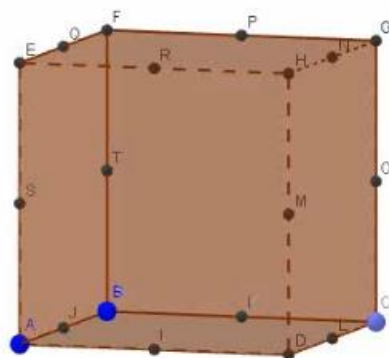
A seguir, as habilidades do Pensamento Computacional que se manifestaram na Atividade 4 são destacadas.

5.4 Habilidades do Pensamento Computacional que se manifestaram na Atividade 4 - Esponja de Menger

Relembro, que a quarta e última atividade das sessões de ensino teve como objetivo investigar, explorar e construir a Esponja de Menger, além de gerar um *GIF* de tal construção. A primeira dupla a realizar a atividade foi Luana e Marcelo, eles responderam rapidamente as questões iniciais da atividade e partiram para a construção do fractal. Iniciaram um novo arquivo no software, abriram a Janela de Visualização 3D, retiraram os eixos e o plano.

Para a criação do cubo inicial selecionaram a ferramenta “*Cubo*” e a aplicaram, porém nada foi criado. Marcelo voltou ao ícone da ferramenta e “parou o mouse” sobre tal, percebeu que como ainda não havia pontos na construção, a ferramenta deveria ser aplicada sobre algum plano para que os pontos (vértices) fossem gerados, pois a ferramenta indicava “*Clique em um plano (opcional) e, então, em 2 pontos*”. Após a construção do cubo Luana disse: “*Agora temos que colocar os pontos médios e fazer a homotetia*”, essa estratégia foi a mesma utilizada na construção do Tapete Sierpinski. O ponto médio de cada uma das arestas foi criado. A Figura 96 apresenta a construção descrita.

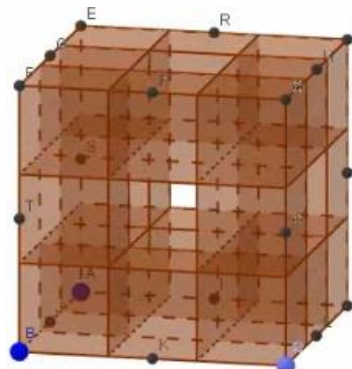
Figura 96 - Construção inicial - Esponja de Menger - Luana e Marcelo (1ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa

Após a criação dos pontos médio, o comando “*Homotetia[<Objeto>,<Razão>,<Centro>]*” foi programado e aplicado oito vezes com o objetivo de gerar os cubos da segunda iteração do fractal. O resultado de tais ações é mostrado na Figura 97.

Figura 97 - Primeira iteração - Esponja de Menger - Luana e Marcelo (1ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa

Ao construir os cubos que fazem parte da primeira iteração do fractal Luana indagou:

Luana: *Mais uma?*

Marcelo: *Mais uma o que?*

Luana: *Ué, mais uma iteração*

Marcelo: *Ah sim!*

Luana: *Não dá para criar a ferramenta?*

Marcelo: *Pra isso a gente precisaria das intersecções.*

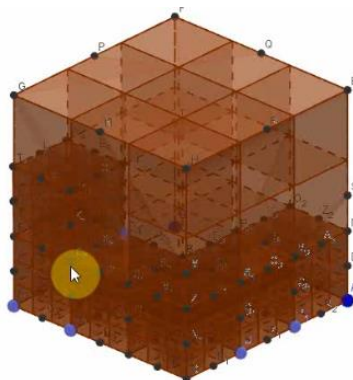
Marcelo tentou criar os pontos de intersecção entre os cubos, porém os pontos não foram gerados quando a ferramenta “*Intersecção de Dois Objetos*” foi aplicada. Mesmo sem os pontos, todos os objetos da primeira iteração do fractal foram selecionados e uma nova ferramenta nomeada “*Esponja*” criada. Como já antecipado, não havia pontos para que a nova ferramenta fosse aplicada, ou seja, sua construção não fazia sentido. Marcelo propôs de concluírem a construção apenas com uma iteração, mas Luana discordou.

Luana: *Não custa nada fazer mais uma.*

Marcelo: *Eu já não estou conseguindo mexer, está travando tudo.*

Uma tentativa de aplicação da ferramenta foi realizada, mesmo sem os pontos destacados Marcelo resolveu fazer por meio de experimentações. A Figura 98 apresenta um momento após o uso da ferramenta “*Esponja*”.

Figura 98 - Aplicação da nova ferramenta - Esponja de Menger - Luana e Marcelo (1ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa

Durante a aplicação da ferramenta, Marcelo expressou: “*Estou sentindo que [o GeoGebra] não vai aguentar.*”. A construção já começava a mostrar indícios de estar “pesada” e a movimentação da Janela de Visualização 3D era realizada lentamente. Após mais aplicações da nova ferramenta o software parou de funcionar e a dupla decidiu começar uma nova construção. Iniciaram da mesma maneira da tentativa anterior, criaram um cubo e o ponto médio de cada aresta, **representando e automatizando** o início da construção da Esponja de Menger por meio de processos mecânicos já aplicados na primeira tentativa de construção (LINN, 2010).

O **pensamento algorítmico** manifestou-se na decisão de utilizar o comando “*Homotetia[<Objeto>,<Razão>,<Centro>]*”, uma sequência finita de instruções corretas deveriam ser programadas para que se tivesse êxito na transformação (TERZIDIS, 2006). Como tal estratégia já havia sido utilizada em construções anteriores e se detectou uma regularidade na forma de construção, o aspecto **padrões e abstração** se fez presente (VALE, et al. 2007).

Luana: *Vamos fazer de novo por homotetia.*

Marcelo: *Sim.*

Luana: *Qual é a razão mesmo?*

Marcelo: *1/3*

Luana: *1/3? Aaaah, é mesmo!*

Marcelo: *Eu tinha testado 1/27 porque teriam 27 cubinhos aqui, mas eu acho que ele reduz em relação ao lado e não ao volume.*

Marcelo tem razão em sua afirmação, a homotetia toma como cálculo para a razão o comprimento da aresta do cubo e não seu volume, tal conclusão caracterizou a **decomposição e generalização**, pois ele pensou no produto a partir da junção de seus elementos (COSTA, 2016). A discussão sobre o volume continuou:

Luana: *Mas esse pequeno [cubo da primeira iteração] não é 1/3 do volume desse [cubo inicial]?*

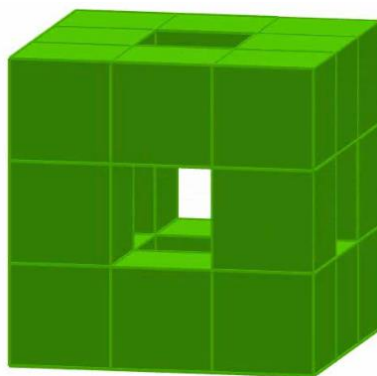
Marcelo: *Não! Cabem 27 cubinhos aqui dentro.*

Luana: *Aah, beleza!*

Após a criação de todos os cubos que faziam parte da primeira iteração do fractal a dupla resolveu não arriscar uma próxima. As propriedades como cor e tamanho das arestas dos cubos foram alteradas. A dupla utilizou a movimentação da Janela de Visualização 3D para **avaliar** se a construção estava correta e se não falta nenhum cubo a ser gerado. O controle deslizante foi construído e os objetos condicionados.

A construção final da primeira iteração da Esponja de Menger é mostrada na Figura 99.

Figura 99 - Construção concluída - Esponja de Menger - Luana e Marcelo



Fonte: Dados da Pesquisa

O arquivo *.ggb* e o *GIF* da construção de Luana e Marcelo podem ser acessados através do QRCode abaixo (Figura 100) ou através do link (<https://goo.gl/GztAkg>).

Figura 100 - QRCode que dá acesso ao arquivo *.ggb* e ao *GIF*, criados por Luana e Marcelo na quarta atividade.



Fonte: Gerado a partir de <https://br.qr-code-generator.com/>

A partir do momento que Luana e Marcelo iniciaram a segunda tentativa de construção, eles levaram 14 minutos para concluí-la, até a primeira iteração, juntamente com a criação do *GIF*. Esses 14 minutos de manipulação no software se transformaram no diagrama apresentado na Figura 101, que destaca os aspectos do PC que emergiram a cada minuto. Como a dupla

optou por fazer apenas uma iteração, na segunda tentativa, não houve a criação de uma nova ferramenta.

Figura 101 - Aspectos do PC que emergiram da construção da Esponja de Menger - Luana e Marcelo (2ª tentativa)

[illegible]

Fonte: Elaborado pela Autora

Vale ressaltar que no diagrama não se identifica a construção da nova ferramenta, como em todos os diagramas das outras sessões de ensino realizadas pela dupla. Tal fato se dá pois nessa construção a ferramenta não foi criada. Como já destacado, a dupla optou por construir o fractal até sua primeira iteração. Uma observação foi feita: “*A gente sabe utilizar a ferramenta, só não é possível [risos]*”.

Observa-se, que a **decomposição e generalização**, além da **representação e automação**, foi a única habilidade que emergiu da metade para o fim da construção do fractal, isso se dá através das seguintes observações:

Marcelo: *Eu pensei no cubo mágico para pensar em quantos quadrados tinham, quantos cubos tinham aliás. Você já desmontou um cubo mágico?*

Luana: *Não, nunca.*

Marcelo: *Eu já! A única coisa que fica é o centro, que é exatamente o que não tem aí* [risos].

Ao relacionar o cubo mágico com a Esponja de Menger, Marcelo utilizou situações anteriores resolvidas para lidar com uma nova.

Ao **avaliarem** a construção realizada, eles concordaram que estava correta, mas não se sentiram felizes com o resultado final, um sentimento descontente foi expressado: “*Que vergonha, vamos criar um controle para mostrar só uma iteração*”. Eu como pesquisadora tentei aliviar o sentimento de vergonha e perguntei:

Lara: *Quantos cubinhos vão ter na segunda iteração?*

Marcelo: *20 vezes 20, 400 cubinhos*

Lara: *E uma terceira?*

Marcelo: *8000.*

Argumentei que são muitos “cubinhos” e o GeoGebra não aguentaria se todos fossem criados com seus respectivos elementos (pontos e segmentos). Apontei que os procedimentos adotados pela dupla foram ótimos, compreenderam e utilizaram o comando homotetia, que as vezes as pessoas não conhecem.

A segunda dupla a realizar a quarta e última atividade foi Fabrício e Matheus. Ao verem a Esponja de Menger se espantaram:

Fabrício: *Ah, socorro!*

Matheus: *Meu Deus, é o tapete em 3D.*

Para responder as primeiras questões propostas na atividade, a dupla explorou a construção pronta apresentada. Giraram por diversas vezes a Janela de Visualização 3D e movimentaram o controle deslizante. Responderam de forma correta como o fractal é gerado e calcularam sua dimensão. Seguindo para a construção do fractal iniciaram a 1ª tentativa com a construção de um cubo utilizando a ferramenta “Cubo”. Analisaram como os cubos da primeira iteração poderiam ser gerados e concluíram que uma estratégia seria aplicar a transformação de homotetia.

Fabrício: *Homotetia, vamos usar homotetia. O objeto será o cubo a. Quanto será a razão? Por quanto ele divide?*

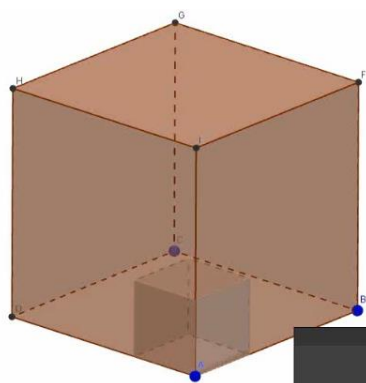
Matheus: *Um sobre três.*

Fabrício: *Espera, pelo lado? É mesmo?*

Matheus: *Isso! E o centro vamos testar o ponto A.*

A Figura 102 apresenta o início da construção e uso da transformação homotetia no ponto A mencionado no diálogo.

Figura 102 - Início da construção - Esponja de Menger - Fabrício e Matheus



Fonte: Dados da Pesquisa

A dupla continuou aplicando o comando homotetia em relação aos demais vértices do cubo, Matheus disse: “*A gente precisa do ponto médio também, para fazer o centro.*”. Os pontos médios são criados e a homotetia continua sendo aplicada. A criação de uma nova ferramenta foi discutida:

Fabício: *Tem como a gente criar uma ferramenta?*

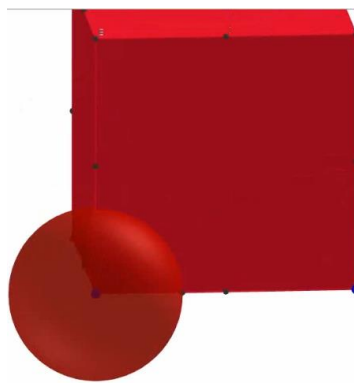
Matheus: *Ué, tem! Selecciona os objetos.*

Fabício: *Será que vai?* [seleccionando os cubos da primeira iteração]

Matheus: *Os pontos também. Só os segmentos que acho que não precisa.*

A partir dos objetos que foram seleccionados uma nova ferramenta nomeada “*CUBO1*” foi criada, sua aplicação discutida e Matheus indagou: “*Nós precisamos do ponto médio, do médio, do ponto médio? E se aplicarmos uma homotetia de 1/9? Só que ai vai criar muitos, muitos, muitos, muitos polígonos.*”. Fabício experimentou algumas programações no comando homotetia, mas sem sucesso. Continuaram refletindo sobre como criar os vértices dos cubos menores gerados pela transformação de homotetia. Foram criadas esferas de raio $1/3$ e suas intersecções com as arestas foram destacadas (Figura 103).

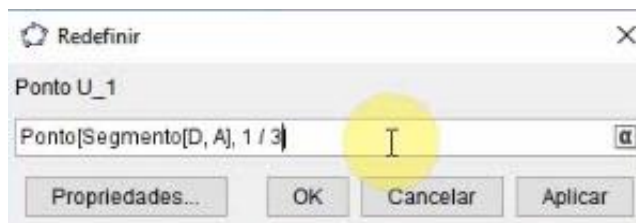
Figura 103 - Criação de esfera destacando os pontos de intersecção - Esponja de Menger - Fabício e Matheus (1ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa

A ferramenta “*CUBO1*” foi testada e avaliada como correta. Fabício arriscou uma outra estratégia para criar os pontos, diferente da criação de esferas, o comando “*Ponto[<Segmento[<Ponto>,<Ponto>]>,<Parâmetro>]*” foi testado e programado como na Figura 104.

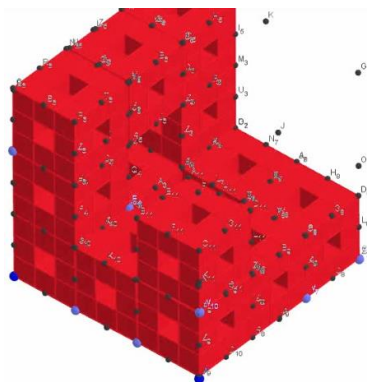
Figura 104 - Aplicação do comando Ponto - Esponja de Menger - Fabrício e Matheus (1ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa

Os pontos foram gerados e a nova ferramenta aplicada, produzindo a Figura 105.

Figura 105 - Aplicação da ferramenta "CUBO1" - Esponja de Menger - Fabrício e Matheus (1ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa

Ao chegar na construção apresentada na figura acima o software começou a apresentar lentidão, não permitindo mais aplicações da ferramenta e acabou fechando sozinho. A dupla decidiu começar tudo de novo e Fabrício brincou: “*Poderia ser igual ao Chrome⁴⁵ e restaurar a página [risos].*” Iniciaram mais duas novas construções adotando as mesmas estratégias anteriores, mas também sem sucesso, pois o software parou de funcionar novamente em ambas. Na quarta tentativa de construção a dupla insistiu na tentativa de construir duas iterações do fractal. Tal construção é descrita a seguir e os aspectos do Pensamento Computacional que emergiram são destacados.

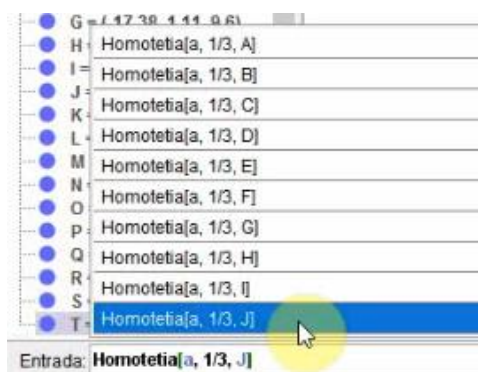
Na quarta tentativa de construção da Esponja de Menger, Fabrício e Matheus iniciou o processo com a construção de um cubo, e aplicação do comando “*Homotetia[<Objeto>, <Razão>, <Centro>]*” no cubo em relação aos seus vértices e razão 1/3. Tal procedimento já havia sido realizado nas demais tentativas, o que caracterizou a presença da habilidade **padrões e abstração**, uma vez que interpretaram o comando e o julgaram adequado na construção do fractal em todas iniciativas de construção, concentrando-se em

⁴⁵Navegador de internet.

conceitos relevantes para a compreensão e solução da construção (GROVER; PEA, 2013). Ao programar o comando homotetia, a dupla desenvolveu o **pensamento algorítmico**, os momentos de decisão quanto aos objetos, razão e centros definiu uma sequência de instruções necessárias para realização da construção (TERZIDIS, 2006).

O ponto médio respectivo de cada aresta foi criado e a homotetia aplicada em relação a eles, as habilidades **representação e automação** e **decomposição e generalização** se fizeram presentes também nos momentos da programação da transformação. A dupla adotou a estratégia de utilizar a “setinha” do teclado para facilitar a digitação, aplicando efetivamente meios computacionais para agilizar e repetir processos mecânicos (LINN, 2010; VIEIRA, 2018). Tal ação é apresentada na Figura 106.

Figura 106 - Uso da seta do teclado na digitação do comando - Esponja de Menger - Fabrício e Matheus (4ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa

O uso da seta do teclado apontou todos os comandos que haviam sido digitados no campo de entrada do software. Assim, bastava alterar o ponto que indicaria o centro da homotetia.

A cor dos objetos foi alterada e um novo ponto, que se localizava a um terço de uma das arestas criado:

Matheus: *Agora a gente faz a esfera.*

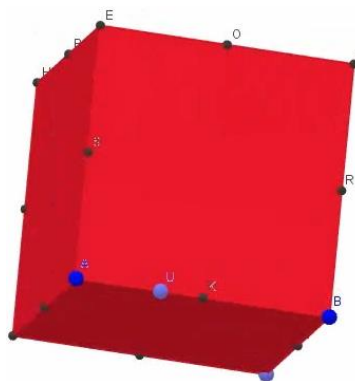
Fabrício: *Não, não precisa de esfera.*

Matheus: *É verdade. Vamos usar ponto.*

Fabrício: *Coloca em ponto, objeto e parâmetro.* [comando descrito na Figura 104].

A Figura 107 mostra o ponto U criado a partir da programação do comando.

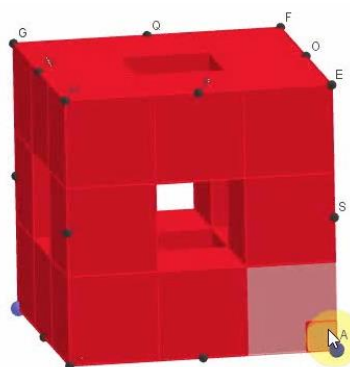
Figura 107 - Criação do ponto U - Esponja de Menger - Fabrício e Matheus - (4ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa

Fabrício acreditou que apenas com esse ponto, após a ferramenta ser gerada, seria possível criar a segunda iteração do fractal: “*Eu acho que a partir disso já vai dar para criar todos.*”. A nova ferramenta, cujos objetos iniciais foram os pontos A e B e os finais todos os cubos gerados a partir da homotetia e todos os pontos da construção, foi criada. A dupla aplicou a ferramenta criada e a **avaliaram** como correta. A partir desse momento se iniciou uma saga de 35 minutos na aplicação da nova ferramenta, buscando criar os cubos da segunda iteração. Estratégias foram testadas durante o processo, como a criação de esferas, já apresentada na Figura 103, aplicação nos pontos a cada novos cubos da segunda iteração, como apreseto na Figura 105 e o comando homotetia aplicado nos cubos da primeira iteração, cujo resultado é apresentado na Figura 108 abaixo.

Figura 108 - Homotetia em relação ao cubo da primeira iteração - Esponja de Menger - Fabrício e Matheus (4ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa

A dupla percebeu que para utilizar tal estratégia eles precisariam criar vários outros pontos que não estavam na construção e avaliaram como inviável. Como o software não suportou a construção do fractal até sua segunda iteração, a dupla decidiu encerrar a atividade com apenas uma iteração da Esponja de Menger e gerar o *GIF*. O arquivo *.ggb* e o *GIF* da

Nesse diagrama, a coluna que está em vermelho representa 35 minutos, esse foi o tempo que a dupla tentou construir a segunda iteração, porém desistiram, devido ao comportamento lento do software, e voltaram toda a construção.

Observa-se que a **representação e automação** emergiu durante toda a atividade, a dupla utilizou estratégias durante a construção que foram favorecidas pelo uso do GeoGebra. A **avaliação** se deu nos momentos da tentativa da segunda iteração e ao final da construção, em que o objetivo esteve centrado na programação da exibição dos objetos e criação do *GIF*.

O aspecto **padrões e abstração** emergiu no início e no fim dessa quarta tentativa de construção e a **decomposição e generalização** em momentos distintos do início a sua conclusão.

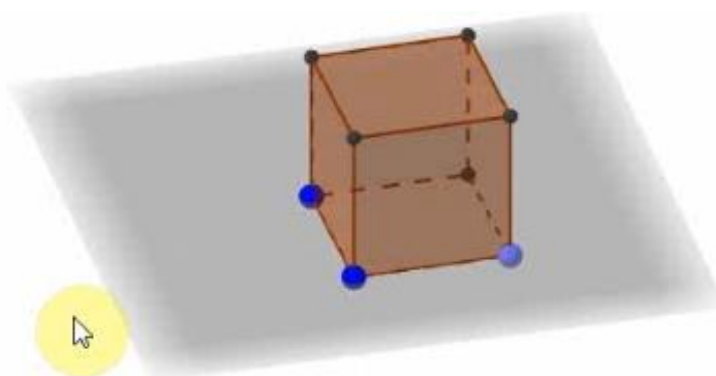
Para encerrar as sessões do experimento de ensino, a dupla Blenda e Gabriel realizou a quarta e última atividade. Descreveram a construção da Esponja de Menger e calcularam sua dimensão de forma correta. Ao iniciarem um novo arquivo no software GeoGebra, abriram a Janela de Visualização 3D e criaram um cubo utilizando a ferramenta “*Cubo*”. Blenda alertou:

Blenda: *Lembra de deixar reto. Lembra daquele outro?* [se referindo ao Tetraedro de Sierpinski]

Gabriel: *Aah, esse já está reto, coloquei no plano, acho que não vai ficar torto não.*

O cubo criado pode ser visto na Figura 111.

Figura 111 - Construção inicial - Esponja de Menger - Blenda e Gabriel (1ª tentativa)

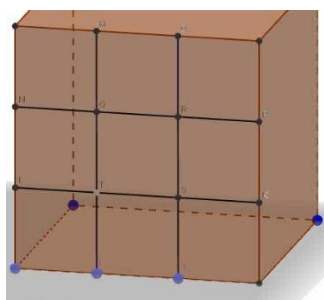


Fonte: Dados da Pesquisa

A decisão de criar o cubo com uma de suas faces no plano, fez com que a dupla tivesse uma referência de onde estava a base do poliedro. Continuando a construção, decidiram que as arestas deveriam ser divididas em três segmentos de mesmo comprimento. Gabriel disse: “*Estou pensando em uma maneira eficiente de fazermos isso. Mas podemos fazer igual da última vez, com circunferências, mas nesse caso serão esferas.*”

As esferas com centro nos os vértices do cubo e raio $1/3$ do comprimento da aresta foram criadas e os pontos de intersecção das esferas com as arestas foram construídos. Quatro novos segmentos, ligando os pontos das intersecções, foram traçados dividindo uma das faces do poliedro em nove quadrados (Figura 112).

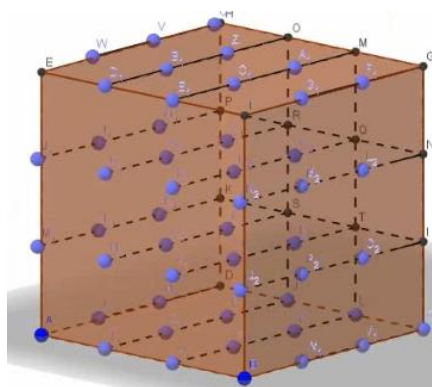
Figura 112 - Divisão de uma face em nove quadrados - Esponja de Menger - Blenda e Gabriel (1ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa

Para criar os outros pontos no interior do cubo, a dupla decidiu criar segmentos com comprimento fixo de $1/3$ da aresta, gerando a construção apresentada na Figura 113.

Figura 113 - Criação de segmentos com comprimento fixo - Esponja de Menger - Blenda e Gabriel (1ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa

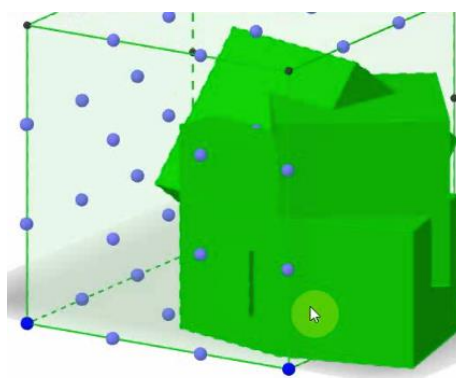
Blenda indagou: “Agora a gente faz os polígonos [querendo dizer poliedro] a partir dos pontos?” e Gabriel confirmou que sim. Durante a criação dos cubos da primeira iteração, a dupla percebeu que alguns poliedros estavam sendo construídos em locais não desejados, deixando o fractal torto. Os cubos menores foram movimentados e colocados “manualmente”, a partir do arraste dos pontos, nos locais julgados corretos. A cor dos poliedros foi alterada e antes da criação da nova ferramenta Blenda questionou:

Blenda: *Por que eles têm tamanhos diversos?* [Valor destacado na Janela de Álgebra]?

Gabriel: *Eita, deve porque tem esse negócio dele ficar torto.*

Gabriel tinha razão, os valores serem distintos significava que os volumes eram diferentes, ou seja, os cubos criados não possuíam o mesmo tamanho de aresta. A dupla ignorou tal fato e partiu para a criação da nova ferramenta. Escolheram como objetos iniciais os pontos A e B e como objetos finais os cubos da primeira iteração. Criaram um controle deslizante e condicionaram os objetos das iterações zero e um. A nova ferramenta foi aplicada e a dupla se espantou com o resultado, apresentado na Figura 114.

Figura 114 - Erro na aplicação da nova ferramenta - Esponja de Menger - Blenda e Gabriel (1ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa

Gabriel disse: “*Nossa senhora, o que aconteceu? Estou triste! Deixa eu testar em outros pontos.*” Eles perceberam que a ordem de escolha dos pontos importava, ou seja, aplicar a ferramenta de um ponto X para um Y é diferente de aplicar do ponto Y para o X. Ao verificarem qual seria a ordem correta de aplicação nos pontos, a nova ferramenta foi utilizada diversas vezes com o objetivo de gerar a segunda iteração da Esponja de Menger. Ao finalizarem a aplicação, movimentaram o cubo e notaram a falta de um cubinho na segunda iteração.

Gabriel: *O que é aquilo ali?*

Blenda: *O que?*

Gabriel: *Está faltando um cubo ali.*

Blenda: *Onde?*

Gabriel: *Ali, olha!* [risos]

Blenda: *Aaah, o que está acontecendo?* [risos]

A dupla percebeu que no momento de criar a nova ferramenta ficou faltando um cubo na seleção dos objetos finais. Na tentativa de voltar a construção utilizando o “*Ctrl+Z*” o GeoGebra parou de funcionar. A decisão de fazer uma nova construção foi tomada e é descrita a seguir. Destaco alguns momentos em que os aspectos do Pensamento Computacional emergiram na segunda tentativa de construção do fractal.

Na segunda tentativa de construção, as estratégias iniciais de criação do cubo, esferas de centro nos vértices e raio $1/3$ da aresta, divisão de uma das faces em nove quadrados, seguido

da criação dos segmentos de comprimento $\frac{1}{3}$ da aresta foram mantidas e repetidas, caracterizando as habilidades de **representação e automação** e **padrões e abstração**, também presentes na fala de Gabriel: “*Tá, agora é o mesmo esquema, na verdade é tudo o mesmo esquema, tudo a gente já fez. Exceto o cubo que esquecemos [risos]*” que realçou processos de construções já realizados, desenvolvendo o processo de pensamento e concentrando-se em conceitos relevantes para a construção do fractal (GROVER; PEA, 2013; VIEIRA, 2018).

A dupla analisou como os pontos no interior do cubo poderiam ser criados de forma que ficassem fixos. A criação de retas paralelas as arestas do cubo passando pelos pontos criados em uma das faces (Figura 112) foi apresentada como alternativa, assim como a criação de esferas, desenvolvendo o **pensamento algorítmico** na decisão de qual seria a forma mais eficaz e eficiente de resolver o problema (SOUSA; LENCASTRE, 2014). Todos os cubos da primeira iteração do fractal foram criados e os pontos deixados de exibir. A dupla justificou a escolha de não exibir os pontos com o fato de que a nova ferramenta seria aplicada apenas uma vez, ou seja, não haveria uma terceira iteração, logo os pontos não precisariam ser gerados, **decompondo e generalizando** o processo de criação de novas ferramentas, uma vez que a complexidade do que seria criado e analisado diminuiria (QUEIROZ, 2017).

A nova ferramenta foi criada, sendo os objetos iniciais os pontos A e B e os objetos finais todos os cubos da primeira iteração, sem esquecer nenhum dessa vez. Gabriel se assegurou de que todos os cubos tinham sido selecionados: “*É pra ser vinte, tem vinte aqui e é para continuar tendo 20.*”

Os pontos voltaram a ser exibidos e a exibição dos cubos das iterações zero e um foram condicionadas. Ao aplicar a nova ferramenta, observaram novamente o erro na construção justificado pela ordem de escolha dos pontos e **avaliaram** como incorreta sua primeira execução. Trocaram a ordem de aplicação dos pontos e a construção foi avaliada como correta, reconhecendo e analisando os resultados a partir da utilização da nova ferramenta (L’HEUREUX et al., 2012). A nova ferramenta foi aplicada até que todos os cubos da segunda iteração da Esponja de Menger fossem criados. A dupla se sentiu aliviada quando perceberam que todos os cubos foram criados de forma correta e que o software não travou.

Gabriel: *Ai, é o último. Acabou!*

Blenda: *Ai, que alívio. Meu coração!*

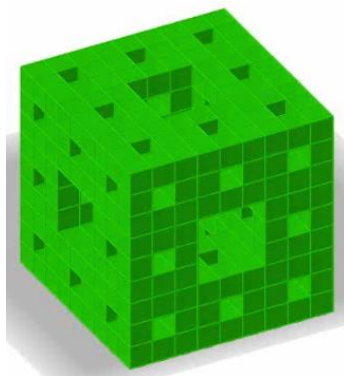
Gabriel: *Ótimo, o GeoGebra não crachou [termo utilizado como sinônimo de travou] e está um pouco mais leve do que a última vez.*

A cor dos cubos foi alterada e os objetos condicionados de acordo com sua iteração. A construção realizada apresentou duas iterações do fractal. Porém, Blenda e Gabriel configuraram o controle deslizante de modo que uma terceira iteração existisse. Tal estratégia

já havia sido utilizada na sessão anterior e fez emergir a **decomposição e generalização**. A dupla justificou tal procedimento pensando em **avaliar** se a condição havia sido programada em todos os cubos de forma correta.

Após condicionar os cubos, todos os pontos da construção foram escondidos e a construção final do fractal pode ser vista na Figura 115.

Figura 115 - Construção final - Esponja de Menger - Blenda e Gabriel (2ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa

Blenda e Gabriel construíram duas iterações do fractal e o arquivo *.ggb* e o *GIF* da construção podem ser acessados através do QRCode abaixo (Figura 116) ou através do link (<https://goo.gl/9S4Spj>).

Figura 116 - QRCode que dá acesso ao arquivo *.ggb* e ao *GIF*, criados por Blenda e Gabriel na quarta atividade.



Fonte: Gerado a partir de <https://br.qr-code-generator.com/>

A partir do momento que Blenda e Gabriel iniciaram a segunda tentativa de construção, eles levaram 28 minutos para concluí-la, até a segunda iteração, juntamente com a criação do *GIF*. Esses 28 minutos de manipulação no software se transformaram no diagrama apresentado na Figura 117, que destaca os aspectos do PC que emergiram a cada minuto.

Corroboro a ideia de Fedalto (2006) que argumenta

[...] a calculadora pode ser utilizada em todas as situações de sala de aula, mas de modo particular naquelas que envolvam problemas de investigação que possibilitem a discussão, a análise, a generalização. Fazer isso implica em estar confrontando crenças básicas, desarticulando estabilidades associadas às concepções dos professores (reforçadas em sua formação inicial), uma vez que as aulas de matemática são excessivamente centradas na memorização de regras, uso de fórmulas e cálculos que pouco contribuem para a compreensão do que está sendo ensinado (FEDALTO, 2006, p. 135).

Em relação ao tempo de execução da primeira atividade, todas as duplas fizeram praticamente o mesmo, entre 21 e 22 minutos. O que diferencia é que Luana e Marcelo fizeram quatro iterações do triângulo, já as outras duplas foram até a terceira. Essa dupla também se distinguiu no momento da criação dos pontos médios. Diferente de seus colegas, que utilizaram a ferramenta geométrica do GeoGebra para construir tais pontos, eles optaram por utilizar o campo “*Entrada*” e construir os pontos algebricamente.

Na segunda atividade o tempo de construção variou entre 23 minutos e 34 minutos e de modo geral as duplas utilizaram a mesma estratégia na criação dos pontos médios utilizada na sessão de ensino anterior. A construção final de Blenda e Gabriel não ficou totalmente correta, o fractal ficou levemente torto. Já a dupla Luana e Marcelo foi a única que fez quatro iterações do fractal, se diferenciando dos demais.

A terceira atividade apresentou um desafio maior para as duplas, o fato de ser necessário dividir os lados do quadrado em três partes igual fez que estratégias diferentes fossem adotadas. Luana e Marcelo utilizaram o comando “*Homotetia*” para gerar outras iterações do Tapete de Sierpinski, não precisando se preocupar com a divisão dos lados. Já Blenda e Gabriel optaram por criar circunferências de raio $\frac{1}{3}$ da aresta e então os segmentos que ligavam esses pontos e posteriormente oito novos quadrados que representaram a primeira iteração do fractal. Fabrício e Matheus aplicaram o comando “*Ponto[<Objeto>, <Parâmetro>]*” para criar pontos centrais que seriam as arestas de um novo quadrado criado no centro. Eles optaram por criar os quadrados que deveriam ser retirados da construção, com essa escolha coloriram tais quadrados centrais.

Na quarta e última atividade seu tempo de execução variou bastante entre as duplas, se comparada as sessões anteriores, entre 14 minutos e 45 minutos. A dificuldade sentida nessa atividade teve influência da capacidade de criação de muitos objetos do software GeoGebra. Todas as duplas tentaram criar duas iterações do fractal, porém a única que teve sucesso foi Blenda e Gabriel. A estratégia de criar a nova ferramenta sem a geração de novos pontos deixou a programação mais leve e menos objetos foram criados.

Nota-se que a presença do **pensamento algorítmico** prevaleceu nos momentos de criação de ferramenta e/ou do controle deslizante, e que a **decomposição e generalização** emergiu em momentos bem distintos em cada dupla. O aspecto **padrão e abstração** surge com maior incidência após a criação da nova ferramenta e do controle deslizante e a habilidade **avaliação** fica evidente no encerramento da construção das duplas, momento em que o *GIF* é gerado e avaliado. A **representação e automação** se faz presente durante toda a criação do fractal, uma vez que o software GeoGebra potencializa tal habilidade.

Assim como Gadanidis (2017), acredito na integração entre o PC e a Matemática, no caso deste estudo, entre a Geometria Fractal. Os cinco aspectos que emergiram durante a construção dos fractais oferecem ferramentas que potencializam o estudo desses objetos e de forma geral o ensino de Matemática. Considerando as atividades propostas nas sessões de ensino, que visavam contribuir para a manifestação dos aspectos do PC, a apreciação final não foi considerando se as duplas aprenderam ou não a programar, mas no nível de consciência que eles tiveram sobre as ferramentas computacionais do software Geogebra e como isso se manifestou nas diversas atividades que realizaram (VALENTE, 2016).

Na primeira e segunda atividade, nas respostas das duplas em relação as questões finais dos roteiros, que indagavam quais conceitos matemáticos foram importantes na obtenção do fractal e quais poderiam ser explorados a partir de sua construção, a menção ao ponto médio de um segmento, em sua construção, foi unânime e temas como congruência, proporcionalidade, função exponencial, área, perímetro, volume e fração foram citados como conteúdos matemáticos que poderiam ser explorados. Já na terceira e quarta atividade foram mencionados temas como proporção, propriedades de circunferências, esferas e diagonais, conceitos da Geometria Analítica e de transformações no plano e espaço, como a homotetia.

A seguir, apresento uma síntese deste estudo e reflito sobre suas conclusões, bem como, sobre a realização de estudos futuros.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo se iniciou com o intuito de identificar aspectos do Pensamento Computacional que emergiam durante a construção de fractais. A opção metodológica adotada foi o desenvolvimento de experimentos de ensino (STEFFE; THOMPSON, 2000), nos quais participaram estudantes do primeiro ano da graduação em Matemática. Durante as sessões de ensino os sujeitos exploraram atividades que envolviam a Geometria Fractal utilizando o software GeoGebra. Nesse contexto, a pergunta que guiou este estudo foi: “*Quais aspectos do Pensamento Computacional emergem de estudantes de graduação em Matemática ao explorarem a Geometria Fractal com o software GeoGebra?*”. A dissertação se inicia com uma introdução em que justifico tal estudo e apresento os objetivos da pesquisa.

O cerne desta pesquisa esteve centrado no conceito de fractais e nas habilidades do PC. Sendo assim, discuti sobre as definições de fractais, me baseando nas ideias de Barros (2017); Bessa Junior (2011); Baldovinotti (2011); Guzmán et al. (1993); Mandelbrot (1977); Sabogal, Arenas (2011); Barbosa (2005); Stewart (1996); Ricineri (1990); Faria (2012); Shamsgovara (2012) e Moura (2011). Segundo tais autores o termo fractal foi criado por Benoit Mandelbrot em 1975, que começou sua investigação nessa Geometria em 1960. Não existe, na literatura, uma definição matemática formal do que seja um fractal. Porém, tais estudos identificam a presença da auto semelhança, da complexidade infinita e da dimensão diferente da dimensão topológica e euclidiana nesses objetos. O estudo dos fractais se intensificou com a chegada do computador, em que se pode ter uma ideia real das figuras que eram geradas a partir da aplicação de funções iterativas e funções complexas.

Além do conceito de fractais, me baseei neste estudo, nas ideias de Wing (2006, 2008, 2011); Lu e Fletcher (2009); ISTE/CSTA (2011); Barr e Stephenson (2011); Gadaniadis (2017), Mannila et al. (2014); Brennan e Resnick (2012) e da The Royal Society (2012) relacionadas ao Pensamento Computacional. Segundo tais autores, o termo PC foi criado por Jeannette M. Wing em 2006 e não existe uma definição consensual para tal. Porém, fica evidente a presença de diferentes aspectos nas definições apresentadas, que nesta pesquisa se convergiram em cinco habilidades: pensamento algorítmico; decomposição e generalização; padrões e abstração; representação e automação; e avaliação. Nessa perspectiva, defino cada um desses aspectos e apresento indícios nas falas dos sujeitos nos dados produzidos que os caracterizam.

A exploração e experimentação-com-GeoGebra (MAZZI, 2014) foi utilizada neste estudo. Devido sua popularidade, facilidade de acesso e possibilidade de exploração nas janelas de visualização 2D e 3D o software foi escolhido para produção dos dados. Ainda na produção,

foram utilizadas filmagens das sessões de ensino, capturas de tela do computador, roteiro de atividades escritas, entrevistas (breves) ao final de cada sessão a fim de esclarecer dúvidas e anotações em diário de campo. A triangulação (GOLDENBERG, 2004) foi utilizada durante a análise, a fim de identificar os cinco aspectos já definidos do PC.

Na análise, organizei os dados em relação as atividades propostas durante as sessões do experimento de ensino que buscaram explorar e construir quatro fractais: Triângulo de Sierpinski, Tetraedro de Sierpinski, Tapete de Sierpinski e Esponja de Menger. Construí diagramas que mostram evidências em relação aos aspectos presentes do PC ao se construir tais fractais por meio do GeoGebra. Como conclusão da análise, os diagramas apontam que as habilidades, muitas vezes, não aparecem de forma isolada, elas são miscíveis e uma habilidade pode complementar e/ou fortalecer a outra.

O **pensamento algorítmico** emergiu nos momentos de identificação e elaboração de sequências de eventos para alcançar uma solução, com o objetivo de construir os fractais propostos de forma mais eficaz e eficiente, o que para Sousa e Lencastre (2014) representa a forma de expressar uma solução em diferentes passos visando a resolução de um problema.

A **decomposição e generalização** pôde ser notada nos momentos em que as duplas pensavam sobre os fractais a partir de seus componentes. Assim como nas estratégias adotadas, em que fractais foram gerados aplicando soluções em termos genéricos e que puderam ser aplicadas em outras situações que compartilhavam características de um problema já resolvido. Para Costa (2016) e Queiroz (2017), decompor e generalizar um problema diminui sua complexidade e seu processo de resolução pode ser transferido para problemas futuros.

Padrões e abstração se revelou nos momentos de identificação das propriedades essenciais e comuns dos fractais explorados, e das ferramentas do software GeoGebra escolhidas, o que auxiliou para a descoberta de uma relação entre as construções. Grover e Pea (2013) defendem que padronizar e abstrair permite a concentração em conceitos relevantes para a compreensão e solução do problema.

Neste estudo, o GeoGebra favoreceu a **representação e automação**, uma vez que o software permitiu a automatização dos processos de criação durante as atividades e ainda a aplicação efetiva de meios computacionais na representação do conhecimento da Geometria Fractal (LINN, 2010). A criação e aplicação de ferramentas permitiu que tarefas repetitivas fossem realizadas de forma mecânica.

Por fim, pensar computacionalmente também requer uma atitude de **avaliação** das decisões tomadas e dos resultados alcançados. Tal habilidade se fez presente nos momentos de avaliar os processos de criação, em termos de utilização e eficiência dos recursos disponíveis

no GeoGebra. Segundo Manilla et al. (2014) o processo de analisar os resultados é uma forma de avaliar e que chegar a conclusões envolve avaliar e abstrair.

A respeito do uso do software GeoGebra ele se torna uma tecnologia que favorece o desenvolvimento cognitivo, ou seja, se tem a possibilidade de produzir conhecimentos matemáticos, dando significado aos conteúdos e problemas que estão sendo explorados e trabalhados. Ao se considerar o processo de pensar com o GeoGebra, cujo design tecnológico oferece a possibilidade de criação de novas ferramentas, é possível identificar a presença da auto semelhança e do processo iterativo na aplicação da ferramenta criada, propriedades fundamentais da Geometria Fractal, o que torna tal recurso significativo para a construção de fractais.

A experimentação e visualização geométrica através do software incentiva a formulação de conjecturas e favorece a investigação. Assim, incluir recursos tecnológicos tais como os softwares educacionais, traz significativas contribuições para o processo de ensino e aprendizagem.

Contudo, as inquietações que me instigaram a realizar este estudo reforçaram que o ambiente computacional pode potencializar o pensamento dos indivíduos, liberando-os para a atividade de planejamento e criação, para a atividade de produzir situações que os instiguem e desafiem, como a construção dos fractais. Diferentemente do lápis e papel, na tela do computador é possível alterar de forma dinâmica e ágil, de modo a potencializar a capacidade de perceber a necessidade das alterações, as representações do objeto; fazê-lo variar de tamanho, de posição, de lugar, de forma; e, a partir dessas ações, abstrair ideias matemáticas.

Ponderando sobre estudos futuros, reflito sobre as sessões de ensino relatadas aqui ocorrerem na mesma ordem para todas as duplas. Indago: ‘Os aspectos do PC se manifestariam de forma diferente se fossem aplicadas em uma outra ordem?’; ‘Como tais aspectos se evidenciariam se fossem escolhidos outros fractais para a construção?’

O objetivo deste estudo não foi a prática docente, contudo, uma outra possibilidade de investigação seria uma análise detalhada dos aspectos do PC que emergem no contexto de exploração de fractais com o uso do software GeoGebra, tendo professores em serviço como sujeitos participantes do experimento. Questionamentos como: ‘Quais aspectos do PC emergem da prática docente na exploração de fractais?’; ‘Como articular e explorar as habilidades do PC e sua manifestação em conteúdos indicados pela BNCC durante a criação de fractais?’ surgiriam.

Um estudo articulando o Pensamento Computacional dos estudantes com o Pensamento Matemático seria uma outra possibilidade de pesquisa. Considero, ainda, ser pertinente investigar a formação dos professores para promover o PC em sala de aula.

Por fim, acredito que este estudo contribuiu com discussões sobre a Geometria Fractal, o Pensamento Computacional, e os aspectos do PC emergentes de sessões de experimento de ensino durante a construção de fractais no software GeoGebra. Assim, espero que as reflexões aqui apresentadas sejam utilizadas em pesquisas futuras e abordadas em contextos educacionais que buscam integrar e promover a investigação de hipóteses acerca do Pensamento Computacional na educação.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, A. A. O. **Os Fractais na formação docente e sua prática na sala de aula**. 2006. 221f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. Construindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2012. p. 31-52.

BALDOVINOTTI, N. J. **Um estudo de fractais geométricos na formação de Professores de Matemática**. 2011. 204f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociência e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2011.

BARBOSA, L. M.; BERTONE, A. M. A. Fractais e Geogebra: uma conexão perfeita. In: II MOSTRA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA FAMAT, 2013, Uberlândia. **Anais...**Uberlândia, 2013.

BARBOSA, L. M.; BERTONE, A. M. A. Geogebra e o Fractal de Lara de dimensão não inteira. In: 29º COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA, 2013, Rio de Janeiro. **Anais...**Rio de Janeiro, 2013.

BARBOSA, L. M.; BERTONE, A. M. A. Geogebra y los sistemas de funciones iteradas: socios en la creación de un árbol de sakura. **Revista do Instituto Geogebra Internacional de São Paulo (IGISP)**, v. 4, p. 63-77, 2015.

BARBOSA, L. M.; BERTONE, A. M. A. Gerando o Número Pi Através do Conjunto M de Mandelbrot. In: CONGRESSO DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL DA REGIÃO SUDESTE - CMAC, 2013, Bauru. **Anais...**São Carlos: SBMAC, 2013. v. II.

BARBOSA, L. M.; BERTONE, A. M. A. Sistemas de Funções Iterativas: recriando e criando Figuras Fractais. In: IV SEMANA DE MATEMÁTICA DO PONTAL E III WORKSHOP DE GEOGEBRA DO PONTAL, 2013, Ituiutaba. **Anais...**Ituiutaba, 2013.

BARBOSA, L. M.; BERTONE, A. M. A.; COELHO, A.G. V. Fisiologia fractal: a dimensão de Higuchi e suas aplicações. In: XXXV CNMAC CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 2015, Natal. **Anais...**Natal, 2015.

BARBOSA, L. M.; BERTONE, A. M. A.; MARTINS, J. B. L-systems, GeoGebra Turtle e Javascript: Trio Dinâmico na Construção de Três Fractais Clássicos. In: 31º COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA, 2017, Rio de Janeiro. **Anais...**Rio de Janeiro, 2017.

BARBOSA, L. M.; BERTONE, A. M. A.; SILVA JUNIOR, L. C. O Autômato Celular e o Triângulo de Sierpinski. In: 21º SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA USP, 2013, São Carlos. **Anais...**São Carlos, 2013. v. 21.

BARBOSA, R. M. **Descobrendo a Geometria Fractal para a sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BARBOSA, S. M. **Tecnologias da Informação e Comunicação, Função Composta e Regra da Cadeia**. 2009. 199 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2009.

BARR, V.; STEPHENSON, C. Bringing computational thinking to K-12: What is involved and what is the role of the computer science education community? **ACM Inroads**, v. 2, n. 1, p. 48-54, 2011.

BARROS, V. F. **Aplicação de Curvas Fractais em Elementos Convolucionados para o Projeto de FSS Miniaturizada e com Estabilidade Angular**. 2017. 114f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica e da Computação) – Centro de Tecnologia, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2017.

BERTONE, A. M. A. ; BARBOSA, L. M.; MATOS, F. F. M. Geogebra, a linguagem python, o automato celular e o triângulo de sierpinski: alguma coisa em comum? In: I CONFERÊNCIA BRASILEIRA DO GEOGEBRA, 2013, Mossoró. **Anais...**Mossoró, 2013.

BESSA JR, F. A. **Uma Abordagem do Infinito no Caminho da Cardinalidade: Um Estudo Endereçado aos Professores de Matemática do Ensino Básico**. 2011. 107f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2011.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013. p. 111-124.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento**. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

BORRALHO, A., CABRITA, I., PALHARES, P. E.; VALE, I. Os Padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra. In: Vale, I.; Pimentel, T.; Barbosa, A.; Fonseca, L.; Santos, L.; Canavarro, P. (Orgs). **Números e Álgebra**. Lisboa: SEM-SPCE, 2007.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017. 472 p.

BRASIL. Exame Nacional do Ensino Médio. **INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**. Brasília: MEC, 2008. 20 p.

BRENNAN, K.; RESNICK, M. New frameworks for studying and assessing the development of computational thinking. **AERA 2012**, Vancouver, Canada, 2012. Disponível em: <http://web.media.mit.edu/~kbrennan/files/Brennan_Resnick_AERA2012_CT.pdf>. Acesso em: 01 jul. 2018.

CARVALHO, H. C. **Geometria Fractal: Perspectivas e possibilidades no ensino de Matemática**. 2005. 108f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) –

Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico, Universidade Federal do Pará, Belém, 2005.

CATLIN, D.; WOOLLARD, J. Educational robots and computational thinking. **Teaching Robotics & Teaching with Robotics (TRTWR) - Robotics in Education (RIE)**. Padova, 2014.

COSTA, S. B. **Desenho de interface para o desenvolvimento do pensamento computacional no Ensino Básico: análise do Scratch**. 2016. 75f. Dissertação (Mestrado em Novos Media e Práticas Web) – Faculdade de Ciências Sociais e Humanas, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2016.

EBERSON, R. R. **Um Estudo sobre a construção de Fractais em ambientes computacionais e suas relações com transformações geométricas no plano**. 2004. 177f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

FARIA, R. W. S. **Padrões Fractais: Contribuições ao processo de Generalização de Conteúdos Matemáticos**. 2012. 197f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociência e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2012.

FEDALTO, D. **O imprevisto futuro das calculadoras nas aulas de Matemática no Ensino Médio**. 2006. 161f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2006.

GADANIDIS, G. Five Affordances of Computational Thinking to Support Elementary Mathematics Education. **Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching**, v.36 n.2 p.143-151, 2017.

GOLDENBERG, M. **A arte de Pesquisar: Como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais**. 8. ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

GONÇALVES, F. A. **Um Instrumento para o Diagnóstico do Pensamento Computacional**. 2015. 128f. Dissertação (Mestrado em Computação Aplicada) – Universidade do Vale do Itajaí, Itajaí, 2015.

GRAVINA, M. A. Geometria dinâmica uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. In: Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, VII., 1996, Belo Horizonte. **Anais...**Belo Horizonte: PUCRS, 1996. p. 1-13.

GROVER, S.; PEA, R. Computational thinking in K–12: A review of the state of the field. **Educational Researcher**, v.42, n.1, p. 38-43. 2013.

GUZMÁN, M.; MARTÍN, M. A.; MORÁN, M.; REYES, M. **Estructuras Fractales y sus Aplicaciones**. Barcelona: Labor, 1993.

HOHENWARTER, M; LAVICZA, Z. Mathematics teacher development with ICT: towards an international GeoGebra institute. In: KÜCHEMANN, D. **Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics**. Northampton: BSRLM, 2007. p. 49-54.

IDEM, R. C. **Construcionismo, Conhecimentos Docentes e GeoGebra: uma experiência envolvendo licenciandos em Matemática e professores**. 2017. 165f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2017.

ISTE/CSTA. **Computational Thinking Teacher Resource**. 2ed., 2011. Disponível em: <http://csta.acm.org/Curriculum/sub/CurrFiles/472.11CTTeacherResources_2ed-SP-vF.pdf>. Acesso em: 01 jul. 2018.

JAPIASSÚ, H.; MARCONDES, D. **Dicionário básico de Filosofia**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2001.

L'HEUREUX, J.; BOISVERT, D.; COHEN, R.; SANGHERA, K. It Problem Solving: an Implementation of Computational Thinking in Information Technology. **Proceedings of the 13th annual conference on Information technology education**. Alberta, p.183-188, 2012.

LINN, M. C. (Org.) **Report of a Workshop on the Scope and Nature of Computational Thinking**. Washington: The National Academies Press, 2010.

LU, J. J.; FLETCHER, G. H. Thinking about computational thinking. In: **Proceedings of the 40th ACM Technical Symposium on Computer Science Education**, p. 260-264, 2009.

LUMMERTZ, R. S. **As Potencialidades do uso do Software Scratch para a Construção da Literacia Digital**. 2016. 133f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2016.

MANDELBROT, B. **Les objets fractals. Forme, hasard et dimension**. Tusquets editores, S. A, 1993.

MANDELBROT, B. **The fractal geometry of nature**. New York: WH Freeman and Co., 1983.

MANNILA, L.; DAGIENE, V.; DEMO, B.; GRGURIN, N.; MIROLO, C.; ROLANDSSON, L.; SETTLE, A. Computational Thinking in K-9 Education. In: **Proceedings of the WorkingGroup Reports of the 2014 on Innovation & Technology in Computer Science Education Conference**. Uppsala, Sweden, p. 1-29, 2014.

MAZZI, L. C. **Experimentação-com-GeoGebra: revisitando alguns conceitos da análise real**. 2014. 136f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociência e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2014.

MÉDICE JR, F. **Fractais: Motivando a Matemática no Ensino Médio**. 2014. 67f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2014.

MOREIRA, V. S. S. S. **Geometria Fractal na Educação Básica**. 2017. 78f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

MOTTA-ROTH, D.; HENDGES, G. R.; AMORETTI, E. C.; KLOSS, M. O tradicional e o novo: Análise de artigos acadêmicos eletrônicos. **Intercâmbio**, São Paulo, v. 9, p. 29-38, 2000.

MOURA, D. V. **Introdução à Geometria Fractal**. 2016. 72f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Centro de Ciências da Natureza, Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2016.

OLIVEIRA, R. I. **Topologia e espaços métricos**. 2014. Apostila.

PAPERT, S. **Logo: computadores e educação**. São Paulo: Brasiliense, 1986.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H.; VARANDAS, J. M. O contributo das tecnologias de informação e comunicação para o desenvolvimento do conhecimento e da identidade profissional. In: FIORENTINI, D. (Org). **Formação de professores de Matemática**. Campinas, SP: Mercado Letras, 2003.

POUPART, J. A entrevista de tipo qualitativo: considerações epistemológicas, teóricas e metodológicas. In: POUPART, J.; DESLAURIERS, J. P.; GROULX, L. H.; LAPÈRRIERE, A.; MAYER, R.; PIRES, A. P. **A pesquisa Qualitativa: enfoques epistemológicos e metodológicos**. Petrópolis: Vozes, 2012. p. 215–153.

POWELL, A. B.; FRANCISCO, J. M.; MAHER, C. A. An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 22, p. 405-435, 2013.

POWELL, A.; FRANCISCO, J.; MAHER, C. Uma abordagem à Análise de Dados de Vídeo para investigar o desenvolvimento de ideias e raciocínios matemáticos de estudantes. Tradução de Antônio Olímpio Junior. **Boletim de Educação Matemática – BOLEMA**. Rio Claro, n. 21, 2004.

QUEIROZ, R. S. **DuinoBlocks4Kids: utilizando Tecnologia Livre e materiais de baixo custo para o exercício do Pensamento Computacional no Ensino Fundamental I por meio do aprendizado de programação aliado à Robótica Educacional**. 2017. 75f. Dissertação (Mestrado em Informática) – Instituto de Matemática e do Instituto Tércio Pacitti, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

RESNICK, M.; FLANAGAN, M.; KELLEHER, C.; MACLAURIN, M.; OHSHIMA, Y.; PERLIN, K.; TORRES, R. Growing Up Programming: Democratizing the Creation of Dynamic Interactive Media. **Proceedings of the CHI (Computer-Human Interaction) '09 conference**. Boston, 2009.

RIBEIRO, E. A. A perspectiva da entrevista na investigação qualitativa. **Evidências**, Araxá, n. 4, p. 129-148, 2008.

RICIERI, A. P. **Fractais e Caos: a Matemática de hoje**. São Paulo: Parma, 1990.

ROYAL SOCIETY. **Shut down or restart?** The way forward for computing in UK Schools. 2012. Disponível em: <<https://royalsociety.org/~media/education/computing-inschools/2012-01-12-computing-in-schools.pdf>>. Acesso em: 01 jul. 2018.

SABOGAL S., ARENAS G. **Una Introducción a la geometría Fractal**. Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, 2011. Apostila.

SCHOENFELD, A. H. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), **Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning**, p. 334-370, 1992. New York: MacMillan.

SCUCUGLIA, R. **A investigação do teorema fundamental do cálculo com calculadoras gráficas**. 2006. 145 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2006.

SELBY, C.; WOOLLARD, J. **Refining an Understanding of Computational Thinking**. Southampton, UK, 2014. Disponível em: <<https://eprints.soton.ac.uk/372410/>>. Acesso em: 01 jul. 2018.

SHAMSGOVARA, A. **Analytic and numerical calculations of fractal dimension**, Tese – Department of Mathematics, Royal Institute of Technology, KTH. 2012. 47p.

SINCLAIR, N.; BARTOLINI M. G. B.; VILLIERS, M.; JONES, K.; KORTENKAMP, U.; LEUNG, A.; OWENS, K.; Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team Report. **ZDM Mathematics Education**. n. 48, p. 691–719, 2016.

SOMAN, K. P; MANU UNNI, V. G.; KRISHNAN, P.; SOWMYA, V. Enhancing Computational Thinking with Spreadsheet and Fractal Geometry: Part 1. **International Journal of Computer Applications**, v. 5, n.14, 2012.

SOMAN, K. P; MANU UNNI, V. G.; KRISHNAN, P.; SOWMYA, V. Enhancing Computational Thinking with Spreadsheet and Fractal Geometry: Part 2 Root-finding using Newton Method and Creation of Newton Fractals. **International Journal of Computer Applications**, v. 5, n.14, 2012.

SOMAN, K. P; MANU UNNI, V. G.; KRISHNAN, P.; SOWMYA, V. Enhancing Computational Thinking with Spreadsheet and Fractal Geometry: Part 3 Mandelbrot and Julia Set. **International Journal of Computer Applications**, v. 5, n.14, 2012.

SOMAN, K. P; MANU UNNI, V. G.; KRISHNAN, P.; SOWMYA, V. Enhancing Computational Thinking with Spreadsheet and Fractal Geometry: Part 4 Plant Growth modeling and Space Filling Curves. **International Journal of Computer Applications**, v. 5, n.14, 2012.

SOUSA, R. M.; LENCASTRE, J. A. Scratch: uma opção válida para desenvolver o pensamento computacional e a competência de resolução de problemas. In: 2º ENCONTRO SOBRE JOGOS E MOBILE LEARNING, 2014, Braga. **Anais....** Braga: 2014, p.256 - 267.

STEFFE, L.; THOMPSON, P.W. Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. **Research design in mathematics and science education**. Hillsdale, NJ, 2000.

STEWART, I. **Os Números da Natureza: a realidade irreal da imaginação matemática**. Rio de Janeiro: Rocco, 1996.

TERZIDIS, K. **Algorithmic Architecture**. Londres: Architectural Press, 2006.

VALENTE, J. A. Informática na Educação no Brasil: Análise e Contextualização Histórica. In VALENTE, J. A. (Org.). **O computador na Sociedade do Conhecimento**. Campinas: UNICAMP/NIED, 1999.

VALENTE, J. A. Integração do Pensamento Computacional no currículo da Educação Básica: diferentes estratégias usadas e questões de formação de professores e avaliação do aluno. **Revista e-Curriculum**. São Paulo, v.14, n.03, p. 864 – 897, 2016.

VIEIRA, M. F. V. **Pensamento Computacional com Enfoque Construcionista no Desenvolvimento de Diferentes Aprendizagens**. 2018. 182f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade do Vale do Itajaí, Itajaí, 2018.

WILKERSON, M. H., ANDREWS, C., SHABAN, Y., LAINA, V., & GRAVEL, B. E. What's the technology for? Teacher attention and pedagogical goals in a modeling-focused professional development workshop. In the **Journal of Science Teacher Education**, 27(1), p. 1-23, 2016.

WING, J. M. Computational thinking and thinking about computing. **Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 366, n. 1881, p. 3717-3725, 2008.

WING, J. M. Computational thinking. **Communications of the ACM**, New York, v. 49, n. 3, p. 33-35, mar 2006.

WING, J. Research notebook: Computational thinking—What and why? **The Link Magazine, Spring**. Carnegie Mellon University, Pittsburgh, v. 06, p. 20-23, 2011.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Atividade 1 - Estudando e construindo o Triângulo de Sierpinski

Data:

Alunos:

O Triângulo de Sierpinski é um famoso fractal criado por Waclaw Sierpinski (1882 - 1969). Sua construção se inicia com um triângulo equilátero e a partir daí se destacam os pontos médios de cada lado do triângulo e os une, determinando assim no total quatro triângulos. O triângulo central é descartado, restando três triângulos conectados um com o outro apenas pelos pontos médios. Repete-se recursivamente tal procedimento para cada novo triângulo obtido, sempre descartando o triângulo central. A Figura 1 mostra sete iterações da sequência de geração do triângulo.

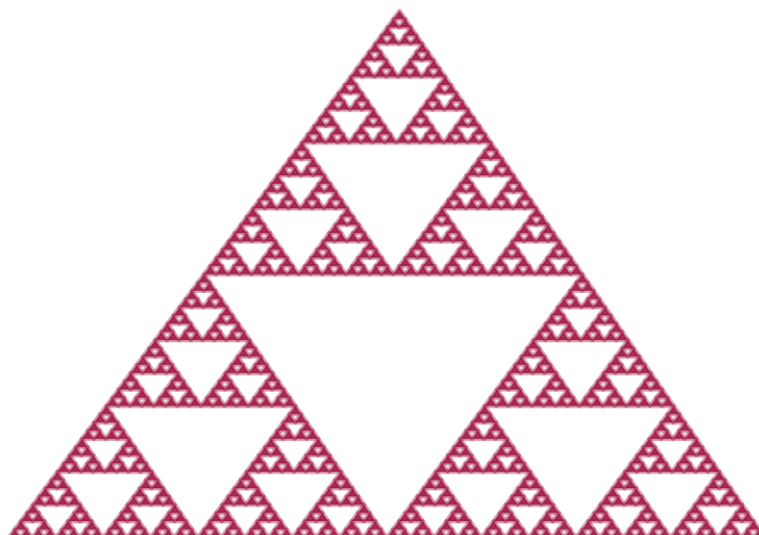


Figura 1 - Triângulo de Sierpinski com sete iterações criado no GeoGebra

Abra o Arquivo “Triângulo de Sierpinski”. Este arquivo apresenta duas iterações do Triângulo de Sierpinski. Utilize as ferramentas do GeoGebra para responder as perguntas que seguem.

1. Complete a tabela abaixo considerando apenas os triângulos laranjas em suas respostas.

Número de Iterações	Quantidade de triângulos	Comprimento* do lado	Perímetro de cada triângulo	Perímetro Total
0				
1				
2				

*Use a ferramenta



para auxiliar sua medição

2. Qual a quantidade de triângulos (laranjas) que terá na quarta iteração? Qual será o comprimento de seu lado? E o perímetro total da figura? Justifique.
3. Encontre o termo geral que permite calcular a quantidade de triângulos (laranjas) para a n -ésima iteração do Triângulo de Sierpinski.
4. Encontre o termo geral que permite calcular o comprimento do lado dos triângulos (laranjas) para a n -ésima iteração do Triângulo de Sierpinski.
5. Encontre o termo geral que permite calcular o perímetro de cada triângulo (laranja) para a n -ésima iteração do Triângulo de Sierpinski.
6. Encontre o termo geral que permite calcular o perímetro total para a n -ésima iteração do Triângulo de Sierpinski. Esse perímetro tende a qual valor? Justifique.
7. Complete a tabela abaixo considerando apenas os triângulos laranjas em suas respostas.

Número de Iterações	Quantidade de triângulos	Área* de cada triângulo	Área Total
0			
1			
2			

*Use a ferramenta



para auxiliar sua medição

8. Encontre o termo geral que permite calcular a área de cada triângulo (laranja) para a n -ésima iteração do Triângulo de Sierpinski.
9. Encontre o termo geral que permite calcular a área total para a n -ésima iteração do Triângulo de Sierpinski. Essa área tende a qual valor?
10. Já vimos que uma definição de Dimensão é dada pela Dimensão de Capacidade, calculada da seguinte forma:

$$D = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln \epsilon}$$

Sendo $N(\epsilon)$ o número de figuras na n -ésima iteração e ϵ o fator de redução do lado da figura na n -ésima etapa. Calcule a dimensão do Triângulo de Sierpinski. Use o GeoGebra para o cálculo e comente o resultado.

Agora é com vocês!

Utilize as ferramentas do GeoGebra e construa o Triângulo de Sierpinski com o máximo de iterações que conseguir. Faça um GIF da construção.

1. Quais conceitos matemáticos foram importantes na obtenção do fractal? Justifique.

2. Quais conceitos matemáticos podem ser explorados durante a construção do fractal? Justifique.

Atividade 2 - Estudando e construindo o Tetraedro de Sierpinski

Data:

Alunos:

O Tetraedro de Sierpinski, é uma generalização tridimensional do famoso triângulo que estudamos e construímos na sessão anterior. Sua construção se inicia com um tetraedro e a partir daí se destacam os pontos médios de cada lado do tetraedro e os une, determinando assim no total quatro novos tetraedros. Repete-se recursivamente tal procedimento para cada novo tetraedro obtido. A Figura 1 mostra cinco iterações da sequência de geração do tetraedro.

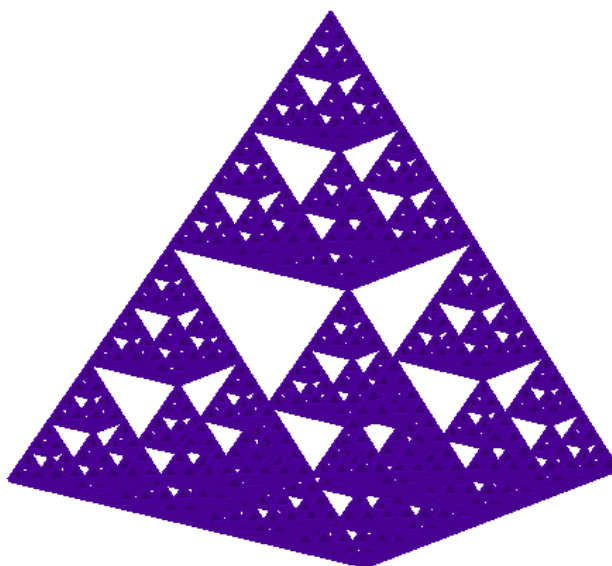


Figura 1 - Tetraedro de Sierpinski com cinco iterações criado no GeoGebra

Abra o Arquivo “Tetraedro de Sierpinski”. Este arquivo apresenta duas iterações do Tetraedro de Sierpinski. Utilize as ferramentas do GeoGebra para responder as perguntas que seguem.

1. Complete a tabela abaixo considerando apenas os tetraedros laranjas em suas respostas.

Número de Iterações	Quantidade de tetraedros	Comprimento* do lado	Volume* de cada tetraedro	Volume Total
0				
1				
2				

*Use as ferramentas  e  para auxiliar sua medição

2. Qual a quantidade de tetraedros (laranjas) que terá na quarta iteração? Qual será o comprimento de seu lado? E volume total da figura? Justifique.
3. Encontre o termo geral que permite calcular a quantidade de tetraedros (laranjas) para a enésima iteração do Tetraedro de Sierpinski.
4. Já vimos que uma definição de Dimensão é dada pela Dimensão de Capacidade, calculada da seguinte forma:

$$D = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln \epsilon}$$

Sendo $N(\epsilon)$ o número de figuras na enésima iteração e ϵ o fator de redução do lado da figura na enésima etapa. Calcule a dimensão do Tetraedro de Sierpinski. Use o GeoGebra para o cálculo e comente o resultado.

5. O que podemos observar se movimentarmos o tetraedro e olharmos apenas para uma de suas faces?

Agora é com vocês!

Utilize as ferramentas do GeoGebra e construa o Tetraedro de Sierpinski com o máximo de iterações que conseguir. Faça um *GIF* da construção.

1. Quais conceitos matemáticos foram importantes na obtenção do fractal? Justifique.
2. Quais conceitos matemáticos podem ser explorados durante a construção do fractal? Justifique.

Atividade 3 - Estudando e construindo o Tapete de Sierpinski

Data:

Alunos:

Abra o arquivo “Tapete de Sierpinski”. Este arquivo apresenta quatro iterações desse fractal. Sua quarta iteração é mostrada na Figura 1.

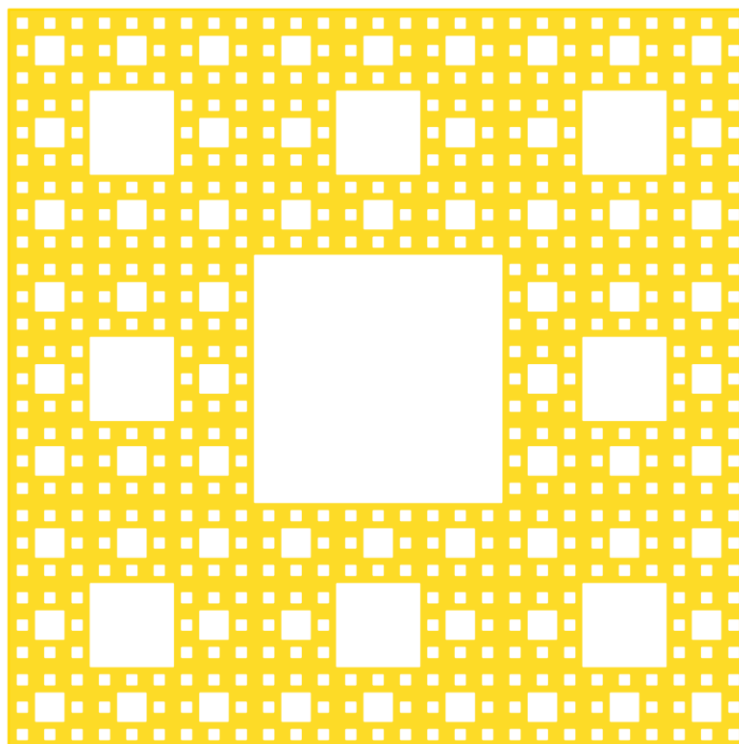


Figura 1 - Tapete de Sierpinski com quatro iterações criado no GeoGebra.

1. Descreva como o Tapete de Sierpinski é gerado.
2. Calcule a dimensão do Tapete de Sierpinski.
3. Quais conceitos matemáticos são importantes para a construção desse fractal? Justifique.

Agora é com vocês!

Utilize o GeoGebra para construir o Tapete de Sierpinski com o máximo de iterações que conseguir. Faça um *GIF* da construção.

1. Quais conhecimentos foram necessários e importantes para a construção desse fractal? Justifique.

Atividade 4 - Estudando e construindo a Esponja de Menger

Data:

Alunos:

Abra o arquivo “Esponja de Menger”. Este arquivo apresenta duas iterações desse fractal. Sua segunda iteração é mostrada na Figura 1.

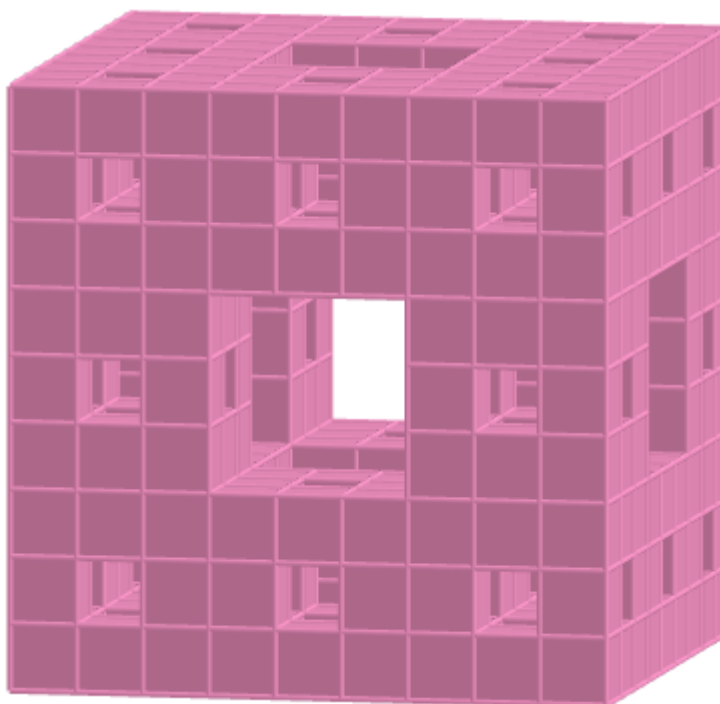


Figura 1 - Esponja de Menger com duas iterações criado no GeoGebra.

1. Descreva como a Esponja de Menger é gerada.
2. Calcule a dimensão da Esponja de Menger.
3. Quais conceitos matemáticos são importantes para a construção desse fractal? Justifique.

Agora é com vocês!

Utilize as ferramentas do GeoGebra e construa o Tetraedro de Sierpinski com o máximo de iterações que conseguir. Faça um *GIF* da construção.

1. Quais conhecimentos foram necessários e importantes para a construção desse fractal? Justifique.

APÊNCIDE B

Protocolo de Construção do Triângulo de Sierpinski programado pela pesquisadora no GeoGebra

N.	Nome	Descrição
1	Ponto A	
2	Ponto B	
3	Ponto C	
4	Lista A1	{A, B, C}
5	Triângulo B1	Polígono A1
6	Lista A2	{{A, PontoMédio(A, B), PontoMédio(A, C)}, {PontoMédio(A, B), B, PontoMédio(B, C)}, {PontoMédio(A, C), PontoMédio(B, C), C}}
7	Lista B2	{Polígono(Elemento(A2, 1)), Polígono(Elemento(A2, 2)), Polígono(Elemento(A2, 3))}
8	Lista A3	Concatenar(Sequência({Elemento(Elemento(A2, i), 1), PontoMédio(Elemento(Elemento(A2, i), 1), Elemento(Elemento(A2, i), 2)), PontoMédio(Elemento(Elemento(A2, i), 1), Elemento(Elemento(A2, i), 3))), {Elemento(Elemento(A2, i), 2), PontoMédio(Elemento(Elemento(A2, i), 2), Elemento(Elemento(A2, i), 1)), PontoMédio(Elemento(Elemento(A2, i), 2), Elemento(Elemento(A2, i), 3))), {Elemento(Elemento(A2, i), 3), PontoMédio(Elemento(Elemento(A2, i), 3), Elemento(Elemento(A2, i), 1)), PontoMédio(Elemento(Elemento(A2, i), 3), Elemento(Elemento(A2, i), 2))}, i, 1, Comprimento(A2)))
9	Lista B3	Sequência(Polígono(Elemento(A3, i)), i, 1, Comprimento(A3))
10	Lista A4	Concatenar(Sequência({Elemento(Elemento(A3, i), 1), PontoMédio(Elemento(Elemento(A3, i), 1), Elemento(Elemento(A3, i), 2)), PontoMédio(Elemento(Elemento(A3, i), 1), Elemento(Elemento(A3, i), 3))), {Elemento(Elemento(A3, i), 2), PontoMédio(Elemento(Elemento(A3, i), 2), Elemento(Elemento(A3, i), 1)), PontoMédio(Elemento(Elemento(A3, i), 2), Elemento(Elemento(A3, i), 3))), {Elemento(Elemento(A3, i), 3), PontoMédio(Elemento(Elemento(A3, i), 3), Elemento(Elemento(A3, i), 1)), PontoMédio(Elemento(Elemento(A3, i), 3), Elemento(Elemento(A3, i), 2))}, i, 1, Comprimento(A3)))
11	Lista B4	Sequência(Polígono(Elemento(A4, i)), i, 1, Comprimento(A4))
12	Lista A5	Concatenar(Sequência({Elemento(Elemento(A4, i), 1), PontoMédio(Elemento(Elemento(A4, i), 1), Elemento(Elemento(A4, i), 2)), PontoMédio(Elemento(Elemento(A4, i), 1), Elemento(Elemento(A4, i), 3))), {Elemento(Elemento(A4, i), 2), PontoMédio(Elemento(Elemento(A4, i), 2), Elemento(Elemento(A4, i), 1)), PontoMédio(Elemento(Elemento(A4, i), 2), Elemento(Elemento(A4, i), 3))), {Elemento(Elemento(A4, i), 3), PontoMédio(Elemento(Elemento(A4, i), 3), Elemento(Elemento(A4, i), 1)), PontoMédio(Elemento(Elemento(A4, i), 3), Elemento(Elemento(A4, i), 2))}, i, 1, Comprimento(A4)))
13	Lista B5	Sequência(Polígono(Elemento(A5, i)), i, 1, Comprimento(A5))
14	Lista A6	Concatenar(Sequência({Elemento(Elemento(A5, i), 1), PontoMédio(Elemento(Elemento(A5, i), 1), Elemento(Elemento(A5, i), 2)), PontoMédio(Elemento(Elemento(A5, i), 1), Elemento(Elemento(A5, i), 3))), {Elemento(Elemento(A5, i), 2), PontoMédio(Elemento(Elemento(A5, i), 2), Elemento(Elemento(A5, i), 1)), PontoMédio(Elemento(Elemento(A5, i), 2), Elemento(Elemento(A5, i), 3))), {Elemento(Elemento(A5, i), 3), PontoMédio(Elemento(Elemento(A5, i), 3), Elemento(Elemento(A5, i), 1)), PontoMédio(Elemento(Elemento(A5, i), 3), Elemento(Elemento(A5, i), 2))}, i, 1, Comprimento(A5)))
15	Lista B6	Sequência(Polígono(Elemento(A6, i)), i, 1, Comprimento(A6))
16	Número n	
17	Lista A7	Concatenar(Sequência({Elemento(Elemento(A6, i), 1), PontoMédio(Elemento(Elemento(A6, i), 1), Elemento(Elemento(A6, i), 2)),

		PontoMédio(Elemento(Elemento(A6, i), 1), Elemento(Elemento(A6, i), 3))), {Elemento(Elemento(A6, i), 2), PontoMédio(Elemento(Elemento(A6, i), 2), Elemento(Elemento(A6, i), 1))), PontoMédio(Elemento(Elemento(A6, i), 2), Elemento(Elemento(A6, i), 3))), {Elemento(Elemento(A6, i), 3), PontoMédio(Elemento(Elemento(A6, i), 3), Elemento(Elemento(A6, i), 1))), PontoMédio(Elemento(Elemento(A6, i), 3), Elemento(Elemento(A6, i), 2))), i, 1, Comprimento(A6)))
18	Lista B7	Sequência(Polígono(Elemento(A7, i)), i, 1, Comprimento(A7))

Protocolo de Construção do Tapete de Sierpinski programado pela pesquisadora no GeoGebra

N.	Nome	Descrição
1	Ponto A	
2	Ponto B	
3	Polígono pol1	Polígono(A, B, 4)
3	Segmento f	Segmento A, B
3	Segmento g	Segmento B, C
3	Ponto C	Polígono(A, B, 4)
3	Ponto D	Polígono(A, B, 4)
3	Segmento h	Segmento C, D
3	Segmento i	Segmento D, A
4	Segmento j	Segmento A, C
5	Segmento k	Segmento B, D
6	Ponto E	Interseção de j, k
7	Lista lista1	{A, PontoMédio(A, B), B, PontoMédio(B, C), C, PontoMédio(C, D), D, PontoMédio(D, A)}
8	Lista lista2	{Polígono(lista1)}
9	Lista lista3	{Homotetia(lista2, 1 / 3, E)}
10	Lista lista4	{Sequência(Homotetia(lista3, 1 / 3, Elemento(lista1, i)), i, 1, Comprimento(lista1))}
11	Lista lista5	{Sequência(Homotetia(lista4, 1 / 3, Elemento(lista1, i)), i, 1, Comprimento(lista1))}
12	Lista lista6	{Sequência(Homotetia(lista5, 1 / 3, Elemento(lista1, i)), i, 1, Comprimento(lista1))}
13	Número n	

Protocolo de Construção do Esponja de Menger programado pela pesquisadora no GeoGebra

N.	Nome	Descrição
1	Ponto A	
2	Ponto B	
3	Ponto C	Ponto sobre Círculo(B, Distância(A, B), Segmento(A, B))
4	Cubo a	Cubo(A, B, C)
4	Ponto D	Cubo(A, B, C)
4	Ponto E	Cubo(A, B, C)
4	Ponto F	Cubo(A, B, C)
4	Ponto G	Cubo(A, B, C)
4	Ponto H	Cubo(A, B, C)
4	Segmento arestaAD	Segmento D, A
4	Segmento arestaAB	Segmento A, B
4	Segmento arestaBC	Segmento B, C
4	Segmento arestaCD	Segmento C, D
4	Quadrilátero faceABCD	Polígono D, A, B, C
4	Segmento arestaAE	Segmento E, A
4	Segmento arestaDH	Segmento D, H

4	Segmento arestaEH	Segmento H, E
4	Quadrilátero faceADHE	Polígono E, A, D, H
4	Segmento arestaEF	Segmento E, F
4	Segmento arestaBF	Segmento F, B
4	Quadrilátero faceABFE	Polígono B, A, E, F
4	Segmento arestaFG	Segmento F, G
4	Segmento arestaCG	Segmento G, C
4	Quadrilátero faceBCGF	Polígono C, B, F, G
4	Segmento arestaGH	Segmento G, H
4	Quadrilátero faceCDHG	Polígono D, C, G, H
4	Quadrilátero faceEFGH	Polígono E, H, G, F
5	Ponto I	Ponto médio de AB
6	Ponto J	Ponto médio de BC
7	Ponto K	Ponto médio de CD
8	Ponto L	Ponto médio de DA
9	Ponto M	Ponto médio de AE
10	Ponto N	Ponto médio de EH
11	Ponto O	Ponto médio de HD
12	Ponto P	Ponto médio de BF
13	Ponto Q	Ponto médio de CG
14	Ponto R	Ponto médio de GH
15	Ponto S	Ponto médio de FE
16	Ponto T	Ponto médio de FG
17	Lista lista1	{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T}
18	Lista lista2	Sequência(Homotetia(a, 1 / 3, Elemento(lista1, i)), i, 1, 20)
19	Lista lista3	Sequência(Homotetia(lista2, 1 / 3, Elemento(lista1, i)), i, 1, 20)
20	Número n	

APÊNDICE C

Carta de informação sobre participação em pesquisa e termo de consentimento.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
 “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
 INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS
 PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
 Departamento de Educação Matemática
 UNESP, Rio Claro - SP



CARTA DE INFORMAÇÃO - PARTICIPAÇÃO EM PESQUISA

Introdução

Meu nome é Lara Martins Barbosa, sou mestranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista (UNESP), IGCE, Campus de Rio Claro. Sou orientanda do Prof. Dr. Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva, professor do Departamento de Educação da Universidade Estadual Paulista (UNESP), IBILCE, Campus de São José do Rio Preto.

Objetivo do estudo

O objetivo desse estudo é investigar a produção de conhecimento matemático e pensamento computacional de um grupo de estudantes de Matemática ao explorarem a Geometria Fractal com o software GeoGebra, durante sessões de experimento de ensino.

Se você concordar em participar

Se você concordar em participar deste estudo, você será observado e filmado. Também serão realizadas entrevistas com participantes. A partir desses registros será produzido uma dissertação de mestrado, a qual será publicada na Internet, ou seja, de domínio público.

Confidencialidade

A informação registrada será utilizada para fins de pesquisa em Educação. Transcrições de falas, falas em áudio, imagens e registros de ações dos participantes serão utilizados/revelados em relatórios de pesquisa, artigos, livros e, principalmente, na publicação de uma dissertação.

Riscos e Participação voluntária

Não há riscos conhecidos para participar deste estudo. A participação neste estudo é voluntária. Esta carta de informação e consentimento tem como objetivo fundamental a ciência e autorização do uso da imagem do participante.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
 INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
 Departamento de Educação Matemática
 UNESP, Rio Claro - SP



CARTA DE CONSENTIMENTO E AUTORIZAÇÃO PARTICIPAÇÃO EM EXPERIMENTO DE ENSINO

Declaro que li a carta de informação, entendi a natureza do estudo e concordo em participar.
 Declaro ciência e concordância com relação as questões éticas sobre uso público de imagens no desenvolvimento e divulgação do documentário.

Nome do participante: _____

RG: _____

Local: _____

Data: _____

Autorizo que meu nome seja mantido no trabalho:

() Sim

() Não. Sugiro que meu nome seja alterado para: _____

Assinatura: _____

Comentários do participante: _____
