



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

O Cálculo Variacional e o Problema da Braquistócrona

José Ribamar Alves de Sousa Júnior

Dissertação apresentada ao Programa de
Pós-Graduação – Mestrado Profissional em
Matemática Universitária do Departamento
de Matemática como requisito parcial para a
obtenção do grau de Mestre

Orientadora
Prof. Dra. Suzinei Aparecida Siqueira Marconato

2010

TERMO DE APROVAÇÃO

José Ribamar Alves de Sousa Júnior

O CÁLCULO VARIACIONAL E O PROBLEMA DA BRAQUISTÓCRONA

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Suzinei Aparecida Siqueira Marconato
Orientadora

Prof. Dr. Renata Zotin Gomes de Oliveira
ICGE/ UNESP - Rio Claro - SP

Prof. Dr. Sueli Mieko Tanaki Aki
ICMC/USP - São Carlos - SP

Rio Claro, 16 de Dezembro de 2010

*A meus familiares
e amigos*

Agradecimentos

- A todos os meus familiares pelo carinho a mim concedido em todos os momentos desta jornada. Em particular à minha mãe Francisca pelas orações ao meu favor.
- A todos os professores do curso Mestrado Profissional da UNESP- Rio Claro, em particular ao professor Wladimir Seixas pela ajuda com o Maple e o Latex.
- Aos meus amigos de curso, meu agradecimento pela amizade e pelo reconhecimento de que a construção do conhecimento se dá num espaço coletivo.
- A todos os amigos da república **Caverna do Dragão**, Nilton, Gustavo, Juracélio e Henrique pela amizade e companheirismo.
- À minha orientadora, professora Suzi, pelo cuidado com o rigor científico, pela dedicação, atenção e paciência com que me orientou.
- À Deus por ter possibilitado tudo isso.

Resumo

Neste trabalho estudamos o problema da Braquistócrona de duas formas distintas: através da teoria do Cálculo Variacional para problemas com fronteiras fixas e também através das considerações feitas por Johann Bernoulli, utilizando conceitos de Óptica e Geometria. Apresentamos também uma simulação computacional dos resultados obtidos.

Palavras-chave: Cálculo Variacional, Equação de Euler, Problema da Braquistócrona.

Abstract

In this work we study the Brachistochrone Problem of two different ways; by theory of Variational Calculus for problems with fixed boundary and by considerations of Johann Bernoulli, with concepts of Optics and Geometry. A computational simulation of the obtained results, is presented too.

Keywords: Variational Calculus, Euler's Equation, The Brachistochrone Problem.

Lista de Figuras

2.1	Partição de $[a, b]$ (ELSGOLTZ,1696).	19
2.2	Retas $y = x + c$ (ELSGOLTZ,1696).	23
2.3	Parábolas $y = (x - a)^2 - 1$ (ELSGOLTZ,1696).	23
2.4	Campo central (ELSGOLTZ,1696).	24
2.5	Senóides $y = Csenx$ (ELSGOLTZ,1696).	24
2.6	Campo de extremal 1 (ELSGOLTZ,1696).	25
2.7	Campo de extremal 2 (ELSGOLTZ,1696).	25
2.8	Campo central com inclinação $p(x, y)$ (ELSGOLTZ,1696).	28
3.1	Esquema do Problema da Braquistócrona no plano.	30
3.2	Feixe de Ciclóides (ELSGOLTZ,1696).	33
3.3	Esquema para o fenômeno da refração da luz (LIMA,2004).	34
3.4	Meio óptico e a trajetória descrita por um raio de luz partindo de A chegando em B (LIMA,2004).	35
3.5	Ângulo entre o caminho descrito pelo raio de luz e a vertical (LIMA,2004).	36
3.6	Trajetoórias da partícula através das curvas dadas por: $f_1(x) = -\frac{2}{\pi}x$ (azul), $f_2(x) = -2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$ (verde), $f_3(x) = -2\sqrt[3]{\frac{x}{\pi}}$ (amarelo) e $f_4(t) =$ $(t - \sin(t), -1 + \cos(t))$ (vermelho) entre $t=0$; $t=0.92026$; $t=2.1896$ e $t=3.0781$	39

Sumário

1	Introdução	8
2	Alguns Conceitos de Cálculo Variacional para Problemas com Fronteiras Fixas	11
2.1	Introdução	11
2.2	Preliminares	11
2.3	Equação de Euler	13
2.4	Alguns casos particulares de F	17
2.5	Condições suficientes para extremos	22
3	O Problema da Braquistócrona	30
3.1	Modelagem do problema usando Cálculo Variacional	30
3.2	Resolução de Johann Bernoulli	34
3.3	Análise de dados obtidos através de simulações computacionais	37
4	Conclusão	40
	Referências Bibliográficas	41
	Apêndice: Linha de comando do Maple	42

1 Introdução

Um dos primeiros indícios de problemas relacionados ao Cálculo Variacional aparece com os gregos, que tinham o conhecimento que o círculo é a curva com perímetro fixo que engloba a maior área. Este problema é conhecido como problema de Dido e é descrito no livro *Eneida* de Publio Virgílio Maronis (70 a.C. - 19 a.C.). Dido, filha de um rei fenício, refugiou-se no norte da África depois que seu marido foi assassinado. Foi-lhe prometida a extensão de terra que ela pudesse cercar com o couro de um boi. Diz a lenda que ela preparou com o couro uma longa e fina correia e cercou um terreno semi-circular beirando o mar Mediterrâneo. Essa é a lendária história da fundação de Cartago. O problema de Dido consiste em encontrar dentre todas as curvas planas de um dado comprimento, a que engloba a maior área. Podemos perceber com isso que máximos e mínimos têm despertado o interesse da humanidade já há muito tempo, uma vez que o problema de Dido data de 850 a.C..

Por volta de 1630, Galileu Galilei (1564-1643) comparou o tempo de descida por um segmento circular com os tempos correspondentes à descida por polígonos inscritos e por outros arcos unindo os pontos dados.

Já em 1686, Newton (1643-1727) propôs o problema de superfície de revolução com resistência mínima que se destina a calcular a forma de uma superfície de revolução que atravessa uma massa de líquido oferecendo resistência mínima, que se refere a um problema típico de Cálculo Variacional.

No entanto, podemos dizer que o desenvolvimento do Cálculo Variacional começou de fato em junho de 1696, quando Johann Bernoulli (1667-1748) publicou no jornal científico *Acta Eruditorum* uma nota com o seguinte título: “ *Um novo problema que convido os matemáticos a resolver*”. Este problema é o que hoje conhecemos como o **problema da Braquistócrona**: Sejam A e B dois pontos dados em um plano vertical. Encontre a curva que uma partícula precisa descrever para sair de A e chegar em B no menor tempo possível, somente sob a ação da força da gravidade. Johann Bernoulli propôs, em 1697, um método para resolvê-lo que dependia de uma analogia com o problema de determinar o caminho percorrido por um raio de luz em um meio

com índice de refração variável.

No mesmo ano seu irmão James Bernoulli (1654-1705) resolveu o problema de outra maneira, que lhe permitiu também resolver, em 1701, um problema isoperimétrico, que é aquele que trata da determinação de uma figura geométrica de área máxima com perímetro dado.

Como o método desenvolvido por James Bernoulli era bastante eficiente na resolução de diversos problemas de máximos e mínimos, foi então que Leonhard Euler (1707-1783), aluno de Johann e que estava envolvido com o trabalho dos irmãos, passou a estudar e a aperfeiçoar o método de James, até que em 1744 publicou “ *A method for discovering curved lines having a maximum or minimum property of the solution of the isoperimetric problem taken in its widest sense*”. Uma das descobertas que merece destaque neste trabalho é a equação diferencial chamada **Equação de Euler**.

Com o passar do tempo, outros matemáticos começaram a sugerir problemas de grande dificuldade e o método de Euler tornava-os mais complicados. Então, em 1762 e 1770, Lagrange publicou um método analítico que permitia deduzir, de fato, a equação diferencial das curvas que minimizavam problemas mais gerais. Esse método de Lagrange trocava a função $y(x)$, presente nas integrais a serem minimizadas, pela função $y(x) + \delta y(x)$. Euler adota o método e as notações de Lagrange e chama $\delta y(x)$ de **variação** da função $y(x)$.

É por isso que esta nova teoria recebe o nome de **Cálculo das Variações** ou **Cálculo Variacional**.

Além desses matemáticos citados outros também tiveram destaque no desenvolvimento do Cálculo Variacional, tais como: Adrien-Marie Legendre (1752-1833), Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851), Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1815-1897), Carl Friedrich Gauss (1777-1855), David Hilbert (1862-1943) e William Rowan Hamilton (1805-1865).

Nos problemas tratados através da teoria do Cálculo Variacional, as condições finais (iniciais) ou tempo final (inicial) podem ser fixas ou não. Sendo assim, temos problemas com fronteiras móveis e problemas com fronteiras fixas. Neste trabalho desenvolvemos apenas os problemas com fronteiras fixas e para maiores detalhes sobre os casos com fronteiras móveis sugerimos Elsgolts [4], capítulo 7.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: No capítulo 2 apresentamos a estruturação teórica dos conceitos de Cálculo Variacional para problemas com fronteiras fixas, alguns exemplos com o objetivo de facilitar o entendimento da teoria e também deduzimos a principal ferramenta de estudo, que é a Equação de Euler. Também neste capítulo citamos as condições suficientes que uma curva deve satisfazer para ser classificada como máximo ou mínimo de um funcional, sem desenvolver toda a teoria, a qual pode ser encontrada em [4], páginas 358-369.

No capítulo 3 enunciamos o problema da Braquistócrona, resolvendo-o de duas formas distintas; a primeira, aplicando a teoria do Cálculo Variacional desenvolvida no capítulo 2, e a segunda seguindo os passos da resolução dada por Johann Bernoulli, que utiliza Óptica e Geometria. Por fim utilizamos o programa Maple como auxílio na simulação computacional do problema proposto.

2 Alguns Conceitos de Cálculo Variacional para Problemas com Fronteiras Fixas

2.1 Introdução

Os problemas que se referem a valores máximos e mínimos são bem mais atrativos que os outros problemas matemáticos de dificuldades comparáveis. Isso ocorre devido a uma razão muito simples: idealizam nossos problemas do cotidiano.

Em várias situações do nosso dia-a-dia queremos comprar um objeto com o menor preço possível, realizar o máximo de trabalho no menor tempo, alcançar um objeto realizando o menor esforço, dentre outras situações. Da mesma maneira a natureza também é guiada por princípios de máximos e mínimos. Podemos citar vários exemplos neste sentido: caminho percorrido pela luz, movimento dos planetas, entre outros. Estas são as principais razões para o estudo desse tópico e do desenvolvimento de várias teorias que auxiliam no entendimento desses fenômenos.

O Cálculo Variacional visa fundamentalmente investigar os máximos e mínimos dos funcionais e se assemelha bastante à investigação de máximos e mínimos de funções. Portanto, neste capítulo, procuramos introduzir os conceitos fundamentais e as principais propriedades do método variacional.

2.2 Preliminares

Definição 2.1. *Um funcional v é uma regra que associa a cada função y em um espaço de funções Ω , um único número real.*

Definição 2.2. Um funcional L definido em Ω é dito linear se satisfaz as seguintes condições:

1. $L[cy] = cL[y]$, para todo $y \in \Omega$ e para todo $c \in \mathbb{R}$ tais que $cy \in \Omega$.
2. $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$, para todo y_1, y_2 e $y_1 + y_2 \in \Omega$.

Definição 2.3. Se y e $y + \delta y$ são funções para os quais o funcional v esteja definido, o incremento do funcional, denotado por Δv , é dado por

$$\Delta v = v[y + \delta y] - v[y].$$

O incremento também pode ser escrito como:

$$\Delta v[y, \delta y] = L[y, \delta y] + \beta(y, \delta y) \cdot \|\delta y\|$$

onde L é linear em δy .

Se $\lim_{\|\delta y\| \rightarrow 0} \beta(y, \delta y) = 0$, então v é diferenciável em y e L é a variação do funcional v em y , denotada por δv .

Definição 2.4. Um funcional $v[y]$ assume um máximo na função y_0 se seu valor em qualquer função próxima a y_0 , não seja maior que $v[y_0]$, ou seja, $\Delta v = v[y] - v[y_0] \leq 0$. Se $\Delta v \leq 0$ e também, $\Delta v = 0$ somente quando $y = y_0$, então dizemos que v assume um máximo estrito em y_0 .

Analogamente dizemos que $v[y]$ assume um mínimo em y_1 , quando $\Delta v \geq 0$ e um mínimo estrito se $\Delta v = 0$ somente quando $y = y_1$.

Teorema 2.1. Considere uma função $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ e suponha que a derivada parcial $f_p(x, p)$ exista e seja contínua em $[a, b] \times [c, d]$. Se a integral

$$F(p) = \int_a^b f(x, p) dx$$

existe para todo $p \in [c, d]$, então $F(p)$ é diferenciável e

$$F'(p) = \int_a^b f_p(x, p) dx. \quad (2.1)$$

Demonstração:

Vamos considerar

$$\frac{F(p) - F(p_0)}{p - p_0} = \int_a^b \left(\frac{f(x, p) - f(x, p_0)}{p - p_0} \right) dx \quad (2.2)$$

Para o termo da direita aplicamos o Teorema do Valor Médio que nos dá $f_p(x, \xi)$ com ξ dependendo de x . Subtraímos então $\int_a^b f_p(x, p_0) dx$ de ambos os lados e usando o fato de que para funções integráveis $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$, temos

$$\left| \frac{F(p) - F(p_0)}{p - p_0} - \int_a^b f_p(x, p_0) dx \right| \leq \int_a^b |f_p(x, \xi) - f_p(x, p_0)| dx. \quad (2.3)$$

Como f_p é contínua no compacto $[a, b] \times [c, d]$, ela é uniformemente contínua, isto é, para $p - p_0$ suficientemente pequeno a diferença do lado direito de (2.3) pode ser majorada para todo x por δ arbitrariamente pequeno. Isso mostra que o primeiro termo de (2.3) está próximo de zero e que F é diferenciável, valendo a equação (2.1).

O próximo resultado não será demonstrado e pode ser encontrado em [4].

Teorema 2.2. Teorema Fundamental do Cálculo Variacional

Se o funcional $v[y]$ alcança seu extremo em $y = y_0$, sendo y_0 definido em Ω , então a variação do funcional v deve se anular em y_0 , isto é, $\delta v[y_0] = 0$.

Assim, os candidatos a extremos de $v[y]$ são as funções y_0 tal que $\delta v[y_0] = 0$.

No próximo item, apresentamos uma condição necessária para que um funcional alcance um extremo.

2.3 Equação de Euler

Suponhamos que exista uma função escalar $y(x)$ de classe C^1 , satisfazendo as condições de fronteira $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$ e que seja um extremo para o funcional

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx,$$

onde F é uma função de classe C^2 .

Nosso objetivo é procurar as condições necessárias que a função y deve satisfazer para representar um extremo do funcional.

Seja uma função $\bar{y}$ próxima à y , extremo do funcional, satisfazendo as condições de fronteira e consideremos a família de funções

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha(\bar{y}(x) - y(x)) \quad (2.4)$$

onde α é um parâmetro real não negativo.

Observemos que se $\alpha = 0$, $y(x, 0) = y(x)$ e se $\alpha = 1$, $y(x, 1) = \bar{y}(x)$.

Deste modo, esta família representa, para $\alpha = 0$, a função na qual o funcional alcança um extremo, e para $\alpha = 1$, a função $\bar{y}(x)$, chamada de *função comparação*.

Consideremos também a função $\delta y = \bar{y}(x) - y(x)$, chamada de variação de y com $(\delta y)' = \bar{y}'(x) - y'(x) = \delta y'$.

Ao considerarmos os valores do funcional $v[y]$ apenas nas funções da família $y = y(x, \alpha)$, o funcional transforma-se em uma função de α , isto é,

$$v[y(x, \alpha)] = \varphi(\alpha). \quad (2.5)$$

Como $y(x, 0) = y(x)$ e $y(x)$ é um extremo para o funcional v , então a função φ apresenta um extremo em $\alpha = 0$ e portanto $\varphi'(0) = 0$.

Como

$$\varphi(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)) dx$$

então, aplicando o Teorema 2.1, temos que:

$$\varphi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y \frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha) + F_{y'} \frac{\partial}{\partial \alpha} y'(x, \alpha) \right] dx$$

onde

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y} F(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha))$$

$$F_{y'} = \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)).$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} [y(x) + \alpha(\bar{y}(x) - y(x))] = \frac{\partial}{\partial \alpha} [y(x) + \alpha \delta y] = \delta y$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} y'(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} [y'(x) + \alpha \delta y'] = \delta y'$$

obtém-se

$$\varphi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha))\delta y + F_{y'}(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha))\delta y'] dx$$

$$\varphi'(0) = \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y(x), y'(x))\delta y + F_{y'}(x, y(x), y'(x))\delta y'] dx.$$

O valor $\varphi'(0)$ representa a variação do funcional v em y , ou seja, δv .

Concluimos que uma condição necessária para que o funcional $v[y]$ apresente um extremo em y , consiste na anulação da sua variação pelo Teorema 2.2, ou seja,

$$\varphi'(0) = \int_{x_0}^{x_1} [F_y\delta y + F_{y'}\delta y'] dx = \delta v = 0.$$

Considerando que $F_y\delta y$ e $F_{y'}\delta y'$ são funções contínuas, temos que

$$\int_{x_0}^{x_1} [F_y\delta y] dx + \int_{x_0}^{x_1} [F_{y'}\delta y'] dx = \delta v = 0$$

isto é,

$$\int_{x_0}^{x_1} [F_y\delta y] dx = - \int_{x_0}^{x_1} [F_{y'}\delta y'] dx.$$

Resolvendo a segunda integral por partes, temos

$$\int_{x_0}^{x_1} [F_{y'}\delta y'] dx = F_{y'}\delta y|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} [(F_{y'})'\delta y] dx.$$

Como $\bar{y}(x_0) = y_0$ e $\bar{y}(x_1) = y_1$, então $\delta y|_{x=x_0} = \bar{y}(x_0) - y(x_0) = 0$ e $\delta y|_{x=x_1} = \bar{y}(x_1) - y(x_1) = 0$. Assim,

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y\delta y) dx = - \left[- \int_{x_0}^{x_1} ((F_{y'})'\delta y) dx \right],$$

e portanto

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx = 0 \quad (2.6)$$

onde o primeiro fator $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}$ é uma função contínua e o segundo fator δy , devido a arbitrariedade da eleição da função comparação $\bar{y}$, é uma função arbitrária e diferenciável e se anula nos pontos $x = x_0$ e $x = x_1$.

O próximo passo é provar que

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0. \quad (2.7)$$

E para tanto, usaremos o seguinte Lema:

Lema 2.1. Lema Básico do Cálculo Variacional

Seja $G(x)$ uma função definida e contínua em $[x_1, x_2] \subset \mathbb{R}$ com

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) G(x) dx = 0 \quad (2.8)$$

para toda função $\eta(x)$ contínua em $[x_1, x_2]$. Então,

$$G(x) = 0, \quad \forall \quad x \in [x_1, x_2]. \quad (2.9)$$

Demonstração:

Suponhamos que exista x' , $x_1 \leq x' \leq x_2$ tal que $G(x') \neq 0$.

Sem perda de generalidade, suponhamos que $G(x') > 0$. Como G é contínua, existe uma vizinhança de x' , digamos $(x'_1, x'_2) \subset [x_1, x_2]$ tal que $G(x) > 0$ para $x \in (x'_1, x'_2)$.

Consideremos a função:

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x_1 \leq x \leq x'_1 \\ (x - x'_1)^2 (x - x'_2)^2 & \text{se } x'_1 < x < x'_2 \\ 0 & \text{se } x'_2 \leq x \leq x_2 \end{cases} \quad (2.10)$$

Para esta função η particular, que é contínua em seu domínio de definição, temos que $\eta(x) > 0$ para $x \in (x'_1, x'_2)$ e como $G(x) > 0$ para $x \in (x'_1, x'_2)$, então:

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) G(x) dx = \int_{x'_1}^{x'_2} (x - x'_1)^2 (x - x'_2)^2 G(x) dx > 0, \quad (2.11)$$

o que contradiz a hipótese.

Se $G(x') < 0$, basta considerarmos a função $-G(x')$.

Portanto, $G(x) = 0$ para todo $x \in [x_1, x_2]$.

Retornando à teoria, sendo a função $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}$ contínua em $[x_0, x_1]$ e a variação δy uma função arbitrária, temos, pelo lema anterior e por (2.6) que

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \quad (2.12)$$

para todo $x \in [x_0, x_1]$.

Portanto, a função extremal y do funcional $v[y]$ deve satisfazer a equação diferencial de segunda ordem, dada por (2.12), denominada de **Equação de Euler**.

Agora vejamos um exemplo da utilização da Equação de Euler para determinar extremos de um funcional.

Exemplo 2.1. Em que curva o funcional a seguir pode alcançar seu extremo?

$$v[y(x)] = \int_0^1 [(y')^2 + 12xy] dx; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

A Equação de Euler tem a forma $y'' - 6x = 0$, que tem como solução geral $y = x^3 + C_1x + C_2$. Utilizando as condições de fronteira, obtemos: $C_1 = 0, C_2 = 0$. Portanto $y = x^3$ é candidata a extremo do funcional.

2.4 Alguns casos particulares de F

No exemplo dado anteriormente a Equação de Euler foi resolvida facilmente, mas isso nem sempre ocorre.

Vejamos agora alguns casos particulares da Equação de Euler.

1. Se F depender somente de x e y' .

Considerando a função $F = F(x, y')$, a Equação de Euler assume a forma $\frac{d}{dx}F_{y'} = 0$, ou seja :

$$F_{y'}(x, y') = C. \quad (2.13)$$

Desta forma, a busca por uma função extremal foi reduzida à solução de uma equação diferencial de primeira ordem envolvendo y' e x .

Exemplo 2.2. Determine as funções que, ligando $A(1, 3)$ e $B(2, 5)$ são extremas do funcional

$$v[y(x)] = \int_1^2 y'(x)(1 + x^2 y'(x)) dx.$$

Como F só depende de y' e x a Equação de Euler é da forma (2.13), portanto

$$1 + 2x^2 y'(x) = C$$

que tem como solução,

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2, \quad x \neq 0$$

com $C_1 = \frac{1-C}{2}$. A fim de se escolher qual hipérbole desta família passa pelos pontos dados, obtemos o sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 3 \\ \frac{C_1}{2} + C_2 = 5 \end{cases}$$

que nos fornece $C_1 = -4$ e $C_2 = 7$. Com isso o candidato a extremal procurado é

$$y(x) = 7 - \frac{4}{x}, \quad x \neq 0.$$

2. Se F depender apenas de y' .

Desta forma $F_y = 0$, e mais, a derivada parcial $\frac{\partial F}{\partial y'}$ pode ser representada como uma função ϕ de y' e a Equação de Euler é dada por:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = \frac{d}{dx} (\phi(y')) = \phi'(y') y'' = 0.$$

Para que esta equação tenha validade para toda função ϕ é necessário que,

$$y'' = 0$$

que tem como solução

$$y(x) = C_1 x + C_2. \quad (2.14)$$

Neste caso, quando F depender apenas de y' , as funções extremais são necessariamente funções lineares.

Exemplo 2.3. Comprimento de Arco

Seja $y = f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$ com derivadas contínuas em $]a, b[$. Queremos definir o comprimento de seu gráfico, que é a curva C , entre os pontos $P_0(a, f(a))$ e $P_n(b, f(b))$.

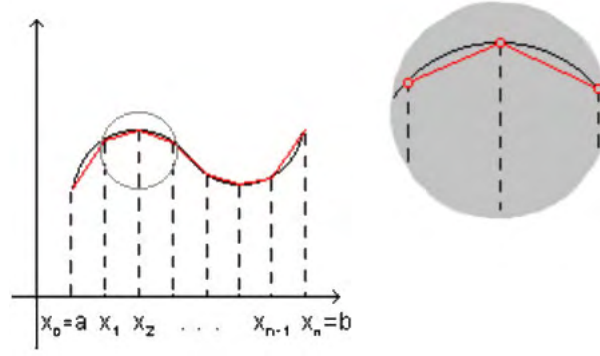
Para tanto, em primeiro lugar, vamos considerar uma partição P do intervalo $[a, b]$:

$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$, tal que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$.

Consideremos a linha poligonal determinada pelos pontos P_i , $i = 0, 1, \dots, n$, dados por $(x_i, f(x_i))$.

Assim, o comprimento de C é dado por:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |P_{i-1} P_i|$$


 Figura 2.1: Partição de $[a, b]$ (ELSGOLTZ,1696).

onde

$$\begin{aligned} |P_{i-1}P_i| &= \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} = \\ &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 \left[1 + \frac{(f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}{(x_i - x_{i-1})^2} \right]} \end{aligned}$$

Como f é de classe C^1 , por hipótese, a expressão L pode ser melhorada. Pelo Teorema do Valor Médio, podemos escrever:

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1})$$

para algum $\bar{x}_i$ tal que $x_{i-1} < \bar{x}_i < x_i$, ou seja,

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 \left[1 + \frac{(f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}{(x_i - x_{i-1})^2} \right]} = \sqrt{1 + [f'(\bar{x}_i)]^2} \Delta x_i$$

onde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ para $1 \leq i \leq n$.

Desta maneira,

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(\bar{x}_i)]^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

uma vez que $\sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(\bar{x}_i)]^2} \Delta x_i$ é uma soma de Riemann para a função $g(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ relativo à partição P do intervalo $[a, b]$.

Assim, o comprimento da curva C é

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Agora encontremos o candidato a extremal do funcional L obtido anteriormente. Percebemos que este funcional pode ser escrito na forma:

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2} dx; \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$$

Como o funcional dado só depende de y' a Equação de Euler tem a forma (2.14) e assim, temos que $y(x) = C_1x + C_2$ é o extremal para o funcional. Aplicando as condições de fronteira, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} C_1x_0 + C_2 = y_0 \\ C_1x_1 + C_2 = y_1 \end{cases}$$

que apresenta como solução do problema

$$y(x) = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} (x - x_0) + y_0.$$

3. Se F não depender de y' .

Neste caso, a Equação de Euler reduz-se a

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0. \quad (2.15)$$

Observe que esta equação não depende de constantes indeterminadas, por isso, em geral não satisfaz as condições de fronteira $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$.

Portanto, a solução do problema variacional considerado em geral não existe. Só existirá uma função na qual o funcional alcança um extremo no caso excepcional, quando a solução $y(x)$ passar pelos pontos de fronteira, (x_0, y_0) e (x_1, y_1) .

Exemplo 2.4. Determine a função extremal para

$$v[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(2x - y) dx \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Como F não depende de y' , a equação de Euler terá a forma (2.15), assim teremos

$$2x - 2y = 0$$

isto é,

$$y = x$$

que satisfaz as condições de fronteira. Com isso, o funcional pode, eventualmente, assumir um extremo.

Por outro lado, se mudarmos as condições de fronteira, por exemplo $y(0) = 0$ e $y(\frac{\pi}{2}) = 1$, o problema torna-se insolúvel.

4. Se F é linear em relação a y' .

Neste caso, podemos escrever a seguinte igualdade:

$$F(x, y, y') = M(x, y) + N(x, y)y'.$$

Desta forma o funcional

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx = \int_{x_0}^{x_1} [M(x, y) + N(x, y)y']dx, \quad (2.16)$$

tem a Equação de Euler dada por

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0. \quad (2.17)$$

Assim como no caso anterior, só teremos solução se a função satisfizer as condições de fronteira.

Exemplo 2.5. Considere o funcional

$$v[y(x)] = \int_0^1 (y^2 + x^2 y')dx; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = a.$$

Temos neste caso um funcional linear em relação a y' , assim

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial N}{\partial y} = 0.$$

Então

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

é equivalente a

$$y = x.$$

Notemos que a primeira condição de fronteira está satisfeita pois $y(0) = 0$, mas a segunda condição só está satisfeita se $a = 1$.

Para $a \neq 1$, não existe extremal que satisfaça as condições de fronteira.

5. Se F depender apenas de y e y' .

Uma outra forma de escrevermos a Equação de Euler é dada por

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0. \quad (2.18)$$

Como F não depende de x explicitamente, temos

$$F_y - F_{yy'}y' - F_{y'y''}y'' = 0.$$

Multiplicando por y' obtemos

$$F_y y' - F_{yy'} y'^2 - F_{y'y''} y'' y' = 0$$

que é equivalente a

$$\frac{d}{dx} (F - y' F_{y'}) = 0$$

visto que,

$$\frac{d}{dx} (F - y' F_{y'}) = F_y y' + [F_{y'y''} - y'' F_{y'}] - F_{yy'} y'^2 - F_{y'y''} y'' y'.$$

Então,

$$\frac{d}{dx} (F - y' F_{y'}) = 0$$

e integrando em relação a x , resulta

$$F - y' F_{y'} = C_1. \quad (2.19)$$

Terminamos assim, a análise dos possíveis casos para o funcional F e no próximo item citaremos alguns resultados relacionados com as condições suficientes que o funcional F deve satisfazer para admitir um extremo. Esta teoria só será citada e não será desenvolvida por completa e os resultados podem ser encontrados em [4], páginas 358-369.

2.5 Condições suficientes para extremos

Para apresentar as condições suficientes para que um funcional v apresente extremal em uma curva C , são necessárias, preliminarmente, algumas definições e considerações.

Se num dado plano xy , por cada ponto de uma certa região D passar apenas uma curva da família $y = y(x, c)$, dizemos que esta família de curvas forma um campo na região D , ou mais exatamente, um campo próprio.

Por exemplo, as retas paralelas $y = x + c$ formam um campo no interior do círculo centrado na origem, de raio 1, e o coeficiente angular de cada reta tangente às curvas da família de retas, no ponto (x, y) é $p(x, y) = 1$.

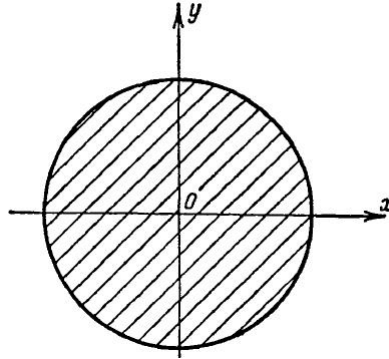


Figura 2.2: Retas $y = x + c$ (ELSGOLTZ,1696).

Por outro lado, a família de parábolas $y = (x - a)^2 - 1$ não forma um campo no interior do mesmo círculo, pois as parábolas se cruzam.

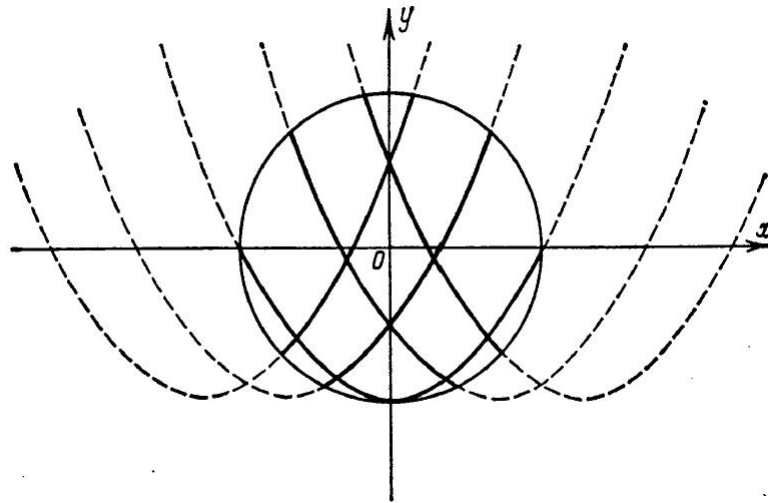


Figura 2.3: Parábolas $y = (x - a)^2 - 1$ (ELSGOLTZ,1696).

Quando as curvas de uma família cobrem toda a região D e se cortam em seu interior, somente no seu centro, dizemos que a família forma um campo, chamado de **campo central**.

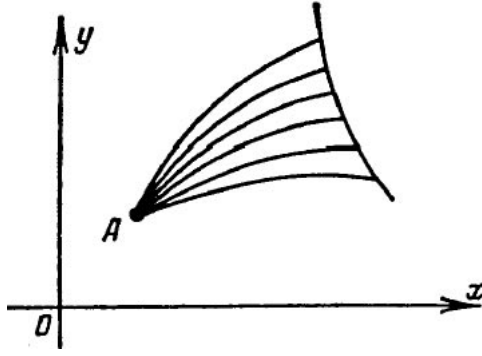


Figura 2.4: Campo central (ELSGOLTZ,1696).

Exemplo 2.6. As senóides $y = C \sin x$, que formam um campo central, para $0 \leq x \leq a$, $a < \pi$ (Figura 2.5). Esta mesma família forma um campo próprio em uma região do $\mathbb{R}^2$ que contém o segmento $\delta \leq x \leq a$ no eixo das abscissas, em que $\delta > 0$ e $a < \pi$.

Porém, se a região contiver o segmento $0 \leq x \leq a_1$, $a_1 > \pi$, esta família não forma um campo.

Se um campo central ou próprio for formado por uma família de extremais de um certo problema variacional, então o campo será chamado de campo de extremais.

Suponhamos agora que a curva $y = y(x)$ seja extremal para o problema variacional dado pelo funcional

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

com pontos de fronteira $A(x_0, y_0)$ e $B(x_1, y_1)$, fixos.

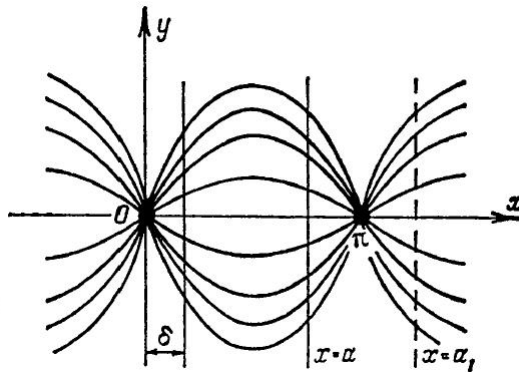


Figura 2.5: Senóides $y = C \sin x$ (ELSGOLTZ,1696).

Dizer que o extremal $y = y(x)$ está incluso em um campo de extremais, significa que uma família de extremais $y = y(x, c)$ forma um campo em uma região D que contém

o extremal $y = y(x)$ dado para um certo valor c_0 , de forma que este extremal não pertença à fronteira da região D .

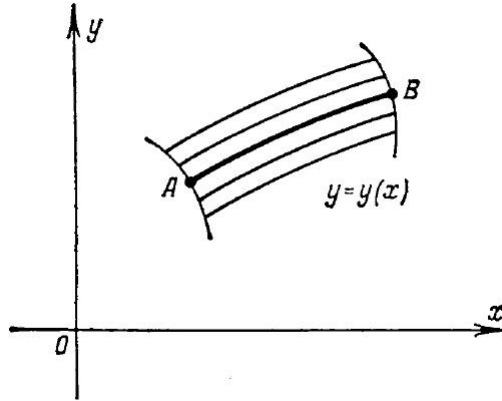


Figura 2.6: Campo de extremal 1 (ELSGOLTZ,1696).

Se os extremais apresentarem como centro o ponto $A(x_0, y_0)$, também teremos um campo em torno de extremal dado que passa por este ponto, ou seja, um campo central. Como parâmetro da família, pode-se tomar a inclinação da tangente às curvas no ponto $A(x_0, y_0)$.

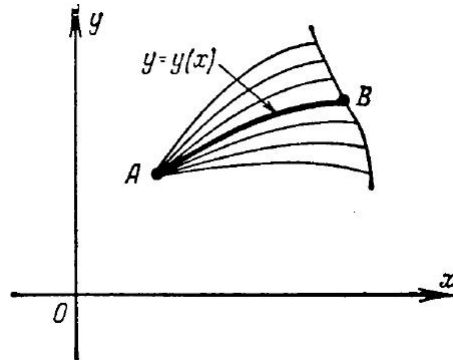


Figura 2.7: Campo de extremal 2 (ELSGOLTZ,1696).

Como exemplo considere o funcional $v[y] = \int_0^a (y'^2 - y^2)dx$ e um extremal $y = 0$ que une os pontos $(0, 0)$ e $(a, 0)$, onde $0 < a < \pi$. A solução geral da equação de Euler $y'' + y = 0$ é $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$.

Usando as condições de fronteira, obtemos $c_1 = 0$ e assim as curvas $y = c_2 \sin x$ formam um campo central no segmento $0 \leq x \leq a$, $a < \pi$, que inclui o extremal $y = 0$ para $c_2 = 0$.

Agora vamos analisar as condições que garantem a construção de um campo central de extremais com centro em um ponto A e que contenha o arco AB do extremal.

Esta condição da possibilidade da construção de um campo de extremais que inclua o extremal dado, chama-se condição de Jacobi.

Seja $y = y(x, c)$ a família de extremais com centro em A , que contém o extremal dado.

Como o extremal dado satisfaz a Equação de Euler, então temos que $\frac{\partial y(x_0, c)}{\partial c} = 0$ e $\frac{\partial y}{\partial c}$ é uma função que só depende da variável x , pois a constante c é uma constante de integração.

Por exemplo, considere o extremal do funcional $v[y] = \int_{x_0}^{x_1} y'(2x - \frac{1}{2}y')dx$ com $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$.

A Equação de Euler é dada por:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = -\frac{d}{dx}[2x - y'] = -2 + y'' = 0.$$

Assim, $y'' = 2$, $y' = 2x + c$, então $y = x^2 + cx + d$.

Como $y(x_0) = y_0$, então $y = x^2 + cx + [y_0 - x_0^2 - cx_0]$ e se $f(x, c) = x^2 + cx$, temos que $y(x, c) = f(x, c) + [y_0 - f(x_0, c)]$.

Logo, $\frac{\partial y(x, c)}{\partial c} = \frac{\partial f(x, c)}{\partial c} - \frac{\partial f(x_0, c)}{\partial c}$ e portanto $\frac{\partial y(x_0, c)}{\partial c} = 0$ e $\frac{\partial y(x, c)}{\partial c} = x - x_0$, isto é, $\frac{\partial y}{\partial c}$ é uma função que só depende da variável x .

Voltando ao problema, devemos encontrar uma função de extremais $y(x, c)$ com $\frac{\partial y}{\partial c} = u(x)$, $u(x_0) = 0$ e que $u(x)$ não se anula em outro ponto do intervalo (x_0, x_1) , para que não tenha outros pontos em comum com o extremal y dado, além do ponto $A(x_0, y_0)$.

Logo, se $u(x) = \frac{\partial y(x, c)}{\partial c}$, então $u' = u_x = \frac{\partial^2 y(x, c)}{\partial c \partial x}$.

As funções $y = y(x, c)$ são soluções da equação de Euler; portanto

$$F_y(x, y(x, c), y'(x, c)) - \frac{d}{dx}[F_{y'}(x, y(x, c), y'(x, c))] = 0.$$

Derivando esta identidade em relação à c temos:

$$F_{yy}u + F_{yy'}u' - \frac{d}{dx}[F_{yy'}u + F_{y'y'}u'] = 0$$

ou,

$$\left(F_{yy} - \frac{d}{dx}F_{yy'}\right)u - \frac{d}{dx}[F_{y'y'}u'] = 0.$$

Esta equação diferencial de 2ª ordem, linear e homogênea, é chamada de Equação de Jacobi.

Concluimos que a condição suficiente para que o arco AB do extremal possa ser incluído em um campo central de extremais centrados no ponto $A(x_0, y_0)$ é que a solução $u = u(x)$ da Equação de Jacobi, que satisfaz a condição $u(x_0) = 0$, não se anule em outro ponto do intervalo (x_0, x_1) .

Exemplo 2.7. Verifiquemos se a condição de Jacobi está satisfeita para o extremal do funcional $v = \int_0^a (y'^2 - y^2)dx$, que passa pelos pontos $A(0, 0)$ e $B(a, 0)$, $a \in \mathbb{R}$. A equação de Jacobi é dada por

$$-2u - \frac{d}{dx}(2u') = 0 \quad \text{ou} \quad u'' + u = 0$$

onde

$$u = C_1 \sin(x - C_2).$$

Como $u(0) = 0$, então $C_2 = 0$ e $u = C_1 \sin x$.

A função u anula-se nos pontos $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, portanto, se $0 < a < \pi$, a função u se anula no segmento $0 \leq x \leq a$ somente no ponto $x = 0$ e a condição de Jacobi se cumpre.

Mas, se $a \geq \pi$, a função u se anula no segmento $0 \leq x \leq a$, pelo menos, no ponto $x = \pi$; a condição de Jacobi não se cumpre.

Agora vamos analisar o comportamento do incremento Δv .

Suponhamos que para o problema

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx, \quad y(x_0) = y_0; \quad y(x_1) = y_1$$

a condição de Jacobi se cumpre e portanto, o extremal C que passa pelos pontos $A(x_0, y_0)$ e $B(x_1, y_1)$ pode ser incluído em um campo central com inclinação $p(x, y)$.

É possível transformar o incremento $\Delta v = \int_{\tilde{C}} F(x, y, y')dx - \int_C F(x, y, y')dx$ em uma forma mais apropriada, para se analisar o sinal de Δv ao passar do extremal C à uma certa curva próxima admissível $\tilde{C}$. Porém, não apresentamos neste trabalho as considerações necessárias para esta transformação.

O incremento pode ser dado por

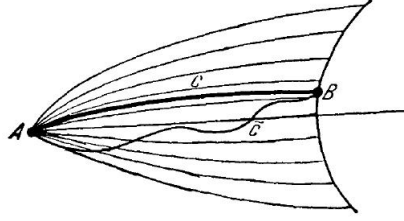


Figura 2.8: Campo central com inclinação $p(x, y)$ (ELSGOLTZ, 1696).

$$\begin{aligned}\Delta v &= \int_{\tilde{C}} [F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p)F_p(x, y, p)] dx \\ &= \int_{\tilde{C}} E(x, y, p, y') dx,\end{aligned}$$

onde a função $E(x, y, p, y') = F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p)F_p(x, y, p)$ é chamada de Função de Weierstrass.

Assim, concluímos que uma condição suficiente para que o funcional v assuma um mínimo na curva C é que a função E não seja negativa, pois se $E \geq 0$, então também $\Delta v \geq 0$.

E uma condição suficiente para que v assuma um máximo em C será $E \leq 0$, ou seja, $\Delta v \leq 0$.

Observemos que o estudo do sinal da função E pode trazer certas dificuldades e por isto, é conveniente substituir a condição de que a função E tenha sinal constante por outra condição de comprovação mais fácil.

Suponhamos que a função $F(x, y, y')$ seja derivável até a ordem 3 em relação ao argumento y' . Pela Fórmula de Taylor,

$$F(x, y, y') = F(x, y, p) + (y' - p)F_p(x, y, p) + \frac{(y' - p)^2}{2!}F_{y'y'}(x, y, q)$$

onde q está entre p e y' .

Sendo

$$E(x, y, p, y') = F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p)F_p(x, y, p)$$

temos que

$$E(x, y, p, y') = \frac{(y' - p)^2}{2!}F_{y'y'}(x, y, q).$$

Assim, analisar o sinal de E é equivalente a analisar o sinal de $F_{y'y'}$, ou seja, ao estudar a possibilidade de um extremal mínimo, basta avaliar se $F_{y'y'}(x, y, q) \geq 0$ nos pontos (x, y) próximos dos pontos da curva C , para valores arbitrários de q . E para

avaliar um extremal máximo, devemos ter $F_{y'y'}(x, y, q) \leq 0$.

A partir das considerações já feitas, vamos agora citar as condições suficientes para que um funcional v apresente um extremal em uma curva C , que são:

1: A curva C é um extremal que satisfaz as condições de fronteira.

2. O extremal C pode ser incluído em um campo de extremais. Esta condição pode ser obtida através da condição de Jacobi, representada pela equação que tem o seu nome, dada por

$$\left(F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'} \right) u - \frac{d}{dx} [F_{y'y'} u'] = 0$$

em que $u(x) = \frac{\partial y(x, c)}{\partial c}$.

3. A função de Weierstrass $E(x, y, p, y')$ não altera seu sinal em todos os pontos (x, y) próximos à curva C e para valores arbitrários de y' no caso de extremal mínimo, $E \geq 0$ ($F_{y'y'} \geq 0$) e no caso de extremal máximo $E \leq 0$ ($F_{y'y'} \leq 0$).

Neste capítulo estruturamos a teoria do Cálculo Variacional que será utilizada no capítulo seguinte com o objetivo de determinar a solução do problema da Braquistócrona.

3 O Problema da Braquistócrona

O problema da Braquistócrona foi proposto por Johann Bernoulli em 1696 e consiste em encontrar uma curva que uma partícula deve descrever ao se deslocar de um ponto A até um ponto B situados em um mesmo plano vertical, no menor tempo possível, apenas sob a ação da gravidade. Neste caso o ponto A é suposto estar acima do ponto B , mas não na mesma vertical. Se A e B estiverem na mesma vertical, a solução é uma reta.

Neste capítulo vamos deduzir, de duas formas distintas, que a curva procurada é a cicloide; a primeira aplicando a teoria de Cálculo Variacional obtido no capítulo anterior e a segunda, tratando a questão como um problema que envolve Óptica e Geometria .

Apresentamos também, algumas simulações computacionais com a utilização do programa Maple, evidenciando os resultados apresentados neste trabalho.

3.1 Modelagem do problema usando Cálculo Variacional

Esquemmatizando o problema no plano.

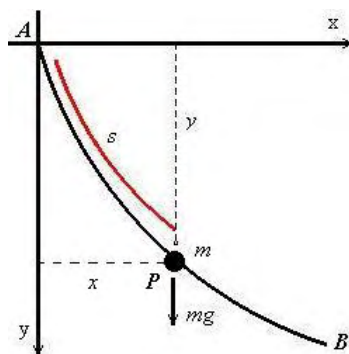


Figura 3.1: Esquema do Problema da Braquistócrona no plano.

Note que o eixo y está orientado no sentido oposto ao usual. Isto é conveniente pois, neste caso, a força exercida pela gravidade fica orientada no sentido positivo.

Consideremos um sistema de coordenadas onde A seja a origem, ou seja, os pontos relacionados ao problema são $A(0,0)$ e $B(x_1, y_1)$.

Em Física, quando uma partícula atua sob a ação da gravidade, o trabalho realizado ao se deslocar de A até um ponto P é igual à variação da energia cinética.

Se v é o módulo da velocidade da partícula no ponto P , y o seu deslocamento vertical e m sua massa, temos:

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2$$

Mas, a velocidade escalar é a variação do espaço percorrido s , pelo tempo, ou seja,

$$\frac{ds}{dt} = v \quad e \quad v = \sqrt{2gy}.$$

Sabemos que o comprimento do arco entre $A(0,0)$ e $P(x,y)$, representado pelo gráfico da função $y = y(x)$, é dado por

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2(\xi)} d\xi$$

que derivando, resulta

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2(x)}.$$

Assim, denotando por t o tempo gasto neste trajeto, temos

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{ds} \frac{ds}{dx} = \frac{1}{v} \sqrt{1 + y'^2}. \quad (3.1)$$

Para determinarmos o tempo total para se deslocar de $A(0,0)$ a $P(x,y)$ basta integrar (3.1)

$$t(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{1 + y'^2(s)}{2gy(s)}} ds. \quad (3.2)$$

Observemos que este funcional não depende explicitamente de x e assim, a Equação de Euler tem a forma (2.19).

Consideremos então

$$t(x) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^x \sqrt{\frac{1 + y'^2(s)}{y(s)}} ds, \quad y(0) = 0 \quad , \quad y(x_1) = y_1.$$

Nosso problema é agora, encontrar a função $y(x)$ que minimiza (3.2), com as condições de fronteira dadas.

Neste caso a função considerada é $F(y, y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}$. Assim,

$$F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}$$

Sendo a Equação de Euler $F - y'F_{y'} = C_1$ dada por (2.19), temos

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C_1$$

que é equivalente a

$$\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C_1$$

ou seja,

$$y(1+y'^2) = C_2.$$

Para resolver esta equação diferencial, vamos introduzir um parâmetro t considerando $y'(x(t)) = \cot(t)$ e assim, utilizando a equação diferencial anterior, obtemos

$$y = \frac{C_2}{1 + \cot^2(t)}.$$

Fazendo algumas substituições trigonométricas temos

$$y = \frac{C_2}{2} (1 - \cos(2t)).$$

Derivando y em relação à t , temos

$$dy = C_2 \sin(2t) dt = 2C_2 \sin(t) \cos(t) dt.$$

Como $y'(x) = \frac{dy}{dx}$, então $dx = \frac{dy}{y'(x)}$, assim

$$dx = \frac{2C_2 \sin(t) \cos(t) dt}{\cot(t)} = 2C_2 \sin^2(t) dt.$$

Fazendo substituição trigonométrica, temos

$$dx = C_2 (1 - \cos(2t)) dt$$

ou seja,

$$x(t) = C_2 t - \frac{C_2 \sin(2t)}{2} + C_3 = \frac{C_2}{2} (2t - \sin(2t)) + C_3.$$

Assim, a solução paramétrica é dada por

$$y(t) = \frac{C_2}{2} (1 - \cos(2t)) \quad e \quad x(t) - C_3 = \frac{C_2}{2} (2t - \sin(2t))$$

Fazendo $2t = t_1$ e sendo $C_3 = 0$ pois $x(0) = 0$, obtemos

$$y = \frac{C_2}{2} (1 - \cos(t_1)) \quad e \quad x = \frac{C_2}{2} (t_1 - \sin(t_1)),$$

que é a equação paramétrica da curva chamada ciclóide, que definimos a seguir.

Definição 3.1. *Seja C uma circunferência de raio r , s uma reta e P um ponto de C . Denominamos ciclóide à curva descrita pelo ponto P quando C rola sobre a reta s , sem deslizar, dada pela equação paramétrica:*

$$\begin{cases} x = r(\alpha - \sin\alpha) \\ y = r(1 - \cos\alpha) \end{cases}$$

Concluimos que a curva candidata para o problema da Braquistócrona é a ciclóide. Agora vamos aplicar as condições suficientes para mostrar que a ciclóide seja realmente a curva que minimiza o tempo de descida da partícula entre os dois pontos.

O feixe de ciclóides $x = C_1(t - \sin(t))$ e $y = C_1(1 - \cos(t))$ com centro em $(0, 0)$ forma um campo central que inclui o extremal

$$x = a(t - \sin(t)) \quad e \quad y = a(1 - \cos(t)),$$

onde a é determinado pela condição de que a ciclóide passa pelo segundo ponto de fronteira $B(x_1, y_1)$, então $x_1 < 2\pi a$ (Figura 3.2).

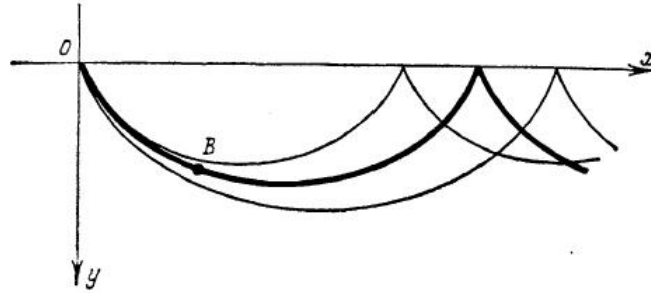


Figura 3.2: Feixe de Ciclóides (ELSGOLTZ,1696).

Temos também

$$F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} \quad e$$

$$F_{y'y'} = \frac{1}{\sqrt{y}(1+y'^2)^{3/2}} > 0$$

para qualquer y' . Assim, pelas condições suficientes, para $x_1 < 2\pi a$, o funcional assume um mínimo na ciclóide.

$$x = a(t - \operatorname{sen}(t)) \quad e \quad y = a(1 - \cos(t)).$$

Desta forma temos a comprovação de que a solução do problema da Braquistócrona é realmente a cicloide.

No próximo item, desenvolvemos o problema proposto através da Óptica e Geometria.

3.2 Resolução de Johann Bernoulli

Nesta segunda resolução do problema da Braquistócrona, vamos seguir os passos da solução dada por Johann Bernoulli. Consideremos, inicialmente, os seguintes fatos:

1. Pelo **Princípio de Fermat**, sabemos que a luz viaja de um ponto para outro no menor tempo possível.

2. Pelo **fenômeno da refração**, a luz tem uma velocidade diferente conforme o meio em que se propaga (veja Figura 3.3). Se tivermos dois meios distintos nos quais a luz se propaga com velocidades v_1 , v_2 , a lei de refração afirma que

$$\frac{\operatorname{sen}\mu_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen}\mu_2}{v_2} = \text{cte} = K \quad (3.3)$$

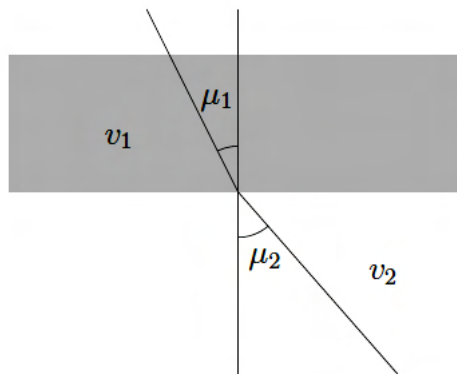


Figura 3.3: Esquema para o fenômeno da refração da luz (LIMA,2004).

3. Imaginemos um meio óptico formado por lâminas $l_1, l_2, \dots, l_n$ horizontais e finas tais que a velocidade da luz em cada lâmina seja $v_i, i = 1 \dots n$ conforme mostra a Figura 3.4. Então, um raio de luz que parte de A e chega em B, seguirá uma trajetória como indicada na Figura 3.4, de modo que, para todo $j, j = 1, \dots, n$,

$$\frac{\text{sen} \mu_j}{v_j} = K. \quad (3.4)$$

Esse caminho percorrido pelo raio de luz é o que fornece tempo mínimo para ir de A até B com as velocidades indicadas.

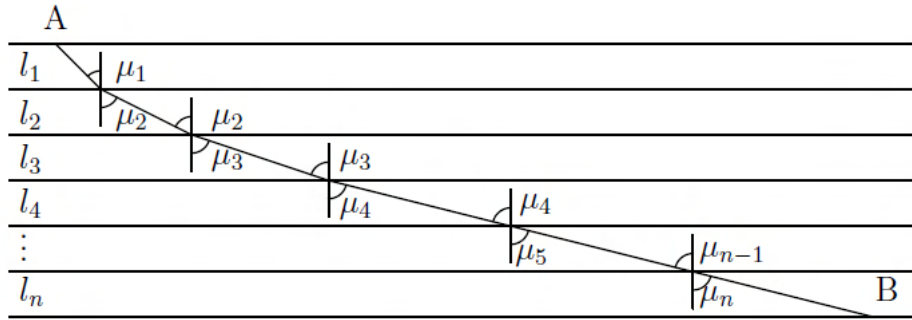


Figura 3.4: Meio óptico e a trajetória descrita por um raio de luz partindo de A chegando em B (LIMA,2004).

Embora o princípio de tempo mínimo usado anteriormente venha ao encontro do problema da Braquistócrona, ainda não está claro como podemos utilizar o fenômeno da refração para resolvê-lo.

A dificuldade é que no problema da Braquistócrona a velocidade com que a partícula se desloca sobre a curva varia de acordo com a posição em que ela se encontra. Já no caso da refração do raio de luz, a velocidade é constante em cada meio.

Para transpor esta dificuldade faremos o uso da noção de limite.

4. Sabemos que a velocidade, depois da partícula descer uma altura y é $\sqrt{2gy}$. Então, o caminho que dá o tempo mínimo será o caminho seguido por um raio de luz num meio tal que a velocidade da luz aumente continuamente com a descida y e seja precisamente $\sqrt{2gy}$.

No limite deste processo, é de se esperar que a trajetória da luz através de um meio cuja densidade aumente continuamente à medida que o raio de luz desce, satisfaça

$$\frac{\text{sen} \mu}{v} = K \quad (3.5)$$

onde μ é o ângulo que a reta tangente à trajetória faz com a perpendicular e v é a velocidade instantânea.

Para finalizar o problema da Braquistócrona consideremos a figura a seguir.

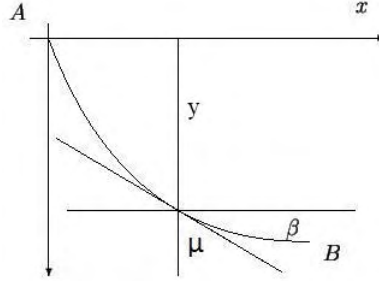


Figura 3.5: Ângulo entre o caminho descrito pelo raio de luz e a vertical (LIMA,2004).

Como a partícula deve descrever a trajetória mais rápida e sua velocidade escalar é variável, tudo passa como no caso do raio de luz que atravessa um meio não-homogêneo. Como vimos anteriormente, devemos ter:

$$\frac{\text{sen}\mu}{v} = K. \quad (3.6)$$

Como $v = \sqrt{2gy}$ e $y' = \tan\beta$, combinando a identidade trigonométrica, temos

$$\text{sen}\mu = \cos\beta = \frac{1}{\sec\beta} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\beta}}.$$

Com (3.6), obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{2gy(1 + (y')^2)}} = K.$$

Simplificando esta última equação, chegamos a

$$y[1 + (y')^2] = c.$$

Como vimos anteriormente na **seção 3.1**, a solução desta equação diferencial é a função que representa a cicloide.

Vamos agora, a título de ilustração, verificar que a cicloide satisfaz a igualdade (3.6).

Temos que

$$\frac{dx}{d\alpha} = r - r\cos\alpha, \quad \frac{dy}{d\alpha} = r\sin\alpha. \quad (3.7)$$

Por outro lado,

$$\tan\mu = \frac{dx}{dy} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \tan\frac{\alpha}{2} \quad (3.8)$$

e, portanto,

$$\tan\mu = \tan\frac{\alpha}{2}. \quad (3.9)$$

Assim,

$$\mu = \frac{\alpha}{2} \quad (3.10)$$

e também,

$$v = \sqrt{2gr(1 - \cos\alpha)} = 2\sqrt{gr}\sin\frac{\alpha}{2}. \quad (3.11)$$

Assim, de fato,

$$\frac{\sin\mu}{v} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{gr}} = \frac{1}{2\sqrt{gr}} = cte = K \quad (3.12)$$

onde K não depende de α . Portanto, a cicloide tem a propriedade dada por (3.6).

3.3 Análise de dados obtidos através de simulações computacionais

Nesta seção vamos usar alguns recursos do software matemático Maple 12, para obtermos uma comparação do tempo gasto pela partícula para percorrer a trajetória do ponto $A(0, 0)$ ao ponto $B(\pi, -2)$, ao longo das curvas dadas por:

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = -\frac{2}{\pi}x.$$

$$f_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = -2\sqrt{\frac{x}{\pi}}.$$

$$f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_3(x) = -2\sqrt[3]{\frac{x}{\pi}}.$$

$$f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f_4(t) = (t - \sin(t), -1 + \cos(t)).$$

Para calcular o tempo gasto no percurso, devemos avaliar a integral

$$t(x) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\pi \sqrt{\frac{1 + y'^2(s)}{y(s)}} ds$$

utilizando as funções definidas anteriormente, usando que a força da gravidade é igual a 9.8 m/s^2 .

E para calcular o comprimento das trajetórias, usamos a função comprimento de arco. Através do programa Maple, obtivemos os seguintes resultados:

Curva	Tempo Gasto	Comprimento
f_1	1.19	3.73
f_2	1.01	3.88
f_3	1.02	4.03
f_4	1.00	4.00

Tabela 3.1: Comparação entre as funções.

Observemos que a cicloide, que é representada por f_4 , é a curva que possui a trajetória mais rápida. De forma surpreendente, a reta, representada por f_1 , que possui a trajetória mais curta, é também a que apresenta maior tempo gasto para completar o trajeto. A seguir, apresentamos as trajetórias da partícula através das curvas dadas pelas funções f_i , $i=1,\dots,4$, em quatro instantes diferentes, evidenciando os resultados citados. E para um melhor entendimento destes fatos, apresentamos também, no apêndice, os comandos necessários para obter uma animação gráfica, evidenciando o tempo gasto pela partícula ao deslizar por cada curva.

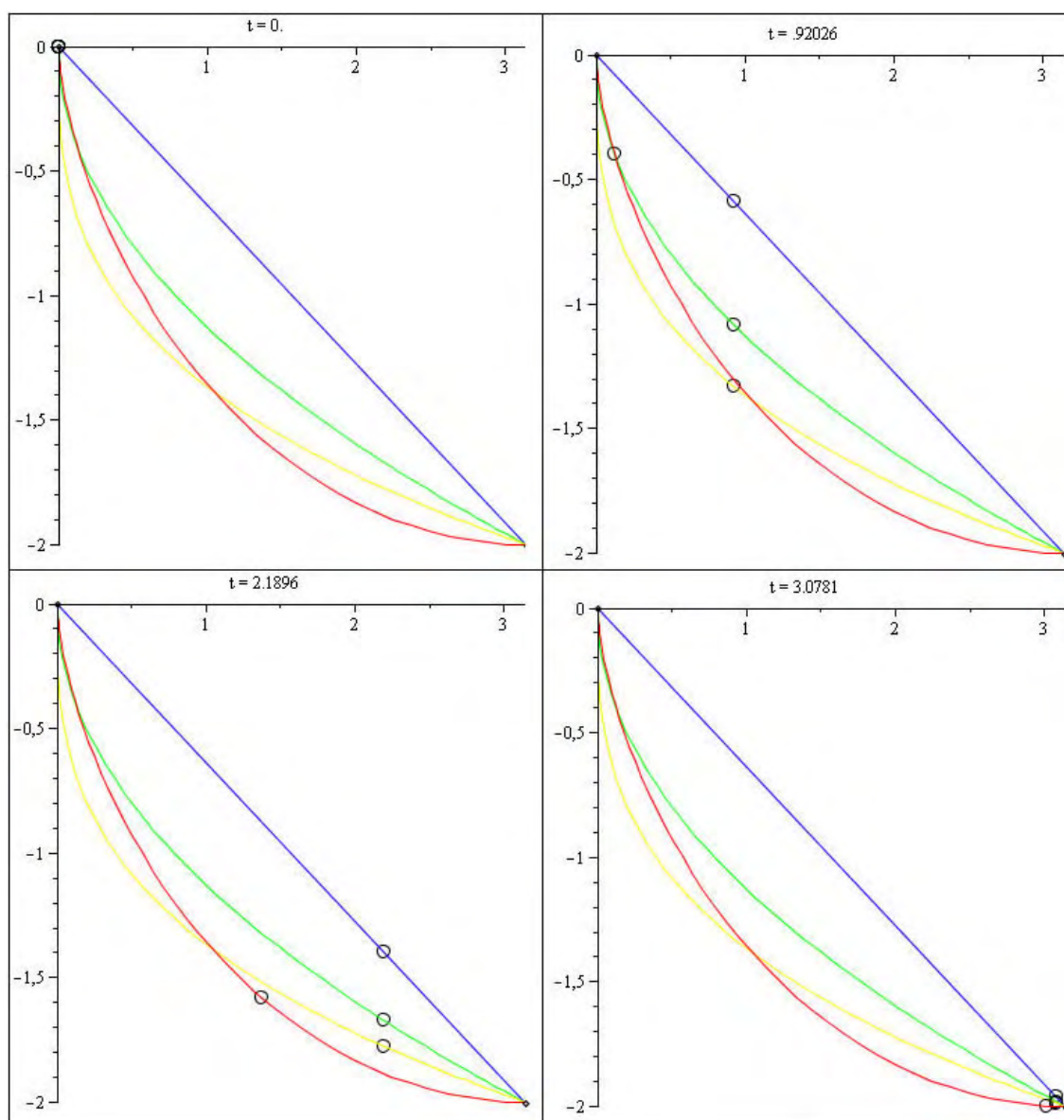


Figura 3.6: Trajetórias da partícula através das curvas dadas por: $f_1(x) = -\frac{2}{\pi}x$ (azul), $f_2(x) = -2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$ (verde), $f_3(x) = -2\sqrt[3]{\frac{x}{\pi}}$ (amarelo) e $f_4(t) = (t - \sin(t), -1 + \cos(t))$ (vermelho) entre $t=0$; $t=0.92026$; $t=2.1896$ e $t=3.0781$.

4 Conclusão

Com este trabalho tivemos a oportunidade de perceber como se deu o desenvolvimento de uma nova teoria matemática. Vimos que a partir de um problema proposto como desafio aos matemáticos da época, iniciou-se uma busca por métodos de solução o que culminou no que hoje conhecemos como Cálculo Variacional.

Desenvolvemos a teoria de Cálculo Variacional associada aos problemas onde as fronteiras são fixas, com o objetivo de solucionarmos um dos problemas clássicos mais famosos: O problema da Braquistócrona.

Sugerimos a leitura da Ref. [4], capítulos 7 e 8, onde o autor trata de problemas com fronteiras móveis e aborda de forma ampla as condições suficientes para extremos; nesta leitura será possível perceber a grandiosidade da teoria do Cálculo Variacional e suas ramificações com outras áreas do conhecimento.

Desenvolvemos a solução do problema da Braquistócrona de duas formas distintas em que obtivemos como resposta a cicloide. Em seguida, fizemos a utilização do software Maple com o objetivo de comparar o tempo gasto pela partícula através de diversas curvas; a conclusão obtida já era esperada devido ao desenvolvimento teórico anterior; mais uma vez constatamos que a cicloide é a curva que resulta o menor tempo.

Gostaríamos que a proposta de estudar um problema clássico do cálculo variacional desenvolvida neste trabalho, inspirasse outras iniciativas nesta mesma linha ou até mesmo na aplicação destes problemas. Para tal sugerimos a leitura do livro *Calculus of Variations: With Application to Physics and Engineering* do autor Robert Weinstock, onde o autor aborda algumas aplicações do cálculo variacional na física e na engenharia.

Referências Bibliográficas

- [1] BOYER, C. *História da Matemática*, Edgard Blucher, São Paulo, 1996.
- [2] CORREÂ, W. *Resolução do Problema da Braquistócrona Usando Maple*, UTFPR, Paraná, 2009.
- [3] LIMA, E.L. *Curso de Análise - Volumes 1 e 2*, IMPA, Rio de Janeiro, 2004.
- [4] ELSGOLTZ, L. *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional*, Mir, Moscou, 1969.
- [5] KIRK, D. *Optimal Control Theory and Introduction*, Dover Publications, New York, 2004.
- [6] LIMA, G. *Cálculo Variacional: Problemas Clássicos, Aspectos Teóricos e Desdobramentos*, Unicamp, Campinas, 2004.
- [7] LOURO, A. *Computação Simbólica em Maple no Cálculo de Variações*, Universidade de Aveiro, Portugal, 2006.

Apêndice: Linha de comando do Maple

Definição do funcional T e cálculo do tempo gasto no percurso da partícula através de cada curva.

```
> T := y -> (1/sqrt(2*9.8)) * int(sqrt((1+diff(y,x)^2)/(-y)), x=0..pi);
```

$$T = y \rightarrow \frac{\int_0^\pi \sqrt{1 + \left(\frac{\partial}{\partial x} y\right)^2} dx}{\sqrt{2 \cdot 9.8}}$$

```
> TempoReta := T(-2*x/pi);
```

$$\text{TempoReta} = 0.2258769757 \sqrt{2} \sqrt{\pi^2 + 4}$$

```
> TempoRaizQuadrada := T(-sqrt(4*x/pi));
```

$$\text{TempoRaizQuadrada} = -\frac{0.05646924393 \sqrt{2} \left(-\frac{8}{3} \pi^{7/2} \text{hypergeom}\left(\left[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{4}\right], -\frac{1}{\pi^2}\right) - \frac{8}{3} \frac{\pi^{7/2}}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2} \right)}{\pi^{5/2}}$$

```
> TempoRaizCúbica := T(-(8*x/pi)^(1/3));
```

$$\begin{aligned} \text{TempoRaizCúbica} = & -\frac{1}{\pi} \left(0.001045726740 \left(-\frac{648}{5} \pi^5 \sqrt{2} \text{hypergeom}\left(\left[-\frac{5}{24}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{19}{24}\right], -\frac{64}{729 \pi^6}\right) \right. \right. \\ & - \frac{18}{5} \frac{24^{1/4} \pi^{21/4} \sec\left(\frac{3}{8} \pi\right) \csc\left(\frac{3}{8} \pi\right) \sec\left(\frac{1}{24} \pi\right) \csc\left(\frac{1}{24} \pi\right) \Gamma\left(\frac{17}{24}\right) \Gamma\left(\frac{19}{24}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{8}\right) \Gamma\left(\frac{23}{24}\right) \Gamma\left(\frac{7}{8}\right) \Gamma\left(\frac{13}{24}\right)} + 48 \pi^3 \sqrt{2} \text{hypergeom}\left(\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right], \left[\frac{2}{3}, \frac{9}{8}, \frac{4}{3}\right], -\frac{64}{729 \pi^6}\right) \\ & \left. \left. - \frac{16}{11} \sqrt{2} \pi \text{hypergeom}\left(\left[\frac{11}{24}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}\right], \left[\frac{4}{3}, \frac{35}{24}, \frac{5}{3}\right], -\frac{64}{729 \pi^6}\right) \right) \right) \end{aligned}$$

```
> X := t-sin(t);
Y := -1+cos(t);
dYdt := diff(Y,t)/diff(X,t);
EQ := simplify(sqrt((1+dYdt^2)/(-Y))*diff(X,t));
```

$$\begin{aligned} X &:= t - \sin(t) \\ Y &:= -1 + \cos(t) \\ dYdt &:= -\frac{\sin(t)}{1 - \cos(t)} \\ EQ &:= -\text{csign}\left(\frac{1}{-1 + \cos(t)}\right) \sqrt{2} \end{aligned}$$

```
> TempoBraquistócrona := (1/sqrt(2*9.8)) * int(EQ, t=0..pi);
```

$$\text{TempoBraquistócrona} = 0.2258769757 \pi \sqrt{2}$$

```
> evalf(TempoReta, 3);
evalf(TempoRaizQuadrada, 3);
evalf(TempoRaizCubica, 3);
evalf(TempoBraquistocrona, 3);
```

1.19

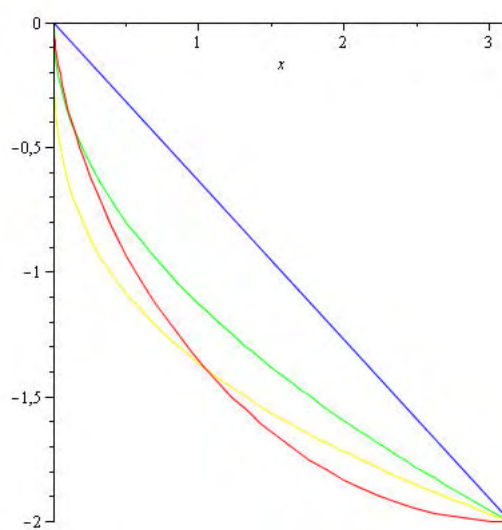
1.01

1.02

1.00

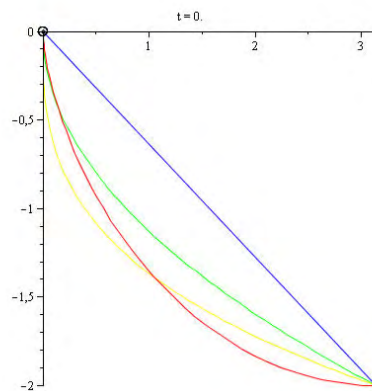
Construção dos gráficos das curvas.

```
> gr1 := plot([-2 * x / pi, -sqrt(4 * x / pi), -(8 * x / pi)^(1/3)], x = 0 .. pi, color = [blue, green, yellow]) :
gr2 := plot([t - sin(t), -1 + cos(t), t = 0 .. pi], color = red) :
plots[display](gr1, gr2);
```



Utilizamos o comando **animate** para a construção da animação do trajeto da partícula, determinando o tempo gasto para completar o percurso através de cada curva no intervalo $[0, \pi]$.

```
> restart;with(plots):
> reta:=plot(-2*x/Pi, x=0..Pi, color=blue):
> t1:=animate(pointplot, [[t,eval(-2*x/Pi,x=t)],symbol=circle,symbolsize=20],t=0..Pi, frames=100, background=reta):
> raiz:=plot(-sqrt(4*x/Pi), x=0..Pi, color=green):
> t2:=animate(pointplot, [[t,eval(-sqrt(4*x/Pi),x=t)],symbol=circle,symbolsize=20],t=0..Pi, frames=100, background=raiz):
> cubica:=plot(-(8*x/Pi)^(1/3), x=0..Pi,color=yellow):
> t3:=animate(pointplot, [[t,eval(-(8*x/Pi)^(1/3),x=t)],symbol=circle,symbolsize=20],t=0..Pi, frames=100, background=
cubica):
> baquistocrona:=plot([t-sin(t),-1+cos(t), t= 0 .. Pi], color=red):
> t4:=animate(pointplot, [[eval(t-sin(t),t=t),eval(-1+cos(t),t=t)],symbol=circle,symbolsize=20],t=0..Pi, frames=100,
background=baquistocrona, color=red):
> t5:=pointplot([ [0,0], [Pi,-2]]):
> display(t1,t2,t3,t4,t5);
```



Cálculo do comprimento das trajetórias, utilizando a função comprimento de arco.

```
> with(Student[Calculus1]):
> comprimentoreta := ArcLength(-2*x/Pi, x=0..Pi);
comprimentoRaizQuadrada := ArcLength(-sqrt(4*x/Pi), x=0..Pi);
comprimentoRaizCubica := ArcLength(-(8*x/Pi)^(1/3), x=0..Pi);
comprimentodaBraquistocrona := ArcLength([t-sin(t),-1+cos(t)], t=0..Pi);
evalf(comprimentoreta, 3);
evalf(comprimentoRaizQuadrada, 3);
evalf(comprimentoRaizCubica, 3);
evalf(comprimentodaBraquistocrona, 3);
```

3.73
3.88
4.03
4