

148



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.006/95

Detetores de Unruh e contribuições térmicas

Sandro Silva e Costa

Orientador

Prof. Dr. George E. A. Matsas



Novembro 1995

Resumo

Neste trabalho são apresentados resultados para as contribuições térmicas na evolução de detetores de Unruh, comparando-se, em parte, tais resultados com os obtidos por meio do Eletromagnetismo semi-clássico. Nesta comparação torna-se evidente a importância do spin das partículas consideradas seja como detetores seja como modos do campo que interagem com o detetor. No estudo aqui apresentado o campo é sempre um escalar, mas o detetor de Unruh representa um elétron, que apresenta spin semi-inteiro; neste caso o tratamento semi-clássico demonstra que é importante considerar correções na energia devidas ao spin - esta é a precessão de Thomas. Em todo este tratamento para obtenção das correções térmicas a temperatura do banho térmico de partículas foi colocada via função de Green térmica. Não é, porém, necessariamente claro como colocar a temperatura em um contexto mais amplo: qual é, se existe, a conexão entre temperatura e spin de um sistema de partículas? Tal dúvida relaciona-se com a questão de como transformar a temperatura em diferentes referenciais, que é o assunto de um dos capítulos desta dissertação: a temperatura pode ser vista como parte de um 4-vetor, de um spinor ou de algum outro tipo de objeto matemático?

Palavras-chave: detetores, aceleração, temperatura, banho térmico

Áreas do conhecimento: 1.05.01.02-9, 1.05.01.03-7, 1.05.01.04-5.

Abstract

In this work we present corrections for the evolution of Unruh detectors in the presence of thermal baths, comparing this results with the ones obtained by means of semiclassical Eletromagnetism. In this comparison becomes evident the importance of the particle's spin, considered as detectors or as modes of the interacting field. In this study the field is a scalar one, but the Unruh detector represents an eletron, which is a fermion; in this case the semiclassical treatment shows that is important to consider corrections in the energy due to the spin - this effect is the Thomas precession. During all this treatment of Unruh detectors the temperature of the thermal bath was introduced by means of a thermal Green function. However, it's not necessarily clear how to introduce the temperature in a more wide context: which is the conexion between temperature and spin? This doubt is related with the question of how to transform the temperature in different frames: can the temperature be seen as part of a 4-vector, a spinor or some other kind of mathematical object?

Key-words: detectors, acceleration, temperature, thermal bath

“Recita em nome do teu Senhor, que criou o homem de poças de sangue. Recita! Teu Senhor é O Mais Bondoso, que pela pena disse ao homem o que ele não sabia.”

Palavras ditas, segundo a tradição, pelo Anjo Gabriel a Maomé.

“Que o nome do Senhor seja louvado, desde agora e para sempre, pois a ele pertencem a sabedoria e o poder. Ele modifica os tempos e as estações, depõe e entroniza os reis, dá sabedoria aos sábios e ciência aos inteligentes. Ele revela os segredos mais profundos e sabe o que as trevas escondem, pois a luz mora com ele. A ti, ó Deus de meus pais, eu louvo e celebro, porque me deste sabedoria e poder. Tu me revelaste o que pedi (...)”

Daniel, 2:20-23

“Pois, sendo amantes da sabedoria, mais que da riqueza mundana, eles almejavam operações mais elevadas e excelentes; e, certamente, aquele para quem todo o curso da natureza está aberto, regozija-se não tanto por ser capaz de produzir ouro e prata, ou por ficarem os demônios a ele submetidos, mas por ver os céus se abrirem, ascenderem e descenderem os anjos do Senhor, e por ter seu nome auspiciosamente escrito no livro da vida.”

Trecho de um manual alquímico usado por Isaac Newton

“Ele me procura ardentemente na escuridão, e quero em breve conduzi-lo à luz. No arbusto que reverdece, o jardineiro já distingue as flores e os frutos que se desenvolverão na estação seguinte.”

Fala do Senhor, no prólogo de Fausto, de Goethe

Agradecimentos

É usual que toda dissertação ou tese tenha uma página de agradecimentos; e eu realmente tenho muito que agradecer:

- a meu orientador, George E. A. Matsas, que talvez tenha sido o mais sério homem de ciências que já encontrei – nunca estarei à sua altura ou de acordo com seus padrões;
- a meus muitos amigos, que me acolheram em momentos de necessidade (alguns dos quais já não estão tão próximos) – Randall G. Teixeira, Daisy S. Afuso, Marcel D. L. Barbosa, Paulo Sérgio R. da Silva, Carlos A. S. Pires, Jeferson L. Zacco, Vânia X. de Oliveira, Luciene P. Freitas, Orlando L. G. Peres, Laurence Stendard, Edson T. Branco (desculpe-me se esqueci alguém...);
- às minhas musas, que como cenouras postas na frente de um cavalo, sempre inatingíveis, proporcionaram-me o desejo de ir em frente – sem tu, pequena princesa da torre de marfim, eu jamais teria escrito a monografia que originou a primeira parte deste trabalho; e sem tu, moça do coração rosado, eu jamais terminaria esta dissertação;
- aos meus pais, que nunca compreenderam porquê, mas que sempre me deixaram seguir nesse absurdo caminho da física.

Índice

| | | |
|-----------|--|-----------|
| 1 | Visão geral | 3 |
| I | Visão semiclássica | 6 |
| 2 | Descrição inicial | 7 |
| 2.1 | Porquê esta descrição? | 7 |
| 2.2 | Tratamento intuitivo | 9 |
| 2.2.1 | Descrição elementar | 9 |
| 2.2.2 | Comentários | 13 |
| 2.3 | Descrição semiclássica geral | 13 |
| 2.3.1 | Teoria semiclássica da radiação para uma carga | 13 |
| 2.3.2 | Teoria semiclássica da radiação para o spin | 15 |
| 2.3.3 | Partículas com fator g arbitrário | 17 |
| 2.4 | Pósitrons e elétrons | 22 |
| 3 | Precessão de Thomas | 25 |
| 3.1 | O que é a Equação de Thomas? | 25 |
| 3.2 | Spin e campo eletromagnético como tensores | 26 |
| 3.3 | Equação de Thomas e Hamiltoniana de interação | 27 |
| 3.4 | Comentários finais | 33 |
| II | Teoria de Campos: detetores de Unruh | 35 |
| 4 | Detetores e o vácuo | 36 |
| 4.1 | Definições | 36 |
| 4.2 | Detetores inerciais no vácuo | 40 |
| 4.3 | Detetores uniformemente acelerados no vácuo | 41 |
| 4.4 | Detetores em movimento circular no vácuo | 43 |
| 5 | Contribuições térmicas | 45 |
| 5.1 | Definições | 45 |
| 5.2 | Detetores inerciais | 46 |

| | | |
|------------|---|-----------|
| 5.3 | Detetores uniformemente acelerados | 48 |
| 5.4 | Detetores em movimento circular | 52 |
| 6 | Temperatura e relatividade | 55 |
| 6.1 | Qual é o problema? | 55 |
| 6.2 | Visões anteriores | 56 |
| 6.3 | Radiação de corpo negro | 60 |
| 6.4 | Uma solução usando detetores de Unruh | 61 |
| 7 | Conclusão | 65 |
| 7.1 | Introdução | 65 |
| 7.2 | Temperatura e tempo | 65 |
| 7.3 | Temperatura e distribuição de partículas | 66 |
| 7.4 | Perspectivas | 72 |
| III | Apêndices | 73 |
| 8 | Teoria de perturbação e transição de dipolo | 74 |
| 9 | Hamiltonianas e equações de movimento | 80 |
| 10 | Funções de Airy e de Bessel | 82 |
| 11 | Integrações | 86 |
| 12 | Detetores de Unruh em $2 + 1$ dimensões | 88 |
| 13 | Integrações numéricas | 92 |
| 14 | Termodinâmica relativística | 95 |

1. Visão geral

Detetores movendo-se num banho térmico de partículas escalares, acelerados ou com velocidade constante: eis os personagens e o cenário principais deste trabalho; o roteiro é também simples, centrado na busca de respostas para uma única questão: o que se pode esperar, de não trivial e novo, desta combinação de ‘fótons escalares’ e detetores?

Antes de começar, contudo, se faz necessário apresentar em maior profundidade os protagonistas desta busca, que são os detetores. Este é um trabalho de Física Teórica, e assim detetores, neste caso, serão sistemas genéricos, idealizados, que têm a capacidade de interagir com o meio externo através da troca – absorção ou emissão – de partículas escalares; tais sistemas detetores, por simplicidade, terão apenas dois níveis de energia, o estado fundamental e um estado excitado, com um intervalo de energia bem definido entre estes dois níveis, tal como medido no referencial próprio do detetor; a interação com o campo escalar é que permite a excitação ou desexcitação do sistema. A esse tipo de detetor hipotético dá-se o nome de detetor de Unruh-De Witt, e na prática qualquer sistema de dois níveis serve como exemplo; em especial um elétron com seus dois níveis de spin, ‘up’ e ‘down’, é um destes detetores: o campo escalar pode ser usado para aproximar o comportamento dos fótons que podem alterar a orientação do spin.

Assim, em resumo, os detetores deste trabalho serão elétrons, acelerados ou não, movendo-se em uma região preenchida por um banho térmico de partículas escalares, que fazem o papel de fótons; o spin destes elétrons é um parâmetro que pode assumir apenas dois valores, funcionando como um filtro de energia para os ‘fótons’ do banho térmico que irão interagir com o elétron. Note-se que deste modo os elétrons são detetores que contam quantas partículas com uma energia bem definida existem no banho térmico; tal contagem fornece uma distribuição das partículas do banho por energia, o que pode ser usado para determinar a temperatura do banho térmico. Logo, pode-se falar, neste caso, do uso de elétrons como termômetros.

Voltando agora á pergunta inicial, pode-se dizer que é já bastante conhecido o resultado obtido para um detetor de Unruh acelerado num vácuo inercial: o detetor não percebe o vácuo do mesmo modo que um observador em repouso em relação a este vácuo, ‘sentindo’ um banho de partículas cuja

Motivação desta dissertação: estudo da contribuição térmica na evolução de detetores de Unruh

Organização desta dissertação em três partes: 1. Visão geral, 2. Trabalho de campo, 3. Efeito FDU

Efeito FDU (Fulling-Davies-Unruh)

distribuição indica uma temperatura proporcional a sua aceleração própria – a temperatura de Unruh. Os cálculos principais deste trabalho são uma extensão deste problema, feitos para um detetor acelerado não mais no vácuo, de modo a verificar-se até que ponto o banho térmico já existente compete na excitação do detetor com o banho ‘criado’ pela aceleração – e é aí que aparecem novos resultados. Em condições alcançadas por elétrons em aceleradores de partículas, as acelerações típicas são da ordem de $a = 3 \times 10^{23} m/s^2$, o que corresponde a uma temperatura de Unruh da ordem de $\hbar a / 2\pi c k = 1200 K$. Sendo este valor apenas 4 vezes superior que as temperaturas de laboratório, seria interessante considerar um detetor acelerado em um banho térmico de fundo ao invés de no vácuo, de modo a investigar-se em que medida correções de temperatura finita devem ser levadas em conta quando do teste do efeito Unruh sob reais condições de laboratório.

Como a excitação do detetor pode representar a depolarização do elétron, já que ambos os sistemas compartilham a característica comum de serem sistemas de dois níveis, pode-se mostrar que em condições reais de aceleradores a maior contribuição para a resposta do detetor vem do vácuo inercial, tornando a contribuição devida à presença do banho térmico pouco importante. Isto corrobora a idéia usual de considerar os elétrons como sendo acelerados no vácuo de Minkowski, quando testando o efeito Unruh em anéis de colisão.

Por uma questão de completeza o problema do aparecimento de uma depolarização de feixes de elétrons em aceleradores de partículas é mostrado, neste trabalho, inicialmente num tratamento mais tradicional, usando-se eletromagnetismo semi-clássico, que enfatiza a importância do efeito conhecido como precessão de Thomas, para só depois passar-se à outra abordagem, relacionada à interação dos elétrons acelerados com um campo escalar.

Um outro estudo, menor, realizado aqui, aproveita as mesmas técnicas e, assim, aparece quase que ‘*en passant*’: um detetor parado em meio à radiação de um corpo negro observa o espectro de partículas conhecido como Planckiana – a partir deste espectro pode-se determinar a temperatura do corpo negro; um detetor em movimento inercial em relação a esta mesma radiação irá observar a mesma Planckiana e, conseqüentemente, a mesma temperatura? A conclusão aqui apresentada é que não: a transformação de temperaturas em diferentes referenciais inerciais não é direta.

Este trabalho começa, portanto, com um capítulo – ‘**Descrição inicial**’ – cujo objetivo é simplesmente mostrar uma descrição semi-clássica da depolarização de elétrons em aceleradores; tal descrição é complementada por um capítulo extra, ‘**Precessão de Thomas**’. Logo depois, no capítulo seguinte, ‘**Detetores e o vácuo**’, o leitor é apresentado aos conceitos formais de detetores de Unruh-De Witt e funções de Green, ferramentas emprestadas da Teoria de Campos com as quais se trabalhará para se tentar obter de forma mais simples a depolarização dos elétrons e a comparação entre os efeitos devidos ao vácuo e ao banho térmico. Os cálculos com tais ferramentas, que

Elétrons como
sistemas de dois
níveis

Organização desta
dissertação em três
partes:
I. Visão semiclássica
II. Teoria de Campos
III. Apêndices

são a parte central deste trabalho, estão reunidos no próximo capítulo, '**Contribuições térmicas**'.

Ao falar-se de detetores ir-se-á falar do espectro observado por um detetor em movimento inercial num banho térmico; é daí que segue uma pequena discussão sobre transformação de Lorentz da temperatura, no capítulo intitulado '**Temperatura e relatividade**'.

Por fim, na '**Conclusão**', propõe-se ao leitor que pense um pouco sobre o significado do conceito de temperatura, que é fundamental em todos os cálculos deste trabalho: é a temperatura apenas um parâmetro útil – mas sem maior significação – ou uma quantidade extremamente importante na descrição de um sistema de muitas partículas?

Além destes capítulos há também uma série de apêndices, cuja leitura não é fundamental para o entendimento do texto central, mas que contêm explicações, às vezes bastante didáticas, de detalhes relacionados aos resultados apresentados; tais apêndices, portanto, destinam-se a cobrir pequenas dúvidas que porventura possam aparecer durante a leitura do texto principal ou a aprofundar um pouco mais assuntos não diretamente relacionados com os objetivos principais deste trabalho. O capítulo sobre precessão de Thomas, por exemplo, foi originalmente concebido como um destes apêndices, mas pela importância da precessão de Thomas para o entendimento da visão semi-clássica e pela extensão do assunto, decidiu-se colocá-lo no corpo principal do trabalho.

2. Descrição inicial

2.1 Porquê esta descrição?

A ideia desta descrição é fornecer a partir de condições iniciais de uma situação física, a descrição da evolução temporal do sistema. A descrição é feita em termos de uma função de onda $\psi(x,t)$ que satisfaz a equação de Schrödinger. A função de onda é interpretada como a amplitude de probabilidade de encontrar o sistema numa determinada posição x no instante t . A evolução temporal da função de onda é dada pela equação de Schrödinger. A descrição é válida para sistemas não relativísticos e para potenciais que variam lentamente no espaço e no tempo.

Parte I

Visão semiclássica

Situações anteriores deste problema - p. 12, 13, 14 - mostram a construção da função de onda a partir da função de onda inicial.

$$\psi(x,t) = \psi(x,0) e^{-iEt/\hbar} \quad (1.1)$$

onde $\psi(x,0)$ é a função de onda inicial.

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(k) e^{ikx} dk \quad (1.2)$$

onde $\tilde{\psi}(k)$ é a transformada de Fourier de $\psi(x,0)$.

$$\tilde{\psi}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,0) e^{-ikx} dx \quad (1.3)$$

onde $\psi(x,0)$ é a função de onda inicial e $\tilde{\psi}(k)$ é a transformada de Fourier de $\psi(x,0)$. A função de onda $\psi(x,t)$ é dada por (1.1).

[1] A função de onda $\psi(x,t)$ é dada por (1.1). A função de onda $\psi(x,0)$ é dada por (1.2). A transformada de Fourier de $\psi(x,0)$ é dada por (1.3).

2. Descrição inicial

2.1 Porquê esta descrição?

A idéia desta primeira descrição é tentar entender o processo de mudança do spin de elétrons em aceleradores de partículas usando apenas Mecânica Quântica e Eletromagnetismo, no nível mais básico possível. Assim, este capítulo aborda a depolarização de elétrons através de uma visão semi-clássica do assunto, tendo, portanto, como objetivo básico apenas apresentar um estudo semi-clássico da emissão de radiação durante o 'flip' de spin de um elétron¹. Embora tal problema tenha resultados já bem conhecidos, obtidos através de soluções exatas da equação de Dirac para um elétron relativístico em movimento num campo magnético não necessariamente uniforme, tais resultados também podem, em princípio, ser entendidos através de uma visão mais tradicional da interação entre spin e campo eletromagnético.

Soluções anteriores deste problema – por ex. [2] – indicam a construção de uma polarização transversa que obedece às equações

$$P(t) = P_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}}\right) \quad (2.1)$$

onde onde a polarização máxima é

$$P_0 = \frac{8}{5\sqrt{3}} = 0,9238 \quad (2.2)$$

e o tempo característico τ_0 é

$$\tau_0 = \left[\frac{5\sqrt{3}}{8} \frac{e^2 \gamma^5}{m^2 \rho^3} \right]^{-1} \quad (2.3)$$

sendo que os elétrons (ou pósitrons), inicialmente não polarizados, têm carga e , massa de repouso m e energia² $E = \gamma m$, e estão em movimento uniforme num círculo de raio ρ .

¹Tal apresentação segue de perto um artigo de J.D. Jackson [1] que faz o mesmo

²Durante todo este trabalho usaremos que $\hbar = c = 1$, a menos que se afirme explicitamente o contrário.

Resultados importantes: polarização máxima, que não é 100%, e tempo característico

A probabilidade de transição por unidade de tempo, para o ‘flip’ de spin é, por sua vez [3]

$$w = \frac{5\sqrt{3}}{16} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \gamma^5 |\vec{a}|^3 \left[1 - \frac{2}{9} (\hat{\zeta} \cdot \hat{\beta})^2 + \frac{8\sqrt{3}}{15} \hat{\zeta} \cdot (\hat{\beta} \times \hat{a}) \right] \quad (2.4)$$

onde o vetor $\hat{\zeta}$ indica a direção inicial do spin no referencial da partícula, e $\hat{\beta}$ e \hat{a} são vetores que indicam, respectivamente, a velocidade e a aceleração locais da partícula. Note-se que tal expressão têm uma dependência angular relacionada ao spin inicial das partículas, o que indica o aparecimento da polarização; esta expressão leva também às equações (2.1), (2.2) e (2.3).

Destes resultados surge uma pergunta óbvia: **porque a polarização não se completa**, chegando a 100%? Ou ainda, é esperada esta **depolarização** dos elétrons?

É na tentativa de responder estas perguntas, usando apenas argumentos semi-clássicos, que constrói-se este capítulo, estruturado em três seções principais:

- Na primeira seção, ‘**Tratamento intuitivo**’, uma descrição bastante simples da interação entre o spin do elétron e o campo eletromagnético é apresentada, com seus acertos e falhas sendo discutidos de forma breve.
- Este tratamento simples é substituído, na seção seguinte, ‘**Descrição semiclássica geral**’, por uma visão mais sofisticada da interação entre spin e campo eletromagnético, usando-se a equação relativística clássica de movimento do spin (Equação de Thomas)³, com a Hamiltoniana efetiva obtida para a precessão de Thomas servindo de base para um tratamento semi-clássico da polarização com emissão de radiação de uma partícula de carga elétrica e e fator giromagnético g arbitrário.
- A seção final, ‘**Pósitrons e elétrons**’, apresenta resultados da radiação de flip do spin apenas para pósitrons e elétrons, que possuem $g = 2$.

Note-se desde já que neste tratamento é fundamental a consideração da precessão de Thomas para que aconteça a depolarização dos elétrons. Contudo, se tal efeito for ignorado pode-se ainda ter uma polarização incompleta dos elétrons? A resposta, positiva, a essa pergunta aparece nos próximos capítulos; por ora somente a precessão de Thomas irá ser responsável pela depolarização.

Na visão semiclássica a precessão de Thomas é fundamental para a depolarização

³Por sua importância neste estudo, a precessão de Thomas é descrita com um pouco mais de profundidade num capítulo extra.

2.2 Tratamento intuitivo

2.2.1 Descrição elementar

A descrição mais simples possível para este problema é aquela em que se está no referencial de repouso do elétron em movimento circular, considerando-se então uma transição de dipolo magnético do tipo M1, do nível de energia mais elevado do spin para o mais baixo.

Por simplicidade considera-se uma partícula de carga e e massa m movendo-se a velocidade constante $\mathbf{v} = \vec{\beta}c$ em uma órbita de raio circular ρ em um campo magnético estático e uniforme \mathbf{B} . A frequência orbital desta partícula é

$$\omega_0 = \frac{v}{\rho} = \frac{\omega_B}{\gamma} \quad (2.5)$$

onde $\omega_B = eB/m$. Considerando os campos num referencial inercial K' instantaneamente comovente com a partícula, *i.e.*, movendo-se com velocidade $\mathbf{v} = \vec{\beta}c$ tangente ao círculo de órbita, têm-se que

$$E' = \gamma\beta B \quad (2.6)$$

$$B' = \gamma B \quad (2.7)$$

O momento de dipolo magnético usualmente associado ao spin da partícula é

$$\vec{\mu} = \frac{g}{2} \frac{e}{m} \mathbf{s} = \frac{g}{2} \frac{e}{2m} \vec{\sigma} \quad (2.8)$$

onde $\vec{\sigma}$ são as matrizes de Pauli:

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_y = i \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Este sistema possui, no referencial K' , dois níveis de energia separados pelo intervalo de frequência

$$\omega'_{12} = \left| \frac{g}{2} \right| \frac{eB'}{m} = \left| \frac{g}{2} \right| \gamma^2 \omega_0 \quad (2.9)$$

A probabilidade de transição espontânea do momento de dipolo magnético, do nível superior de energia para o nível mais baixo, por unidade de tempo,

é ⁴

$$w' = \frac{4}{3} (\omega'_{12})^3 \left| \langle 2 | \vec{\mu} | 1 \rangle \right|^2 \quad (2.10)$$

onde os estados inicial e final do spin são definidos como

$$|1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|2\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Usando-se os resultados anteriores isto fica sendo

$$w' = \frac{4}{3} \left(\left| \frac{g}{2} \right| \gamma^2 \omega_0 \right)^3 \left| \langle 2 | \frac{g}{2} \frac{e}{2m} \vec{\sigma} | 1 \rangle \right|^2 \quad (2.11)$$

i.e.

$$w' = \frac{2}{3} \left| \frac{g}{2} \right|^5 \gamma^6 \omega_0^3 \left(\frac{e}{m} \right)^2 \quad (2.12)$$

A taxa de transição no laboratório é a mesma acima, reduzida por um fator γ , devido a dilatação do tempo. Com $\omega_0 = c/\rho = 1/\rho$ para uma partícula relativística, têm-se o tempo característico associado a esta transição dado por

$$\tau_{naive} = \left(\frac{w'}{\gamma} \right)^{-1} = \left[\frac{2}{3} \left| \frac{g}{2} \right|^5 \frac{\gamma^5}{\rho^3} \left(\frac{e}{m} \right)^2 \right]^{-1} \quad (2.13)$$

Tempo característico 'naive': comparar com (2.3)

No referencial de repouso da partícula a radiação emitida no processo de flip do spin é monocromática; assim pode-se escrever

$$\frac{dw'}{d\omega'} = w' \delta(\omega' - \omega'_{12}) \quad (2.14)$$

Para obter a distribuição angular desta radiação é necessário considerar que os fótons emitidos têm como vetores de polarização

$$\vec{\epsilon}^{(1)} = \cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - \sin \theta \vec{k} \quad (2.15)$$

$$\vec{\epsilon}^{(2)} = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} \quad (2.16)$$

Assim, têm-se que a probabilidade de transição com emissão de um fóton numa determinada direção é proporcional a

$$\sum_{k=1}^2 \left| \langle 2 | \vec{\epsilon}^{(k)} \cdot \vec{\mu} | 1 \rangle \right|^2 = \sum_{k=1}^2 \left| \langle 2 | \vec{\epsilon}^{(k)} \cdot \lambda \vec{\sigma} | 1 \rangle \right|^2 \quad (2.17)$$

⁴O cálculo completo é feito usando-se teoria de perturbação dependente do tempo; veja-se o apêndice 'Teoria de perturbação e transição de dipolo'.

onde $\lambda = ge/4m$.

Um cálculo direto fornece

$$\left| \langle 2 | \vec{\epsilon}^{(1)} \cdot \vec{\mu} | 1 \rangle \right|^2 = \lambda^2 |i \cos \theta \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi|^2 = \lambda^2 \cos^2 \theta \quad (2.18)$$

$$\left| \langle 2 | \vec{\epsilon}^{(2)} \cdot \vec{\mu} | 1 \rangle \right|^2 = \lambda^2 |-\sin \varphi + i \cos \varphi|^2 = \lambda^2 \quad (2.19)$$

com o conseqüente resultado

$$\sum_{k=1}^2 \left| \langle 2 | \vec{\epsilon}^{(k)} \cdot \vec{\mu} | 1 \rangle \right|^2 = \lambda^2 (1 + \cos^2 \theta) \quad (2.20)$$

O elemento de matriz que aparece em (2.10) é

$$\left| \langle 2 | \vec{\mu} | 1 \rangle \right|^2 = \lambda^2 \left| \langle 2 | \vec{\sigma} | 1 \rangle \right|^2 = \lambda^2 |1 + i|^2 = 2\lambda^2 \quad (2.21)$$

e assim pode-se escrever

$$\sum_{k=1}^2 \left| \langle 2 | \vec{\epsilon}^{(k)} \cdot \vec{\mu} | 1 \rangle \right|^2 = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) \left| \langle 2 | \vec{\mu} | 1 \rangle \right|^2 \quad (2.22)$$

Logo, a variação angular da probabilidade de transição é

$$\frac{dw'}{d\Omega} = \alpha \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta') \left| \langle 2 | \vec{\mu} | 1 \rangle \right|^2 \quad (2.23)$$

ou

$$\frac{dw'}{d\Omega} = \alpha \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta') \frac{3}{4} \frac{w'}{(\omega'_{12})^3} \quad (2.24)$$

onde a constante de proporcionalidade α é obtida pela normalização do resultado da integração angular:

$$\int \alpha \frac{3}{8(\omega'_{12})^3} (1 + \cos^2 \theta) d\Omega = \frac{\alpha}{2} \int_0^\pi (1 + \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 1$$

i.e.,

$$\alpha = \frac{(\omega'_{12})^3}{2\pi}$$

com o resultado final

$$\frac{dw'}{d\Omega} = \frac{(\omega'_{12})^3}{4\pi} (1 + \cos^2 \theta') \left| \langle 2 | \vec{\mu} | 1 \rangle \right|^2 \quad (2.25)$$

ou

$$\frac{dw'}{d\Omega} = \frac{3}{16\pi} (1 + \cos^2 \theta') w' \quad (2.26)$$

Juntando a este resultado a distribuição de energia têm-se por fim

$$\frac{d^2 w'}{d\omega' d\Omega} = \frac{3}{16\pi} (1 + \cos^2 \theta') w' \delta(\omega' - \omega'_{12}) \quad (2.27)$$

Considerando agora que

$$\frac{1}{\gamma\omega'} \frac{d^2 w'}{d\omega' d\Omega} = \frac{1}{\omega} \frac{d^2 w}{d\omega d\Omega} \quad (2.28)$$

onde as quantidades sem linha referem-se ao referencial do laboratório, têm-se

$$\frac{d^2 w}{d\omega d\Omega} = \frac{\omega}{\gamma\omega'} \frac{3}{16\pi} (1 + \cos^2 \theta') w' \delta(\omega' - \omega'_{12}) \quad (2.29)$$

ou, usando as equações (2.9) e (2.13)

$$\frac{d^2 w}{d\omega d\Omega} = \frac{1}{\tau} \frac{\omega}{\omega'} \frac{3}{16\pi} (1 + \cos^2 \theta') \delta\left(\omega' - \left|\frac{g}{2}\right| \gamma^2 \omega_0\right) \quad (2.30)$$

o que, usando as aproximações

$$\begin{aligned} \omega' \cos \theta' &= \omega \sin \theta \sin \varphi \simeq \omega \theta \sin \varphi \\ 2\gamma\omega' &\simeq (1 + \gamma^2 \theta^2) \omega \end{aligned}$$

com $\gamma \gg 1$, leva a

$$\tau \frac{d^2 w}{d\omega d\Omega} = \frac{3\gamma^2}{4\pi\omega} \frac{[(1 + \gamma^2 \theta^2)^2 + 4\gamma^2 \theta^2 \sin^2 \varphi]}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^3} \delta\left(1 + \gamma^2 \theta^2 - |g| \gamma^3 \frac{\omega_0}{\omega}\right) \quad (2.31)$$

Integração deste último resultado sobre os ângulos, usando que

$$t = 1 + \gamma^2 \theta^2 \Rightarrow \frac{dt}{2\gamma^2} = \theta d\theta \simeq \sin \theta d\theta$$

fornece

$$\tau \frac{dw}{d\omega} = \frac{3}{4\omega_{\max}} \left[1 + 2 \left(\frac{\omega}{\omega_{\max}} \right) - 2 \left(\frac{\omega}{\omega_{\max}} \right)^2 \right] \quad (2.32)$$

onde $\omega_{\max} \equiv |g| \gamma^3 \omega_0$ é a frequência em que o espectro de emissão vai abruptamente a zero. Note-se que não é necessário integrar esta expressão para perceber que nesta descrição elementar a polarização é completa, pois não há dependência angular na probabilidade de excitação.

Polarização máxima
'naïve' é 100%

2.2.2 Comentários

Embora não forneça a depolarização dos elétrons, este tratamento simples é exato para partículas neutras possuindo momento magnético, pois uma partícula neutra não sente força de Lorentz na presença de um campo eletromagnético, e as forças de translação que nascem da interação entre o momento magnético da partícula e o campo são geralmente negligíveis. Com partículas carregadas aparece, por sua vez, uma precessão do momento magnético e, portanto, do spin ao redor eixo do campo magnético, que invalida este tratamento mais simples.

Pode-se, pois, pensar que este tratamento intuitivo é válido para partículas de fator g muito grande, já que pode-se escrever

$$g = \frac{2\mu m}{es} \tag{2.33}$$

onde s é o spin da partícula, e sua carga e μ seu momento magnético; assim partículas neutras teriam fator g infinito. A precessão do spin da partícula têm a frequência

$$\Omega = \left[1 + \gamma \left(\frac{g-2}{2} \right) \right] \omega_0 \tag{2.34}$$

e desse modo para g muito grande Ω passa a ser muito maior que a frequência orbital da partícula ω_0 . Neste caso a precessão do spin é quase ignorada pela partícula e pode, assim, ser negligenciada; porém, para partículas com g da ordem de 2 o acoplamento entre o movimento orbital e o do spin não pode ser ignorado; a precessão de Thomas é o efeito clássico que leva em conta esse acoplamento.

Acoplamento
spin-órbita:
precessão de
Thomas

2.3 Descrição semiclássica geral

2.3.1 Teoria semiclássica da radiação para uma carga

A emissão espontânea de radiação por uma partícula de carga e e massa m , interagindo com um campo eletromagnético externo clássico descrito pelos potenciais \mathbf{A} e ϕ , é tratada a partir da Hamiltoniana de interação deste sistema, onde

$$H = H_0 + H_{int} = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2m} + e\phi \tag{2.35}$$

com

$$H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + e\phi \tag{2.36}$$

e

$$H_{int} = -\frac{e}{m} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} \tag{2.37}$$

Tratamento usual
da emissão
espontânea de
radiação

onde o operador de momento é

$$\mathbf{p} = -i\nabla \quad (2.38)$$

e os potenciais obedecem ao gauge de radiação, com $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$; além disso os termos em \mathbf{A}^2 foram negligenciados.

O potencial vetor \mathbf{A} pode ser expandido em ondas planas:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \vec{\epsilon} A_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) + \vec{\epsilon}^* A_0 \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t) \quad (2.39)$$

com

$$A_0 = \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \quad (2.40)$$

e assim têm-se como Hamiltoniana de interação

$$H_{int} = -\frac{e}{m} A_0 \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t) \vec{\epsilon}^* \cdot \mathbf{p} \quad (2.41)$$

Usando a 'regra de ouro' de Fermi⁵,

$$dP(t) = \left| \int_{-\infty}^t \langle \Psi_f(t') | H_{int}(t') | \Psi_i(t') \rangle dt' \right|^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \quad (2.42)$$

têm-se, no limite em que $t \rightarrow +\infty$, a probabilidade de emissão do fóton no elemento de volume do espaço de fase d^3k ; daí a energia radiada pode ser obtida por multiplicação por ω , isto é,

$$\frac{d^2I}{d\Omega d\omega} = \omega \frac{dP(\infty)}{d\Omega d\omega} \quad (2.43)$$

é a intensidade de energia radiada com polarização $\vec{\epsilon}$ por unidade de ângulo sólido e por intervalo de frequência. Usando a eq.(2.41) isto se escreve:

$$\frac{d^2I}{d\Omega d\omega} = \left(\frac{eA_0}{m} \right)^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} \langle \Psi_f(t') | \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t) \vec{\epsilon}^* \cdot \mathbf{p} | \Psi_i(t') \rangle dt' \right|^2 \frac{\omega^3}{(2\pi)^3} \quad (2.44)$$

Note-se que nesta expressão $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$ e $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ são operadores na *picture* de Heisenberg. A passagem para o sistema clássico é feita pela mudança

$$\langle \Psi_f(t') | \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t) \vec{\epsilon}^* \cdot \mathbf{p} | \Psi_i(t') \rangle \rightarrow \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t) \vec{\epsilon}^* \cdot \mathbf{p} \quad (2.45)$$

onde agora $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$ e $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ são simplesmente quantidades clássicas.

2.3.2 Teoria semiclássica da radiação para o spin

Sistema não-relativístico

O tratamento semiclássico da emissão e absorção de radiação por um sistema com spin em movimento segue de perto o que se fez na seção anterior para uma partícula com carga elétrica. A Hamiltoniana de interação a se usar neste caso é

$$H_{int} = -\vec{\mu}_0 \cdot \mathbf{B} \quad (2.46)$$

onde

$$\vec{\mu}_0 = -\frac{ge}{2m}\mathbf{s} \quad (2.47)$$

A equação de movimento correspondente para o spin é ⁶

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = i[H_{int}, \mathbf{s}] = \frac{ge}{2m}\mathbf{s} \times \mathbf{B} \quad (2.48)$$

com a expansão do potencial vetor \mathbf{A} em ondas planas fornecendo

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -i\sqrt{2\pi\omega} \vec{\epsilon}^* \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t) \quad (2.49)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -i\sqrt{2\pi\omega} (\mathbf{n} \times \vec{\epsilon}^*) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t) \quad (2.50)$$

onde \mathbf{n} é um vetor unitário na direção de \mathbf{k} . A substituição da expressão para o campo magnético na Hamiltoniana de interação com a aplicação da regra de ouro de Fermi leva, usando teoria de perturbação na mais baixa ordem (limite de longo comprimento de onda), à taxa de transição para o dipolo magnético obtido na equação (2.10).

Sistema relativístico

A Hamiltoniana de interação para uma partícula relativística não é a apresentada na seção anterior, já que a equação de movimento para o spin de um sistema relativístico é a equação de Thomas

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{e}{m}\vec{s} \times \left[\left(a + \frac{1}{\gamma} \right) \vec{B} - \frac{a\gamma}{\gamma+1} \vec{\beta} \left(\vec{\beta} \cdot \vec{B} \right) - \left(a + \frac{1}{\gamma+1} \right) \vec{\beta} \times \vec{E} \right] \quad (2.51)$$

onde

$$a \equiv \frac{g-2}{2} \quad (2.52)$$

⁵A regra de ouro tal como está no apêndice 'Teoria de perturbação e transição de dipolo', com a integração no tempo indo de $-\infty$ a $+\infty$ refere-se a probabilidade total, tal como se diz logo a seguir no texto; a probabilidade diferencial é obtida limitando-se o intervalo de integração.

⁶Ver apêndice 'Hamiltonianas e equações de movimento'.

Tratamento da emissão de radiação por 'flip' de spin sem precessão de Thomas

Tratamento do 'flip' de spin envolvendo precessão de Thomas

é a chamada anomalia do momento magnético.

Em analogia com o feito na eq.(2.50) pode supor-se que para obter a Hamiltoniana de interação a partir da equação de movimento basta trocar o produto vetorial por um produto escalar, acrescentando-se um sinal negativo ao resultado⁷, isto é,

$$H_{int}^{eff} = -\frac{e}{m} \vec{s} \cdot \left[\left(a + \frac{1}{\gamma} \right) \vec{B} - \frac{a\gamma}{\gamma+1} \vec{\beta} \left(\vec{\beta} \cdot \vec{B} \right) - \left(a + \frac{1}{\gamma+1} \right) \vec{\beta} \times \vec{E} \right] \quad (2.53)$$

Hamiltoniana
efetiva para a
precessão de
Thomas

Para melhor compreensão os termos desta Hamiltoniana podem ser rearranjados, usando-se que no referencial de repouso do elétron o campo magnético é

$$\vec{B}' = \gamma \left(\vec{B} - \vec{\beta} \times \vec{E} \right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \left(\vec{\beta} \cdot \vec{B} \right) \vec{\beta} \quad (2.54)$$

Assim, temos que

$$H_{int}^{eff} = -\frac{1}{\gamma} \vec{\mu}_0 \cdot \vec{B}' + \vec{\omega}_T \cdot \vec{s} \quad (2.55)$$

onde

$$\vec{\omega}_T \equiv \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \left(\vec{a} \times \vec{\beta} \right) = \frac{e}{m} \frac{\gamma}{\gamma+1} \left[\beta^2 \vec{B} - \left(\vec{\beta} \cdot \vec{B} \right) \vec{\beta} - \vec{\beta} \times \vec{E} \right] \quad (2.56)$$

é a frequência de Thomas, que depende da aceleração vista pela partícula.

Os dois termos que aparecem na Hamiltoniana escrita em uma forma compacta têm uma interpretação quase imediata: o primeiro é o acoplamento entre o momento magnético da partícula e o campo magnético tal como visto no referencial da partícula; já o segundo termo corresponde à contribuição relativística para a energia da precessão dos eixos num referencial acelerado⁸.

Fórmula de radiação

A construção da Hamiltoniana de interação para o caso relativístico é agora direta; basta usar as expansões dos campos elétrico e magnético dados pelas equações (2.49) e (2.50) e têm-se então

$$H_{int}^{eff} = -i \frac{e}{m} \sqrt{2\pi\omega s} \cdot \mathbf{V} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t) \quad (2.57)$$

onde

$$\mathbf{V} \equiv \left(a + \frac{1}{\gamma} \right) (\mathbf{n} \times \vec{\epsilon}^*) - \frac{a\gamma}{\gamma+1} \vec{\beta} \left[\vec{\beta} \cdot (\mathbf{n} \times \vec{\epsilon}^*) \right] - \left(a + \frac{1}{\gamma+1} \right) \vec{\beta} \times \vec{\epsilon}^* \quad (2.58)$$

⁷Ver apêndice 'Hamiltonianas e equações de movimento'.

⁸Veja-se o apêndice 'Precessão de Thomas'

Note-se que a diferença entre as eqs.(2.41) e (2.57) está na substituição

$$\vec{\epsilon}^* \cdot \mathbf{p} \rightarrow -i \frac{k}{2} \mathbf{s} \cdot \mathbf{V}$$

com o conseqüente resultado

$$\frac{d^2 I}{d\Omega d\omega} = \left(\frac{e}{m} \right)^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} \langle \Psi_f(t') | \mathbf{s} | \Psi_i(t') \rangle \cdot \mathbf{V} \exp(-ik \cdot \mathbf{r} + i\omega t) dt' \right|^2 \frac{\omega^4}{(2\pi)^2} \quad (2.59)$$

2.3.3 Partículas com fator g arbitrário

Definições iniciais

O passo seguinte é simplesmente calcular a probabilidade de transição dada pela eq.(2.59); para tanto, porém, se faz necessária a introdução de algumas definições, já que a integral que aparece não é trivial.

A primeira definição é justamente da integral no tempo

$$\frac{1}{2} \mathcal{M} \equiv \int \exp[i\omega t - ik \cdot \mathbf{r}(t)] \mathbf{V}(t) \cdot \langle f | \mathbf{s}(t) | i \rangle dt \quad (2.60)$$

de modo que

$$\frac{d^2 I}{d\Omega d\omega} = \left(\frac{e\omega^2}{4\pi m} \right)^2 |\mathcal{M}|^2 \quad (2.61)$$

O número de fótons emitidos por unidade de ângulo sólido é obtido dividindo este resultado por ω :

$$\frac{d^2 N}{d\Omega d\omega} = \left(\frac{e\omega^{3/2}}{4\pi m} \right)^2 |\mathcal{M}|^2 \quad (2.62)$$

sendo a taxa diferencial de transição obtida com a multiplicação desta última expressão pela frequência do movimento circular $\nu = \omega_0/2\pi$, onde $\omega_0 = \beta/\rho$.

A Equação de Thomas, obedecida pelo operador de spin, fica sendo, na ausência de campo elétrico e na aproximação de campo magnético estático e uniforme, perpendicular ao plano de movimento da partícula,

$$\frac{d \vec{s}}{dt} = \frac{e}{m} \vec{s} \times \left[\left(a + \frac{1}{\gamma} \right) \vec{B} \right] = \vec{s} \times (1 + \gamma a) \vec{\omega}_0 \quad (2.63)$$

onde

$$\vec{\omega}_0 \equiv \frac{e \vec{B}}{m\gamma} \quad (2.64)$$

Tal equação descreve a precessão do vetor de spin ao redor da direção do campo magnético, com a velocidade angular $\Omega = (1 + \gamma a) \omega_0$ em relação ao

sistema de eixos fixos do laboratório, ou seja, a equação de movimento do spin é na verdade um sistema de equações diferenciais acopladas:

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{s} \times \Omega \vec{\omega}_0 \quad (2.65)$$

Para resolver esse sistema é conveniente escrever explicitamente o produto vetorial $\vec{s} \times \vec{\omega}_0$:

$$\vec{s} \times \vec{\omega}_0 = \det \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ s_x & s_y & s_z \\ 0 & 0 & \omega_0 \end{bmatrix} = \omega_0 \left[s_y \hat{i} - s_x \hat{j} \right] \quad (2.66)$$

onde usou-se que $\vec{B} = B \hat{k}$. Assim as equações a se resolver são

$$\frac{ds_x}{dt} = \Omega \omega_0 s_y \quad (2.67)$$

$$\frac{ds_y}{dt} = -\Omega \omega_0 s_x \quad (2.68)$$

$$\frac{ds_z}{dt} = 0 \quad (2.69)$$

com as condições iniciais $\vec{s}(t_0) = \vec{\sigma} / 2$. A solução é simples:

$$s_x(t) = s_+(t_0) e^{i\Omega(t-t_0)} + s_-(t_0) e^{-i\Omega(t-t_0)} \quad (2.70)$$

$$s_y(t) = \frac{1}{i} \left[s_+(t_0) e^{i\Omega(t-t_0)} - s_-(t_0) e^{-i\Omega(t-t_0)} \right] \quad (2.71)$$

$$s_z(t) = s_z(t_0) \quad (2.72)$$

onde aparecem os operadores de spin constantes

$$s_{\pm}(t_0) = \frac{1}{4} (\sigma_x \pm i\sigma_y) \quad (2.73)$$

A direção inicial, genérica, $\vec{\zeta}$, do spin da partícula pode ser descrita através de dois ângulos, θ_0 e φ_0 , tomados relativamente ao eixo z do campo magnético; na transição o spin muda desta direção para a oposta $-\vec{\zeta}$. Os estados inicial e final do spin da partícula podem, portanto, ser escritos como produto de uma rotação que leva os estados de spin da direção \vec{z} para a direção $\vec{\zeta}$, isto é,

$$|i\rangle = R \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = R \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

e

$$|f\rangle = R \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = R \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

A matriz de rotação se escreve em termos dos ângulos de Euler α , β e γ [4] :

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ e^{i(\alpha+\gamma)/2} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) & e^{i(\alpha-\gamma)/2} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

Neste nosso caso $\alpha = \varphi_0$, $\beta = \theta_0$ e $\gamma = 0$, o que fornece

$$|i\rangle = \begin{bmatrix} e^{-i\varphi_0/2} \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \\ e^{i\varphi_0/2} \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

$$|f\rangle = \begin{bmatrix} -e^{-i\varphi_0/2} \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \\ e^{i\varphi_0/2} \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

Agora é direto ver que

$$\langle f | s_+ | i \rangle = -\frac{1}{2} e^{i\varphi_0/2} \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) = -\frac{1}{4} e^{i\varphi_0/2} (1 - \cos \theta_0) \quad (2.79)$$

$$\langle f | s_- | i \rangle = \frac{1}{2} e^{-i\varphi_0/2} \cos^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) = \frac{1}{4} e^{-i\varphi_0/2} (1 + \cos \theta_0) \quad (2.80)$$

$$\langle f | s_z | i \rangle = -\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) = -\frac{1}{2} \sin \theta_0 \quad (2.81)$$

Estes são os elementos de matriz que aparecem na integral da probabilidade de transição, de modo que

$$\mathcal{M} = -\sin \theta_0 U_1 - \frac{1}{2} (1 - \cos \theta_0) e^{i(\varphi_0 - \Omega t_0)} U_2 + \frac{1}{2} e^{-i(\varphi_0 - \Omega t_0)} (1 + \cos \theta_0) U_3 \quad (2.82)$$

onde

$$\begin{aligned} U_1 &\equiv \int V_z(t) e^{i[\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t)]} dt \\ U_2 &\equiv \int [V_x(t) - iV_y(t)] e^{i[(\omega + \Omega)t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t)]} dt \\ U_3 &\equiv \int [V_x(t) + iV_y(t)] e^{i[(\omega - \Omega)t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t)]} dt \end{aligned}$$

Quando o módulo quadrado da integral é tomado é necessário apenas manter a soma do módulo de cada um desses termos, pois os termos de interferência envolvem termos sinusoidais em Ωt_0 ou $2\Omega t_0$ que acabam não contribuindo na condição realística de um tempo inicial aleatório. Portanto,

$$|\mathcal{M}|^2 = \sin^2 \theta_0 |U_1|^2 + \frac{1}{4} (1 - \cos \theta_0)^2 |U_2|^2 + \frac{1}{4} (1 + \cos \theta_0)^2 |U_3|^2 \quad (2.83)$$

A trajetória circular da partícula pode ser descrita no laboratório como

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \omega_0 t \\ y &= \rho (1 - \cos \omega_0 t) \\ z &= 0 \end{aligned} \quad (2.84)$$

e, assim, usando tempos de laboratório tais que $\gamma \omega_0 |t| = O(1)$, pode-se escrever⁹ $\mathbf{r}(t)$ e $\vec{\beta}(t)$.

Espectro de frequência e distribuição angular da radiação

Usando as novas variáveis

$$\begin{aligned} t &= \gamma \theta \sin \varphi \\ \nu &= \frac{2\omega}{3\gamma^3 \omega_0} \\ z_0 &= \left(\frac{3\nu}{4}\right)^{\frac{2}{3}} (1 + t^2) = \left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)^{\frac{2}{3}} \left[\frac{1}{\gamma^2} + (\theta \sin \varphi)^2 \right] \\ z_{\pm} &= \left(\frac{3\nu}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \left(1 + t^2 \pm \frac{4a}{3\nu}\right) = z_0 \pm a\gamma \left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)^{-\frac{1}{3}} \\ p_{\pm} &= 1 + a \left(1 + t^2 \pm \frac{2a}{3\nu}\right) = 1 + a \left(1 + t^2 \pm a\gamma^3 \frac{\omega}{\omega_0}\right) \end{aligned} \quad (2.85)$$

temos que

$$\frac{d^2 w}{d\Omega d\omega} = \frac{8(3\nu/4)^{7/3}}{5\pi\sqrt{3}\tau_0\gamma^2\omega_0} \left[\sin^2 \theta_0 I_0 + \frac{1}{4} (1 - \cos \theta_0)^2 I_+ + \frac{1}{4} (1 + \cos \theta_0)^2 I_- \right] \quad (2.86)$$

onde

$$I_0 = (1 - at^2)^2 |Ai(z_0)|^2 + a^2 t^2 \gamma^2 \left(\frac{2\omega_0}{\omega}\right)^{\frac{2}{3}} |Ai'(z_0)|^2 \quad (2.87)$$

$$\begin{aligned} I_{\pm} &= t^2 \left| (1 + a) Ai(z_{\pm}) \pm a\gamma \left(\frac{2\omega_0}{\omega}\right)^{\frac{1}{3}} Ai'(z_{\pm}) \right|^2 \\ &\quad + \left| p_{\pm} Ai(z_{\pm}) \pm (1 + a)\gamma \left(\frac{2\omega_0}{\omega}\right)^{\frac{1}{3}} Ai'(z_{\pm}) \right|^2 \end{aligned} \quad (2.88)$$

⁹Neste trabalho apenas são apresentados os resultados da ref.[1], onde não aparecem explicitamente as expressões para $\mathbf{r}(t)$ e $\beta(t)$; assim aqui também não aparecem tais expressões, embora possa-se encontrar um tratamento adequado em [5].

sendo $Ai(x)$ a função de Airy e $Ai'(x)$ sua derivada¹⁰.

A integração desta expressão sobre os ângulos, usando o elemento de ângulo sólido

$$d\Omega = d\varphi' d(\cos \theta') \simeq \frac{1}{\gamma} d\varphi' dt \quad (2.89)$$

com $-\infty \leq t \leq \infty$, para $\gamma \gg 1$, produz o resultado

$$\frac{dw}{d\nu} = \frac{\sqrt{3}}{5\tau_0} \left[\sin^2 \theta_0 H_0 + \frac{1}{4} (1 - \cos \theta_0)^2 H_+ + \frac{1}{4} (1 + \cos \theta_0)^2 H_- \right] \quad (2.90)$$

onde

$$H_0 = a^2 y_0 Ai(y_0) + \left(a + \frac{a^2}{2} \right) y_0^2 Ai'(y_0) + \left(1 + a + \frac{a^2}{2} \right) y_0^3 Ai_1(y_0) \quad (2.91)$$

$$\begin{aligned} H_{\pm} = & - \left[a^2 + 2a^3 \pm 3(1+a)^2 \nu \right] y_0 Ai(y_{\pm}) - \left(2 + 5a + \frac{5a^2}{2} \right) y_0^2 Ai'(y_{\pm}) \\ & + \left[a^4 + \frac{9}{2}(1+a)\nu^2 - \frac{9}{2} \left(1 + \frac{3a}{2} + \frac{a^2}{4} \right) \left(\nu^2 \pm \frac{4a\nu}{3} \right) \right] Ai_1(y_{\pm}) \end{aligned} \quad (2.92)$$

com

$$\begin{aligned} y_0 &= \left(\frac{3\nu}{2} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{\frac{2}{3}} \\ y_{\pm} &= \left(\frac{3\nu}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \left[1 \pm \left(\frac{4a}{3\nu} \right) \right] = \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{\frac{2}{3}} \left[1 \pm 2a\gamma^3 \frac{\omega}{\omega_0} \right] \end{aligned} \quad (2.93)$$

e

$$Ai_1(x) = \int_x^{\infty} Ai(x') dx' \quad (2.94)$$

Taxa total de transição, tempo característico e polarização

A taxa total de transição, obtida por integração das expressões anteriores, é

$$\begin{aligned} w(\theta_0) = & \frac{1}{2\tau_0} \left[F_1(a) e^{-\sqrt{12}|a|} + \frac{a}{|a|} F_2(a) \right] \left(\frac{1 + \cos^2 \theta_0}{2} \right) \\ & + \frac{1}{2\tau_0} \left[F_3(a) \sin^2 \theta_0 + F_2(a) \cos \theta_0 \right] \end{aligned} \quad (2.95)$$

Probabilidade total de transição no 'flip' de spin para partículas com fator g arbitrário

¹⁰Há um apêndice sobre 'Funções de Airy e de Bessel', que tenta mostrar como surgem, nestes cálculos, tais funções especiais.

onde

$$F_1(a) = \left(1 + \frac{41}{45}a - \frac{23}{18}a^2 - \frac{8}{13}a^3 + \frac{14}{15}a^4\right) - \frac{8}{5\sqrt{3}}\frac{a}{|a|} \left(1 + \frac{11}{12}a - \frac{17}{12}a^2 - \frac{13}{24}a^3 + a^4\right) \quad (2.96)$$

$$F_2(a) = \frac{8}{5\sqrt{3}} \left(1 + \frac{14}{13}a - 8a^2 - \frac{23}{3}a^3 + \frac{10}{3}a^4 + \frac{2}{3}a^5\right) \quad (2.97)$$

$$F_3(a) = \frac{1}{18} \left(7 - 2a + \frac{13}{5}a^2\right) \quad (2.98)$$

Tal expressão é uma generalização, para partículas de fator g arbitrário, da equação (2.4).

O tempo característico da polarização fica sendo, por sua vez,

$$\tau = [w(0) + w(\pi)]^{-1} \quad (2.99)$$

Tempo característico para partículas com fator g arbitrário

i.e.,

$$\tau = \tau_0 \left[F_1(a) e^{-\sqrt{12}|a|} + \frac{a}{|a|} F_2(a) \right]^{-1} \quad (2.100)$$

com a polarização na direção $-\vec{z}$ dada por

$$P = \frac{w(0) - w(\pi)}{w(0) + w(\pi)} \quad (2.101)$$

i.e.,

$$P = F_2(a) \left[F_1(a) e^{-\sqrt{12}|a|} + \frac{a}{|a|} F_2(a) \right]^{-1} \quad (2.102)$$

Polarização para partículas com fator g arbitrário

Note-se que quando $a \rightarrow 0$ obtêm-se a equação (2.2).

2.4 Pósitrons e elétrons

O único fator g relevante fisicamente é o de pósitrons e elétrons, que é quase igual a 2. Assim todos os resultados mostrados na seção anterior têm maior interesse nesse caso, em que $a \rightarrow 0$, e as expressões se simplificam bastante; a taxa de transição diferencial, por exemplo, se escreve

$$\frac{d^2w}{d\Omega d\omega} = \frac{3\sqrt{3}}{40\pi^3} \frac{\nu^3 (1+t^2)}{\tau_0 \gamma^2 \omega_0} \left[\sin^2 \theta_0 J_0 + \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta_0) J_1 + 2 \cos \theta_0 J_2 \right] \quad (2.103)$$

onde

$$J_0 = K_{\frac{1}{3}}^2(\eta)$$

$$J_1 = (1 + t^2) \left[K_{\frac{1}{3}}^2(\eta) + K_{\frac{2}{3}}^2(\eta) \right]$$

$$J_2 = \sqrt{1 + t^2} K_{\frac{1}{3}}(\eta) K_{\frac{2}{3}}(\eta)$$

com o argumento das funções de Bessel modificadas $K_{\frac{1}{3}}(\eta)$ e $K_{\frac{2}{3}}(\eta)$ sendo

$$\eta = \frac{2}{3} (z_0)^{\frac{3}{2}} = \frac{\nu}{2} (1 + t^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{\omega}{3\gamma\omega_0} \left[\frac{1}{\gamma^2} + (\theta \sin \varphi)^2 \right] \quad (2.104)$$

A integração nas frequências segue um caminho não muito complicado¹¹; a expressão

$$\frac{dw}{d\Omega} = \lambda_1 \int_0^\infty \nu^3 \left[\sin^2 \theta_0 J_0 + \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta_0) J_1 + 2 \cos \theta_0 J_2 \right] d\nu \quad (2.105)$$

onde

$$\lambda_1 = \frac{3\sqrt{3} (1 + t^2)}{40\pi^3 \tau_0 \gamma^2 \omega_0}$$

produz

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\Omega} &= \frac{16\gamma}{45\pi^2 \tau_0} (1 + t^2)^{-5} \\ &\times \left[\sin^2 \theta_0 + \frac{9}{8} (1 + \cos^2 \theta_0) (1 + t^2) + \frac{105\sqrt{3}\pi}{256} \sqrt{1 + t^2} \cos \theta_0 \right] \end{aligned} \quad (2.106)$$

A subsequente integração nos ângulos, usando-se $d\Omega = \gamma^{-1} dt d\phi'$, fornece a taxa total de transição:

$$w = \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-\infty}^\infty \frac{dt dw}{\gamma d\Omega} \quad (2.107)$$

isto é,

$$\begin{aligned} w &= \frac{32\pi}{45\pi^2 \tau_0} \int_{-\infty}^\infty dt (1 + t^2)^{-5} \\ &\times \left[\sin^2 \theta_0 + \frac{9}{8} (1 + \cos^2 \theta_0) (1 + t^2) + \frac{105\sqrt{3}\pi}{256} \sqrt{1 + t^2} \cos \theta_0 \right] \end{aligned} \quad (2.108)$$

o que produz

$$w = \frac{1}{2\tau_0} \left(1 - \frac{1}{9} \sin^2 \theta_0 + \frac{8}{5\sqrt{3}} \cos \theta_0 \right) \quad (2.109)$$

Probabilidade de
transição para
pósitrons e elétrons

¹¹As integrações necessárias para obter os resultados desta seção são explicadas no apêndice 'Integrações'.

Esta expressão é uma média, feita sobre o azimute do vetor $\hat{\zeta}$, do resultado apresentado na equação (2.4).

A distribuição angular da *potência irradiada* é obtida por multiplicação da equação (2.103) por ω e subsequente integração nas frequências:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= \int_0^\infty \frac{d^2w}{d\Omega d\omega} \omega d\omega \\ &= \lambda_1 \int_0^\infty \omega \nu^3 \left[\sin^2 \theta_0 J_0 + \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta_0) J_1 + 2 \cos \theta_0 J_2 \right] d\omega \end{aligned} \quad (2.110)$$

com o resultado

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= \frac{77\sqrt{3}\gamma^4\omega_0}{256\pi\tau_0} (1+t^2)^{-\frac{13}{2}} \\ &\times \left[\sin^2 \theta_0 + \frac{12}{11} (1 + \cos^2 \theta_0) (1+t^2) + \frac{2^{13}3^{-\frac{5}{2}}}{77\pi} (1+t^2)^{\frac{1}{2}} \cos \theta_0 \right] \end{aligned} \quad (2.111)$$

Este resultado pode ser comparado com a distribuição angular da potência irradiada para radiação síncrotron ordinária:

$$\frac{dP_{ordinária}}{d\Omega} = \frac{\gamma^5}{32\pi} \left(\frac{e}{\rho}\right)^2 \frac{7 + 12t^2}{(1+t^2)^{\frac{7}{2}}} \quad (2.112)$$

e assim, integrando ambas as expressões sobre os ângulos, obtêm-se a razão

$$\frac{P_{spin-flip}}{P_{ordinária}} = 3 \left(\frac{\gamma^2}{m\rho}\right)^2 \left[1 - \frac{1}{12} \sin^2 \theta_0 + \frac{35\sqrt{3}}{64} \cos \theta_0 \right] \quad (2.113)$$

que demonstra que a potência irradiada pelo efeito síncrotron ordinário supera em muito a que é devida ao efeito de 'flip' de spin – o que torna quase inviável, na prática, medir a emissão devida a este último efeito diretamente.

Para concluir este capítulo, relativamente denso e repleto de expressões que talvez não sejam muito elucidativas, repetem-se aqui a idéia principal e o resultado mais importante desta visão semiclássica do 'flip' de spin de elétrons:

- Para elétrons em movimento circular há um efeito relativístico – a precessão de Thomas – que impede uma polarização completa do spin dos elétrons;
- Tal polarização obedece à equação (2.102), com $a \rightarrow 0$.

3. Precessão de Thomas

3.1 O que é a Equação de Thomas?

A equação relativística que descreve classicamente o movimento do spin \vec{s} de uma partícula de carga e e massa m , movimentando-se com velocidade $\vec{\beta}$, numa região com campos elétrico \vec{E} e magnético \vec{B} , é a equação de Thomas [1]:

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{e}{m} \vec{s} \times \left[\left(a + \frac{1}{\gamma} \right) \vec{B} - \frac{a\gamma}{\gamma+1} \vec{\beta} \left(\vec{\beta} \cdot \vec{B} \right) - \left(a + \frac{1}{\gamma+1} \right) \vec{\beta} \times \vec{E} \right] \quad (3.1)$$

onde $a \equiv (g - 2)/2$ é chamado de anomalia do momento magnético.

Desta equação constrói-se naturalmente uma *hamiltoniana efetiva de interação*, que é:

$$H_{int}^{eff} = -\frac{e}{m} \left[\left(a + \frac{1}{\gamma} \right) \vec{s} \cdot \vec{B} - \frac{a\gamma}{\gamma+1} \left(\vec{\beta} \cdot \vec{B} \right) \vec{s} \cdot \vec{\beta} - \left(a + \frac{1}{\gamma+1} \right) \vec{s} \cdot \left(\vec{\beta} \times \vec{E} \right) \right] \quad (3.2)$$

ou

$$H_{int}^{eff} = -\frac{e}{m} \left[a \vec{s} \cdot \left[\vec{B} - \frac{\gamma}{\gamma+1} \left(\vec{\beta} \cdot \vec{B} \right) \vec{\beta} - \vec{\beta} \times \vec{E} \right] + \frac{1}{\gamma} \vec{s} \cdot \left(\vec{B} - \frac{\gamma}{\gamma+1} \vec{\beta} \times \vec{E} \right) \right] \quad (3.3)$$

ou ainda

$$H_{int}^{eff} = -\frac{e}{m} [aA_1 + A_2] \quad (3.4)$$

As perguntas que motivam a existência deste capítulo extra, que é quase apenas um exercício de Eletromagnetismo, são duas¹:

¹Apenas como curiosidade, note-se que este não é um assunto simples: quando do aparecimento do trabalho de Thomas, poucos o entenderam [6] - "Uhlenbeck (...) não compreendeu uma palavra dele" e "Pauli precisou de algumas semanas para entender o argumento de Thomas".

- Como surge esta expressão?
- Pode-se simplificar a Equação de Thomas (e seu entendimento) escrevendo-a numa forma mais compacta?

Assim, nas seções seguintes a Equação de Thomas será reescrita numa forma tensorial, usando-se neste processo apenas 4-vetores e tensores já conhecidos, na tentativa de obter uma expressão de interpretação tão simples e natural quanto possível. Na próxima seção são introduzidos o 4-spin, o tensor eletromagnético $F^{\mu\nu}$ e seu dual, e o tensor de transporte $\Omega^{\mu\nu}$; com estes objetos constrói-se uma expressão que descreve a movimentação do spin e a partir daí, na quarta seção, a Hamiltoniana é montada, sendo sua interpretação apresentada em seguida.

3.2 Spin e campo eletromagnético como tensores

O primeiro passo consiste em definir os vetores e tensores interessantes; o primeiro deles é o 4-spin no referencial de repouso da partícula [7]:

$$s^\mu \equiv (0, \vec{s}) \quad (3.5)$$

Por uma transformação de Lorentz geral (em que os eixos continuam paralelos mas em que a velocidade $\vec{\beta}$ de um sistema em relação ao outro *não* é paralela a nenhum dos eixos) obtém-se o 4-vetor S^μ , tal que [5]:

$$S^i \equiv s^i + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (\vec{\beta} \cdot \vec{s}) \beta^i \quad (3.6)$$

$$S^0 \equiv \gamma (\vec{\beta} \cdot \vec{s}) \quad (3.7)$$

O tensor eletromagnético é [5]

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{bmatrix}$$

com seu dual:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & B^1 & B^2 & B^3 \\ -B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ -B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ -B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vai-se ainda introduzir o tensor de transporte $\Omega^{\mu\nu}$ cuja forma mais geral possível é

$$\Omega^{\mu\nu} \equiv (a^\mu u^\nu - a^\nu u^\mu) + \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \omega_\alpha u_\beta = \Omega_{FW}^{\mu\nu} + \Omega_{SR}^{\mu\nu} \quad (3.8)$$

com [7]

$$\Omega_{FW}^{\mu\nu} \equiv a^\mu u^\nu - a^\nu u^\mu \quad (3.9)$$

sendo o tensor de Fermi-Walker, onde, como usual,

$$a^\mu \equiv \frac{du^\mu}{d\tau}$$

com u^μ sendo a 4-velocidade; e

$$\Omega_{SR}^{\mu\nu} \equiv \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} u_\alpha \omega_\beta \quad (3.10)$$

sendo um tensor de rotação espacial, com o 4-vetor ω^μ ortogonal à 4-velocidade (*i.e.*, $u^\mu \omega_\mu = 0$).

3.3 Equação de Thomas e Hamiltoniana de interação

Começa-se definindo o transporte geral de um 4-vetor² [7]:

$$\frac{dv^\mu}{d\tau} \equiv \Omega^{\mu\nu} v_\nu \quad (3.11)$$

Em particular, se S^μ sofre tal tipo de transporte então

$$\frac{dS^\mu}{d\tau} = \Omega^{\mu\nu} S_\nu = [(a^\mu u^\nu - a^\nu u^\mu) + \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} u_\alpha \omega_\beta] S_\nu \quad (3.12)$$

A expressão que relaciona $F^{\mu\nu}$ e a^μ é a forma covariante da força de Lorentz:

$$ma^\mu = eF^{\mu\lambda} u_\lambda = \gamma eF^{\mu\lambda} \beta_\lambda \quad (3.13)$$

e assim, na ausência de outros campos ou forças que provoquem aceleração:

$$\frac{dS^\mu}{d\tau} = \left[\frac{e}{m} (F^{\mu\lambda} u^\nu - eF^{\nu\lambda} u^\mu) u_\lambda + \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} u_\alpha \omega_\beta \right] S_\nu$$

Colocando

$$\omega_\mu = \frac{eg}{2m} \mathcal{F}_{\mu\beta} u^\beta \quad (3.14)$$

²Aqui há um problema de convenção: neste trabalho usa-se a métrica + - - -; se a métrica for - + + +, têm-se que $\frac{dv^\mu}{d\tau} \equiv -\Omega^{\mu\nu} v_\nu$ [7].

têm-se que

$$\frac{dS^\mu}{d\tau} = \left[\frac{e}{m} (F^{\mu\lambda} u^\nu - e F^{\nu\lambda} u^\mu) u_\lambda + \frac{eg}{2m} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} u_\alpha \mathcal{F}_{\beta\lambda} u^\lambda \right] S_\nu$$

Usando ainda que [8]

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{\lambda\rho\sigma\beta} = -\det \begin{bmatrix} \delta_\lambda^\mu & \delta_\rho^\mu & \delta_\sigma^\mu \\ \delta_\lambda^\nu & \delta_\rho^\nu & \delta_\sigma^\nu \\ \delta_\lambda^\alpha & \delta_\rho^\alpha & \delta_\sigma^\alpha \end{bmatrix}$$

pode-se escrever

$$\frac{dS^\mu}{d\tau} = \left[\frac{e}{m} (F^{\mu\lambda} u^\nu - F^{\nu\lambda} u^\mu) u_\lambda - \frac{eg}{2m} (F^{\nu\beta} u_\beta u^\mu + F^{\mu\nu} - F^{\mu\beta} u_\beta u^\nu) \right] S_\nu$$

onde usou-se que $u_\mu u^\mu = 1$. Esta expressão pode ser mais simplificada se juntam-se os termos semelhantes e se usa-se ainda que $S_\nu u^\nu = 0$:

$$\frac{dS^\mu}{d\tau} = \frac{e}{m} \left[\left(\frac{g}{2} - 1 \right) F^{\nu\lambda} u^\mu u_\lambda + \frac{g}{2} F^{\mu\nu} \right] S_\nu \quad (3.15)$$

Esta é a equação BMT [9], que é a expressão covariante que leva diretamente à equação de Thomas, eq.(3.1) [5]. Em termos da anomalia do momento magnético a isto se escreve

$$\frac{dS^\mu}{d\tau} = \frac{e}{m} \left[a F^{\nu\lambda} u^\mu u_\lambda + (a + 1) F^{\mu\nu} \right] S_\nu$$

Hamiltoniana de interação

Agora usar-se-á uma relação básica da Mecânica Quântica [4]:

$$\frac{dA^\mu}{d\tau} = \frac{1}{i} [A^\mu, H] = \frac{1}{i} (A^\mu H - H A^\mu) \quad (3.16)$$

Se coloca-se S^μ como sendo um operador que obedece a esta relação, então, de (3.12), têm-se:

$$\frac{1}{i} [S^\mu, H] = \Omega^{\mu\nu} S_\nu = \left[(a^\mu u^\nu - a^\nu u^\mu) + \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} u_\alpha \omega_\beta \right] S_\nu$$

ou

$$[S^\mu, H] = i \left(-a^\nu u^\mu + \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} u_\alpha \omega_\beta \right) S_\nu$$

onde usou-se que $S^\mu u_\mu = 0$.

A Hamiltoniana que obedece a esta relação pode ser dividida em duas partes:

$$H = H_{FW} + H_{SR}$$

e assim têm-se que

$$[S^\mu, H_{FW}] = -ia^\nu u^\mu S_\nu$$

e

$$[S^\mu, H_{SR}] = i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} u_\alpha \omega_\beta S_\nu = -iS^{\mu\beta} \omega_\beta$$

onde

$$S^{\mu\nu} \equiv \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} u_\alpha S_\beta$$

é, em contraposição ao momento angular orbital $L^{\mu\nu}$, a parte devida ao momento angular intrínseco do tensor de momento angular [7]

$$J^{\mu\nu} = L^{\mu\nu} + S^{\mu\nu}$$

Explicitamente:

$$S^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -(\vec{S} \times \vec{u})^1 & -(\vec{S} \times \vec{u})^2 & -(\vec{S} \times \vec{u})^3 \\ (\vec{S} \times \vec{u})^1 & 0 & -2S^{[0u^3]} & 2S^{[0u^2]} \\ (\vec{S} \times \vec{u})^2 & 2S^{[0u^3]} & 0 & -2S^{[0u^1]} \\ (\vec{S} \times \vec{u})^3 & -2S^{[0u^2]} & 2S^{[0u^1]} & 0 \end{bmatrix}$$

As componentes deste tensor são facilmente escritas em termos de \vec{s} , já que

$$(\vec{S} \times \vec{u})^i = \gamma \epsilon_{ijk} S^j \beta^k = \gamma \epsilon_{ijk} \left[s^j + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} (\vec{\beta} \cdot \vec{s}) \beta^j \right] \beta^k = (\vec{s} \times \vec{u})^i \quad (3.17)$$

e

$$\begin{aligned} 2S^{[0u^i]} &= \gamma^2 (\vec{\beta} \cdot \vec{s}) \beta^i - \gamma \left[s^i + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} (\vec{\beta} \cdot \vec{s}) \beta^i \right] \\ &= \gamma \left[-s^i + \frac{\gamma}{\gamma+1} (\vec{\beta} \cdot \vec{s}) \beta^i \right] \end{aligned} \quad (3.18)$$

Lembrando das eqs.(3.6) e (3.7) e usando que

$$\vec{s} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}$$

onde σ são as matrizes de Pauli, têm-se que

$$[S^\mu, S^\nu] = i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} u_\alpha S_\beta = iS^{\mu\nu}$$

Assim

$$[S^\mu, H_{SR}] = -iS^{\mu\beta}\omega_\beta = -[S^\mu, S^\beta]\omega_\beta$$

e, portanto

$$H_{SR} = -S^\beta\omega_\beta = -\frac{eg}{2m}S^\beta\mathcal{F}_{\beta\alpha}u^\alpha = -\frac{eg}{2m}S^\beta\frac{1}{2}\epsilon_{\beta\alpha\rho\sigma}F^{\rho\sigma}u^\alpha = \frac{eg}{4m}S_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$$

Tal expressão fornece, numa forma não covariante:

$$H_{SR} = \frac{eg}{2m}\gamma\vec{s} \cdot \left[\vec{B} - \vec{\beta} \times \vec{E} - \frac{\gamma}{\gamma+1}\vec{\beta} \left(\vec{\beta} \cdot \vec{B} \right) \right]$$

Comparando com a equação (3.3) vê-se que este é o termo A_1 da equação (3.4), isto é,

$$H_{int}^{eff} = -\frac{2a}{g\gamma}H_{SR} - \frac{e}{m}A_2 = -\frac{H_{SR}}{\gamma} - \frac{e}{m} \left(A_2 - \frac{1}{2\gamma}S_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \right)$$

É simples ver que

$$\frac{e}{m} \left(A_2 - \frac{1}{2\gamma}S_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \right) = \frac{\gamma}{\gamma+1} \left(\vec{s} \times \vec{\beta} \right) \cdot \frac{e}{m} \left(\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B} \right) = -\frac{\vec{s} \cdot \vec{\omega}_T}{\gamma} \quad (3.19)$$

i.e.,

$$H_{int}^{eff} = \frac{1}{\gamma} \left[-H_{SR} + \vec{s} \cdot \vec{\omega}_T \right]$$

onde

$$\vec{\omega}_T = \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \left(\vec{a} \times \vec{\beta} \right)$$

é a velocidade angular de Thomas [5].

O termo ‘adicional’ da Hamiltoniana efetiva, dado pela equação (3.19), que não é um escalar legítimo, pode ter seu aparecimento explicado por transporte de Fermi-Walker simples ou através de transformações de Lorentz sucessivas (tal como se verá a seguir). É por meio destas transformações de Lorentz sucessivas, que são *não-comutativas*, que se pode entender porque este termo não é um escalar. Ou seja, a Hamiltoniana efetiva derivada da Equação de Thomas *não é invariante por Lorentz*, justamente porque a precessão de Thomas é um efeito derivado da não comutatividade de duas transformações de Lorentz sucessivas.

Obtenção da precessão de Thomas por transporte de Fermi-Walker simples

Considerando apenas o transporte de Fermi-Walker simples têm-se que o 4-spin de um elétron que se move com velocidade angular constante ω numa

órbita circular de raio r no plano xy obedece a equação de movimento [7]

$$\frac{dS^\mu}{d\tau} = \Omega_{FW}^{\mu\nu} S_\nu = (a^\mu u^\nu - a^\nu u^\mu) S_\nu = -a^\nu u^\mu S_\nu$$

Se no tempo $t = 0$ o 4-spin têm as componentes

$$\begin{aligned} S^0 &= 0 \\ S^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ S^2 &= 0 \\ S^3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

em um tempo posterior t (tempo de laboratório) suas componentes serão

$$\begin{aligned} S^0 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \beta \gamma \sin \omega \gamma t \\ S^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \omega t \cos \omega \gamma t + \gamma \sin \omega t \sin \omega \gamma t) \\ S^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin \omega t \cos \omega \gamma t - \gamma \cos \omega t \sin \omega \gamma t) \\ S^3 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

onde $\beta = \omega r$. Assim pode-se escrever a parte espacial como

$$S^1 + iS^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{-i(\gamma-1)\omega t} + i(1-\gamma) e^{i\omega t} \sin \omega \gamma t \right]$$

sendo que o primeiro termo gira constantemente em uma direção retrógrada com velocidade angular

$$\omega_{Thomas} = (\gamma - 1)\omega \approx \beta^2 \omega / 2 \tag{3.20}$$

Esta é a precessão de Thomas.

Obtenção da Hamiltoniana efetiva por transformações de Lorentz sucessivas

Para uma partícula acelerada a velocidade em dois instantes sucessivos t_1 e $t_2 = t_1 + \delta t$ é dada como

$$\begin{aligned} \vec{v}(t_1) &= \vec{\beta} \\ \vec{v}(t_2) &= \vec{\beta} + \delta \vec{\beta} \end{aligned}$$

com as consequentes transformações de Lorentz entre o referencial inercial K e os referenciais em movimento K' e K''

$$\begin{aligned} x' &= A_{boost} \left[\vec{\beta} \right] x \\ x'' &= A_{boost} \left[\vec{\beta} + \delta \vec{\beta} \right] x \end{aligned}$$

A transformação que interessa inicialmente é a que correlaciona os referenciais K' e K'' :

$$x'' = A_T x'$$

onde

$$A = A_{boost} \left[\vec{\beta} + \delta \vec{\beta} \right] A_{boost}^{-1} \left[\vec{\beta} \right] = A_{boost} \left[\vec{\beta} + \delta \vec{\beta} \right] A_{boost} \left[-\vec{\beta} \right]$$

Usando que uma matriz de Lorentz geral, envolvendo apenas um *boost* puro, pode ser escrita como [5]

$$A_{boost} \left(\vec{\beta} \right) = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta_1 & -\gamma\beta_2 & -\gamma\beta_3 \\ -\gamma\beta_1 & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_1^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_2 & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_2^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_3 & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_3^2}{\beta^2} \end{bmatrix}$$

têm-se, em primeira ordem em $\delta \vec{\beta}$,

$$A = A_{boost} \left[\Delta \vec{\beta} \right] R \left[\Delta \vec{\Omega} \right] = R \left[\Delta \vec{\Omega} \right] A_{boost} \left[\Delta \vec{\beta} \right]$$

onde $A_{boost} \left[\Delta \vec{\beta} \right]$ é um *boost* infinitesimal, de velocidade $\Delta \vec{\beta} = \gamma^2 \delta \vec{\beta}_{\parallel} + \gamma \delta \vec{\beta}_{\perp}$ e $R \left[\Delta \vec{\Omega} \right]$ é uma rotação também infinitesimal, de ângulo $\Delta \vec{\Omega} = \gamma^2 \left(\vec{\beta} \times \delta \vec{\beta} \right) / (\gamma + 1)$. Assim

$$x'' = R \left[\Delta \vec{\Omega} \right] A_{boost} \left[\Delta \vec{\beta} \right] x'$$

No entanto, não é interessante ter a matriz de rotação no resultado final; portanto usa-se um terceiro referencial em movimento K''' , tal que

$$x''' = R \left[-\Delta \vec{\Omega} \right] x'' = A_{boost} \left[\Delta \vec{\beta} \right] x'$$

Em termos das coordenadas do referencial K isto se escreve

$$x''' = R \left[-\Delta \vec{\Omega} \right] A_{boost} \left[\vec{\beta} + \delta \vec{\beta} \right] x$$

Logo, se no referencial K''' um vetor \mathbf{G} têm uma taxa de variação no tempo próprio dado por $(d\mathbf{G}/d\tau)$, a precessão dos eixos do referencial de repouso fazem este vetor ter uma taxa de variação no tempo em relação ao laboratório ser dada por

$$\left(\frac{d\mathbf{G}}{dt} \right) = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{d\mathbf{G}}{d\tau} \right) + \vec{\omega}_T \times \mathbf{G}$$

onde

$$\vec{\omega}_T = - \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\Omega}}{\delta t} = \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (\vec{a} \times \vec{\beta}) = \frac{\gamma - 1}{\beta^2} (\vec{a} \times \vec{\beta})$$

Para uma trajetória circular perfeita $\vec{a} \perp \vec{\beta}$ e então $|\vec{a} \times \vec{\beta}| = a\beta$; lembrando que nesse caso da órbita circular têm-se $a = \omega^2 r$ e $\beta = \omega r$ têm-se, para a órbita circular

$$|\vec{\omega}_T| = \frac{(\gamma - 1)a}{\beta} = (\gamma - 1)\omega$$

que é a equação (3.20).

A energia de interação correspondente a esta precessão apresenta um termo extra:

$$H = H_0 + \vec{s} \cdot \vec{\omega}_T$$

3.4 Comentários finais

Uma dúvida interessante é saber o que define a forma do 4-vetor ω_μ . A forma usada, além de fornecer os resultados corretos, apresenta características interessantes. Com este 4-vetor dado pela eq.(3.14) temos que

$$a^\mu \omega_\mu = \frac{g}{2} \left(\frac{e}{m} \right)^2 F^{\mu\lambda} u_\lambda \mathcal{F}_{\mu\beta} u^\beta = -\frac{g}{2} \left(\frac{e}{m} \right)^2 \vec{B} \cdot \vec{E} = \frac{g}{8} \left(\frac{e}{m} \right)^2 F^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}$$

e assim, numa região em que os campos \vec{B} e \vec{E} são ortogonais, temos que $a^\mu \omega_\mu = a^\mu u_\mu = \omega^\mu u_\mu = 0$, que é um conjunto de três 4-vetores ortogonais formando uma base local para uma hipersuperfície tridimensional.

Além disso sempre valem as relações:

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{2m}{eg} \right)^2 \omega^\mu \omega_\mu - \left(\frac{m}{e} \right)^2 a^\mu a_\mu \right] = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \mathcal{L} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{2m}{eg} \right)^2 \omega^\mu \omega_\mu + \left(\frac{m}{e} \right)^2 a^\mu a_\mu \right] &= \left[-F^{\mu\rho} F^\nu{}_\rho + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right] u_\mu u_\nu \\ &= T^{\mu\nu} u_\mu u_\nu \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde \mathcal{L} e $T^{\mu\nu}$ são, respectivamente, a Lagrangiana e o tensor de momento-energia do campo livre $F^{\mu\nu}$. Destas expressões, portanto, vê-se que com ω^μ e a^μ têm-se uma boa descrição do campo que gera tais 4-acelerações.

Explicitamente têm-se as componentes para ω^μ dadas como

$$\omega^0 = \frac{eg}{2m} \gamma \vec{B} \cdot \vec{\beta}$$

$$\vec{\omega} = \frac{eg}{2m} \gamma \left[\vec{B} - \vec{\beta} \times \vec{E} \right]$$

o que, curiosamente, é a generalização relativística da força de Lorentz para um monopolo magnético de carga magnética $q_m = eg/2$ [10]. As equações (3.21) e (3.22) expressam bem esse fato: um campo eletromagnético pode ser completamente descrito através da força que ele exerce em cargas-teste; o campo elétrico age diretamente sobre a carga elétrica e o campo magnético diretamente sobre o monopolo. Tal fato, porém, não explica o aparecimento de ω^μ na equação covariante que leva à Eq. de Thomas, já que não há monopolos envolvidos.

Para concluir, é fácil ver, contraindo a expressão (3.12) com a 4-velocidade, que, *mesmo na presença de rotações espaciais* e, portanto, na presença do termo com ω^μ , o spin sofre transporte de Fermi-Walker devido à ortogonalidade entre S^μ e u^μ :

$$\frac{dS^\mu}{d\tau} u_\mu = \left[-u^\mu a^\nu S_\nu + \omega_\beta S^{\mu\beta} \right] u_\mu = -a^\nu S_\nu = -\frac{du^\nu}{d\tau} S_\nu$$

i.e.,

$$\frac{dS^\mu}{d\tau} u_\mu + \frac{du^\nu}{d\tau} S_\nu = \frac{d(S^\mu u_\mu)}{d\tau} = 0$$

4. Detetores e o vácuo

4.1 Definições

A definição de vácuo é um conceito de que nos indica condições físicas, como a ausência de partículas, mas é a presença de partículas virtuais dentro de regiões de espaço devido às flutuações de vácuo de Mandelstam e a teoria de campos. O vácuo de Mandelstam possui invariância pelo grupo de Poincaré e, assim, todas as observáveis locais são preservadas quanto a condições de vácuo. O vácuo de Mandelstam é definido como o estado de menor energia por unidade de volume e é denotado por $|0\rangle$.

Um estado de vácuo físico é definido como um estado de menor energia por unidade de volume e é denotado por $|0\rangle$. Um estado de vácuo físico é definido como um estado de menor energia por unidade de volume e é denotado por $|0\rangle$.

Um estado de vácuo físico é definido como um estado de menor energia por unidade de volume e é denotado por $|0\rangle$. Um estado de vácuo físico é definido como um estado de menor energia por unidade de volume e é denotado por $|0\rangle$.

Condições de vácuo

Um estado de vácuo físico é definido como um estado de menor energia por unidade de volume e é denotado por $|0\rangle$. Um estado de vácuo físico é definido como um estado de menor energia por unidade de volume e é denotado por $|0\rangle$.

$$(C_{ij} - \eta^2 \delta_{ij}) \psi_j = 0 \quad (4.1)$$

Um estado de vácuo físico é definido como um estado de menor energia por unidade de volume e é denotado por $|0\rangle$.

4. Detetores e o vácuo

4.1 Definições

A definição de vácuo é, ao contrário do que nos indica o senso-comum, observador-dependente, isto é, a presença ou não de partículas numa determinada região do espaço depende de quem faz e como é feita a detecção ou não de partículas. O vácuo de Minkowski¹ possui invariância pelo grupo de Poincaré, e, assim, todos os observadores inerciais concordarão quanto a ausência de partículas nele, mas isto *não será verdade* para observadores acelerados. Portanto, para definir o estado de um campo φ é mais útil usar conceitos locais, tais como o valor médio do tensor de energia-momento, em contraste com o conceito de partícula, que é global.

Vácuo é dependente
do observador

Os resultados obtidos para detetores no vácuo já são bastante conhecidos; este capítulo têm, portanto, como objetivo apenas apresentar conceitos e cálculos que serão utilizados no próximo capítulo, onde o vácuo será substituído por um banho térmico de fundo.

Nesta seção mostram-se as definições básicas de função de Green e detetor de Unruh-De Witt que serão usadas logo em seguida; a curta seção seguinte, '**Detetores inerciais no vácuo**', apresenta um resultado óbvio: detetores inerciais no vácuo não devem 'sentir' nada; na seção '**Detetores uniformemente acelerados no vácuo**' mostra-se o resultado conhecido como efeito Unruh, de dois pontos de vista diversos - o de um observador inercial e o do detetor. Por fim, a seção '**Detetores em movimento circular no vácuo**' mostra um caso particular de aceleração que será útil no capítulo seguinte.

Funções de Green

Em Teoria de Campos algumas funções de Green são identificadas com os valores esperados no vácuo de produtos de operadores do campo; tais funções satisfazem a equação de Klein-Gordon inhomogênea para um campo escalar:

$$(\square_x - m^2)G(x) = -\delta(x) \tag{4.1}$$

Em n -dimensões tais funções podem ser escritas como:

¹Ver eq.(2.19) de [11].

$$G(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int d^n k \frac{e^{-ik^\mu(x_\mu - x'_\mu)}}{k^\mu k_\mu - m^2} \quad (4.2)$$

ou, em 3 + 1 dimensões:

$$G(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int dk \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^2 - m^2} \quad (4.3)$$

Esta última expressão define, na verdade, várias funções de Green, já que falta a orientação de como contornar os polos em $k^2 = m^2$; tal indefinição relaciona-se ao fato da solução exata completa poder ser escrita como uma soma da solução particular da equação inhomogênea e das soluções da equação homogênea, com coeficientes arbitrários determinados unicamente pelas condições de contorno do campo [12]. Deste modo, de acordo com os contornos escolhidos, têm-se:

Funções de Green
para o vácuo

$$iG(x, x') = \langle 0 | [\phi(x), \phi(x')] | 0 \rangle \quad (4.4)$$

$$G^{(1)}(x, x') = \langle 0 | \{\phi(x), \phi(x')\} | 0 \rangle \quad (4.5)$$

$$G^+(x, x') = \langle 0 | \phi(x)\phi(x') | 0 \rangle \quad (4.6)$$

$$G^-(x, x') = \langle 0 | \phi(x')\phi(x) | 0 \rangle \quad (4.7)$$

e assim por diante².

As duas últimas funções escritas acima - equações (4.6) e (4.7) - são conhecidas também como funções de Wightman³, e o cálculo de G^+ é simples, feito a partir da expansão do campo ϕ :

$$\phi = \int \frac{d^{n-1}k}{[2\omega_k(2\pi)^{n-1}]^{1/2}} \{a_k e^{-ik_\mu x^\mu} + a_k^\dagger e^{ik_\mu x^\mu}\} \quad (4.8)$$

Assim:

$$\begin{aligned} G(x, x') &= \int \frac{d^{n-1}k}{[2\omega_k(2\pi)^{n-1}]^{1/2}} e^{-ik_\mu x^\mu} \int \frac{d^{n-1}k'}{[2\omega_{k'}(2\pi)^{n-1}]^{1/2}} e^{-ik'_\mu x'^\mu} \\ &\quad \times \langle 0 | a_k a_{k'}^\dagger | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^{n-1}k}{[2\omega_k(2\pi)^{n-1}]^{1/2}} e^{-ik_\mu x^\mu} \int \frac{d^{n-1}k'}{[2\omega_{k'}(2\pi)^{n-1}]^{1/2}} e^{-ik'_\mu x'^\mu} \\ &\quad \times \delta(k - k') \end{aligned}$$

²Ver, por exemplo, [11]

³As funções dadas pelas equações (4.4) e (4.5) são conhecidas, respectivamente, como função de Pauli-Jordan ou de Schwinger e função elementar de Hadamard.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{(k^2 + m^2)^2} dk \quad (1.9)$$

... para $x > 0$, o contorno é fechado no semiplano superior...

$$G(x, k) = \int \frac{e^{ikx}}{(k^2 + m^2)^2} dk \quad (1.10)$$

Porém

$$G(x, k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{(k^2 + m^2)^2} dk$$

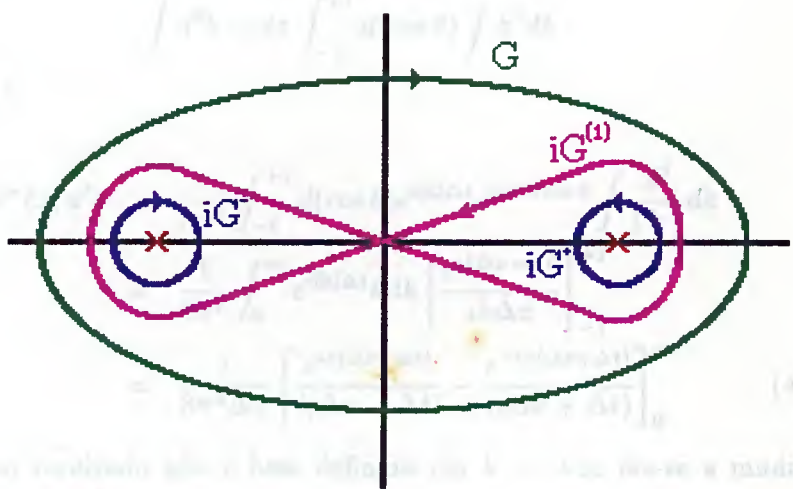


Figura 1: Contornos para integração no plano complexo das funções de Green G , $G^{(1)}$, G^+ e G^- ; os polos no eixo real em $k^0 = \pm (k^2 + m^2)^{1/2}$ estão marcados com cruces.

$$G^+(x, k) = \frac{e^{ikx}}{(k^2 + m^2)^2} \quad (1.11)$$

$$G^-(x, k) = \frac{e^{ikx}}{(k^2 + m^2)^2} \quad (1.12)$$

... para $x < 0$, o contorno é fechado no semiplano inferior...

... para qualquer valor de x ...

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{d^{n-1}k}{2\omega_k(2\pi)^{n-1}} e^{-ik_\mu(x^\mu - x'^\mu)} \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int d^n k \frac{e^{i[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}') - k^0(t-t')]}{(k^0)^2 - |\mathbf{k}|^2 - m^2} \tag{4.9}
 \end{aligned}$$

que é basicamente o resultado mostrado na equação (4.2) [11].

Em 3 + 1 dimensões, com $m = 0$ e usando o contorno adequado no plano complexo, isto se escreve:

$$G^+(x, x') = \int \frac{d^3k}{16\pi^3 |\mathbf{k}|} e^{i|\mathbf{k}|\Delta t} e^{i\mathbf{k}\cdot\Delta\mathbf{x}} \tag{4.10}$$

Porém,

$$\int d^3k = 2\pi \int_{-1}^{+1} d(\cos\theta) \int k^2 dk$$

com $k = |\mathbf{k}|$.

Assim:

$$\begin{aligned}
 G^+(x, x') &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{-1}^{+1} d(\cos\theta) e^{i|\mathbf{k}|\Delta t} e^{i\mathbf{k}\Delta\mathbf{x} \cos\theta} \int \frac{k^2}{|\mathbf{k}|} dk \\
 &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty e^{i|\mathbf{k}|\Delta t} k dk \left[\frac{e^{i\mathbf{k}\Delta\mathbf{x} \cos\theta}}{i\mathbf{k}\Delta\mathbf{x}} \right]_{-1}^{+1} \\
 &= \frac{i}{8\pi^2 \Delta\mathbf{x}} \left[\frac{e^{i\mathbf{k}(\Delta\mathbf{x} - \Delta t)}}{i(\Delta\mathbf{x} - \Delta t)} - \frac{e^{-i\mathbf{k}(\Delta\mathbf{x} + \Delta t)}}{i(\Delta\mathbf{x} + \Delta t)} \right]_0^\infty \tag{4.11}
 \end{aligned}$$

Como tal resultado não é bem definido em $k \rightarrow +\infty$ faz-se a mudança $t' \rightarrow t' + i\epsilon$, de modo que:

$$\begin{aligned}
 G^+(x, x') &= \frac{1}{8\pi^2 \Delta\mathbf{x}} \left[\frac{-(\Delta\mathbf{x} + \Delta t) - (\Delta\mathbf{x} - \Delta t)}{(\Delta\mathbf{x} - \Delta t)(\Delta\mathbf{x} + \Delta t)} \right] \\
 &= -\frac{1}{4\pi^2} \left[(t - t' - i\epsilon)^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 \right]^{-1} \tag{4.12}
 \end{aligned}$$

Note-se que tal função de Green foi obtida para o vácuo, mas podem ser definidas também funções para estados térmicos, isto é, funções de Green térmicas, que descrevem sistemas que não estão a temperatura zero:

$$G_\beta^+(x, x') = \langle \phi(x)\phi(x') \rangle_\beta \tag{4.13}$$

$$G_\beta^-(x, x') = \langle \phi(x')\phi(x) \rangle_\beta \tag{4.14}$$

Uma propriedade importante de tais funções térmicas é sua relação com as funções para o vácuo⁴:

⁴Para a dedução de tal relação ver [11] ou [13].

Função de Wightman para campo escalar não massivo é proporcional ao inverso do intervalo Δs^2

Funções de Green térmicas apresentam periodicidade no tempo

$$\mathcal{G}_\beta(x, t; x', t') = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(x, t + im\beta; x', t') \quad (4.15)$$

onde \mathcal{G} é uma função de Green genérica, isto é, pode ser qualquer uma das funções dadas pelas equações (4.4) a (4.7).

Detetores de Unruh-De Witt

Pode-se tomar como detetor um sistema puntual de dois níveis internos, representado por um monopolo $\hat{m}(\tau)$, acoplando-o a um campo escalar não massivo $\hat{\phi}[x^\mu(\tau)]$ através da ação de interação:

Detetor de Unruh:
monopolo que
interage com
sistema escalar

$$S_I = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \hat{m}(\tau) c(\tau) \hat{\phi}[x^\mu(\tau)] \quad (4.16)$$

onde $c(\tau)$ é a constante de acoplamento do detetor e $x^\mu(\tau)$ é a trajetória desse detetor.

Na picture de Heisenberg representa-se a evolução temporal do detetor como:

$$\hat{m}(\tau) = e^{i\hat{H}_0\tau} \hat{m}(0) e^{-i\hat{H}_0\tau}$$

onde $\hat{H}_0 | E \rangle = E | E \rangle$ para qualquer auto-estado de energia $| E \rangle$ do detetor.

A probabilidade de excitação do detetor é dada pela integral do módulo quadrado da amplitude de excitação, isto é:

$$P^{exc} = \int d^3\mathbf{k} | A^{exc} |^2$$

onde

$$A^{exc} = \langle E_f | S_I | E_i \rangle$$

e

$$\langle E_f | = \langle 1_{\mathbf{k}} | \otimes \langle E |$$

$$| E_i \rangle = | E_0 \rangle \otimes | 0_M \rangle$$

Assim, têm-se⁵:

$$P^{exc} = \int d^3\mathbf{k} | \langle E | \hat{m}(0) | E_0 \rangle |^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau' e^{-i\Delta E \Delta\tau} \times \langle 0 | \hat{\phi}[x^\mu(\tau')] | 1_{\mathbf{k}} \rangle \langle 1_{\mathbf{k}} | \hat{\phi}[x^\mu(\tau)] | 0 \rangle \quad (4.17)$$

⁵Nesse caso $c(\tau) = 1$.

Como $\int d^3\mathbf{k} |1_{\mathbf{k}}\rangle\langle 1_{\mathbf{k}}| = 1$ temos que:

$$P^{exc} = |\langle E | \hat{m}(0) | E_0 \rangle|^2 \mathcal{F}(E - E_0) \quad (4.18)$$

onde

$$\mathcal{F}(E - E_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau' e^{-i\Delta E \Delta\tau} G^+(x, x')$$

é a função de resposta do detetor, com $\Delta E = E - E_0$ e $\Delta\tau = \tau - \tau'$, e $|\langle E | \hat{m}(0) | E_0 \rangle|^2$ é a seletividade do detetor.

Às vezes, quando $G^+(x, x') = g(\Delta\tau)$, é mais interessante é usar a probabilidade de excitação do detetor dividida pelo tempo total de seu funcionamento; assim têm-se a *taxa de excitação do detetor*:

Taxa de excitação
do detetor

$$\frac{P^{exc}}{T^{total}} = |\langle E | \hat{m}(0) | E_0 \rangle|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d(\Delta\tau) e^{-i\Delta E \Delta\tau} G^+(\Delta\tau) \quad (4.19)$$

Probabilidades e polarização

A probabilidade de transição do spin do elétron entre os estados ‘up’ e ‘down’ é dada como na equação (4.18):

$$P^{\pm} = c_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau' \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{\mp i\Delta E \Delta\tau} G^+(\tau, \tau') \quad (4.20)$$

onde agora o elétron tem a probabilidade de se excitar, fazendo a transição ‘down’ → ‘up’ – o que corresponde na expressão acima a P^+ – ou de se desexcitar, fazendo a transição contrária ‘up’ → ‘down’ – na expressão acima, isto equivale a P^- ; a constante c_0^2 absorve, neste caso, a seletividade e a constante de acoplamento do detetor.

A polarização, P , é definida, então, por uma expressão que relaciona a razão entre estas duas probabilidades:

$$P \equiv \frac{1 - \frac{P^+}{P^-}}{1 + \frac{P^+}{P^-}} = \frac{P^- - P^+}{P^- + P^+} \quad (4.21)$$

4.2 Detetores inerciais no vácuo

As expressões (4.2) e/ou (4.9) demonstram uma dependência da resposta do detetor à sua trajetória, pois $x = x(\tau)$; isto pode talvez ser visto melhor através do cálculo da amplitude de excitação, A^{exc} , de um detetor que é excitado com a transição do campo para o estado $|1_{\mathbf{k}}\rangle$:

$$A^{exc} = \langle E | \hat{m}(0) | E_0 \rangle \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\Delta E \tau} d\tau \langle 1_{\mathbf{k}} | \hat{\phi}[x^\mu(\tau)] | 0_{\mathbf{M}} \rangle$$

Se este detetor segue uma linha de mundo inercial

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}t = \mathbf{x}_0 + \gamma \mathbf{v}\tau \quad (4.22)$$

com \mathbf{x}_0 e \mathbf{v} sendo constantes, então

$$A^{exc} = \langle E | \hat{m}(0) | E_0 \rangle \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_0} \delta[\Delta E + \gamma(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v})]$$

Como $\mathbf{k}\cdot\mathbf{v} \leq |\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}| \leq \omega$ e $\Delta E > 0$ o argumento da função delta nunca se anula e, portanto a amplitude de excitação de detetor é nula, o que significa que um detetor inercial no vácuo não se excita.

Em 3 + 1 dimensões, para um campo não massivo, e usando o contorno adequado no plano complexo, pode-se escrever

$$D^+(x, x') \equiv G^+(x, x') |_{m=0} = -\frac{1}{4\pi^2} \left[(t - t' - i\epsilon)^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 \right]^{-1} \quad (4.23)$$

Usando a trajetória inercial dada por (4.22) temos que

$$D^+(\Delta\tau) = -1/4\pi (\Delta\tau - i\epsilon)^2$$

Neste caso o cálculo da probabilidade de excitação do detetor é simples, e é zero, pois não há polos no interior da região delimitada pelo contorno no plano complexo.

4.3 Detetores uniformemente acelerados no vácuo

Espaço de Rindler

Considere-se o espaço de Minkowski bidimensional com a métrica [11]

$$ds^2 = dudv = dt^2 - dx^2$$

Usando a seguinte transformação de coordenadas

$$\begin{aligned} t &= a^{-1} e^{a\xi} \sinh a\eta \\ x &= a^{-1} e^{a\xi} \cosh a\eta \end{aligned}$$

onde $a = \text{constante} > 0$ e $-\infty < \eta, \xi < +\infty$, ou equivalentemente

$$\begin{aligned} u &= -a^{-1} e^{-a(\eta-\xi)} \\ v &= a^{-1} e^{a(\eta+\xi)} \end{aligned}$$

com a métrica sendo escrita então

$$ds^2 = e^{2a\xi} (d\eta^2 - d\xi^2)$$

As coordenadas (t, z) são as coordenadas de Minkowski. Linhas em que t é constante são linhas de simultaneidade para S . Linhas em que z é constante são linhas de mundo de observadores em repouso em S .

$$\xi^2 = X^2 - c^2 T^2 = \text{constante}$$

As linhas de mundo de observadores uniformemente acelerados são hipérbolas no espaço de Minkowski. Assim, linhas de mundo onde ξ é positivo e constante representam observadores uniformemente acelerados, enquanto as linhas de mundo onde ξ é negativo e constante representam observadores uniformemente desacelerados.

Linhas em que η é constante são linhas de mundo de observadores em repouso em S . Linhas em que η é constante e ξ é constante são linhas de simultaneidade para S .

O eixo (η, ξ) é construído a partir das linhas de mundo de Rindler no espaço de Minkowski. O eixo η é construído a partir das linhas de mundo de observadores em repouso em S .

Probabilidade de existência de vida inteligente em outros planetas é muito baixa. A vida inteligente pode existir em outros planetas se a vida inteligente existir na Terra.

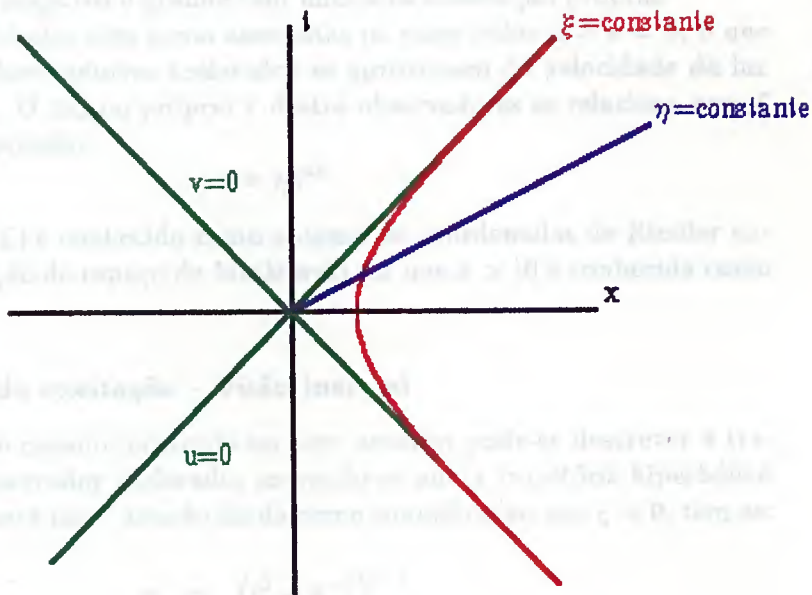


Figura 2: Uso de coordenadas de Rindler no espaço de Minkowski; as curvas em que a coordenada espacial ξ é constante são hipérbolas que correspondem a linhas de mundo de observadores uniformemente acelerados, com assíntotas nulas $u = v = 0$, que agem como horizontes de eventos.

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2n}$$

$$2\pi(2\pi) = \left(\frac{2}{\alpha}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2n}$$

As coordenadas (η, ξ) cobrem apenas um quadrante do espaço *flat* de Minkowski, que é a cunha com $x > |t|$. Linhas em que η é constante são retas enquanto linhas em que ξ é constante são hipérbolas

$$x^2 - t^2 = a^{-2} e^{2a\xi} = \text{constante}$$

que representam linhas de mundo de observadores uniformemente acelerados com aceleração própria $ae^{-a\xi}$. Assim, linhas de mundo onde ξ é positivo e grande representam observadores fracamente acelerados, enquanto as hipérbolas com ξ negativo e grande têm uma alta aceleração própria.

Todas as hipérbolas têm como assíntotas os raios nulos $u = v = 0$, o que significa que os observadores acelerados se aproximam da velocidade da luz quando $\eta \rightarrow \pm\infty$. O tempo próprio τ destes observadores se relaciona com ξ e η segundo a expressão

$$\tau = \eta e^{a\xi}$$

O sistema (η, ξ) é conhecido como sistema de coordenadas de Rindler enquanto que a porção do espaço de Minkowski em que $x > |t|$ é conhecida como 'Rindler wedge'.

Probabilidade de excitação – visão inercial

Usando a linha de mundo mostrada no item anterior pode-se descrever a trajetória de um observador acelerado, movendo-se numa trajetória hiperbólica no plano (t, x) ; neste caso, usando ainda como simplificação que $\xi = 0$, têm-se:

$$\begin{aligned} x &= (t^2 + a^{-2})^{1/2} \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

onde a é uma constante que representa a aceleração própria do detetor. Daí obtêm-se

$$D^+(\Delta\tau) = - \left[16\pi^2 \sinh \left(\frac{a\Delta\tau}{2} - i\varepsilon \right) \right]^{-1}$$

Usando a identidade [14]

$$\left[\frac{1}{\sin \pi x} \right]^2 = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{x - k} \right)^2$$

têm-se que

$$D^+(\Delta\tau) = - \left(\frac{a}{8\pi} \right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\frac{a}{2}(\Delta\tau - 2i\varepsilon) + \pi ik} \right]^2$$

Observadores uniformemente acelerados estão confinados a uma única porção do espaço: a 'cunha' de Rindler

o que produz, por substituição em (4.19),

$$\frac{P_{exc}}{T_{total}} = |\langle E | \hat{m}(0) | E_0 \rangle|^2 \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta E}{e^{\frac{2\pi\Delta E}{a}} - 1}$$

Tal resultado pode ser interpretado através da idéia que um detetor acelerado no vácuo de Minkowski vê um banho térmico de espectro Planckiano e temperatura

$$T = \frac{a}{2\pi}$$

ou, usando as constantes do sistema métrico de unidades,

$$\beta \equiv k_B T = \frac{a\hbar}{2\pi c}$$

onde k_B é a constante de Boltzmann. Este é o resultado padrão conhecido como Efeito Fulling-Davies-Unruh ou, abreviadamente, efeito FDU.

Efeito Unruh

Este aparente contra-senso pode ser explicado através da conservação de energia: para manter o detetor com aceleração constante é necessário fornecer-lhe energia; contudo, há uma resistência do detetor a essa força aceleradora devido a sua interação com o campo, e assim ele emite parte da energia que recebeu, que aparece no campo como um *quantum*, e que faz o campo ir do estado de vácuo $|0_M\rangle$ para o estado $|1_k\rangle$. Ou seja, a força aceleradora fornece energia para excitar o detetor e o campo.

Probabilidade de excitação – visão acelerada

O cálculo anterior pode também ser feito do ponto de vista acelerado; neste caso a quantização é feita toda no espaço de Rindler, e os fótons trocados entre o detetor e o campo escalar são *fótons de Rindler*, que obedecem a esta quantização.

4.4 Detetores em movimento circular no vácuo

Para um detetor em movimento circular, com o módulo da velocidade constante, $v = \omega R$, basta usar uma trajetória circular fechada de raio R no plano xy ; em coordenadas de Minkowski isto se escreve:

$$\begin{aligned} x &= R \cos \omega t \\ y &= R \sin \omega t \\ z &= 0 \\ t &= \gamma \tau \end{aligned} \quad (4.24)$$

Substituição desta linha de mundo na equação (4.23) produz

$$D^+(\Delta\tau) = -\frac{1}{4\pi^2} \left[\gamma^2 (\Delta\tau - i\varepsilon)^2 - 4R^2 \sin^2 \frac{\omega\gamma\Delta\tau}{2} \right]^{-1} \quad (4.25)$$

Usando que [14]

$$\sin^2 x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2^{2k-1} x^{2k}}{(2k)!}$$

não é difícil mostrar que esta equação, no limite ultrarelativístico em que $v \simeq 1$, isto é, quando $\gamma \rightarrow \infty$, se reduz a

$$D_{\gamma \rightarrow \infty}^+(\Delta\tau) \simeq -\frac{1}{4\pi^2} \left[(\Delta\tau - i\varepsilon)^2 + R^2 \frac{(\omega\gamma\Delta\tau)^4}{12} \right]^{-1} \quad (4.26)$$

Neste caso a taxa de excitação correspondente correspondente é [15]⁶

$$\frac{P^{exc}}{T^{total}} = c_0^2 \frac{a}{8\pi\sqrt{3}} e^{-\sqrt{12}\frac{\Delta E}{a}} \quad (4.27)$$

onde $a \equiv \gamma^2 \omega^2 R$.

Usando ainda a equação (4.26), com substituição na equação (4.20), obtem-se a probabilidade de desexcitação por tempo total:

$$\frac{P^-}{T^{total}} = c_0^2 \frac{a}{8\pi\sqrt{3}} \left[e^{-\sqrt{12}\frac{\Delta E}{a}} + 4\sqrt{3}\frac{\Delta E}{a} \right] \quad (4.28)$$

Assim, para $\Delta E \gg a$, têm-se

$$\frac{P^+}{P^-} \simeq \frac{1}{4\sqrt{3}} \frac{a}{\Delta E} e^{-\sqrt{12}\frac{\Delta E}{a}} \quad (4.29)$$

Pode-se agora escrever que [16]

$$g = \frac{2}{a} (E_b - E_a)$$

onde E_b, E_a são os níveis de energia do detetor, tais que $\Delta E = |E_b - E_a|$, definindo-se daí uma 'polarização' efetiva, dada como

$$P^{efetiva} = \frac{g}{|g|} \frac{1 - \frac{P^+}{P^-}}{1 + \frac{P^+}{P^-}} \quad (4.30)$$

Usando as equações (4.27) e (4.28) isto se escreve

$$P^{efetiva} = \frac{g}{|g|} \frac{1}{1 + \frac{e^{-\sqrt{3}|g|}}{\sqrt{3}|g|}} \quad (4.31)$$

Polarização do spin
devida ao efeito
Unruh circular

Assim, desta última expressão, com $g \rightarrow 2$, pode-se ver que a polarização de um feixe de elétrons não é completa, e tal depolarização deve-se somente ao efeito Unruh. Este é o principal resultado de tudo que foi mostrado até aqui; no próximo capítulo ir-se-á mostrar que o efeito Unruh é tão importante que deve, em condições comumente encontradas em aceleradores de partículas, sobrepujar até mesmo os efeitos do banho térmico encontrado em temperatura ambiente.

⁶Aqui usa-se que c_0^2 dá conta da seletividade e da constante de acoplamento do detetor.

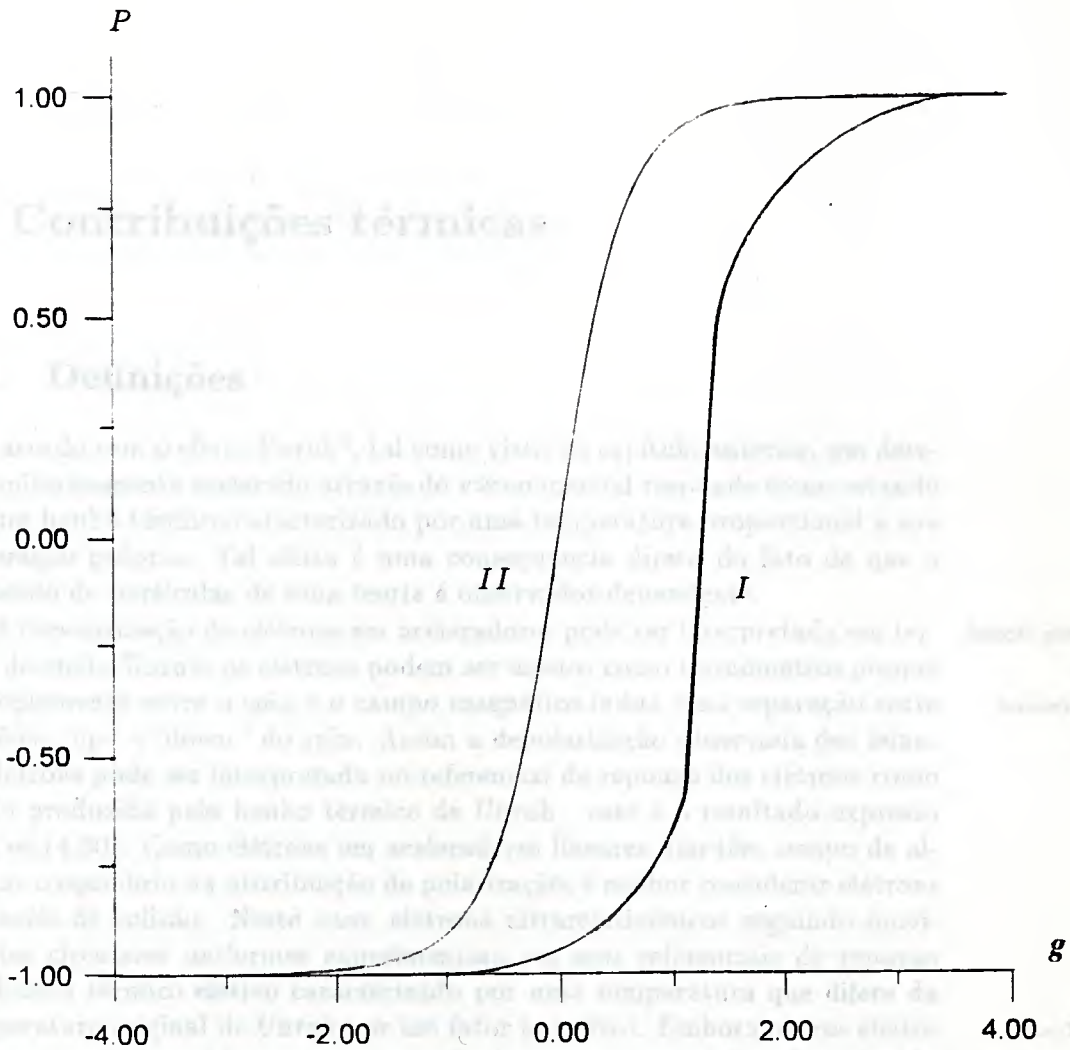


Figura 3: Comparação entre as polarizações obtidas semi-classicamente - curva I - e usando o efeito Unruh - curva II.

(See next page for continuation)

5. Contribuições térmicas

5.1 Definições

De¹ acordo com o efeito Unruh², tal como visto no capítulo anterior, um detector uniformemente acelerado através do vácuo inercial responde como estando em um banho térmico caracterizado por uma temperatura proporcional a sua aceleração própria. Tal efeito é uma consequência direta do fato de que o conteúdo de partículas de uma teoria é observador-dependente.

A depolarização de elétrons em aceleradores pode ser interpretada em termos do efeito Unruh; os elétrons podem ser usados como termômetros porque o acoplamento entre o spin e o campo magnético induz uma separação entre os níveis 'up' e 'down' do spin. Assim a depolarização observada dos feixes de elétrons pode ser interpretada no referencial de repouso dos elétrons como sendo produzida pelo banho térmico de Unruh - este é o resultado expresso pela eq.(4.30). Como elétrons em aceleradores lineares não têm tempo de alcançar o equilíbrio na distribuição de polarização, é melhor considerar elétrons em anéis de colisão. Neste caso, elétrons ultrarelativísticos seguindo movimentos circulares uniformes experimentam em seus referenciais de repouso um banho térmico efetivo caracterizado por uma temperatura que difere da temperatura original de Unruh por um fator numérico. Embora outros efeitos possam ter um papel importante neste fenômeno, em especial o efeito devido a precessão de Thomas, tal visão pode ser considerada bastante acurada.

Como já foi dito na introdução dessa dissertação, elétrons nas condições alcançadas pelo 'collider' e^+e^- do LEP, no CERN, têm como acelerações típicas $a = 2,9 \times 10^{23} m/s^2$, o que corresponde a uma temperatura de Unruh da ordem de $\hbar a / 2\pi c k = 1200 K$. Como este valor é apenas 4 vezes superior que as temperaturas de laboratório, seria interessante considerar um detector acelerado em um banho térmico de fundo ao invés de no vácuo, de modo a investigar-se em que medida correções de temperatura finita devem ser levadas em conta quando do teste do efeito Unruh sob reais condições de laboratório.

A excitação do detector irá representar a depolarização do elétron, já que ambos os sistemas compartilham a característica comum de serem sistemas

Relação entre efeito
Unruh e
depolarização de
elétrons

Em Teoria de
Campos a precessão
de Thomas não é
fundamental,
embora seja
importante

¹Este capítulo segue a ref.[17].

²Ou, mais propriamente, efeito FDU.

de dois níveis. Mostra-se aqui que em condições reais de aceleradores a maior contribuição para a resposta do detetor vem do vácuo inercial tornando a contribuição devida à presença do banho térmico não muito importante. Isto reforça a idéia usual de considerar os elétrons como sendo acelerados no vácuo de Minkowski, quando testando o efeito Unruh em anéis de armazenagem.

Este capítulo é apresentado na mesma estrutura do capítulo anterior: a diferença está na troca do cenário onde os detetores se movem; lá era o vácuo, aqui é um banho térmico de fótons escalares. Assim, na próxima seção, ‘**Detetores inerciais**’, mostra-se que detetores inerciais interagem menos com o banho de fundo quanto maior for sua velocidade; na seção ‘**Detetores uniformemente acelerados**’ substituem-se os detetores inerciais por detetores acelerados linearmente, e na última seção, ‘**Detetores em movimento circular**’, consideram-se detetores movendo-se circularmente com velocidade constante, que é o caso mais realístico.

5.2 Detetores inerciais

Nesta seção pretende-se mostrar que quanto mais rápido um detetor se move num banho térmico de fundo, menos ele interage com este banho. Isto é assim porque a dilatação do tempo induz um detetor movendo-se rápido a interagir preferencialmente com modos de frequência baixos. Embora um banho térmico seja rico de modos de baixa frequência, o elemento de volume do espaço de fase ($\propto \omega^2 d\omega$) suprime contribuições infravermelhas.

O detetor de Unruh-De Witt é o mesmo sistema de dois níveis visto anteriormente, que pode estar tanto no estado fundamental $|E_0\rangle$ ou no estado excitado $|E\rangle$. Tal detetor continuará sendo descrito por um monopolo $\hat{m}(\tau)$ acoplado a um campo escalar sem massa $\hat{\phi}(x^\mu)$ através da ação de interação

$$S_I = \int_{-\infty}^{+\infty} c(\tau) \hat{m}(\tau) \hat{\phi}[x^\mu(\tau)] d\tau$$

onde $x^\mu(\tau)$ é a linha de mundo do detetor e τ é seu tempo próprio. Aqui $c(\tau)$ é uma função que faz o papel de parâmetro de acoplamento; nesta seção será suficiente considerar um detetor permanentemente ligado, *i.e.*, $c(\tau) = c_0 =$ constante. Na picture de Heisenberg o operador de monopolo evolui como

$$\hat{m}(\tau) = e^{iH_0\tau} \hat{m}(0) e^{-iH_0\tau}$$

onde $H_0|E\rangle = E|E\rangle$ para qualquer autoestado de energia do detetor $|E\rangle$.

A amplitude para a excitação do detetor com absorção de uma partícula $|\mathbf{k}\rangle$ é

$$\mathcal{A}_{abs}^{exc} = \langle 0| \otimes \langle E| S_I |E_0\rangle \otimes |\mathbf{k}\rangle$$

Usando a expansão do campo escalar em ondas planas e assumindo que o detetor segue uma linha de mundo inercial

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= vt \\ t &= \gamma\tau \end{aligned}$$

(onde $v = |\mathbf{v}|$ é a velocidade do detetor em relação ao banho térmico de fundo e $\gamma = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$), obtêm-se

$$\mathcal{A}_{abs}^{exc} = \frac{c_0}{\sqrt{4\pi\omega}} \delta[\Delta E - \gamma(\omega - k_z v)] \quad (5.1)$$

onde $\Delta E = E - E_0$, e $\omega = |\mathbf{k}|$. Neste capítulo assume-se que $\langle E | \hat{m}(0) | E_0 \rangle \equiv 1$ já que esta seletividade depende apenas dos detalhes internos do detetor, e sempre pode ser fatorada. A amplitude para o detetor ser excitado e simultaneamente emitir uma partícula para o vácuo desaparece devido a conservação de energia. Assim a taxa de excitação total por tempo próprio T^{tot} do detetor será

$$\frac{\mathcal{P}^{exc}}{T^{tot}} = \frac{1}{T^{tot}} \int d^3\mathbf{k} |\mathcal{A}_{abs}^{exc}|^2 \left[\frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} \right] \quad (5.2)$$

onde $T^{tot} = 2\pi\delta(0)$, e onde colocou-se entre parênteses o usual peso de absorção associado com um banho térmico a temperatura β^{-1} . Este mesmo cálculo pode ser feito usando-se a equação (4.19) com a substituição $G^+ \rightarrow G_\beta^+$.

Como consequência da equação (5.1), detetores movendo-se rapidamente irão apenas interagir com modos de baixa frequência. O comportamento do detetor será determinado em (5.2) pela competição entre o banho térmico, que é rico de modos de baixa frequência, e o elemento de volume do espaço de fase ($\propto \omega^2 d\omega$) que tende a suprimir contribuições infravermelhas. Substituindo (5.1) em (5.2), e realizando as integrações, obtêm-se

$$\frac{\mathcal{P}^{exc}}{T^{tot}} = \left(\frac{c_0^2 \Delta E}{2\pi} \right) \frac{1}{2\beta\gamma v \Delta E} \ln \left[\frac{1 - e^{-\beta\Delta E\sqrt{1+v}/\sqrt{1-v}}}{1 - e^{-\beta\Delta E\sqrt{1-v}/\sqrt{1+v}}} \right] \quad (5.3)$$

No limite $v \rightarrow 0$ o detetor responde com um espectro Planckiano

$$\frac{\mathcal{P}^{exc}}{T^{tot}} = \left(\frac{c_0^2 \Delta E}{2\pi} \right) \frac{1}{e^{\beta\Delta E} - 1} \quad (5.4)$$

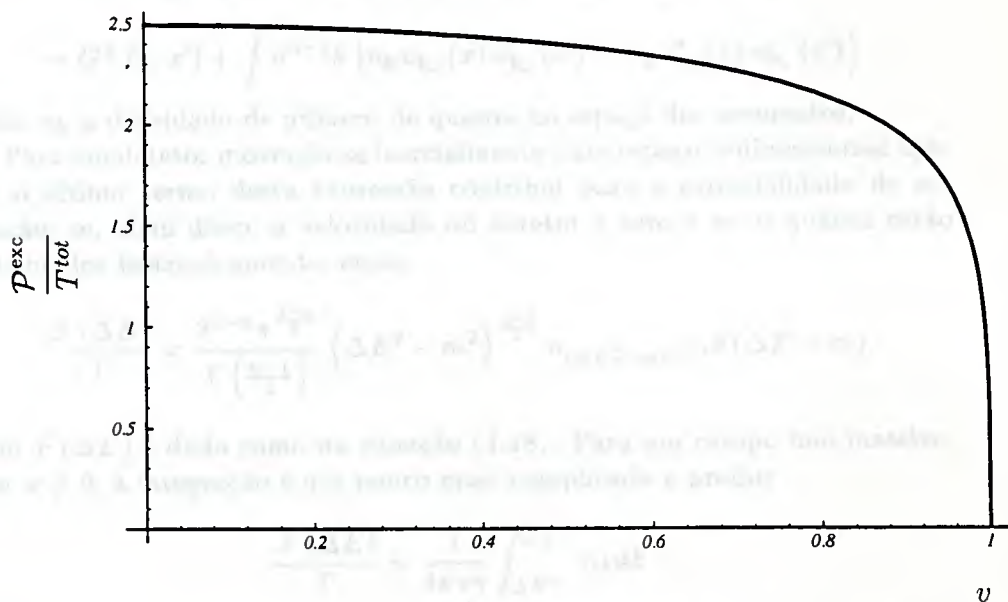
como esperado, enquanto que quando $v \rightarrow 1$ a taxa de excitação por tempo próprio total desaparece. Isto sugere que ao se testar o efeito Unruh em regimes ultrarelativísticos tal como em aceleradores de partículas, contribuições térmicas de fundo devem ser pequenas.

Considerando a probabilidade de excitação de um detector por um banho térmico, tal como a (5.3), se o detector estiver em movimento com uma velocidade v em relação ao banho, a probabilidade de excitação de um detector por um banho térmico é dada por

$$P_{exc} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta'} \right) \right) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta'} \right) \right) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta'} \right) \right)$$

onde $\beta = 1/(k_B T)$ e $\beta' = 1/(k_B T')$ são as temperaturas do banho e do detector, respectivamente.

$$\frac{c_0^2}{2\pi} \frac{\Delta E'}{e^{\Delta E \beta} - 1}$$



onde $\beta = 1/(k_B T)$ e $\beta' = 1/(k_B T')$ são as temperaturas do banho e do detector, respectivamente. Para um detector em movimento com uma velocidade v em relação ao banho, a probabilidade de excitação de um detector por um banho térmico é dada por

5.3 Figura 4: Gráfico da probabilidade de excitação de um detector inercial movendo-se com velocidade v num banho térmico caracterizado por uma temperatura β^{-1} .

Após a obtenção da probabilidade de excitação de um detector em movimento com uma velocidade v em relação ao banho, a probabilidade de excitação de um detector por um banho térmico é dada por

O resultado obtido acima também pode ser compreendido usando-se outro ponto de vista, tal como em [11]; se o campo escalar considerado está em um estado de muitas partículas têm-se então a função de Green alterada pela adição de um termo extra:

$$\begin{aligned} & \langle {}^1 n_{\mathbf{k}_1}, {}^2 n_{\mathbf{k}_2}, \dots, {}^3 n_{\mathbf{k}_j} | \phi(x) \phi(x') | {}^1 n_{\mathbf{k}_1}, {}^2 n_{\mathbf{k}_2}, \dots, {}^3 n_{\mathbf{k}_j} \rangle \\ & = G^+(x, x') + \sum_i \left[{}^i n u_{\mathbf{k}_i}(x) u_{\mathbf{k}_i}^*(x') + {}^i n u_{\mathbf{k}_i}^*(x) u_{\mathbf{k}_i}(x') \right] \end{aligned}$$

No limite contínuo basta trocar as somatórias por integrais:

$$\begin{aligned} & \langle {}^1 n_{\mathbf{k}_1}, {}^2 n_{\mathbf{k}_2}, \dots, {}^3 n_{\mathbf{k}_j} | \phi(x) \phi(x') | {}^1 n_{\mathbf{k}_1}, {}^2 n_{\mathbf{k}_2}, \dots, {}^3 n_{\mathbf{k}_j} \rangle \\ & = G^+(x, x') + \int d^{n-1}k \left[n_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}_i}(x) u_{\mathbf{k}_i}^*(x') + n_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}_i}^*(x) u_{\mathbf{k}_i}(x') \right] \end{aligned}$$

sendo $n_{\mathbf{k}}$ a densidade de número de quanta no espaço dos momentos.

Para um detetor movendo-se inercialmente num espaço n -dimensional apenas o último termo desta expressão contribui para a probabilidade de excitação; se, além disso, a velocidade do detetor é zero e se os quanta estão distribuídos isotropicamente, então

$$\frac{\mathcal{F}(\Delta E)}{T} = \frac{2^{2-n} \pi^{\frac{3-n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} (\Delta E^2 - m^2)^{\frac{n-3}{2}} n_{(\Delta E^2 - m^2)^{1/2}} \theta(\Delta E - m)$$

onde $\mathcal{F}(\Delta E)$ é dado como na equação (4.18). Para um campo não massivo, com $v \neq 0$, a integração é um pouco mais complicada e produz

$$\frac{\mathcal{F}(\Delta E)}{T} = \frac{1}{4\pi v \gamma} \int_{\Delta E^-}^{\Delta E^+} n_k dk$$

onde $\Delta E^\pm = \Delta E [(1 \pm v)/(1 \mp v)]^{\frac{1}{2}} = \Delta E \gamma (1 \pm v)$ é um fator devido ao efeito Doppler, isto é, o detetor escolhe para sua excitação não apenas partículas com uma energia bem definida mas todas aquelas que devido a um redshift ou a um blueshift acabam por fitar em seu gap de energia. Tal procedimento leva novamente à equação (5.3) se $n_k = (e^{\beta \Delta E} - 1)^{-1}$.

5.3 Detetores uniformemente acelerados

Antes de analisar o caso mais realista de detetores em movimento circular, investigar-se-á a resposta de um detetor uniformemente acelerado em um banho térmico de fundo. Neste caso particular quer-se dizer que detetores uniformemente acelerados são detetores *linearmente* acelerados com aceleração própria constante. A probabilidade total de excitação para um

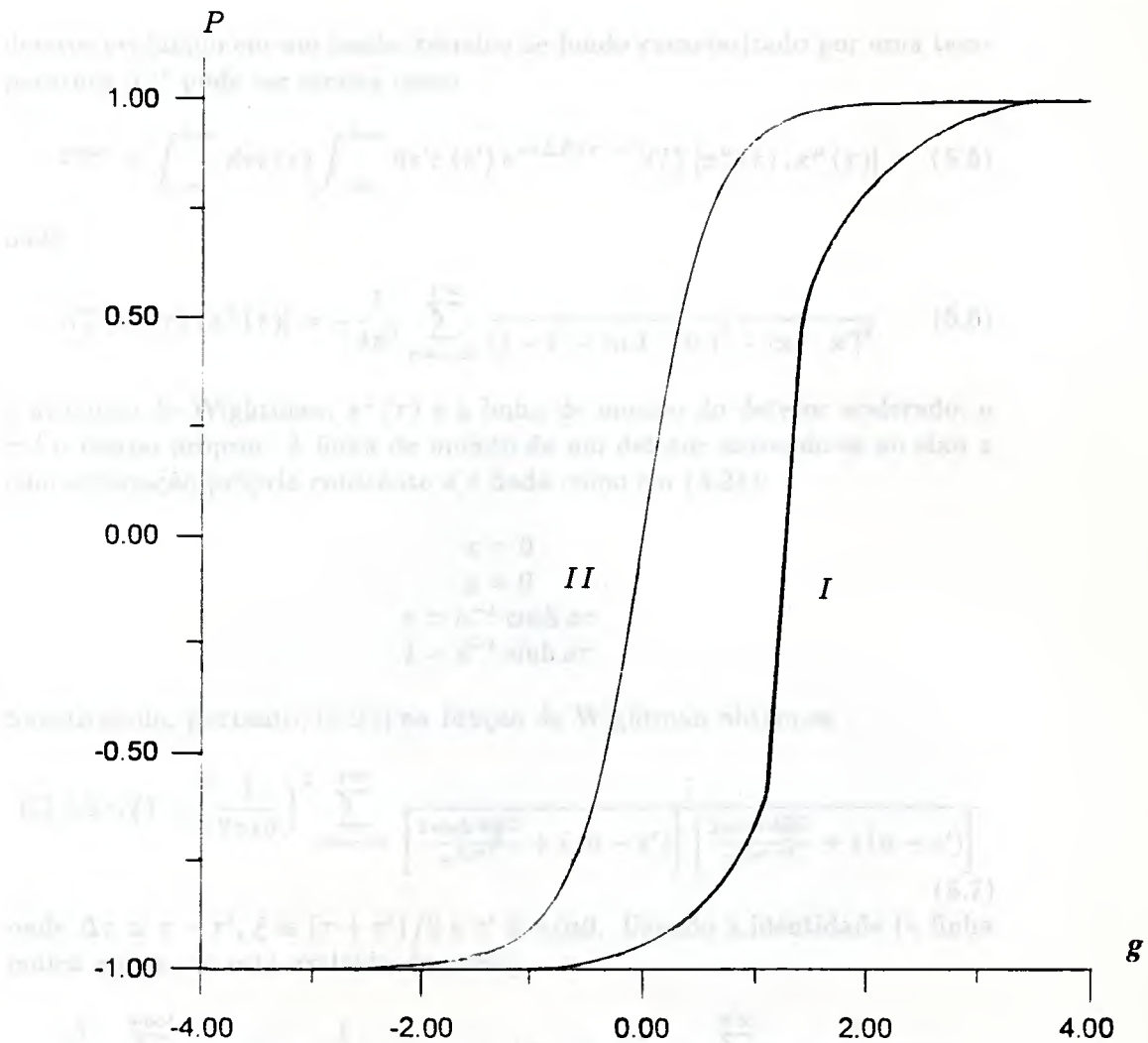


Figura 3: Comparação entre as polarizações obtidas semi-classicamente – curva I – e usando o efeito Unruh – curva II.

para $g > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \coth(\pi a) + \frac{1}{2a^2} \quad (5.9)$$

podemos usar a expressão (5.7) de $G_{\mu\nu}^{\pm}$

$$G_{\mu\nu}^{\pm}(r, r') = G_{\mu\nu, \text{cl}}^{\pm}(\Delta r) + G_{\mu\nu, \text{unruh}}^{\pm}(\Delta r, \xi) \quad (5.10)$$

Uma correção de resultados apresentados em (18)

Função de Green
 Weyl de ordem
 em duas partes,
 uma sendo de
 ordem \hbar^0
 e outra de
 ordem \hbar^1

detetor evoluindo em um banho térmico de fundo caracterizado por uma temperatura β^{-1} pode ser escrita como

$$\mathcal{P}^{exc} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau c(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau' c(\tau') e^{-i\Delta E(\tau-\tau')} G_{\beta}^{+} [x^{\mu}(\tau), x^{\mu}(\tau')] \quad (5.5)$$

onde

$$G_{\beta}^{+} [x^{\mu}(\tau), x^{\mu}(\tau')] = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t-t' - in\beta - i\varepsilon)^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \quad (5.6)$$

é a função de Wightman, $x^{\mu}(\tau)$ é a linha de mundo do detetor acelerado, e τ é o tempo próprio. A linha de mundo de um detetor movendo-se no eixo z com aceleração própria constante a é dada como em (4.24):

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= a^{-1} \cosh a\tau \\ t &= a^{-1} \sinh a\tau \end{aligned}$$

Substituindo, portanto, (4.24) na função de Wightman obtêm-se

$$G_{\beta}^{+}(\Delta\tau, \xi) = \left(\frac{1}{2\pi i\beta}\right)^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left[\frac{2 \sinh \frac{a\Delta\tau}{2}}{a\beta e^{a\xi}} + i(n - \varepsilon')\right] \left[\frac{2 \sinh \frac{a\Delta\tau}{2}}{a\beta e^{-a\xi}} + i(n - \varepsilon')\right]} \quad (5.7)$$

onde $\Delta\tau \equiv \tau - \tau'$, $\xi \equiv (\tau + \tau')/2$ e $\varepsilon' \equiv \varepsilon/a\beta$. Usando a identidade (a linha indica que $n = 0$ está excluído da soma)

$$\begin{aligned} \frac{1}{BC} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(A/B + in)(A/C + in)} &= \frac{2}{C(C-B)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(A^2/C^2 + n^2)} \\ &+ \frac{2}{B(B-C)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(A^2/B^2 + n^2)} \end{aligned} \quad (5.8)$$

junto com [14]

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + n^2} = \frac{\pi}{2x} \coth \pi x - \frac{1}{2x^2} \quad (5.9)$$

pode-se por a expressão (5.7) na forma³

$$G_{\beta}^{+}(\tau, \tau') = G_{vac}^{+}(\Delta\tau) + G_{term}^{+}(\Delta\tau, \xi) \quad (5.10)$$

³Isto corrobora os resultados apresentados em [18].

Função de Green térmica divide-se em duas partes, uma devida ao vácuo e outra devida ao banho térmico

A potência instantânea (5.10) correspondente à pura contribuição de ponto

$$G_{\text{ponto}}^+(\Delta\tau) = -\frac{a^2}{16\beta^2} \sinh^{-2}(a\Delta\tau/2) \quad (5.11)$$

corresponde à segunda soma correspondente à contribuição do termo térmico de Poisson.

$$G_{\text{ther}}^+(\Delta\tau, \xi) = \frac{a^2}{16\beta^2} \sinh^{-2}(a\Delta\tau/2) + \frac{a^2}{16\beta^2} \frac{1}{\cosh^2(a\Delta\tau/2)} \left[\cosh\left(\frac{a\xi \sinh(a\Delta\tau/2)}{2\beta} + a\Delta\tau\right) - \cosh\left(\frac{a\xi \sinh(a\Delta\tau/2)}{2\beta}\right) \right] \quad (5.12)$$

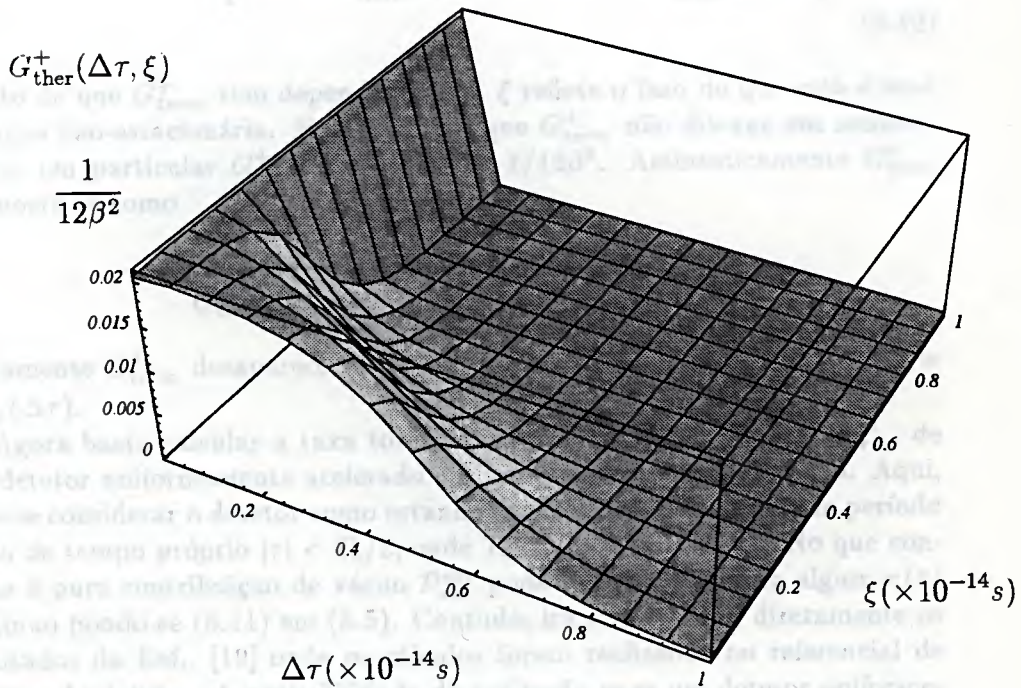


Figura 5: Gráfico em 3d da função de Green térmica $G_{\text{ther}}^+(\Delta, \xi)$, que é simétrica em todos os outros quadrantes. Aqui $\beta = 2,5 \times 10^{-14} \text{s}$ e $a = 9,7 \times 10^{14} \text{s}^{-1}$.

$$P_{\text{ponto}} = \left(\frac{\Delta E}{2\pi} \right) \frac{1}{2\pi a \beta \hbar} \quad (5.13)$$

Veremos que a contribuição linear em T_0 é exatamente a que se poderia esperar de uma distribuição térmica de energia. A contribuição de $\tau(\tau)$ não é importante. A única restrição é que $\tau(\tau) \in C^1$, já que descontinuidades em $\tau(\tau)$ resultariam em divergências na potência.

A potência térmica P_{ther} é obtida introduzindo (5.12) em (5.9).

Contribuição

O primeiro termo em (5.10) corresponde à pura contribuição de vácuo

$$G_{vac}^+(\Delta\tau) = -\frac{a^2}{16\pi^2} \sinh^{-2}(a\Delta\tau/2 - i\varepsilon) \quad (5.11)$$

enquanto o segundo termo corresponde à contribuição do banho térmico de fundo

$$G_{term}^+(\Delta\tau, \xi) = \frac{a^2}{16\pi^2} \sinh^{-2}(a\Delta\tau/2) + \frac{a}{16\pi\beta \sinh a\xi \sinh(a\Delta\tau/2)} \times \left[\coth \frac{2\pi \sinh(a\Delta\tau/2)}{a\beta e^{-a\xi}} - \coth \frac{2\pi \sinh(a\Delta\tau/2)}{a\beta e^{a\xi}} \right] \quad (5.12)$$

O fato de que G_{term}^+ têm dependência em ξ reflete o fato de que esta é uma situação não-estacionária. Note-se ainda que G_{term}^+ não diverge em nenhum ponto; em particular $G_{term}^+(\Delta\tau = 0; \xi) = 1/12\beta^2$. Assintoticamente G_{term}^+ comporta-se como

$$G_{term}^+ [|\Delta\tau| \gg (a^{-1}, \beta); \xi] \sim e^{-a|\Delta\tau|}$$

$$G_{term}^+ [\Delta\tau \neq 0; |\xi| \gg (a^{-1}, \beta)] \sim e^{-a|\xi|}$$

Claramente G_{term}^+ desaparece no limite $\beta \rightarrow +\infty$, e assim $G_{\beta \rightarrow +\infty}^+(\tau, \tau') = G_{vac}^+(\Delta\tau)$.

Agora basta calcular a taxa total de excitação, $\mathcal{P}^{exc} = \mathcal{P}_{vac}^{exc} + \mathcal{P}_{term}^{exc}$, de um detetor uniformemente acelerado em um banho térmico de fundo. Aqui, deve-se considerar o detetor como estando ligado somente durante um período finito de tempo próprio $|\tau| < T_0/2$, onde $T_0 = \text{constante} \in \mathbf{R}_+$. No que concerne à pura contribuição de vácuo \mathcal{P}_{vac}^{exc} pode-se calculá-la para algum $c(\tau)$ contínuo pondo-se (5.11) em (5.5). Contudo, irá se usar aqui diretamente os resultados da Ref. [19] onde os cálculos foram realizados no referencial de repouso do detetor. A probabilidade de excitação para um detetor uniformemente acelerado num vácuo inercial, e mantido ligado por tempo o bastante, $T_0 \gg a^{-1}, \Delta E^{-1}$, é

$$\mathcal{P}_{vac}^{exc} \approx \left(\frac{c_0^2 \Delta E}{2\pi} \right) \frac{1}{e^{2\pi\Delta E/a} - 1} T_0 \quad (5.13)$$

Note-se que a dependência linear com T_0 é exatamente o que se deveria esperar devido ao efeito Unruh. Aqui $c_0 = \text{constante}$ é a constante de acoplamento entre o campo e o monopolo enquanto o detetor é mantido ligado. No regime considerado acima, a forma detalhada de $c(\tau)$ não é importante. A única restrição é que $c(\tau) \in C^0$, já que descontinuidades em $c(\tau)$ resultariam em divergências ultravioletas.

A correção térmica \mathcal{P}_{term}^{exc} é obtida introduzindo (5.12) em (5.5),

$$\mathcal{P}_{term}^{exc} = c_0^2 \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} d\tau \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} d\tau' e^{-i\Delta E \Delta\tau} G_{term}^+(\Delta\tau, \xi) \quad (5.14)$$

onde já foi levado em conta o fato de que o detetor é mantido ligado apenas por um tempo próprio finito T_0 . As integrais acima foram resolvidas numericamente⁴ para os valores arbitrários $\Delta E = 9.7 \times 10^{14} s^{-1}$, $a = 9.7 \times 10^{14} s^{-1}$, $\beta = 2.5 \times 10^{-14} s$, com os resultados plotados como função de T_0 na figura 6. É claro desta figura que a contribuição de vácuo \mathcal{P}_{vac}^{exc} aumenta com T_0 muito mais rápido que a contribuição do banho térmico de fundo \mathcal{P}_{term}^{exc} . Na verdade, o banho térmico de fundo só é importante em um período transiente inicial quando a velocidade do detetor é pequena. Isto é uma consequência do fato de que G_{term}^+ diminui exponencialmente para grande T_0 , exceto junto ao eixo ξ . A situação acima é claramente não-estacionária. De fato, a figura 6 reflete o fato de que quanto mais rápido o detetor se move menos ele interage com o banho térmico de fundo, tal como já discutido. De modo a obter uma forma fechada para a contribuição térmica \mathcal{P}_{term}^{exc} quando β^{-1} é pequeno, pode-se expandir $G_{term}^+(\Delta\tau, \xi)$ em fatores de β :

$$G_{term}^+(\Delta\tau, \xi) = \frac{1}{12\beta^2} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(4\pi)^{2n-2} B_{2n} \sinh^{2n-2}(a\Delta\tau/2) \sinh[(2n-1)a\xi]}{(2n)! a^{2n-2} \beta^{2n} \sinh a\xi}$$

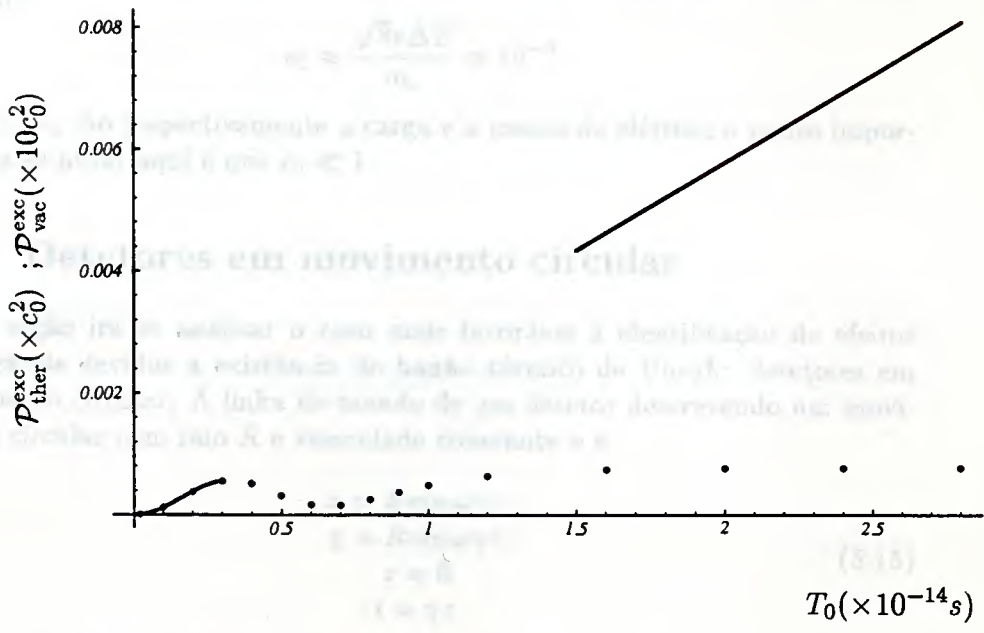
onde B_n são os números de Bernoulli, e $\beta > 2a^{-1} \left| e^{a\xi} \sinh(a\Delta\tau/2) \right|$. Substituindo tal expansão em (5.14) obtêm-se, até primeira ordem,

$$\mathcal{P}_{term}^{exc} = c_0^2 \frac{\sin^2 \Delta E T_0 / 2}{3\beta^2 \Delta E^2} + O(\beta^{-4})$$

Os valores de ΔE , a e β usados acima foram arbitrariamente escolhidos nesta seção apenas para ilustrar o papel desempenhado pelo banho térmico de fundo em detetores acelerados linearmente. Contudo, tais valores aparecem com uma clara motivação física na próxima seção, onde são analisados detetores movendo-se circularmente. Elétrons em aceleradores de partículas têm seus spins acoplados ao campo magnético, o que induz a um desemparelhamento dos níveis 'up' e 'down' do spin. O intervalo de energia associado a tal desemparelhamento é $\Delta E = 2|\mu||\mathbf{B}|$, onde $\mu \approx e/2m_e$ é o momento magnético do elétron (assume-se que o fator giromagnético é $g = 2$), e \mathbf{B} é o campo magnético. Seguindo a referência [16] pode-se considerar a depolarização de um elétron acelerado como representando a excitação do detetor, já que ambos os sistemas compartilham a característica comum de serem sistemas de dois níveis. Cálculos mais detalhados não devem alterar a ordem de magnitude dos resultados obtidos, e consequentemente as conclusões aqui alcançadas. Nas condições do LEP um elétron tem um fator de Lorentz

⁴Ver apêndices 'Integrações numéricas'.

qual se $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} = 10^4$ a aceleração própria de $a = 2,7 \times 10^{13} \text{ m/s}^2$ em um campo elétrico. O intervalo de energia entre os dois níveis do spin é $\Delta E = a$. O tempo de relaxação para a transição de polarização é de cerca de $2 \times 10^{-14} \text{ s}$ que corresponde a $7,2 \times 10^{-14} \text{ s}$ no tempo próprio do elétron. Portanto, a linha de ressonância de ressonância tem uma temperatura correspondente a $kT = \gamma a \tau = 2,7 \times 10^4 \text{ K}$. É também interessante ter em mente os valores numéricos aproximados para a frequência de angulação ω . Então ω não está em ressonância máxima do campo externo de ressonância de 10^4 K , esta frequência descreve a taxa de rotação ω . De modo a obter uma estimativa para a perda de energia a deceleração de um elétron acelerado e desacelerado zero aplicado mas em campo eletromagnético tal como obtido na equação (24) da referência [4] com a equação (5.17). Isto fornece também:



5.4 Ondas em movimento circular

Seja ω a frequência angular e ω_0 a frequência de ressonância de um elétron. A linha de ressonância de um átomo deslocando-se em movimento circular com raio R e velocidade angular ω .

Figura 6: Gráfico de P_{vac}^{exc} (linha cheia) e P_{term}^{exc} (pontos) como função do tempo. Os valores de β e a são os mesmos usados nos gráficos anteriores com $\Delta E = a$. A linha que une os pontos iniciais é a aproximação para pequenos valores de T_0 mostrada no texto.

$$D_{\omega}(\Delta E) = \frac{1}{2\pi^2} \left[\gamma^2 (\Delta E - \omega^2 - \frac{d\omega^2}{dt} \tau) \sin^2 \left(\frac{\omega \Delta E}{2\pi} \right) \right]^{-1} \quad (5.18)$$

típico de $\gamma \equiv (1 - v^2)^{-1/2} = 10^5$, e aceleração própria de $a = 9.7 \times 10^{14} s^{-1}$ em unidades naturais. O intervalo de energia entre os dois níveis do spin é $\Delta E \approx a$. O tempo de laboratório para a construção da polarização é de cerca de 2 horas, o que corresponde a $7.2 \times 10^{-2} s$ no tempo próprio do elétron. Finalmente, o banho térmico de fundo têm uma temperatura correspondente a $\beta = (300K)^{-1} \approx 2.5 \times 10^{-14} s$. É também interessante dar um valor numérico aproximado para a constante de acoplamento c_0 . Embora c_0 não afete as contribuições relativas do banho térmico de fundo e do banho de Unruh, esta constante determina a taxa de excitação geral. De modo a obter uma estimativa física para c_0 , compara-se a depolarização de um elétron acelerado à temperatura zero acoplado com um campo eletromagnético tal como obtido na equação (24) da referência [16] com a equação (5.13). Isto fornece imediatamente

$$c_0 \approx \frac{\sqrt{8}e\Delta E}{m_e} \approx 10^{-6}$$

onde e , m_e são respectivamente a carga e a massa do elétron; o ponto importante a se notar aqui é que $c_0 \ll 1$.

5.4 Detetores em movimento circular

Nesta seção irá se analisar o caso mais favorável à identificação de efeitos observáveis devidos a existência do banho térmico de Unruh: detetores em movimento circular. A linha de mundo de um detetor descrevendo um movimento circular com raio R e velocidade constante v é

$$\begin{aligned} x &= R \cos \omega \gamma \tau \\ y &= R \sin \omega \gamma \tau \\ z &= 0 \\ t &= \gamma \tau \end{aligned} \quad (5.15)$$

onde $\omega = v/R$. A aceleração própria do detetor é $a \equiv \sqrt{a^\mu a_\mu} = v^2 \gamma^2 / R$, onde $a^\mu = u^\nu \nabla_\nu u^\mu$.

Substituindo (5.15) em (5.6), e usando (5.8) e (5.9) decompõe-se a função de Green relevante novamente em uma parte de vácuo e uma parte do banho térmico de fundo

$$D_\beta^+(\Delta\tau) = D_{vac}^+(\Delta\tau) + D_{term}^+(\Delta\tau)$$

onde a parte de vácuo é dada pela equação (4.25)

$$D_{vac}^+(\Delta\tau) = -\frac{1}{4\pi^2} \left[\gamma^2 (\Delta\tau - i\varepsilon)^2 - \frac{4v^4 \gamma^4}{a^2} \sin^2 \left(\frac{a\Delta\tau}{2v\gamma} \right) \right]^{-1} \quad (5.16)$$

e

$$D_{term}^+(\Delta\tau) = -\frac{1}{4\pi^2\gamma^2\Delta\tau^2} \times \left\{ \frac{1}{v^2s^2-1} + \frac{\pi\Theta\Delta\tau}{2vs} (\coth r_- - \coth r_+) \right\} \quad (5.17)$$

onde $r_{\pm} \equiv \pi\Theta\Delta\tau(1 \pm vs)$, $s \equiv \sin x/x$, com $x \equiv A\Delta\tau/2v$; $A \equiv a/\gamma$ e $\Theta \equiv \gamma/\beta$ têm o papel de uma aceleração efetiva própria e de uma temperatura de fundo efetiva, respectivamente. $D_{term}^+(\Delta\tau)$ é finita em todos os pontos; em particular, $\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} D_{term}^+(\Delta\tau) = 1/12\beta^2$. Assintoticamente $D_{term}^+(\Delta\tau \gg 1) \sim (4\pi^2\gamma^2\Delta\tau^2)^{-1}$; isto garante que a resposta do detetor por unidade de tempo é finita. O fato de que D_{β}^+ não depende de ξ reflete o fato de que a situação é estacionária.

Para calcular a taxa de excitação média no vácuo, $d\mathcal{P}_{vac}^{exc}/dT$, para detetores ultrarelativísticos é conveniente expressar (5.16) como em (4.26):

$$D_{vac}^+(\Delta\tau) = -\frac{1}{4\pi^2} \left[(\Delta\tau - i\varepsilon)^2 + \frac{a^2\Delta\tau^4}{12} - O(\gamma^{-1}) \right]$$

Substituindo esta aproximação em (5.5), obtêm-se, para $\gamma \gg 1$, a equação (4.27):

$$\frac{d\mathcal{P}_{vac}^{exc}}{dT} \approx \frac{c_0^2 a e^{-\sqrt{12}\Delta E/a}}{4\pi\sqrt{12}} \quad (5.18)$$

Assim no LEP espera-se que $d\mathcal{P}_{vac}^{exc}/dT \approx 7.0 \times 10^{11} c_0^2$. Pode-se também obter um valor físico aproximado para a constante de acoplamento c_0 por comparação da equação (5.18) com a equação (10) da referência [1] para elétrons circulando no vácuo; isto fornece o valor $c_0 \approx 10^{-6}$ tal como na seção anterior.

Para comparar a contribuição de vácuo (5.18) com a contribuição térmica média, $d\mathcal{P}_{term}^{exc}/dT$, escreve-se

$$\frac{d\mathcal{P}_{term}^{exc}}{dT} = \int_{-\infty}^{+\infty} d(\Delta\tau) e^{-i\Delta E\Delta\tau} D_{term}^+(\Delta\tau) \quad (5.19)$$

A integração numérica⁵ desta expressão com valores do LEP fornece o resultado $d\mathcal{P}_{term}^{exc}/dT \approx 3 \times 10^8 c_0^2$. Assim, após atingido o equilíbrio na distribuição da polarização a contribuição de vácuo deve ser cerca de 3 ordens de magnitude maior que a contribuição do banho térmico de fundo; este é um resultado novo, que vem confirmar as suposições que feitas até então.

Para concluir, pode-se observar que para detetores quase-inerciais, *i.e.*, $A \ll \Theta, \Delta E$, a contribuição térmica de fundo para detetores em movimento

⁵Ver apêndice 'Integrações numéricas'.

circular pode ser aproximada pela contribuição térmica de fundo para detetores inerciais – note-se que estas duas situações são estacionárias, em contraste com o caso linearmente acelerado. Em particular, no limite $A \rightarrow 0$, (5.19) é exatamente (5.3); este é um cheque de consistência para os resultados obtidos nas seções 4.2 e 4.4. Isto é assim porque um detetor movendo-se com uma certa velocidade finita v , mas com $A \rightarrow 0$, significa que o movimento se dá em um anel com raio arbitrariamente grande; neste caso, deve-se esperar que o detetor se comporte como um detetor inercial movendo-se com a mesma velocidade v , tal encontrado. Nas condições do LEP $A = 9.7 \times 10^9 s^{-1}$, $\Theta = 4.0 \times 10^{18} s^{-1}$ e $\Delta E = 9.7 \times 10^{14} s^{-1}$. Já que $A \ll \Theta, \Delta E$, tal como necessário para considerar-se o detetor como quase-inercial, podia-se usar diretamente (5.3) para estimar a contribuição térmica média obtendo $dP_{term}^{exc}/dT \approx 2.9 \times 10^8 c_0^2$.

... a partir da teoria clássica da radiação de um dipolo oscilante...

... um quadrupolo elétrico oscilante a uma frequência ω ...

... a contribuição térmica de fundo...

... a contribuição de radiação...

... a contribuição de radiação...

... a contribuição de radiação...

$$\Delta T \approx \Delta T_0 - \sum_{i=1}^N (\Delta T_i)^2$$

... a contribuição de radiação...

... a contribuição de radiação...

$$T \approx T_0$$

Este é o caso de...

A contribuição de radiação...

¹ Uma outra abordagem...

6. Temperatura e relatividade

6.1 Qual é o problema?

A¹ relatividade restrita [6] “baseia-se inteiramente em dois postulados:”

- “as leis da física assumem a mesma forma em todos os referenciais inerciais;”
- “em qualquer referencial inercial a velocidade da luz, c , é sempre a mesma, seja emitida por um corpo em repouso ou por um corpo em movimento uniforme.”

Estes postulados, principalmente a constância da velocidade da luz, permitem que se faça, através do uso de sinais luminosos:

- a sincronização de relógios – **tempo próprio**;
- a padronização de réguas – **comprimento próprio**.

Surge também a noção de invariância do intervalo entre dois eventos:

$$ds^2 = dt^2 - \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2$$

Assim pode-se pensar, analogamente, em uma temperatura própria ou em invariantes termodinâmicos; contudo, como se faz a comparação de diferentes medidas de temperatura, feitas em diferentes referenciais?

As propostas usualmente apresentadas são conflitantes, baseadas em argumentos termodinâmicos, e resumem-se numa única expressão [21]:

$$T = T_0 \gamma^a$$

com $a = -1, 0, 1$.

A conclusão aqui apresentada tenta fugir desta polêmica, sendo simples: a transformação de temperaturas, na relatividade restrita, não é direta, sendo fortemente dependente das definições e dos procedimentos usados.

¹Este capítulo amplia a discussão presente em [20].

Este capítulo é então organizado em três seções, que tentam passo a passo mostrar qual é o problema em se relacionar temperatura e relatividade; na primeira destas seções, ‘Visões anteriores’, mostram-se, quase que de passagem, propostas anteriores de generalizar a termodinâmica em termos relativísticos²; na seção seguinte, ‘Radiação de corpo negro’, mostram-se resultados já conhecidos sobre a medida da temperatura de um banho térmico de fundo por um observador em movimento neste banho; tais resultados são usados, na última seção, ‘Uma solução usando detetores de Unruh’, na comparação de diferentes medidas de temperatura.

6.2 Visões anteriores

Temperatura

O primeiro grande problema consiste em definir o conceito de temperatura; por exemplo, pode-se dizer que temperatura é [22] “a propriedade de um corpo ou região do espaço que determina se haverá ou não um fluxo líquido de calor deste corpo para um outro corpo ou região vizinha e em que direção esse fluxo se dará. (...) Se há um fluxo de calor, a direção do fluxo é saindo do corpo ou região de temperatura mais alta. Há dois métodos de quantificar esta propriedade. O método empírico é tomar dois ou mais eventos reproduzíveis que dependam da temperatura e assinalar pontos fixos numa escala ao valor destes eventos. (...) Este método é útil para muitos objetivos práticos, mas, por não possuir uma base teórica, é incômodo usá-lo em muitos contextos científicos. (...) Lord Kelvin propôs um método termodinâmico para especificar temperatura, (...) baseado numa escala absoluta de temperatura com um zero absoluto, no qual nenhum corpo pode fornecer calor. (...) Na prática temperaturas termodinâmicas não podem ser medidas diretamente; elas são inferidas de medidas com um termômetro de gás, contendo um gás quase ideal. Isto é possível porque outro aspecto da temperatura termodinâmica é sua relação com a energia interna de uma dada quantidade de uma substância.”

Assim podemos formular matematicamente [23] o problema de troca de calor entre dois corpos, 1 e 2, como sendo dependente dos parâmetros $T^{(i)}$, com $i = 1, 2$, representando a temperatura de cada corpo.

Logo, usando a conservação de energia do sistema formado pelos dois corpos, podemos escrever que

$$U^{(1)} + U^{(2)} = \text{constante}$$

Após esta troca de calor os corpos entram em equilíbrio e a entropia do sistema não se altera, *i.e.*

$$dS = 0$$

²Há também um apêndice, ‘Termodinâmica Relativística’, que apresenta os argumentos da proposta mais tradicional, defendida por Einstein e Planck.

Daí, como

$$dS = \left(\frac{\partial S^{(1)}}{\partial U^{(1)}} \right)_{V^{(1)}, \dots, N^{(1)}} dU^{(1)} + \left(\frac{\partial S^{(2)}}{\partial U^{(2)}} \right)_{V^{(2)}, \dots, N^{(2)}} dU^{(2)}$$

Aparecimento da temperatura na termodinâmica

têm-se a identificação

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_{V, \dots, N} = \frac{1}{T}$$

com a condição de equilíbrio termodinâmico sendo

$$\frac{1}{T^{(1)}} = \frac{1}{T^{(2)}}$$

De um modo geral pode-se escrever, quando há variação de volume do sistema

$$dS = \frac{1}{T} dU + \frac{p}{T} dV$$

sendo p a pressão do sistema. Se, pelo contrário, $dV = 0$

$$dS = \frac{1}{T} dQ$$

que é uma relação bastante conhecida.

Esta, porém, é a visão termodinâmica de temperatura; em Mecânica Estatística, em um sistema quântico com g_i estados quânticos distintos no intervalo de energia [24, 25]

$$[E_i, E_i + dE_i] ,$$

Aparecimento da temperatura em Mecânica Estatística

o problema é descrever como n_i partículas estão distribuídas entre estes estados sujeitas a dois vínculos:

- número fixo de partículas

$$\sum_i n_i = n$$

- energia total fixa

$$\sum_i n_i E_i = E$$

Para partículas idênticas obedecendo o princípio de exclusão de Pauli a probabilidade de um dado arranjo é

$$W_{FD} = \prod_i \frac{g_i!}{n_i! (g_i - n_i)!}$$

enquanto que para partículas idênticas sem a restrição quanto ao número em um dado estado a probabilidade de um dado arranjo é

$$W_{BE} = \prod_i \frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i! (g_i - 1)!}$$

Maximizando estas probabilidades com os multiplicadores de Lagrange λ_1 e λ_2 , correspondentes aos vínculos sobre a energia total e o número total de partículas, obtêm-se as conhecidas distribuições

$$n_i^{FD} = \frac{g_i}{e^{\lambda_1 + \lambda_2 E_i} + 1}$$

e

$$n_i^{BE} = \frac{g_i}{e^{\lambda_1 + \lambda_2 E_i} - 1}$$

onde identifica-se facilmente $\lambda_2 = \beta$.

Relatividade

O problema deste ítem é generalizar as relações e o conceito de temperatura mostrados no ítem anterior usando a relatividade restrita. É bastante óbvio que nesta generalização deve aparecer o parâmetro adimensional

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$$

além, é claro, da própria velocidade v .

A primeira generalização [26] que surgiu, defendida por Einstein e Planck, entre outros, envolve uma variação no momento P do sistema³:

$$dS = \frac{1}{T} dE + \frac{p}{T} dV - \frac{v}{T} dP$$

ou, usando a 4-velocidade e a diferencial do 4-momento,

$$dS = \frac{1}{T} \left[\frac{1}{\gamma} u^\mu dP_\mu + p dV \right]$$

levando à transformação da temperatura

$$T_{Planck} = \frac{T_0}{\gamma}$$

onde T_0 é a temperatura do corpo ou sistema no seu referencial de repouso. “Este é um resultado padrão” [27] que leva também, usando a primeira lei da termodinâmica,

$$dQ = dU + p dV$$

à expressão

$$dQ = \frac{dQ_0}{\gamma}$$

³Aqui aparece a energia total do corpo ou sistema, E , que contém a energia devida ao movimento do centro de massa do corpo ou sistema, ao invés da energia interna do corpo ou sistema que é escrita como U .

Muito tempo se passou até que surgissem outras sugestões para a transformação da temperatura; nos anos 60, H. Ott e H. Arzelès desafiavam a generalização de Planck, propondo que [21]

$$T_{Ott} = \left(\frac{\partial H}{\partial S} \right)_{p,v} = \left(\frac{\partial H}{\partial S_0} \right)_{p_0,v} = \gamma \left(\frac{\partial H_0}{\partial S_0} \right)_{p_0,v} = \gamma T_0$$

onde H é a entalpia do sistema, obtida da energia U por meio de uma transformação de Legendre, de modo que

$$H \equiv U + pV$$

e

$$dS = \frac{1}{T}dH - \frac{V}{T}dp$$

Usando esta formulação matemática a proposta de Planck é

$$T_{Planck} = \left(\frac{\partial H}{\partial S} \right)_{p,P} = \left(\frac{\partial H}{\partial S_0} \right)_{p_0,P} = \frac{H_0}{H} \left(\frac{\partial H_0}{\partial S_0} \right)_{p_0,P} = \frac{T_0}{\gamma}$$

Ainda nos anos 60 uma terceira sugestão surgiu, dada por P.T.Landsberg; a equação termodinâmica relativística seria

$$dS = \frac{1}{T} [u^\mu dP_\mu + \gamma p dV]$$

i.e.

$$dS = \gamma \left[\frac{1}{T} dE + \frac{p}{T} dV - \frac{v}{T} dP \right]$$

e, assim

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_{v,\dots,N} = \frac{\gamma}{T}$$

ou ainda

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_{v,\dots,N} = \frac{1}{T}$$

com, portanto

$$T = T_0$$

Resumindo, têm-se três posições diferentes, que podem ser escritas como numa só expressão com a variação de um parâmetro arbitrário a :

$$T = T_0 \gamma^a$$

Todas estas posições inconciliáveis são resultantes de argumentos termodinâmicos; um experimento imaginário em que se visualizasse a medida da temperatura de um corpo em movimento favoreceria qual destes resultados?

| Generalizações relativísticas da temperatura | |
|--|------------------|
| Planck | $T = T_0/\gamma$ |
| Ott | $T = T_0\gamma$ |
| Landsberg | $T = T_0$ |

Tabela 6.1: Resumo dos resultados mostrados na seção ‘Visões anteriores’.

6.3 Radiação de corpo negro

Um experimento simples que se pode propor é a medida da temperatura de um corpo negro, feita através da detecção da radiação emitida por este corpo. Podem-se usar para comparação dois observadores carregando detectores (termômetros), completamente imersos nesta radiação, um em repouso em relação a ela (observador O) e outro em movimento (observador O') com velocidade constante v na direção do eixo x de O . Note-se que este é exatamente o caso da Terra, que se move através da radiação de corpo negro remanescente do Big Bang; assim o experimento proposto poderia ser nada mais que uma medida da temperatura da radiação de fundo que preenche o Universo.

Para o observador em repouso o resultado deste experimento é conhecido desde o início do século; a radiação têm, para esse observador, a distribuição de fótons conhecida como Planckiana:

$$n(\omega) = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} \tag{6.1}$$

onde $\beta \equiv 1/T$.

Para o observador em movimento, porém, a distribuição de fótons se altera, não devendo ser mais nem mesmo isotrópica.

Seja [28]

$$\bar{n}'(\omega', \theta') = n'(\omega', \theta') \frac{\omega'^2}{2\pi^2}$$

a densidade de fótons medida pelo observador em movimento O' . No intervalo de tempo dt' este observador vê seu detector responder a um número de fótons dado por

$$dN = \bar{n}'(\omega', \theta') \frac{d\omega'}{2\pi} d\Omega' A_0 |\cos \theta'| dt'$$

onde $A_0 |\cos \theta| = A'$ é a área do detector, com sua normal fazendo um ângulo θ' em relação ao eixo do movimento.

No mesmo intervalo de tempo o observador O , em repouso, vê o mesmo número de contagens, mas a sua expressão é diferente:

$$dN = \bar{n}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} d\Omega A_0 |v + \cos \theta| dt$$

Distribuição
Planckiana

onde $A_0 |v + \cos \theta| dt$ varrido pelos dN fótons.

As quantidades necessárias para relacionar $\bar{n}'(\omega', \theta')$ e $\bar{n}(\omega)$ seguem as transformações:

$$\begin{aligned} dt' &= dt\gamma^{-1} \\ \cos \theta' &= (\cos \theta + v)(1 + v \cos \theta)^{-1} \\ d\Omega' &= d\varphi' d(\cos \theta') = d\Omega \gamma^{-2} (1 + v \cos \theta)^{-2} \\ \omega' &= \omega \gamma^{-1} (1 + v \cos \theta) \end{aligned}$$

e assim têm-se que

$$\bar{n}'(\omega', \theta') = \bar{n}(\omega) \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2$$

o que fornece por fim

$$\bar{n}'(\omega', \theta') = \frac{\omega'^2}{2\pi^2} \frac{1}{e^{\beta'\omega'} - 1}$$

onde

$$\beta' = \frac{\beta}{\gamma(1 + v \cos \theta)}$$

ou

$$\beta' = \beta\gamma(1 - v \cos \theta')$$

Nota-se facilmente daí que para o observador em movimento a radiação já não é mais isotrópica, como se esperava, com uma temperatura efetiva dada por

$$T_{efetiva}(\theta', v) = \frac{T_0}{\gamma(1 - v \cos \theta')} \quad (6.2)$$

onde θ' é o ângulo, visto no referencial do observador em movimento, entre o eixo do movimento e a direção de observação da radiação.

6.4 Uma solução usando detetores de Unruh

Um outro modo de verificar a validade do resultado da seção anterior é usar detetores de Unruh-De Witt, que, como visto anteriormente, são monopolos com apenas dois níveis de energia, o estado fundamental $|E_0\rangle$ e o estado excitado $|E\rangle$. Por uma questão de simplicidade continua-se a acoplar tais detetores hipotéticos com partículas escalares sem massa, ao invés de fótons. A probabilidade total de excitação de um destes detetores é calculada usando-se os métodos de Teoria de Campos já vistos nos capítulos anteriores:

$$P^{exc} = c_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' e^{-i\Delta E(\tau - \tau')} G_{\beta_0}^+ [x^\mu(\tau), x^\mu(\tau')]$$

onde

$$G_{\beta_0}^+ [x^\mu(\tau), x^\mu(\tau')] = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-t' - in\beta_0 - i\varepsilon)^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}$$

sendo τ o tempo próprio do detetor, $x^\mu(\tau)$ sua linha de mundo, e $\Delta E \equiv E - E_0$ a energia necessária para excitar o detetor, medida em seu referencial de repouso. Substituindo nesta expressão a linha de mundo para um detetor numa trajetória inercial, com velocidade constante v ,

$$x^\mu(\tau) : \begin{aligned} t &= \gamma\tau \\ z &= vt \\ y &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

têm-se que a taxa de excitação do detetor é aquela dada pela equação (5.3):

$$\frac{dP^{exc}}{d\tau} = c_0^2 \frac{1}{4\pi v \gamma \beta_0} \ln \left[\frac{1 - e^{-\Delta E \beta_0 \gamma (1+v)}}{1 - e^{-\Delta E \beta_0 \gamma (1-v)}} \right] \quad (6.3)$$

No limite em que $v \rightarrow 0$ este resultado se resume a

$$\frac{dP^{exc}}{d\tau} = c_0^2 \frac{\Delta E}{2\pi} \frac{1}{e^{\beta_0 \Delta E} - 1}$$

enquanto que no limite oposto, $v \rightarrow 1$, têm-se

$$\frac{dP^{exc}}{d\tau} = 0$$

O que significam estes resultados?

Da expressão (6.3) nota-se que, para $v \neq 0$, o detetor não percebe mais um espectro Planckiano para a radiação de corpo negro; assim, é difícil comparar este resultado com o caso do observador em repouso, para daí extrair uma temperatura efetiva, vista pelo detetor em movimento.

Ainda da expressão (6.3) pode-se obter a distribuição do número de partículas da sendo

$$n(\omega) = \frac{1}{2\Delta E \beta_0 \gamma v} \ln \left[\frac{1 - e^{-\Delta E \beta_0 \gamma (1+v)}}{1 - e^{-\Delta E \beta_0 \gamma (1-v)}} \right] \quad (6.4)$$

o que, por sua vez, fornece, para o caso em que $\omega \beta_0 \ll 1$ e $v \ll 1$,

$$n(\omega \beta_0 \ll 1) \approx \frac{1}{\omega \beta_0} \left(1 - \frac{v^2}{6} \right)$$

Do mesmo modo, obtêm-se da Planckiana, eq.(6.1), o resultado

$$n_0(\omega\beta_0 \ll 1) \approx \frac{1}{\omega\beta_0}$$

Agora estes dois resultados podem ser comparados, já que há a aparição de uma temperatura efetiva:

$$T_{efetiva} \approx T_0 \left(1 - \frac{v^2}{6}\right) \quad (6.5)$$

Usando a idéia de temperatura efetiva dependente do ângulo de observação – eq.(6.2) – pode-se ver que, integrando sobre todo o ângulo sólido, a radiação teria uma temperatura efetiva média dada como

$$\langle T_{efetiva} \rangle = \frac{1}{4\pi} \int T_{efetiva}(\theta, v) d\Omega = T_0 \left(1 - \frac{v^2}{6}\right)$$

ou seja, este resultado compatibiliza a idéia de uma temperatura direcional com o observado por detetores de Unruh-De Witt.

Note-se que se fizermos

$$\langle n \rangle = \frac{\int_{\omega_{red}}^{\omega_{blue}} n(\omega', \theta) d\omega'}{\int_{\omega_{red}}^{\omega_{blue}} d\omega'}$$

onde $\omega_{blue} = \omega\gamma(1+v)$ e $\omega_{red} = \omega\gamma(1-v)$ delimitam as energias, *modificadas pelo efeito Doppler*, dos fótons que cabem no detetor, temos que

$$\langle n \rangle = \frac{1}{2\omega\beta_0\gamma v} \ln \left[\frac{1 - e^{-\omega\beta_0\gamma(1+v)}}{1 - e^{-\omega\beta_0\gamma(1-v)}} \right]$$

que é justamente a expressão (6.4), ou ainda a equação (5.3).

Contudo pode-se ir além; a densidade total de partículas associada com a distribuição $n(\omega)$ é

$$\bar{n} = \int n(\omega) \frac{\omega^2}{2\pi^2} d\omega$$

Usando a Planckiana obtêm-se

$$\bar{n}_0 = \frac{\zeta(3)}{\pi^2\beta_0^3}$$

enquanto que usando-se a expressão (6.4) obtêm-se

$$\bar{n} = \frac{\gamma\zeta(3)}{\pi^2\beta_0^3}$$

Detetor de Unruh
inercial em banho
térmico vê média da
distribuição de
fótons

| Temperaturas efetivas diferentes | |
|----------------------------------|-----------------------------|
| Temperatura efetiva | Condições |
| $T_{efetiva} = T_0 (1 - v^2/6)$ | $\omega\beta_0, v \ll 1$ |
| $T_{efetiva} = T_0 (1 + v^2/6)$ | $\bar{n} = \gamma\bar{n}_0$ |

Tabela 6.2: Diferentes procedimentos levam a diferentes resultados, tal como mostrado nesta seção.

ie,

$$\frac{\bar{n}}{\bar{n}_0} = \gamma$$

como se deveria esperar devido à contração do volume visto pelo observador em movimento. Deste resultado surge uma outra temperatura efetiva, dada como

$$T = T_0(1 - v^2)^{-\frac{1}{6}}$$

Quando $v \ll 1$ este resultado pode ser escrito como

$$T \approx T_0(1 + \frac{v^2}{6}) \tag{6.6}$$

Ou seja, têm-se aparentemente dois resultados divergentes, eqs (6.5) e (6.6); o primeiro diz que um detetor em movimento, sensível apenas a parte de baixa energia do espectro irá medir uma temperatura efetiva $T < T_0$, enquanto que o segundo mostra que um detetor sensível a todo o espectro deve medir uma temperatura $T > T_0$. Tais resultados não são, porém, contraditórios: eles apenas demonstram que para saber qual a temperatura vista por um termômetro em movimento é fundamental definir o tipo de termômetro que irá se usar.

Deste modo, pode-se concluir que o conceito de transformação de Lorentz da temperatura não é direto, sendo fortemente dependente das definições usadas.

7. Conclusão

7.1 Introdução

Na parte principal deste trabalho, formada pelos capítulos '**Detetores e o vácuo**', '**Contribuições térmicas**' e '**Temperatura e relatividade**', o assunto central é o comportamento de detetores de Unruh na presença de banhos térmicos - sejam eles reais ou provocados pela aceleração do detetor. Assim, nestes capítulos a temperatura têm sempre um papel importantíssimo.

Logo, pelo interesse no assunto, ter-se-á nesta conclusão, ao invés de um resumo dos pontos principais do que foi apresentado ao longo desta dissertação, a disposição de alguns aspectos da temperatura, que não são usualmente percebidos nem demonstrados e que se tornaram visíveis ao autor durante o tempo de escrita deste trabalho.

Na próxima seção, '**Temperatura e tempo**' apenas mostra-se que a temperatura pode ser colocada como um parâmetro que serve de extensão analítica do tempo no plano complexo. Na seção seguinte, '**Temperatura e distribuição de partículas**', mostra-se, por simples manipulação matemática das funções de distribuição de bósons e férmions, que a temperatura parece ter conexão com o spin destas partículas. A última seção deste trabalho, '**Perspectivas**', tenta relacionar esta última visão com os capítulos anteriores e fornecer perspectivas para futuros trabalhos.

7.2 Temperatura e tempo

Em Teoria de Campos a temperatura pode aparecer apenas como uma extensão analítica do tempo no espaço complexo, isto é, β é uma componente imaginária do tempo [11]; por exemplo, se um sistema tem a evolução temporal dada pela relação [4]

$$|\alpha, t_0; t\rangle = \exp[-iH(t - t_0)] |\alpha, t_0\rangle = \sum_a |a\rangle \langle a|\alpha, t_0\rangle \exp[-i\omega_a(t - t_0)]$$

pode-se escrever, para a função de onda que representa este sistema a relação

$$\Psi(x, t) = \int d^3x' K(x, t; x', t_0) \Psi(x', t_0)$$

onde

$$K(x, t; x', t_0) = \sum_a \langle x|a \rangle \langle a|x' \rangle \exp[-i\omega_a(t - t_0)] \quad (7.1)$$

e

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \langle x|\alpha, t_0; t \rangle \\ \Psi(x', t_0) &= \langle x'|\alpha, t_0 \rangle \end{aligned}$$

A equação (7.1) define o operador que se conhece como propagador; usando nesta expressão a extensão analítica $t \rightarrow t - i\beta$, obtêm-se

$$K(x, t; x', t_0) = \sum_a \langle x|a \rangle \langle a|x' \rangle e^{-i\omega_a(t-t_0)} e^{-\beta\omega_a} \quad (7.2)$$

Fazendo agora $t = t_0$ e $x = x'$ obtêm-se a função de partição do sistema:

$$Z = \sum_a e^{-\beta\omega_a}$$

Do mesmo modo as funções de Green térmicas são obtidas a partir das funções de vácuo com a substituição $t \rightarrow t - i\beta$:

$$\mathcal{G}_\beta(x, t; x', t') = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(x, t + im\beta; x', t') \quad (7.2)$$

onde \mathcal{G} é uma função de Green genérica. Tal procedimento, que é a base do tratamento de detetores de Unruh em banhos térmicos, têm um único senão: não deixa claro o que pode ser, fisicamente, a temperatura. Assim, na próxima seção é apresentada uma idéia que se aproxima desta, mas que pode ser vista a partir de conceitos mais básicos de Mecânica Quântica, envolvendo também o spin das partículas consideradas.

7.3 Temperatura e distribuição de partículas

A distribuição de um gás ideal de partículas, bósons ou férmions, segue a expressão geral [23]

$$n = \frac{1}{e^{\beta\omega} \pm 1}$$

onde o sinal positivo indica um gás de férmions e o sinal negativo um gás de bósons. Pode-se obter tal expressão usando como contador de partículas um detetor de Unruh em movimento num banho térmico, ou ainda, tal como feito em Mecânica Estatística, a partir da maximização da entropia de um sistema com vínculos. O objetivo desta seção é 'esquecer' tais idéias, na tentativa de apenas apresentar uma outra visão, independente da Teoria de Campos, e usando conceitos mais básicos de Mecânica Quântica, para o aparecimento da temperatura β^{-1} nesta expressão.

A distribuição para bósons pode ser reescrita por um rearranjo de seus termos:

$$\begin{aligned} n_{bosons} &= \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} = -\frac{1}{2} \left[\frac{e^{\beta\omega} - 1 - (e^{\beta\omega} + 1)}{e^{\beta\omega} - 1} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[1 - \frac{e^{\beta\omega} + 1}{e^{\beta\omega} - 1} \right] = -\frac{1}{2} \left[1 - \coth \frac{\beta\omega}{2} \right] \end{aligned} \quad (7.3)$$

Porém [14]

$$\coth \pi x = \frac{1}{\pi x} + \frac{2x}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + x^2} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{ik + x}$$

e assim

$$n_{bosons} = -\frac{1}{2} \left[1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{i\pi k + \frac{\beta\omega}{2}} \right] \quad (7.4)$$

ou

$$n_{bosons} = -\frac{1}{2} + \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta\omega + 2\pi i\ell}$$

onde ℓ é um inteiro.

O mesmo tratamento pode ser aplicado à distribuição de férmions:

$$\begin{aligned} n_{fermions} &= \frac{1}{e^{\beta\omega} + 1} = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{\beta\omega} + 1 - (e^{\beta\omega} - 1)}{e^{\beta\omega} + 1} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{e^{\beta\omega} - 1}{e^{\beta\omega} + 1} \right] = \frac{1}{2} \left[1 - \tanh \frac{\beta\omega}{2} \right] \end{aligned} \quad (7.4)$$

Porém [14]

$$\tanh \frac{\pi x}{2} = \frac{4x}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2 + x^2} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{i(2k-1) + x}$$

e assim

$$n_{fermions} = \frac{1}{2} \left[1 - 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{i\pi(2k-1) + \beta\omega} \right] \quad (7.4)$$

ou

$$n_{fermions} = \frac{1}{2} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta\omega + 2\pi i \left(k - \frac{1}{2}\right)}$$

Reescrevendo esta expressão com $k - \frac{1}{2} = \ell$ têm-se, portanto,

$$n_{fermions} = \frac{1}{2} - \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta\omega + 2\pi i \ell}$$

onde ℓ agora é um semi-inteiro.

Resumindo estes resultados têm-se que

$$n = (-1)^k \left[\frac{1}{2} - \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta\omega + 2\pi i \ell} \right]$$

com $k = 0$ e ℓ semi-inteiro para férmions, e $k = 1$ e ℓ inteiro para bósons. Outro modo de expressar esta idéia é escrever

$$n = (-1)^{j+1} \left[\frac{1}{2} + \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{-\beta\omega + \pi i s} \right] \quad (7.5)$$

onde j, s são inteiros pares (incluindo-se aí o zero) para os bósons e ímpares para os férmions.

Curiosamente, tal expressão parece apenas refletir uma propriedade das funções de onda de bósons e férmions: tais funções permanecem as mesmas se adiciona-se a elas uma fase $e^{\pi i s}$ onde s é par para os bósons e ímpar para os férmions; assim se estas funções Ψ aparecem multiplicadas pelo inverso da exponencial de $\beta\omega$ têm-se que vale a igualdade

$$\Psi e^{-\beta\omega} = \Psi e^{-\beta\omega} e^{\pi i s} = \Psi \exp(-\beta\omega + \pi i s)$$

Isto leva a pensar que, para funções de onda, é válida a substituição $t \rightarrow t - i\beta - \tau s/2$ (onde $\tau\omega = 2\pi$). Contudo, tal idéia não deve ser considerada com mais profundidade.

Quanticamente, sem considerações sobre o spin das partículas, pode-se escrever para um sistema de N osciladores harmônicos de frequência fundamental ω a seguinte Hamiltoniana:

$$H = \left(N + \frac{1}{2}\right) \omega$$

e daí

$$N = -\frac{1}{2} + \frac{H}{\omega} \quad (7.6)$$

Se a energia do sistema segue a distribuição *clássica* de Maxwell-Boltzmann, têm-se que

$$H = \frac{1}{\beta}$$

e, portanto,

$$N = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\beta\omega}$$

Lembrando agora que

$$n_{bosons} = -\frac{1}{2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta\omega + 2\pi ik} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\beta\omega} + \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta\omega + 2\pi ik'}$$

onde k' indica que a soma exclui o zero, pode-se escrever

$$n_{bosons} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\omega} \left[\frac{1}{\beta} + \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta + \frac{2\pi}{\omega} ik'} \right]$$

Como $2\pi = \omega\tau$, onde τ é o período da onda de frequência angular ω , têm-se então que

$$n_{bosons} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\omega} \left[\frac{1}{\beta} + \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta + ik'\tau} \right] = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\omega} \left[\frac{1}{\beta} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\beta}{\beta^2 + (k\tau)^2} \right] \quad (7.7)$$

Comparação entre esta expressão e a expressão do oscilador harmônico leva à analogia:

$$H_{bosons} \rightarrow \frac{1}{\beta} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\beta}{\beta^2 + (k\tau)^2}$$

O mesmo tratamento pode ser usado para a distribuição de férmions:

$$n_{fermions} = \frac{1}{2} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta\omega + 2\pi i \left(k - \frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{2} + 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta\omega + 2\pi i \left(k - \frac{1}{2}\right)}$$

ou

$$\begin{aligned} n_{fermions} &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{\omega} \left[\omega - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta + i \left(k - \frac{1}{2}\right) \tau} \right] \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{\omega} \left[\omega - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\beta}{\beta^2 + \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \tau^2} \right] \end{aligned} \quad (7.8)$$

levando à analogia

$$H_{fermions} \rightarrow \omega - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\beta}{\beta^2 + \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \tau^2}$$

Estas duas analogias podem ser resumidas numa única expressão:

$$H \rightarrow H_0 + H(\tau)$$

onde

$$H_0 = \frac{1}{\beta}$$

e

$$H(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\beta}{\beta^2 + (k\tau)^2}$$

para bósons, e

$$H_0 = \omega$$

e

$$H(\tau) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\beta}{\beta^2 + \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \tau^2}$$

para férmions.

Funções do tipo¹

$$f(\omega) = \frac{a}{(\omega - \omega_0)^2 + a^2}$$

surgem no tratamento de sistemas de osciladores forçados, indicando ressonâncias, com a forma gráfica chamada linha lorentziana, onde ω_0 é a frequência de ressonância, a é uma constante associada a um amortecimento do sistema e ω é a frequência de oscilação do sistema. Assim, a idéia aqui é simples: o operador que fornece a energia de um sistema ideal de bósons ou férmions à temperatura β^{-1} , sendo o sistema considerado como um conjunto de osciladores harmônicos de mesma frequência, têm sua expressão 'alterada' pela adição de um termo extra que obedece à equação diferencial para um sistema amortecido, isto é,

$$\frac{dH_I}{d\omega} = -\beta H_I$$

com a solução

$$H_I(\omega) = H_0 e^{-\beta\omega}$$

¹Tais funções aparecem, por exemplo, no tratamento da dispersão de ondas eletromagnéticas em materiais [29], ou no tratamento de ondas em cavidades e guias de ondas [5]; em Mecânica Quântica expressões desse tipo aparecem no estudo de seções de choque [30].

Usando a condição inicial

$$H_I(\omega_0) = 1$$

com $\omega_0 = 0$, chega-se a

$$H_I(\omega) = e^{-\beta\omega}$$

Pode-se assim considerar que o sistema quântico inicial está num estado de energia dado pelo *ket* $|i\rangle$, efetuando, para atingir o equilíbrio, uma transição para um estado final $|f\rangle$, que pode ser expandido numa série de auto-estados da energia:

$$|f\rangle = \sum_n c_n(\omega) |n\rangle$$

A transição entre os estados inicial e final é realizada através da aplicação do operador H_I :

$$H_I |i\rangle = |f\rangle$$

Logo, pode-se ver que

$$c_n(\omega) = \langle n | H_I | i \rangle$$

A probabilidade total de transição, que vai depender da energia fundamental ω , deve ser obtida com a soma sobre todos os estados degenerados (isto é, equivalentes) da energia:

$$P(\omega) = \sum_k |c_{n_k}(\omega)|^2 = \sum_k |\langle n_k | H_I | i \rangle|^2$$

Colocando que

$$|\langle n_k | H_I | i \rangle|^2 \equiv \left| \int_0^\infty e^{-\beta\omega} e^{i\omega\tau_k} d\omega \right|^2$$

e identificando

$$H(\tau) \equiv \lambda P(\omega)$$

têm-se finalmente que

$$H(\tau) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^\infty e^{-\beta\omega} e^{i\omega\tau_k} d\omega \right|^2 = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta^2 + \tau_k^2}$$

Para bósons $\tau_k^b = k\tau = 2k\pi/\omega$ e $\lambda^b = 2\beta$, enquanto que para férmions $\tau_k^f = (k - 1/2)\tau = (2k - 1)\pi/\omega$ e $\lambda^f = -4\beta$.

Note-se que tal visão é bastante simplista (e incompleta): as partículas do sistema inicial não têm uma temperatura definida. Na verdade, o sistema inicial pode ser considerado como sendo constituído por apenas uma partícula; a adição de outras partículas faz com que elas interajam e vibrem como osciladores harmônicos ao redor da frequência fundamental ω , com a limitação na temperatura sendo representada por uma força externa proporcional a β .

7.4 Perspectivas

Neste trabalho foram apresentados resultados para as contribuições térmicas na evolução de detetores de Unruh, comparando-se, em parte, tais resultados com os obtidos por meio do Eletromagnetismo semi-clássico. Nesta comparação tornou-se evidente a importância do spin das partículas consideradas seja como detetores seja como modos do campo que interagem com o detetor. No estudo aqui apresentado o campo sempre era um escalar, mas o detetor de Unruh representava um elétron, que apresenta spin semi-inteiro; neste caso o tratamento semi-clássico demonstra que é importante considerar correções na energia devidas ao spin - esta é a precessão de Thomas, que por isso mereceu um capítulo extra.

Em todo este tratamento para obtenção das correções térmicas a temperatura do banho térmico de partículas foi colocada 'à mão', via função de Green térmica. Não é, porém, necessariamente claro como colocar a temperatura em um contexto mais amplo: qual é, se existe, a conexão entre temperatura e spin de um sistema de partículas? Tal dúvida relaciona-se com a questão de como transformar a temperatura em diferentes referenciais, que é o assunto de um dos capítulos desta dissertação: a temperatura pode ser vista como parte de um 4-vetor, de um spinor ou de algum outro tipo de objeto matemático?

Por ora, não existem respostas simples a essas questões aqui levantadas. O trabalho apresentado nesta dissertação têm, portanto, ao lado da apresentação de alguns resultados, a pretensão de propor tais problemas, esperando indicar possíveis caminhos para futuros estudos.

8. Teoria de perturbação e transição de dipolo

É possível considerar perturbações de ordem superior, o mesmo será tratado futuramente de forma mais básica. É uma boa questão ler o livro (3, 10)

Teoria de perturbação Parte III

Trabalha com potencial dinâmico de tempo que pertencem a uma classe de perturbações de primeira ordem

Apêndices

$$\psi'(t) = W(t)\psi(t) \quad (8.1)$$

onde para $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$

$$\psi'(t) = 0 \quad (8.2)$$

onde $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ é o espaço de Schwartz e H_0 é o operador Hamiltoniano para o sistema perturbado (2)

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}(t) \quad (8.3)$$

de forma que, quando a equação de Schrödinger, tem

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(H_0 + \hat{V}(t) \right) \psi \quad (8.4)$$

A função de onda ψ pode ser expandida nas autovalores ψ_n de H_0 que possuem autoenergias E_n

$$\psi = \sum_n a_n(t) \psi_n e^{-iE_n t/\hbar} \quad (8.5)$$

de modo que podemos obter que substituímos o sistema para uma única autoenergia

$$i\hbar \frac{da_n}{dt} = \sum_m a_m(t) \langle \psi_n | \hat{V}(t) | \psi_m \rangle e^{-i(E_n - E_m)t/\hbar} \quad (8.6)$$

quando o estado final é n

$$i\hbar \frac{da_n}{dt} = \sum_m a_m(t) \langle \psi_n | \hat{V}(t) | \psi_m \rangle e^{-i(E_n - E_m)t/\hbar} \quad (8.7)$$

8. Teoria de perturbação e transição de dipolo

O propósito deste apêndice é ser didático: o assunto aqui tratado faz parte da Mecânica Quântica mais básica. É este tratamento básico que leva à eq.(2.10).

Teoria de perturbação

Dado um potencial dependente do tempo que permanece atuante apenas durante um pequeno período, *i.e.*,

$$\hat{V}(t) = \hat{W}(t) \quad (8.1)$$

apenas para $0 \leq t \leq \tau$ e

$$\hat{V}(t) = 0 \quad (8.2)$$

para $t < 0$ ou $t > \tau$, pode-se escrever a seguinte Hamiltoniana para o sistema perturbado [31]:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}(t) \quad (8.3)$$

de forma que, usando a equação de Schrodinger, temos

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\hat{H}_0 + \hat{V}(t) \right] \psi \quad (8.4)$$

A função de onda ψ pode ser expandida nas autofunções φ_n de \hat{H}_0 que possuem autoenergias E_n :

$$\psi = \sum_n a_n(t) \varphi_n e^{-iE_n t} \quad (8.5)$$

de modo que pode-se supor que inicialmente o sistema está num destes autoestados

$$\psi_{inicial} = \varphi_m e^{-iE_m t} \quad (8.6)$$

passando o estado final a ser

$$\psi_{final} = \sum_n a_{mn}(t) \varphi_n e^{-iE_n t} \quad (8.7)$$

É fácil ver que o coeficiente $a_{mn}(t)$ simplesmente representa a probabilidade do sistema estar num estado final com energia E_n :

$$w_{mn}(t) = |a_{mn}(t)|^2 \quad (8.8)$$

Substituindo a eq.(8.5) em (8.4), multiplicando por φ_n^* e integrando obtêm-se

$$i \frac{d}{dt} a_n(t) = \sum_l \langle n | \hat{W}(t) | l \rangle e^{i\omega_{nl}t} a_l(t) \quad (8.9)$$

onde

$$\langle n | \hat{W}(t) | l \rangle = \int \varphi_n^* \hat{W}(t) \varphi_l d\xi \quad (8.10)$$

e

$$\omega_{nl} = E_n - E_l \quad (8.11)$$

Para simplificar no que segue pode-se fazer

$$\langle n | \hat{W}(t) | n \rangle = 0 \quad (8.12)$$

e usar como condição inicial $a_n(0) = \delta_{nm}$. Agora, como primeira aproximação usa-se que $a_l(t) = \delta_{nm}$ apenas no lado direito de (8.9):

$$i \frac{d}{dt} a_{mn}^{(1)}(t) = \sum_l \langle n | \hat{W}(t) | l \rangle e^{i\omega_{nl}t} \delta_{nm} = \langle n | \hat{W}(t) | m \rangle e^{i\omega_{mn}t} \quad (8.13)$$

e assim

$$a_{mn}^{(1)}(t) = \frac{1}{i} \int_0^t \langle n | \hat{W}(t') | m \rangle e^{i\omega_{mn}t'} dt' \quad (8.14)$$

Voltando este resultado ao lado direito da eq. (8.9) obtêm-se uma solução de segunda ordem e daí por diante. Em geral basta usar a solução de primeira ordem, de modo que

$$w_{mn}(\tau) = |a_{mn}^{(1)}(\tau)|^2 = \left| \int_0^\tau \langle n | \hat{W}(t) | m \rangle e^{i\omega_{mn}t} dt \right|^2 \quad (8.15)$$

Devido as transições dos estados $|m\rangle$ para os estados $|n\rangle$ a probabilidade $|a_m(\tau)|^2$, que inicialmente é unitária, decai exponencialmente com o tempo:

$$|a_m(\tau)|^2 = e^{-\tau/T} \quad (8.16)$$

sendo T o tempo de vida do estado $|m\rangle$.

Se o potencial $\hat{V}(t)$ é constante pode-se ver que

$$\int_0^\tau \langle n | \hat{W} | m \rangle e^{i\omega_{mn}t} dt = \langle n | \hat{W} | m \rangle \frac{e^{i\omega_{mn}\tau} - 1}{i\omega_{mn}} \quad (8.17)$$

e assim

$$w_{mn}(\tau) = 2 \left| \langle n | \hat{W} | m \rangle \right|^2 F(E_n - E_m) \quad (8.18)$$

onde

$$F(x) = \frac{1 - \cos x\tau}{x^2} \quad (8.19)$$

ou

$$F(E_n - E_m) = \pi\tau \delta(E_n - E_m) \quad (8.20)$$

de modo que

$$w_{mn}(\tau) = 2\pi\tau \left| \langle n | \hat{W} | m \rangle \right|^2 \delta(E_n - E_m) \quad (8.21)$$

ou

$$\tilde{P}_{mn} = \frac{w_{mn}(\tau)}{\tau} = 2\pi \left| \langle n | \hat{W} | m \rangle \right|^2 \delta(E_n - E_m) \quad (8.22)$$

Em praticamente todos os sistemas físicos tanto o estado final como o estado inicial pertencem a um grupo contínuo (ou quase contínuo) de estados. As medidas feitas sobre o sistema dizem respeito a determinação da probabilidade total de transição para todos os estados $|n\rangle$ que têm quase a mesma energia e o mesmo elemento de matriz $\langle n | \hat{W} | m \rangle$; assim para obter esta probabilidade deve-se integrar a equação acima sobre todos os estados $|n\rangle$ e dividir pela média dos estados $|m\rangle$ que possuem elementos de matriz idênticos $\langle n | \hat{W} | m \rangle$ - isto justifica o uso da função delta na equação.

Assim a probabilidade é

$$P_{mn} = \int \tilde{P}_{mn} \rho(E_n) dE_n = 2\pi \left| \langle n | \hat{W} | m \rangle \right|^2 \rho(E_n) \quad (8.23)$$

onde $E_n = E_m$.

Agora se

$$\hat{W}(t) = \hat{W} e^{\pm i\omega t} \quad (8.24)$$

têm-se que

$$w_{mn}(\tau) = 2\pi\tau \left| \langle n | \hat{W} | m \rangle \right|^2 \delta(E_n - E_m \pm \omega) \quad (8.25)$$

ou seja, as transições só ocorrem com $E_m = E_n \pm \omega$, onde o sinal positivo corresponde a absorção, pelo sistema, de um fóton de energia ω , e o sinal negativo corresponde a emissão de um fóton com essa mesma energia.

Transição de dipolo magnético

No caso em estudo usa-se o potencial

$$\hat{W}(t) = -\frac{e}{m} (\hat{A} \cdot \hat{p}) + \frac{e^2}{2m} \hat{A}^2 \quad (8.26)$$

Retendo apenas o primeiro termo e usando que o vetor potencial pode ser expandido em termos de operadores de criação e destruição, \hat{a}^\dagger e \hat{a} , como

$$\hat{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{Q}, \alpha} \left(\frac{2\pi}{V\omega_{\mathbf{Q}}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{e}_\alpha(\mathbf{Q}) \left[\hat{a}_{\mathbf{Q}\alpha}(t) + \hat{a}_{\mathbf{Q}\alpha}^\dagger(t) \right] \quad (8.27)$$

têm-se

$$\hat{W}(t) = -\frac{e}{m} \sum_{\mathbf{Q}, \alpha} \left(\frac{2\pi}{V\omega_{\mathbf{Q}}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}} [\mathbf{e}_\alpha(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{p}] \left[\hat{a}_{\mathbf{Q}\alpha}(t) + \hat{a}_{\mathbf{Q}\alpha}^\dagger(t) \right] \quad (8.28)$$

com

$$\hat{a}_{\mathbf{Q}\alpha}(t) = \hat{a}_{\mathbf{Q}\alpha} e^{-i\omega_{\mathbf{Q}}t} \quad (8.29)$$

e

$$\hat{a}_{\mathbf{Q}\alpha}^\dagger(t) = \hat{a}_{\mathbf{Q}\alpha}^\dagger e^{i\omega_{\mathbf{Q}}t} \quad (8.30)$$

Considerando apenas a parte de criação do potencial $\hat{W}(t)$ têm-se

$$\hat{W}(t) = -\frac{e}{m} \sum_{\mathbf{Q}, \alpha} \left(\frac{2\pi}{V\omega_{\mathbf{Q}}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}} [\mathbf{e}_\alpha(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{p}] \hat{a}_{\mathbf{Q}\alpha}^\dagger e^{i\omega_{\mathbf{Q}}t} \quad (8.31)$$

isto é

$$\hat{W} = -\frac{e}{m} \left(\frac{2\pi}{V\omega_{\mathbf{Q}}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}} [\mathbf{e}_\alpha(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{p}] \hat{a}_{\mathbf{Q}\alpha}^\dagger \quad (8.32)$$

onde $\omega = Q$.

Lembrando que

$$\hat{a}_{\mathbf{Q}\alpha}^\dagger |n_{\mathbf{Q}\alpha}\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{Q}\alpha} + 1} |n_{\mathbf{Q}\alpha} + 1\rangle \quad (8.33)$$

têm-se

$$\begin{aligned} \langle final | \hat{W} | inicial \rangle &= -\frac{e}{m} \left[\frac{2\pi}{V\omega_{\mathbf{Q}}} (n_{\mathbf{Q}\alpha} + 1) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\times [\mathbf{e}_\alpha(\mathbf{Q}) \cdot \langle \varphi_n | e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{p} | \varphi_m \rangle] \quad (8.34) \end{aligned}$$

onde usou-se ainda que

$$| \text{inicial} \rangle = | n_{\mathbf{Q}\alpha} \rangle \varphi_m \quad (8.35)$$

$$| \text{final} \rangle = | n_{\mathbf{Q}\alpha} + 1 \rangle \varphi_n \quad (8.36)$$

A exponencial restante pode ser expandida:

$$e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}} = 1 - i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r})^2 + \dots \quad (8.37)$$

Nesta expansão o primeiro termo corresponde a um dipolo elétrico enquanto a parte antissimétrica do segundo termo corresponde a um dipolo magnético [32], tal como se mostrará a seguir.

Notando que

$$\mathbf{Q} = Q\mathbf{n} = \omega_{mn}\mathbf{n} \quad (8.38)$$

têm-se

$$| \langle \varphi_n | [\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}] [\mathbf{e}_\alpha(\mathbf{Q})\cdot\mathbf{p}] | \varphi_m \rangle|^2 = \omega_{mn}^2 | \langle \varphi_n | [\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}] [\mathbf{e}_\alpha\cdot\mathbf{p}] | \varphi_m \rangle|^2 \quad (8.39)$$

Porém

$$\begin{aligned} [\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}] [\mathbf{e}_\alpha\cdot\mathbf{p}] &= \frac{1}{2} \{ [\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}] [\mathbf{e}_\alpha\cdot\mathbf{p}] + [\mathbf{e}_\alpha\cdot\mathbf{r}] [\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}] \} \\ &+ \frac{1}{2} \{ [\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}] [\mathbf{e}_\alpha\cdot\mathbf{p}] - [\mathbf{e}_\alpha\cdot\mathbf{r}] [\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}] \} \end{aligned} \quad (8.40)$$

e como

$$[\mathbf{n}\times\mathbf{e}_\alpha]\cdot[\mathbf{r}\times\mathbf{p}] = [\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}] [\mathbf{e}_\alpha\cdot\mathbf{p}] - [\mathbf{e}_\alpha\cdot\mathbf{r}] [\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}] \quad (8.41)$$

sendo o momento angular definido como

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{r}\times\mathbf{p} \quad (8.42)$$

têm-se para a parte antissimétrica da eq.(8.34)

$$\begin{aligned} w_{mn} &\propto \frac{1}{2}\omega_{mn}^2 | \langle n | [\mathbf{n}\times\mathbf{e}_\alpha]\cdot\mathbf{L} | m \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2}\omega_{mn}^2 \frac{4m^2}{e^2} \left| \langle n | [\mathbf{n}\times\mathbf{e}_\alpha]\cdot\frac{e}{2m}\mathbf{L} | m \rangle \right|^2 \\ &= \frac{1}{2}\omega_{mn}^2 \frac{4m^2}{e^2} \left| \langle n | [\mathbf{n}\times\mathbf{e}_\alpha]\cdot\vec{\mu} | m \rangle \right|^2 \\ &= \frac{2}{3} \frac{m^2}{e^2} \omega_{mn}^2 \left| \langle n | \hat{\mu} | m \rangle \right|^2 \end{aligned} \quad (8.43)$$

Portanto

$$\begin{aligned}
 P_{mn} &= 2\pi \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{2\pi}{V\omega_{mn}} (n_{\mathbf{Q}\alpha} + 1) \frac{2}{3} \frac{m^2}{e^2} \omega_{mn}^2 \left| \langle n | \hat{\mu} | m \rangle \right|^2 \rho(E_f) \\
 &= \frac{8\pi^2}{3V} (n_{\mathbf{Q}\alpha} + 1) \omega_{mn} \left| \langle n | \hat{\mu} | m \rangle \right|^2 \rho(E_f)
 \end{aligned}
 \tag{8.44}$$

O número de estados do campo no volume V com uma polarização bem definida do fóton e com o momento do fóton entre p e $p + dp$, dentro de um ângulo sólido $d\Omega$, é dado por [31]

$$dN_p = \frac{V p^2 dp d\Omega}{(2\pi)^3} = \frac{V E^2 dp d\Omega}{(2\pi)^3}
 \tag{8.45}$$

Assim

$$d\rho(E) = \frac{dN_p}{dE} = \frac{V E^2 d\Omega}{(2\pi)^3} \Rightarrow \rho(E) = \frac{V E^2}{2\pi^2} = \frac{V \omega^2}{2\pi^2}
 \tag{8.46}$$

e, portanto,

$$P_{mn} = \frac{8\pi^2}{3V} (n_{\mathbf{Q}\alpha} + 1) \omega_{mn} \left| \langle n | \hat{\mu} | m \rangle \right|^2 \frac{V \omega_{mn}^2}{2\pi^2} = \frac{4}{3} \omega_{mn}^3 \left| \langle n | \hat{\mu} | m \rangle \right|^2
 \tag{8.47}$$

onde usou-se que $n_{\mathbf{Q}\alpha} = 0$; esta é a eq.(2.10).

9. Hamiltonianas e equações de movimento

Um vetor genérico \vec{A} que têm associado a si um operador quântico, na *picture* de Heisenberg obedece a equação

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = i [H, \vec{A}] \quad (9.1)$$

Se

$$H = -\lambda \vec{M} \cdot \vec{A} \quad (9.2)$$

onde \vec{M} é apenas um vetor e λ é uma constante, têm-se que

$$\frac{dA_j}{dt} = i [-\lambda \vec{M} \cdot \vec{A}, A_j] = -i\lambda \sum_{k=1}^3 M_k [A_k, A_j] \quad (9.3)$$

Agora se

$$[A_k, A_j] = i \sum_{l=1}^3 \epsilon_{kjl} A_l \quad (9.4)$$

a equação anterior fica sendo

$$\frac{dA_j}{dt} = \lambda \sum_{k,l=1}^3 \epsilon_{kjl} M_k A_l = -\lambda \sum_{k,l=1}^3 \epsilon_{jkl} M_k A_l = -\lambda (\vec{A} \times \vec{M})_j \quad (9.5)$$

ie

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = -\lambda \vec{A} \times \vec{M} \quad (9.6)$$

Basta agora lembrar que o spin \vec{s} é um vetor-operador do mesmo tipo de \vec{A} , pois

$$\vec{s} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}$$

e as matrizes de Pauli, σ , obedecem a regra de comutação

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \sigma_k \quad (9.7)$$

10. Funções de Airy e de Bessel

As integrais que surgem no cálculo da probabilidade de transição na seção ‘Partículas com fator g arbitrário’, do capítulo 2, são de dois tipos básicos:

$$\mathcal{I}_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t)]} dt \quad (10.1)$$

e

$$\mathcal{I}_{\pm} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[(\omega \pm \Omega)t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t)]} dt \quad (10.2)$$

Colocando

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t) = \omega \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t) = \omega \rho [\cos \theta \sin \omega_0 t + \sin \theta \cos \varphi (1 - \cos \omega_0 t)] \quad (10.3)$$

e usando as aproximações

$$\begin{aligned} \omega_0 t &\simeq \gamma^{-1} \\ \cos \theta &\simeq 1 - \theta^2/2 \\ \varphi &\simeq 0 \end{aligned}$$

têm-se que

$$\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t) \simeq \frac{\omega}{2} \left[\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) t + \frac{t^3}{3\rho^2} \right] \quad (10.4)$$

pois

$$\begin{aligned} t - \rho \cos \theta \sin \omega_0 t &\simeq t - \rho \left[\frac{vt}{\rho} - \frac{1}{6} \left(\frac{vt}{\rho} \right)^3 \right] \cos \theta \\ &\simeq t - \rho \left[\frac{vt}{\rho} - \frac{1}{6} \left(\frac{vt}{\rho} \right)^3 \right] \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \\ &\simeq t - vt + vt \frac{\theta^2}{2} - \frac{1}{6\rho^2} (vt)^3 \\ &= t \left[\frac{1-v^2}{1+v} + v \frac{\theta^2}{2} \right] - \frac{1}{6\rho^2} (vt)^3 \\ &\simeq \frac{t}{2} \left[\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right] - \frac{t^3}{6\rho^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left[t \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) - \frac{t^3}{3\rho^2} \right] \quad (10.5)$$

Assim têm-se que

$$\mathcal{I}_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t)]} dt \simeq \int_{-\infty}^{\infty} \exp i \left\{ \frac{\omega}{2} \left[\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) t + \frac{t^3}{3\rho^2} \right] \right\} dt \quad (10.6)$$

Com a mudança de variáveis

$$x = \omega_0 t \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (10.7)$$

isto se escreve

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_0 = & \int_{-\infty}^{\infty} \exp i \left\{ \frac{\omega}{2\omega_0} \left[\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{\frac{3}{2}} x + \frac{x^3}{3\rho^2\omega_0^3} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right] \right\} \\ & \times \frac{dx}{\omega_0} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (10.8)$$

ou, lembrando que $\rho^{-2} \simeq \omega_0^2$

$$\mathcal{I}_0 = \frac{1}{\omega_0} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[i \frac{\omega}{2\omega_0} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{\frac{3}{2}} \left(x + \frac{x^3}{3} \right) \right] dx \quad (10.9)$$

e assim, se

$$z_0^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{\omega}{2\omega_0} \right) \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{\frac{3}{2}} \quad (10.10)$$

têm-se

$$\mathcal{I}_0 = \frac{1}{\omega_0} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[i z_0^{\frac{3}{2}} \left(x + \frac{x^3}{3} \right) \right] dx \quad (10.11)$$

i.e.,

$$\mathcal{I}_0 = \frac{2}{\omega_0} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} \cos \left[z_0^{\frac{3}{2}} \left(x + \frac{x^3}{3} \right) \right] dx \quad (10.12)$$

Uma nova definição

$$\eta \equiv \frac{2}{3} z_0^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{\omega}{3\omega_0} \right) \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{\frac{3}{2}} \quad (10.13)$$

produz

$$\mathcal{I}_0 = \frac{2}{\omega_0} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} \cos \left[\frac{3}{2} \eta \left(x + \frac{x^3}{3} \right) \right] dx \quad (10.14)$$

Porém

$$K_{\frac{1}{3}}(\eta) = \sqrt{3} \int_0^{\infty} \cos \left[\frac{3}{2} \eta \left(x + \frac{x^3}{3} \right) \right] \quad (10.15)$$

e, portanto,

$$\mathcal{I}_0 = \frac{2}{\omega_0 \sqrt{3}} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{\frac{1}{2}} K_{\frac{1}{3}}(\eta) \quad (10.16)$$

ou

$$\mathcal{I}_0 = \frac{2}{\omega_0} \left(\frac{\omega}{2\omega_0} \right)^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{z_0}{3} \right)^{\frac{1}{2}} K_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} z_0^{\frac{3}{2}} \right) \quad (10.17)$$

As relações básicas entre as funções de Bessel modificadas e as funções de Airy são

$$Ai(x) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{x}{3} \right)^{\frac{1}{2}} K_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \quad (10.18)$$

e

$$Ai'(x) = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{x^2}{3} \right)^{\frac{1}{2}} K_{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \quad (10.19)$$

Portanto pode-se ver que também

$$\mathcal{I}_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \left(\frac{\omega}{2\omega_0} \right)^{-\frac{1}{3}} Ai(z_0) \quad (10.20)$$

O outro tipo de integral é

$$\mathcal{I}_{\pm} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[(\omega \pm \Omega)t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t)]} dt \simeq \int_{-\infty}^{\infty} \exp i \left\{ \frac{\omega}{2} \left[\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) t + \frac{t^3}{3\rho^2} \right] \pm \Omega t \right\} dt \quad (10.21)$$

onde

$$\Omega = (1 + \gamma a) \omega_0 \quad (10.22)$$

Portanto

$$\mathcal{I}_{\pm} \simeq \int_{-\infty}^{\infty} \exp i \left\{ \frac{\omega}{2} \left[\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) t + \frac{t^3}{3\rho^2} \right] \pm (1 + \gamma a) \omega_0 t \right\} dt \quad (10.23)$$

ou

$$\mathcal{I}_{\pm} \simeq \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 \pm \frac{i\omega_0 t}{2} \right) \exp it \left\{ \left(\frac{\omega}{2\omega_0} \right) \left[\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) \omega_0 + \frac{\omega_0^3 t^2}{3} \right] \pm \gamma a \omega_0 \right\} dt \quad (10.24)$$

onde usou-se a aproximação

$$e^{\pm i\omega_0 t} \simeq 1 \pm \frac{i\omega_0 t}{2}$$

Usando agora a definição

$$z_{\pm} \equiv \left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right) \pm a\gamma \left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)^{-\frac{1}{3}} \quad (10.25)$$

têm-se que

$$\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)^{\frac{1}{3}} z_{\pm} = \left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right) \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right) \pm a\gamma \quad (10.26)$$

e assim

$$\mathcal{I}_{\pm} \simeq \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 \pm \frac{i\omega_0 t}{2}\right) \exp i\omega_0 t \left[\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)^{\frac{1}{3}} z_{\pm} + \left(\frac{\omega}{2\omega_0} \frac{\omega_0^2 t^2}{3}\right) \right] dt \quad (10.27)$$

A substituição

$$x = \omega_0 t \left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (10.28)$$

produz

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\pm} \simeq & \frac{1}{\omega_0} \left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)^{-\frac{1}{3}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp i \left[x z_{\pm} + \frac{x^3}{3} \right] dx \\ & \pm \frac{1}{\omega_0} \left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)^{-\frac{2}{3}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ix}{2} \exp i \left[x z_{\pm} + \frac{x^3}{3} \right] dx \end{aligned} \quad (10.29)$$

Notando agora que

$$Ai(y) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp i \left[xy + \frac{x^3}{3} \right] dx \quad (10.30)$$

têm-se por fim

$$\mathcal{I}_{\pm} \simeq \frac{2\pi}{\omega_0} \left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)^{-\frac{1}{3}} Ai(z_{\pm}) \pm \frac{i\pi}{\omega_0} \left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)^{-\frac{2}{3}} \frac{dAi(z_{\pm})}{dz_{\pm}} \quad (10.31)$$

A passagem aqui para uma função de Bessel não é simples, a menos que $a \rightarrow 0$, quando também $z_{\pm} \rightarrow z_0$.

Definindo agora que

$$Ai'(x) = \frac{dAi(x)}{dx} \quad (10.32)$$

é fácil ver que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i[(\omega \pm \Omega)t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t)]} \omega_0 t dt = \frac{2\pi}{i\omega_0} \left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)^{-\frac{2}{3}} Ai'(z_{\pm}) \quad (10.33)$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i[\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t)]} \omega_0 t dt = \frac{2\pi}{i\omega_0} \left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)^{-\frac{2}{3}} Ai'(z_0) \quad (10.34)$$

11. Integrações

As integrais envolvidas na passagem da equação (2.105) para a equação (2.106) são

$$\int_0^{\infty} \nu^3 J_0 d\omega = \int_0^{\infty} \nu^3 K_{\frac{1}{3}}^2(\eta) d\omega = \lambda_2 \int_0^{\infty} \eta^3 K_{\frac{1}{3}}^2(\eta) d\eta \quad (11.1)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \nu^3 J_1 d\omega &= \int_0^{\infty} \nu^3 \left[K_{\frac{1}{3}}^2(\eta) + K_{\frac{2}{3}}^2(\eta) \right] d\omega \\ &= \lambda_2 \int_0^{\infty} \eta^3 \left[K_{\frac{1}{3}}^2(\eta) + K_{\frac{2}{3}}^2(\eta) \right] d\eta \end{aligned} \quad (11.2)$$

$$\int_0^{\infty} \nu^3 J_2 d\omega = \int_0^{\infty} \nu^3 K_{\frac{1}{3}}(\eta) K_{\frac{2}{3}}(\eta) d\omega = \lambda_2 \int_0^{\infty} \eta^3 K_{\frac{1}{3}}(\eta) K_{\frac{2}{3}}(\eta) d\eta \quad (11.3)$$

onde

$$\lambda_2 = 24 (1+t^2)^{-6} \gamma^3 \omega_0$$

ou seja, todas podem ser resolvidas com a fórmula [14]

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{-(1-2j)} K_{\mu}(x) K_{\nu}(x) dx &= \Gamma(j+i_+) \Gamma(j-i_-) \Gamma(j+i_-) \Gamma(j-i_+) \\ &\quad \times \frac{2}{\Gamma(2j)} F(j+i_+, j-i_-; 2j; 0) \end{aligned} \quad (11.4)$$

onde

$$i_{\pm} = \frac{\mu \pm \nu}{2}$$

Já as integrais envolvidas na passagem seguinte, da equação (2.108) para a equação (2.109), são

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (1+t^2)^{-5} dt &= 2 \int_0^{\infty} (1+t^2)^{-5} dt \\ \int_{-\infty}^{\infty} (1+t^2)^{-4} dt &= 2 \int_0^{\infty} (1+t^2)^{-4} dt \\ \int_{-\infty}^{\infty} (1+t^2)^{-\frac{9}{2}} dt &= 2 \int_0^{\infty} (1+t^2)^{-\frac{9}{2}} dt \end{aligned}$$

ou seja, neste caso todas são resolvidas pelo uso da fórmula geral [14]

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} (1 + \beta x^\rho)^{-\nu} dx = \frac{1}{\rho} \beta^{-\frac{\mu}{\rho}} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{\rho}\right) \Gamma\left(\nu - \frac{\mu}{\rho}\right)}{\Gamma(\nu)} \right] \quad (11.5)$$

Na obtenção da distribuição angular da potência irradiada, eq.(2.110), surgem as variáveis de integração

$$\omega \nu^3 = \omega \left(\frac{2\omega}{3\gamma^3 \omega_0} \right)^3 = \omega^4 \left(\frac{2}{3\gamma^3 \omega_0} \right)^3$$

e

$$\omega^4 = \left[3\gamma^3 \omega_0 (1 + t^2)^{-\frac{3}{2}} \right]^4 \eta^4$$

com o aparecimento das integrais

$$\int_0^\infty \omega \nu^3 J_0 d\omega = \frac{8}{(1 + t^2)^{\frac{15}{2}}} (3\gamma^3 \omega_0)^2 \int_0^\infty \eta^4 K_{\frac{1}{3}}^2(\eta) d\eta \quad (11.6)$$

$$\int_0^\infty \omega \nu^3 J_1 d\omega = \frac{8}{(1 + t^2)^{\frac{15}{2}}} (3\gamma^3 \omega_0)^2 \int_0^\infty \eta^4 \left[K_{\frac{1}{3}}^2(\eta) + K_{\frac{2}{3}}^2(\eta) \right] d\eta \quad (11.7)$$

$$\int_0^\infty \omega \nu^3 J_2 d\omega = \frac{8}{(1 + t^2)^{\frac{15}{2}}} (3\gamma^3 \omega_0)^2 \int_0^\infty \eta^4 K_{\frac{1}{3}}(\eta) K_{\frac{2}{3}}(\eta) d\eta \quad (11.8)$$

que se resolvem todas com a fórmula (11.4).

12. Detetores de Unruh em 2 + 1 dimensões

Função de Green

A expressão geral para as funções de Green é dada pela equação (4.9); neste apêndice ir-se-á usar tal expressão com $n = 3$, para um campo escalar não massivo:

$$G^+(x, x') = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3\mathbf{k} \frac{e^{i(\mathbf{k}\cdot\Delta\mathbf{x} - \omega\Delta t)}}{\omega^2 - |\mathbf{k}|^2} \quad (12.1)$$

Como $d^3\mathbf{k} = d^2k d\omega$ pode-se fazer primeiro a integração em ω obtendo-se:

$$\begin{aligned} G^+(x, x') &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^2k \frac{e^{i(\mathbf{k}\cdot\Delta\mathbf{x} - k\Delta t)}}{2k} 2\pi \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^\infty k dk \int_0^{2\pi} d\theta \frac{e^{ik(\Delta x \cos\theta - \Delta t)}}{2k} \end{aligned} \quad (12.2)$$

Porém [25]:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i^n} \int_0^{2\pi} d\theta e^{i(x \cos\theta + n\theta)} \quad (12.3)$$

e assim

$$G^+(x, x') = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty dk e^{-ik\Delta t} J_0(k\Delta x) \quad (12.4)$$

Ainda [14]

$$\int_0^\infty dx e^{-ax} J_0(bx) = (a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{Re}(a \pm ib) > 0 \quad (12.5)$$

Daí

$$G^+(x, x') = \frac{1}{4\pi i} \left[(t - t' - i\varepsilon)^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (12.6)$$

Detetor acelerado no vácuo

Usando a linha de mundo de um observador acelerado tal como dada em (4.24) pode-se escrever a função de Green para um detetor com aceleração constante:

$$G^+(x, x') = \frac{a}{4\pi i} \left[4 \sinh^2 \left(\frac{a\Delta\tau}{2} - i\epsilon a \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (12.7)$$

Agora a expansão conveniente é [25]

$$\csc x = \frac{1}{x} + 2x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(x - k\pi)(x + k\pi)} \quad (12.8)$$

com $1/\sinh x = i \csc ix$. Desse modo:

$$G^+(x, x') = \frac{1}{4\pi i} \frac{1}{(\Delta\tau - 2i\epsilon)} + \frac{\Delta\tau - 2i\epsilon}{2\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(\Delta\tau - 2i\epsilon)^2 - (2\pi ik/a)^2} \quad (12.9)$$

A probabilidade de excitação do detetor é obtida a partir da substituição desta função em (4.18) com a integração da expressão obtida sendo feita, no plano complexo (τ, τ') , usando-se como contorno um semi-círculo que passa pela porção inferior do plano, o que fornece o interessante resultado:

$$\frac{P_{exc}}{P_{total}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^{\frac{2\pi\Delta E}{a}} + 1} \right) \quad (12.10)$$

Esta é exatamente a função de distribuição de um banho térmico de férmions. Até agora as contas foram feitas do ponto de vista do observador inercial, mas poderiam ser realizadas também do ponto de vista acelerado. Como exemplo pode-se resolver o mesmo problema anterior, em 2+1 dimensões; nesse caso o que muda é a expansão do campo [34]:

$$\hat{\phi}(x^\nu) = \int d^2\mathbf{k}_\perp \int_0^\infty d\omega \{ \hat{a}_{\omega\mathbf{k}_\perp} u_{\omega\mathbf{k}_\perp}(x^\nu) + H.c. \}$$

onde os modos normais de Rindler,

$$u_{\omega\mathbf{k}_\perp}(x^\nu) = \left[\frac{\sinh(\pi\omega/a)}{4\pi^4 a} \right]^{\frac{1}{2}} K_{i\omega/a} \left(\frac{k_\perp}{a} e^{a\xi} \right) e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp - i\omega\tau}$$

são caracterizados por sua frequência ω e momentum transversal $\mathbf{k}_\perp \equiv k_y$ e satisfazem a equação de Klein-Gordon homogênea

$$\square\phi = 0$$

e onde $K_{i\nu}(x)$ é a função de MacDonald [14], $k_\perp \equiv k_y$ e $\mathbf{x}_\perp \equiv y$.

Assim, lembrando que o detetor segue a trajetória $y = \xi = 0$, no espaço de Rindler¹ pode-se escrever, em duas dimensões:

$$A^{exc} = \langle E | \hat{m}(0) | E_0 \rangle \left[\frac{\sinh(\pi\omega/a)}{2\pi^3 a} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \times K_{i\omega/a} \left(\frac{k_{\perp}}{a} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau c(\tau) e^{i(\omega \pm \Delta E)\tau} \quad (12.11)$$

sendo que o sinal \pm aparece para os casos respectivos de excitação do detetor com emissão ou absorção de partículas.

A probabilidade de excitação do detetor é, em duas dimensões espaciais:

$$P^{exc} = \int dk_{\perp} d\omega | A^{exc} |^2 g(\omega) \quad (12.12)$$

onde

$$g(\omega) \equiv 1 + 1/(e^{2\pi\omega/a} - 1)$$

no caso de excitação por emissão de partículas, e

$$g(\omega) \equiv 1/(e^{2\pi\omega/a} - 1)$$

no caso de excitação por absorção.

Portanto, a integral que interessa nesse caso é [14]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk_{\perp} K_{i\omega/a}^2 \left(\frac{k_{\perp}}{a} \right) = 2 \int_0^{+\infty} dk_{\perp} K_{i\omega/a}^2 \left(\frac{k_{\perp}}{a} \right) \\ = \frac{a^{(\frac{i\omega}{a}+1)}}{2} \left(\frac{1}{a} \right)^{(\frac{i\omega}{a})} \Gamma \left(\frac{1+2\frac{i\omega}{a}}{2} \right) \Gamma \left(\frac{1-2\frac{i\omega}{a}}{2} \right) \\ \times [\Gamma(1/2)]^2 F \left(\frac{1}{2} + \frac{i\omega}{a}, \frac{1}{2}, 1; 0 \right) \\ = \frac{a\pi^2}{2} \left[\sin \pi \left(\frac{1}{2} + \frac{i\omega}{a} \right) \right]^{-1} \\ = \frac{a\pi^2}{2} \left(\cosh \frac{\omega\pi}{a} \right)^{-1} \quad (12.13)$$

Deste modo²:

$$P_{em}^{exc} = \int_0^{+\infty} d\omega \frac{\tanh(\pi\omega/a)}{4\pi} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{i(\omega+\Delta E)\tau} \right|^2 \left(1 + \frac{1}{e^{2\pi\omega/a} - 1} \right) \quad (12.14)$$

¹O elemento de linha de Minkowski, neste espaço, em 2+1 dimensões, é $ds^2 = e^{2a\eta}(d\tau^2 - d\eta^2) - dy^2$. Tal espaço também é conhecido como Rindler wedge.

²Aqui ainda vale a simplificação $|\langle E | \hat{m}(0) | E_0 \rangle|^2 = c(\tau) = 1$.

Porém [25]

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{i(\omega+\Delta E)\tau} \right|^2 = 4\pi^2 \delta^2(\omega + \Delta E)$$

e como ΔE e ω são positivos (maiores que zero) $\delta(\omega + \Delta E) = 0$; logo $P_{em}^{exc} = 0$.

Faltou calcular P_{abs}^{exc} :

$$\begin{aligned} P_{abs}^{exc} &= \int_0^{+\infty} d\omega \frac{\tanh(\pi\omega/a)}{4\pi} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{i(\omega-\Delta E)\tau} \right|^2 \left(\frac{1}{e^{2\pi\omega/a} - 1} \right) \\ &= \int_0^{+\infty} d\omega \frac{\tanh(\pi\omega/a)}{4\pi} 4\pi^2 \delta^2(\omega - \Delta E) \left(\frac{1}{e^{2\pi\omega/a} - 1} \right) \\ &= \int_0^{+\infty} d\omega \frac{\tanh(\pi\omega/a)}{4\pi} 4\pi^2 \delta(\omega - \Delta E) \delta(0) \left(\frac{1}{e^{2\pi\omega/a} - 1} \right) \\ &= \int_0^{+\infty} d\omega \frac{\tanh(\pi\omega/a)}{4\pi} 4\pi^2 \delta(\omega - \Delta E) \frac{T^{total}}{2\pi} \left(\frac{1}{e^{2\pi\omega/a} - 1} \right) \\ &= \tanh(\pi\Delta E/a) \left(\frac{1}{e^{2\pi\Delta E/a} - 1} \right) T^{total} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^{2\pi\Delta E/a} + 1} \right) T^{total} \end{aligned} \quad (12.15)$$

que é o mesmo resultado obtido antes.

Resumindo os resultados têm-se, respectivamente, para 3+1 e 2+1 dimensões³:

$$P_{(4)}^{exc} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^{\frac{2\pi\Delta E}{a}} - 1} \right)$$

$$P_{(3)}^{exc} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^{\frac{2\pi\Delta E}{a}} + 1} \right)$$

No primeiro caso, $P_{(4)}^{exc}$, o termo $1/(e^{2\pi\Delta E/a} - 1)$ corresponde a um banho térmico de bósons; para $P_{(3)}^{exc}$ o termo $1/(e^{2\pi\Delta E/a} + 1)$ que surge corresponde a um banho de férmions [24].

³Note-se que tais probabilidades estão divididas pelo tempo total T^{total} .

13. Integrações numéricas

Todas as integrações numéricas que aparecem comentadas ao longo do Capítulo 5 foram efetuadas por meio do software *Mathematica*; também os gráficos que aparecem naquele capítulo foram construídos neste programa.

As definições usadas para a integração numérica de $G_{\beta}^{+}(\Delta\tau, \xi)$ são:

```
"G(x,y):"
f1:= a/(16*Pi*b)
f2:= Coth[((2*Pi)/(a*b))Sinh[a*x/2]Exp[a*y]]
      -Coth[((2*Pi)/(a*b))Sinh[a*x/2]Exp[-a*y]]
f3:= Sinh[a*x/2]Sinh[a*y]
f4:= f1*f2/f3
f5:= (a*Csch[a*x/2]/(4*pi))^2
f6:= f4+f5
f7:= NIntegrate[f6*2*Cos[e*x],{y,10^-4,T/2},{x,10^-4,2*y}]
      +NIntegrate[f6*2*Cos[e*x],{y,T/2,T-10^-4},{x,10^-4,2*(T-y)}]
```

Dada a correspondência

$$G_{term}^{+}(\Delta\tau, \xi) \rightarrow G(x, y)$$

ou seja,

$$\Delta\tau \rightarrow x, \quad \xi \rightarrow y$$

têm-se, passo a passo:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \frac{a}{16\pi\beta} \\
 f_2 &= \left[\coth \frac{2\pi \sinh(a\Delta\tau/2)}{a\beta e^{-a\xi}} - \coth \frac{2\pi \sinh(a\Delta\tau/2)}{a\beta e^{a\xi}} \right] \\
 f_3 &= \sinh a\xi \sinh(a\Delta\tau/2) \\
 f_4 &= \frac{a}{16\pi\beta \sinh a\xi \sinh(a\Delta\tau/2)} \times \\
 &\quad \left[\coth \frac{2\pi \sinh(a\Delta\tau/2)}{a\beta e^{-a\xi}} - \coth \frac{2\pi \sinh(a\Delta\tau/2)}{a\beta e^{a\xi}} \right] \\
 f_5 &= \frac{a^2}{16\pi^2} \sinh^{-2}(a\Delta\tau/2)
 \end{aligned}$$

$$f_6 = G_{term}^+(\Delta\tau, \xi) \quad (13.1)$$

Por fim,

$$f_7 = \int_{10^{-4}}^{+T/2} d\xi \int_{10^{-4}}^{2\xi} d(\Delta\tau) 2 \cos(\Delta E \Delta\tau) G_{term}^+(\Delta\tau, \xi) + \int_{T/2}^{T-10^{-4}} d\xi \int_{10^{-4}}^{2(T-\xi)} d(\Delta\tau) 2 \cos(\Delta E \Delta\tau) G_{term}^+(\Delta\tau, \xi) \quad (13.2)$$

Tal integração corresponde a só uma parte do plano (τ, τ') ; assim usou-se também a função $G_{\beta}^+(2\xi, \Delta\tau/2)$:

```
"G(2*y,x/2):"
f2b:= Coth[((2*Pi)/(a*b))Sinh[a*y]Exp[a*x/2]]
      -Coth[((2*Pi)/(a*b))Sinh[a*y]Exp[-a*x/2]]
f3b:= Sinh[a*y]Sinh[a*x/2]
f4b:= f1*f2b/f3b
f5b:= (a*Csch[a*y]/(4*pi))^2
f6b:= f4b+f5b
f7b:= NIntegrate[f6b*2*Cos[2*e*y],{y,10^-4,T/2},{x,10^-4,2*y}]
      +NIntegrate[f6b*2*Cos[2*e*y],{y,T/2,T-10^-4},
                  {x,10^-4,2*(T-y)}]
```

Novamente, passo a passo têm-se:

$$f_{2b} = \left[\coth \frac{2\pi \sinh(a\xi)}{a\beta e^{-a\Delta\tau/2}} - \coth \frac{2\pi \sinh(a\xi)}{a\beta e^{a\Delta\tau/2}} \right]$$

$$f_{3b} = \sinh a\xi \sinh(a\xi)$$

$$f_{4b} = \frac{a}{16\pi\beta \sinh(a\Delta\tau/2) \sinh a\xi} \times \left[\coth \frac{2\pi \sinh a\xi}{a\beta e^{-a\Delta\tau/2}} - \coth \frac{2\pi \sinh a\xi}{a\beta e^{a\Delta\tau/2}} \right]$$

$$f_{5b} = \frac{a^2}{16\pi^2} \sinh^{-2} a\xi$$

$$f_{6b} = G_{term}^+(2\xi, \Delta\tau/2) \quad (13.3)$$

Por fim,

$$f_{7b} = \int_{10^{-4}}^{+T/2} d\xi \int_{10^{-4}}^{2\xi} d(\Delta\tau) 2 \cos(2\Delta E \xi) G_{term}^+(2\xi, \Delta\tau/2) + \int_{T/2}^{T-10^{-4}} d\xi \int_{10^{-4}}^{2(T-\xi)} d(\Delta\tau) 2 \cos(2\Delta E \xi) G_{term}^+(2\xi, \Delta\tau/2) \quad (13.4)$$

A integração numérica completa se faz com a função $f_{14} \equiv f_7 + f_{7b}$:

$$f_{14} := f_7 + f_{7b}$$

Para obter o gráfico de superfície de $G_{term}^+(\Delta\tau, \xi)$ usou-se:

```
g0 = Plot3D[f6, {x, 10^-5, 1}, {y, 10^-5, 1}]
```

Este capítulo tem como objetivo, de forma sucinta, revisar os procedimentos necessários para a obtenção de resultados numéricos para a solução de problemas de integração numérica. Para a implementação que tem a seguinte transformação de coordenadas:

$$x = \frac{1}{2} \left(\xi + \eta \right) \tag{13.1}$$

onde ξ e η variam de -1 a 1 , a transformação de coordenadas é dada por:

$$J = \frac{1}{4} \sqrt{1 - \xi^2} \sqrt{1 - \eta^2}$$

Assim, a integral original pode ser transformada em termos das variáveis ξ e η , resultando na seguinte expressão:

Obtemos a seguinte expressão de integração:

A transformação de coordenadas é dada por:

$$\xi = \frac{2x - 1}{1 - \eta} \tag{13.2}$$

Para obter os resultados numéricos da transformação é necessário utilizar uma rotina de integração numérica para obter qualquer F_0 através de uma superfície retangular de ξ e η .

$$F_0 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) \sqrt{1 - \xi^2} \sqrt{1 - \eta^2} d\xi d\eta$$

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \eta^2}}$$
(13.3)

¹ Tal expressão pode ser encontrada em: [17]. Além de [17] há outros autores que também consideram esta expressão.

² Lembramos que esta expressão é válida para $\xi, \eta \in [-1, 1]$.

14. Termodinâmica relativística

Este apêndice visa apenas mostrar, de forma rápida, alguns dos argumentos que levaram a proposição, por parte de Einstein e Planck, de uma generalização relativística da termodinâmica que leva à seguinte transformação da temperatura sob *boosts*¹:

$$T = \frac{T_0}{\gamma} \tag{14.1}$$

onde²

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}$$

Assim, mostra-se a seguir como transformar, sob *boosts*, várias quantidades relacionadas à termodinâmica, chegando-se por fim à equação (14.1).

Volume

A transformação de volume é simples, já que envolve quantidades métricas, alteradas diretamente pela transformação de Lorentz:

$$V = \frac{V_0}{\gamma} \tag{14.2}$$

Pressão

Para saber como a pressão se transforma é necessário primeiro ver como se transforma uma força qualquer, \mathbf{F} , atuando nas superfícies externas do sistema:

$$\begin{aligned} F_x &= F_x^0 + \frac{u_y^0 v}{1 + u_x^0 v} F_y^0 + \frac{u_z^0 v}{1 + u_x^0 v} F_z^0 \\ F_y &= \frac{1}{1 + u_x^0 v} \frac{F_y^0}{\gamma} \\ F_z &= \frac{1}{1 + u_x^0 v} \frac{F_z^0}{\gamma} \end{aligned} \tag{14.3}$$

¹Tal tratamento segue a referência [27], além de algumas notas pessoais fornecidas pelo Dr. Felice Pisano.

²Lembrar que aqui continua-se a usar $c = 1$.

onde u^0 é a velocidade do fluido termodinâmico no sistema próprio K^0 . Se tal fluido estiver em repouso então $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ e, como $\mathbf{u}^0 = 0$, têm-se

$$\mathbf{F} = L\mathbf{F}^0 \quad (14.4)$$

onde

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-u^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1-u^2} \end{bmatrix} \quad (14.5)$$

A área se transforma tal como a força, já que apenas a componente da área perpendicular ao eixo x não sofre contração relativística:

$$\mathbf{A} = L\mathbf{A}^0 \quad (14.6)$$

e, portanto, a pressão se escreve

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{F}_0}{\mathbf{A}_0} = \mathbf{p}_0 \quad (14.7)$$

Energia

Aqui supõe-se que inicialmente o sistema em estudo está em repouso, sendo acelerado adiabaticamente num processo quase-estático, sem perturbação nas condições internas do sistema, do ponto de vista do referencial K^0 . A densidade de momento total, \mathbf{g} , se escreve:

$$\mathbf{g} = (\rho + p)\mathbf{u} \quad (14.8)$$

onde

$$\rho\mathbf{u} \equiv \frac{m}{V}\mathbf{u} = \frac{E}{V}\mathbf{u} \quad (14.9)$$

é a densidade de momento associada ao movimento de matéria do fluido, e $p\mathbf{u}$ é uma densidade de momento adicional, associada ao fluxo de energia devido ao trabalho realizado sobre o fluido em movimento pela pressão que atua nele.

Assim

$$\mathbf{g} = \left(\frac{E}{V} + p \right) \mathbf{u} \quad (14.10)$$

ou

$$\mathbf{G} \equiv \mathbf{g}V = (E + pV)\mathbf{u} \quad (14.11)$$

Usando a segunda lei de Newton pode-se então escrever a força que atua no sistema:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{G}}{dt} = \frac{d}{dt} [(E + pV)\mathbf{u}] \quad (14.12)$$

A variação de energia no sistema têm duas contribuições, uma devida à contribuição da força externa e outra devida à variação de volume por efeito relativístico:

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} - p \frac{dV}{dt} \quad (14.13)$$

Daí

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} [(E+pV) \mathbf{u}] \cdot \mathbf{u} - p \frac{dV}{dt} = \left[\frac{dE}{dt} + p \frac{dV}{dt} \right] u^2 + (E+pV) u \frac{du}{dt} - p \frac{dV}{dt}$$

ou

$$[1 - u^2] \frac{d}{dt} [E + pV] = (E + pV) u \frac{du}{dt}$$

ou ainda

$$\frac{d[E + pV]}{E + pV} = u \frac{du}{[1 - u^2]}$$

Por integração, com a substituição

$$u^2 = \sin^2 \theta$$

obtêm-se

$$[E + pV] = \frac{\text{constante}}{[1 - u^2]}$$

A constante que aparece nesta expressão é facilmente determinada por observação do resultado para $u = 0$:

$$[E + pV] = \frac{[E_0 + p_0 V_0]}{[1 - u^2]} \quad (14.14)$$

Assim não é difícil ver que

$$E = \gamma (E_0 + u^2 p_0 V_0) \quad (14.15)$$

que é a lei de transformação da energia.

Trabalho

O trabalho infinitesimal dW que acompanha uma mudança no estado interno do sistema a velocidade constante é dado por duas componentes, uma devida ao trabalho realizado à pressão constante, e outra devida ao trabalho associado com a força externa necessária para manter o sistema a velocidade constante:

$$dW = p dV - \mathbf{u} \cdot d\mathbf{G} \quad (14.16)$$

Por substituição dos resultados anteriores nesta expressão obtêm-se:

$$dW = \frac{1}{\gamma} p_0 dV_0 - u^2 \gamma d(E_0 + p_0 V_0) = \frac{1}{\gamma} dW_0 - u^2 \gamma d(E_0 + p_0 V_0) \quad (14.17)$$

Calor

Primeira lei da Termodinâmica:

$$dQ = dE + dW \tag{14.18}$$

Daí basta substituir os resultados obtidos para dW e dE , obtendo-se:

$$dQ = \frac{dQ_0}{\gamma} \tag{14.19}$$

Entropia

A entropia, por definição, deve ser um invariante, já que depende apenas do número de estados acessíveis ao sistema:

$$S \equiv S_0 \tag{14.20}$$

Temperatura

Segunda lei da Termodinâmica:

$$\Delta S \geq \int \frac{dQ}{T} \tag{14.21}$$

Portanto

$$T = \frac{T_0}{\gamma}$$

que é o resultado padrão.

Bibliografia

- [1] Jackson, J.D. – Rev. Mod. Phys. **48**, 3, 417 (1976).
- [2] Sokolov, A.A.; Ternov, I.M. – Sov. Phys.–Dokl. **8**, 1203 (1964).
- [3] Baier, V.N.; Katkov, V.M. – Sov. Phys.–JETP **25**, 944 (1967).
- [4] Sakurai, J.J – *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, 1994.
- [5] Jackson, J.D. – *Classical Electrodynamics*, 2nd. edition, Wiley, New York, 1975.
- [6] Pais, A. - “*Sutil é o Senhor...*” : a ciência e a vida de Albert Einstein, Ed. Nova Fronteira, 1995.
- [7] Misner, C.W.; Thorne, K.S.; Wheeler, J.A. - *Gravitation*, Freeman, San Francisco, 1973.
- [8] Landau, L. - *The Classical Theory of Fields*, Pergamon Press, 1975.
- [9] Bargmann, V.; Michel, L.; Telegdi, V.L. - Phys. Rev. Lett. **2**, 10, 435 (1959).
- [10] Schwinger, J. – Science **165**, 757 (1969).
- [11] Birrell, N.D.; Davies, P.C.W. – *Quantum Field Theory in Curved Space*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
- [12] Bogoliubov, N.N.; Shirkov, D.V. – *Quantum Fields*, Benjamin-Cummings Publishing Company, 1983.
- [13] Fulling, S.A.; Ruijsenaars, S.N.M. – *Temperature, Periodicity and Horizons*, Physics Reports **152**, **3** (1987), 135-176.
- [14] Gradshteyn, I.S.; Ryzhik, I.M. – *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, 1965.
- [15] Takagi, S. – Prog. Theor. Phys. **88**, 1 (1986).
- [16] Bell, J.S.; Leinaas, J.M. – Nuc. Phys. B **212**, 131 (1982).

- [17] Costa, S.S; Matsas, G.E.A. – Phys. Rev. D **52**, 3466 (1995).
- [18] Padmanabhan, T.; Singh, T.P. – Phys. Rev. D **38**, 2457 (1988).
- [19] Higuchi, A.; Matsas, G.E.A.; Peres, C.B. – Phys. Rev. D **48**, 3731 (1993).
- [20] Costa, S.S; Matsas, G.E.A. – *Temperature and Relativity*; gr-qc 9505045 (a ser publicado em *Phys. Lett. A*), 1995.
- [21] Aldrovandi, R.; Gariel, J. – Phys. Lett. **A170**, (1992), 5.
- [22] *Concise Science Dictionary*, Oxford University Press, 1991.
- [23] Callen, H.B. – *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*, 2nd. ed., J.Wiley and Sons, 1985.
- [24] Pathria, R.K. – *Statistical Mechanics*, Pergamon Press, 1977.
- [25] Arfken, G. – *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, 3rd ed., 1985.
- [26] Landsberg, P.T. - Nature **212**, (1966) 571.
- [27] Tolman, R.C. - *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*, Clarendon Press, Oxford, 1934.
- [28] Peebles, P.J.E.; Wilkinson, D.T. - Phys. Rev. **174**, (1968) 2168.
- [29] Reitz, J.R.; Milford, F.J.; Christy, R.W. - *Fundamentos da Teoria Eletromagnética*, Editora Campus, 1982.
- [30] Gasiorowicz, S. - *Física Quântica*, Ed. Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1979.
- [31] Davydov, A.S. - *Quantum Mechanics*, 2nd. edition, Pergamon Press, 1976.
- [32] Blinder, S.M. - *Foundations of Quantum Dynamics*, Academic Press, 1974.
- [33] Flugge, S. - *Practical Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, 1974.
- [34] Peres, C.B. – *Radiação e Detetores de Unruh-DeWitt*, IFT- Dissertação de Mestrado, 1993.

