

**ESTUDO DE UM SISTEMA MECÂNICO  
COM PÊNDULO SOB EXCITAÇÃO NÃO IDEAL**

*Adriana de Oliveira Dias*

Dissertação de Mestrado  
Pós-Graduação em Matemática Aplicada

# Estudo de um Sistema Mecânico com Pêndulo Sob Excitação Não Ideal

Adriana de Oliveira Dias <sup>1</sup>

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Masayoshi Tsuchida

São José do Rio Preto

2006

---

<sup>1</sup>contato: [adriana\\_o\\_dias@yahoo.com.br](mailto:adriana_o_dias@yahoo.com.br)

A Deus.  
À minha família.  
Aos meus amigos.  
*Dedico*

# Agradecimentos

A Deus, por tudo.

À minha família que sempre me apoiou.

Em especial ao Prof. Dr. Masayoshi Tsuchida, pela amizade, orientação, incentivo e paciência na elaboração deste trabalho.

Aos meus professores de graduação e pós-graduação.

Ao meu namorado, pelo apoio e paciência.

Aos meus amigos de república e da minha cidade Ibirá, pelos momentos de descontração.

Aos meus amigos pós-graduandos do DCCE e do Departamento de Matemática do IBILCE.

A todas as pessoas e funcionários do IBILCE que, direta ou indiretamente, contribuíram para a elaboração deste trabalho.

Ao CNPq pelo auxílio financeiro.

# Resumo

Neste trabalho estudamos um sistema constituído por uma massa que oscila horizontalmente, à qual é adaptado um agente perturbador representado por um motor DC com energia limitada. Um grau de liberdade adicional é obtido acoplando-se um pêndulo à massa. Analisamos a dinâmica deste pêndulo com vibração horizontal através de simulações numéricas na vizinhança do ponto de equilíbrio estável, considerando modelos linear e exponencial para o torque do motor. Além disso, o estudo do comportamento do sistema dinâmico é feito nos casos em que a mola apresenta características linear e não linear.

**Palavras-chave:** Problema não ideal, perturbação de potência limitada, pêndulo mecânico, pêndulo eletromotor.

# Abstract

In this work we investigated the behavior of a system formed by a mass that oscillates horizontally, due to a DC motor with limited power supply. An additional degree of freedom is obtained connecting a pendulum to the mass. We analyze the dynamics of this non-ideal electromotor pendulum through numerical simulations in the neighborhood of the equilibrium points, considering linear and exponential models for the torque of the motor. Moreover, the study of the behavior of the dynamical system is performed in the cases in which the spring presents linear and non linear characteristics.

**Keywords:** Non-ideal problem, disturbance of limited power, mechanical pendulum, electro-motor pendulum.

# Sumário

Lista de Tabelas . . . . .	viii
Lista de Figuras . . . . .	xi
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Uma introdução à teoria de sistemas dinâmicos</b>	<b>3</b>
2.1 Definição de sistemas dinâmicos . . . . .	3
2.2 Equações diferenciais e sistemas dinâmicos . . . . .	7
2.2.1 Linearização . . . . .	8
2.3 Estabilidade . . . . .	9
2.3.1 Ponto de equilíbrio e estabilidade . . . . .	9
2.4 Bifurcação . . . . .	11
2.4.1 Tipos de bifurcações . . . . .	13
2.5 Expoente de Lyapunov . . . . .	15
2.6 Sistemas não-ideais . . . . .	17
<b>3 O Sistema Mecânico</b>	<b>18</b>
3.1 Pêndulo mecânico não ideal . . . . .	18
3.1.1 Equações de movimento . . . . .	20
3.2 Pontos de equilíbrio do sistema . . . . .	23
<b>4 Simulações Numéricas</b>	<b>28</b>
4.1 Ressonâncias . . . . .	28
4.1.1 Ressonância 1 : 1 . . . . .	29
4.1.2 Ressonância 2 : 1 . . . . .	40

---

<b>5</b>	<b>Pêndulo Mecânico com Não Linearidade Cúbica</b>	<b>46</b>
5.1	Equações de movimento . . . . .	46
5.2	Resultados Numéricos . . . . .	49
5.3	Análise de Bifurcação . . . . .	52
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>60</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>62</b>

# Lista de Tabelas

3.1	Descrição dos parâmetros . . . . .	19
3.2	Simplificação dos parâmetros . . . . .	23
3.3	Pontos de equilíbrio . . . . .	26
4.1	Parâmetros físicos para ressonância 1:1 . . . . .	29
4.2	Autovalores do sistema para o torque linear e exponencial, correspondentes ao ponto de equilíbrio 1 e ressonância 1:1 . . . . .	30
4.3	Autovalores do sistema para o torque linear e exponencial, relativos ao ponto de equilíbrio 2 e ressonância 1:1 . . . . .	30
4.4	Parâmetros físicos para ressonância 2:1 . . . . .	41
4.5	Autovalores do sistema para o torque linear e exponencial, relativos ao ponto de equilíbrio 1 e ressonância 2:1 . . . . .	41
4.6	Autovalores do sistema para o torque linear e exponencial, correspondentes ao ponto de equilíbrio 2 e ressonância 2:1 . . . . .	42
5.1	Pontos de equilíbrio do sistema com não linearidade cúbica . . . . .	48
5.2	Autovalores associados aos pontos de equilíbrio do sistema com não linearidade cúbica	49
5.3	Parâmetros físicos para o sistema com não linearidade cúbica . . . . .	50

# Lista de Figuras

2.1	Composição do operador evolução. . . . .	5
2.2	Órbitas de um sistema contínuo. . . . .	6
2.3	Órbita periódica de tempo contínuo. . . . .	7
2.4	O diagrama ilustra a bifurcação sela-nó. A curva sólida representa ponto de equilíbrio estável, e a linha tracejada ponto de equilíbrio instável. . . . .	13
2.5	O diagrama ilustra a bifurcação de forquilha. . . . .	14
2.6	O diagrama ilustra a bifurcação transcritical. . . . .	14
2.7	O diagrama ilustra a bifurcação de Hopf. . . . .	15
3.1	Pêndulo mecânico não ideal . . . . .	19
4.1	Características do movimento para o parâmetro de controle $a_c = 0.0980665$ , condição inicial $\chi_1$ e torque linear. (a) Vibrações do bloco. (b) Variação angular do pêndulo. (c) Variação angular do motor. . . . .	31
4.2	Espectros de frequência, parâmetro de controle $a_c$ , condição inicial $\chi_1$ e torque linear. (a) Espectro de frequência do bloco. (b) Espectro de frequência do pêndulo. . . . .	32
4.3	Comportamento do bloco antes da passagem pela ressonância, $\omega = 0.6316$ , durante a passagem pela ressonância, $\omega = 0.7447$ e depois da passagem pela ressonância, $\omega = 0.9247$ , respectivamente. Condição inicial $\chi_0$ e torque linear. . . . .	32
4.4	Comportamento do pêndulo antes da passagem pela ressonância, $\omega = 0.6316$ , durante a passagem pela ressonância, $\omega = 0.7447$ e depois da passagem pela ressonância, $\omega = 0.9247$ , respectivamente. Condição inicial $\chi_0$ e torque linear. . . . .	33
4.5	Espaço de fases do bloco $(x_1, x_2)$ e do pêndulo $(x_5, x_6)$ durante a passagem pela ressonância 1:1. . . . .	34
4.6	À esquerda, média das amplitudes máximas do bloco ( $\diamond$ ) e do pêndulo ( $*$ ) em função da frequência do motor, e à direita, variação linear da frequência do motor em função do parâmetro de controle. . . . .	34
4.7	Vibrações do bloco e variação angular do motor, para $a = a_c$ e condição inicial $\chi_2$ . . . . .	35

4.8	Varição angular do pêndulo e seu espaço de fases, para $a = a_c$ e condição inicial $\chi_2$ . . . . .	35
4.9	Vibração do bloco, variação angular do pêndulo e variação angular do motor, respectivamente. Torque não linear, $a = a_c$ e condição inicial $\chi_1$ . . . . .	36
4.10	Comportamento do bloco antes da passagem pela ressonância, $\omega = 0.02986$ , durante a passagem pela ressonância, $\omega = 0.7438$ e depois da passagem pela ressonância, $\omega = 2.8555$ , respectivamente. Condição inicial $\chi_0$ e torque não linear. . . . .	37
4.11	Comportamento do pêndulo antes da passagem pela ressonância, $\omega = 0.02986$ , durante a passagem pela ressonância, $\omega = 0.7438$ e depois da passagem pela ressonância, $\omega = 2.8555$ , respectivamente. Condição inicial $\chi_0$ e torque não linear. . . . .	38
4.12	Espaço de fases do bloco $(x_1, x_2)$ e do pêndulo $(x_5, x_6)$ durante a passagem pela ressonância. Torque não linear. . . . .	39
4.13	À esquerda, média das amplitudes máximas do bloco ( $\diamond$ ) e do pêndulo (*) em função da frequência do motor, e à direita variação da frequência do motor em função do parâmetro de controle para torque não-linear. . . . .	39
4.14	Vibração do bloco, variação angular do pêndulo e variação angular do motor, respectivamente. Torque não linear e ressonância 1:1. . . . .	40
4.15	Comportamento do bloco durante passagem $\omega \approx \omega_b$ , $\omega = 0.7210$ e seu respectivo espaço de fases, e comportamento do bloco na passagem por $\omega_p$ e seu espaço de fases ( $\omega = 1.4372$ ). Torque linear e condição inicial igual a $\chi_0$ . . . . .	43
4.16	Comportamento do pêndulo durante a passagem pela frequência do bloco, $\omega = 0.7210$ e seu respectivo espaço de fases, e comportamento do pêndulo na passagem por $\omega_p$ e seu retrato de fase ( $\omega = 1.4372$ ). Torque linear e condição inicial $\chi_0$ . . . . .	44
4.17	Média das amplitudes máximas do bloco ( $\diamond$ ) e do pêndulo (*) em função da frequência do motor, e variação linear da mesma em função do parâmetro de controle, respectivamente. Ressonância 2:1 . . . . .	45
4.18	Varição da frequência do motor em função do parâmetro de controle. . . . .	45
5.1	Comportamento do bloco, pêndulo e motor próximo ao ponto de equilíbrio 1, respectivamente. Torque linear e condição inicial $\chi_1$ . . . . .	50
5.2	Comportamento do bloco, pêndulo e motor próximo ao ponto de equilíbrio 1, respectivamente. Torque linear e condição inicial $\chi_3$ . . . . .	51
5.3	Comportamento do bloco e seu espectro de frequência para $a = 0.148$ e $a = 0.248$ , respectivamente. Torque linear e condição inicial $\chi_0$ . . . . .	52
5.4	Comportamento do pêndulo e seu espectro de frequência para $a = 0.148$ e $a = 0.198$ , respectivamente. Torque linear e condição inicial $\chi_0$ . . . . .	53
5.5	Comportamento do bloco quando: (a) $a = a_c$ ; (b) $a = 0.1$ ; (c) $a = 0.128$ ; (d) $a = 0.148$ ; (e) $a = 0.198$ ; (f) $a = 0.248$ . . . . .	54
5.6	Comportamento do pêndulo quando: (a) $a = a_c$ ; (b) $a = 0.1$ ; (c) $a = 0.148$ ; (d) $a = 0.198$ . . . . .	55

---

5.7	Diagrama de bifurcação do bloco, para torque linear e $a \in [0.08, 0.27]$ . . . . .	56
5.8	Diagrama de bifurcação do pêndulo, para torque linear e $a \in [0.08, 0.27]$ . . . . .	56
5.9	Espectro de frequência do bloco e do pêndulo para $a = 0.1$ . Condição inicial $\chi_0$ e torque linear. . . . .	57
5.10	Espectro de frequência do bloco e do pêndulo para $a = 0.18$ . Condição inicial $\chi_0$ e torque linear. . . . .	57
5.11	Espectro de frequência do bloco e do pêndulo para $a = 0.24$ . Condição inicial $\chi_0$ e torque linear. . . . .	58
5.12	Curvas do expoente máximo de Lyapunov versus $\log\tau$ , para $a = 0.1$ , $a = 0.18$ e $a = 0.24$ respectivamente. Condição inicial próxima a $\chi_0$ e torque linear. . . . .	58
5.13	Curva do expoente máximo de Lyapunov versus $\log\tau$ , para $a = 0.1$ e torque exponencial. Condição inicial próxima a $\chi_0$ . . . . .	59

# Capítulo 1

## Introdução

O estudo de sistemas dinâmicos ganhou um grande impulso a partir da observação de que, em certas circunstâncias, a fonte de perturbação e o sistema podem interagir. Nesse caso, a fonte de perturbação é afetada pelo comportamento do sistema dinâmico, e essa interação é mais sensível quando a energia da fonte excitadora é limitada. Sistemas dinâmicos com essa característica são denominados sistemas dinâmicos não ideais.

Os primeiros trabalhos considerando sistemas dinâmicos não ideais datam de 1904, e são citados por Kononenko [10]. Em 1969, Kononenko estudou exaustivamente vários sistemas não ideais, através de simulações numéricas e soluções obtidas por métodos aproximados, e concluiu que os resultados obtidos pelos métodos aproximados descrevem satisfatoriamente o comportamento do sistema. O estado da arte das pesquisas sobre problemas não ideais até 1979 foi traçado por Nayfeh e Mook [15], e mais recentemente por Balthazar e colaboradores [1], [2]. Vários autores têm estudado uma grande variedade de sistemas dinâmicos não ideais.

Neste trabalho fazemos um estudo de um sistema formado por um bloco oscilante, ao qual é adaptado um agente perturbador representado por um motor DC com energia limitada. Um grau de liberdade adicional é obtido acoplando-se um pêndulo ao bloco. Este pêndulo age como um controlador do sistema, queimando energia em forma de vibrações. O sistema dinâmico considerado é um pêndulo mecânico não ideal, cuja versão ideal é utilizada por Meirovitch [13] para mostrar uma aplicação do critério de Routh-Hurwitz. Este sistema dinâmico é semelhante ao pêndulo eletromotor analisado por Belato [3], [4].

Estudamos a situação em que o motor e o sistema interagem, onde fica clara a característica de problema não ideal. Consideramos modelos linear e exponencial para o torque do motor, e o comportamento do sistema é analisado sob condições de ressonâncias internas

1 : 1 e 2 : 1. O torque do motor é utilizado como parâmetro de controle, com o objetivo de controlarmos a frequência do motor e obtermos as passagens pelas ressonâncias, isto é, situações em que a frequência do motor torna-se igual à frequência do bloco ou do pêndulo. Em sistemas não ideais, as passagens pela ressonância revelam dinâmicas interessantes. Além disso, estuda-se o comportamento do sistema quando este possui uma mola não linear acoplada ao bloco, e um aspecto que será discutido é um possível surgimento de vibrações caóticas nesta estrutura.

O objetivo deste trabalho é o estudo numérico da dinâmica do sistema pêndulo-mecânico para diferentes condições em torno do ponto de equilíbrio estável. O trabalho foi dividido em 6 capítulos. No capítulo 2 apresenta-se um resumo dos principais tópicos da teoria de sistemas dinâmicos aqui utilizados.

No capítulo 3 é apresentado o sistema pêndulo-mecânico estudado, bem como a obtenção de suas equações de movimento através do formalismo Lagrangeano. Determinamos os pontos de equilíbrio e o sistema é linearizado em torno do ponto de equilíbrio estável.

No capítulo 4 apresenta-se alguns resultados sobre o comportamento do sistema quando o bloco, o pêndulo e o motor estão em condição de ressonância.

No capítulo 5 apresentamos o sistema com uma mola não linear acoplada ao bloco. Procuramos observar a ocorrência de fenômenos como a bifurcação e o comportamento caótico, e para isto utilizamos algoritmos numéricos usuais como o espectro de frequência e o diagrama de bifurcação, entre outros.

No capítulo 6 apresentamos as considerações finais sobre o trabalho desenvolvido.

# Capítulo 2

## Uma introdução à teoria de sistemas dinâmicos

A posição no futuro e no passado de muitos sistemas físicos, químicos, biológicos, econômicos e sociais podem ser previstos até certo ponto, pelo conhecimento de sua posição no presente e das leis que governam sua evolução. Com a condição de que suas leis não mudem no decorrer do tempo, o comportamento é tal que um sistema pode ser considerado como completamente definido por sua posição inicial. Deste modo, a noção de sistema dinâmico inclui o conjunto de suas possíveis posições e uma lei de evolução da posição no tempo. Apresentamos neste capítulo, de forma introdutória, alguns tópicos de sistemas dinâmicos que são utilizados nesta dissertação.

### 2.1 Definição de sistemas dinâmicos

Todas as possíveis posições de um sistema são caracterizadas pelos pontos de algum conjunto  $X$ . Este conjunto é denominado o espaço de estados do sistema. A especificação de um ponto  $x \in X$  deve ser suficiente não somente para descrever a presente “posição” do sistema, mas também determinar sua evolução. Frequentemente o espaço de estados é denominado de espaço de fases, seguindo uma tradição vinda da mecânica clássica. De acordo com a dimensão da base do espaço de estados  $X$ , o sistema dinâmico é denominado de dimensão finita ou infinita. Os espaços de fases têm uma certa estrutura natural, permitindo comparações entre diferentes posições. Mais especificamente uma distância  $\rho$  entre duas posições está definida, tornando estes conjuntos espaços métricos. A norma euclidiana pode ser usada para medir a

distância entre duas posições.

A evolução de um sistema dinâmico significa a mudança de posição do sistema no decorrer do tempo  $t \in T$ , onde  $T$  é um conjunto numérico. Existem dois tipos de sistemas dinâmicos: aqueles com tempo contínuo  $T = \mathbb{R}$ , e aqueles com tempo discreto  $T = \mathbb{Z}$ . Sistemas do primeiro tipo são denominados sistemas dinâmicos de tempo contínuo, enquanto os do segundo tipo são chamados sistemas dinâmicos de tempo discreto [11]. Neste trabalho analisamos um sistema dinâmico de tempo contínuo.

A principal componente de um sistema dinâmico é uma lei de evolução que determina a posição  $x_t$  do sistema no tempo  $t$ , contanto que sua posição inicial  $x_0$  seja conhecida.

A maneira mais geral de especificar a evolução é assumir que para  $t \in T$  uma função  $f^t$  está definida no espaço de estados  $X$ ,

$$f^t : X \rightarrow X,$$

a qual transforma uma posição inicial  $x_0 \in X$  em alguma posição  $x_t \in X$  no tempo  $t$

$$x_t = f^t x_0.$$

A função  $f^t$  é denominada operador evolução do sistema dinâmico e este pode ser conhecido explicitamente, no entanto, em muitos casos é definido indiretamente e só pode ser calculado de forma aproximada. No caso de tempo contínuo, a família  $\{f^t\}_{t \in T}$  de operadores evolução é denominado um fluxo.

Note que  $f^t x$  pode ser definida para todo par  $(x, t) \in X \times T$ . Sistemas dinâmicos com operador evolução  $f^t$  definido para todo  $t \in T$  são chamados invertíveis. Em tais sistemas a condição inicial  $x_0$  não só define completamente a posição futura do sistema, como também seu comportamento no passado. No entanto, há sistemas dinâmicos nos quais o comportamento futuro ( $t > 0$ ) é completamente determinado por sua posição inicial  $x_0$  em  $t = 0$ , mas seu comportamento para  $t < 0$  não pode ser reconstruído. Tais sistemas dinâmicos (não invertíveis) são descritos com operador evolução definido somente para  $t > 0$ . Neste caso são denominados semi-fluxos.

É possível ainda que  $f^t x_0$  esteja definida apenas localmente, por exemplo, para  $0 \leq t \leq t_0$ , onde  $t_0$  depende de  $x_0 \in X$ . Um exemplo importante de tal comportamento é um “blow-up”, quando um sistema de tempo contínuo em  $X = \mathbb{R}^n$  aproxima-se do infinito com tempo finito, isto é,

$$\|f^t x_0\| \rightarrow +\infty,$$

para  $t \rightarrow t_0$ .

O operador evolução tem duas propriedades naturais que refletem a característica determinística do comportamento dos sistemas dinâmicos. A primeira,

$$f^0 = id, \quad (2.1)$$

onde  $id$  é a função identidade em  $X$ , isto é,  $id x = x$  para todo  $x \in X$ . A propriedade (2.1) implica que o sistema não muda sua posição “espontaneamente”. A segunda,

$$f^{s+t} = f^t \circ f^s, \quad (2.2)$$

ou seja,

$$f^{t+s}x = f^t(f^s x),$$

para todo  $x \in X$  e  $t, s \in T$ , tal que ambos lados da equação anterior estão definidos. Essencialmente, a propriedade (2.2) implica que o resultado da evolução do sistema no decorrer de  $(t + s)$  unidades de tempo, partindo de um ponto  $x \in X$ , é o mesmo se o sistema permitir primeiro a mudança da posição de  $x$  para  $s$  unidades de tempo acima e então evoluir nas  $t$  próximas unidades de tempo à partir da posição resultante  $f^s x$ , como mostra a figura (2.1). Esta propriedade significa que a lei que governa o comportamento do sistema não muda no tempo: o sistema é “autônomo”. De outro modo podemos dizer que um sistema autônomo é um conjunto de equações diferenciais, lineares ou não lineares, a parâmetros constantes, sujeitas as funções de entrada que não dependem explicitamente do tempo  $t$ .

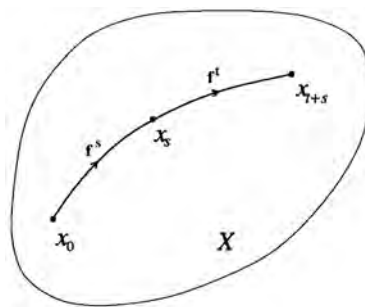


Figura 2.1: Composição do operador evolução.

Por outro lado, se o tempo aparece explicitamente em algum coeficiente e/ou em alguma função de entrada, o sistema de equações é chamado de não-autônomo. Qualquer sistema não-autônomo, escrito na forma de  $n$  equações de primeira ordem, pode ser reescrito numa forma autônoma, definindo-se  $x_{n+1} = t$ .

Para sistemas invertíveis, o operador evolução  $f^t$  satisfaz a propriedade (2.2) para  $t$  e  $s$  ambos negativos e não negativos. Em tais sistemas, o operador  $f^{-t}$  é a inversa de  $f^t$ ,  $(f^t)^{-1} = f^{-t}$ , desde que

$$f^{-t} \circ f^t = id.$$

Agora podemos dar uma definição formal de sistemas dinâmicos. *Um sistema dinâmico é uma tripla  $\{T, X, f^t\}$ , onde  $T$  é um conjunto de tempo,  $X$  é um espaço de estados, e  $f^t : X \rightarrow X$  é uma família de operadores evolução parametrizados por  $t \in T$  e satisfazendo as propriedades (2.1) e (2.2).*

A geometria associada ao sistema dinâmico  $\{T, X, f^t\}$  suas órbitas no espaço de estados e o retrato de fases exibe estas órbitas.

*Uma órbita partindo de  $x_0$  é um subconjunto ordenado do espaço de estados  $X$ ,*

$$Or(x_0) = \{x \in X : x = f^t x_0, \text{ para todo } t \in T \text{ tal que } f^t x_0 \text{ está definido}\}.$$

Órbitas de um sistema de tempo contínuo com um operador evolução contínuo são curvas no espaço de estados  $X$  parametrizadas pelo tempo  $t$ , e orientadas para suas direções de crescimento (figura (2.2)). As órbitas mais simples são os pontos de equilíbrio.

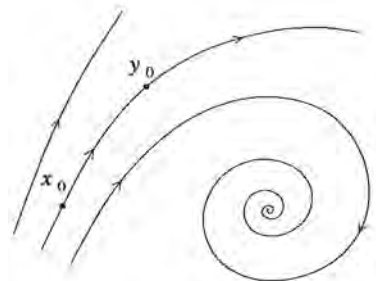


Figura 2.2: Órbitas de um sistema contínuo.

*Um ponto  $x^* \in X$  é denominado um ponto de equilíbrio se  $f^t x^* = x^*$  para todo  $t \in T$ . O operador evolução leva um ponto de equilíbrio nele mesmo. Equivalentemente o sistema permanece no ponto de equilíbrio indefinidamente. Isto representa o mais simples comportamento do sistema.*

*Outra órbita relativamente simples é o ciclo. Um ciclo é uma órbita periódica  $L_0$ , tal que cada ponto  $x_0 \in L_0$  satisfaz  $f^{t+T_0} x_0 = f^t x_0$  com algum  $T_0 > 0$ , para todo  $t \in T$ .*

O menor  $T_0$  que satisfaz esta propriedade é denominado o período do ciclo  $L_0$ . Se um sistema começa sua evolução de um ponto  $x_0$  no ciclo, ele irá retornar exatamente neste ponto

após  $T_0$  unidades de tempo, exibindo oscilações periódicas. No caso de sistema de tempo contínuo o ciclo  $L_0$  é uma curva fechada (figura (2.3)). Um ciclo de um sistema dinâmico de tempo contínuo em que não existem outros ciclos na sua vizinhança, é denominado um *ciclo limite*.

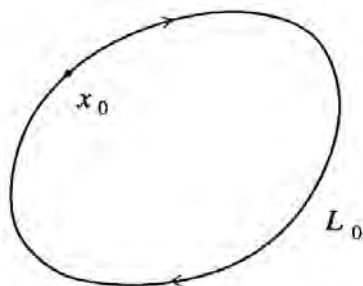


Figura 2.3: Órbita periódica de tempo contínuo.

*O retrato de fases de um sistema dinâmico é uma divisão do espaço de estados em órbitas.* O retrato de fases contém muitas informações do comportamento do sistema dinâmico. Analisando o retrato de fases, podemos determinar o número e os tipos de convergências para as quais o sistema tende quando  $t \rightarrow \infty$  (e para  $t \rightarrow -\infty$  se o sistema é invertível). No entanto, é impossível representar todas as órbitas em uma figura. Na prática, somente algumas órbitas principais são traçadas no diagrama do retrato de fases, como visto na figura (2.2).

## 2.2 Equações diferenciais e sistemas dinâmicos

O modo mais comum de definir um sistema dinâmico de tempo contínuo é usando equações diferenciais. Suponha que o espaço de estados do sistema é  $X = \mathbb{R}^n$  com coordenadas  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Frequentemente a lei de evolução do sistema é dada implicitamente em termos das velocidades  $\dot{x}_i$  como função das coordenadas  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), i = 1, 2, \dots, n,$$

ou na forma vetorial

$$\dot{x} = f(x), \tag{2.3}$$

onde o vetor função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é suposto sendo diferenciável.

A função do lado direito de (2.3) é denominada um campo vetorial, dado que relaciona um vetor  $f(x)$  para cada ponto  $x$ . A equação (2.3) representa um sistema de  $n$  equações diferenciais ordinárias autônomas.

### 2.2.1 Linearização

Em geral é impossível obter soluções analíticas exatas de equações diferenciais não lineares. Porém, sob determinadas condições, um sistema não linear pode ser aproximado em torno de um ponto de equilíbrio, por um sistema linear. Tal procedimento é conhecido como linearização. Estudando a aproximação linear, pode-se, às vezes, prever o comportamento das soluções do sistema não linear na vizinhança do ponto de equilíbrio.

Seja o sistema de equações diferenciais não lineares de primeira ordem (2.3)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n),\end{aligned}$$

para o qual existe um ponto de equilíbrio  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ . As funções  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , em torno de  $x^*$ , podem ser aproximadas por equações de retas, ou seja, equações lineares. Para isso, expandem-se essas funções em série de Taylor

$$\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n) &= f_i(x_1^*, \dots, x_n^*) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \Big|_{x^*} (x - x_1^*) + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \Big|_{x^*} (x - x_2^*) + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \Big|_{x^*} (x - x_n^*) + \\ &\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1^2} \Big|_{x^*} (x - x_1^*)^2 + \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_2^2} \Big|_{x^*} (x - x_2^*)^2 + \dots + \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_n^2} \Big|_{x^*} (x - x_n^*)^2 + \dots,\end{aligned}$$

onde  $i = 1, 2, \dots, n$ . Retendo-se apenas a parte linear obtém-se, em notação matricial,

$$\frac{dx(t)}{dt} = Jx(t), \tag{2.4}$$

sendo  $x$  o vetor coluna das variáveis de estado e  $J$  a matriz Jacobiana

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Assim, o estudo da estabilidade de um ponto de equilíbrio de um sistema não linear reduz-se ao estudo do sistema linear correspondente, ao menos localmente. O teorema de Hartman-Grobman apresenta uma condição necessária e suficiente para que os resultados da aproximação linear sejam válidos para o sistema não linear [14].

Seja a função  $f(x) = y$ ,  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , suponha  $f$  uma função bijetora. Uma função com essa propriedade é invertível, isto é, existe a função inversa  $f^{-1}(y) = x$ . Se  $f$  é contínua, invertível e sua inversa  $f^{-1}$  é contínua, então  $f$  é um homeomorfismo e o domínio  $x$  e imagem  $y$  são homeomorfos. Quando os retratos de fases dos sistemas dinâmicos  $\dot{x} = f(x)$  e  $\dot{y} = h(y)$  podem ser relacionados por um homeomorfismo  $f(x) = y$  que preserva o sentido do movimento (a orientação) no espaço de fases, então esses sistemas são topologicamente orbitalmente equivalentes. Isso significa que as trajetórias de um sistema podem ser continuamente deformadas até se tornarem iguais às trajetórias do outro sistema. Dois retratos de fases que apresentam a mesma estrutura orbital são qualitativamente equivalentes, conseqüentemente eles apresentam comportamentos dinâmicos similares. Portanto, as trajetórias na vizinhança de um ponto fixo do sistema dinâmico não linear são qualitativamente equivalentes àquelas na vizinhança do ponto fixo do sistema linearizado, caracterizando um estudo local da estabilidade.

## 2.3 Estabilidade

Estabilidade é uma palavra usada para caracterizar tanto uma solução, quanto uma equação diferencial. A estabilidade de uma solução é determinada pelo comportamento das soluções cujas condições iniciais pertencem à sua vizinhança. A estabilidade de uma equação diferencial é determinada pelo comportamento de equações isomórficas, cujos valores dos parâmetros são próximos aos da equação estudada. Apresentaremos apenas o conceito de estabilidade de uma solução estacionária, representada por um ponto de equilíbrio no espaço de fases, segundo a definição de Lyapunov.

### 2.3.1 Ponto de equilíbrio e estabilidade

Seja  $x^*$  a posição de equilíbrio de um sistema dinâmico. Define-se  $x^*$  como um ponto de equilíbrio assintoticamente estável se, após uma perturbação na condição inicial  $x(0) = x^*$ , então a trajetória  $x(t) \rightarrow x^*$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Um ponto assintoticamente estável atrai todas

as trajetórias contidas em uma “esfera” com centro em  $x^*$ , conforme o tempo passa. Se essa esfera possui raio finito,  $x^*$  é o ponto de equilíbrio *localmente* assintoticamente estável. Se essa esfera tem raio infinito, ou seja, abrange todo espaço de fases, o ponto de equilíbrio é *globalmente* assintoticamente estável. Em ambos os casos, tal ponto é classificado como um atrator. O conjunto de todas as condições iniciais que convergem para um mesmo atrator formam sua bacia de atração.

Define-se  $x^*$  como um ponto de equilíbrio *neutramente estável* se, após uma perturbação na condição inicial  $x(0) = x^*$ , então  $x(t)$  permanece dentro de uma esfera centrada em  $x^*$ , conforme o tempo passa. Nesse caso porém,  $x(t)$  não tende para  $x^*$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

Define-se  $x^*$  como um ponto *instável* se, após alguma perturbação na condição inicial  $x(0) = x^*$ , então  $x(t)$  deixa a esfera centrada em  $x^*$  num tempo finito. Usamos a palavra esfera se o sistema for tridimensional, se fosse unidimensional seria um segmento de reta. No caso bidimensional um círculo, e para dimensão maior que três usamos o termo hiper-esfera.

A estabilidade de um ponto no sentido de Lyapunov é definida em termos do comportamento das trajetórias que partem de uma condição inicial localizada na vizinhança desse ponto. A existência de um ponto instável implica que, conforme o tempo passa, a magnitude das variáveis pode aumentar de maneira ilimitada, distando-se do ponto em questão. Num sistema físico real, isso corresponde a elementos mecânicos que se rompem, ou a elementos elétricos que saturam ou queimam [7].

Considere o sistema de  $n$  equações diferenciais (2.4). O polinômio característico é obtido através de  $\det(A - \lambda I) = 0$ . Quando todos os autovalores da matriz  $A$  tiverem a parte real diferente de zero, o ponto de equilíbrio correspondente  $x^*$  é chamado de *hiperbólico*, independente do valor da parte imaginária. Quando pelo menos um autovalor tem a parte real nula, o ponto de equilíbrio é denominado de *não-hiperbólico*.

Os pontos de equilíbrio hiperbólicos podem ser classificados de três formas quanto à estabilidade: *atratores*, *repulsores*, e *selas*.

- Se todos os autovalores de  $A$  tem a parte real negativa, o ponto de equilíbrio é chamado de atrator, sendo que neste caso o equilíbrio é assintoticamente estável. Se todos os autovalores de  $A$  são complexos, então o atrator é chamado de *foco estável*, e se todos os autovalores de  $A$  são reais, o atrator é chamado de *nó estável*.
- Se todos os autovalores da matriz  $A$  tem a parte real positiva o ponto de equilíbrio é chamado de repulsor ou *fonte*. Se os autovalores são complexos, então a fonte é chamada

de *foco instável* e, se todos os autovalores de  $A$  são reais, a fonte é chamada de *nó instável*.

- Quando alguns autovalores (mas não todos) têm a parte real positiva e o restante tem a parte real negativa, então o ponto de equilíbrio é chamado de sela.

Quanto à estabilidade de pontos de equilíbrio não-hiperbólicos, pode-se dizer que:

- Um ponto de equilíbrio não-hiperbólico é *instável* se um ou mais autovalores de  $A$  tem a parte real positiva.
- Se alguns autovalores da matriz  $A$  tem a parte real negativa, enquanto que os outros autovalores tem a parte real nula, o ponto de equilíbrio é chamado de *marginalmente estável*.
- Se todos os autovalores da matriz  $A$  são imaginários puros e não-nulos, o ponto de equilíbrio é chamado de *centro*.

D.M. Grobman, em 1959, e P. Hartman em 1963, provaram independentemente que, na vizinhança de um ponto de equilíbrio hiperbólico, um sistema não linear de dimensão  $n$  apresenta um comportamento qualitativamente equivalente ao sistema linear correspondente. O teorema de Hartman-Grobman garante uma equivalência topológica orbital entre os retratos de fases do sistema dinâmico não linear e do respectivo sistema linearizado, em torno do ponto de equilíbrio. Se o ponto de equilíbrio é não-hiperbólico, ou seja, se há algum autovalor com parte real nula, então a linearização não permite prever a estabilidade do sistema não linear [14].

## 2.4 Bifurcação

Um sistema dinâmico que descreve um sistema físico real depende de um ou mais parâmetros de controle. No caso de tempo contínuo podemos escrever o sistema como

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad (2.5)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $\alpha \in \mathbb{R}^m$  representam as variáveis e o parâmetro de controle, respectivamente. Conforme o parâmetro de controle varia, o retrato de fases também varia. Existem duas possibilidades: o sistema permanecer topologicamente equivalente ao original, ou sua topologia mudar.

O aparecimento de um retrato de fases topologicamente não equivalente sob a variação do parâmetro de controle é chamado *bifurcação*[11].

Um sistema dinâmico é dito *estruturalmente estável* se para qualquer perturbação suficientemente pequena das equações que o define, o fluxo resultante é topologicamente equivalente àquele associado ao sistema inicial sem a perturbação. Logo, uma bifurcação é uma mudança na topologia do sistema conforme o parâmetro passa através de um valor crítico (ponto de bifurcação).

As bifurcações podem ser locais ou globais. Bifurcações locais são aquelas que podem ser previstas estudando-se o campo vetorial na vizinhança de um ponto de equilíbrio ou uma órbita fechada. Normalmente esse estudo é realizado pelo cálculo de autovalores [17], [7]. Bifurcações globais são aquelas que não podem ser deduzidas a partir de uma análise local.

Seja algum valor  $\alpha = \alpha_0$  no sistema (2.5), e consideremos o maior conjunto de parâmetros próximos (chamado *camada*) contendo  $\alpha_0$ , e composto por aqueles pontos para os quais o sistema tem um retrato de fases que é topologicamente equivalente àquele de  $\alpha_0$ . Tomando todas as camadas tais que estejam no espaço de parâmetros  $\mathbb{R}^m$ , obtemos o retrato paramétrico do sistema, que junto com seu retrato de fases característico constituem um *diagrama de bifurcação*.

*Um diagrama de bifurcação de um sistema dinâmico é uma estratificação de seu espaço de parâmetros induzida pela equivalência topológica, junto com o representativo retrato de fases para cada camada.*

Obtém-se o diagrama de bifurcação como um resultado da análise qualitativa de um sistema dinâmico. Este classifica de maneira condensada todos os possíveis modos de comportamento do sistema e transições entre eles (bifurcações) sob a variação do parâmetro de controle. O diagrama de bifurcações depende, em geral, da região do espaço de fases considerada. O aparecimento de caos em sistemas dinâmicos está sempre ligado ao de bifurcações de algum tipo [18], [12], [8]. Discutimos a seguir, de forma sucinta e introdutória, algumas das bifurcações mais simples.

### 2.4.1 Tipos de bifurcações

#### Bifurcação sela-nó

Esta bifurcação cria ou destrói um par de pontos de equilíbrio com estabilidades contrárias. Considere o sistema de primeira ordem

$$\dot{x} = \alpha - x^2.$$

Para  $\alpha < 0$ , não temos ponto de equilíbrio. Para  $\alpha = 0$ , existe um único ponto de equilíbrio na origem com autovalor 0. Para  $\alpha > 0$ , existe um ponto de equilíbrio estável  $\sqrt{\alpha}$  com autovalor  $-2\sqrt{\alpha}$ , e um ponto de equilíbrio instável  $-\sqrt{\alpha}$  com autovalor  $2\sqrt{\alpha}$ . Dois pontos de equilíbrio são criados quando  $\alpha$  passa por 0, e  $\alpha = 0$  é um valor crítico do sistema.

Na figura (2.4) o diagrama de bifurcação mostra a posição do ponto de equilíbrio versus o parâmetro de controle  $\alpha$ . Uma linha sólida é usada para indicar o conjunto estável e uma linha tracejada, indica conjunto instável.

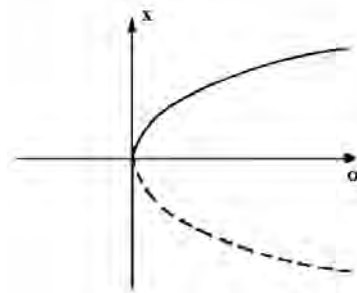


Figura 2.4: O diagrama ilustra a bifurcação sela-nó. A curva sólida representa ponto de equilíbrio estável, e a linha tracejada ponto de equilíbrio instável.

#### Bifurcação de forquilha (Pitchfork)

Essa bifurcação aparece em sistemas físicos com algum tipo de simetria. Um par de pontos de equilíbrio de mesma estabilidade aparece e desaparece simultaneamente, quando o parâmetro de controle passa por um valor crítico. Considere o sistema de primeira ordem

$$\dot{x} = \alpha x - x^3.$$

Para qualquer valor de  $\alpha$ , existe um ponto de equilíbrio na origem. Seu autovalor é igual a  $\alpha$ , então este é estável para  $\alpha < 0$  e instável para  $\alpha > 0$ . Para  $\alpha > 0$ , existem dois pontos de equilíbrio a mais,  $\pm\sqrt{\alpha}$ . Ambos pontos de equilíbrio têm autovalor igual a  $-2\alpha$ , e os pontos de equilíbrio são estáveis. Uma bifurcação ocorre em  $\alpha = 0$ , sendo este um valor crítico, o

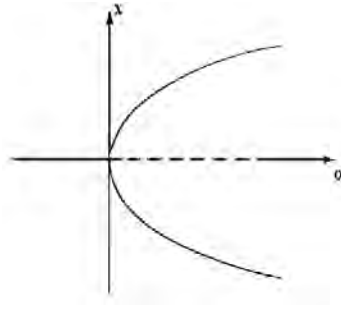


Figura 2.5: O diagrama ilustra a bifurcação de forquilha.

ponto de equilíbrio na origem muda o tipo de estabilidade e dois novos pontos de equilíbrio são criados. O diagrama de bifurcação é mostrado na figura (2.5).

### Bifurcação transcritical

Esta bifurcação faz com que a estabilidade de dois pontos de equilíbrio seja trocada para um valor crítico do parâmetro, porém estes pontos existem para qualquer valor do parâmetro. Considere o sistema de primeira ordem

$$\dot{x} = \alpha x - x^2.$$

Para qualquer valor de  $\alpha$ , existem dois pontos de equilíbrio, um na origem e outro em  $x = \alpha$ . O ponto de equilíbrio na origem possui autovalor igual a  $\alpha$ , então este é estável para  $\alpha < 0$  e instável para  $\alpha > 0$ . O ponto  $x = \alpha$  possui autovalor igual a  $-\alpha$ , então este é estável para  $\alpha > 0$  e instável para  $\alpha < 0$ . Uma bifurcação ocorre em  $\alpha = 0$ , sendo este um valor crítico, e o ponto de equilíbrio muda o tipo de estabilidade. O diagrama de bifurcação é mostrado na figura (2.6).

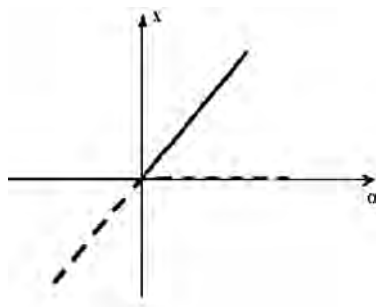


Figura 2.6: O diagrama ilustra a bifurcação transcritical.

### Bifurcação de Hopf

Essa bifurcação é caracterizada pela existência de um par de autovalores puramente imaginários no ponto de bifurcação. Considere o sistema de segunda ordem

$$\dot{x} = y - x(x^2 + y^2 - \alpha)$$

$$\dot{y} = -x - y(x^2 + y^2 - \alpha).$$

O sistema tem um ponto de equilíbrio na origem com autovalores iguais a  $\alpha \pm i$  onde  $i = \sqrt{-1}$ . Para  $\alpha < 0$ , o ponto de equilíbrio é estável. Quando  $\alpha = 0$ , o ponto de equilíbrio torna-se não hiperbólico (possui autovalores imaginários puros), e para  $\alpha > 0$ , o ponto de equilíbrio é instável. Além disso, um ciclo limite estável, dado pela solução de  $x^2 + y^2 = \alpha$ , existe para  $\alpha > 0$ . Dado que o ponto de equilíbrio muda sua estabilidade em  $\alpha = 0$ , este é um valor crítico. O aparecimento de um par de autovalores conjugados complexos na passagem pelo eixo imaginário, criando assim um ciclo limite, é chamada bifurcação de Hopf.

O diagrama de bifurcação é mostrado na figura (2.7). Para cada valor de  $\alpha = \alpha_0$ , o sistema é descrito no plano definido por  $\alpha = \alpha_0$ , e a superfície parabólica indica o ciclo limite.

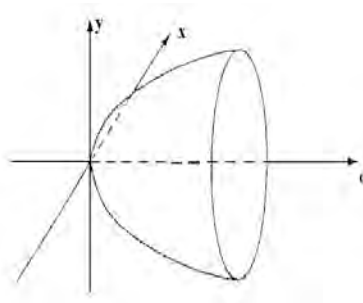


Figura 2.7: O diagrama ilustra a bifurcação de Hopf.

## 2.5 Expoente de Lyapunov

Seja um sistema de  $n$  equações diferenciais ordinárias. Considere uma hiper-esfera de condições iniciais centrada num ponto  $x(t_0)$ . Conforme o tempo passa, o volume da esfera se deforma. Assuma que, ao longo de cada uma das  $n$  dimensões, o raio inicial  $d_j(t_0)$  tenha variado exponencialmente no tempo, de maneira que a relação entre  $d_j(t_0)$  e o valor correspondente no instante  $t$ , dado por  $d_j(t)$ , valha

$$d_j(t) = d_j(t_0)e^{\Lambda_j(t-t_0)} \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Essa relação pode ser reescrita como

$$\Lambda_j = \frac{\ln[d_j(t)/d_j(t_0)]}{t - t_0}.$$

Os números  $\Lambda_j$  são chamados de *expoentes de Lyapunov*.

Num instante  $t > t_0$  o volume  $V(t)$  da hipersfera deve ser proporcional ao produto das distâncias  $d_j(t)$  que o caracterizam, isto é,

$$V(t) \propto \prod_{j=1}^n d_j(t) \propto V(t_0) e^{(t-t_0) \sum_{j=1}^n \Lambda_j},$$

sendo  $V(t_0)$  o volume no instante inicial  $t_0$  e  $\propto$  representa proporcionalidade. Se o sistema é conservativo, então  $V(t) = V(t_0)$  ou, em termos do expoente de Lyapunov

$$\sum_{j=1}^n \Lambda_j = 0.$$

Se é dissipativo,  $V(t) < V(t_0)$ , o que equivale a

$$\sum_{j=1}^n \Lambda_j < 0.$$

Sobre uma solução periódica, a distância entre duas condições inicialmente vizinhas se mantém constante em média, de modo que o expoente de Lyapunov associado a essa direção é nulo. Nas direções perpendiculares ao atrator periódico, há contração do volume no espaço de fases, portanto os expoentes de Lyapunov correspondentes a essas direções são negativos.

O comportamento caótico é caracterizado pela divergência exponencial de trajetórias vizinhas. Nesse caso, há pelo menos um expoente de Lyapunov positivo, o que implica dependência sensível a condição inicial e a existência de um atrator estranho no espaço de fases. A ocorrência de mais do que um expoente de Lyapunov positivo identifica o hipercaos, característico de sistemas cujas órbitas divergem em múltiplas direções no retrato de fase.

Apenas para alguns casos pode-se calcular analiticamente o expoente de Lyapunov. Para um cálculo numérico, calcula-se  $\Lambda$  para diferentes condições iniciais e faz-se uma média sobre os valores obtidos. Note que  $\Lambda$  depende da condição inicial  $x_0$  escolhida. Essa dependência é minimizada tomando-se o número de pontos  $N$  tal que  $N \rightarrow \infty$ . Como, na prática trabalha-se com  $N$  finito, calcula-se  $\Lambda$  a partir de várias condições iniciais e para valores de  $N$  “suficientemente grandes”, de modo a tornar o valor de  $\Lambda$  “praticamente independente” da condição inicial. Costuma-se expressar  $\Lambda$  como um valor médio, com um desvio padrão associado.

## 2.6 Sistemas não-ideais

Quando a fonte de excitação não é influenciada pela resposta do sistema, esta é denominada excitação ideal ou fonte de energia ideal. Por outro lado, quando a fonte de excitação é influenciada pela resposta do sistema, esta é dita não ideal. Se na formulação das equações dinâmicas de um sistema, além da influência da fonte de energia sobre o sistema oscilante, considera-se também a influência inversa do sistema oscilante sobre a fonte, o sistema é chamado não ideal.

Geralmente sistemas oscilantes não ideais são aqueles para os quais a fonte de energia é limitada. Para o sistema dinâmico não ideal, adiciona-se às equações que descrevem o sistema dinâmico ideal uma equação que descreve como a fonte fornece energia ao sistema. Assim uma característica de um sistema oscilatório não ideal é que este tem um grau de liberdade a mais que o correspondente ideal. O fenômeno do salto e o aumento da potência exigida pela fonte de energia, operando na região de ressonância, são manifestações do fenômeno conhecido como efeito Sommerfeld [10], em homenagem ao primeiro pesquisador a observar esses fatos experimentalmente.

# Capítulo 3

## O Sistema Mecânico

O objetivo deste capítulo é apresentar um estudo de um sistema dinâmico não ideal, utilizando os métodos de análise discutidos no capítulo anterior. O sistema dinâmico considerado é um pêndulo mecânico não ideal, cuja versão ideal é utilizada por Meirovitch [13] para mostrar uma aplicação do critério de Routh-Hurwitz. O sistema considerado apresenta certa semelhança com o sistema eletro-pêndulo analisado exaustivamente por Belato e colaboradores [1], [2], [3] e [4]. Apresentaremos a descrição do sistema dinâmico, as equações de movimento, e o sistema linearizado em torno do ponto de equilíbrio estável.

### 3.1 Pêndulo mecânico não ideal

O pêndulo mecânico é formado por um bloco de massa  $m_1$ , que oscila horizontalmente preso a uma parede por uma mola e um amortecedor, cujos coeficientes são respectivamente  $k_1$  e  $c_1$ . Um grau de liberdade adicional é obtido acoplando-se um pêndulo de massa  $m_3$  ao bloco, e a oscilação é provocada pela rotação de uma pequena massa  $m_2$ . O pêndulo é adicionado ao sistema com a finalidade de controlar as vibrações da massa  $m_1$ , queimando energia em forma de oscilações. O motor DC que gira  $m_2$  tem potência limitada, e então o sistema dinâmico torna-se não ideal, pois o comportamento do motor é afetado pelo comportamento do bloco e do pêndulo. A figura (3.1) ilustra o pêndulo mecânico não ideal descrito acima.

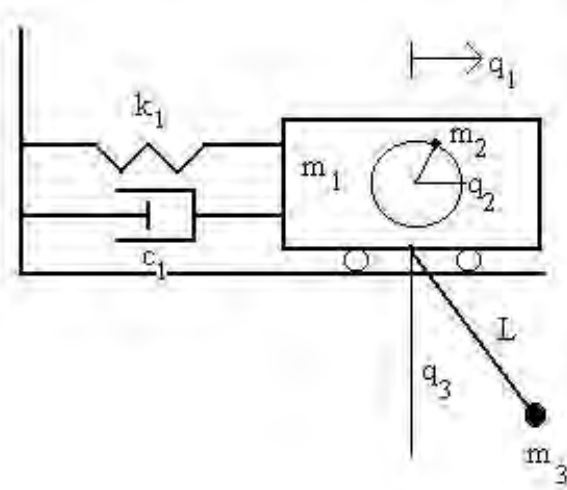


Figura 3.1: Pêndulo mecânico não ideal

Os parâmetros físicos do sistema estão dados na tabela (3.1).

$k_1$	coeficiente de elasticidade linear da mola
$c_1$	coeficiente de amortecimento
$m_1$	massa do bloco
$m_2$	massa excêntrica do motor
$m_3$	massa do pêndulo
$L$	comprimento do pêndulo
$R$	distância da massa $m_2$ ao eixo do motor
$g$	aceleração da gravidade
$J_2$	momento de inércia do rotor
$M(\dot{q}_2)$	torque líquido do motor
$c_3$	coeficiente de amortecimento do pêndulo
$q_1$	vibração horizontal do bloco
$q_2$	deslocamento angular de $m_2$
$q_3$	deslocamento angular do pêndulo.

Tabela 3.1: Descrição dos parâmetros

### 3.1.1 Equações de movimento

Sistemas dinâmicos são denominações gerais de problemas reais, das mais variadas áreas do conhecimento, que são modelados matematicamente através de equações diferenciais ordinárias ou parciais. Entende-se por modelagem matemática de um sistema dinâmico, um conjunto de equações que representam a dinâmica do sistema com precisão ou, pelo menos, de forma bastante aceitável. A obtenção das equações diferenciais do sistema dinâmico pode ser feita através do cálculo variacional e equações de Euler-Lagrange, as quais utilizam expressões envolvendo as energias (cinética e potencial) e o trabalho. O sistema estudado foi modelado por R.M.L.R.F. Brasil [5].

- Energia cinética

$$T = \frac{1}{2}[m_1\dot{q}_1^2 + m_2(\dot{q}_1^2 - 2R\dot{q}_1\dot{q}_2\text{sen}q_2 + R^2\dot{q}_2^2) + J_2\dot{q}_2^2 + m_3(\dot{q}_1^2 + 2L\dot{q}_1\dot{q}_3\cos q_3) + L^2\dot{q}_3^2] \quad (3.1)$$

- Energia de deformação

$$U = \frac{1}{2}k_1q_1^2 \quad (3.2)$$

- Trabalho das forças conservativas (peso)

$$W_c = -g[m_2R\text{sen}q_2 + m_3L(1 - \cos q_3)] \quad (3.3)$$

- Energia potencial total

$$V = U - W_c$$

$$V = \frac{1}{2}k_1q_1^2 + g[m_2R\text{sen}q_2 + m_3L(1 - \cos q_3)] \quad (3.4)$$

- Equação de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial V}{\partial q_i} = N_i \quad (3.5)$$

onde  $i=1, 2, 3$ .

Aplicando a equação de Lagrange para  $i = 1$ .

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = (m_1 + m_2 + m_3)\dot{q}_1 + m_2 R \dot{q}_2 \operatorname{sen} q_2 + m_3 L \dot{q}_3 \cos q_3 \quad (3.6)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) = (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{q}_1 - m_2 R (\ddot{q}_2 \operatorname{sen} q_2 + \dot{q}_2^2 \cos q_2) + m_3 L (\ddot{q}_3 \cos q_3 - \dot{q}_3^2 \operatorname{sen} q_3) \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = k_1 q_1 \quad (3.8)$$

$$N_1 = -c_1 \dot{q}_1 \quad (3.9)$$

Aplicando a equação de Lagrange para  $i = 2$ .

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = (m_2 R^2 + J_2)\dot{q}_2 - m_2 R \dot{q}_1 \operatorname{sen} q_2 \quad (3.10)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) = (m_2 R^2 + J_2)\ddot{q}_2 - m_2 R (\ddot{q}_1 \operatorname{sen} q_2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos q_2) \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = g m_2 R \cos q_2 \quad (3.12)$$

$$N_2 = M(\dot{q}_2) \quad (3.13)$$

Aplicando a equação de Lagrange para  $i = 3$ .

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} = m_3 (L^2 \dot{q}_3 + L \dot{q}_1 \cos q_3) \quad (3.14)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} \right) = m_3 L^2 \ddot{q}_3 + m_3 L (\ddot{q}_1 \cos q_3 - \dot{q}_1 \dot{q}_3 \operatorname{sen} q_3) \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_3} = g m_3 L \operatorname{sen} q_3 \quad (3.16)$$

$$N_3 = -c_3 \dot{q}_3 \quad (3.17)$$

Obtemos então as equações de movimento do sistema

$$(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{q}_1 + c_1\dot{q}_1 + k_1q_1 = m_2R(\ddot{q}_2\text{sen}q_2 + \dot{q}_2^2 \cos q_2) - m_3L(\ddot{q}_3 \cos q_3 - \dot{q}_3^2 \text{sen}q_3) \quad (3.18)$$

$$(m_2R^2 + J_2)\ddot{q}_2 = m_2R(\ddot{q}_1\text{sen}q_2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 \cos q_2) + M(\dot{q}_2) + gm_2R \cos q_2 \quad (3.19)$$

$$m_3L^2\ddot{q}_3 + c_3\dot{q}_3 = -m_3L(\ddot{q}_1 \cos q_3 - \dot{q}_1\dot{q}_3\text{sen}q_3) - gm_3L\text{sen}q_3 \quad (3.20)$$

O estudo de sistemas dinâmicos torna-se mais adequado quando se utiliza variáveis adimensionais, pois trabalha-se com números puros sem considerar a dimensão de suas variáveis. Por exemplo, se um elemento tem comprimento de um centímetro, este elemento é grande ou pequeno? Não podemos responder esta questão sem conhecer o problema considerado. Se o problema envolve o movimento de um satélite artificial em uma órbita em torno da Terra, então um centímetro é muito pequeno. Por outro lado, se o problema envolve distâncias intermoleculares, então um centímetro é muito grande [16]. Definindo  $\tau$  como a variável independente adimensional  $\tau = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}t$  e definindo  $\bar{q}_1 = \frac{q_1}{L}$  temos

$$\frac{d\bar{q}_1}{d\tau} = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{m_1}{k_1}}\frac{dq_1}{dt} \quad \text{e} \quad \frac{d^2\bar{q}_1}{d\tau^2} = \frac{m_1}{k_1L}\frac{d^2q_1}{dt^2} \quad (3.21)$$

$$\frac{dq_2}{d\tau} = \sqrt{\frac{m_1}{k_1}}\frac{dq_2}{dt} \quad \text{e} \quad \frac{d^2q_2}{d\tau^2} = \frac{m_1}{k_1}\frac{d^2q_2}{dt^2} \quad (3.22)$$

$$\frac{dq_3}{d\tau} = \sqrt{\frac{m_1}{k_1}}\frac{dq_3}{dt} \quad \text{e} \quad \frac{d^2q_3}{d\tau^2} = \frac{m_1}{k_1}\frac{d^2q_3}{dt^2} \quad (3.23)$$

Substituindo as expressões (3.21) a (3.23) nas equações (3.18) a (3.20), obtemos as equações adimensionais de movimento

$$\bar{q}_1'' = \frac{\frac{m_2R}{L}(q_2''\text{sen}q_2 + q_2'^2 \cos q_2) - m_3(q_3'' \cos q_3 - q_3'^2 \text{sen}q_3) - m_1\bar{q}_1 - c_1\sqrt{\frac{m_1}{k_1}}\bar{q}_1'}{(m_1 + m_2 + m_3)} \quad (3.24)$$

$$q_2'' = \frac{m_2RL(\bar{q}_1''\text{sen}q_2 + \bar{q}_1'q_2' \cos q_2) + \frac{m_1}{k_1}M\left(\sqrt{\frac{k_1}{m_1}}q_2'\right) + \frac{gm_2m_1R}{k_1} \cos q_2}{m_2R^2 + J_2} \quad (3.25)$$

$$q_3'' = -\bar{q}_1'' \cos q_3 - \bar{q}_1'q_3' \text{sen}q_3 - \frac{gm_1}{Lk_1}\text{sen}q_3 - \frac{c_3}{m_3L^2}\sqrt{\frac{m_1}{k_1}}q_3' \quad (3.26)$$

## 3.2 Pontos de equilíbrio do sistema

Nesta seção obteremos os pontos de equilíbrio do sistema de equações (3.24) a (3.26), reescrevendo-o como um conjunto de seis equações de primeira ordem. Para isso, introduzimos a mudança de variável  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T$  com  $x_1 = \bar{q}_1$ ,  $x_2 = \bar{q}'_1$ ,  $x_3 = q_2$ ,  $x_4 = q'_2$ ,  $x_5 = q_3$ ,  $x_6 = q'_3$ .

Adotamos também o agrupamento dos parâmetros fixos, considerando-os todos positivos, afim de simplificar o sistema

$m = m_1 + m_2 + m_3$	$a_3 = \frac{m_1}{m}$	$a_7 = \frac{gm_1}{Lk_1}$
$I = m_2R^2 + J_2$	$a_4 = \frac{c_1}{m} \sqrt{\frac{m_1}{k_1}}$	$a_8 = \frac{c_3}{m_3L^2} \sqrt{\frac{m_1}{k_1}}$
$a_1 = \frac{m_2R}{Lm}$	$a_5 = \frac{m_2RL}{I}$	$a_9 = \frac{gm_2m_1R}{Ik_1}$
$a_2 = \frac{m_3}{m}$	$a_6 = \frac{m_1}{k_1I}$	

Tabela 3.2: Simplificação dos parâmetros

As equações (3.24) a (3.26) se escrevem

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2, \\
 \dot{x}_2 &= a_1(\dot{x}_4 \text{sen} x_3 + x_4^2 \cos x_3) - a_2(\dot{x}_6 \cos x_5 - x_6^2 \text{sen} x_5) - a_3 x_1 - a_4 x_2, \\
 \dot{x}_3 &= x_4, \\
 \dot{x}_4 &= a_5(\dot{x}_2 \text{sen} x_3 + x_2 x_4 \cos x_3) + a_6 M \left( \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} x_4 \right) + a_9 \cos x_3, \\
 \dot{x}_5 &= x_6, \\
 \dot{x}_6 &= -\dot{x}_2 \cos x_5 + x_2 x_6 \text{sen} x_5 - a_7 \text{sen} x_5 - a_8 x_6.
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Podemos então reescrever o sistema (3.27) na forma matricial  $A_0 \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$ , semelhante à simplificação feita por Dantas e Balthazar [6], onde

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a_1 \text{sen} x_3 & 0 & a_2 \cos x_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_5 \text{sen} x_3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cos x_5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$A = \begin{bmatrix} x_2 \\ a_1x_4^2 \cos x_3 + a_2x_6^2 \text{sen}x_5 - a_3x_1 - a_4x_2 \\ x_4 \\ a_5x_2x_4 \cos x_3 + M\left(\sqrt{\frac{k_1}{m_1}}x_4\right)a_6 + a_9 \cos x_3 \\ x_6 \\ x_2x_6 \text{sen}x_5 - a_7 \text{sen}x_5 - a_8x_6 \end{bmatrix}$$

Agora, obtendo a matriz inversa de  $A_0$ , escrevemos as equações (3.24) a (3.26), como um conjunto de equações de primeira ordem na forma matricial

$$\dot{\mathbf{x}} = A_0^{-1}A\mathbf{x}, \quad (3.28)$$

sendo

$$A_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & -\beta a_1 \text{sen}x_3 & 0 & \beta a_2 \cos x_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta a_5 \text{sen}x_3 & 0 & \beta(-1 + a_2 \cos^2 x_5) & 0 & \beta a_2 a_5 \text{sen}x_3 \cos x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta \cos x_5 & 0 & \beta a_1 \cos x_5 \text{sen}x_3 & 0 & \beta(-1 + a_1 a_5 - a_1 a_5 \cos^2 x_3) \end{bmatrix}$$

com

$$\beta = \frac{1}{1 - a_1 a_5 \text{sen}^2 x_3 - a_2 \cos^2 x_5}$$

Note que devemos verificar se  $1 - a_1 a_5 \text{sen}^2 x_3 - a_2 \cos^2 x_5 = 0$  para algum valor dos parâmetros. Considerando que  $\text{sen}x_3$  e  $\cos x_5$  estão no intervalo  $[-1, 1]$  e tomando o valor máximo valor que eles podem assumir ( $\text{sen}x_3 = \cos x_5 = 1$ ) obtemos

$$1 - a_1 a_5 - a_2 = 0 \quad (3.29)$$

Substituindo  $a_1$ ,  $a_5$ ,  $a_2$ , conclui-se que

$$a_1 a_5 + a_2 = \frac{m_2^2 R^2}{mI} + \frac{m_3}{m} = \frac{m_2^2 R^2 + m_3 m_2 R^2 + m_3 J_2}{m_2^2 R^2 + m_3 m_2 R^2 + m_3 J_2 + m_1(m_2 R^2 + J_2) + m_2 J_2} < 1 \quad (3.30)$$

Assim  $1 - a_1 a_5 \text{sen}^2 x_3 - a_2 \cos^2 x_5 \neq 0$  para quaisquer valores de  $x_3$  e  $x_5$ , e desta forma a matriz  $A_0^{-1}$  é uma matriz com elementos bem definidos.

Finalmente reescrevemos o sistema (3.27) na forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \beta[\alpha_1 + a_1 \text{sen} x_3 \alpha_2 - a_2 \cos x_5 \alpha_3] \\ x_4 \\ \beta[a_5 \text{sen} x_3 \alpha_1 + (1 - a_2 \cos^2 x_5) \alpha_2 - a_5 a_2 \text{sen} x_3 \cos x_5 \alpha_3] \\ x_6 \\ \beta[-\cos x_5 \alpha_1 - a_1 \cos x_5 \text{sen} x_3 \alpha_2 + (1 - a_1 a_5 \text{sen}^2 x_3) \alpha_3] \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_1 x_4^2 \cos x_3 + a_2 x_6^2 \text{sen} x_5 - a_3 x_1 - a_4 x_2, \\ \alpha_2 &= a_5 x_2 x_4 \cos x_3 + M \left( \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} x_4 \right) a_6 + a_9 \cos x_3, \\ \alpha_3 &= x_2 x_6 \text{sen} x_5 - a_7 \text{sen} x_5 - a_8 x_6. \end{aligned}$$

Procuramos agora os pontos de equilíbrio da equação (3.31), isto é, os pontos  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*, x_6^*)$  que representam as soluções estacionárias  $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = 0$ . O estudo na vizinhança de uma solução estacionária nos fornece um entendimento local do comportamento do sistema, ou seja, dependendo da natureza do ponto fixo pode-se determinar se soluções próximas a este serão estáveis ou instáveis. Dessa forma temos

$$\begin{aligned} 0 &= x_2, \\ 0 &= \beta[\alpha_1 + a_1 \text{sen} x_3 \alpha_2 - a_2 \cos x_5 \alpha_3], \\ 0 &= x_4, \\ 0 &= \beta[a_5 \text{sen} x_3 \alpha_1 + (1 - a_2 \cos^2 x_5) \alpha_2 - a_5 a_2 \text{sen} x_3 \cos x_5 \alpha_3], \\ 0 &= x_6, \\ 0 &= \beta[-\cos x_5 \alpha_1 - a_1 \cos x_5 \text{sen} x_3 \alpha_2 + (1 - a_1 a_5 \text{sen}^2 x_3) \alpha_3], \end{aligned}$$

Obtém-se  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $\cos x_3 = -\frac{a_6 M(0)}{a_9}$ ,  $x_4 = 0$ ,  $\text{sen} x_5 = 0$ ,  $x_6 = 0$ . Então  $x_3 = \cos^{-1}\left(-\frac{a_6 M(0)}{a_9}\right)$  e  $x_5 = n\pi$ . Considera-se  $n = 0$ ,  $n = 1$  e  $n = 2$ , pois os demais valores de  $n$  são apenas múltiplos dos valores considerados. Os pontos de equilíbrio são dados por

ponto 1	ponto 2
$x_1 = 0$	$x_1 = 0$
$x_2 = 0$	$x_2 = 0$
$x_3 = \cos^{-1}\left(-\frac{a_6 M(0)}{a_9}\right)$	$x_3 = \cos^{-1}\left(-\frac{a_6 M(0)}{a_9}\right)$
$x_4 = 0$	$x_4 = 0$
$x_5 = 0$	$x_5 = \pi$
$x_6 = 0$	$x_6 = 0$

Tabela 3.3: Pontos de equilíbrio

Note que esses pontos de equilíbrio somente existem se o torque inicial  $M(0)$  satisfaz a desigualdade  $|M(0)| \leq -\frac{a_9}{a_6} = -m_2 g R$ . Tendo o sistema de equações diferenciais  $\dot{x}_i = f_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$  onde  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T$ , é necessário encontrar a matriz Jacobiana para obter a linearização do sistema em torno dos pontos de equilíbrio 1 e 2. Denominando respectivamente por  $J_1$  e  $J_2$  as Jacobianas nos pontos 1 e 2, elas se escrevem

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a_3}{\eta} & -\frac{a_4}{\eta} & -\frac{a_1 a_9 \gamma}{\eta} & \frac{a_1 a_6 \sqrt{\gamma} M'(0) \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}}{\eta} & \frac{a_2 a_7}{\eta} & \frac{a_2 a_8}{\eta} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_5 a_3 \sqrt{\gamma}}{\eta} & -\frac{a_5 a_4 \sqrt{\gamma}}{\eta} & -\frac{(1-a_2) a_9 \sqrt{\gamma}}{\eta} & \frac{(1-a_2) a_6 M'(0) \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}}{\eta} & \frac{a_5 a_2 a_7 \sqrt{\gamma}}{\eta} & \frac{a_5 a_2 a_8 \sqrt{\gamma}}{\eta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{a_3}{\eta} & \frac{a_4}{\eta} & \frac{a_1 a_9 \gamma}{\eta} & -\frac{a_1 a_6 \sqrt{\gamma} M'(0) \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}}{\eta} & -\frac{(1-a_5 a_1 \gamma) a_7}{\eta} & -\frac{(1-a_1 a_5 \gamma) a_8}{\eta} \end{bmatrix}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a_3}{\eta} & -\frac{a_4}{\eta} & -\frac{a_1 a_9 \gamma}{\eta} & \frac{a_1 a_6 \sqrt{\gamma} M'(0) \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}}{\eta} & \frac{a_2 a_7}{\eta} & -\frac{a_2 a_8}{\eta} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_5 a_3 \sqrt{\gamma}}{\eta} & -\frac{a_5 a_4 \sqrt{\gamma}}{\eta} & -\frac{(1-a_2) a_9 \sqrt{\gamma}}{\eta} & \frac{(1-a_2) a_6 M'(0) \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}}{\eta} & \frac{a_5 a_2 a_7 \sqrt{\gamma}}{\eta} & -\frac{a_5 a_2 a_8 \sqrt{\gamma}}{\eta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{a_3}{\eta} & -\frac{a_4}{\eta} & -\frac{a_1 a_9 \gamma}{\eta} & \frac{a_1 a_6 \sqrt{\gamma} M'(0) \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}}{\eta} & \frac{(1-a_5 a_1 \gamma) a_7}{\eta} & -\frac{(1-a_1 a_5 \gamma) a_8}{\eta} \end{bmatrix}$$

onde  $\gamma = 1 - \left(\frac{M(0) a_6}{a_9}\right)^2$  e  $\eta = 1 - a_1 a_5 \gamma - a_2$ .

A matriz Jacobiana de um sistema permite-nos obter o polinômio característico a partir de  $\det(J - I\lambda) = 0$ , e seus autovalores complexos fornecem as frequências naturais do sistema mecânico. Explicitamos os polinômios característicos de  $J_1$  e  $J_2$ , seus autovalores só podem ser calculados numericamente pois os polinômios são de grau 6.

$$\begin{aligned}
P_1(\lambda) = & \lambda^6 + \left[ a_8 a_9^2 (1 - a_1 a_5) + a_8 a_1 a_5 M(0)^2 a_6^2 + a_6 a_9^2 M'(0) \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} (a_2 - 1) + \right. \\
& a_4 a_9^2 \left. \right] \frac{\lambda^5}{\kappa} + \left[ a_1 a_5 a_7 (M(0)^2 a_6^2 - a_9^2) - a_6 a_9^2 M'(0) \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} (a_4 + a_8) + a_9^2 (a_7 + a_3 + a_8 a_4) + \right. \\
& a_9^3 a_2 \sqrt{\gamma} (1 - a_2) \left. \right] \frac{\lambda^4}{\kappa} - \left[ a_6 M'(0) \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} (a_7 + a_3 + a_8 a_4) - a_7 a_4 - a_9 \sqrt{\gamma} (a_8 + a_4) - a_8 a_3 \right] \frac{a_9^2 \lambda^3}{\kappa} - \\
& \left[ a_6 M'(0) \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} (a_7 a_4 - a_8 a_3) - a_9 \sqrt{\gamma} (a_3 + a_7 + a_8 a_4) - a_7 a_3 \right] \frac{a_9^2 \lambda^2}{\kappa} - \left[ a_7 a_3 a_6 M'(0) \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} - \right. \\
& \left. a_9 \sqrt{\gamma} (a_8 a_3 + a_7 a_4) \right] \frac{a_9^2 \lambda}{\kappa} + \frac{a_7 a_3 a_9^3}{\kappa} \sqrt{\gamma} \tag{3.32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_2(\lambda) = & \lambda^6 + \left[ a_8 a_9^2 (1 - a_1 a_5) + a_8 a_1 a_5 M(0)^2 a_6^2 + a_6 a_9^2 M'(0) \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} (a_2 - 1) + \right. \\
& a_4 a_9^2 \left. \right] \frac{\lambda^5}{\kappa} - \left[ a_1 a_5 a_7 (M(0)^2 a_6^2 - a_9^2) + a_6 a_9^2 M'(0) \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} (a_4 + a_8) + a_9^3 \sqrt{\gamma} (a_2 - 1) + \right. \\
& a_9^2 (a_7 - a_3 - a_8 a_4) \left. \right] \frac{\lambda^4}{\kappa} - \left[ a_6 M'(0) \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} (a_3 - a_7 + a_8 a_4) - a_9 \sqrt{\gamma} (a_8 + a_4) - a_8 a_3 + a_7 a_4 \right] \frac{a_9^2 \lambda^3}{\kappa} - \\
& \left[ a_6 M'(0) \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} (a_8 a_3 - a_7 a_4) + a_9 \sqrt{\gamma} (a_7 - a_3 - a_8 a_4) + a_7 a_3 \right] \frac{a_9^2 \lambda^2}{\kappa} + \left[ a_7 a_6 a_3 M'(0) \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} + \right. \\
& \left. a_9 \sqrt{\gamma} (a_8 a_3 - a_7 a_4) \right] \frac{a_9^2 \lambda}{\kappa} - \frac{a_7 a_3 a_9^3}{\kappa} \sqrt{\gamma} \tag{3.33}
\end{aligned}$$

onde

$$\kappa = a_9^2 - a_1 a_5 a_9^2 + a_1 a_5 M(0)^2 a_6^2 - a_2 a_9^2.$$

# Capítulo 4

## Simulações Numéricas

Estudos analíticos de sistemas dinâmicos complexos são difíceis de serem elaborados, e portanto análises preliminares de tais sistemas são feitas através de simulações numéricas. Os resultados numéricos apresentados foram obtidos através da simulação do sistema de equações (3.31), utilizando o integrador clássico de Runge-Kutta (4, 5) embutido. Em determinadas condições, sistemas dinâmicos vibrantes podem apresentar ressonâncias internas, e a presença dessas ressonâncias dão lugar a uma dinâmica mais complexa. Um sistema dinâmico não ideal com dois graus de liberdade foi analisado na passagem pela ressonância em [9]. Neste Capítulo estudamos o comportamento do sistema pêndulo mecânico dinâmico pêndulo mecânico sob condições próximas às ressonâncias  $1 : 1$  e  $2 : 1$ , e investigamos comportamentos regulares e irregulares perto e longe do ponto de equilíbrio.

### 4.1 Ressonâncias

Um exemplo clássico do efeito de ressonância interna em um sistema dinâmico é a destruição da ponte pencil de Tacoma. No estado de Washington, no dia 7 de Novembro de 1940, aproximadamente às 11 horas da manhã, a ponte suspensa sobre o estreito de Tacoma, apenas 4 meses depois de ter sido aberta ao tráfego, foi destruída durante um vendaval. A ponte apresentava um comprimento total de 1530 m, com um vão central de 850 m. Inicialmente, sob a ação do vento, o vão central pôs-se a vibrar no sentido vertical, passando depois a vibrar torcionalmente, com as torções ocorrendo em sentido oposto nas duas metades do vão. Uma hora depois, o vão central se despedaçava. Tal acontecimento não foi devido simplesmente à força imposta pelo vento que, na manhã do desastre, soprava com a velocidade

de aproximadamente 68 km/h, insuficiente, por si só, para destruir uma ponte solidamente construída. O desastre realmente ocorreu devido ao fenômeno físico da ressonância entre a vibração no sentido vertical e torcional que provocou movimentos próximos de caóticos. No presente sistema, sejam  $\omega$ ,  $\omega_b$  e  $\omega_p$  respectivamente as frequências do motor (frequência de rotação da massa  $m_2$ ), do bloco e do pêndulo. Então temos a ocorrência de ressonâncias internas quando essas frequências estiverem em condições de comensurabilidade, isto é, em uma relação do tipo

$$p\omega_b = q\omega_p = r\omega$$

com inteiros  $p$ ,  $q$  e  $r$  primos entre si. Denominamos ressonâncias de baixa ordem quando  $p$ ,  $q$  e  $r$  são pequenos.

#### 4.1.1 Ressonância 1 : 1

Foram realizadas simulações com as equações adimensionais (3.31), quando a relação entre as frequências naturais do pêndulo e do bloco é 1 : 1, e sob diferentes modelos do torque  $M(\dot{q}_2)$  do motor. Assim adotamos valores para os parâmetros tais que o bloco e o pêndulo estejam em condição de ressonância 1 : 1, ou seja, quando a frequência natural do bloco  $\omega_b$  e a frequência natural do pêndulo  $\omega_p$  satisfaçam a relação  $\omega_b \approx \omega_p$ . Os valores escolhidos para os parâmetros físicos do sistema que propiciam essa ressonância estão listados na tabela (4.1).

---

<i>massa do bloco:</i> $m_1 = 1,0kg$ ;
<i>massa excêntrica do motor:</i> $m_2 = 0,2kg$ ;
<i>massa do pêndulo:</i> $m_3 = 0,5kg$ ;
<i>coeficiente de elasticidade linear da mola:</i> $k_1 = 5,4N/m$ ;
<i>coeficiente de amortecimento do pêndulo:</i> $c_3 = 2,45Ns/m$ ;
<i>coeficiente do amortecedor:</i> $c_1 = 0,01Ns/m$ ;
<i>momento de inércia do rotor:</i> $J = 0,000017Kgm^2$ ;
<i>comprimento do pêndulo:</i> $L = 1,0m$ ;
<i>distância da massa <math>m_2</math> ao eixo do motor:</i> $R = 0,05m$ ;
<i>aceleração da gravidade:</i> $g = 9,80665m/s^2$ .

---

Tabela 4.1: Parâmetros físicos para ressonância 1:1

Para os modelos do torque linear  $M(\bar{x}_4) = a - b\bar{x}_4$  e torque exponencial  $M(\bar{x}_4) = ae^{-b\bar{x}_4}$  onde  $\bar{x}_4 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}x_4$ , fixamos  $b = 0.5$  e escolhemos  $a$  como parâmetro de controle para obter a variação da frequência  $\omega$ . Substituindo os valores dos parâmetros mostrados na tabela (4.1) nos polinômios característicos (3.32) e (3.33), obtemos os autovalores de  $J_1$  e  $J_2$  que fornecem as frequências desejadas.

Na tabela (4.2) mostramos os autovalores referentes ao ponto de equilíbrio 1, para torque linear e não linear, adotando o valor  $a = a_c = 0.0980665$ .

Torque Linear	Torque Exponencial
-0.023164 + 0.745410i	-0.0231639 - 0.745410i
-0.023164 - 0.745410i	-0.0231639 + 0.745410i
-1.472238 - 0.744015i	-1.472238 + 0.744015i
-1.472238 + 0.744015i	-1.472238 + 0.744015i
0.0	0.0
-967.117989	-94.841876

Tabela 4.2: Autovalores do sistema para o torque linear e exponencial, correspondentes ao ponto de equilíbrio 1 e ressonância 1:1

A tabela (4.3) exhibe os autovalores referentes ao ponto de equilíbrio 2, para torque linear e não linear, e adotando  $a = a_c$ .

Torque Linear	Torque Exponencial
-3.631944	-3.631944
-0.016223 + 0.786347i	-0.016223 + 0.786347i
-0.016223 - 0.786347i	-0.016223 - 0.786347i
0.673587	0.673587
0.0	0.0
-967.117989	-94.841876

Tabela 4.3: Autovalores do sistema para o torque linear e exponencial, relativos ao ponto de equilíbrio 2 e ressonância 1:1

A principal diferença entre as tabelas (4.2) e (4.3) é que o autovalor correspondente ao pêndulo torna-se real e negativo. O ponto 1 é classificado como não-hiperbólico e marginalmente estável, enquanto o ponto de equilíbrio 2 é classificado como não-hiperbólico e instável (ver capítulo 2).

## Torque linear

Adotamos primeiramente torque linear, isto é,  $M(\bar{x}_4) = a - b\bar{x}_4$  e condição inicial perto do ponto de equilíbrio 1 igual a  $\chi_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0.1, 0, \cos^{-1}(\frac{-a_6 M(0)}{a_9}) + 0.1, 0, 0.1, 0)$ , e  $a = a_c = 0,0980665$ .

Na figura (4.1) estão representados os comportamentos do bloco, da massa excêntrica do motor e do pêndulo. O bloco e o pêndulo executam oscilações periódicas e amortecidas bastante semelhantes. O motor não tem potência suficiente para girar continuamente, e o ângulo tende assintoticamente para um valor menor que  $2\pi$ . Na figura (4.2) mostramos o espectro de frequência do bloco e do pêndulo, o bloco possui um pico entre 0 e 1 e comparando com o espectro do pêndulo, observamos que a frequência do pêndulo se encontra no mesmo intervalo que a do bloco. Isto mostra uma relação direta entre as oscilações do bloco e do pêndulo.

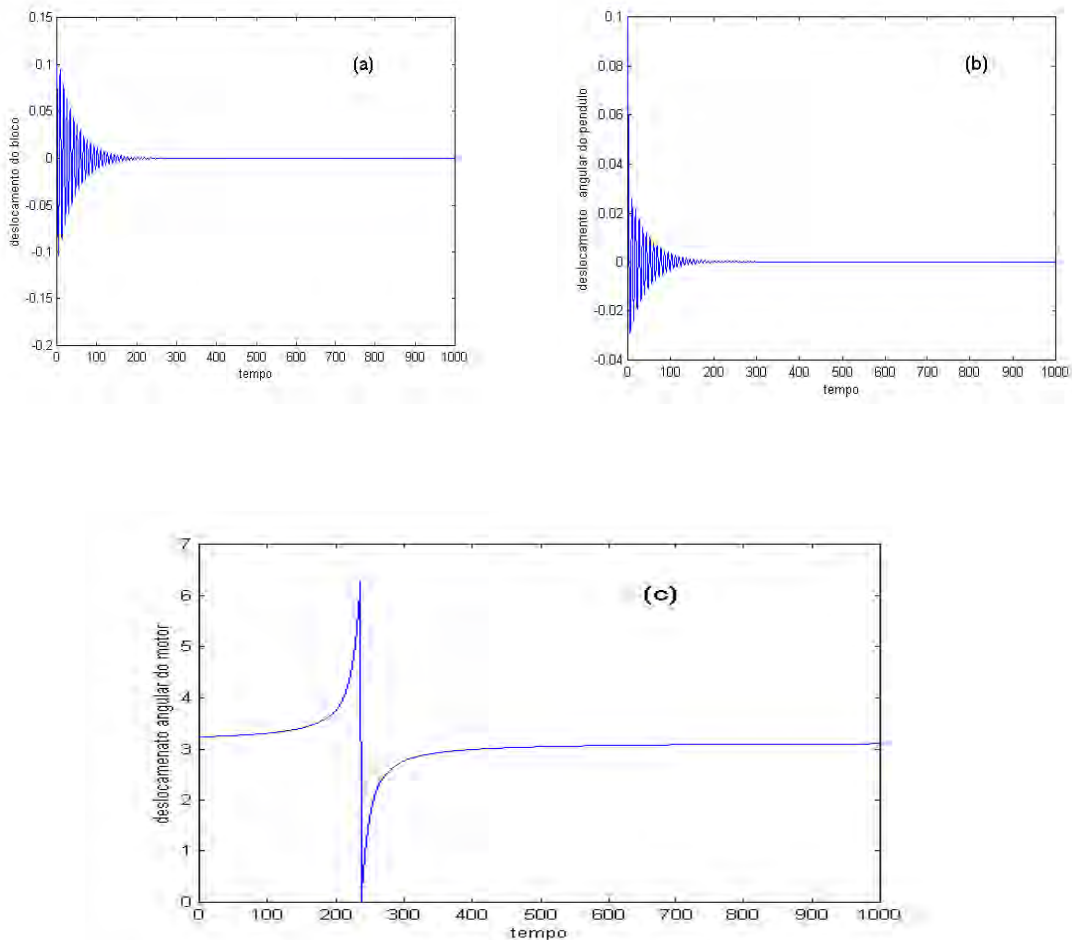


Figura 4.1: Características do movimento para o parâmetro de controle  $a_c = 0.0980665$ , condição inicial  $\chi_1$  e torque linear. (a) Vibrações do bloco. (b) Variação angular do pêndulo. (c) Variação angular do motor.

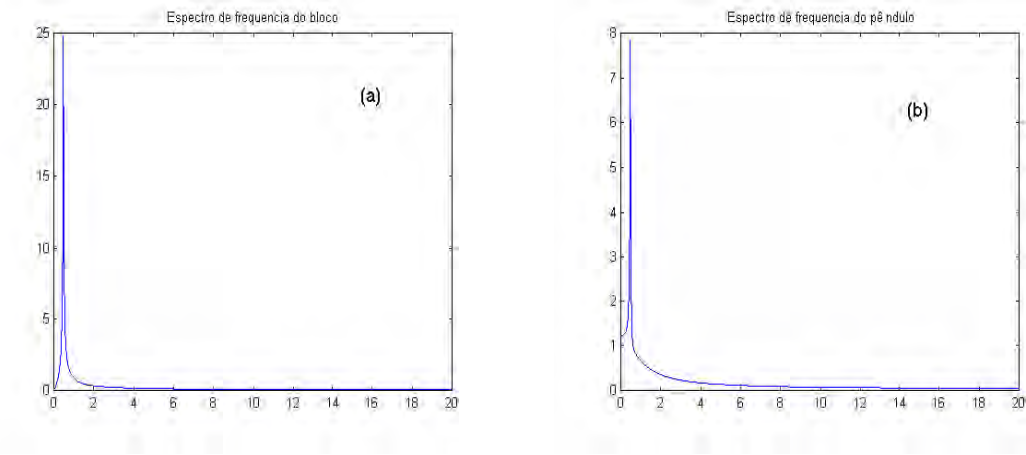


Figura 4.2: Espectros de frequência, parâmetro de controle  $a_c$ , condição inicial  $\chi_1$  e torque linear. (a) Espectro de frequência do bloco. (b) Espectro de frequência do pêndulo.

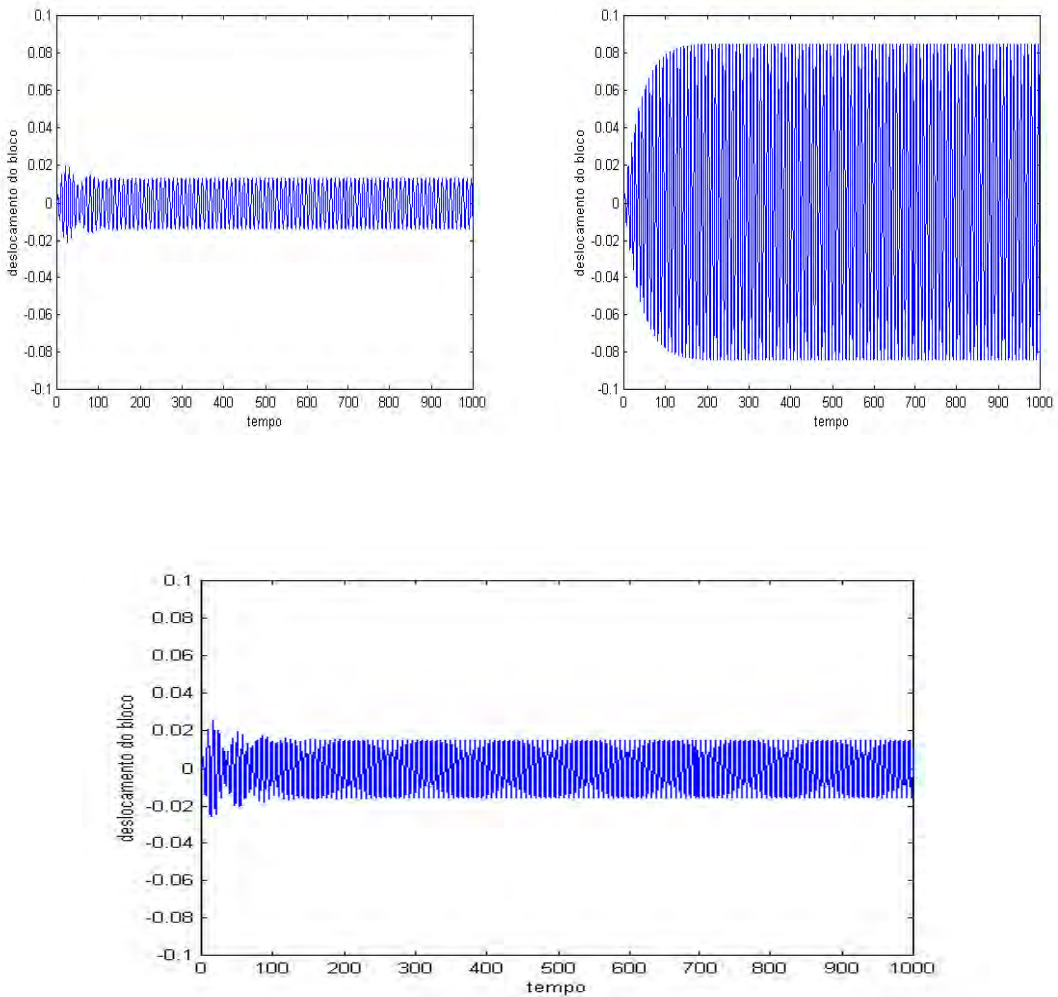


Figura 4.3: Comportamento do bloco antes da passagem pela ressonância,  $\omega = 0.6316$ , durante a passagem pela ressonância,  $\omega = 0.7447$  e depois da passagem pela ressonância,  $\omega = 0.9247$ , respectivamente. Condição inicial  $\chi_0$  e torque linear.

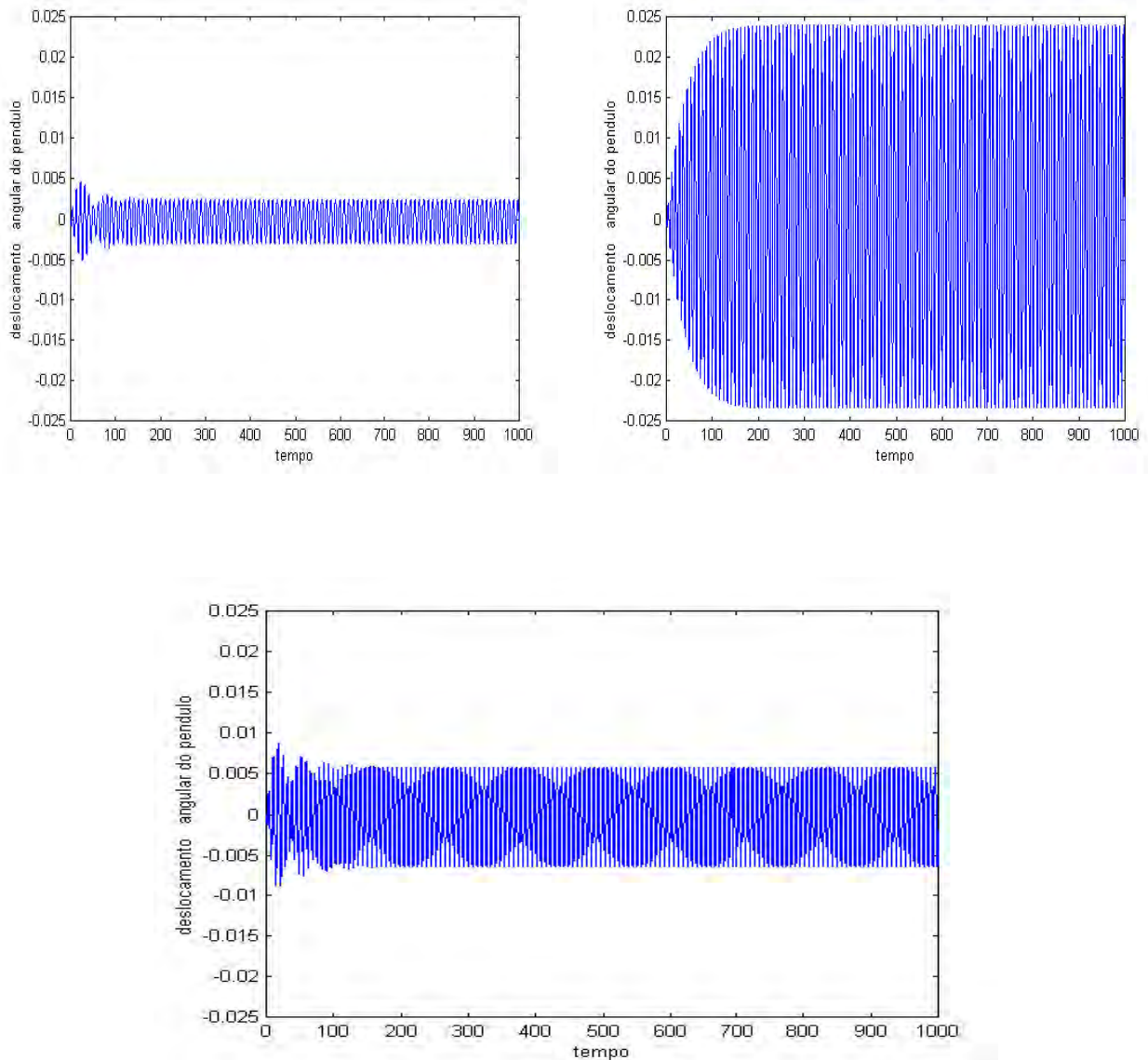


Figura 4.4: Comportamento do pêndulo antes da passagem pela ressonância,  $\omega = 0.6316$ , durante a passagem pela ressonância,  $\omega = 0.7447$  e depois da passagem pela ressonância,  $\omega = 0.9247$ , respectivamente. Condição inicial  $\chi_0$  e torque linear.

As figuras (4.3) e (4.4) mostram o comportamento do bloco e do pêndulo antes, durante e depois da passagem pela ressonância, escolhendo valores de  $a$  maiores que  $a_c = 0.0980665$ , e condição inicial  $\chi_0 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ . Para  $a = 0.74$  temos que a frequência do motor ( $\omega$ ) é menor que a frequência do bloco ( $\omega_b$ ) e do pêndulo ( $\omega_p$ ), ou seja,  $\omega < \omega_b \approx \omega_p$ . Para  $a = 0.88$  temos  $\omega \approx \omega_b \approx \omega_p$  e para  $a = 1.08$  temos  $\omega > \omega_b \approx \omega_p$ . Observa-se que durante a passagem pela ressonância ocorre um aumento brusco das amplitudes de oscilação, porém essa amplitude cai novamente após a passagem. É mostrado na figura (4.5) o espaço de fases do bloco e do pêndulo durante a passagem pela ressonância.

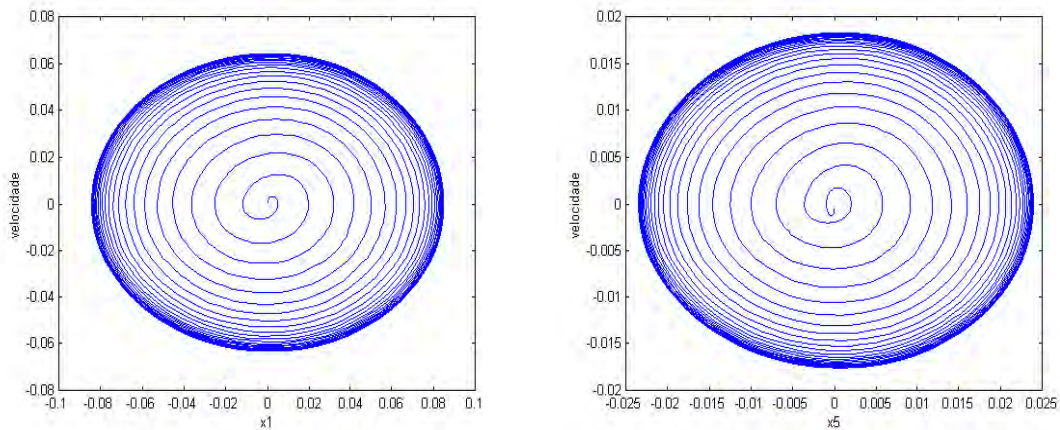


Figura 4.5: Espaço de fases do bloco  $(x_1, x_2)$  e do pêndulo  $(x_5, x_6)$  durante a passagem pela ressonância 1:1.

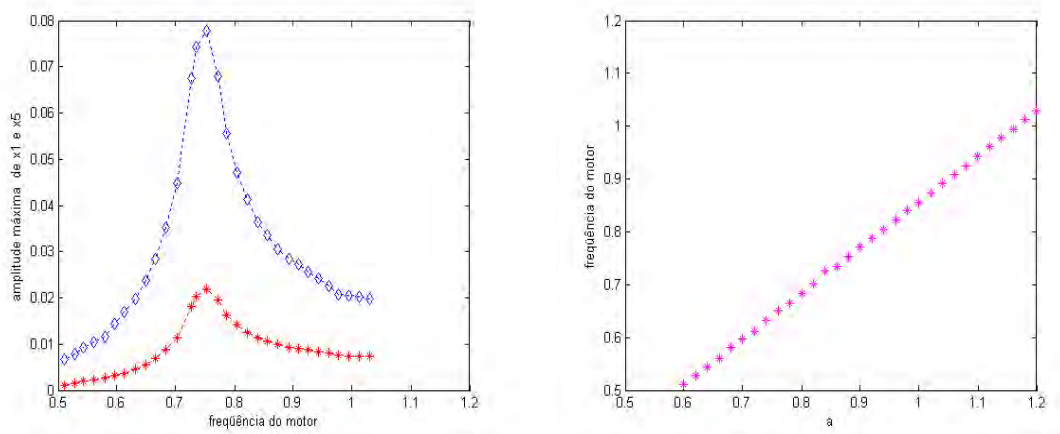


Figura 4.6: À esquerda, média das amplitudes máximas do bloco ( $\diamond$ ) e do pêndulo ( $*$ ) em função da frequência do motor, e à direita, variação linear da frequência do motor em função do parâmetro de controle.

Na figura (4.6) estão representados os valores das amplitudes máximas do bloco e do pêndulo em função da frequência de rotação do motor  $\omega$ , e a variação da frequência do motor em função do parâmetro de controle  $a$ . A frequência do motor passa pela frequência natural do bloco e do pêndulo, e observa-se que as amplitudes de oscilação comportam-se de maneira regular, apresentando apenas um aumento da amplitude durante a passagem pela ressonância que ocorre em  $\omega = 0.7447$ . A variação de  $\omega$  é linear e crescente.

Simulamos com condição inicial igual a  $\chi_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0.1, 0, \cos^{-1}(\frac{-a_6 M(0)}{a_9}) + 0.1, 0, \pi + 0.1, 0)$  e  $a = a_c$  perto do ponto de equilíbrio 2.

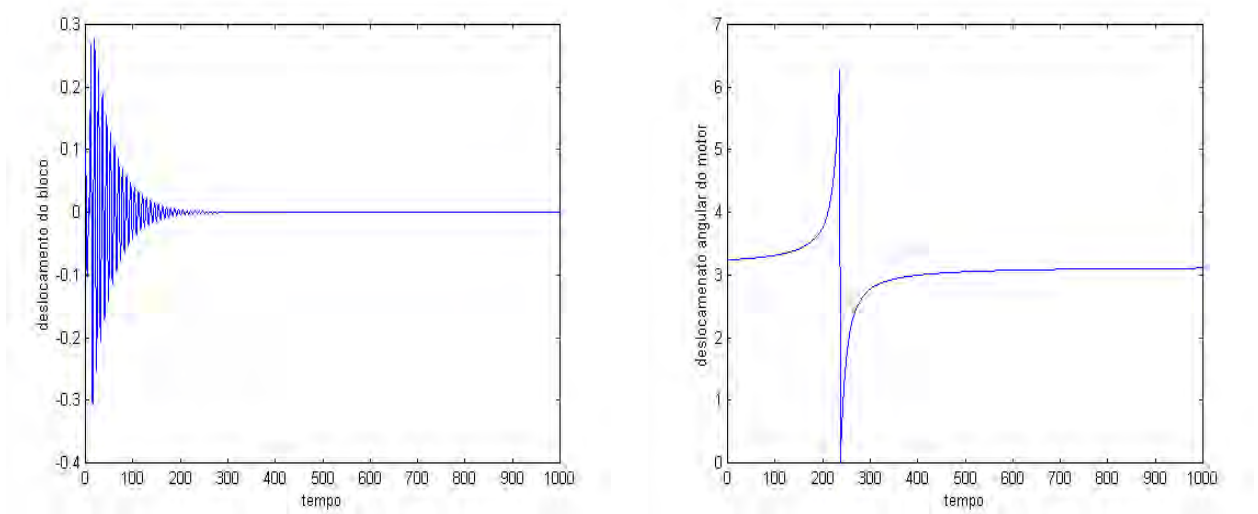


Figura 4.7: Vibrações do bloco e variação angular do motor, para  $a = a_c$  e condição inicial  $\chi_2$ .

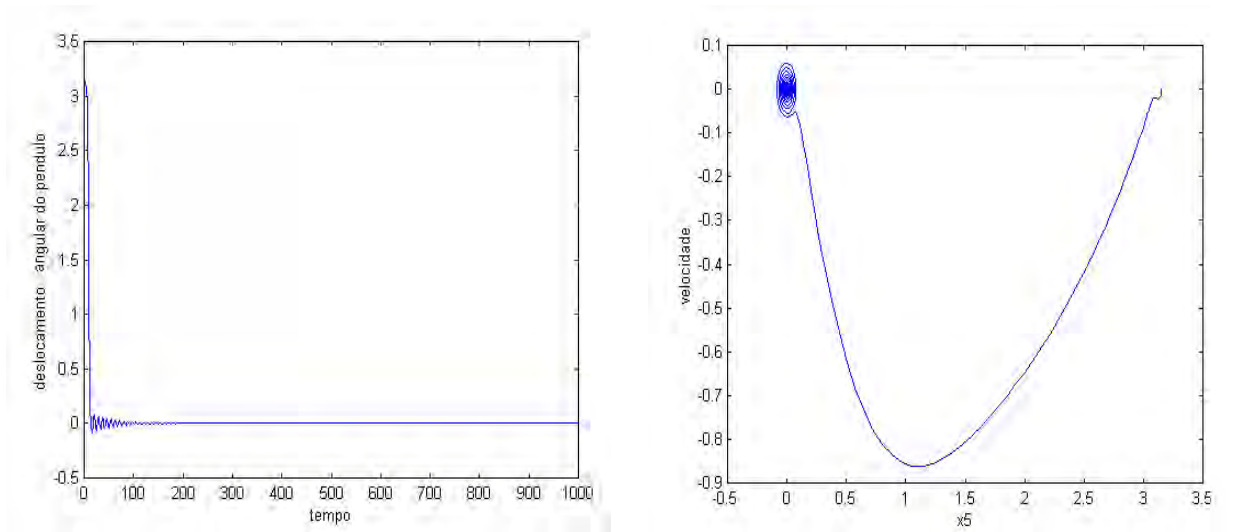


Figura 4.8: Variação angular do pêndulo e seu espaço de fases, para  $a = a_c$  e condição inicial  $\chi_2$ .

A figura (4.7) mostra o movimento oscilatório amortecido do bloco e o movimento do motor que dá uma volta e depois tende ao equilíbrio. Na figura (4.8) observamos que o pêndulo parte da proximidade do ponto de equilíbrio  $x_5 = \pi$ , mas logo passa a oscilar em torno do ponto de equilíbrio  $x_5 = 0$ . É interessante notar que o seu movimento é bruscamente reduzido a uma pequena oscilação em torno desse ponto. Isso se deve ao fato do autovalor ser real e negativo, conforme mostrado na tabela (4.3).

## Torque não linear

A seguir repetimos as simulações com o modelo exponencial para o torque do motor, ou seja,  $M(\bar{x}_4) = ae^{-b\bar{x}_4}$ , onde  $\bar{x}_4 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}x_4$ . Partindo da condição inicial igual a  $\chi_1$  e  $a = a_c = 0,0980665$ , perto do ponto de equilíbrio 1, obtemos a figura (4.9) que mostra que para  $a = a_c$  o motor gira continuamente. Em consequência o comportamento do bloco e do pêndulo é um movimento periódico com amplitude constante.

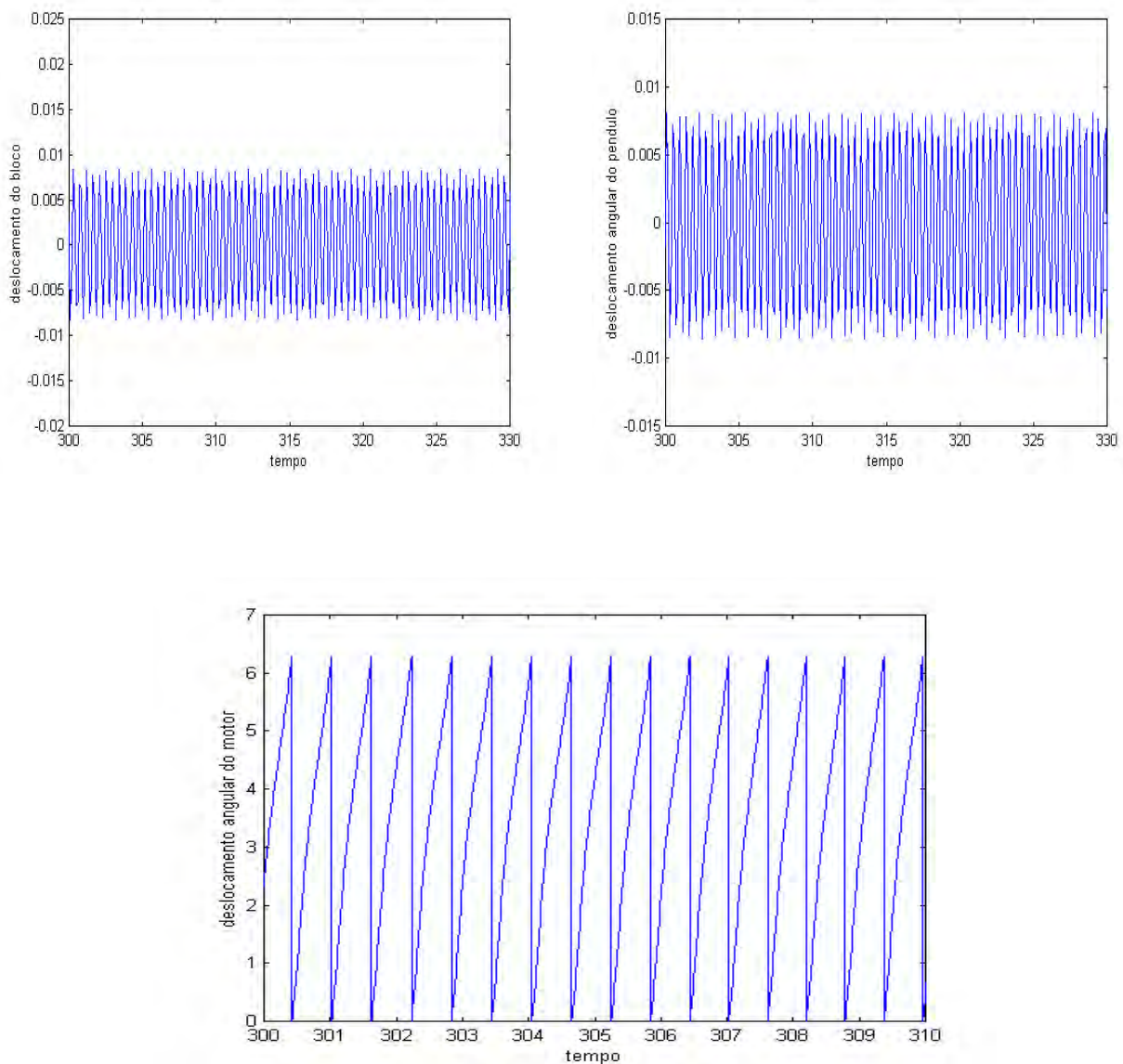


Figura 4.9: Vibração do bloco, variação angular do pêndulo e variação angular do motor, respectivamente. Torque não linear,  $a = a_c$  e condição inicial  $\chi_1$ .

As figuras (4.10) e (4.11) mostram o comportamento do bloco e do pêndulo antes, durante e depois da passagem pela ressonância, para valores de  $a$  na vizinhança de  $a_c = 0.0980665$  e condição inicial  $\chi_1$ . Para  $a = 0.0975$  temos que  $\omega < \omega_b \approx \omega_p$ , para  $a = 0.09800952$  temos  $\omega \approx \omega_b \approx \omega_p$ , e para  $a = 0.09809$  temos  $\omega > \omega_b \approx \omega_p$ .

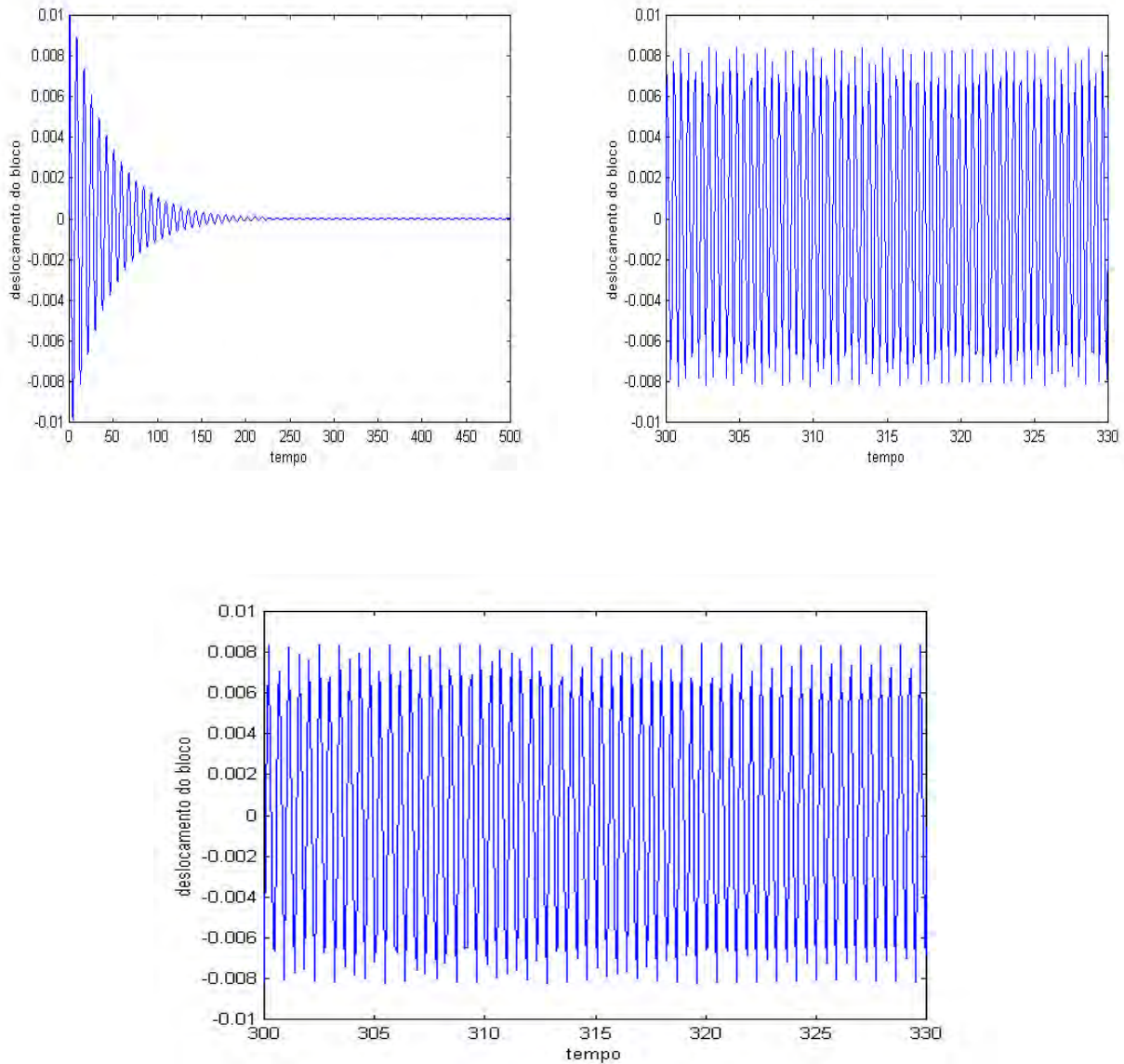


Figura 4.10: Comportamento do bloco antes da passagem pela ressonância,  $\omega = 0.02986$ , durante a passagem pela ressonância,  $\omega = 0.7438$  e depois da passagem pela ressonância,  $\omega = 2.8555$ , respectivamente. Condição inicial  $\chi_0$  e torque não linear.

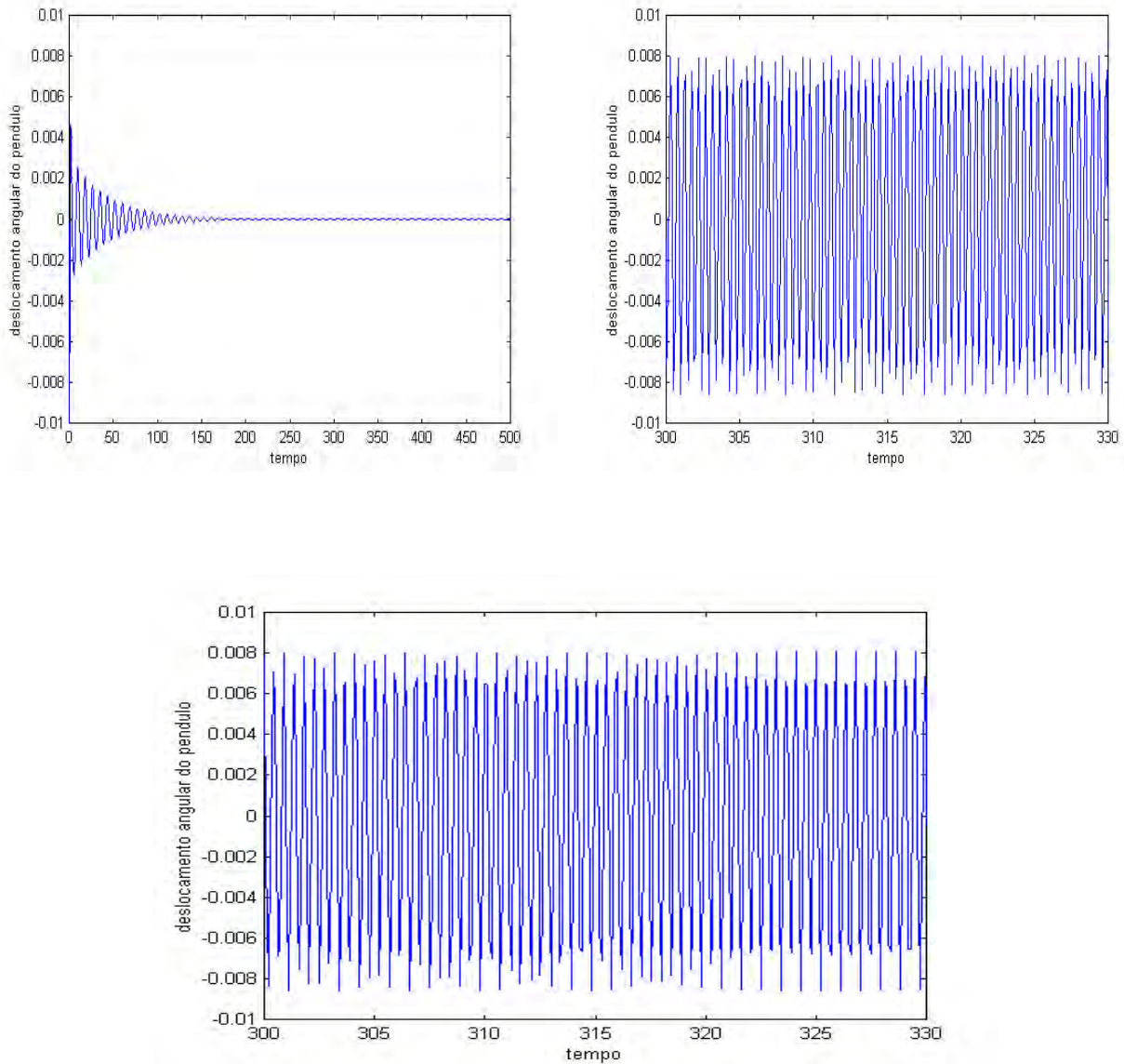


Figura 4.11: Comportamento do pêndulo antes da passagem pela ressonância,  $\omega = 0.02986$ , durante a passagem pela ressonância,  $\omega = 0.7438$  e depois da passagem pela ressonância,  $\omega = 2.8555$ , respectivamente. Condição inicial  $\chi_0$  e torque não linear.

Observa-se nas figuras (4.10) e (4.11) que, antes da passagem pela ressonância o motor não tem energia suficiente para girar, e o movimento do bloco e do pêndulo é periódico e amortecido. Durante a passagem pela ressonância as amplitudes aumentam e essas amplitudes são preservadas após a passagem pela ressonância. Apresenta-se na figura (4.12) o espaço de fases do bloco e do pêndulo durante a passagem pela ressonância.

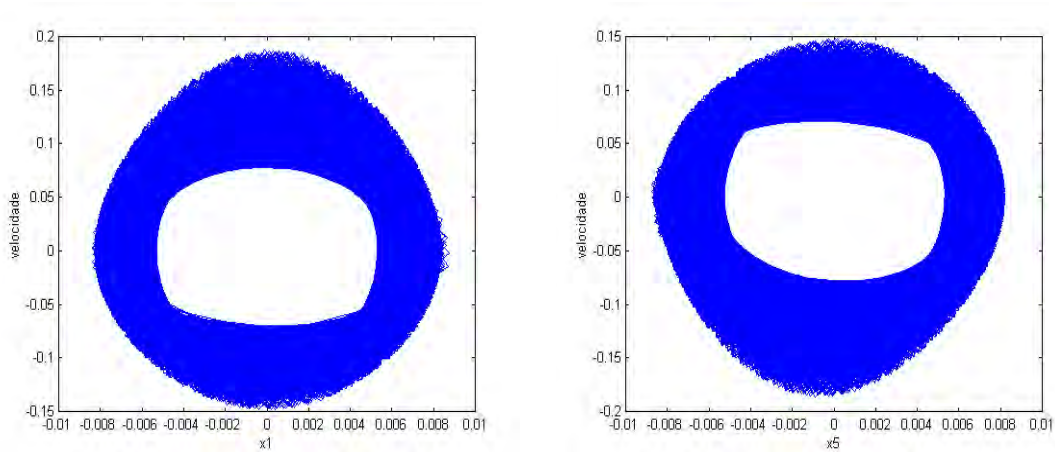


Figura 4.12: Espaço de fases do bloco  $(x_1, x_2)$  e do pêndulo  $(x_5, x_6)$  durante a passagem pela ressonância. Torque não linear.

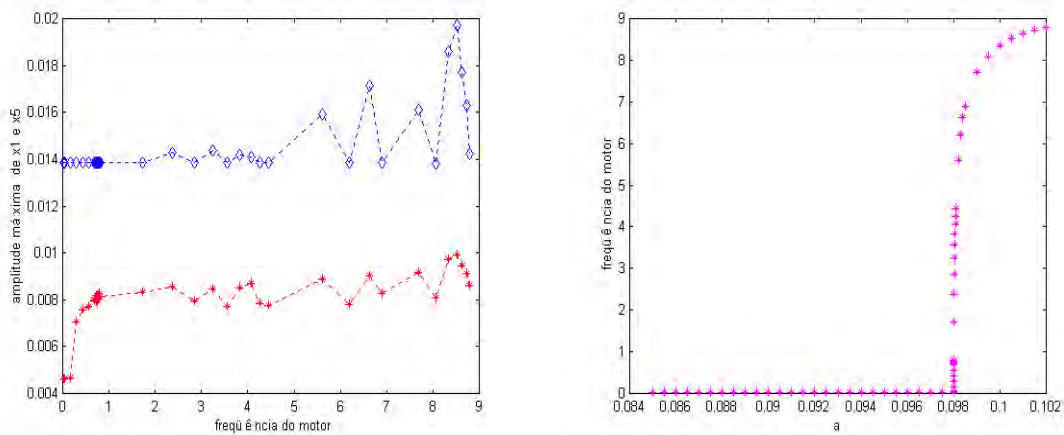


Figura 4.13: À esquerda, média das amplitudes máximas do bloco ( $\diamond$ ) e do pêndulo ( $*$ ) em função da frequência do motor, e à direita variação da frequência do motor em função do parâmetro de controle para torque não-linear.

Na figura (4.13) estão representados os valores das amplitudes máximas do bloco e do pêndulo em função da frequência de rotação do motor ( $\omega$ ) e a variação da frequência do motor em função do parâmetro de controle  $a$ . Neste caso não há um aumento brusco das amplitudes. A variação de  $\omega$  é lenta para  $a < a_c$ , mas para  $a > a_c$ ,  $\omega$  cresce vertiginosamente. Na figura (4.14) simulamos com condição inicial igual a  $\chi_2$  e  $a = a_c$ , perto do ponto de equilíbrio 2. Os comentários feitos para o caso de torque linear, figuras (4.7) e (4.8), cabem exatamente para esse caso, porém com a ressalva de que o motor gira continuamente.

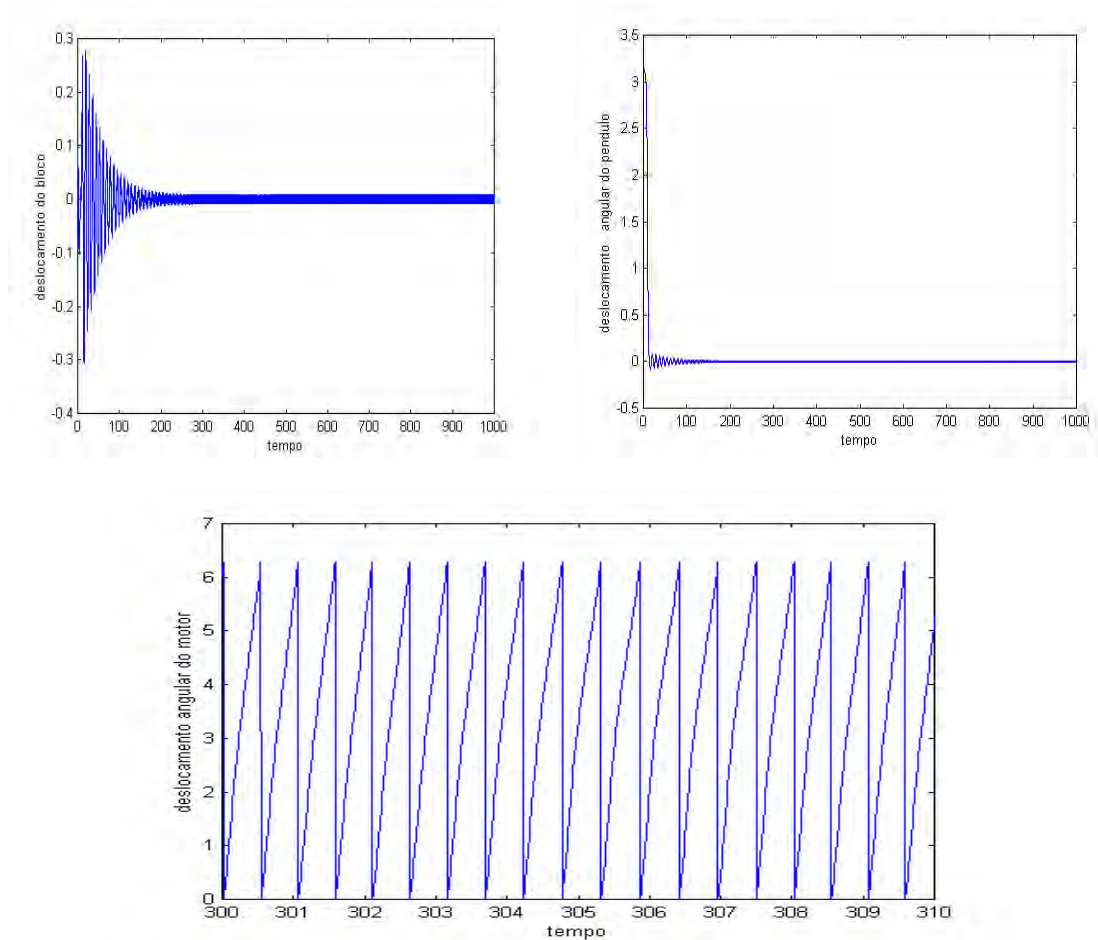


Figura 4.14: Vibração do bloco, variação angular do pêndulo e variação angular do motor, respectivamente. Torque não linear e ressonância 1:1.

### 4.1.2 Ressonância 2 : 1

Foram realizadas simulações numéricas com as equações adimensionais (3.31), quando a relação entre as frequências naturais é 2 : 1, isto é,  $\omega_b \approx \frac{1}{2}\omega_p$ , e sob diferentes modelos do torque  $M(\bar{x}_4)$  do motor.

Uma ressonância 2 : 1 pode ser obtida com os valores dos parâmetros dados na tabela (4.4). Procedendo como no caso da ressonância 1 : 1, encontramos os autovalores correspondentes aos pontos de equilíbrio 1 e 2, os quais estão mostrados respectivamente nas tabelas (4.5) e (4.6).

---

*massa do bloco:*  $m_1 = 1,0kg$ ;  
*massa excêntrica do motor:*  $m_2 = 0,2kg$ ;  
*massa do pêndulo:*  $m_3 = 0,5kg$ ;  
*coeficiente de elasticidade linear da mola:*  $k_1 = 6,7N/m$ ;  
*coeficiente de amortecimento do pêndulo:*  $c_3 = 1,0Ns/m$ ;  
*coeficiente do amortecedor:*  $c_1 = 0,01Ns/m$ ;  
*momento de inércia do rotor:*  $J = 0,000017Kgm^2$ ;  
*comprimento do pêndulo:*  $L = 1,0m$ ;  
*distância da massa  $m_2$  ao eixo do motor:*  $R = 0,05m$ ;  
*aceleração da gravidade:*  $g = 9,80665m/s^2$ .

---

Tabela 4.4: Parâmetros físicos para ressonância 2:1

Torque Linear	Torque Exponencial
-0.527699 + 1.437294i	-0.527699 + 1.437294i
-0.527699 - 1.437294i	-0.527699 - 1.437294i
-0.021217 - 0.721007i	-0.021217 + 0.721007i
-0.021217 + 0.721007i	-0.021217 + 0.721007i
0.0	0.0
-967.117989	-94.841876

Tabela 4.5: Autovalores do sistema para o torque linear e exponencial, relativos ao ponto de equilíbrio 1 e ressonância 2:1

Torque Linear	Torque Exponencial
-2.017139	-2.017139
-0.012528 + 0.800095i	-0.012528 + 0.800095i
-0.012528 - 0.800095i	-0.012528 - 0.800095i
0.944364	0.944634
0.0	0.0
-967.117989	-94.841876

Tabela 4.6: Autovalores do sistema para o torque linear e exponencial, correspondentes ao ponto de equilíbrio 2 e ressonância 2:1

### Torque linear

Adotamos torque linear, isto é,  $M(\bar{x}_4) = a - b\bar{x}_4$ . Escolhendo condição inicial igual a  $\chi_1$  e  $a = a_c$ , perto do ponto de equilíbrio 1, observamos que os comportamentos do bloco, da massa excêntrica do motor e do pêndulo são semelhantes aos descritos na ressonância 1 : 1 sob a mesma condição inicial (figuras (4.1) e (4.2)).

Simulamos também as passagens pelas ressonâncias, escolhendo valores de  $a$  maiores que  $a_c = 0.0980665$ , e condição inicial igual a  $\chi_0$ . Temos que para os valores dos parâmetros escolhidos na tabela (4.4) a frequência do pêndulo  $\omega_p = 1.437294$  é maior que a frequência do bloco  $\omega_b = 0.721007$ . Para  $a = 0.75$  temos que a frequência do motor ( $\omega$ ) é menor que a frequência do bloco ( $\omega_b$ ), ou seja,  $\omega < \omega_b$ , para  $a = 0.94$  temos  $\omega \approx \omega_b$ , para  $a = 1.6$  temos  $\omega_b < \omega < \omega_p$ , para  $a = 1.86$  temos  $\omega \approx \omega_p$  e para  $a = 2.15$  temos  $\omega > \omega_p$ . Na ressonância 2 : 1 assim como na ressonância 1 : 1, figuras (4.3) e (4.4), as amplitudes de oscilação do bloco e do pêndulo aumentam bruscamente durante a passagem de  $\omega$  por  $\omega_b$ , decrescendo após esta passagem. Na passagem de  $\omega$  por  $\omega_p$  não houveram grandes alterações, como mostram as figuras (4.15) e (4.16).

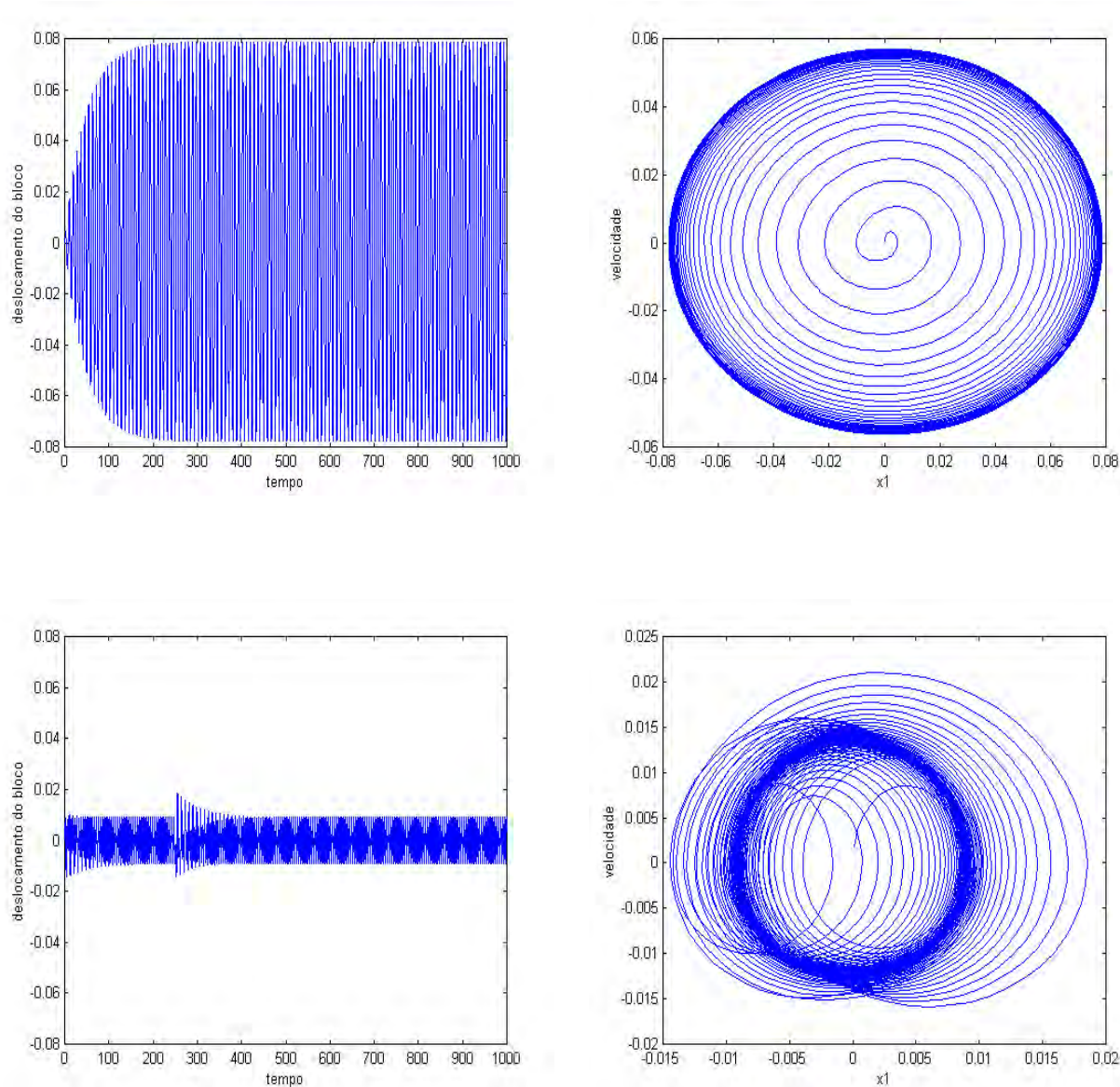


Figura 4.15: Comportamento do bloco durante passagem  $\omega \approx \omega_b$ ,  $\omega = 0.7210$  e seu respectivo espaço de fases, e comportamento do bloco na passagens por  $\omega_p$  e seu espaço de fases ( $\omega = 1.4372$ ). Torque linear e condição inicial igual a  $\chi_0$ .

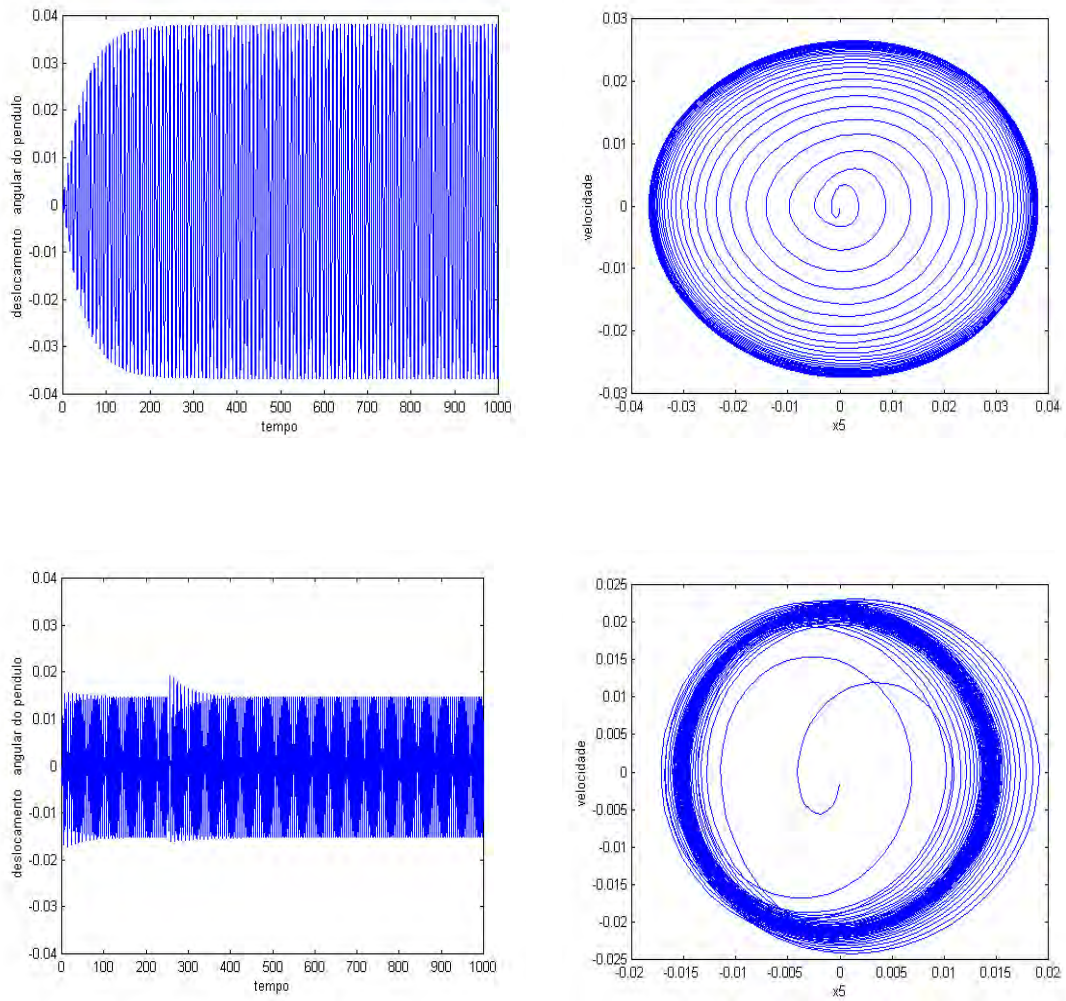


Figura 4.16: Comportamento do pêndulo durante a passagem pela frequência do bloco,  $\omega = 0.7210$  e seu respectivo espaço de fases, e comportamento do pêndulo na passagem por  $\omega_p$  e seu retrato de fase ( $\omega = 1.4372$ ). Torque linear e condição inicial  $\chi_0$ .

Na figura (4.17) estão representados os valores das amplitudes máximas do bloco e do pêndulo em função da frequência de rotação do motor ( $\omega$ ), e a variação da frequência do motor em função do parâmetro de controle  $a$ . A frequência do motor passa pela frequência natural do bloco e do pêndulo, e observa-se que as amplitudes de oscilação comportam-se de maneira regular. O aumento da amplitude de oscilação ocorre na passagem  $\omega = 0.7210$ , que é a frequência natural do bloco. Na passagem pela frequência natural do pêndulo  $\omega = 1.4372$  não ocorre mudanças bruscas. A variação de  $\omega$  em função de  $a$  é linear e crescente.

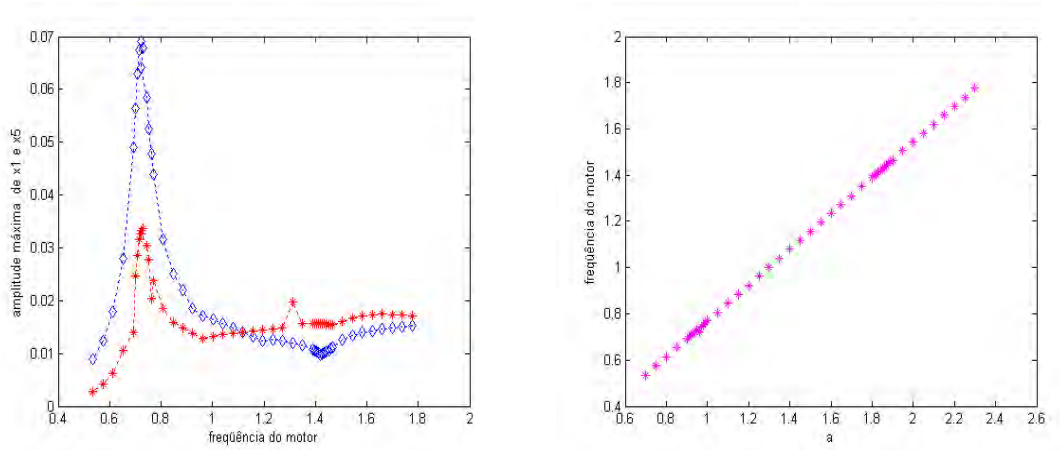


Figura 4.17: Média das amplitudes máximas do bloco ( $\diamond$ ) e do pêndulo ( $*$ ) em função da frequência do motor, e variação linear da mesma em função do parâmetro de controle, respectivamente. Ressonância 2:1

### Torque não linear

Utiliza-se o modelo exponencial para o torque do motor, ou seja,  $M(\bar{x}_4) = ae^{-b\bar{x}_4}$ . Simulando com condições iniciais iguais a  $\chi_0$ , próximo do ponto de equilíbrio 1 e com  $a$  em torno de  $a_c$ , não foi possível obter o gráfico das amplitudes máximas do bloco e do pêndulo em função da frequência de rotação do motor ( $\omega$ ). Neste caso, a frequência do motor aumenta bruscamente em torno de  $a = a_c$ , caracterizando o fenômeno do salto. Podemos observar na figura (4.18) que para  $a = 0.0979$  temos  $\omega = 0.03053$ , para  $a = 0.0980$  temos  $\omega = 0.74647$  e para  $a = 0.0981$  temos  $\omega = 3.65468$ . Desse modo não foi possível analisar o comportamento do bloco antes, durante e depois da passagem pela ressonância, como foi feito para o caso do torque linear.

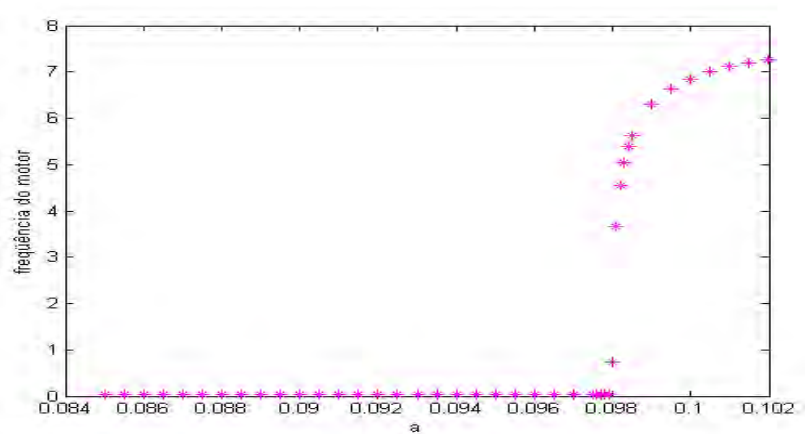


Figura 4.18: Variação da frequência do motor em função do parâmetro de controle.

# Capítulo 5

## Pêndulo Mecânico com Não Linearidade Cúbica

O objetivo deste capítulo é apresentar o estudo do sistema dinâmico não ideal descrito no capítulo 3, acrescido agora de uma não linearidade cúbica. Neste capítulo apresentaremos as equações de movimento adimensionais modificadas pelo parâmetro adicional e algumas simulações numéricas.

### 5.1 Equações de movimento

Consideramos o pêndulo mecânico descrito no capítulo 3, figura (3.1) acrescido de um tipo de mola com não linearidade cúbica, e assumimos que o coeficiente de não linearidade da mola seja  $k_2$ . Em vista disso, surge um aumento do número de pontos de equilíbrio, e um aspecto que será discutido é o possível surgimento de vibrações caóticas nesta estrutura.

Temos que a energia de deformação (3.2) do sistema passa a ser

$$U = \frac{1}{2}k_1q_1^2 + \frac{1}{4}k_2q_1^4 \quad (5.1)$$

Aplicando a equação de Lagrange como foi feito no capítulo 3, obtemos as equações de movimento do sistema, e utilizando as expressões (3.21) a (3.23) escrevemos as equações adimensionais do sistema

$$\ddot{q}_1'' = \frac{\frac{m_2 R}{L}(q_2'' \text{sen} q_2 + q_2'^2 \cos q_2) - m_3(q_3'' \cos q_3 - q_3'^2 \text{sen} q_3) - m_1 \bar{q}_1 - c_1 \sqrt{\frac{m_1}{k_1}} \bar{q}_1' - \frac{m_1 k_2 L^2}{k_1} \bar{q}_1^3}{(m_1 + m_2 + m_3)} \quad (5.2)$$

$$\ddot{q}_2'' = \frac{m_2 R L (\bar{q}_1'' \text{sen} q_2 + \bar{q}_1' q_2' \cos q_2) + \frac{m_1}{k_1} M \left( \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} q_2' \right) + \frac{g m_2 m_1 R}{k_1} \cos q_2}{m_2 R^2 + J_2} \quad (5.3)$$

$$\ddot{q}_3'' = -\bar{q}_1'' \cos q_3 - \bar{q}_1' q_3' \text{sen} q_3 - \frac{g m_1}{L k_1} \text{sen} q_3 - \frac{c_3}{m_3 L^2} \sqrt{\frac{m_1}{k_1}} q_3' \quad (5.4)$$

Acrescentamos um novo parâmetro à tabela (3.2) dos parâmetros simplificados, dado por  $a_{10} = \frac{m_1 k_2 L^2}{k_1 m}$ . Fazendo a mudança de variável  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T$  com  $x_1 = \bar{q}_1$ ,  $x_2 = \bar{q}_1'$ ,  $x_3 = q_2$ ,  $x_4 = q_2'$ ,  $x_5 = q_3$ ,  $x_6 = q_3'$  e substituindo nas equações (5.2) a (5.4) obtemos as equações de estado para o sistema pêndulo mecânico.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= a_1(\dot{x}_4 \text{sen} x_3 + x_4^2 \cos x_3) - a_2(\dot{x}_6 \cos x_5 - x_6^2 \text{sen} x_5) - a_3 x_1 - a_4 x_2 - a_{10} x_1^3, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= a_5(\dot{x}_2 \text{sen} x_3 + x_2 x_4 \cos x_3) + a_6 M \left( \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} x_4 \right) + a_9 \cos x_3, \\ \dot{x}_5 &= x_6, \\ \dot{x}_6 &= -\dot{x}_2 \cos x_5 + x_2 x_6 \text{sen} x_5 - a_7 \text{sen} x_5 - a_8 x_6. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Temos que o sistema (5.5) pode ser escrito na forma matricial  $B_0 \dot{\mathbf{x}} = B \mathbf{x}$ , onde a matriz  $B_0 = A_0$ , já mostrada no capítulo 3 e

$$B = \begin{bmatrix} x_2 \\ a_1 x_4^2 \cos x_3 + a_2 x_6^2 \text{sen} x_5 - a_3 x_1 - a_4 x_2 - a_{10} x_1^3 \\ x_4 \\ a_5 x_2 x_4 \cos x_3 + M \left( \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} x_4 \right) a_6 + a_9 \cos x_3 \\ x_6 \\ x_2 x_6 \text{sen} x_5 - a_7 \text{sen} x_5 - a_8 x_6 \end{bmatrix}$$

Podemos reescrever as equações do sistema (5.5), como um conjunto de equações de primeira ordem na forma matricial  $\dot{\mathbf{x}} = B_0^{-1}B\mathbf{x}$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \beta[\alpha_1 + a_1 \text{sen} x_3 \alpha_2 - a_2 \cos x_5 \alpha_3] \\ x_4 \\ \beta[a_5 \text{sen} x_3 \alpha_1 + (1 - a_2 \cos^2 x_5) \alpha_2 - a_5 a_2 \text{sen} x_3 \cos x_5 \alpha_3] \\ x_6 \\ \beta[-\cos x_5 \alpha_1 - a_1 \cos x_5 \text{sen} x_3 \alpha_2 + (1 - a_1 a_5 \text{sen}^2 x_3) \alpha_3] \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

onde

$$\beta = \frac{1}{1 - a_1 a_5 \text{sen}^2 x_3 - a_2 \cos^2 x_5}$$

$$\alpha_1 = a_1 x_4^2 \cos x_3 + a_2 x_6^2 \text{sen} x_5 - a_3 x_1 - a_4 x_2 - a_{10} x_1^3,$$

$$\alpha_2 = a_5 x_2 x_4 \cos x_3 + M \left( \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} x_4 \right) a_6 + a_9 \cos x_3,$$

$$\alpha_3 = x_2 x_6 \text{sen} x_5 - a_7 \text{sen} x_5 - a_8 x_6.$$

Para calcular os pontos de equilíbrio do sistema fazemos  $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = 0$  na equação matricial (5.6) e obtemos  $x_1 = 0$  ou  $x_1 = \pm \sqrt{\frac{-a_3}{a_{10}}}$ ,  $x_2 = 0$ ,  $\cos x_3 = -\frac{a_6 M(0)}{a_9}$ ,  $x_4 = 0$ ,  $\text{sen} x_5 = 0$ ,  $x_6 = 0$ . Então  $x_3 = \cos^{-1} \left( -\frac{a_6 M(0)}{a_9} \right)$  e  $x_5 = n\pi$ . Considerando  $n = 0$ ,  $n = 1$  e  $n = 2$ , pois os demais valores de  $n$  são apenas múltiplos dos valores considerados. Os pontos de equilíbrio são dados por

	ponto 1	ponto 2	ponto 3	ponto 4	ponto 5	ponto 6
$x_1$	0	0	$\sqrt{\frac{-a_3}{a_{10}}}$	$\sqrt{\frac{-a_3}{a_{10}}}$	$-\sqrt{\frac{-a_3}{a_{10}}}$	$-\sqrt{\frac{-a_3}{a_{10}}}$
$x_2$	0	0	0	0	0	0
$\cos x_3$	$-\frac{a_6 M(0)}{a_9}$	$-\frac{a_6 M(0)}{a_9}$	$-\frac{a_6 M(0)}{a_9}$	$-\frac{a_6 M(0)}{a_9}$	$-\frac{a_6 M(0)}{a_9}$	$-\frac{a_6 M(0)}{a_9}$
$x_4$	0	0	0	0	0	0
$x_5$	0	$\pi$	0	$\pi$	0	$\pi$
$x_6$	0	0	0	0	0	0

Tabela 5.1: Pontos de equilíbrio do sistema com não linearidade cúbica

Note que esses pontos de equilíbrio somente existem se o torque inicial  $M(0)$  satisfaz a desigualdade  $|M(0)| \leq -\frac{a_9}{a_6} = -m_2 g R$  e se  $\frac{a_3}{a_{10}} < 0$ , para isso utilizamos o parâmetro  $k_2$

negativo. Note também que os pontos de equilíbrio 1 e 2 são exatamente iguais aos encontrados no capítulo 3 para o sistema sem a não linearidade cúbica.

ponto 1	ponto 2	ponto 3	ponto 4	ponto 5	ponto 6
$-0.1091 + 5.2937i$	5.3580	$-0.1080 + 5.2252i$	-5.4302	$-0.1080 + 5.2252i$	5.4302
$-0.1091 - 5.2937i$	$-0.0212 + 0.7700i$	$-0.1080 - 5.2252i$	-1.0951	$-0.1080 - 5.2252i$	-1.0951
$-0.0204 + 0.7633i$	$-0.0212 - 0.7700i$	-1.1157	1.0549	-1.1157	1.0549
$-0.0204 - 0.7633i$	5.1411	1.0726	5.2111	1.0726	5.2111
$-96.5232 + 0.4340i$	-96.7118	-136.7711	-136.7711	-136.7711	-136.7711
$0.0019 - 0.4340i$	0	0	0	0	0

Tabela 5.2: Autovalores associados aos pontos de equilíbrio do sistema com não linearidade cúbica

Na tabela (5.2) mostramos os autovalores associados aos pontos de equilíbrio para o caso de torque linear e valores dos parâmetros apresentados na tabela (5.3). Observamos na tabela acima que o único ponto de equilíbrio estável do sistema é o ponto 1, e então simularemos apenas próximo a este ponto.

## 5.2 Resultados Numéricos

Nesta seção apresentaremos alguns resultados numéricos, sem levar em consideração as ressonâncias internas do sistema. O principal objetivo é analisar o comportamento da dinâmica, quando variamos lentamente o parâmetro de controle  $a$ . Os resultados numéricos apresentados foram obtidos através da simulação do sistema de equações (3.31), utilizando o integrador clássico de Runge-Kutta (4, 5) embutido. Os recursos utilizados para a análise são basicamente o espectro de frequência e o diagrama de bifurcação.

Os valores dos parâmetros utilizados estão descritos na tabela (5.3). Consideramos a equação do torque linear  $M(\bar{x}_4) = a - b\bar{x}_4$ , onde fixamos  $b = 0.05$  e variamos  $a$ .

---

massa do bloco:  $m_1 = 1,0kg$ ;

massa excêntrica do motor:  $m_2 = 0,2kg$ ;

massa do pêndulo:  $m_3 = 0,5kg$ ;

coeficiente de elasticidade linear da mola:  $k_1 = 0,5N/m$ ;

coeficiente de amortecimento do pêndulo:  $c_3 = 0,05Ns/m$ ;

coeficiente do amortecedor:  $c_1 = 0,05Ns/m$ ;

momento de inércia do rotor:  $J = 0,000017Kgm^2$ ;

comprimento do pêndulo:  $L = 1,0m$ ;

distância da massa  $m_2$  ao eixo do motor:  $R = 0,05m$ ;

coeficiente de elasticidade não linear da mola:  $k_2 = -0,01N/m$ .

---

Tabela 5.3: Parâmetros físicos para o sistema com não linearidade cúbica

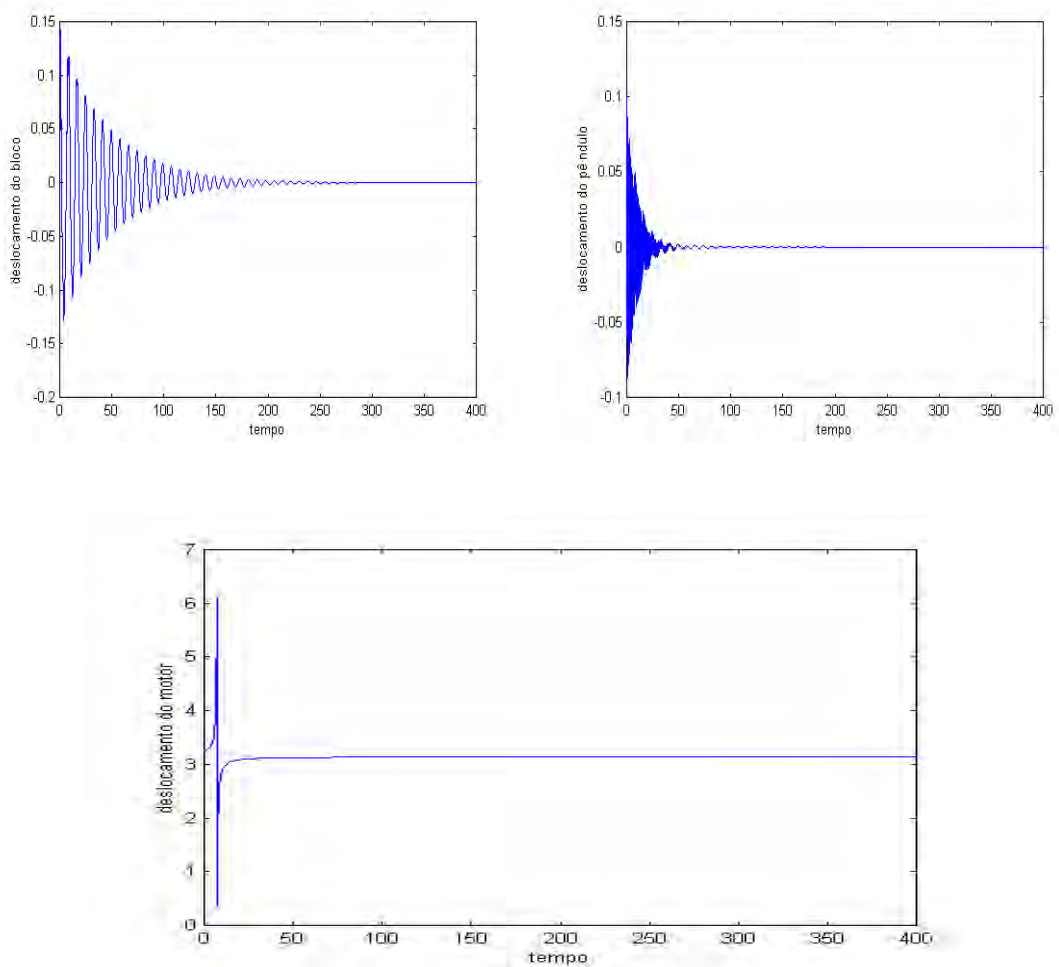


Figura 5.1: Comportamento do bloco, pêndulo e motor próximo ao ponto de equilíbrio 1, respectivamente. Torque linear e condição inicial  $\chi_1$ .

Simulando com condição inicial igual a  $\chi_1$  e  $a = a_c$ , temos que o motor não tem potência suficiente para girar continuamente, e os movimentos do bloco e do pêndulo são assintoticamente estáveis, como podemos observar na figura (5.1). Mudando a condição inicial para  $\chi_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0.01, 0, \cos^{-1}(-\frac{a_6 M(0)}{a_9}) + 0.01, 0, 0.01, 0)$ , ou seja, uma pequena variação na condição inicial  $\chi_1$ , notamos que o motor exerce uma maior influência no comportamento do bloco e do pêndulo. Na única volta do motor o pêndulo e o bloco sofrem um novo impulso (figura (5.2)).

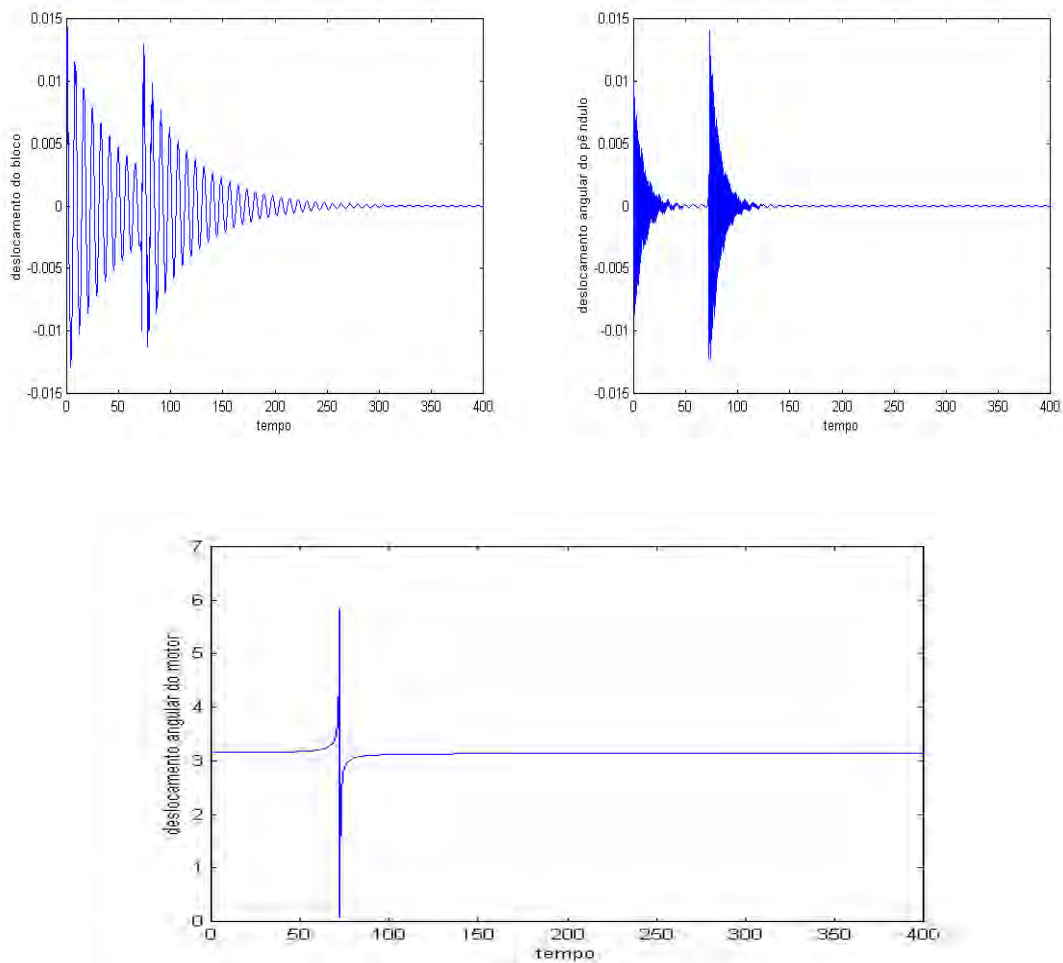


Figura 5.2: Comportamento do bloco, pêndulo e motor próximo ao ponto de equilíbrio 1, respectivamente. Torque linear e condição inicial  $\chi_3$ .

### 5.3 Análise de Bifurcação

Uma bifurcação caracteriza-se pela mudança qualitativa da trajetória no espaço de fases, quando um parâmetro do sistema é variado. Usaremos como parâmetro de controle a constante  $a$  da equação do torque, e exibiremos através de simulações a existência de bifurcação. Simulamos com condição inicial igual a  $\chi_0$  e observamos o comportamento do bloco e do pêndulo para diferentes valores de  $a$ .

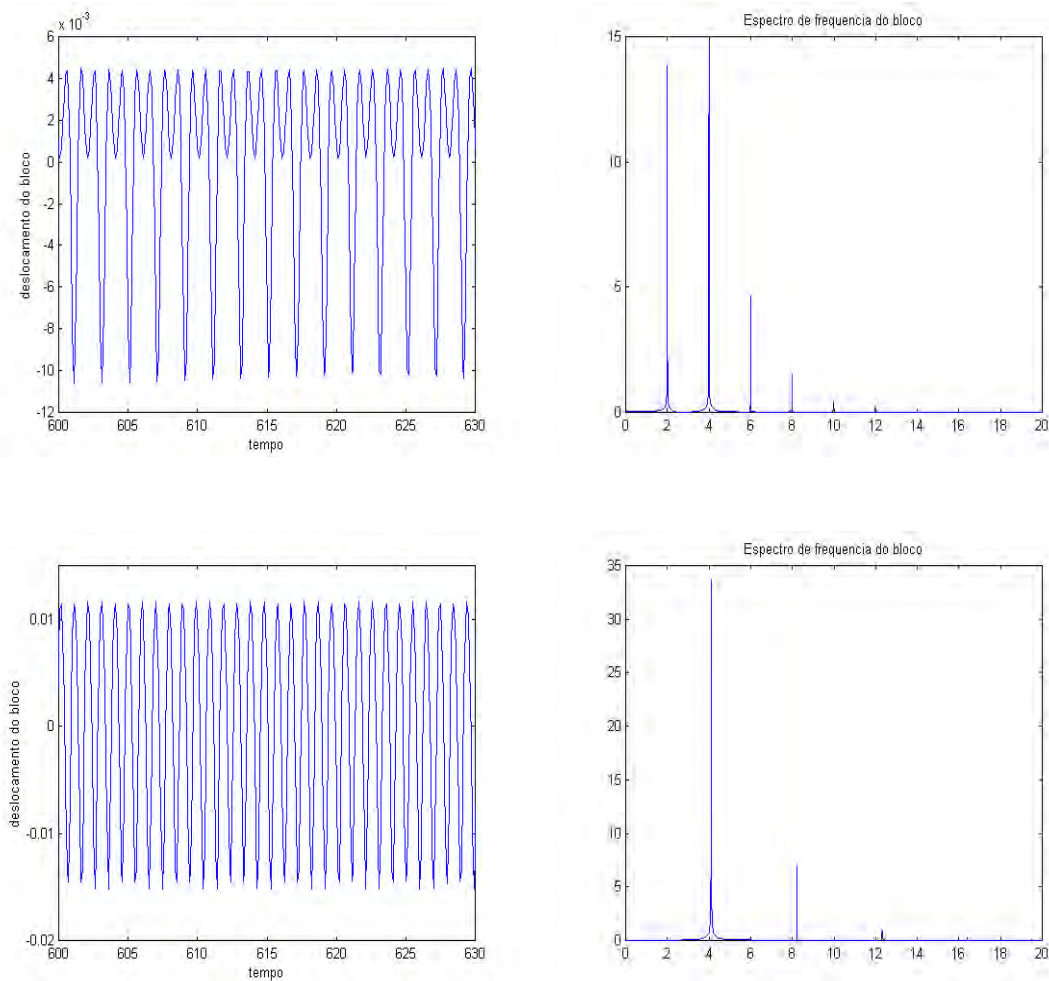


Figura 5.3: Comportamento do bloco e seu espectro de frequência para  $a = 0.148$  e  $a = 0.248$ , respectivamente. Torque linear e condição inicial  $\chi_0$ .

Na figura (5.3) temos o comportamento do bloco, e podemos notar que o histórico no tempo mostra a ocorrência de dois períodos principais para  $a = 0.148$ , o que pode ser constatado no espaço de fases, figura (5.5) (d), e no espectro de frequência que apresenta duas frequências dominantes. Para  $a = 0.248$  o histórico no tempo apresenta um único período que pode ser visto na figura (5.5) (f), e o espectro mostra uma frequência dominante. Na figura (5.4) o comportamento do pêndulo é semelhante ao do bloco, e podemos ver os espaços de

fases para  $a = 0.148$  e  $a = 0.198$  nas figuras (5.6) (c) e (d), respectivamente.

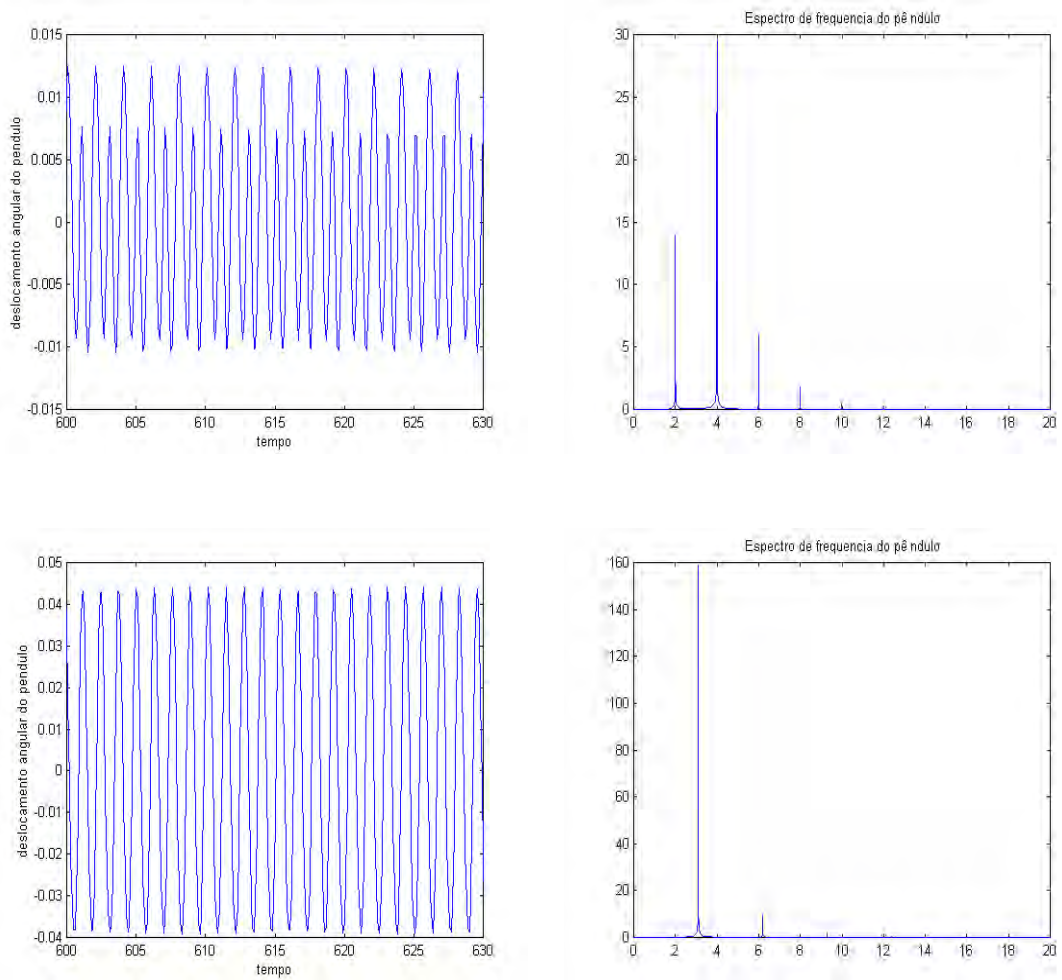


Figura 5.4: Comportamento do pêndulo e seu espectro de frequência para  $a = 0.148$  e  $a = 0.198$ , respectivamente. Torque linear e condição inicial  $\chi_0$ .

Na figura (5.5) mostra-se o comportamento do bloco, e na figura (5.6) o comportamento do pêndulo em torno de  $a_c$ . Percebemos que existem mudanças qualitativas da trajetória no espaço de fases. Para analisar melhor o comportamento do sistema utilizamos o diagrama de bifurcação em torno de  $a_c$ .

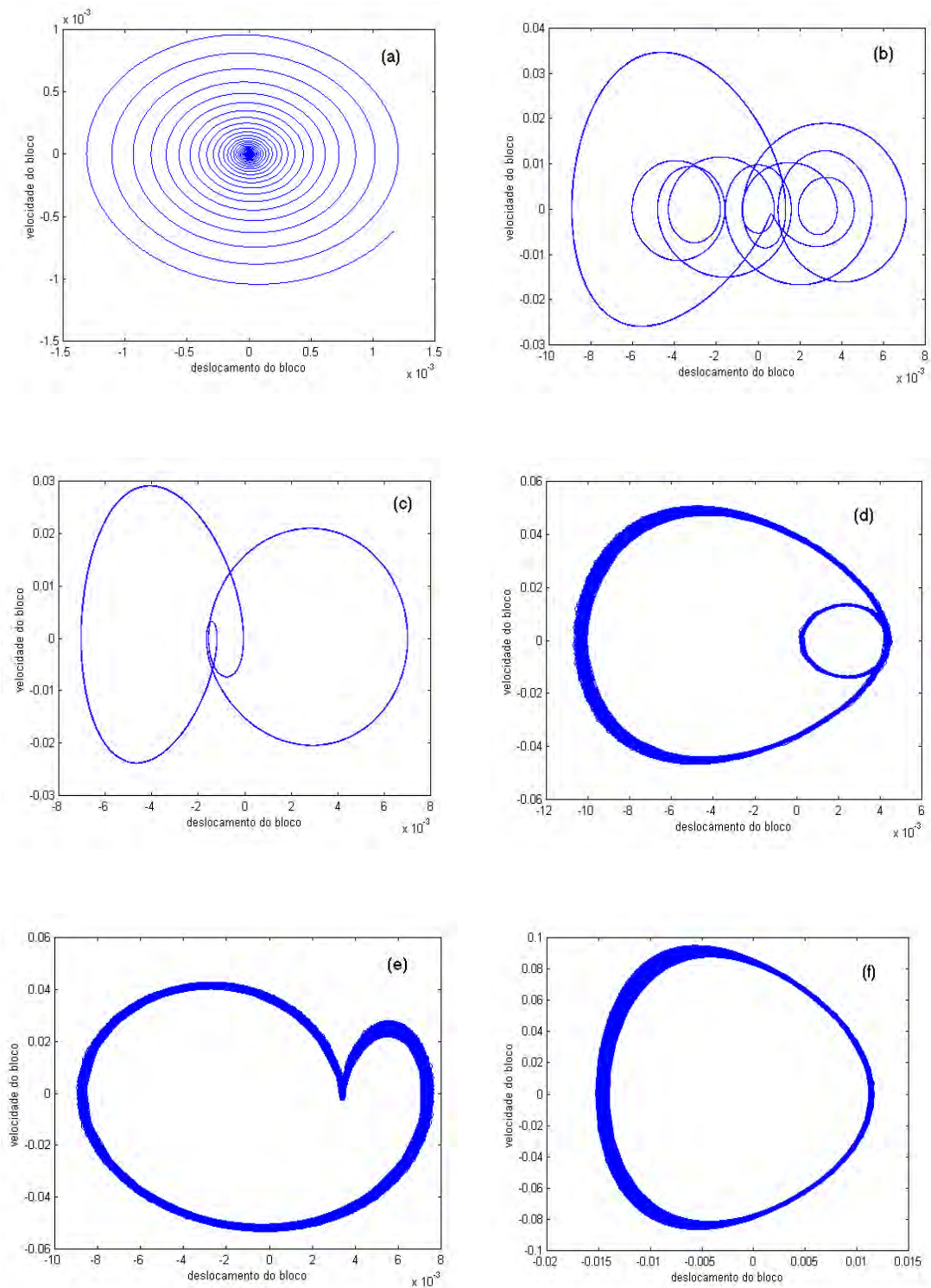


Figura 5.5: Comportamento do bloco quando: (a)  $a = a_c$ ; (b)  $a = 0.1$ ; (c)  $a = 0.128$ ; (d)  $a = 0.148$ ; (e)  $a = 0.198$ ; (f)  $a = 0.248$ .

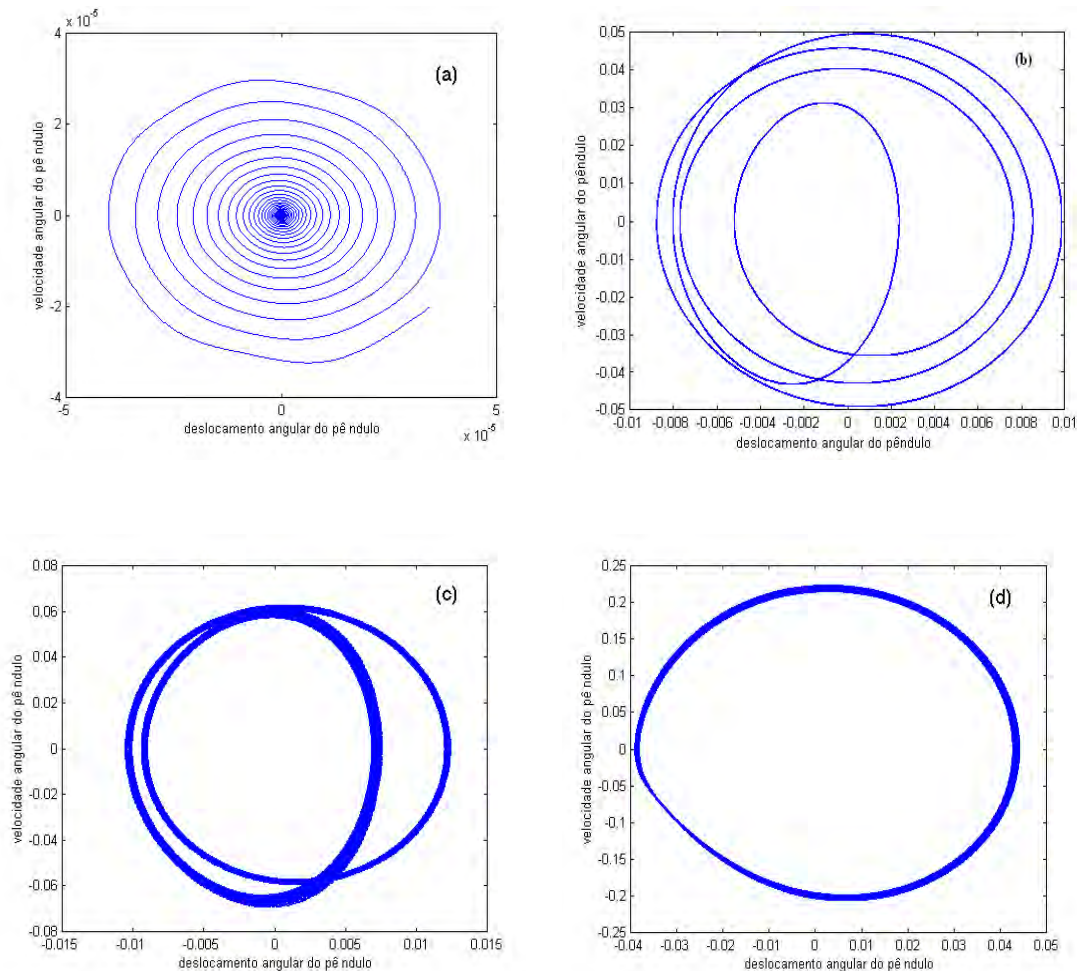


Figura 5.6: Comportamento do pêndulo quando: (a)  $a = a_c$ ; (b)  $a = 0.1$ ; (c)  $a = 0.148$ ; (d)  $a = 0.198$ .

Analisando o diagrama de bifurcação do bloco, figura (5.7), percebemos que quando  $a \in [0.08, 0.098]$  o motor ainda não gira e o seu comportamento é bastante regular, o que podemos ver no retrato de fases do bloco para  $a = a_c$ , figura (5.5) (a). Uma complexidade no comportamento do bloco é observada quando  $a \in [0.1, 0.12]$  e este comportamento pode ser visto na figura (5.5)(b) para  $a = 0.1$ . Quando  $a \in [0.14, 0.2]$  o comportamento do bloco apresenta dois períodos o que não persiste durante todo intervalo, e podemos ver estes dois períodos nas figuras (5.5)(d) e (e). Quando  $a$  passa de 0.2 o bloco tem um comportamento bem definido (figura (5.5)(f)). Para determinados intervalos dos valores de  $a$  podemos notar um aumento da amplitude de oscilação do bloco, e certamente correspondem à passagem pela ressonância.

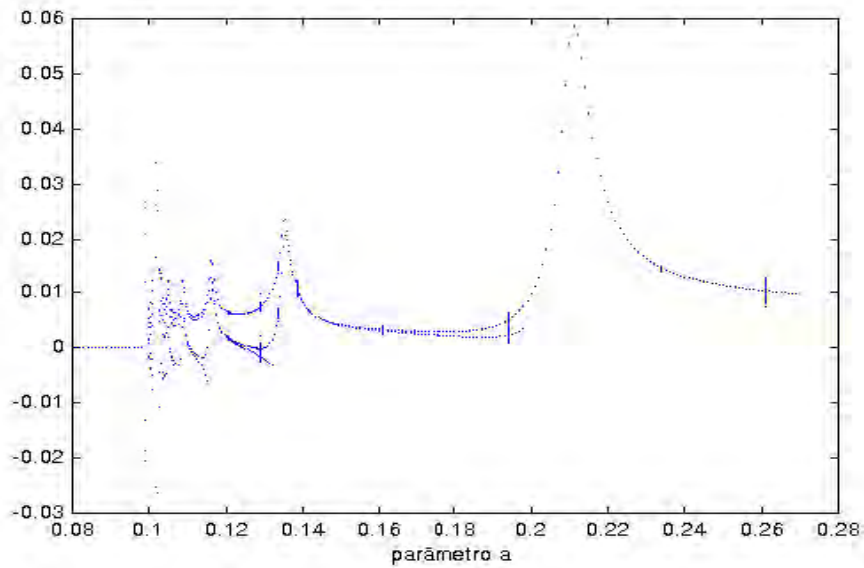


Figura 5.7: Diagrama de bifurcação do bloco, para torque linear e  $a \in [0.08, 0.27]$ .

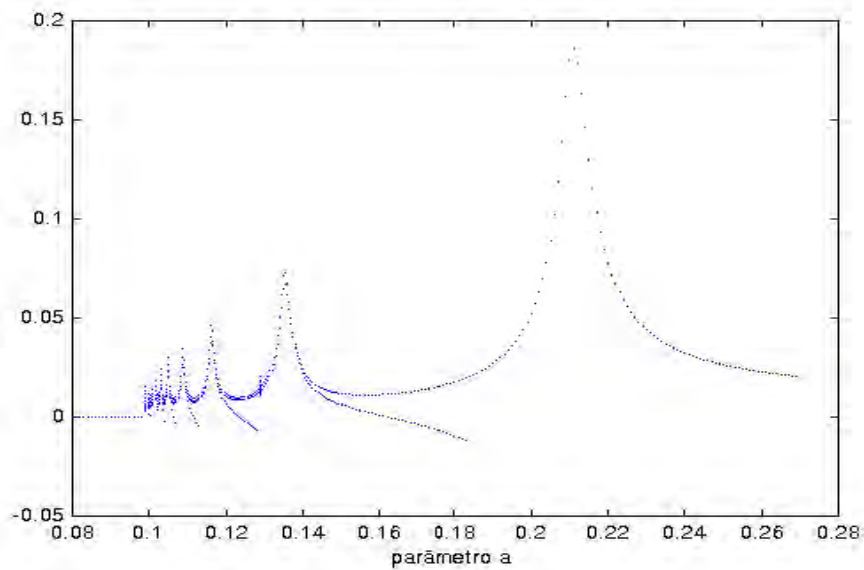


Figura 5.8: Diagrama de bifurcação do pêndulo, para torque linear e  $a \in [0.08, 0.27]$ .

Analisando o diagrama de bifurcação do pêndulo, figura (5.8), observamos que enquanto o motor não gira o comportamento do pêndulo, assim como o do bloco, é regular (figura (5.6)(a)). No intervalo  $[0.1, 0.12]$  o pêndulo apresenta vários períodos, como podemos ver na figura (5.6)(b) correspondente a  $a = 0.1110$ . Para  $a \in [0.14, 0.18]$  o pêndulo apresenta dois períodos bem definidos, o que podemos ver também na (5.6)(c) para  $a = 0.148$ . Quando  $a$  passa de 0.2 o pêndulo comporta-se regularmente com um período bem definido (figura

(5.6)(d)). Assim como o bloco, o pêndulo apresenta um aumento da amplitude de oscilação para determinados intervalos dos valores de  $a$ . As figuras (5.7) e (5.8) mostram claramente uma bifurcação de Hopf para  $a = a_c$ .

Obtemos o espectro de frequência do bloco e do pêndulo para alguns valores de  $a$ . Para  $a = 0.1$  e condição inicial  $\chi_0$  (figura (5.9)), notamos que existem muitas frequências o que caracteriza um movimento complexo. Pelas figuras (5.7) e (5.8) podemos notar que para  $a = 0.1$  o comportamento tanto do bloco quanto do pêndulo são irregulares. A figura (5.10) corresponde a  $a = 0.18$  e notamos que o sistema apresenta duas frequências dominantes. Para este valor de  $a$  o bloco e o pêndulo apresentam duplo período (figuras (5.7) e (5.8)).

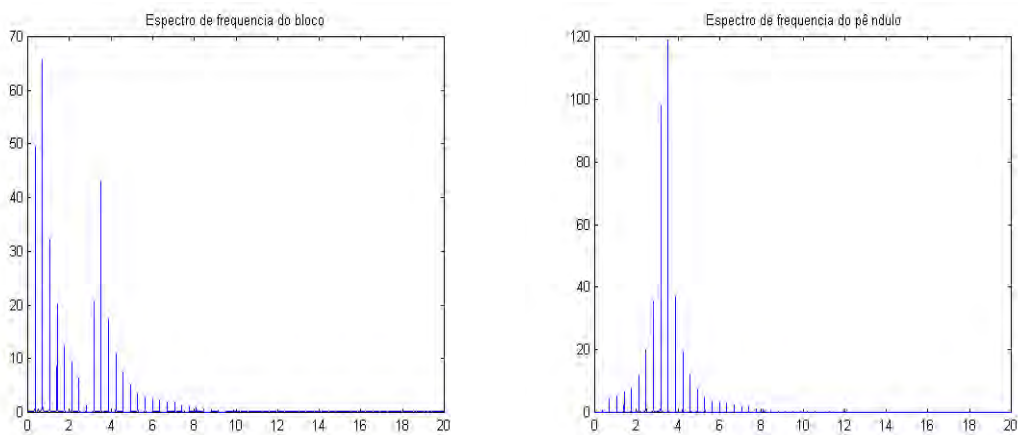


Figura 5.9: Espectro de frequência do bloco e do pêndulo para  $a = 0.1$ . Condição inicial  $\chi_0$  e torque linear.

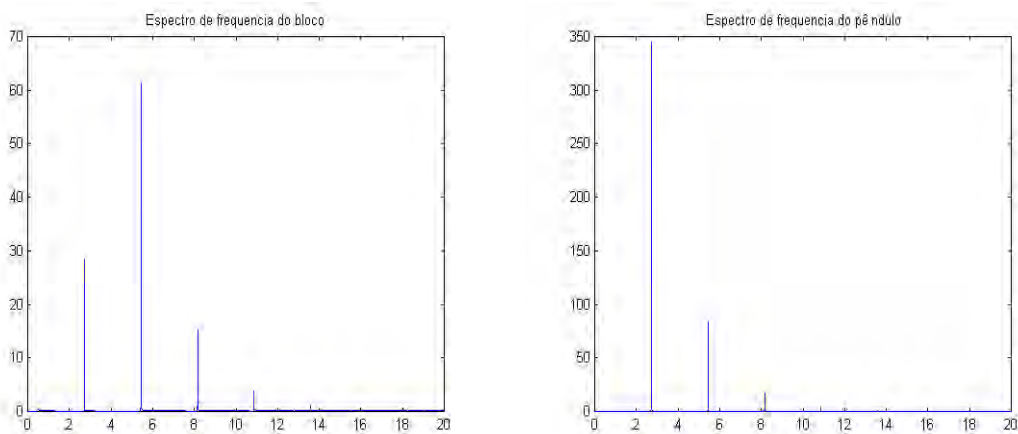


Figura 5.10: Espectro de frequência do bloco e do pêndulo para  $a = 0.18$ . Condição inicial  $\chi_0$  e torque linear.

Escolhendo  $a = 0.24$ , o sistema apresenta uma frequência dominante (figura (5.11)), e para este valor de  $a$  o bloco e o pêndulo apresentam comportamento regular, como podemos ver nas figuras (5.7) e (5.8).

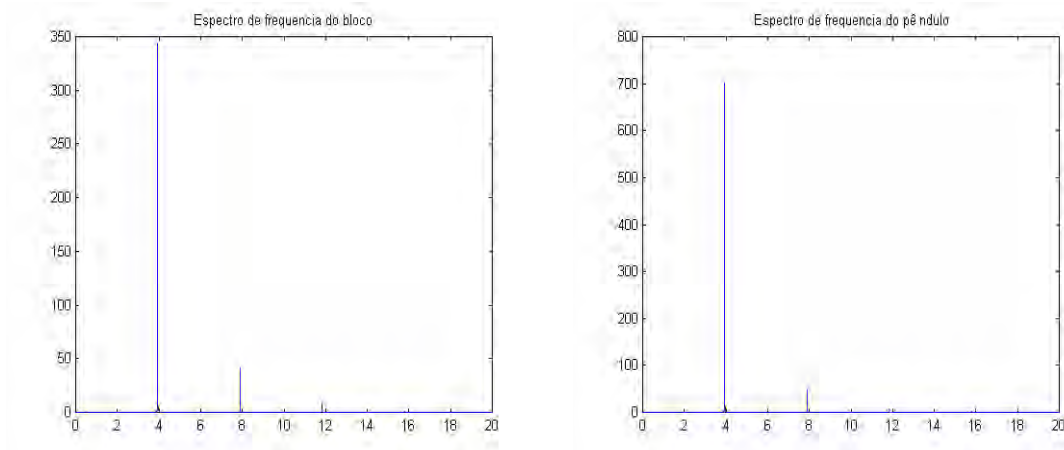


Figura 5.11: Espectro de frequência do bloco e do pêndulo para  $a = 0.24$ . Condição inicial  $\chi_0$  e torque linear.

Analisamos o expoente de Lyapunov para  $a = 0.1$ ,  $a = 0.18$  e  $a = 0.24$  (figura (5.12)) e percebemos que existe uma irregularidade para  $a = 0.1$  mas para todos os valores de  $a$  o sistema tende a zero, ou seja, o sistema não é caótico.

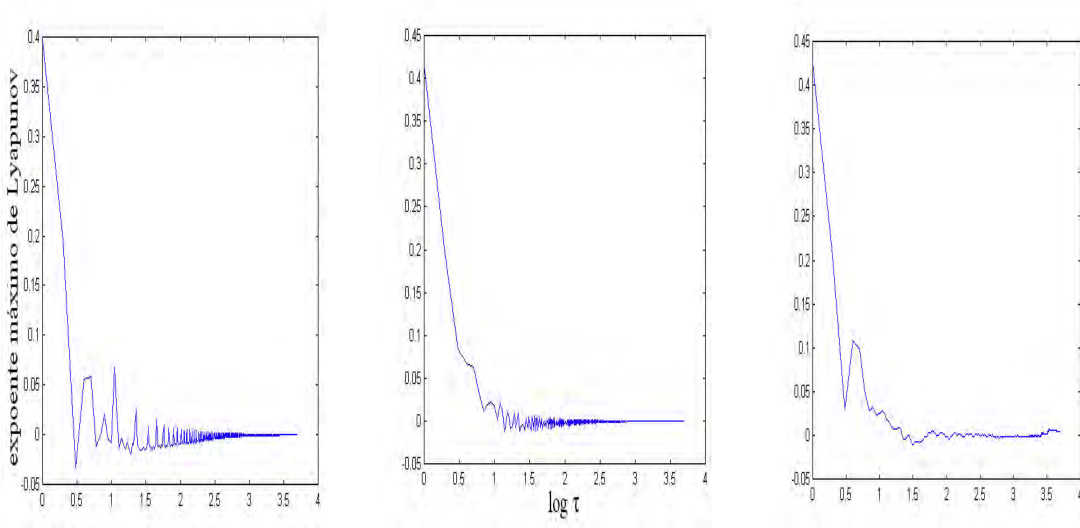


Figura 5.12: Curvas do expoente máximo de Lyapunov versus  $\log \tau$ , para  $a = 0.1$ ,  $a = 0.18$  e  $a = 0.24$  respectivamente. Condição inicial próxima a  $\chi_0$  e torque linear.

Quando se adota o torque linear, a frequência  $\omega$  do motor também é linear em relação ao parâmetro de controle  $a$ , e portanto o comportamento do sistema dinâmico é não caótico. No entanto, quando o modelo do torque é exponencial, a frequência  $\omega$  do motor aumenta abruptamente assim que  $a$  passa pelo valor crítico  $a_c$ . Dessa maneira, é de se esperar que o comportamento do sistema se torne caótico. Essa expectativa é confirmada na figura (5.13), onde é mostrado o expoente característico de Lyapunov correspondente a  $a = 0.1$ .

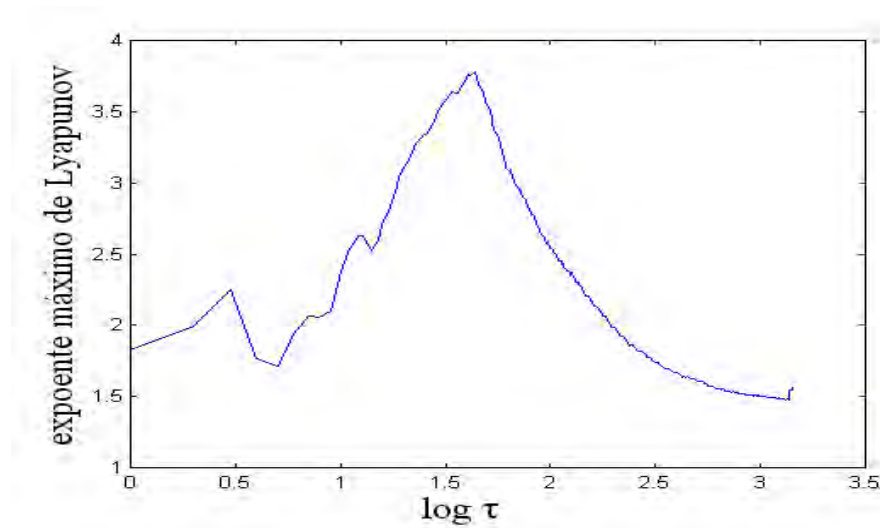


Figura 5.13: Curva do expoente máximo de Lyapunov versus  $\log \tau$ , para  $a = 0.1$  e torque exponencial. Condição inicial próxima a  $\chi_0$ .

# Capítulo 6

## Conclusão

Para o estudo preliminar do sistema pêndulo mecânico utilizamos apenas simulações numéricas, devido a complexidade do sistema. Inicialmente foram encontradas as equações adimensionais de movimento, e o sistema foi linearizado em torno do ponto de equilíbrio estável.

Em geral, adota-se dois modelos matemáticos para o torque do motor que representa a fonte de perturbação de um sistema dinâmico não ideal. Um dos objetivos deste trabalho foi o de mostrar a diferença existente no comportamento do sistema dinâmico perto de um ponto de equilíbrio estável, quando se utiliza um modelo linear ou um modelo exponencial para o torque.

Como esperado, quando se adota o modelo linear para o torque, as respostas do sistema dinâmico são mais regulares, ao passo que, quando se utiliza o modelo exponencial, o estudo torna-se muito difícil pois a frequência do motor sofre variação brusca a partir do valor crítico  $a_c$ .

Foi analisado o comportamento do sistema próximo à região de ressonância 1 : 1 e 2 : 1. Para este fim usamos a frequência do motor como parâmetro de controle. Pudemos notar que quando utilizamos torque linear a amplitude de oscilação do bloco e do pêndulo aumenta durante a passagem pela ressonância.

Quando foi utilizado o torque exponencial, percebemos que esse modelo fornece mais potência ao motor, e portanto dificulta o controle da sua frequência. No caso da passagem pela ressonância 1 : 1, o sistema apresenta um aumento na amplitude de oscilação do bloco e do pêndulo, mas a amplitude não decai após a passagem pela ressonância. Na passagem pela ressonância 2 : 1 não foi possível explicitar o comportamento do pêndulo e do bloco, pois neste

caso, a frequência do motor aumenta bruscamente a partir do valor crítico, caracterizando o fenômeno do salto.

Analisamos também o comportamento do sistema com uma não linearidade cúbica, ou seja, supomos que a mola acoplada ao bloco (figura (3.1)) é do tipo Duffing. Neste caso utilizamos o modelo linear para o torque do motor, e observamos que o sistema apresenta movimentos regulares mas multiperíódicos. No diagrama de bifurcação pudemos notar a multiplicação de períodos, principalmente do bloco, mas que não persiste à medida que variamos a frequência do motor. O espectro de frequência constata essa multiperiodicidade em função do parâmetro de controle.

Soluções caóticas do sistema pêndulo mecânico ocorrem quando se utiliza o torque exponencial, pois neste caso a frequência do motor apresenta um comportamento bastante irregular em relação ao parâmetro de controle.

Conforme salientamos, os estudos desenvolvidos neste trabalho são preliminares, e portanto há a necessidade da continuação das análises mais aprofundadas. Assim, como trabalhos futuros podemos propor:

- estudos de ressonâncias internas de ordens superiores.
- escolha de outros parâmetros de controle.
- procura de outros tipos de bifurcação.
- aplicação de mapas de Poincaré de ordem superior [17].
- utilização de técnicas de perturbação [16] para obtenção de soluções analíticas aproximadas.
- trabalhos de laboratório para simulação física.

# Referências Bibliográficas

- [1] BALTHAZAR J. M.; BRASIL R. M. L. R. F.; WEBER H. I.; FELINI A.; BELATO D.; FELIX J. L. P. Recent results on vibrating problems with limited power supply, *6<sup>th</sup> Conference on dynamical systems. Theory and Applications*, pp.27-50, 2001.
- [2] BALTHAZAR J. M.; MOOK D.T.; WEBER H.I.; FELINI A.; BELATO D.; MATTOS M.; WIECZOREC S. On vibrating systems with a limited power supply and their applications to engineering science. *Anais do Seminário Brasileiro de Análise*, pp. 137-227, 1999.
- [3] BELATO, D. Não Linearidades do eletro-pêndulo. Dissertação de mestrado. Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP, 1998. 128p.
- [4] BELATO, D. Análise Não Linear de Sistemas Dinâmicos Holonômicos Não Ideais. Tese de doutorado. Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP, 2002. 186p.
- [5] Comunicação pessoal
- [6] DANTAS M. J. H.; BALTHAZAR J. M. On the Appearance of a Hopf Bifurcation in a non-ideal Mechanical Problem. *Mechanics Researchs Communications*, v. 30, p. 493–503, 2003.
- [7] FIEDLER-FERRARA N.; DO-PRADO C. P. C. *Caos: Uma Introdução*. São Paulo, Editora Edgard Blücher Ltda, 1995.
- [8] GUCKENHEIMER J.; HOLMES P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. New York, Springer-Verlag, 1983.
- [9] GUILHERME K. L. Vibrações Não Lineares e Não Ideais de Um Sistema de Dois Graus de Liberdade. Dissertação de mestrado. Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP, 2004. 105p.

- 
- [10] KONONENKO V. O. *Vibrating Systems with a Limited Power Supply*. London, Iliffe Books Ltd, 1969.
- [11] KUSNETSOV Y. A. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. New York, Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1998.
- [12] MARSDEN J. E.; McCracken M. *The Hopf Bifurcation and its Applications*. New York, Springer-Verlag, 1976.
- [13] MEIROVITCH L. *Methods of Analytical Dynamics*. New York, McGraw-Hill, 1970.
- [14] MONTEIRO L. H. A. *Sistemas Dinâmicos*. São Paulo, Editora Livraria da Física, 2002.
- [15] NAYFEH A. H.; MOOK D. T. *Nonlinear Oscillations*. USA :Wiley, 1979.
- [16] NAYFEH A. H. *Introduction to Perturbation techniques*. Canada, John Wiley and Sons, 1981.
- [17] PARKER T. S.; CHUA L. O. *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. New York, Springer-Verlag, 1989.
- [18] SEYDEL R. *From equilibrium to chaos - Pratical bifurcation and stability analysis*. New York, Elsevier, 1988.