

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

Compreensão de uma transição de fase de
difusão limitada para ilimitada em um sistema
bilhar

Anne Kétri Pasquinelli da Fonseca

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO

2024

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

ANNE KÉTRI PASQUINELLI DA FONSECA

COMPREENSÃO DE UMA TRANSIÇÃO DE FASE DE DIFUSÃO LIMITADA PARA ILIMITADA EM UM SISTEMA BILHAR

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Edson Denis Leonel

Rio Claro - SP
2024

F676c

Fonseca, Anne Kétri Pasquinelli da

Compreensão de uma transição de fase de difusão limitada para ilimitada em um sistema bilhar / Anne Kétri Pasquinelli da Fonseca. -- Rio Claro, 2024

77 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro

Orientador: Edson Denis Leonel

1. Física. 2. Sistemas dinâmicos diferenciais. 3. Comportamento caótico nos sistemas. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

ANNE KÉTRI PASQUINELLI DA FONSECA

COMPREENSÃO DE UMA TRANSIÇÃO DE FASE DE DIFUSÃO LIMITADA PARA ILIMITADA EM UM SISTEMA BILHAR

Dissertação de Mestrado apresentada
ao Instituto de Geociências e Ciências
Exatas do Câmpus de Rio Claro, da
Universidade Estadual Paulista "Júlio de
Mesquita Filho", como parte dos
requisitos para obtenção do título de
Mestre em Física.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. EDSON DENIS LEONEL
IGCE / UNESP/Rio Claro (SP)

Profa. Dra. KELLY CRISTIANE IAROSZ
UNIFATEB / Telêmaco Borba (PR)

Profa. Dra. CÉLIA MAYUMI KUWANA
IGCE / UNESP/Rio Claro (SP)

Conceito: Aprovado.

Rio Claro (SP), 17 de Julho de 2024

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à minha família, biológica ou não, por todo amor durante toda essa trajetória. Agradeço especialmente ao meu maior companheiro, Vitor Neves da Silva, cujas realizações me trazem tanta felicidade quanto as minhas. Agradeço ainda profundamente ao Prof. Dr. Edson Denis Leonel por sua orientação e auxílio neste e em outros projetos de pesquisa, além de sua paciência e dedicação em todos os momentos. Esta pesquisa tornou-se possível graças aos recursos computacionais disponibilizados pelo Núcleo de Computação Científica (NCC/GridUNESP) da Universidade Estadual Paulista (UNESP).

RESUMO

Neste trabalho estudamos diferentes aspectos das propriedades dinâmicas de um sistema bilhar ovóide. Apesar de ser um caso integrável para $\epsilon = 0$, para valores não nulos deste parâmetro observamos uma dinâmica mista no espaço de fases. A presença de caos, bem como a existência de órbitas heteroclínicas é, segundo a conjectura Loskutov-Ryabov-Akinshin (LRA), condição suficiente para observarmos aceleração de Fermi (crescimento ilimitado de energia) quando uma perturbação temporal na fronteira é introduzida. Este fenômeno, no entanto, não é robusto uma vez que a introdução de colisões inelásticas das partículas com a fronteira, bem como outras dissipações possíveis para o sistema, é suficiente para que o crescimento ilimitado de energia seja suprimido. A investigação e caracterização dessa específica transição de fase observada no bilhar dependente do tempo, de difusão limitada para ilimitada, conforme variamos um parâmetro de controle, é também objetivo deste projeto. É descrito na literatura que em uma transição de fase de segunda ordem, a variável dinâmica que descreve o parâmetro de ordem se aproxima a zero continuamente conforme nos aproximamos da transição, enquanto a susceptibilidade diverge. Além disso os observáveis que caracterizam a dinâmica são descritos por leis de potência, levando ao fenômeno de invariância de escala que é típico de transições de fase contínuas. Neste trabalho descreveremos propriedades do bilhar ovóide estático e dependente do tempo usando um conjunto de hipóteses de escala e uma função homogênea generalizada. A partir disso obtemos uma relação entre os expoentes críticos levando a leis de escala. A caracterização e definição destas classes de universalidade são essenciais para a descrição desse modelo uma vez que, apesar de muito se saber sobre os fenômenos de escala, o tipo de transição observada ainda é um caso a ser investigado, sendo os parâmetros de ordem, susceptibilidade e quebra de simetria do sistema ainda problemas em aberto.

PALAVRAS-CHAVE: Caos. Transições de Fase. Leis de Escala. Sistemas Bilhares.

ABSTRACT

In this work we investigate different aspects of the dynamical properties of a oval billiard system. Despite being an integrable system for $\epsilon = 0$, for non-zero values of this parameter we observe a mixed dynamics in the phase space. The presence of chaos, as well as the existence of heteroclinic orbits is, according to the Loskutov-Ryabov-Akinshin (LRA) conjecture, sufficient condition to the occurrence of Fermi acceleration (unlimited energy growth) when a time perturbation of the boundary is introduced. However, this phenomenon is not robust since the introduction of inelastic collisions with the boundary, such as others possible dissipations in the system, is enough to suppress the unlimited energy growth. The investigation and characterization of the specific observed phase transition in the time dependent billiard from limited to unlimited diffusion due to the variation of a control parameter is also a goal of this project. It is described in the literature that in a second-order phase transition, the dynamic variable describing the order parameter approaches zero continuously as we approach the transition, while the susceptibility diverges. Furthermore, the observables that characterize the dynamics are described by power laws, leading to the phenomenon of scale invariance that is typical of continuous phase transitions. In this thesis we will describe properties of ovoid static and time-dependent billiards using a set of scaling hypotheses and a generalized homogeneous function. From this we obtain a relationship between the critical exponents leading to scaling laws. The characterization and definition of these universality classes are essential for the description of this model since, although much is known about the scale phenomena, the type of transition is still under investigation, being the parameters of order, susceptibility and system symmetry breaking still open problems.

KEYWORDS: Chaos. Phase Transitions. Scaling Laws. Billiard Systems.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	a) Gráfico do espaço de fases para o mapa padrão dissipativo considerando os parâmetros $\epsilon = 100$ e $\gamma = 10^{-3}$ b) Distribuição de probabilidade $P(I, n)$ normalizada para o atrator caótico do item "a".	15
Figura 2	Ilustrações das fronteiras dos bilhares circular e de Sinai, respectivamente em a) e c), e de seus espaços de fase, em b) completamente integrável para o bilhar circular e em d) totalmente ergódico para o bilhar de Sinai.	18
Figura 3	a) Ilustrações dos ângulos que descrevem a trajetória de uma partícula em um bilhar. b) Ampliação da seção no canto superior esquerdo, indicando as componentes tangencial e normal, que discutiremos mais adiante.	19
Figura 4	Forma da fronteira do bilhar ovóide e ovóide- <i>like</i> para ϵ fixo e diferentes valores de p	21
Figura 5	Forma da fronteira do bilhar ovóide para diferentes combinações de ϵ e p	22
Figura 6	Fronteiras e trajetórias de uma partícula para $p = 3$ e diferentes valores de ϵ	22
Figura 7	Exemplo de uma seção de Poincaré com um fluxo de trajetórias cruzando a superfície "S"	23
Figura 8	Espaço de fases para o bilhar ovóide com parâmetros de controle $p = 2$ e: a) $\epsilon = 0,001$; b) $\epsilon = 0,05$; c) $\epsilon = 0,1$; d) $\epsilon = 0,5$	23
Figura 9	Esboço para diferentes fronteiras do bilhar ovóide com $p = 2$, $\epsilon = \epsilon_c = 0,2$ e $\epsilon > \epsilon_c$. Em b) é apresentada uma ampliação da figura a) para melhor visualização	25
Figura 10	Esboço de duas diferentes trajetórias e seu afastamento descrito pelo expoente de Lyapunov	27
Figura 11	Esboço dos expoentes de Lyapunov para $p = 2$ e diferentes valores de ϵ , o valor médio na região de saturação está apresentado na figura	29
Figura 12	Comportamento do expoente de Lyapunov positivo para $p = 2$ e a) $\epsilon = 0,2$, b) $\epsilon = 0,25$, c) $\epsilon = 0,3$ e d) $\epsilon = 0,35$. Os valores médios para o expoente estão novamente apresentados na figura	30
Figura 13	Esboço de seis colisões de uma partícula em um bilhar com a fronteira móvel, bem como os ângulos que descrevem a dinâmica	32
Figura 14	Comportamento da velocidade média <i>vs.</i> n para diferentes velocidades iniciais e parâmetros de controle $\epsilon = 0,08$, $p = 3$ e $\eta = 0,5$	36
Figura 15	Sobreposição das curvas da Figura 14 em uma única curva universal utilizando as transformações $\bar{V} \rightarrow \bar{V}/V_0^\alpha$ e $n \rightarrow n/V_0^z$	38

Figura 16	a) Gráfico da velocidade média \bar{V} vs. n onde ocorre um segundo <i>crossover</i> , iniciando o regime de superdifusão com expoente $\beta \approx 1$; b) Distribuição das probabilidades para um conjunto de 3500 partículas após diferentes números de colisões. Os parâmetros utilizados estão indicados na figura.	39
Figura 17	a) Curvas de $\langle \bar{V} \rangle$ vs. n para diferentes combinações dos parâmetros γ e $\eta\epsilon$. b) <i>Overlap</i> das curvas mostradas em a) em uma única curva universal após feitas as transformações indicadas.	46
Figura 18	Curvas construídas para obtenção dos expoentes α_1 , α_2 , z_1 e z_2 , cujos valores estão indicados nas figuras	49
Figura 19	Curvas obtidas variando os valores de η e ϵ individualmente e mantendo a condição $\eta\epsilon = 0,02$	50
Figura 20	Distribuição normalizada das probabilidades associadas a diferentes velocidades para um conjunto de $M \simeq 3500$ partículas para o bilhar ovóide dissipativo para $n = 10, 100$ e 5000 colisões. Foram usados os parâmetros $\eta = 0,2$, $\epsilon = 0,1$, $\gamma = 0,999$, $p = 3$ e velocidade inicial $V_0 = 0,5$	52
Figura 21	Primeiras imagens formadas pelo ponto $x \in [-a, a]$ por sua reflexão nos espelhos posicionados a e $-a$	56
Figura 22	Representação da distribuição das fontes real e imagem para as condições de Neumann (a) Dirichlet (b)	57
Figura 23	Distribuições analíticas obtidas da expressão (4.62) para diferentes valores de n com velocidade inicial $V_0 = 10$ e constante de difusão $D = 0,01$	59
Figura 24	Curvas de V_{rms} construídas a partir da expressão analítica para velocidade inicial $V_0 = 10^{-5}$, a) V_{rms} vs. n para $\gamma = 0,999$ e $\epsilon\eta = 0,02$, b) V_{rms} vs. $n(\epsilon\eta)^2$ para diferentes valores de γ e $\epsilon\eta$	62
Figura 25	Curvas de V_{sat} vs. $(1 - \gamma)$ para obtenção de α_1 (à esquerda) e de V_{sat} vs. $\eta\epsilon$ para obtenção da α_2 (à direita)	64
Figura 26	Sobreposição das curvas da Figura 14 em uma única curva universal utilizando as transformações $V_{rms} \rightarrow V_{rms}/(1 - \gamma)^{\alpha_1}(\epsilon\eta)^{\alpha_2}$ e $n \rightarrow n/(1 - \gamma)^{z_1}(\epsilon\eta)^{z_2}$ com $V_0 = 10^{-5}$	66
Figura 27	Distribuições fenomenológicas de $P(V)$ para o bilhar não dissipativo, dissipativo e distribuição analítica obtida pela expressão (4.71), respectivamente	67
Figura 28	Comportamento da distribuição $P(V)$ vs. V para diferentes valores de γ próximos à transição, considerando $n = 5000$ colisões. Foram usados os parâmetros $\eta = 0,5$, $\epsilon = 0,08$, $p = 3$ e velocidade inicial $V_0 = 0,6$	68
Figura 29	Comportamento da distribuição $P(V)$ vs. V considerando $n = 5000$ e $n = 50000$ colisões. Foram usados os parâmetros $\eta = 0,5$, $\epsilon = 0,08$, $p = 3$ e velocidade inicial $V_0 = 0,6$ e $\gamma = 0,999$	68

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
1.1	Sistemas dinâmicos e Caos	9
1.2	Equação de difusão	12
2	BILHAR OVÓIDE ESTÁTICO	17
2.1	Mapeamento, espaço de fases e resultados numéricos	17
3	BILHAR OVÓIDE DEPENDENTE DO TEMPO	32
3.1	Comportamento, leis de escala e resultados numéricos	32
3.2	Análogo termodinâmico	39
4	BILHAR OVÓIDE DEPENDENTE DO TEMPO DISSIPATIVO	43
4.1	Resultados numéricos e leis de escala	45
4.2	Distribuição das velocidades e conexão com o formalismo termodinâmico	51
4.3	Solução da equação de difusão	54
4.3.1	Recuperação das leis de escala e expoentes críticos	62
4.4	Características da transição de fase	66
4.4.1	Quebra de simetria	66
4.4.2	Parâmetro de ordem	67
4.4.3	Excitações elementares e defeitos topológicos	69
5	CONCLUSÃO	73
	REFERÊNCIAS	75

1 INTRODUÇÃO

O objetivo desse capítulo é fornecer uma breve contextualização sobre os principais temas a serem abordados neste trabalho. Para isso, na seção 1.1 abordamos a definição do que vem a caracterizar um sistema dinâmico e, subsequentemente, caos. Na seção 1.2 é feita uma discussão sobre processos difusivos e, mais especificamente, sobre o uso da equação de difusão, que será ferramenta essencial para a descrição do sistema. O panorama histórico apresentado no primeiro capítulo também se encontra sintetizado em uma linha do tempo, que pode ser consultada no Apêndice A deste trabalho.

No que se refere à organização deste trabalho ela foi feita como se segue: No capítulo 2 introduzimos as principais características de sistemas bilhares com fronteira estática, especificamente tratando do caso com fronteira ovóide, analisando diversas características referentes ao seu espaço de fases, abordando ainda análises das leis de escala, obtenção dos expoentes que caracterizam o sistema e possíveis aplicações. No capítulo 3 introduzimos a dependência temporal no bilhar ovóide e os conceitos de aceleração de Fermi, bem como sua relação com a conjectura Loskutov-Ryabov-Akinshin (LRA), que estabelece uma conexão entre a presença de caos no bilhar estático e a emergência da Aceleração de Fermi no caso dependente do tempo, e seu papel no bilhar ovóide dependente do tempo. Discutimos ainda, nesse capítulo, o análogo termodinâmico que será utilizado para estudo deste sistema. No capítulo 4 tratamos da introdução de uma dissipação no sistema apresentado no capítulo anterior, que possibilita uma caracterização analítica completa do sistema a partir da solução da equação de difusão na transição que ocorre de difusão limitada para ilimitada conforme o parâmetro que caracteriza a dissipação é introduzido. Apresentamos os principais resultados que podem ser extraídos de tal solução no que se referem às leis de escala, aos expoentes críticos do sistema e à caracterização da transição de fase em si identificando sua quebra de simetria, parâmetro de ordem, excitações elementares e defeitos topológicos. O capítulo 5 conclui a dissertação com uma discussão geral sobre os resultados, além de perspectivas futuras.

1.1 SISTEMAS DINÂMICOS E CAOS

Podemos datar o que talvez seja o momento de maior ênfase na compreensão de parâmetros que variam lentamente de volta a Einstein na primeira conferência de Solvay, em 1911, onde é sugerido um significado físico para a integral da ação, o que depois seria base para os principais aspectos do tratamento da propagação de ondas em meios não homogêneos conhecido como método WKB devido aos seus precursores Brillouin, Kramers e Wentzel. (LICHTENBERG; LIEBERMAN, 1992). Tal conferência tratou de problemas associados à "Teoria da Radiação e dos Quanta", com alguns dos nomes presentes sendo: Max Planck, Hendrik Lorentz, Maurice de Broglie, Ernest Rutherford, Marie Curie, Henri Poincaré e, como já citado, Albert Einstein

(o mais jovem entre os presentes). Outro importante marco para o desenvolvimento da teoria por trás da emergência dos chamados sistemas dinâmicos está no problema de três corpos da mecânica celeste, com observações que só seriam descritas adequadamente por Poincaré por meio de sua proposição de sistemas "irregulares" e mais complexos de serem tratados do que os estudados até então (CVITANOVIC, 1989). Em paralelo a isso, a chamada hipótese ergódica de Ludwig Boltzmann surge da dificuldade de se provar a mesma probabilidade de um sistema termodinâmico visitar todos os pontos do espaço de fases permitidos pelas leis de conservação, exigindo a reformulação de problemas não lineares de finitas dimensões em problemas lineares de infinitas dimensões (LICHTENBERG; LIEBERMAN, 1992). Os trabalhos de Poincaré e Boltzmann são as primeiras "dicas" de que forças aplicadas regularmente podem levar a um movimento estocástico em sistemas de osciladores não lineares e subsequentemente uma complexidade cada vez maior nos estudos da topologia dos espaços de fases. A resposta definitiva para esses problemas só seria apresentada no teorema KAM, postulado por Kolmogorov, em 1954 (KOLMOGOROV, 1954), enunciando que para um sistema que se encontra submetido a uma pequena perturbação não linear, algumas estruturas do seu espaço de fases, os chamados toros, serão deformados e outros destruídos. Sobrevivem os que possuem quocientes de frequência dados pelos valores mais irracionais. O teorema em questão seria provado em outras circunstâncias por Arnold e Moser na década seguinte, definindo que para sistemas perturbados para longe das condições nas quais são integráveis, superfícies invariantes continuam existir para quase todas as condições iniciais, sendo o movimento limitado pelas chamadas "curvas KAM" e não ergódico. Os resultados seguem sendo aprimorados cada vez mais nos anos seguintes com avanços na teoria de perturbação, computacionais e até mesmo com o aumento de interesse na área da dinâmica não linear.

É essencial que tenhamos clareza de que um sistema caótico não é sinônimo de aleatoriedade. A definição usual de um sistema caótico está na característica de, apesar de ser determinístico, ao analisarmos duas condições iniciais próximas evoluindo temporalmente, a dinâmica do estado de uma das condições não nos dá nenhuma informação sobre a outra (LICHTENBERG; LIEBERMAN, 1992). Sumarizando, a dinâmica caótica é principalmente definida pela sensibilidade à variação nas condições iniciais. Apesar de poder não parecer dessa forma, sistemas caóticos são de imensa importância e podem ser encontrados no estudo de diversas áreas da ciência, inicialmente utilizado para análises meteorológicas e tendo se estendido para aplicações em medicina, estudos geológicos, no mercado financeiro, telecomunicações, estudo de plasmas (e suas aplicações em tokamaks, por exemplo), guias de ondas, aceleração de Fermi e bilhares clássicos, que são o foco deste trabalho (POZZO, 2020)(LEONEL, 2019)

Tal estudo de sistemas caóticos, muitas vezes chamados de sistemas não lineares devido à forma de suas equações, costuma envolver a utilização de mapeamentos discretos para descrever sua evolução temporal, isto é, uma descrição de seu estado atual (digamos, em uma iteração " $n + 1$ ") em função de seu estado anterior " n ". A sequência cronológica destes estados obtidos pela evolução do sistema recebe o nome de órbita e o conjunto de todas as órbitas

obtidas alterando a condição inicial do sistema recebe o nome de espaço de fases, fornecendo informações sobre todos os estados permitidos do sistema em questão (LEONEL, 2019).

Definindo um sistema Hamiltoniano $H = H(q, p, t)$ por meio de $2n$ equações diferenciais ordinárias de forma $\dot{q} = H_p$ e $\dot{p} = -H_q$, onde p e q são *momentum* e posição do sistema, respectivamente, temos um número natural n dito grau de liberdade do sistema. Quando a função Hamiltoniana depende do tempo dizemos que a mesma possui n graus e meio de liberdade. Caso o sistema seja integrável ele terá também n constantes de movimento associadas, as quais trataremos com maior detalhe seguidamente. Em sistemas dinâmicos descritos por mapeamentos discretos, especialmente para aqueles com 1 e 1/2 graus de liberdade, a descrição utilizando o formalismo de sistemas Hamiltonianos conduz, muitas vezes, a mapeamentos bidimensionais que preservam a área no espaço de fases (LICHTENBERG; LIEBERMAN, 1992). Inclui-se nessa caracterização uma classe de sistemas que pode ser descrita por uma função Hamiltoniana do tipo

$$\hat{H}(x, p, t) = \frac{p^2}{2m} + V(x, t), \quad (1.1)$$

onde

$$V(x, t) = V_0(x) + V_1(x, t), \quad (1.2)$$

em que o termo $V_0(x)$ fornece a parte integrável do sistema enquanto que $V_1(x, t)$ fornece a parte não integrável. Sistemas do tipo bilhares, como propostos primeiramente por Birkhoff e exemplificados por Sinai (SINAI, 1970), podem perfeitamente bem ser enquadrados neste tipo de Hamiltoniana, onde as fronteiras geralmente são paredes de potencial infinito que podem adquirir diversos formatos (ABUD, 2010).

Em linhas gerais podemos definir um bilhar como uma ou mais, desde que se trate de um conjunto não interagente, partículas clássicas colidindo com uma fronteira rígida (LEONEL, 2019). Tal colisão é especular, isto é, possui mesmo ângulo de entrada e de saída na colisão. A fronteira rígida pode ser estática ou ter nela introduzida uma dependência temporal. A classificação dos sistemas bilhares é, então, muitas vezes feita de acordo com a fronteira (bilhares circulares, elípticos, ovóides, etc), que tem papel fundamental no comportamento do bilhar (LEONEL, 2019). Para o caso estático, a equação (1.2) possui $V_1 = 0$, enquanto o termo V_0 é nulo dentro da fronteira e infinito fora.

Ao introduzirmos a dependência temporal na fronteira, o termo V_1 é não nulo e a partícula altera sua velocidade e energia ao colidir com a fronteira, o que altera significativamente a estrutura do espaço de fases. É enunciado pela conjectura LRA (LOSKUTOV; RYABOV; AKINSHIN, 2000) que caso existam regiões de caos no bilhar estático, crescimento ilimitado de energia deve ser observado ao introduzirmos uma dependência temporal na fronteira. Devido a um contra-exemplo dessa conjectura (LENZ; DIAKONOS; SCHMELCHER, 2008) encontrado para o bilhar elíptico, que apresenta um espaço de fases integrável no caso estático e ainda assim, ao ser introduzida a dependência temporal, apresenta tal crescimento ilimitado, seu enunciado foi reformulado, colocando a órbita heteroclínica como condição no espaço de fases estático.

Tal crescimento ilimitado de energia causado pelas colisões de uma partícula clássica é muitas vezes chamado de Aceleração de Fermi (FERMI, 1949). Tal mecanismo foi primeiro proposto por Enrico Fermi, em 1943, em uma tentativa de descrever os processos de aceleração de raios cósmicos em meio a um campo gravitacional também em movimento (LEONEL, 2019). Apesar de ter sido apresentado com um intuito bastante diferente, sua aparição em diversos sistemas bilhares se mostra essencial para que possamos compreender as transições de fase pelas quais esses sistemas passam. No caso dos bilhares, esse ganho de energia pode ser suprimido através da introdução de forças de dissipação, tais como choques inelásticos (OLIVEIRA; LEONEL, 2009) e arrasto devido à presença de um gás (LEONEL; BUNIMOVICH, 2010b). Associadas a tal transição de fase do crescimento limitado para ilimitado na energia conforme a dissipação vai a zero continuamente são observadas as típicas leis de escala, características deste tipo de sistemas (SETHNA, 2006).

Neste trabalho não apenas fazemos a caracterização destes sistemas e de sua transição da fase, mas também estendemos o formalismo de equação de difusão apresentado em (LEONEL et al., 2020), estudamos a fundo as leis de escala em questão e possíveis extensões da análise para outro sistemas.

1.2 EQUAÇÃO DE DIFUSÃO

O termo "difusão" pode ser muitas vezes associado a espalhamento, seja ele de um observável físico ou de algo mais abstrato, como uma probabilidade. A formalização do conceito, em um sentido matemático bem como físico, pode ser apontada à monografia escrita por Joseph Fourier e Pierre Simon Laplace entregue à Academia Francesa de Ciências, em 1807, intitulada "Teoria da propagação do calor em sólidos". O trabalho marca a introdução do uso de equações diferenciais parciais para descrição do fluxo de calor, depois sendo tratado com maior detalhe por Fourier em sua obra "Teoria Analítica do Calor". Laplace, em 1809, ainda associou tal ideia à probabilidade da soma de um número " n " de variáveis aleatórias ser igual ou menor a um certo valor para $n \rightarrow \infty$ em seu texto "Teoria Analítica das Probabilidades" (NARASIMHAN, 2009). Atualmente, podemos encontrar uma vasta gama de aplicações do estudo da difusão de certas partículas em um meio contínuo, tais como a difusão de fumaça no ar, de nêutrons em um reator nuclear, de calor em uma barra metálica e, como no nosso caso, no aquecimento de um gás entrando em contato com um reservatório térmico (BUTKOV, 1988).

A expressão fenomenológica para a equação vem do uso da quantidade " ρ ", densidade ou concentração da substância em questão, na escrita do fenômeno de difusão na chamada "lei de Fick":

$$\vec{j} = -D\nabla\rho, \quad (1.3)$$

com \vec{j} sendo a densidade de corrente da quantidade em questão e D o coeficiente de difusão, que depende das propriedades do meio (BUTKOV, 1988). Além disso, também levamos em conta que a substância em questão não está sendo absorvida ou emitida pelo meio. Esse fato fica então

expresso na chamada "equação de continuidade" dessa substância:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0. \quad (1.4)$$

Unindo as expressões acima, temos a equação de difusão:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \nabla^2 \rho. \quad (1.5)$$

Para o nosso objeto de estudo, a relação com a equação acima está na escrita dessa mesma equação sendo pautada na densidade de probabilidade $P(r, t)$ da partícula estar em uma certa posição em um certo instante no tempo, similar ao apresentado por Laplace. Einstein teve um importante papel nessa reformulação, segundo (NARASIMHAN, 2009):

A equação de difusão estocástica e sua solução já eram bem estabelecidas em 1905. Bem como a lei de Fick para difusão molecular e a natureza da pressão osmótica. Apesar disso, o trabalho de Einstein em movimento Browniano é reconhecido como uma de suas contribuições mais significativas. O que é notável na obra de Einstein é seu olhar para a difusão molecular tanto em uma escala microscópica, como um problema estocástico, bem como macroscópica, como um problema determinístico e dinâmico. (SETHNA, 2006, p. 52)

Tal reformulação proposta por Einstein para descrição do movimento Browniano de partículas em um fluido (BALAKRISHNAN, 2021) é escrita por:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2}, \quad (1.6)$$

caso consideremos apenas o movimento no eixo x , por simplicidade. O destaque dessa expressão está em um resultado que não apenas ajudou a resolver diversas questões da Física do século XIX em relação ao comportamento de partículas, mas também integrou os aspectos físicos e abstratos da difusão de maneira compacta e elegante (NARASIMHAN, 2009). Essa expressão deve obter a condição de normalização uma vez que estamos tratando de uma probabilidade, que deve ser igual à unidade caso estejamos considerando todos os valores possíveis de $-\infty$ a ∞ para a posição. A condição é escrita, para qualquer $t \geq 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x, t) dx = 1. \quad (1.7)$$

Além disso, uma vez obtida a expressão da probabilidade, também podemos definir os observáveis:

$$\bar{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x P(x, t) dx, \quad (1.8)$$

que é o deslocamento médio da partícula em um certo tempo " t " e:

$$\overline{x^2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x, t) dx, \quad (1.9)$$

como deslocamento quadrático médio. O deslocamento quadrático médio pode ser apontado como um importante objeto da nossa análise uma vez que não se anula, mesmo que em uma distribuição simétrica como ocorre com $\overline{x}(t)$, fornecendo importantes informações sobre o sistema (BUTKOV, 1988). Além disso um importante observável, quando tratamos da equação de difusão, é definido por:

$$x_{rms} = \sqrt{\langle x^2(t) \rangle}, \quad (1.10)$$

onde o subíndice " rms " vem do inglês "*root-mean-squared*", traduzido como raiz quadrática média por alguns autores (REIF, 2008), e representa o valor "efetivo" apresentado por essa quantidade. A obtenção de tal quantidade também é um dos principais resultados deste trabalho para o bilhar ovóide dependente do tempo.

Um importante resultado obtido da equação de difusão, que representa bem sua associação com a distribuição de probabilidade, está na chamada "solução Gaussiana". Tal distribuição é uma das mais utilizadas para modelar fenômenos naturais e está presente nas principais obras de modelagem de sistemas estatísticos, descrevendo desde o comum jogo de "cara ou coroa" até conceitos mais complexos como "Entropia" e "Quantidade de informação" (REIF, 2008). Sendo a equação de primeira ordem em relação ao tempo e de segunda ordem em relação à posição, sua solução única pode ser feita por meio da especificação de uma condição inicial e de duas condições de contorno (BOYCE; DIPRIMA, 2014). Para este caso temos que $P(x, 0) = \delta(x)$ e que, pela probabilidade ser normalizada $P(x, t) = 0$ em $x = \pm\infty$, para todo $t \geq 0$. O resultado obtido é dado por:

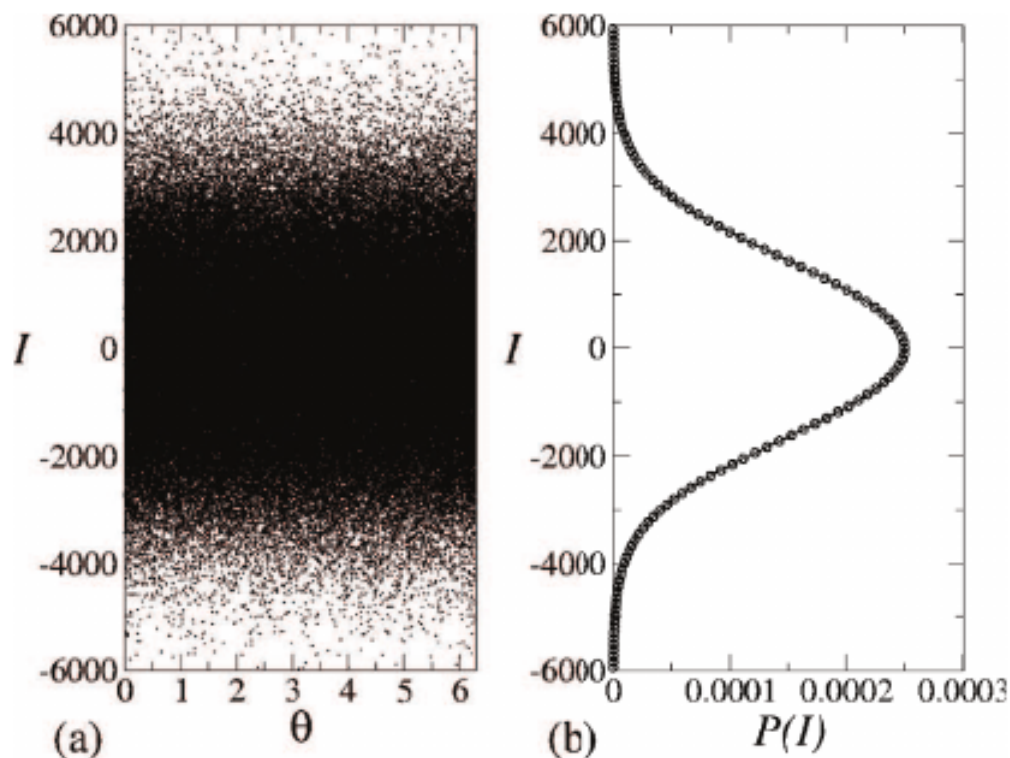
$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right), \quad (1.11)$$

conhecida como Gaussiana normalizada, para qualquer $t > 0$. Tal expressão apresenta o formato característico de "sino" centrado em 0 e tendendo a se achatar conforme o tempo avança. Por ser uma expressão normalizada, mesmo com o "espalhamento" da curva, sua área é sempre igual à unidade, podendo ser observada na Figura 1.

Um formalismo robusto para obtenção da expressão do valor médio de uma variável, no caso a ação, por meio da equação de difusão foi apresentado por (LEONEL et al., 2020) para o mapa padrão dissipativo. Foi mostrado que a função de distribuição de probabilidade de uma partícula apresentar, em um "momento" n , a ação I , isto é, $P(I, n)$, pode ser determinada a partir da solução da equação da difusão impondo condições de contorno específicas que satisfazem as propriedades impostas pelo espaço de fases, como feito para a distribuição Gaussiana. Na Figura 1 podemos perceber claramente o análogo à distribuição Gaussiana, com maior densidade de pontos simetricamente concentrada em 0 e diminuindo gradualmente ao nos afastarmos deste ponto, e sua associação direta com o espaço de fases do sistema. Mais detalhes sobre o sistema

apresentado na Figura 1 estão presentes na seção 4.4.3 deste trabalho e no artigo "*A short review of phase transition in a chaotic system*" (MIRANDA et al., 2021), mas é importante enfatizar que em tal sistema o parâmetro ϵ controla a integrabilidade do sistema, sendo o seu valor indicado na imagem suficientemente grande de forma a destruir as estruturas regulares presentes no espaço de fase. Tal escolha é feita de forma a garantir um comportamento aleatório na região estudada, estando de acordo com sistemas descritos pela Gaussiana.

Figura 1 – a) Gráfico do espaço de fases para o mapa padrão dissipativo considerando os parâmetros $\epsilon = 100$ e $\gamma = 10^{-3}$ b) Distribuição de probabilidade $P(I, n)$ normalizada para o atrator caótico do item "a".



Fonte: (LEONEL et al., 2020).

Tendo em vista que a distribuição Gaussiana é uma das mais comuns encontrada na modelagem de sistemas naturais, é de se esperar que tal resultado seja encontrado também para sistemas bilhares. Isso não ocorre uma vez que o sistema que é objeto de estudo deste trabalho apresenta algumas diferenças nas limitações impostas às suas variáveis e, subsequentemente, na forma da sua distribuição de probabilidades (LEONEL et al., 2016). Apesar disso, é possível a realização com sucesso do formalismo apresentado em (LEONEL et al., 2020), como veremos mais adiante.

A motivação e a importância da abordagem da solução da equação de difusão para obtenção de resultados analíticos para o bilhar ovóide dependente do tempo pode ser encontrada ao estudarmos seu paralelo com o caso termodinâmico. Ao tomarmos o bilhar em questão como um análogo a um gás clássico, a presença de caos na dinâmica das partículas para a fronteira estática

seria, segundo a conjectura LRA, condição suficiente para que a introdução da dependência temporal produza uma difusão ilimitada na energia na partícula, isto é, aceleração de Fermi. Tal difusão na velocidade, pelo teorema de equipartição de energia, seria sinônimo de um crescimento na temperatura, o que não é observado fisicamente uma vez que o aquecimento só ocorre até um certo ponto de equilíbrio ao permitir o contato de gás de partículas de baixa energia com o sistema. A supressão de tal crescimento ilimitado estaria, segundo a teoria de bilhares, nas colisões das partículas do gás com a parede do recipiente, mais especificamente nas perdas fracionais de energia que ocorreriam nessas colisões (LEONEL, 2019). Tendo esse comportamento em mente, podemos compreender o porquê da equação de difusão ser a abordagem sugerida para atacar esse problema analiticamente. Uma partícula deste gás, neste processo onde entra em contato com o reservatório térmico, experimenta o fenômeno de difusão.

2 BILHAR OVÓIDE ESTÁTICO

2.1 MAPEAMENTO, ESPAÇO DE FASES E RESULTADOS NUMÉRICOS

Como definindo anteriormente, um bilhar é definido como um sistema dinâmico que descreve a dinâmica de uma partícula ou de um conjunto não interagente de partículas em movimento dentro de uma barreira fixa e rígida com a qual colidem de forma a conservar o ângulo antes e depois da colisão (LEONEL, 2019). Temos, então, que a componente tangencial da velocidade se mantém constante, enquanto que a componente radial tem seu sinal invertido (colisão especular). A classificação de acordo com a dinâmica da fronteira vem do fato de que, caso as colisões com a fronteira sejam elásticas como ocorre no bilhar estático, a energia das partículas em questão é mantida. Porém, quando tratamos de uma fronteira que possui dependência temporal, a energia da partícula não é mais preservada e a difusão ilimitada na energia, conhecida como aceleração de Fermi, tem condições de ser observada.

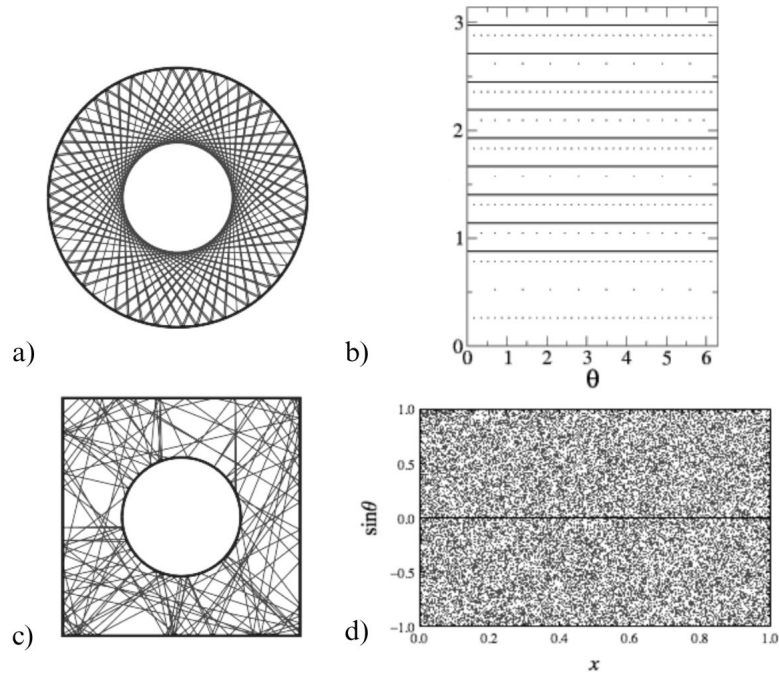
Bilhares estáticos, que não possuem dependência temporal e são foco de análise deste capítulo, podem ser classificados como: (i) integráveis; (ii) ergódicos; e (iii) mistos. No caso dos bilhares integráveis podemos citar como exemplos o bilhar circular e o bilhar elíptico. Neste primeiro a integrabilidade se deve à conservação de energia e *momentum* angular, já no segundo se trata da conservação, além da energia, do *momentum* angular em relação a cada um dos focos (BERRY, 1981). Já para bilhares ergódicos podemos nos referir ao bilhar de Sinai, com fronteira construída de forma que as partículas estejam confinadas em um quadrado de lado L com um círculo de raio $R < L$ no centro (SINAI, 1970; COX; FERES; ZHAO, 2021; CASATI; PROSEN, 2012), e o estádio de Bunimovich, onde a fronteira consiste de duas metades de um círculo conectadas entre si por dois segmentos de reta, remetendo à forma de um estádio como o próprio nome sugere (BUNIMOVICH, 1979). Nesses casos, dependendo dos parâmetros de controle, uma única condição inicial é capaz de preencher ergodicamente todo o espaço de fases para tempos suficientemente longos. A diferença dos comportamentos para os casos (i) e (ii), bem como o esboço das fronteiras descritas para os bilhares circular e de Sinai, podem ser observados na Figura 2.

Nosso objeto de estudo nesse trabalho, o bilhar ovóide, está na terceira categoria: a de bilhares mistos. Essa classe de bilhares será tratada com maior detalhe a seguir porém é interessante apontar que a mesma apresenta um espaço de fases com ilhas de periodicidade que coexistem com curvas invariantes *spanning* que delimitam diferentes mares de caos (OLIVEIRA; LEONEL, 2010a).

Para descrevermos a dinâmica de um bilhar, assumiremos que a fronteira pode ser descrita em coordenadas polares a partir de um raio escrito como:

$$R = R(\theta). \quad (2.1)$$

Figura 2 – Ilustrações das fronteiras dos bilhares circular e de Sinai, respectivamente em a) e c), e de seus espaços de fase, em b) completamente integrável para o bilhar circular e em d) totalmente ergódico para o bilhar de Sinai.



Fonte: Compilação do autor, (LEONEL, 2019), (COX; FERES; ZHAO, 2021) e (CASATI; PROSEN, 2012).

O comportamento da partícula confinada no interior dessa fronteira é descrito por um certo mapeamento discreto para as variáveis (θ_n, α_n) , com n se referindo à n -ésima colisão com a fronteira, onde θ_n se refere à posição angular da partícula e α_n corresponde ao ângulo que a trajetória faz com relação ao vetor tangente à fronteira na posição θ_n , como podemos ver na Figura 3 (LEONEL, 2019). A figura ainda mostra os efeitos de uma variação temporal na fronteira, que abordaremos no próximo capítulo, onde os contornos verde e roxo representam dois *snapshots* da fronteira em diferentes momentos.

Utilizando o formalismo das coordenadas polares, a posição da partícula pode ser descrita como:

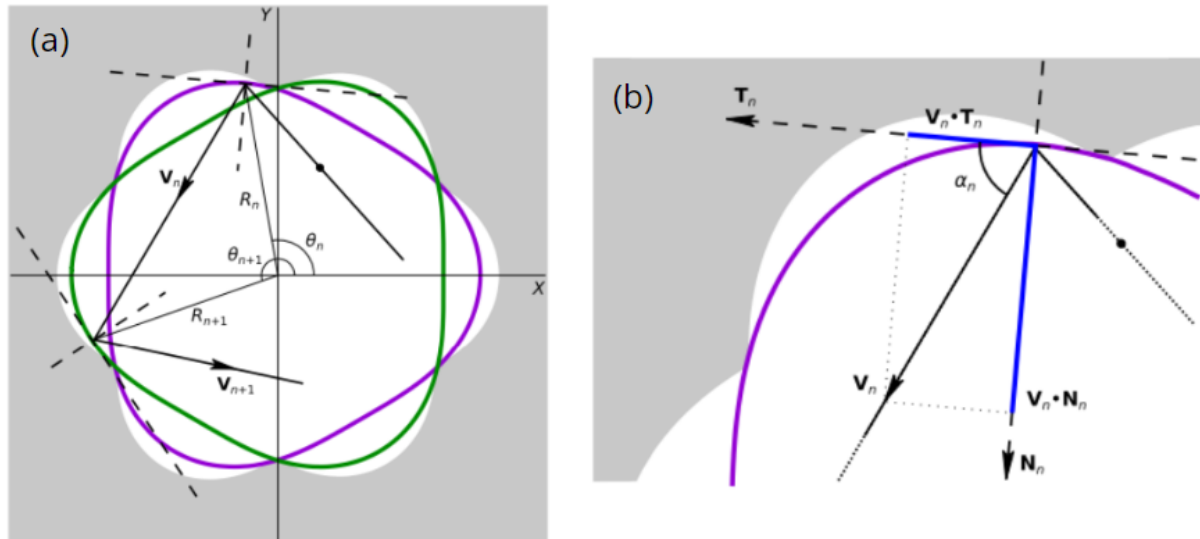
$$X(\theta_n) = R(\theta_n)\cos(\theta_n) \quad (2.2)$$

$$Y(\theta_n) = R(\theta_n)\text{sen}(\theta_n). \quad (2.3)$$

O ângulo entre o vetor tangente a uma partícula e a fronteira na posição dada pelas equações acima, em relação à horizontal, é dado por:

$$\phi_n = \arctan \left[\frac{Y'(\theta_n)}{X'(\theta_n)} \right], \quad (2.4)$$

Figura 3 – a) Ilustrações dos ângulos que descrevem a trajetória de uma partícula em um bilhar. b) Ampliação da seção no canto superior esquerdo, indicando as componentes tangencial e normal, que discutiremos mais adiante.



Fonte: (SILVEIRA et al., 2023).

onde os apóstrofos se referem à primeira derivada em relação a θ . A equação que descreve a trajetória da partícula, com velocidade constante, entre uma colisão e outra é dada por:

$$Y(\theta_{n+1}) - Y(\theta_n) = \tan(\alpha_n + \phi_n)[X(\theta_{n+1}) - X(\theta_n)], \quad (2.5)$$

onde $Y(\theta_{n+1})$ e $X(\theta_{n+1})$ representam as novas coordenadas para θ_{n+1} , sendo obtidas pela solução da equação (2.5). O ângulo entre a trajetória da partícula e o vetor tangente à fronteira no ponto θ_{n+1} é dado por:

$$\alpha_{n+1} = \phi_{n+1} - (\alpha_n + \phi_n). \quad (2.6)$$

Por fim, o mapeamento discreto para a dinâmica da partícula é dado por:

$$H(\theta_{n+1}) = R(\theta_{n+1})\text{sen}(\theta_{n+1}) - Y(\theta_n) - \tan(\alpha_n + \phi_n)[R(\theta_{n+1}) \cos(\theta_{n+1}) - X(\theta_n)] \quad (2.7)$$

$$\alpha_{n+1} = \phi_{n+1} - (\alpha_n + \phi_n), \quad (2.8)$$

onde θ_{n+1} é obtido a partir da solução numérica de $H(\theta_{n+1}) = 0$. Neste trabalho tal solução foi obtida por meio do método da bisseção, selecionando a posição angular onde a posição da partícula R_p é igual à posição da fronteira R_b , isto é, onde ocorre a colisão e garantindo que o resultado encontrado estivesse dentro de uma tolerância da ordem de 10^{-12} . Tal tolerância foi escolhida de forma a concordar com o incrementos na evolução temporal, que são da ordem de $1/V_n$. Ao mesmo tempo que tal valor tenha que ser suficientemente pequeno de forma a garantir que a colisão de fato aconteceu, minimizando o erro, ele não pode ser tão pequeno a ponto de exceder o número limite de iteradas estabelecido até que a partícula encontre a fronteira. O

mesmo deve ser aplicado a velocidade inicial: enquanto uma velocidade inicial pequena garante que possamos ver com maior clareza os diferentes comportamentos ao longo da trajetória, uma velocidade inicial muito pequena pode levar a partícula a não ter velocidade suficiente para atingir a próxima colisão. Tais elementos justificam a escolha da tolerância de forma a minimizar o erro simultaneamente garantindo a qualidade da análise e a evolução do sistema. Além disso a resolução da equação (2.7) nos fornece, para cada colisão, um conjunto de 4 soluções, das quais apenas duas são condizentes com o que é observado fisicamente e, das duas restantes, uma se trata da solução em n e uma em $n + 1$, sendo apenas a última selecionada para subsequente iteração do mapeamento. Tal seleção é feita por meio de uma subrotina que impõe as condições de que a partícula não pode ser $R_p > R_b$, que o ângulo encontrado deve ser real entre 0 e 2π e que o momento da colisão selecionado seja maior que a iterada atual, isto é $t > t_n$.

Com as equações (2.7) e (2.8) em mãos, podemos substituir as expressões específicas, em coordenadas polares, de cada fronteira para descrever os bilhares já comentados.

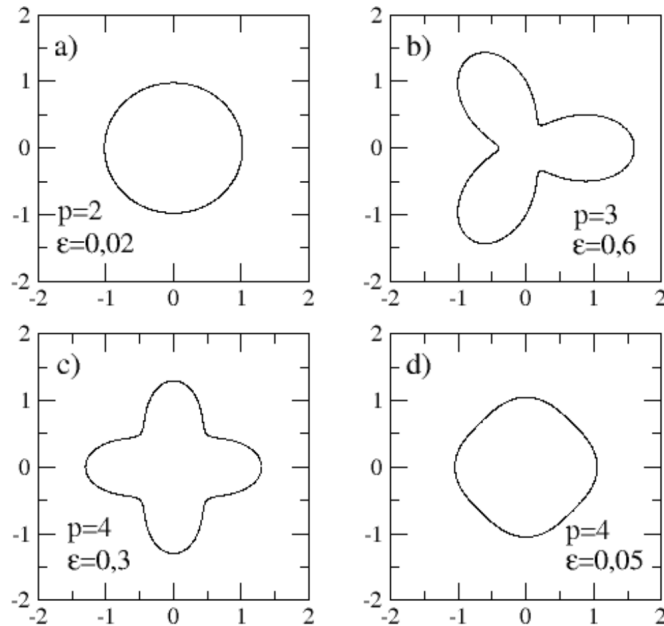
Como citado anteriormente, o bilhar ovóide é um exemplo de comportamento misto entre ergodicidade e integrabilidade, sendo objeto de interesse para o nosso estudo pela sua conexão com a conjectura LRA. Sua fronteira é descrita por:

$$R(\theta, \epsilon, p) = 1 + \epsilon \cos(p\theta), \quad (2.9)$$

e aqui temos ϵ como um parâmetro que deforma a fronteira e que nos permite recuperar o bilhar circular quando igualado à zero, levando o sistema a ser integrável. De forma semelhante, p também provoca deformações na fronteira e deve ser sempre um número inteiro de forma a não permitir "buracos" na mesma e, subsequentemente, o escape de partículas. Para $p = 1$ temos o bilhar ovóide, enquanto que para $p > 1$ ocorre o chamado bilhar "ovóide-like". Lembramos ainda que o modelo, como discutido na seção anterior, consiste de uma partícula clássica de massa m confinada numa região, nesse caso de forma ovóide ou ovóide-like, na qual sofre colisões elásticas com a fronteira e não sofre o efeito de nenhuma influência externa. Cada uma dessas reflexões é especular e θ denota o ângulo medido com respeito ao eixo horizontal. Utilizamos aqui também as expressões para $X(\theta_n)$, $Y(\theta_n)$, α e ϕ obtidas na seção anterior, bem como o mapeamento dado pelas equações (2.7) e (2.8). As Figuras 4 e 5, abaixo, nos permitem notar o efeito da alteração dos parâmetro p e ϵ .

Podemos perceber, especialmente na Figura 6, a seguir, como o parâmetro ϵ está diretamente associado à integrabilidade ou não do sistema, uma vez que quando seu valor fica cada vez menor nos encontramos cada vez mais próximos de uma fronteira circular, que sabemos ser integrável, e seu aumento leva a deformações nítidas que podem, para valores muito grandes de ϵ , impedir quase completamente que a partícula acesse certas regiões. Na Figura 6 estão indicadas também as trajetórias, ou "caminhos", que serão percorridos por uma partícula dentro do bilhar, onde podemos notar a influência dos parâmetros especialmente no caso onde $\epsilon = 1$, o que leva ao encontro das paredes da fronteira, impedindo a passagem das partículas para qualquer setor

Figura 4 – Forma da fronteira do bilhar ovóide e ovóide-like para ϵ fixo e diferentes valores de p



Fonte: Produção do próprio autor.

diferente daquele onde iniciou sua trajetória. Esse resultado observado para $\epsilon = 1$ no item d) pode ser provado analiticamente uma vez que, tomando a expressão da fronteira em coordenadas polares $R(\theta, \epsilon, p) = 1 + \epsilon \cos(p\theta)$, esta se torna:

$$R(\theta, 1, 3) = 1 + \cos(3\theta), \quad (2.10)$$

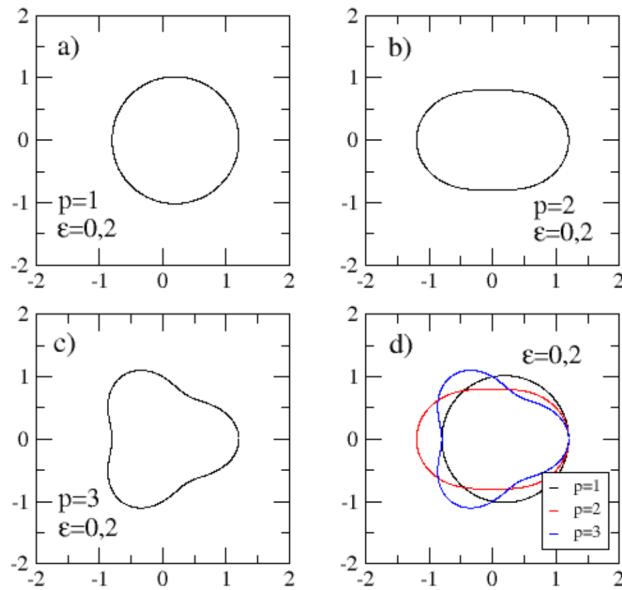
expressão que sabemos ter seus mínimos em:

$$\frac{dR}{d\theta} = -3\text{sen}(3\theta) = 0 \rightarrow \theta = \frac{n\pi}{3}, n \in Z \quad (2.11)$$

Isto é, para tais ângulos a expressão $R(\theta, \epsilon, p)$, que descreve a fronteira (isto é, a forma das "paredes" do bilhar), terá o mesmo valor o que implica nessas diferentes paredes se tocarem, bloqueando a passagem. Neste trabalho limitaremos nossa análise, como dito anteriormente, a valores de $\epsilon < 1$, deixando as partículas livres para acessarem qualquer região dentro das fronteiras do bilhar.

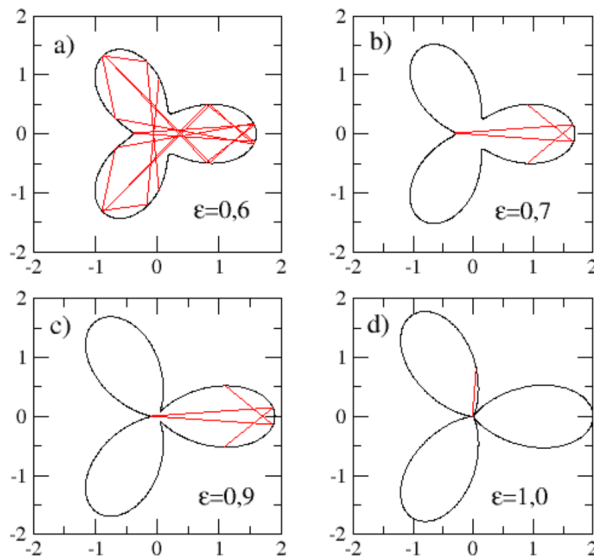
Uma vez bem definidas as diferentes trajetórias e fronteiras possíveis para o bilhar ovóide, passamos para uma discussão do seu mapeamento, ou espaço de fases. Em sistemas dinâmicos, podemos estudar a evolução das órbitas por meio de uma superfície "S" transversal ao fluxo das mesmas. Esta é a chamada seção de Poincaré para o sistema, onde se define um ponto a cada passagem por "S", como podemos observar na Figura 7. Sendo assim, a Figura 8, por exemplo, é construída a partir de "fatias" das órbitas que são descritas pelo sistema. O mapa gerado pelo conjunto desses pontos também pode ser chamado mapa de Poincaré. Podemos ainda dizer que

Figura 5 – Forma da fronteira do bilhar ovóide para diferentes combinações de ϵ e p



Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 6 – Fronteiras e trajetórias de uma partícula para $p = 3$ e diferentes valores de ϵ

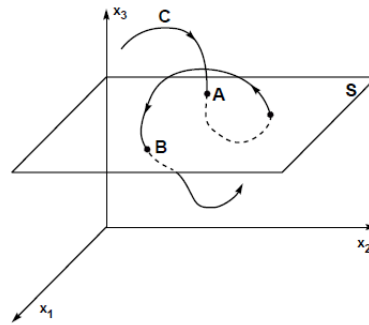


Fonte: Produção do próprio autor.

o conjunto de pontos que interceptam "S", caso desenvolvam uma dinâmica quasi-periódica, terão sua representação no mapa por meio de uma curva invariante, enquanto que caso essa dinâmica seja caótica podemos observar o chamado "mar de caos" no mapa (pontos distribuídos aleatoriamente onde o conhecimento do comportamento do sistema em um momento nada nos diz sobre o mesmo no futuro) (ABUD, 2010). Ainda podemos estabelecer uma clara conexão entre as estruturas apresentadas na Figura 8 e as trajetórias apresentadas na Figura 6, uma vez

que uma trajetória corresponde a uma das estruturas (como a destacada em roxo na Figura 8, item b) do espaço de fases.

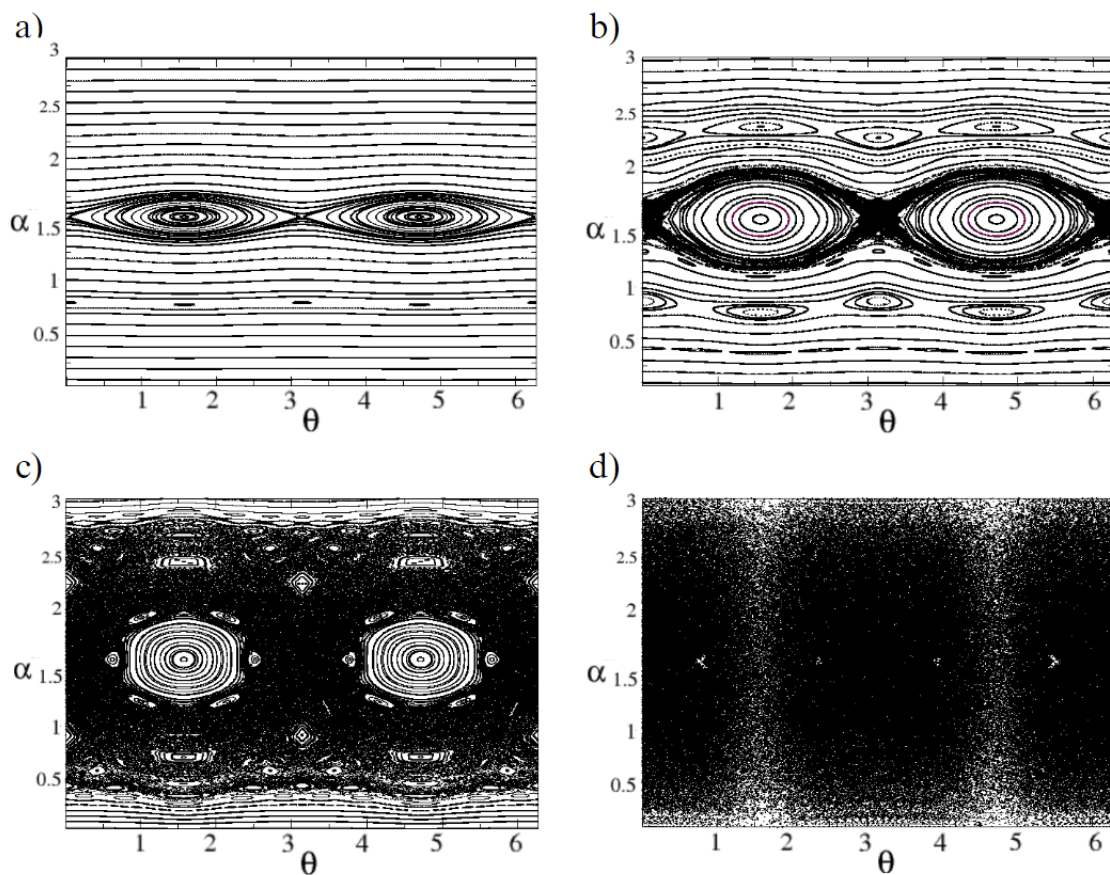
Figura 7 – Exemplo de uma seção de Poincaré com um fluxo de trajetórias cruzando a superfície "S"



Fonte: (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1996).

Para a iteração das equações (2.7) e (2.8) os resultados estão apresentados na Figura 8, abaixo.

Figura 8 – Espaço de fases para o bilhar ovóide com parâmetros de controle $p = 2$ e: a) $\epsilon = 0,001$; b) $\epsilon = 0,05$; c) $\epsilon = 0,1$; d) $\epsilon = 0,5$.



Fonte: Produção do próprio autor.

Tais mapeamentos apresentam uma diversidade de comportamentos que emergem e são

destruídos de acordo com a variação do parâmetro ϵ . Para valores suficientemente pequenos desse parâmetro, como discutido anteriormente, nos aproximamos cada vez mais do bilhar circular, que sabemos ser integrável. De acordo com isso, podemos observar o mapeamento no item a), contando com um conjunto de órbitas periódicas. Subsequentemente, o aumento de ϵ leva à emergência de regiões de mar de caos no entorno dessas ilhas de periodicidade (também conhecidas como ilhas KAM). O aumento de ϵ está, então, diretamente relacionado ao aumento desse mar de caos e à destruição de um número cada vez maior de órbitas periódicas, como observamos nos itens c) e d). O item d) ainda marca a destruição das curvas invariantes *spanning* que estavam presentes até então, sendo o espaço de fases tomado quase integralmente pelo mar de caos. Também é interessante a conexão com as galerias do sussurro comentadas anteriormente no capítulo 1. No mapeamento, o mesmo fenômeno acontece e tudo aquilo que é observado nas curvas invariantes próximas de 0 em α se repete em π , tal como o som de um sussurro em um lado da galeria pode ser ouvido do lado oposto.

É possível obter o valor exato de ϵ para o qual as curvas invariantes são destruídas, chamado de ϵ crítico denotado por ϵ_c . Para isso estabelecemos a quantidade κ dada por:

$$\kappa(\theta) = \frac{X'(\theta)Y''(\theta) - X''(\theta)Y'(\theta)}{[X'^2(\theta) + Y'^2(\theta)]^{\frac{3}{2}}}, \quad (2.12)$$

que representa a mudança na curvatura da fronteira quando κ é maior ou menor que zero (OLIVEIRA; LEONEL, 2010b). Todos os valores das derivadas primeira e segunda são obtidos das expressões de $X(\theta)$, $Y(\theta)$ e $R(\theta)$ apresentadas no início do capítulo. Dessa forma podemos encontrar:

$$X'(\theta) = \frac{dR(\theta)}{d\theta} \cos(\theta) - R(\theta) \sin(\theta), \quad (2.13)$$

$$Y'(\theta) = \frac{dR(\theta)}{d\theta} \sin(\theta) + R(\theta) \cos(\theta), \quad (2.14)$$

$$X''(\theta) = \frac{d^2 R(\theta)}{d\theta^2} \cos(\theta) - 2 \frac{dR(\theta)}{d\theta} \sin(\theta) - R(\theta) \cos(\theta) \quad (2.15)$$

$$Y''(\theta) = \frac{d^2 R(\theta)}{d\theta^2} \sin(\theta) - 2 \frac{dR(\theta)}{d\theta} \cos(\theta) - R(\theta) \sin(\theta) \quad (2.16)$$

onde podemos escrever:

$$\frac{dR(\theta)}{d\theta} = -\epsilon p \sin(p\theta), \quad (2.17)$$

$$\frac{d^2 R(\theta)}{d\theta^2} = -\epsilon p^2 \cos(p\theta). \quad (2.18)$$

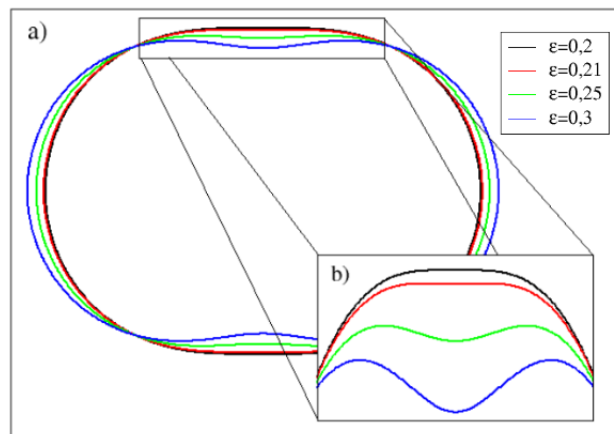
Encontramos, então, o valor crítico de ϵ fazendo $\kappa' = 0$, o que nos fornece (OLIVEIRA; LEONEL, 2010b)

$$\epsilon_c = \frac{1}{1 + p^2}. \quad (2.19)$$

Para o nosso caso $p = 2$ encontramos $\epsilon_c = 0,2$, tendo como consequência o apresentado na

Figura 8, item d). É importante notar que, para a barreira, $\epsilon < \epsilon_c$ representa uma fronteira estritamente convexa, com $\epsilon > \epsilon_c$ permitindo partes não convexas na mesma, como podemos observar no item a) da Figura 5 para valores menores do que o crítico e na Figura 9 para valores maiores, em ambos $p = 2$. Retomando novamente a conexão com as galerias do sussurro, tal fenômeno deixa de acontecer quando ϵ ultrapassa o valor de ϵ_c , uma vez que a trajetória não pode mais "ricochetear" para o ponto inicial como aconteceria antes, tendo em vista a deformação na fronteira do bilhar.

Figura 9 – Esboço para diferentes fronteiras do bilhar ovóide com $p = 2$, $\epsilon = \epsilon_c = 0,2$ e $\epsilon > \epsilon_c$. Em b) é apresentada uma ampliação da figura a) para melhor visualização



Fonte: Produção do próprio autor.

Uma explicação mais aprofundada do significado do parâmetro κ está no fato de que um bilhar pode ser descrito como um sistema onde a partícula, ou um conjunto de partículas não interagentes, está livre para se movimentar em uma variedade "Q" com uma fronteira suave em cada uma de suas partes ∂Q . Matematicamente, Spivak (1965) define uma variedade como um espaço topológico que se parece localmente com um espaço Euclidiano nas vizinhanças de cada ponto. Não entraremos em muitos detalhes dessa definição mas ela pode ser facilmente explorada em trabalhos não apenas da área de topologia, mas também no próprio estudo de diversas áreas da física desde a Mecânica Clássica até a modelagem do espaço-tempo na relatividade geral (SPIVAK, 1965).

Se escrevermos a fronteira do bilhar como um número finito de componentes "suaves" $\partial Q_i = 1, 2, \dots, k$, podemos definir a curvatura $\kappa(q)$ para cada componente da fronteira ∂Q_i . Sendo assim, se para cada ponto $q \in \partial Q_i$, $\kappa(q) > 0$ então dizemos que os componentes ∂Q_i são do tipo dispersores, pela lógica análoga, $\kappa(q) = 0$ leva a componentes neutros e $\kappa(q) < 0$ componentes concentradores, Esses componentes podem também ser denotados por ∂^+ , ∂^0 e ∂^- , respectivamente (LOSKUTOV; RYABOV; AKINSHIN, 2000). Ainda por essa descrição podemos dizer que se ∂Q não é perturbado no tempo, isso caracteriza um bilhar estático, enquanto que bilhares dependentes do tempo, que veremos mais adiante, podem ter suas componentes descritas por $\partial Q = \partial(t)$.

Notamos ainda, nos espaços de fases, a presença de regiões periódicas em 0 e em π que são destruídas com o aumento do parâmetro ϵ . Essas são as chamadas "órbis da galeria do sussuro", ou *whispering gallery orbits* (LEONEL, 2019), que recebem esse nome devido ao análogo de ondas sonoras se propagando próximas a paredes de catedrais medievais, onde um sussuro em um lado do ambiente poderia ser ouvido no outro. Tal comportamento foi estudado por Lord Rayleigh e é associado ao fato de, para ângulos suficientemente pequenos, as ondas sonoras se refletem quase que rentes às paredes, como podemos ver no item b) da Figura 6. Sendo assim, comportamentos observados na região do mapa entre 0 e π iriam se repetir nas órbitas entre π e 2π . Esse comportamento pode ser observado também em outros bilhares, tais como o de Sinai e o de Bunimovich, ambos já citados neste trabalho (KRUELLE et al., 1997; LERMAN; ZHARNITSKY, 2021).

Uma outra importante ferramenta no estudo de sistemas dinâmicos, incluindo os bilhares, são os expoentes de Lyapunov. Esses expoentes são, em termos simplificados, uma medida da estabilidade das trajetórias sob efeito de pequenas perturbações (CHERNOV; MARKARIAN, 2006). O expoente de Lyapunov quantifica a taxa com a qual trajetórias infinitesimalmente próximas se separam. Em termos quantitativos podemos escrever o vetor que separa duas trajetórias por δZ_0 , cujas divergências são dadas por:

$$|\delta Z(t)| \approx e^{\lambda t} |\delta Z_0|, \quad (2.20)$$

em que λ é o expoente de Lyapunov (CENCINI; CECCONI; VULPIANI, 2009). Sendo assim o procedimento para obtenção desses expoentes consiste na iteração de um par de condições iniciais próximas e acompanhando suas evoluções no espaço de fases. Tomemos um mapeamento unidimensional $x_{n+1} = f(x_n)$, onde f é uma função não linear qualquer e a distância entre duas condições iniciais após n iterações é:

$$d = |f^{(n)}(x_0 + \epsilon) - f^{(n)}(x_0)|, \quad (2.21)$$

onde ϵ é arbitrariamente pequeno e x_0 é a condição inicial, o que nos permite escrever a distância relativa como d/ϵ . Admitindo que esta tenha comportamento exponencial em n , podemos reescrevê-la, no limite em que $\epsilon \rightarrow 0$, como:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \frac{f^{(n)}(x_0 + \epsilon) - f^{(n)}(x_0)}{\epsilon} \right| = e^{\lambda n}, \quad (2.22)$$

o que nos leva a $|f'^{(n)}(x_0)| = e^{\lambda n}$. Podemos ainda isolar λ e obter $\lambda n = \ln |f'^{(n)}(x_0)|$, que pode ser escrito como:

$$\ln |f'^{(n)}(x_0)| = \ln |f'(x_{n-1})f'(x_{n-2})f'(x_{n-3})\dots f'(x_0)|, \quad (2.23)$$

que ainda pode ser reescrita, usando a propriedade do produto do logaritmo:

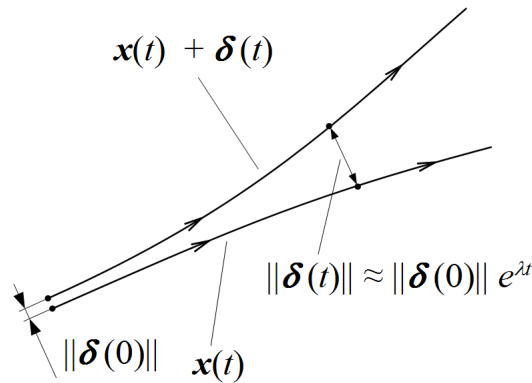
$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|, \quad (2.24)$$

e, para garantir que esse expoente convirja, é necessário que apliquemos ainda o limite $n \rightarrow \infty$, logo:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|. \quad (2.25)$$

Caso se tratem de órbitas regulares, a distância de ambas irá reduzir com o tempo, caso contrário, o sistema exibe uma componente caótica e conhecer uma das órbitas não nos dá nenhuma informação sobre a outra e as distâncias aumentam exponencialmente com o passar no tempo. Numericamente isso nos diz que se tivermos uma dinâmica caótica no sistema, o expoente de Lyapunov será $\lambda > 0$ enquanto que para comportamento periódico ou quase-periódico $\lambda \leq 0$. Visualmente, tal distância entre as trajetórias, dada pela equação (2.21), pode ser representada como dado na Figura 10

Figura 10 – Esboço de duas diferentes trajetórias e seu afastamento descrito pelo expoente de Lyapunov



Fonte: (JL, 2023).

É importante notar que, computacionalmente não é possível fazer com que $n \rightarrow \infty$. Sendo assim, é necessário tomar um número suficientemente grande de iterações para que o expoente chegue o mais próximo do valor de convergência, número este que variará para cada sistema como veremos mais adiante.

Até o momento, a discussão foi feita para o mapeamento unidimensional. Para o caso bidimensional, como o nosso, esse formalismo pode ser estendido e os expoentes são obtidos a partir da expressão:

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |\Lambda_n^{(j)}|, \quad (2.26)$$

onde $j = 1, 2$ e $\Lambda_n^{(j)}$ representa os autovalores da matriz Jacobiana dada por

$$M = \prod_{i=1}^n J_i(V_i, \phi_i) = J_n J_{n-1} J_{n-2} \dots J_2 J_1. \quad (2.27)$$

É importante lembrar que a convergência de λ pode vir a ocorrer só para n bastante grande, o que levaria a um aumento significativo no produtório de matrizes em M . Tal problema pode ser contornado pelo procedimento apresentado em (ECKMANN; RUELLE, 1985), no qual a matriz J é reescrita como $J = \Theta T$ em que Θ é uma matriz ortogonal ($\Theta^{-1} = \Theta^T$) e T é uma matriz triangular. Temos então:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

e

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

O uso dessas matrizes nos permite reescrever:

$$M = J_n J_{n-1} J_{n-2} \dots J_2 \Theta_1 \Theta_1^{-1} J_1. \quad (2.30)$$

Sendo $T_1 = \Theta_1^{-1} J_1$ e $J_2^* = J_2 \Theta_1$ podemos escrever:

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

onde podemos obter, olhando para o termo T_{21} que:

$$0 = -j_{11} \text{sen}(\theta) + j_{21} \cos(\theta), \quad (2.32)$$

o que nos permite obter expressões para $\text{sen}(\theta)$ e $\cos(\theta)$ em função dos termos de J :

$$\cos(\theta) = \frac{j_{11}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}, \quad (2.33)$$

$$\text{sen}(\theta) = \frac{j_{21}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}. \quad (2.34)$$

E podemos escrever $T_{11} = j_{11} \cos(\theta) + j_{21} \text{sen}(\theta)$ e $T_{22} = -j_{12} \text{sen}(\theta) + j_{22} \cos(\theta)$, isto é:

$$T_{11} = \frac{j_{11}^2 + j_{21}^2}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}, \quad (2.35)$$

$$T_{22} = \frac{j_{11} j_{22} + j_{21} j_{12}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}. \quad (2.36)$$

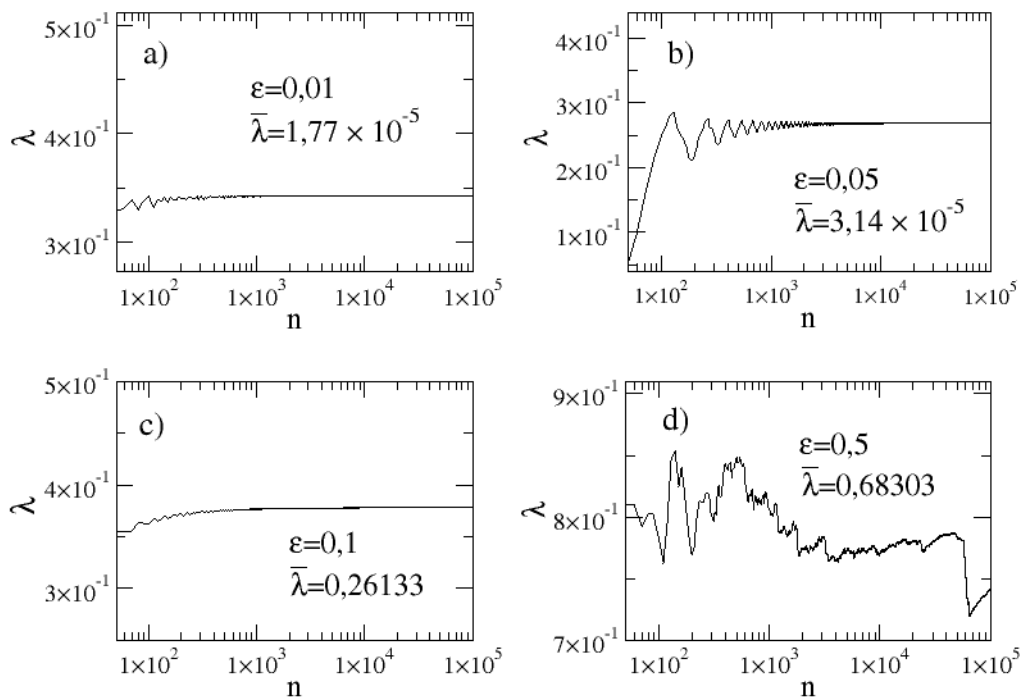
E agora que temos as expressões de T_{11} e T_{22} podemos determinar a matriz $J_2^* = J_2\Theta_1$. Sendo assim o procedimento deve ser repetido até que todas as matrizes $J_n, J_{n-1}, J_{n-2} \dots$ sejam percorridas. Uma vez feito isso podemos escrever os expoentes de Lyapunov por:

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |T_{jj}^{(i)}|, j = 1, 2. \quad (2.37)$$

Ainda podemos apontar que para sistemas conservativos, isto é, sem dissipação, a soma de todos os expoentes de Lyapunov será zero, enquanto que para sistemas dissipativos essa soma será negativa (CENCINI; CECCONI; VULPIANI, 2009).

Aplicando o procedimento apresentado acima para o sistema estudado pudemos obter os expoentes de Lyapunov para mapeamentos da Figura 8, apresentados na Figura 11.

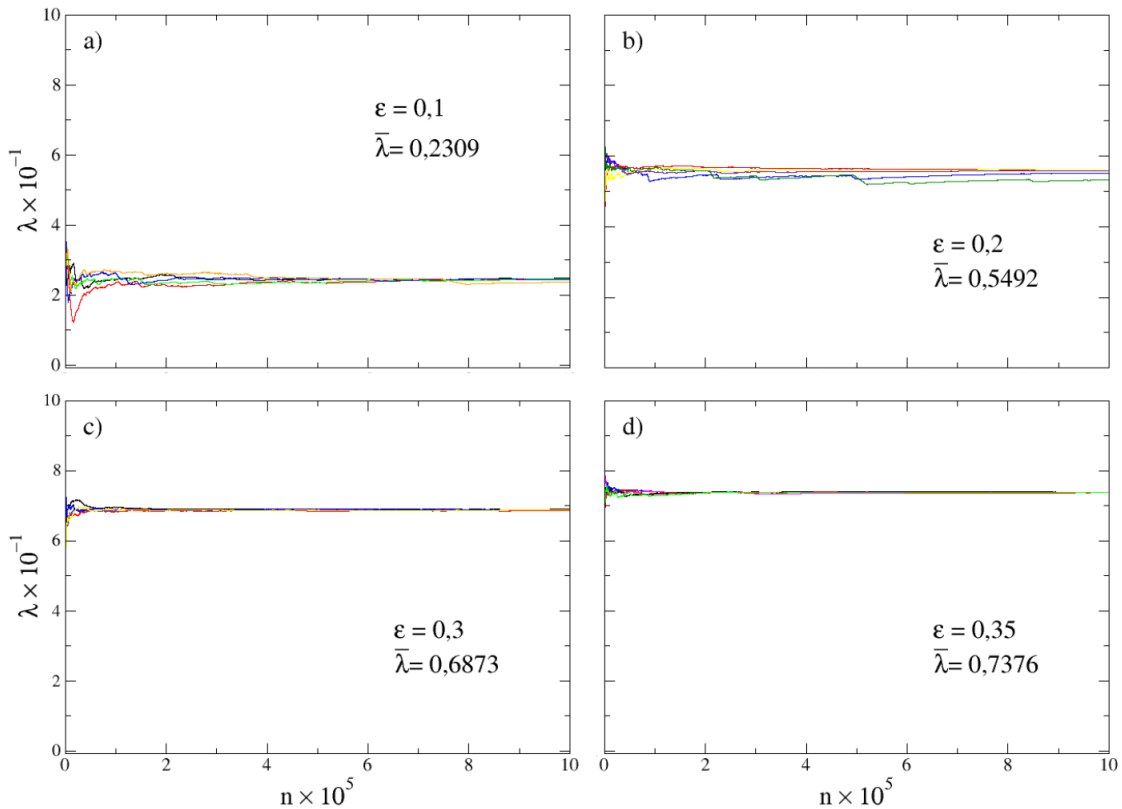
Figura 11 – Esboço dos expoentes de Lyapunov para $p = 2$ e diferentes valores de ϵ , o valor médio na região de saturação está apresentado na figura



Fonte: Produção do próprio autor.

Podemos, então, perceber valores muito próximos de zero para os casos onde predomina a regularidade no sistema, com os valores aumentando conforme o mar de caos aumenta. Vale notar que, mesmo variando as condições iniciais, os valores do expoente de Lyapunov irão convergir para um mesmo valor. Esse comportamento, para o caso do expoente positivo, pode ser observado na Figura 12, onde um conjunto de 5 condições iniciais para diferentes valores de ϵ foram iterados para $p = 2$ e a) $\epsilon = 0, 2$, b) $\epsilon = 0, 25$ e c) $\epsilon = 0, 3$. Também estão indicados, na Figura 12, os valores médios do expoente encontrados para cada valor de ϵ .

Figura 12 – Comportamento do expoente de Lyapunov positivo para $p = 2$ e a) $\epsilon = 0,2$, b) $\epsilon = 0,25$, c) $\epsilon = 0,3$ e d) $\epsilon = 0,35$. Os valores médios para o expoente estão novamente apresentados na figura



Fonte: Produção do próprio autor.

Sendo assim, tais valores mostram uma robustez na presença de caos no sistema, sendo essa informação bastante importante para a nossa análise nos capítulos seguintes. Podemos ainda perceber que a convergência ocorre de forma mais adequada em valores diferentes de ϵ por conta da diferença nos tempos de convergência necessários, possivelmente exigindo um número maior do que 10^6 iterações para estes casos esboçarem o comportamento de acordo com o limite descrito na expressão (2.37). O parâmetro ϵ atua então como um controle do tamanho do mar de caos no sistema, levando à destruição das ilhas de periodicidade e, seguidamente, das curvas invariantes, como visto na Figura 8. Podemos traçar um análogo entre tal parâmetro e o mecanismo desfocalizador no bilhar estádio. Nesse caso, para um comprimento suficientemente grande das paredes paralelas do bilhar as trajetórias após a colisão passam a divergir contanto que o tempo de vôo livre seja suficientemente longo, sendo um dos principais mecanismos responsáveis pela presença de caos no sistema (PAPENBROCK, 2000). Vale notar ainda que para valores suficientemente grandes de tal comprimento qualquer trajetória irá sofrer essa divergência, similar ao observado no objeto de estudo desse bilhar para $\epsilon > \epsilon_c$.

É importante apontar que o expoente de Lyapunov, mesmo sendo uma importante medida em sistemas caóticos, não é uma boa quantidade para a análise de, por exemplo, o transporte de partículas nesses sistemas, como veremos a seguir. Segundo Meiss (2015), os expoentes

de Lyapunov fornecem a taxa com a qual um desenho de um gato em uma região do espaço de fases (fazendo referência ao mapeamento do Gato de Arnold) se torna em uma versão "embaralhada" desse mesmo desenho, enquanto que constantes associadas ao transporte nos dão informações sobre a taxa com a qual partes do gato são transportadas para regiões do espaço de fases. Com isso em mente, a próxima seção deste trabalho é dedicada à análise de fenômenos de transporte para o bilhar ovóide no caso estático.

3 BILHAR OVÓIDE DEPENDENTE DO TEMPO

3.1 COMPORTAMENTO, LEIS DE ESCALA E RESULTADOS NUMÉRICOS

A introdução da dependência temporal em um bilhar ocorre através da sua fronteira e leva a energia da partícula não ser mais uma constante. Para tratar desse sistema é necessária a utilização de duas variáveis dinâmicas adicionais: a velocidade da partícula e o tempo em si, este último introduzido na própria expressão da fronteira. Esta passa a ser escrita por:

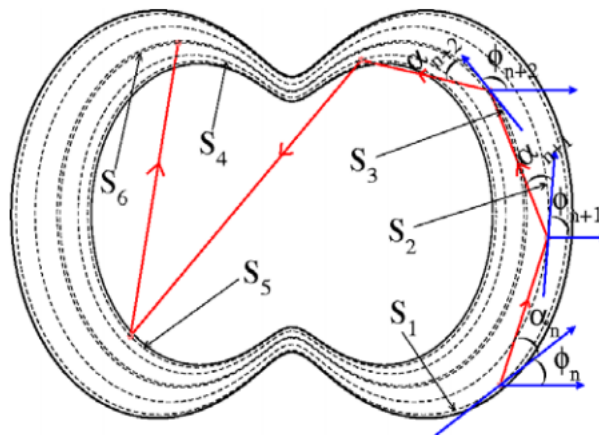
$$R = R_b(\theta, t), \quad (3.1)$$

levando a dinâmica da partícula a ser descrita por um mapeamento quadridimensional dado por:

$$T(\theta_n, \alpha_n, V_n, t_n) = (\theta_{n+1}, \alpha_{n+1}, V_{n+1}, t_{n+1}), \quad (3.2)$$

onde θ é a posição angular ao longo da fronteira em que ocorre o impacto, α é o ângulo que a trajetória da partícula faz com a tangente no instante do impacto, V é a velocidade absoluta da partícula e t é o instante do impacto propriamente dito. A aplicação, por meio do operador T das quatro variáveis no impacto n , nos fornece seu comportamento no impacto $n + 1$. Os efeitos da introdução da dependência temporal na fronteira podem ser vistos na Figura 13, abaixo.

Figura 13 – Esboço de seis colisões de uma partícula em um bilhar com a fronteira móvel, bem como os ângulos que descrevem a dinâmica



Fonte: (OLIVEIRA; LEONEL, 2010b).

Essa dependência temporal também afeta as coordenadas X e Y que definimos para o bilhar

ovóide estático, sendo agora dadas por:

$$X(\theta_n) = R(\theta_n, t_n)\cos(\theta_n) \quad (3.3)$$

$$Y(\theta_n) = R(\theta_n, t_n)\sen(\theta_n). \quad (3.4)$$

Introduzimos também o vetor que descreve a velocidade da partícula:

$$\vec{V}_n = |\vec{V}_n|[\cos(\phi_n + \alpha_n)\hat{i} + \sen(\phi_n + \alpha_n)\hat{j}], \quad (3.5)$$

e o ângulo ϕ_n é dado por:

$$\phi_n = \arctan \left[\frac{Y'(\theta_n, t_n)}{X'(\theta_n, t_n)} \right], \quad (3.6)$$

onde os apóstrofes novamente se referem à primeira derivada em relação a θ . Com todos esses elementos em mãos podemos escrever a posição da partícula em função de um instante arbitrário $t \geq t_n$ por:

$$X_p(t) = X(\theta_n, t_n) + |\vec{V}_n|\cos(\alpha_n + \phi_n)(t - t_n) \quad (3.7)$$

$$Y_p(t) = Y(\theta_n, t_n) + |\vec{V}_n|\sen(\alpha_n + \phi_n)(t - t_n). \quad (3.8)$$

Na notação por meio dos subíndices utilizada aqui, p denota que estamos nos referindo à partícula enquanto que b , à fronteira (do inglês *boundary*). A distância da partícula em relação à origem do sistema de coordenadas é dada por $R_p(t) = \sqrt{X_p^2(t) + Y_p^2(t)}$. A posição da partícula no momento da próxima colisão com a fronteira é, então, obtida igualando as expressões para $R_p(\theta_{n+1}, t_{n+1})$ e $R_b(\theta_{n+1}, t_{n+1})$. O instante da colisão é dado por:

$$t_{n+1} = t_n + \frac{\sqrt{[\Delta X_p]^2 + [\Delta Y_p]^2}}{|\vec{V}_n|}, \quad (3.9)$$

onde Δ representa a variação entre as expressões de X_p e Y_p entre θ_{n+1} e θ_n . A expressão para a velocidade da fronteira no instante do impacto é dada por:

$$\vec{V}_b(t_{n+1}) = \left. \frac{dR(t)}{dt} \right|_{t_{n+1}} [\cos(\theta_{n+1})\hat{i} + \sen(\theta_{n+1})\hat{j}]. \quad (3.10)$$

Por fim, a obtenção da velocidade da partícula deve considerar que não se trata mais de um referencial não inercial, devendo ser encontrada numericamente por meio do uso das seguintes leis de reflexão que devem ser respeitadas no instante do impacto (LEONEL, 2019):

$$\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1} = |\vec{V}_n|[\cos(\alpha_n + \phi_n)\cos(\phi_{n+1})] + |\vec{V}_n|[\sen(\alpha_n + \phi_n)\sen(\phi_{n+1})] \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \vec{V}_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1} = & -|\vec{V}_n|[-\cos(\alpha_n + \phi_n)\sen(\phi_{n+1})] - |\vec{V}_n|[\sen(\alpha_n + \phi_n)\cos(\phi_{n+1})] \\ & + 2\vec{V}_b(t_{n+1}) \cdot \vec{N}_{n+1}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde:

$$\vec{T}_{n+1} = \cos(\phi_{n+1})\hat{i} + \text{sen}(\phi_{n+1})\hat{j} \quad (3.13)$$

$$\vec{N}_{n+1} = -\text{sen}(\phi_{n+1})\hat{i} + \cos(\phi_{n+1})\hat{j}, \quad (3.14)$$

são vetores unitários e α_{n+1} é dado por:

$$\alpha_{n+1} = \arctan \left[\frac{\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1}}{\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1}} \right]. \quad (3.15)$$

Por fim, unimos esses elementos de forma a escrever a velocidade na colisão $n + 1$:

$$|\vec{V}_{n+1}| = \sqrt{(\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1})^2 + (\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1})^2}. \quad (3.16)$$

Estando definidas todas as equações necessárias para o estudo de bilhares dependentes do tempo, são necessários alguns apontamentos sobre o fenômeno de aceleração de Fermi e sua relação com a conjectura LRA, o que deixará mais claro nosso interesse no bilhar ovóide dependente do tempo.

A conjectura Loskutov-Ryabov-Akinshin, ou simplesmente LRA, enuncia que uma dinâmica caótica de partículas para um bilhar no caso estático é condição suficiente para o surgimento de difusão ilimitada na energia uma vez que a dependência temporal é introduzida na fronteira. Tal conjectura foi proposta tendo em vista resultados para o bilhar de Sinai, o estádio de Bunimovich e, o que é mais importante para o nosso caso, o bilhar ovóide (LOSKUTOV; RYABOV; AKINSHIN, 2000). Anos depois uma problemática em tal enunciado seria apontada por um grupo de pesquisadores ao analisarem o bilhar elíptico, que tem uma integrabilidade à variação dos parâmetros de controle para o caso estático e, ainda assim, apresenta difusão da energia para a fronteira dependente do tempo (LENZ; DIAKONOS; SCHMELCHER, 2008). Isso ocorre porque, uma vez introduzida a dependência temporal, diversas órbitas migram do regime de libração para o de rotação e vice-versa, tal migração é uma alternância nos valores do observável $F(\alpha, \theta)$, que é nulo ao longo da curva separatriz, positivo nas órbitas de rotação e negativo nas de libração, e subsequentemente ao surgimento de uma "camada estocástica" no sistema (LEONEL; BUNIMOVICH, 2010a). Tal camada é suficiente para causar uma destruição da curva separatriz encontrada no espaço de fases, levando as órbitas a apresentarem difusão de energia (LEONEL, 2019). A correção para este contraexemplo da conjectura seria apresentada anos depois na proposta de existência de uma órbita heteroclínica ao invés de porções de caos no espaço de fases como condição para a observação de difusão de energia (LEONEL; BUNIMOVICH, 2010a).

Vale notar que, como citado anteriormente, essa difusão ilimitada de energia é muitas vezes chamada de Aceleração de Fermi, sendo um mecanismo proposto pelo mesmo para a abordagem da dinâmica de raios cósmicos (FERMI, 1949) e comumente utilizado para a análise de sistemas

bilhares. No caso dos sistemas bilhares, a ênfase está principalmente na transição de fase caracterizada por tal crescimento ilimitado e em formas de suprimi-lo, como veremos adiante.

Feitas essas considerações, passemos para a análise do objeto de estudo: o bilhar ovóide dependente do tempo. Sua fronteira passa a ser descrita por:

$$R(\theta, \eta, t) = 1 + \epsilon f(t) \cos(p\theta), \quad (3.17)$$

com p sendo um inteiro, $\epsilon = 0$ correspondendo ao bilhar circular, que já vimos ser integrável, enquanto $\epsilon \neq 0$ fornece um espaço de fases misto para $f(t)$ constante, além de exibir aceleração de Fermi para o caso específico onde $f(t) = 1 + \eta \cos(t)$, assim como importantes propriedades de escala (LEONEL et al., 2016).

Pudemos constatar, no capítulo anterior, a presença de mares de caos no bilhar ovóide estático, tornando-o um bom candidato para apresentação de Aceleração de Fermi ao introduzirmos a dependência temporal. Esse sistema está, de fato, de acordo com a conjectura e cabe aqui a introdução de uma nova quantidade conveniente para o analisarmos: a velocidade média, dada por (REIF, 2008):

$$\bar{V} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n V_{i,j}, \quad (3.18)$$

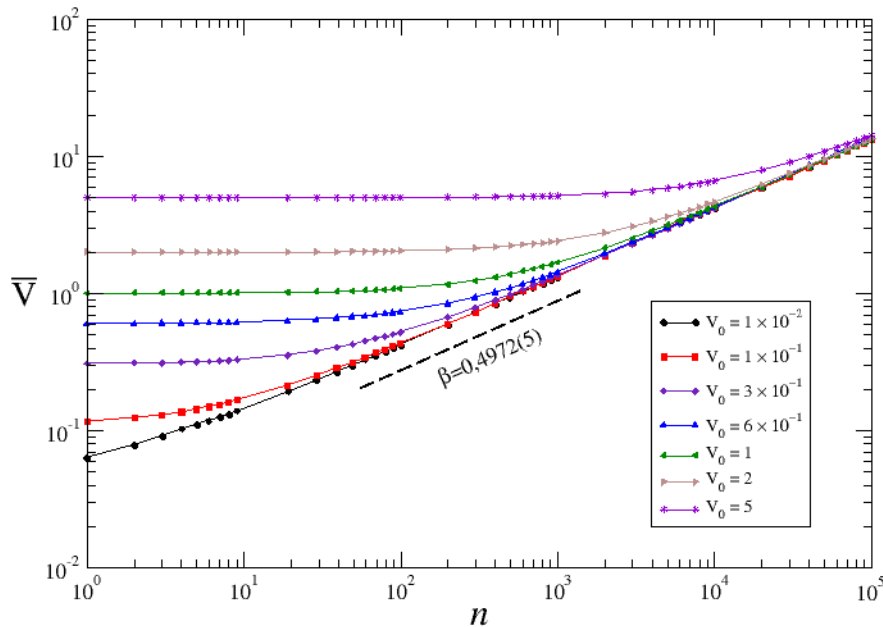
onde M identifica diferentes condições iniciais enquanto n identifica o número de colisões da partícula com a fronteira. Essa quantidade é de extrema relevância especialmente na caracterização da aceleração de Fermi, como veremos a seguir.

Vale notar que, como comentado anteriormente, por mais que o sistema apresentado acima pareça relativamente simples, existem uma série de desafios computacionais a serem transpostos para obtenção de uma solução fenomenológica. O método utilizado neste trabalho se baseou na descrição da fronteira por meio da equação (3.1), sendo definido um raio máximo passível de ser percorrido pela partícula levando em conta sua evolução temporal, como $R_{mx} = 2R_p$ onde as componentes dependentes de θ tem seu valor máximo. Feito isso uma partícula com uma velocidade inicial dada será evoluída seguindo as equações (3.3) a (3.8), com a estocasticidade sendo introduzida no sistema por meio de um número $Z \in (0, 2\pi)$ escolhido pelo gerador de números pseudoaleatório **xoshiro256**** (PRNG). Feito isso, a evolução para o próximo passo é feita por meio da obtenção do instante da colisão, sendo tal valor retornado às equações (3.7) e (3.8) e o processo repetido. Para obtenção de tal instante onde ocorre a colisão foi utilizada uma subrotina que, por meio do método da bisseção e de evoluções em incrementos de tempo dt da ordem de $R_{max}/V_n * 10^2$, registra os valores de t_n para os quais a diferença entre a posição da partícula e a posição da fronteira (R_p e R_b , respectivamente) está dentro de uma tolerância predefinida. Para os resultados obtidos neste trabalho o valor de tolerância utilizado foi da ordem de 10^{-12} . Ainda é necessária uma certa "filtragem" dos resultados obtidos para t_n uma vez que nem todos os valores encontrados para $R_p = R_b$ representam resultados possíveis fisicamente (não é permitido, por exemplo, que a partícula passe para fora da fronteira), sendo assim certas

condições são impostas em tais resultados de forma a garantir que os resultados retornados sejam válidos para o sistema. Tais condições incluem que a expressão encontrada seja apenas real e que o argumento das componentes esteja entre 0 e 2π . Encontrado o momento da colisão, as expressões (3.10) a (3.16) são utilizadas para obtermos a velocidade da partícula a cada iteração, sendo feita a média por meio da expressão (3.18). O procedimento é repetido para uma grade de $10^4 \times 10^4$ condições iniciais, permitindo a obtenção das figuras de \bar{V} apresentadas nesse texto.

Na Figura 14 podemos ver o comportamento da quantidade indicada pela equação (3.18) para diferentes velocidades iniciais utilizando os parâmetros $\epsilon = 0,08$, $p = 3$ e $\eta = 0,5$.

Figura 14 – Comportamento da velocidade média *vs.* *n* para diferentes velocidades iniciais e parâmetros de controle $\epsilon = 0,08$, $p = 3$ e $\eta = 0,5$



Fonte: Produção do próprio autor.

A partir da figura podemos notar que, mesmo com condições iniciais diferentes, temos uma repetição de três comportamentos. Primeiramente, para velocidades iniciais V_0 suficientemente pequenas, a velocidade média cresce seguindo uma lei de potência que pode ser escrita de forma geral como $\bar{V} \propto n^\beta$. A partir das curvas construídas podemos obter o valor indicado na figura por $\beta = 0,4972(5)$ ou $\beta \approx 0,5$. Também nota-se, a medida que a velocidade inicial cresce, podemos observar um platô para tempos curtos e, eventualmente, as curvas atingem um número de colisões de *crossover*, n_x , e passam a descrever o comportamento descrito pela lei de potência citada anteriormente. Podemos escrever, então, que para $n \ll n_x$ temos $\bar{V}_{plat} \propto V_0^\alpha$ onde podemos, intuitivamente, determinar que $\alpha = 1$, uma vez que se trata de um platô constante. Por fim, podemos escrever o número de colisões de *crossover* descrito por $n_x \propto V_0^z$. Aqui α , β e

z são expoentes críticos e esses três comportamentos (também chamados de hipóteses de escala) podem ser associados a uma função homogênea generalizada.

O propósito de se determinar tal função está em estabelecermos uma relação entre os três expoentes onde, conhecendo dois deles, podemos determinar o terceiro. Além disso, o fato de todas as curvas obedecerem a tais hipóteses indica o comportamento conhecido como "invariância de escala". Tal invariância de escala é justamente o fenômeno observado onde o comportamento das curvas para diferentes condições essenciais é o mesmo, mudando apenas a sua escala, como se fizéssemos um mesmo barco de papel com folhas de tamanho progressivamente maior. Este comportamento permite que, com as transformações corretas nos eixos, possamos sobrepor as curvas de \bar{V} em uma única curva, chamada de "curva universal", como apresentado na Figura 15. A função homogênea generalizada em questão é, então:

$$\bar{V}(n, V_0) = l\bar{V}(l^a n, l^b V_0), \quad (3.19)$$

em que l é um fator de escala e a e b são expoentes característicos que serão, e devem, ser relacionados com os expoentes críticos. Sendo l um fator de escala podemos definí-lo da forma que for conveniente. Definindo $l^b V_0 = 1$ temos $l = V_0^{-1/b}$ e:

$$\bar{V}(n, V_0) = V_0^{-1/b} \bar{V}(l^{-a/b} n, 1), \quad (3.20)$$

em que assumimos que a função $\bar{V}(l^{-a/b} n, 1)$ é constante no regime de tempos curtos, ou seja, $n \ll n_x$. Comparando esta equação com a hipótese de escala para este momento encontramos:

$$V_0^{-1/b} = V_0^\alpha \rightarrow \alpha = -1/b. \quad (3.21)$$

Agora tomando $l^a n = 1$ temos $l = n^{-1/b}$, onde a função se torna:

$$\bar{V}(n, V_0) = n^{-1/a} \bar{V}(1, l^{-b/a} V_0). \quad (3.22)$$

Em que assumimos que $\bar{V}(1, l^{-b/a} V_0)$ também apresenta comportamento constante para tempos longos, isto é $n \gg n_x$. Comparando este casos com a hipótese escala que descreve o crescimento em lei de potência temos:

$$n^{-1/a} = n^\beta \rightarrow \beta = -1/a. \quad (3.23)$$

Por fim, comparando as duas expressões obtidas para l encontramos que, na iteração de *crossover* $n = n_x$ e:

$$V_0^{-1/b} = n_x^{-1/a} \rightarrow n_x = V_0^{a/b}. \quad (3.24)$$

Substituindo as relações encontradas para α e β temos:

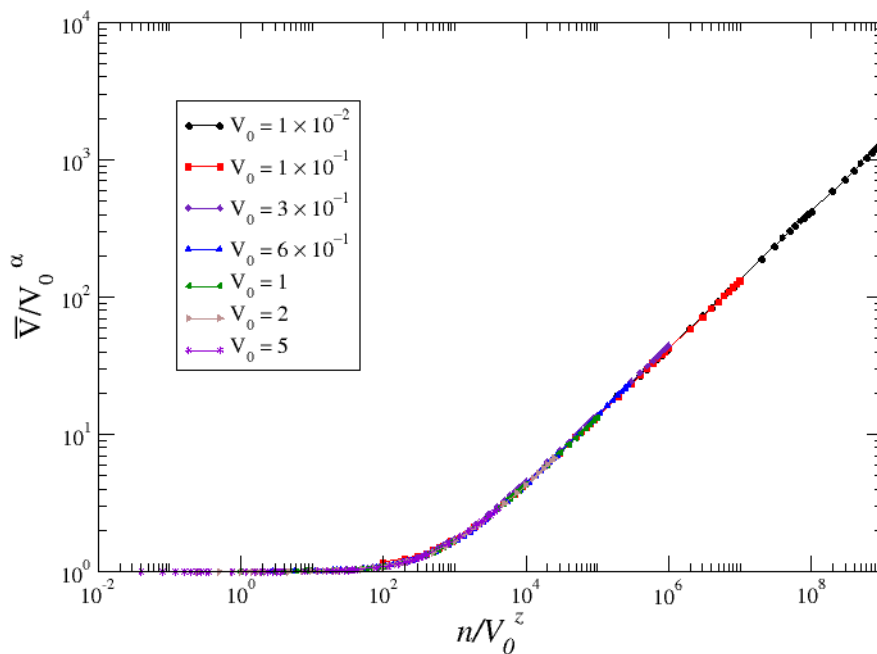
$$n_x = V_0^{\alpha/\beta}, \quad (3.25)$$

que comparada com a nossa hipótese de escala para o *crossover* nos dá a lei de escala:

$$z = \alpha/\beta, \quad (3.26)$$

que nos permite encontrar $z = 2,011(0)$ ou $z \approx 2$. Tais expoentes de escala podem ser validados a partir de transformações de escalas específicas a serem feitas nos eixos permitindo a sobreposição das curvas mostradas na Figura 14 em uma única curva universal. As transformações usadas para obtenção da Figura 15 foram $\bar{V} \rightarrow \bar{V}/V_0^\alpha$ e $n \rightarrow n/V_0^z$.

Figura 15 – Sobreposição das curvas da Figura 14 em uma única curva universal utilizando as transformações $\bar{V} \rightarrow \bar{V}/V_0^\alpha$ e $n \rightarrow n/V_0^z$



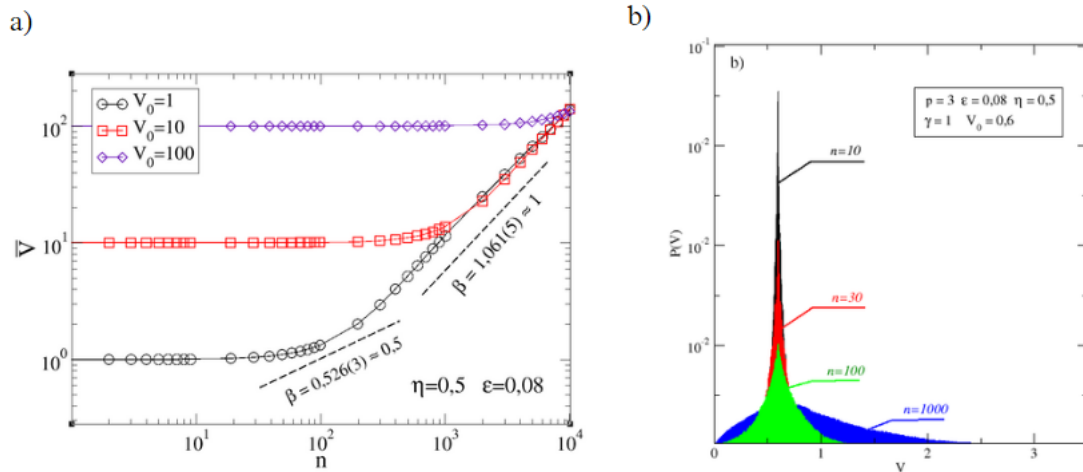
Fonte: Produção do próprio autor.

No caso em questão é interessante apontar que a existência de tal platô tem sua origem justamente associada à distribuição de velocidades no *ensemble* em um primeiro momento, onde parte das partículas apresenta crescimento de velocidade e outra, desaceleração. Tal distribuição já foi citada anteriormente para o caso das probabilidades e sua simetria, na forma de uma Gaussiana, é quebrada justamente na iteração de *crossover*, levando à mudança de regime (LEONEL, 2019). Também é interessante notar que, para um número ainda maior de colisões, da ordem de 10^9 , o sistema passa para um regime de aceleração ainda maior. β passa de 0,5 para 1, no que é chamado "regime de superdifusão" (HANSEN et al., 2018).

Para entendermos a causa de tal fenômeno é importante lembrarmos que, considerando que todas as partículas começam sua trajetória com a mesma velocidade e em uma posição aleatória, cada uma delas pode ganhar ou perder energia ao colidir com a fronteira móvel. Se olharmos para

todo o conjunto de partículas temos aproximadamente o mesmo número de partículas ganhando e perdendo velocidade, sendo assim a média das velocidades tende a não variar tanto após as colisões. A superdifusão surge do fato de esse fenômeno não poder continuar indefinidamente uma vez que temos um limite inferior para a velocidade (zero) porém não temos nenhum limite superior. Sendo assim, as partículas que atingem o limite inferior só podem ganhar energia ao colidirem e quando um número suficientemente grande de partículas atinge esse limite ocorre uma quebra da simetria que citamos anteriormente. Temos, então, um *crossover* entre dois diferentes regimes de crescimento da velocidade. Os comportamentos discutidos aqui podem ser observados na Figura 16.

Figura 16 – a) Gráfico da velocidade média \bar{V} vs. n onde ocorre um segundo *crossover*, iniciando o regime de superdifusão com expoente $\beta \approx 1$; b) Distribuição das probabilidades para um conjunto de 3500 partículas após diferentes números de colisões. Os parâmetros utilizados estão indicados na figura.



Fonte: a)(HANSEN et al., 2018); b) Produção do próprio autor.

É importante apontar ainda que tal formato descentralizado da distribuição das velocidades, diferente da Gaussiana que vimos para o mapa padrão dissipativo, levará a diferentes condições de contorno quando partirmos para a descrição analítica do problema por meio da solução da equação de Difusão, sendo uma das principais contribuições originais deste trabalho. A discussão em maiores detalhes do porquê desta distribuição ocorrerá na seção 4.2.

3.2 ANÁLOGO TERMODINÂMICO

Como citado anteriormente, sistemas bilhares com fronteiras dependentes do tempo podem ser associados a situações comuns no mundo físico. Se pensarmos na mudança de posição de cada átomo devido a flutuações térmicas, por exemplo, uma fronteira poderia se mover dentro de uma certa região. Tal oscilação dos átomos e da fronteira são descritos pelo formalismo de bilhares dependentes do tempo, permitindo que a velocidade da partícula seja relacionada com outras grandezas tais como a energia cinética e, no caso da termodinâmica, a temperatura e a

entropia (LEONEL et al., 2016). Tendo isso em mente, o objetivo dessa seção será abordar o análogo termodinâmico por meio da solução da equação de calor de Fourier, definida a seguir, e associaremos tal resultado com o que foi observado na seção 3.1.

Assumimos, então, um conjunto de partículas idênticas, com densidade pequena o suficiente para que possam ser consideradas não interagentes, se movendo dentro da fronteira que se move no tempo. Como comentado anteriormente, as colisões da partícula com a fronteira são responsáveis por trocas de energia com as partículas. Podemos assumir ainda que a fronteira, além de ter temperatura fixa T_b que não é afetada pelas partículas, age como um banho térmico que deve absorver ou fornecer energia para as partículas caso suas temperaturas sejam, respectivamente, maiores ou menores que T_b até que seja alcançado o equilíbrio, como enunciado pelas leis da Termodinâmica. Aqui nos referimos à temperatura no sentido usual, isto é, a medida da energia cinética média de cada uma das partículas de um sistema em equilíbrio térmico, sendo equilíbrio térmico o estado onde, após realizada troca de calor entre os sistemas em questão, todos apresentam uma mesma temperatura (REIF, 2008).

A descrição do comportamento das partículas segue então a Hamiltoniana citada na seção 1.1 e todas as expressões abordadas na seção 3.1. Assumimos ainda, na simulação numérica, que uma fase aleatória $Z(t)$, com $Z \in [0, 2\pi]$, é introduzida de forma que a velocidade da fronteira seja $V_b = \frac{d}{dt} \vec{R}_b(t + Z(t))$, o que introduz aleatoriedade no modelo.

Retomando a descrição do processo de transferência de calor podemos nos referir à equação (REIF, 2008):

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\kappa l \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (3.27)$$

onde κ é o coeficiente de condutividade de calor, l é o comprimento ao longo da fronteira por onde o calor pode fluir, sendo $\frac{\partial Q}{\partial t}$ justamente esse fluxo de calor para uma região com uma variação de temperatura ΔT e $\frac{\partial T}{\partial x}$ sendo a variação na temperatura. É importante apontar que estamos considerando que o fluxo ocorre apenas na fronteira no bilhar, justificando a escolha da versão em duas dimensões da expressão mais genérica para o fluxo $\vec{J} = -\kappa A \vec{\nabla} T$ onde o sinal denota justamente que o sentido desse é contrário ao gradiente da temperatura (da maior para a menor). Continuando nossa discussão podemos ainda encontrar l por meio de:

$$l = \int_0^{2\pi} R(\theta, \eta, \epsilon, p, t) d\theta = \int_0^{2\pi} [1 + \eta[1 + \epsilon \cos(t)] \cos(p\theta)] d\theta = 2\pi. \quad (3.28)$$

Para resolvermos a equação (3.27) precisamos, então, obter as expressões de $\frac{\partial Q}{\partial t}$ e $\frac{\partial T}{\partial x}$. Sabemos que as interações entre partículas não são consideradas. Sendo assim, a energia de cada partícula é justamente sua energia cinética e temos, do teorema de equipartição de energia:

$$\frac{1}{2} m \overline{V^2}(t) = kT(t), \quad (3.29)$$

onde k é a constante de Boltzmann e $\overline{V^2}$ indica a velocidade quadrática média do conjunto

de partículas. Estabelecemos, então, uma relação bastante direta entre a velocidade média e a temperatura do sistema, o que será muito útil na nossa análise quando estudarmos o sistema bilhar. Podemos ainda utilizar da relação entre a variação de temperatura e o calor transferido $dQ = cdT$, onde $c = kN_p$ para um gás ideal, e fornece sua capacidade térmica para um conjunto de N_p partículas. A equação (3.27) se torna, então

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{cm}{2k} \frac{\partial \overline{V^2}(t)}{\partial t}. \quad (3.30)$$

Agora para obtermos $\frac{\partial T}{\partial x}$ podemos recorrer à aproximação abaixo, levando em conta que tal variação apenas pode ocorrer na zona de colisão:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{T - T_b}{\Delta x}, \quad (3.31)$$

onde, para obtermos Δx podemos considerar os dois extremos que a fronteira pode ter: (i) um raio máximo dado por $R_{max} = 1 + \eta(1 + \epsilon)\cos(p\theta)$ e (ii) um raio mínimo dado por $R_{min} = 1 + \eta(1 - \epsilon)\cos(p\theta)$. A variação é $\Delta R = R_{max} - R_{min} = 2\eta\epsilon\cos(p\theta)$. Esse valor não é constante, uma vez que depende de θ . Como alternativa recorreremos à aproximação $\Delta x = \sqrt{(\overline{\Delta R})^2}$, usando a propriedade $\overline{\Delta R} = 0$. Este valor é calculado por:

$$\overline{(\Delta R)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 4\eta^2\epsilon^2\cos^2(p\theta)d\theta = 2\eta^2\epsilon^2. \quad (3.32)$$

Temos, então, $\Delta x = \sqrt{2}\eta\epsilon$ e podemos incorporar a expressão (3.31), com este resultado, na expressão (3.27)

$$\frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{T - T_b}{\sqrt{2}\eta\epsilon}, \quad (3.33)$$

que, pelo teorema em (3.29), se torna:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{\frac{m}{2k}\overline{V^2}(t) - T_b}{\sqrt{2}\eta\epsilon}. \quad (3.34)$$

E retornando este resultado, junto com a expressão (3.30), em (3.27) temos finalmente:

$$\frac{cm}{2k} \frac{\partial \overline{V^2}(t)}{\partial t} = -\kappa l \left[\frac{\frac{m}{2k}\overline{V^2}(t) - T_b}{\sqrt{2}\eta\epsilon} \right], \quad (3.35)$$

uma equação diferencial de primeira ordem que nos fornece, para $\overline{V^2}$:

$$\overline{V^2}(t) = \frac{2k}{m}T_b + [T_0 - T_b] \exp\left(\frac{-2\pi\kappa}{\sqrt{2}\eta\epsilon}t\right). \quad (3.36)$$

E, do teorema da equipartição isso nos dá, para a temperatura

$$T(t) = T_b + [T_0 - T_b] \exp\left(\frac{-2\pi\kappa}{\sqrt{2}\eta\epsilon}t\right). \quad (3.37)$$

Da expressão (3.37) podemos analisar duas diferentes situações:

1. Para $T_0 \ll T_b$, a expressão se torna $T(t) \approx T_b + T_0 \exp\left(\frac{-2\pi\kappa}{\sqrt{2}\eta\epsilon}t\right)$, o que indicaria um decaimento exponencial para tempos curtos e a convergência para um estado estacionário $T(t) = T_b$, para $t \rightarrow \infty$;
2. Para $T_0 \gg T_b$, podemos expandir a expressão em série de Taylor, encontrando:

$$T(t) = T_b \frac{2\pi\kappa}{\sqrt{2}\eta\epsilon}t,$$

ou seja, a temperatura cresce para tempos curtos, indicando também que a velocidade quadrática cresce com \sqrt{t} e, eventualmente, a temperatura também irá convergir para o estado estacionário $T(t) = T_b$, para $t \rightarrow \infty$.

Os dois comportamentos apontados acima estão em perfeita conformidade com o que seria esperado de um sistema físico. Apesar disso, eles são discrepantes daqueles encontrados para o bilhar ovóide dependente do tempo na seção anterior: não temos um crescimento ilimitado da temperatura como seria consequência da aceleração de Fermi observada, muito menos uma aceleração em tal ganho de temperatura associada a uma superdifusão. Tal discrepância é solucionada pelo fato de que a Aceleração de Fermi não é um fenômeno robusto, podendo ser suprimido pela introdução de forças de arrasto ou, como faremos a seguir, de dissipação parcial na energia das partículas a cada colisão com a fronteira do recipiente. Essa perda é esperada fisicamente e veremos no capítulo seguinte que a introdução do fator γ , onde $0 < \gamma < 1$, ($\gamma = 1$ indica que não houve perda de energia enquanto $\gamma < 1$ representa uma perda fracional na mesma), que a caracteriza, nas expressões associadas ao bilhar, leva ao comportamento esperado fisicamente para o análogo termodinâmico. Essa análise dessa seção mostra, então, a importância do nosso tópico de estudo também na análise de sistemas físicos diversos e estudaremos ainda, com maior ênfase, a transição entre os dois comportamentos, ou seja, a transição de fase que ocorre conforme $\gamma \rightarrow 1$.

4 BILHAR OVÓIDE DEPENDENTE DO TEMPO DISSIPATIVO

No capítulo 3, ao analisarmos o análogo termodinâmico proposto para o bilhar ovóide dependente do tempo, percebemos a necessidade de suprimir o ganho ilimitado de energia (ou aceleração de Fermi) para que os resultados estejam de acordo com o observado experimentalmente. Para isso, iremos supor que as partículas do gás, ao colidirem com a fronteira do recipiente, experimentam perdas fracionais de energia.

Colisões inelásticas representam um entre diversos mecanismos possíveis na supressão de tal difusão ilimitada. Dentre eles também poderíamos citar a introdução de forças de arrasto viscoso, tanto da ordem de $-V$ quanto de $-V^2$ e, de forma mais geral, $-V^\delta$ (com $1 < \delta < 2$) (LEONEL, 2019). O impacto que tais colisões inelásticas apresenta no nosso sistema está especialmente nas leis de reflexão apresentadas no capítulo 2: apesar de os vetores unitários \vec{T}_{n+1} e \vec{N}_{n+1} se manterem os mesmos, há a necessidade de introduzir nas equações das leis de reflexão o termo $\gamma \in [0, 1]$, que representa o coeficiente de restituição. O uso de tal coeficiente é comum ao tratarmos de colisões, sendo $\gamma = 1$ representativo de uma colisão elástica, isto é, uma colisão onde não ocorre nenhuma perda de energia cinética, enquanto que valores de $\gamma < 1$ representam uma perda fracional de energia em cada colisão, também conhecidas como colisões inelásticas. As equações se tornam, então:

$$\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1} = \vec{V}_n \cdot \vec{T}_{n+1} \quad (4.1)$$

$$\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1} = -\gamma \vec{V}_n \cdot \vec{N}_{n+1} + (1 + \gamma) \vec{V}_b(t_{n+1} + Z(n)) \cdot \vec{N}_{n+1}, \quad (4.2)$$

onde $Z(n) \in [0, 1]$ é um número aleatório cujo objetivo é introduzir estocasticidade no modelo, em acordo com os muitos graus de liberdade de cada um dos átomos que constituem o bilhar e \vec{V}_b é dada pela mesma expressão (3.10), derivada temporal da fronteira, e novamente vale a expressão (3.16), replicada abaixo:

$$|\vec{V}_{n+1}| = \sqrt{(\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1})^2 + (\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1})^2}.$$

Vale apontar que tal introdução feita na componente normal ao invés de na tangencial busca deixar explícita uma mudança na energia da partícula, sem necessariamente alterar o ângulo de reflexão, como seria causado pela introdução do parâmetro em (4.1), sendo assim tomamos que para tal caracterização uma possível dissipação em $\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1}$ seria descrita por $\vec{V}_n \cdot \vec{T}_{n+1}$, onde aqui tomamos apenas $\kappa = 1$.

A proposta de tais colisões inelásticas serem capazes de suprimir a aceleração de Fermi é corroborada pelo teorema de Liouville, uma vez que a sua presença levaria à existência de atratores no espaço de fases, garantindo que o sistema evolua para um estado de equilíbrio termodinâmico condizente com o esperado. Segundo este teorema, para sistemas conservativos

ou fluxos Hamiltonianos, os volumes encerrados pelas trajetórias nos espaços de fases se conservam. Em outras palavras, temos $\mu(A) > 0$, μ a medida de Liouville, no espaço de fases. Vale notar ainda que tal supressão da aceleração de Fermi é robusta mesmo para velocidades iniciais maiores, como será demonstrado a seguir.

As ilhas de periodicidade e os mares de caos que vimos anteriormente também se enquadram nessa definição. No mar de caos, por exemplo, uma única órbita pode preencher todo um espaço de fases, o que está associado a uma medida de Liouville positiva e uma dinâmica dita ergódica. Já as ilhas de periodicidade tem sua medida dada por uma função do espaço de fases (BUNIMOVICH, 1979), sendo o volume da ilha a integral sobre essas funções.

Retornando ao estudo das velocidades, para investigarmos a velocidade de conjunto de partículas, assumimos que a velocidade obedece uma distribuição de probabilidades uniforme no espaço de fases dado pelos ângulos α e θ , como já foi discutido na seção 3.2 e observado para quando introduzimos a estocasticidade por meio de $Z(n)$. Sendo assim, tomamos, então, a média da expressão de $|V_{n+1}^{\rightarrow}|$ para θ nos intervalos $t \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\alpha \in [0, \pi]$, obtendo:

$$\overline{V_{n+1}^2} = \frac{(1 + \gamma^2)\overline{V_n^2}}{2} + \frac{(1 + \gamma)^2\eta^2\epsilon^2}{8}. \quad (4.3)$$

É importante notar que a realização de tais médias leva às componentes de seno e cosseno a desaparecerem devido ao comportamento de tais funções. Por tal motivo, ao tratarmos da velocidade média serão referidas apenas às constantes η e ϵ , e não mais p . Além disso, um maior detalhamento do procedimento para obtenção de tais médias pode ser encontrado em (LEONEL et al., 2020) e (MIRANDA et al., 2021). Dessa expressão podemos estudar tanto o regime descrito pelo platô obtido para quando o sistema atinge a temperatura de equilíbrio, dito estacionário, quanto para o regime dinâmico. Para o regime estacionário, escrevemos $\overline{V_{n+1}^2} = \overline{V_n^2} = \overline{V^2}$. Isolando $\overline{V^2}$ obtemos, então:

$$\overline{V^2} = \frac{(1 + \gamma)\eta^2\epsilon^2}{4(1 - \gamma)}. \quad (4.4)$$

Definindo ainda $\overline{V} = \sqrt{\overline{V^2}}$, encontramos:

$$\overline{V} = \frac{\eta\epsilon}{2} \sqrt{(1 + \gamma)(1 - \gamma)^{-1/2}}. \quad (4.5)$$

Já para o regime dinâmico, podemos usar da aproximação:

$$\overline{V_{n+1}^2} - \overline{V_n^2} = \frac{\overline{V_{n+1}^2} - \overline{V_n^2}}{(n + 1) - n} \simeq \frac{d\overline{V^2}}{dn}, \quad (4.6)$$

que nos leva a:

$$\frac{d\overline{V^2}}{dn} = \frac{\overline{V^2}}{2}(\gamma^2 - 1) + \frac{(1 + \gamma)^2\eta^2\epsilon^2}{8}. \quad (4.7)$$

Uma integração simples considerando uma velocidade inicial V_0 na iteração $n = 0$ fornece:

$$\overline{V^2}(n) = \overline{V_0^2} e^{\frac{(\gamma^2-1)n}{2}} + \frac{(1+\gamma)}{4(1-\gamma)} \eta^2 \epsilon^2 [1 - e^{\frac{(\gamma^2-1)n}{2}}]. \quad (4.8)$$

A expressão acima nos permite observar dois comportamentos. Para velocidades iniciais $V_0 \gg \frac{(1+\gamma)^{1/2}}{2(1-\gamma)^{-1/2}} \eta \epsilon$, leva a velocidade a ter um decaimento exponencial de forma:

$$\overline{V}(n) \simeq V_0 e^{\frac{\gamma^2-1}{4}n} \simeq V_0 e^{\frac{\gamma-1}{2}n}. \quad (4.9)$$

O outro comportamento ocorre quando temos uma velocidade inicial suficientemente pequena de tal forma que $V_0 \approx 0$ e a expressão dominante para $\overline{V}(n)$ se torna:

$$\overline{V}(n) = \frac{(1+\gamma)^{1/2}}{2} (1-\gamma)^{-1/2} \eta \epsilon \left[1 - e^{\frac{\gamma-1}{2}n} \right]^{1/2}, \quad (4.10)$$

que, ao ser expandida em série de Taylor, se torna:

$$\overline{V}(n) \approx \eta \epsilon \sqrt{n}. \quad (4.11)$$

Tais resultados serão de grande valia para a próxima seção, onde repetiremos o procedimento das leis de escala realizado no capítulo 3, agora para o caso com dissipação.

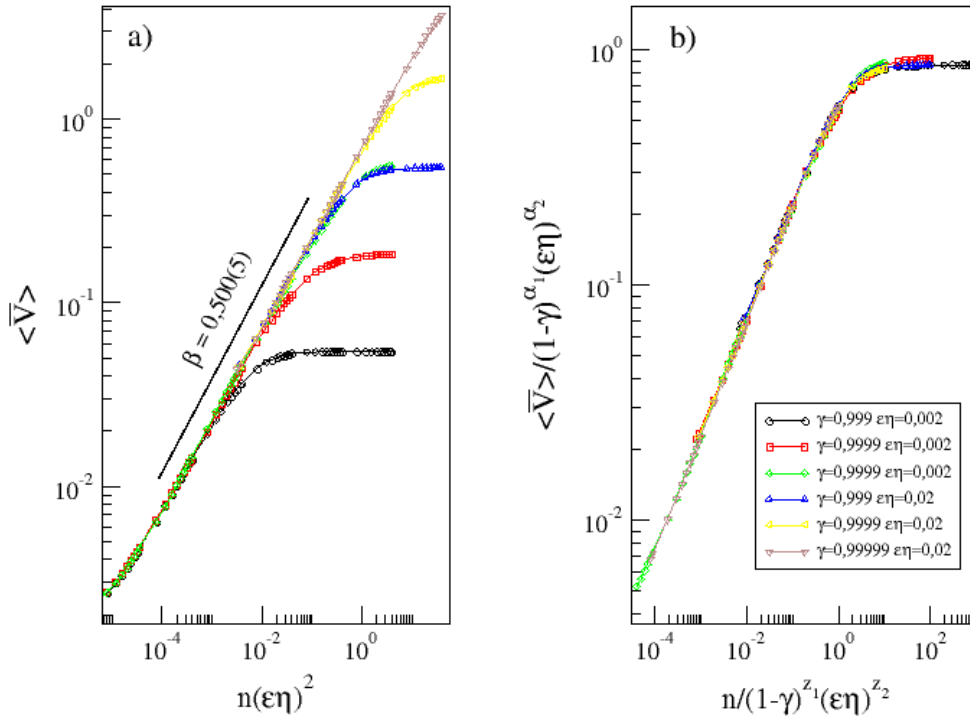
4.1 RESULTADOS NUMÉRICOS E LEIS DE ESCALA

Agora, já bem estabelecidas as equações que descrevem o bilhar ovóide dependente do tempo, iremos discutir o comportamento da velocidade quadrática média obtido a partir de simulações computacionais.

Como citado anteriormente, aqui estamos interessados em estudar o regime de transição entre o caso dissipativo e o caso conservativo (tratado anteriormente), uma vez que é esperado que, para $0 < \gamma < 1$, o crescimento não seja mais ilimitado e um estado estacionário seja obtido para tempos suficientemente longos. Sendo assim, estamos interessados no limite $\gamma \rightarrow 1$ e um bom parâmetro de controle é $(1 - \gamma)$. As simulações numéricas foram feitas considerando uma velocidade inicial $V_0 = 10^{-3}$, com os parâmetros variando nos intervalos $\gamma \in [0, 99999; 0, 999]$, $\eta \epsilon \in [0, 002; 0, 02]$ e ângulos iniciais $\alpha_0 \in [0, \pi]$ e $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ e o tempo inicial $t \in [0, 2\pi]$ escolhido aleatoriamente. Também temos o número aleatório $Z(n) \in [0, 1]$ introduzido na velocidade da fronteira. As médias também são feitas ao longo das órbitas e das diferentes condições iniciais, conforme a expressão (3.18), para aproximadamente 2000 condições iniciais. A Figura 17 mostra o comportamento da velocidade média para diferentes valores de γ e de $\eta \epsilon$.

Similarmente ao que foi feito para o caso sem dissipação, a partir das curvas exibidas na Figura 17 podemos perceber três diferentes comportamentos que são comuns a todas as curvas. Para valores pequenos de n , a velocidade cresce com uma lei de potência e eventualmente atinge

Figura 17 – a) Curvas de $\langle \bar{V} \rangle$ vs. n para diferentes combinações dos parâmetros γ e $\eta\epsilon$. b) *Overlap* das curvas mostradas em a) em uma única curva universal após feitas as transformações indicadas.



Fonte: Produção do próprio autor.

um regime de saturação para valores de n suficientemente altos. Essa mudança de comportamento de crescimento para saturação ocorre na chamada iteração de *crossover* n_x , como discutido na situação anterior. A partir da construção das curvas para diferentes combinações de parâmetros, foi possível notar que uma transformação do eixo das abcissas de n para $n(\eta\epsilon)^2$, baseada no formalismo de (LEONEL et al., 2016), permite a sobreposição do regime de crescimento dessas diferentes curvas, fenômeno típico de sistemas que apresentam invariância de escala.

A partir do comportamento observado no item a) podemos propor as seguintes hipóteses de escala:

1. Para valores de $n \ll n_x$, o regime de crescimento é descrito por $\langle \bar{V} \rangle \propto [(\eta\epsilon)^2 n]^\beta$ onde β é o expoente de aceleração;
2. Para valores de $n \gg n_x$, o regime de saturação é descrito por $\langle \bar{V}_{sat} \rangle \propto (1 - \gamma)^{\alpha_1} (\eta\epsilon)^{\alpha_2}$, onde α_1 e α_2 são expoente de saturação;
3. A iteração de *crossover* que marca a mudança de regime é dada por $n_x \propto (1 - \gamma)^{z_1} (\eta\epsilon)^{z_2}$.

Como feito anteriormente, as três hipóteses de escala permitem que o comportamento da velocidade média seja descrito por uma única função homogênea generalizada dada por:

$$\langle \bar{V} \rangle [(\eta\epsilon)^2 n, \eta\epsilon, (1 - \gamma)] = l \langle \bar{V} \rangle [l^a (\eta\epsilon)^2 n, l^b \eta\epsilon, l^d (1 - \gamma)], \quad (4.12)$$

onde podemos atribuir certos valores para l de forma a obter uma relação entre os expoentes críticos. Começamos tomando:

$$l^a (\eta\epsilon)^2 n = 1 \rightarrow l = [(\eta\epsilon)^2 n]^{-1/a}, \quad (4.13)$$

e temos então:

$$\langle \bar{V} \rangle [(\eta\epsilon)^2 n, \eta\epsilon, (1 - \gamma)] = [(\eta\epsilon)^2 n]^{-1/a} \langle \bar{V} \rangle [1, l^{-b/a} \eta\epsilon, l^{-d/a} (1 - \gamma)], \quad (4.14)$$

onde assumimos que $\langle \bar{V} \rangle [1, l^{-b/a} \eta\epsilon, l^{-d/a} (1 - \gamma)]$ apresenta comportamento constante para tempos curtos. Sendo assim, comparamos este caso com a hipótese de escala que descreve o crescimento em lei de potência e temos:

$$[(\eta\epsilon)^2 n]^{-1/a} = [(\eta\epsilon)^2 n]^\beta. \quad (4.15)$$

Encontrando $\beta = -1/a$. Agora tomando:

$$l^b \eta\epsilon = 1 \rightarrow l = (\eta\epsilon)^{-1/b}, \quad (4.16)$$

temos:

$$\langle \bar{V} \rangle [(\eta\epsilon)^2 n, \eta\epsilon, (1 - \gamma)] = (\eta\epsilon)^{-1/b} \langle \bar{V} \rangle [l^{-a/b} (\eta\epsilon)^2 n, 1, l^{-d/b} (1 - \gamma)]. \quad (4.17)$$

Novamente podemos assumir que $\langle \bar{V} \rangle [l^{-a/b} (\eta\epsilon)^2 n, 1, l^{-d/b} (1 - \gamma)]$ apresenta comportamento constante para tempos suficientemente longos. Além disso, tomando:

$$l^d (1 - \gamma) = 1 \rightarrow l = (1 - \gamma)^{-1/d}, \quad (4.18)$$

e escrevendo:

$$\langle \bar{V} \rangle [(\eta\epsilon)^2 n, \eta\epsilon, (1 - \gamma)] = (1 - \gamma)^{-1/d} \langle \bar{V} \rangle [l^{-a/d} (\eta\epsilon)^2 n, l^{-b/d} \eta\epsilon, 1]. \quad (4.19)$$

Assumindo o mesmo comportamento, podemos escrever a saturação como:

$$(\eta\epsilon)^{-1/b} (1 - \gamma)^{-1/d} = (\eta\epsilon)^{\alpha_2} (1 - \gamma)^{\alpha_1}, \quad (4.20)$$

onde podemos encontrar que $\alpha_1 = -1/d$ e $\alpha_2 = -1/b$. Por fim, na iteração de *crossover* temos

que os dois comportamentos (do crescimento e da saturação) podem ser igualados. Temos, então:

$$(1 - \gamma)^{\alpha_1} (\eta\epsilon)^{\alpha_2} = [(\eta\epsilon)^2 n_x]^\beta, \quad (4.21)$$

isolando n_x temos:

$$(1 - \gamma)^{\alpha_1/\beta} (\eta\epsilon)^{\alpha_2/\beta-2} = n_x, \quad (4.22)$$

porém sabemos, pela expressão que descreve n_x , que:

$$(1 - \gamma)^{\alpha_1/\beta} (\eta\epsilon)^{\alpha_2/\beta-2} = (1 - \gamma)^{z_1} (\eta\epsilon)^{z_2}. \quad (4.23)$$

Sendo assim, escrevemos as leis de escala que relacionam os 5 expoentes como:

$$z_1 = \frac{\alpha_1}{\beta}, \quad (4.24)$$

e

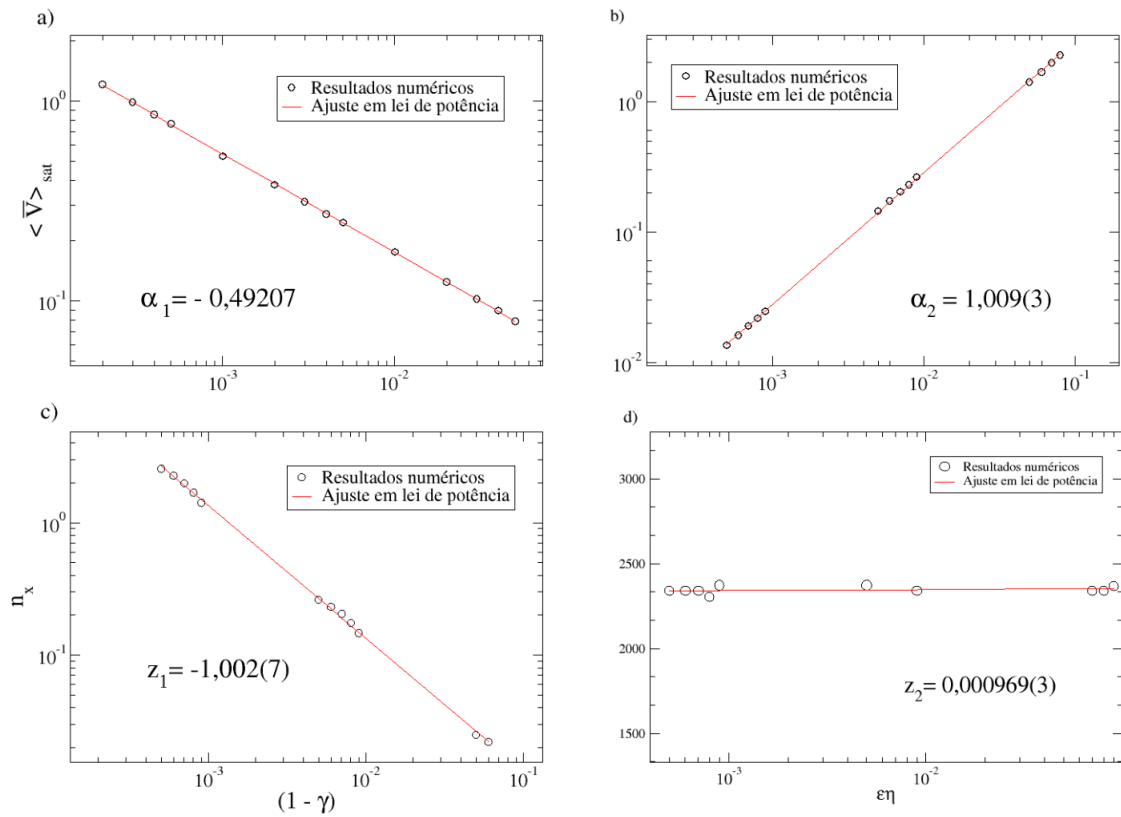
$$z_2 = \frac{\alpha_2}{\beta} - 2. \quad (4.25)$$

Cada um destes expoentes pode ser encontrado numericamente. Como indicado na Figura 17 temos $\beta = 0,500(5) \simeq 0,5$, em concordância com resultados já previamente observados em (LEONEL et al., 2016; LEONEL, 2019; SILVEIRA et al., 2023). Para obtermos os outros expoentes, construímos as curvas indicadas na Figura 18. O valor de α_1 é obtido a partir de diferentes velocidades de saturação encontradas para um valor fixo de $\eta\epsilon$ e variando γ . O crescimento de tal curva nos fornece $\alpha_1 = -0,492 \approx -0,5$ como indicado. Já para obtenção de α_2 , o procedimento é similar, porém agora com $\eta\epsilon$ variando e γ fixo, obtendo $\alpha_2 = 1,009(3)$, também indicado na figura. Os expoentes z_1 e z_2 são obtidos por meio da iteração de *crossover*, construindo curvas de n_x vs. $(1 - \gamma)$ e n_x vs. $(\eta\epsilon)$, respectivamente. Tal procedimento nos permite encontrar $z_1 = -1,002(7) \approx -1$ e $z_2 = 0,000969(3) \approx 0$ em perfeita concordância não só com resultados previamente obtidos na literatura mas também com as leis de escala descritas nas equações (4.24) e (4.25).

Por fim, o uso das leis de escala aliada aos valores obtidos para os expoentes críticos nos permite realizar as transformações de escala necessárias para sobrepor as curvas encontradas na Figura 17. Tal *overlap* está indicado no item b) e foi realizado a partir das transformações $n \rightarrow n/[(1 - \gamma)^{z_1} (\eta\epsilon)^{z_2}]$ e $\langle \bar{V} \rangle \rightarrow \langle \bar{V} \rangle / [(1 - \gamma)^{\alpha_1} (\eta\epsilon)^{\alpha_2}]$, procedimento bastante similar ao realizado para o caso sem dissipação.

É importante indicar que, apesar da quantidade $\eta\epsilon$ ser utilizada nas transformações nos eixos para que haja a sobreposição das curvas, as quantidades η e ϵ , caso fossem variadas individualmente de forma a manter o valor de $\eta\epsilon$, não afetariam o comportamento das curvas observado até aqui. Isso está em conformidade com a ausência desses parâmetros individualmente nas leis de escala deduzidas, sempre aparecendo dentro da quantidade $\eta\epsilon$, justificando a escolha neste trabalho de não indicar os valores de η e ϵ utilizados em cada caso. A validade computacional de

Figura 18 – Curvas construídas para obtenção dos expoentes α_1 , α_2 , z_1 e z_2 , cujos valores estão indicados nas figuras



Fonte: Produção do próprio autor.

tal comportamento está apresentada na Figura 19, onde os valores de η e ϵ foram variados sob condição de que $\eta\epsilon = 0,02$.

Agora, para continuarmos nossa análise, é conveniente retornarmos à equação (4.8). Anteriormente, realizamos o cálculo da velocidade quadrática média considerando apenas a média nas condições iniciais, porém nas simulações realizamos também a média no tempo. Sendo assim, temos que a velocidade quadrática média se torna:

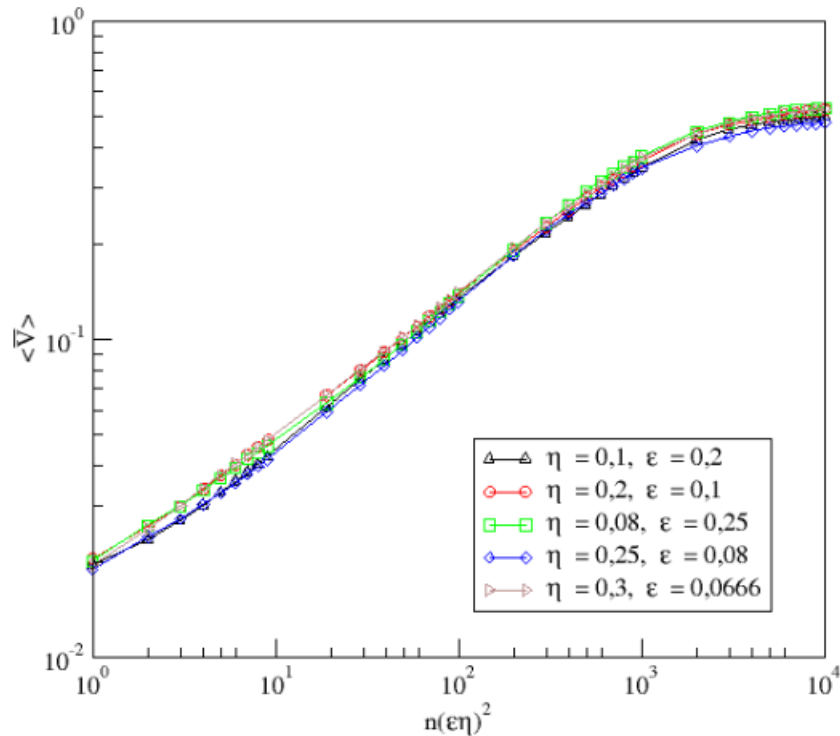
$$\langle \bar{V}^2(n) \rangle = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \bar{V}^2(i). \quad (4.26)$$

Ao realizarmos a soma no termo exponencial, o mesmo converge uma vez que seus argumentos são negativos, temos então:

$$\sum_{i=0}^n e^{(\frac{\gamma^2-1}{2})i} = \left[\frac{1 - e^{(\frac{\gamma^2-1}{2})(n+1)}}{1 - e^{(\frac{\gamma^2-1}{2})}} \right]. \quad (4.27)$$

Podemos utilizar a expressão (4.26) para obter uma expressão analítica para V_{rms} uma vez que

Figura 19 – Curvas obtidas variando os valores de η e ϵ individualmente e mantendo a condição $\eta\epsilon = 0,02$



Fonte: Produção do próprio autor.

$V_{rms}(n) = \sqrt{\langle \bar{V}^2(n) \rangle}$ (REIF, 2008). Assim, encontramos:

$$V_{rms}(n) = \sqrt{\frac{(1+\gamma)\eta^2\epsilon^2}{4(1-\gamma)} + \frac{1}{(n+1)} \left[V_0^2 - \frac{(1+\gamma)\eta^2\epsilon^2}{4(1-\gamma)} \right] \left[\frac{1 - e^{(\frac{\gamma^2-1}{2})(n+1)}}{1 - e^{(\frac{\gamma^2-1}{2})}} \right]}. \quad (4.28)$$

Tal expressão nos permite recuperar alguns resultados importantes: o comportamento de $V_{rms}(n \rightarrow 0) \rightarrow V_0$, o limite $n \rightarrow \infty$, que retorna:

$$V_{rms}(n \rightarrow \infty) = \sqrt{\frac{(1+\gamma)\eta^2\epsilon^2}{4(1-\gamma)}} = \sqrt{\frac{(1+\gamma)\eta\epsilon}{(1-\gamma)2}}, \quad (4.29)$$

e, por último, o comportamento de V_{rms} para um número de iterações suficientemente pequeno. Este último é encontrado assumindo que, no limite $\gamma \approx 1$, as exponenciais apresentadas na expressão (4.28) podem ser expandidas em série de Taylor, o que nos retorna (LEONEL, 2021):

$$V_{rms}(n) \simeq \frac{(1+\gamma)\eta\epsilon}{4} \sqrt{n+1} \simeq \frac{(1+\gamma)\eta\epsilon}{4} \sqrt{n}, \quad (4.30)$$

uma vez que $n \gg 1$. As expressões obtidas nos permitem a recuperação analítica dos expoentes críticos através da comparação das mesmas com as hipóteses de escala propostas. Os expoentes

α_1 e α_2 são obtidos a partir da comparação com a expressão para $n \rightarrow \infty$. Encontramos, então, de (4.29), que $\alpha_1 = -1/2$ e $\alpha_2 = 1$, como encontrado. Já β é obtido da comparação com a expressão (4.30), que nos fornece $\beta = 1/2$, também em conformidade com o encontrado numericamente. Por último, obtemos os expoentes de *crossover* z_1 e z_2 igualando as expressões (4.29) e (4.30), o que nos fornece:

$$n_x = \frac{4}{(1 + \gamma)}(1 - \gamma)^{-1}, \quad (4.31)$$

recuperando os resultados encontrados anteriormente: $z_1 = -1$ e $z_2 = 0$. Temos, então, que estão completamente caracterizados, fenomenologicamente, os 5 expoentes críticos e o comportamento do sistema ao introduzirmos dissipação, suprimindo a Aceleração de Fermi.

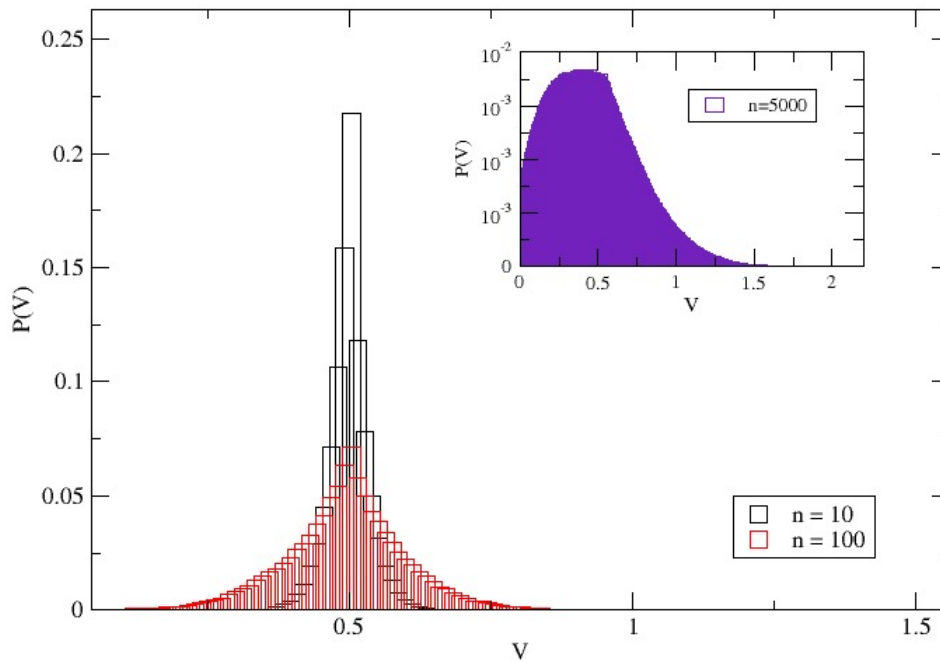
4.2 DISTRIBUIÇÃO DAS VELOCIDADES E CONEXÃO COM O FORMALISMO TERMODINÂMICO

Discutiremos, agora, a distribuições da velocidade para esta situação, retomando os resultados obtidos na seção 3 deste trabalho. Podemos notar que, para um número baixo de colisões, como demonstrado pelas curvas preta ($n = 10$) e vermelha ($n = 100$) da Figura 20, a distribuição das velocidades é simétrica, tendo seu pico justamente na velocidade inicial $V_0 = 0, 5$. Isso ocorre devido ao fato de que, conforme evoluímos o *ensemble* de $M \simeq 3500$ partículas, metade do mesmo é levada a perder velocidade e parte a ganhar velocidade. Sendo assim, a velocidade média neste caso é dada pela própria velocidade inicial. Percebemos ainda que, para um número suficientemente grande de colisões, como observado na curva lilás ($n = 5000$), tal simetria é quebrada, mas por que isso acontece? Conforme aumentamos o valor de n , observamos um achatamento da curva, que eventualmente irá tocar o limite inferior das velocidades.

Esse limite inferior tem um papel importante na distribuição uma vez que as partículas podem ter velocidades superiores ilimitadas (o que não ocorre devido à dissipação), porém não podem ter velocidades menores do que a velocidade da própria fronteira móvel ($V_b = -\eta\epsilon$). Sendo assim, uma vez que parte das partículas atinge o limite inferior, elas só podem ter seu valor aumentado, levando à quebra de simetria observada, onde a distribuição deixa de ser Gaussiana. Ainda assim, a distribuição decai para valores de velocidade suficientemente altos, levando à convergência da velocidade média que sabemos ocorrer para este sistema. É interessante notar que tal quebra de simetria na distribuição também foi observada para o modelo Fermi-Ulam unidimensional, onde os autores (OLIVEIRA; SILVA; LEONEL, 2015) propuseram uma descrição similar da probabilidade a que será tratada neste trabalho. Os parâmetros utilizados para construção da Figura 20 foram $\eta = 0, 2$, $\epsilon = 0, 1$, $\gamma = 0, 999$ e $p = 3$.

Por fim, tratemos da conexão entre os dois formalismos apresentados até então. Tal conexão não é trivial uma vez que para o bilhar expressamos os resultados em função do número de colisões n e para a transferência de calor tal descrição foi feita em função do tempo t . A relação

Figura 20 – Distribuição normalizada das probabilidades associadas a diferentes velocidades para um conjunto de $M \simeq 3500$ partículas para o bilhar ovóide dissipativo para $n = 10, 100$ e 5000 colisões. Foram usados os parâmetros $\eta = 0, 2$, $\epsilon = 0, 1$, $\gamma = 0, 999$, $p = 3$ e velocidade inicial $V_0 = 0, 5$



Fonte: Produção do próprio autor.

entre t e n pode ser complicada de se estabelecer uma vez que partículas com energias de diferentes podem experimentar diferentes números de colisões para um mesmo intervalo de tempo. Sendo assim, para estabelecer tal conexão utilizaremos do formalismo proposto em (LEONEL et al., 2016).

Começamos assumindo que a partícula viaja com uma velocidade constante entre as colisões e definindo o tempo entre colisões por:

$$\Delta t = \frac{d}{|\vec{V}|}, \quad (4.32)$$

onde d é distância percorrida pela partícula e $|\vec{V}|$ é o modulo da velocidade da mesma. Sendo assim, o tempo total gasto após n colisões é:

$$\tau = \sum_{i=0}^n \frac{d_i}{|\vec{V}_i|}. \quad (4.33)$$

Tal soma não é trivial e pode ter sua resolução simplificada tomando separadamente os resultados

provenientes do numerador e do denominador. Do numerador, temos:

$$\bar{d} = \frac{1}{(n+1)} \sum_{i=0}^n d_i, \quad (4.34)$$

onde d_i é a distância entre duas colisões como:

$$d_i = \sqrt{[x(\theta_{i+1}) - x(\theta_i)]^2 + [y(\theta_{i+1}) - y(\theta_i)]^2}. \quad (4.35)$$

Como descrito anteriormente, $x(\theta) = R(\theta)\cos(\theta)$ e $y(\theta) = R(\theta)\sin(\theta)$, em que $R(\theta)$ é a expressão da fronteira em coordenadas polares para o bilhar ovóide. Fazendo a média em $\theta \in [0, 2\pi]$, temos:

$$\bar{d} = \sqrt{2 + \eta^2 \left[1 + \frac{\epsilon^2}{2}\right]}. \quad (4.36)$$

Agora trabalhando com o denominador, começamos assumindo que a variação da velocidade entre as iterações i e $(i+1)$ é suficientemente pequena de forma que possamos escrever:

$$\sum_{i=0}^n \frac{1}{V_i} \simeq \int_0^n \frac{1}{V(n')} dn'. \quad (4.37)$$

E tal integração não é simples de ser feita uma vez que a expressão da velocidade não é dada explicitamente no sistema tratado. Sendo assim, podemos recorrer à expressão obtida empiricamente em (OLIVEIRA; ROBNIK; LEONEL, 2012) para a velocidade quadrática média em função das variáveis de escala:

$$f(x) = \left[\frac{x}{1+x} \right]^\beta, \quad (4.38)$$

onde sabemos que $\beta = 0,5$ para o sistema estudado, como visto anteriormente. Sendo assim, podemos recorrer às transformações de escala vistas anteriormente ($x \rightarrow n(1-\gamma)$ e $f \rightarrow \frac{\bar{V}\sqrt{(1-\gamma)}}{\eta\epsilon}$) e escrever:

$$\tau = \frac{\bar{d}\sqrt{(1-\gamma)}}{\eta\epsilon} \int \frac{dn}{\sqrt{\frac{n(1-\gamma)}{1+n(1-\gamma)}}}. \quad (4.39)$$

A solução da integral é dada por (LEONEL et al., 2016):

$$\tau = \frac{\bar{d}\sqrt{(1-\gamma)}}{\eta\epsilon} \left[\frac{1}{2} \frac{2\sqrt{(n^2 - n^2\gamma + n)}\sqrt{(1-\gamma)}}{\sqrt{(1-\gamma)}\sqrt{-n(-1-n+n\gamma)}\sqrt{\frac{-n(1-\gamma)}{-1-n+n\gamma}}} n \right] +$$

$$\frac{\bar{d}\sqrt{(1-\gamma)}}{\eta\epsilon} \left[\frac{1}{2} \frac{\ln \left[\frac{1}{2} \left(\frac{-1-2n+2n\gamma-2\sqrt{(n^2-n^2\gamma+n\sqrt{1-\gamma})}}{\sqrt{(1-\gamma)}} \right) \right]}{\sqrt{(1-\gamma)}\sqrt{-n(-1-n+n\gamma)}\sqrt{\frac{-n(1-\gamma)}{-1-n+n\gamma}}} n \right]. \quad (4.40)$$

Ao agruparmos os termos e considerarmos apenas a contribuição principal, temos:

$$\tau = \frac{\bar{d}\sqrt{(1-\gamma)}}{\eta\epsilon} \left[n\sqrt{1 + \frac{1}{n(1-\gamma)}} \right]. \quad (4.41)$$

Expandindo a raiz quadrada e mantendo apenas a contribuição de primeira ordem:

$$\tau = \frac{\bar{d}\sqrt{(1-\gamma)}}{\eta\epsilon} \left[n + \frac{1}{2(1-\gamma)} \right], \quad (4.42)$$

logo:

$$\tau \simeq \frac{\bar{d}\sqrt{(1-\gamma)}}{\eta\epsilon} n, \quad (4.43)$$

relacionando, com sucesso, as quantidades propostas.

4.3 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO

Na etapa anterior deste trabalho, enfatizamos a importância da obtenção de uma solução analítica para o sistema bilhar ovóide dependente do tempo. Seu análogo termodinâmico, como vimos agora, é de grande importância além das já citadas diversas aplicações de sistemas bilhares em diferentes áreas do conhecimento. Além disso, o tratamento fenomenológico de tal sistema se mostra bastante caro computacionalmente, o que pode ser inferido pelo grau de complexidade das equações apresentadas até aqui, deixando explícita a necessidade de tal solução. O principal objetivo deste trabalho é determinar as propriedades estatísticas da velocidade quadrática média usando a solução analítica da equação da difusão para caracterizar a transição que ocorre conforme $\gamma \rightarrow 1$, onde o sistema passa de uma dinâmica conservativa para uma dissipativa. Para isso, recorreremos ao formalismo apresentado em (LEONEL et al., 2020), onde foi mostrado que o conhecimento da função distribuição de probabilidade do sistema pode ser determinado a partir da solução da equação da difusão impondo condições de contorno específicas que satisfazem às propriedades impostas pelo espaço de fases, como feito para a distribuição Gaussiana. Nessa seção, indicaremos cada etapa realizada no procedimento, partindo da definição de uma distribuição de probabilidades que obedece às condições de contorno do sistema. Encontrada tal distribuição, diversos outros observáveis podem ser recuperados a partir da solução da equação de difusão e de resultados bem conhecidos da Física Estatística. No nosso caso daremos ênfase especial à obtenção da expressão para V_{rms} , que nos permitirá comparar o comportamento recuperado pela solução analítica com aqueles já encontrados até o presente momento, fenomenologicamente. Nas seções seguintes serão exploradas as leis de

escala, transições de fase e expoentes críticos para o mesmo, recuperando os resultados previstos a partir da expressão obtida para V_{rms} seguindo o mesmo procedimento dos capítulos anteriores, apresentando resultados inéditos desta dissertação.

Iniciamos a proposta desta solução por meio de uma importante distinção. Vimos que no caso da distribuição atribuída à ação I_{rms} podíamos obter valores de $-\infty$ a ∞ , sendo a mesma centrada justamente na origem. Para o nosso objeto de estudo, no caso a velocidade, não podemos assumir tais valores. Nossos resultados, como vimos nas Figuras 16 e 20, habitam o intervalo de 0 a $+\infty$, sendo centradas na velocidade inicial fornecida. Isso se justifica, como dito anteriormente, que as velocidades das partículas podem ser somente tão baixas quanto a velocidade da própria fronteira, ganhando energia ao colidir com a mesma e impedindo a existência de velocidades infinitamente negativas. Apesar disso, vimos que não há qualquer limitação no que diz respeito ao crescimento dessas velocidades, sendo a supressão da Aceleração de Fermi, e do ganho ilimitado de energia por consequência, causada apenas pela dissipação introduzida. Nota-se, então, que não se trata mais de uma distribuição Gaussiana, como utilizada para o mapa padrão. Para descrição do bilhar, recorreremos, então a soluções da equação de difusão ao longo de uma região semi-infinita (BUTKOV, 1988; ARFKEN, 2017; BALAKRISHNAN, 2021).

Iniciamos essa análise recorrendo à modelagem por meio de barreiras absorventes e refletoras. Tais barreiras não representam as barreiras do bilhar em si, mas sim a forma como a difusão de energia ocorre nessas determinadas regiões. Veremos que as soluções sempre irão considerar barreiras posicionadas simetricamente nos eixos negativo e positivo, sendo apenas a última relevante para o nosso caso. Apesar disso, trataremos da descrição completa, depois realizando as devidas restrições associadas ao nosso sistema.

Sendo assim, no caso das barreiras refletoras estamos considerando que existem duas barreiras simetricamente posicionadas a uma distância a da origem. Temos algumas condições de contorno já bem estabelecidas para tais barreiras: nelas não é permitida nem a passagem nem o aprisionamento de partículas que as atingem. Sob tais condições, definimos as barreiras de tal forma que o fluxo de partículas por meio delas é nulo, isto é, para qualquer $t \geq 0$:

$$\left. \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\pm a} = 0. \quad (4.44)$$

Levando em conta tais condições de contorno, obtemos uma expressão inicial para $P(x, t)$ dada por:

$$P(x, t) = \frac{1}{2a} + \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 Dt}{a^2}\right), \quad (4.45)$$

que, por construção, obedece à condição de normalização:

$$\int_{-a}^a P(x, t) dx = 1 \quad \text{para } t \geq 0. \quad (4.46)$$

Já para barreiras absorventes, temos uma importante distinção: as barreiras, ainda posicionadas em $x = \pm a$, agora aniquilam as partículas que as atingem. Temos, então:

$$P(x, t)|_{x=\pm a} = 0 \quad \text{para } t \geq 0, \quad (4.47)$$

e uma nova expressão para $P(x, t)$ é obtida:

$$P(x, t) = \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2a}\right) \exp\left(-\frac{(2n+1)^2\pi^2 Dt}{4a^2}\right), \quad (4.48)$$

que não é normalizada uma vez que as partículas vão eventualmente atingir as barreiras e encerrar seus processos de difusão. Temos, então, uma probabilidade de sobrevivência dada por;

$$\int_{-a}^a P(x, t) dx = S(t, \pm a|0) \quad \text{para } t \geq 0. \quad (4.49)$$

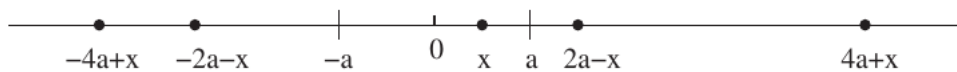
Escrevemos, assim, a expressão de $S(t, \pm a|0)$ como:

$$S(t, \pm a|0) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2\pi^2 Dt}{4a^2}\right). \quad (4.50)$$

Esta expressão apresenta a característica de um decaimento, levando a probabilidade a se aproximar de zero para tempos longos e sendo bastante útil para o espalhamento da distribuição observado nos histogramas anteriores.

Seguindo nossa análise partiremos agora para o método das imagens, essencial para a compreensão do comportamento de tais barreiras e, principalmente, como uma técnica para encontrar a função de Green para um certo operador diferencial com certas condições de contorno, levando em conta que o sistema possui uma simetria que possa ser explorada (BALAKRISHNAN, 2021). Tal método nos permite a combinação das expressões acima em um único resultado. Consideremos que a difusão se inicia na origem e espelhos são colocados nas posições das barreiras $x = \pm a$. A imagem de um ponto colocado entre ambos, formada pelo espelho localizado em $+a$ estará localizada $2a - x$, enquanto que a formada por $-a$ estará em $-2a - x$. Com os espelhos posicionados de forma oposta um ao outro, novas imagens surgirão sucessiva e infinitamente, como mostra a Figura 21

Figura 21 – Primeiras imagens formadas pelo ponto $x \in [-a, a]$ por sua reflexão nos espelhos posicionados a e $-a$.



Fonte: (BALAKRISHNAN, 2021).

Utilizando este método temos a oportunidade de escrever a densidade de probabilidade

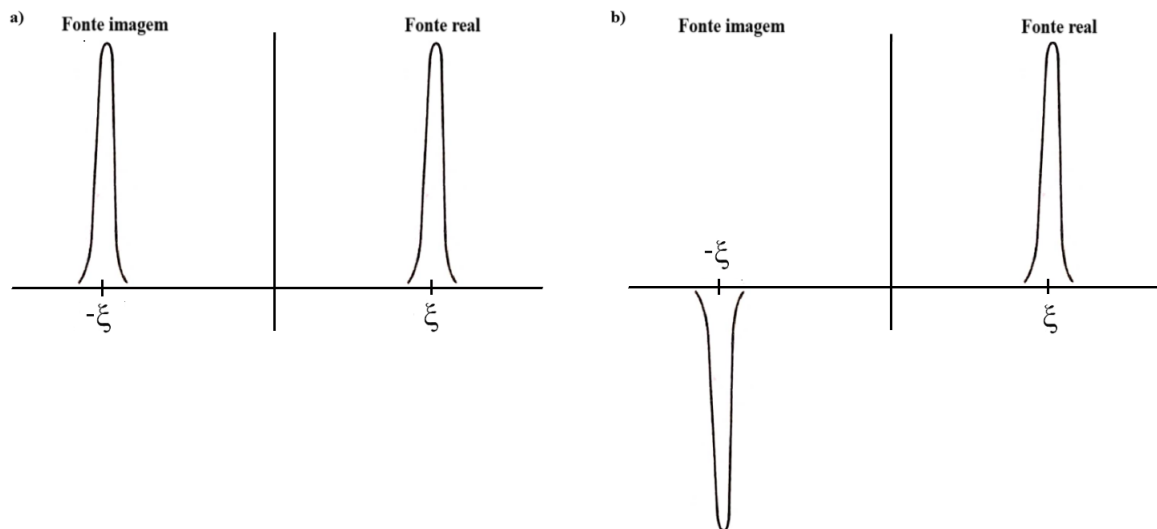
$P(x, t)$ nessa região entre os espelhos (que são barreiras) como uma combinação linear de todas as imagens. A expressão obtida é única tanto para barreiras refletoras quanto absorventes, com sua distinção ocorrendo nos coeficientes das expressões. As distribuições de probabilidade para barreiras refletoras e absorventes, respectivamente, obtidas por este formalismo são:

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x + 2na)^2}{4Dt}\right) \quad (\text{Barreira refletora}); \quad (4.51)$$

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{(x + 2na)^2}{4Dt}\right) \quad (\text{Barreira absorvente}), \quad (4.52)$$

que encontram uma útil representação visual nas condições de Neumann e Dirichlet para a equação de calor que tratamos anteriormente. Em sua descrição da temperatura em uma haste devido a uma fonte pontual em $x = -\xi$ devemos considerar uma fonte imagem posicionada em $x = -\xi$. Encontramos na condição de Neumann um análogo à barreira refletora, uma vez que o fluxo de calor nas regiões estabelecidas deve ser zero. Já a condição de Dirichlet nos fornece um análogo à barreira absorvente. Os comportamentos de tais expressões estão apresentados na Figura 22, com os itens a) e b) representando as condições de Neumann e Dirichlet, respectivamente, ambas espelhando os comportamentos da fonte real porém, no segundo caso, nos fornecendo uma inversão também no eixo horizontal (BUTKOV, 1988).

Figura 22 – Representação da distribuição das fontes real e imagem para as condições de Neumann (a) Dirichlet (b)



Fonte: Produção do próprio autor.

Uma vez feita tal descrição completa para uma região finita delimitada por $x = \pm a$ podemos "regredir" tal formalismo para a obtenção de um sistema onde temos a difusão ocorrendo ao longo de uma linha semi-infinita $[a, +\infty)$, sendo a qualquer valor real. Sendo assim, podemos utilizar os métodos apresentados até aqui para escrever uma solução para a equação de difusão

com uma "barreira" em $+\infty$ e uma, absorvente ou refletora, em a . Assim, a expressão obtida é:

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \left[\exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{4Dt}\right) \pm \exp\left(-\frac{(-2a - x - x_0)^2}{4Dt}\right) \right], \quad (4.53)$$

com os sinais positivo e negativo correspondendo, respectivamente, ao caso da barreira refletora e absorvente em a (BALAKRISHNAN, 2021).

Agora traremos este resultado para as condições de contorno associadas ao sistema estudado. Como citado anteriormente, a distribuição será da forma $P(V, n)$, sendo V a velocidade e n o número de iterações (onde sua relação com o tempo foi tratada na seção anterior). Para tal distribuição temos como condição de contorno as equações:

$$P(V, n)|_{V=0} = P(V, n)|_{V=\infty} = 0 \quad (4.54)$$

$$P(V, 0) = \delta(V - V_0). \quad (4.55)$$

Tais condições se referem ao fato de que inicialmente todas as partículas possuem uma mesma velocidade inicial, o que é descrito pela $\delta(V - V_0)$. Conforme n evolui as velocidades de cada partícula aumentam ou diminuem, levando ao "achatamento" de $P(V, n)$. Além disso, sabemos que devido à supressão da aceleração de Fermi e pelo fato das partículas não conseguirem atingir velocidade nula, $P(V, n)$ vai a zero nestes limites, como indicado em (4.54). Para que essas relações sejam obedecidas, a equação (4.53) deve então ter forma:

$$P(V, n) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \left[\exp\left(-\frac{(V - V_0)^2}{4Dt}\right) - \exp\left(-\frac{(V + V_0)^2}{4Dt}\right) \right], \quad (4.56)$$

onde $a = 0$ para o caso estudado, como vimos ao tratar da distribuição. Outra condição necessária é que a probabilidade em questão seja normalizada, isto é, $\int_0^{\infty} P(V, n)dV = 1$. Calculando tal integral temos:

$$\int_0^{\infty} P(V, n)dV = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dn}} \int_0^{\infty} \left[\exp\left(-\frac{(V - V_0)^2}{4Dn}\right) - \exp\left(-\frac{(V + V_0)^2}{4Dn}\right) \right] dV \quad (4.57)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dn}} \left(\frac{-1}{2} \sqrt{4\pi Dn} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{V_0 - V}{\sqrt{4Dn}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{V_0 + V}{\sqrt{4Dn}}\right) \right) \right) \Big|_0^{+\infty} \quad (4.58)$$

$$= \frac{-1}{2} \left(-1 + 1 - 2\operatorname{erf}\left(\frac{V_0}{\sqrt{4Dn}}\right) \right) \quad (4.59)$$

$$= \operatorname{erf}\left(\frac{V_0}{\sqrt{4Dn}}\right), \quad (4.60)$$

onde definimos N^*

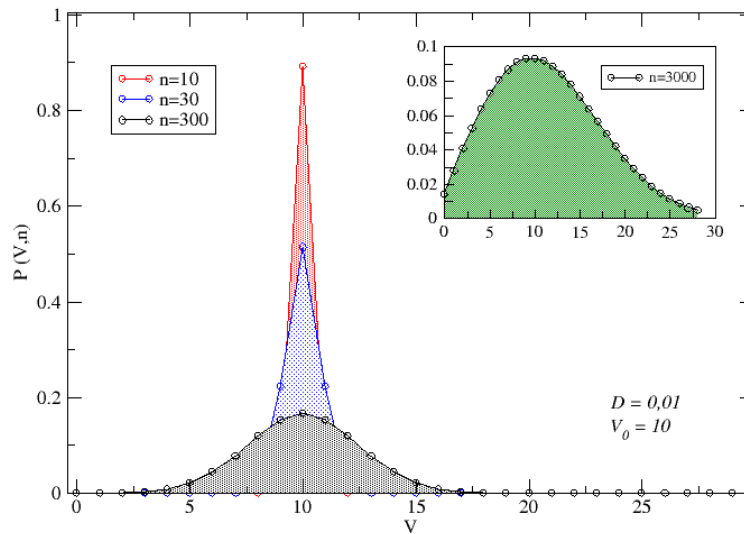
$$\frac{1}{\operatorname{erf}\left(\frac{V_0}{\sqrt{4Dn}}\right)} = N^*, \quad (4.61)$$

como a constante de normalização. Logo, para que $P(V, n)$ obedeça tal condição, definimos ela como:

$$P(V, n) = \frac{N^*}{\sqrt{4\pi Dn}} \left[\exp\left(\frac{-(V - V_0)^2}{4Dn}\right) - \exp\left(\frac{-(V + V_0)^2}{4Dn}\right) \right]. \quad (4.62)$$

As curvas obtidas por meio de diferentes valores de n podem ser observadas na Figura 23.

Figura 23 – Distribuições analíticas obtidas da expressão (4.62) para diferentes valores de n com velocidade inicial $V_0 = 10$ e constante de difusão $D = 0,01$.



Fonte: Produção do próprio autor.

Podemos observar uma similaridade significativa com o comportamento observado fenomenologicamente nas Figuras 16 e 20. As curvas apresentam tanto o espalhamento quanto a quebra de simetria esperada, além de serem centradas justamente na velocidade inicial fornecida. Continuando, com uma expressão para $P(V, n)$ em mãos, temos condição de calcular a grandeza $\overline{V^2}(n)$ por meio da equação abaixo:

$$\overline{V^2}(n) = \int_0^{\infty} V^2 P(V, n) dV. \quad (4.63)$$

Unindo essa expressão à $P(V, n)$ encontrada, temos

$$\overline{V^2}(n) = \int_0^{\infty} V^2 \frac{N^*}{\sqrt{4\pi Dn}} \left[\exp\left(\frac{-(V - V_0)^2}{4Dn}\right) - \exp\left(\frac{-(V + V_0)^2}{4Dn}\right) \right] dV \quad (4.64)$$

$$= \frac{N^*}{\sqrt{4\pi Dn}} \int_0^{\infty} V^2 \left[\exp\left(\frac{-(V - V_0)^2}{4Dn}\right) - \exp\left(\frac{-(V + V_0)^2}{4Dn}\right) \right] dV. \quad (4.65)$$

Temos então:

$$\begin{aligned} \overline{V^2}(n) = & \frac{N^*}{\sqrt{4\pi Dn}} \frac{1}{4} \sqrt{4Dn} \left(-\sqrt{\pi}(2V_0^2 + 4Dn) \operatorname{erf} \left(\frac{V_0 - V}{\sqrt{4Dn}} \right) - \right. \\ & \left. \sqrt{\pi}(2V_0^2 + 4Dn) \operatorname{erf} \left(\frac{V_0 + V}{\sqrt{4Dn}} \right) - 2\sqrt{4Dn} e^{-(V_0+V)^2/4Dn} \right. \\ & \left. (V_0 e^{4V_0V/4Dn} + V e^{4V_0V/4Dn} + V_0 - V) \right). \end{aligned} \quad (4.66)$$

Aplicando nessa equação o limite infinito positivo temos que todos os termos se anulam:

$$\overline{V^2}(n) = \frac{N^*}{\sqrt{4\pi Dn}} \frac{1}{4} \sqrt{4Dn} (\sqrt{\pi}(2V_0^2 + 4Dn) - \sqrt{\pi}(2V_0^2 + 4Dn) - 0) = 0. \quad (4.67)$$

Aplicando no limite $V = 0$ temos:

$$\begin{aligned} \overline{V^2}(n) = & \frac{N^*}{\sqrt{4\pi Dn}} \frac{1}{4} \sqrt{4Dn} \left(-\sqrt{\pi}(2V_0^2 + 4Dn) \operatorname{erf} \left(\frac{V_0}{\sqrt{4Dn}} \right) - \right. \\ & \left. \sqrt{\pi}(2V_0^2 + 4Dn) \operatorname{erf} \left(\frac{V_0}{\sqrt{4Dn}} \right) - 2\sqrt{4Dn} e^{-(V_0)^2/4Dn} (V_0 + V_0) \right), \end{aligned} \quad (4.68)$$

que pode ser simplificada para :

$$\begin{aligned} \overline{V^2}(n) = & \frac{N^*}{\sqrt{4\pi Dn}} \frac{1}{4} \sqrt{4Dn} \left(-2\sqrt{\pi}(2V_0^2 + 4Dn) \operatorname{erf} \left(\frac{V_0}{\sqrt{4Dn}} \right) - \right. \\ & \left. 4\sqrt{4Dn} e^{-(V_0)^2/4Dn} V_0 \right), \end{aligned} \quad (4.69)$$

e por fim:

$$\overline{V^2}(n) = -(V_0^2 + 2Dn) - V_0 N^* \sqrt{\frac{4Dn}{\pi}} e^{-(V_0)^2/4Dn}. \quad (4.70)$$

Sendo assim, como se trata da aplicação no limite infinito subtraindo a aplicação em zero, o sinal negativo pode ser retirado. Além disso, aplicando a raiz quadrada, encontramos a grandeza $V_{rms} = \sqrt{\langle \overline{V^2}(n) \rangle}$ como:

$$V_{rms} = \left((V_0^2 + 2Dn) + V_0 N^* \sqrt{\frac{4Dn}{\pi}} e^{-(V_0)^2/4Dn} \right)^{1/2}. \quad (4.71)$$

Partimos agora em busca do coeficiente de difusão D . Para obtê-lo nós primeiro usamos a expressão fornecida para $|\vec{V}_{n+1}|$ apresentada anteriormente no texto e realizamos a média da velocidade quadrática para os intervalos $\theta \in [0, 2\pi]$, $\alpha \in [0, \pi]$ e $t \in [0, 2\pi]$ (LEONEL et al., 2016). O cálculo de tais médias nos fornece:

$$\overline{V_{n+1}^2} = \frac{(\gamma^2 + 1)\overline{V_n^2}}{2} + \frac{(1 + \gamma)^2 \eta^2 \epsilon^2}{8}. \quad (4.72)$$

Sabendo que $D = \frac{\overline{V_{n+1}^2} - \overline{V_n^2}}{2}$, obtemos:

$$D = \frac{(\gamma^2 - 1)\overline{V_n^2}}{4} + \frac{(1 + \gamma)^2 \eta^2 \epsilon^2}{16}. \quad (4.73)$$

Uma expressão para $\overline{V_n^2}$ no regime dinâmico pode ser obtida assumindo que, para um grande conjunto de partículas:

$$\overline{V_{n+1}^2} - \overline{V_n^2} = \frac{\overline{V_{n+1}^2} - \overline{V_n^2}}{(n+1) - n} \simeq \frac{d\overline{V^2}}{dn}. \quad (4.74)$$

Integrando este resultado, considerando que em $n = 0$ temos uma velocidade inicial V_0 , obtemos:

$$\overline{V^2}(n) = \overline{V_0^2} e^{\frac{(\gamma^2 - 1)n}{2}} + \frac{(1 + \gamma)}{4(1 - \gamma)} \eta^2 \epsilon^2 [1 - e^{\frac{(\gamma^2 - 1)n}{2}}]. \quad (4.75)$$

Devemos ainda, para que a expressão da velocidade média seja comparável à quantidade V_{rms} , realizar a média da equação acima, tomando:

$$\langle \overline{V^2}(n) \rangle = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \overline{V^2}(i). \quad (4.76)$$

A equação (4.75) se torna:

$$\overline{V^2}(n) = \frac{(1 + \gamma)}{4(1 - \gamma)} \eta^2 \epsilon^2 + \left(\overline{V_0^2} - \frac{(1 + \gamma)}{4(1 - \gamma)} \eta^2 \epsilon^2 \right) e^{\frac{(\gamma^2 - 1)n}{2}}. \quad (4.77)$$

A expressão (4.77) pode ainda ser simplificada por meio da relação:

$$\sum_{i=0}^n e^{\frac{(\gamma^2 - 1)i}{2}} = \left[\frac{1 - e^{\frac{(\gamma^2 - 1)(n+1)}{2}}}{1 - e^{\frac{(\gamma^2 - 1)}{2}}} \right]. \quad (4.78)$$

$\langle \overline{V^2}(n) \rangle$ se torna:

$$\langle \overline{V^2}(n) \rangle = \frac{(1 + \gamma)}{4(1 - \gamma)} \eta^2 \epsilon^2 + \frac{1}{n+1} \left(\overline{V_0^2} - \frac{(1 + \gamma)}{4(1 - \gamma)} \eta^2 \epsilon^2 \right) \left[\frac{1 - e^{\frac{(\gamma^2 - 1)(n+1)}{2}}}{1 - e^{\frac{(\gamma^2 - 1)}{2}}} \right]. \quad (4.79)$$

Substituindo este resultado na expressão de D e realizando as simplificações necessárias obtemos:

$$D = \frac{1}{n+1} \left(\overline{V_0^2} - \frac{(1 + \gamma)}{4(1 - \gamma)} \eta^2 \epsilon^2 \right) \left[\frac{1 - e^{\frac{(\gamma^2 - 1)(n+1)}{2}}}{1 - e^{\frac{(\gamma^2 - 1)}{2}}} \right] \frac{(\gamma^2 - 1)}{4}. \quad (4.80)$$

Chamando:

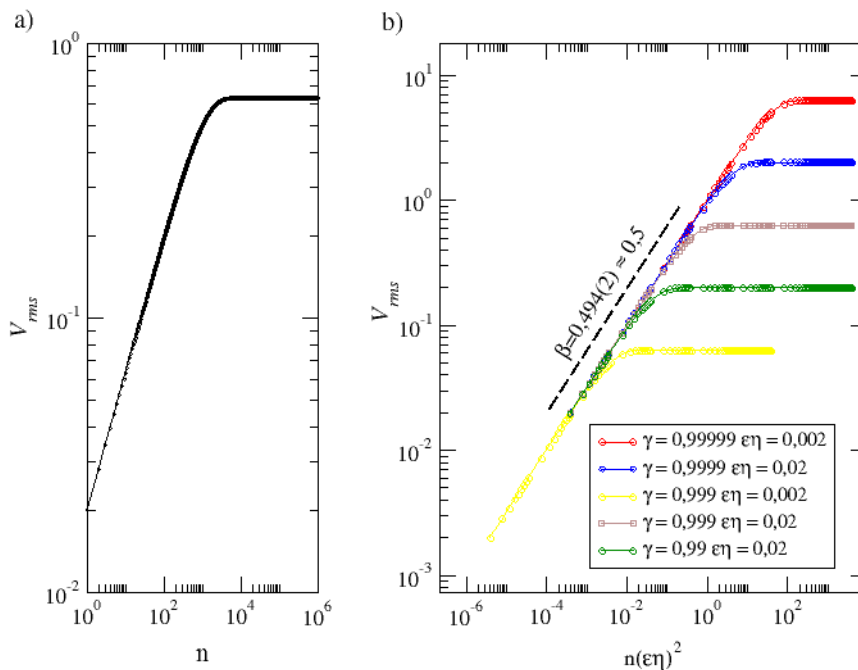
$$F(n) = \frac{n(\gamma^2 - 1)}{4(n+1)} \left[\frac{1 - e^{\frac{(\gamma^2 - 1)(n+1)}{2}}}{1 - e^{\frac{(\gamma^2 - 1)}{2}}} \right], \quad (4.81)$$

ficamos com:

$$D(n)n = F(n) \left(\overline{V_0^2} - \frac{(1 + \gamma)}{4(1 - \gamma)} \eta^2 \epsilon^2 \right). \quad (4.82)$$

Sendo assim, podemos utilizar as expressões (4.71) e (4.82) em conjunto para obter uma solução analítica para V_{rms} . Tais resultados fornecem a Figura 24, abaixo, onde foram utilizados valores de γ suficientemente próximos de 1 para que a transição de fase, que é foco deste trabalho, estivesse adequadamente caracterizada.

Figura 24 – Curvas de V_{rms} construídas a partir da expressão analítica para velocidade inicial $V_0 = 10^{-5}$, a) V_{rms} vs. n para $\gamma = 0,999$ e $\epsilon\eta = 0,02$, b) V_{rms} vs. $n(\epsilon\eta)^2$ para diferentes valores de γ e $\epsilon\eta$



Fonte: Produção do próprio autor.

As curvas construídas nos permitem ainda observar os três comportamentos típicos do sistema, caracterizados na seção anterior, com expoentes críticos que serão obtidos em seguida. Por fim, é importante apontar que tal curva analítica, obtida por meio do formalismo da solução da equação de difusão, pode ser construída computacionalmente de forma consideravelmente mais simples se comparada à análise feita nas seções anteriores deste trabalho, baseada no conjunto de equações que descrevem o bilhar ovóide dependente do tempo, sendo esta uma importante contribuição desse trabalho.

4.3.1 Recuperação das leis de escala e expoentes críticos

Como feito nas seções anteriores, podemos sumarizar os comportamentos observados na Figura 24 em três situações:

- Para $n \ll n_x$, podemos descrever o crescimento por $V \propto [(\eta\epsilon)^2 n]^\beta$, onde β é o expoente de crescimento ou de aceleração;
- Para $n \gg n_x$, a velocidade de saturação é atingida, sendo esta descrita por $V_{sat} \propto (1 - \gamma)^{\alpha_1} (\eta\epsilon)^{\alpha_2}$, onde α_1 e α_2 são os expoentes de saturação;
- A iteração n_x , que marca a mudança de comportamento, ou *crossover*, é dada por $n_x \propto (1 - \gamma)^{z_1} (\eta\epsilon)^{z_2}$, onde z_1 e z_2 são expoentes de crossover.

Com essas três hipóteses podemos descrever todo o comportamento da velocidade $\langle \bar{V} \rangle$ através uma função homogênea generalizada:

$$\langle \bar{V} \rangle [(\eta\epsilon)^2 n, \eta\epsilon, (1 - \gamma)] = l \langle \bar{V} \rangle [l^a (\eta\epsilon)^2 n, l^b \eta\epsilon, l^d (1 - \gamma)], \quad (4.83)$$

onde l é um fator de escala e os valores a , b e d são chamados expoentes característicos. Tal expressão é a mesma tratada na seção 4.1 deste trabalho, onde obtivemos as leis de escala reproduzidas abaixo.

$$z_1 = \frac{\alpha_1}{\beta}$$

$$z_2 = \frac{\alpha_2}{\beta} - 2.$$

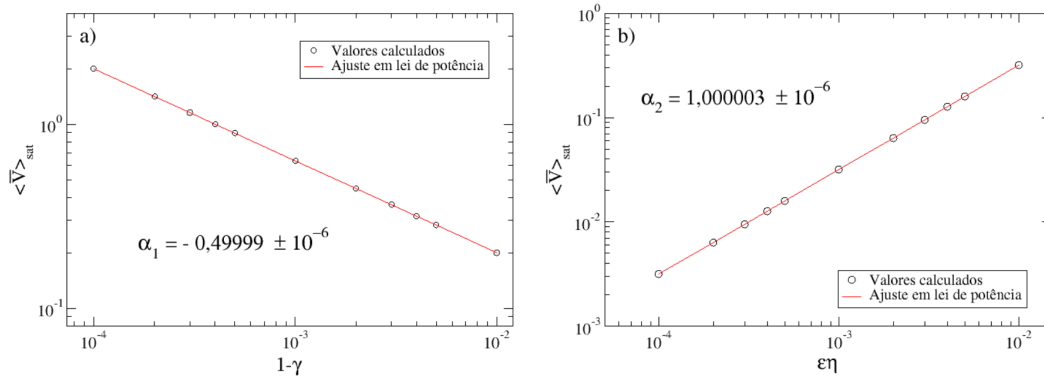
Sendo assim nosso objetivo nesta seção é utilizar a expressão analítica para recuperar numérica e analiticamente os valores de cada um dos expoentes encontrados anteriormente de forma fenomenológica.

Começando pelo expoente β , responsável por descrever o regime de crescimento, obtemos pela Figura 14 que $\beta = 0,49469(6)$, ou seja $\beta \approx 0,5$, como esperado. Já no que se refere aos expoentes de saturação recorreremos à mesma análise feita anteriormente para os expoentes α_1 e α_2 através da obtenção da velocidade de saturação (V_{sat}) para diferentes casos e da construção de duas curvas: (i) V_{sat} vs. $(1 - \gamma)$ para obtenção de α_1 e (ii) V_{sat} vs. $\eta\epsilon$ para obtenção de α_2 , ambas representadas na Figura 25. Tais curvas fornecem $\alpha_1 = -0,5$ e $\alpha_2 = 1,0$, recuperando os valores esperados com uma precisão bastante alta, com erros da ordem de 10^{-8} e 10^{-7} , respectivamente.

Por meio dos resultados encontrados podemos recuperar os valores de z_1 e z_2 utilizando as leis de escala do sistema, que nos fornecem $z_1 = \alpha_1/\beta \approx -0,5/0,5 = -1$ e $z_2 = \alpha_2/\beta - 2 \approx 1/0,5 - 2 = 0$, respectivamente, em conformidade com os obtidos fenomenologicamente. Sendo assim, os regimes de crescimento, *crossover* e saturação estão perfeitamente caracterizados.

Podemos ainda realizar a recuperação de tais expoentes por meio da aplicação dos limites adequados a cada caso na expressão de V_{rms} . Primeiramente, temos que, conforme esperado devido à própria construção da equação, para $n = 0$ temos $V = V_0$. Para analisarmos a saturação

Figura 25 – Curvas de V_{sat} vs. $(1 - \gamma)$ para obtenção de α_1 (à esquerda) e de V_{sat} vs. $\eta\epsilon$ para obtenção da α_2 (à direita)



Fonte: Produção do próprio autor.

podemos aplicar o limite $n \rightarrow \infty$, onde a quantidade $D(n)n$ se torna:

$$D(n)n = \frac{(\gamma^2 - 1)}{4} \left[\frac{1}{1 - e^{\frac{(\gamma^2 - 1)}{2}}} \right] \left(\bar{V}_0^2 - \frac{(1 + \gamma)}{4(1 - \gamma)} \eta^2 \epsilon^2 \right) \quad (4.84)$$

e o segundo termo de V_{rms} se torna:

$$\sqrt{\frac{4Dn}{\pi}} V_0 N^* e^{-(V_0)^2/4Dn} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4Dn}{\pi}} V_0 N^*. \quad (4.85)$$

Podemos reescrever função $erf(x)$, presente em N^* , expandindo-a para $x \rightarrow 0$, onde $x = (V_0/\sqrt{4Dn})$ e, tomando apenas o primeiro termo nos dá:

$$\sqrt{\frac{4Dn}{\pi}} \frac{1}{erf(V_0/\sqrt{4Dn})} V_0 \Rightarrow \sqrt{\frac{4Dn}{\pi}} \frac{\sqrt{4\pi Dn}}{2V_0} V_0 = 2Dn. \quad (4.86)$$

Substituindo este resultando em V_{rms} , que agora chamaremos de V_{sat} :

$$V_{sat} = (V_0^2 + 4Dn)^{1/2}, \quad (4.87)$$

reinsertando a equação para $D(n)n$ temos:

$$V_{sat} = \left\{ V_0^2 + 4 \left[\frac{(\gamma^2 - 1)}{4} \left(\frac{1}{1 - e^{\frac{(\gamma^2 - 1)}{2}}} \right) \left(\bar{V}_0^2 - \frac{(1 + \gamma)}{4(1 - \gamma)} \eta^2 \epsilon^2 \right) \right] \right\}^{1/2}. \quad (4.88)$$

Simplificando:

$$V_{sat} = \left[V_0^2 + \left(\frac{(\gamma^2 - 1)}{1 - e^{\frac{(\gamma^2 - 1)}{2}}} \right) \left(\bar{V}_0^2 - \frac{(1 + \gamma)}{4(1 - \gamma)} \eta^2 \epsilon^2 \right) \right]^{1/2}. \quad (4.89)$$

Expandindo o termo $\frac{(\gamma^2-1)}{1-e^{\frac{(\gamma^2-1)}{2}}}$ em torno de $\gamma = 1$ ficamos com $\frac{(\gamma^2-1)}{1-e^{\frac{(\gamma^2-1)}{2}}} = -2 + (\gamma - 1) = (\gamma - 3)$, logo:

$$V_{sat} = \left(V_0^2 + (\gamma - 3)(\overline{V_0^2} - \frac{(1+\gamma)}{4(1-\gamma)}\eta^2\epsilon^2) \right)^{1/2} \propto \left(\frac{(1+\gamma)(\gamma-3)}{4(1-\gamma)}\eta^2\epsilon^2 \right)^{1/2}. \quad (4.90)$$

$$V_{sat} \propto (1-\gamma)^{-1/2}\eta\epsilon. \quad (4.91)$$

Comparando a expressão (4.91) com a hipótese de escala $V_{sat} \propto (1-\gamma)^{\alpha_1}(\eta\epsilon)^{\alpha_2}$ recuperamos o resultado $\alpha_1 = -0,5$ e $\alpha_2 = 1,0$.

Agora tratando do caso $n \ll n_x$ consideremos valores muito pequenos de V_0 e valores de γ suficientemente próximos à transição, isto é, $\gamma \rightarrow 1$. Para tal situação obtemos que:

$$V_{rms} = \sqrt{2Dn} = \left[\frac{-2n(\gamma^2-1)}{4(n+1)} \left(\frac{1-e^{\frac{(\gamma^2-1)(n+1)}{2}}}{1-e^{\frac{(\gamma^2-1)}{2}}} \right) \frac{(1+\gamma)}{4(1-\gamma)}\eta^2\epsilon^2 \right]^{1/2}. \quad (4.92)$$

Expandindo a exponencial no numerador da equação acima para valores pequenos de n , temos que a expressão é simplificada para:

$$V_{rms} = \left(\frac{-n(\gamma^2-1)}{2} \frac{(1+\gamma)}{4(1-\gamma)}\eta^2\epsilon^2 \right)^{1/2}, \quad (4.93)$$

que pode ser ainda reescrita como:

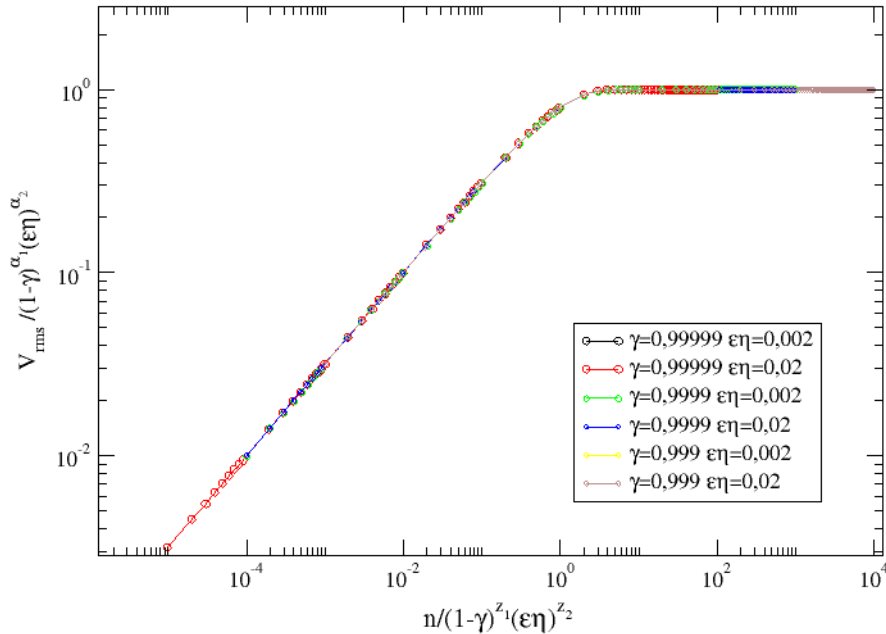
$$V_{rms} = \left(\frac{-n(\gamma+1)^2}{8}\eta^2\epsilon^2 \right)^{1/2}. \quad (4.94)$$

Comparando o resultado obtido $V_{rms} \propto \sqrt{n}$ com a hipótese que descreve o crescimento $V_{rms} \propto n^\beta$, encontramos $\beta = 0,5$, como esperado. Esse resultado nos mostra que para n pequeno a difusão é análoga ao problema muito bem estabelecido da caminhada aleatória, isto é, experimenta difusão normal. Por fim, o *crossover* pode ser caracterizado igualando as expressões encontradas para o crescimento e para a saturação e isolando n . Tal procedimento nos fornece:

$$n_x \propto \frac{1}{(1-\gamma)(1+\gamma)}, \quad (4.95)$$

que, comparada à expressão $n_x \propto (1-\gamma)^{z_1}(\eta\epsilon)^{z_2}$, nos dá $z_1 = -1$ e $z_2 = 0$, como esperado. Realizamos, portanto, a obtenção dos expoentes críticos e confirmação das leis de escala apresentadas na literatura por meio da solução da equação de difusão e podemos ainda reproduzir o procedimento realizado na Figura 17 para obter um *overlap* das curvas apresentadas na Figura 24. O resultado de tal procedimento está apresentado na Figura 26 abaixo.

Figura 26 – Sobreposição das curvas da Figura 14 em uma única curva universal utilizando as transformações $V_{rms} \rightarrow V_{rms}/(1-\gamma)^{\alpha_1}(\epsilon\eta)^{\alpha_2}$ e $n \rightarrow n/(1-\gamma)^{z_1}(\epsilon\eta)^{z_2}$ com $V_0 = 10^{-5}$



Fonte: Produção do próprio autor.

4.4 CARACTERÍSTICAS DA TRANSIÇÃO DE FASE

Para completar e concluir a análise do bilhar ovóide dependente do tempo feita ao longo deste trabalho é necessária uma caracterização mais aprofundada da transição pela qual o sistema passa conforme introduzimos o parâmetro de dissipação. Para isso utilizaremos o formalismo apresentado em (SETHNA, 2006). A caracterização requer que 4 passos sejam seguidos:

1. Identificar a quebra de simetria do sistema;
2. Definir um parâmetro de ordem adequado;
3. Analisar as excitações elementares;
4. Classificar os efeitos topológicos do sistema.

Uma vez finalizado tal procedimento realizaremos uma breve discussão sobre a transição de fase de forma a sintetizar as informações apresentadas até então, concluindo este trabalho.

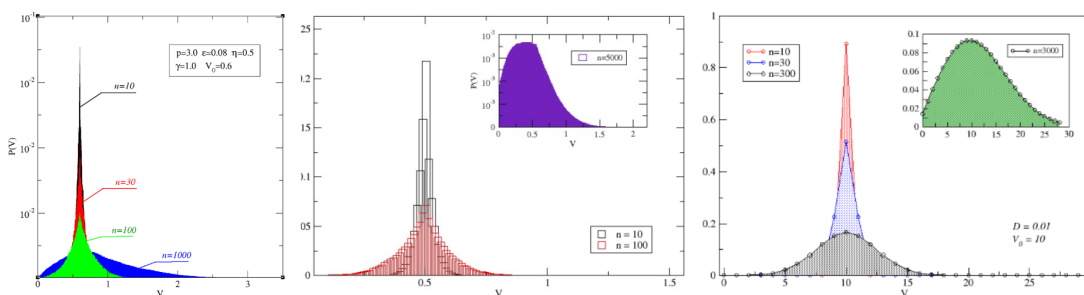
4.4.1 Quebra de simetria

A busca por simetrias pode ser feita de diferentes formas para cada sistema: enquanto materiais diferentes apresentam comportamento que, a primeira vista, podem parecer "mais" ou

"menos" simétricos é na sua quebra de simetria que podemos identificar algumas importantes características, justificando a importância deste primeiro passo proposto por Sethna (2006). Podemos citar como exemplos da importância do estudo da quebra de simetria em sistemas caóticos, como o aqui tratado, o mapa padrão dissipativo. Nesse caso a variação do parâmetro ϵ de 0 para valores diferentes de 0 o espaço de fases, inicialmente integrável, apresenta comportamento misto, com mares de caos, ilhas de periodicidade e curvas invariantes (LEONEL, 2019).

Para o bilhar ovóide dissipativo podemos identificar a quebra de simetria por meio da análise da distribuição $P(V)$ tratada nas Figuras 16, 20 e 23 deste trabalho, reunidas abaixo na Figura 27.

Figura 27 – Distribuições fenomenológicas de $P(V)$ para o bilhar não dissipativo, dissipativo e distribuição analítica obtida pela expressão (4.71), respectivamente



Fonte: Produção do próprio autor.

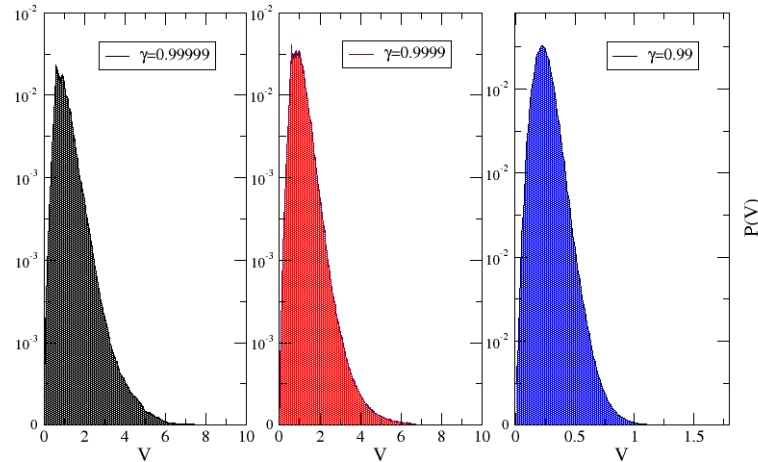
Podemos perceber que quando não é considerada dissipação no sistema a distribuição de velocidades se comporta como uma distribuição Gaussiana que vai se tornando gradualmente mais "espalhada" conforme o número de colisões aumenta. Já para a introdução de uma dissipação temos que, para um número suficientemente grande de colisões, tal distribuição cria uma "cauda" à direita, tendo sua simetria destruída. A causa de tal comportamento, como comentado na seção 4.2, ocorre devido ao limite inferior das velocidades, impedindo uma diminuição das energias porém não ocorrendo tal limitação associada ao seu crescimento. Apesar disso, a quebra de simetria não impede que a distribuição se aproxime gradualmente de zero mesmo com a ausência de um limite inferior, como vimos anteriormente.

Podemos ainda verificar que tal comportamento é robusto, sendo encontrado para diferentes valores de γ próximos da transição, como considerado na Figura 28, e para maiores valores do número de colisões n , como mostra a Figura 29, ambas construídas para o bilhar ovóide dependente do tempo utilizando os parâmetros $\eta = 0,5$, $\epsilon = 0,08$, $p = 3$ e velocidade inicial $V_0 = 0,6$. Tais curvas foram construídas utilizando a mesma abordagem fenomenológica utilizada para as Figuras 16 e 20, porém vale apontar que o comportamento também é encontrado para a distribuição proposta para obtenção da solução analítica (Figura 23).

4.4.2 Parâmetro de ordem

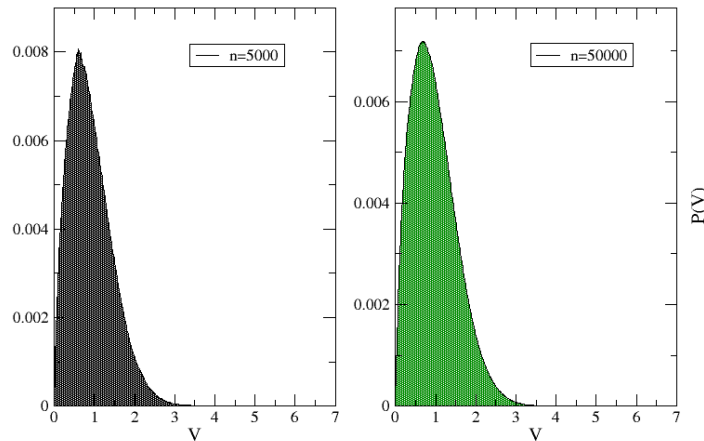
A escolha do parâmetro de ordem, sendo muitas vezes a mais difícil das etapas propostas, muitas vezes é o caminho para entendermos melhor uma transição, ou uma nova fase, a qual não

Figura 28 – Comportamento da distribuição $P(V)$ vs. V para diferentes valores de γ próximos à transição, considerando $n = 5000$ colisões. Foram usados os parâmetros $\eta = 0,5$, $\epsilon = 0,08$, $p = 3$ e velocidade inicial $V_0 = 0,6$



Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 29 – Comportamento da distribuição $P(V)$ vs. V considerando $n = 5000$ e $n = 50000$ colisões. Foram usados os parâmetros $\eta = 0,5$, $\epsilon = 0,08$, $p = 3$ e velocidade inicial $V_0 = 0,6$ e $\gamma = 0,999$



Fonte: Produção do próprio autor.

estamos bem familiarizados. Tal dificuldade é aumentada pelo fato de que muitas vezes não há uma escolha única para tal quantidade, sendo necessário apenas que a mesma se aproxime de zero conforme nos aproximamos da transição de fase. Podemos selecionar diferentes parâmetros para diferentes situações de um mesmo sistema: a magnetização, por exemplo, é extremamente útil para o estudo de ímãs a baixas temperaturas. Tal quantidade deixa de ser a melhor escolha

quando passamos a tratar de temperaturas mais altas, onde \vec{M} deixa de ter um tamanho fixo e uma nova escolha se faz necessária (SETHNA, 2006). Levando em conta as características acima, definimos como parâmetro de ordem para o sistema estudado a quantidade $\frac{1}{V_{sat}}$. A velocidade de saturação em questão foi bem definida na seção anterior como:

$$V_{sat} \propto (1 - \gamma)^{-1/2} \eta \epsilon. \quad (4.96)$$

Sendo assim, seu inverso é dado por:

$$\frac{1}{V_{sat}} \propto (1 - \gamma)^{1/2} (\eta \epsilon)^{-1}. \quad (4.97)$$

Podemos verificar que tal quantidade se aproxima de 0 conforme nos aproximamos da transição, isto é, $\gamma \rightarrow 1$, como previamente estabelecido. Além disso, tomando a primeira derivada desta quantidade encontramos:

$$\chi = \frac{\partial}{\partial \gamma} \frac{1}{V_{sat}} = \frac{\partial}{\partial \gamma} (1 - \gamma)^{1/2} (\eta \epsilon)^{-1} = \frac{-(\eta \epsilon)^{-1}}{2(1 - \gamma)^{1/2}}. \quad (4.98)$$

que é a chamada susceptibilidade do sistema. Podemos notar que χ diverge conforme nos aproximamos da transição, caracterizando uma transição de fase de segunda ordem, o que discutiremos com maior detalhe ao final do capítulo.

4.4.3 Excitações elementares e defeitos topológicos

Para compreendermos adequadamente do que se tratam tais excitações elementares a serem analisadas para o sistema estudado, podemos recorrer a um problema bastante conhecido: a caminhada aleatória. Neste problema consideramos um caminhante que se move em um determinado eixo dando passos discretos de tamanho fixo " l ". Tais passos podem ser dados para a direita ou para a esquerda, onde podemos ainda considerar que o caminhante não tenha nenhuma preferência de direção, isto é, um passo para direita é tão provável quanto um para a esquerda. Chamamos a probabilidade de que o movimento seja em uma dessas direções, digamos para a direita, de p , enquanto que a probabilidade de que o mesmo seja na direção oposta é dado por $q = 1 - p$ (REIF, 2008). Tal cenário, na prática, pode ser muito mais complicado: podemos ter que tais probabilidades não sejam iguais, ou que o caminhante possa se deslocar em mais direções; Qualquer que seja o caso é importante ter em mente que a excitação elementar é caracterizada justamente pelo tamanho fixo de cada passo, a amplitude l .

Tratando agora da análise do nosso objeto de estudo, podemos nos utilizar do fato de que o processo difusivo em questão está sendo analisado no eixo das velocidades. Sendo assim, podemos caracterizar a excitação elementar pelo termo que difere a velocidade da partícula entre

as colisões n e $n + 1$. Para isso, lembremos que:

$$D = \frac{\overline{V_{n+1}^2} - \overline{V_n^2}}{2} = \frac{(\gamma^2 - 1)\overline{V_n^2}}{4} + \frac{(1 + \gamma)^2\eta^2\epsilon^2}{16}. \quad (4.99)$$

Analisando justamente a diferença entre as velocidades:

$$\overline{V_{n+1}^2} - \overline{V_n^2} = \frac{\overline{V_{n+1}^2} - \overline{V_n^2}}{(n+1) - n} \simeq \frac{d\overline{V^2}}{dn} = \frac{(\gamma^2 - 1)\overline{V_n^2}}{2} + \frac{(1 + \gamma)^2\eta^2\epsilon^2}{8}. \quad (4.100)$$

podendo a expressão ser finalmente reescrita por:

$$\overline{V_{n+1}} - \overline{V_n} \propto \sqrt{\frac{(1 + \gamma)^2\eta^2\epsilon^2}{8}} \propto (1 + \gamma)\eta\epsilon. \quad (4.101)$$

Temos então $(1 + \gamma)\eta\epsilon$ o tamanho do passo do caminhante, isto é, a quantidade que caracteriza as excitações elementares do sistema estudado. Tal resultado se torna ainda mais interessante ao analisarmos o limite dessa quantidade ao nos aproximarmos da transição:

$$\sqrt{\frac{(1 + \gamma)^2\eta^2\epsilon^2}{8}} \Big|_{\gamma \rightarrow 1} \rightarrow \frac{\eta\epsilon}{\sqrt{2}}, \quad (4.102)$$

resultado este muito parecido com tratado no mapeamento genérico discutido em (MIRANDA et al., 2021), reproduzido abaixo:

$$\begin{cases} I_{n+1} = I_n + \epsilon h(\theta_n, I_{n+1}) \\ \theta_{n+1} = [\theta_n + K(I_{n+1}) + \epsilon p(\theta_n, I_{n+1})] \text{mod}(2\pi). \end{cases} \quad (4.103)$$

onde $h(\theta_n, I_{n+1})$, $K(I_{n+1})$ e $p(\theta_n, I_{n+1})$ são funções não lineares e para $p(\theta_n, I_{n+1}) = 0$ e $h(\theta_n, I_{n+1}) = \text{sen}(\theta_n)$ diferentes sistemas dinâmicos conhecidos podem ser recuperados tais como o mapa padrão ($K(I_{n+1}) = I_{n+1}$), o modelo Fermi-Ulam ($K(I_{n+1}) = 2/I_{n+1}$) e o modelo *bouncer* ($K(I_{n+1}) = \zeta I_{n+1}$). Tal mapeamento permite a obtenção das excitações elementares por meio de uma média feita sobre a primeira equação (KRUGER, 2016), onde temos:

$$I_{n+1}^2 = I_n^2 + \epsilon^2 \text{sen}^2(\theta_n) \rightarrow I^2 = \frac{\epsilon^2}{2} \rightarrow I = \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, \quad (4.104)$$

exibindo, então, para uma gama de sistemas bem estabelecidos na literatura, comportamento e resultado bastante similar ao encontrado para o bilhar dependente do tempo dissipativo que é foco deste trabalho.

Por fim, nosso último passo, que seria a classificação dos defeitos topológicos do sistema, é o mais simples de ser abordado. Quando definimos os defeitos topológicos para esse tipo de sistema é importante analisarmos o comportamento da probabilidade de distribuição de partículas do mesmo. No sistema em questão, os defeitos topológicos seriam os chamados *sinks*, pontos

fixos assintoticamente estáveis, que não estão presentes no modelo para os parâmetros de controle considerados. Sendo assim, estão concluídos os quatro passos necessários para a caracterização completa do nosso sistema e podemos discutir as consequências dos resultados encontrados

Ao analisarmos um análogo termodinâmico para esse sistema vimos que é conveniente que haja uma supressão desse crescimento ilimitado de velocidade, uma vez que esse levaria a temperatura do gás que estamos tratando pelo formalismo de bilhares a crescer de forma ilimitada, o que sabemos não ser observado experimentalmente. Vimos então que essa aceleração de Fermi pode ser suprimida ao serem introduzidas forças dissipativas no sistema, sendo elas colisões inelásticas com a fronteira ou forças de arrasto. Em qualquer que seja o caso, é possível observar a transição de fase particular que estamos tratando: de difusão limitada para ilimitada quando o parâmetro dissipativo vai a zero continuamente. Na verdade, o parâmetro em questão utilizado é o coeficiente de restituição $\gamma \in [0, 1]$, que é igual a 1 caso tenhamos colisões completamente elásticas e menor que 1 para o caso onde ocorrem perdas fracionais de energia em cada colisão. A transição de interesse é então a que ocorre conforme $\gamma \rightarrow 1$, onde o sistema muda de uma dinâmica conservativa (em que a velocidade pode crescer ilimitadamente) para dissipativa.

Retomemos brevemente à transição de fase que está sendo analisada neste trabalho. Estudamos, ao longo dos capítulos anteriores, um bilhar de fronteira ovóide dependente do tempo, onde as partículas em seu interior podem ganhar ou perder energia ao colidirem com a fronteira, dependendo da fase em que a mesma se encontra. Devido à presença de um limite inferior e à ausência de um limite superior para as velocidades de tais partículas, que eventualmente tem sua distribuição apresentando uma quebra de simetria, a energia apresenta um ganho ilimitado para um número suficientemente grande de colisões, fenômeno conhecido como Aceleração de Fermi. A observação de tal fenômeno está de acordo com a conjectura LRA, que define a presença de caos no bilhar estático como característica suficiente para garantir a observação do fenômeno em questão quando a dependência temporal é inserida, que é o caso do bilhar ovóide (LOSKUTOV; RYABOV; AKINSHIN, 2000). Tal ganho ilimitado está, porém, em discordância com o que seria observado caso considerássemos um análogo termodinâmico deste sistema, onde uma estabilização da temperatura deveria ser alcançada para tempos suficientemente longos. Se faz necessário considerar uma supressão do fenômeno, que pode ser feita por meio da introdução de uma dissipação nas colisões com as paredes do sistema, e as colisões passam a ser consideradas inelásticas. Ao introduzirmos tal condição usando um coeficiente de restituição $\gamma \in [0, 1]$, podemos observar a transição de fase em questão: de difusão limitada para ilimitada que ocorre conforme $\gamma \rightarrow 1$, onde o sistema muda de uma dinâmica conservativa para dissipativa.

Tal transição de fase, como descrito acima, ainda pode ser classificada como contínua (ou de segunda ordem), que tem como duas importantes características a sua universalidade e invariância de escala, sendo extremamente importantes em diversos tópicos na literatura. Nesse caso, por universalidade estamos nos referindo ao fato de que, em transições de fase contínuas, o comportamento próximo à transição pode ser tratado independente de detalhes macroscópicos e ainda ter muitas de suas propriedades observadas em outros sistemas que passam pelo mesmo

tipo de transição. Tais sistemas que apresentam características similares próximas são ditos pertencentes a uma mesma classe de universalidade (SETHNA, 2006). Já no que se refere ao fenômeno de invariância de escala, sua presença foi extensa ao longo de todo este trabalho, sendo tal característica responsável pela descrição dos sistemas tratados por meio de hipóteses de escala, tendo como consequência a possibilidade de sobrepor diferentes curvas de mesmo comportamento para diferentes parâmetros por meio da obtenção de seus expoentes críticos e leis de escala. Tal fenômeno é melhor sumarizado pela ideia de que esses sistemas são estatisticamente invariantes, apresentando apenas uma mudança em sua escala (LEONEL, 2015)

Percebemos, então, que tal caracterização, utilizando do formalismo das transições de fase contínuas, está de acordo com comportamentos típicos de sistemas dinâmicos tais como os abordados aqui, estendendo suas aplicações para muitos outros casos, desde o estudo da transição de caos para movimento quasiperiódico até a localização da última curva invariante destruída em sistemas Hamiltonianos (SETHNA, 2006; LEONEL, 2019; MIRANDA et al., 2021), exemplificando a relevância e potencialidade desta abordagem.

5 CONCLUSÃO

Caracterizamos, ao longo deste trabalho, a transição de fase de segunda ordem observada em um sistema bilhar ovóide dependente do tempo a medida em que o parâmetro de controle γ vai a 1 continuamente, isto é, conforme o sistema passa de uma dinâmica dissipativa para conservativa. Tal caracterização foi feita, inicialmente, apresentando as principais características do bilhar para o caso estático, introduzindo ainda os conceitos de aceleração de Fermi e a conjectura LRA. A primeira se refere ao fenômeno onde colisões sucessivas entre as partículas que compõem o bilhar e sua fronteira levam a um ganho ilimitado de energia, podendo ser suprimida com a introdução de dissipação no sistema, enquanto a conjectura define as condições nas quais tal fenômeno é observado. Para ambos os sistemas, com e sem dissipação, a caracterização fenomenológica foi realizada de forma completa, estudando o comportamento das velocidades médias do sistema bem como suas distribuições para diferentes números de colisões, recuperando os resultados estabelecidos na literatura e obtendo as leis de escala para o sistema, bem como seus expoentes críticos.

Também foi realizado o estudo do sistema por meio de um análogo termodinâmico: um gás em contato com um reservatório térmico. Para que tal análogo representasse de forma adequada o bilhar em questão foi necessária, conforme esperado, a introdução de um coeficiente de restituição nas colisões das partículas do gás com as paredes do recipiente de forma a suprimir tal ganho ilimitado de energia e subsequentemente de temperatura. A transição de fase de uma dinâmica onde a partícula tem energia e velocidade ilimitadas para uma fase dissipativa ocorre então conforme o coeficiente de restituição se aproxima de 1. Foi realizada ainda conexão entre as grandezas que caracterizam a evolução de cada um dos formalismos, lê-se, o tempo e o número de colisões.

Realizada tal análise fenomenológica, atacamos a transição por meio do formalismo da solução da equação de difusão apresentado em (LEONEL et al., 2020). Obtemos uma expressão para a probabilidade $P(V, n)$ de que a partícula seja observada com determinada velocidade em um determinado tempo de acordo com as condições de contorno do sistema por meio do formalismo da difusão ao longo de uma região semi-infinita, onde a probabilidade apresenta uma distribuição com um pico bem definido a uma certa velocidade finita e se aproxima de zero em $V = 0$ e $V \rightarrow +\infty$. A obtenção de $P(V, n)$ permitiu a recuperação de importantes quantidades do sistema, tal como $\overline{V^2}(n)$ e V_{rms} . Por fim, a análise do comportamento de tais quantidades apresentou grande conformidade com o comportamento encontrado por meio da descrição fenomenológica realizada anteriormente, tendo sido feita novamente a obtenção das leis de escala e dos expoentes críticos, agora por meio da análise fenomenológica das curvas obtidas e da aplicação dos limites pertinentes na expressão analítica, ambos os métodos recuperando os valores esperados com grande sucesso.

Por fim, caracterizamos completamente a transição de fase observada por meio do procedi-

mento proposto por (SETHNA, 2006). A quebra de simetria foi observada nas distribuições das velocidades, que apresentam uma mudança de comportamento na forma de uma "cauda" para altas velocidades devido à presença de um limite inferior para as mesmas aliado à ausência de um limite superior. Para o sistema conservativo tal comportamento não foi observado e tínhamos apenas o "achatamento" da distribuição simétrica observada, mesmo para um número de colisões suficientemente grande. O parâmetro de ordem foi escolhido como sendo a quantidade $1/V_{sat}$, uma vez que tende continuamente a zero conforme o parâmetro de controle se aproxima da transição. A quantidade definida como susceptibilidade χ diverge conforme nos aproximamos da transição, caracterizando uma transição de fase contínua, tendo como importantes potencialidades sua universalidade e invariância de escala, como observado ao longo deste trabalho. As excitações elementares foram definidas como uma quantidade $(1 + \gamma)\eta\epsilon$, também sendo observado que no limite da transição encontramos uma amplitude de excitação dada por $\eta\epsilon/\sqrt{2}$, similar ao encontrado para outros sistemas não lineares bem estabelecidos na literatura (MIRANDA et al., 2021). Os defeitos topológicos estariam associados à existência de *sinks* no espaço de fases, não observados para os parâmetros considerados nesse trabalho. Sendo assim podemos afirmar que este trabalho permitiu, com sucesso, uma caracterização completa da transição em questão, contornando ainda dificuldades computacionais na abordagem do sistema que são encontradas fenomenologicamente e são grandemente simplificadas por meio da solução analítica da equação de difusão, que nos permitiu a recuperação de todos os resultados apresentados na literatura para o sistema.

Durante o desenvolvimento deste trabalho, a autora teve a oportunidade de participar na produção de um *review* publicado no periódico internacional *Europhysics Letters* sobre a transição de fase no mapa padrão dissipativo, que inspirou a metodologia utilizada neste trabalho (MIRANDA et al., 2021). Além disso, parte dos resultados desta dissertação foram publicados na revista *Physical Review E* em 2023, no artigo "*Characterizing a transition from limited to unlimited diffusion in energy for a time-dependent stochastic billiard*", produzido também com auxílio da autora desta dissertação,

Como perspectivas futuras, acreditamos que o formalismo apresentado possa ser estendido para outras transições de fase, sendo elas em outros bilhares ou outros sistemas caóticos de forma geral. Alguns candidatos em potencial para a aplicação do formalismo apresentado aqui são os bilhares anelar e elíptico, que também obedecem a a Conjectura LRA e passam de difusão ilimitada para limitada conforme a dissipação é introduzida. Similarmente, como foi citado no capítulo 2, também seria um potencial objeto de estudo os comportamentos de subdifusão e superdifusão em sistemas como o próprio bilhar ovóide dependente do tempo abordado nesta dissertação, que ocorre uma vez que a estocasticidade é removida do modelo. Também é um problema em aberto a questão do transporte de partículas em tais situações, bem como a aplicabilidade do formalismo em bilhares com alterações na expressão que descreve a fronteira. Sendo assim, fica explícito o imenso potencial da abordagem apresentada neste trabalho para o estudo de transições de fase nos mais diversos sistemas.

REFERÊNCIAS

- ABUD, C. **Propriedades de transporte, caos e dissipação num sistema dinâmico não linear**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista 'Julio de Mesquita Filho'. Rio Claro, São Paulo - Brasil, 2010.
- ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. **Chaos: An Introduction to Dynamical Systems (Textbooks in Mathematical Sciences)**. Maryland, Estados Unidos da América: Springer, 1996.
- ARFKEN, G. **Física Matemática - Métodos Matemáticos para Engenharia e Física**. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro - Brasil: GEN LTC, 2017.
- BALAKRISHNAN, V. **Elements of Nonequilibrium Statistical Mechanics**. Cham, Zug - Suíça: Springer, 2021.
- BERRY, M. Regularity and chaos in classical mechanics, illustrated by three deformations of a circular 'billiard'. **European Journal of Physics**, v. 2, n. 2, p. 91–102, 1981.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares**. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro - Brasil: GEN LTC, 2014.
- BUNIMOVICH, L. On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards. **Communications in Mathematical Physics**, v. 65, n. 3, p. 295–312, 1979.
- BUTKOV, E. **Física Matemática**. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro - Brasil: Editora Guanabara, 1988.
- CASATI, G.; PROSEN, T. Time irreversible billiards with piecewise-straight trajectories. **Physical review letters**, v. 109, p. 174101, 10 2012.
- CENCINI, M.; CECCONI, F.; VULPIANI, A. **Chaos From simple models to complex systems**. Roma, Itália: WSPC, 2009.
- CHERNOV, N.; MARKARIAN, R. **Chaotic Billiards**. Estados Unidos da América: American Mathematical Society, 2006.
- COX, C.; FERES, R.; ZHAO, B. Rolling systems and their billiard limits. **Regular and Chaotic Dynamics**, v. 26, p. 1–21, 2 2021.
- CVITANOVIC, P. **A Brief History of Chaos**. Atlanta, Georgia - Estados Unidos da América: Georgia Institute of Technology, 1989.
- ECKMANN, J. P.; RUELLE, D. Ergodic theory of chaos and strange attractors. **Reviews of Modern Physics**, American Physical Society, v. 57, p. 617–656, Jul 1985.
- FERMI, E. On the origin of the cosmic radiation. **Physics Review**, v. 75, n. 8, p. 1169–1174, 1949.
- HANSEN, M. et al. Explaining a changeover from normal to super diffusion in time-dependent billiards. **Europhysics Letters**, v. 121, n. 6, p. 1–7, 2018.

JL, D. S. **Lyapunov Exponents**. 2023. Disponível em: <<https://juliadynamics.github.io/DynamicalSystems.jl/v1.5/chaos/lyapunovs/#Concept-of-the-Lyapunov-exponent-1>>. Acesso em 06 de Fevereiro de 2024.

KOLMOGOROV, A. N. On conservation of conditionally periodic motions for a small change in hamilton's function. **Doklady Akademii Nauk SSSR**, v. 98, p. 527–530, 1954.

KRUELLE, C. A. et al. Whispering gallery orbits in the bunimovich stadium. **Zeitschrift für Naturforschung A**, v. 52, n. 8-9, p. 581–584, 1997.

KRUGER, T. **Grau de Hiperbolicidade do espaço de fases e sua relação com o efeito stickiness em sistemas conservativos**. Tese (Doutorado), Univesidade Federal do Paraná. Curitiba, Paraná - Brasil, 2016.

LENZ, F.; DIAKONOS, F.; SCHMELCHER, P. Tunable fermi acceleration in the driven elliptical billiard. **Physical Review Letters**, v. 100, n. 1, p. 014103, 2008.

LEONEL, E.; BUNIMOVICH, L. Suppressing fermi acceleration in a driven elliptical billiard. **Physics Review Letters**, v. 104, n. 22, p. 014103, 2010.

LEONEL, E.; BUNIMOVICH, L. Suppressing fermi acceleration in two-dimensional driven billiards. **Physical Review E**, v. 82, n. 1, p. 016202, 2010.

LEONEL, E. et al. Thermodynamics of a time-dependent and dissipative oval billiard: A heat transfer and billiard approach. **Physical Review E**, v. 94, n. 062211, p. 1 – 10, 2016.

LEONEL, E. et al. Application of the diffusion equation to prove scaling invariance on the transition from limited to unlimited diffusion. **Europhysics Letters**, v. 131, n. 10004, p. 1 – 5, 2020.

LEONEL, E. D. **Fundamentos da Física Estatística**. São Paulo, São Paulo - Brasil: Edgard Blucher Ltda, 2015.

LEONEL, E. D. **Invariância de Escala em Sistemas Dinâmicos Não Lineares**. São Paulo, São Paulo - Brasil: Edgard Blucher Ltda, 2019.

LEONEL, E. D. Time dependent billiards. In: _____. **Scaling Laws in Dynamical Systems**. Singapore: Springer Singapore, 2021. p. 181–190.

LERMAN, A.; ZHARNITSKY, V. Whispering gallery orbits in sinai oscillator trap. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 425, p. 132960, 2021.

LICHTENBERG, A.; LIEBERMAN, M. **Regular and Chaotic Dynamics**. Verlag, Nova Iorque - Estados Unidos da América: Springer, 1992.

LOSKUTOV, A.; RYABOV, A.; AKINSHIN, L. Properties of some chaotic billiards with time-dependent boundaries. **Journal of Physics A**, v. 33, n. 44, p. 7973–7986, 2000.

MIRANDA, L. et al. A short review of phase transition in a chaotic system. **Europhysics Letters**, v. 231, p. 167–177, 2021.

NARASIMHAN, T. N. The dichotomous history of diffusion. **Physics Today**, v. 62, n. 7, p. 48–53, 07 2009.

OLIVEIRA, D.; LEONEL, E. Suppressing fermi acceleration in a two-dimensional non-integrable time-dependent oval-shaped billiard with inelastic collisions. **Physica A**, v. 389, n. 5, p. 1009–1020, 2009.

OLIVEIRA, D.; LEONEL, E. Boundary crisis and suppression of fermi acceleration in a dissipative two-dimensional non-integrable time-dependent billiard. **Physics Letters A**, v. 374, n. 30, p. 3016–3020, 2010.

OLIVEIRA, D. F.; LEONEL, E. D. Suppressing fermi acceleration in a two-dimensional non-integrable time-dependent oval-shaped billiard with inelastic collisions. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 389, n. 5, p. 1009–1020, 2010.

OLIVEIRA, D. F.; ROBNIK, M.; LEONEL, E. D. Statistical properties of a dissipative kicked system: Critical exponents and scaling invariance. **Physics Letters A**, v. 376, n. 5, p. 723–728, 2012.

OLIVEIRA, D. F.; SILVA, M. R.; LEONEL, E. D. A symmetry break in energy distribution and a biased random walk behavior causing unlimited diffusion in a two dimensional mapping. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 436, p. 909–915, 2015.

PAPENBROCK, T. Numerical study of a three-dimensional generalized stadium billiard. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 61, p. 4626–4628, 2000.

POZZO, L. **Propriedades de transporte caótico em mapeamentos hamiltonianos não lineares**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista 'Júlio de Mesquita Filho'. Rio Claro, São Paulo - Brasil, 2020.

REIF, F. **Fundamentals of Statistical and Thermal Physics**. Long Grove, Illinois - Estados Unidos da América: Waveland Pr Inc, 2008.

SETHNA, J. P. **Statistical mechanics: Entropy, Order parameters and complexity**. Nova Iorque, Nova Iorque - Estados Unidos da América: Oxford University Press, 2006.

SILVEIRA, F. et al. Characterizing a transition from limited to unlimited diffusion in energy for a time-dependent stochastic billiard. **Physical Review E**, v. 108, p. 054206, 2023.

SINAI, Y. Dynamical systems with elastic reflections. ergodic properties of dispersing billiards. **Russian Mathematical Survey**, v. 25, n. 2, p. 137 – 189, 1970.

SPIVAK, M. **Calculus on Manifolds: A Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus**. Florida, Estados Unidos da América: W.A. Benjamin Inc., 1965.