



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

MARINA GONZAGA DE OLIVEIRA

POSSÍVEIS VARIAÇÕES DA OBLIQUIDADE DE PLANETAS

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS
RIO CLARO

São Paulo - 2018

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Marina Gonzaga de Oliveira

Possíveis variações da obliquidade de planetas

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Tadashi Yokoyama

Rio Claro, SP

2018

521.1
O48p Oliveira, Marina Gonzaga de
Possíveis variações da obliquidade de planetas / Marina
Gonzaga de Oliveira. - Rio Claro, 2018
109 f. : il., figs., gráfs., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Tadashi Yokoyama

1. Mecânica celeste. 2. Obliquidade. 3. Netuno. 4.
Variáveis de Andoyer. I. Título.

Marina Gonzaga de Oliveira

Possíveis variações da obliquidade de planetas

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Tadashi Yokoyama - UNESP Rio Claro
Prof. Dr. Othon Cabo Winter - UNESP Guaratinguetá
Prof. Dr. Marcos Tadeu dos Santos - UNESP Rio Claro

Trabalho aprovado.
Rio Claro, SP, 06 de junho de 2018.

Agradecimentos

Ao professor Tadashi Yokoyama pela orientação e paciência ao longo de mais de 4 anos trabalhando juntos.

À minha família, Silvio, Lucilene e Beatriz, e amigos, Raissa, Rodrigo e Célia, pelo incentivo e carinho, nunca me deixando desistir.

Aos colegas de orientação, Leonardo Di Schiavi Trotta e Gabriel Gomes, que sempre me ajudaram.

À CAPES e à FAPESP (Processo 2016/07046 – 4) pelos apoios financeiros.

Aos colaboradores do Departamento de Física, do Departamento de Estatística, Matemática Aplicada e Computação, da seção de Pós-Graduação e do Ponto de Apoio da FAPESP - UNESP Rio Claro, meu obrigada pela ajuda durante esse projeto.

Resumo

É quase um consenso que os planetas ao serem formados, nasceram com obliquidades quase nulas. No entanto, para os planetas gigantes, exceto Júpiter, as atuais obliquidades (ϵ) estão longe de zero. Para Saturno, Urano e Netuno elas são, respectivamente, 25, 61°, 97, 86°, 28, 31°. Em geral, as razões que alteraram as obliquidades estão associadas a efeitos gravitacionais como colisões ou capturas em ressonâncias. Neste trabalho pretendemos montar o sistema médio que governa a dinâmica de longo período da variação da obliquidade de um planeta considerando o Sol e um satélite com massas e distâncias diversas. Usaremos variáveis de Andoyer pois, por serem canônicas, as médias podem ser realizadas de forma rigorosa sempre que feitas em variáveis ação - ângulo. A questão do “wooble” pode ser facilmente incorporada se necessário. Pretendemos com este modelo estudar a variação da obliquidade de Netuno, mas em princípio pode ser usado também nos casos de exoplanetas (ARMSTRONG et al., 2014). O planeta Netuno, aparentemente é o único que não tem nenhum satélite regular primordial, ao contrário dos demais. Boué e Laskar (2010) fizeram uso de um satélite adicional para explicar a obliquidade de Urano. Porém, a presença de um satélite adicional de massa muito elevada, poderia desestabilizar os primordiais já existentes. No caso de Netuno, as massas dos satélites adicionais que pretendemos usar podem ser muito menores do que aquelas usadas por Boué e Laskar, o que elimina de vez, possível desestabilização de eventuais satélites primordiais regulares, caso eles tenham existido.

Palavras-chave: Obliquidade. Netuno. Variáveis de Andoyer.

Abstract

It is almost a consensus that the planets, when formed, were born with almost zero obliquities. However, for giant planets except Jupiter, the current obliquities (ϵ) are far from zero. For Saturn, Uranus, and Neptune they are, respectively, 25.6° , 97.8° , 28.3° . In general, the reasons that changed the obliquities are associated to gravitational effects such as collisions or captures in resonances. In this work we intend to build the average system that governs the long period dynamics of the variation of the obliquity of a planet considering the Sun and a satellite with different masses and distances. We will use Andoyer variables, because they are canonical, so averages can be performed rigorously whenever they are made in angle-action variables. The “wooble” issue can be easily incorporated if necessary. We intend with this model to study the variation of the Neptune’s obliquity, but in principle it can also be used in the case of exoplanets (ARMSTRONG et al., 2014). The planet Neptune, apparently is the only one that has no regular primordial satellite, unlike the others. Boué e Laskar (2010), used an additional satellite to explain the Uranus’ obliquity. However, the presence of an additional satellite with very high mass could destabilize the existing primordial ones. In the case of Neptune, the masses of the additional satellites that we intend to use may be much smaller than those used by Boué and Laskar, which eliminates possible destabilization of eventual regular primordial satellites, if they existed.

Keywords: Obliquity. Neptune. Andoyer’s Variable.

Lista de ilustrações

| | |
|--|----|
| Figura 1 – Ângulos de Andoyer | 15 |
| Figura 2 – Latitude e longitude de C_i vista do sistema equatorial F | 23 |
| Figura 3 – Distância angular S entre o Sol e o satélite. | 30 |
| Figura 4 – Satélite visto do plano equatorial. | 33 |
| Figura 5 – Planos inercial, normal, equatorial do planeta e orbital do satélite. | 35 |
| Figura 6 – Esquema de planos para o cálculo da obliquidade. | 45 |
| Figura 7 – Planos do sistema Terra, Lua e Sol | 47 |
| Figura 8 – Precessão do equador da Terra considerando Lua e Sol como pertur- badores, porém agora todo o movimento orbital de ambos está sendo considerado. | 52 |
| Figura 9 – Variação da obliquidade da Terra considerando Lua e Sol como pertur- badores, porém agora todo o movimento orbital de ambos está sendo considerado. | 52 |
| Figura 10 – Obliquidade da Terra quando se considera apenas o Sol como perturbador. | 53 |
| Figura 11 – Teste 1: $a = 60 R_N$, $I = 80^\circ$, $e = 0, 1$, $M_{sat} = M_N/2500$, K em radianos e $\rho = h - \Omega$ em radianos | 56 |
| Figura 12 – Teste 2: $a = 60 R_N$, $I = 40^\circ$, $e = 0, 1$, $M_{sat} = M_N/100$, K em radianos e $\rho = h - \Omega$ em radianos | 57 |
| Figura 13 – Teste 3: $a = 60 R_N$, $I = 40^\circ$, $e = 0, 8$, $M_{sat} = M_N/100$, K em radianos e $\rho = h - \Omega$ em radianos | 57 |
| Figura 14 – Teste 4: $a = 60 R_N$, $I = 40^\circ$, $e = 0, 8$, $M_{sat} = M_N/2500$, K em radianos e $\rho = h - \Omega$ em radianos | 58 |
| Figura 15 – Crescimento da obliquidade de Netuno em função da massa do satélite | 61 |
| Figura 16 – Satélite sob efeito de Kozai: (a)variação da obliquidade de Netuno; (b)variação da excentricidade; (c)variação da inclinação do satélite em relação ao plano inercial. | 62 |
| Figura 17 – Efeito acumulativo sobre a obliquidade: (a) variação da obliquidade de Netuno; (b) variação da excentricidade de cada satélite; (c) variação da inclinação de cada satélite em relação ao plano fundamental. | 65 |
| Figura 18 – 1º exemplo: (a) obliquidade de Netuno; (b) variação da excentricidade de cada satélite | 67 |
| Figura 19 – 2º exemplo: (a) obliquidade de Netuno; (b) variação da excentricidade de cada satélite | 68 |
| Figura 20 – 3º exemplo: (a) obliquidade de Netuno; (b) variação da excentricidade de cada satélite | 68 |

| | |
|--|-----|
| Figura 21 – 4° exemplo: (a) obliquidade de Netuno; (b) variação da excentricidade de cada satélite | 69 |
| Figura 22 – 5° exemplo: (a) obliquidade de Netuno; (b) variação da excentricidade de cada satélite | 69 |
| Figura 23 – 6° exemplo: (a) obliquidade de Netuno; (b) variação da excentricidade de cada satélite | 70 |
| Figura 24 – 7° exemplo: (a) obliquidade de Netuno; (b) variação da excentricidade de cada satélite | 70 |
| Figura 25 – Triângulo esférico | 77 |
| Figura 26 – Atitude de $oxyz$ com relação a $OXYZ$ | 78 |
| Figura 27 – Esquema de planos para mudança de coordenadas do equatorial para o inercial | 84 |
| Figura 28 – Planos F e SC_{\odot} | 90 |
| Figura 29 – Obliquidade. | 92 |
| Figura 30 – Influência atual de Tritão na obliquidade de Netuno | 108 |
| Figura 31 – Influência de Tritão na obliquidade de Netuno quando $10 R_N \leq a_0 \leq 50 R_N$ | 109 |
| Figura 32 – Influência de Tritão na obliquidade de Netuno quando $a_0 \in (100 R_N, 2000 R_N)$ | 110 |

Lista de tabelas

| | |
|--|-----|
| Tabela 1 – Dados para o sistema Terra, Lua e Sol | 49 |
| Tabela 2 – Conjunto de satélites utilizados para gerar a figura 17 | 64 |
| Tabela 3 – Conjunto de satélites referente a figura 18 | 99 |
| Tabela 4 – Conjunto de satélites referente a figura 19 | 100 |
| Tabela 5 – Conjunto de satélites referente a figura 20 | 101 |
| Tabela 6 – Conjunto de satélites referente a figura 21 | 102 |
| Tabela 7 – Conjunto de satélites referente a figura 22 | 103 |
| Tabela 8 – Conjunto de satélites referente a figura 23 | 104 |
| Tabela 9 – Conjunto de satélites referente a figura 24 | 105 |

Sumário

| | | |
|-----|--|----|
| | Introdução | 13 |
| 1 | ÂNGULOS DE ANDOYER | 15 |
| 1.1 | Ângulos de Andoyer e os sistemas de coordenadas | 15 |
| 2 | CORPO LIVRE (SEM TORQUES) | 19 |
| 2.1 | Rotação de um corpo livre em variáveis de Andoyer | 19 |
| 3 | SISTEMA MÉDIO PARA A DINÂMICA DE ROTAÇÃO | 22 |
| 3.1 | Potencial perturbador médio, $\langle V \rangle$ | 22 |
| 4 | MOVIMENTO TRANSLACIONAL MÉDIO DO SATÉLITE C_2 | 29 |
| 4.1 | Função potencial média $\langle \mathcal{R} \rangle$ | 29 |
| 5 | EQUAÇÕES MÉDIAS | 38 |
| 5.1 | $\langle V \rangle$ e $\langle \mathcal{R} \rangle$ nas variáveis não singulares Y_1 e Y_2 | 38 |
| 5.2 | Oblividade do planeta | 45 |
| 6 | SISTEMA TERRA, LUA E SOL - VALIDAÇÃO DA TEORIA | 46 |
| 6.1 | Estudo teórico da precessão do equador da Terra no caso mais simples | 46 |
| 6.2 | Variação da precessão do equador usando a teoria de Laskar | 49 |
| 7 | RESSONÂNCIA $h - \Omega$ E SUA RELAÇÃO COM K | 54 |
| 7.1 | Efeito de um único C_2 no caso simplificado | 55 |
| 8 | VARIAÇÃO DA OBLIVIDADE DE NETUNO | 59 |
| 8.1 | Influência de um satélite massivo | 60 |
| 8.2 | Influência de conjuntos de satélites | 63 |
| 9 | CONCLUSÃO | 71 |
| | REFERÊNCIAS | 73 |
| | APÊNDICES | 76 |
| | APÊNDICE A – VARIÁVEIS CANÔNICAS DE ANDOYER | 77 |

| | |
|---|-----|
| APÊNDICE B – PASSAGEM DOS ELEMENTOS ORBITAIS REFERIDOS NO EQUADOR PARA O INERCIAL . . | 84 |
| APÊNDICE C – EQUAÇÃO DO MOVIMENTO DO SATÉLITE . . | 88 |
| APÊNDICE D – OBLIQUIDADE DO PLANETA | 92 |
| APÊNDICE E – ESTRUTURA DA ROTINA COMPUTACIONAL . | 94 |
| APÊNDICE F – TRANSFORMAÇÃO DA EQUAÇÃO (7.1) NA EQUAÇÃO (7.3) | 95 |
| APÊNDICE G – CONJUNTO DE SATÉLITES UTILIZADOS NO CAPÍTULO 8 | 98 |
| APÊNDICE H – CAPTURA DE TRITÃO | 106 |

Introdução

Diferentemente dos demais planetas gigantes, os satélites atuais de Netuno, certamente não são primordiais. Nesta dissertação vamos trabalhar com a hipótese que a atual alta obliquidade de Netuno foi resultado de interações gravitacionais com objetos de massa relativamente elevadas. Objetos temporariamente capturados em alta inclinação, por efeito de Kozai, podem perturbar a obliquidade do equador excitando-a a altos valores. Os objetos, por sua vez, ao atingirem altas excentricidades seriam expulsos, preservando a perturbação imprimida na obliquidade.

Construiremos o sistema médio para a dinâmica de três corpos: um planeta qualquer e achatado, mas que possua um eixo de simetria axial (C_1 ou M_p), um objeto (satélite, C_2 ou M_{sat}) e o Sol (C_3 ou M_\odot). Para tanto consideraremos:

- as perturbações do Sol e do objeto sobre a rotação do planeta, supondo que ambos são massas pontuais, uma vez que a distância entre C_1 e C_3 é grande e a razão M_{sat}/M_p é muito pequena,
- a perturbação solar e do achatamento do planeta sobre o movimento de translação do objeto,
- o plano orbital do planeta é próximo do plano inercial que consideraremos,
- as equações que regem o movimento orbital do Sol, visto do planeta, são conhecidas.

Nosso objetivo é obter a evolução da obliquidade do planeta (ϵ) no tempo. Para isso, inicialmente, desenvolveremos toda a formulação do potencial médio do sistema em função das variáveis de Andoyer e de elementos orbitais referidos em um sistema inercial. Realizada essa tarefa, eliminaremos possíveis singularidades das expressões e junto às equações de Lagrange, montaremos um conjunto de 6 equações ordinárias de primeira ordem que, através de integrações numéricas, fornecerá o desenvolvimento temporal de ϵ .

O capítulo 1 desse trabalho é destinado a introduzir as variáveis canônicas de Andoyer e as diversas relações entre os planos utilizados para definir a geometria do problema.

Para enfatizar as mudanças obtidas quando consideramos a presença de perturbadores, o capítulo 2 apresenta o problema do corpo livre (sem torques). Nele é construído, em variáveis de Andoyer, a hamiltoniana do problema, que é igual a energia cinética do corpo. O capítulo 3, por sua vez, introduz a perturbação do Sol e de um objeto sobre o

movimento de rotação do planeta. Contudo, a presença do Sol e o achatamento do planeta causam perturbações sobre o movimento translacional do objeto (C_2 ou M_{sat}), o que influencia diretamente na dinâmica de rotação do planeta. Por esse motivo, no capítulo 4 trabalhamos com a equação da perturbação solar e da perturbação devido ao achatamento do planeta sobre o objeto, construindo a função potencial média, $\langle \mathcal{R} \rangle$.

Como será introduzido no capítulo 1, temos definidos 5 ângulos (vide figura 1). No capítulo 3, teremos como conclusões que o ângulo l não está presente na expressão de V , uma vez que supomos um planeta com eixo de simetria axial ($A = B$, onde A , B e C são os momentos principais de inércia do planeta), e J é constante (em geral é muito pequeno). Como hipótese da formação do planeta, devemos sempre começar com $K \approx 0^\circ$, o que traz singularidades nas equações dinâmicas. Logo, definiremos duas novas variáveis Y_1 e Y_2 canônicas que resolvem as singularidades mencionadas. O capítulo 5 apresenta a construção de $\langle V \rangle$ e $\langle \mathcal{R} \rangle$ como funções de Y_1 e Y_2 , tal formulação permite, utilizando as equações de Hamilton e as de Lagrange, obter um sistema de 6 equações diferenciais de 1ª ordem que governam a dinâmica do sistema Sol, planeta e objeto.

O capítulo 6, Sistema Terra, Lua e Sol - validação da teoria, tem por objetivo testar as construções teóricas feitas nos capítulos anteriores e analisar se elas reproduzem valores e comportamentos conhecidos da literatura. O sucesso desse teste, possibilitou que utilizássemos o modelo construído em Netuno. Para tanto, primeiramente estudamos quais objetos poderiam criar um cenário favorável para o crescimento da obliquidade do planeta. No capítulo 7 estudamos, a partir de curvas de nível, quais características do objeto são importantes para influenciar a variação do ângulo K . Baseado nesse estudo preliminar, vários testes computacionais foram realizados de forma a criar critérios de seleção para os elementos orbitais do objeto e para a sua massa. Tais critérios são utilizados para construir conjuntos de objetos sorteados randomicamente. Esses conjuntos são usados no capítulo 8 para mostrar que existem cenários onde, tomando o planeta como Netuno, a obliquidade atinge valores próximos a $28,3^\circ$.

1 Ângulos de Andoyer

Para estudar o movimento de rotação de um planeta, perturbado pela presença de outro corpo, introduzimos 5 ângulos que posicionam dois planos: equatorial do planeta e o plano perpendicular ao momento angular de rotação do mesmo em relação a um terceiro plano (inercial). O segundo está definido diretamente em relação ao inercial e o plano equatorial está definido em relação ao plano normal. Estes 5 ângulos (figura 2.1) são os chamados ângulos de Andoyer e definem as 6 variáveis canônicas de Andoyer (h, g, l, H, G, L).

1.1 Ângulos de Andoyer e os sistemas de coordenadas

Na representação a seguir, figura 2.1, extraída de Henrard e Schwanen (2004), são apresentados os 5 ângulos de Andoyer (h, K, g, J, l), que são duas trincas de ângulos de Euler, (h, K, g) e (g, J, l).

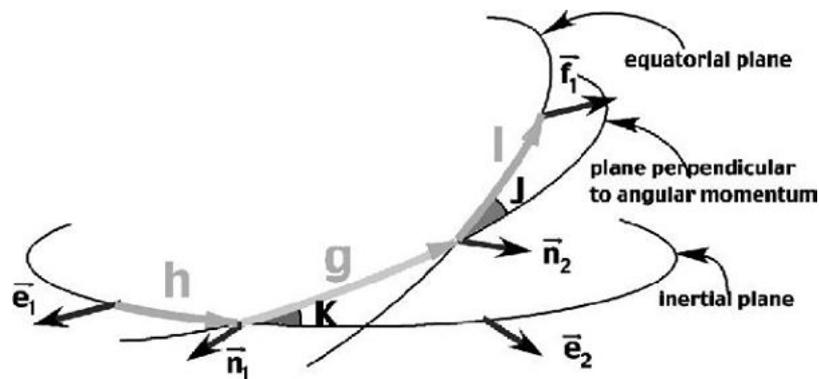


Figura 1 – Ângulos de Andoyer

Consideremos 2 sistemas de coordenadas ortogonais com origem no centro de massa do planeta (C_1) e um plano auxiliar:

- $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$: um referencial inercial com origem no centro de massa de C_1 .
- \vec{n}_1 e \vec{n}_2 dois vetores que definem o plano auxiliar, de modo que esse é perpendicular ao vetor momento angular de rotação do planeta. Denominaremos esse plano por normal.

- $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$: um referencial fixo em C_1 , com origem no centro de massa do planeta, as vezes referido como sistema equatorial.

Em particular, os eixos $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ serão tomados como sendo os eixos principais de C_1 . A partir daqui, quando nos referirmos no texto aos sistemas E e F ou ao plano normal, estaremos utilizando as definições acima.

Note que os ângulos

- (h, K, g) localizam o plano normal em relação ao inercial $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$;
- (g, J, l) posicionam o plano do equador $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ em relação ao plano normal.

Assim, para posicionar E sobre o sistema de eixos principais F , precisamos de cinco rotações, como apresentado na figura 1.

Qualquer vetor (x, y, z) em F pode ser escrito como função das coordenadas do sistema inercial E como:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_F = M(l) \cdot M(J) \cdot M(g) \cdot M(K) \cdot M(h) \cdot \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix}_E \quad (1.1)$$

em que cada $M(\)$ é uma matriz de rotação,

$$M(l) = \begin{bmatrix} \cos(l) & \sin(l) & 0 \\ -\sin(l) & \cos(l) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M(J) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(J) & \sin(J) \\ 0 & -\sin(J) & \cos(J) \end{bmatrix},$$

$$M(g) = \begin{bmatrix} \cos(g) & \sin(g) & 0 \\ -\sin(g) & \cos(g) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M(K) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(K) & \sin(K) \\ 0 & -\sin(K) & \cos(K) \end{bmatrix}$$

$$\text{e} \quad M(h) = \begin{bmatrix} \cos(h) & \sin(h) & 0 \\ -\sin(h) & \cos(h) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definimos $R_5 := M(l) \cdot M(J) \cdot M(g) \cdot M(K) \cdot M(h)$ e $\mathfrak{R} := R_5^{-1}$ cujas entradas são:

- R_5
 - $a_{11} = -\sin(h) \cos(J) \cos(g) \sin(l) \cos(K) +$
 $+ \sin(h) \sin(J) \sin(l) \sin(K) - \sin(h) \sin(g) \cos(l) \cos(K) -$
 $- \cos(J) \sin(g) \sin(l) \cos(h) + \cos(g) \cos(l) \cos(h)$

- $a_{12} = \cos(J) \cos(g) \sin(l) \cos(K) \cos(h) -$
 $- \sin(h) \cos(J) \sin(g) \sin(l) - \sin(J) \sin(l) \cos(h) \sin(K) +$
 $+ \sin(g) \cos(l) \cos(K) \cos(h) + \sin(h) \cos(g) \cos(l)$
- $a_{13} = \cos(J) \cos(g) \sin(l) \sin(K) + \sin(l) \sin(J) \cos(K) + \sin(g) \cos(l) \sin(K)$
- $a_{21} = - \sin(h) \cos(J) \cos(g) \cos(l) \cos(K) +$
 $+ \sin(h) \sin(J) \cos(l) \sin(K) + \sin(h) \sin(g) \sin(l) \cos(K) -$
 $- \cos(J) \sin(g) \cos(l) \cos(h) - \cos(g) \sin(l) \cos(h)$
- $a_{22} = \cos(J) \cos(g) \cos(l) \cos(K) \cos(h) -$
 $- \sin(h) \cos(J) \sin(g) \cos(l) - \sin(J) \cos(l) \cos(h) \sin(K) -$
 $- \sin(g) \sin(l) \cos(K) \cos(h) - \sin(h) \cos(g) \sin(l)$
- $a_{23} = \cos(J) \cos(g) \cos(l) \sin(K) + \cos(l) \sin(J) \cos(K) - \sin(g) \sin(l) \sin(K)$
- $a_{31} = \sin(J) \cos(g) \cos(K) \sin(h) + \sin(J) \sin(g) \cos(h) + \cos(J) \sin(K) \sin(h)$
- $a_{32} = - \sin(J) \cos(g) \cos(K) \cos(h) + \sin(J) \sin(g) \sin(h) - \cos(J) \cos(h) \sin(K)$
- $a_{33} = - \sin(J) \cos(g) \sin(K) + \cos(J) \cos(K)$
- \Re
- $b_{11} = - \sin(h) \cos(J) \cos(g) \sin(l) \cos(K) +$
 $+ \sin(h) \sin(J) \sin(l) \sin(K) - \sin(h) \sin(g) \cos(l) \cos(K) -$
 $- \cos(J) \sin(g) \sin(l) \cos(h) + \cos(g) \cos(l) \cos(h)$
- $b_{12} = - \sin(h) \cos(J) \cos(g) \cos(l) \cos(K) +$
 $+ \sin(h) \sin(J) \cos(l) \sin(K) + \sin(h) \sin(g) \sin(l) \cos(K) -$
 $- \cos(J) \sin(g) \cos(l) \cos(h) - \cos(g) \sin(l) \cos(h)$
- $b_{13} = \sin(J) \cos(g) \cos(K) \sin(h) + \sin(J) \sin(g) \cos(h) + \cos(J) \sin(K) \sin(h)$
- $b_{21} = \cos(J) \cos(g) \sin(l) \cos(K) \cos(h) -$
 $- \sin(h) \cos(J) \sin(g) \sin(l) - \sin(J) \sin(l) \cos(h) \sin(K) +$
 $+ \sin(g) \cos(l) \cos(K) \cos(h) + \sin(h) \cos(g) \cos(l)$

- $b_{22} = \cos(J) \cos(g) \cos(l) \cos(K) \cos(h) -$
 $-\sin(h) \cos(J) \sin(g) \cos(l) - \sin(J) \cos(l) \cos(h) \sin(K) -$
 $-\sin(g) \sin(l) \cos(K) \cos(h) - \sin(h) \cos(g) \sin(l)$
- $b_{23} = -\sin(J) \cos(g) \cos(K) \cos(h) + \sin(J) \sin(g) \sin(h) - \cos(J) \cos(h) \sin(K)$
- $b_{31} = \cos(J) \cos(g) \sin(l) \sin(K) + \sin(l) \sin(J) \cos(K) + \sin(g) \cos(l) \sin(K)$
- $b_{32} = \cos(J) \cos(g) \cos(l) \sin(K) + \cos(l) \sin(J) \cos(K) - \sin(g) \sin(l) \sin(K)$
- $b_{33} = -\sin(J) \cos(g) \sin(K) + \cos(J) \cos(K).$

Observe que $\mathfrak{R} = R^t$ e

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix}_E = \mathfrak{R} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_F \quad (1.2)$$

As variáveis canônicas de Andoyer são definidas como (l, g, h, L, G, H) , em que l, g e h são variáveis angulares e L, G e H são seus respectivos momentos conjugados, sendo que G é o momento angular de rotação, que será definido no próximo capítulo, e

$$H = G \cos(K) \quad (1.3)$$

$$L = G \cos(J). \quad (1.4)$$

Pode-se mostrar que as variáveis (L, G, H, l, g, h) formam um conjunto canônico (DEPRIT, 1967). Uma demonstração mais detalhada é também dada por BRAZ (2016).

2 Corpo livre (sem torques)

Apesar de trabalharmos com 3 corpos, que apresentam interações mútuas, de modo que suas dinâmicas rotacionais e translacionais são afetadas, é interessante apresentar o problema do corpo livre, para valorizar as mudanças que as perturbações provocam na atitude (rotação) do planeta.

2.1 Rotação de um corpo livre em variáveis de Andoyer

Suponhamos que um planeta não é perturbado por qualquer outro corpo, isto é, ele é um corpo livre. As equações do movimento derivam da sua hamiltoniana, que nesse problema é igual à sua energia cinética. Sobre o sistema equatorial $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$, o tensor de inércia de C_1 é dado pela matriz

$$I = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

enquanto que

$$\vec{G} = I\vec{\omega} \quad (2.2)$$

$$T = \frac{1}{2}(\vec{\omega} \cdot \vec{G}) \quad (2.3)$$

onde A , B e C são os momentos principais de inércia e $\vec{\omega} = \omega_1 \vec{f}_1 + \omega_2 \vec{f}_2 + \omega_3 \vec{f}_3$ é o vetor velocidade angular de C_1 . Da equação (2.2) concluímos que o vetor momento angular de rotação do planeta no sistema equatorial F é dado por

$$\vec{G}_F = A\omega_1 \vec{f}_1 + B\omega_2 \vec{f}_2 + C\omega_3 \vec{f}_3. \quad (2.4)$$

Consideremos um sistema de eixos ortogonais $(\vec{n}_1, \vec{u}, \vec{v})$ de modo que o plano $\vec{n}_1 \vec{u}$ coincide com o plano definido por \vec{n}_1 e \vec{n}_2 . Voltando aos ângulos de Andoyer, qualquer vetor escrito no sistema $(\vec{n}_1, \vec{u}, \vec{v})$ pode ser reescrito em $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ através da transformação

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_F = M(l)M(J) \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}_{(\vec{n}_1, \vec{u}, \vec{v})}$$

Como $\vec{G}_{(\vec{n}_1, \vec{v}, \vec{v})} = (0, 0, G)$ (pois, de acordo com as definições do capítulo 1, o plano $\vec{n}_1 \vec{n}_2$ é perpendicular ao momento angular de rotação) segue que

$$\vec{G}_F = \begin{bmatrix} G \sin(l) \sin(J) \\ G \cos(l) \sin(J) \\ G \cos(J) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Uma vez que, dado uma base, a representação de qualquer vetor é única, segue das equações (2.4) e (2.5) que

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{G}{A} \sin(l) \sin(J) & (2.6) \\ \omega_2 = \frac{G}{B} \cos(l) \sin(J) & (2.7) \\ \omega_3 = \frac{G}{C} \cos(J). & (2.8) \end{cases}$$

Portanto, retornando a equação (2.3), temos que

$$T = \frac{G^2 \sin^2(J)}{2} \left(\frac{\sin^2(l)}{A} + \frac{\cos^2(l)}{B} \right) + \frac{G^2 \cos^2(J)}{2C},$$

mas por (1.4)

$$G^2 \sin^2(J) = G^2 - L^2,$$

ou seja, a energia cinética de rotação de um corpo livre em variáveis de Andoyer é dada por

$$T = \frac{G^2 - L^2}{2} \left[\frac{\sin^2(l)}{A} + \frac{\cos^2(l)}{B} \right] + \frac{L^2}{2C}. \quad (2.9)$$

e a hamiltoniana deste problema é a própria T .

Como este trabalho apenas considera planetas achatados que possuem um eixo de simetria axial, isto é, $A = B$ e $A \neq C$, chamamos atenção para a expressão da energia cinética de rotação de um corpo livre com essa característica,

$$T = \frac{G^2 - L^2}{2A} - \frac{L^2}{2C}. \quad (2.10)$$

Como estamos considerando o caso em que não ocorre perturbações sobre esse planeta:

$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial l} = 0 \Rightarrow L = \text{constante} \\ \frac{dG}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial g} = 0 \Rightarrow G = \text{constante} \\ \frac{dH}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial h} = 0 \Rightarrow H = \text{constante} \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \frac{dl}{dt} = \frac{\partial T}{\partial L} = -L \left(\frac{A+C}{AC} \right) = \text{constante} \Rightarrow l \text{ é função linear no tempo} \\ \frac{dg}{dt} = \frac{\partial T}{\partial G} = \frac{G}{A} = \text{constante} \Rightarrow g \text{ é função linear no tempo} \\ \frac{dh}{dt} = \frac{\partial T}{\partial H} = 0 \Rightarrow h = \text{constante} \end{cases}$$

[**Observação 1** Outro caso interessante é se $J = 0$, então $L = G$ e $T = \frac{L^2}{2C}$, assim g , h , L , G e H são constantes e l é uma função linear no tempo.]

3 Sistema médio para a dinâmica de rotação

Neste capítulo apresentaremos a construção do potencial que perturba a atitude do planeta em variáveis de Andoyer e obteremos a expressão do potencial médio.

3.1 Potencial perturbador médio, $\langle V \rangle$

A presença do Sol e a de um satélite causam sobre o movimento de rotação do planeta perturbações não integráveis. Como já mencionado no capítulo 1, consideraremos o Sol e um satélite como massas pontuais. Tomando o sistema de coordenadas F (os eixos principais do planeta, que tem como origem o centro de massa de C_1), obteremos os potenciais de rotação que atuam em C_1 devido à presença de C_2 e C_3 . Podemos escrever de acordo com Brouwer e Clemence (1961), Oliveira (), com relação ao plano equatorial F :

$$U_i = \frac{fM_p}{r_i} + \frac{f}{r_i^3} \left[\left(C - \frac{A+B}{2} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \sin^2(\beta_i) \right) - \frac{3}{4} (A-B) \cos^2(\beta_i) \cos^2(2\psi_i) \right]$$

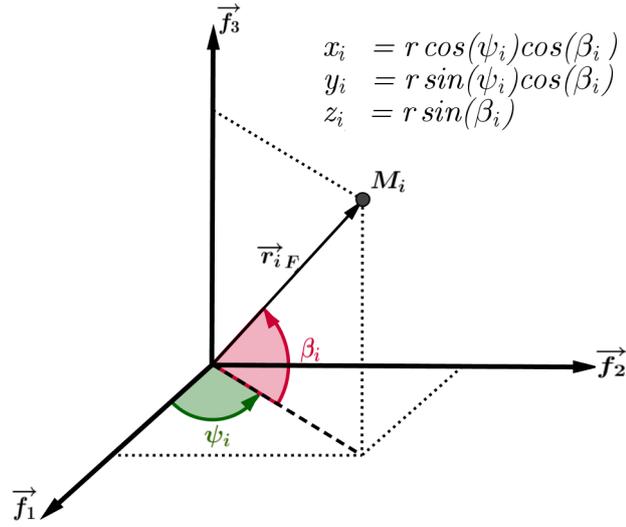
onde U_i é a função de forças (por unidade de massa) que um objeto em (x_i, y_i, z_i) sofre devido a massa M_p (achatada) e f , ψ_i e β_i definem a respectivamente: a constante gravitacional, a longitude e a latitude do corpo C_i no sistema F (veja figura 2).

Definindo $\vec{r}_{iF} = (x_i, y_i, z_i)$ como sendo o vetor posição do corpo C_i em F , observamos que

$$\begin{aligned} x_i^2 + y_i^2 &= r_i^2 \cos^2(\beta_i) (\cos^2(\psi_i) + \sin^2(\psi_i)) = r_i^2 (1 - \sin^2(\beta_i)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\sin^2(\beta_i) = \frac{x_i^2 + y_i^2}{r_i^2} - 1 \end{aligned} \quad (3.1)$$

e

$$\begin{aligned} x_i^2 - y_i^2 &= r_i^2 \cos^2(\beta_i) (\cos^2(\psi_i) - \sin^2(\psi_i)) = r_i^2 \cos^2(\beta_i) \cos(2\psi_i) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos^2(\beta_i) \cos(2\psi_i) = \frac{x_i^2 - y_i^2}{r_i^2}. \end{aligned} \quad (3.2)$$


 Figura 2 – Latitude e longitude de C_i vista do sistema equatorial F .

É usual escrever os momentos de inércia em termos de J_2 e C_{22} através das relações (HENRARD; SCHWANEN, 2004):

$$M_p R_p^2 J_2 = C - \frac{A + B}{2}$$

$$M_p R_p^2 C_{22} = \frac{B - A}{4}$$

onde R_p é raio equatorial do planeta. Assim U_i fica

$$U_i = \frac{f M_p}{r_i} + \frac{f}{r_i^3} \left\{ M_p R_p^2 J_2 \left[\frac{3}{2} \left(\frac{x_i^2 + y_i^2}{r_i^2} \right) - \frac{1}{2} \right] + 3 M_p R_p^2 C_{22} \left(\frac{x_i^2 - y_i^2}{r_i^2} \right) \right\} \quad (3.3)$$

Tomando $f = k^2$ (constante gravitacional), definimos então o potencial gravitacional como

$$V_i = -M_i U_i.$$

Ao retermos da expressão (3.3) apenas os termos que interferem na rotação do planeta, definimos o potencial perturbador de rotação que o corpo C_i provoca em C_1 como sendo:

$$V_i = -\frac{3 k^2 M_i M_p R_p^2}{2 r_i^3} \left[J_2 (X_i^2 + Y_i^2) + 2 C_{22} (X_i^2 - Y_i^2) \right] \quad (3.4)$$

em que $(X_i, Y_i, Z_i)_F$ representa o versor posição $(x_i, y_i, z_i)_F$.

O potencial perturbador que influencia a atitude do planeta é dado por

$$V = V_{sat} + V_{\odot}, \quad (3.5)$$

onde “sat” se refere a C_2 (satélite) e “ \odot ” a C_3 (Sol). A expressão acima ainda está em função das coordenadas cartesianas do satélite e do Sol com relação ao sistema F (sistema equatorial).

Novamente, como consideramos que o planeta possui simetria axial, $A = B$, temos que (3.4) se reduz a

$$V_i = -\frac{3}{2} \frac{k^2 M_i M_p R_p^2}{r_i^3} J_2 (X_i^2 + Y_i^2) \quad (3.6)$$

uma vez que

$$M_p R_p^2 C_{22} = \frac{B - A}{4} = 0 \Rightarrow C_{22} = 0.$$

Como nosso objetivo é desenvolver o potencial perturbador médio em variáveis de longo período, introduzimos os elementos orbitais dos corpos C_2 e C_3 .

Consideraremos que a órbita de qualquer satélite, capturado pelo planeta, será perturbada pela presença do Sol e pelo achatamento do planeta, sendo assim o movimento de C_2 não é kepleriano. Apesar disso, podemos considerar que, instantaneamente, uma elipse que define o movimento translacional de C_2 é determinada. Logo podemos supor que o versor que aponta para o centro de massa de C_2 ou C_3 no sistema inercial E , $(\bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{Z}_i)_E$, é função dos elementos orbitais clássicos do problema de 2 corpos

$$\begin{cases} \bar{X}_i = \cos(f_i + \omega_i) \cos(\Omega_i) - \sin(f_i + \omega_i) \sin(\Omega_i) \cos(I_i) \\ \bar{Y}_i = \cos(f_i + \omega_i) \sin(\Omega_i) + \sin(f_i + \omega_i) \cos(\Omega_i) \cos(I_i) \\ \bar{Z}_i = \sin(f_i + \omega_i) \sin(I_i) \end{cases} \quad (3.7)$$

onde

- f_i : anomalia verdadeira;
- ω_i : argumento do pericentro;
- Ω_i : longitude do nodo ascendente;
- I_i : inclinação do plano da órbita em relação ao plano inercial.

Retomando a expressão (1.1)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\text{equatorial}(F)} = M(l) \cdot M(J) \cdot M(g) \cdot M(K) \cdot M(h) \cdot \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix}_{\text{inercial}(E)}$$

e aplicando (3.7), obtemos o versor $(X_i, Y_i, Z_i)_F$ como função dos ângulos de Andoyer e dos elementos orbitais referentes ao sistema inercial E

$$\begin{cases} X_i = a_{1,1} \bar{X}_i + a_{1,2} \bar{Y}_i + a_{1,3} \bar{Z}_i \\ Y_i = a_{2,1} \bar{X}_i + a_{2,2} \bar{Y}_i + a_{2,3} \bar{Z}_i \\ Z_i = a_{3,1} \bar{X}_i + a_{3,2} \bar{Y}_i + a_{3,3} \bar{Z}_i \end{cases} \quad (3.8)$$

onde $a_{i,j}$ são descritos na seção 1.1 como funções de (h, K, g, J, l) . Logo, temos o potencial perturbador total V nas variáveis $(h, K, g, J, l, f_{\odot}, \omega_{\odot}, \Omega_{\odot}, I_{\odot}, f, \omega, \Omega, I)$, onde as variáveis orbitais sem subíndice são elementos do satélite.

[**Observação 2** *Como existe simetria axial em relação ao eixo z e $A = B$, V não é função do ângulo de Andoyer l .*]

[**Observação 3** *Devido a extensão das fórmulas de (3.8) quando explicitadas em termos de $(h, K, g, J, l, f_i, \omega_i, \Omega_i, I_i)$, elas não serão apresentadas. Contudo, iremos utilizá-las para realizar as médias do potencial perturbador, cuja expressão final será então descrita na forma final, equação (4.24).*]

Agora que V é função de $(h, K, g, J, f_{\odot}, \omega_{\odot}, \Omega_{\odot}, I_{\odot}, f, \omega, \Omega, I)$ (basta aplicar (3.8) em (3.4)), isto é, uma vez que estamos trabalhando com uma função descrita no sistema inercial, podemos eliminar os termos de curto período da parte rotacional através de médias. Denotamos a expressão média por

$$\langle V \rangle = \langle V_{sat} \rangle + \langle V_{\odot} \rangle. \quad (3.9)$$

Como estamos num conjunto canônico de variáveis do tipo ação - ângulo, podemos fazer médias nas variáveis de curto período \mathcal{M} e g (\mathcal{M} é a anomalia média do movimento translacional de C_2)

$$\begin{aligned} \langle V_i \rangle_{g, \mathcal{M}} &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[-\frac{3}{2} \frac{k^2 M_i M_p R_p^2}{r_i^3} J_2 (X_i^2 + Y_i^2) \right] dg d\mathcal{M} \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle V_i \rangle_{g, \mathcal{M}} &= -\frac{3}{2} k^2 M_i M_p R_p^2 J_2 \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{X_i^2 + Y_i^2}{r_i^3} \right) dg d\mathcal{M} \end{aligned} \quad (3.10)$$

[**Observação 4** *A partir daqui quando utilizarmos a notação $\langle \rangle$, estaremos nos referindo a $\langle \rangle_{g, \mathcal{M}}$. Caso contrário, deixaremos explícito sobre quais variáveis as médias serão realizadas.*]

Começamos determinando $\langle V_{sat} \rangle$. É nítido que V_{sat} não é descrito explicitamente em função de \mathcal{M} , contudo para efetuar (3.10) podemos utilizar a seguinte relação (BROUWER; CLEMENCE, 1961):

$$\frac{1}{r^3} d\mathcal{M} = \frac{1}{a^3} \left[\frac{1 + e \cos(f)}{(1 - e^2)^{3/2}} \right] df. \quad (3.11)$$

Assim, ao calcularmos (3.10) considerando a mudança (3.11), obtemos

$$\begin{aligned}
\langle V_{sat} \rangle = & -\frac{3}{2} \frac{k^2 M_{sat} M_p R_p^2 J_2}{a^3 (1-e^2)^{3/2}} \left\{ \frac{\sin^2(K)}{8} \left[-2 \sin^2(J) \sin^2(I) + 1 + \right. \right. \\
& + \cos^2(J) - \cos^2(I) - \cos^2(J) \cos^2(I) \left. \right] \cos(2h - 2\Omega) + \\
& + \frac{\sin(2I) \sin(K) \cos(K)}{4} \left[1 + \cos^2(J) - 2 \sin^2(J) \right] \cos(h - \Omega) + \\
& + \frac{\sin^2(K)}{4} \left[\sin^2(I) + \sin^2(J) \cos^2(I) + \cos^2(J) \sin^2(I) + \sin^2(J) \right] + \\
& + \frac{\cos^2(K)}{8} \left[1 + \cos^2(J) \cos^2(I) + 4 \sin^2(J) \sin^2(I) + \cos^2(J) + \cos^2(I) \right] + \\
& \left. + \frac{1}{8} \left[1 + \cos^2(I) + \cos^2(J) + \cos^2(J) \cos^2(I) \right] \right\}. \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Ao contrário de V_{sat} , V_\odot não é função da anomalia média do satélite (\mathcal{M}) e a anomalia média do Sol é uma variável de longo período, logo

$$\langle V_\odot \rangle = \langle V_\odot \rangle_g$$

Resolvendo essa média, obtemos a expressão (ver Yokoyama (1999))

$$\begin{aligned}
\langle V_\odot \rangle_g = & -\frac{3}{2} \frac{k^2 M_p M_\odot R_p^2 J_2}{r_\odot^3} \left[A_1 \cdot \cos(-2f_\odot - 2\omega_\odot - 2h + \Omega_\odot) + \right. \\
& + B_1 \cdot \cos(-h + \Omega_\odot - 2f_\odot - 2\omega_\odot) + C_1 \cdot \cos(2f_\odot + 2\omega_\odot) + \\
& + D_1 \cdot \cos(2f_\odot + 2\omega_\odot - 2h + 2\Omega_\odot) + E_1 \cdot \cos(-h + \Omega_\odot + 2f_\odot + 2\omega_\odot) + \\
& \left. + F_1 \cdot \cos(-2h + \Omega_\odot) + G_1 \cdot \cos(-h + \Omega_\odot) + H_1 \right] \quad (3.13)
\end{aligned}$$

em que

- A_1 :

$$A_1 = -\frac{\sin^2(K)}{16} [\cos^2(I_\odot) - 2 \cos(I_\odot) + 1] [-3 \cos^2(J) + 1] \quad (3.14)$$

- B_1 :

$$B_1 = \frac{\cos(K) \sin(K)}{4} [-3 \cos^2(J) + 1] [\sin(I_\odot) + \sin(I_\odot) \cos(I_\odot)] \quad (3.15)$$

- C_1 :

$$C_1 = -\frac{\sin(I_\odot)}{8} [-3 \cos^2(K) + 1] [-1 + 3 \cos^2(J)] \quad (3.16)$$

- D_1 :

$$D_1 = -\frac{\sin^2(K)}{16} [-3 \cos^2(J) + 1] [\cos^2(I_\odot) + \cos(I_\odot) + 1] \quad (3.17)$$

- E_1 :

$$E_1 = \frac{\cos(K) \sin(K)}{4} [1 - 3 \cos^2(J)] [\cos(I_\odot) \sin(I_\odot) + \sin(I_\odot)] \quad (3.18)$$

- F_1 :

$$F_1 = \frac{\sin^2(K) \sin(I_\odot)}{8} [-1 + 3 \cos^2(J)] \quad (3.19)$$

- G_1 :

$$G_1 = \frac{\cos(K) \sin(K) \sin(I_\odot) \cos(I_\odot)}{2} [-1 + 3 \cos^2(J)] \quad (3.20)$$

- H_1 :

$$H_1 = \left[\frac{1}{8} - \frac{3}{8} \cos^2(K) - \frac{3}{8} \cos^2(J) + \frac{9}{8} \cos^2(J) \cos^2(K) \right] \cos^2(I_\odot) + \\ + \frac{\cos^2(K)}{8} + \frac{\cos^2(J)}{8} - \frac{3}{8} \cos^2(J) \cos^2(K) + \frac{5}{8} \quad (3.21)$$

De Brouwer e Clemence (1961), obtemos f_\odot em potências de e_\odot

$$f_\odot = \mathcal{M}_\odot + \left(2e_\odot - \frac{1}{4}e_\odot^3 \right) \sin(\mathcal{M}_\odot) + \left(\frac{5}{4}e_\odot^2 - \frac{11}{24}e_\odot^4 \right) \sin(2\mathcal{M}_\odot) + \\ + \frac{13}{12}e_\odot^3 \sin(3\mathcal{M}_\odot) + \frac{103}{96}e_\odot^4 \sin(4\mathcal{M}_\odot) \quad (3.22)$$

em que

$$\begin{cases} \mathcal{M}_\odot(t) = \mathcal{M}(0) + n_\odot t \\ n_\odot = \frac{2\pi}{T_\odot} = \sqrt{\frac{k^2(M_p + M_\odot)}{a_\odot^3}} \end{cases} \quad (3.23)$$

$$(3.24)$$

onde $\mathcal{M}_\odot(0)$ é a anomalia média inicial do Sol e $\mathcal{M}_\odot(t)$ no instante t , n_\odot o movimento médio do Sol e T_\odot o período translacional do Sol. Enquanto,

$$\frac{1}{r_\odot^3} = \frac{1}{a_\odot^3} \left[1 + 3 \cos(\mathcal{M}_\odot) + \left(\frac{9}{2} \cos(2\mathcal{M}_\odot) + \frac{3}{2} \right) e_\odot^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{27}{8} \cos(\mathcal{M}_\odot) + \frac{53}{8} \cos(3\mathcal{M}_\odot) \right) e_\odot^3 + \right. \\ \left. + \left(\frac{7}{2} \cos(2\mathcal{M}_\odot) + \frac{77}{8} \cos(4\mathcal{M}_\odot) + \frac{15}{8} \right) e_\odot^4 \right]. \quad (3.25)$$

Concluimos que, utilizando as expressões (3.14)-(3.21), (3.22) e (3.25),

$$\langle V \rangle = \langle V_{sat} \rangle + \langle V_\odot \rangle \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \langle V \rangle = & -\frac{3 k^2 m M_p R_p^2 J_2}{2 a^3 (1 - e^2)^{3/2}} \left\{ \frac{\sin^2(K)}{8} \left[-2 \sin^2(J) \sin^2(I) + 1 + \cos^2(J) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \cos^2(I) - \cos^2(J) \cos^2(I) \right] \cos(2h - 2\Omega) + \right. \\
 & + \frac{\sin(2I) \sin(K) \cos(K)}{4} \left[1 + \cos^2(J) - 2 \sin^2(J) \right] \cos(h - \Omega) + \\
 & + \frac{\sin^2(K)}{4} \left[\sin^2(I) + \sin^2(J) \cos^2(I) + \cos^2(J) \sin^2(I) + \sin^2(J) \right] + \\
 & + \frac{\cos^2(K)}{8} \left[1 + \cos^2(J) \cos^2(I) + 4 \sin^2(J) \sin^2(I) + \cos^2(J) + \cos^2(I) \right] + \\
 & \left. + \frac{1}{8} \left[1 + \cos^2(I) + \cos^2(J) + \cos^2(J) \cos^2(I) \right] \right\} - \\
 & - \frac{3 k^2 M_p M_\odot R_p^2 J_2}{2 r_\odot^3} \left[A_1 \cdot \cos(-2f_\odot - 2\omega_\odot - 2h + \Omega_\odot) + \right. \\
 & + B_1 \cdot \cos(-h + \Omega_\odot - 2f_\odot - 2\omega_\odot) + C_1 \cdot \cos(2f_\odot + 2\omega_\odot) + \\
 & + D_1 \cdot \cos(2f_\odot + 2\omega_\odot - 2h + 2\Omega_\odot) + E_1 \cdot \cos(-h + \Omega_\odot + 2f_\odot + 2\omega_\odot) + \\
 & \left. + F_1 \cdot \cos(-2h + \Omega_\odot) + G_1 \cdot \cos(-h + \Omega_\odot) + H_1 \right]. \quad (3.26)
 \end{aligned}$$

Isto é, entre as variáveis ignoráveis do sistema médio temos os ângulos g e l de Andoyer, $\langle V \rangle = \langle V \rangle(_, K, _, J, h, f_\odot, \omega_\odot, \Omega_\odot, I_\odot, a, e, \Omega, I)$, como consequência, da hamiltoniana $\mathcal{H} = T + \langle V \rangle$,

$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} = -\frac{\partial \langle \mathcal{H} \rangle}{\partial l} = 0 \Rightarrow L = \text{constante} & (3.27) \\ \frac{dG}{dt} = -\frac{\partial \langle \mathcal{H} \rangle}{\partial g} = 0 \Rightarrow G = \text{constante} & (3.28) \end{cases}$$

pois (l, g) também não aparecem em na energia cinética T (equação 2.10). Também podemos concluir:

$$L = G \cos(J) \Rightarrow \cos(J) = \frac{L}{G} = \text{constante} \Rightarrow$$

$$J = \text{constante no tempo.} \quad (3.29)$$

4 Movimento translacional médio do satélite C_2

A equação (3.26) demonstra que o potencial perturbador médio que afeta a rotação do planeta depende dos elementos orbitais do Sol e do satélite em relação ao plano inercial, contudo o movimento translacional de C_2 é perturbado pela presença de C_3 e pelo achatamento de C_1 , logo se faz necessário entender como esse movimento é afetado pelos demais corpos.

4.1 Função potencial média $\langle \mathcal{R} \rangle$

Considerando o sistema inercial E , as equações do movimento do satélite perturbado pelo achatamento do planeta e pela presença do Sol são (YOKOYAMA, 2002):

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{k^2 M_p}{r^3} \vec{r} - k^2 M_\odot \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_\odot}{|r - r_\odot|^3} + \frac{\vec{r}_\odot}{r_\odot^3} \right) + \vec{P}_{J_2}, \quad (4.1)$$

onde \vec{P}_{J_2} (perturbação devido ao achatamento do planeta) representa o vetor

$$\vec{P}_{J_2} = -k^2 M_p R_p^2 J_2 \left(\frac{3x}{2r^5} - \frac{15 z^2 x}{2 r^7}, \frac{3y}{2r^5} - \frac{15 z^2 y}{2 r^7}, \frac{9z}{2r^5} - \frac{15 z^3}{2 r^7} \right) \quad (4.2)$$

(veja a construção de (4.1) no Apêndice C).

Como desejamos contruir um sistema médio de longo período, escrevemos a perturbação solar e a perturbação devido ao achatamento do planeta como (BROUWER; CLEMENCE, 1961):

$$\mathcal{R}_\odot = \frac{k^2 M_\odot r^2}{r_\odot^3} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2(S) \right) \quad (4.3)$$

$$\mathcal{R}_{J_2} = \frac{k^2 M_p R_p^2}{r^3} J_2 \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \sin^2(\varphi) \right), \quad (4.4)$$

em que S é a distância angular entre o Sol e o satélite e φ é a latitude do satélite, esse último visto do sistema equatorial. Definimos o função potencial como

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_\odot + \mathcal{R}_{J_2}. \quad (4.5)$$

Para realizarmos as médias e obtermos um potencial que despreza as variações de curto período, escrevemos (4.5) como função de elementos orbitais referidos no sistema

inercial E como descrito no capítulo 3. Procederemos realizando as médias sobre \mathcal{R}_\odot e \mathcal{R}_{J_2} separadamente. Começamos com a média sobre \mathcal{R}_\odot .

Como os sistemas cartesianos E e F têm a mesma origem, os vetores posições de C_2 e C_3 nos 2 sistemas são os mesmos. Sobre o sistema inercial denominamos os vetores \vec{r}_\odot e \vec{r} como sendo os vetores posição do centro de massa do Sol e do satélite, respectivamente (figura 3).

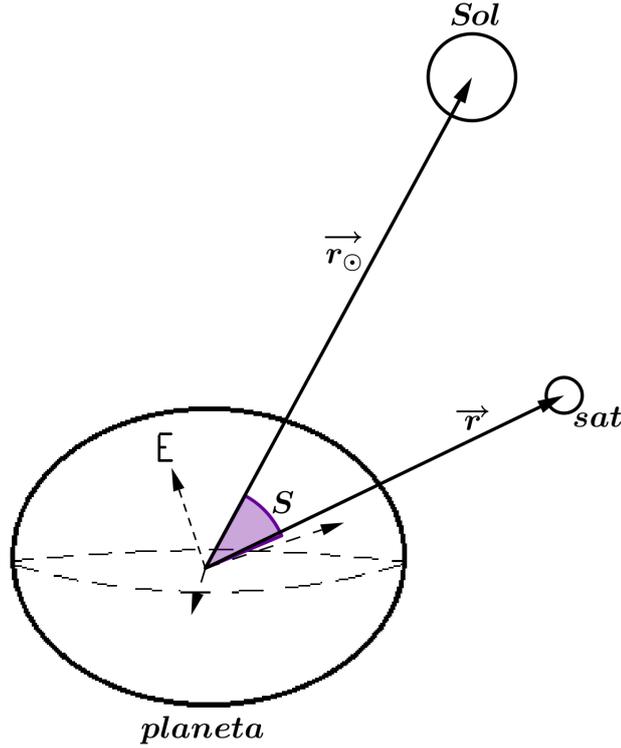


Figura 3 – Distância angular S entre o Sol e o satélite.

Assim, observando a figura 3,

$$\cos(S) = \frac{\vec{r}_\odot \cdot \vec{r}}{r_\odot r} = \hat{r}_\odot \cdot \hat{r} = X_\odot X + Y_\odot Y + Z_\odot Z.$$

Retomando as equações de (3.7) para os versores, segue que

$$\begin{aligned} \cos(S) = & \frac{1}{2} \sin(I) \sin(I_\odot) [\cos(f + \omega - f_\odot - \omega_\odot) - \cos(f + \omega + f_\odot + \omega_\odot)] + \\ & + \frac{1}{4} [1 - \cos(I)] [1 - \cos(I_\odot)] \cos(f + \omega - \Omega - f_\odot - \omega_\odot + \Omega_\odot) + \\ & + \frac{1}{4} [1 + \cos(I)] [1 + \cos(I_\odot)] \cos(f + \omega + \Omega - f_\odot - \omega_\odot - \Omega_\odot) + \\ & + \frac{1}{4} [1 - \cos(I)] [1 + \cos(I_\odot)] \cos(f + \omega - \Omega + f_\odot + \omega_\odot + \Omega_\odot) + \\ & + \frac{1}{4} [1 + \cos(I)] [1 - \cos(I_\odot)] \cos(f + \omega + \Omega + f_\odot + \omega_\odot - \Omega_\odot). \quad (4.6) \end{aligned}$$

Aplicando (4.6) em (4.3), temos \mathcal{R}_\odot (função perturbadora devido à presença do Sol) em função de elementos orbitais do Sol (perturbador) e do satélite (perturbado), I_\odot , f_\odot , ω_\odot , Ω_\odot , I , f , ω e Ω . Uma vez que as \mathcal{R}_\odot não depende dos ângulos de Andoyer, para obtermos uma função que só depende dos elementos de longo período, realizaremos a média apenas em relação a anomalia média do satélite, \mathcal{M} ($\langle \mathcal{R}_\odot \rangle = \langle \mathcal{R}_\odot \rangle_{\mathcal{M}}$).

Temos que \mathcal{R}_\odot não é função explícita da anomalia média do satélite, contudo é função explícita da anomalia verdadeira de C_2 , f . Fazamos algumas mudanças na expressão de \mathcal{R}_\odot de modo a introduzir a anomalia excêntrica u no lugar da variável f através das seguintes relações

$$\left\{ \begin{array}{l} r = a[1 - e \cos(u)] \\ \cos(f) = \frac{\cos(u) - e}{1 - e \cos(u)} \\ \sin(f) = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin(u)}{1 - e \cos(u)} \\ d\mathcal{M} = \frac{r}{a} du. \end{array} \right. \quad (4.7)$$

Logo aplicando (4.7) podemos calcular $\langle \mathcal{R}_\odot \rangle_{\mathcal{M}}$

$$\langle \mathcal{R}_\odot \rangle_{\mathcal{M}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{R}_\odot(f) d\mathcal{M} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{R}_\odot(u) du, \quad (4.8)$$

o que implica

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{R}_\odot \rangle_{\mathcal{M}} = & \frac{k^2 M_\odot a^2}{2a_\odot^3} \left(\frac{a_\odot}{r_\odot} \right)^3 \left\{ \frac{3}{2} P [(A^*)^2 + (B^*)^2 + (C^*)^2 + (D^*)^2 + \right. \\
& + 2(E^*)^2 - \frac{2}{3}] + \frac{3}{2} (A^*)^2 Z \cos(2\omega + 2f_\odot + 2\omega_\odot + 2\Omega - 2\Omega_\odot) + \\
& + \frac{3}{2} (B^*)^2 Z \cos(2\omega + 2f_\odot + 2\omega_\odot - 2\Omega + 2\Omega_\odot) + \\
& + \frac{3}{2} (C^*)^2 Z \cos(2\omega - 2f_\odot - 2\omega_\odot + 2\Omega - 2\Omega_\odot) + \\
& + \frac{3}{2} (D^*)^2 Z \cos(2\omega - 2f_\odot - 2\omega_\odot - 2\Omega + 2\Omega_\odot) + \\
& + \frac{3}{2} Z [(E^*)^2 + 2C^*D^*] \cos(2\omega - 2f_\odot - 2\omega_\odot) + \\
& + \frac{3}{2} Z [(E^*)^2 + 2A^*B^*] \cos(2\omega + 2f_\odot + 2\omega_\odot) + \\
& + 3Z[A^*D^* + B^*C^* - (E^*)^2] \cos(2\omega) + 3P[A^*C^* + B^*D^* - (E^*)^2] \cos(2f_\odot + 2\omega_\odot) + \\
& + 3P(A^*B^* + C^*D^*) \cos(2\Omega - 2\Omega_\odot) + 3A^*C^*Z \cos(2\omega + 2\Omega - 2\Omega_\odot) + \\
& + 3A^*D^*P \cos(2f_\odot + 2\omega_\odot + 2\Omega - 2\Omega_\odot) + 3E^*P(A^* - D^*) \cos(2f_\odot + 2\omega_\odot + \Omega - \Omega_\odot) + \\
& + 3E^*P(-A^* - B^* + C^* + D^*) \cos(\Omega - \Omega_\odot) + 3E^*Z(A^* - C^*) \cos(2\omega + \Omega - \Omega_\odot) - \\
& - 3A^*E^*Z \cos(2\omega + 2f_\odot + 2\omega_\odot + \Omega - \Omega_\odot) + 3B^*C^*P \cos(2f_\odot + 2\omega_\odot - 2\Omega + 2\Omega_\odot) + \\
& + 3B^*D^*Z \cos(2\omega - 2\Omega + 2\Omega_\odot) + 3E^*P(B^* - C^*) \cos(2f_\odot + 2\omega_\odot - \Omega + \Omega_\odot) + \\
& + 3E^*Z(B^* - D^*) \cos(2\omega - \Omega + \Omega_\odot) - 3B^*E^*Z \cos(2\omega + 2f_\odot + 2\omega_\odot - \Omega + \Omega_\odot) + \\
& + 3C^*E^*Z \cos(2\omega - 2f_\odot - 2\omega_\odot + \Omega - \Omega_\odot) + \\
& \left. + 3D^*E^*Z \cos(2\omega - 2f_\odot - 2\omega_\odot - \Omega + \Omega_\odot) \right\} \quad (4.9)
\end{aligned}$$

com

$$\left\{ \begin{array}{l}
A^* = \frac{1}{4}[1 + \cos(I)][1 - \cos(I_\odot)] \\
B^* = \frac{1}{4}[1 - \cos(I)][1 + \cos(I_\odot)] \\
C^* = \frac{1}{4}[1 + \cos(I)][1 + \cos(I_\odot)] \\
D^* = \frac{1}{4}[1 - \cos(I)][1 - \cos(I_\odot)] \\
E^* = \frac{1}{2} \sin(I) \sin(I_\odot) \\
P = 1 + \frac{3}{2}e^2 \\
Z = \frac{5}{2}e^2
\end{array} \right. \quad (4.10)$$

Para que toda essa formulação faça sentido, precisamos obter a anomalia verdadeira do Sol f_\odot e $\left(\frac{a_\odot}{r_\odot}\right)^3$ em função da anomalia média do Sol, \mathcal{M}_\odot . Novamente, de Brouwer e

Clemence (1961), podemos utilizar as expressões (3.22), (3.24) e (3.25)

$$f_{\odot} = \mathcal{M}_{\odot} + \left(2e_{\odot} - \frac{1}{4}e_{\odot}^3\right) \sin(\mathcal{M}_{\odot}) + \left(\frac{5}{4}e_{\odot}^2 - \frac{11}{24}e_{\odot}^4\right) \sin(2\mathcal{M}_{\odot}) + \\ + \frac{13}{12}e_{\odot}^3 \sin(3\mathcal{M}_{\odot}) + \frac{103}{96}e_{\odot}^4 \sin(4\mathcal{M}_{\odot})$$

$$\left(\frac{a_{\odot}}{r_{\odot}}\right)^3 = 1 + 3 \cos(\mathcal{M}_{\odot}) + \left(\frac{9}{2} \cos(2\mathcal{M}_{\odot}) + \frac{3}{2}\right) e_{\odot}^2 + \\ + \left(\frac{27}{8} \cos(\mathcal{M}_{\odot}) + \frac{53}{8} \cos(3\mathcal{M}_{\odot})\right) e_{\odot}^3 + \left(\frac{7}{2} \cos(2\mathcal{M}_{\odot}) + \frac{77}{8} \cos(4\mathcal{M}_{\odot}) + \frac{15}{8}\right) e_{\odot}^4.$$

$$\begin{cases} \mathcal{M}_{\odot}(t) = \mathcal{M}(0) + n_{\odot}t \\ n_{\odot} = \frac{2\pi}{T_{\odot}} = \sqrt{\frac{k^2(M_p + M_{\odot})}{a_{\odot}^3}} \end{cases}$$

Realizado o cálculo de $\langle \mathcal{R}_{\odot} \rangle$, falta expressar $\langle \mathcal{R}_{J_2} \rangle$.

Consideremos a expressão (4.4) para R_{J_2} (função perturbadora devido ao achatamento do planeta), em que φ é a latitude do satélite com relação ao plano equatorial (F), veja figura 4.

Definimos

- Ω_e : nodo ascendente do satélite em relação ao plano equatorial;
- i_e : inclinação do satélite em relação ao plano equatorial;
- ω_e : pericentro do satélite em relação ao plano equatorial;
- f : anomalia verdadeira do satélite.

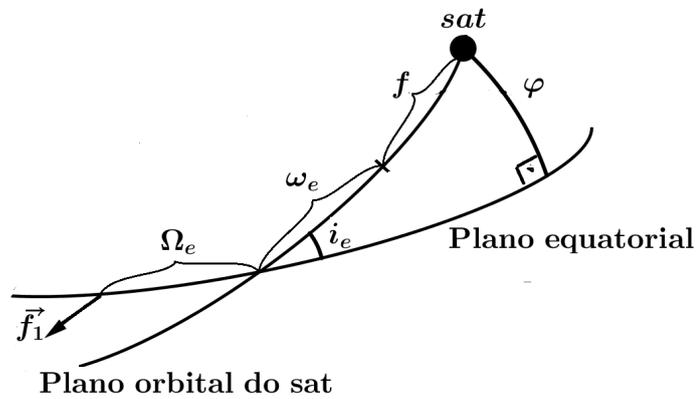


Figura 4 – Satélite visto do plano equatorial.

Analisando o triângulo esférico, temos que i_e e $\pi/2$ são ângulos desse triângulo, já φ e $f + \omega_e$ são lados, assim pela lei dos senos

$$\frac{\sin(\varphi)}{\sin(i_e)} = \frac{\sin(f + \omega_e)}{\sin(\pi/2)} = \sin(f + \omega_e) \Rightarrow \sin(\varphi) = \sin(f + \omega_e) \sin(i_e). \quad (4.11)$$

Utilizando as relações $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$ e $2\cos^2(a) = 1 + \cos(2a)$, temos que

$$\begin{aligned} \sin(\varphi) &= \sin(f + \omega_e) \sin(i_e) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sin^2(\varphi) &= \sin^2(f + \omega_e) \sin^2(i_e) = [1 - \cos^2(f + \omega_e)][1 - \cos^2(i_e)] \Rightarrow \\ \Rightarrow \sin^2(\varphi) &= \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \cos^2(f + \omega_e) \right) \right] [1 - \cos^2(i_e)] \Rightarrow \\ \Rightarrow \sin^2(\varphi) &= \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\cos[2(f + \omega_e)]}{2} \right\} [1 - \cos^2(i_e)] \Rightarrow \\ \Rightarrow \sin^2(\varphi) &= \frac{1}{2} - \frac{\cos^2(i_e)}{2} + \frac{1}{2} [\cos^2(i_e) - 1] \cos[2(f + \omega_e)]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Aplicando (4.12) em (4.4) obtemos

$$\mathcal{R}_{J_2} = \frac{k^2 M_p R_p^2}{r^3} J_2 \left\{ -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos^2(i_e) - \frac{3}{4} [\cos^2(i_e) - 1] \cos[2(f + \omega_e)] \right\}. \quad (4.13)$$

Pela formulação (4.13), já podemos calcular a média de \mathcal{R}_{J_2} com relação a anomalia média do satélite. Utilizando novamente a relação entre $d\mathcal{M}$ e df concluímos que:

$$\langle \mathcal{R}_{J_2} \rangle_{\mathcal{M}} = \frac{k^2 M_p R_p^2 J_2 [3 \cos^2(i_e) - 1]}{4a^3 (1 - e^2)^{3/2}}. \quad (4.14)$$

Porém, essa última expressão ainda está em função de variáveis do sistema F . Precisamos introduzir variáveis do sistema inercial E . Veja o seguinte esquema de planos, figura 5.

Retomando a figura 5 e analisando o triângulo esférico com ângulos K , J e $\pi - I_{equat}$ e lados g e Ω_2 as seguintes relações são apresentadas

$$\bullet \frac{\sin(J)}{\sin(\Omega_2)} = \frac{\sin(\pi - I_{equat})}{\sin(g)} \Rightarrow \sin(\Omega_2) \sin(I_{equat}) = \sin(J) \sin(g) \quad (4.19)$$

$$\bullet \cos(\pi - I_{equat}) = -\cos(K) \cos(J) + \sin(K) \sin(J) \cos(g) \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos(I_{equat}) = \cos(K) \cos(J) - \sin(K) \sin(J) \cos(g) \quad (4.20)$$

$$\bullet \sin(\pi - I_{equat}) \cos(\Omega_2) = \cos(J) \sin(K) + \sin(J) \cos(K) \cos(g) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sin(I_{equat}) \cos(\Omega_2) = \cos(J) \sin(K) + \sin(J) \cos(K) \cos(g) \quad (4.21)$$

em que $\Omega_{equat} = h + \Omega_2$.

Utilizando as últimas expressões em (4.16), (4.17) e (4.18), obtemos $\langle \mathcal{R}_{J_2} \rangle_{\mathcal{M}}$ expresso nas variáveis h , g , K , J , Ω e I . Logo, podemos calcular a média no ângulo g de Andoyer, isto é,

$$\langle \mathcal{R}_{J_2} \rangle_{g, \mathcal{M}} = \langle \langle \mathcal{R}_{J_2} \rangle_{\mathcal{M}} \rangle_g = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle \mathcal{R}_{J_2} \rangle_{\mathcal{M}} dg .$$

Fazendo esse cálculo

$$\langle \mathcal{R}_{J_2} \rangle = \frac{k^2 M_p R_p^2 J_2}{16(1 - e^2)^{3/2} a^3} \left[9 \cos^2(I) \sin^2(J) \sin^2(K) + 2 - \right. \\ - 6 \sin(2I) \sin^2(J) \sin(K) \cos(K) \cos(\Omega - h) - 6 \cos^2(I) + \\ + 18 \cos^2(I) \cos^2(J) \cos^2(K) - 6 \cos^2(J) \cos^2(K) + \\ + 3 \sin^2(I) \sin^2(J) \cos^2(K) \cos(2\Omega - 2h) + \\ + 6 \sin^2(I) \cos^2(J) \sin^2(K) \cos(2\Omega - 2h) - \\ \left. - 3 \sin^2(I) \sin^2(J) \cos^2(2\Omega - 2h) - 3 \sin^2(J) \sin^2(K) + \right. \\ \left. + 12 \sin(2I) \cos^2(J) \cos(K) \sin(K) \cos(\Omega - h) \right] . \quad (4.22)$$

Assim, utilizando as expressões (4.9) e (4.22), obtemos a função perturbadora média $\langle \mathcal{R} \rangle$ que influencia o movimento de translação do satélite ao redor do planeta. Esta expressão está totalmente explicitada em variáveis do sistema inercial e de Andoyer, o que é essencial para escrever as equações de Lagrange que definem o movimento de C_2 no tempo (Capítulo 5). Temos que

$$\langle \mathcal{R} \rangle = \langle \mathcal{R}_{\odot} \rangle + \langle \mathcal{R}_{J_2} \rangle \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \langle \mathcal{R} \rangle = & \frac{k^2 M_\odot a^2}{2a_\odot^3} \left(\frac{a_\odot}{r_\odot} \right)^3 \left\{ \frac{3}{2} P [(A^*)^2 + (B^*)^2 + (C^*)^2 + (D^*)^2 + \right. \\
& + 2(E^*)^2 - \frac{2}{3}] + \frac{3}{2} (A^*)^2 Z \cos(2\omega + 2f_\odot + 2\omega_\odot + 2\Omega - 2\Omega_\odot) + \\
& + \frac{3}{2} (B^*)^2 Z \cos(2\omega + 2f_\odot + 2\omega_\odot - 2\Omega + 2\Omega_\odot) + \\
& + \frac{3}{2} (C^*)^2 Z \cos(2\omega - 2f_\odot - 2\omega_\odot + 2\Omega - 2\Omega_\odot) + \\
& + \frac{3}{2} (D^*)^2 Z \cos(2\omega - 2f_\odot - 2\omega_\odot - 2\Omega + 2\Omega_\odot) + \\
& + \frac{3}{2} Z [(E^*)^2 + 2C^*D^*] \cos(2\omega - 2f_\odot - 2\omega_\odot) + \\
& + \frac{3}{2} Z [(E^*)^2 + 2A^*B^*] \cos(2\omega + 2f_\odot + 2\omega_\odot) + \\
& + 3Z[A^*D^* + B^*C^* - (E^*)^2] \cos(2\omega) + 3P[A^*C^* + B^*D^* - (E^*)^2] \cos(2f_\odot + 2\omega_\odot) + \\
& + 3P(A^*B^* + C^*D^*) \cos(2\Omega - 2\Omega_\odot) + 3A^*C^*Z \cos(2\omega + 2\Omega - 2\Omega_\odot) + \\
& + 3A^*D^*P \cos(2f_\odot + 2\omega_\odot + 2\Omega - 2\Omega_\odot) + 3E^*P(A^* - D^*) \cos(2f_\odot + 2\omega_\odot + \Omega - \Omega_\odot) + \\
& + 3E^*P(-A^* - B^* + C^* + D^*) \cos(\Omega - \Omega_\odot) + 3E^*Z(A^* - C^*) \cos(2\omega + \Omega - \Omega_\odot) - \\
& - 3A^*E^*Z \cos(2\omega + 2f_\odot + 2\omega_\odot + \Omega - \Omega_\odot) + 3B^*C^*P \cos(2f_\odot + 2\omega_\odot - 2\Omega + 2\Omega_\odot) + \\
& + 3B^*D^*Z \cos(2\omega - 2\Omega + 2\Omega_\odot) + 3E^*P(B^* - C^*) \cos(2f_\odot + 2\omega_\odot - \Omega + \Omega_\odot) + \\
& + 3E^*Z(B^* - D^*) \cos(2\omega - \Omega + \Omega_\odot) - 3B^*E^*Z \cos(2\omega + 2f_\odot + 2\omega_\odot - \Omega + \Omega_\odot) + \\
& + 3C^*E^*Z \cos(2\omega - 2f_\odot - 2\omega_\odot + \Omega - \Omega_\odot) + \\
& + 3D^*E^*Z \cos(2\omega - 2f_\odot - 2\omega_\odot - \Omega + \Omega_\odot) \left. \right\} + \\
& + \frac{k^2 M_p R_p^2 J_2}{16(1-e^2)^{3/2} a^3} \left[9 \cos^2(I) \sin^2(J) \sin^2(K) + 2 - \right. \\
& - 6 \sin(2I) \sin^2(J) \sin(K) \cos(K) \cos(\Omega - h) - 6 \cos^2(I) + \\
& + 18 \cos^2(I) \cos^2(J) \cos^2(K) - 6 \cos^2(J) \cos^2(K) + \\
& + 3 \sin^2(I) \sin^2(J) \cos^2(K) \cos(2\Omega - 2h) + 6 \sin^2(I) \cos^2(J) \sin^2(K) \cos(2\Omega - 2h) - \\
& - 3 \sin^2(I) \sin^2(J) \cos^2(2\Omega - 2h) - 3 \sin^2(J) \sin^2(K) + \\
& \left. + 12 \sin(2I) \cos^2(J) \cos(K) \sin(K) \cos(\Omega - h) \right] \quad (4.23)
\end{aligned}$$

fazendo uso das relações (4.10), (3.22), (3.24) e (3.25).

Observamos que, novamente, as variáveis de Andoyer g e l não estão presentes na formulação (4.23) e reafirmamos que G e L são constantes e, por consequência, J também.

5 Equações médias

Nosso objetivo ao final desse capítulo é determinar a obliquidade do planeta através dos ângulos de Andoyer h , J e K e dos elementos orbitais I_{\odot} e Ω_{\odot} .

Anteriormente já concluímos que se o planeta possui um eixo de simetria axial, o ângulo de Andoyer J é constante, porém não podemos afirmar o mesmo sobre o ângulo K . Essa é uma variável que pode assumir valores entre $[0 : \pi)$. No caso de $K = 0$, ocorre uma singularidade, os ângulos h e g não são definidos, basta observar a figura 1. Para resolver esse problema consideremos as variáveis canônicas de Andoyer, h e seu momento conjugado H , e definiremos 2 variáveis não singulares, também canônicas.

5.1 $\langle V \rangle$ e $\langle \mathcal{R} \rangle$ nas variáveis não singulares Y_1 e Y_2

Para evitar a singularidade $K = 0$, definimos as 2 variáveis não singulares e canônicas Y_1 (coordenada) e Y_2 (respectivo momento conjugado) como sendo:

$$Y_1 = -\sqrt{2G - 2H} \sin(h) \quad (5.1)$$

$$Y_2 = \sqrt{2G - 2H} \cos(h) \quad (5.2)$$

em que G , o momento angular de rotação, é constante (demonstrado anteriormente).

Do modo como Y_1 e Y_2 foram definidos, podemos construir as seguintes relações, retomando a expressão (1.3) ($H = G \cos(K)$),

$$\begin{aligned} \bullet \frac{Y_1^2 + Y_2^2}{2G} &= \frac{2G - 2H}{2G} = 1 - \frac{H}{G} \Rightarrow 1 - \frac{Y_1^2 + Y_2^2}{2G} = 1 - \left(1 - \frac{H}{G}\right) = \frac{H}{G} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos(K) = 1 - \frac{Y_1^2 + Y_2^2}{2G} \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \bullet \sin(K) &= \sqrt{1 - \cos^2(K)} = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{Y_1^2 + Y_2^2}{2G}\right)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sin(K) = \sqrt{1 - \left[1 - \frac{Y_1^2 + Y_2^2}{G} + \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)^2}{4G^2}\right]} = \sqrt{\frac{Y_1^2 + Y_2^2}{G} - \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)^2}{4G^2}} \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\bullet Y_2 \cos(\Omega_i) - Y_1 \sin(\Omega_i) = \sqrt{2G - 2H} \cos(h) \cos(\Omega_i) - [-\sqrt{2G - 2H} \sin(h) \sin(\Omega_i)] \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow Y_2 \cos(\Omega_i) - Y_1 \sin(\Omega_i) = \sqrt{2G - 2H} [\cos(h) \cos(\Omega_i) + \sin(h) \sin(\Omega_i)] \Rightarrow \\
&\Rightarrow Y_2 \cos(\Omega_i) - Y_1 \sin(\Omega_i) = \sqrt{2G - 2H} \cos(h - \Omega_i) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \cos(h - \Omega_i) = \frac{Y_2 \cos(\Omega_i) - Y_1 \sin(\Omega_i)}{\sqrt{2G - 2H}} = \frac{Y_2 \cos(\Omega_i) - Y_1 \sin(\Omega_i)}{\sqrt{Y_1^2 + Y_2^2}} \quad (5.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\bullet - Y_1 \cos(\Omega_i) - Y_2 \sin(\Omega_i) = - [-\sqrt{2G - 2H} \sin(h)] \cos(\Omega_i) - [\sqrt{2G - 2H} \cos(h)] \sin(\Omega_i) \Rightarrow \\
&\Rightarrow - Y_1 \cos(\Omega_i) - Y_2 \sin(\Omega_i) = \sqrt{2G - 2H} [\sin(h) \cos(\Omega_i) - \cos(h) \sin(\Omega_i)] \Rightarrow \\
&\Rightarrow - Y_1 \cos(\Omega_i) - Y_2 \sin(\Omega_i) = \sqrt{2G - 2H} \sin(h - \Omega_i) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \sin(h - \Omega_i) = \frac{-Y_1 \cos(\Omega_i) - Y_2 \sin(\Omega_i)}{\sqrt{2G - 2H}} = \frac{-Y_1 \cos(\Omega_i) - Y_2 \sin(\Omega_i)}{\sqrt{Y_1^2 + Y_2^2}} \quad (5.6)
\end{aligned}$$

$$\bullet \frac{Y_2^2 - Y_1^2}{Y_1^2 + Y_2^2} = \frac{(2G - 2H)[\cos^2(h) - \sin^2(h)]}{2G - 2H} \Rightarrow \cos(2h) = \frac{Y_2^2 - Y_1^2}{Y_1^2 + Y_2^2} \quad (5.7)$$

$$\bullet \frac{2Y_1 Y_2}{Y_1^2 + Y_2^2} = - \frac{2(2G - 2H) \sin(h) \cos(h)}{2G - 2H} \Rightarrow \sin(2h) = - \frac{2Y_1 Y_2}{Y_1^2 + Y_2^2} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned}
&\bullet \cos(2h - 2\Omega_i) = \cos(2h) \cos(2\Omega_i) + \sin(2h) \sin(2\Omega_i) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \cos(2h - 2\Omega_i) = \frac{Y_2^2 - Y_1^2}{Y_1^2 + Y_2^2} \cos(2\Omega_i) - \frac{2Y_1 Y_2}{Y_1^2 + Y_2^2} \sin(2\Omega_i) \quad (5.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\bullet \sin(2h - 2\Omega_i) = \sin(2h) \cos(2\Omega_i) - \cos(2h) \sin(2\Omega_i) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \sin(2h - 2\Omega_i) = - \frac{2Y_1 Y_2}{Y_1^2 + Y_2^2} \cos(2\Omega_i) - \frac{Y_2^2 - Y_1^2}{Y_1^2 + Y_2^2} \sin(2\Omega_i) \quad (5.10)
\end{aligned}$$

Para expressar $\langle V \rangle$ nas variáveis Y_1 e Y_2 , trabalhamos com $\langle V_{sat} \rangle$ e $\langle V_{\odot} \rangle$ separadamente.

Concluimos que $\langle V_{sat} \rangle$ nas variáveis não singulares Y_1 e Y_2 é

$$\begin{aligned}
\langle V_{sat} \rangle = & -\frac{3 k^2 M_p M_{sat} R_p^2 J_2}{2 a^3 (1-e^2)^{3/2}} \left\{ \frac{1}{32} \sin^2(I) [3 \cos^2(J) - 1] \times \right. \\
& \times \left[\frac{4}{G} - \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)}{G^2} \right] [(Y_2^2 - Y_1^2) \cos(2\Omega) - 2Y_1 Y_2 \sin(2\Omega)] + \\
& + \frac{1}{16} \left[1 - 3 \cos^2(J) + \frac{9}{2} \sin^2(I) \cos^2(J) - \frac{3}{2} \sin^2(I) \right] \left[\frac{4(Y_1^2 + Y_2^2)}{G} - \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)^2}{G^2} \right] + \\
& + \frac{1}{4} \cos(I) \sin(I) [3 \cos^2(J) - 1] \left[\sqrt{\frac{4}{G} - \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)}{G^2}} \right] \left[1 - \frac{1}{2} \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)}{G} \right] \times \\
& \times [Y_2 \cos(\Omega) - Y_1 \sin(\Omega)] + \frac{1}{2} \cos^2(J) - \frac{3}{4} \sin^2(I) \cos^2(J) \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sin^2(I) \left. \right\}, \quad (5.11)
\end{aligned}$$

enquanto que $\langle V_{\odot} \rangle$ é escrito como

$$\langle V_{\odot} \rangle = P_1 \sin(2f_{\odot} + 2\omega_{\odot}) + Q_1 \cos(2f_{\odot} + \omega_{\odot}) + R_1 \quad (5.12)$$

sendo que

• P_1 :

$$\begin{aligned}
P_1 = & -\frac{\sin(I_{\odot})}{\sqrt{Y_1^2 + Y_2^2}} \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cos^2(J) \right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{Y_1^2 + Y_2^2}{G} \right) \times \right. \\
& \times \left. \sqrt{\frac{4(Y_1^2 + Y_2^2)}{G} - \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)^2}{G^2}} (Y_2 \sin(\Omega_{\odot}) + Y_1 \cos(\Omega_{\odot})) \right] + \\
& + \left[\frac{4(Y_1^2 + Y_2^2)}{G} - \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)^2}{G^2} \right] \left(-\frac{3}{16} \cos^2(J) + \frac{1}{16} \right) \times \\
& \times \left[\frac{(Y_2^2 - Y_1^2) \sin(2\Omega_{\odot})}{Y_1^2 + Y_2^2} + \frac{2Y_1 Y_2 \cos(2\Omega_{\odot})}{Y_1^2 + Y_2^2} \right] \cos(I_{\odot}) \quad (5.13)
\end{aligned}$$

• Q_1 :

$$\begin{aligned}
Q_1 = & \frac{\cos(I_{\odot}) \sin(I_{\odot})}{\sqrt{Y_1^2 + Y_2^2}} \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cos^2(J) \right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{Y_1^2 + Y_2^2}{G} \right) \times \right. \\
& \times \left. \sqrt{\frac{4(Y_1^2 + Y_2^2)}{G} - \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)^2}{G^2}} (Y_2 \cos(\Omega_{\odot}) - Y_1 \sin(\Omega_{\odot})) \right] + \\
& + \left[\frac{4(Y_1^2 + Y_2^2)}{G} - \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)^2}{G^2} \right] \left(-\frac{3}{16} \cos^2(J) + \frac{1}{16} \right) \times \\
& \times \left[\frac{(Y_2^2 - Y_1^2) \cos(2\Omega_{\odot})}{Y_1^2 + Y_2^2} - \frac{2Y_1 Y_2 \sin(2\Omega_{\odot})}{Y_1^2 + Y_2^2} \right] \times \\
& \times \frac{1}{4} \left[\sin^2(I_{\odot}) \cos^2(I_{\odot}) + 2 \cos(I_{\odot}) \sin(I_{\odot}) - 2 \cos^2(I_{\odot}) + 2 \cos(I_{\odot}) \right] - \\
& - \sin^2(I_{\odot}) \left[-3 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{Y_1^2 + Y_2^2}{G} \right)^2 + 1 \right] \left(-\frac{1}{8} + \frac{3}{8} \cos^2(J) \right) \quad (5.14)
\end{aligned}$$

• R_1 :

$$\begin{aligned}
R_1 = & \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{Y_1^2 + Y_2^2}} \left[\left(1 - \frac{1}{2} \frac{Y_1^2 + Y_2^2}{G} \right) \sin(I_\odot) \cos(I_\odot) (-1 + 3 \cos^2(J)) \times \right. \\
& \times \left. \sqrt{\frac{4(Y_1^2 + Y_2^2)}{G} - \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)^2}{G^2}} (Y_2 \cos(\Omega_\odot) - Y_1 \sin(\Omega_\odot)) \right] + \\
& + \frac{\sin^2(I_\odot)}{4} \left[\frac{4(Y_1^2 + Y_2^2)}{G} - \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)^2}{G^2} \right] \left(-\frac{1}{8} + \frac{3}{8} \cos^2(J) \right) \times \\
& \times \left[\frac{(Y_2^2 - Y_1^2) \cos(2\Omega_\odot)}{Y_1^2 + Y_2^2} - \frac{2Y_1 Y_2 \sin(2\Omega_\odot)}{Y_1^2 + Y_2^2} \right] + \\
& + \cos^2(I_\odot) \left[\frac{1}{8} - \frac{3}{8} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{Y_1^2 + Y_2^2}{G} \right)^2 - \frac{3}{8} \cos^2(J) + \right. \\
& \left. + \frac{9}{8} \cos^2(J) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{Y_1^2 + Y_2^2}{G} \right)^2 \right] + \\
& + \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{Y_1^2 + Y_2^2}{G} \right)^2 - \frac{3}{8} \cos^2(J) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{Y_1^2 + Y_2^2}{G} \right)^2 + \\
& \qquad \qquad \qquad + \frac{1}{8} \cos^2(J) + \frac{5}{8} \quad (5.15)
\end{aligned}$$

Das expressões (5.11) e (5.12) obtemos:

$$\begin{aligned}
\langle V \rangle &= \langle V \rangle(a, e, \Omega, I, a_\odot, e_\odot, f_\odot, \omega_\odot, \Omega_\odot, I_\odot, J, Y_1, Y_2) = \langle V_{sat} \rangle + \langle V_\odot \rangle \Rightarrow \\
\Rightarrow \langle V \rangle &= -\frac{3k^2 M_s a t M_p R_p^2}{2a^3(1-e^2)^{3/2}} \left\{ \frac{1}{32} \sin^2(I) [3 \cos^2(J) - 1] \times \right. \\
& \times \left[\frac{4}{G} - \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)}{G^2} \right] [(Y_2^2 - Y_1^2) \cos(2\Omega) - 2Y_1 Y_2 \sin(2\Omega)] + \\
& + \frac{1}{16} \left[1 - 3 \cos^2(J) + \frac{9}{2} \sin^2(I) \cos^2(J) - \frac{3}{2} \sin^2(I) \right] \times \\
& \times \left[\frac{4(Y_1^2 + Y_2^2)}{G} - \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)^2}{G^2} \right] + \\
& + \frac{1}{4} \cos(I) \sin(I) [3 \cos^2(J) - 1] \left[\sqrt{\frac{4}{G} - \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)}{G^2}} \right] \left[1 - \frac{1}{2} \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)}{G} \right] \times \\
& \times [Y_2 \cos(\Omega) - Y_1 \sin(\Omega)] + \frac{1}{2} \cos^2(J) - \frac{3}{4} \sin^2(I) \cos^2(J) \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sin^2(I) \left. \right\} + \\
& + P_1 \sin(2f_\odot + 2\omega_\odot) + Q_1 \cos(2f_\odot + \omega_\odot) + R_1. \quad (5.16)
\end{aligned}$$

De (5.16) e (2.10), as seguintes equações para a dinâmica de rotação do planeta são definidas

$$\begin{cases} \frac{dY_1}{dt} = \frac{\partial \langle \mathcal{H} \rangle}{\partial Y_2} \end{cases} \quad (5.17)$$

$$\begin{cases} \frac{dY_2}{dt} = -\frac{\partial \langle \mathcal{H} \rangle}{\partial Y_1}. \end{cases} \quad (5.18)$$

Notemos agora que as variáveis K e h aparecem explicitamente em $\langle R_{J_2} \rangle$. Portanto estes também devem ser escritos em termos de Y_1 e Y_2 . Esta operação é simples pois:

$$\begin{cases} H = G - \frac{1}{2}(Y_1^2 + Y_2^2) \\ h = \arctan\left(-\frac{Y_1}{Y_2}\right) \end{cases} \quad (5.19)$$

$$\quad (5.20)$$

por consequência, a partir de (1.3), $H = G \cos(K)$, e de (5.19)

$$K = \arccos\left[1 - \frac{1}{2} \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)}{G}\right]. \quad (5.21)$$

Primeiro, temos que $\langle \mathcal{R}_{J_2} \rangle$ pode ser fatorado como:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}_{J_2} \rangle = & \frac{k^2 M_p R_p^2 J_2}{16a^3(1-e^2)^{3/2}} \left\{ 2 - 6 \cos^2(I) + \right. \\ & + 3 \sin^2(J)[3 \cos^2(I) - 1] \sin^2(K) + 6 \cos^2(J)[3 \cos^2(I) - 1] \cos^2(K) + \\ & + 6 \sin(2I)[2 \cos^2(J) - \sin^2(J)] \sin(K) \cos(K) \cos(\Omega - h) + \\ & \left. + 3 \sin^2(I)[2 \cos^2(J) - \sin^2(J)] \sin^2(K) \cos(2\Omega - 2h) \right\}, \end{aligned}$$

aplicando as relações com Y_1 e Y_2 , temos que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}_{J_2} \rangle = & \frac{k^2 M_p R_p^2 J_2}{a^3(1-e^2)^{3/2}} \left\{ \frac{1}{8} - \frac{3}{8} \cos^2(I) + \right. \\ & + \frac{3}{16} \sin^2(J)[3 \cos^2(I) - 1] \left[\frac{Y_1^2 + Y_2^2}{G} - \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)^2}{4G^2} \right] + \\ & + \frac{3}{8} \cos^2(J)[3 \cos^2(I) - 1] \left[1 - \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)}{2G} \right]^2 + \frac{3}{8} \sin(2I)[2 \cos^2(J) - \sin^2(J)] \times \\ & \times \sqrt{\frac{1}{G} - \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)}{4G^2}} \left[1 - \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)}{2G} \right] [Y_2 \cos(\Omega) - Y_1 \sin(\Omega)] + \\ & + \frac{3}{16} \sin^2(I)[2 \cos^2(J) - \sin^2(J)] \sin^2(K) \left[\frac{1}{G} - \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)}{4G^2} \right] \times \\ & \left. \times [(Y_2^2 - Y_1^2) \cos(2\Omega) - 2Y_1 Y_2 \sin(2\Omega)] \right\}. \quad (5.22) \end{aligned}$$

Logo,

$$\langle \mathcal{R} \rangle = \langle \mathcal{R} \rangle(a_\odot, e_\odot, \omega_\odot, \Omega_\odot, I_\odot, f_\odot, a, e, \omega, \Omega, I, J, Y_1, Y_2) = \langle \mathcal{R}_\odot \rangle + \langle \mathcal{R}_{J_2} \rangle \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \langle \mathcal{R} \rangle = & \frac{k^2 M_\odot a^2}{2a_\odot^3} \left(\frac{a_\odot}{r_\odot} \right)^3 \left\{ \frac{3}{2} P [(A^*)^2 + (B^*)^2 + (C^*)^2 + (D^*)^2 + \right. \\
& + 2(E^*)^2 - \frac{2}{3}] + \frac{3}{2} (A^*)^2 Z \cos(2\omega + 2f_\odot + 2\omega_\odot + 2\Omega - 2\Omega_\odot) + \\
& + \frac{3}{2} (B^*)^2 Z \cos(2\omega + 2f_\odot + 2\omega_\odot - 2\Omega + 2\Omega_\odot) + \\
& + \frac{3}{2} (C^*)^2 Z \cos(2\omega - 2f_\odot - 2\omega_\odot + 2\Omega - 2\Omega_\odot) + \\
& + \frac{3}{2} (D^*)^2 Z \cos(2\omega - 2f_\odot - 2\omega_\odot - 2\Omega + 2\Omega_\odot) + \\
& + \frac{3}{2} Z [(E^*)^2 + 2C^* D^*] \cos(2\omega - 2f_\odot - 2\omega_\odot) + \frac{3}{2} Z [(E^*)^2 + 2A^* B^*] \cos(2\omega + 2f_\odot + 2\omega_\odot) + \\
& + 3Z [A^* D^* + B^* C^* - (E^*)^2] \cos(2\omega) + 3P [A^* C^* + B^* D^* - (E^*)^2] \cos(2f_\odot + 2\omega_\odot) + \\
& + 3P (A^* B^* + C^* D^*) \cos(2\Omega - 2\Omega_\odot) + 3A^* C^* Z \cos(2\omega + 2\Omega - 2\Omega_\odot) + \\
& + 3A^* D^* P \cos(2f_\odot + 2\omega_\odot + 2\Omega - 2\Omega_\odot) + 3E^* P (A^* - D^*) \cos(2f_\odot + 2\omega_\odot + \Omega - \Omega_\odot) + \\
& + 3E^* P (-A^* - B^* + C^* + D^*) \cos(\Omega - \Omega_\odot) + 3E^* Z (A^* - C^*) \cos(2\omega + \Omega - \Omega_\odot) - \\
& - 3A^* E^* Z \cos(2\omega + 2f_\odot + 2\omega_\odot + \Omega - \Omega_\odot) + 3B^* C^* P \cos(2f_\odot + 2\omega_\odot - 2\Omega + 2\Omega_\odot) + \\
& + 3B^* D^* Z \cos(2\omega - 2\Omega + 2\Omega_\odot) + 3E^* P (B^* - C^*) \cos(2f_\odot + 2\omega_\odot - \Omega + \Omega_\odot) + \\
& + 3E^* Z (B^* - D^*) \cos(2\omega - \Omega + \Omega_\odot) - 3B^* E^* Z \cos(2\omega + 2f_\odot + 2\omega_\odot - \Omega + \Omega_\odot) + \\
& + 3C^* E^* Z \cos(2\omega - 2f_\odot - 2\omega_\odot + \Omega - \Omega_\odot) + \\
& + 3D^* E^* Z \cos(2\omega - 2f_\odot - 2\omega_\odot - \Omega + \Omega_\odot) \} + \\
& + \frac{k^2 M_p R_p^2 J_2}{a^3 (1 - e^2)^{3/2}} \left\{ \frac{1}{8} - \frac{3}{8} \cos^2(I) + \frac{3}{16} \sin^2(J) [3 \cos^2(I) - 1] \left[\frac{Y_1^2 + Y_2^2}{G} - \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)^2}{4G^2} \right] + \right. \\
& + \frac{3}{8} \cos^2(J) [3 \cos^2(I) - 1] \left[1 - \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)}{2G} \right]^2 + \frac{3}{8} \sin(2I) [2 \cos^2(J) - \sin^2(J)] \times \\
& \times \sqrt{\frac{1}{G} - \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)}{4G^2}} \left[1 - \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)}{2G} \right] [Y_2 \cos(\Omega) - Y_1 \sin(\Omega)] + \\
& + \frac{3}{16} \sin^2(I) [2 \cos^2(J) - \sin^2(J)] \sin^2(K) \left[\frac{1}{G} - \frac{(Y_1^2 + Y_2^2)}{4G^2} \right] \times \\
& \left. \times [(Y_2^2 - Y_1^2) \cos(2\Omega) - 2Y_1 Y_2 \sin(2\Omega)] \right\}. \quad (5.23)
\end{aligned}$$

Sempre utilizando as relações (4.10), (3.22), (3.24) e (3.25) com (5.23).

Como estamos trabalhando com a função perturbadora média (equação 5.23), segue que $\partial \langle \mathcal{R} \rangle / \partial \mathcal{M} = 0$. Utilizando as equações de Lagrange (BROUWER; CLEMENCE, 1961), já concluímos que o semieixo do satélite, a , é constante. Simplificamos as equações de Lagrange, obtendo as seguintes derivadas temporais para os elementos orbitais do satélite no sistema inercial E :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{de}{dt} = - \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2e} \frac{\partial \langle \mathcal{R} \rangle}{\partial \omega} \quad (5.24) \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\cot(I)}{na^2(1-e^2)^{1/2}} \frac{\partial \langle \mathcal{R} \rangle}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin(I)} \frac{\partial \langle \mathcal{R} \rangle}{\partial \Omega} \quad (5.25) \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2e} \frac{\partial \langle \mathcal{R} \rangle}{\partial e} - \frac{\cot(I)}{na^2(1-e^2)^{1/2}} \frac{\partial \langle \mathcal{R} \rangle}{\partial I} \quad (5.26) \\ \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin(I)} \frac{\partial \langle \mathcal{R} \rangle}{\partial I}. \quad (5.27) \end{array} \right.$$

[**Observação 5** *As variações temporais dos elementos orbitais do Sol ($a_\odot, e_\odot, f_\odot, \omega_\odot, \Omega_\odot, I_\odot$) serão consideradas funções conhecidas, dispensando o uso das equações de Lagrange para obtê-las.*]

Unindo as equações (5.17), (5.18), (5.24), (5.25), (5.26) e (5.27), temos um sistema de 6 equações diferenciais de primeira ordem que serão integradas numericamente

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dY_1}{dt} = \frac{\partial \langle \mathcal{H} \rangle_{g,\mathcal{M}}}{\partial Y_2} \\ \frac{dY_2}{dt} = - \frac{\partial \langle \mathcal{H} \rangle_{g,\mathcal{M}}}{\partial Y_1} \\ \frac{de}{dt} = - \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2e} \frac{\partial \langle \mathcal{R} \rangle}{\partial \omega} \quad (5.28) \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\cot(I)}{na^2(1-e^2)^{1/2}} \frac{\partial \langle \mathcal{R} \rangle}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin(I)} \frac{\partial \langle \mathcal{R} \rangle}{\partial \Omega} \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2e} \frac{\partial \langle \mathcal{R} \rangle}{\partial e} - \frac{\cot(I)}{na^2(1-e^2)^{1/2}} \frac{\partial \langle \mathcal{R} \rangle}{\partial I} \\ \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin(I)} \frac{\partial \langle \mathcal{R} \rangle}{\partial I}. \end{array} \right.$$

Logo, a cada instante t saberemos o valor de $Y_1(t)$ e $Y_2(t)$, por conseguinte serão determinadas as variáveis de Andoyer $h = h(t)$, $H = H(t)$ e $K = K(t)$. Vejamos como associar esses ângulos com a obliquidade do plano equatorial com relação ao plano orbital aparente do Sol, ϵ . Supomos que o plano do Sol é próximo ao inercial.

5.2 Obliquidade do planeta

O conjunto de equações (5.28) define o comportamento de Y_1 e Y_2 no tempo e , por consequência, das relações (5.19), (5.20) e (5.21) obtemos os valores H , h e K em qualquer instante t . Aqui, escreveremos ϵ em função desses ângulos e , assim, determinaremos sua variação.

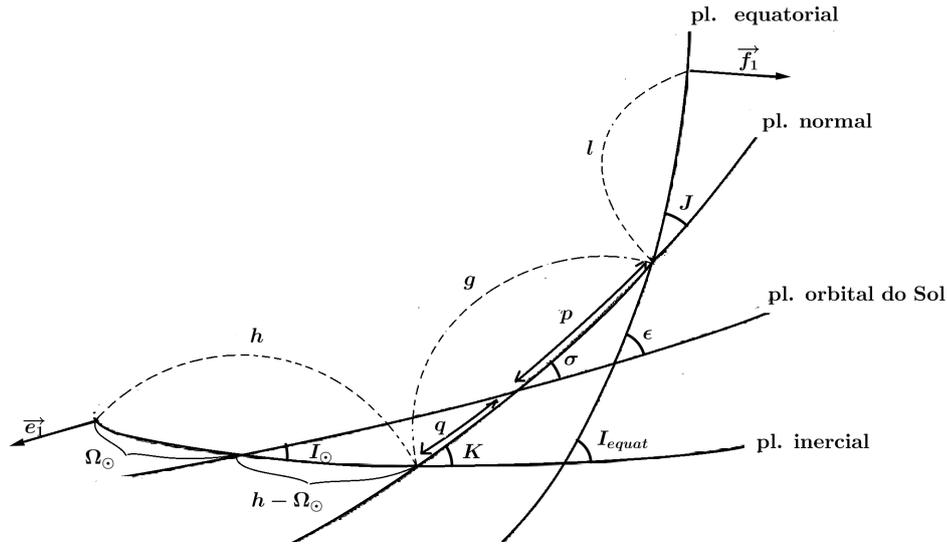


Figura 6 – Esquema de planos para o cálculo da obliquidade.

Trabalhando com os triângulos esféricos presentes na figura 6, resulta que o cosseno da obliquidade real é (veja a construção no Apêndice D):

$$\begin{aligned} \cos(\epsilon) = & \cos(J)[\cos(I_{\odot}) \cos(K) + \sin(I_{\odot}) \sin(K) \cos(h - \Omega_{\odot})] - \\ & - \cos(g) \sin(J)[\cos(I_{\odot}) \sin(K) - \cos(K) \sin(I_{\odot}) \cos(h - \Omega_{\odot})] - \\ & - \sin(g) \sin(J) \sin(I_{\odot}) \sin(h - \Omega_{\odot}) \end{aligned} \quad (5.29)$$

Desprezando os termos de curto período (aqueles associados as variáveis rápidas, ou seja, que apresentam funções trigonométricas em g e ainda fatoradas por $\sin(J)$), temos que

$$\cos(\epsilon) \approx \cos(J)[\cos(K) \cos(I_{\odot}) + \sin(K) \sin(I_{\odot}) \cos(h - \Omega_{\odot})]. \quad (5.30)$$

Assim, a obliquidade do planeta com relação ao plano do Sol é

$$\epsilon \approx \arccos\{\cos(J)[\cos(K) \cos(I_{\odot}) + \sin(K) \sin(I_{\odot}) \cos(h - \Omega_{\odot})]\}. \quad (5.31)$$

Obtemos a relação desejada para estudar a variação de ϵ no tempo.

6 Sistema Terra, Lua e Sol - validação da teoria

Antes de aplicar as equações de (5.28) à dinâmica de rotação de qualquer planeta, realizaremos alguns testes preliminares para comprovar a eficácia do modelo construído até aqui. Nesse capítulo, primeiramente faremos o estudo teórico com o modelo simples: sem considerar a função potencial média ($\langle \mathcal{R} \rangle$), com o objetivo de reproduzir o período da precessão do equador da Terra (veja figura 7). Posteriormente, apresentaremos os resultados obtidos considerando o modelo completo (com todas as perturbações).

6.1 Estudo teórico da precessão do equador da Terra no caso mais simples

Mantendo as construções feitas até aqui, consideremos que C_1 seja a Terra, C_2 a Lua e C_3 o Sol. Tomando a figura 1 como referência, sobre o centro de massa da Terra estão fixados 2 sistemas de coordenadas ortogonais: E , o sistema inercial, e F , o sistema de eixos principais do corpo C_1 . Nosso objetivo inicial é estudar o movimento do plano do equador em relação ao inercial, ou seja, nosso alvo é entender o comportamento do ângulo de Andoyer h no tempo.

Para o estudo teórico e aproximado da precessão do equador da Terra, supomos:

- a) pela construção feita até aqui, C_1 possui um eixo de simetria ($A = B$), logo o ângulo de Andoyer J é constante e tomaremos igual a 0° ;
- b) o plano fundamental inercial será a própria eclíptica;
- c) a inclinação da órbita da Lua em relação ao plano fundamental (a eclíptica) é tomado igual a zero;
- d) desprezamos a interação Lua - Sol e a perturbação do achatamento de C_1 sobre C_2 ;
- e) tomamos $\langle V_\odot \rangle$ como sendo a média de V_\odot em relação ao ângulo de Andoyer g e à anomalia média do Sol (\mathcal{M}_\odot).

Desta forma, com $J = I_\odot = I = 0$, resulta a figura 7, onde h é o ângulo relacionado a precessão do equador da Terra.

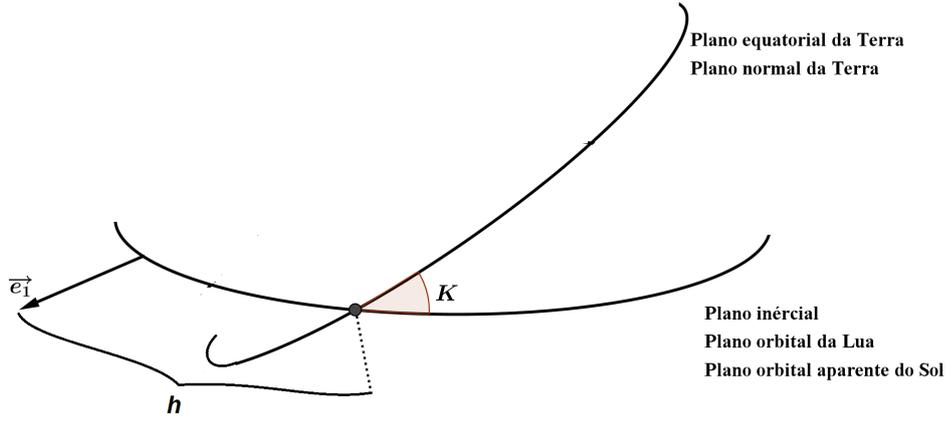


Figura 7 – Planos do sistema Terra, Lua e Sol

Podemos resumir o potencial médio devido ao corpo i como:

$$\langle V_i \rangle_{g, \mathcal{M}_i} = \text{fator} = -\frac{3 k^2 M_i M_p R_p^2 J_2}{2 a_i^3 (1 - e_i^2)^{3/2}} \cdot FM$$

para $i = \text{sat}, \odot$, de modo que

$$\begin{aligned} FM = & \frac{\sin^2(K)}{8} \left[-2 \sin^2(J) \sin^2(I_i) + 1 + \cos^2(J) - \right. \\ & \left. - \cos^2(I_i) - \cos^2(J) \cos^2(I_i) \right] \cos(2h - 2\Omega_i) + \\ & + \frac{\sin(2I_i) \sin(K) \cos(K)}{4} \left[1 + \cos^2(J) - 2 \sin^2(J) \right] \cos(h - \Omega_i) + \\ & + \frac{\sin^2(K)}{4} \left[\sin^2(I_i) + \sin^2(J) \cos^2(I_i) + \cos^2(J) \sin^2(I_i) + \sin^2(J) \right] + \\ & + \frac{\cos^2(K)}{8} \left[1 + \cos^2(J) \cos^2(I_i) + 4 \sin^2(J) \sin^2(I_i) + \cos^2(J) + \cos^2(I_i) \right] + \\ & + \frac{1}{8} \left[1 + \cos^2(I_i) + \cos^2(J) + \cos^2(J) \cos^2(I_i) \right]. \quad (6.1) \end{aligned}$$

Fazendo uso das hipóteses a), b), c) e d), FM é reduzida a

$$FM = \frac{\cos^2(K)}{2} + \frac{1}{2}. \quad (6.2)$$

Desprezando a constante 1/2 resulta:

$$\langle V_i \rangle_{g, \mathcal{M}_i} = -\frac{3 k^2 M_i M_p R_p^2 J_2}{2 a_i^3 (1 - e_i^2)^{3/2}} \cdot \frac{\cos^2(K)}{2}. \quad (6.3)$$

Como $\cos(K) = \frac{H}{G}$,

$$\langle V_i \rangle_{g, \mathcal{M}_i} = -\frac{3 k^2 M_i M_p R_p^2 J_2}{2 a_i^3 (1 - e_i^2)^{3/2}} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{H}{G} \right)^2. \quad (6.4)$$

Portanto, aqui o potencial perturbador médio que governa a rotação da Terra é:

$$\langle V \rangle = -\frac{3 k^2 M_{sat} M_p R_p^2 J_2}{2 a^3 (1 - e^2)^{3/2}} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{H}{G} \right)^2 - \frac{3 k^2 M_{\odot} M_p R_p^2 J_2}{2 a_{\odot}^3 (1 - e_{\odot}^2)^{3/2}} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{H}{G} \right)^2 \quad (6.5)$$

Observamos que $\langle V \rangle$ não está em função das variáveis h e g , e então das equações de Hamilton

$$\begin{cases} \frac{dH}{dt} = -\frac{\partial \langle V \rangle}{\partial h} = 0 \Rightarrow H \text{ é constante} \end{cases} \quad (6.6)$$

$$\begin{cases} \frac{dG}{dt} = -\frac{\partial \langle V \rangle}{\partial g} = 0 \Rightarrow G \text{ é constante,} \end{cases} \quad (6.7)$$

da projeção (1.3) do capítulo 2,

$$H = G \cos(K) \Rightarrow \cos(K) = \frac{H}{G} = \text{constante,} \quad (6.8)$$

ou seja, do modo como estamos formulando o problema, K é constante.

Novamente utilizando a equações de Hamilton, como H é o momento conjugado de h :

$$\left(\frac{dh}{dt} \right) = \frac{\partial \langle V \rangle}{\partial H} = -\frac{3 k^2 M_{sat} M_p R_p^2 J_2}{2 a^3 (1 - e^2)^{3/2}} \cdot \frac{H}{G^2} - \frac{3 k^2 M_{\odot} M_p R_p^2 J_2}{2 a_{\odot}^3 (1 - e_{\odot}^2)^{3/2}} \cdot \frac{H}{G^2}. \quad (6.9)$$

Denominaremos os termos por

$$\left\{ \left(\frac{dh}{dt} \right)_L = -\frac{3 k^2 M_{sat} M_p R_p^2 J_2}{2 a^3 (1 - e^2)^{3/2}} \cdot \frac{H}{G^2} \right. \quad (6.10)$$

$$\left. \left(\frac{dh}{dt} \right)_S = -\frac{3 k^2 M_{\odot} M_p R_p^2 J_2}{2 a_{\odot}^3 (1 - e_{\odot}^2)^{3/2}} \cdot \frac{H}{G^2} \right. \quad (6.11)$$

Considerando os dados constantes da tabela 1 obtemos

$$\frac{dh}{dt} = -0.00024900 \quad (6.12)$$

$$T = \frac{2\pi}{|(dh/dt)|} \approx 25233,5 \text{ anos.} \quad (6.13)$$

| | Lua | Sol | Terra |
|---------------------|-------------------------------|----------|--------------------------------|
| M_i (massa solar) | $0,3740336306 \times 10^{-7}$ | 1 | $0,3003490055 \times 10^{-5}$ |
| a_i (UA) | 0,002569555302 | 1 | ———— |
| e_i | 0,05599 | 0,016754 | ———— |
| R_p (UA) | ———— | ———— | 0,00004263523271 |
| J_2 | ———— | ———— | 0.001082 |
| C | ———— | ———— | $0,1806046695 \times 10^{-14}$ |
| K (rad) | ———— | ———— | $0,1301851852\pi$ |

Tabela 1 – Dados para o sistema Terra, Lua e Sol

O resultado de (6.13) é uma estimativa do tempo que o plano equatorial da Terra demora para completar uma volta com relação ao seu plano orbital.

O efeito que a Lua exerce sobre a Terra é cerca de 2 vezes o efeito do Sol:

$$q = \frac{(dh/dt)_L}{(dh/dt)_S} \approx 2,21. \quad (6.14)$$

6.2 Variação da precessão do equador usando a teoria de Laskar

Na seção 6.1 obtivemos uma estimativa muito simplificada do período da precessão do equador terrestre. Como utilizamos uma simplificação, só foi possível obter o período aproximado dessa precessão. Note que a variação temporal dos elementos orbitais dos perturbadores Sol e satélite não foram considerados, isto é, os semieixos, excentricidades da Lua e do Sol foram tomados constantes.

Desta vez tomaremos as equações dadas em (5.28). Os elementos orbitais da órbita do Sol serão aquelas fornecidas pela Teoria Secular de Laskar (LASKAR, 1990) e o movimento da Lua e a dinâmica de rotação serão obtidos pela integração completa do sistema (5.28).

Aqui apresentamos os resultados obtidos da rotina computacional (sua estrutura é apresentada no Apêndice E). No instante t da Teoria Secular de Laskar (LASKAR, 1990) temos que:

$$\begin{aligned} \bullet ft &= \frac{\pi t}{648000} \\ \bullet cv &= \frac{\pi}{180} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet e_{\odot} \sin(\varpi) = & [18913 \sin(4, 2487910 \cdot ft + 30, 597 \cdot cv) + \\
& + 16047 \cdot \sin(7, 4559199 \cdot ft + 200, 630 \cdot cv) + 3159 \cdot \sin(17, 9155811 \cdot ft + 155, 568 \cdot cv) + \\
& + 9406 \cdot \sin(17, 3646123 \cdot ft + 304, 902 \cdot cv) + 4248 \cdot \sin(5, 5964883 \cdot ft + 112, 565 \cdot cv) + \\
& + 2238 \cdot \sin(17, 0830020 \cdot ft + 351 \cdot cv) + 1956 \cdot \sin(17, 6287061 \cdot ft + 7, 770 \cdot cv) + \\
& + 1722 \cdot \sin(16, 8132568 \cdot ft + 94, 866 \cdot cv) + 1598 \cdot \sin(6, 9349219 \cdot ft + 169, 028 \cdot cv) + \\
& + 1506 \cdot \sin(28, 2206602 \cdot ft + 128, 008 \cdot cv)] \cdot 10^{-6} \quad (6.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet e_{\odot} \cos(\varpi) = & [18913 \cdot \cos(4, 2487910 \cdot ft + 30, 597 \cdot cv) + \\
& + 16047 \cdot \cos(7, 4559199 \cdot ft + 200, 630 \cdot cv) + 13159 \cdot \cos(17, 9155811 \cdot ft + 155, 568 \cdot cv) + \\
& + 9406 \cdot \cos(17, 3646123 \cdot ft + 304, 902 \cdot cv) + 4248 \cdot \cos(5, 5964883 \cdot ft + 112, 565 \cdot cv) + \\
& + 2238 \cdot \cos(17, 0830020 \cdot ft + 351 \cdot cv) + 1956 \cdot \cos(17, 6287061 \cdot ft + 7, 770 \cdot cv) + \\
& + 1722 \cdot \cos(16, 8132568 \cdot ft + 94, 866 \cdot cv) + 1598 \cdot \cos(6, 9349219 \cdot ft + 169, 028 \cdot cv) + \\
& + 1506 \cdot \cos(28.2206602 \cdot ft + 128.008d0 \cdot cv)] \cdot 10^{-6} \quad (6.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \sin(I_{\odot}/2) \sin(\Omega_{\odot}) = & [13773 \cdot \sin(107, 586 \cdot cv) + \\
& + 8760 \cdot \sin(-18, 8511680 \cdot ft + 240, 034 \cdot cv) + 4960 \cdot \sin(-5, 6176875 \cdot ft + 348, 307 \cdot cv) + \\
& + 4024 \cdot \sin(-17, 7482549 \cdot ft + 303, 928 \cdot cv) + 3431 \cdot \sin(-7, 0797568 \cdot ft + 93, 267 \cdot cv) + \\
& + 2846 \cdot \sin(-18, 2999619 \cdot ft + 270, 439 \cdot cv) + 1736 \cdot \sin(-6, 8410195 \cdot ft + 286, 932 \cdot cv) + \\
& + 1736 \cdot \sin(-6, 9609463 \cdot ft + 277, 682 \cdot cv) + 1610 \cdot \sin(-7, 1949375 \cdot ft + 285, 060 \cdot cv) + \\
& + 1607 \cdot \sin(-19, 4022773 \cdot ft + 29, 348 \cdot cv)] \cdot 10^{-6} \quad (6.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \sin(I_{\odot}/2) \cos(\Omega_{\odot}) = & [13773 \cdot \cos(107, 586 \cdot cv) + \\
& + 8760 \cdot \cos(-18, 8511680 \cdot ft + 240, 034 \cdot cv) + 4960 \cdot \cos(-5, 6176875 \cdot ft + 348, 307 \cdot cv) + \\
& + 4024 \cdot \cos(-17, 7482549 \cdot ft + 303, 928 \cdot cv) + 3431 \cdot \cos(-7, 0797568 \cdot ft + 93, 267 \cdot cv) + \\
& + 2846 \cdot \cos(-18, 2999619 \cdot ft + 270, 439 \cdot cv) + 1736 \cdot \cos(-6, 8410195 \cdot ft + 286, 932 \cdot cv) + \\
& + 1736 \cdot \cos(-6, 9609463 \cdot ft + 277, 682 \cdot cv) + 1610 \cdot \cos(-7, 1949375 \cdot ft + 285, 060 \cdot cv) + \\
& + 1607 \cdot \cos(-19, 4022773d0 \cdot ft + 29, 348 \cdot cv)] \cdot 10^{-6} \quad (6.18)
\end{aligned}$$

portanto, de (6.15), (6.16), (6.17) e (6.18), obtemos ϖ (longitude do pericentro da Terra), e_{\odot} , Ω_{\odot} , I_{\odot} e ω_{\odot} .

Como estamos considerando C_2 como sendo a Lua, sua posição será descrita pelas equações de Lagrange ((5.24), (5.25), (5.26) e (5.27)). Faremos uso das hipóteses a), b), c) e d) da seção anterior e alimentando o programa com os dados iniciais:

$$\bullet K_0 = 23, 3^{\circ} \text{ e } h_0 = 0^{\circ}$$

- $g = 10^\circ$ e $l = 5^\circ$ (ângulos utilizados para a mudança do plano equatorial para o inercial - veja Apêndice B);
- $a = 60,232566 R_T$ (R_T : Raio equatorial da Terra), $e = 0,048$, $I_e = 20,88^\circ$, $\omega_e = 279,363^\circ$, $\Omega_e = 174,953^\circ$ (e: equador) e $M_{sat}/M_p = 1/81,3$;
- $a_{\odot,0} = 1$ UA.

Apresentamos os gráficos obtidos da rotina para o sistema Terra, Lua e Sol (figuras 8 e 9). Observamos que mesmo quando anexamos ao problema a função potencial média $\langle \mathcal{R} \rangle$ e consideramos V_{\odot} mediado apenas sobre o ângulo de Andoyer g , obtemos valores próximos a 26000 anos para a precessão do equador da Terra. Adicionalmente, ao contrário do caso simplificado onde K é um ângulo constante, aqui obtemos sua variação no tempo, o que possibilita estudarmos como a obliquidade da Terra varia durante os anos. A figura 9 mostra que ϵ não se afasta consideravelmente de $23,3^\circ$, ficando preso no intervalo $[22,2^\circ; 24^\circ]$. Na literatura, o intervalo de variação da inclinação do eixo de rotação da Terra é $[22^\circ; 24,6^\circ]$.

Também baseado em um sistema médio, Laskar, Joutel e Robutel (1993) estudaram o comportamento da obliquidade da Terra se a Lua não existisse e concluíram que o satélite natural da Terra atua como um potencial regulador do clima do planeta, pois considerando um cenário onde a Lua não existe, o ϵ do planeta assumiu valores entre 0° e 85° , contrapondo a realidade.

Utilizando nosso sistema médio e supondo que apenas o Sol é o perturbador da Terra, isto é, considerando $M_{sat} = 0$, a hamiltoniana se resume a $\langle V_{\odot} \rangle_g$. O comportamento da obliquidade da Terra nessas condições é representado na figura 10. Notemos que ao contrário da figura 9, desta vez, na ausência da Lua, o comportamento de ϵ segue um padrão totalmente diferente onde sua variação atinge valores absurdamente elevados. Conforme Laskar, Joutel e Robutel (1993), o comportamento de ϵ sem a Lua, resulta em uma evolução caótica o que traria sérias consequências sobre o clima da Terra.

As figuras 8, 9 e 10 demonstram que o sistema completo construído por nós, reproduz resultados já descritos e conhecidos, o que valida o uso dele para estudar possíveis cenários para o crescimento da obliquidade de planetas. O sistema também foi testado para o problema Marte - Sol, onde reproduziu os resultados de Ward (1974), isto é, a variação de ϵ também apresenta resultados completamente irregulares (caótico). No capítulo 8, apresentamos a aplicação do modelo médio para Netuno. Para tanto, primeiramente vamos pesquisar algumas características que o objeto C_2 (satélite) deva possuir para favorecer cenários onde ocorre variação do ϵ desse planeta (capítulo 7).

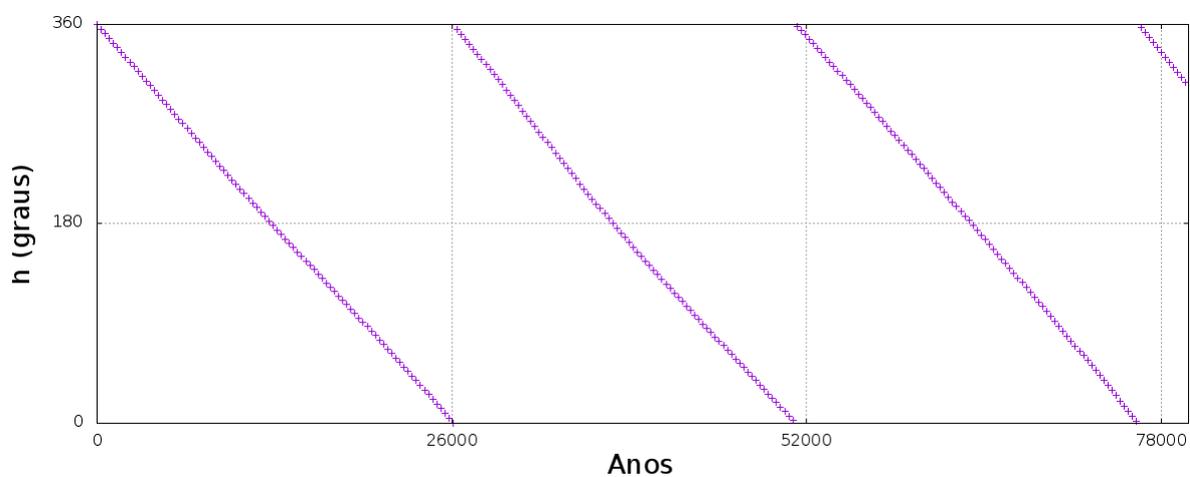


Figura 8 – Precessão do equador da Terra considerando Lua e Sol como perturbadores, porém agora todo o movimento orbital de ambos está sendo considerado.

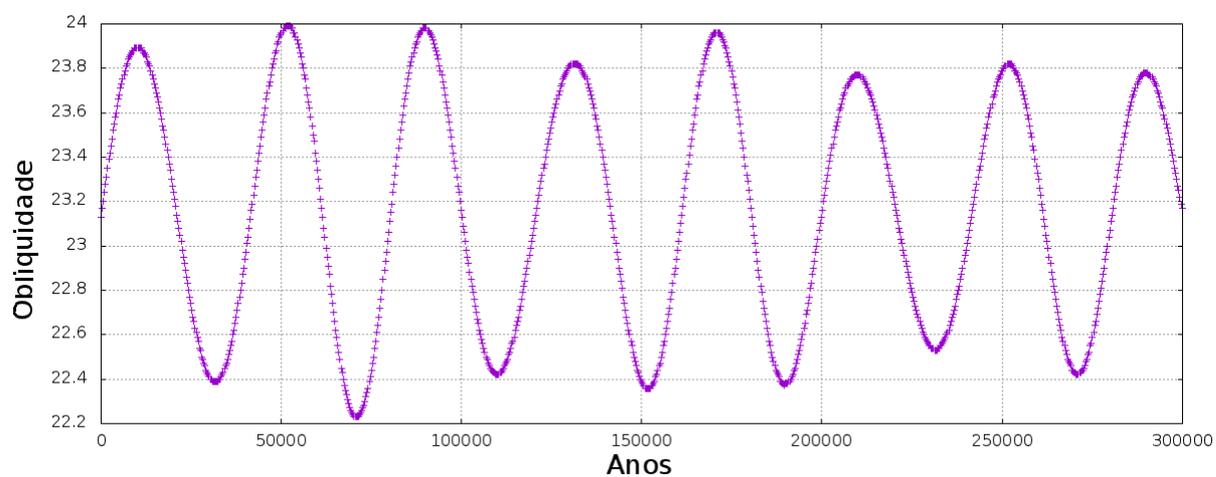


Figura 9 – Variação da obliquidade da Terra considerando Lua e Sol como perturbadores, porém agora todo o movimento orbital de ambos está sendo considerado.

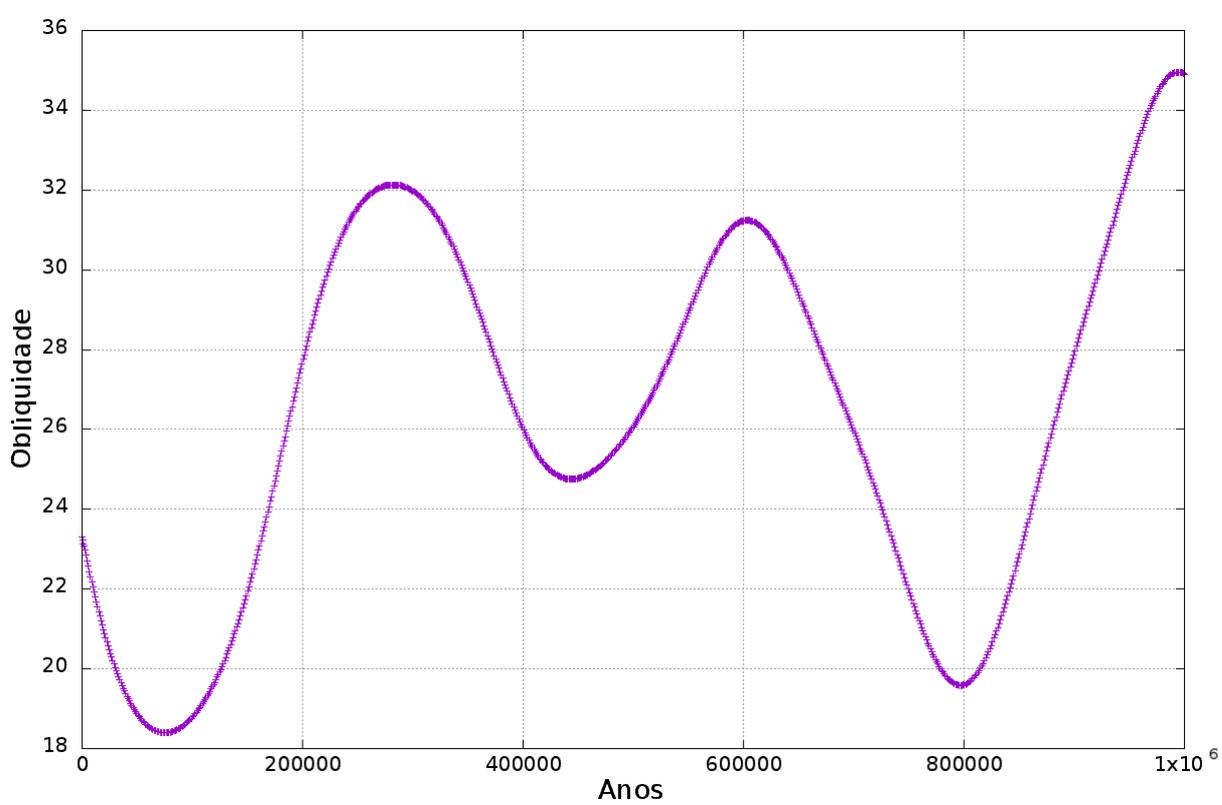


Figura 10 – Obliquidade da Terra quando se considera apenas o Sol como perturbador.

7 Ressonância $h - \Omega$ e sua relação com K

No capítulo 6 validamos a teoria descrita nos capítulos anteriores mostrando que com o modelo simplificado ou completo reproduzimos resultados já conhecidos.

O objetivo neste trabalho é apresentar um modelo que possa explicar a alta obliquidade do planeta Netuno. Assim, optamos por um sistema simple, Planeta - Sol e C_2 (um objeto que poderia ser um satélite temporário). Devido o alto custo computacional optamos por um sistema médio.

No caso atual, vamos sempre nos deparar com o problema que este objeto C_2 eventualmente poderia colidir com os satélites regulares do planeta. No entanto, Netuno não apresenta satélites regulares primordiais portanto, qualquer que seja a massa de C_2 , a sobrevivência de satélites regulares de Netuno não é obstáculo para os objetos aqui estabelecidos. Lembrar que no caso de Urano (que também tem alta obliquidade) não seria admissível um modelo similar ao nosso pois qualquer aproximação de C_2 poderia desestabilizar o sistema atual de satélites de Urano.

Inicialmente vamos pesquisar algumas características para que C_2 seja capaz de influenciar a obliquidade de Netuno. Para isso tomaremos apenas o sistema Planeta - C_2 , isto é, sem a presença do Sol. Então a hamiltoniana se restringe apenas a $\langle V_{sat} \rangle$ dada por:

$$\begin{aligned} \langle V_{sat} \rangle = & -\frac{3k^2 M_{sat} M_p R_p^2 J_2}{2a^3(1-e^2)^{3/2}} \left\{ \frac{\sin^2(K)}{8} \left[-2\sin^2(J)\sin^2(I) + 1 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \cos^2(J) - \cos^2(I) - \cos^2(J)\cos^2(I) \right] \cos(2h - 2\Omega) + \right. \\ & \left. + \frac{\sin(2I)\sin(K)\cos(K)}{4} \left[1 + \cos^2(J) - 2\sin^2(J) \right] \cos(h - \Omega) + \right. \\ & \left. + \frac{\sin^2(K)}{4} \left[\sin^2(I) + \sin^2(J)\cos^2(I) + \cos^2(J)\sin^2(I) + \sin^2(J) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\cos^2(K)}{8} \left[1 + \cos^2(J)\cos^2(I) + 4\sin^2(J)\sin^2(I) + \cos^2(J) + \cos^2(I) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{8} \left[1 + \cos^2(I) + \cos^2(J) + \cos^2(J)\cos^2(I) \right] \right\}. \quad (7.1) \end{aligned}$$

Vamos assumir as seguintes hipóteses, apenas e tão somente para esse caso simplificado. Suporemos então:

- e (excentricidade de C_2 em torno de C_1) é constante;
- I (inclinação de C_2 em relação ao plano inercial) é constante;

- $\Omega \approx n_8(t - t_0)$ (Ω é a longitude do nodo ascendente de C_2 em relação ao plano inercial), em que n_8 é a velocidade angular de rotação do plano orbital do satélite no plano inercial, dado em radianos por ano, e é constante;
- a (semieixo de C_2) é constante.

Nestas condições a hamiltoniana é função apenas de K (portanto de H , equação (1.3)), h e do tempo (as demais “variáveis” são constantes). Notemos ainda que h sempre aparece na combinação $h - \Omega$, então fazemos um extensão do espaço de fase neste sistema introduzindo:

$$\rho = h - \Omega \quad (7.2)$$

e seu momento conjugado P_ρ , resultando em uma nova hamiltoniana, porém conservativa, isto é:

$$\begin{aligned} V_8^* = & -n_8 H - \frac{3 k^2 M_{sat} M_p R_p^2 J_2}{2 a^3 (1 - e^2)^{3/2}} \left\{ \frac{\sin^2(K)}{8} \left[-2 \sin^2(J) \sin^2(I) + 1 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \cos^2(J) - \cos^2(I) - \cos^2(J) \cos^2(I) \right] \cos(2\rho) + \right. \\ & \left. + \frac{\sin(2I) \sin(K) \cos(K)}{4} \left[1 + \cos^2(J) - 2 \sin^2(J) \right] \cos(\rho) + \right. \\ & \left. + \frac{\sin^2(K)}{4} \left[\sin^2(I) + \sin^2(J) \cos^2(I) + \cos^2(J) \sin^2(I) + \sin^2(J) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\cos^2(K)}{8} \left[1 + \cos^2(J) \cos^2(I) + 4 \sin^2(J) \sin^2(I) + \cos^2(J) + \cos^2(I) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{8} \left[1 + \cos^2(I) + \cos^2(J) + \cos^2(J) \cos^2(I) \right] \right\}. \quad (7.3) \end{aligned}$$

Os detalhes dessas operações no Apêndice F.

Por se tratar de uma hamiltoniana de um único grau de liberdade, conservativa, então facilmente obtemos as curvas de nível no plano (ρ, K) , lembrando que K se relaciona com ϵ através de:

$$\epsilon \approx \arccos[\cos(J) \cos(K)]$$

onde I_\odot foi tomado igual a 0° na equação (5.31) e ainda J é constante.

7.1 Efeito de um único C_2 no caso simplificado

Assumindo as hipóteses mencionadas antes e adotando os seguintes valores:

- $M_N = 1/19314$ massas do Sol ($M_N =$ massa de Netuno);
- $R_N = 0,1655371163 \cdot 10^{-3}$ UA ($R_N =$ raio equatorial de Netuno);

- $J_2 = 4 \cdot 10^{-3}$;
- $T =$ período de rotação de Netuno $= \frac{16,11}{24}$ dia;
- $w_8 =$ velocidade angular de Netuno $= 1088,268156\pi$ rad/ano;
- $n_8 = -8,97598 \cdot 10^{-5}$ rad/ano;
- $C =$ momento de inércia de Netuno $= 0,21M_N R_N^2$;
- $G = Cw = 3,242453525 \cdot 10^{-10}\pi$ massa solar, unidades astronômicas, radianos e anos;
- $J = 0,2^\circ$.

obtemos as curvas que evidenciam o comportamento de K (ϵ) em função dos valores de massa do objeto C_2 (M_{sat}), inclinação da órbita de C_2 (I), excentricidade (e) etc. Em particular, sempre que as condições iniciais permitem a existência da ressonância $dh/dt : n_8$ (1 : 1) então grandes variações de K são possíveis.

De maneira resumida podemos notar:

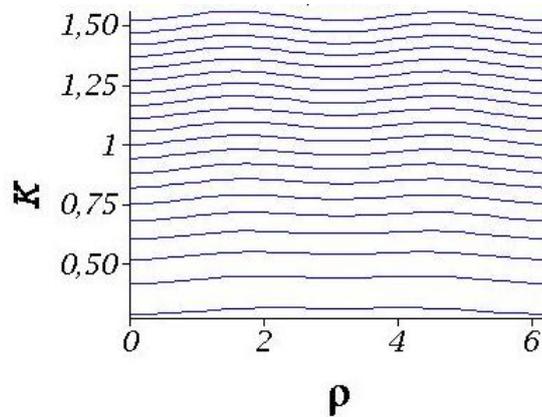


Figura 11 – Teste 1: $a = 60 R_N$, $I = 80^\circ$, $e = 0,1$, $M_{sat} = M_N/2500$, K em radianos e $\rho = h - \Omega$ em radianos

Neste caso (figura 11) como a massa de C_2 é igual a $M_N/2500$, muito pequena, não ocorre praticamente nenhuma variação de K (ou ϵ).

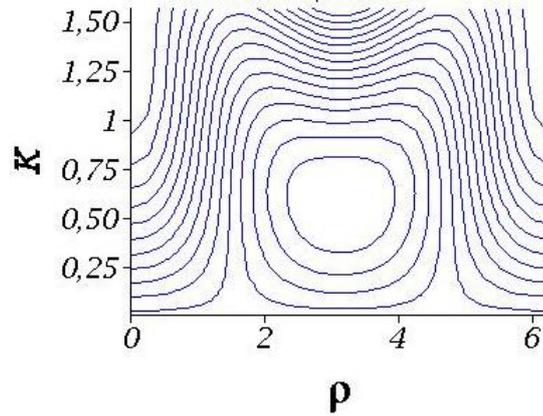


Figura 12 – Teste 2: $a = 60 R_N$, $I = 40^\circ$, $e = 0,1$, $M_{sat} = M_N/100$, K em radianos e $\rho = h - \Omega$ em radianos

Aqui (figura 12) como a massa é grande ($M_N/100$) e também como valor de n_8 está em ressonância com dh/dt , então surge um ponto de equilíbrio em $\rho = \pi$, observa-se uma grande variação de K . É evidente que elevados valores de I também são necessários.

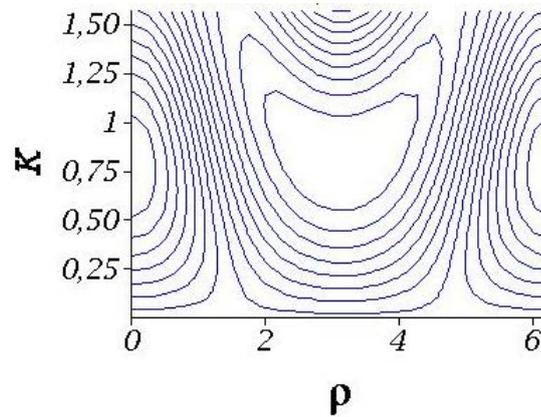


Figura 13 – Teste 3: $a = 60 R_N$, $I = 40^\circ$, $e = 0,8$, $M_{sat} = M_N/100$, K em radianos e $\rho = h - \Omega$ em radianos

Nesta figura (13) foi tomado uma excentricidade alta (0,8).

Como se observa na equação (7.3), neste caso o efeito perturbador se acentua ainda mais, como se nota ao compararmos as figuras 12 e 13.

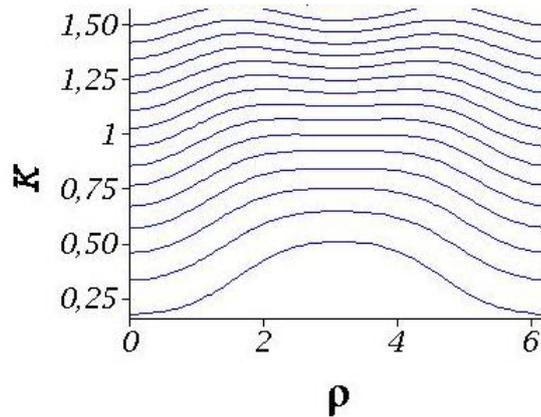


Figura 14 – Teste 4: $a = 60 R_N$, $I = 40^\circ$, $e = 0,8$, $M_{sat} = M_N/2500$, K em radianos e $\rho = h - \Omega$ em radianos

Nesse caso (figura 14), mesmo mantendo $e = 0,8$ e $I = 40^\circ$, o efeito é pequeno (ressonância entre n_8 e dh/dt ainda existe), porém as librações são muito fracas e não elevam muito o valor de ϵ . Nota-se que isto se deve a massa de apenas $M_N/2500$.

Conclusão sobre os testes

- 1) Sempre que $n_8 \approx \frac{dh}{dt}$ (ressonância 1:1), o ângulo K é fortemente perturbado;
- 2) A massa de C_2 é vital para um aumento significativo de K ;
- 3) Altas inclinações favorecem o surgimento da ressonância de Kozai, o que aumenta a excentricidade e por conseguinte aumenta a perturbação sobre K ;
- 4) Diferentes combinações das acima citadas nem sempre garantem grande variação de K .

As análises descritas acima foram os primeiros estudos sobre quais características de um satélite são mais favoráveis para a variação do ângulo de Andoyer K e, por consequência, ϵ de Netuno. A partir delas, começamos a testar os satélites utilizando o modelo médio completo, de modo a construir critérios para escolher os objetos que variam a obliquidade de Netuno e sejam expulsos depois de um período.

No modelo médio completo, não controlamos a possibilidade de ressonância entre h e Ω , mas a massa do satélite, a sua inclinação inicial, a sua excentricidade inicial e o seu semieixo (que é constante quando consideramos o sistema médio) podemos escolher. Ou seja, conseguimos elencar satélites que possivelmente entram em efeito de Kozai.

8 Variação da obliquidade de Netuno

Em Boué e Laskar (2010), os autores propuseram que a obliquidade de Urano poderia ser explicada adicionando um satélite (C_2) massivo durante a migração planetária do modelo de Nice. Esse satélite seria ejetado durante um dos encontros entre Urano e Saturno, mas durante o período que permanecesse orbitando o planeta provocaria o crescimento da obliquidade, alcançando $97,8^\circ$. Após sua expulsão, ϵ permaneceria estável em seu valor atual.

Essa teoria então poderia ser explorada também no caso de Netuno para explicar sua obliquidade atual. O planeta não possui satélites primordiais regulares que poderiam ser expulsos quando adicionamos um novo objeto (para Urano, a presença de um satélite adicional de massa muito elevada, poderia desestabilizar os primordiais já existentes).

As teorias de formação planetária, na época da migração planetária, propõem que o número de planetesimais de massa da ordem de Tritão seria próximo a 1000 objetos. Por outro lado, em Nogueira, Brassier e Gomes (2011), o número de encontros próximos de planetesimais com Netuno são muito elevados (entorno de 1.748.867), sobretudo os encontros temporários (hiperbólicos).

Tomaremos a distância Sol - Netuno constante e igual a $a_\odot = 12,5$ UA (semieixo de Netuno no início da migração planetária). Todavia, outros valores de a_\odot poderiam ser considerados. Realizamos integrações com alguns outros valores de a_\odot (sempre corrigindo a estimativa do período de Ω_\odot). Os resultados são semelhantes aos que vamos apresentar.

No presente capítulo devemos adaptar algumas das conclusões mencionadas no capítulo 7. Por exemplo, neste capítulo, a variação da excentricidade é um item importante e no sistema completo atual, esta variação é conseguida através da ressonância de Kozai. Para tanto, é preciso que o semieixo do satélite esteja a uma distância conveniente do Sol, caso contrário o efeito de Kozai será muito fraco. Assim, quanto mais longe Netuno estiver do Sol, existem casos em que C_2 deverá ficar mais longe do planeta (para poder estar a uma distância conveniente do Sol). Estando sob efeito da ressonância forte de Kozai, a excentricidade atinge valores altos, próximos ou maiores que 0,9. Nestas condições, o objeto C_2 pode ser considerado altamente instável, o que nos permite considerar como ejetado.

Esta ejeção é importante pois em geral ao escapar, o valor de ϵ se mantém no valor atual do momento do escape. Admitindo que um novo objeto C_2 seja capturado (em geral temporariamente), então o efeito de aumento de ϵ se torna acumulativo. Pelo fato de terem

existido muito planetesimais e inúmeros encontros desses com Netuno durante a migração planetário (NOGUEIRA; BRASSER; GOMES, 2011), podemos supor que uma sequência de objetos C_2 poderiam ter visitado Netuno. Então, faremos uma escolha de valores da inclinação, excentricidade, massa dos objetos C_2 etc, com as devidas adaptações baseadas no capítulo 7, visando obter valores plausíveis de ϵ .

Nesse capítulo serão apresentados, utilizando nosso modelo médio de longo período:

- i) os efeitos que um satélite massivo provocaria na obliquidade de Netuno (C_1), supondo que sua obliquidade inicial seja quase nula;
- ii) os efeitos que um conjunto de satélites provocaria na obliquidade de Netuno.

No item i) apresentaremos a variação da obliquidade de Netuno quando consideramos a captura de um único satélite. Tal como na teoria de Boué e Laskar (2010) conseguimos exibir um candidato que eleva a obliquidade de Netuno próximo ao valor atual de $28,3^\circ$ e é ejetado através do efeito de Kozai. Devido à grande quantidade de encontros entre planetesimais e Netuno, no item ii) utilizamos conjuntos de objetos menores e apresentamos cenários que alcançam resultados similares ao do item i).

8.1 Influência de um satélite massivo

Utilizando as hipóteses de Boué e Laskar (2010), mostramos a seguir um dos gráficos obtidos da integração numérica das equações (5.28) (figura 15). Podemos então confirmar que a massa do corpo C_2 é uma característica importante para a variação da obliquidade conforme foi visto no capítulo 7. O satélite apresentado tem os seguintes elementos orbitais:

$$a = 30 R_N, e = 0,3, I_e = 70^\circ, \omega_e = 303^\circ, \Omega_e = 184^\circ \text{ (plano equatorial)}$$

$$I = 67,91^\circ, \omega = 302,26^\circ, \Omega = -160,73^\circ \text{ (plano inercial),}$$

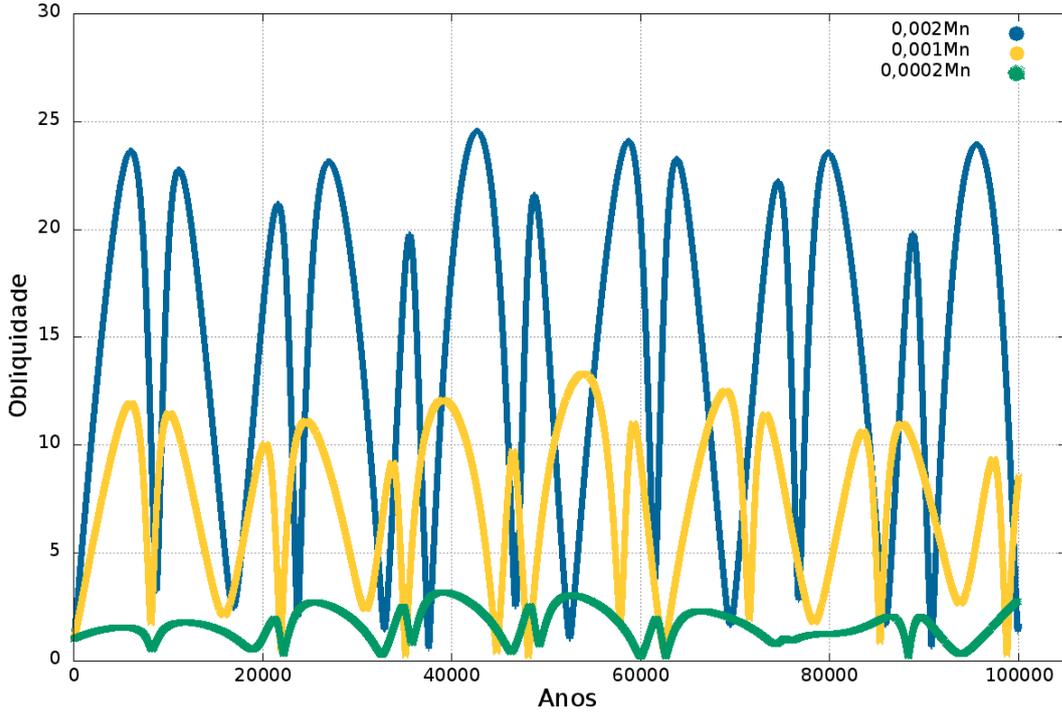


Figura 15 – Crescimento da obliquidade de Netuno em função da massa do satélite

Na integração da figura 15, os seguintes dados foram utilizados:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_0 = 2^\circ \quad (8.1) \\ h_0 = 0^\circ \quad (8.2) \\ e_\odot = 0,0094360 \quad (8.3) \\ I_\odot = 1^\circ \quad (8.4) \\ \omega_\odot = 20^\circ \quad (8.5) \\ \Omega_\odot(t) = -\frac{360^\circ}{70000} \cdot t \quad (8.6) \end{array} \right.$$

onde tomamos 70000 anos como o período de Ω_\odot quando $a_\odot = 12,5$ UA. A partir daqui, padronizamos os ângulos de Andoyer como $J = 0,2^\circ$, $g = 10^\circ$ e $l = 5^\circ$ (para a mudança do plano equatorial para o inercial - Apêndice B), se precisarmos de outros valores serão ditos.

Observamos que o satélite com os elementos orbitais da figura 15 poderia elevar a obliquidade de Netuno próximo ao seu valor atual. Não nos preocupamos nesse primeiro momento em exibir um C_2 que fosse expulso, apenas queremos mostrar que ocorre variação de ϵ quando existe um satélite orbitando Netuno. Como apenas estamos considerando perturbações solares e o achatamento de Netuno sobre o satélite, focaremos nosso estudo em corpos que, quando integrados em nossa rotina computacional, atingem pelo menos um $e_{critico}$ (valor de excentricidade para o qual consideramos que o C_2 é ejetado) ou um t_{limite} (tempo máximo que o satélite pode permanecer na integração).

Se analisarmos a equação (5.24) e a expressão (5.23), concluímos que a variação da excentricidade depende da influência do Sol sobre o movimento de translação de C_2 . Como concluído no capítulo 7, satélites com altas inclinações favorecem o surgimento da ressonância de Kozai, que tem como resultado o aumento da excentricidade do satélite, aumentando as possibilidades do mesmo ser ejetado pelo critério $e_{crítico}$.

Segue o exemplo (figura 16) de um satélite de massa igual a $0,0033M_N$ que entra em ressonância de Kozai e é descartado quando atinge $e_{crítico} = 0,9$. Novamente considerando:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_0 = 2^\circ \\ h_0 = 0^\circ \\ e_\odot = 0,0094360 \\ I_\odot = 1^\circ \\ \omega_\odot = 20^\circ \\ \Omega_\odot(t) = -\frac{360^\circ}{70000} \cdot t \end{array} \right.$$

e tomando a órbita de C_2 dada por:

$$a = 40 R_N, e = 0,8, I_e = 70^\circ, \omega_e = 206^\circ, \Omega_e = 61^\circ \text{ (plano equatorial)}$$

$$I = 70,58^\circ, \omega = 208,25^\circ, \Omega = 75,24^\circ \text{ (plano inercial)}$$

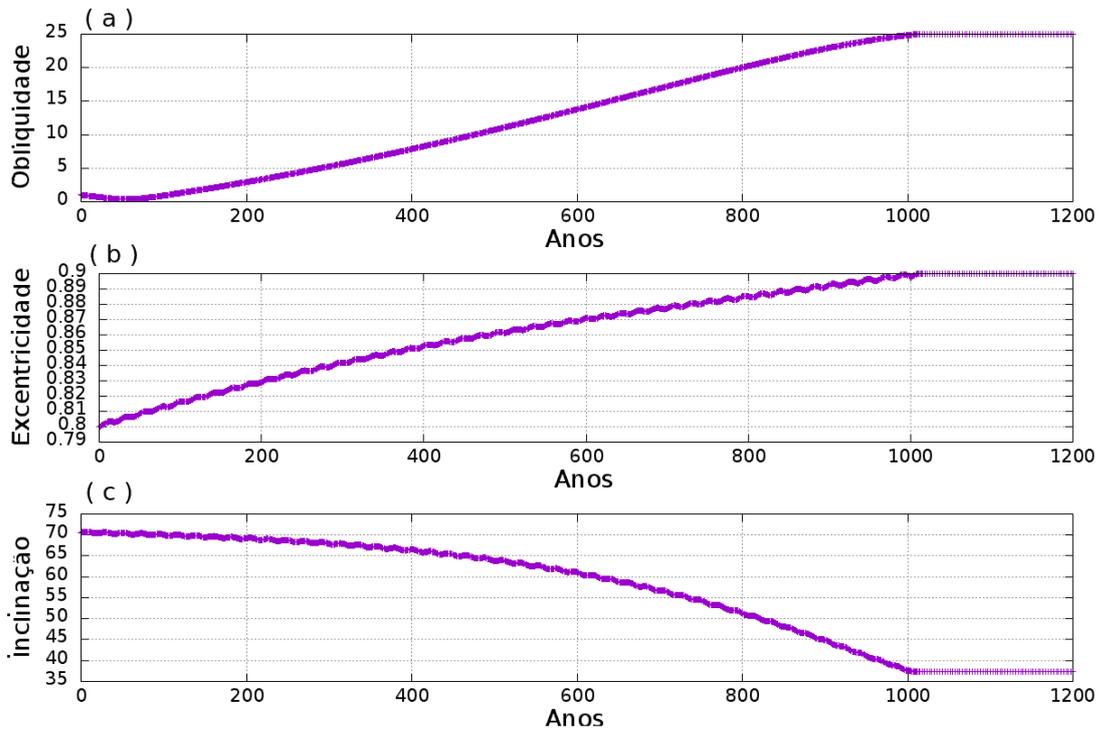


Figura 16 – Satélite sob efeito de Kozai: (a)variação da obliquidade de Netuno; (b)variação da excentricidade; (c)variação da inclinação do satélite em relação ao plano inercial.

Esse satélite é um exemplo de que um único objeto poderia elevar a obliquidade de Netuno próximo ao seu valor atual (figura 16 (a)) e que foi ejetado apenas por efeitos gravitacionais, pois estava sob efeito de Kozai (após ≈ 1000 anos orbitando Netuno, sua excentricidade atingiu $e_{\text{crítico}} = 0,9$ - figura 16 (b)).

[**Observação 6** *Analisando as figuras 16 (b) e 16 (c) temos que, se a órbita de C_2 é prógrada, no efeito de Kozai, a inclinação e a excentricidade do satélite oscilam em anti-fase. Por outro lado, se a órbita fosse retrógrada esses elementos oscilariam em fase (NOGUEIRA; BRASSER; GOMES, 2011).*]

8.2 Influência de conjuntos de satélites

A questão que se coloca agora é saber como uma sequência de satélites de massa, inclinação, excentricidade, etc, de diferentes valores podem afetar a obliquidade de Netuno e, posteriormente, escapem por efeitos gravitacionais (ao atingirem $e_{\text{crítico}}$).

Nossa proposta é aproveitar a ideia que durante a migração planetária, haviam muitos planetesimais de massas variadas que certamente “visitaram” várias vezes Netuno (em Nogueira, Brassier e Gomes (2011) esse número é aproximadamente 1.748.867, sendo que 1.683.635 são encontros hiperbólicos). No caso atual, ao contrário de Boué e Laskar (2010) no problema de Urano, podemos até admitir a presença de um ou vários destes planetesimais (satélites) com massas altas, pois isto não é problema para o caso de Netuno, porque esse não possui satélites primordiais.

Porém, vamos mostrar que mesmo os satélites de massas bem menores com condições iniciais diversas podem trazer um efeito cumulativo muito interessante. A figura 17 é um exemplo que apresentamos para ilustrar tal fato.

Assim vamos tomar arquivos como vários satélites de diferentes condições iniciais, semieixos, inclinações etc. Cada um é sorteado aleatoriamente e introduzido no sistema, fazendo-se previamente a exclusão do satélite que fora introduzido antes.

Todos os satélites têm um tempo de vida máximo (t_{limite}), porém um outro critério para desativá-lo é excluí-lo da integração sempre que a excentricidade atinge $e_{\text{crítico}}$. A entrada de um novo satélite pode ser sempre permitida pois, supomos que a interação entre objetos é desprezível no que diz respeito à variação do equador, porém em termos de

processamento numérico é imprescindível eliminar o satélite anterior para a entrada de um novo, dado o crescimento do tempo de máquina, supondo um número elevado de satélites.

Para ilustrar o que ocorre quando consideramos um conjunto de satélites perturbando o equador de Netuno, um a um, apresentamos a figura 17. Nela consideramos 3 satélites (tabela 2). Novamente, utilizamos $a_{\odot} = 12,5$ UA e

$$\left\{ \begin{array}{l} K_0 = 2^\circ \\ h_0 = 0^\circ \\ e_{\odot} = 0,0094360 \\ I_{\odot} = 1^\circ \\ \omega_{\odot} = 20^\circ \\ \Omega_{\odot}(t) = -\frac{360^\circ}{70000} \cdot t. \end{array} \right.$$

Definimos $t_{limite} = 6000$ anos e $e_{critico} = 0.9$. Observamos que o efeito é acumulativo, isto é, cada satélite contribui na variação da obliquidade partindo do valor alcançado pelo anterior.

| sat | $a(R_N)$ | e | I_e | ω_e | Ω_e | fmassa = $\frac{M_N}{M_{sat}}$ |
|-----|----------|------|-------|------------|------------|--------------------------------|
| 1° | 80 | 0,10 | 75° | 79° | 140° | 278 |
| 2° | 60 | 0,30 | 80° | 325° | 136° | 258 |
| 3° | 75 | 0,70 | 110° | 232° | 288° | 175 |

Tabela 2 – Conjunto de satélites utilizados para gerar a figura 17

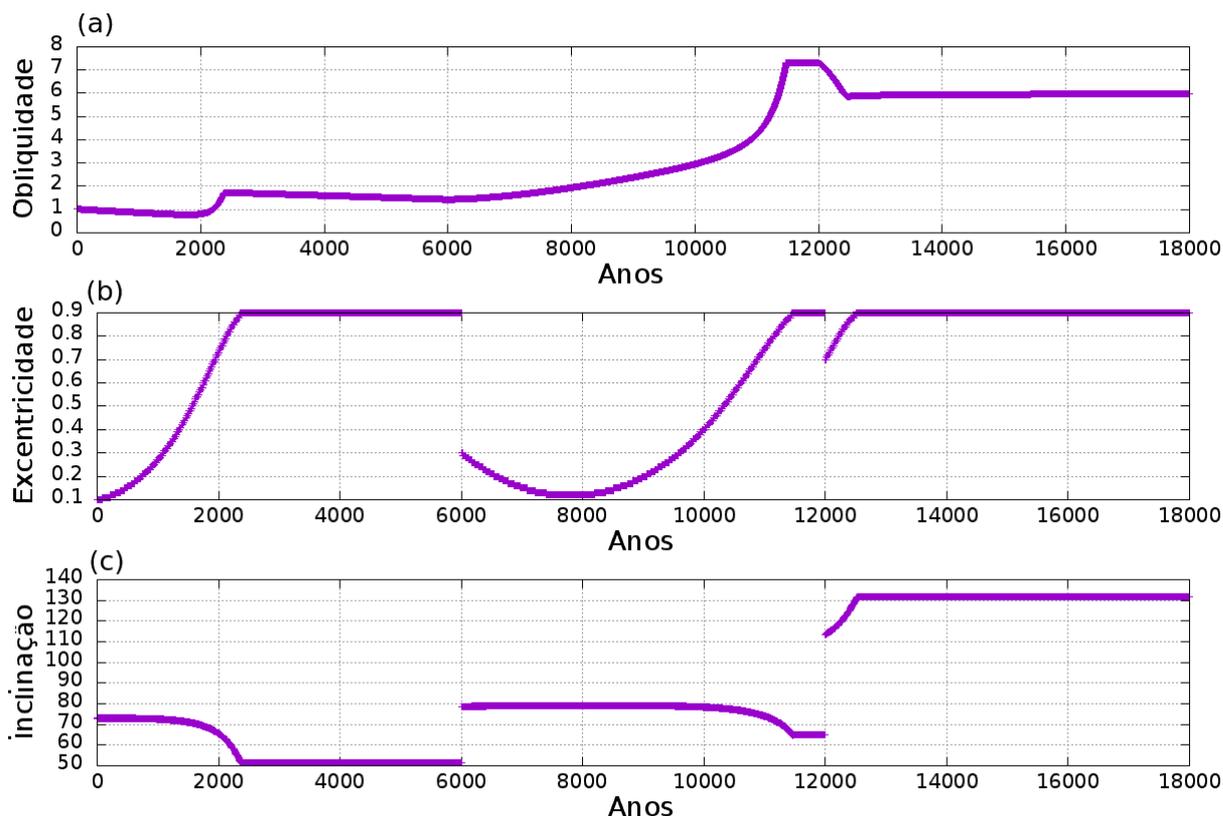


Figura 17 – Efeito acumulativo sobre a obliquidade: (a) variação da obliquidade de Netuno; (b) variação da excentricidade de cada satélite; (c) variação da inclinação de cada satélite em relação ao plano fundamental.

Chamamos a atenção para algumas características apresentadas na tabela 2 e na figura 17:

- na figura 17 (b), as partes constantes iguais a 0,9 são períodos onde a rotina de integração considera que não existe qualquer satélite orbitando Netuno;
- todos os 3 objetos entraram em ressonância de Kozai, em particular, o terceiro satélite possui uma órbita retrógrada, ilustrando a oscilação em fase entre a excentricidade e a inclinação;
- as ínfimas variações que observamos após o escape de qualquer satélite é resultado da perturbação do Sol sobre Netuno.

Visto que a perturbação de um satélite é capaz de provocar variação na obliquidade de Netuno (figura 16 (a)) e que o efeito acumulativo sobre ϵ permite que 3 satélites elevem a obliquidade a $\approx 6^\circ$ (figura 17 (a)), é intuitivo supor que existe uma possibilidade de que um conjunto com um número maior de objetos consiga elevar a obliquidade de Netuno ao seu valor atual.

Utilizando todos os testes que realizamos, estabelecemos como critérios para os parâmetros iniciais dos objetos que farão parte de um conjunto:

$$\left\{ \begin{array}{l} a \in [60 R_N, 100 R_N] \\ e \in [0,05, 0,89] \\ I_e \in [60^\circ, 120^\circ] \\ \omega_e, \Omega_e \in [0^\circ, 360^\circ] \\ \frac{M_N}{M_{sat}} \in [100, 500] \end{array} \right.$$

Fazendo uso desse sorteio randômico, apresentamos uma das comparações que realizamos. Construímos 200 conjuntos de 30 satélites e os testamos como possíveis cenários para explicar a atual obliquidade de Netuno.

Para as 200 integrações numéricas de (5.28) fixamos:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{limite} = 10000 \text{ anos} \\ e_{crítico} = 0,9 \\ K_0 = 2^\circ \\ h_0 = 100^\circ \\ I_{\odot} = 1^\circ \\ e_{\odot} = 0,00943 \\ \omega_{\odot} = 20^\circ \\ \Omega_{\odot} = -\frac{360^\circ}{70000} \cdot t \\ a_{\odot} = 12,5 \text{ UA} \end{array} \right.$$

As figuras 18, 19, 20, 21, 22, 23 e 24 são exemplos de resultados onde a obliquidade final de Netuno é um valor próximo a $28,3^\circ$ e o conjunto de 30 satélites possui comportamento desejável, isto é, a utilização de $e_{crítico}$ prevalece sobre a de t_{limite} (as descrições desses conjuntos estão no Apêndice G). Entre os 200 arquivos: 23 finalizaram com $\epsilon_f \in [23,3^\circ, 33,3^\circ]$ ($28,3^\circ \pm 5^\circ$), sendo que em 1 conjunto todos os satélites atingiram o $e_{crítico}$ e portanto foram descartados.

Portanto, nos baseando na ideia de Boué e Laskar (2010), utilizamos conjuntos de satélites para perturbar Netuno e trabalhando com um sistema médio de longo período, conseguimos mostrar vários casos onde a obliquidade de Netuno atinge $28,3^\circ$.

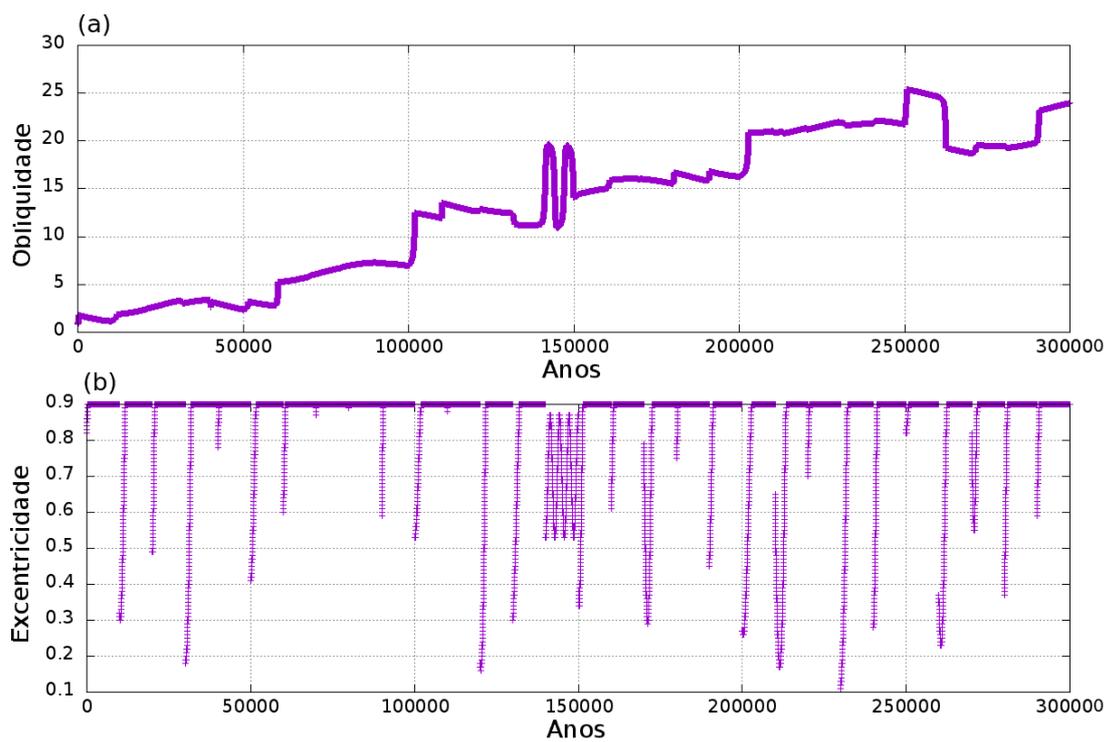


Figura 18 – 1º exemplo: (a) obliquidade de Netuno; (b) variação da excentricidade de cada satélite

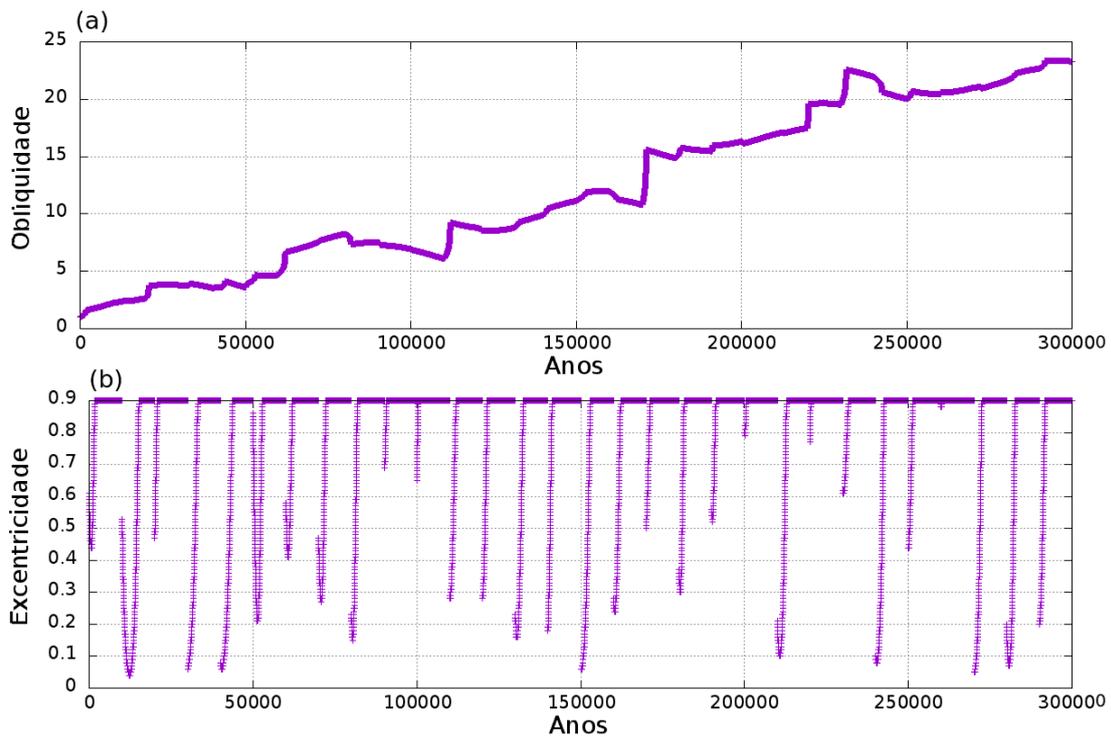


Figura 19 – 2º exemplo: (a) obliquidade de Netuno; (b) variação da excentricidade de cada satélite

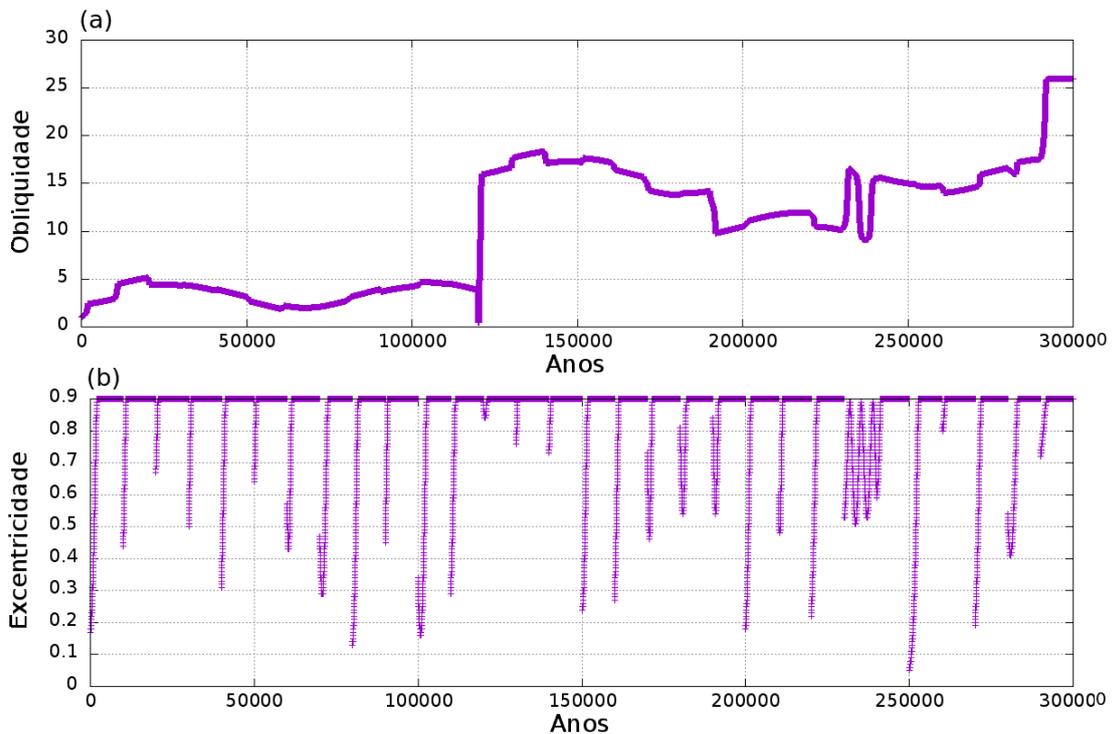


Figura 20 – 3º exemplo: (a) obliquidade de Netuno; (b) variação da excentricidade de cada satélite

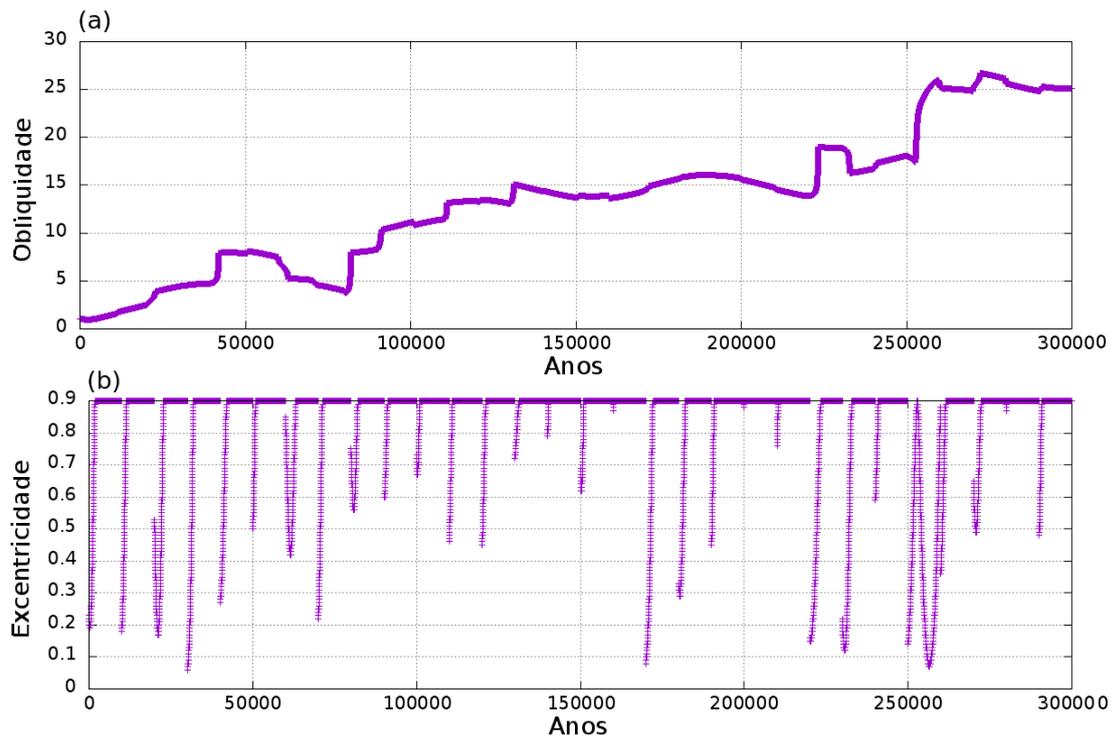


Figura 21 – 4º exemplo: (a) obliquidade de Netuno; (b) variação da excentricidade de cada satélite

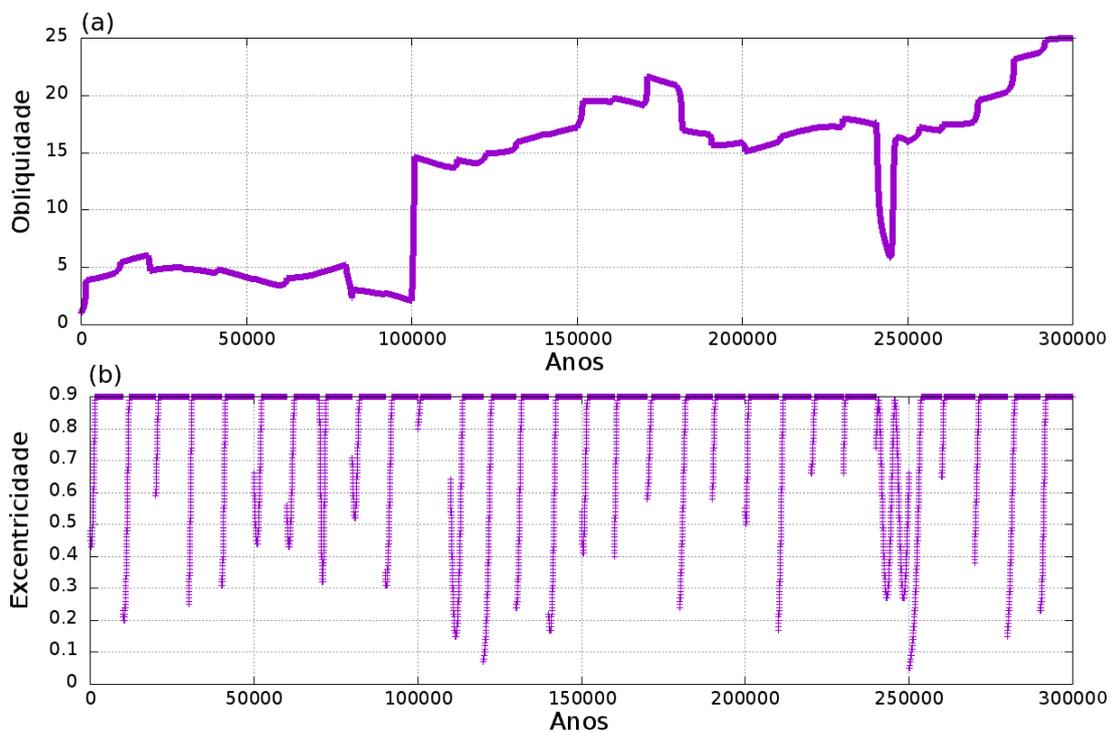


Figura 22 – 5º exemplo: (a) obliquidade de Netuno; (b) variação da excentricidade de cada satélite

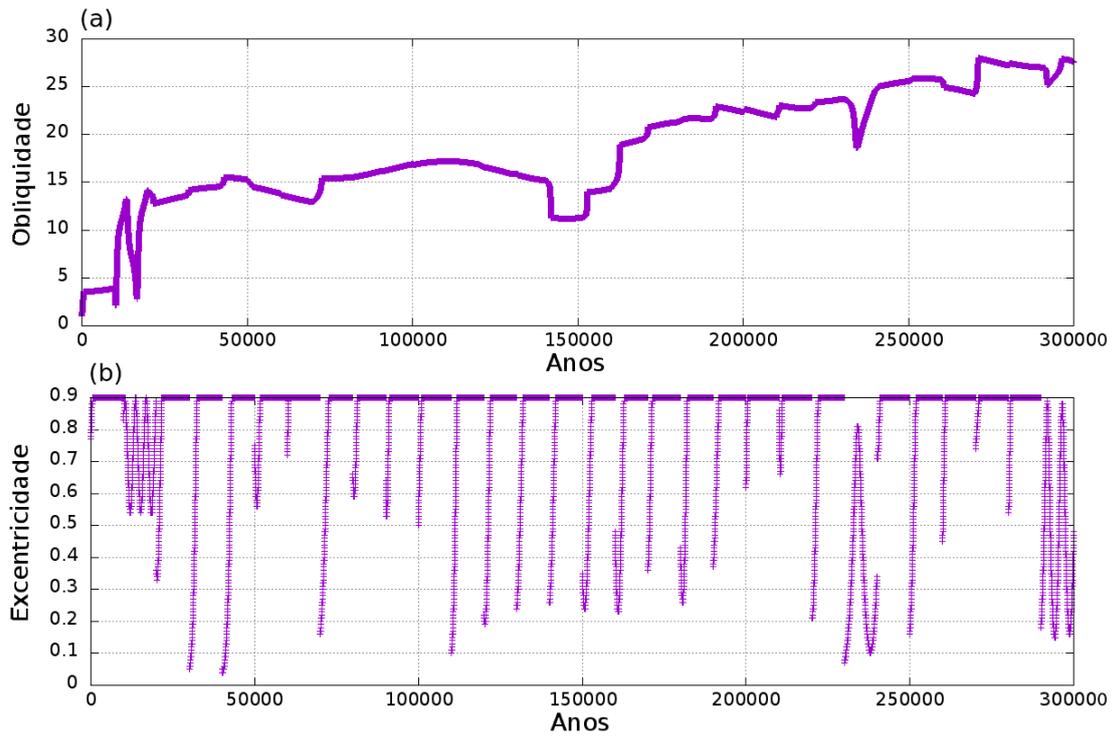


Figura 23 – 6º exemplo: (a) obliquidade de Netuno; (b) variação da excentricidade de cada satélite

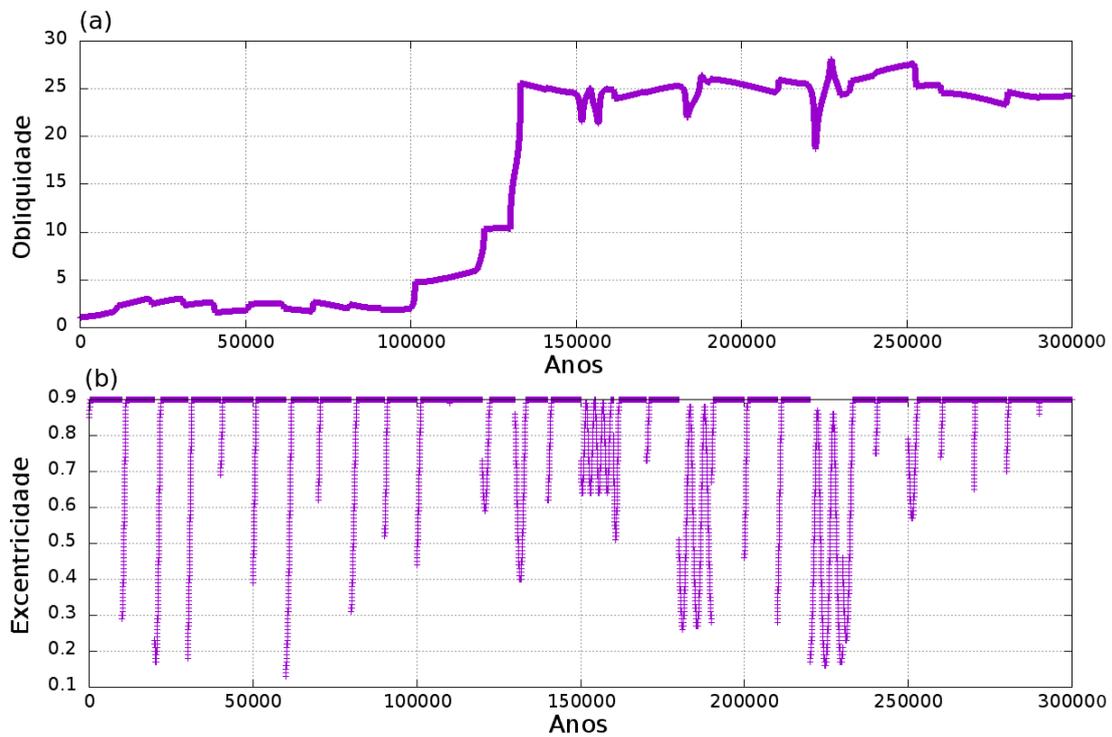


Figura 24 – 7º exemplo: (a) obliquidade de Netuno; (b) variação da excentricidade de cada satélite

9 Conclusão

Partindo da hipótese de que os planetas se originaram de um único disco primordial em cujo centro se encontrava o Sol, então seria natural que a obliquidade dos planetas seria praticamente nula, ou muito próxima deste valor. No entanto, exceto para Júpiter, as obliquidades dos demais planetas gigantes estão muito longe de zero. Desta forma é de se supor que estas obliquidades evoluíram por diferentes processos gravitacionais atingindo os atuais valores. Por exemplo, as obliquidades de Júpiter, Saturno, Urano e Netuno são respectivamente: $3, 13^\circ$, $25, 61^\circ$, $97, 86^\circ$ e $28, 31^\circ$. Exceto para Júpiter e Saturno, os demais valores para Urano e Netuno, são problemas que seguramente podem ser considerados como questões ainda em aberto.

Recentemente Boué e Laskar (2010) propuseram um modelo onde a obliquidade de Urano poderia ser explicada, por efeitos gravitacionais, devido a presença de um satélite de grande massa, que ocasionaria uma ressonância $1 : 1$ spin - órbita, envolvendo a precessão do eixo de rotação de Urano com a regressão do nodo da órbita de Urano, durante a fase de migração planetária. Embora fosse mostrado que o valor $97, 86^\circ$ pudesse ser atingido, este modelo apresenta possíveis questionamentos, pois um satélite de grande massa ($\sim 0, 01$ da massa de Urano) numa órbita a 50 raios de Urano, poderia desestabilizar o sistema de satélites regulares que Urano apresenta atualmente.

Neste trabalho, tomamos o problema de Netuno. Este planeta não apresenta nenhum satélite regular primordial, ou seja, os trabalhos de Goldreich et al. (1989) e Banfield e Murray (1992) propõem que eventuais satélites regulares de Netuno seriam destruídos se visitados ou capturados por satélites do tipo de Tritão. Desta maneira, nesse caso, não temos a preocupação de preservar possíveis satélites regulares primordiais.

Nosso modelo consiste em avaliar o efeito que seria causado na obliquidade de Netuno, quando este é visitado por um objeto C_2 (satélite temporário) de massas variadas e também com diferentes parâmetros orbitais (excentricidade, inclinação e distância).

A dinâmica de rotação é escrita em variáveis canônicas (não singulares) de Andoyer e a dinâmica translacional do satélite é dada em elementos orbitais clássicos. O objeto C_2 é também perturbado pelo Sol, o qual também contribui para a dinâmica de rotação de Netuno. O achatamento de Netuno também influi no movimento do satélite, porém o efeito principal em C_2 é causado pelo Sol, o qual induz a ressonância de Kozai. O sistema diferencial é totalmente mediado nos elementos rápidos, o que suaviza então o tempo computacional.

O modelo foi testado previamente no sistema Terra - Lua - Sol e também para Marte - Sol. Nestes testes, o movimento aparente do Sol em redor da Terra, foi tomado

usando a teoria secular de Laskar (1990).

Para o nosso problema, vamos supor conhecida a órbita aparente do Sol, e como o tempo necessário para que ocorra o efeito de um objeto C_2 sobre a obliquidade é relativamente curto, então apenas o movimento da longitude do nodo ascendente do Sol será considerada e esta foi tomada como função linear do tempo.

Como neste problema não existe a preocupação em desestabilizar satélites regulares de Netuno, pudemos testar diferentes valores de massa. Assim, conseguimos mostrar inicialmente que um único objeto C_2 (satélite) é suficiente para elevar a obliquidade para $\sim 28,31^\circ$. Porém temos interesse também em testar diferentes massas e efeito cumulativo de vários C_2 .

Uma questão importante neste trabalho é que o objeto C_2 , após causar a perturbação desejada, seja expulso do sistema, a exemplo do que é visto no trabalho de Boué e Laskar (2010). Neste problema, consideramos que sempre que a excentricidade de C_2 atinge um valor crítico ($\sim 0,9$), ou que exceda um tempo limite em torno do planeta, ele seja descartado do sistema de equações diferenciais, visto que em princípio tais objetos são satélites temporários. As excentricidades podem atingir o valor $e_{crítico}$ muito facilmente, sempre que C_2 entre na ressonância de Kozai.

Um teste aproximado foi feito no capítulo 7, para evidenciar os parâmetros orbitais propícios para que o objeto C_2 possa produzir o efeito desejado no crescimento da obliquidade. Pudemos então montar um arquivo, contendo um conjunto de satélites temporários C_2 , de diferentes massas, inclinações etc. Então dessa forma, foi possível mostrar que a ação de uma sequência de vários C_2 , pode produzir um efeito acumulativo, onde a obliquidade de Netuno pode ir crescendo até chegar no valor desejado.

Como um trabalho a ser continuado, e em andamento, é o de testar este modelo, considerando agora os encontros próximos entre o quinto ou sexto planeta (“Ice5” ou “Ice6”) com Netuno e avaliar o efeito sobre a obliquidade de Netuno. Este fenômeno ocorre nos novos modelos de migração planetária. Neste caso, o escape dos “Ice5” ou “Ice6” pode ser um fator bastante positivo.

Referências

- AGNOR, C. B.; HAMILTON, D. P. Neptune's capture of its moon Triton in a binary–planet gravitational encounter. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 441, n. 7090, p. 192, 2006.
- ARMSTRONG, J. et al. Effects of extreme obliquity variations on the habitability of exoplanets. *Astrobiology*, Mary Ann Liebert, Inc. 140 Huguenot Street, 3rd Floor New Rochelle, NY 10801 USA, v. 14, n. 4, p. 277–291, 2014.
- BANFIELD, D.; MURRAY, N. A dynamical history of the inner Neptunian satellites. *Icarus*, Elsevier, v. 99, n. 2, p. 390–401, 1992.
- BOUÉ, G.; LASKAR, J. A collisionless scenario for Uranus tilting. *The Astrophysical Journal Letters*, IOP Publishing, v. 712, n. 1, p. L44, 2010.
- BRAZ, G. A. *Iniciação ao estudo da dinâmica de rotação de um satélite em variáveis de Andoyer*. 31 p. Monografia (Trabalho de conclusão de curso, bacharelado - Física) — Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2016. Disponível em: <<<http://hdl.handle.net/11449/136512>>>.
- BROUWER, D.; CLEMENCE, G. M. *Methods of celestial mechanics*. [S.l.]: Elsevier, 1961.
- BRUNINI, A. A possible constraint to Uranus' great collision. *Planetary and Space Science*, Elsevier, v. 43, n. 8, p. 1019–1021, 1995.
- BRUNINI, A.; PARISI, M. G.; TANCREDI, G. Constraints to Uranus' great collision iii: The origin of the outer satellites. *Icarus*, Elsevier, v. 159, n. 1, p. 166–177, 2002.
- CHENG, W.; LEE, M. H.; PEALE, S. Complete tidal evolution of Pluto–Charon. *Icarus*, Elsevier, v. 233, p. 242–258, 2014.
- DEPRIT, A. Free rotation of a rigid body studied in the phase plane. *American Journal of Physics*, v. 35, p. 424–428, 1967.
- D'HOEDT, S.; LEMAITRE, A. The spin-orbit resonant rotation of Mercury: a two degree of freedom Hamiltonian model. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Springer, v. 89, n. 3, p. 267–283, 2004.
- GOLDREICH, P. et al. Neptune's story. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 245, n. 4917, p. 500–504, 1989.
- HAMILTON, D. P.; WARD, W. R. Tilting Saturn. ii. Numerical model. *The Astronomical Journal*, IOP Publishing, v. 128, n. 5, p. 2510, 2004.
- HENRARD, J.; SCHWANEN, G. Rotation of synchronous satellites application to the Galilean satellites. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Springer, v. 89, n. 2, p. 181–199, 2004.
- KINOSHITA, H. First-order perturbations of the two finite body problem. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, v. 24, p. 423, 1972.

- KORYCANSKY, D. et al. One-dimensional calculations of a large impact on Uranus. *Icarus*, Elsevier, v. 84, n. 2, p. 528–541, 1990.
- LASKAR, J. The chaotic motion of the solar system: A numerical estimate of the size of the chaotic zones. *Icarus*, Elsevier, v. 88, n. 2, p. 266–291, 1990.
- LASKAR, J.; JOUTEL, F.; ROBUTEL, P. Stabilization of the Earth's obliquity by the Moon. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 361, n. 6413, p. 615, 1993.
- MANA, M. R. *Possíveis ressonâncias nos sistemas de Marte-Phobos e Netuno-Triton-Proteus*. 103 p. Dissertação (mestrado) — Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2003. Disponível em: <<<http://hdl.handle.net/11449/91921>>>.
- MORBIDELLI, A. et al. Explaining why the uranian satellites have equatorial prograde orbits despite the large planetary obliquity. *Icarus*, Elsevier, v. 219, n. 2, p. 737–740, 2012.
- NOGUEIRA, E.; BRASSER, R.; GOMES, R. Reassessing the origin of Triton. *Icarus*, Elsevier, v. 214, n. 1, p. 113–130, 2011.
- OLIVEIRA, M. G. *Escolha de um sistema referencial para estudo da rotação de um sistema quase binário*. Relatório apresentado ao Departamento de Estatística, Matemática Aplicada e Computação, IGCE, UNESP - Campus Rio Claro, como parte do projeto de iniciação científica, processo nº 1313/2013. Orientador Prof. Dr. Tadashi Yokoyama.
- OLIVEIRA, M. G. *Potencial de Dois Corpos Finitos Achatados: Iniciação ao Uso de Variáveis de Andoyer*. 2016. FAPESP - Processo 2015/01249-8, orientador Prof. Dr. Tadashi Yokoyama.
- PARISI, M. G.; BRUNINI, A. Constraints to Uranus' great collision—ii. *Planetary and space science*, Elsevier, v. 45, n. 2, p. 181–187, 1997.
- TISSERAND, F. *Traite de mecanique celeste, tome 2. Figure des corps celestes*. Gauthier-Villars, 1891.
- TROTТА, L. D. S. *Sobre a dinâmica de rotação de um planeta através de um sistema médio*. 32 p. Monografia (Trabalho de conclusão de curso (bacharelado - Física)) — Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2013. Disponível em: <<<http://hdl.handle.net/11449/121631>>>.
- TROTТА, L. D. S.; OLIVEIRA, M. G. *Introdução à Dinâmica Secular Rotacional de Sistemas Quase Binários: Plutão - Caronte*. 2015. PIBIC - Processo 104427/2015-9, orientador Prof. Dr. Tadashi Yokoyama.
- WARD, W. R. Climatic variations on Mars: 1. Astronomical theory of insolation. *Journal of Geophysical Research*, Wiley Online Library, v. 79, n. 24, p. 3375–3386, 1974.
- WARD, W. R.; HAMILTON, D. P. Tilting Saturn. i. Analytic model. *The Astronomical Journal*, IOP Publishing, v. 128, n. 5, p. 2501, 2004.
- YOKOYAMA, T. Dynamics of some fictitious satellites of Venus and Mars. *Planetary and Space Science*, Elsevier, v. 47, n. 5, p. 619–627, 1999.

YOKOYAMA, T. Possible effects of secular resonances in Phobos and Triton. *Planetary and Space Science*, Elsevier, v. 50, n. 1, p. 63–77, 2002.

YSEBOODT, M.; MARGOT, J.-L. Evolution of Mercury's obliquity. *Icarus*, Elsevier, v. 181, n. 2, p. 327–337, 2006.

Apêndices

APÊNDICE A – Variáveis canônicas de Andoyer

Nesse apêndice apresentamos o estudo descrito em Deprit (1967) para a introdução das variáveis canônicas de Andoyer e do plano perpendicular ao momento angular.

(a) Relação diferencial em um triângulo esférico.

Antes de construirmos as variáveis canônicas de Andoyer, apresentemos uma relação diferencial da trigonometria esférica que será utilizada posteriormente.

Dado um triângulo esférico $\triangle ABC$, sejam a , b e c seus “lados” (arcos) e denotemos por \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} seus ângulos internos, como apresentado na figura A a seguir.

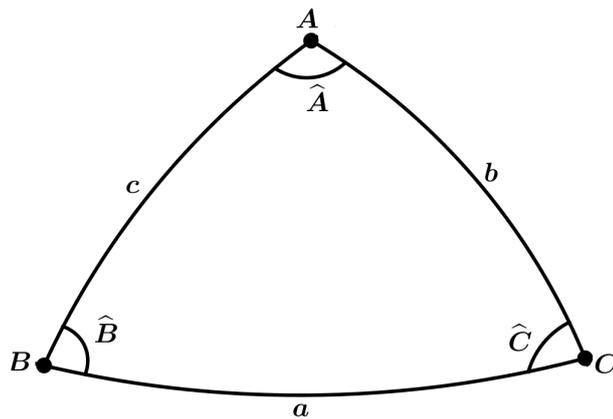


Figura 25 – Triângulo esférico

Temos as seguintes relações

$$\cos(a) = \cos(b) \cos(c) + \sin(b) \sin(c) \cos(\hat{A}) \quad (\text{A.1})$$

$$\sin(a) \sin(\hat{B}) = \sin(c) \cos(b) - \cos(c) \sin(b) \cos(\hat{A}) \quad (\text{A.2})$$

$$\sin(a) \sin(\hat{C}) = \sin(b) \cos(c) - \cos(b) \sin(c) \cos(\hat{A}) \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\sin(a)}{\sin(\hat{A})} = \frac{\sin(b)}{\sin(\hat{B})} = \frac{\sin(c)}{\sin(\hat{C})}. \quad (\text{A.4})$$

Diferenciando a equação (A.1) temos

$$\begin{aligned}
 -\sin(a)da &= \left[-\sin(b)\cos(c) + \cos(b)\sin(c)\cos(\hat{A}) \right] db + \\
 &+ \left[-\sin(c)\cos(b) + \cos(c)\sin(b)\cos(\hat{A}) \right] dc + \left[-\sin(\hat{A})\sin(b)\sin(c) \right] d\hat{A}, \quad (\text{A.5})
 \end{aligned}$$

aplicando (A.2), (A.3) e (A.4) obtemos

$$da = \cos(\hat{C})db + \cos(\hat{B})dc + \sin(b)\sin(\hat{C})d\hat{A}. \quad (\text{A.6})$$

(b) As variáveis canônicas de Andoyer.

Sejam dois sistemas de coordenadas denominados $OXYZ$ e $Oxyz$, com origem no mesmo ponto O , e \overleftrightarrow{ON} a interseção entre os planos OXY e Oxy (figura 26 extraída de Deprit (1967)). A atitude de $oxyz$ com relação a $OXYZ$ é determinada pelos ângulos de Euler (ϕ, θ, ψ) .

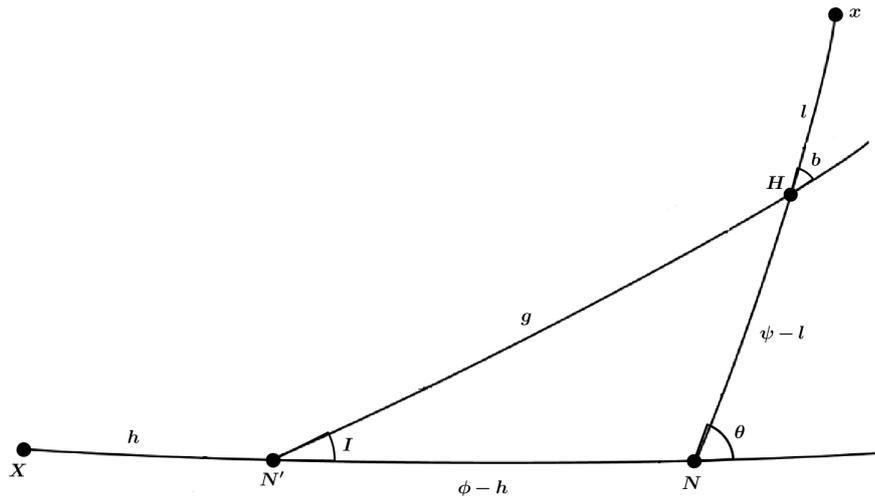


Figura 26 – Atitude de $oxyz$ com relação a $OXYZ$

Seja $ON'H$ um plano que intercepta OXY ao longo da reta ON' e o plano Oxy sobre a reta OH . Definimos:

- o ângulo $h = X\hat{O}N'$;
- o ângulo I como a inclinação do plano $ON'H$ no plano OXY ;
- o ângulo $g = N'\hat{O}H$;
- o ângulo b como a inclinação do plano Oxy no plano $ON'H$;
- o ângulo $l = H\hat{O}x$.

A ideia é definir uma transformação canônica

$$(\phi, \theta, \psi, p_\phi, p_\theta, p_\psi) \longrightarrow (l, g, h, L, H, G)$$

em que $(p_\phi, p_\theta, p_\psi)$ e (L, H, G) são os momentos conjugados das coordenadas angulares (ϕ, θ, ψ) e (l, g, h) , respectivamente.

Assumimos

$$H = G \cos(I) \tag{A.7}$$

$$L = G \cos(b), \tag{A.8}$$

isto é, como $I, b \in [0, \pi)$, I e b são funções implícitas e bem definidas de (L, G, H) .

Supomos que das relações trigonométricas para o triângulo esférico $\triangle N'HN$, os ângulos $\phi - h$, g e $\psi - l$ são unicamente determinados por I , θ e b (e vice-versa), assim

$$l = l(I, b, \theta, \psi) \tag{A.9}$$

$$h = h(I, b, \theta, \phi) \tag{A.10}$$

$$g = g(I, b, \theta). \tag{A.11}$$

Para definir uma transformação canônica é suficiente que seja satisfeita a relação

$$Ldl + Gdg + Hdh = p_\phi d\phi + p_\theta d\theta + p_\psi d\psi. \tag{A.12}$$

A expressão (A.6) aplicada ao triângulo $\triangle N'HN$

$$dg = \cos(I)d(\phi - h) + \cos(b)d(\psi - l) + \sin(\psi - l) \sin(b)d(\pi - \theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dg = -\sin(\psi - l) \sin(b)d\theta + \cos(I)d(\phi - h) + \cos(b)d(\psi - l). \tag{A.13}$$

Aplicando (A.13) no membro esquerdo de (A.12) e utilizando (A.7) e (A.8) teremos

$$\begin{aligned} Ldl + Gdg + Hdh &= \\ &= Ldl + G[-\sin(\psi - l) \sin(b)d\theta + \cos(I)d(\phi - h) + \cos(b)d(\psi - l)] + Hdh = \\ &= G \cos(b)dl + G[-\sin(\psi - l)] \sin(b)d\theta + G \cos(I)d\phi - G \cos(I)dh + \\ &\quad + G \cos(b)\psi - G \cos(b)dl + G \cos(I)dh = \\ &= G \sin(l - \psi) \sin(b)d\theta + G \cos(I)d\phi + G \cos(b)\psi = \\ &= G \sin(l - \psi) \sin(b)d\theta + Hd\phi + L\psi. \end{aligned} \tag{A.14}$$

Comparando (A.14) com o membro direito de (A.12), concluímos que

$$L = p_\psi \tag{A.15}$$

$$H = p_\phi \tag{A.16}$$

$$G = \frac{p_\theta}{\sin(b) \sin(l - \psi)}. \tag{A.17}$$

Ainda não podemos afirmar que as equações (A.9), (A.10), (A.11), (A.15), (A.16) e (A.17) definem uma transformação canônica do espaço $(\phi, \theta, \psi, p_\phi, p_\theta, p_\psi)$ para o espaço (l, g, h, L, H, G) , uma vez que ainda existe dependência nos ângulos I e b .

Observemos a expressão de G , (A.17),

$$G = \frac{p_\theta}{\sin(b) \sin(l - \psi)}.$$

Já sabemos que $l - \psi$ é determinado por I , b e θ , ou seja,

$$G = G(p_\theta, \theta, I, b),$$

mas por (A.7) e (A.8)

$$\begin{cases} I = \arccos\left(\frac{H}{G}\right) = \arccos\left(\frac{p_\phi}{G}\right) \Rightarrow I = I(p_\phi, G) \\ b = \arccos\left(\frac{L}{G}\right) = \arccos\left(\frac{p_\psi}{G}\right) \Rightarrow b = b(p_\psi, G) \end{cases}$$

portanto

$$G = G(p_\phi, p_\psi, p_\theta, \theta, G)$$

isolando a variável G , concluímos que

$$\begin{cases} G = G(p_\phi, p_\psi, p_\theta, \theta) \\ I = I(p_\phi, p_\psi, p_\theta, \theta) \\ b = b(p_\phi, p_\psi, p_\theta, \theta) \end{cases}$$

Logo, podemos afirmar que construímos uma transformação canônica entre os espaços $(\phi, \theta, \psi, p_\phi, p_\theta, p_\psi)$ e (l, g, h, L, H, G) , de modo que

$$\begin{cases} L = L(p_\phi, p_\psi, p_\theta, \theta) \\ H = H(p_\phi, p_\psi, p_\theta, \theta) \\ G = G(p_\phi, p_\psi, p_\theta, \theta) \\ l = l(p_\phi, p_\psi, p_\theta, \theta, \psi) \\ h = h(p_\phi, p_\psi, p_\theta, \theta, \phi) \\ g = g(p_\phi, p_\psi, p_\theta, \theta) \end{cases} \tag{A.18}$$

(c) Plano perpendicular ao momento angular de rotação do planeta.

Mostremos que a variável canônica G é o momento angular do corpo trabalhado e que o plano NHN é o plano perpendicular ao vetor momento angular.

Consideremos que o corpo está rotacionando, livre da influência de torques externos. Seja $OXYZ$ o sistema inercial e $Oxyz$ o sistema de eixos principais do corpo. Reafirmamos que a atitude do sistema $Oxyz$ com respeito ao sistema $OXYZ$ é determinada pelos ângulos de Euler (ϕ, θ, ψ) . Denotemos por (A, B, C) os momentos principais de inércia e por $\vec{\omega}_{Oxyz} = (p, q, r)$ as componentes no sistema $Oxyz$ da velocidade de rotação do corpo com respeito ao sistema $OXYZ$. Temos da Mecânica Analítica

$$\begin{cases} p = \sin(\theta) \sin(\psi) \frac{d\phi}{dt} + \cos(\psi) \frac{d\theta}{dt} & \text{(A.19)} \\ q = \sin(\theta) \cos(\psi) \frac{d\phi}{dt} - \sin(\psi) \frac{d\theta}{dt} & \text{(A.20)} \\ r = \cos(\theta) \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} & \text{(A.21)} \end{cases}$$

A lagrangiana que descreve o movimento livre com relação ao sistema $OXYZ$ é

$$\mathcal{L} = \frac{\vec{\omega}_{Oxyz}^T (I \vec{\omega}_{Oxyz})}{2} = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \quad \text{(A.22)}$$

assim

$$\begin{cases} p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = (Ap \sin(\psi) + Bq \cos(\psi)) \sin(\theta) + Cr \cos(\theta) & \text{(A.23)} \\ p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = Ap \sin(\psi) - Bq \cos(\psi) & \text{(A.24)} \\ p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = Cr & \text{(A.25)} \end{cases}$$

Obtemos das equações anteriores

$$Ap = \left[\frac{p_\phi - p_\psi \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \right] \sin(\psi) + p_\theta \cos(\psi) \quad \text{(A.26)}$$

$$Bq = \left[\frac{p_\phi - p_\psi \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \right] \cos(\psi) - p_\theta \sin(\psi) \quad \text{(A.27)}$$

$$Cr = p_\psi \quad \text{(A.28)}$$

Como

$$p_\psi = L = G \cos(b)$$

$$p_\phi = H = G \cos(I)$$

podemos reescrever as equações anteriores como

$$\left\{ \begin{array}{l} Ap = G \left[\frac{\cos(I) - \cos(b) \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \sin(\psi) + \sin(b) \sin(l - \psi) \cos(\psi) \right] \\ Bq = G \left[\frac{\cos(I) - \sin(b) \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \cos(\psi) - \sin(b) \sin(l - \psi) \sin(\psi) \right] \\ Cr = G \cos(b) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(A.29)} \\ \text{(A.30)} \\ \text{(A.31)} \end{array}$$

Do triângulo esférico $\triangle N'HN$ temos que

$$\begin{aligned} \cos(I) &= -\cos(b) \cos(\pi - \theta) + \sin(b) \sin(\pi - \theta) \sin(\psi - l) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos(I) = \cos(b) \cos(\theta) + \sin(b) \sin(\theta) \sin(\psi - l) \end{aligned} \quad \text{(A.32)}$$

Aplicando (A.32) em (A.29) e (A.30), temos

$$\left\{ \begin{array}{l} Ap = G \sin(b) \sin(l) \\ Bq = G \sin(b) \cos(l) \\ Cr = G \cos(b) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(A.33)} \\ \text{(A.34)} \\ \text{(A.35)} \end{array}$$

Temos que a definição do vetor momento angular no sistema $Oxyz$ é $(\overrightarrow{Mang}_{Oxyz})$ é

$$\overrightarrow{Mang}_{Oxyz} = I\omega_{Oxyz},$$

ou seja,

$$\overrightarrow{Mang}_{Oxyz} = (Ap, Bq, Cr) = (G \sin(b) \sin(l), G \sin(b) \cos(l), G \cos(b))$$

logo, o momento angular é

$$\|\overrightarrow{Mang}_{Oxyz}\| = \sqrt{[G \sin(b) \sin(l)]^2 + [G \sin(b) \cos(l)]^2 + [G \cos(b)]^2} = G, \quad \text{(A.36)}$$

isto é, a variável canônica G é momento angular do corpo.

Por fim, mostremos que o plano $N'HN$ é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{Mang}_{Oxyz}$. Para tanto, supomos um sistema de eixos $OX'Y'Z'$ de modo que o plano $OX'Y'$ seja $N'HN$ e $\overrightarrow{OX'}$ coincida com a reta $\overleftarrow{ON'}$.

Para qualquer vetor \vec{v} temos que

$$\begin{aligned} \vec{v}_{Oxyz} &= M_3(l) \cdot M_1(b) \cdot M_3(g) \cdot \vec{v}_{OX'Y'Z'} \Rightarrow \\ &\Rightarrow M_3(g)^{-1} \cdot M_1(b)^{-1} \cdot M_3(l)^{-1} \cdot \vec{v}_{Oxyz} = \vec{v}_{OX'Y'Z'} \end{aligned} \quad \text{(A.37)}$$

em que

$$M_3(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M_3(\varphi)^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$M_1(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \Rightarrow M_1(\varphi)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

Tomando $\vec{v}_{Oxyz} = \overrightarrow{Mang}_{Oxyz}$ e aplicando (A.37), concluímos que

$$\overrightarrow{Mang}_{OX'Y'Z'} = (0, 0, G). \quad (\text{A.38})$$

Ou seja, o vetor $\overrightarrow{Mang}_{OX'Y'Z'}$ é paralelo ao eixo OZ' e portanto perpendicular ao plano $OX'Y'$, isto é, ortogonal ao plano $N'HN$.

Pelo triângulo esférico ABD, temos que

$$\begin{aligned}
 \triangleright \cos(\pi - I_{equat}) &= -\cos(K)\cos(J) + \sin(K)\sin(J)\cos(g) \Rightarrow \\
 \Rightarrow -\cos(I_{equat}) &= -\cos(K)\cos(J) + \sin(K)\sin(J)\cos(g) \Rightarrow \\
 \Rightarrow \cos(I_{equat}) &= \cos(K)\cos(J) - \sin(K)\sin(J)\cos(g). \tag{B.1}
 \end{aligned}$$

Assim, como um ângulo de inclinação pertence ao intervalo $[0, \pi)$,

$$I_{equat} = \arccos[\cos(K)\cos(J) - \sin(K)\sin(J)\cos(g)]. \tag{B.2}$$

- Ω_{equat} : o nodo do equador no plano inercial.

Do triângulo esférico ABD

$$\begin{aligned}
 \triangleright \frac{\sin(J)}{\sin(\Omega_{equat} - h)} &= \frac{\sin(\pi - I_{equat})}{\sin(g)} = \frac{\sin(I_{equat})}{\sin(g)} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \sin(\Omega_{equat} - h) &= \frac{\sin(J)\sin(g)}{\sin(I_{equat})} \tag{B.3}
 \end{aligned}$$

$$\triangleright \cos(J) = -\cos(\pi - I_{equat})\cos(K)\sin(\pi - I_{equat})\sin(K)\cos(\Omega_{equat} - h) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(J) = -[-\cos(I_{equat})\cos(K)] + \sin(I_{equat})\sin(K)\cos(\Omega_{equat} - h) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \sin(I_{equat})\sin(K)\cos(\Omega_{equat} - h) &= \cos(J) - \cos(I_{equat})\cos(K) \Rightarrow \\
 \Rightarrow \cos(\Omega_{equat} - h) &= \frac{\cos(J) - \cos(I_{equat})\cos(K)}{\sin(I_{equat})\sin(K)}. \tag{B.4}
 \end{aligned}$$

Logo, utilizando as equações (B.2), (B.3) e (B.4), determinamos o ângulo $\Omega_{equat} - h$ e também

$$\Omega_{equat} = h + \arctan\left(\frac{\sin(J)\sin(g)\sin(K)}{\cos(J) - \cos(I_{equat})\cos(K)}\right). \tag{B.5}$$

- Arco BD.

Segue do triângulo ABD

$$\triangleright \frac{\sin(K)}{\sin(BD)} = \frac{\sin(J)}{\sin(\Omega_{equat} - h)} = \frac{\sin(\pi - I_{equat})}{\sin(g)} \Rightarrow \sin(BD) = \frac{\sin(K)\sin(g)}{\sin(I_{equat})} \tag{B.6}$$

ou

$$\sin(BD) = \frac{\sin(K)\sin(\Omega_{equat} - h)}{\sin(J)} \tag{B.7}$$

$$\triangleright \cos(BD) = \cos(\Omega_{equat} - h)\cos(g) + \sin(\Omega_{equat} - h)\sin(g)\cos(K). \tag{B.8}$$

Portanto, aplicando (B.5) e/ou (B.2)

$$BD = \arctan \left\{ \frac{\sin(K) \sin(g)}{\sin(I_{equat}) [\cos(\Omega_{equat} - h) \cos(g) + \sin(\Omega_{equat} - h) \sin(g) \cos(K)]} \right\} \quad (\text{B.9})$$

ou

$$BD = \arctan \left\{ \frac{\sin(K) \sin(\Omega_{equat} - h)}{\sin(J) [\cos(\Omega_{equat} - h) \cos(g) + \sin(\Omega_{equat} - h) \sin(g) \cos(K)]} \right\}. \quad (\text{B.10})$$

- I : inclinação da órbita no plano inercial.

Do triângulo BCF.

$$\triangleright \cos(\pi - I) = -\cos(I_{equat}) \cos(I_e) + \sin(I_{equat}) \sin(I_e) \cos(BD + l + \Omega_e - 2\pi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\cos(I) = -\cos(I_{equat}) \cos(I_e) + \sin(I_{equat}) \sin(I_e) \cos(BD + l + \Omega_e) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(I) = \cos(I_{equat}) \cos(I_e) - \sin(I_{equat}) \sin(I_e) \cos(BD + l + \Omega_e). \quad (\text{B.11})$$

De (B.11) e utilizando (B.2) e (B.9) ou (B.10)

$$I = \arccos[\cos(I_{equat}) \cos(I_e) - \sin(I_{equat}) \sin(I_e) \cos(BD)]. \quad (\text{B.12})$$

- Ω : nodo do plano orbital no inercial.

Analisando o triângulo BCF.

$$\triangleright \frac{\sin(I_e)}{\sin(\Omega - \Omega_{equat})} = \frac{\sin(\pi - I)}{\sin(BD + l + \Omega_e - 2\pi)} = \frac{\sin(I)}{\sin(BD + l + \Omega_e)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(\Omega - \Omega_{equat}) = \frac{\sin(I_e) \sin(BD + l + \Omega_e)}{\sin(I)} \quad (\text{B.13})$$

$$\triangleright \cos(I_e) = -\cos(\pi - I) \cos(I_{equat}) + \sin(\pi - I) \sin(I_{equat}) \cos(\Omega - \Omega_{equat}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(I_e) = \cos(I) \cos(I_{equat}) + \sin(I) \sin(I_{equat}) \cos(\Omega - \Omega_{equat}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\Omega - \Omega_{equat}) = \frac{\cos(I_e) - \cos(I) \cos(I_{equat})}{\sin(I) \sin(I_{equat})}. \quad (\text{B.14})$$

Usando (B.9) ou (B.10) temos

$$\Omega = \Omega_{equat} + \arctan \left(\frac{\sin(I_e) \sin(BD + l + \Omega_e) \sin(I_{equat})}{\cos(I_e) - \cos(I) \cos(I_{equat})} \right). \quad (\text{B.15})$$

- ω : pericentro da órbita de M_i em relação ao inercial.

Do triângulo esférico BCF.

$$\begin{aligned} \triangleright \frac{\sin(I_{equat})}{\sin(\omega - \omega_e)} &= \frac{\sin(I_e)}{\sin(\Omega - \Omega_{equat})} = \frac{\sin(\pi - I)}{\sin(BD + l + \Omega_e - 2\pi)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sin(\omega - \omega_e) = \frac{\sin(I_{equat}) \sin(\Omega - \Omega_e)}{\sin(I_e)} \end{aligned} \quad (B.16)$$

ou

$$\sin(\omega - \omega_e) = \frac{\sin(BD + l + \Omega_e) \sin(I_{equat})}{\sin(I)} \quad (B.17)$$

$$\begin{aligned} \triangleright \cos(\omega - \omega_e) &= \cos(\Omega - \Omega_{equat}) \cos(BD + l + \Omega_e) + \\ &+ \sin(\Omega - \Omega_{equat}) \sin(BD + l + \Omega_e) \cos(I_{equat}) \end{aligned} \quad (B.18)$$

ou

$$\begin{aligned} \cos(I_{equat}) &= -\cos(\pi - I) \cos(I_e) + \sin(\pi - I) \sin(I_e) \cos(\omega - \omega_e) \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos(I_{equat}) &= \cos(I) \cos(I_e) + \sin(I) \sin(I_e) \cos(\omega - \omega_e) \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos(\omega - \omega_e) &= \frac{\cos(I_{equat}) - \cos(I) \cos(I_e)}{\sin(I) \sin(I_e)}. \end{aligned} \quad (B.19)$$

Utilizando um par de seno e cosseno do ângulo $\omega - \omega_e$ e as outras relações necessárias, temos que

$$\omega = \omega_e + \arctan(Y) \quad (B.20)$$

onde Y é o resultado da divisão da expressão (B.16) por (B.18), ou (B.16) por (B.19), ou (B.17) por (B.18) ou (B.17) por (B.19).

Assim, obtemos as equações (B.12), (B.15) e (B.20) que transformam elementos referidos no plano do equador para variáveis com relação ao plano inercial.

APÊNDICE C – Equação do movimento do satélite

Nesse apêndice desenvolveremos as equações (4.1) e (4.2) apresentadas no movimento translacional do satélite com relação ao sistema equatorial F .

Temos que o planeta achatado e o Sol exercem sobre o satélite forças de atrações gravitacionais, assim a força que resulta sobre C_2 é

$$\vec{F}_{sat} = \vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{3,2} \quad (C.1)$$

em que

- $\vec{F}_{1,2}$ é a força que o planeta exerce sobre o satélite, esse último visto como uma massa pontual;
- $\vec{F}_{3,2}$ é a força que o Sol exerce sobre o satélite, nesse caso os dois corpos são tratados como pontuais.

Façamos os cálculos de $\vec{F}_{j,2}$, $j=1,3$, separados.

(a) $\vec{F}_{1,2}$.

Temos que o potencial gravitacional entre o planeta achatado e o satélite visto do sistema F é dado por (BROUWER; CLEMENCE, 1961; OLIVEIRA,):

$$U = \frac{k^2 M_p}{r} + \frac{k^2}{r^3} \left[\frac{1}{2}(A + B + C) - \frac{3}{2} \frac{Ax^2 + By^2 + Cz^2}{r^2} \right], \quad (C.2)$$

em que $\vec{r}_F = (x, y, z)$ e (A,B,C) são os momentos principais de inércia do planeta. Utilizando a hipótese de que o planeta possui uma simetria axial ($A = B$) temos que

$$U = \frac{k^2 M_p}{r} + \frac{k^2}{r^3} \left[A + \frac{C}{2} - \frac{3}{2} \frac{A(x^2 + y^2) + Cz^2}{r^2} \right]. \quad (C.3)$$

Como a força que age sobre o satélite devido à presença do planeta é dada por

$$\vec{F}_{1,2} = M_{sat} \frac{\partial U}{\partial (x, y, z)}, \quad (C.4)$$

assim

$$\begin{aligned} \vec{F}_{1,2} = M_{sat} \frac{\partial}{\partial(x,y,z)} \left[\frac{k^2 M_p}{r} \right] + \\ + M_{sat} \frac{\partial}{\partial(x,y,z)} \left\{ \frac{k^2}{r^3} \left[A + \frac{C}{2} - \frac{3A(x^2 + y^2) + Cz^2}{r^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (C.5)$$

Substituindo $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, realizando as derivadas parciais temos

$$\begin{aligned} \triangleright \frac{\partial}{\partial(x,y,z)} \left[\frac{k^2 M_p}{r} \right] &= \left(-\frac{k^2 M_p x}{r^3}, -\frac{k^2 M_p y}{r^3}, -\frac{k^2 M_p z}{r^3} \right) = -\frac{k^2 M_p}{r^3} \vec{r} \\ \triangleright \frac{\partial}{\partial(x,y,z)} \left\{ \frac{k^2}{r^3} \left[A + \frac{C}{2} - \frac{3A(x^2 + y^2) + Cz^2}{r^2} \right] \right\} &= \\ &= -k^2(C - A) \left(\frac{3x}{2r^5} - \frac{15xz^2}{2r^7}, \frac{3y}{2r^5} - \frac{15yz^2}{2r^7}, \frac{9z}{2r^5} - \frac{15z^3}{2r^7} \right), \end{aligned} \quad (C.6)$$

mas como

$$M_p R_p^2 J_2 = C - \frac{A + B}{2} = C - \frac{2A}{2} = C - A,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial(x,y,z)} \left\{ \frac{k^2}{r^3} \left[A + \frac{C}{2} - \frac{3A(x^2 + y^2) + Cz^2}{r^2} \right] \right\} &= \\ &= -k^2 M_p R_p^2 J_2 \left(\frac{3x}{2r^5} - \frac{15xz^2}{2r^7}, -\frac{3y}{2r^5} - \frac{15yz^2}{2r^7}, \frac{9z}{2r^5} - \frac{15z^3}{2r^7} \right). \end{aligned} \quad (C.7)$$

Observamos que (C.7) é a definição de \vec{P}_{J_2} , (4.2). Segue que

$$\begin{aligned} \vec{F}_{1,2} &= -\frac{k^2 M_{sat} M_p}{r^3} \vec{r} + \\ &+ \left[-k^2 M_{sat} M_p R_p^2 J_2 \left(\frac{3x}{2r^5} - \frac{15xz^2}{2r^7}, -\frac{3y}{2r^5} - \frac{15yz^2}{2r^7}, \frac{9z}{2r^5} - \frac{15z^3}{2r^7} \right) \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \vec{F}_{1,2} = -\frac{k^2 M_{sat} M_p}{r^3} \vec{r} + M_{sat} \vec{P}_{J_2}. \end{aligned} \quad (C.8)$$

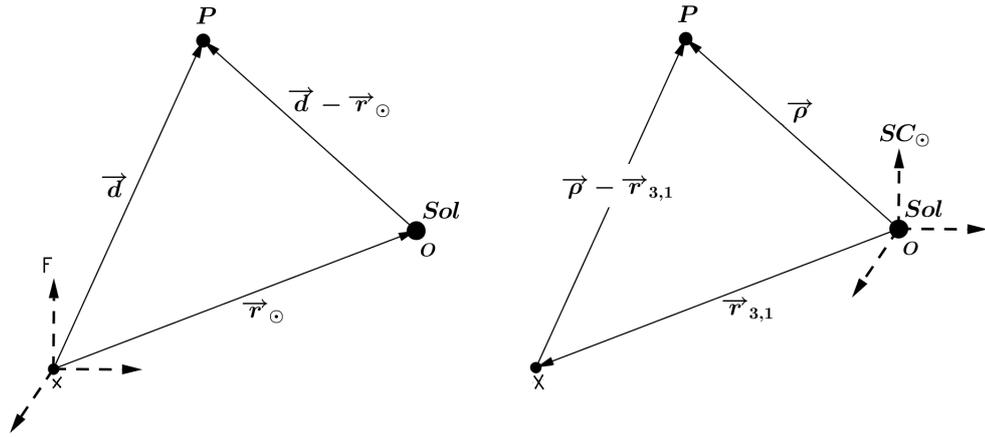
(b) $\vec{F}_{3,2}$.

Para o cálculo de $\vec{F}_{3,2}$, veja a figura C simplificada.

Definimos X como o centro de massa de C_1 , O como sendo o Sol e P é um ponto qualquer. SC_\odot é um sistema ortogonal construído paralelo a F com origem em O .

Como consideramos que o Sol é uma massa pontual, no sistema SC_\odot , o potencial gravitacional que C_3 produz sobre o ponto P é

$$\tilde{U} = \frac{k^2 M_\odot}{\rho}, \quad (C.9)$$


 Figura 28 – Planos F e SC_{\odot}

onde $\vec{\rho}_{SC_{\odot}} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$. Portanto, as equações do movimento de uma massa pontual P , no sistema SC_{\odot} , são

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \vec{\rho}_{SC_{\odot}} &= \frac{\partial \tilde{U}}{\partial (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})} = \left(-\frac{k^2 M_{\odot} \tilde{x}}{\rho^3}, -\frac{k^2 M_{\odot} \tilde{y}}{\rho^3}, -\frac{k^2 M_{\odot} \tilde{z}}{\rho^3} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} \vec{\rho}_{SC_{\odot}} = -\frac{k^2 M_{\odot}}{\rho^3} \vec{\rho}_{SC_{\odot}}. \end{aligned} \quad (C.10)$$

O vetor $\vec{\rho}$ pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \vec{\rho}_{SC_{\odot}} &= \vec{OP} = \vec{EP} + \vec{OE} = \vec{d}_F + \vec{r}_{3,1SC_{\odot}} \Rightarrow \vec{d}_F = \vec{\rho}_{SC_{\odot}} - \vec{r}_{3,1SC_{\odot}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} \vec{d}_F = \frac{d^2}{dt^2} \vec{\rho}_{SC_{\odot}} - \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_{3,1SC_{\odot}}. \end{aligned}$$

Aplicando (C.10) nessa última expressão, as equações de movimento no sistema F são

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{d}_F = -\frac{k^2 M_{\odot}}{\rho^3} \vec{\rho}_{SC_{\odot}} - \frac{k^2 M_{\odot}}{r_{3,1}^3} \vec{r}_{3,1SC_{\odot}}. \quad (C.11)$$

Retomando ao satélite, a força que o Sol exerce sobre esse é

$$\vec{F}_{3,2} = M_{sat} \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_F = -\frac{k^2 M_{sat} M_{\odot}}{\rho^3} \vec{\rho}_{SC_{\odot}} - \frac{k^2 M_{sat} M_{\odot}}{r_{3,2}^3} \vec{r}_{3,1SC_{\odot}}.$$

Mas, $\vec{\rho}_{SC_{\odot}} = (\vec{r} - \vec{r}_{\odot})_F$ e $\vec{r}_{3,1SC_{\odot}} = (-\vec{r}_{\odot})_F$, assim no sistema equatorial

$$\begin{aligned} \vec{F}_{3,2} &= -\frac{k^2 M_{sat} M_{\odot}}{|\vec{r} - \vec{r}_{\odot}|^3} (\vec{r} - \vec{r}_{\odot}) - \frac{k^2 M_{sat} M_{\odot}}{r^3} (-\vec{r}_{\odot}) \Rightarrow \\ \vec{F}_{3,2} &= -k^2 M_{sat} M_{\odot} \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_{\odot}}{|\vec{r} - \vec{r}_{\odot}|^3} - \frac{\vec{r}_{\odot}}{r^3} \right). \end{aligned} \quad (C.12)$$

(c) Equações do movimento.

Aplicando (C.8) e (C.12) em (C.1), segue que a força resultante sobre o satélite, visto do sistema equatorial, é

$$\vec{F}_{sat} = -\frac{k^2 M_{sat} M_p}{r^3} \vec{r} + M_{sat} \vec{P}_{J_2} - k^2 M_{sat} M_{\odot} \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_{\odot}}{|\vec{r} - \vec{r}_{\odot}|^3} - \frac{\vec{r}_{\odot}}{r_{\odot}^3} \right) \quad (C.13)$$

como $\vec{F}_{sat} = M_{sat} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$

$$\begin{aligned} M_{sat} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= -\frac{k^2 M_{sat} M_p}{r^3} \vec{r} + M_{sat} \vec{P}_{J_2} - k^2 M_{sat} M_{\odot} \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_{\odot}}{|\vec{r} - \vec{r}_{\odot}|^3} - \frac{\vec{r}_{\odot}}{r_{\odot}^3} \right) \Rightarrow \\ \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= -\frac{k^2 M_p}{r^3} \vec{r} - k^2 M_{\odot} \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_{\odot}}{|\vec{r} - \vec{r}_{\odot}|^3} - \frac{\vec{r}_{\odot}}{r_{\odot}^3} \right) + \vec{P}_{J_2}. \end{aligned} \quad (C.14)$$

Obtemos a equação (4.1) para o movimento do satélite no sistema equatorial.

APÊNDICE D – Obliquidade do planeta

Para determinar ϵ , considere o esquema de planos (figura 29).

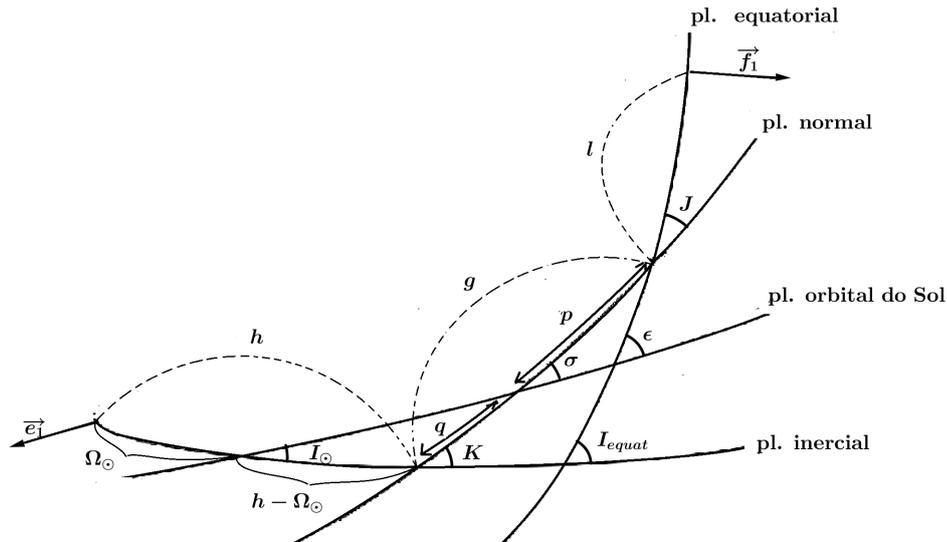


Figura 29 – Obliquidade.

Na figura 29 adicionamos um ângulo auxiliar σ e dois lados p e q , tais que $p + q = g$, esses novos elementos ajudarão a obter uma expressão de ϵ em função dos ângulos de Andoyer e dos orbitais do Sol. Trabalhando com os triângulos esféricos presentes na figura 29 temos as seguintes relações

- do triângulo esférico com ângulos J , σ e $\pi - \epsilon$ e lado p :

$$\triangleright \cos(\pi - \epsilon) = -\cos(\sigma) \cos(J) + \sin(\sigma) \sin(J) \cos(p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\epsilon) = \cos(\sigma) \cos(J) - \sin(\sigma) \sin(J) \cos(p) \quad (\text{D.1})$$

- do triângulo esférico com ângulos σ , I_{\odot} e $\pi - K$ e lados q e $h - \Omega_{\odot}$:

$$\triangleright \frac{\sin(\sigma)}{\sin(h - \Omega_{\odot})} = \frac{\sin(I_{\odot})}{\sin(q)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(\sigma) \sin(q) = \sin(I_{\odot}) \sin(h - \Omega_{\odot}) \quad (\text{D.2})$$

$$\triangleright \cos(I_{\odot}) = -\cos(\sigma) \cos(\pi - K) + \sin(\sigma) \sin(\pi - K) \cos(q) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(\sigma) \cos(q) = \frac{\cos(I_{\odot}) - \cos(\sigma) \cos(K)}{\sin(K)} \quad (\text{D.3})$$

$$\begin{aligned}
 \triangleright \quad \sin(\sigma) \cos(p) &= \sin(\sigma) \cos(g - q) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \sin(\sigma) \cos(p) = \sin(\sigma) [\cos(g) \cos(q) + \sin(g) \sin(q)] \quad (D.4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \triangleright \quad \cos(\sigma) &= -\cos(I_{\odot}) \cos(\pi - K) + \sin(I_{\odot}) \sin(\pi - K) \cos(h - \Omega_{\odot}) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \cos(\sigma) = \cos(I_{\odot}) \cos(K) + \sin(I_{\odot}) \sin(K) \cos(h - \Omega_{\odot}) \quad (D.5)
 \end{aligned}$$

Aplicando (D.2) e (D.3) em (D.4)

$$\sin(\sigma) \cos(p) = \cos(g) \left[\frac{\cos(I_{\odot}) - \cos(\sigma) \cos(K)}{\sin(K)} \right] + \sin(g) \sin(I_{\odot}) \sin(h - \Omega_{\odot}) \quad (D.6)$$

contudo, multiplicando (D.5) por $\cos(K)$ e manipulando a expressão, obtemos

$$\frac{\cos(I_{\odot}) - \cos(\sigma) \cos(K)}{\sin(K)} = \cos(I_{\odot}) \sin(K) - \cos(K) \sin(I_{\odot}) \cos(h - \Omega_{\odot}). \quad (D.7)$$

Aplicando (D.7) em (D.6),

$$\begin{aligned}
 \sin(\sigma) \cos(p) &= \cos(g) [\cos(I_{\odot}) \sin(K) - \cos(K) \sin(I_{\odot}) \cos(h - \Omega_{\odot})] + \\
 &\quad + \sin(g) \sin(I_{\odot}) \sin(h - \Omega_{\odot}) \quad (D.8)
 \end{aligned}$$

Utilizando (D.5) e (D.8) em (D.1), resulta que o cosseno da obliquidade real é

$$\begin{aligned}
 \cos(\epsilon) &= \cos(J) [\cos(I_{\odot}) \cos(K) + \sin(I_{\odot}) \sin(K) \cos(h - \Omega_{\odot})] - \\
 &\quad - \cos(g) \sin(J) [\cos(I_{\odot}) \sin(K) - \cos(K) \sin(I_{\odot}) \cos(h - \Omega_{\odot})] - \\
 &\quad - \sin(g) \sin(J) \sin(I_{\odot}) \sin(h - \Omega_{\odot}). \quad (D.9)
 \end{aligned}$$

Essa é a equação (5.29).

APÊNDICE E – Estrutura da rotina computacional

Nossa rotina computacional é um processo iterativo, onde o passo é o tempo, estruturada do seguinte modo:

- o potencial perturbador médio é dado por $\langle V \rangle = \langle V_{sat} \rangle + \langle V_{\odot} \rangle_g$, descrito nas variáveis não singulares;
- a função potencial média é dada por $\langle \mathcal{R} \rangle = \langle \mathcal{R}_{J_2} \rangle + \langle \mathcal{R}_{\odot} \rangle_{\mathcal{M}}$, descrito nas variáveis não singulares;
- alimentamos o programa com os dados iniciais e os constantes
 - a) as variáveis de Andoyer: K_0 , h_0 e J ;
 - b) os elementos orbitais do satélite quando ele foi capturado: a (em raios equatorial do planeta), e_0 , I_0 (graus), ω_0 (graus) e Ω_0 (graus);
- calcula-se o momento angular de rotação, G (depende do planeta), H , $Y_{1,0}$ (Y_1 inicial) e $Y_{2,0}$ (Y_2 inicial);
- a cada instante as equações de (5.28) são integradas, sendo que para o movimento de C_2 usamos as equações de Lagrange (5.24, 5.25, 5.26 e 5.27). Se a excentricidade do satélite atingir um $e_{critico}$ ou atingir seu t_{limite} de integração, assumimos que o satélite foi ejetado.

Ao final da rotina, obtemos o comportamento temporal de ϵ , h , K , e , I , ω , Ω , e_{\odot} , I_{\odot} , ω_{\odot} e Ω_{\odot} .

APÊNDICE F – Transformação da equação (7.1) na equação (7.3)

Temos que a equação (7.1) é a expressão do potencial perturbador médio do satélite sobre a dinâmica de rotação do planeta e é dada por:

$$\begin{aligned}
 \langle V_{sat} \rangle = & -\frac{3}{2} \frac{k^2 M_{sat} M_p R_p^2 J_2}{a^3 (1-e^2)^{3/2}} \left\{ \frac{\sin^2(K)}{8} \left[-2 \sin^2(J) \sin^2(I) + 1 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \cos^2(J) - \cos^2(I) - \cos^2(J) \cos^2(I) \right] \cos(2h - 2\Omega) + \right. \\
 & \left. + \frac{\sin(2I) \sin(K) \cos(K)}{4} \left[1 + \cos^2(J) - 2 \sin^2(J) \right] \cos(h - \Omega) + \right. \\
 & \left. + \frac{\sin^2(K)}{4} \left[\sin^2(I) + \sin^2(J) \cos^2(I) + \cos^2(J) \sin^2(I) + \sin^2(J) \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{\cos^2(K)}{8} \left[1 + \cos^2(J) \cos^2(I) + 4 \sin^2(J) \sin^2(I) + \cos^2(J) + \cos^2(I) \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{8} \left[1 + \cos^2(I) + \cos^2(J) + \cos^2(J) \cos^2(I) \right] \right\}. \quad (F.1)
 \end{aligned}$$

Na parte cinética T (2.10) só temos L e G (nenhuma coordenada angular). Em $\langle V_{sat} \rangle$ as únicas coordenadas angulares são h e Ω , logo L e G são constantes e por consequência J também é constante.

Suponha, apenas a título de ilustração, que Ω (longitude do nodo ascendente do perturbador C_2) tenha uma variação linear:

$$\Omega = n_8(t - t_0). \quad (F.2)$$

Também desprezaremos as variações da excentricidade e da inclinação do satélite.

Nestas condições, a dinâmica de H e h é basicamente descrita por:

$$\langle V_{sat} \rangle = \langle V_{sat} \rangle(H, h - \Omega). \quad (F.3)$$

Como Ω depende explicitamente do tempo, $\langle V_{sat} \rangle$ é uma hamiltoniana não conservativa. Fazemos a extensão do espaço de fase, isto é, definiremos um novo momento H_8 conjugado de Ω e a nova hamiltoniana $\langle V_8 \rangle(h, H, \Omega, H_8)$ que agora é conservativa. Seja então:

$$V_8 = n_8 H_8 + \langle V_{sat} \rangle(H, h - \Omega). \quad (F.4)$$

Note que agora estamos no espaço (h, H, Ω, H_8) com a hamiltoniana V_8 , ou seja:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dh}{dt} = \frac{\partial V_8}{\partial H} = \frac{\partial \langle V_{sat} \rangle}{\partial H} \end{array} \right. \quad (\text{F.5})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dH}{dt} = -\frac{\partial V_8}{\partial h} = -\frac{\partial \langle V_{sat} \rangle}{\partial h} \end{array} \right. \quad (\text{F.6})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\partial V_8}{\partial H_8} = \frac{\partial (n_8 H_8)}{\partial H_8} = n_8 \end{array} \right. \quad (\text{F.7})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dH^*}{dt} = -\frac{\partial V_8}{\partial \Omega} = -\frac{\partial \langle V_{sat} \rangle}{\partial \Omega}. \end{array} \right. \quad (\text{F.8})$$

Agora percebemos que em V_8 (ou em $\langle V_{sat} \rangle$) h sempre aparece na forma $h - \Omega$ ou $2h - 2\Omega$. Daí fazemos outra transformação canônica definindo novas coordenadas:

$$\rho = h - \Omega \quad (\text{F.9})$$

$$\Omega^* = \Omega \quad (\text{F.10})$$

e procuramos os respectivos momentos (P_ρ, P_{Ω^*}) conjugados de ρ e Ω^* . Para isso basta usar a condição de Jacobi - Poincaré:

$$\sum P_i dQ_i = \sum p_i dq_i, \quad (\text{F.11})$$

ou seja,

$$P_\rho d\rho + P_{\Omega^*} d\Omega^* = H dh + H_8 d\Omega \Rightarrow P_\rho d(h - \Omega) + P_{\Omega^*} d\Omega = H dh + H_8 d\Omega,$$

isto é,

$$\left\{ \begin{array}{l} H = P_\rho \end{array} \right. \quad (\text{F.12})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_8 = P_{\Omega^*} - P_\rho. \end{array} \right. \quad (\text{F.13})$$

Como o sistema, agora, é conservativo então podemos substituir diretamente na hamiltoniana anterior as velhas variáveis pelas novas:

$$V_8^* = n_8(P_{\Omega^*} - P_\rho) + \langle V_{sat} \rangle(H, \rho). \quad (\text{F.14})$$

Notemos que Ω^* não aparece explicitamente em V_8^* , logo P_{Ω^*} é constante. Então:

$$V_8^* = -n_8 P_\rho + \langle V_{sat} \rangle(H, \rho). \quad (\text{F.15})$$

Logo, obtemos a equação (7.3):

$$\begin{aligned}
 V_8^* = & -n_8 H - \frac{3}{2} \frac{k^2 M_{sat} M_p R_p^2 J_2}{a^3 (1 - e^2)^{3/2}} \left\{ \frac{\sin^2(K)}{8} \left[-2 \sin^2(J) \sin^2(I) + 1 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \cos^2(J) - \cos^2(I) - \cos^2(J) \cos^2(I) \right] \cos(2\rho) + \right. \\
 & \left. + \frac{\sin(2I) \sin(K) \cos(K)}{4} \left[1 + \cos^2(J) - 2 \sin^2(J) \right] \cos(\rho) + \right. \\
 & \left. + \frac{\sin^2(K)}{4} \left[\sin^2(I) + \sin^2(J) \cos^2(I) + \cos^2(J) \sin^2(I) + \sin^2(J) \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{\cos^2(K)}{8} \left[1 + \cos^2(J) \cos^2(I) + 4 \sin^2(J) \sin^2(I) + \cos^2(J) + \cos^2(I) \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{8} \left[1 + \cos^2(I) + \cos^2(J) + \cos^2(J) \cos^2(I) \right] \right\}, \quad (\text{F.16})
 \end{aligned}$$

ou seja, a nova hamiltoniana V_8^* só tem um único grau de liberdade e é autônoma (constante).

Daí, o espaço de fase (H, ρ) pode ser descrito simplesmente pelas curvas de nível de $V_8^*(H, \rho)$.

APÊNDICE G – Conjunto de satélites utilizados no capítulo 8

Todos os satélites listados a seguir foram utilizados para a construção das figuras do capítulo 8 e têm seus elementos orbitais em relação ao sistema equatorial. Para realizar as mudanças descritas no Apêndice B e obter I , ω e Ω no sistema inercial, consideramos $g = 10^\circ$ e $l = 5^\circ$. Todos os testes foram feitos com conjuntos de 30 satélites.

- conjunto de satélites para a construção da figura 18

| sat | $a(R_N)$ | e | I_e | ω_e | Ω_e | fmassa = $\frac{M_N}{M_{sat}}$ |
|-----|----------|------|-------|------------|------------|--------------------------------|
| 1° | 63 | 0.82 | 106° | 241 ° | 312° | 278 |
| 2° | 73 | 0.32 | 94° | 285 ° | 80° | 309 |
| 3° | 99 | 0.49 | 91° | 90 ° | 62° | 288 |
| 4° | 84 | 0.19 | 85° | 347 ° | 59° | 328 |
| 5° | 77 | 0.78 | 115° | 250 ° | 201° | 124 |
| 6° | 67 | 0.41 | 84° | 183 ° | 189° | 388 |
| 7° | 85 | 0.60 | 109° | 13 ° | 107° | 146 |
| 8° | 94 | 0.87 | 75° | 57 ° | 259° | 340 |
| 9° | 57 | 0.89 | 78° | 204 ° | 345° | 333 |
| 10° | 88 | 0.59 | 75° | 223 ° | 6° | 414 |
| 11° | 62 | 0.53 | 108° | 174 ° | 0° | 411 |
| 12° | 58 | 0.88 | 103° | 45 ° | 41° | 127 |
| 13° | 94 | 0.18 | 82° | 356 ° | 279° | 310 |
| 14° | 63 | 0.30 | 88° | 16 ° | 159° | 166 |
| 15° | 76 | 0.53 | 102° | 84 ° | 10° | 170 |
| 16° | 87 | 0.38 | 86° | 303 ° | 231° | 410 |
| 17° | 77 | 0.61 | 98° | 11 ° | 10° | 348 |
| 18° | 89 | 0.79 | 84° | 332 ° | 199° | 212 |
| 19° | 65 | 0.75 | 101° | 52 ° | 91° | 337 |
| 20° | 79 | 0.45 | 93° | 196 ° | 348° | 164 |
| 21° | 60 | 0.27 | 96° | 271 ° | 31° | 419 |
| 22° | 84 | 0.65 | 99° | 342 ° | 274° | 262 |
| 23° | 88 | 0.70 | 98° | 27 ° | 319° | 360 |
| 24° | 76 | 0.11 | 94° | 230 ° | 249° | 309 |
| 25° | 98 | 0.28 | 72° | 15 ° | 297° | 459 |
| 26° | 68 | 0.82 | 113° | 174 ° | 9° | 274 |
| 27° | 83 | 0.37 | 89° | 110 ° | 126° | 120 |
| 28° | 88 | 0.82 | 100° | 111 ° | 3° | 419 |
| 29° | 85 | 0.37 | 100° | 257 ° | 209° | 415 |
| 30° | 68 | 0.59 | 104° | 202 ° | 95° | 176 |

Tabela 3 – Conjunto de satélites referente a figura 18

- conjunto de satélites para a construção da figura 19

| sat | $a(R_N)$ | e | I_e | ω_e | Ω_e | fmassa = $\frac{M_N}{M_{sat}}$ |
|-----|----------|------|-------|------------|------------|--------------------------------|
| 1° | 85 | 0.61 | 86° | 335 ° | 316° | 154 |
| 2° | 84 | 0.53 | 96° | 142 ° | 208° | 275 |
| 3° | 79 | 0.47 | 81° | 240 ° | 289° | 249 |
| 4° | 71 | 0.06 | 90° | 8 ° | 35° | 246 |
| 5° | 68 | 0.08 | 84° | 121 ° | 293° | 458 |
| 6° | 88 | 0.86 | 110° | 135 ° | 113° | 226 |
| 7° | 77 | 0.58 | 75° | 336 ° | 312° | 288 |
| 8° | 84 | 0.47 | 88° | 335 ° | 224° | 457 |
| 9° | 100 | 0.23 | 81° | 297 ° | 107° | 205 |
| 10° | 81 | 0.70 | 92° | 285 ° | 279° | 192 |
| 11° | 82 | 0.65 | 91° | 258 ° | 250° | 493 |
| 12° | 66 | 0.29 | 96° | 94 ° | 91° | 133 |
| 13° | 81 | 0.28 | 93° | 189 ° | 240° | 410 |
| 14° | 78 | 0.23 | 92° | 297 ° | 49° | 475 |
| 15° | 100 | 0.18 | 76° | 36 ° | 265° | 429 |
| 16° | 78 | 0.06 | 98° | 98 ° | 132° | 298 |
| 17° | 76 | 0.28 | 80° | 155 ° | 14° | 271 |
| 18° | 65 | 0.50 | 106° | 182 ° | 92° | 234 |
| 19° | 93 | 0.37 | 99° | 326 ° | 108° | 114 |
| 20° | 84 | 0.56 | 94° | 112 ° | 318° | 123 |
| 21° | 92 | 0.80 | 77° | 168 ° | 17° | 469 |
| 22° | 89 | 0.21 | 93° | 343 ° | 268° | 425 |
| 23° | 71 | 0.77 | 106° | 46 ° | 112° | 136 |
| 24° | 61 | 0.62 | 99° | 155 ° | 70° | 435 |
| 25° | 89 | 0.10 | 83° | 135 ° | 71° | 238 |
| 26° | 73 | 0.44 | 82° | 201 ° | 247° | 490 |
| 27° | 93 | 0.88 | 92° | 83 ° | 355° | 324 |
| 28° | 90 | 0.05 | 89° | 264 ° | 81° | 253 |
| 29° | 99 | 0.20 | 95° | 115 ° | 68° | 449 |
| 30° | 84 | 0.20 | 84° | 203 ° | 227° | 225 |

Tabela 4 – Conjunto de satélites referente a figura 19

- conjunto de satélites para a construção da figura 20

| sat | $a(R_N)$ | e | I_e | ω_e | Ω_e | fmassa = $\frac{M_N}{M_{sat}}$ |
|-----|----------|------|-------|------------|------------|--------------------------------|
| 1° | 75 | 0.17 | 97° | 261 ° | 80° | 284 |
| 2° | 73 | 0.44 | 98° | 43 ° | 143° | 170 |
| 3° | 73 | 0.67 | 106° | 201 ° | 202° | 321 |
| 4° | 83 | 0.50 | 89° | 204 ° | 209° | 378 |
| 5° | 78 | 0.31 | 86° | 229 ° | 167° | 312 |
| 6° | 94 | 0.64 | 75° | 83 ° | 150° | 149 |
| 7° | 95 | 0.57 | 86° | 157 ° | 273° | 150 |
| 8° | 70 | 0.47 | 89° | 308 ° | 0° | 221 |
| 9° | 97 | 0.13 | 72° | 199 ° | 232° | 351 |
| 10° | 82 | 0.45 | 85° | 247 ° | 73° | 427 |
| 11° | 82 | 0.34 | 80° | 134 ° | 338° | 387 |
| 12° | 71 | 0.29 | 95° | 53 ° | 150° | 441 |
| 13° | 50 | 0.89 | 76° | 294 ° | 58° | 133 |
| 14° | 70 | 0.76 | 105° | 199 ° | 84° | 429 |
| 15° | 61 | 0.73 | 103° | 239 ° | 291° | 475 |
| 16° | 85 | 0.25 | 92° | 289 ° | 323° | 220 |
| 17° | 80 | 0.27 | 98° | 78 ° | 264° | 349 |
| 18° | 86 | 0.73 | 103° | 141 ° | 226° | 199 |
| 19° | 70 | 0.81 | 81° | 310 ° | 332° | 498 |
| 20° | 92 | 0.84 | 60° | 128 ° | 115° | 143 |
| 21° | 81 | 0.18 | 84° | 74 ° | 265° | 419 |
| 22° | 96 | 0.60 | 91° | 345 ° | 210° | 445 |
| 23° | 69 | 0.22 | 94° | 47 ° | 273° | 212 |
| 24° | 67 | 0.53 | 108° | 173 ° | 10° | 375 |
| 25° | 75 | 0.62 | 89° | 186 ° | 212° | 371 |
| 26° | 79 | 0.05 | 92° | 52 ° | 170° | 419 |
| 27° | 86 | 0.81 | 68° | 347 ° | 144° | 422 |
| 28° | 78 | 0.19 | 93° | 207 ° | 350° | 229 |
| 29° | 60 | 0.54 | 86° | 148 ° | 20° | 142 |
| 30° | 51 | 0.72 | 102° | 1 ° | 6° | 455 |

Tabela 5 – Conjunto de satélites referente a figura 20

- conjunto de satélites para a construção da figura 21

| sat | $a(R_N)$ | e | I_e | ω_e | Ω_e | fmassa = $\frac{M_N}{M_{sat}}$ |
|-----|----------|------|-------|------------|------------|--------------------------------|
| 1° | 85 | 0.23 | 88° | 113 ° | 64° | 377 |
| 2° | 90 | 0.18 | 95° | 24 ° | 13° | 221 |
| 3° | 95 | 0.53 | 71° | 143 ° | 253° | 244 |
| 4° | 98 | 0.06 | 90° | 84 ° | 299° | 330 |
| 5° | 66 | 0.27 | 100° | 265 ° | 6° | 308 |
| 6° | 97 | 0.50 | 71° | 2 ° | 337° | 251 |
| 7° | 64 | 0.85 | 72° | 308 ° | 141° | 171 |
| 8° | 87 | 0.22 | 81° | 226 ° | 46° | 433 |
| 9° | 74 | 0.75 | 117° | 334 ° | 165° | 144 |
| 10° | 76 | 0.61 | 105° | 270 ° | 71° | 380 |
| 11° | 97 | 0.73 | 80° | 108 ° | 183° | 418 |
| 12° | 68 | 0.46 | 90° | 232 ° | 13° | 102 |
| 13° | 83 | 0.45 | 95° | 192 ° | 340° | 393 |
| 14° | 60 | 0.72 | 94° | 356 ° | 35° | 481 |
| 15° | 69 | 0.79 | 90° | 37 ° | 29° | 367 |
| 16° | 90 | 0.69 | 85° | 357 ° | 232° | 478 |
| 17° | 61 | 0.87 | 76° | 51 ° | 155° | 232 |
| 18° | 87 | 0.08 | 82° | 215 ° | 242° | 442 |
| 19° | 69 | 0.33 | 99° | 291 ° | 165° | 433 |
| 20° | 92 | 0.45 | 78° | 187 ° | 355° | 394 |
| 21° | 95 | 0.88 | 103° | 86 ° | 239° | 237 |
| 22° | 67 | 0.76 | 91° | 33 ° | 314° | 408 |
| 23° | 61 | 0.16 | 92° | 278 ° | 10° | 207 |
| 24° | 92 | 0.22 | 84° | 313 ° | 126° | 187 |
| 25° | 70 | 0.59 | 84° | 104 ° | 244° | 465 |
| 26° | 68 | 0.14 | 100° | 244 ° | 293° | 366 |
| 27° | 69 | 0.36 | 100° | 208 ° | 187° | 264 |
| 28° | 65 | 0.65 | 74° | 145 ° | 242° | 293 |
| 29° | 68 | 0.87 | 112° | 88 ° | 219° | 418 |
| 30° | 91 | 0.48 | 97° | 247 ° | 60° | 447 |

Tabela 6 – Conjunto de satélites referente a figura 21

- conjunto de satélites para a construção da figura 22

| sat | $a(R_N)$ | e | I_e | ω_e | Ω_e | fmassa = $\frac{M_N}{M_{sat}}$ |
|-----|----------|------|-------|------------|------------|--------------------------------|
| 1° | 82 | 0.48 | 99° | 343 ° | 90° | 114 |
| 2° | 92 | 0.23 | 78° | 163 ° | 333° | 196 |
| 3° | 75 | 0.59 | 76° | 68 ° | 100° | 434 |
| 4° | 95 | 0.25 | 79° | 76 ° | 10° | 370 |
| 5° | 90 | 0.33 | 87° | 289 ° | 204° | 157 |
| 6° | 71 | 0.66 | 89° | 154 ° | 169° | 223 |
| 7° | 70 | 0.56 | 101° | 155 ° | 137° | 431 |
| 8° | 97 | 0.89 | 91° | 133 ° | 89° | 242 |
| 9° | 64 | 0.71 | 77° | 117 ° | 76° | 195 |
| 10° | 74 | 0.35 | 88° | 344 ° | 294° | 243 |
| 11° | 60 | 0.80 | 114° | 182 ° | 359° | 180 |
| 12° | 83 | 0.64 | 97° | 315 ° | 1° | 477 |
| 13° | 79 | 0.07 | 81° | 89 ° | 307° | 202 |
| 14° | 90 | 0.25 | 97° | 155 ° | 52° | 463 |
| 15° | 89 | 0.22 | 82° | 152 ° | 1° | 138 |
| 16° | 74 | 0.54 | 71° | 126 ° | 326° | 168 |
| 17° | 88 | 0.40 | 89° | 228 ° | 214° | 137 |
| 18° | 70 | 0.58 | 95° | 165 ° | 27° | 224 |
| 19° | 69 | 0.24 | 83° | 21 ° | 100° | 271 |
| 20° | 66 | 0.58 | 93° | 241 ° | 291° | 216 |
| 21° | 93 | 0.55 | 97° | 305 ° | 249° | 106 |
| 22° | 87 | 0.17 | 89° | 71 ° | 360° | 263 |
| 23° | 73 | 0.68 | 98° | 352 ° | 165° | 458 |
| 24° | 90 | 0.66 | 97° | 13 ° | 12° | 198 |
| 25° | 65 | 0.74 | 76° | 235 ° | 176° | 237 |
| 26° | 63 | 0.05 | 97° | 48 ° | 101° | 361 |
| 27° | 98 | 0.65 | 97° | 174 ° | 18° | 233 |
| 28° | 63 | 0.38 | 80° | 55 ° | 258° | 456 |
| 29° | 70 | 0.15 | 97° | 4 ° | 62° | 326 |
| 30° | 87 | 0.24 | 97° | 325 ° | 87° | 170 |

Tabela 7 – Conjunto de satélites referente a figura 22

- conjunto de satélites para a construção da figura 23

| sat | $a(R_N)$ | e | I_e | ω_e | Ω_e | fmassa = $\frac{M_N}{M_{sat}}$ |
|-----|----------|------|-------|------------|------------|--------------------------------|
| 1° | 67 | 0.77 | 104° | 256 ° | 49° | 253 |
| 2° | 67 | 0.83 | 119° | 68 ° | 282° | 254 |
| 3° | 74 | 0.36 | 94° | 300 ° | 279° | 130 |
| 4° | 93 | 0.05 | 94° | 184 ° | 12° | 430 |
| 5° | 84 | 0.05 | 91° | 101 ° | 57° | 138 |
| 6° | 68 | 0.75 | 85° | 110 ° | 38° | 307 |
| 7° | 94 | 0.72 | 103° | 205 ° | 193° | 469 |
| 8° | 60 | 0.16 | 83° | 43 ° | 289° | 237 |
| 9° | 69 | 0.66 | 90° | 307 ° | 249° | 147 |
| 10° | 96 | 0.64 | 90° | 296 ° | 174° | 451 |
| 11° | 68 | 0.50 | 96° | 37 ° | 189° | 331 |
| 12° | 96 | 0.10 | 86° | 98 ° | 322° | 357 |
| 13° | 80 | 0.22 | 85° | 279 ° | 39° | 320 |
| 14° | 65 | 0.24 | 87° | 267 ° | 303° | 266 |
| 15° | 63 | 0.26 | 90° | 244 ° | 106° | 104 |
| 16° | 65 | 0.35 | 92° | 124 ° | 347° | 145 |
| 17° | 77 | 0.48 | 97° | 300 ° | 43° | 148 |
| 18° | 78 | 0.36 | 99° | 250 ° | 67° | 463 |
| 19° | 88 | 0.43 | 84° | 348 ° | 287° | 385 |
| 20° | 60 | 0.37 | 89° | 219 ° | 245° | 139 |
| 21° | 95 | 0.62 | 96° | 227 ° | 48° | 426 |
| 22° | 95 | 0.86 | 106° | 277 ° | 83° | 230 |
| 23° | 84 | 0.21 | 81° | 194 ° | 229° | 280 |
| 24° | 66 | 0.07 | 83° | 193 ° | 138° | 342 |
| 25° | 88 | 0.72 | 87° | 12 ° | 215° | 223 |
| 26° | 77 | 0.16 | 83° | 240 ° | 309° | 253 |
| 27° | 82 | 0.45 | 100° | 67 ° | 256° | 279 |
| 28° | 60 | 0.74 | 98° | 179 ° | 5° | 323 |
| 29° | 98 | 0.56 | 75° | 123 ° | 288° | 418 |
| 30° | 86 | 0.18 | 90° | 177 ° | 130° | 387 |

Tabela 8 – Conjunto de satélites referente a figura 23

- conjunto de satélites para a construção da figura 24

| sat | $a(R_N)$ | e | I_e | ω_e | Ω_e | fmassa = $\frac{M_N}{M_{sat}}$ |
|-----|----------|------|-------|------------|------------|--------------------------------|
| 1° | 87 | 0.85 | 88° | 187 ° | 223° | 244 |
| 2° | 93 | 0.29 | 75° | 266 ° | 223° | 243 |
| 3° | 96 | 0.23 | 79° | 118 ° | 86° | 295 |
| 4° | 97 | 0.18 | 74° | 218 ° | 144° | 370 |
| 5° | 75 | 0.69 | 80° | 268 ° | 119° | 330 |
| 6° | 77 | 0.39 | 95° | 31 ° | 13° | 224 |
| 7° | 81 | 0.13 | 98° | 50 ° | 236° | 497 |
| 8° | 89 | 0.62 | 109° | 241 ° | 12° | 351 |
| 9° | 65 | 0.31 | 99° | 29 ° | 132° | 453 |
| 10° | 94 | 0.54 | 76° | 283 ° | 173° | 272 |
| 11° | 60 | 0.44 | 84° | 251 ° | 211° | 209 |
| 12° | 98 | 0.89 | 112° | 45 ° | 332° | 287 |
| 13° | 50 | 0.73 | 96° | 120 ° | 151° | 201 |
| 14° | 61 | 0.86 | 112° | 128 ° | 118° | 137 |
| 15° | 68 | 0.62 | 82° | 259 ° | 354° | 487 |
| 16° | 75 | 0.73 | 78° | 265 ° | 105° | 384 |
| 17° | 89 | 0.80 | 87° | 289 ° | 140° | 276 |
| 18° | 75 | 0.74 | 93° | 112 ° | 203° | 413 |
| 19° | 72 | 0.51 | 87° | 294 ° | 136° | 438 |
| 20° | 87 | 0.67 | 90° | 185 ° | 5° | 235 |
| 21° | 83 | 0.46 | 89° | 168 ° | 67° | 190 |
| 22° | 81 | 0.28 | 98° | 40 ° | 49° | 416 |
| 23° | 82 | 0.17 | 81° | 341 ° | 112° | 119 |
| 24° | 76 | 0.46 | 90° | 129 ° | 28° | 446 |
| 25° | 91 | 0.76 | 76° | 124 ° | 256° | 426 |
| 26° | 65 | 0.79 | 86° | 323 ° | 147° | 219 |
| 27° | 53 | 0.74 | 95° | 85 ° | 220° | 321 |
| 28° | 88 | 0.65 | 86° | 34 ° | 323° | 440 |
| 29° | 74 | 0.70 | 103° | 359 ° | 127° | 142 |
| 30° | 99 | 0.86 | 69° | 270 ° | 242° | 383 |

Tabela 9 – Conjunto de satélites referente a figura 24

APÊNDICE H – Captura de Tritão

Diferentemente dos outros planetas gigantes, Netuno tem um conjunto de satélites ímpar. Suas luas mais conhecidas são Tritão e Nereida. Possivelmente Tritão foi capturado em uma órbita excêntrica, com uma inclinação próxima da atual ($157,345^\circ$ em relação ao equador de Netuno - com movimento retrógrado) e por efeitos de maré teve sua órbita circularizada até os valores atuais: $e = 0,000016$ e $a = 14,328 R_N$ (R_N : raio equatorial de Netuno).

Em Goldreich et al. (1989) e Banfield e Murray (1992), considerando os efeitos dissipativos, estima-se que Tritão foi capturado em uma órbita com $a \approx 1000 R_N$, com inclinação semelhante a atual e, tomando também os efeitos da perturbação solar, $0,96 \leq e \leq 0,995$, o que equivale a um pericentro entre $5 R_N$ e $40 R_N$. Esses artigos não comentam em qual período Tritão foi capturado, mas conjecturam que o sistema de satélites primordiais de Netuno sofreu drásticas mudanças quando esse passava na região onde eles estavam, de modo que Tritão provavelmente destruiu qualquer satélite com $a \geq 5 R_N$. Banfield e Murray (1992), argumentam que os atuais minúsculos satélites de Netuno (Naiade, Talassa etc, até Proteus) não existiam enquanto Tritão era circularizado, e que eles teriam se formado no disco equatorial de detritos de prováveis primordiais destruídos, todos com semieixo $a \leq 5 R_N$ e sem qualquer traço das perturbações de Tritão.

Em Nogueira, Brassier e Gomes (2011), os autores também discutem os parâmetros da órbita de Tritão quando ele foi capturado, baseando-se no modelo de migração de Nice e supondo que tal captura ocorreu através de um binário (AGNOR; HAMILTON, 2006). As diversas simulações apresentaram os seguintes dados para a órbita de captura desse satélite:

- a) a maioria das órbitas capturadas possuem $100 R_N < a < 2000 R_N$ e pericentro entre $4 R_N$ e $32 R_N$;
- b) a possibilidade de uma órbita ser capturada com semieixo $\leq 50 R_N$ é $\approx 5\%$;
- c) as maiores chances são capturar o satélite em uma órbita retrógrada, com inclinação em relação ao equador de $\approx 155^\circ$;
- d) a maior parte das simulações capturam Tritão em uma órbita excêntrica, com $0,9 \leq e < 1$.

O tempo para circularizar Tritão varia, mas podemos supor como valor mínimo 2000000 anos. O que os autores concluíram foi que: é plausível a captura de Tritão, através de um binário, durante a instabilidade do modelo de Nice.

No mesmo artigo, os autores concluíram que o mais provável é que Nereida já foi capturado em sua órbita atual durante a instabilidade do modelo de migração, pois, se em algum tempo ele foi um satélite regular, seu semieixo deveria ter sido de $3 R_N$ para que conseguisse o período de rotação de 13,6 horas, assim a ideia de que Tritão expulsou um satélite regular Nereida, esbarra na presença ainda do satélite Proteus (semieixo de $4,751 R_N$).

Contudo, se Nereida sempre foi um satélite irregular, a captura de Tritão no mesmo período faria com que Netuno perdesse Nereida antes de Tritão se circularizar. Em estimativas de Nogueira, Brasser e Gomes (2011), nesse cenário, são necessários 100000 anos para que Nereida seja ejetado. Portanto 2 possíveis situações seriam:

- 1) Tritão poderia ser capturado no mesmo período que Nereida, mas seu semieixo deveria ser $\leq 50 R_N$, o que representa 5% das órbitas das simulações, ou seja, não é um cenário impossível, mas pouco plausível;
- 2) ou Tritão foi capturado em uma órbita com $a \in (100 R_N, 2000 R_N)$, porém logo após a formação dos planetas, o que permitiria sua circularização antes da instabilidade planetária e da captura dos irregulares.

De qualquer modo, seguindo Goldreich et al. (1989), vamos supor que a captura de Tritão foi tal que este certamente destruiu todos os eventuais satélites regulares, pelo menos aqueles com $a \geq 5 R_N$.

Vamos examinar brevemente possíveis influências que a captura de Tritão poderia ter sobre a obliquidade de Netuno. Novamente utilizando nosso modelo vamos supor a interação entre esse satélite e o planeta durante um tempo após a captura.

Antes de tudo, mostremos que em sua atual órbita, Tritão pouco influencia a obliquidade. Para essa integração foram utilizados:

- as equações da teoria secular de Laskar (1990) para o movimento do Sol;
- $K_0 = 28,5^\circ$ (esse valor foi calculado considerando os valores iniciais dos elementos orbitais do Sol, $\epsilon_0 = 27,13^\circ$ e a expressão (5.31));
- $h = 170^\circ$
- $a_\odot = 30,2 \text{ UA}$ (assim o período do nodo é $1,87 \cdot 10^6$ anos) e

$$a = 14 R_N, e = 0,00001, I_e = 157,345^\circ, \omega_e = 0^\circ, \Omega_e = 0^\circ \text{ (plano equatorial)}$$

$$I_e = 170,27^\circ, \omega_e = 130,59^\circ, \Omega_e = 314,10^\circ \text{ (plano inercial)}$$

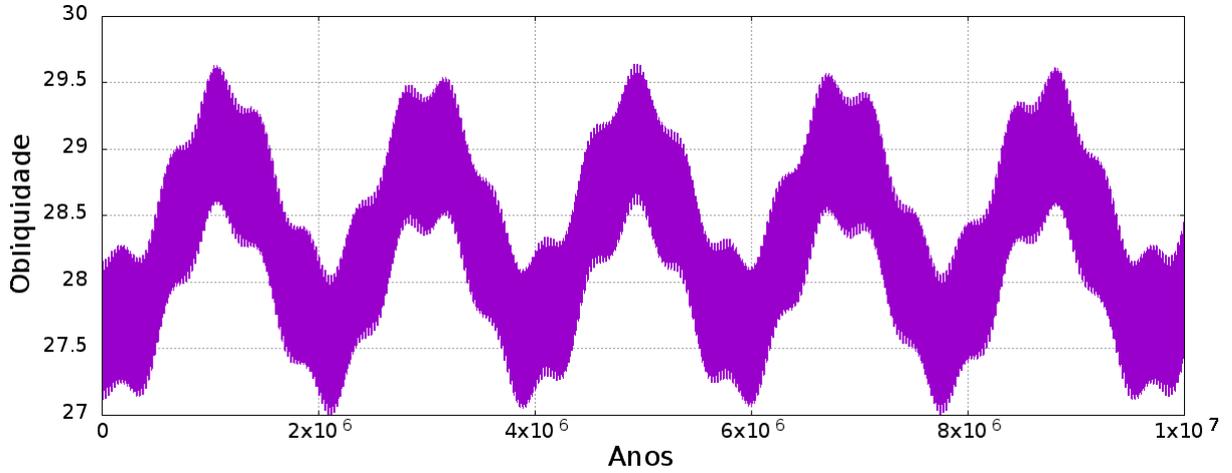


Figura 30 – Influência atual de Tritão na obliquidade de Netuno

Agora, conforme Nogueira, Brassier e Gomes (2011), vamos testar a influência que Tritão poderia provocar na obliquidade de Netuno se fosse capturado com:

- a) semieixo inicial $10 R_N \leq a_0 \leq 50 R_N$, $a_\odot = 21$ UA e período do nodo de Netuno igual a 95200 anos;
- b) semieixo inicial $a_0 \in (100 R_N, 2000 R_N)$, $a_\odot = 12,5$ UA e período do nodo de Netuno igual a 70000 anos.

Para o testes realizados, consideramos:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{\text{crítico}} = 0,995 \\ t_{\text{limite}} = 150000 \text{ anos} \\ K_0 = 0,05^\circ \\ h_0 = 170^\circ \\ I_\odot = 0^\circ \\ e_\odot = 0,0094360 \\ \omega_\odot = 96,76^\circ \\ \Omega_\odot = 131,79^\circ - w_8 \cdot t \end{array} \right.$$

e os satélites foram escolhidos seguindo os critérios:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,92 \leq e \leq 0,98 \\ 140^\circ \leq I_e \leq 160^\circ \\ \omega_e, \Omega_e \in [0^\circ, 360^\circ]. \end{array} \right.$$

Como exemplo do caso a), considere o satélite:

$$a = 49 R_N, e = 0,93, I_e = 146^\circ, \omega_e = 213^\circ, \Omega_e = 312^\circ \text{ (plano equatorial)}$$

$$I = 146,21^\circ, \omega = 212,76^\circ, \Omega = 145,80^\circ \text{ (plano inercial)}$$

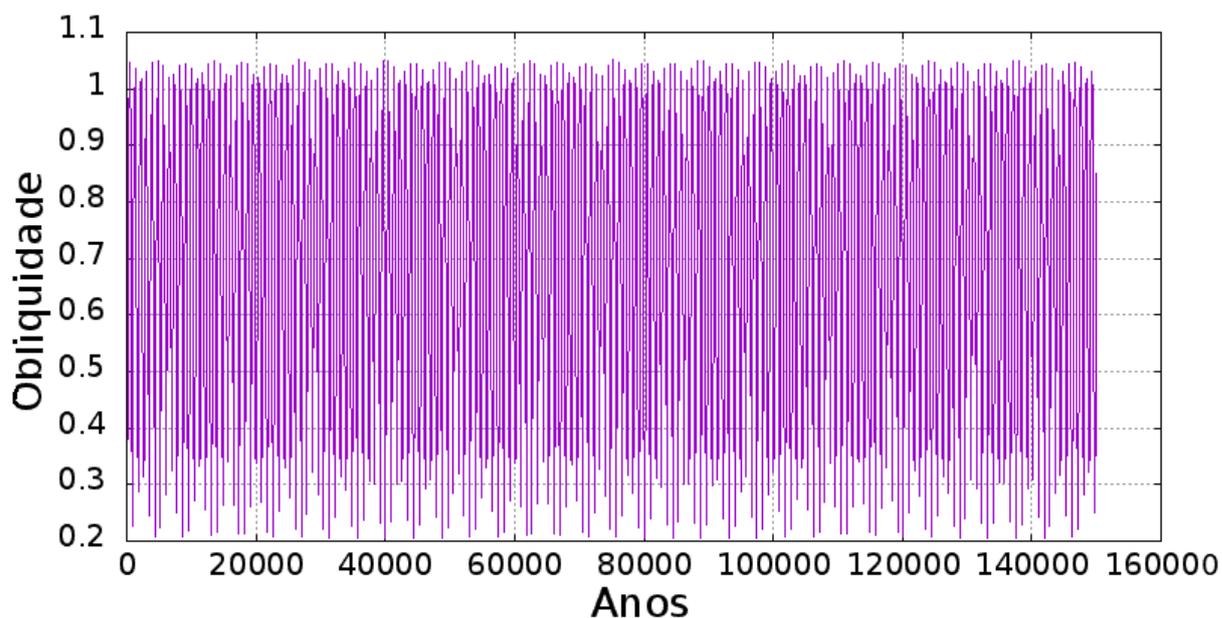


Figura 31 – Influência de Tritão na obliquidade de Netuno quando $10 R_N \leq a_0 \leq 50 R_N$.

Para o caso b), suponha o satélite com elementos orbitais:

$$a = 318 R_N, e = 0,96, I_e = 146^\circ, \omega_e = 87^\circ, \Omega_e = 308^\circ \text{ (plano equatorial)}$$

$$I = 146,18^\circ, \omega = 86,68^\circ, \Omega = 132,74^\circ \text{ (plano inercial)}$$

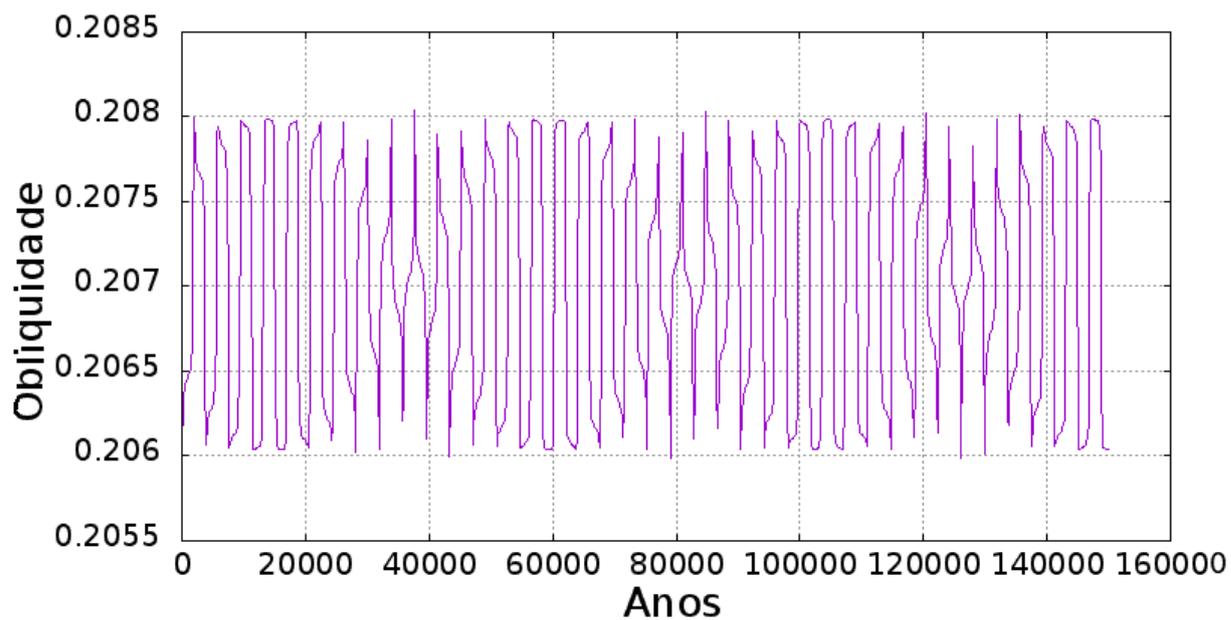


Figura 32 – Influência de Tritão na obliquidade de Netuno quando $a_0 \in (100 R_N, 2000 R_N)$.

A captura de Tritão (nos moldes propostos nesse trabalho) pouco ou nada influencia na obliquidade de Netuno (figuras 31 e 32).