

Marcelo Salles Batarce

UM CONTEXTO HISTÓRICO PARA
ANÁLISE MATEMÁTICA PARA UMA
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Rio Claro (SP)
2003

Marcelo Salles Batarce

**UM CONTEXTO HISTÓRICO PARA ANÁLISE MATEMÁTICA
PARA UMA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

Dissertação de Mestrado elaborada
junto ao Curso de Pós-Graduação
em Educação Matemática – Área
de Concentração em Ensino e
Aprendizagem da Matemática e
seus Fundamentos Filosóficos e
Científicos para obtenção do Título
de Mestre

Orientador: Rosa Lúcia Sverzut Baroni

Co-orientador: Vanderlei Marcos do Nascimento

Rio Claro - 2003

510.09 Batarce, Marcelo Salles
B328c Um contexto histórico para análise matemática para uma
educação matemática / Marcelo Salles Batarce. -- Rio Claro :
[s.n.], 2003
52 f.

Dissertação (mestrado) -- Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Orientador: Rosa Lúcia Sverzut Baroni

Co-orientador: Vanderlei Marcos do Nascimento

1. Matemática - História. 2. Número real. 3. Teoria da
medida. 4. Integração. 5. Lebesgue. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

Um Contexto Histórico para Análise Matemática para uma Educação Matemática

Marcelo Salles Batarce

Banca Examinadora:

Prof.a Dr.a Rosa Lúcia Sverzut Baroni

Prof. Dr. Romulo Campos Lins

Prof.a Dr.a Renata Cristina G. Meneghetti

Rio Claro, 06 de junho de 2003

**Universidade Estadual Paulista - Instituto de Geociências e Ciências
Exatas - Departamento de Matemática**

Koellreutter

Pode ser falta de modéstia acreditar que meu trabalho poderia oferecer alguma homenagem a um nome tão importante e a uma pessoa tão grandiosa. Eu assumo este risco lembrando que o professor Koellreutter, em seu trato diário, sempre se mostrou extremamente simples e respeitador do outro, quem quer que esse fosse. Esta capacidade de ser assim, talvez, é o que o tornou um dos maiores compositores, esteticista, educador, professor e conhecedor de música clássica do século passado. Por tudo, considero que suas atividades e sua obra são bastante essenciais para os dias de hoje.

Irineu

Meu pai foi o primeiro Educador Matemático que conheci, ele influenciou profundamente minhas concepções.

Isabela

Uma pessoa extremamente espontânea.

Ana Paula

A maior companheira.

Mariuza

Minha mãe não pode ver grande parte dos frutos de esforços de uma vida inteira.

Ormil

Um guerreiro, o maior guerreiro da Educação que conheci.

Agradecimentos

Rosa Lúcia Sverzut Baroni e Vanderlei Marcos do Nascimento

Durante a seleção e nos dias seguintes do resultado final, quando ocorreu a definição das orientações, foi a professora **Rosa** quem acolheu meu nome. Logo no início do Mestrado o Professor **Vanderlei** reforçou, quase que espontaneamente diante de um convite nosso, a atitude da **Rosa** e se tornou meu co-orientador. Meus primeiros contatos com estes professores são da época em que fui aluno da graduação. Parece-me que desses antigos laços persiste a essência de nossas aproximações porque, desde do início da elaboração da dissertação eles pareceram já pré-dispostos a apoiar-me. Isto me significou que, mais do que um apoio à elaboração da dissertação, o apoio desses professores era, efetivamente, ao meu trabalho. Eles demonstraram-me **confiança** em meu fazer profissional, talvez, mais do que fosse merecido. Esta rara demonstração de um para outro é, sem dúvida, digna de grande agradecimento.

Irineu Bicudo

De certo modo meu ingresso no Mestrado foi um acidente. Minha pretensão inicial era ser Professor do Ensino Fundamental e Médio. Por um motivo ou outro fui para o Mato Grosso lecionar na Universidade Estadual (UNEMAT). Em 1999, nos dias finais da inscrição para o processo de seleção para pós-graduação em Educação Matemática, decidi concorrer. A primeira pessoa que acolheu o meu nome foi o Professor **Irineu Bicudo**; a ele eu devo este agradecimento.

Aos Alunos do Programa que lá conviveram durante os anos de 2000 e 2001, em especial,

Chatô

Pequenas conversas, grandes descobertas. Antes de eu decidir por enviar um texto para qualificação, ele comentou: “se um trabalho estivesse pronto, ele não precisaria passar pela qualificação”. Foi uma dica simples e genial!

Gilli

Pequenas conversas, grande entusiasmo. Nossa última conversa antes da entrega do texto para defesa, entusiasmou minha tarefa de reescrita da Parte II deste trabalho.

Silvio

Longas conversas e caronas.

Aos Professores do Programa

Em especial ao Rômulo, Baldino e Tânia Cabral de quem eu admiro o trabalho.

Aos Professores do Departamento de Matemática

Lugar onde sempre fui bem tratado e respeitado, lugar onde sempre me senti à vontade.

À Professora Renata Meneghetti

Por suas oportunas contribuições.

Ao Professor Ormil Pillati e sua família

Na casa deles, diversas vezes fui acolhido durante os anos que estive em Rio Claro.

RESUMO

Neste trabalho caracterizamos duas Práticas Educacionais. De um lado, o **Ensino de Matemática** como sendo toda prática que procura se justificar através da existência de uma única Matemática de caráter universal e *a priori*, e que atribui para si, como missão, a transmissão dessa *Matemática* da forma mais precisa possível. Diante desta concepção nós propomos que a **História da Matemática para o Ensino de Matemática** tem como pano de fundo uma Matemática *a priori* e que, neste caso, os “fatos históricos” acabam conectados por uma lógica imposta, de forma implícita, que em última análise está fundamentada em uma concepção de Matemática. De outro lado, toda prática que considera determinar e ser determinada por uma concepção de Matemática é **Educação Matemática (EM)**. Assim, a **EM** considera suas práticas e a Matemática como partes de uma dialética. Na **EM** os estudos de **História da Matemática** se justificam como um espaço que considera a existência de distintas concepções de Matemática. Finalmente, apresentamos um Contexto Histórico para Análise Matemática (CHAM) como exemplo de considerações de História da Matemática, do ponto de vista da **EM** caracterizado por nós.

Palavras Chave – Educação Matemática, História da Matemática, Ensino de Matemática, Análise Matemática.

ABSTRACT

In this paper we understand two different Educational Practices. On one hand the **Mathematics Teaching** as all practice that justify itself because one believe there is a Mathematics which is universal and *a priori*. This way of teaching consider that its mission is merely the transmission of the universal Mathematics as accurately as possible. In this sense the History of Mathematics is tied up to the concepts and to the logic of this *priori* Science. On the other hand the **Mathematics Education** as a practice that consider that Mathematics is engendered dialectically and because of this take into account different mathematical conceptions. In this sense the studies of Mathematics History present several conceptions of Mathematics.

In this paper we also present a Historical Context for Mathematical Analysis (HCMA) as an example of how to understand the History of Mathematics from the perspective of Mathematics Education.

Key Words: Mathematics Education, History of Mathematics, Mathematics teaching, Mathematical Analysis.

Sumário

1	Introdução	8
1.1	A dissertação	9
2	Parte I.....	12
2.1	Introdução: O Ensino de Matemática	12
2.2	Educação Matemática	14
2.3	O Formalismo e o Ensino de Matemática.....	17
2.4	Educação Matemática e Ensino de Matemática	20
2.5	História da Matemática	21
2.5.1	História da Matemática e Ensino de Matemática	22
2.5.2	História da Matemática e Formalismo.....	22
2.5.3	História da Matemática e Educação Matemática.....	23
3	Parte II	26
3.1	Análise Matemática como História da Matemática para uma Educação Matemática	26
3.1.1	Elementos Peculiares do CHAM.....	28
3.2	O Sentido de Número Real em nosso Contexto Histórico	29
3.3	Função	32
3.4	Integração e Função uma abordagem Dialética de suas Histórias	35
3.5	Teoria da Medida	37
3.5.1	Jordan.....	37
3.5.2	Borel.....	39
3.5.3	Dois Aspectos do trabalho de Lebesgue	42
3.5.4	Mais um potencial para os modos de definir função	43
4	Conclusão	47
5	Referências	50

1 Introdução

Quando comecei a pensar sobre os motivos que me levaram a escrever o que escrevi, a ler o que li, a entender as coisas como entendi, vi que, em última análise, só poderia encontrar esses fundamentos e pressupostos em minha “formação”.

Alguns anos de estudo de música, antes da graduação, com o professor e compositor H. J Koellreutter, especialmente no campo do que ele denominou *estética*, área que continha elementos de História e Filosofia, marcaram-me fortemente, até os dias de hoje, de princípios que influenciariam minhas percepções e atuações na vida. Segundo Koellreutter (1987, P.1), “de acordo com as descobertas da matemática e da física dos últimos dez anos, a objetividade absoluta não existe”.

Para fundamentar este ponto de vista ele cita:

Temos que substituir o termo “observador” pelo de “participante” por não sermos capazes de observar o mundo físico objetivamente, pois, conforme ensina a física nova, não há apenas um mundo físico. Participamos dentro de um espectro de todas as realidades possíveis

(WHEELER, J. E. apud H. J. KOELLREUTTER, 1987, p.2)

E mais adiante, (TALBOT, M. Apud H. J. KOELLREUTTER, 1987, P.3) “Não há uma divisão precisa entre as realidades subjetiva e objetiva; a consciência e o universo físico são interligados.”

Finalizando, Koellreutter (1987, P. 2) define: “Objetividade, portanto, é o mínimo de subjetividade” e reforça: “Não existem conceitos absolutos em nenhuma área do conhecimento” (Idem).

O pensamento absolutista ainda persiste no Ensino de Matemática. Basicamente, este pensamento subsiste ao considerar a existência de um objeto *a priori*, a Matemática que é, desta forma, determinado de modo absoluto e objetivo.

Uma outra consideração de mesma índole e que complementa a noção absolutista do Ensino de Matemática, refere-se a sua auto-atribuição de uma missão primordial, a saber, a transmissão da Matemática.

Estes dois aspectos, ao nosso ver, estão na base das justificações de diversas práticas educacionais no campo do Ensino de Matemática.

Admitimos como princípio desta dissertação, a superação desta concepção de Ensino de Matemática. Nosso foco de superação estará no âmbito da primeira consideração e quanto à outra, será por consequência automaticamente abalada.

Com princípio, queremos dizer que não estamos dispostos a discutir os motivos desta empreitada. Antes, iremos apontar para o atual e vigoroso estabelecimento de um ambiente teórico/prático, que congrega pessoas e concepções que de uma forma ou de outra também se afinam com nosso princípio.

Como se deve esperar de todo profissional, prática e teoria, emoção e razão, intelecto e intuição devem ser consoantes e devemos declarar que nosso ímpeto de transcendência do absolutismo no Ensino de Matemática se fortalece também em nossa prática e experiência profissional como docente de Matemática.

1.1 A dissertação

A dissertação foi dividida em duas partes.

A Parte I pretende sugerir um modo de conceber a História da Matemática como Educação Matemática. É evidente que esta tarefa requer que caracterizemos os termos Educação Matemática e História da Matemática.

Isto nos dirige para um objetivo central, a saber, o de considerar o termo Educação Matemática, mais do que uma referência a uma área essencialmente metodológica, desenvolvedora de ferramentas para o Ensino de Matemática e considerá-lo um espaço mais amplo em relação às práticas tradicionais de Ensino de Matemática, para se falar de Matemática.

Em seguida o mesmo tipo de consideração será atribuída ao termo História da Matemática, ou seja, mostraremos de que forma a História da Matemática pode efetivamente significar mais do que uma área essencialmente metodológica, desenvolvedora de ferramentas para o Ensino de Matemática, significando, uma Educação Matemática conforme nossa concepção.

Diante desses objetivos, teremos que caracterizar mais um termo: “Ensino de Matemática”, o qual, juntamente com “Educação Matemática” e “História da Matemática”, completa a tríade central de nossas argumentações.

Nossa caracterização de Ensino de Matemática irá considerar como pedra fundamental de sua própria justificação de ser, uma concepção absoluta, universal e *a priori* da Matemática.

As caracterizações de cada termo apontam para uma constituição concomitante dos três. Isto significa que, cada um deles, como tratados aqui, não pode ser entendido de forma independente; eles são caracterizados com o intuito de estabelecer nosso objetivo, somente diante de nosso objetivo se revela o sentido de cada uma dessas caracterizações.

Na Parte II encontra-se o que “comumente” chamariam de *conteúdo* de História da Matemática. A princípio o conteúdo ou assunto de Matemática ali abordado, em si é arbitrário no sentido de que diversos outros temas poderiam ocupar seu lugar.

Foi dada prioridade ao ensino de terceiro grau, por um lado isto reflete um interesse próprio nosso, de outro lado, do ponto de vista teórico, seria importante que tratássemos de algo que pudesse bem representar tecnicamente a Matemática.

Aceitando a hipótese de que nesta Parte II estamos tratando de conteúdo Matemático (tecnicamente falando), nos colocamos na condição de *falar sobre Matemática* de um ponto de vista de Educação Matemática como História da Matemática.

Desta forma, o objetivo central, ou seja, a importância de considerar a Educação Matemática um espaço mais amplo do que as práticas do Ensino de Matemática só se concretiza integralmente na Parte II, onde um exemplo de como se pode considerar um conteúdo Matemático diante desta concepção, é fornecido

A Parte I e a Parte II devem ser entendida concomitantemente. A Parte II contém uma discussão de Elementos Históricos de Análise Matemática do ponto de vista de uma Educação Matemática. Apesar de que esteticamente há uma separação

e indexação das partes, cabe ressaltar que isto não reflete o modo pelo qual os resultados foram obtidos.

A construção da Parte II influenciou no estabelecimento da Parte I, foi na verdade um dos focos da pesquisa. Por esta razão, o exemplo daquilo que está fundamentado na Parte I não pode ser considerado, como de costume são considerados os exemplos, como secundário ou menos essencial.

Sugerindo a integração dos termos, batizamos a concepção que aqui será exposta como Educação História Matemática, conforme (BATARCE 2001, P. 59)

2 Parte I

2.1 Introdução: O Ensino de Matemática

Consideraremos Ensino de Matemática toda prática que procura se justificar através da existência de uma única Matemática de caráter universal e *a priori*. O Ensino de Matemática atribui para si, como missão, a transmissão *da Matemática* da forma mais precisa possível.

O **Ensino de Matemática**(...) Busca entender a Matemática, tomada como ciência, ou mesmo, como região de inquérito, analisando a lógica subjacente a esta ciência, para poder colocar esse conhecimento a serviço da ação do Ensino. O **ensino** caracteriza-se pela tarefa de intermediar o conhecimento produzido, as formas de sua produção e o conhecimento em construção do aluno.

(BICUDO, 1999, p. 6)

O Ensino de Matemática, assim definido, desconhece a possibilidade de suas influências na Matemática e considera apenas o contrário disto, ou seja, a existência de influências da Matemática em si próprio (no conjunto das práticas que são de Ensino de Matemática). Diante de tudo isto, a principal tarefa do Ensino de Matemática é conhecer melhor *a Matemática*.

Porém, sem se preocupar muito em admitir, aquele que pratica o Ensino de Matemática, reconhece que há quem conhece um pouco e há quem conhece mais, mas, não há quem por completo conheça a Matemática e não há um lugar onde se pode encontrá-la de forma plena. A este respeito é interessante a seguinte observação:

“... eles não têm dúvida em proclamar com grande sabedoria que a Matemática é aquilo que os Matemáticos fazem, para, em seguida, terem de admitir que os Matemáticos fazem a barba e fazem compras, e que não é disso que estão falando. Quando se lhes pergunta de que, então estão falando, admitem contrafeitos a circularidade, e confessam que a Matemática é aquilo que os Matemáticos fazem quando estão fazendo Matemática.... a tal

“melhora” reduz-se ao aumento do número das pessoas que também não sabem, nem querem saber, do que estão falando”.

(BALDINO, 2001, p. 88).

Essas evidências nos levam a considerar o contrário da crença central do Ensino de Matemática, ou seja, que a Matemática plena e absoluta não existe a *priori* e, enfatizando esta proposição, passamos a considerar também suas conseqüências.

Desde que as práticas de Ensino de Matemática pretendem ser guiadas pela Matemática e que a plenitude da Matemática nunca é encontrada, essas práticas são na verdade sempre guiadas por uma noção fragmentada que se acredita que seja a Matemática.

Mais precisamente, eliminado a hipótese de que exista a Matemática de forma completa, não se pode pensar nem mesmo em um fragmento seu. A noção não pode ser fragmentada em si; ao invés disto, concluímos que toda prática de Ensino de Matemática é na verdade norteadada por uma concepção de Matemática.

A influência das concepções e crenças sobre as práticas dos professores e sobre o desempenho dos alunos em Matemática parece ser aceita pela maior parte dos que pesquisaram sobre o assunto

(CURY, 1999, p.31).

De forma mais específica, Silva (1997) também constatou a existência de uma Metodologia Clássica, junto aos professores/pesquisadores de Matemática, norteadada por crenças.

O corpo deste trabalho ou o que até agora foi desenvolvido nos permite concordar com a afirmação sobre a existência de uma metodologia “clássica” para sala de aula de Matemática, norteada pelas faces epistemológica, psicológica, didática, pedagógica e política. No contexto particular da sala de aula de Matemática, ainda mais particularmente, na sala de aula do professor-pesquisador em Matemática, podemos especificar as crenças que norteiam a chamada “metodologia tradicional vigente” Tal metodologia é norteada então, por concepções...

(SILVA, M. 1997, p. 24).

Ao eliminarmos a hipótese de que a Matemática exista *a priori*, também nos tornamos aptos a considerar que não só as concepções de Matemática determinam as práticas de Ensino de Matemática, mas que o contrário também é válido, ou seja, toda prática de Ensino de Matemática determina uma concepção de Matemática (BALDINO, SILVA M., 1991, 1997).

2.2 Educação Matemática

Toda prática que considera determinar e ser determinada por uma concepção de Matemática é Educação Matemática. Assim, a Educação Matemática considera suas práticas e a Matemática instituídas de forma concomitante.

Para a Educação Matemática, Matemática é apenas um termo, uma palavra que se materializa e adquire consistência apenas durante uma prática. Neste caso, a Matemática não é determinada *a priori*, ela abandona seu caráter absoluto e adquire um caráter de relatividade e subjetividade.

A Etnomatemática é um exemplo de Educação Matemática já que considera explicitamente a existência de diferentes Matemáticas, que se definem, em última instância, de acordo com elementos culturais ou étnicos dos diferentes povos.

Lins (1992, 1999, 2001) criou um interessante modelo teórico para Educação Matemática, o Modelo dos Campos Semânticos (MCS). O (MCS) desloca o foco da noção de conhecimento de um suposto conteúdo objetivo, para as possíveis enunciações feitas por um sujeito em uma atividade. Estes enunciados são, em si,

produções de significados, são crenças-afirmação em conjunto com uma justificção.

Lins et al (2001), analisando os processo gerados pelos estudantes (*produção de significados*) para resolver um problema Matemático proposto por eles em um curso de Álgebra Linear, observa que:

É possível que “a matemática do matemático”, isto é, a matemática estruturada pelos matemáticos (cálculo, análise, álgebra linear, álgebra, e assim por diante, e internamente, dentro de cada um destes “blocos”) não seja adequada para Educação Matemática dos professores de Matemática.

(LINS et al, 2001, tradução nossa)

O extinto Grupo de Pesquisa Ação da Unesp de Rio Claro, coordenado pelos professores Doutores Roberto Ribeiro Baldino e Tânia Cristina Baptista Cabral durante os anos de 1993 a 2001, possuía uma linha de pesquisa em Educação Matemática denominada: “*Análise dos condicionantes da sala de aula e intervenção pedagógica*”.

As pesquisas do grupo apontam para uma crítica às ideologias que consideram apenas as existências do aluno, do professor, da Matemática e do Ensino ideais, independentes das condições sociais e culturais e das práticas de sala de aula. O modo pelo qual se constitui o grupo mostra o grau de importância que o mesmo dá a esta questão:

O grupo constitui-se como gerenciador de intervenções nas diversas etapas de ensino, notadamente em sala de aula, a partir da ação dos próprios professores. Cada professor realiza a intervenção dentro da margem de liberdade que tem como regente. Nessas condições a pesquisa se vale de técnica de intervenção diferencial. Assim, este grupo fundamenta-se na ação-reflexão-ação a partir de situações concretas de sala de aula e estuda questões epistemológicas, psicossociais e políticas daí emergentes.

(BALDINO, 2003)

As *concepções espontâneas ou prévias* são também exemplos de como concepções subjetivas, neste caso através do aluno, têm sido consideradas. Pesquisas neste âmbito são mais comuns ao Ensino de Física. O provável motivo para que a questão da subjetividade no ensino de ciências seja assumida mais explicitamente, é que a constatação mais “científica” de que o conhecimento não é objetivo, vem da própria física no começo do século passado.

Marco Antônio Moreira (2000), em uma conferência proferida no III Encontro Internacional de Aprendizagem Significativa, referindo-se ao que considera ensino fora de foco, faz uma crítica aberta ao Ensino sustentado pela objetividade dos conceitos. O mesmo retoma pontos destacados na obra *Teaching as a subversive activity*, de Postman e Weingartner (1969), considerando-os ainda preservados hoje:

(...) a escola ainda se ocupava [em 1969] de ensinar conceitos fora de foco, dos quais os mais óbvios eram:

1. O conceito de “verdade” absoluta, fixa, imutável, em particular desde uma perspectiva polarizadora do tipo boa ou má.
2. O conceito de certeza. Existe sempre uma e somente uma resposta “certa”, e é absolutamente “certa”.
3. O conceito de entidade isolada, ou seja, “A” é simplesmente “A”, e ponto final, de uma vez por todas.
4. O conceito de estados e “coisas” fixos, com a concepção implícita de que quando se sabe o nome se entende a “coisa”.
5. O conceito de causalidade simples, única, mecânica; a idéia de que cada efeito é o resultado de uma só, facilmente identificável, causa.
6. O conceito de que diferenças existem somente em formas paralelas e opostas: bom-ruim, certo-errado, sim-não, curto-cumprido, para cima-para baixo, etc.
7. O conceito de que o conhecimento é “transmitido”, que emana de uma autoridade superior, e deve ser aceito sem questionamento.

Concluem, então, dizendo que seria difícil imaginar qualquer tipo de educação confiável para preparar os alunos para um futuro drasticamente em transformação, do que aquela que promovesse conceitos e atitudes como esses da lista. Dessa educação, resultariam personalidades passivas, aquiescentes, dogmáticas, intolerantes, autoritárias, inflexíveis e conservadoras que resistiriam à mudança para manter intacta a ilusão da certeza.

Ao contrário, as estratégias intelectuais de sobrevivência nessa época de energia nuclear e de viagens espaciais dependeriam de conceitos como relatividade, probabilidade, incerteza, função...”

(POSTMAN, NEIL & WEINGARTNER, CHARLES apud MOREIRA, 2000, p.2, Grifo nosso).

Mais adiante:

(...) Ainda se ensinam “verdades”, respostas “certas”, entidades isoladas (...) O discurso educacional pode ser outro, mas a prática educativa continua a não fomentar o “aprender a aprender” que permitirá à pessoa lidar frutiferamente com a mudança, e sobreviver.

Ao invés de ajudar os alunos a construir significados para conceitos como relatividade, probabilidade, incerteza, sistema, (...) a educação agregou novos conceitos fora de foco (...)

(MOREIRA, 2000, p. 2 e 3)

2.3 O Formalismo e o Ensino de Matemática

É possível evidenciar algumas concepções mais comuns às práticas do Ensino de Matemática. Dentre estas destacamos uma concepção que se reporta ao termo Formalismo. A tradição do termo tem origens no que se considera como uma das três correntes da Filosofia da Matemática que se constituíram em debates no início do século XX.

De fato, quer se queira quer não, toda a pedagogia matemática, mesmo que se escassamente coerente, apoia-se em uma filosofia da matemática. A tendência modernista é baseada essencialmente na concepção formalista da matemática

(THON apud CURY, 1999, p. 31)

Sobre a tradição do termo Formalismo, encontramos o seguinte:

O conceito moderno de formalismo é creditado a Hilbert (1862-1943) que, pela primeira vez, deu um caráter formal a geometria.

(...) Com sua axiomatização da geometria, ele efetivamente eliminou todo apelo à intuição geométrica, ou mesmo a uma intuição do espaço. Para ele os axiomas geométricos deveriam ser satisfeitos em qualquer domínio de objetos. De fato, Frege escreveu a Hilbert: "Parece-me que você quer separar completamente a geometria de nossa intuição de espaço e a tornar uma disciplina puramente lógica, como a aritmética"

(MENEGETTI, 2001, p.113)

Do ponto de vista da Educação Matemática, o problema central no Ensino de Matemática fundamentado no Formalismo estaria em restringir-se exclusiva e excessivamente aos significados formais como os únicos possíveis ou corretos para a Matemática e, conseqüentemente, para as práticas de Ensino de Matemática.

Este tipo de abordagem desconsidera sem justificativas, além destas, qualquer outra concepção de Matemática que não acredite que a essência da Matemática se encontra nas relações formais entre os objetos Matemáticos. A situação se agrava quando este princípio é assumido implicitamente, ou quando se desconhece os fundamentos ou conseqüências últimas das concepções formalistas. Como por exemplo, a seguinte:

Para Snapper (1979), a filosofia que mais se aproxima do formalismo é o "nominalismo". No nominalismo, as entidades abstratas não têm existência de qualquer tipo, nem fora da mente humana, mantidas pelo realismo, nem como construções mentais dentro da mente humana, sustentadas pelo conceptualismo. Para o nominalismo, as entidades abstratas são meras articulações vocais ou linhas escritas, meros nomes. Semelhantemente, quando os formalistas tentam provar uma certa teoria axiomatizada...[tal estudo] é estritamente um estudo sintático, desde que nenhum significado ou entidades abstratas são associados...

Os formalistas radicais propagam uma imagem da razão como capturada por regras de um cálculo formal; raciocinar é nada mais do que jogar um jogo de fórmulas.

... se a matemática é um jogo de fórmulas, então não há por que buscar significado no trabalho do matemático.

(IDEM, p. 117,118)

Uma questão que pode surgir aqui é a seguinte: Como é possível que alguns tipos de práticas de Ensino de Matemática possam se manter fundamentadas em princípios que muitas vezes elas próprias não conhecem perfeitamente, como temos sugerido com respeito ao Formalismo?

Silva, M. (1996) mostrou a possibilidade de justificar esta manutenção, através de um mecanismo de tradição. No que denominou Ensino Tradicional Vigente (ETV), constatou a existência de uma Metodologia clássica entre professores/pesquisadores de Matemática que valoriza o formalismo no Ensino de Matemática. O ETV é

(...)[norteado por concepções] didáticas: baseadas na crença que o mais abstrato é mais “fácil” para o aluno organizar o ensino segundo a ordem axiomática de arquivamento dos conteúdos: primeiro conjuntos, depois números (naturais); primeiro números reais, depois funções de variável real; primeiro limites, depois continuidade etc.; devendo-se incluir no ensino, se não a fundamentação (demonstração), pelo menos a possibilidade dela; (...)

(SILVA, M. 1996, p.24).

A Educação Matemática não desconsidera a possibilidade de uma concepção formalista para as suas práticas, mas o que ela deve sustentar é que esta é uma possibilidade entre outras e que, caso seja a escolhida, seus fundamentos e as justificativas de seu uso devem ser explicitados ao máximo possível. Observações como as seguintes devem permear esta explicitação:

Tiles adverte que, filosoficamente, o nome de Hilbert é firmemente associado com o formalismo, i.e., com a visão de que a matemática é essencialmente um jogo de papel e caneta jogado com símbolos escritos, um jogo que pode ser útil na ocasião, mas que não necessita de justificações daquelas aplicações ou de alguma outra fonte...

Na visão de Tiles, Hilbert nunca expôs este tipo extremo de formalismo e de fato ele não foi formalista quando chegou à aritmética dos números finitos. Nesse sentido, Hilbert vê a prova de consistência como um modo de basear os clamores de existência e, assim, de reivindicar o poder criativo do raciocínio matemático.

(MENEGHETTI, 2001, p. 117)

Caberia ressaltar também que Church e Gödel demonstraram que Hilbert estava errado em pensar que deve ser possível, por meio de uma seleção de notações adequadas, ter um sistema formal capaz de ser interpretado como uma formalização da aritmética clássica.

Concepções opostas ou de outras correntes filosóficas, como intucionismo ou logicismo, seriam bem aceitas neste processo de negociação e valorização da multiplicidade das diferentes concepções filosóficas da Matemática:

Certamente, tudo que nós fazemos pode ser traduzido em linguagem aritmética, mas se nós renunciarmos diretamente, das visões geométricas e intuitivas, se ficarmos reduzidos a pura lógica, a qual não nos permite uma escolha das coisas que são corretas, então nós dificilmente refletiremos sobre muitas questões e certos conceitos, por exemplo, a maioria dos que iremos examinar hoje aqui, irão escapar-nos completamente.

(LEBESGUE, 1966, p.179, Tradução Nossa).

A História da Matemática, do ponto de vista da Educação Matemática, que iremos propor, é um ambiente fértil para apresentar esta variedade de concepções filosóficas e teremos a oportunidade de nos referir a isto nos próximos parágrafos.

2.4 Educação Matemática e Ensino de Matemática

A Educação Matemática considera o Ensino de Matemática como um tipo particular de Educação Matemática já que o considera como um conjunto de práticas determinado e que determina uma concepção de Matemática.

Existem duas peculiaridades do Ensino de Matemática.

Primeiro, as justificativas para suas práticas situam-se primordialmente na necessidade da transmissão precisa de um “suposto” conteúdo Matemático. Segundo, por considerar a Matemática de forma absoluta, desconsidera a existência de concepções de Matemática.

Quanto maior a dificuldade de se livrar destas peculiaridades, maior a dificuldade de se compreender a Educação Matemática. Uma postura comum ao apego a estas peculiaridades é a de considerar a Educação Matemática, exclusivamente, como ferramenta Metodológica. Lins (1999), referiu a este tipo de postura como práticas educacionais associadas ao pressuposto de que “somos todos iguais”. Segundo o autor, elas:

reforçam a noção de Educação Matemática como fundamentalmente desenvolvedora de metodologias. A Psicologia, como área de suporte, proveria o como somos, a Matemática o que a Matemática é, e a Educação Matemática daria o como Ensinar. Com S1 (pressuposto de que somos todos iguais) e E1 (práticas educacionais associadas a este pressuposto) vamos até uma Educação Matemática interdisciplinar, mas não além disto.

(LINS, 1999, p. 86, ênfase nossa)

Esta é a conseqüência última do Ensino de Matemática, ou seja, considerar qualquer elemento que por ventura infiltre em suas práticas, que não a sua Matemática, como um anexo não essencial. Por exemplo, uma ferramenta Metodológica.

2.5 História da Matemática

A História pode estar à busca da revelação de uma realidade de existência *a priori* ou pode assumir que a partir de seus estudos, se materializa uma realidade que, como outra qualquer, não poderia existir *a priori*.

A crença na evolução como um processo natural que garante a melhora do mundo através do tempo, coaduna-se com ponto de vista que busca através da

História resgatar uma realidade *a priori*. Esta concepção acredita que o presente é sempre melhor que o passado.

Vejamos as afinidades destas concepções especificamente nos estudos de História da Matemática.

2.5.1 História da Matemática e Ensino de Matemática

Para o Ensino de Matemática, as coisas em si, a menos que sejam a Matemática, não são essenciais, são auxiliares de sua prática.

Por enxergar uma única Matemática, o Ensino de Matemática só pode acreditar em uma História da Matemática que revele esta Matemática. A História da Matemática para o Ensino de Matemática tem, como pano de fundo, esta Matemática *a priori*.

Os “fatos históricos” acabam conectados por uma lógica imposta de forma implícita que, em última análise, é a de uma concepção de Matemática. Neste caso os fatos perdem o que de mais histórico possam ter.

Em livros de História da Matemática encontramos vários exemplos que comprovam tal afirmação: delega-se aos métodos gregos de exaustão as origens da teoria moderna da integração. O conceito de número real moderno tem origens na teoria das proporções de Eudoxo. A análise refina o cálculo.

Este procedimento também é comum em alguns livros de Matemática que trazem referências históricas veja-se, por exemplo: (ÁVILA, BARTLE, MEDEIROS e MELLO, 1999, 1966, 1989, Notas Históricas, P. 1, P. 1-4).

2.5.2 História da Matemática e Formalismo

A partir do momento em que o Ensino de Matemática considera a Matemática Formal, só pode considerar este formalismo, por que assim o faz sempre, como uma essência da Matemática, portanto como algo atemporal.

No caso em que o Ensino de Matemática está filiado ao Formalismo, ou seja, considera-o como uma essência da Matemática e considera que seu (do Ensino de

Matemática) objetivo é a transmissão do Formalismo, carregará para a História da Matemática a lógica formal que estrutura sua concepção de Matemática.

Se além disto utilizar um pressuposto tácito de evolução dos conceitos, que garante que o que vem depois é melhor do que aquilo que existia antes, ele irá estabelecer que o melhor, ou equivalentemente, o que vem depois é o mais formal.

Este algo melhor, normalmente recebe o adjetivo de mais rigoroso ou mais preciso em contraste com adjetivos pejorativos para a Matemática e seu Ensino tais como, noção imprecisa ou intuitiva.

Esta abordagem admite a origem da Matemática na origem do Mundo, pois, por exemplo, percebe que a Teoria da Integração tem origens no Método de Exaustão, da mesma forma pode reconhecer nas manifestações da Antigüidade, as origens do Método de Exaustão e continuando sua busca, perscrutando, cavoucando continua esse processo sem fim.

A dificuldade que surge nesta concepção é a de escolher para qual das indagações seguintes responde positivamente: será que encontramos no passado as origens das Teorias Modernas? Ou delegamos àquilo que percebemos como as origens, disto que percebemos como Teorias Modernas, o *status* de passado?

2.5.3 História da Matemática e Educação Matemática

As mudanças de linguagens, simbologia e a necessidade de uma “tradução” das produções de outras épocas compatível com nosso entendimento, podem, por descuido, levar-nos à uma visão fragmentada ou parcial de um contexto mais amplo; muitas vezes caímos na armadilha de inserir um ponto de vista moderno em uma teoria que a princípio poderia não contê-lo.

O estudo simplificado, muitas vezes atende a ansiedade de alguns em conhecer História da Matemática, mas pode nos deixar mais confusos do que satisfeitos. Vamos citar um simples exemplo que pode levar-nos a compreender ao menos, o porquê de tais confusões.

Quando é dito que Newton e Leibniz descobriram o Teorema Fundamental do Cálculo, o que pode significar isto, já que foi somente cerca de 200 anos após a existência deles, que Cauchy e Riemann deram definições para a Integral Definida?

Se, permitimos que o Teorema Fundamental do Cálculo seja uma observação da relação entre quadratura e tangente, ficamos mais próximos de entendermos a ligação entre Newton e Leibniz e o TFC. Sobretudo, é preciso admitir que não necessitamos uma definição formal de Integral Definida para “demonstrar” o TFC. Ou, outra possibilidade é admitir que estamos diante de dois objetos diferentes, quais sejam: O problema entre quadratura e tangente e a demonstração moderna do TFC.

Este tipo de consideração concorda com o ponto de vista da Educação Matemática caracterizada aqui. Qual o lugar da História da Matemática neste quadro?

A Educação Matemática pode considerar suas práticas em si independente de uma Matemática *a priori* e assim considera a História da Matemática. A História da Matemática não necessita ocupar uma posição auxiliar como, por exemplo, objetivada exclusivamente para motivar um suposto Ensino da Matemática.

História da Matemática e Matemática são partes de uma dialética. A História da Matemática se justifica em si como um espaço que considera a existência de distintas concepções de Matemática. E, a medida em que mostra a existência de uma variedade de Matemáticas, cada uma delas definidas em um contexto Histórico Matemático, relativiza o termo: “Matemática”.

Bueno e Lins (2002) sugerem especificamente objetivos desta espécie para os cursos de História da Matemática. Sugerem que os cursos de História da Matemática podem ser úteis para discutir os processos de produção de significados de Matemática.

A História da Matemática como Educação Matemática não necessita que as conexões de seus objetos se justifiquem através de uma noção de Matemática a

priori. Antes, a partir da História da Matemática se mostram diferentes objetos Matemáticos, a saber, os objetos históricos.

Esta “disciplina”, a História da Matemática, jamais poderia esquecer, por exemplo, que o formalismo se localiza em um período determinado e não é uma essência atemporal da Matemática. Seu ponto de vista (da História da Matemática) deve fundamentar-se no contrário deste esquecimento, ou seja, deve materializar objetos matemáticos historicamente.

A História da Matemática enquanto Educação Matemática considera mais justo apresentar o formalismo explicitamente como um acontecimento histórico e não implicitamente como uma essência da matemática.

Segundo Meneghetti, o próprio Hilbert,

(...) Entendeu o formalismo não como uma descrição completa da natureza da Matemática, mas como um meio de defender o método axiomático e o clamor pela consistência nas investigações em Matemática. Assim que novos conceitos e novas entidades forem definidos sem contradição, a matemática pode clamar que coisas existem e são objetos legítimos de investigação.

(MENEGHETTI, p. 114)

Finalmente, é imprescindível compreender a História da Matemática, não como uma ferramenta para a Educação Matemática, mas como uma Educação Matemática em si. Valorizando a materialização da Matemática nos contextos históricos, a História da Matemática torna-se Educação Matemática.

Portanto, a resposta mais equivocada que pode ser dada à questão do valor da História da Matemática para Educação Matemática, é aquela que a considera apenas um instrumento metodológico, uma ferramenta motivadora para o Ensino de Matemática.

3 Parte II

3.1 *Análise Matemática como História da Matemática para uma Educação Matemática*

Nosso ponto de vista desconsidera a existência de uma História objetiva ou real e, portanto, nosso foco não pode estar na fidelidade dos fatos históricos. Nosso foco está no uso e nas concepções de História da Matemática que, para nós, em si, formam o único tipo de História possível (portanto real): a História que se conta.

Nossa atenção estará voltada para o que chamaremos de **um Contexto Histórico para Análise Matemática (CHAM)**. Uma História da Análise, típica de uma História da Matemática para o Ensino de Matemática, conforme caracterizado na Parte I, evidencia-se no uso de um conceito de evolução tácito, no sentido de uma melhora também tácita, garantida simplesmente pelo passar do tempo, em uma direção que aponta para a Análise Matemática como uma solução para a **falta** de rigor do Cálculo.

Só é possível considerar a falta de algo, onde algo é necessário, portanto conclui-se que a abordagem que considera o Cálculo com falta de rigor, considera a existência da necessidade deste rigor já no Cálculo tanto como na Análise Matemática. Fazendo juz à nossa caracterização do Ensino da Matemática e sua História, uma tal abordagem provavelmente acreditaria que a necessidade deste rigor é objetiva, universal e, neste sentido, a-histórica.

Neste ponto, a primeira questão pertinente, ao nosso ver, seria: Este complemento que Análise Matemática traz para o Cálculo é uma peculiaridade da Análise Matemática? Afinal o que é Análise Matemática?

Pretendemos propor uma resposta para a segunda questão, através da caracterização de um objeto, o CHAM, com o intuito de responder afirmativamente a primeira questão. Nossa tarefa será a de destacar e enfatizar a existência desta peculiaridade de modo que se possa caracterizar a Análise Matemática através dela (da peculiaridade).

Diante disto, consideraremos também que este complemento só pode ser considerado assim (enquanto um complemento) do ponto de vista formal. Do ponto de vista histórico e epistemológico ele é melhor representado por uma mudança de concepção, ou seja, sugerimos que a Análise Matemática não solucionou problemas previamente existentes, porque estes defeitos só podem ser observados diante de um ponto de vista extremamente peculiar, o ponto de vista da Análise Matemática. Deste modo seria mais justo considerar que ela criou e resolveu problemas inexistentes em outros contextos.

Nosso ponto de vista é estritamente Histórico-Epistemológico, seu sentido é o de apresentar um contexto que concebe a Análise Matemática não apenas como uma tentativa de “consertar” o Cálculo fornecendo-lhe rigor e fundamento, mas, como um conjunto de objetos histórico-matemáticos que criaram necessidades que não existiam *a priori* e para elas dispensaram esforços que culminaram em uma crise de fundamentos, também não existente *a priori* e, no estabelecimento de novas concepções.

Em nosso tratamento fica enfatizada a relatividade das noções de rigor e precisão, considerado que estes não são termos objetivos e *a priori* porque, pelo menos neste caso, são objetos peculiares de um contexto histórico, o CHAM.

Assim, nosso intuito é agrupar objetos da História da Matemática, sugerindo elos que permitem tal agrupamento, de modo a formar uma História da Matemática para Educação Matemática.

Consideraremos o CHAM como Educação Matemática, na medida que iremos sugerir um caso específico de uso da História da Matemática, em si, que apresenta uma peculiar concepção, ao invés de absoluta, que constitui uma Matemática. Ou de acordo com Bueno e Lins (2002), como um espaço onde os estudantes podem discutir processos de produção de significados.

Portanto, devemos insistir, nossa intenção não é, nem poderia ser, contar a História de uma Análise Matemática pré-concebida. Nossa intenção é sugerir uma

caracterização da Análise Matemática, através da História, que possa distingui-la de outros objetos Matemáticos, como o Cálculo por exemplo.

Mas, é esperado que haja relações entre qualquer pré-concepção do termo e nossa apresentação; afinal, caso contrário, não haveria motivos convenientes para a escolha de assim batizarmos nossa apresentação. Além disto, devemos observar que nosso tratamento não implica na impossibilidade de conceber as relações técnicas entre o Cálculo e a Análise Matemática mas, sim, na possibilidade de considerá-los também independentes destas relações *a priori*.

3.1.1 Elementos Peculiares do CHAM

Os exemplos histórico-matemáticos, como a função de Riemann, descontínua em um subconjunto de pontos denso em um intervalo e ainda assim integrável; a função de Weierstrass, contínua sem derivada em nenhum ponto; a curva de Peano que preenche uma região de duas dimensões; a função de Dirichlet, descontínua em todo um intervalo; o conjunto de Cantor obtido por um processo infinito de subtração de uma terça parte de um estágio para o outro e inúmeros outros que habitam as bibliografias da História da Análise, simbolizam a peculiaridade do contexto que queremos destacar.

A necessidade de uma terminologia distinta e específica é sem dúvida algo que delimita e materializa um objeto. Por esta razão, além dos exemplos em si, a peculiaridade das designações dadas aos objetos do CHAM, explicitada diante da impossibilidade de se referir a estes mesmo objetos através de concepções e termos vigentes e já estabelecidos em qualquer outro contexto, como por exemplo, no Cálculo, fortalecem nossa caracterização.

Um exemplo clássico, tanto nos livros de História como nos cursos de Matemática é a função de Dirichlet. Ela nos mostra a necessidade de uma concepção específica de termos como área e até mesmo uma mudança de terminologia, a saber ao invés ou equivalentemente a área, temos os termos: conteúdo ou conjunto de pontos.

De modo mais geral, veremos que a Análise Matemática sugere uma especificidade para o termo “medida” através da “moderna” Teoria da Medida/Integração enquanto um episódio de nossa História.

3.2 O Sentido de Número Real em nosso Contexto Histórico

Como observou Lintz (1985), do ponto de vista formal Matemático não se pode fazer uma equivalência entre os Números Reais e a “Reta Real”.

Mas então, onde fica aquela “reta real” que desenhamos no quadro negro? Não fica em lugar algum se aceitarmos a concepção de matemática como entendida na Cultura Ocidental, porque aquela reta que desenhamos no quadro negro só pode ser compreendida como uma peça do espaço visível na qual nos movemos de um lado para outro e isso é irredutível a uma axiomática à la Ocidente, isto é, baseada na noção de conjunto abstrato. É um conceito essencialmente orgânico e só pode ser entendido como tal pela nossa intuição de espaço.

Mas então se \mathbf{L} é essa reta visível, desenhada no quadro negro é claro que não é possível definir nenhum isomorfismo entre \mathbf{R} e \mathbf{L} [reta real], porque \mathbf{R} é uma “entidade matemática” e \mathbf{L} não o é, pois não passa de um risco branco no quadro negro!

(LINTZ, 1985, p. 4)

As possíveis relações entre Número Real e o “continuum” da Reta, são exemplos que podem ser explorados pela História da Matemática, mas que não fazem parte de um tratamento formal da Matemática.

Se um Ensino de Matemática estiver extremamente comprometido com uma concepção formal, provavelmente assumirá uma das seguintes posturas: desconsiderará estas relações, ou irá abordá-las como um apêndice, talvez através da História da Matemática como uma motivação para o Ensino dos Números Reais.

Em termos dos cursos de Análise Real (graduação), o primeiro caso normalmente é justificado pela necessidade do cumprimento dos conteúdos da ementa da disciplina. Esta é uma característica típica do Ensino de Matemática,

justificar-se considerando exclusivamente a matemática formal e a necessidade de transmiti-la da forma mais perfeita e completa, cumprindo a ementa.

Uma observação que não se parece notar é que, para quem desconhece a concepção formal ela se valoriza muito mais na medida que se mostra uma demanda para sua existência. Seria oportuno criar uma demanda para o estabelecimento da moderna definição de Número Real¹?

A apresentação dos diferentes processos de construção dos números reais, certamente poderia solicitar relações deste tipo, mas, as modernas abordagens formais dos cursos de Análise Matemática, pelo menos no Brasil, têm dado pouca importância para uma construção dos Números Reais, anterior a apresentação de uma estrutura algébrica geral e abstrata de corpo ordenado completo, na qual os Números Reais são elementos deste conjunto.

Se olharmos um livro moderno de Análise Matemática, será visto que não há um capítulo que trata especificamente da construção dos Números Reais. Na maioria das vezes é postulado o conhecido axioma do supremo ou a existência de um corpo ordenado completo.

Frisamos, porém, que nosso ponto de vista coincide com o exposto na p. 511 de Spivak: “É inteiramente irrelevante que um número real seja, por acaso, uma coleção de números racionais; tal fato nunca deveria entrar na demonstração de qualquer teorema importante de números reais. Demonstrações aceitáveis deveriam usar apenas o fato de que os números reais formam um corpo ordenado completo”.

(...) Ora, já concordamos, desde o capítulo anterior, em adotar o método axiomático, segundo o qual a natureza intrínseca dos objetos matemáticos é uma matéria irrelevante, sendo o importante as relações entre esses objetos.

(LIMA, 1976, 47, 48. Grifo nosso).

¹ O termo definição de Números Reais se refere as diferentes construções (séries de Cauchy, decimais infinitos, intervalos encaixantes e qualquer outra equivalente) ou enquanto um elemento de uma estrutura algébrica (corpo ordenado completo) seja partindo do axioma do supremo ou da existência de um corpo ordenado completo.

Outra maneira mais sutil de desconsiderar as demandas peculiares e históricas da Análise Matemática, atitude típica de uma História da Análise como ferramenta para o Ensino de Matemática, ocorre quando esta História considera implicitamente o “continuum da reta” uma noção imprecisa (muitas vezes isto equívale a dizer intuitiva), que se tornará precisa com o moderno conceito de Número: a definição de Número Real. Neste caso, cada um dos termos torna-se objetivo e atemporal e portanto não histórico.

Em nosso ponto de vista, as demandas históricas da Análise Matemática são efetivamente consideradas no tratamento dos Números Reais, diante de uma ampliação dos significados das relações entre ambos, ou seja, dos Números Reais e do “continuum da reta”.

Tecnicamente, os Números Reais (um corpo ordenado completo) são um fundamento sólido sobre o qual se edifica a construção formal dos resultados da Análise Matemática. No CHAM, os Números Reais, além de fundamento, é também resultado e essência de um processo, o processo histórico. Ele surge como uma demanda histórica.

É preciso ter em mente que se os números assim não fossem definidos, ou seja, como Número Real, eles não estariam associados biunivocamente à Reta e que, em nenhum outro contexto, que não da Análise Matemática, esta relação formal é necessária. Os Gregos, por exemplo, não associavam grandezas geométricas a números.

Tampouco a continuidade precisaria ser questionada. É necessário suspeitar que existem buracos nas linhas e nas curvas? Ou suspeitar da validade da proposição do Teorema do Valor Intermediário? Não é à toa que do ponto de vista técnico a existência dos números reais seja um axioma. O CHAM explicita e enfatiza este fato.

Assim, o CHAM materializa Número Real e o “continuum da reta” como partes de uma dialética. Só se pode falar de Número Real diante do “continuum” da Reta e

vice versa. Mais do que isto, esta relação entre Número Real e o “continuum” da reta é sugerida como algo extremamente peculiar.

Esta relação não hierarquiza Número Real e o “continuum” da Reta, um enquanto noção, outro enquanto algo preciso; considera que tanto o “moderno continuum da reta”, como os Números Reais são partes de uma mesma coisa, de um objeto ou episódio do CHAM.

3.3 Função

Iniciamos esta seção com as seguintes observações:

A memória de Riemann passou para seus sucessores o ponto de vista que uma função de uma variável real deve ser considerada como qualquer correspondência $x - f(x)$ entre números reais; uma função não precisa possuir as propriedades (e.g., continuidade e integrabilidade) normalmente designadas aos exemplos mais familiares de função que acontecem em análise, embora, em seus exemplos, a função pode ser representada através de uma expressão analítica. Um de seus discípulos, Hermann Hankel (1839-73), professor de matemática na universidade de Tübingen, (...) explicitou o que estava implícito em Dirichlet e Riemann: funções concebidas por estes matemáticos não possuem propriedades gerais. Desta forma, o primeiro passo em uma análise do novo conceito de função seria remover todas as idéias conectadas com as velhas noções e a analisar “**a multiplicidade das possíveis relações entre duas variáveis**” que foram apontadas pela concepção de Dirichlet. O primeiro resultado desta análise foi a classificação de Hankel, para as funções. A primeira classe consiste de todas as funções contínuas; a segunda bem parecida com a primeira em termos das propriedades de seus membros, de todas as funções contínuas exceto em um número finito de pontos em qualquer intervalo finito. Para Euler, Fourier e Cauchy estas duas classes teriam exaurido a possibilidade do conceito de função. Mas Dirichlet e Riemann tinham chamado atenção para a possibilidade de funções com um número infinito de descontinuidades em um intervalo finito. Estas funções são ainda divididas por Hankel em duas classes, as quais ele referiu a classe das descontínuas ponto a ponto (punktierter unstetige Funktionen) e a classe das totalmente descontínuas”.

(HAWKINS, 1970, p. 29, grifo e tradução nossa)

A peculiaridade dos entes geométricos no CHAM está intimamente relacionada com as peculiares concepções de Número Real discutidas na seção anterior e as do termo “função”, que serão discutidas nesta seção.

Observaremos diferentes concepções de função nos modos históricos de definir funções² e seus gráficos. As diferenças entre estes modos nos será útil para apresentar a constituição de uma concepção de função inserida no CHAM.

Especificamente, associaremos ao CHAM a materialização de uma concepção de função enquanto ferramenta útil para produção de objetos Matemáticos deste contexto.

Nos textos de História da Matemática é possível observar uma primeira maneira de definir funções, a saber, como sendo uma Expressão Analítica. Estes modos de definir funções correspondem a um período histórico anterior àquele denominado Aritmetização da Análise.

Johann Bernoulli (1718): Chamo de função de uma magnitude variável uma quantidade composta de qualquer maneira desta magnitude variável e de constantes;

Euler (1748) Uma função de uma magnitude variável é uma expressão analítica composta de qualquer maneira da magnitude variável e de números ou quantidades constantes.

(KATZ, 1993, p. 724, tradução nossa)

É oportuno lembrar que a maior parte das funções, com as quais lidamos durante o ensino médio e durante os anos de graduação, são expressões analíticas. Isto demonstra a desconsideração das diferenças entre este e outros modos históricos de definir função e, portanto, de qualquer potencial pedagógico para isto.

Na História da Matemática este modo de definir funções esteve relacionado com uma concepção da geometria distinta da existente na Análise Matemática, nesta concepção, por exemplo, uma função é definida como contínua se é dada por uma única expressão algébrica.

² Aqui a palavra definir tem um sentido mais amplo que o sentido técnico. Consideraremos alguns exemplos históricos, em si, como um modo de definir função.

Euler (1748) Uma curva continua é tal que sua natureza pode ser expressa por uma única função de x . Se uma curva é de uma natureza tal que para várias partes... diferentes funções de x , por expressões, são requeridas... então nós chamamos de descontínua uma tal curva

(IDEM, p. 710, tradução nossa)

Este fato é importante para entender de que forma relaciona-se a necessidade de uma outra definição para função e aparecimento dos exemplos do CHAM. De fato, um outro modo de definir função é útil, por exemplo, para produzir infinitas descontinuidades em um conjunto limitado; teremos a oportunidade de voltar a este ponto.

As definições de função dadas por Lacroix e Fourier enfatizam o fato de que, elas próprias, são distintas daquelas que apresentamos anteriormente. Tecnicamente esta menção é desnecessária já em nosso contexto histórico é significativa, pois mostra que mais do que uma definição técnica, estes Matemáticos apresentam uma concepção de função em estabelecimento.

Lacroix (1810) Toda quantidade cujo valor depende de uma ou mais outras quantidades é chamada uma função destas últimas, conhecendo ou desconhecendo quais operações são necessárias usar para se chegar destas últimas à primeira

Fourier (1822) Em geral, a função $f(x)$ representa uma sucessão de valores ou ordenadas cada um dos quais é arbitrário. Para uma infinidade de valores dados para abscissa x há um igual número de ordenadas $f(x)$. Todos tendo valores numéricos, positivo, negativo ou nulo. Não supomos que estas ordenadas são objetos de uma lei comum; elas sucedem cada uma a outra de qualquer maneira e cada uma delas é dada como se fosse uma quantidade singular.

(IDEM, tradução e grifo nosso)

Nas próximas seções abordaremos outras concepções para função e modos de defini-las associando-os às concepções de outros termos Matemáticos do CHAM.

3.4 Integração e Função uma abordagem Dialética de suas Histórias

Diferentes concepções de função correspondem a diferentes concepções de integral/integração. Função como expressão analítica convive com uma integração como um processo algébrico de encontrar uma expressão que “derivando” (também no sentido de processo algébrico), resulta em uma outra previamente dada.

Uma mudança na concepção da integração no contexto da História da Matemática é notada por Lebesgue:

Até Cauchy não existia uma definição de integral no sentido moderno da palavra: “definição”. Apenas se dizia quais áreas devem ser adicionadas ou subtraídas quando se quer obter a integral $\int_a^b f(x)dx$.

Após Cauchy foi necessária uma definição porque com ele surge a preocupação com o rigor, que é característica da matemática moderna.

(LEBESGUE, 1966, p.178).

Em Cauchy se encontra já a moderna definição de continuidade de função; mas seus exemplos de funções integráveis limitam-se às funções contínuas por partes. Já as contribuições de Riemann apontaram outra direção; isto pode ser expresso, mais uma vez, nas palavras de Lebesgue.

(...) por um longo tempo, certas funções descontínuas tem sido integradas. A definição de Cauchy aplica-se a estas integrais, mas é natural examinar, como fez Riemann, a exata capacidade desta definição.

(IDEM, p.179, Grifo nosso).

Enquanto o trabalho de Cauchy apenas sugere uma abordagem para Integração, o trabalho de Riemann explora e estabelece definitivamente esta abordagem no CHAM.

Especificamente, com a definição de Integral Definida, dada por Cauchy, Riemann oferece um interessante exemplo de função Integrável:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(x) = x - [x] \text{ para } x \neq \frac{n}{2} \ n \in Z \\ \theta(x) = 0 \quad \text{para } x = \frac{n}{2} \ n \in Z \end{array} \right\}$$

$[x]$ é definido como o inteiro mais próximo de x

$$\theta_n(x) = \theta(nx)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_n(x)}{n^2}$$

É possível observar que f é descontínua em todo número da forma $\frac{p}{2q}$ com p

ímpar e p, q sem divisores comuns. Portanto todo sub intervalo do domínio de f possui uma infinidade de pontos de descontinuidade; no entanto, como mostrou Riemann, f é integrável.

Retomando os modos históricos de definir uma função, observamos que com o exemplo de Riemann, temos uma outra possibilidade, ou seja, definir uma função como uma série ou seqüência de outras funções.

O fato desta função ser integrável pode indicar, de certo modo, que existe uma região do plano delimitada por ela; a saber a região integrada. Diante disto questionamos: em algum outro contexto seria necessário ou conveniente produzir tal região?

Mais do que um exemplo, Riemann dá vigor às concepções peculiares de continuidade, função, Número Real e até mesmo área, concepções características do CHAM e dos trabalhos de Riemann inseridos nesse contexto. Um enfoque que explora, concretiza, demarca e finca fundamentos de uma específica concepção Geométrica e Matemática.

Que horizontes nos oferecem esse contexto? Que demandas históricas solicitaram esta nova abordagem? São questões para uma História da Matemática como Educação Matemática.

3.5 Teoria da Medida

3.5.1 Jordan

Segundo Hawkins (1980), a Teoria de Conteúdo de Jordan surge de um questionamento sobre o desenvolvimento da Teoria de Integração de Cauchy - Riemann para duas variáveis.

Jordan introduziu a distinção entre conteúdo interno e conteúdo externo e a importante concepção de conjunto mensurável. Seu trabalho foi motivado pela insatisfação com o caminho pelo o qual a teoria de integração de Riemann havia se desenvolvido para funções de duas ou mais variáveis. A integral de uma função $f(x,y)$ estava comumente definida sobre uma região E do plano limitada por uma curva. Para definir as somas de Riemann inferior e superior, ou a soma de Cauchy - Riemann, foi considerada uma partição do plano em retângulos formada por linhas paralelas aos eixos das coordenadas. A partição divide E em partes interiores, a maioria das quais são retângulos. Exceções ocorrem, contudo, nos retângulos que interceptam a curva limitante.

Uma certa ambigüidade ou arbitrariedade ocorre na definição, por exemplo, da soma de Cauchy - Riemann correspondente a partição. Ela pode ser definida sobre os retângulos que estão dentro de E ou simplesmente sobre os que contêm pontos de E . Para justificar a independência desta escolha foi notado que a soma das áreas dos retângulos que interceptam a curva limitante pode ser feita arbitrariamente pequena.

(...) Em 1890, contudo, Peano mostrou que não estava garantida a possibilidade de assumir este fato referente aos retângulos sobre a curva limitante”

(HAWKINS, 1980, p.170, Grifo nosso)

Peano ofereceu o exemplo de uma curva contínua que “passa” por todos os pontos do interior de um quadrado. O exemplo de Peano e a postura de Jordan são característicos do CHAM.

Especificamente no trabalho de Jordan, é interessante notar a criação do termo *conteúdo*, esta é uma atitude própria de delineamento de uma concepção e um tratamento específico para a medida.

Em última análise, como mostra Hawkins (1970,1980), seu esforço culminou em uma reescrita do que chamaríamos critério de integrabilidade de Riemann, através da Teoria de Conteúdo.

Para um dado subconjunto E de um intervalo $[a,b]$, Jordan definiu os números c_e e c_i , conteúdo externo e conteúdo interno como sendo:

$$c_i = \sup_P \sum_{I_k \subset E} l(I_k) \quad e \quad c_e = \inf_P \sum_{I_k \cap E \neq \emptyset} l(I_k)$$

Onde $\bigcup_{k=1}^n I_k$ corresponde a uma partição do intervalo $[a,b]$ e $l(I_k)$ é o comprimento do intervalo I_k . O Conjunto E é dito mensurável sempre que $c_i = c_e$.

Deste modo o critério de Integrabilidade de Riemann pode ser reformulado da seguinte forma:

Seja $[a,b] = \bigcup_{k=1}^n E_k$ uma partição de $[a,b]$ em intervalos disjuntos. As somas de Riemann, inferior e superior, relativa a esta partição são definidas por

$$L(P) = \sum_{k=1}^n m_k c(E_k), U(P) = \sum_{k=1}^n M_k c(E_k)$$

onde m_k e M_k denotam, respectivamente, o ínfimo e o supremo de $f(x)$ para $x \in E_k$.

As Integrais superior e inferior são definidas por:

$$\int_a^b f = \sup_P L(P) \quad e \quad \int_a^b f = \inf_P U(P)$$

Finalmente, f é integrável se e somente se

$$\int_a^b f = \int_a^b f$$

Como fez Jordan, esta definição de mensurabilidade é generalizada para outras dimensões.

3.5.2 Borel

Do ponto de vista técnico, uma importante característica da Teoria da Medida é a possibilidade de medir uma ampla classe de conjuntos, considerando a União Aditiva, ou seja, que dado uma classe infinita de conjuntos enumeráveis e disjuntos, a soma das medidas de cada um destes conjuntos é igual a medida da União destes Conjuntos. Isto também pode ser dito como: a soma das medidas das partes é igual a medida do todo.

$$m\left(\bigcup_i I_i\right) = \sum_i m(I_i)$$

O tratamento axiomático da medida, ou seja, a Teoria da Medida, em si já oferece uma concepção específica de medida; de fato, medida torna-se um objeto formal. Esta mudança de enfoque na concepção de medida pode ser expressa da seguinte maneira: a preocupação deixa de se dirigir ao que se vai medir e passa definitivamente para o que pode significar medir.

Uma questão que pode ser útil para o Ensino seria: Este significado formal corresponde a uma idéia universal (*a priori*) de medida?

Tecnicamente, o fato de que a União Aditiva seja um axioma de medida sustenta uma resposta afirmativa para questão. De outro lado, informalmente, seria muito mais fácil aceitar a conveniência da União Aditiva para a medida, do que a considerar como uma essência no significado de medida, ou seja, que esta proposição caracteriza quase que totalmente a idéia de medida. Não existiriam outras características da medida tão essenciais como esta? Porque não?

Iremos mostrar como o Axioma da União Aditiva se integra no CHAM; nosso objetivo é mostrá-lo como um objeto histórico.

Um fato importante, ao nosso ver, tanto do ponto de vista técnico como histórico, está na conseqüência de reduzir a medida a um conjunto de axiomas dos quais a União Aditiva é o central. Tal conseqüência é a possibilidade de medir conjuntos densos e a possibilidade de que estes conjuntos tenham medida zero.

Estas possibilidades têm como consequência a caracterização de um Espaço, o Espaço das funções Integráveis segundo Lebesgue, mais “geral” que o Espaço das Funções Integráveis segundo Riemann.

Já nos cursos iniciais de Análise um argumento desta espécie é utilizado. Apresenta-se a função de Dirichlet como um exemplo de Função não Integrável segundo Riemann e, muitas vezes nesta oportunidade o professor observa sobre a necessidade de uma outra definição de Integral.

Historicamente, a possibilidade de medir conjuntos densos é em si o centro de uma polêmica. O estabelecimento histórico da moderna definição de medida no CHAM fica claro ao observarmos que, em Borel, a possibilidade de medir conjuntos densos e o estabelecimento consequente da União Aditiva como axioma, responde a demanda, como veremos abaixo, de considerações sobre Número Real e o “contínua” da reta.

Hawkins, (1980, P.173 e seguintes), descreve que Cantor mostrou que ao desconsiderarmos um subconjunto M de pontos enumeráveis do plano, mesmo que denso, o conjunto formado $U=R^2-M$ guarda um sentido de continuidade (*continuum*), ou seja, é possível unir dois pontos do R^2 por um arco de circunferência totalmente contido em U .

Ainda, conforme observa Hawkins, Borel em sua tese de doutorado empregou as idéias de Cantor no campo da teoria das funções de variáveis complexas, para fornecer uma generalização da definição de continuidade analítica. Na primeira parte desse trabalho ele ofereceu um tratamento para medida, que pudesse considerar diferenças entre conjunto de pontos enumeráveis densos e seu complementar, não-enumerável, diferenças úteis para sua generalização.

Essas diferenças refletiam a sugestão, contida nas idéias de Cantor de que, em um certo sentido, conjuntos de pontos enumeráveis, mesmo que densos, ao contrário de seus complementares, não-enumeráveis, podem ser desprezíveis.

Desde que uma parte de um conjunto tenha medida desprezível (nula), para estabelecer a União Aditiva é necessário que o complemento desta parte, tenha

media igual a medida do conjunto. Isto foi o que fez Borel! Com isto Borel também garantiu a distinção que procurava.

Conjuntos enumeráveis e não enumeráveis e densidade eis aí outros termos que materializaram a peculiar forma de conceber os números, ou seja, enquanto Números Reais.

O fundamento histórico da definição de Borel/Lebesgue para medida de conjuntos é o uso de coberturas infinitas no processo de cálculo da medida. Em Jordan, a definição de conteúdo não admite coberturas infinitas e, portanto, subconjuntos densos (em relação a um outro) tais como os números racionais do intervalo $[0,1]$, não são mensuráveis.

A Teoria de Conteúdo de Jordan, bem como a Teoria de Integração de Cauchy/Riemann, não se preocuparam com uma essencialidade para União Aditiva. Pode ser observado que para um número finito de partes, a soma da medida das partes é obviamente igual a do todo. O axioma da União Aditiva, tem o sentido de reduzir as restrições para a medida e permitir as coberturas infinitas.

Do ponto de vista de uma História da Matemática para Educação Matemática, só é saudável observar que Jordan e Cauchy/Riemann não levaram em consideração a questão: “o que significa medir?”, se notarmos que isto não se deve a uma falta de perspicácia, mas deve-se a uma falta de necessidade.

Esta necessidade é sugerida da seguinte forma: a questão “qual a medida do conjunto?” surge quando passam a existir conjuntos de medida “questionável”, ou melhor, típicos de uma específica concepção Matemática.

Conjuntos como o Conjunto de Cantor, por exemplo, são exemplos típicos das demandas do CHAM. Eles mostram quão “esquisitos”, ou melhor, que tipo de conjuntos podem ser considerados como subconjuntos da reta (Números Reais). No momento em que estes subconjuntos “passam a existir”, o termo medida deve ser analisado a partir de um específico ponto de vista.

Mais uma vez cabe ressaltar que não nos referimos aos exemplos como posteriores ou anteriores à definição de medida. Referimo-nos a eles como parte de

um contexto histórico e teórico no qual ambos compõe um mesmo todo: um episódio histórico matemático da Análise.

O Axioma da União Aditiva, então, é observado não como uma percepção perspicaz do significado de medir e sim como uma opção conveniente que se concretizou historicamente.

A partir daí, afirmamos que dizer porque se mede desta forma e não de outra é um problema histórico e não formal. Se desejamos nos aprofundar em uma justificação da definição de medida de Borel/Lebesgue, ao menos do ponto de vista da Educação Matemática, somos obrigados a adentrar pela história.

3.5.3 Dois Aspectos do trabalho de Lebesgue

O trabalho de Lebesgue unifica, a partir de um ponto de vista axiomático, os termos “medida” e “integração”. Lebesgue considerou a demanda de um tratamento axiomático que materializou uma teoria na qual os termos “medida” e “integração” são sinônimos.

Nesta tarefa existem dois aspectos: primeiro uma reescrita do trabalho de Borel, ou seja, um aspecto estético; segundo um tratamento da Teoria de Riemann sob o ponto de vista originado em Borel que, de certa forma, não deixa de ser também uma reescrita, mas que ao contrário da primeira, trazia alterações não apenas estéticas. Para o segundo aspecto é necessário o primeiro.

O segundo aspecto já está sugerido em Jordan. Jordan propôs uma rescrita da Teoria da Integração de Riemann, porém, como vimos, de um ponto de vista estético. Por estas razões, qualquer alteração no trabalho de Jordan influenciaria a Teoria da Integração de Riemann por completo.

O trabalho de Jordan é de fato crucial; ele sugere um tratamento específico para medida, o que é a essência do trabalho de Lebesgue. Borel andou pelas linhas traçadas por Jordan, alterando os fundamentos da definição de medida (como vimos na seção anterior), porém seu olhar foi específico para o caso de subconjuntos da reta.

Coube a Lebesgue carregar a abordagem de Borel para Teoria da Integração como um todo, e nisto consiste a reescrita do trabalho de Borel por Lebesgue, ou seja, Lebesgue o aproximou do trabalho de Jordan para efetivar a concepção de medida de Borel no âmbito da Teoria da Integração como um todo. A partir deste momento, os termos “medida” e “integração” se equívalem.

Em um texto sobre o desenvolvimento da teoria da integração, Lebesgue apresenta sua abordagem de tal modo que fica explícito a relação entre a medição/integral de um subconjunto do plano/de uma função da reta na reta, e a medição de subconjuntos da reta.

Esta passagem é muito oportuna para o CHAM que temos proposto. Nós havíamos sugerido uma concepção de função como uma ferramenta útil para criar objetos típicos do CHAM.

Havíamos sugerido também que a diante destes objetos foi necessária uma nova concepção de medida. O texto de Lebesgue deixa explícito a forma pela qual uma nova medida é útil para objetos (conjuntos) criados através da nova concepção de função. Além disto fica também explícito o sentido da nova concepção de número (Número Real) que temos destacado para o CHAM.

Iremos apresentar um extrato deste texto de Lebesgue e aproveitaremos para indicar mais um potencial das formas históricas de definir função e integralizar nossas considerações sobre o trabalho de Lebesgue no CHAM.

3.5.4 Mais um potencial para os modos de definir função

Podemos observar a função de Dirichlet (agora chamada assim), como um peculiar modo de definir função. Dirichlet define a função (o valor da função) nominalmente, em subconjuntos do domínio. Particiona o domínio e informa o valor da função em cada uma destas partes. Nota-se que a função é constante nestes subconjuntos, a função vale 0 nos racionais e 1 nos irracionais.

Estabelecido mais um modo de definir função passamos a analisar a apresentação de Lebesgue:

Os Geômetras do século XVII, consideraram a integral de $f(x)$ – a palavra “integral” ainda não tinha sido inventada – como a soma de uma infinidade de indivisíveis, os quais possuíam ordenadas, negativas ou positivas, $f(x)$. Muito bem! Nós temos simplesmente agrupado os indivisíveis de tamanhos comparáveis. Nós temos, como alguns dizem em álgebra, colecionado termos similares. Podemos dizer que de acordo com o procedimento de Riemann, adicionamos os indivisíveis na ordem em que eles aparecem na variação do eixo x , como um mercador não sistemático, que conta suas moedas e notas de modo aleatório, a medida que surgem em suas mãos, enquanto nós operamos como um mercador sistemático que diz:

Eu tenho $m(E_1)$ pennies³ que somam $1 m(E_1)$

Eu tenho $m(E_2)$ nickels que somam $5 m(E_2)$

Eu tenho $m(E_3)$ dimes que somam $10 m(E_3)$

Juntando, então, eu tenho:

$$S = 1 m(E_1) + 5 m(E_2) + 10 m(E_3) + \dots$$

Os dois procedimentos levarão, certamente, o mercador ao mesmo resultado, porque independentemente da quantia de dinheiro, ele terá apenas um número finito de moedas e notas para contar. Mas para nós que precisamos adicionar uma quantidade infinita de indivisíveis, a diferença dos dois métodos é de importância capital”

(LEBESGUE, 1966, p. 181)

Lebesgue sugere uma partição no conjunto imagem da função, mais precisamente no intervalo definido pelos valores de mínimo e de máximo da função.

Seja $\{y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_n\}$ tal partição. Cada intervalo desta partição induz um subconjunto E_i do domínio, formado de elementos cuja imagem pertence a este intervalo. E para cada um destes subintervalos, ou subconjuntos assim definidos, podemos associar um η_i tal que $y_{i-1} \leq \eta_i \leq y_i$

Utilizamos o exemplo de Dirichlet para inaugurar uma outra maneira de se definir função, a saber, indicar os valores da função em subconjuntos do domínio onde a função é constante. Na sugestão de Lebesgue, em cada etapa da partição da

³ Preferimos não traduzir os termos designados aos valores das moedas, importante é observar que pennies é a unidade da moeda e 1 nickel=5 pennies e 1 dime=10 pennies.

imagem sugerimos, agora, uma função que é constante em subconjuntos do domínio. Um modo de definir função do tipo de Dirichlet.

$$f(x) = \eta_i, x \in [y_{i-1}, y_i]$$

Estas funções formam uma seqüência que se aproxima da função dada. A vantagem é que estas funções sugerem uma aproximação para a integral (de Lebesgue) definida de f no intervalo bastante razoável dada por:

$$\sum_{i=1}^n m(E_i)\eta_i \quad \text{onde } m(E_i) \text{ é a medida de } E_i$$

A questão aqui seria: É possível medir os subconjuntos do domínio que irão se formar no processo sugerido?

Do ponto de vista histórico aqui se encontra a linha Jordan – Borel – Lebesgue. Se a partição do domínio for tal que algum conjunto E_i seja um conjunto de pontos denso no intervalo de integração, por exemplo, a medida de E , segundo Jordan, não existirá; o processo então estaria comprometido.

De outro lado, com Borel e a possibilidade de medir subconjuntos densos em um intervalo, estes conjuntos não são empecilhos para o processo sugerido e este fato foi considerado por Lebesgue.

Do ponto de vista técnico, esta questão sugere uma análise da relação entre função escada e função simples, respectivamente com Integral de Riemann e de Lebesgue.

Primeiro nós definimos função característica de um conjunto A mensurável:

$$X_A(x) \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Dado um conjunto E mensurável, uma função simples é uma combinação linear finita de funções características de subconjuntos de E , também mensuráveis.

Se a seqüência de funções sugerida for uma seqüência de funções escadas, a função limite será integrável segundo Riemann e terá valor igual ao limite das

integrais das funções escadas. Isto pode ser demonstrado fazendo-se uma equivalência entre a existência da igualdade das integrais superior e inferior e a existência do limite das funções escadas, que em ambos têm o mesmo valor.

Já para a Integral de Lebesgue a função a ser integrada pode ser limite de funções simples, ou seja, funções constantes em subconjuntos do domínio mensuráveis.

Especificamente, a abordagem de Lebesgue utiliza dois dos modos históricos de definir função; tanto como uma seqüência/série de funções qual no exemplo de Riemann, como também definida nominalmente, como fez Dirichlet, desta vez com referência a cada função desta seqüência. A utilização destes modos produz uma definição de medida para uma região do plano explicitamente relacionada com a definição de medida de subconjuntos da reta.

A generalização de Lebesgue só é requerida diante destes modos de produzir função. Nossas considerações sobre o trabalho de Lebesgue se inserem assim no CHAM, ou seja, enquanto uma peculiaridade dele. Já tínhamos mostrado que a definição de medida está imbricada na tradição da definição moderna de Número Real.

Agora, mostramos que sua generalização para Teoria da Integração está imbricada na tradição dos modos de definir função típicos do CHAM. Eles em si, como mostramos, já faziam parte em conjunto com a definição de Número Real, de uma dialética constituída no próprio CHAM.

O próprio Lebesgue exprime isso de modo magnífico!

As vezes é dito que Descartes reduziu a Geometria à Álgebra. Eu diria que através do uso das coordenadas ele reduziu toda a Geometria para a reta, e que a reta, dando-nos a noção de continuidade e número irracional, tem permitido a álgebra alcançar o presente escopo.

(IDEM, p.179)

Enfim a Teoria da Medida é na verdade um episódio peculiar do CHAM.

4 Conclusão

Só é possível considerar que a Análise Matemática resolve problemas pré-existentes, de um ponto de vista formal. Podemos reunir agora algumas justificações típicas deste ponto de vista, que foram apresentadas na Parte II deste trabalho.

Pode-se considerar que seria necessário uma definição de Número Real para tornar precisas noções como a de continuidade de função ou a de integral definida de uma região. Pode se considerar que seria necessário um tratamento axiomático da medida/integração para tratar de modo mais geral a Teoria de Integração.

Tudo isto é coerente, mas junto a isto pode-se notar que estas necessidades são intrínsecas a estas próprias definições e tratamentos, ou seja, que estas necessidades não são *a priori*.

O que sustenta esta possibilidade? A História da Matemática enquanto Educação Matemática. A importância dada para esta notificação é uma escolha que define se estamos na Educação Matemática ou no Ensino de Matemática.

Na Parte II nossa intenção foi a de poder sustentar um foco alternativo para o Ensino de Análise tão plausível como aquele considerado nos cursos tradicionais. Por isto não descartamos os cursos tradicionais; nossa crítica se coloca sobre sua manutenção eterna e indiscutível.

No que se refere, por exemplo, à importância que pode ser dada à construção dos Números Reais e o material histórico que pode ser explorado neste caminho, o único que achamos prudente dizer é que o termo “Número” é representativo do termo “Matemática”.

Nos ambientes mais técnicos (entre os matemáticos, entre os universitários e entre os professores do ensino fundamental e médio) é dispensável a discussão da importância dos Números para a Matemática. Nesse ambiente, especificamente, é possível e conveniente mostrar que o termo “Número” se iguala ao termo “Número Real” através de uma definição Técnico/Matemática. De outro lado, os ambientes mais cotidianos, o senso comum, também relacionam “Número” à “Matemática”.

Diante de tudo isso, continuamos com professores de Matemática que desconhecem qualquer resquício (técnico ou histórico) da definição de Número Real.

Alunos de cursos de Licenciatura em Matemática têm sido aprovados em cursos de Análise, nos quais são exigidas demonstrações de teoremas de seqüências e séries (de números Reais e às vezes de funções), de teoremas que exigem a definição de limite de função como, por exemplo, os que fundamentam as aplicações da derivada e também teoremas sobre os critérios e a caracterização da integrabilidade de Riemann. Enquanto isto, pesquisas mostram que alunos dos cursos de Licenciatura desconhecem a definição de Número Real. (SOARES et all, 1999).

Outras pesquisas apontam para o desconhecimento, dos professores de Matemática e seus alunos, em todos os níveis, de contextos históricos que estabeleçam a moderna definição de Número Real e, especificamente, sua ligação com o “continuum da reta” (COBIANCHI, 2002).

A Matemática Ensinada convive com isso. O ponto de vista histórico aqui defendido, jamais!

Há que se refletir sobre os objetivos da Análise na formação de Professores. Em nosso modo de entender, o principal problema do Ensino de Matemática não encontra-se nas possíveis contribuições para esta problemática, mas na forma de justificar suas posturas.

A questão não pode se limitar a uma proposta de melhora do Ensino de Análise de alguma forma, por exemplo, através, da História da Matemática. A problemática deve transcender a crença da pré existência de um objeto Matemático, a Análise, determinante das práticas de Ensino.

Antes de tratadas implicitamente, estas sugestões devem efetivamente serem colocadas em pauta e refletidas, porque consideramos este como um caminho para adentrarmos em uma reflexão em Educação Matemática. É um caminho por que não separa, nem hierarquiza, Matemática e Educação Matemática.

Ao valorizar o CHAM, por exemplo, através das possíveis relações entre Número Real e o “continuum da reta” em si, se assim desejarmos, podemos considerar que estamos interessados em uma História da Matemática em si e, portanto, uma História da Matemática que só pode ser compreendida como Educação Matemática.

O valor desta apresentação prescinde do convencimento de que se trata de uma concepção Histórica, ou seja, independente de um conceito de Número Real *a priori*.

Assim, nossa investida não está no conteúdo matemático ou pedagógico da Parte II, enquanto uma resposta ou proposta definitiva. Ao contrário, nossos esforços se dirigiram para mostrar que é possível e saudável admitir a existência de múltiplas propostas e caminhos.

Antes de tudo, a Matemática, ou o que quer que ela seja, deve ser discutida, ao invés de assumida. Deve haver um espaço que permita se falar disto, “a matemática” discutir, repensar, sem pré-concepções imutáveis. A dificuldade tem surgido sempre que se assume uma Matemática Absoluta e implícita ao seu Ensino.

Tomando um caráter objetivo para a Matemática, a História da Matemática está fadada a servi-la. Ao contrário, devemos procurar atividades que eliminem este caráter e, pensando deste outro modo, a História da Matemática tem um papel fundamental nesta mudança de caráter. E se não pudermos chamar estas diferentes concepções de Matemática, de Matemática, chamemos de Educação Matemática.

“Nós estudamos os clássicos, não para segui-los, mas para transcende-los”

“Criar é inventar algo que não existia”

“Não existe objetivo, o objetivo é o mínimo de subjetivo”

(H. J. Koellreutter)

5 Referências

- ÁVILA, G. S. S. I **Introdução à Análise Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1999.
- BALDINO, R. R. Grupo de Pesquisa-Ação em Educação Matemática. Disponível em: <<http://www.gpa-rc.mat.br/index.htm>>. Acesso em 01 de jun. de 2003
- _____. Grupos de Pesquisa-Ação em Educação Matemática. **Bolema**, Rio Claro, n. 15, p. 83-98, 2001.
- _____. Ensino de Matemática ou Educação Matemática. **Temas & Debates**, Rio Claro, n. 3, p. 51-60, 1991.
- BARONI, R. L. S.; BATARCE, M. S.; NASCIMENTO, W. M. **Elementos sobre o desenvolvimento da Teoria da Medida**. Rio Claro: Editora SBHMat, 2001.
- BARONI, R. L. S.; NOBRE, S. A Pesquisa em História da Matemática e suas relações com a Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas**. São Paulo: Editora Unesp, 1999. p 129-136
- BARTLE, R.G. **The Elements of integration**. New York: John Wiley, 1966.
- BATARCE, M. S. Educação História Matemática. In: ENCONTRO SUL-MATO-GROSSENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7. , 2001, Campo Grande. **Anais...** Campo Grande, 2001. p.59.
- BICUDO, M. A. V. Ensino de Matemática e Educação Matemática: algumas considerações sobre seus significados. **Bolema**, Rio Claro, n.13, p. 1-11, 1999.
- BOTAZZINI, U. **The Higher Calculus: a history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass**. New York: Springer – Verlag, 1986.
- BOURBAKI, N. **Elements of the History of Mathematics**. Berlin: Springer – Verlag, 1994.
- BOYER, C. **The History of the calculus and its conceptual development**. New York: Dover Publication, 1959
- _____. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1998.
- BUENO, M.; LINS, R. The History of Mathematics in Education of Mathematics Teachers: an innovative approach. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON THE TEACHING OF MATHEMATICS (AT UNDERGRADUATE LEVEL), 2., 2002, Herssnissos. **Proceedings...** Disponível em: <http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/ICTM2/Proceedings_Table_of_Content.html> Acesso em 01 de jun. de 2003

COBIANCHI, A. S. **Estudos de continuidade e números reais: Matemática, descobertas e justificativas de Professores.** 2002. 433f. (Doutorado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

CURY, H. N. Concepções e crenças dos professores de Matemática: pesquisas realizadas e significados dos termos utilizados. **Bolema**, Rio Claro, n.13, p. 29-43, 1999.

FIGUEIREDO, D. G. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais.** Rio de Janeiro: IMPA, 1977. (Projeto Euclides).

HAWKINS, T. **Lebesgue's Theory of Integration: its origins and development.** The. Madison: University of Wisconsin Press, 1970.

_____. The Origins of the modern Theory of Integration. In: Grattan-Guinness, I. (Ed.). **From Calculus to Set Theory, 1630 – 1910: an introductory history.** New York: Columbia University Press, 1980.

FAUVEL, J; MAANEN, J.V. (Ed.) **History in Mathematics Education: The ICMI Study.** Dordrecht: Kluwer, 2000. (New ICMI Study Series, v.6).

KATZ, V. J. **A History of Mathematics: an introduction.** New York: Harpercollins, 1993.

KOELLREUTTER, H. J. **Formas de pensamento e realização nas ciências e nas artes.** São Paulo: IEA-USP, 1987. (Resumo das aulas)

LIMA, E. L. **Curso de Análise.** 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1976. v.1.

LINS, R. Porque discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas.** São Paulo: Editora Unesp, 1999. p.75-94.

_____. **A Framework for understanding what algebraic thinking is.** 1992. (Doctored in Shell Center for Mathematical Education), University Nottighan, Londres.

LINS, R. et al The production of meaning for algebra: a perspective based on a theoretical model of Semantic Fieldes. In: SUTHERLAND, R.; ROJANO, T.; BELL, A.; LINS, R. (Ed.). **Perspective on School Algebra.** Netherlands: Kluwer, 2001.

LEBESGUE, H. **Measure and the integral.** San Francisco: Holden-Day, 1966. Edited whit a biographical essay by Kenneth O. May.

MEDEIROS, L.A.; MELLO, E. A. **A Integral de Lebesgue.** 4 ed., Rio de Janeiro: UFRG, 1989.

MENEGHETTI, R. C. G. **O Intuitivo e o lógico no conhecimento matemático: uma análise à luz da história e da filosofia da matemática.** 2001. (Doutorado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

MOREIRA, M. A. Aprendizagem significativa crítica. In: ENCONTRO INTERNACIONAL SOBRE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA. 3., 2000, Lisboa. **Atas...** Lisboa, 2000, p. 33-45. (Título Original: Aprendizagem Significativa Subversiva.).

ROYDEN, H.L. **Real Analysis**. 2. ed. Londres: The Macmillan, 1968.

SILVA, J. J. Filosofia da Matemática e Filosofia da Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: Editora Unesp, 1999. p. 45-58.

SILVA, M. R. G. Concepções didático-pedagógicas do professor-pesquisador em Matemática e seu funcionamento na sala de aula de Matemática. **Bolema**, Rio Claro, n.12, p. 13-27, 1997.

SOARES, E. F.; FERREIRA, M. C. C.; MOREIRA, P. C. Números Reais: concepções dos licenciandos e formação matemática. **Zetetiké**, Campinas, v. 7, n. 12. p. 95-117, 1999.

TOEPLITZ, O. *The Calculus: a genetic approach*. Chicago: University of Chicago Press, 1963