

Filipe Batista Ribeiro

Ressonâncias Planetárias Spin-Órbita com Perturbação de Terceiro Corpo



Rio Claro
2015

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas Campus de
Rio Claro

Filipe Batista Ribeiro

Ressonâncias Planetárias Spin-Órbita com Perturbação de Terceiro Corpo

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Instituto de Geociências e Ciências Exa-
tas do Campus de Rio Claro, da Universi-
dade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita
Filho”, como parte dos requisitos para ob-
tenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Nelson Callegari Jr.

Rio Claro
2015

520 Ribeiro, Filipe Batista
R484r Ressonâncias planetárias spin-órbita com perturbação de
terceiro corpo / Filipe Batista Ribeiro. - Rio Claro, 2015
68 f. : il., figs., gráfs., forms., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Nelson Callegari Jr.

1. Astronomia. 2. Astronomia dinâmica. 3. Rotação. 4.
Exoplanetas. 5. Mecânica celeste. I. Título.

Filipe Batista Ribeiro

Ressonâncias Planetárias Spin-Órbita com Perturbação de Terceiro Corpo

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Campus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Nelson Callegari Jr.

Profa. Dra. Tatiana Alexandrovna Michtchenko

Profa. Dra. Maria Helena Moreira Morais

Rio Claro, SP 15 de outubro de 2015.

Agradecimentos

Agradeço à Deus por me proteger e guiar meus passos ao longo de minha jornada acadêmica.

Ao apoio de minha família dando forças pra seguir em frente e está comigo em minhas decisões e escolhas. Em especial à minha mãe, exemplo de perseverança e força, minha grande motivadora nessa empreitada.

Ao meu orientador e amigo Prof. Dr. Nelson pelos conselhos, oportunidades e discussões que me ensinaram sobre a Física, a Astronomia e a vida. Ao Prof. Dr. Tadashi por coordenar o Laboratório de Astronomia Dinâmica e oferecer a infraestrutura para o desenvolvimento deste trabalho. Ao Prof. Dr. Alexandre Correia com quem passei um período de estágio e aprendi muito sobre astronomia, programação e ciência. Agradeço também às Profas. Dra. Tatiana Michtchenko e Dra. Maria Helena Moraes pelas sugestões ao texto.

Agradeço à Fapesp pelo financiamento do projeto de mestrado, processo 2012/21611-5, e pela oportunidade de fazer estágio na Universidade de Aveiro - Portugal, processo 2014/11163-0.

Agradeço aos meus amigos da *República Mansão* que me fizeram companhia, pelos momentos engraçados e as histórias que levarei para sempre comigo.

À minha irmã Vivian, que me ajudou na leitura e revisão do texto, muito obrigado por sempre se interessar nos assuntos estelares.

Também gostaria de agradecer à minha noiva Mariany que me deu todo apoio durante o mestrado, se fez presente em todos os momentos, foi paciente e me escutou sempre. Você é muito especial para mim.

Resumo

Neste trabalho estudaremos a dinâmica de rotação de exoplanetas perturbados pela presença de um terceiro corpo. Será dada ênfase em aplicações a exoplanetas com parâmetros físicos (e.g. raio e massa) compatíveis com uma constituição do tipo terrestre (e.g. rochosos).

Numa primeira etapa a rotação do exoplaneta é perturbada apenas pelo torque da estrela central. Em seguida, o modelo é estendido para incluir a influência gravitacional de um companheiro. Exploraremos numericamente os problemas utilizando as técnicas de superfície de seção, a análise espectral e mapas dinâmicos para diferentes condições iniciais.

Mostramos que, dependendo das condições iniciais e parâmetros do sistema planetário, a rotação do planeta pode ser irregular devido à perturbação do terceiro corpo. Em particular, a Super-Terra *Kepler-11b* pode ter seu regime de rotação na ressonância spin-órbita 1 : 1, estável no domínio no problema de dois corpos, altamente perturbada pelo planeta *Kepler-11c* devido à configuração orbital de ambos estarem relacionadas com uma ressonância 5 : 4 de movimentos médios.

Também faremos uma introdução ao estudo dos efeitos dissipativos na rotação de exoplanetas induzidos por maré para os planetas *Kepler-10b* e *Corot-7b*. E por fim calcularemos a probabilidade de captura na ressonância spin-órbita 3 : 2 para o planeta Mercúrio.

Palavras-chave: Rotação, Exoplanetas, Mecânica Celeste.

Abstract

In this work we study the dynamics rotation of exoplanets disturbed by a third body. Emphasis will be placed on exoplanets with physical parameters (e.g. radius and mass) consistent with Earth's.

In the first step the rotation of the exoplanet is disturbed only by the torque of the central star. Then the model is extended to include the gravitational influence of a companion. We numerically explore the problem using surface of sections, spectral analysis and dynamic maps for several initial conditions.

We show that, depending on the initial conditions and parameters of the planetary system, the planet's rotation can be irregular due to the disturbance of the third body. In particular, the Super-Earth *Kepler-11b* can have its rotation in 1 : 1 spin-orbit resonance, stable in the problem of two bodies, highly disturbed by the planet *Kepler-11c* due to orbital configuration close to the 5 : 4 mean motion resonance.

We will also show an introduction of dissipative effects in the exoplanet's rotation induced by tides, applied to the planets *Kepler-10b* and *Corot-7b*. Finally we calculate the capture probability in the spin-orbit resonance 3 : 2 to Mercury.

Keywords: Rotation, Exoplanets, Celestial Mechanics.

Sumário

1	Introdução	8
1.1	Elementos Orbitais dos Sistemas Planetários	10
2	Modelo de Rotação	11
2.1	Desenvolvimento do Modelo de Rotação	11
2.2	Análise Analítica do Modelo de Rotação	14
2.2.1	Frequência Livre	14
2.2.2	Frequência Forçada	15
3	Caso não Perturbado	18
3.1	Metodologia	18
3.2	55 Cnc e	19
3.2.1	Mapa Dinâmico do planeta 55 Cnc e	21
3.3	Kepler-42c	22
3.4	Kepler-70b	25
4	Caso Perturbado	27
4.1	Equações de movimento	27
4.2	Aplicação ao Sistema <i>Kepler-11</i>	28
4.2.1	Quase ressonância 5 : 4 de movimentos médios	29
4.2.2	Regime de altas amplitudes ($\theta_0 > 60^\circ$)	34
4.2.3	Mapas Dinâmicos	36
5	Introdução dos efeitos de Maré no problema Spin-Órbita	41
5.1	Introdução da Maré na Rotação do Planeta	42
5.1.1	Aplicação ao planeta Corot-7b	42
5.2	Modelo Clássico de Maré	44
5.2.1	Aplicação ao sistema <i>Kepler 10</i>	45
5.3	Modelo de Maré com reologia de Maxwell e perturbação de Terceiro Corpo	46
5.3.1	Aplicações ao sistema Corot 7	48
5.4	Probabilidade de Captura em Ressonância Spin-Órbita	53
5.4.1	Aplicação à Mercúrio	53
6	Conclusões	54

Referências Bibliográficas	56
Apêndice	59
A Tópicos de Sistemas Dinâmicos	59
A.1 Superfície de Seção	59
A.2 Transformada Rápida de Fourier (FFT)	60
B Estimativa Numérica da Elipticidade de Camadas Diferenciadas	64
B.1 Equação de Equilíbrio de um Fluido em Rotação	64
B.2 Aplicações	66

Capítulo 1

Introdução

Nos últimos anos foram descobertos cerca de 1500 planetas orbitando outras estrelas (<http://exoplanet.eu/catalog.php>). Cerca de 130 desses planetas são classificados como tipo terrestres, com possível composição sólida.

Alguns desses possíveis planetas terrestres estão localizados em órbitas compactas com período orbital da ordem de 10 dias. No caso de órbitas muito compactas, as forças de maré podem ter sincronizado os movimentos de rotação e translação desses planetas, similar ao caso da Lua terrestre, e.g. (Rodríguez et al., 2012). Quando um planeta tem o período de rotação como um múltiplo do período orbital dizemos que ocorre uma ressonância spin-órbita. Outro exemplo no nosso Sistema Solar é o planeta Mercúrio, onde seu período de rotação é $3/2$ de seu período orbital.

As principais características de dinâmica de rotação são dadas pelo modelo de ressonância spin-órbita, o qual fornece a amplitude da libração física (i.e., ângulo dado pela diferença entre anomalia verdadeira e o ângulo de rotação) em função do tempo, e.g. (Goldreich and Peale, 1966). Classicamente o modelo é aplicado em dinâmica de rotação dos planetas terrestres, dos satélites regulares do sistema Solar, da Lua e outros satélites. Por exemplo Wisdom et al. (1984) e Wisdom (2004) estudam, respectivamente, a rotação de Hyperion e Enceladus, satélites de Saturno.

O modelo de Goldreich and Peale (1966), além de considerar o caso planar e obliquidade do eixo de rotação nula, supõe, num primeiro momento, que a órbita do secundário não seja perturbada por nenhum efeito externo (e.g. achatamento do corpo central, perturbação de terceiro corpo, efeitos de maré).

O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo sobre a dinâmica de rotação de planetas perturbados por um terceiro corpo. O perturbador será em geral uma Super-Terra com períodos orbitais da ordem de dias.

Também iremos introduzir os efeitos de maré na evolução orbital e rotacional de Super-Terras quentes. Aplicaremos o modelo de maré clássico (e.g. Mignard (1979)), onde o atraso (entre a perturbação da estrela e a máxima deformação) é linearmente proporcional com a frequência da maré. E o modelo maré desenvolvido recentemente por Correia et al. (2014), onde o corpo se deforma pela ação exclusiva das forças gravitacionais (auto-gravitação e maré).

O Cap. 2 contém a formulação do modelo de rotação clássico baseado em (Murray and Dermott, 1999). Através da *fórmula de MacCullagh* obtemos a força e o torque, para então calcularmos as equações de rotação através das Equações de Euler. No Cap. 3 aplicaremos o modelo de rotação para os planetas *55 Cnc e*, *Kepler-42c* e *Kepler-70b* no caso não perturbado, isto é, problema de dois corpos considerando o caso planar e obliquidade do eixo de rotação nula. No Cap. 4 aplicaremos o modelo de rotação com perturbação do terceiro corpo para o planeta *Kepler-11b*. O Cap. 5 é reservado para o modelo de rotação com os efeitos de maré, sendo a seção 5.2 dedicada ao estudo da maré clássica e a seção 5.3 dedicada ao estudo do modelo de maré com reologia de Maxwell, onde o corpo se deforma usando uma equação diferencial para os coeficientes gravitacionais. Finalmente, o Cap. 6 é dedicado às conclusões deste trabalho. No Ap. A mostramos algumas técnicas utilizadas no estudo da dinâmica de rotação dos exoplanetas.

Nos casos acima, não foi feita nenhuma hipótese sobre a constituição interna do planeta, o que leva à condição de densidade uniforme do interior. No entanto, a possível existência de camadas interiores com diferentes composições (diferenciação do interior planetário) pode mudar a dinâmica de rotação da superfície (camada exterior) tal como foi mostrado em trabalhos de modelos de camadas aplicados aos satélites regulares (e.g. Van Hoolst et al. (2008)) e planetas terrestres do Sistema Solar (e.g. Peale et al. (2002)). Assim no Ap. (B) iremos calcular a figura de equilíbrio de um corpo não homogêneo em rotação, usada no artigo Callegari and Ribeiro (2014), onde incluímos os efeitos de acoplamento manto-núcleo.

1.1 Elementos Orbitais dos Sistemas Planetários

Sistema	Massa	Raio (R_{Terra})	a (UA)	e	$(\mathcal{B} - \mathcal{A})/\mathcal{C}$	$2\pi/n$ (dias)
Kepler 70	$0,496M_{\text{Sol}}$	-	-	-	-	-
Kepler-70b	$0,445M_{\text{Terra}}$	0,759	$0,006 \pm 0,001$	-	$2,06 \times 10^{-1}$	0.241
Kepler-70c	$0,655M_{\text{Terra}}$	0,867	$0,0076 \pm 0,0008$	-	$1,17 \times 10^{-1}$	0.344
Kepler 42	$0,13M_{\text{Sol}}$	-	-	-	-	-
Kepler-42c	$1,907M_{\text{Terra}}$	0,780	$0,006 \pm 0,001$	-	$1,18 \times 10^{-2}$	0.471
Kepler-42b	$2,860M_{\text{Terra}}$	0,730	$0,0116 \pm 0,0002$	-	$1,35 \times 10^{-3}$	1.265
Kepler 11	$0,95M_{\text{Sol}}$	-	-	-	-	-
Kepler-11b	$4,3M_{\text{Terra}}$	1,800	$0,091 \pm 0,003$	-	$2,18 \times 10^{-4}$	10.32
Kepler-11c	$13,5M_{\text{Terra}}$	2,870	$0,106 \pm 0,004$	-	-	12.93
55 Cnc	$0,905M_{\text{Sol}}$	-	-	-	-	-
55 Cnc e	$8,32M_{\text{Terra}}$	1,990	$0,0156 \pm 0,0001$	0,06	$2,63 \times 10^{-2}$	0.748
55 Cnc b	$300M_{\text{Terra}}$	-	$0,1148 \pm 0,0006$	0,016	-	14.93
Kepler 10	$0,895M_{\text{Sol}}$	-	-	-	-	-
Kepler-10b	$4,55M_{\text{Terra}}$	1,470	$0,0168 \pm 0,0002$	-	$1,15 \times 10^{-2}$	0.841
Kepler-10c	$17,2M_{\text{Terra}}$	2,350	$0,2397 \pm 0,0006$	-	-	45.31
Corot 7	$0,93M_{\text{Sol}}$	-	-	-	-	-
Corot-7b	$8,5M_{\text{Terra}}$	1,680	$0,0172 \pm 0,0006$	-	$9,92 \times 10^{-3}$	0.854
Corot-7c	$8,39M_{\text{Terra}}$	-	$0,046 \pm 0,003$	-	-	3.737

Tabela 1.1: Elementos Orbitais dos sistemas planetários, como visto em <http://exoplanet.eu>.
O valor de $(\mathcal{B} - \mathcal{A})/\mathcal{C}$ foi estimado por [Callegari and Rodríguez \(2013\)](#).

Capítulo 2

Modelo de Rotação

2.1 Desenvolvimento do Modelo de Rotação

Neste estudo, o planeta tem a forma de um elipsoide de inércia. Definiremos o sistema de coordenadas x , y e z de tal modo que suas direções estão ao longo dos eixos principais de inércia do planeta e a origem O seja o centro de massa (Fig. 2.1). $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são os principais momentos de inércia do planeta em relação aos eixos.

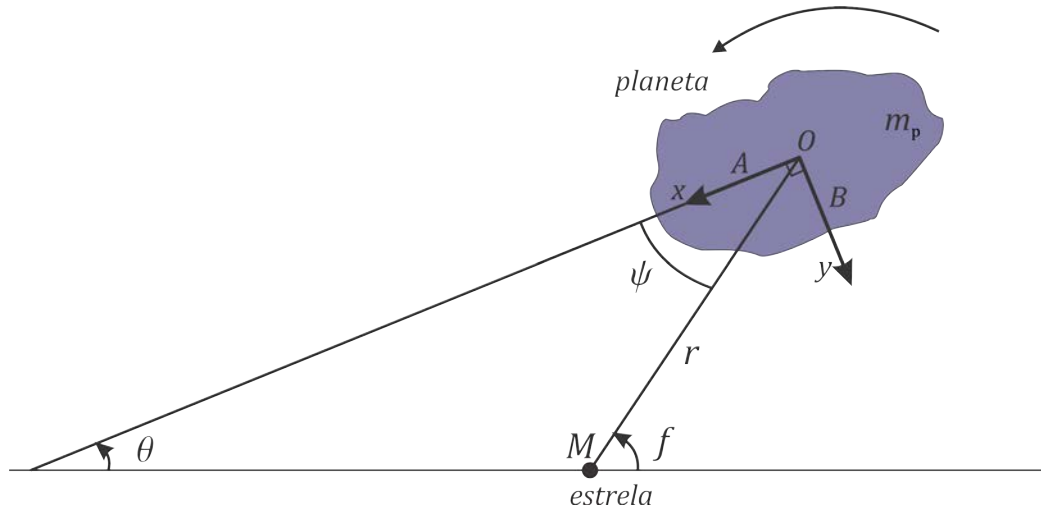


Figura 2.1: Rotação de um planeta com o eixo de rotação normal ao plano orbital. M é a massa da estrela, ψ é o ângulo entre a linha estrela-planeta (r), $\mathcal{A}$ é o eixo principal associado com o mínimo momento de inércia do planeta (m_p), $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são os outros momentos de inércia, com $\mathcal{C}$ saindo do plano da figura. O ângulo θ é medido com respeito a uma direção fixa no espaço e f é a anomalia verdadeira. Figura adaptada de [Murray and Dermott \(1999\)](#).

Deduziremos a expressão para o potencial gravitacional de um planeta permanentemente deformado em termos dos principais momentos de inércia, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ definidos com respeito ao centro de massa. Em nosso sistema, tomamos o ponto O como sendo

o centro de massa do planeta e seja P um ponto a uma distância r de O . Assumiremos que r é muito maior do que o raio médio do planeta. Definiremos o sistema de coordenadas x , y e z de tal modo que suas direções estão ao longo dos eixos principais de inércia do planeta, Fig. (2.2).

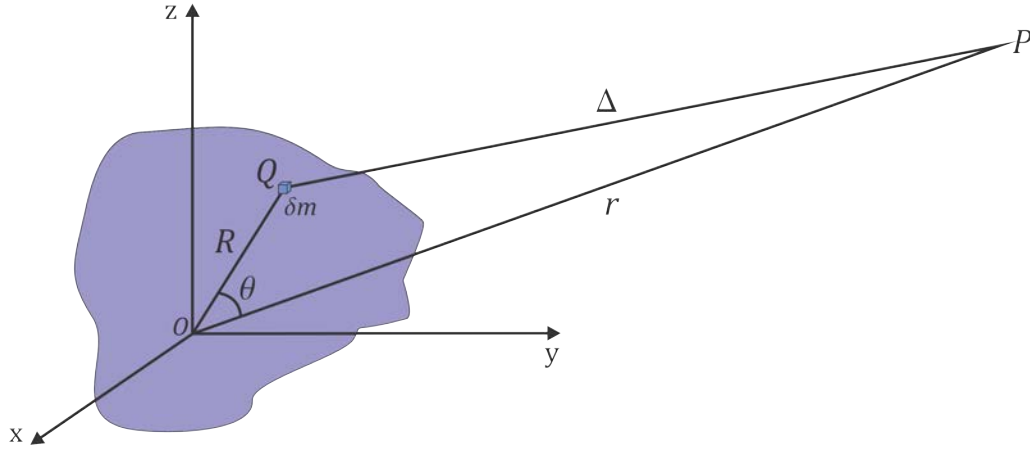


Figura 2.2: Sistema de coordenadas com a origem localizada no centro de massa O de um planeta, com os eixos alinhados com os principais momentos de inércia. Um elemento de massa δm no ponto Q a uma distância R de O , e a linha $\overline{OQ}$ faz um ângulo θ com a linha $\overline{OP}$. Figura adaptada de [Murray and Dermott \(1999\)](#).

Se δm é um elemento de massa no ponto Q , a uma distância R de O , então o potencial do planeta em P é dado por

$$V = - \sum \frac{G\delta m}{\Delta}, \quad (2.1)$$

onde, pela lei dos cossenos, $\Delta = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta}$, G é a constante gravitacional e θ é o ângulo entre $\overline{OP}$ e $\overline{OQ}$ e a soma é tomada sobre todos os elementos de massa. Expandindo binomialmente a Eq. (2.1) e negligenciando os termos de alta ordem ($r \gg R$, para todo Q), obtemos

$$V \approx -\frac{Gm_p}{r} - \frac{\sum \delta m R \cos \theta}{r^2} - \frac{2 \sum \delta m R^2 - 3 \sum \delta m R^2 \sin^2 \theta}{2r^3}, \quad (2.2)$$

onde $m_p = \sum \delta m$ é a massa do planeta. Como O está no centro de massa do planeta,

$$\sum \delta m R \cos \theta = 0. \quad (2.3)$$

Temos também que

$$\begin{aligned}
2 \sum \delta m R^2 &= 2 \sum \delta m (x^2 + y^2 + z^2) \\
&= \sum \delta m (y^2 + z^2) + \sum \delta m (z^2 + x^2) + \sum \delta m (x^2 + y^2) \\
&= \mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Se nós denotarmos por I o momento de inércia do corpo sobre a linha $\overline{OP}$, então

$$I = \sum \delta m r^2 \sin^2 \theta \tag{2.5}$$

e, como a Eq. (2.2) é uma boa aproximação, temos então

$$V = -\frac{Gm_p}{r} - \frac{G(\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C} - 3I)}{2r^3}. \tag{2.6}$$

Esta é a *fórmula de MacCullagh* (Murray and Dermott, 1999). Podemos escrever o momento de inércia como

$$I = \frac{(\mathcal{A}x^2 + \mathcal{B}y^2 + \mathcal{C}z^2)}{r^2}. \tag{2.7}$$

Substituindo a Eq. (2.7) na Eq. (2.6), obtemos

$$V = -\frac{Gm_p}{r} - \frac{G}{2r^5} f(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, x, y, z), \tag{2.8}$$

onde

$$\begin{aligned}
f(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, x, y, z) &= (\mathcal{B} + \mathcal{C} - 2\mathcal{A})x^2 + (\mathcal{C} + \mathcal{A} - 2\mathcal{B})y^2 \\
&+ (\mathcal{A} + \mathcal{B} - 2\mathcal{C})z^2.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Sabendo que $\vec{F} = -M\vec{\nabla}V$, a força gravitacional na estrela é

$$F_x = -\frac{GMm_px}{r^3} + \frac{GM(\mathcal{B} + \mathcal{C} - 2\mathcal{A})x}{r^5} - \frac{5GMx}{2r^7} f(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, x, y, z), \tag{2.10a}$$

$$F_y = -\frac{GMm_py}{r^3} + \frac{GM(\mathcal{C} + \mathcal{A} - 2\mathcal{B})y}{r^5} - \frac{5GM y}{2r^7} f(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, x, y, z), \tag{2.10b}$$

$$F_z = -\frac{GMm_pz}{r^3} + \frac{GM(\mathcal{A} + \mathcal{B} - 2\mathcal{C})z}{r^5} - \frac{5GMz}{2r^7} f(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, x, y, z). \tag{2.10c}$$

Essas forças atuam na estrela e uma força igual e oposta atua sobre o planeta. As

componentes do torque são

$$N_x = zF_y - yF_z = \frac{3GM(\mathcal{C} - \mathcal{B})yz}{r^5}, \quad (2.11a)$$

$$N_y = xF_z - zF_x = \frac{3GM(\mathcal{A} - \mathcal{C})zx}{r^5}, \quad (2.11b)$$

$$N_z = yF_x - xF_y = \frac{3GM(\mathcal{B} - \mathcal{A})xy}{r^5}. \quad (2.11c)$$

As equações de Euler do movimento do corpo rígido são

$$\mathcal{A}\dot{\omega}_x - (\mathcal{B} - \mathcal{C})\omega_y\omega_z = N_x, \quad (2.12a)$$

$$\mathcal{B}\dot{\omega}_y - (\mathcal{C} - \mathcal{A})\omega_z\omega_x = N_y, \quad (2.12b)$$

$$\mathcal{C}\dot{\omega}_z - (\mathcal{A} - \mathcal{B})\omega_x\omega_y = N_z. \quad (2.12c)$$

onde ω_x , ω_y e ω_z são os componentes do vetor de rotação $\vec{\omega}$ nos eixos principais.

O eixo de rotação é perpendicular ao plano orbital, $\omega_x = \omega_y = 0$ e $\omega_z = \Omega = \dot{\theta}$. Tomaremos agora os cossenos diretores do planeta com respeito aos eixos x e y dados por $x/r = \cos \psi$ e $y/r = \sin \psi$, respectivamente, onde $\psi = f - \theta$, Fig. (2.1).

Neste caso, as Eqs. (2.12) se reduzem para a Eq. (2.12c), a qual pode ser escrita como

$$\ddot{\theta} = \frac{3}{2} \left(\frac{\mathcal{B} - \mathcal{A}}{\mathcal{C}} \right) \frac{GM}{r(t)^3} \sin(2(f(t) - \theta)) \quad (2.13)$$

onde o ângulo θ é medido com respeito a uma direção fixa no espaço e M é a massa da estrela.

A Eq. (2.13) é uma equação diferencial de segunda ordem não linear e não autônoma, pois f e r variam com o tempo. Ela pode ser usada para investigar diferentes problemas, por exemplo: a rotação caótica de Hyperion (Wisdom et al., 1984), as condições que devem ser satisfeitas para um planeta ser capturado em ressonância spin-órbita (Goldreich and Peale, 1966), a dinâmica de rotação de satélites naturais (Wisdom, 2004) e a dinâmica de rotação de planetas (Callegari and Rodríguez, 2013).

Neste trabalho a aplicaremos o modelo de rotação para investigarmos a dinâmica de rotação de planetas tipo terrestre com a perturbação de um terceiro corpo.

2.2 Análise Analítica do Modelo de Rotação

2.2.1 Frequência Livre

Primeiramente vamos considerar o caso especial de excentricidade zero (órbita circular). Neste caso temos que $r(t) = a$, uma constante, e $f(t) = nt$. Pela terceira Lei de Kepler temos que $n^2 a^3 = G(M + m_p)$, ou aproximadamente $n^2 a^3 = GM$ para $M \gg m_p$. A Eq. (2.13) se torna

$$\ddot{\theta} = \frac{3}{2} \left(\frac{\mathcal{B} - \mathcal{A}}{\mathcal{C}} \right) n^2 \sin(2\psi(t)). \quad (2.14)$$

Fazendo a mudança de variável $u = nt - \theta$, conseqüentemente $\ddot{u} = -\ddot{\theta}$, e substituindo na Eq. (2.14) temos

$$\ddot{u} = -\frac{3}{2} \left(\frac{\mathcal{B} - \mathcal{A}}{\mathcal{C}} \right) n^2 \sin(2u(t)). \quad (2.15)$$

No entorno do sincronismo, $u \ll 1$ e $\dot{u} \sim n$, temos

$$\ddot{u} = -\omega_0^2 u(t), \quad (2.16)$$

onde ω_0 é a frequência livre (Murray and Dermott, 1999).

$$\omega_0 = n \sqrt{3 \left(\frac{\mathcal{B} - \mathcal{A}}{\mathcal{C}} \right)}. \quad (2.17)$$

Nota-se que ω_0 depende somente de n e da magnitude da diferença do momento de inércia equatorial, isto é, $\mathcal{B} - \mathcal{A}$.

2.2.2 Frequência Forçada

Definindo a quantidade angular $\gamma \equiv \theta - M$, onde $M(t) = nt + c$ é a anomalia média da órbita do planeta. Para primeira ordem em excentricidade, as expansões elípticas para o problema de dois corpos nos mostram que

$$f - M \approx 2e \sin(nt),$$

desta maneira temos que

$$\psi \approx 2e \sin(nt) - \gamma. \quad (2.18)$$

A Eq. (2.13) pode ser escrita como

$$\mathcal{C} \ddot{\gamma} - \frac{3}{2} (\mathcal{B} - \mathcal{A}) n^2 \left(\frac{a}{r} \right)^3 \sin(4e \sin(nt) - 2\gamma) = 0. \quad (2.19)$$

Para pequenos desvios da configuração de equilíbrio, podemos aproximar a expansão elíptica (e.g. Murray and Dermott (1999))

$$\left(\frac{a}{r} \right)^3 = 1 + 3e \cos M + \frac{3}{2} e^2 (1 + 3 \cos 2M) + O(e^3)$$

por

$$\left(\frac{a}{r} \right)^3 \approx 1 + 3e \cos(nt), \quad (2.20)$$

então a Eq. (2.19) se reduz à

$$\mathcal{C} \ddot{\gamma} = \frac{3}{2} (\mathcal{B} - \mathcal{A}) n^2 (4e \sin(nt) - 2\gamma) \quad (2.21)$$

ou

$$\ddot{\gamma} = -\omega_0^2 \gamma + 2\omega_0^2 e \sin(nt), \quad (2.22)$$

onde ω_0 é a frequência de libração livre, Eq. (2.17).

Pela teoria das Equações Diferenciais sabemos que a solução da Eq. (2.22) é a soma da solução homogênea e particular $\gamma(t) = \gamma_p + \gamma_h$. A solução da equação homogênea será:

$$\gamma_h(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t). \quad (2.23)$$

Aplicando as condições iniciais,

$$\begin{aligned} \gamma_h(0) = \gamma_0 &\rightarrow A = \gamma_0 \\ \dot{\gamma}_h(0) = 0 &\rightarrow B = 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Portanto,

$$\gamma_h(t) = \gamma_0 \cos(\omega_0 t). \quad (2.25)$$

A solução particular será

$$\gamma_p(t) = \frac{2\omega_0^2 e}{\omega_0^2 - n^2} \sin(nt). \quad (2.26)$$

A solução geral portanto é

$$\gamma(t) = \gamma_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{2\omega_0^2 e}{\omega_0^2 - n^2} \sin(nt). \quad (2.27)$$

Note que a libração forçada, Eq. (2.26), depende de e e ω_0 . Somente haverá libração forçada se o planeta for não esférico e se mover numa órbita excêntrica. Ela tem uma pequena amplitude, podendo ser estimada através da Eq. (2.26).

Para exemplificar mostramos a solução geral $\gamma(t)$ juntamente com $\psi(t)$, dado pela integração numérica da Eq. (2.13), na Fig. (2.3).

Os dados do planeta *Kepler-10b*, Tab. (1.1), foram utilizados no exemplo. As condições iniciais são: $\theta_0 = 5^\circ$, $\Omega_0 = n$ e $\gamma_0 = -5^\circ$, com $e = 0,1$.

Na solução analítica temos a **libração livre** associada à frequência livre (ω_0) e a **libração forçada** associada ao movimento médio (n).

Na solução numérica temos a **libração física** que é composta pela libração livre, a libração forçada (que tem uma pequena amplitude e não pode ser visto no gráfico) e a **libração ótica** que tem frequência n , mesma frequência da libração forçada. A libração ótica ocorre devido ao movimento não uniforme de *Kepler-10b* em sua órbita elíptica, tem frequência orbital ($n = 2\pi/0.841 \text{ dias}^{-1}$), com uma amplitude que depende somente da excentricidade e existe mesmo que o corpo seja esférico.

Gostaríamos de destacar que este resultado foi publicado em [Callegari and Ribeiro \(2014\)](#).

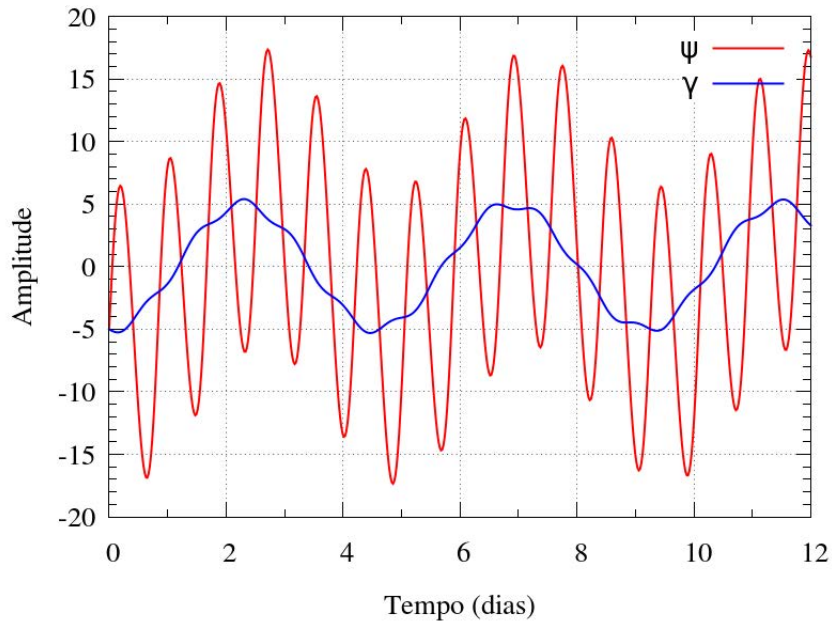


Figura 2.3: Correspondência entre a solução numérica de $\psi(t) = f(t) - \theta(t)$ (Eq. 2.13, linha vermelha) e solução geral $\gamma(t)$ (Eq. 2.27, linha azul), aplicado ao planeta *Kepler-10b*. As condições iniciais usadas foram $\theta(0) = 5^\circ$, $\Omega(0) = n$ e $\gamma_0 = -5^\circ$.

Caso não Perturbado

É importante salientar que neste capítulo consideraremos o sistema estrela-planeta. Assumimos que a órbita será dada uma elipse com semi-eixo maior (a) e excentricidade (e) constantes.

A equação de movimento, Eq. (2.13), será integrada juntamente com a equação diferencial que mostra a evolução da anomalia verdadeira (f) de um planeta, dada por

onde G é a constante de gravitação, M é a massa da estrela e m_p a massa do planeta.



Para integrar as equações acopladas usaremos o código RA15 (([Everhart, 1985](#)))

escrito e desenvolvido em linguagem Fortran 90.

Em nossas simulações as unidades adotadas para massa, distância e tempo foram: massa solar, unidade astronômica e dia. Sempre começaremos as integrações do pericentro, isto é, $f(0) = 0$.

3.2 55 Cnc e

Seja o sistema composto pela estrela *55 Cnc* e o planeta *55 Cnc e*. Os parâmetros orbitais são dados na Tab. (1.1). Aplicaremos as técnicas descritas no Ap. A para investigar sua dinâmica de rotação.

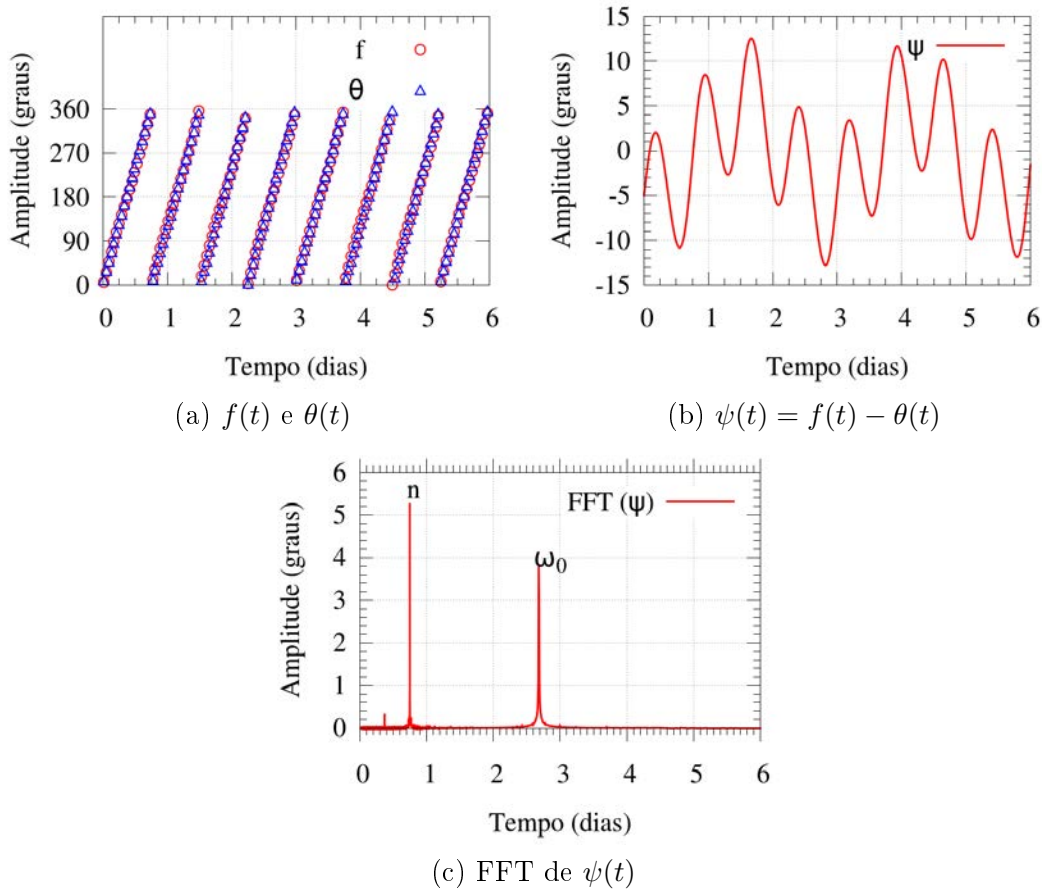


Figura 3.2: Gráficos das evoluções temporais das seguintes variáveis para *55 Cnc e*: (a) $f(t)$ e $\theta(t)$ e (b) $\psi(t) = f(t) - \theta(t)$. As condições iniciais usadas foram $\theta(0) = 2^\circ$, $\Omega(0) = n$. (c) Transformada Rápida de Fourier de $\psi(t)$.

Na Fig. (3.2) mostramos a evolução no tempo para as variáveis: f , θ (Fig. 3.2a) e $\psi = f - \theta$ (Fig. 3.2b). As condições iniciais usadas foram $\theta(0) = 2^\circ$ e $\Omega(0) = n$.

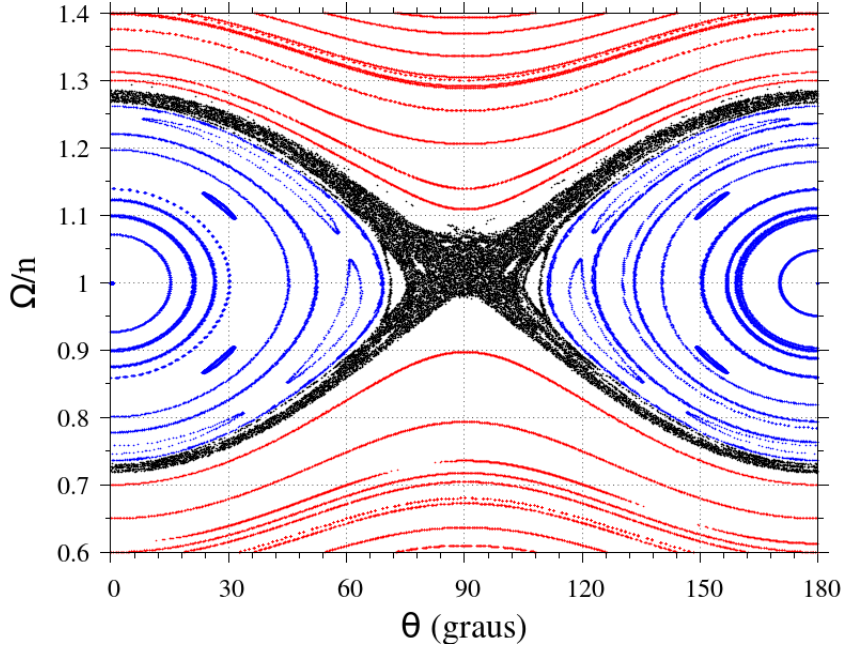


Figura 3.3: Superfície de seção para o planeta *55 Cnc* e com uma excentricidade de $e = 0,006$. Os valores de θ e Ω/n são anotados em sucessivas passagens pelo pericentro ($f = 0$).

Podemos notar que tanto a anomalia verdadeira (f) quanto θ circulam no tempo em um período igual ao período orbital. Este cenário é chamado de ressonância spin-órbita 1:1, no qual o período de rotação é comensurável com o período orbital.

ψ apresenta uma libração em torno de zero, chamada de **libração física**. A libração física é composta pelas librações livre, ótica e forçada, discutidas na seção 2.2.

Na Fig. (3.2c) mostramos a FFT da variável ψ . A FFT é uma transformação numérica que passa uma quantidade do espaço temporal para o espaço das frequências, mais detalhes são mostrados no Ap. (A.2). Nessa figura recuperamos os principais períodos associados com o problema de rotação. Podemos observar dois picos. Um, indicado como ω_0 em referência à frequência livre, com período 2.67 dias, que concorda com o período calculado a partir da Eq. (2.17). Outro, indicado como n em referência ao movimento médio, com período 0.75 dias, condizente com o período orbital.

A superfície de seção da Fig. (3.3) foi construída tomando os valores de θ e Ω/n sempre que o planeta passa pelo periastro, ou seja, $f = 0$. Na região azul a dinâmica é regular, ocorre uma libração, as órbitas são fechadas e o movimento é periódico. Também mostra uma ressonância secundária ao redor do sincronismo. Ressonâncias secundárias são uma comensurabilidade entre as librações físicas e o movimento médio do planeta. A região vermelha mostra órbitas que correspondem a circulação, também são periódicas, acima do sincronismo elas são prógradas e abaixo são retrógradas. Na região preta o movimento é caótico, os pontos aparecem na superfície de seção de maneira randômica, são órbitas irregulares. O caos aparece no entorno da separatriz

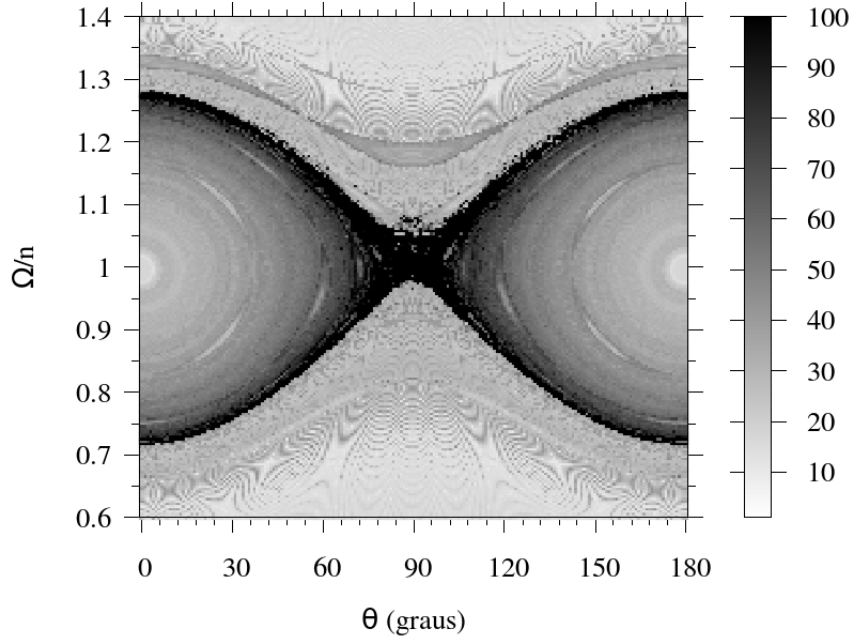


Figura 3.4: Mapa Dinâmico para 55 Cnc e com uma excentricidade igual a $e = 0,006$.

devido ao *overlap* entre as ilhas de ressonância spin-órbita. O achatamento é responsável pelo tamanho das ilhas de ressonância spin-órbita e a excentricidade causa o *overlap* entre as ilhas. Quanto maior a excentricidade, maior é o domínio do mar de caos.

3.2.1 Mapa Dinâmico do planeta 55 Cnc e

Utilizando a técnica de mapas dinâmicos (e.g. [Michtchenko and Ferraz-Mello \(2001\)](#)) representamos o espaço de fase do modelo de rotação. Eles serão usados no caso não perturbado em comparação com as superfícies de seção.

Mapas dinâmicos são construídos plotando o número espectral na grade de condições iniciais do espaço de fase. Por definição o número espectral é o número de picos que aparecem no espectro de Fourier (seção A.2) para a variável dinâmica de interesse, no nosso caso θ .

São contados os picos que possuem uma amplitude maior que 5% da maior amplitude do espectro.

O número espectral é representado na grade de condições iniciais por uma cor na escala de cinza. A dependência da cor segue o seguinte padrão:

- i) pontos brancos correspondem ao número espectral com valor 1.
- ii) dentro da escala de cinza correspondem a números espectrais entre 1 e um valor máximo. Esse valor é definido de acordo com o mapa.

- iii) pontos pretos correspondem a números espectrais maiores que o valor máximo definido em ii).

Na Fig. (3.4) mostramos um mapa dinâmico. As diferentes regiões da grade de condições iniciais estão relacionadas com as regiões de estabilidade do espaço de fase. As regiões brancas e cinzas, isto é, onde o número espectral assume valores pequenos e intermediários, representam regiões onde o movimento é regular, pelo contraste percebemos as ressonâncias secundárias e as ilhas associadas com o sincronismo. O espectro tem um pequeno número de picos contáveis. Nas regiões escuras, onde o espectro tem um grande número de picos, o movimento é caótico. O mapa dinâmico é equivalente à superfície de seção, ele reproduz os principais regimes dinâmicos obtidos pela superfície de seção. A diferença é o tempo computacional necessário para calculá-lo, cerca de 24 horas enquanto a superfície de seção leva cerca de alguns minutos. Se torna vantajoso usar o mapa dinâmico quando não é possível construir a superfície de seção, como o caso do sistema perturbado.

3.3 Kepler-42c

Seja o sistema composto pela estrela *Kepler-42* e o planeta *Kepler-42c*. Os parâmetros orbitais são dados na Tab. (1.1).

Na Fig. (3.5) mostramos a evolução no tempo para as variáveis: f , θ (Fig. 3.5a) e $\psi = f - \theta$ (Fig. 3.5b). As condições iniciais usadas foram $\theta(0) = 2^\circ$ e $\Omega(0) = n$.

A amplitude da libração ótica para *Kepler-42c* é pequena, pois a excentricidade usada foi de $e = 0,001$.

A Fig. (3.5c) mostra a FFT para ψ , nela vemos dois picos. A frequência livre (ω_0), com período 2,5 dias, que concorda com o período calculado a partir da Eq. (2.17). E o movimento médio (n), com período 0,47 dias, que condiz com o período orbital.

As superfícies de seção das Figs. (3.6) foram construídas tomando os valores de θ e Ω/n sempre que $f = 0$. Para $e = 0,01$ (Fig. (3.6a)) a região no entorno da separatriz tem uma pequena faixa caótica e notamos a presença de pequenas ressonâncias secundárias. Aumentando a excentricidade para $e = 0,1$ (Fig. (3.6b)) a região caótica aumenta consideravelmente e surgem novas ilhas, como a ilha associada com a ressonância spin-órbita 5 : 4 em $\theta = 90^\circ$ e $\Omega/n = 5/4$. O mar de caos deforma a ilha associada ao sincronismo e aumenta o tamanho das ilhas associadas às ressonâncias secundárias.

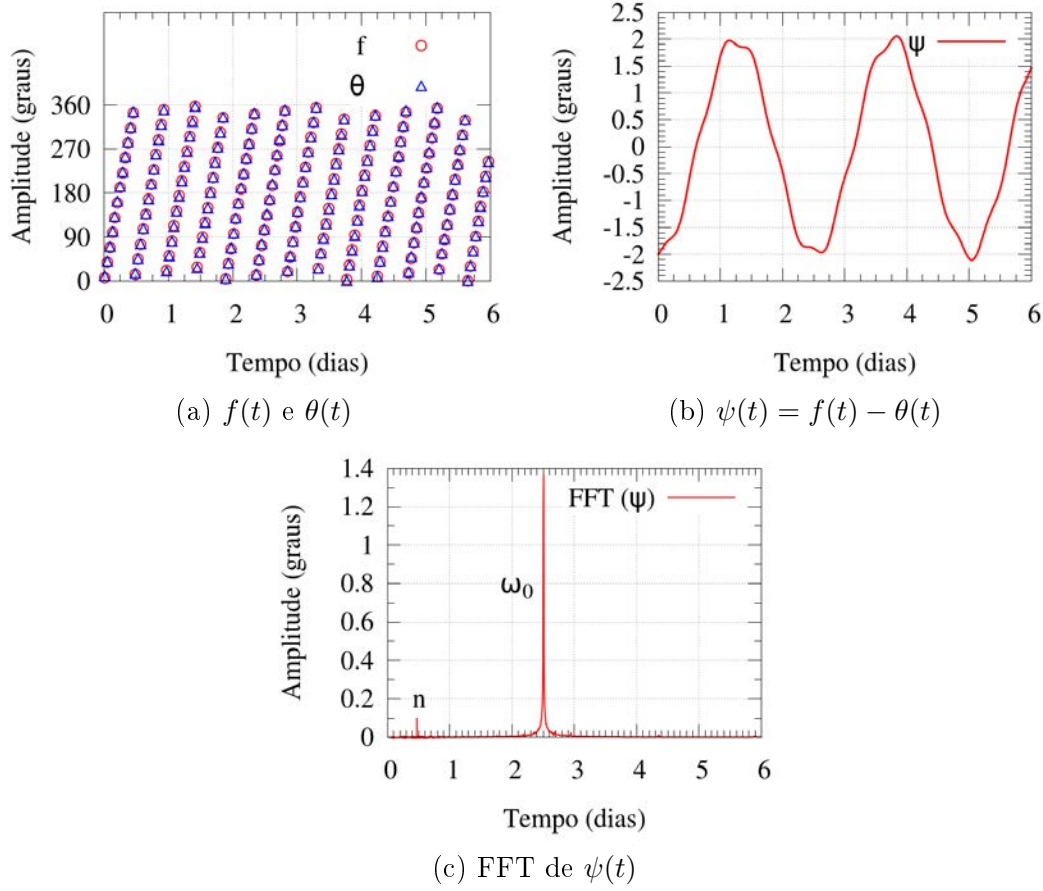
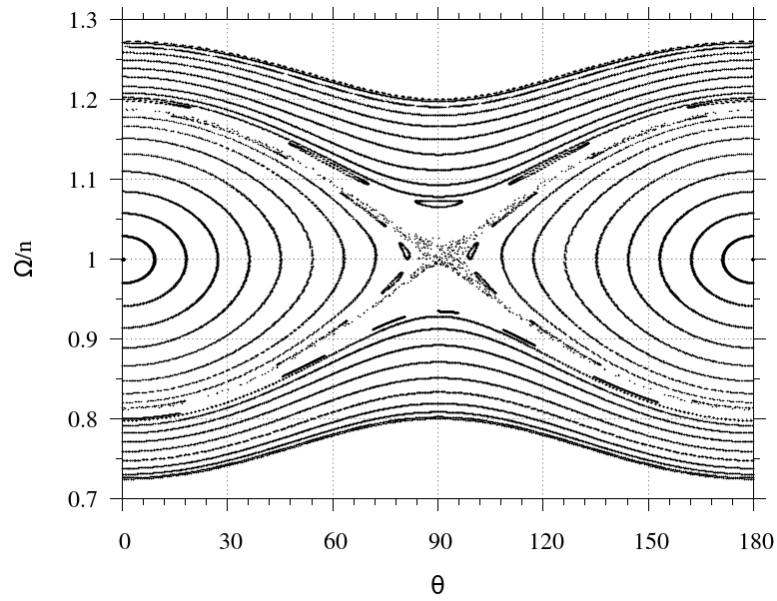
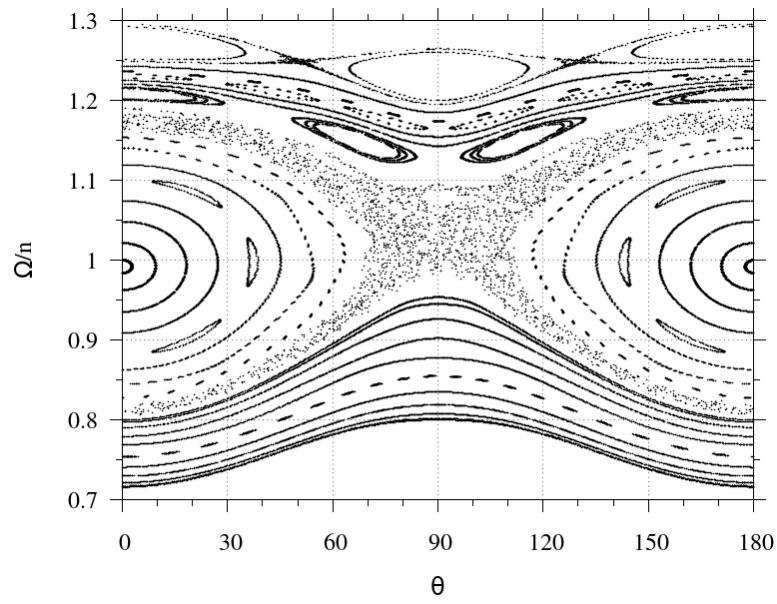


Figura 3.5: Gráficos da evolução no tempo das variáveis: (a) f e θ e (b) ψ , para *Kepler-42c*. As condições iniciais usadas foram $\theta(0) = 2^\circ$ e $\Omega_0 = n$. (c) Transformada Rápida de Fourier para ψ .

(a) $e = 0,01$ (b) $e = 0,1$ Figura 3.6: Superfícies de seção para *Kepler-42c*: (a) $e = 0,01$. (b) $e = 0,1$.

3.4 Kepler-70b

Seja sistema composto pela estrela *Kepler-70* e o planeta *Kepler-70b*. Os parâmetros orbitais são dados na Tab. (1.1).

Na Fig. (3.7) podemos notar que as órbitas periódicas ao redor da ressonância spin-órbita 1 : 1 tem um grande domínio, isto devido ao valor de $(\mathcal{B} - \mathcal{A})/\mathcal{C}$ ser maior que dos planetas *55 Cnc e* e *Kepler-42c*. No mapa dinâmico da Fig. (3.7c) vemos que o centro da ressonância spin-órbita 3 : 2 esta contida dentro da ilha que engloba a ressonância spin-órbita 1 : 1. Quando aumentamos a excentricidade de $e = 0,01$ para $e = 0,05$ o domínio da região caótica aumenta consideravelmente, e o entorno da ressonância spin-órbita 3 : 2 é dominado pelo caos. As ilhas associadas às ressonâncias secundárias são deslocadas de $\theta = 70^\circ$ e $\Omega/n = 1$ para $\theta = 40^\circ$ e $\Omega/n = 0,7$. O entorno da ressonância spin-órbita 3 : 4 passa a ser envolvido pelo caos. Também o domínio da ilha é comprimido consideravelmente.

Vale destacar que o centro da ressonância spin-órbita 1 : 1 é deslocado ao variarmos a excentricidade. Este deslocamento ocorre devido à libração forçada e a amplitude do deslocamento é igual a amplitude da libração forçada, Eq. (2.26), (Wisdom et al., 1984).

Construímos também o mapa dinâmico para as mesmas condições das superfícies de seção, Fig. (3.7c) e Fig. (3.7d). Podemos notar o surgimento de uma ilha em $\theta = 90^\circ$ e $\Omega/n = 1,5$ após mudarmos a excentricidade. O mapa dinâmico reproduz os principais regimes dinâmicos obtidos pela superfície de seção. Portanto eles são equivalentes.

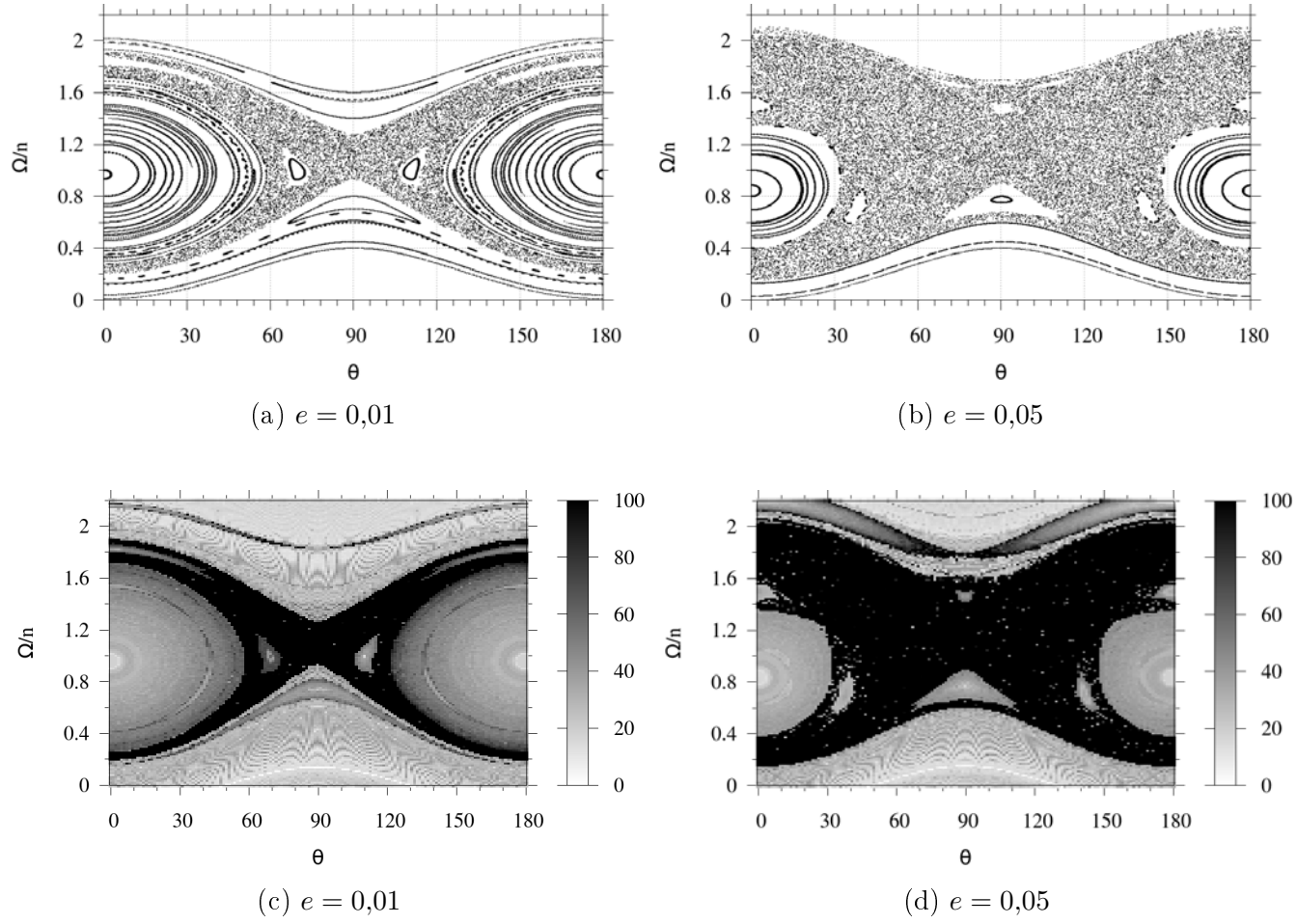


Figura 3.7: Superfícies de seção para *Kepler-70b*: (a) $e = 0.01$. (b) $e = 0.05$. Mapa dinâmico para *Kepler-70b*: (c) $e = 0.01$. (d) $e = 0.05$.

Capítulo 4

Caso Perturbado

Neste capítulo vamos aplicar o modelo de rotação descrito no Cap. 2 considerando a perturbação de um terceiro corpo. O sistema é composto pela estrela (M), o planeta que estudamos a rotação (m_p) e um planeta que perturba sua órbita (m'_p) (Fig. (4.1)).

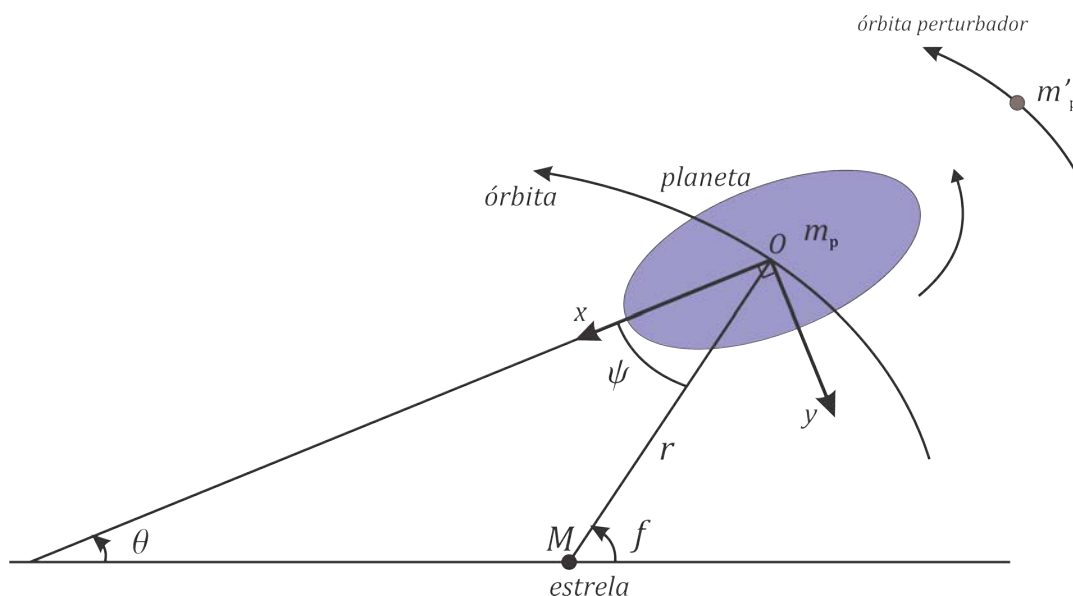


Figura 4.1: Modelo de Rotação com perturbação de um terceiro planeta.

4.1 Equações de movimento

Considere dois planetas (massas m_p e m'_p) e uma estrela (massa M) em interação gravitacional mútua regida pela Lei da Gravitação de Newton.

Um dos planetas é considerado um elipsoide com momentos principais de inércia $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$.

Em um sistema de referência centrado na estrela, onde as posições e velocidades dos planetas são $\vec{r}_1$, $\vec{v}_1$ e $\vec{r}_2$, $\vec{v}_2$, as equações de movimento do problema de três corpos são dadas por:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{G(M + m_p)}{r_1^3}\vec{r}_1 + Gm'_p\left(\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} - \frac{\vec{r}_2}{r_2^3}\right), \quad (4.1a)$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{G(M + m'_p)}{r_2^3}\vec{r}_2 + Gm_p\left(\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} - \frac{\vec{r}_1}{r_1^3}\right), \quad (4.1b)$$

onde G é constante de gravitação.

E a equação de rotação do planeta é

$$\ddot{\theta} = \frac{3}{2}\left(\frac{\mathcal{B} - \mathcal{A}}{\mathcal{C}}\right)\frac{GM}{r_1^3}\sin 2(f(t) - \theta), \quad (4.2)$$

onde o ângulo θ é medido com respeito a uma direção fixa no espaço e o ângulo f é dado por $\tan f = y_1/x_1$.

4.2 Aplicação ao Sistema *Kepler-11*

Nesta seção aplicaremos o modelo descrito na seção 4.1 para investigar a dinâmica de rotação do planeta *Kepler-11b*. Para isso a equação de movimento, Eq. (4.2), será integrada juntamente com as equações de movimento de três corpos, Eq. (4.1). Para integrá-las usaremos o código RA15, (Everhart, 1985), desenvolvido em linguagem Fortran 90.

Os elementos orbitais do sistema *Kepler-11* utilizados nas integrações numéricas são dados na Tab. (1.1).

Na Fig. (4.2a) mostramos uma ressonância spin-órbita do tipo 1:1 para $\theta(0) = 2^\circ$ e $\Omega(0) = n$.

A perturbação que *Kepler-11b* sofre por causa da presença de *Kepler-11c* faz com que a excentricidade de *Kepler-11b* varie ao longo do tempo, como mostrado na Fig (4.2c).

Podemos perceber que quando a excentricidade é mínima, o curto período apresentado em $\psi(t)$, Fig. (4.2a) tem sua menor amplitude. Enquanto quando a excentricidade é máxima, o curto período de $\psi(t)$ tem a maior amplitude. Isso acontece pois o curto período é associado à libração ótica, que depende da excentricidade.

Na Fig. (4.2b) mostramos os períodos das librações, destaque para o pico em torno de 403 dias, que é devido à libração livre e o pequeno pico em aproximadamente 277 dias é devido a perturbação de *Kepler-11c*, pois eles se encontram próximos à uma comensurabilidade entre seus movimentos médios. Trataremos mais sobre essa perturbação na seção 4.2.1. No gráfico da FFT para a excentricidade, Fig. (4.2d), também aparece o pico de 277 dias devido à perturbação de *Kepler-11c*.

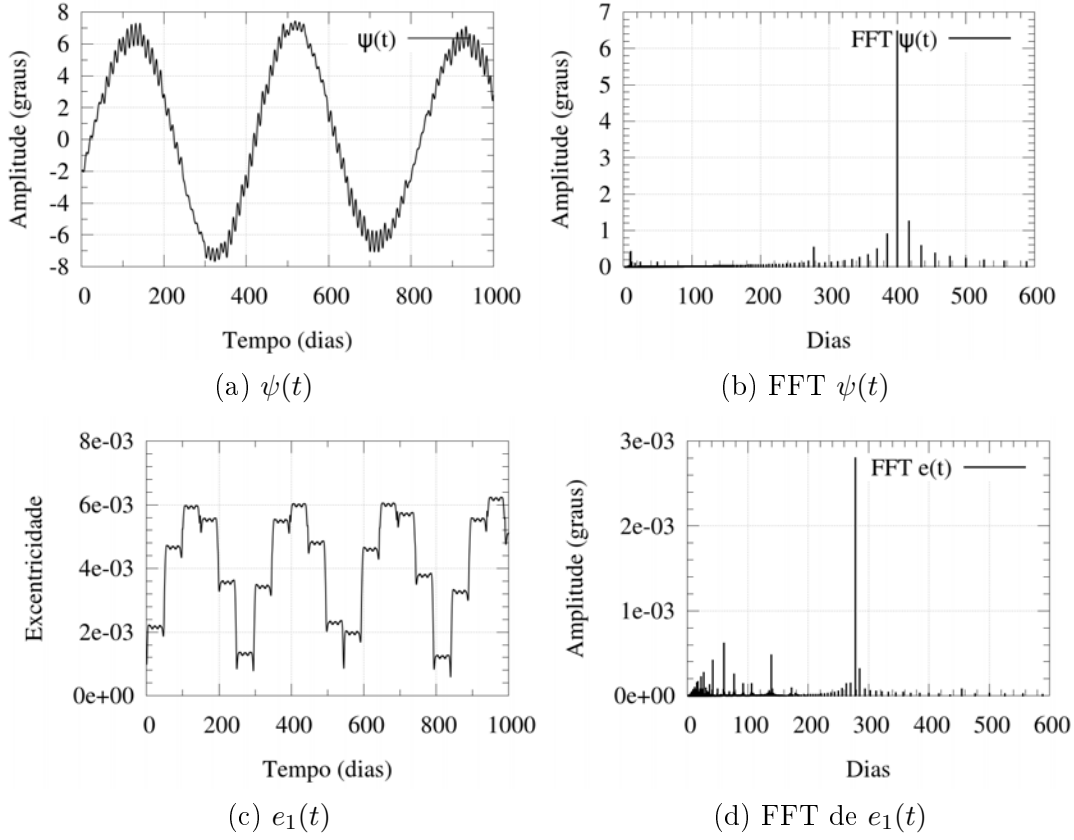


Figura 4.2: (a) $\psi(t)$. (b) FFT de $\psi(t)$. (c) $e_1(t)$. (d) FFT de $e_1(t)$. Planeta *Kepler-11b* com as condições iniciais: $\theta(0) = 2^\circ$, $\Omega(0) = n$, $e_1 = 0,01$ e $a_1 = 0,091$ UA.

4.2.1 Quase ressonância 5 : 4 de movimentos médios

A análise da Tab. (1.1) mostra que os períodos orbitais dos planetas *Kepler-11b* e *Kepler-11c* estão próximos a uma comensurabilidade de movimentos médios tal que a razão deles é próxima de 5 : 4.

O período dessa comensurabilidade pode ser estimado através de

$$4n_{11b} - 5n_{11c} = \delta_R, \quad (4.3)$$

onde δ_R é uma grandeza empírica. Podemos reescrever a Eq. (4.3) como:

$$2\pi \left(\frac{4}{T_{11b}} - \frac{5}{T_{11c}} \right) = \frac{2\pi}{T_R}, \quad (4.4)$$

onde T_{11b} , T_{11c} e T_R são os períodos de *Kepler-11b*, *Kepler-11c* e o período da grandeza,

respectivamente. Da Eq. (4.4) tiramos que

$$\frac{1}{T_R} = \frac{4}{T_{11b}} - \frac{5}{T_{11c}}. \quad (4.5)$$

Na Fig. (4.3) graficamos T_R , Eq. (4.4), e $T_0 = 2\pi/\omega_0$, Eq. (2.17), em função do semi-eixo maior do planeta *Kepler-11b*. O limite inferior e superior da abscissa do semi-eixo maior é dado pelo erro da medida (Tab. (1.1)), $a_1 = 0,091 \pm 0,003$. A curva preta é o valor do semi-eixo para que *Kepler-11b* esteja numa comensurabilidade de movimentos médios 5 : 4 com o planeta *Kepler-11c*. Vemos que para o semi-eixo de $\sim 0,0914$ UA o valor de T_R é igual ao valor de T_0 . Podemos variar o semi-eixo de *Kepler-11b* dentro do erro da medida, de maneira que o sistema fique próximo da ressonância de movimentos médios 5 : 4.

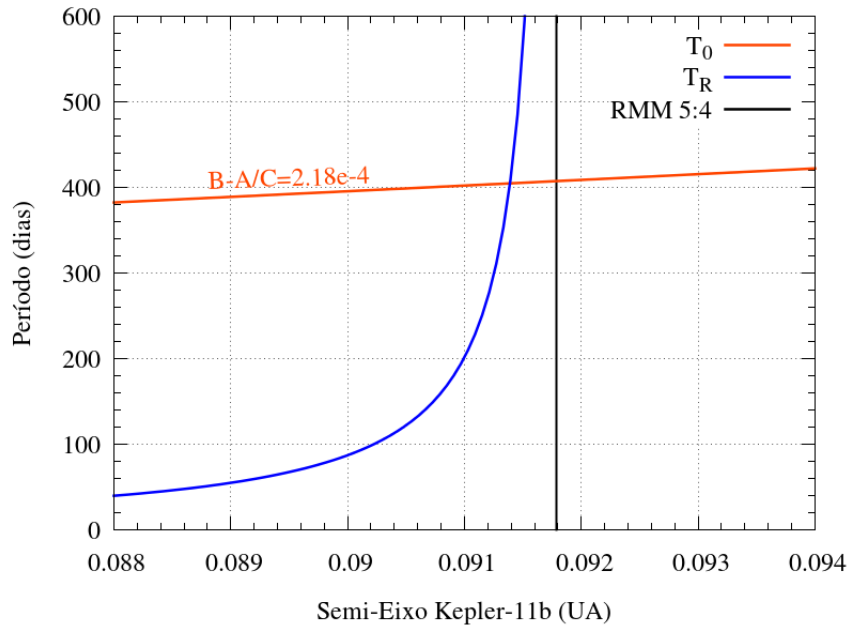


Figura 4.3: Estimativa do período da comensurabilidade de movimentos médios e período livre em função do semi-eixo maior de *Kepler-11b*.

Ao variarmos o valor do semi-eixo de *Kepler-11b* dentro do erro da medida, $\pm 0,003$, a amplitude de libração do ângulo $\psi(t)$ aumenta, Fig. (4.4). Tal aumento de amplitude de libração dentro do domínio da ressonância 1 : 1 é causado pela presença do segundo planeta (*Kepler-11c*). De fato, para valores iniciais de semi-eixo maior de *Kepler-11b*, próximo da ressonância 5 : 4 de movimentos médios, variações periódicas ressonantes nos elementos orbitais passam a ser importantes, e as grandes variações de amplitude de $\psi(t)$, Fig. (4.4), estão relacionadas com a proximidade da ressonância de movimentos médios.

Nas Figs. (4.5b) e (4.5d) mostramos os espectros do semi-eixo e excentricidade

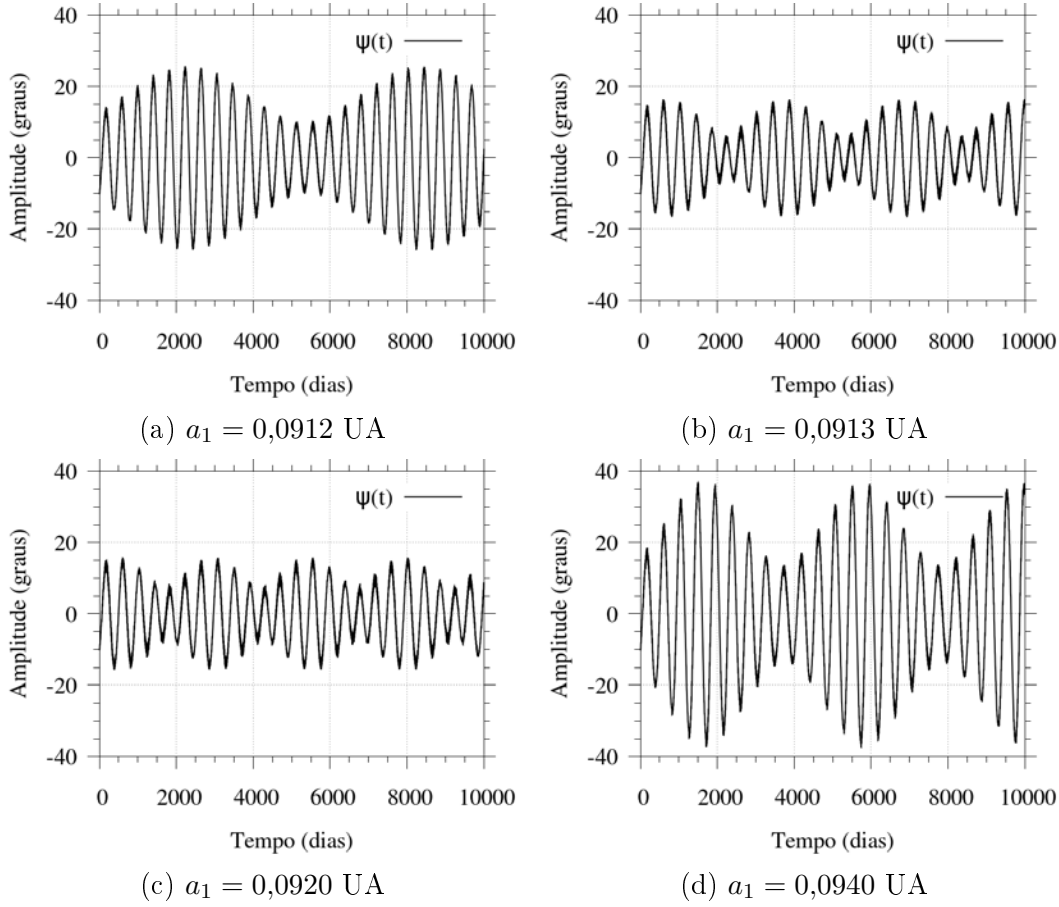


Figura 4.4: Gráficos da evolução de ψ no tempo para *Kepler-11b* com um semi-eixo: (a) $a_1 = 0,0912$ UA, (b) $a_1 = 0,0913$ UA, (c) $a_1 = 0,0920$ UA, (d) $a_1 = 0,0940$ UA. $\theta(0) = 10^\circ$ e $\Omega(0) = n$.

do planeta *Kepler-11b* para $a_1 = 0,0913$ UA. Os picos em destaque correspondem às perturbações ressonantes mútuas. Na Fig. (4.5f) plotamos o espectro do ângulo $\psi(t)$. Vemos a presença de 2 picos próximos. O pico da esquerda corresponde à libração livre, cujo período pode ser obtido também pela Eq. (2.17).

Já o pico da direita está relacionado com a proximidade do par *Kepler-11b,c* com a ressonância de movimentos médios 5 : 4. De fato, a velocidade de rotação do planeta é influenciada diretamente por tal perturbação. Podemos ver isso pela Eq. (4.2), a qual depende de $r_1(t)$, $f(t)$, grandezas perturbadas no problema de três corpos.

O formato das oscilações observadas na Fig. (4.4) nos indica que há ocorrência de alguma espécie de batimento entre as frequências fundamentais do problema.

Batimentos são causados pela interferência de duas ondas (com frequências próximas) no mesmo ponto no espaço. Quando seus máximos ou mínimos coincidem temos

uma interferência construtiva e quando um máximo coincide com um mínimo temos uma interferência destrutiva. Neste caso quando o período da ressonância de movimentos médios se aproxima do período da libração livre, observamos o batimento.

A frequência do batimento pode ser obtida da seguinte maneira

$$\omega_b = |\omega_R - \omega_0|, \quad (4.6)$$

onde ω_R é a frequência da ressonância de movimentos médios, e ω_0 é a frequência livre.

Pela Fig. (4.5b) obtemos um valor de 476.6 dias para o período da ressonância de movimentos médios. E pela Fig. (4.5f) um valor de 403.3 dias para o período da libração livre. Através da Eq. (4.6), obtemos um valor de 2 622 dias para o período do batimento, que é aproximadamente o período do batimento mostrado na Fig. (4.5e).

Esses resultados foram apresentados em “*LARIM 2013: XIV Latin American Regional IAU Meeting*”, [Ribeiro and Callegari Jr \(2014\)](#).

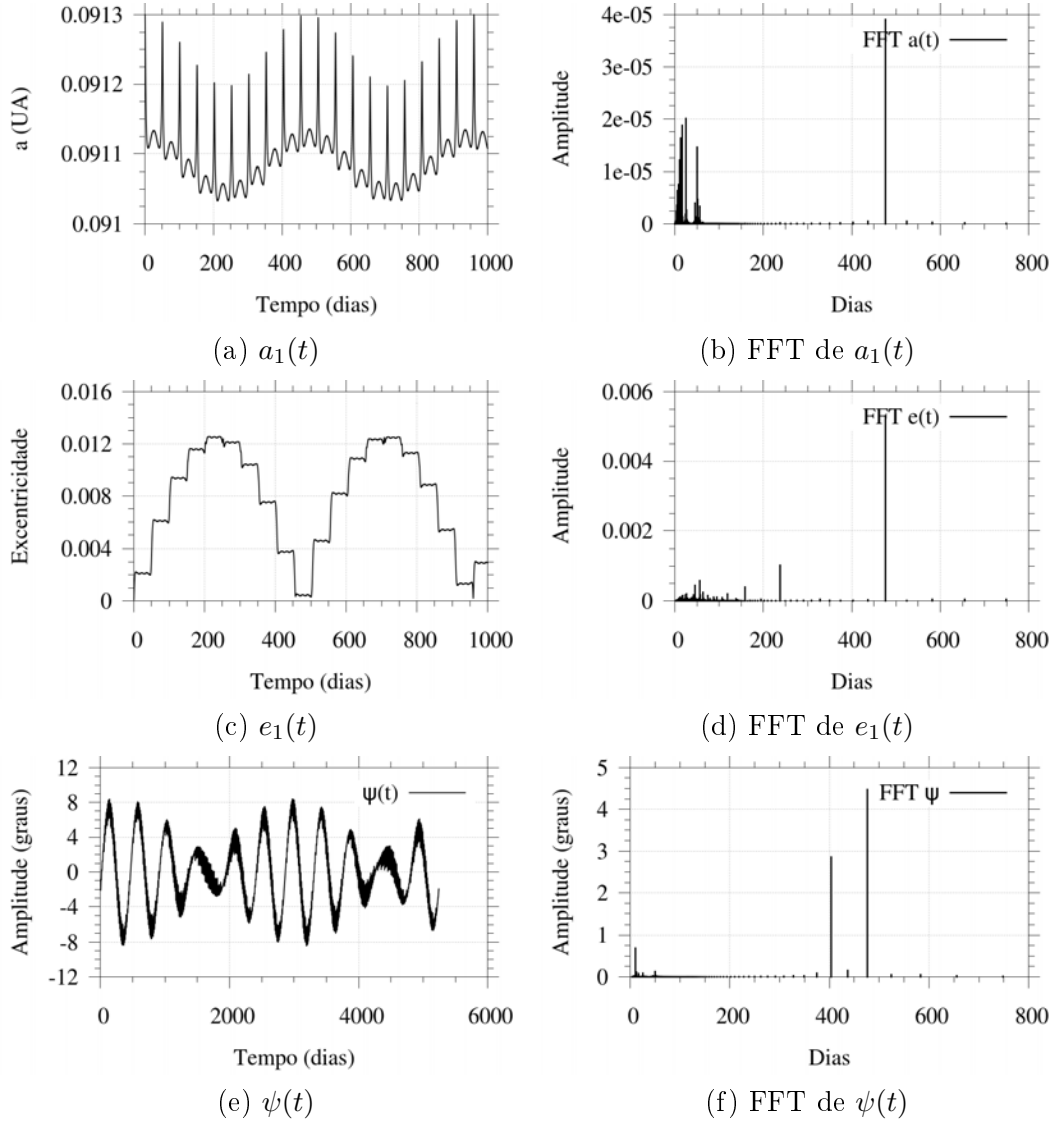


Figura 4.5: Evolução temporal das quantidades: (a) $a_1(t)$, (c) $e_1(t)$ e (e) $\psi(t)$ para o planeta *Kepler-11b* com um semi-eixo de $a_1 = 0,0913$ UA, $\theta_0 = 2^\circ$ e $\Omega/n = 1$. FFT das variáveis: (b) $a_1(t)$, (d) $e_1(t)$, (f) $\psi(t)$ com a libração livre em 403.3 dias e o período da ressonância de movimentos médios em 476.6 dias.

4.2.2 Regime de altas amplitudes ($\theta_0 > 60^\circ$)

Na seção 4.2.1 mostramos que quando *Kepler-11b,c* estão na proximidade da ressonância de movimento médio observamos o batimento entre a frequência da ressonância orbital e da frequência livre. A consequência disso é o aumento da amplitude do ângulo $\psi(t)$, Fig. (4.4).

Nesta seção exploraremos esse fenômeno a fim de procurar regiões em que o batimento tem influência na dinâmica de rotação do planeta.

Na Fig. (4.6) iniciamos a integração com $\theta_0 = 70^\circ$ para os semi-eixos $a_1 = 0,0914$ UA e $a_2 = 0,0940$ UA. Na Fig. (4.6a) a rotação do planeta alterna da circulação para a libração do ângulo ψ e vice-versa num regime irregular. O mesmo ocorre com a Fig. (4.6b). Se compararmos com a Fig. (4.4d) vemos que para o mesmo semi-eixo e condições de θ_0 diferentes a perturbação do terceiro provoca a mudança na dinâmica de rotação, com movimentos irregulares do ângulo ψ que alterna entre a circulação e a libração.

Na Fig. (4.6c) e Fig. (4.6d) plotamos a variação temporal de Ω/n , podemos notar que o ângulo ψ circula quando Ω/n oscila abaixo ou acima do sincronismo e ψ libra quando Ω/n oscila no entorno do sincronismo.

Os espectros de Fourier de $\psi(t)$ para os semi-eixos $a_1 = 0,0914$ UA e $a_2 = 0,0940$ UA são plotados nas Figs. (4.6e) e (4.6f). Vemos que o gráfico é preenchido de picos de diversas amplitudes e períodos, mostrando que o movimento é irregular.

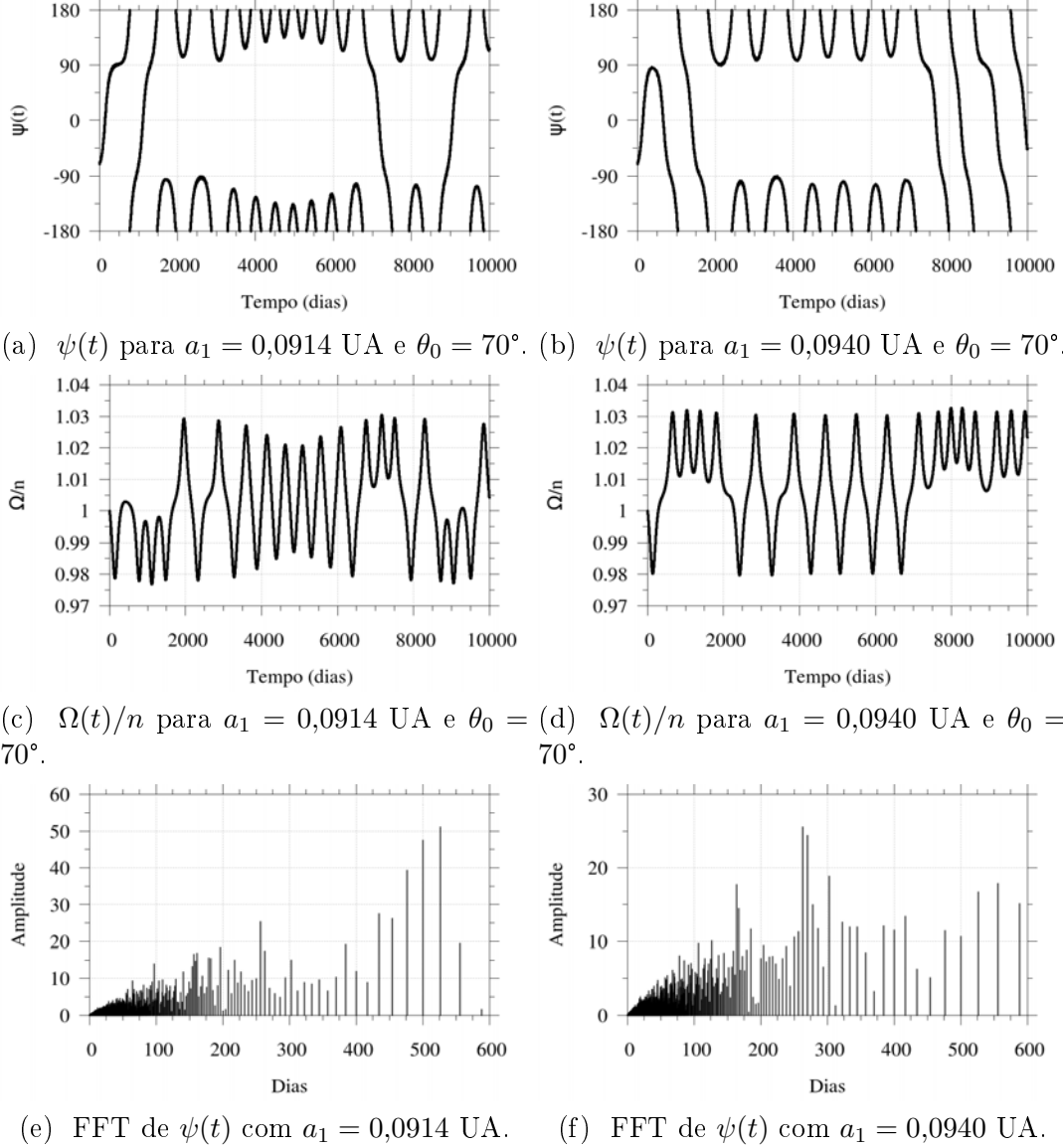


Figura 4.6: Gráficos da evolução temporal de: (a) $\psi(t)$ e (c) $\Omega(t)/n$ com $a_1 = 0,0914$ UA; (b) $\psi(t)$ e (d) $\Omega(t)/n$ com $a_1 = 0,0915$ UA. Orientação inicial $\theta_0 = 70^\circ$. (e) Espectro de $\psi(t)$ com $a_1 = 0,0914$ UA e (f) Espectro de $\psi(t)$ com $a_1 = 0,0940$ UA.

4.2.3 Mapas Dinâmicos

Nas seções anteriores mostramos que a dinâmica de rotação muda ao variarmos o semi-eixo de *Kepler-11b*. Nesta seção construímos mapas dinâmicos a fim de encontrar estruturas no espaço de fase que mostrem essa dinâmica.

A Fig. (4.7) mostra mapas dinâmicos construídos com semi-eixos iniciais escolhidos dentro do erro da medida, os quais se aproximam da comensurabilidade de movimentos médios 5 : 4 conforme a Fig. (4.3). As excentricidades iniciais são próximas a zero, $e_1 = 0,0001$ e $e_2 = 0,0001$.

Para os semi-eixos de $a_1 = 0,0910$ UA e $a_1 = 0,0912$ UA (Figs. (4.7a) e (4.7b)) podemos notar que existe uma região com possível movimento caótico associado à separatriz da ressonância spin-órbita 1 : 1. As Figs. (4.8a) e (4.8b) mostram a variação no tempo do semi-eixo maior e excentricidade dos planetas para a condição inicial de $a_1 = 0,0912$ UA, vemos que os semi-eixos dos planetas não sofrem alterações visíveis na escala durante 30 anos de integração, o mesmo ocorre com as excentricidades que mantêm uma libração com amplitude de $e = 0,01$.

A partir dos semi-eixos $a_1 = 0,0913$ UA e $a_1 = 0,0914$ UA, Fig. (4.7c) e (4.7d), vemos que o caos no entorno da separatriz aumenta devido à proximidade da comensurabilidade de movimentos médios 5 : 4, também é possível perceber uma nova estrutura dinâmica em $a_1 = 0,0913$ UA que evolui para uma ilha no entorno da região escura em $a_1 = 0,0914$ UA. As Fig. (4.8c) e (4.8d) mostram respectivamente a evolução no tempo do semi-eixo e da excentricidade para o semi-eixo inicial de $a_1 = 0,0914$ UA. A excentricidade tem uma amplitude maior que a anterior tanto pela proximidade entre os planetas como por estar perto da comensurabilidade de movimentos médios. Como a excentricidade tem maior amplitude, chegando a $e_1 = 0,015$, a região escura no mapa dinâmico também aumenta.

No semi-eixo de $a_1 = 0,0917$ UA, Fig. (4.7e), o caos domina boa parte da ilha, os efeitos da ressonância de movimentos médios 5 : 4 são acentuados e a região associada ao caos se alastra pelo mapa dinâmico no entorno da ressonância spin-órbita 1 : 1. As Fig. (4.8e) e (4.8f) mostram respectivamente a evolução no tempo do semi-eixo e da excentricidade para o semi-eixo inicial de $a_1 = 0,0917$ UA. Neste semi-eixo o sistema está muito próximo à ressonância de movimentos médios 5 : 4 e a excentricidade é excitada a valores que chegam a $e_1 = 0,03$, o que é refletido no mapa dinâmico através da região predominantemente escura. O semi-eixo apresenta uma libração de 2,33 anos.

Com $a_1 = 0,0920$ UA, Fig. (4.7f), a região escura recua e as estruturas apresentadas logo antes da ressonância de movimento médios não são visíveis.

Construímos mapas dinâmicos com um *zoom* na região entre $\theta = 0..90^\circ$ e $\Omega/n = 0,96..1,04$, Fig. (4.9). Os semi-eixos foram tomados entre $a_1 = 0,0913$ UA e $a_1 = 0,0914$ UA. Nesses mapas dinâmicos estamos interessados nas estruturas que surgem dentro da topologia da ressonância spin-órbita 1 : 1 devido à perturbação do terceiro corpo. O número espectral é dado numa escala de cor que permite detalhar essas estruturas, cores frias para números espectrais menores que 100 e cores quentes para maiores.

Podemos perceber na Fig. (4.9a) a existência de duas estruturas dentro da topologia da ressonância spin-órbita 1 : 1, uma no entorno de $\Omega/n = 1$ e outra no entorno de

$\Omega/n = 1,02$. Chamaremos de *I* a estrutura no entorno de $\Omega/n = 1$ e *II* a no entorno de $\Omega/n = 1,02$.

Ao variarmos o semi-eixo para $a_1 = 0,091325$ UA, Fig. (4.9b), *I* cresce e comprime *II*, deixando a região no entorno de *II* em cores quentes. Para o semi-eixo de $a_1 = 0,091350$ UA, Fig. (4.9c), *I* continua a crescer e *II* começa a se deformar. Em $a_1 = 0,091375$ UA, Fig. (4.9d), o entorno de *II* já mostra altos números espectrais (cor amarela) e é possível ver estruturas como raízes adentrando a região amarela, essas raízes vão se tornando amarelas como mostra a Fig. (4.9e), $a_1 = 0,091385$ UA, e por fim para $a_1 = 0,0914$ UA, Fig. (4.9f), *II* tem seu tamanho bastante reduzido e é predominantemente amarela.

A dinâmica descrita nos parágrafos anteriores não é vista quando o planeta não sofre perturbação de um terceiro corpo. Ela está associada ao terceiro corpo e a proximidade com a comensurabilidade de movimentos médios $5 : 4$. Esses resultados foram compilados na forma de um *pré-print* [Ribeiro and Callegari Jr \(2015\)](#).

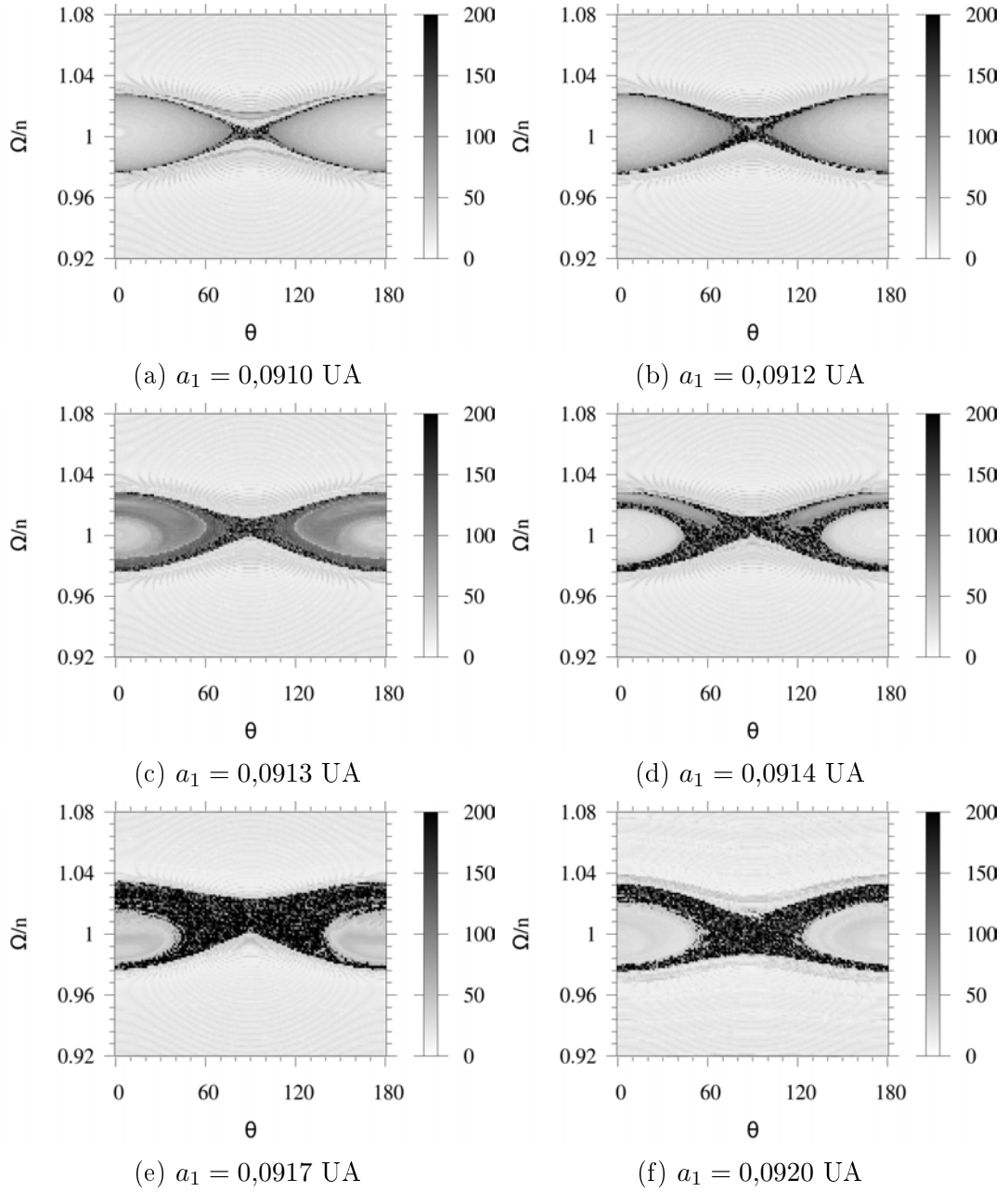


Figura 4.7: Mapas Dinâmicos da rotação de *Kepler-11b* para diferentes semi-eixos iniciais. O número espectral é o número de picos que aparecem na FFT da variável θ , detalhes na seção 3.2.1. Para reduzir o ruído no número espectral consideramos picos com amplitude maior que 5% do maior pico. A escala de cor mostra o número espectral, números espectrais maiores que 200 são considerados pretos.

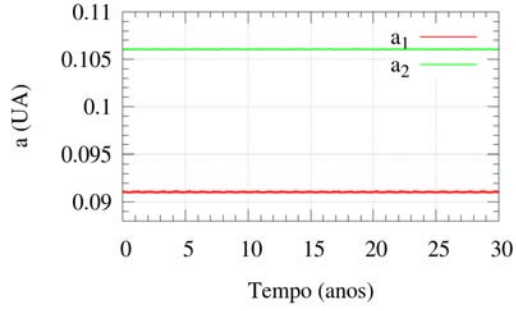
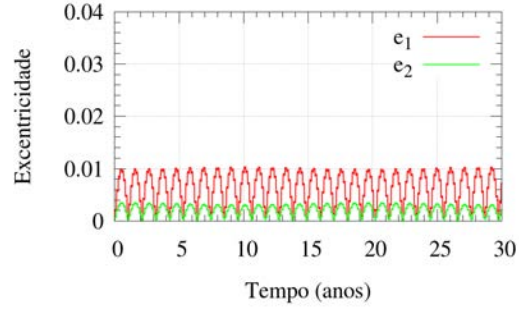
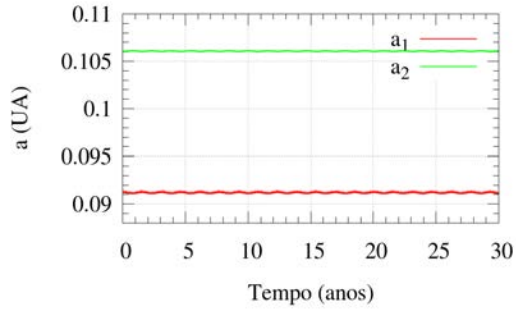
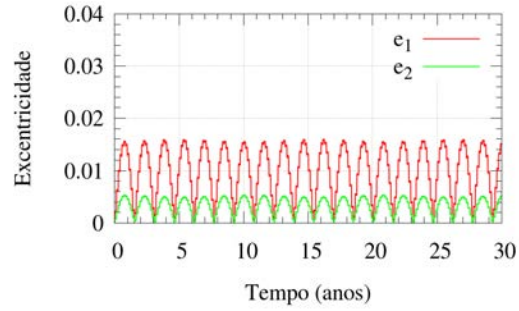
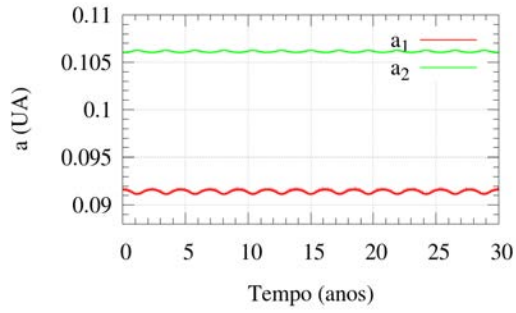
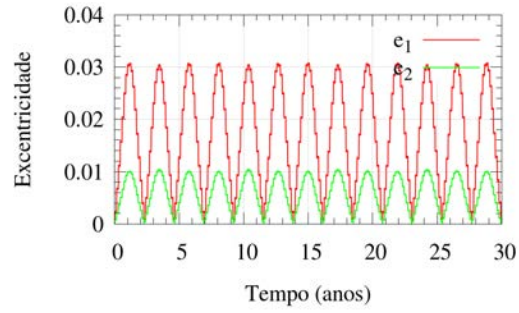
(a) $a_1(t)$ e $a_2(t)$ para $a_1 = 0,0912$ UA(b) $e_1(t)$ e $e_2(t)$ para $a_1 = 0,0912$ UA(c) $a_1(t)$ e $a_2(t)$ para $a_1 = 0,0914$ UA(d) $e_1(t)$ e $e_2(t)$ para $a_1 = 0,0914$ UA(e) $a_1(t)$ e $a_2(t)$ para $a_1 = 0,0917$ UA(f) $e_1(t)$ e $e_2(t)$ para $a_1 = 0,0917$ UA

Figura 4.8: Evolução temporal para o semi-eixo e excentricidade para os semi-eixos iniciais: $a_1 = 0,0912$ UA, Figs. (a) e (b); $a_1 = 0,0914$ UA, Figs. (c) e (d); $a_1 = 0,0917$ UA, Figs. (e) e (f).

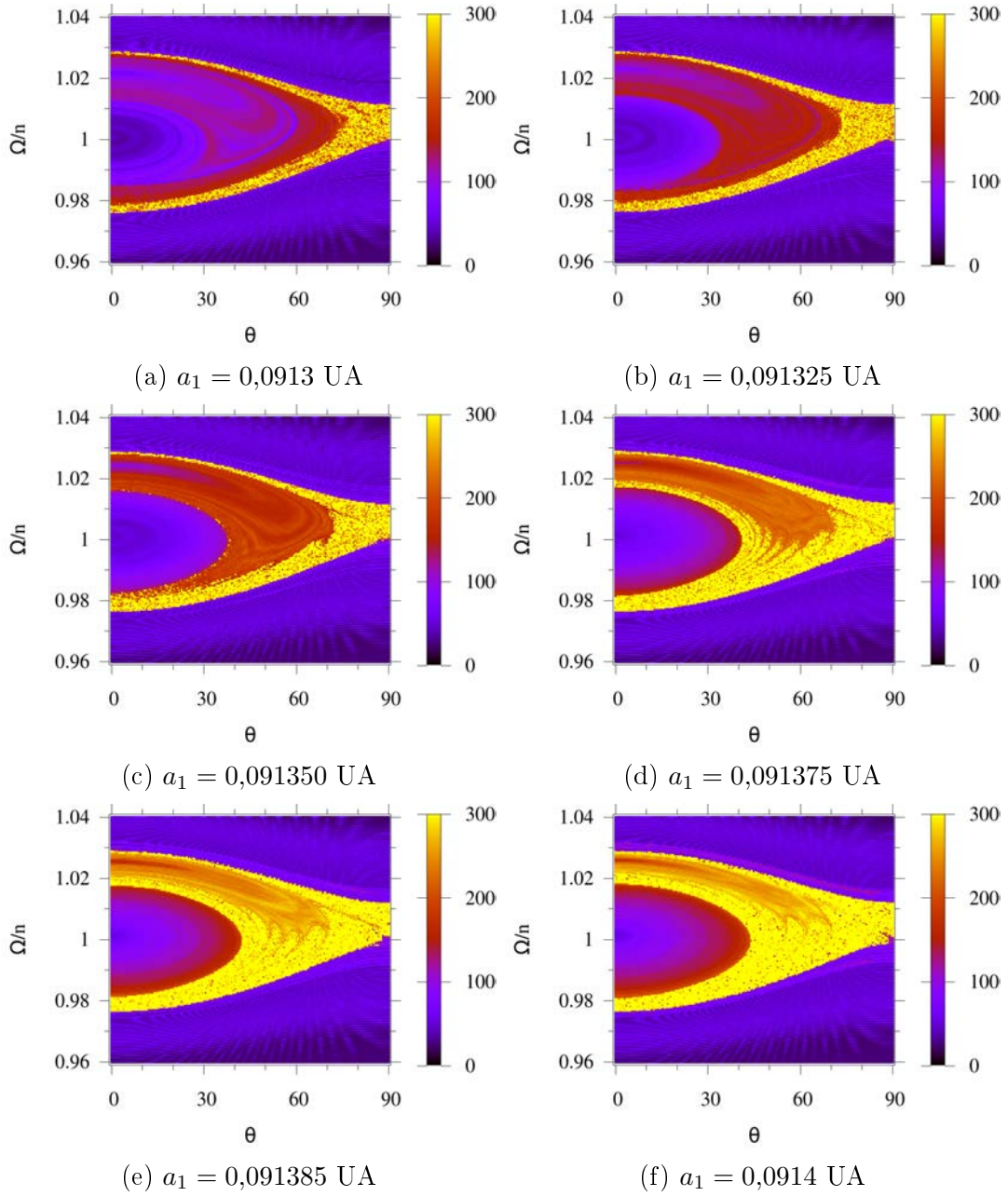


Figura 4.9: *Zoom* nos mapas dinâmicos da rotação de *Kepler-11b* para diferentes semi-eixos iniciais. O número espectral é o número de picos que aparecem na FFT da variável θ , detalhes na seção 3.2.1. Para reduzir o ruído no número espectral consideramos picos com amplitude maior que 3% do maior pico. A escala de cor mostra o número espectral, números espectrais maiores que 300 são considerados amarelos.

Capítulo 5

Introdução dos efeitos de Maré no problema Spin-Órbita

Neste capítulo introduziremos os efeitos de maré no problema spin-órbita. Serão apresentados três modelos com diferentes aplicações. Estes modelos foram estudados durante estágio de pesquisa na Universidade de Aveiro - Portugal sob orientação do Prof. Dr. Alexandre Correia.

O primeiro modelo apresentado na seção 5.1 inclui o efeito de maré apenas na rotação do planeta. Ele é válido no final da evolução orbital, quando os elementos orbitais não variam no tempo. Este modelo demanda pouco custo computacional, pois tem menos equações do movimento para serem integradas.

O segundo modelo, mostrado na seção 5.2, inclui a maré na rotação e no movimento orbital do planeta, estudaremos esse modelo aplicado ao exoplaneta *Kepler 10b*. Procuramos obter os resultados de (Rodríguez et al., 2012) como um primeiro passo antes de estudarmos modelos mais recentes de maré (e.g. Correia et al. (2014)). Esse modelo não leva em conta a deformação do corpo em suas passagens pelas ressonâncias spin-órbitas, tem grande custo computacional (tempo médio de 20 dias) pois além de possuir mais equações do movimento para serem integradas, é necessário integrá-las por longos tempos para que o planeta passe por toda evolução orbital.

O terceiro modelo, seção 5.3, inclui a maré na rotação, no movimento orbital e na deformação do corpo. Além disso o planeta será perturbado por um terceiro corpo e também serão incluídos os efeitos da relatividade geral afim de construirmos um modelo mais completo e realista. Esse modelo é mais realista que os anteriores e possui elevado custo computacional (tempo médio de 40 dias), pois é necessário integrarmos diversas equações do movimento durante longos tempos.

Na última seção deste capítulo, seção 5.4, mostramos uma técnica numérica para calcular a probabilidade de captura em ressonância spin-órbita com o modelo de maré com reologia de Maxwell.

5.1 Introdução da Maré na Rotação do Planeta

De acordo com [Ferraz-Mello et al. \(2008\)](#), a expressão do torque de maré, considerando-se a expansão de Legendre do potencial do corpo não esférico (planeta) em segunda ordem em excentricidade e aproximação planar, é dada por

$$\begin{aligned} T = & -\frac{3rk_2GM^2R^5n}{8a^7}[(4-14e^2)\epsilon_0 + 56e^2\epsilon_1 \\ & + e(16\epsilon_0 + 14\epsilon_1 - 2\epsilon_2)\cos l \\ & + e^2(44\epsilon_0 - 8\epsilon_1 + 34\epsilon_3)\cos 2l], \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde

$$\epsilon_0 = (2\dot{\theta} - 2n)\Delta t, \epsilon_1 = (2\dot{\theta} - 3n)\Delta t, \epsilon_2 = (2\dot{\theta} - n)\Delta t, \epsilon_3 = (2\dot{\theta} - 4n)\Delta t,$$

são os ângulos de atrasos de maré supostos proporcionais às frequências, e Δt é o tempo de atraso, suposto igual para todos os termos. k_2 , R são número de Love e raio planetários; l , n , r , a são anomalia média, movimento médio, distância estrela-planeta e semi-eixo maior orbital; G , M são a constante de gravitação e massa da estrela, respectivamente. A velocidade de rotação, $\Omega = \dot{\theta}$, é associada ao ângulo θ de rotação planetária em torno do eixo de maior momento de inércia $\mathcal{C}$.

O número de Love é um parâmetro adimensional que mede a rigidez de um corpo e sua susceptibilidade em mudar de forma em resposta a um potencial de maré.

Devido à distribuição não-esférica permanente do corpo, outro torque da estrela associado à essa estrutura rígida permanente deve ser considerado. Então, a equação de movimento será dada por:

$$\ddot{\theta} = \frac{T}{\mathcal{C}} + \frac{3}{2} \left(\frac{\mathcal{B} - \mathcal{A}}{\mathcal{C}} \right) \frac{GM}{r^3} \sin 2(f - \theta), \quad (5.2)$$

onde, $\mathcal{B} - \mathcal{A}$ é a diferença equatorial de momentos de inércia e f é a anomalia verdadeira.

5.1.1 Aplicação ao planeta Corot-7b

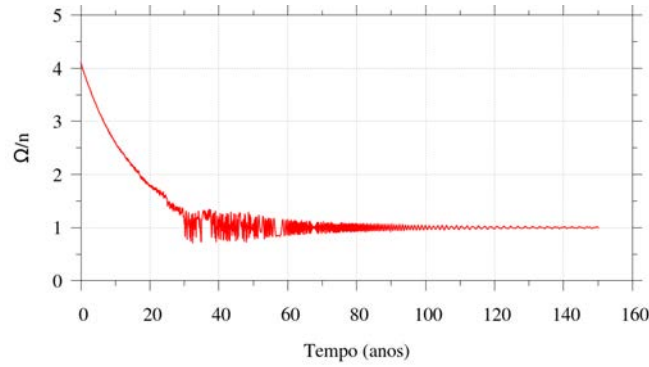
Aplicamos esse modelo ao planeta *Corot 7b* com um valor inicial para $\Omega = 4,1n$ e $\Delta t = 1$ min, o resultado é mostrado na Fig. (5.1a). Podemos notar que a velocidade de rotação decai, passando por várias ressonâncias spin-órbitas, como: 7 : 2, 3 : 1, 5 : 2, 2 : 1 e 3 : 2 até atingir o sincronismo.

Na Fig. (5.1b) construímos a seção de Poincaré (superfície de seção) para a condição inicial: $\Omega_0 = 4,1n$ e $\theta_0 = 10^\circ$. O sistema evolui para o sincronismo cruzando diversas ressonâncias spin-órbitas mas não é capturado por nenhuma. Notamos que a ilha da ressonância spin-órbita 3 : 2 fica bem definida, mas o sistema não entra no seu domínio. O mesmo acontece no entorno do sincronismo, onde podemos ver as ilhas associadas às ressonâncias spin-órbita secundárias.

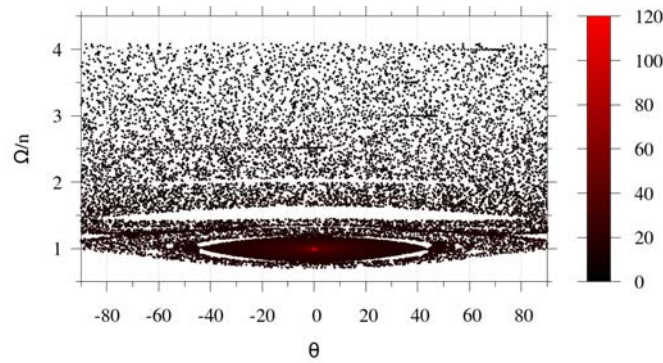
Foram feitas simulações com os seguintes valores de Δt : 0,01 min, 0,1 min, 1 min e 10 min. Em todas essas simulações o planeta termina capturado no sincronismo.

	Corot 7 (estrela)	Corot 7b
Massa	$0,93M_{Sol}$	$6,65M_{Terra}$
$a_{inicial}$ (UA)	-	0,02
$e_{inicial}$	-	0,04
k_2	-	0,3
Raio	-	$1,58R_{Terra}$
$\frac{B-A}{C}$	-	$2,857 \times 10^{-2}$

Tabela 5.1: Elementos Orbitais do sistema *Corot 7*, parâmetros retirados de [Hatzes et al. \(2010\)](#).



(a) Evolução de $\Omega(t)/n$ para $\Delta t = 1$ min.



(b) Superfície de seção para $\Delta t = 1$ min.

Figura 5.1: Dinâmica de rotação do planeta *Corot 7b* com efeito de maré, $\Omega_0 = 4,1n$ e $e = 0,04$: (a) $\Omega(t)/n$ e $\Delta t = 1$ min e (b) Superfície de seção para $\Delta t = 1$ min com o tempo na escala de cor.

5.2 Modelo Clássico de Maré

Considere um planeta orbitando uma estrela central. Seja M a massa da estrela e m_p a massa do planeta; R e r são respectivamente o raio do planeta e a distância entre o planeta e a estrela, Fig. (3.1).

É suposto que o planeta é um elipsóide triaxial, com deformação permanente. Os principais momentos de inércia são $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$.

O potencial gravitacional gerado à uma distância r de seu centro é dado por (Beutler and Mervart, 2005)

$$U_{22} = 3 \frac{Gm_p R^2}{r^3} C_{22} \cos 2(f - \theta), \quad (5.3)$$

onde G é a constante gravitacional e os ângulos f e θ são a anomalia verdadeira e a orientação entre o eixo maior do planeta e a estrela. C_{22} é a elipsidade equatorial e é relacionada com os principais momentos de inércia $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ por

$$C_{22} = \frac{\xi}{4} \frac{\mathcal{B} - \mathcal{A}}{\mathcal{C}}$$

onde ξ é a constante de estrutura dada por $\xi = \mathcal{C}/(m_p R^2)$ ((Rodríguez et al., 2012)).

A uma distância r do centro do planeta, o campo gravitacional U_{22} gera uma força na estrela de massa M dado por

$$\vec{F}_{22} = -9 \frac{GMm_p R^2}{r^4} C_{22} \cos 2(f - \theta) \hat{r} - 6 \frac{GMm_p R^2}{r^4} \sin 2(f - \theta) \hat{f} \quad (5.4)$$

O torque gerado será

$$\vec{T}_{22} = 6 \frac{Gm_p M R^2}{r^3} C_{22} \sin 2(f - \theta) \hat{k}. \quad (5.5)$$

A força de maré clássica é dada por (Mignard, 1979)

$$\vec{F}_{tide} = -3k_2 \Delta t \frac{GM^2 R^5}{r^{10}} [2\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{v} + r^2(\vec{r} \times \vec{\Omega} + \vec{v}))] \quad (5.6)$$

e o torque de maré é

$$\vec{T}_{tide} = 3k_2 \Delta t \frac{GM^2 R^5}{r^8} [-r^2 \vec{\Omega} + \vec{r} \times \vec{v}], \quad (5.7)$$

onde $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ e k_2 é o segundo número de Love.

As equações exatas de movimento do planeta podem então serem escritas como (Rodríguez et al. (2012))

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G(M + m_p)}{r^3} \vec{r} + \frac{M + m_p}{Mm_p} (\vec{F}_{tide} + \vec{F}_{22}) \quad (5.8)$$

$$\ddot{\theta} = \dot{\Omega} = \frac{T_{tide} + T_{22}}{\mathcal{C}} \quad (5.9)$$

5.2.1 Aplicação ao sistema *Kepler 10*

Nesta seção aplicaremos o modelo clássico de maré para investigar a dinâmica do planeta *Kepler 10b*. Para isso integraremos as equações de movimento, Eqs. (5.8) e (5.9), usando o código RA15, (Everhart, 1985), desenvolvido em linguagem Fortran 90.

Adotamos as condições iniciais dadas na Tab. (5.2), elas são escolhidas de maneira que o momento angular total se conserve (veja Rodríguez et al. (2011))

$$e_{inicial} \simeq \sqrt{1 - \frac{a_{final}}{a_{inicial}(1 - e_{final}^2)}} \quad (5.10)$$

onde $a_{final} = 0,01684$ UA e $e_{final} = 0$, são os elementos orbitais determinados por (Batalha et al., 2011).

Na Fig. (5.2a) mostramos a evolução no tempo para a velocidade de rotação. A velocidade inicial de rotação foi de $\Omega = 2,7n$. Podemos notar a captura em diversas ressonâncias spin-órbita (2 : 1, 3 : 2 e 1 : 1).

As Figs. (5.2b) e (5.2c) mostram a evolução no tempo para a excentricidade e o semi-eixo, respectivamente. Nessas figuras percebemos que a cada captura em ressonância spin-órbita a inclinação da curva muda.

A Fig. (5.2d) mostra como varia a excentricidade em função do semi-eixo, o tempo é mostrado na escala de cor. Conforme o tempo evolui excentricidade e semi-eixo decaem de forma aproximadamente proporcional no início (~ 200 k anos) e no fim da evolução o semi-eixo decai mais rapidamente do que a excentricidade. Isso acontece devido à conservação do momento angular, conforme discutido em (Rodríguez et al., 2012).

Na Fig. (5.2e) mostramos como a rotação varia com a excentricidade, o tempo é mostrado na escala de cor. As capturas dependem da excentricidade. A primeira captura (2 : 1) ocorre para $e \sim 0,4$. Quando $e = 0,28$ a ressonância 2 : 1 se torna instável e o planeta é capturado na ressonância 3 : 2. O planeta permanece nessa ressonância até $e = 0,11$ quando a ressonância 3 : 2 se torna instável e Ω/n assume o valor $\sim 1,1$ e então decai até atingir o sincronismo.

	Kepler 10 (estrela)	Kepler 10b
Massa	$0,895M_{Sol}$	$4,56M_{Terra}$
$a_{inicial}$ (UA)	-	0,02
$e_{inicial}$	-	0,397
$k_2\Delta t$	-	1,1 min
Raio	-	$1,416R_{Terra}$
C_{22}	-	10^{-5}
ξ	-	0,35

Tabela 5.2: Parâmetros usados nas simulações para o planeta *Kepler 10b*. Os parâmetros foram obtidos de (Rodríguez et al., 2012).

5.3 Modelo de Maré com reologia de Maxwell e perturbação de Terceiro Corpo

Seja o problema de três corpos, dois planetas (massas m_1 e m_2) e uma estrela (massa M) em interação gravitacional mútua regida pela Lei da Gravitação de Newton.

Um dos planetas é considerado um elipsoide com coeficientes gravitacionais dados por J_2 , C_{22} e S_{22} .

Em um sistema de referência centrado na estrela, onde as posições e velocidades dos planetas são $\vec{r}_1$, $\vec{v}_1$ e $\vec{r}_2$, $\vec{v}_2$, as equações de movimento são dadas por:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}}_1 = & -\frac{G(M+m_1)}{r_1^3}\vec{r}_1 + Gm_2\left(\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} - \frac{\vec{r}_2}{r_2^3}\right) + \vec{f}_c \\ & + \left(\frac{M+m_1}{Mm_1}\right)\vec{g}_1 + \frac{1}{M}\vec{g}_2\end{aligned}\quad (5.11)$$

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}}_2 = & -\frac{G(M+m_2)}{r_2^3}\vec{r}_2 + Gm_1\left(\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} - \frac{\vec{r}_1}{r_1^3}\right) + \frac{m_1}{M+m_1}\vec{f}_c \\ & + \left(\frac{M+m_2}{Mm_2}\right)\vec{g}_2 + \frac{1}{M}\vec{g}_1\end{aligned}\quad (5.12)$$

onde G é constante de gravitação, $\vec{f}_c$ é a contribuição de J_2 , C_{22} e S_{22} na órbita do planeta, escrito como (Correia et al. (2014))

$$\begin{aligned}\vec{f}_c = & -\frac{3G(M+m_1)R^2}{2r_1^5}J_2\vec{r}_1 - \frac{9G(M+m_1)R^2}{r_1^5}[C_{22}\cos 2\gamma - S_{22}\sin 2\gamma]\vec{r}_1 \\ & + \frac{6G(M+m_1)R^2}{r_1^5}[C_{22}\sin 2\gamma + S_{22}\cos 2\gamma]\vec{K} \times \vec{r}_1\end{aligned}\quad (5.13)$$

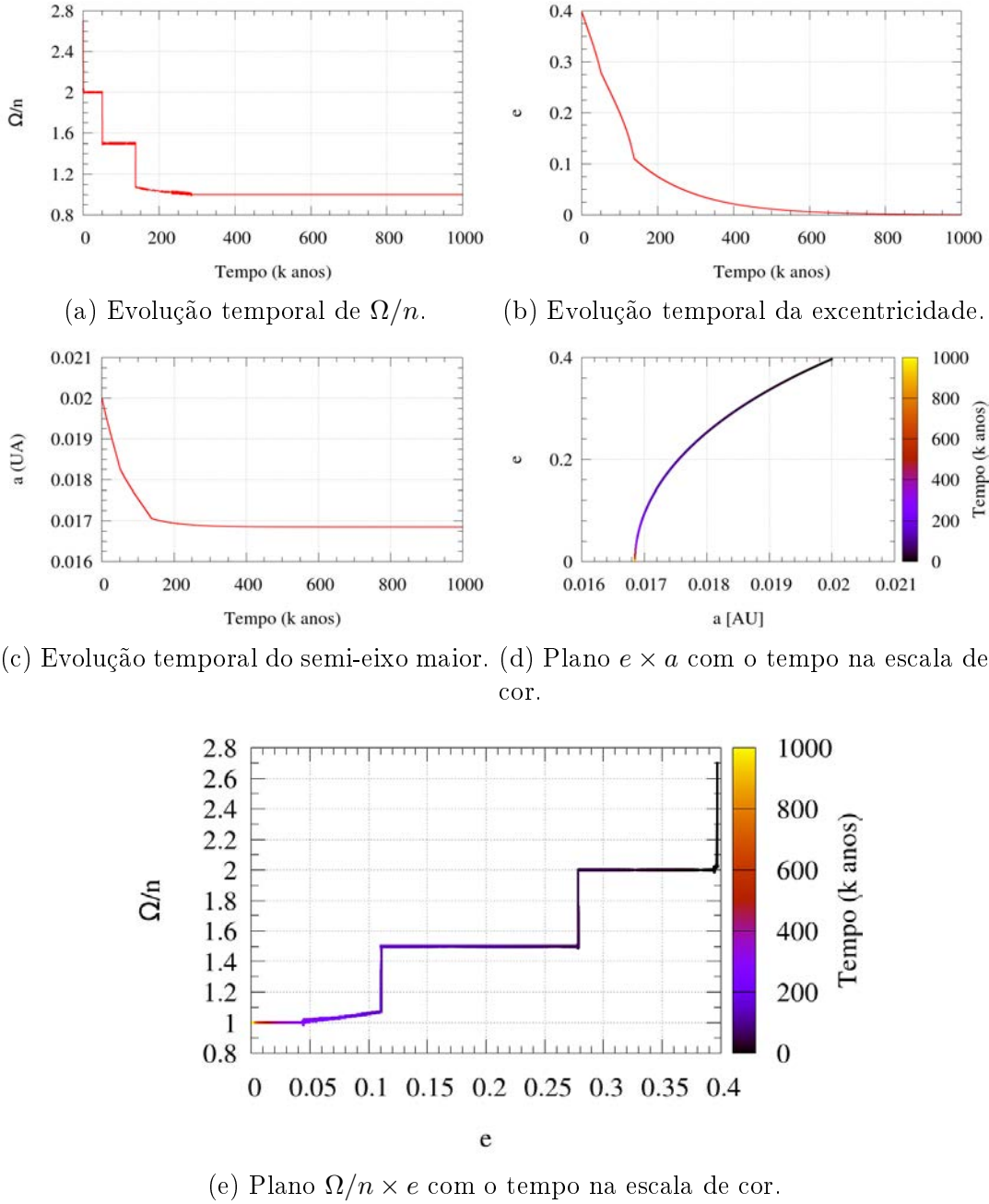


Figura 5.2: Evolução temporal de: (a) Ω/n , (b) e e (c) a (UA). (d) Plano $e \times a$ com o tempo na escala de cor. (e) Plano $\Omega/n \times e$ com o tempo na escala de cor.

onde R é o raio do planeta, $\gamma = \theta - f$ e $\vec{K}$ é o eixo de máxima inércia, assumindo que a rotação se dá entorno desse eixo e ele é ortogonal com o plano orbital.

$\vec{g}_i$ é a contribuição da relatividade geral que atua nos planetas, com $i = 1, 2$, dados por

$$\vec{g}_i = \frac{GMm_i}{c^2 r_i^3} \left[\left(4 \frac{GM}{r_i} - \vec{v}_i^2 \right) + 4(\vec{r}_i \cdot \vec{v}_i) \vec{v}_i \right], \quad (5.14)$$

onde $\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i$ e c é a velocidade da luz, veja (Beutler and Mervart, 2005).

E a equação de rotação do planeta é

$$\ddot{\theta} = -\frac{6GMm_1 R^2}{\mathcal{C} r_1^3} [C_{22} \sin 2\gamma + S_{22} \cos 2\gamma], \quad (5.15)$$

onde $\mathcal{C}$ é o principal momento de inércia do planeta.

O planeta é deformado sob ação de um potencial perturbador, os coeficientes J_2 , C_{22} e S_{22} não são constantes. A lei de deformação que esses coeficientes seguem é dada pela reologia de Maxwell (Correia et al. (2014)),

$$J_2 + \tau \dot{J}_2 = J_2^e, \quad (5.16a)$$

$$C_{22} + \tau \dot{C}_{22} = C_{22}^e + C_{22r}, \quad (5.16b)$$

$$S_{22} + \tau \dot{S}_{22} = S_{22}^e, \quad (5.16c)$$

onde C_{22r} é o valor residual constante do alongamento do planeta, τ é o tempo de relaxação do planeta. E os valores de equilíbrio J_2^e , S_{22}^e e C_{22}^e são dados por (veja Correia and Rodriguez (2013))

$$J_2^e = k_f \left[\frac{\Omega^2 R^3}{3Gm} + \frac{m_0}{2m} \left(\frac{R}{r_1} \right)^3 \right], \quad (5.17a)$$

$$C_{22}^e = \frac{k_f}{4} \frac{m_0}{m} \left(\frac{R}{r_1} \right)^3 \cos 2\gamma, \quad (5.17b)$$

$$S_{22}^e = -\frac{k_f}{4} \frac{m_0}{m} \left(\frac{R}{r_1} \right)^3 \sin 2\gamma, \quad (5.17c)$$

onde k_f é o segundo número de Love.

5.3.1 Aplicações ao sistema Corot 7

Nesta seção aplicaremos o modelo de maré com reologia de Maxwell para o sistema planetário *Corot 7*. Os elementos orbitais utilizados estão na Tab. (5.3). Eles foram escolhidos de modo que os elementos orbitais ao final da evolução orbital fossem os elementos atuais do sistema.

Integramos as equações de movimento, Eqs. (5.11), (5.12), (5.15) e (5.16), usando o integrador RA15 (Everhart, 1985) escrito em linguagem Fortran 90.

Os valores iniciais dos coeficientes gravitacionais são: $J_2 = J_2^e$, $C_{22} = C_{22r}$ e $S_{22} = 0$.

	Corot 7 (estrela)	Corot 7b	Corot 7c
Massa	$0,93M_{Sol}$	$8,0M_{Terra}$	$13,6M_{Terra}$
$a_{inicial}$ (UA)	-	0,02	0,0465
$e_{inicial}$	-	0,25	0,1769
Raio	-	$1,58R_{Terra}$	-

Tabela 5.3: Elementos Orbitais do sistema *Corot 7*. A massa foi obtida de [Ferraz-Mello et al. \(2011\)](#).

Na Fig. (5.3a) mostramos o resultado de uma simulação até 3,6 milhões de anos. Os parâmetros usados foram $C_{22r} = 10^{-5}$, $k_f = 1$ e $\tau = 1$ ano. Podemos notar que logo no começo da evolução orbital o planeta é capturado na ressonância spin-órbita 7 : 2. Ele permanece nessa ressonância até atingir ~ 400 mil anos, nesse momento ele cai para a ressonância spin-órbita 3 : 1 pois a excentricidade esta decaindo e atinge um valor crítico para a estabilidade da ressonância spin-órbita, abaixo desse valor a ressonância se torna instável e então o planeta para a ressonância spin-órbita 5 : 2. Isso acontece sucessivamente até o planeta atingir o sincronismo.

Vemos também que em 1,7 milhões de anos o planeta cruza uma ressonância de movimento médio 4 : 1. Essa ressonância excita as excentricidades dos planetas, mas não causa efeito na rotação.

Na Fig. (5.3b) vemos a variação no tempo do achatamento do planeta. O valor adquirido de J_2 é o valor de J_2^e para a ressonância spin-órbita em que se encontra. As mudanças repentinas ocorrem na transição entre as ressonâncias spin-órbita. Vemos que o valor de J_2 diminui durante a evolução, chegando ao valor mínimo quando o planeta atinge o sincronismo.

Para observar a variação de C_{22} e S_{22} é interessante graficar o valor do achatamento

$$\varepsilon = \sqrt{C_{22}^2 + S_{22}^2}.$$

Vemos na Fig. (5.3b) que o valor de ε aumenta à medida em que vai para o sincronismo. Cada mudança abrupta ocorre na mudança entre as ressonâncias spin-órbita. Durante a passagem pela ressonância 4 : 1 de movimentos médios pode-se notar um incremento no valor de ε . Quando a evolução atinge o sincronismo ε tem seu valor máximo.

Na Fig. (5.4) mostramos uma simulação com $C_{22r} = 10^{-2}$, $k_f = 1$ e $\tau = 0,1$ ano. O valor de C_{22r} é demasiado grande se comparado com os valores plausíveis para Super-Terras, que estão na ordem de 10^{-5} . A rotação no início da evolução é caótica devido ao grande valor de C_{22r} . Quando a excentricidade (e_1) começa a baixar devido à maré o planeta é capturado na ressonância spin-órbita 4 : 1. Durante a evolução o sistema passa pela ressonância de movimento médios 4 : 1 e as excentricidades (e_1 e e_2) tem uma variação abrupta. Com o decaimento de e_1 o domínio da ressonância spin-órbita 4 : 1 deixa de ser estável e o planeta decai para a ressonância spin-órbita 3 : 2. A

evolução segue até que a ressonância spin-órbita $3 : 2$ se torna instável e o planeta é capturado no sincronismo.

No gráfico da Fig. (5.4b) vemos que J_2 tem um início caótico seguindo a evolução inicial de Ω/n , até que o planeta é capturado na ressonância spin-órbita e o valor de J_2 é estabilizado no entorno de 0,01. A mudança abrupta acontece quando o planeta muda de ressonância spin-órbita. Na transição J_2 é caótico até que o planeta seja capturado em uma ressonância spin-órbita. Ao final da evolução, quando o planeta atinge o sincronismo, J_2 fica com seu valor constante.

ε mantém o valor de C_{22r} durante toda a evolução e somente quando o planeta atinge o sincronismo seu valor é um pouco aumentado.

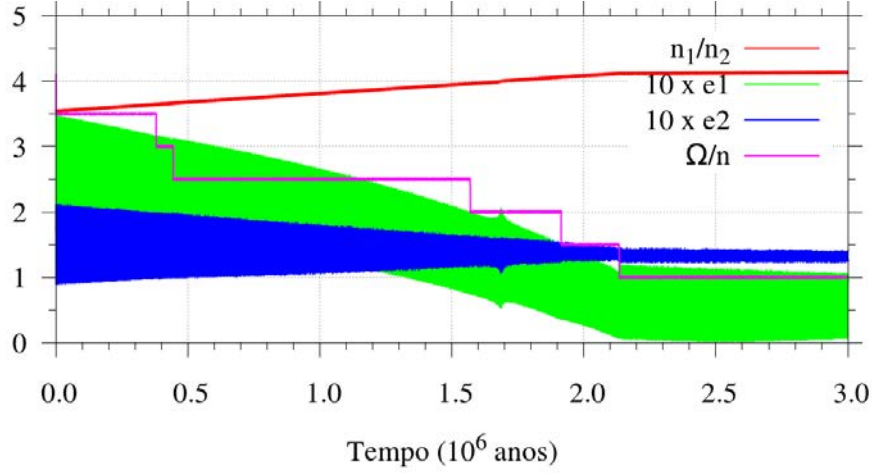
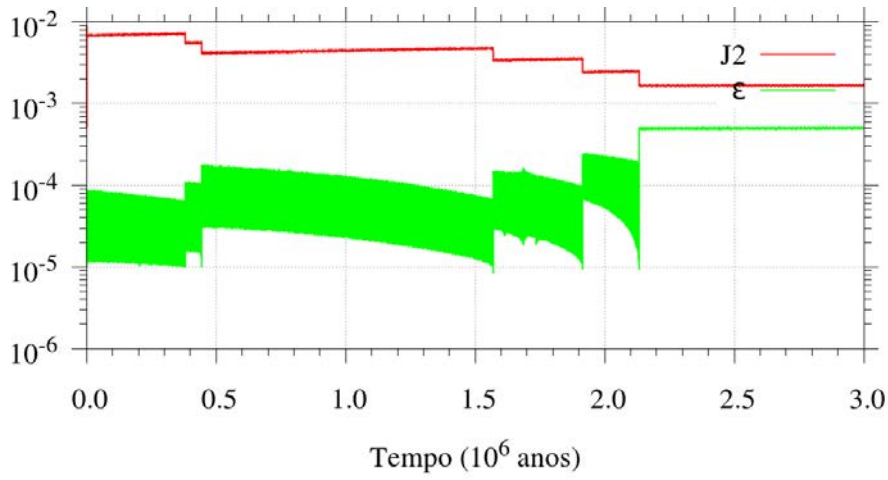
(a) Evolução temporal de Ω/n , e_1 , e_2 e n_1/n_2 .(b) Evolução temporal de J_2 e $\varepsilon = \sqrt{C_{22}^2 + S_{22}^2}$.

Figura 5.3: Evolução temporal de: (a) Ω/n , e_1 , e_2 e n_1/n_2 , as excentricidades estão multiplicadas por um fator 10 de maneira que fosse possível observar todas as quantidades no mesmo gráfico; (b) J_2 e $\varepsilon = \sqrt{C_{22}^2 + S_{22}^2}$. Os parâmetros usados foram: $C_{22r} = 10^{-5}$, $k_f = 1$ e $\tau = 1$ ano.

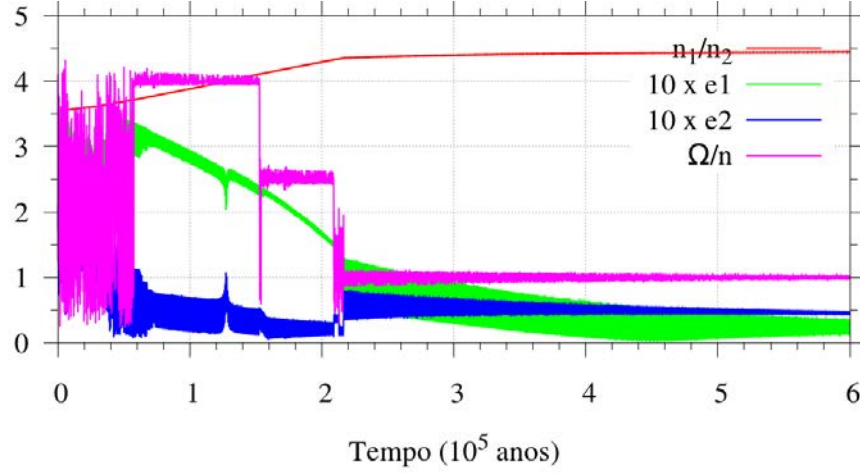
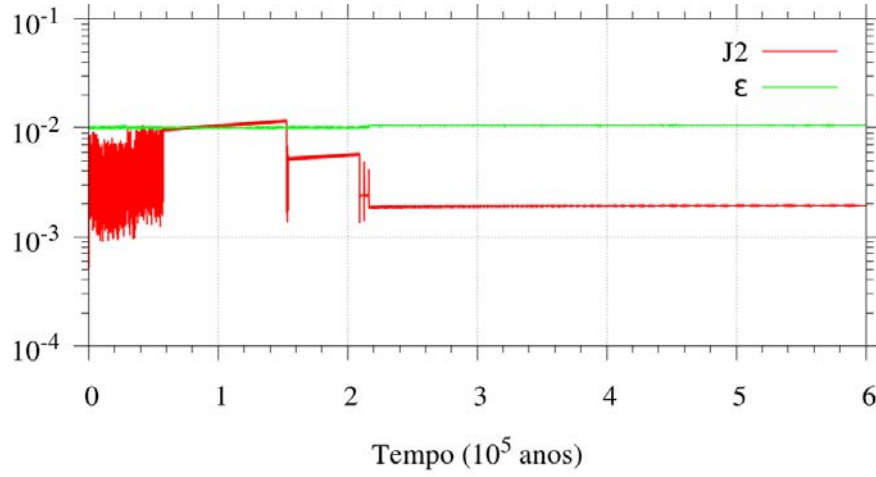
(a) Evolução temporal de Ω/n , e_1 , e_2 e n_1/n_2 .(b) Evolução temporal de J_2 e $\varepsilon = \sqrt{C_{22}^2 + S_{22}^2}$.

Figura 5.4: Evolução temporal de: (a) Ω/n , e_1 , e_2 e n_1/n_2 , as excentricidades estão multiplicadas por um fator 10 de maneira que fosse possível observar todas as quantidades no mesmo gráfico; (b) J_2 e $\varepsilon = \sqrt{C_{22}^2 + S_{22}^2}$. Os parâmetros usados foram: $C_{22r} = 10^{-2}$, $k_f = 1$ e $\tau = 0,1$ ano.

5.4 Probabilidade de Captura em Ressonância Spin-Órbita

Para calcular a probabilidade de captura na ressonância spin-órbita faremos 360 integrações numa grade de condições iniciais, $\theta(0) = 0..359$ graus. A probabilidade de captura será dada pelo número de simulações que terminam capturadas dividido pelo número total de simulações.

5.4.1 Aplicação à Mercúrio

Calculamos a probabilidade de captura para o planeta Mercúrio na ressonância spin-órbita 3 : 2.

Os elementos orbitais iniciais foram dados na Tab. (5.4). Foi usado o valor fixo de $\Omega_0/n = 1,9$ e o tempo de integração foi de 1 milhão de anos.

Podemos notar pela Fig. (5.5) que para $\tau < 1$ ano a probabilidade de captura obtida é $\sim 7\%$. Este valor é próximo ao $\sim 7,2\%$ obtido pela fórmula semi-analítica da probabilidade de captura derivada por (Goldreich and Peale, 1966). Para $\tau > 1$ ano a probabilidade de captura é 100%. Existe uma mudança abrupta no comportamento da probabilidade no entorno de $\tau \approx 1$ ano. Essa é a transição entre o regime elástico e o regime viscoso.

	Sol (estrela)	Mercúrio
Massa	$0,33M_{Sol}$	$5,6M_{Terra}$
$a_{inicial}$ (UA)	-	0,049
$e_{inicial}$	-	0,17
Raio	-	$1,79R_{Terra}$

Tabela 5.4: Elementos Orbitais de Mercúrio.

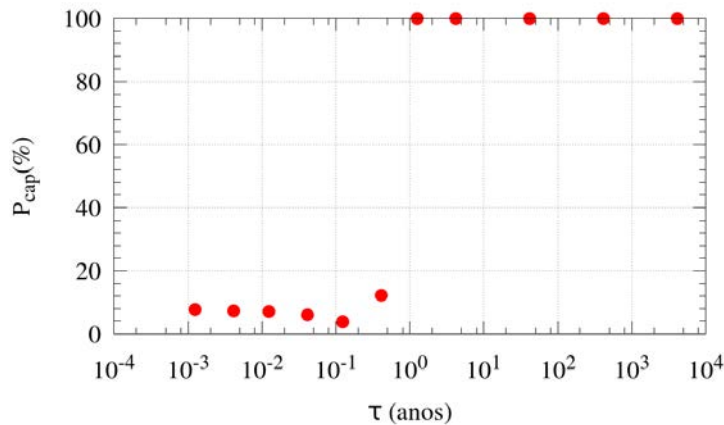


Figura 5.5: Probabilidade de captura na ressonância spin-órbita 3 : 2 para o planeta Mercúrio.

Capítulo 6

Conclusões

Neste trabalho foi apresentado um estudo sobre a dinâmica de rotação de exoplanetas. O estudo foi direcionado ao caso não perturbado e ao caso com a perturbação de um terceiro corpo.

No caso não perturbado fizemos a análise da dinâmica através da técnica de superfície de seção. Nela mostramos os pontos de equilíbrio (ressonância spin-órbita), pontos de sela, separatrizes e regiões caóticas. Recuperamos o resultado de ([Wisdom et al., 1984](#)) onde mostra que o achatamento é relacionado ao tamanho das ilhas de equilíbrio e a excentricidade é responsável pelo *overlap* entre as ilhas, onde aparecem regiões caóticas.

A superfície de seção de *55 Cnc* e sugere que ele possui uma rica dinâmica de rotação podendo apresentar caos, instabilidades e ressonâncias spin-órbita.

Explorando o espaço de parâmetros concluímos que a excentricidade tem um caráter fundamental na dinâmica de rotação do sistema, devido à libração física. A libração forçada, obtida de forma analítica, tem uma pequena amplitude e período igual ao período orbital, isto significa que não podemos distingui-la nas equações gerais do movimento de rotação.

Os resultados da parte analítica foram publicados em ([Callegari and Ribeiro, 2014](#)).

O modelo de rotação com perturbação de terceiro corpo enriqueceu a dinâmica de rotação. Os efeitos da libração física foram acentuados e mostrou-se que a dinâmica de rotação pode ser irregular devido à presença do perturbador.

Concluímos que sistemas que possuem o período da libração física próximo ao período da ressonância de movimento médios apresentam um batimento, e a amplitude de ψ associada a esse batimento aumenta consideravelmente a ponto da dinâmica se tornar irregular alternando entre a libração de ψ para a circulação de ψ .

Os mapas dinâmicos mostraram que a rotação é de fato irregular quando o sistema tem configuração próxima à ressonância de movimentos médios.

Ao introduzirmos os efeitos de maré, a dinâmica de rotação passou a depender da evolução orbital do planeta. A partir da captura em uma ressonância spin-órbita, a evolução do sistema ocorre conforme o esperado: à medida que a excentricidade decai as ressonâncias spin-órbitas se tornam instáveis e a rotação decai uma a uma, até atingir

a sincronização no fim da evolução.

É importante destacar que o modelo de maré com reologia de Maxwell e perturbação do terceiro corpo, pois trata-se de um modelo mais realista onde o corpo se deforma em função do tempo, porém ele demanda um maior custo computacional com integrações numéricas que levam cerca de meses.

Obtemos a probabilidade de captura na ressonância spin-órbita 3 : 2 para o planeta Mercúrio em função do tempo de relaxação e obtemos o valor $\sim 7.2\%$ de capturas para $\tau < 1$ ano e 100% de capturas para $\tau > 1$ ano. Para valores de $\tau < 1$ ano o valor obtido concorda com o calculado por [Goldreich and Peale \(1966\)](#).

A transição entre 7.2% de capturas para 100% de capturas ocorre na mudança entre o regime elástico e o regime viscoso.

Referências Bibliográficas

- Arfken, G. B. (2007). *Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física*. Campus.
- Batalha, N. M., Borucki, W. J., Bryson, S. T., Buchhave, L. A., Caldwell, D. A., Christensen-Dalsgaard, J., Ciardi, D., Dunham, E. W., Fressin, F., Gautier III, T. N., et al. (2011). Kepler’s first rocky planet: Kepler-10b. *The Astrophysical Journal*, 729(1):27.
- Beutler, G. and Mervart, L. (2005). *Methods of Celestial Mechanics: Physical, mathematical, and numerical principles*, volume 1. Springer Science & Business Media.
- Callegari, N., J. and Ribeiro, F., B. (2014). The spin–orbit resonant problem including core–mantle gravitational coupling. *Computational and Applied Mathematics*, pages 1–13.
- Callegari, N. and Rodríguez, A. (2013). Dynamics of rotation of Super-Earths. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 116(4):389–416.
- Cooley, J. W. and Tukey, J. W. (1965). An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. *Mathematics of computation*, 19(90):297–301.
- Correia, A. C., Boué, G., Laskar, J., and Rodríguez, A. (2014). Deformation and tidal evolution of close-in planets and satellites using a maxwell viscoelastic rheology. *Astronomy & Astrophysics*, 571:A50.
- Correia, A. C. and Rodriguez, A. (2013). On the equilibrium figure of close-in planets and satellites. *The Astrophysical Journal*, 767(2):128.
- Everhart, E. (1985). An efficient integrator that uses Gauss-Radau spacings. *IAU Colloquium*, 83:185–200.
- Ferraz-Mello, S., Dos Santos, M. T., Beaugé, C., Michtchenko, T., and Rodríguez, A. (2011). On the mass determination of super-earths orbiting active stars: the corot-7 system. *Astronomy & Astrophysics*, 531:A161.
- Ferraz-Mello, S., Rodríguez, A., and Hussmann, H. (2008). Tidal friction in close-in satellites and exoplanets: The darwin theory re-visited. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 101(1-2):171–201.

- Folonier, H. and Ferraz-Mello, S. (2013). Figures of equilibrium for tidally deformed non-homogeneous celestial bodies. In *AAS/Division of Dynamical Astronomy Meeting*, volume 44 of *AAS/Division of Dynamical Astronomy Meeting*, page #204.23.
- Folonier, H. A., Ferraz-Mello, S., and Kholshchevnikov, K. V. (2015). The flattenings of the layers of rotating planets and satellites deformed by a tidal potential. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 122(2):183–198.
- Goldreich, P. and Peale, S. (1966). Spin-orbit coupling in the solar system. *The Astronomical Journal*, 71:425.
- Gong, Y. and Zhou, J. (2012). The silicate and carbon-rich models of CoRoT-7b, Kepler-9d and Kepler-10b. *Research in Astronomy and Astrophysics*, 12.
- Hatzes, A., Dvorak, R., Wuchterl, G., Guterman, P., Hartmann, M., Fridlund, M., Gandolfi, D., Guenther, E., and Pätzold, M. (2010). An investigation into the radial velocity variations of corot-7. *Astronomy & Astrophysics*, 520:A93.
- Michtchenko, T. and Ferraz-Mello, S. (2001). Resonant structure of the outer solar system in the neighborhood of the planets. *The Astronomical Journal*, 122(1):474.
- Mignard, F. (1979). The evolution of the lunar orbit revisited. i. *The Moon and the planets*, 20(3):301–315.
- Murray, C. and Dermott, S. F. (1999). *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press.
- Peale, S., Phillips, R., Solomon, S., Smith, D., and Zuber, M. (2002). A procedure for determining the nature of mercury’s core. *Meteoritics & Planetary Science*, 37(9):1269–1283.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., and Flannery, B. P. (1992). *Numerical Recipes: The art of scientific computing (Cambridge)*. Cambridge Univ. Press.
- Ribeiro, F. and Callegari Jr, N. (2014). Spin-orbit resonances in super-earth systems close to mean-motion commensurabilities. In *Revista Mexicana de Astronomia y Astrofisica Conference Series*, volume 44, pages 133–133.
- Ribeiro, F. and Callegari Jr, N. (2015). Dynamics of rotation of super-earths with third body perturbation. In *Pre-print*.
- Rodríguez, A., Callegari, N., Michtchenko, T. A., and Hussmann, H. (2012). Spin-orbit coupling for tidally evolving super-earths. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 427(3):2239–2250.
- Rodríguez, A., Ferraz-Mello, S., Michtchenko, T. A., Beaugé, C., and Miloni, O. (2011). Tidal decay and orbital circularization in close-in two-planet systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 415(3):2349–2358.

- Rodríguez, A., Callegari, N., Michtchenko, T. A., and Hussmann, H. (2012). Spin-orbit coupling for tidally evolving super-earths. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 427(3):2239–2250.
- Valencia, D., Sasselov, D. D., and O’Connell, R. J. (2007). Detailed Models of Super-Earths: How Well Can We Infer Bulk Properties? *The Astrophysical Journal*, 665:1413–1420.
- Van Hoolst, T., Rambaux, N., Karatekin, O., Dehant, V., and Rivoldini, a. (2008). The librations, shape, and icy shell of Europa. *Icarus*, 195(1):386–399.
- Wisdom, J. (2004). Spin-orbit secondary resonance dynamics of enceladus. *The Astronomical Journal*, 128(1):484.
- Wisdom, J., Peale, S., and Mignard, F. (1984). The chaotic rotation of hyperion. *Icarus*, 58(2):137–152.

Apêndice A

Tópicos de Sistemas Dinâmicos

Nesta seção apresentaremos as ferramentas que serão utilizadas para o estudo modelo de rotação.

A.1 Superfície de Seção

O lugar natural da Física para a ocorrência de caos são as equações diferenciais não-lineares (EDNs). Mapas e soluções de EDNs guardam uma estreita relação entre si. As soluções de EDNs podem ser analisadas em termos de mapas discretos. Uma maneira de se fazer isto é denominada **seção de Poincaré** ou **superfície de seção** de um sistema de EDNs.

Seja um plano transversal que corta um fluxo de soluções (órbita) de uma EDN. A órbita intercepta o plano em uma série de pontos em tempos discretos crescentes, por exemplo,

$$(x(t_1), y(t_1)) = (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$$

que são registrados e analisados por meios gráficos ou numéricos em busca de pontos fixos, bifurcações de duplicação de período, etc. Como ilustrado na Fig. (A.1).

Esse método é útil quando soluções de EDNs são obtidas por meios numéricos em simulações computacionais, de modo que podemos gerar seções de Poincaré em várias localizações e com orientações diferentes, sendo que análise ulterior leva a mapas bidimensionais iterados

$$x_{n+1} = F_1(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = F_2(x_n, y_n). \quad (\text{A.1})$$

Uma superfície de seção típica do modelo de rotação, com cerca de 100 condições iniciais cada uma integrada a tempos suficientemente longos (cerca de 100 vezes o período do planeta), tem um custo computacional de aproximadamente 20 minutos.

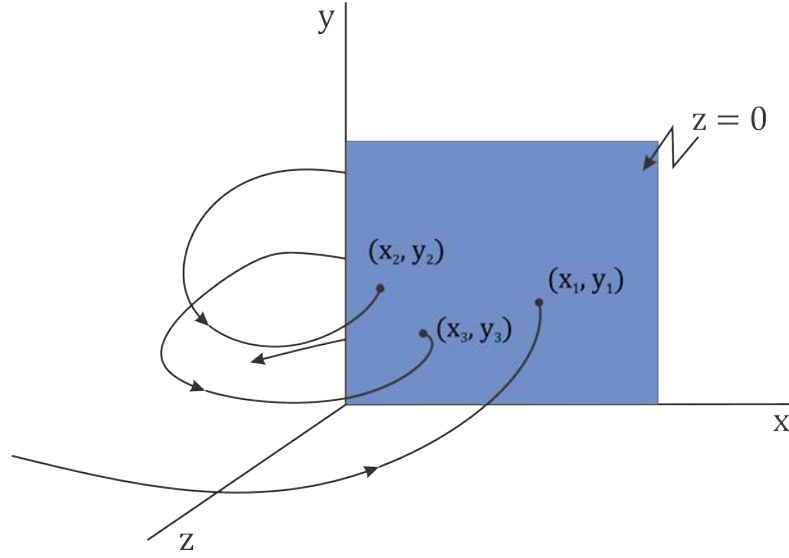


Figura A.1: Ilustração de uma Superfície de Seção. A superfície de seção ilustrada é construída quando o fluxo de soluções corta o plano $z = 0$. O conjunto de pontos no plano $z = 0$ é a superfície de seção. Figura adaptada de (Arfken, 2007).

A.2 Transformada Rápida de Fourier (FFT)

Em 1822 Fourier desenvolveu uma maneira de aproximar uma função periódica por uma série de senos e co-senos.

Esta análise pode ser expressa como uma série de Fourier. Seja $x(t)$ uma função periódica, de período T_0 , definida no intervalo $[-T_0/2, T_0/2]$. Por definição a série de Fourier para a função $x(t)$ é

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T_0}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T_0}\right) \right], \quad (\text{A.2})$$

onde:

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T_0}\right) dt \quad (\text{A.3})$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin\left(\frac{2\pi kt}{T_0}\right) dt. \quad (\text{A.4})$$

A série de Fourier também pode ser escrita na forma complexa

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k) e^{-ik2\pi t/T_0} \quad (\text{A.5})$$

onde

$$X(k) = \frac{1}{T} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-ik2\pi t/T_0} dt = \begin{cases} \frac{a_k + b_k}{2} & k > 0 \\ \frac{a_{-k} - ib_{-k}}{2} & k < 0 \\ \frac{a_0}{2} & k = 0 \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

As condições de Dirichlet garantem a convergência da série de Fourier. Elas são:

- a) a função tem um número finito de descontinuidades em um período;
- b) a função tem um número finito de máximos e mínimos em um período;
- c) a função é absolutamente integrável em um período, ou seja,

$$\int_0^{T_0} |x(t)| dt < \infty.$$

Desta maneira qualquer função periódica contínua pode ser descrita por uma série de Fourier.

Quando $T_0 \rightarrow \infty$, $f_0 = 1/T_0 \rightarrow 0$, a série de Fourier se transforma na integral de Fourier, pois o espectro torna-se contínuo. Logo os coeficientes da integral de Fourier também são funções contínuas da frequência. Os coeficientes da integral de Fourier são chamados de Transformada de Fourier. Eles são

$$X(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\Omega t} dt \quad (\text{A.7})$$

e a inversa

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega, \quad (\text{A.8})$$

onde $\Omega = 2\pi/T_0$.

A Série e Transformada de Fourier necessitam que os sinais sejam representados por expressões analíticas.

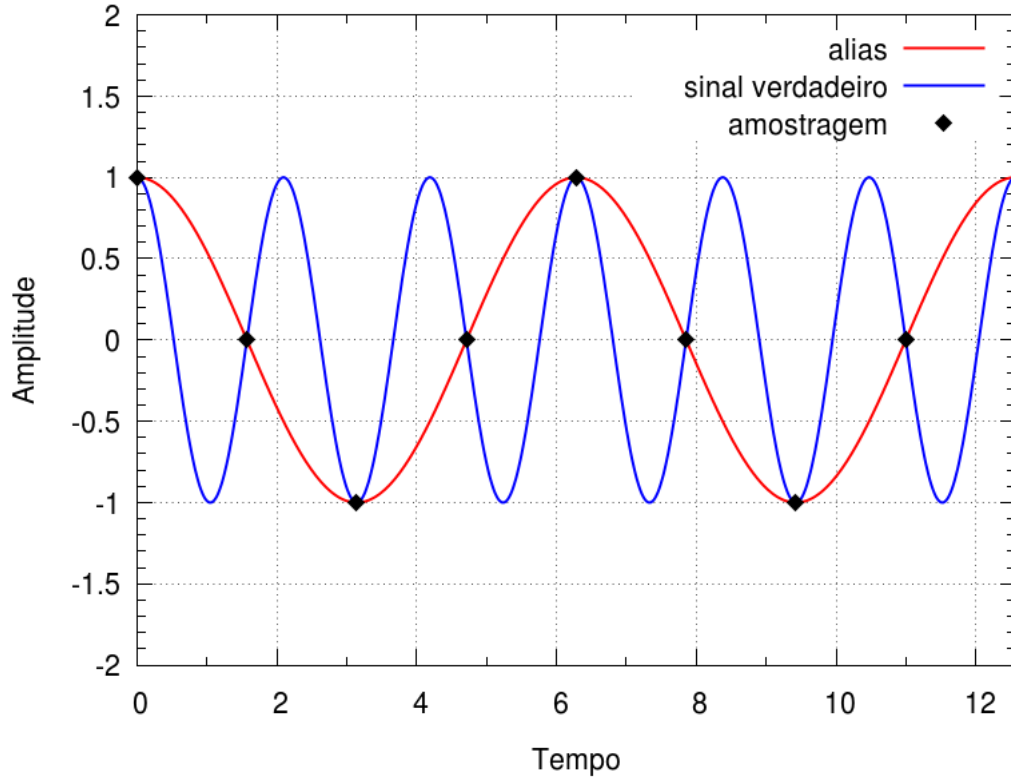
No caso de sistemas físicos reais, é bem comum que os sinais sejam discretizados. Então faz-se necessário o uso de técnicas numéricas que processem os sinais a partir de séries discretas.

Neste contexto surge a Transformada Discreta de Fourier. Ela é uma técnica numérica que pode ser usada para fornecer a composição espectral de um sinal discreto.

Dada uma série $x(n)$ periódica de período $N = T_0/\delta t$, é possível representá-la como uma série de Fourier Discreta, que é a Série de Fourier Contínua (Eq. A.7) amostrada a intervalos regulares de tempo, δt .

A Transformada Discreta de Fourier (DFT) é dada por:

$$X(r) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-ir2\pi n/N} \quad (\text{A.9})$$

Figura A.2: Uma ilustração do *aliasing*.

que é a função $X(\omega)$ amostrada em intervalos $2\pi/N$, onde $\omega = \Omega\delta t$, e r é um número inteiro. E a Transformada Inversa Discreta de Fourier (IDFT) será:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{-ik2\pi n/N}. \quad (\text{A.10})$$

Deve-se ser tomado cuidado com o *aliasing* no uso da DFT para o cálculo numérico da composição espectral de um sinal contínuo.

O *aliasing* ocorre devido a amostragem ser feita em intervalos de tempo maiores que duas vezes a maior frequência do sistema. Isto está ilustrado na Fig. (A.2).

A Transformada Rápida de Fourier (FFT) é um algoritmo da Transformada Discreta de Fourier que reduz drasticamente o número de operações numéricas requeridas. Foi discutida primeiramente por [Cooley and Tukey \(1965\)](#), apesar de Gauss ter descrito a etapa de fatoração em torno de 1805.

Uma Transformada de Fourier discreta pode ser calculada usando a FFT por meio do lema de Danielson-Lanczos se o número de pontos N é uma potência de dois.

É muito útil para a análise de fenômenos dependentes do tempo.

Enquanto que para N pontos a DFT necessita de $2N^2$ operações matemáticas, a

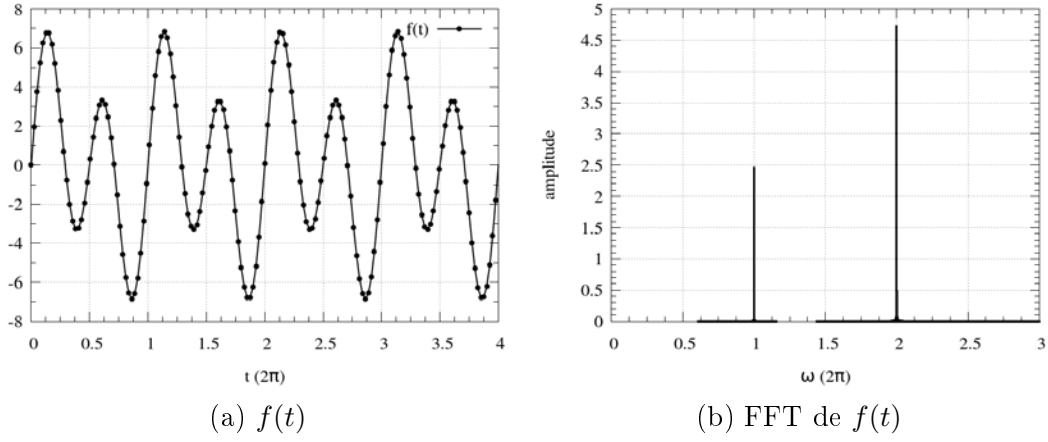


Figura A.3: (a) Gráfico da evolução no tempo da função $f(t)$, (b) FFT de $f(t)$.

FFT reduz esse valor para $2N \log_2 N$.

Na Fig. (A.3) mostramos um exemplo de uma FFT calculada com o algoritmo descrito em (Press et al., 1992). Seja a função $f(t)$ dada por

$$f(t) = 5 \sin 2t + 2.5 \sin t,$$

no espaço temporal seu gráfico é dado na Fig. (A.3a). Utilizando o algoritmo da FFT passamos do espaço temporal para o espaço das frequências e o espectro é mostrado no gráfico da Fig. (A.3b). Podemos notar que os picos coincidem com as amplitudes e frequências da função $f(t)$, como era esperado.

Apêndice B

Estimativa Numérica da Elipticidade de Camadas Diferenciadas

Neste apêndice calcularemos a figura de equilíbrio de um corpo não homogêneo em rotação, [Folonier et al. \(2015\)](#). Também apresentaremos o método numérico para obter o achatamento das camadas.

B.1 Equação de Equilíbrio de um Fluido em Rotação

Seja um fluido invíscido de massa m e velocidade angular $\vec{\omega}$ e uma massa pontual M orbitando num plano perpendicular à rotação numa distância $\vec{r}$ do centro do primário. Escolhemos um sistema de referência onde $\vec{r} = r\hat{x}$ e $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$. Assumimos que o fluido é composto por n camadas homogêneas de densidade ρ_k , $k = 1..n$ (Fig. [B.1](#)). Cada camada tem a forma de um elipsoide com semieixos a_k , b_k e c_k . Também definimos o raio médio de cada camada $R_k = \sqrt[3]{a_k b_k c_k}$.

Encontrar a figura de equilíbrio, isto é, os valores dos semieixos a_k , b_k e c_k para cada camada é equivalente a encontrar os achatamentos

$$\epsilon_k = \frac{a_k - c_k}{a_k} \tag{B.1}$$

e

$$\mu_k = \frac{b_k - c_k}{b_k} \tag{B.2}$$

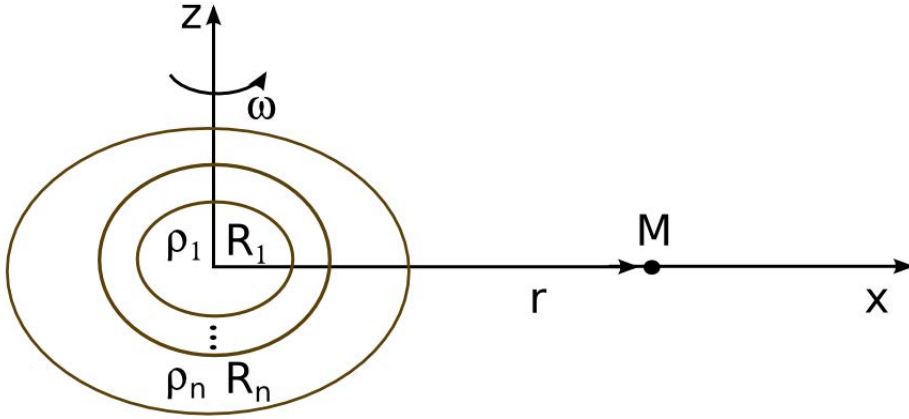


Figura B.1: Fluido invíscido de massa m e velocidade angular $\vec{\omega}$ com n camadas e uma massa pontual M orbitando num plano perpendicular à rotação.

para cada raio médio R_k . Para isto basta resolver $2n$ equações de equilíbrio, detalhes desses cálculos são mostrados em [Folonier and Ferraz-Mello \(2013\)](#).

As soluções são os sistemas lineares dados por:

$$\begin{aligned} E\epsilon &= D_1, \\ E\mu &= D_2. \end{aligned} \tag{B.3}$$

Onde

$$E = \begin{bmatrix} \gamma_1 & -\beta_{12} & \cdots & -\beta_{1n} \\ -\alpha_{21} & \gamma_2 & & -\beta_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -\alpha_{n1} & -\alpha_{n2} & \cdots & \gamma_n \end{bmatrix} \tag{B.4}$$

e

$$D_1 = \begin{bmatrix} \delta_1^{(1)} \\ \vdots \\ \delta_n^{(1)} \end{bmatrix}, \tag{B.5}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} \delta_1^{(2)} \\ \vdots \\ \delta_n^{(2)} \end{bmatrix}. \tag{B.6}$$

Os coeficientes das matrizes são

Planeta	Camada	Raio (km)	Massa (M_{Terra})	ρ (g/cm^3)	μ	ϵ
<i>Kepler-10b</i>	1 (<i>ic</i>)	<i>3050</i>	<i>0.497</i>	25	2.37×10^{-4}	9.48×10^{-4}
	2 (<i>oc</i>)	6100	<i>2.239</i>	<i>16.1</i>	1.24×10^{-3}	4.96×10^{-3}
	3 (<i>mantle</i>)	9100	<i>1.824</i>	<i>4.94</i>	2.38×10^{-3}	9.54×10^{-3}
<i>GJ 876d</i>	1 (<i>ic</i>)	<i>1925</i>	<i>0.13</i>	26	3.49×10^{-4}	1.39×10^{-3}
	2 (<i>oc</i>)	5775	<i>2.071</i>	<i>15.9</i>	5.28×10^{-4}	2.11×10^{-3}
	3 (<i>im</i>)	<i>9557.5</i>	<i>3.578</i>	7.5	6.58×10^{-4}	2.63×10^{-3}
	4 (<i>om</i>)	10800	<i>0.868</i>	<i>3.2</i>	7.11×10^{-4}	2.89×10^{-3}

Tabela B.1: As quantidades que estão em **negrito** são valores tirados das referências indicadas na nota de rodapé. Definimos *ic*, *oc*, *im*, *om*, respectivamente, como: núcleo interno, núcleo externo, manto interno e manto externo. As quantidades dadas em *itálico* foram determinadas depois de algumas suposições: no caso de *GJ 876d* análogo ao interior da Terra: massa do núcleo é 33% da massa do planeta [Valencia et al. \(2007\)](#); $R_{ic} \sim R_{oc}/3$, $R_{om} \sim 1.13R_{im}$; no caso de *Kepler-10b* análogo ao interior de Mercúrio: massa do núcleo é 60% da massa do planeta [Gong and Zhou \(2012\)](#); $R_{ic} \sim R_{oc}/2$.

$$\begin{aligned}
 \alpha_{lk} &= \frac{3m_k}{2m} \left(\frac{R_k}{R_l} \right)^2 \\
 \beta_{lk} &= \frac{3m_k}{2m} \left(\frac{R_l}{R_k} \right)^3 \\
 \gamma_l &= 1 + \frac{3(m-m_l)}{2m} - \sum_{k=l+1}^n \frac{5m_k}{2m} \frac{(R_k^3 - R_l^3)}{R_k^3} \\
 \delta_l^{(1)} &= \frac{5R_l^3 \omega^2}{4mG} + \frac{15M}{4m} \left(\frac{R_l}{r} \right)^3 \\
 \delta_l^{(2)} &= \frac{5R_l^3 \omega^2}{4mG}.
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

onde G é a constante gravitacional e m_k é a massa de cada elipsoide, dada por

$$m_k \approx \frac{4\pi}{3} \sigma_k R_k^3$$

e $\sigma_k = \rho_k - \rho_{k+1}$. Com a definição de $\rho_{n+1} = 0$.

B.2 Aplicações

Na Tab. (B.1) estimamos os valores do achatamento polar para os planetas *Kepler-10b* e *GJ 876d*. Estes resultados estão publicados no artigo [Callegari and Ribeiro \(2014\)](#).