



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Ciência e Tecnologia de Sorocaba

LEONARDO MORENO RAMOS

**Projeto e Simulação de um Sistema de controle para análise do
equilíbrio humano em um *balance board***

Sorocaba

2025

Leonardo Moreno Ramos

Projeto e Simulação de um Sistema de controle para análise do equilíbrio humano em um
balance board

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Universidade Estadual Paulista (UNESP),
Instituto de Ciência e Tecnologia, Sorocaba,
como parte dos requisitos para obtenção do
grau de Bacharel em Engenharia de Controle e
Automação.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Verri Liberado

Sorocaba

2025

R175p

Ramos, Leonardo Moreno

Projeto e Simulação de um Sistema de controle para análise do equilíbrio humano em um balance board / Leonardo Moreno Ramos.

-- Sorocaba, 2025

38 p.

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado - Engenharia de Controle e Automação) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Ciência e Tecnologia, Sorocaba

Orientador: Eduardo Verri Liberado

1. Estabilidade. 2. Programas de computador. 3. Métodos de espaço de estados. I. Título.

LEONARDO MORENO RAMOS

**PROJETO E SIMULAÇÃO DE UM SISTEMA DE CONTROLE PARA ANÁLISE
DO EQUILÍBRIO HUMANO EM UM BALANCE BOARD:**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Ciência e Tecnologia de Sorocaba, Universidade Estadual Paulista (UNESP), como parte dos requisitos para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia de Controle e Automação.

Data da defesa: 14/04/2025

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Eduardo Verri Liberado
UNESP – Instituto de Ciência e Tecnologia – Campus de Sorocaba

Prof. Dra. Elidiane Cipriano Rangel
UNESP – Instituto de Ciência e Tecnologia – Campus de Sorocaba

Prof. Me. Matheus Branco Arcadepani
UNESP – Instituto de Ciência e Tecnologia – Campus de Sorocaba

RESUMO

Este trabalho apresenta o desenvolvimento e a simulação de um modelo matemático para a análise do equilíbrio humano sobre um *balance board*, um sistema dinâmico instável amplamente utilizado para treinamento e reabilitação motora. O modelo foi formulado utilizando as equações de Lagrange, considerando a interação entre a base móvel e o corpo humano representado como um pêndulo invertido. A equação dinâmica foi linearizada em torno de um ponto de equilíbrio e representada em espaço de estados, permitindo a aplicação de técnicas de controle baseadas em realimentação de estados. Com o auxílio do programa MATLAB, o sistema foi discretizado para viabilizar sua implementação computacional e simulado para diferentes valores de massa do indivíduo e dimensões da base. Os resultados mostram que a estabilidade do sistema é altamente sensível a variações nos parâmetros físicos e que a realimentação de estados pode garantir a estabilidade em determinadas faixas de operação. Este estudo contribui para a compreensão da dinâmica do equilíbrio humano e pode ter aplicações em áreas como engenharia biomédica, reabilitação e ergonomia.

Palavras-chave: Controle de equilíbrio, balance board, espaço de estados, realimentação de estados, estabilidade.

ABSTRACT

This work presents the development and simulation of a mathematical model for analyzing human balance on a *balance board*, an inherently unstable dynamic system widely used for training and motor rehabilitation. The model was formulated using Lagrange's equations, considering the interaction between the moving base and the human body, represented as an inverted pendulum. The dynamic equation was linearized around an equilibrium point and represented in state-space form, allowing the application of state feedback control techniques. The system was discretized to enable computational implementation and simulated for different values of the individual's mass and base dimensions. The results show that the system's stability is highly sensitive to variations in physical parameters and that state feedback can ensure stability within specific operating ranges. This study contributes to the understanding of human balance dynamics and may have applications in fields such as biomedical engineering, rehabilitation, and ergonomics.

Keywords: Balance control, *balance board*, state-space representation, state feedback, stability, MATLAB.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	6
1.1 Objetivo	6
1.2 Justificativa	6
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	8
3. DESENVOLVIMENTO	9
3.1 Representação Física e Dinâmica do Sistema	9
3.2 Linearização do Modelo Dinâmico e Representação em Espaço de Estados	14
3.3 Controlabilidade e Observabilidade	16
3.4 Alocação de Pólos e Discretização	16
3.5 Estabilidade do Sistema	17
3.6 Modelagem Computacional no MATLAB	18
3.7 Definição dos Parâmetros Físicos	18
3.8 Construção das Matrizes de Massa (M) e Rigidez (S)	21
3.9 Linearização e Representação em Espaço de Estados	21
3.10 Avaliando Controlabilidade e Observabilidade	22
3.11 Discretização do Sistema	22
3.12 Projeto dos Ganhos	22
3.13 Simulação do Sistema Controlado	23
4. RESULTADOS E DISCUSSÕES	25
5. CONCLUSÃO	30
REFERÊNCIAS	32

1. INTRODUÇÃO

Problemas de equilíbrio são muito comuns em vítimas de ataques cardíacos e idosos. Esses desafios podem comprometer a mobilidade e a qualidade de vida, aumentando o risco de quedas e lesões graves. Existem diversas abordagens para mitigar essas dificuldades, incluindo terapias físicas e exercícios específicos voltados para a reabilitação do equilíbrio (Winter, 1995). Um dos métodos eficazes para aprimorar essa capacidade motora envolve a utilização de dispositivos dinâmicos, como o *balance board*, uma plataforma instável sobre a qual o indivíduo deve se equilibrar. Essa plataforma consiste basicamente em uma prancha, geralmente fabricada com madeira, apoiada sobre um rolo de EVA ou madeira, na qual o indivíduo ao se apoiar, deve rearranjar sua posição e centro massa para se manter de pé sobre ela enquanto o rolo gira.

A prática de equilíbrio em *balance boards* é amplamente empregada tanto em treinamentos de esportes como surfe e skate quanto em programas de reabilitação para indivíduos com deficiências motoras (Molnár, 2022). O *balance board* pode ser modelado como um sistema mecânico não linear e subatuado, similar a um pêndulo invertido, onde o indivíduo deve aplicar estratégias motoras para manter-se estável. Esse cenário oferece um desafio significativo para o controle motor humano e pode ser analisado por meio de modelagem matemática e técnicas de controle automático (Spong, Hutchinson & Vidyasagar, 2006).

O equilíbrio humano sobre uma plataforma instável, como o *balance board*, representa um desafio complexo que integra princípios de dinâmica, biomecânica e controle automático. A manutenção do equilíbrio exige a interação coordenada entre sistemas sensoriais e motores, bem como a resposta a perturbações externas e internas (Winter, 2009). Esse comportamento caracteriza sistemas dinâmicos não lineares e subatuados, nos quais o número de atuadores é inferior ao número de graus de liberdade (Spong et al., 2006).

1.1 Objetivo

O presente trabalho tem como objetivo desenvolver um modelo matemático do equilíbrio humano sobre um *balance board*, considerando os princípios da física dinâmica. Por meio desse modelo, procura-se projetar e implementar um sistema multivariável não linear modelado em espaço de estados e linearizado em torno de um ponto de equilíbrio, para

garantir a estabilidade do sistema. O código desenvolvido no MATLAB permitirá analisar a resposta do sistema sob diferentes condições para que se otimize os parâmetros de controle buscando melhora no desempenho na estabilização do indivíduo.

1.2 Justificativa

A importância deste estudo reside na necessidade de desenvolver abordagens matemáticas e computacionais que auxiliem na compreensão do equilíbrio humano em superfícies instáveis. Estudos indicam que a resposta ao desequilíbrio está fortemente relacionada com a interação entre a dinâmica do corpo e a resposta motora neural, que também pode ser interpretada como estratégias de controle a serem aplicadas pelo indivíduo (Molnár, 2022). Além disso, a modelagem do sistema pode permitir avanços futuros na engenharia biomédica, com o auxílio no desenvolvimento de novos métodos de reabilitação para pacientes com dificuldades motoras, assim como ferramentas computacionais para simular o comportamento esperado para um indivíduo se equilibrando em um *balance board* real.

Observando a interação da engenharia de controle e automação com estes tópicos, a estabilização de sistemas subatuados é um problema popular e desafiador que requer soluções distintas. A implementação de um sistema multivariável permite explorar a influência de parâmetros como a inércia e a distribuição de massa no desempenho do sistema, fornecendo uma compreensão valiosa para aplicações futuras em robótica e biomecânica (Ogata, 2010). Além disso, a engenharia de controle possibilita o desenvolvimento de dispositivos inteligentes e sistemas adaptativos que podem ser aplicados em reabilitação assistida por tecnologia, como monitoramento por sensores de movimento e o comparativo com a resposta de sistemas de controle semelhantes, proporcionando maior precisão e eficiência nos tratamentos médicos.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A estabilização do equilíbrio humano tem sido amplamente estudada na literatura. Winter (1995) discute como a interação entre os sistemas sensorial e motor influencia o controle postural. Molnár (2022) apresenta uma abordagem detalhada para modelar o equilíbrio humano sobre um *balance board*, considerando um sistema de pêndulo duplo invertido com atrasos na realimentação. Spong, Hutchinson e Vidyasagar (2006) exploram o controle de sistemas sub-atuados, destacando a importância da escolha de ganhos apropriados para garantir a estabilidade.

A engenharia de controle desempenha um papel crucial na análise biomecânica, permitindo a implementação de algoritmos de controle que reproduzem e aprimoram as estratégias motoras humanas. O sistema multivariável tem sido utilizado em diversos estudos para estabilização de sistemas instáveis. Ogata (2010) detalha a teoria por trás desses controladores, enfatizando a necessidade de ajustes nos ganhos proporcionais (K_p) e derivativo (K_d) para garantir uma resposta rápida e estável. A análise de Molnár (2022) também demonstra a influência de parâmetros físicos, como o momento de inércia e a altura do centro de massa, na resposta dinâmica do sistema.

A modelagem computacional no MATLAB permite a simulação do sistema de controle e a análise dos efeitos dos parâmetros dinâmicos. A discretização do modelo em espaço de estados facilita a implementação prática do controlador e permite avaliar a resposta do sistema em tempo real. Estudos como os de Benerab et al. (2022) demonstram a eficácia de abordagens baseadas na técnica de *Multiplicity-Induced Dominancy* (MID) para estabilização robusta de sistemas de equilíbrio, fornecendo uma base teórica importante para aplicações futuras na área de controle.

Além disso, estudos como o de Cruise et al. (2017) exploram como a modelagem matemática de *balance boards* pode aprimorar não apenas o entendimento do equilíbrio humano, mas também permitir o desenvolvimento de dispositivos interativos que ajustam a rigidez e o tempo de resposta para diferentes perfis de usuários. Esses avanços reforçam a relevância da integração entre biomecânica e controle para aprimorar metodologias de reabilitação e treinamento motor.

3. DESENVOLVIMENTO

A modelagem matemática do sistema foi realizada por meio das equações de Lagrange, que permitem descrever a dinâmica do movimento considerando a inércia, a gravidade e as forças aplicadas. Este modelo matemático serve como base para o desenvolvimento de técnicas de controle que buscam estabilizar o sistema, garantindo sua robustez e desempenho ótimo (Ogata, 2010). As equações de Lagrange são empregadas para descrever a evolução temporal do sistema a ser trabalhado nos próximos tópicos, conforme a equação (1):

$$\frac{d}{dt} \cdot \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (1)$$

na qual:

$$L = T - V$$

representa a função de Lagrange, sendo T e V energias cinética e potencial respectivamente, e com o termo Q_i sendo as forças generalizadas que atuam no sistema

3.1 Representação Física e Dinâmica do Sistema

O sistema de equilíbrio abordado neste trabalho é composto por dois elementos principais, sendo a base, no caso o “*board*”, uma placa de madeira em formato de paralelepípedo e o rolo sendo um cilindro, que são modelados como um único corpo rígido podendo oscilar livremente em torno de um ponto de apoio fixo. Por conta da geometria da base e do rolo, se tem uma influência direta no comportamento dinâmico do sistema.

Tabela 1 - Parâmetros adotados para o modelo matemático.

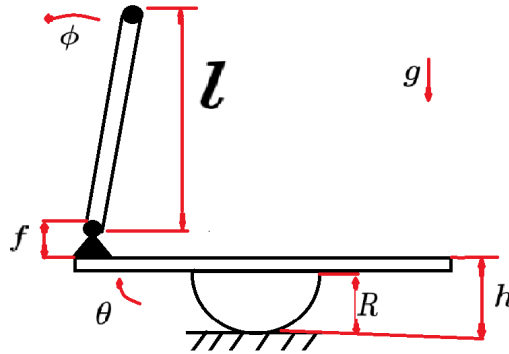
Parâmetros Físicos	Valores
mh	80 kg
mb	2 kg
h	0,1 m
l	1 m
g	9,81 m/s ²
f	0,05 m
Ts	0,1 s
Lb	0,5 m
R	0,1 m

Fonte: Autoria Própria

A dinâmica do sistema é descrita por duas coordenadas principais, sendo θ o ângulo de rotação da base em relação ao solo. Esse ângulo representa o movimento oscilatório da plataforma. Enquanto ϕ é o ângulo de inclinação do corpo em relação à vertical, que indica o desvio do centro de massa do indivíduo.

A Figura 1 mostra uma representação do sistema de equilíbrio, e a descrição dos termos mostrados na Figura será apresentada a seguir.

Figura 1 - Modelo geométrico do Sistema.



Fonte: Autoria Própria

A base possui massa (m_b) e momento de inércia (I_b), que determinam sua resistência a mudanças no estado de movimento. A distribuição da massa da base afeta diretamente a estabilidade do sistema (Spong et al., 2006). Sua energia cinética pode ser descrita como:

$$T_{base} = \frac{1}{2}m_b(R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}I_b\dot{\phi}^2$$

Sendo o termo $R\dot{\theta}$ a velocidade linear do centro de massa da base e $I_b\dot{\phi}^2$ a energia cinética rotacional da base

O corpo humano é representado como um pêndulo invertido, com o centro de massa localizado a uma altura l da base. O corpo possui massa (M_h) e momento de inércia (I_h), que influenciam a resistência a mudanças na inclinação (Winter, 2009). A variação na altura do centro de massa e na distribuição da massa corporal afeta significativamente a dinâmica do sistema. Sua energia cinética pode ser descrita como:

$$T_{p\acute{e}ndulo} = \frac{1}{2}m_h(\dot{x}_h^2 + \dot{y}_h^2) + \frac{1}{2}m_h l^2 \dot{\phi}^2$$

Na qual os termos $\dot{x}_h$ e $\dot{y}_h$ são as velocidades nas direções vertical e horizontal do centro de massa do pêndulo. Essas velocidades são expressas em termos das derivadas de θ e ϕ :

$$\begin{aligned}\dot{x}_h &= R\dot{\theta} + h\dot{\phi}\cos(\phi) \\ \dot{y}_h &= -h\dot{\phi}\sin(\phi)\end{aligned}$$

Avaliando a energia potencial do sistema, percebe-se que ela vem apenas da altura do centro de massa do pêndulo, dado por $h\cos(\phi)$ em relação ao ponto de referência:

$$V = m_h g h \cos(\phi)$$

A rigidez passiva da junta entre o pêndulo invertido e o *balance board*, de acordo com (Loram, Ian; Lakie, Martin, 2002) é dada por:

$$s_t = 0.91 m_h g \frac{1}{2}$$

Aplicando a equação de Lagrange no sistema, é obtido um conjunto de equações diferenciais acopladas:

$$M\ddot{q}(t) + Sq(t) = Q(t)$$

na qual M é a matriz de massa do sistema, S é a matriz que contém os termos de rigidez e gravidade e Q representa os torques aplicados na base do sistema.

Porém por conta da existência de torques opostos, pode-se escrever a equação da seguinte forma:

$$M\ddot{q}(t) + Sq(t) = HT(t)$$

na qual a matriz H representa o sentido dessas forças e T o torque:

Observando a forma matricial das equações diferenciais obtidas:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} T(t)$$

com os termos de massa:

$$\begin{aligned}
m_{11} &= I_h + m_h l^2 \\
m_{12} &= l m_h (L_b + D_0) \\
m_{21} &= m_{12} \\
m_{22} &= I_b + (D_0^2 m_h) + (L_b^2 (m_b + m_h)) + (2D_0 L_b m_h)
\end{aligned}$$

e os termos de rigidez s :

$$\begin{aligned}
s_{11} &= s_t - g l m_h \\
s_{12} &= s_t \\
s_{21} &= s_{12} \\
s_{22} &= s_t - g [(m_b + m_h) (L_b - R)] - (D_0 g m_h)
\end{aligned}$$

onde D_0 é:

$$D_0 = R - h + f - L_b$$

O acoplamento entre essas coordenadas acaba por tornar o sistema altamente não linear, o que aumenta a complexidade do controle (Spong et al., 2006).

A inércia desempenha um papel crucial na dinâmica do sistema. Em termos físicos, a inércia descreve a resistência de um corpo a mudanças em seu estado de movimento. No contexto do equilíbrio humano, a inércia afeta tanto a base quanto o corpo, influenciando a resposta do sistema a perturbações externas.

Observando a inércia da base percebe-se que ela resiste a mudanças rápidas em seu estado de rotação por conta de seu momento de inércia. Um aumento na massa ou na distribuição da massa da base resulta em maior inércia, o que pode aumentar a estabilidade, mas também reduzir a capacidade de resposta do sistema (Spong et al., 2006).

No corpo humano, tem-se a resistência a mudanças na inclinação devido ao seu momento de inércia. Indivíduos com maior massa corporal ou altura apresentam maior inércia, dificultando ajustes rápidos da postura para manter o equilíbrio (Winter, 2009).

Sistemas com baixa inércia são mais suscetíveis a oscilações indesejadas, enquanto sistemas com alta inércia são menos responsivos a pequenas perturbações, tornando o controle mais desafiador (Ogata, 2010).

3.2. Linearização do Modelo Dinâmico e Representação em Espaço de Estados

Para facilitar a análise e o controle do sistema, é necessário linearizar suas equações em torno de um ponto de equilíbrio. A linearização consiste em aproximar o comportamento do sistema por um modelo linear, válido para pequenas variações em torno do ponto de equilíbrio.

O modelo linearizado pode ser representado na forma de espaço de estados:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

com o vetor de estados do sistema sendo:

$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

no qual são definidas como variáveis de estado os ângulos de inclinação do *board* e da pessoa e as respectivas velocidades angulares.

A variável de entrada do sistema expresso em espaço de estados é definida como u , sendo equivalente ao torque $T(t)$, e com isso é definido o vetor:

$$\dot{x} = f(x, u)$$

o qual contém as derivadas em função do tempo dos estados:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = f(x, u)$$

Reescrevendo a equação do sistema agora com as derivadas:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} T(t)$$

ao isolar $\dot{x}_3$ e $\dot{x}_4$, resulta em:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} T(t) - \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right)$$

Como visto anteriormente o sistema linear em espaço de estados é dado como:

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$$

$$y = C \cdot x$$

no qual:

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, u_0}$$

$$B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x_0, u_0}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

u : variável de entrada do sistema, correspondente ao torque $T(t)$

y : variável de saída do sistema

Sendo x_0, u_0 o ponto de equilíbrio em torno do qual o sistema em espaço de estados é linearizado, definido como:

$$x_0 = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \phi_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e:

$$u_0 = T_0$$

Dessa forma, resolvendo-se as derivadas parciais de $f(x, u)$ com respeito a x e u no ponto de equilíbrio x_0, u_0 , obtém-se as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} \underline{0} & I \\ -M^{-1} \cdot S & \underline{0} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ M^{-1} \cdot H \end{bmatrix}$$

com:

$$\underline{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

As matrizes A e B descrevem a evolução dos estados do sistema em resposta às forças externas e torques aplicados. Essa representação permite o uso de métodos clássicos de controle, como realimentação de estados e alocação de pólos, para estabilizar o equilíbrio da plataforma:

3.3. Controlabilidade e Observabilidade

Controlabilidade e Observabilidade são propriedades fundamentais no projeto de controladores em sistemas dinâmicos. Um sistema é controlável se for possível inserir entradas adequadas para deslocar qualquer estado inicial para qualquer outro estado desejado em um tempo finito. Um sistema linear e invariante no tempo é controlável se a matriz de controlabilidade C possui posto completo:

$$C = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

Se a matriz C possuir posto n , com n sendo a ordem do sistema, o sistema é completamente controlável (Kailath, 1980)

No que tange a observabilidade, um sistema é observável caso seja possível reconstruir seu estado a partir das saídas medidas, essa condição é avaliada por meio da matriz de observabilidade:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Caso a matriz de observabilidade O possuir posto n , o sistema é completamente observável (Chen, 1999).

3.4. Alocação de Pólos e Discretização

Para a implementação digital do controle, é necessário converter o modelo contínuo em um modelo discreto. A discretização permite que o sistema seja representado em um formato adequado para processamento computacional, garantindo que os cálculos sejam realizados em instantes de tempo discretos.

A equação de estado do sistema discretizado é dada por:

$$x[k+1] = A_d x[k] + B_d u[k]$$

Em que os termos A_d e B_d são as matrizes A e B discretizadas, oriundas das expressões:

$$A_d = e^{AT_s}$$

$$B_d = \int_0^{T_s} e^{A_\tau} d\tau B$$

A matriz A_d demonstra a evolução dos estados no período discreto, na matriz B_d há o ajuste da influência da entrada $u[k]$ ao longo do período de amostragem T_s .

A alocação de pólos é uma técnica utilizada para posicionar os autovalores da matriz A de forma a garantir um comportamento dinâmico desejado. Para isso, define-se uma matriz de ganho F tal que a nova matriz do sistema com realimentação de estados seja:

$$A_{cl} = A_d - B_d F$$

Os polos de A_{cl} são escolhidos de modo a garantir estabilidade e uma resposta satisfatória do sistema. A aplicação da realimentação de estados por meio de F assegura que o sistema mantenha sua estabilidade mesmo diante de pequenas perturbações.

A técnica de realimentação de estados é um método de controle no qual todas as variáveis de estado do sistema dinâmico são medidas ou estimadas e utilizadas diretamente para definir a lei de controle.

3.5. Estabilidade do Sistema

A estabilidade de um sistema dinâmico é um conceito fundamental na teoria de controle, pois determina se as respostas do sistema permanecerão limitadas ao longo do tempo diante de pequenas perturbações. Um sistema é considerado estável se, para qualquer condição inicial dentro de uma faixa admissível, sua resposta não diverge para o infinito.

Formalmente, para um sistema linear no formato de espaço de estados:

- O sistema é assintoticamente estável se todos os autovalores da matriz A estiverem no semiplano esquerdo do plano complexo, ou seja, se $\text{Re}(i) < 0$ para todos os valores próprios i de A . No caso de sistemas discretos, como o presente trabalho, a condição de estabilidade é que os autovalores da matriz A_{cl} , que é a versão discretizada de A , estejam dentro do círculo unitário, assim:

$$|\lambda_i| < 1$$

Essa definição é amplamente discutida por Ogata (2010) e Khalil (2002), sendo essencial para garantir que o sistema não apresente comportamento divergente ao longo do tempo.

No caso do *balance board*, a estabilidade é fortemente influenciada pelos parâmetros físicos do sistema, como massa, momento de inércia e comprimento da base. Pequenas variações nesses parâmetros podem alterar a posição dos pólos do sistema, afetando a resposta ao controle. A realimentação de estados utilizada neste trabalho busca garantir que os pólos do sistema estejam dentro da região estável do espaço de estados.

Como descrito por Spong et al. (2006), sistemas biomecânicos são altamente não lineares e frequentemente requerem linearização em torno de um ponto de operação para permitir a aplicação de técnicas de controle convencionais. A estabilidade é garantida pela escolha adequada dos ganhos da matriz F , que deslocam os pólos do sistema para posições desejadas, mantendo a resposta dentro de uma faixa aceitável de operação.

A estabilidade pode ser comprometida se a realimentação não for projetada corretamente. Doyle, Francis e Tannenbaum (1992) discutem que, em sistemas multivariáveis, a interação entre diferentes estados pode causar efeitos inesperados, exigindo uma alocação de pólos criteriosa para evitar oscilações excessivas ou instabilidades indesejadas.

3.6 Modelagem Computacional no MATLAB

A modelagem matemática foi implementada no MATLAB, que ofereceu ferramentas robustas para a manipulação de sistemas dinâmicos e projeto de controladores. O código desenvolvido permitiu a determinação das matrizes do sistema, linearização, discretização e o projeto do sistema multivariável.

3.7 Definição dos Parâmetros Físicos

Os parâmetros físicos do sistema foram definidos no código MATLAB, levando em conta valores arbitrários e realistas de um indivíduo sobre um *balance board* como massa, altura do ponto de apoio com o *board*, altura do centro de massa do corpo humano, assim como os valores da composição do *balance board* como medidas de raio do rolo do *board*, e dimensões do *board* em si. A Tabela 1 apresenta os valores adotados para cada um dos parâmetros do modelo matemático. O valor do parâmetro T_s (período de amostragem para discretizar o modelo e executar a simulação) foi escolhido como sendo igual a 100 ms por

conta de representar o tempo médio de resposta motora de um ser humano comum (Chagdes,James et al;2013).

Para fins comparativos neste estudo, foi implementado um código para variar somente a massa do indivíduo e um para variar somente o raio do rolo onde fica o board.

Figura 2 - Variação de Mh.

```
clear
clc

% Parâmetros fixos do sistema
Mb = 2; % kg
h = 0.1; % m
l = 1; % m
g = 9.81; % m/s2
f = 0.05; % m
R = 0.10; % Raio fixo
Lb = 0.1; % Comprimento fixo da base (m)
Ts = 0.1; % Tempo de amostragem (s)

% Faixa de valores de massa humana
teste_massas = [70, 80, 90, 100];

% Loop sobre os valores de Mh
for Mh = teste_massas
    % Cálculo dos momentos de inércia
    Ib = 0.5 * Mb * (Lb^2); % kgm2
    Ih = 0.083 * Mh * ((0.2^2) + (1^2)); % kgm2

    % Parâmetros adicionais
    st = 0.91 * Mh * g * (1 / 2);
    D0 = R - h + f - Lb; % Distância de equilíbrio
```

Fonte: Autoria própria.

O código que varia R tem somente este trecho alterado

Figura 3 - Variação de R .

```
clear
clc

% Parâmetros fixos do sistema
Mb = 2; % kg
h = 0.1; % m
l = 1; % m
g = 9.81; % m/s2
f = 0.05; % m
R = 0.10; % Raio fixo
Mh = 80; % kg % Massa fixa do humano
Ts = 0.1; % Tempo de amostragem (s)

% Faixa de valores de tamanho do board
teste_board = [0.025, 0.05, 0.1, 0.15];

% Loop sobre os valores de Lb
for Lb = teste_board
    % Cálculo dos momentos de inércia
    Ib = 0.5 * Mb * (Lb^2); % kgm2
    Ih = 0.083 * Mh * ((0.2^2) + (1^2)); % kgm2

    % Parâmetros adicionais
    st = 0.91 * Mh * g * (1 / 2);
    D0 = R - h + f - Lb; % Distância de equilíbrio
```

Fonte: Autoria própria.

3.8 Construção das Matrizes de Massa (M) e Rigidez (S)

As matrizes de inércia e rigidez foram calculadas para descrever o comportamento dinâmico do sistema, seguindo a construção das expressões que relacionam as mesmas:

Figura 4 - Matrizes de Massa (M) e Rigidez (S).

```
m11 = Ih + (l^2*Mh) ;
m12 = l*Mh*(Lb+D0);
m21 = m12;
m22 = Ib + (D0^2*Mh) + (Lb^2*(Mb+Mh))+(2*D0*Lb*Mh);

s11 = st - (g*l*Mh);
s12 = st;
s21 = s12;
s22 = st-g*(Mb+Mh)*(Lb-R)-(D0*g*Mh);

M = [m11,m12;
      m21, m22];

S = [s11,s12;
      s21,s22];
```

Fonte: Autoria própria.

3.9 Linearização e Representação em Espaço de Estados

Para o projeto do controlador, o sistema foi linearizado e representado na forma de espaço de estados:

Figura 5 - Linearização e Espaço de Estados.

```
M_inv = inv(M); %invertendo a matriz M
I_2 = eye(2); % Matriz identidade 2x2

a21 = -M_inv * S;
|
H = [1; -1];

A = [zeros(2),I_2;
      a21, zeros(2)];

B = [0; 0; (M_inv*H)];

C = eye(4);
D = zeros(size(C,1), size(B,2)); % Matriz nula
```

Fonte: Autoria própria.

3.10 Avaliando Controlabilidade e Observabilidade

A controlabilidade e Observabilidade do sistema foram avaliadas antes de iniciar o processo de discretização. Usando o código do MATLAB apresentado na Figura n, foi assegurada a validade dessas propriedades, proporcionando o avanço no processo de discretização a seguir.

Figura 6 - Controlabilidade e Observabilidade do sistema

```

49 % Avaliação da Controlabilidade
50 Co = ctrb(A, B);
51 rank_Co = rank(Co);
52 if rank_Co == 4
53     disp('O sistema é controlável.');
```

```

54 else
55     disp('O sistema não é totalmente controlável.');
```

```

56 end
57
58 % Avaliação da Observabilidade
59 Ob = obsv(A, C);
60 rank_Ob = rank(Ob);
61 if rank_Ob == 4
62     disp('O sistema é observável.');
```

```

63 else
64     disp('O sistema não é totalmente observável.');
```

```

65 end
66
67 % Discretização do sistema
68 sys = ss(A, B, C, D);
69 sysd = c2d(sys, Ts);
70
Command Window
O sistema é controlável.
O sistema é observável.
>>

```

Fonte: Autoria própria

3.11 Discretização do Sistema

A discretização foi realizada para implementar o controle digital:

Figura 7 - Comandos da discretização

```

sys = ss(A,B,C,D); % modelo em espaço de estados

sysd = c2d(sys,Ts) %discretizar o modelo

```

Fonte: Autoria própria.

3.12 Projeto dos ganhos

O vetor de ganhos de realimentação de estados F foi modelado utilizando a técnica de alocação de pólos, com o objetivo de garantir a estabilidade do sistema.

Os pólos foram definidos com base na análise dos autovalores do sistema discretizado:

Figura 8 - Pólos e alocação dos mesmos.

```
p = [0.67955, ((0.9952 + 0.0982i)*0.8), ((0.9952 - 0.0982i)*0.8), 0.7358]; % Vetor de polos desejados
F = place(sysd.A,sysd.B, p);
Acl = (sysd.A) -((sysd.B)*F);
```

Fonte: Autoria própria.

Para fins comparativos, os polos foram recalculados em torno do ponto de m_h igual a 70kg, e o vetor F foi recalculado também para este conjunto de pólos.

Figura 9 - Pólos para $m_h=70$ kg

```
p = [1.3590*0.50, ((0.9316 + 0.3635i)*0.80), ((0.9316 - 0.3635i)*0.80), 0.7358]; % Vetor de polos desejados
```

Fonte: Autoria própria.

3.13 Simulação do Sistema Controlado

Figura 10 - Vetor F para os pólos em $m_h=80$ kg

```
F =
    321.2228    280.9908    25.6488    12.0516
```

Fonte: Autoria própria.

Figura 11 - Vetor F para os pólos em $m_h=70$ kg

```
F =
    335.3739    265.3997    34.0388    10.7827
```

Fonte: Autoria própria.

Com o controlador projetado, o sistema foi simulado no MATLAB para avaliar o desempenho do controle. As condições iniciais consideraram pequenos desvios do equilíbrio,

de modo que os valores iniciais de θ e ϕ são iguais a, $\frac{\pi}{6}$ conforme mostra a Figura 12.

Por fim, a Figura 13 apresenta as funções para elaboração dos gráficos durante a execução do script de simulação.

Figura 12 - Comandos da discretização

```

t = 0.0:Ts:10.0;

uk = zeros(1,length(t));

xk_1 = zeros(4,1);
xk = [ pi/6;pi/6;0;0 ];
yk = zeros(4,length(t));

for j = 1:length(t)

    uk(j) = - (F*xk);

    xk_1 = ((sysd.A)*xk) + ((sysd.B)*uk(j));
    yk(:,j) = ((sysd.C)*xk) + ((sysd.D)*uk(j));

    xk = xk_1;

end

```

Fonte: Autoria própria.

Figura 13 - Imprimindo resultados na tela

```

figure
subplot(3,1,1)
plot(t,uk);
legend('torque [N.m]');

subplot(3,1,2)
plot(t,yk(1,:)*(180/pi),t,yk(2,:)*(180/pi));
legend('theta[graus]', 'phi[graus]');

subplot(3,1,3)
plot(t,yk(3,:),t,yk(4,:));
legend('theta_v [rad]', 'phi_v [rad]');

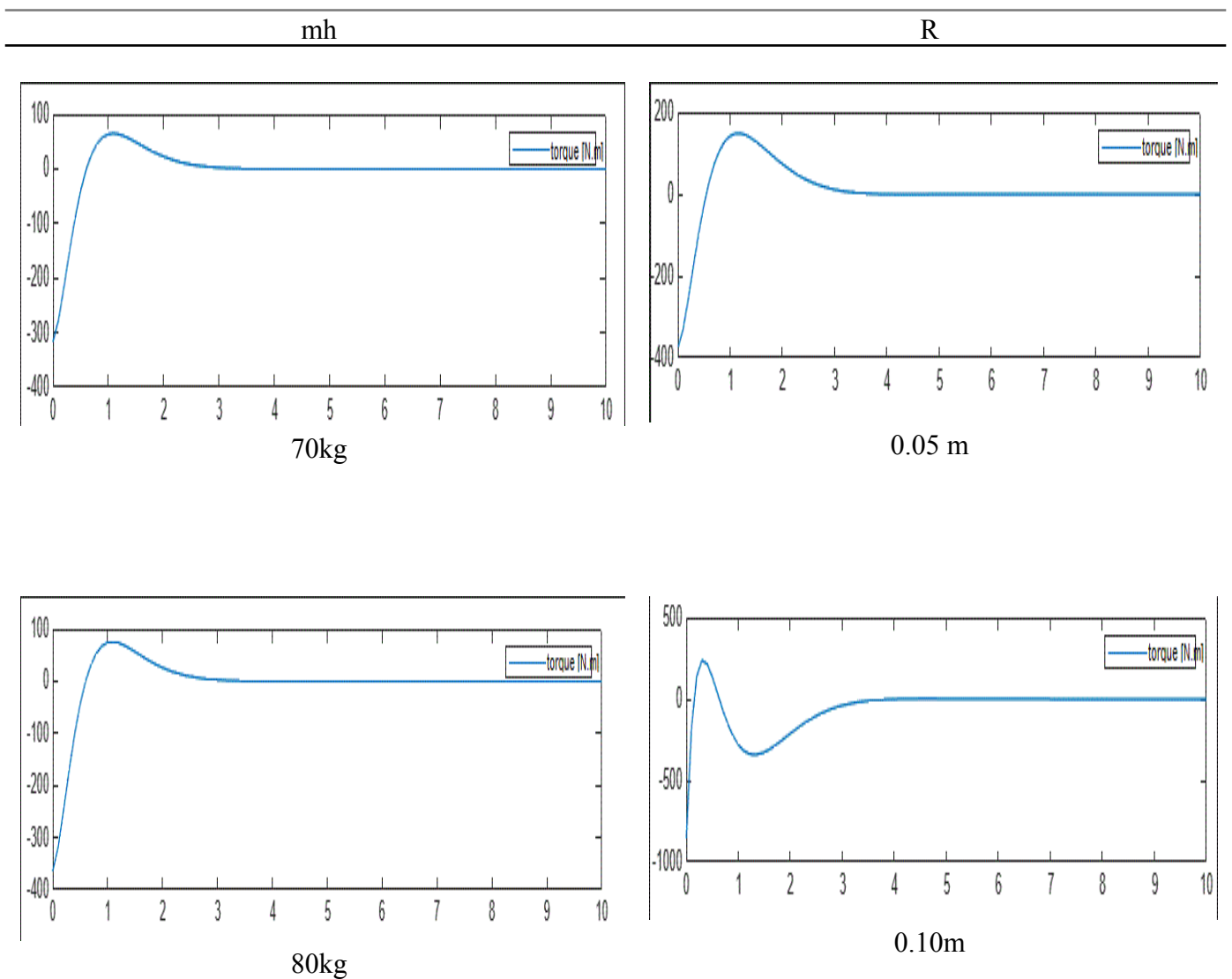
```

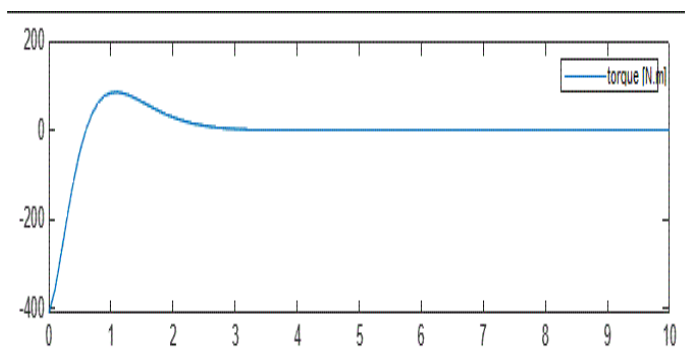
Fonte: Autoria própria.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

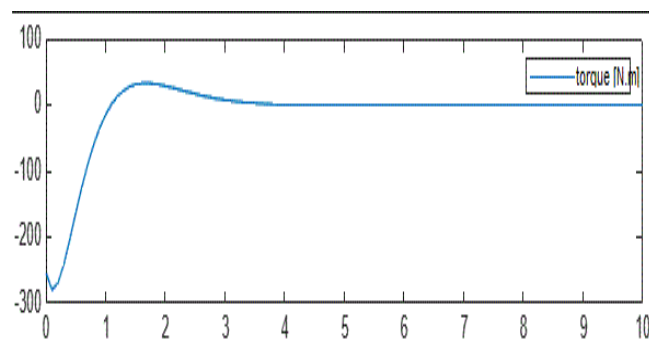
Para validar o modelo que foi proposto, foram realizadas diversas simulações com variação de alguns parâmetros físicos. Inicialmente, somente a massa do indivíduo foi variada em cada simulação, considerando o vetor de ganhos de realimentação de estados F calculado para m_h igual a 80kg. Em seguida, foi variado somente o raio do rolo o qual o *board* é posicionado, considerando os mesmos valores de F .

Tabela 2 – Resultados de torques obtidos para simulações com variação dos parâmetros m_h e R do sistema linearizado com ganhos de realimentação projetados para $m_h = 80$ kg.

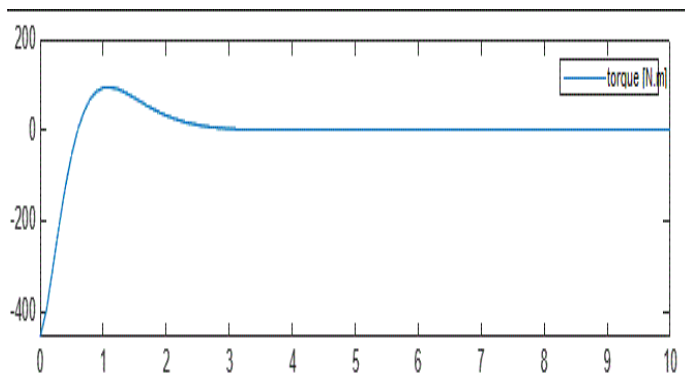




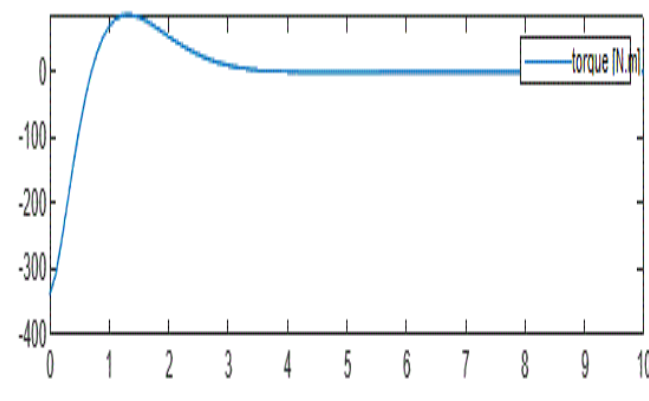
90kg



0.15m



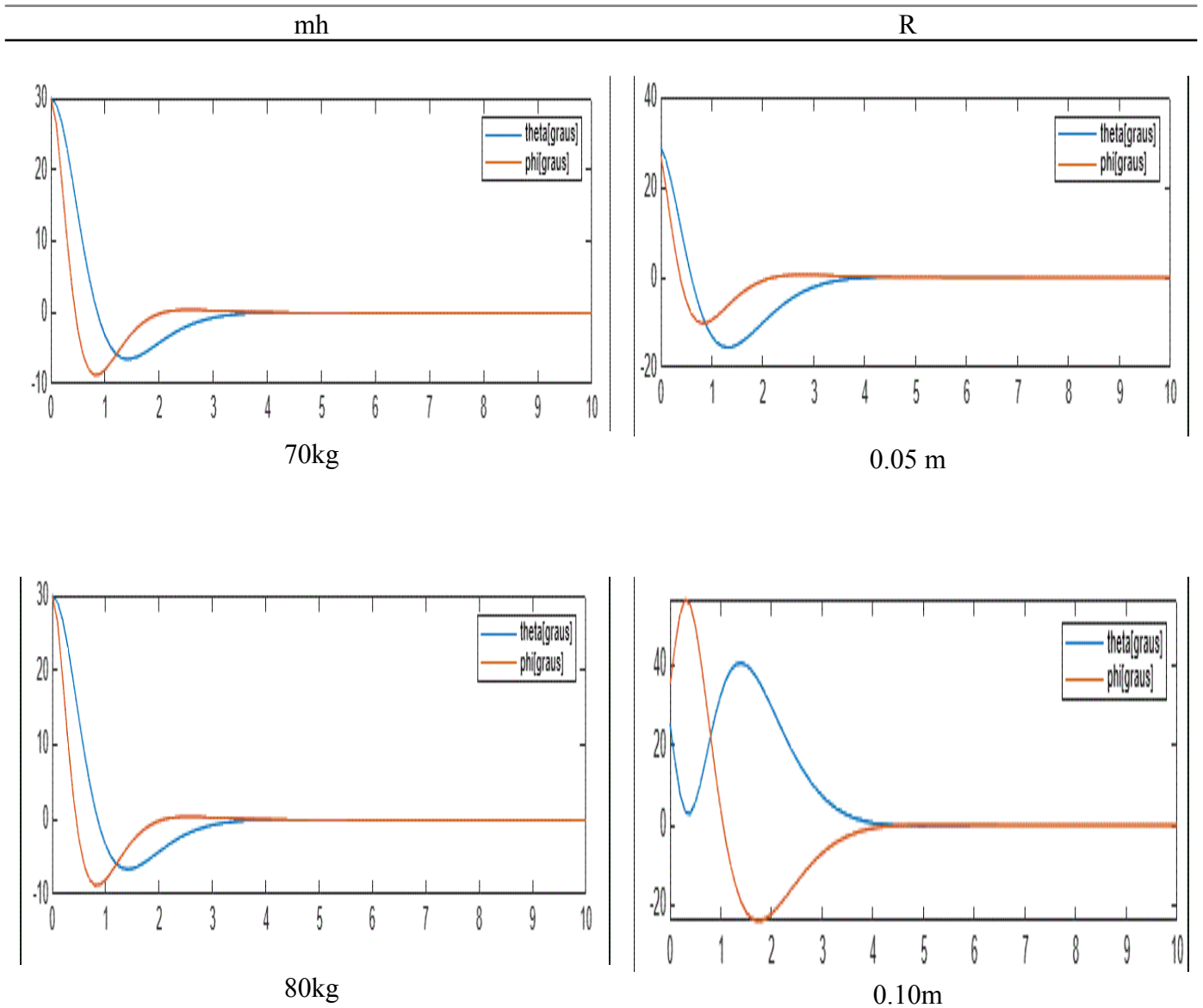
100kg

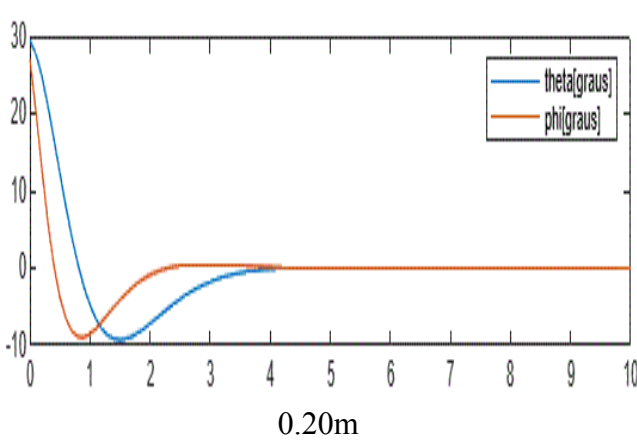
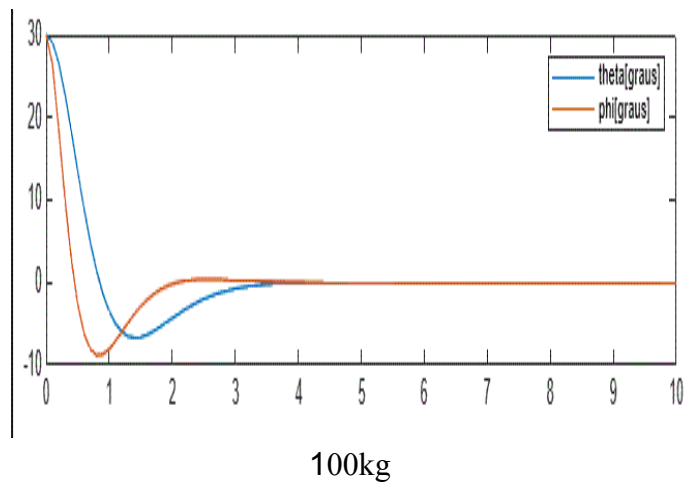
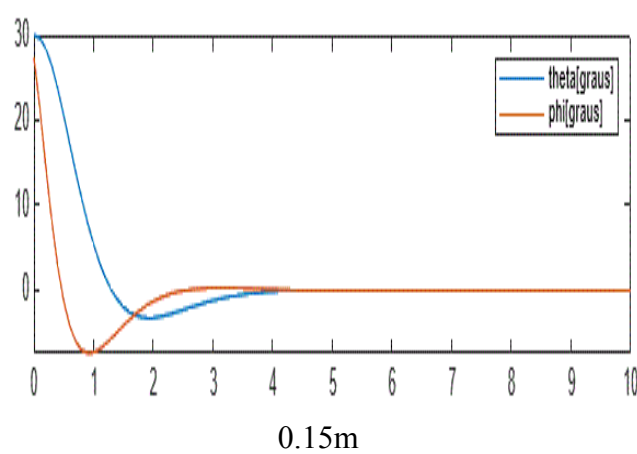
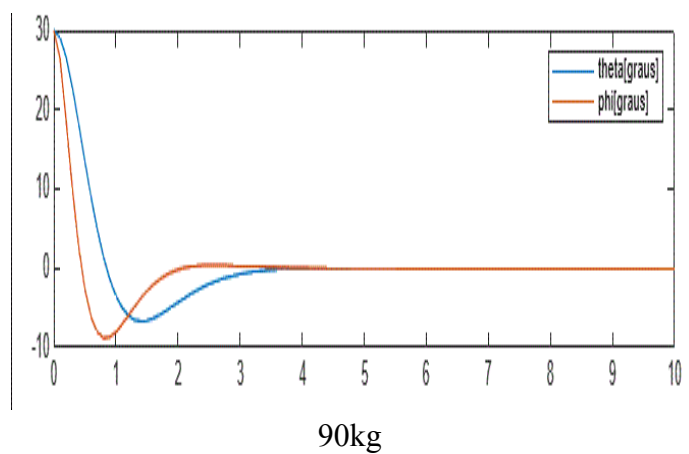


0.20m

Fonte: Autoria própria.

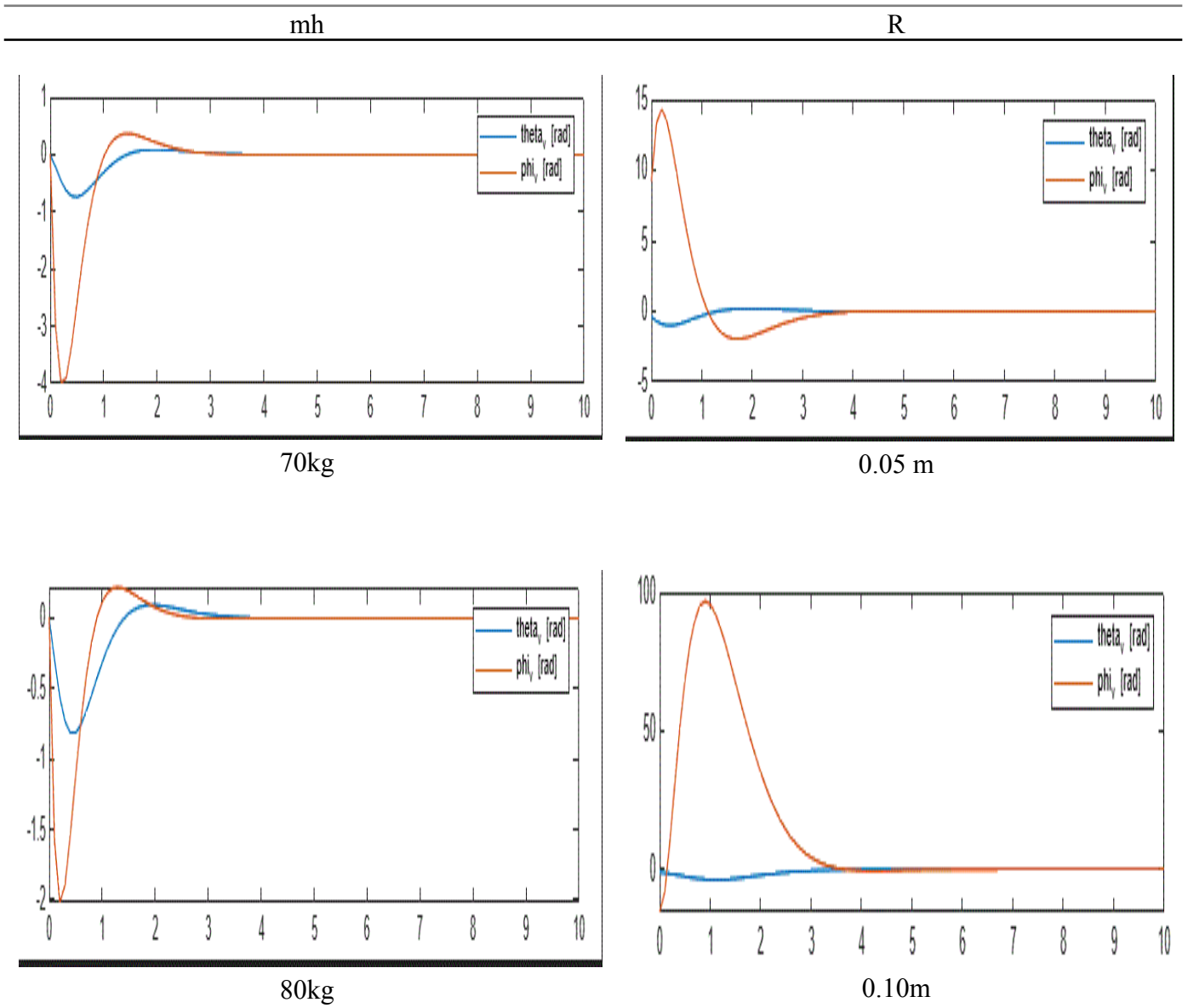
Tabela 3 – Resultados de posição obtidos para simulações com variação dos parâmetros mh e R do sistema linearizado com ganhos de realimentação projetados para $mh = 80$ kg.

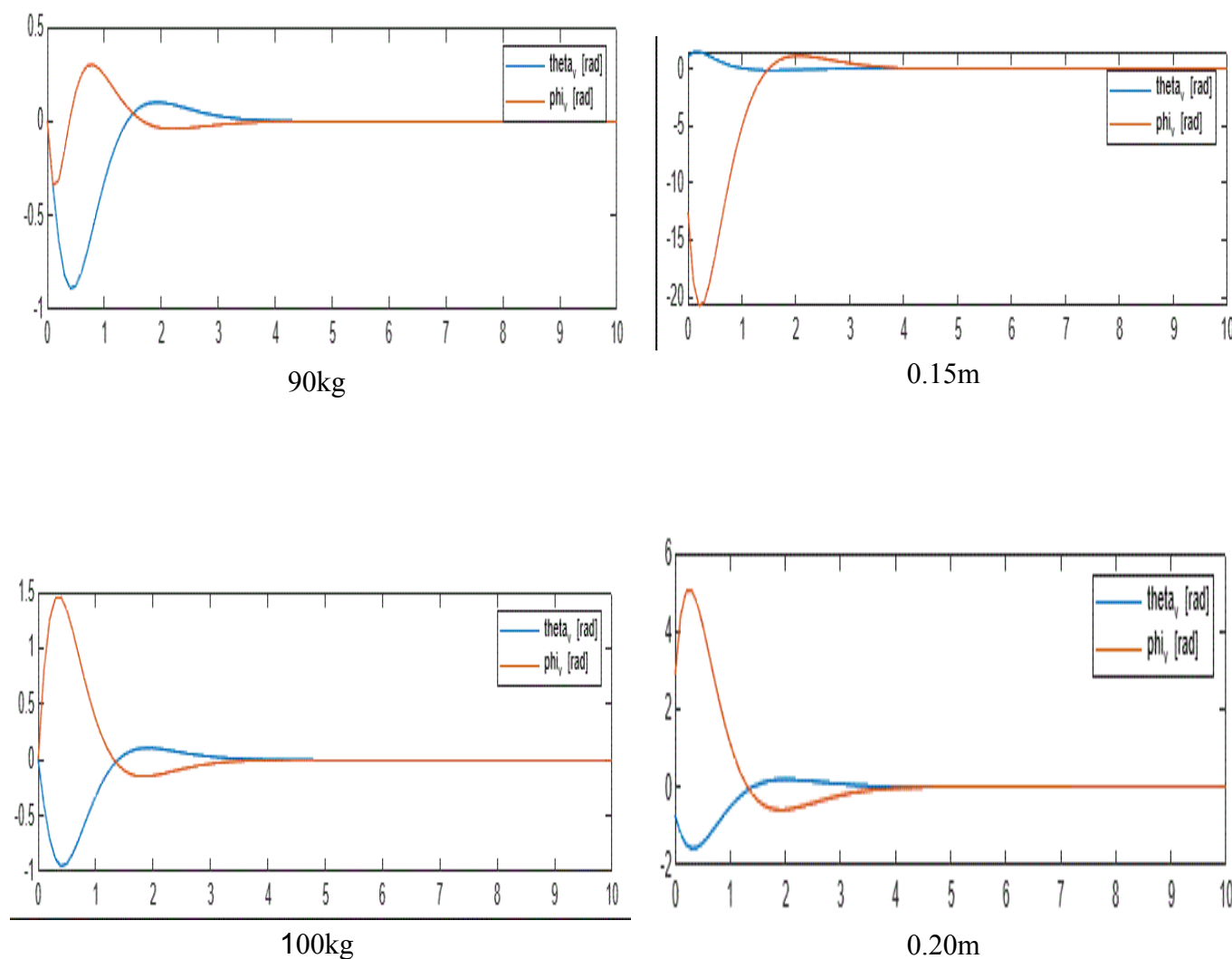




Fonte: Autoria própria.

Tabela 4 – Resultados de velocidade obtidos para simulações com variação dos parâmetros mh e R do sistema linearizado com ganhos de realimentação projetados para $mh = 80$ kg.





Fonte: Autoria própria.

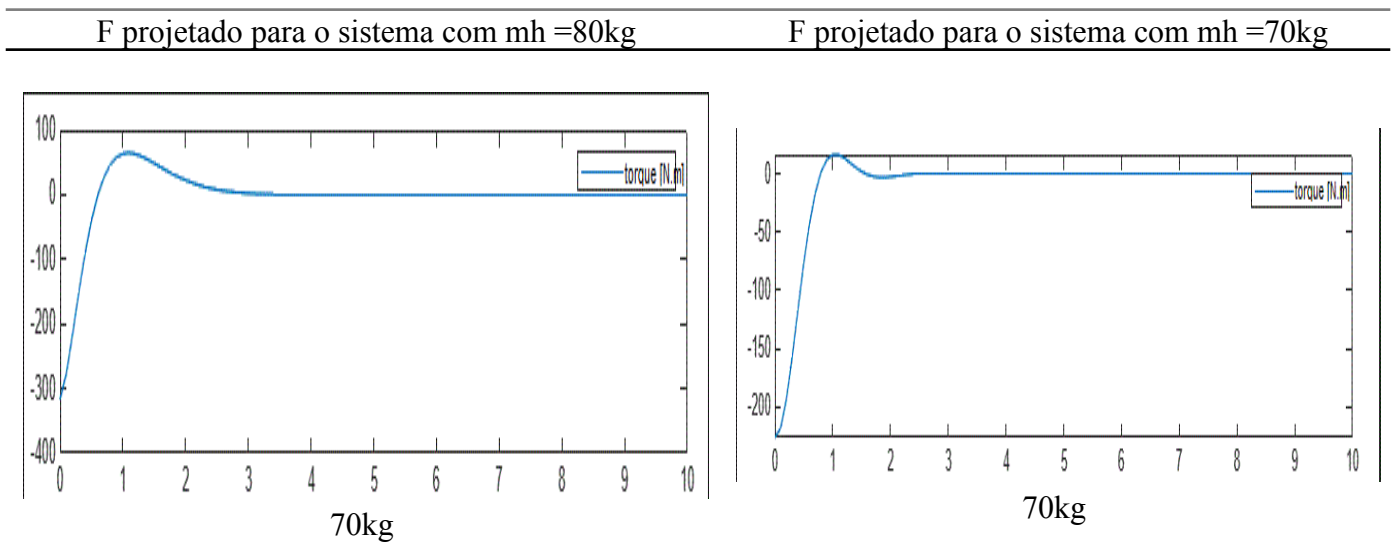
Nos gráficos à esquerda das Tabela 2,3 e 4 foram analisadas as respostas do sistema, variando exclusivamente a massa do indivíduo e, enquanto nos gráficos a direita foi variado somente, o raio do rolo.

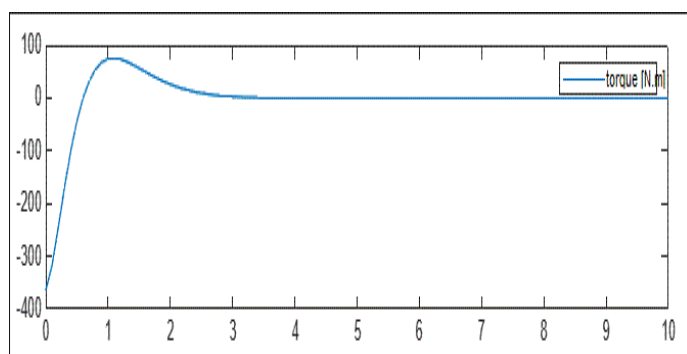
A variação da massa resultou em mudanças significativas na resposta do sistema, afetando tanto os torques aplicados quanto às velocidades angulares do *board*. Conforme esperado, um aumento na massa do indivíduo levou a uma resposta mais lenta, conforme discutido em Spong et al. (2006). Esse efeito ocorre porque uma massa maior resulta em maior inércia, o que, segundo Khalil (2002), impacta diretamente na dinâmica de sistemas biomecânicos controlados.

Pode-se observar também que a variação do tamanho do raio alterou a distribuição da massa do sistema, modificando a relação entre torque e aceleração angular. Valores menores de R tornaram o sistema mais sensível às variações de posição, enquanto valores maiores resultaram em respostas mais amortecidas. Esse comportamento está alinhado com os estudos de Mólnar (2021), que demonstram que pequenas mudanças na geometria da base impactam a capacidade do indivíduo de manter o equilíbrio.

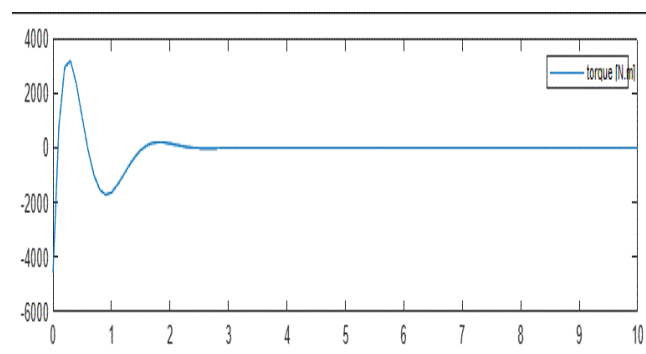
Foi feita também para fins de comparação, um novo cálculo do vetor de ganhos de realimentação de estados, dessa vez considerando o sistema calculado para m_h igual a 70kg. A Tabela 3 apresenta os resultados obtidos nas simulações. Para facilitar a comparação dos resultados, os gráficos obtidos com o vetor de ganhos calculado considerando m_h igual a 80 kg foram repetidos na coluna à esquerda da Tabela 5, 6 e 7.

Tabela 5 – Resultados de torque obtidos para simulações com variação do parâmetro m_h do sistema linearizado com ganhos de realimentação projetados para $m_h = 80$ kg (coluna da esquerda) e $m_h = 70$ kg (coluna da direita).

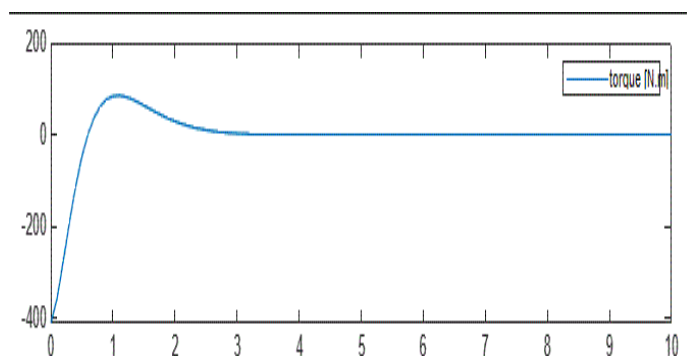




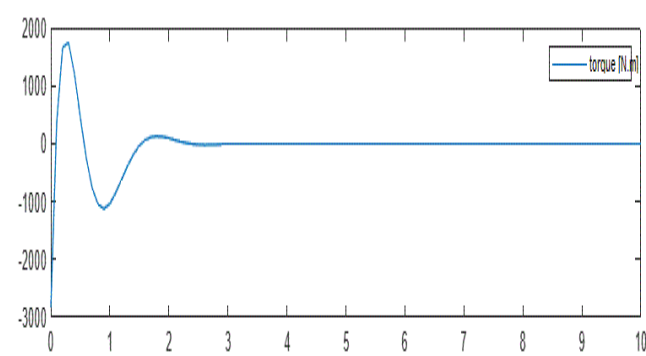
80kg



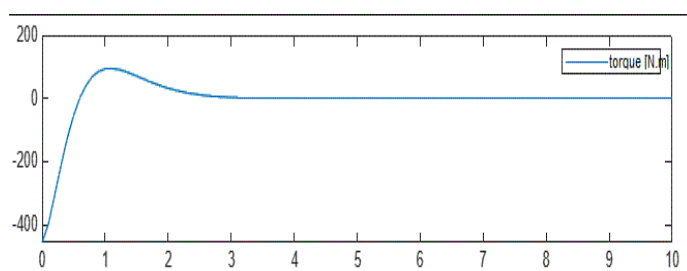
80kg



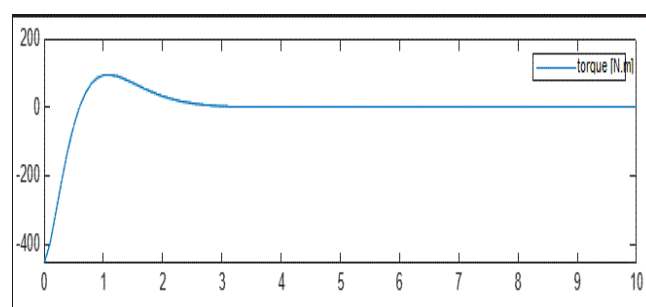
90kg



90kg

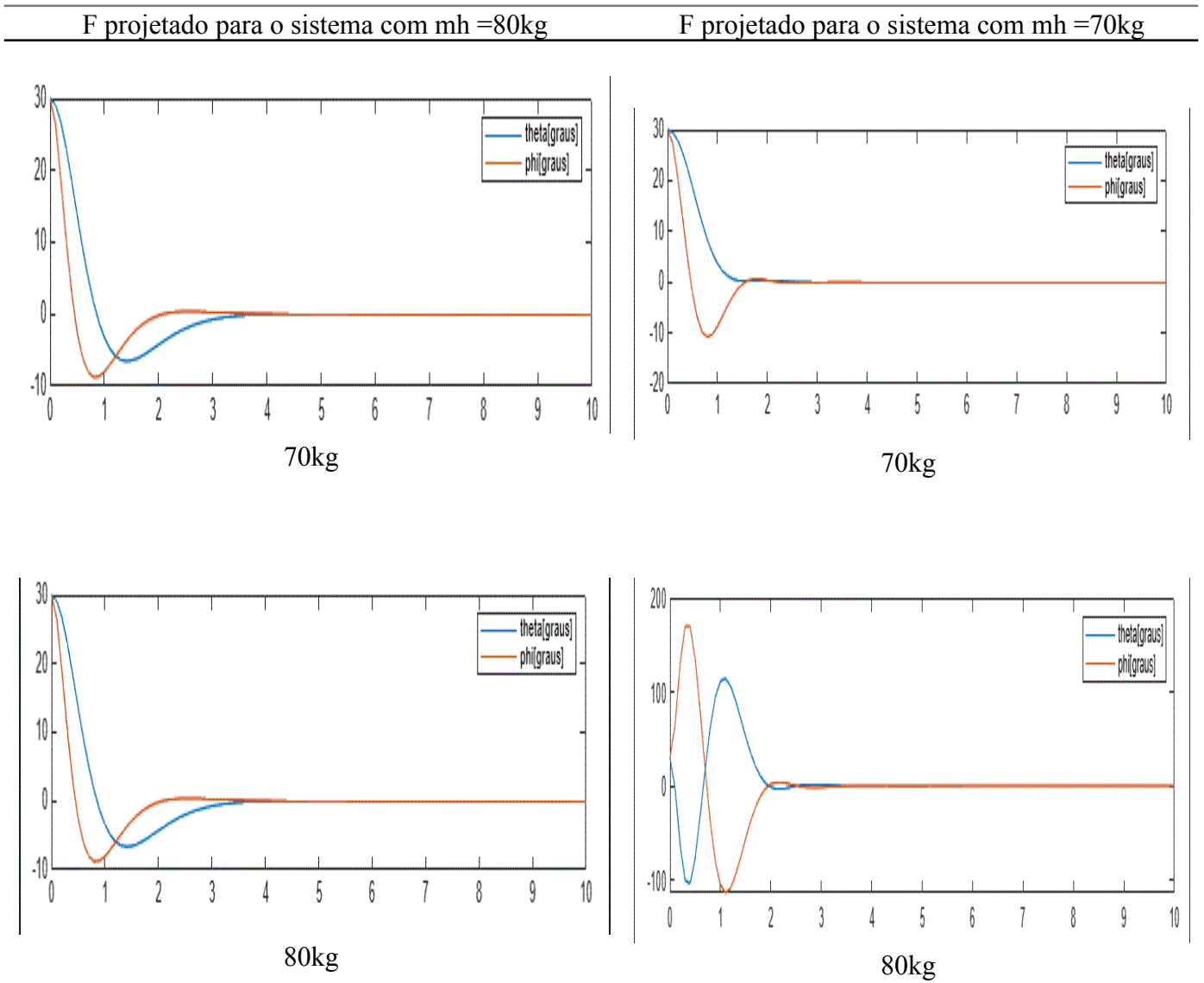


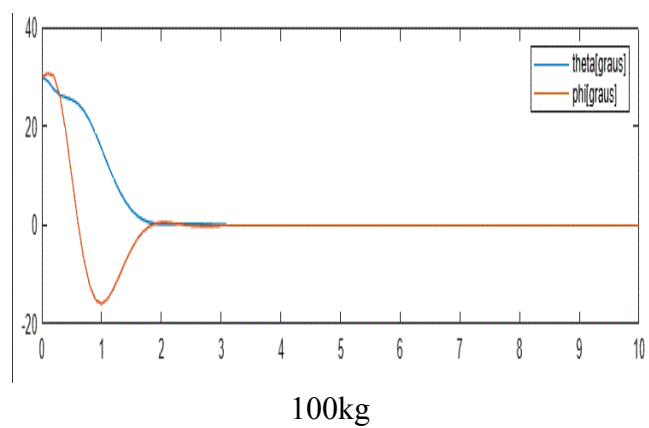
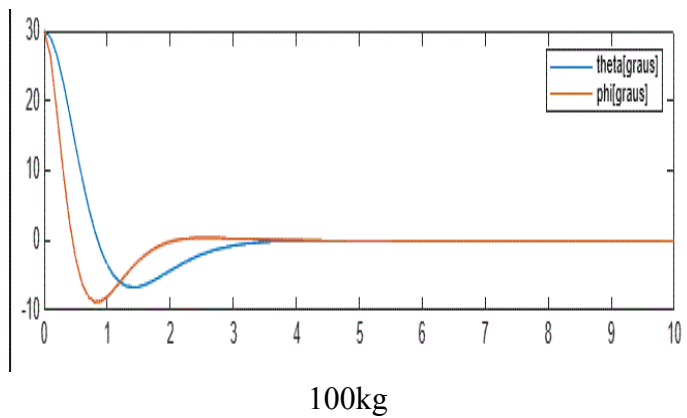
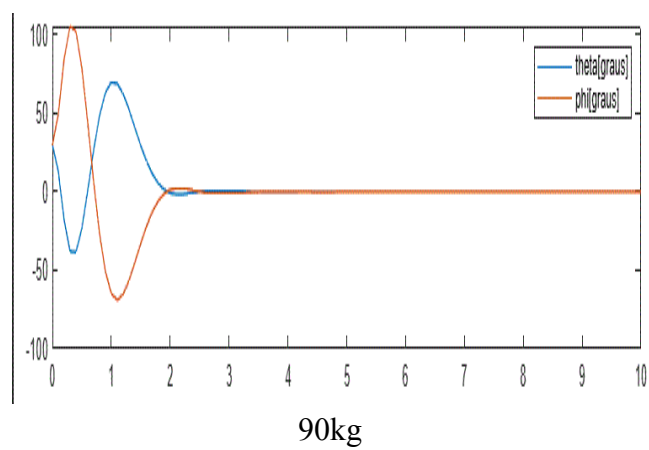
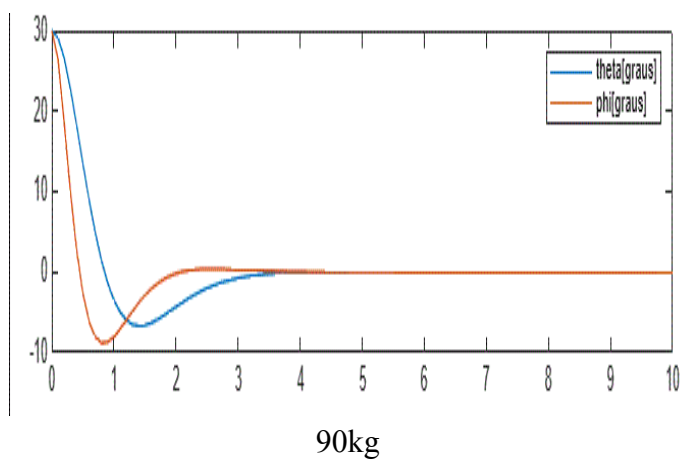
100kg



100kg

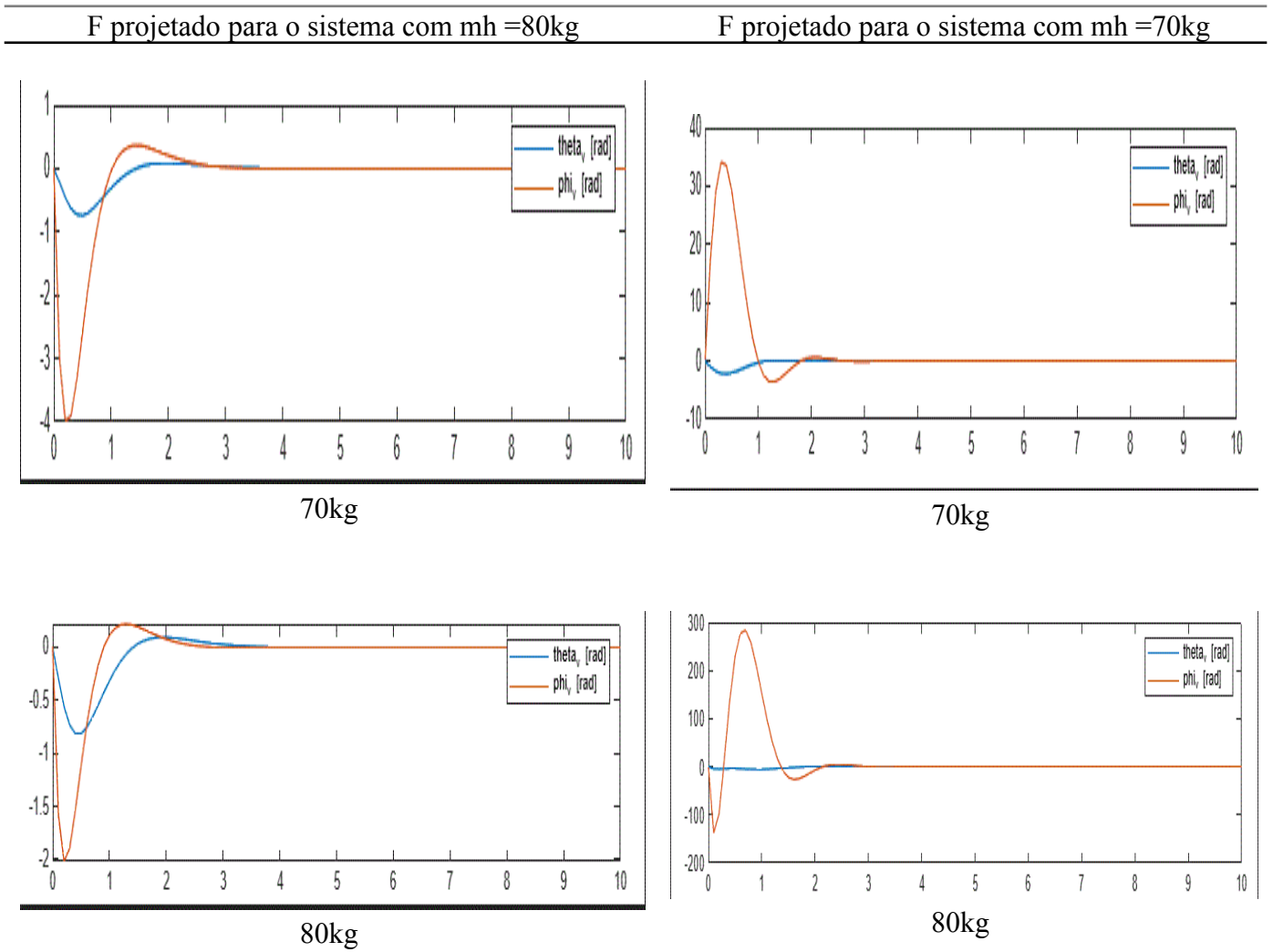
Tabela 6 – Resultados de posição obtidos para simulações com variação do parâmetro m_h do sistema linearizado com ganhos de realimentação projetados para $m_h = 80$ kg (coluna da esquerda) e $m_h = 70$ kg (coluna da direita).

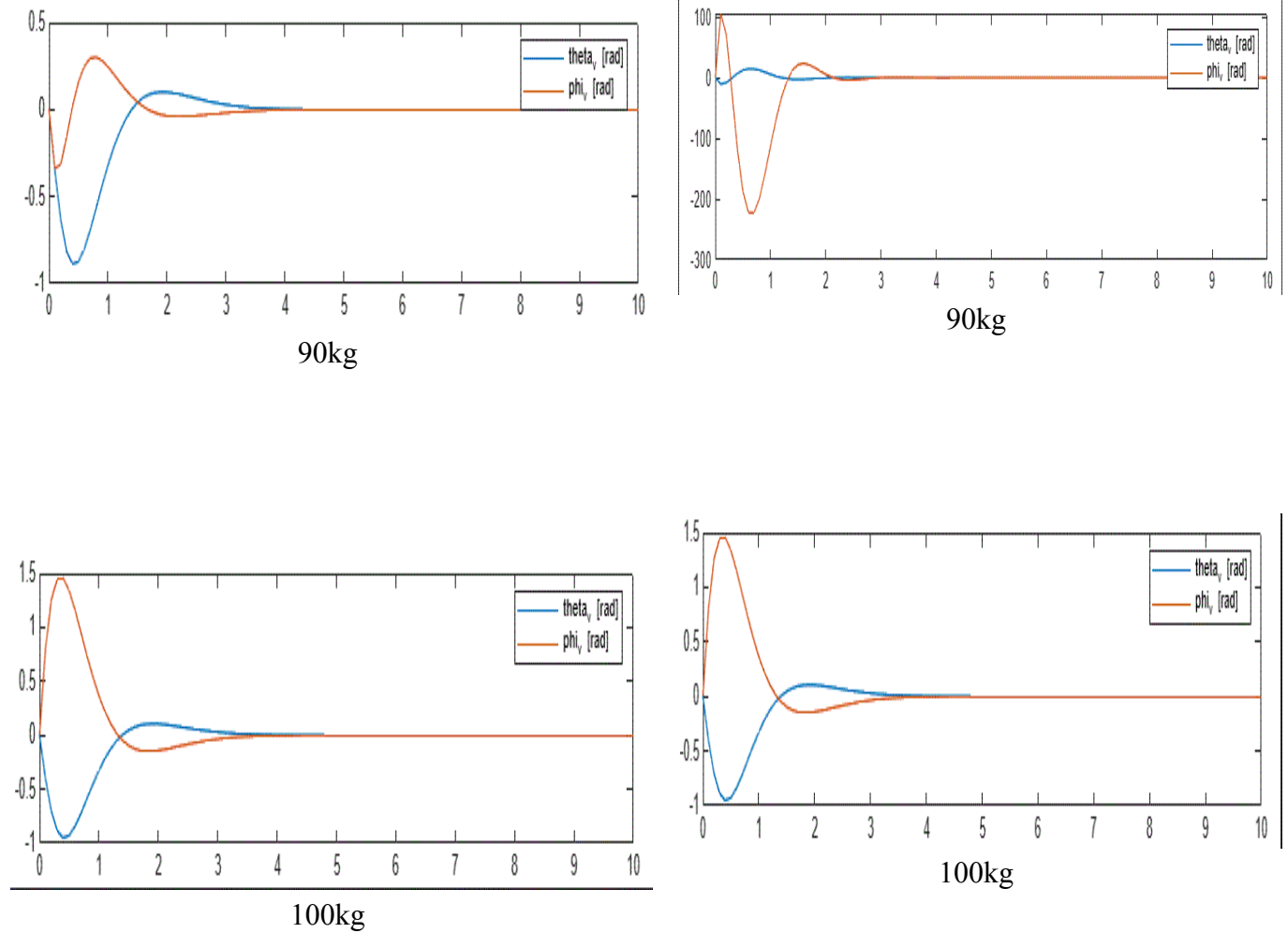




Fonte: Autoria própria.

Tabela 7 – Resultados de velocidade obtidos para simulações com variação do parâmetro m_h do sistema linearizado com ganhos de realimentação projetados para $m_h = 80$ kg (coluna da esquerda) e $m_h = 70$ kg (coluna da direita).





Fonte: Autoria própria.

Nestes resultados, a principal observação foi que a resposta do sistema depende fortemente do ponto em que a linearização foi realizada. Quando os pólos foram realocados considerando M_h igual a 80 kg, os melhores desempenhos foram observados para massas próximas a esse valor.

Para massas significativamente menores ou maiores, a resposta do sistema acabou por apresentar variações, evidenciando que de fato a estabilidade e a eficiência do controle são comprometidas fora da faixa para a qual o controlador foi projetado. Tal qual apontado por Doyle, Francis e Tannenbaum (1992), a robustez do controle multivariável depende fortemente da escolha dos polos, o que reforça a necessidade de um ajuste preciso para diferentes faixas de operação.

Porém, os dados numéricos dos testes acabaram por evidenciar limitações no modelo, no que tange à variação dos parâmetros físicos, como a massa e o momento de inércia. Como discutido por Spong et al. (2006), sistemas biomecânicos apresentam forte dependência de suas condições iniciais, exigindo o refinamento da modelagem para representar com maior precisão as condições reais. Além disso, Khalil (2002) ressalta que a linearização em torno de um ponto de equilíbrio pode não ser suficiente para capturar todas as dinâmicas envolvidas, o que pode explicar uma certa carência de distinção clara entre casos estáveis e instáveis em alguns cenários testados, limitando a confiar em qual variação representa melhor o cenário.

5. CONCLUSÃO

Os resultados obtidos neste estudo demonstram que a modelagem de um indivíduo se equilibrando em um *balance board* utilizando um sistema dinâmico em espaço de estados permite uma análise detalhada da estabilidade e do controle do equilíbrio humano. A técnica de realimentação de estados permitiu obter sucesso para algumas faixas de operação analisadas, sugerindo que a abordagem proposta possa ser aplicada a sistemas de treinamento de equilíbrio e reabilitação motora no futuro, onde pequenas oscilações em torno de um ponto de equilíbrio são desejadas para fortalecer a resposta postural do indivíduo.

Um trabalho semelhante conduzido por Mólnar analisou a estabilidade de indivíduos sobre um *balance board*, considerando a influência da massa corporal e da interação neuromuscular no controle postural. Pode-se relacionar os resultados deste trabalho com a abordagem de Mólnar ao demonstrar que pequenas variações na massa e no momento de inércia afetam diretamente a resposta do sistema, exigindo um ajuste cuidadoso do controlador. E também, a modelagem matemática utilizada neste estudo pode servir como base para futuras investigações experimentais que validem os dados numéricos e aproximem o modelo computacional da realidade física observada em estudos biomecânicos.

Na aplicação prática, este modelo pode ser utilizado como base para o desenvolvimento de simuladores de equilíbrio, auxiliando em estudos de controle postural e no projeto de dispositivos assistivos para reabilitação, como dados comparativos de como uma situação real de equilíbrio viria a ser. No entanto, a faixa operacional segura do controlador deve ser melhor definida, considerando métodos de ajuste adaptativos ou estratégias de controle não lineares para melhorar a robustez do sistema.

Assim, futuras pesquisas podem explorar abordagens mais avançadas para garantir a estabilidade em uma gama mais ampla de condições físicas, além de validar experimentalmente as respostas obtidas numericamente. A integração de sensores para medir parâmetros reais do equilíbrio poderia fornecer dados adicionais para validar e refinar o modelo proposto.

REFERÊNCIAS

CHAGDES, James R.; RIETDYK, Shirley; HADDAD, Jeffrey M.; ZELAZNIK, Howard N.; RAMAN, Arvind. Dynamic stability of a human standing on a balance board. *Journal of Biomechanics*, v. 46, n. 15, p. 2593–2602, 2013.

CHEN, C. T. *Linear System Theory and Design*. New York: Oxford University Press, 1999.

CRUISE, R. A.; WESTRUM, D.; GEDEON, D.; HEITLAGER, B. Modelagem e controle de sistemas dinâmicos. *Journal of Dynamic Systems*, v. 12, n. 3, p. 215-230, 2017.

DOYLE, J. C.; FRANCIS, B. A.; TANNENBAUM, A. R. *Feedback Control Theory*. New York: Macmillan Publishing, 1992.

KAILATH, T. *Linear Systems*. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1980.

KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems*. 3. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002.

LORAM, Ian D.; LAKIE, Martin. Direct measurement of human ankle stiffness during quiet standing: the intrinsic mechanical stiffness is insufficient for stability. *The Journal of Physiology*, v. 545, n. 3, p. 1041–1053, 2002.

MOLNÁR, CSENGE. Human balancing on rolling balance board with adjustable geometry. Budapest University of Technology and Economics Faculty of Mechanical Engineering Department of Applied Mechanics, 2022.

OGATA, K. *Modern Control Engineering*. 5. ed. Prentice Hall, 2010.

SPONG, M. W.; HUTCHINSON, S.; VIDYASAGAR, M. *Robot Modeling and Control*. Hoboken: John Wiley & Sons, 2006.

WINTER, D. A. *Biomechanics and Motor Control of Human Movement*. 4. ed. John Wiley & Sons, 2009.