

Lázaro Ismael Hardy Llins

**Projeto de controlador *gain scheduling* usando
realimentação derivativa via LMI**

Ilha Solteira - SP
2015

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**“Projeto de controlador *gain scheduling* usando
realimentação derivativa via LMI.”**

Lázaro Ismael Hardy Llins

Mestre em Engenharia Elétrica - FEIS / UNESP

Orientador: Prof. Dr. Edvaldo Assunção

Coorientador: Prof. Dr. Emerson Ravazzi Pires da Silva

Dissertação apresentada à Faculdade
de Engenharia do Campus de Ilha Sol-
teira - UNESP para a obtenção do tí-
tulo de Mestre em Engenharia Elétrica.
Especialidade: Automação.

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação.

H268p Llins, Lázaro Ismael Hardy.
Projeto de controlador gain scheduling usando realimentação derivativa via LMI. / Lázaro Ismael Hardy Llins. – Ilha Solteira : [s.n.], 2015
61 f.:il.

Tese (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2015

Orientador: Edvaldo Assunção
Co-orientador: Emerson Ravazzi Pires da Silva
Inclui bibliografia

1. Desigualdades matriciais lineares (LMIs). 2. Control gain scheduled. 3. Lema de finsler.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO: Projeto de Controlador Gain Scheduling usando Realimentação Derivativa

AUTOR: LÁZARO ISMAEL HARDY LLINS

ORIENTADOR: Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO

CO-ORIENTADOR: Prof. Dr. EMERSON RAVAZZI PIRES DA SILVA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica ,
Área: AUTOMAÇÃO, pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO

Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. MARCELO CARVALHO M TEIXEIRA

Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. EDSON ITALO MAINARDI JUNIOR

Departamento de Eletroeletrônica / Instituto Federal Catarinense

Data da realização: 21 de agosto de 2015.

À minha mãe e pai Regla C. e Guillermo

À minha namorada Anabel González

AGRADECIMENTOS

Dedico meus sinceros agradecimentos:

- A Deus, pela paciência e amor incondicional;
- Ao meu orientador, professor Dr. Edvaldo Assunção, pelos ensinamentos, pelo incentivo, pela confiança, paciência e amizade. Penso que esta é a oportunidade ideal para agradecer por tudo aquilo que faz por mim, por tudo o que me ensina, também, por tudo de bom que a sua postura ética sugere a mim e a todos;
- Aos professores Doutores Emersom Ravazzi Pires da Silva, Marcelo C. M. Teixeira, Rodrigo Cardim e Luiz Francisco Sanches Buzachero pelos diálogos construtivos e descontraídos durante este tempo, pelo acompanhamento e pelas sugestões, extremamente valiosas para este trabalho;
- Aos meus amigos e companheiros dos laboratórios LPC : Diogo, Uiliam, Mario, Herbert, Manoel e Alexandre que de forma direta ou indireta me ajudaram;
- A minha mãe e meu pai por sempre me apoiarem no desafio do estudo contínuo.

*“Mas a salvação dos justos vem do SENHOR; Ele é
a sua fortaleza no tempo da angústia”*

(Salmos, 37:39’)

*“Se algum de vocês tem falta de sabedoria, peça-a a
Deus, que a todos dá livremente, de boa vontade; e
lhe será concedida.”*

(Tiago, 1:5-6)

“A sabedoria é filha da experiência.”

Leonardo da Vinci (1452-1519)

RESUMO

Nesta dissertação apresentam-se resultados para a estabilidade de sistemas lineares sujeitos a parâmetros variantes no tempo (do inglês *Linear Parameter Varying* - LPV). De início, apresenta-se um método para o projeto de um controlador *gain scheduled* via desigualdades matriciais lineares (do inglês *Linear Matrix Inequalities* - LMIs), com base na teoria de estabilidade segundo Lyapunov com parâmetro variante e empregando uma realimentação derivativa do vetor de estado. Propõe-se um método para projetar o controlador *gain scheduling* usando realimentação derivativa do vetor de estado, considerando também incertezas paramétricas. Esta nova formulação foi obtida utilizando o Lema de Finsler, o que permitiu encontrar o ganho do controlador sem ter que inverter uma matriz literal.

Palavras-chave: Desigualdades matriciais lineares (LMIs). Control *gain scheduled*. Controle com realimentação derivativa.

ABSTRACT

In this thesis are presented results for the stability of linear time-varying systems (*Linear Parameter Varying* - LPV). At first, it is described a method for designing a gain scheduling controller via linear matrix inequalities (*Linear Matrix Inequalities* - LMIs), based on the stability theory of Lyapunov with time-variant parameter and using state derivative feedback. It is proposed a method to design a gain scheduling controller using state derivative feedback and also considering parametric uncertainties. This new formulation was manipulated using the lemma of Finsler, and allowed to find the control law without having to invert a symbolic matrix.

Keywords: Linear Matrix Inequalities (LMIs). Controller *gain scheduled*. Controller using derivative feedback.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 -	Região γ para alocação dos autovalores.	33
Figura 2 -	Sistema de suspensão ativa Quanser.	47
Figura 3 -	Modelo esquemático do sistema de suspensão ativa.	48
Figura 4 -	Elementos de $K(\alpha(t))$ em função do tempo.	50
Figura 5 -	Função senoidal $\alpha(t)$.	51
Figura 6 -	Resposta transitória prática de malha aberta (0-12s) e de malha fechada (12,01-21s).	51
Figura 7 -	Resposta transitória prática de malha aberta (0-6s) e de malha fechada (6-12,2s) para $\alpha(t)$ com frequência de $0,1Hz$.	52
Figura 8 -	Sinal de controle para $\alpha(t)$ com frequência de $0,1Hz$.	53
Figura 9 -	Resposta transitória prática de malha aberta (0-6s) e de malha fechada (6-12,2s) para $\alpha(t)$ com frequência de $1Hz$.	53
Figura 10 -	Sinal de controle para $\alpha(t)$ com frequência de $1Hz$.	53
Figura 11 -	Localização dos autovalores do sistema.	55

ABREVIATURAS E ACRÔNIMOS

LMI *Linear Matrix Inequalities*

LPV *Linear Parameter Varying*

LTI *Linear Time Invariant*

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	CONTROLE <i>GAIN SCHEDULED</i>	15
2.1	Gain scheduling para sistemas lineares contínuos com parâmetro variante no tempo	15
2.2	Projeto do controlador com condição de estabilidade	17
2.2.1	<i>Conclusões parciais</i>	20
3	CONTROLE USANDO REALIMENTAÇÃO DERIVATIVA	22
3.1	Realimentação derivativa para sistemas lineares com parâmetro variante no tempo	22
3.2	Projeto do controlador com condição de estabilidade	23
3.2.1	<i>Conclusões parciais</i>	26
4	PROJETO DE CONTROLADOR <i>GAIN SCHEDULING</i> USANDO REALIMENTAÇÃO DERIVATIVA	27
4.1	Formulação LMI com Lema de Finsler	27
4.1.1	<i>Projeto do controlador com condição de estabilidade</i>	28
4.1.2	<i>Projeto do controlador com condição de estabilidade e taxa de decaimento</i>	33
4.1.3	<i>Projeto do controlador com condição de estabilidade e incertezas politópicas</i>	35
4.1.4	<i>Projeto do controlador com condição de estabilidade para incertezas politópicas e taxa de decaimento</i>	44
4.1.5	<i>Relaxação do conjunto para soluções menos conservadoras</i>	45
4.1.6	<i>Conclusões parciais</i>	46
5	IMPLEMENTAÇÃO PRÁTICA	47

5.1	Sistema de suspensão ativa de um veículo	47
5.1.1	<i>Conclusões parciais</i>	56
6	CONCLUSÕES	57
6.1	Sugestões para pesquisas futuras	57
	Referências Bibliográficas	58

1 INTRODUÇÃO

Desde o surgimento da teoria de controle de sistemas dinâmicos, a realimentação de estados foi um elemento fundamental para o desenvolvimento de múltiplos trabalhos nesta área. Muito desses trabalhos da literatura expressam como a realimentação de estados é importante para a teoria de controle, principalmente a moderna (OGATA, 2003), (DORF; BISHOP, 2001), (CHEN, 1999). As técnicas mais usadas para realimentar os sistemas são a realimentação da saída e a de estados. O uso de sensores acelerométricos permitiu abrir um caminho para o estudo da realimentação derivativa de estado, devido à fácil reconstrução da derivada dos sinais que os próprios sinais. O uso da realimentação da derivada do vetor de estado (realimentação derivativa) em sistemas lineares tem sido explorado nos últimos anos. Alguns pesquisadores procuraram desenvolver métodos similares aos já existentes para a realimentação de estados, por exemplo (ABDELAZIZ; VALASEK, 2004) desenvolveram uma fórmula similar à de Ackerman generalizada para sistemas lineares (SISO) sob realimentação derivativa. (FARIA; ASSUNÇÃO; TEIXEIRA, 2009) apresentaram uma nova formulação para a estabilização de sistemas multivariáveis lineares sob realimentação da derivada de estados. (MOREIRA et al., 2010) fizeram um análise em sistemas lineares de observabilidade e a estabilidade através da derivada do vetor de estados e um estudo sobre a rejeição de distúrbios com realimentação derivativa. (LEWIS; SYRMOS, 1991) apresentam uma teoria geométrica para sistemas dinâmicos com realimentação derivativa sobre sistemas singulares. (CARDIM et al., 2007) apresentam uma teoria para projetar o controlador usando realimentação derivativa a partir da projeção da realimentação de estados do próprio sistema. (ARAÚJO; CASTRO; SANTOS, 2009) realizaram uma análise comparativa entre a realimentação de estados e a realimentação derivativa em sistemas lineares invariantes no tempo. (SILVA et al., 2012) apresentam a teoria para o projeto de um controlador menos conservativo para sistemas lineares com incertezas politópicas via realimentação derivativa garantindo a estabilidade e robustez do sistema. Uma abordagem sobre a estabilidade e robustez com realimentação derivativa, incluindo a fragilidade, pode ser vista no trabalho de (MICHIELS et al., 2009). Outros trabalhos que relatam o projeto de controladores para sistemas mecânicos em sistemas

amortecedores de vibrações utilizando realimentação derivativa podem ser encontrados em (ABDELAZIZ; VALASEK, 2005b, 2005c), (ABDELAZIZ, 2007, 2009, 2010). Ainda, na literatura especializada, pode-se encontrar trabalhos que relatam o uso da realimentação derivativa em sistemas lineares, não lineares, lineares e não lineares sujeitos a incertezas na planta entre outros, utilizando técnicas baseadas em desigualdades matriciais lineares (LMI, acrônimo inglês para Linear Matrix Inequalities).

Nos últimos anos, várias condições foram propostas para avaliar a estabilidade robusta de um sistema linear com parâmetro variante no tempo (CHILALI; GAHINET; APKARIAN, 1999). *Gain Scheduled* tem motivado vários estudos na área da engenharia de controle. Esta estratégia de controle é muito popular para sistemas lineares e não lineares aplicando-se em múltiplos campos, como aeronáutica, militar, civil, etc. As origens dos controladores *gain scheduling* foram nos anos 60 com a chamada teoria clássica *gain scheduling*, baseada na linearização de um sistema sobre seus pontos de equilíbrio (ASTROM; WITTENMARK, 2008), (SHAMMA; ATHANS, 1990), (HYDE; GLOVER, 1993). A eficiência do *gain scheduling* clássico depende das características dinâmicas do sistema não linear. Esses podem ser descritos como uma associação de sistemas lineares, compostas da linearizações da planta correspondendo aos controladores lineares locais (LEITH; LEITHEAD, 2000). O controlador é projetado levando em conta somente as dinâmicas da planta localmente em torno de um ponto de equilíbrio (LEITH; LEITHEAD, 2000). Os controladores clássicos *gain scheduling* foram muito aplicados mas, apresentaram limitações. O fato de trabalhar somente na região da vizinhança dos pontos de equilíbrio operante, representava uma deficiência da técnica. Porém, os controladores *gain scheduling* clássicos são requeridos para operar durante operações longe do ponto do equilíbrio. Pode-se projetar o controlador utilizando métodos baseados na norma $\mathcal{L}_2$ garantindo robustez, estabilidade nominal do sistema, melhorando o projeto *gain scheduling* (SHAMMA; ATHANS, 1990). *Gain scheduling fuzzy* supera as desvantagens de *gain scheduling* clássicos, considerando a restrição de estabilidade e de desempenho tanto no comportamento local quanto no global. As técnicas *gain scheduling fuzzy* podem envolver *gain scheduling* clássicos assim como as técnicas (*Linear Parameter Varying* - LPV) (NAUS, 2009). Uma importante consideração no projeto de um controlador linear para um sistema de malha fechada com incerteza é a robustez e desempenho. Entre várias, existem dois tipos de incertezas descritas a seguir:

1. Incerteza dinâmica, que corresponde às dinâmicas da planta (comportamento de alta frequência, não linearidade, etc).
2. Parâmetros constantes incertos, onde se tem imprecisão sobre o valor do parâmetro

físico ou variações desse valor durante a operação.

Quando as incertezas são constantes ou de variações extremamente lentas, o problema pode ser resolvido usando técnicas de controle robusto (*Linear Time Invariant* - LTI) (APKARAIN; GAHINET; BECKER, 1995). Algumas vezes, pode-se ter consideráveis variações dos parâmetros, nesse caso, um controlador robusto pode ser muito conservativo e a estabilização da planta por um controlador projetado supondo a planta LTI pode não ser suficiente. Considerando que as variações dos parâmetros podem ser medidas durante a operação do sistema, a estratégia *gain scheduling* pode proporcionar soluções mais eficientes. Os controladores *gain scheduling* estão em função de um parâmetro variável da planta. Os controladores *gain scheduling* são projetados em função de um parâmetro variável da planta, sendo que os ganhos são ajustados de acordo com determinadas variações na dinâmica do sistema. Por esse motivo, em muitas aplicações desse tipo os controladores *gain scheduling* são mais factíveis que os controladores robustos. A combinação de ambas técnicas tem sido objeto de estudos. Pode-se separar esse parâmetro incerto em dois, de modo que um parâmetro esteja sujeito às variações da dinâmica da planta para o qual o controlador se adapte a essas variações e o controlador robusto para as incertezas constantes ou com variações lentas (BIANCHI; MANTZ, 2004). O objetivo deste trabalho é projetar um controlador *gain scheduling* na forma padrão da equação de estados com realimentação derivativa projetada via LMI, levando em consideração parâmetros variantes ao longo do tempo. A estrutura do texto dessa dissertação é organizada da seguinte forma:

- Capítulo 2. Apresenta a teoria da estratégia de controle *gain scheduling* considerando o parâmetro variante no tempo.
- Capítulo 3. Mostra a teoria da estratégia de controle com realimentação da derivada dos estados .
- Capítulo 4. Denota a teoria proposta nesse trabalho para projetar o controlador *gain scheduling* usando realimentação derivativa do vetor de estado via LMI.
- Capítulo 5. Expõe resultados práticos do projeto do controlador proposto, aplicado a um sistema de suspensão ativa, para ilustrar a eficiência da nova técnica.
- Capítulo 6. Aponta as conclusões e também algumas sugestões para pesquisas futuras. Após, uma lista das bibliografias relacionadas diretamente e indiretamente com o trabalho.

2 CONTROLE *GAIN SCHEDULED*

Neste capítulo apresenta-se a teoria sobre a estratégia de controle *gain scheduling* para sistemas lineares contínuos com parâmetros variantes no tempo. Projeta-se o controlador utilizando a realimentação de estados garantindo a estabilidade do sistema. Os métodos de projeto encontrados na literatura utilizam uma matriz de Lyapunov dependente do parâmetro variante no tempo. A metodologia descrita a seguir é mais restritiva pois utiliza uma matriz de Lyapunov única. Isso se fez necessário para viabilizar o projeto do controlador *gain scheduled* usando realimentação derivativa, proposto no Capítulo 4 desta dissertação.

2.1 *Gain scheduling* para sistemas lineares contínuos com parâmetro variante no tempo

Considere o sistema linear contínuo com parâmetro variante no tempo, $\alpha(t)$ mensurável: $\dot{x}(t) = A(\alpha(t))x(t) + B(\alpha(t))u(t)$, (1) sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $A(\alpha(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B(\alpha(t)) \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Suponha que as matrizes $A(\alpha(t))$ e $B(\alpha(t))$ pertençam ao politopo D dado por:

$$D = (A, B)(\alpha(t)) : (A, B)(\alpha(t)) = \sum_{j=1}^N \alpha_j(t)(A_j, B_j); \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) = 1; \alpha_j(t) \geq 0, \quad (2)$$

$$j = 1, 2, \dots, N.$$

Segundo (MONTAGNER; PERES, 2004), (SOUZA; TROFINO, 2005), existe um conjunto de matrizes $K(\alpha(t)) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de modo que ao realimentar o sistema (1) com as variáveis dos estados, na seguinte forma:

$$u(t) = -K(\alpha(t))x(t), \quad (3)$$

sendo

$$K(\alpha(t)) = \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) K_j, \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) = 1; \alpha(t) \geq 0, \quad (4)$$

proporcionando o sistema de malha fechada estável a partir da seguinte equação:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha(t))x(t) - B(\alpha(t))K(\alpha(t))x(t), \quad (5)$$

$$\dot{x}(t) = [A(\alpha(t)) - B(\alpha(t))K(\alpha(t))]x(t). \quad (6)$$

Usando a função quadrática de Lyapunov obtém-se um conjunto de matrizes $K(\alpha(t))$ que garante a estabilidade do sistema (MONTAGNER; PERES, 2004).

Teorema 1. *Supondo que $|\dot{\alpha}(t)| < \rho_i$, considerando o limite $\rho_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, N-1$, se existirem matrizes simétricas positivas definidas $W_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $Z_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$ com $j=1, 2, \dots, N$, tais que:*

$$W_j A_j^T + A_j W_j - Z_j^T B_j^T - B_j Z_j + \sum_{i=1}^{N-1} \pm \rho_i (W_i - W_N) < 0, \quad (7)$$

$$j = 1, 2, \dots, N$$

$$W_j A_k^T + A_k W_j + W_k A_j^T + A_j W_k - Z_k^T B_j^T - Z_j^T B_k^T - B_k Z_j - B_j Z_k + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \pm \rho_i (W_i - W_N) < 0, \quad (8)$$

$$j = 1, 2, \dots, N-1; k = j+1, \dots, N$$

então a lei de controle através da realimentação de estado com parâmetro variante no tempo,

$$u(t) = -K(\alpha(t))x(t), \quad (9)$$

sendo

$$K(\alpha(t)) = Z(\alpha(t))W(\alpha(t))^{-1}, \quad (10)$$

e

$$\begin{aligned} Z(\alpha(t)) &= \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) Z_j; \alpha_j(t) \geq 0, \\ W(\alpha(t)) &= \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) W_j; \alpha_j(t) \geq 0, \\ \sum_{j=1}^N \alpha_j &= 1; j = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (11)$$

garante a estabilidade à malha fechada do sistema (1) e (2) sob os limites ρ_i por meio da matriz Lyapunov de parâmetro dependente $P(\alpha(t)) = W(\alpha(t))^{-1}$.

Prova: Vide (MONTAGNER; PERES, 2004).

Pode-se notar que o projeto do controlador depende da inversão da matriz $W(\alpha(t))$ em (10) que é função dos parâmetros $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\dots$, $\alpha_N(t)$. Nesse caso é necessária a inversão de uma matriz literal, cuja dimensão é igual à quantidade de estados da planta e quanto maior a quantidade de estados, maior é a complexidade de realizar essa inversão matricial.

Na próxima seção são propostas novas condições LMIs para o projeto do controlador *gain scheduling* usando realimentação dos estados que não necessita de uma inversão de matriz literal.

2.2 Projeto do controlador com condição de estabilidade

Para a obtenção dos resultados propostos no Capítulo 4 dessa dissertação, foi realizada inicialmente a análise de estabilidade do sistema (6) verificando a existência de uma matriz de Lyapunov única. O objetivo é procurar por uma matriz simétrica $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ verificando as seguintes desigualdades:

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t) > 0, \forall x(t) \neq 0, \quad (12)$$

$$\dot{V}(x(t)) < 0, \forall x(t) \neq 0. \quad (13)$$

O seguinte teorema, proposto nesse trabalho, garante condições de existência da matriz P satisfazendo (12) e (13). Esse teorema é baseado em (MONTAGNER; PERES, 2004), com restrição de uma P única.

Teorema 2. *Se existirem uma matriz simétrica positiva definida $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $Z_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$ com $j=1,2,\dots,N$, tais que:*

$$WA_j^T + A_jW - Z_j^T B_j^T - B_j Z_j < 0, \quad (14)$$

$$j = 1, 2, \dots, N$$

$$WA_i^T + A_iW + WA_j^T + A_jW - Z_i^T B_j^T - Z_j^T B_i^T - B_i Z_j - B_j Z_i < 0, \quad (15)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1; j = i+1, \dots, N$$

então a lei de controle através da realimentação de estado com parâmetro variante no tempo,

$$u(t) = -K(\alpha(t))x(t), \quad (16)$$

sendo

$$K(\alpha(t)) = Z(\alpha(t))W^{-1}, \quad (17)$$

e

$$\begin{aligned} Z(\alpha(t)) &= \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) Z_j; \alpha_j(t) \geq 0, \\ \sum_{j=1}^N \alpha_j &= 1; j = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (18)$$

garante a estabilidade à malha fechada do sistema (1) e (2), por meio da matriz positiva definida $P = W^{-1}$.

Prova. Multiplicando (14) por $\alpha_j^2(t) > 0$ e somando em j , de $j = 1$ até $j = N$, segue que

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) W A_j^T + \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) A_j W - \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) Z_j^T B_j^T - \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) B_j Z_j < 0. \quad (19)$$

Multiplicando (15) por $\alpha_i(t)\alpha_j(t)$ e somando em i , de $i = 1$ até $i = N - 1$ e em j , de $j = i + 1$ até $j = N$, segue que

$$\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(W A_i^T + W A_j^T + A_i W + A_j W - Z_i^T B_j^T - B_i Z_j - Z_j^T B_i^T - B_j Z_i) < 0. \quad (20)$$

Somando (19) e (20)

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) W A_j^T + \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) A_j W - \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) Z_j^T B_j^T - \sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) B_j Z_j \\ &+ \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)(W A_i^T + W A_j^T + A_i W + A_j W \\ &- Z_i^T B_j^T - B_i Z_j - Z_j^T B_i^T - B_j Z_i) < 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Genericamente sabemos que:

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j H_i R_j = \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 H_j R_j + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (H_i R_j + H_j R_i).$$

Então, lembrando que $\sum_{i=1}^N \alpha_i(t) = 1$ e $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) W A_j^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) (W A_i^T + W A_j^T) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) W A_j^T = \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) W A_j^T.$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) A_j W + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) (A_i W + A_j W) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) A_j W = \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) A_j W.$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) Z_j^T B_j^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) (Z_i^T B_j^T + Z_j^T B_i^T) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) Z_i^T B_j^T.$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) B_j Z_j + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) (B_i Z_j + B_j Z_i) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) B_i Z_j.$$

Logo, (21) torna-se:

$$W \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j(t) A_j^T \right) + \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j(t) A_j \right) W - \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) Z_i^T \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) B_j^T - \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) B_i \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) Z_j < 0. \quad (22)$$

consequentemente:

$$W A^T(\alpha(t)) + A(\alpha(t)) W - Z^T(\alpha(t)) B^T(\alpha(t)) - B(\alpha(t)) Z(\alpha(t)) < 0, \quad (23)$$

e relembrando que $Z(\alpha(t)) = K(\alpha(t))W$, então:

$$WA^T(\alpha(t)) + A(\alpha(t))W - WK^T(\alpha(t))B^T(\alpha(t)) - B(\alpha(t))K(\alpha(t))W < 0. \quad (24)$$

Agrupando os termos semelhantes e deixando em evidência W à direita e à esquerda, a inequação fica,

$$W(A(\alpha(t)) - B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^T + (A(\alpha(t)) - B(\alpha(t))K(\alpha(t)))W < 0, \quad (25)$$

como $P^{-1} = W$, multiplicamos P à direita e esquerda, temos

$$(A(\alpha(t)) - B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^T P + P(A(\alpha(t)) - B(\alpha(t))K(\alpha(t))) < 0. \quad (26)$$

Multiplicando por $x^T(t)$ à esquerda e $x(t)$ à direita, fica

$$x^T(t)(A(\alpha(t)) - B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^T Px(t) + x^T(t)P(A(\alpha(t)) - B(\alpha(t))K(\alpha(t)))x(t) < 0. \quad (27)$$

Logo, substituindo (6) em (27) obtém-se a função derivada da equação (12) que deve ser menor que zero, para $x(t) \neq 0$. O qual fica demonstrado o teorema pois:

$$\dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) < 0, \quad (28)$$

$$x^T(t)Px(t) > 0. \quad (29)$$

□

2.2.1 Conclusões parciais

Note que nessa proposta, o projeto do controlador $K(\alpha(t))$ dado por (17) utiliza a inversão da matriz numérica W , evitando-se assim a inversão de matriz literal como em (MONTAGNER; PERES, 2004). Uma limitação dessa proposta é que a função de Lyapunov foi considerada com uma matriz P fixa, ocasionando condições mais conservadoras. Trabalhos futuros poderão abordar matriz de Lyapunov dependente de $\alpha(t)$ sem a necessidade da inverter uma matriz literal para se obter o controlador.

O objetivo principal desse trabalho é o projeto do controlador *gain scheduling* usando a realimentação da derivada dos estados. O próximo capítulo aborda a metodologia existente na literatura sobre realimentação derivativa. Contudo essa teoria é apresentada no próximo capítulo supondo que a planta tenha parâmetros dependentes do tempo, o que ainda não foi feito na literatura, segundo conhecimento do autor.

3 CONTROLE USANDO REALIMENTAÇÃO DERIVATIVA

Neste capítulo, apresenta-se a teoria da realimentação derivativa dos estados para sistemas lineares com parâmetros variantes no tempo. O projeto de controlador usando a derivada dos estados é implementado aqui pelo método de Lyapunov. A metodologia apresentada neste capítulo utiliza uma matriz de Lyapunov única. Esta teoria apresentada será de utilidade para o próximo capítulo para projetar o controlador *gain scheduled*.

Neste capítulo, será útil o seguinte resultado de operação elementar entre matrizes.

Lema 3.1. *Dada a matriz $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ não simétrica ($M \neq M^T$) tem-se*

$$M + M^T < 0 \implies M < 0.$$

Vide (FARIA, 2005).

3.1 Realimentação derivativa para sistemas lineares com parâmetro variante no tempo

Considere o sistema linear contínuo com parâmetro variante no tempo (1), cujo os elementos pertencem ao politopo (2). Segundo (DUAN G. R.; IRWIN, 1999) e (GARCIA-PLANAS, 2003.) pode-se projetar uma matriz constante $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de modo que ao realimentar (1) com a derivada dos estados,

$$u(t) = -K_d \dot{x}(t), \tag{30}$$

o sistema de malha fechada fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\alpha(t))x(t) - B(\alpha(t))K_d\dot{x}(t), \\ \dot{x}(t) &= (I + B(\alpha(t))K_d)^{-1}A(\alpha(t))x(t),\end{aligned}\tag{31}$$

sendo a matriz $(I + B(\alpha(t))K_d)$ invertível. Se $\det(A(\alpha(t))) \neq 0$, ou seja não tem autovaleores iguais à zero e o sistema seja completamente controlável, então é possível garantir a estabilidade assintótica do sistema (31) usando uma matriz K_d apropriada (ABDELAZIZ; VALASEK, 2004).

3.2 Projeto do controlador com condição de estabilidade

O estudo da estabilidade de (31) é realizado verificando a existência de uma função de Lyapunov. Como o sistema (31) é linear, então, o objetivo é procurar uma matriz simétrica $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ que seja positiva definida que satisfaça a teoria de estabilidade segundo Lyapunov. O seguinte teorema, proposto nesse trabalho, verifica as condições da existência da matriz P satisfazendo as condições (12) e (13). Esse teorema é baseado em (FARIA, 2005).

Teorema 3. *Suponha que o sistema (1) não tenha polos na origem ($\det(A(\alpha(t))) \neq 0$). O sistema (31) é assintoticamente estável se existirem, uma matriz simétrica positiva definida $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tais que:*

$$WA_i^T + A_iW + B_iZA_i^T + A_iZ^TB_i^T < 0 \tag{32}$$

$$i=1,2,\dots,N.$$

$$WA_i^T + WA_j^T + A_iW + A_jW + B_iZA_j^T + B_jZA_i^T + A_iZ^TB_j^T + A_jZ^TB_i^T < 0 \tag{33}$$

$$i=1,2,\dots,N-1 \text{ e } j=i+1,2,\dots,N.$$

Então a lei de controle de realimentação da derivada dos estados

$$u(t) = -K_d\dot{x}(t),$$

sendo

$$K_d = ZW^{-1}, \tag{34}$$

garante a estabilidade à malha fechada do sistema (1), (2) por meio da matriz positiva definida $P = W^{-1}$, dado em (32) e (33).

Prova. Multiplicando (32) por $\alpha_i^2(t) > 0$ e somando em i , de $i = 1$ até $i = N$, segue que

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) W A_i^T + \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) A_i W + \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) B_i Z A_i^T + \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) A_i Z^T B_i^T < 0. \quad (35)$$

Multiplicando (33) por $\alpha_i(t)\alpha_j(t)$ e somando em i , de $i = 1$ até $i = N - 1$ e em j , de $j = i + 1$ até $j = N$, segue que

$$\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t) (W A_i^T + W A_j^T + A_i W + A_j W + B_i Z A_j^T + B_j Z A_i^T + A_i Z^T B_j^T + A_j Z^T B_i^T) < 0. \quad (36)$$

Somando (35) e (36)

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) W A_i^T + \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) A_i W + \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) B_i Z A_i^T + \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) A_i Z^T B_i^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t) \\ & (W A_i^T + W A_j^T + A_i W + A_j W + B_i Z A_j^T + B_j Z A_i^T + A_i Z^T B_j^T + A_j Z^T B_i^T) < 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Genericamente sabemos que:

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j H_i R_j = \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 H_j R_j + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (H_i R_j + H_j R_i).$$

Então, lembrando que $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$ e $\sum_{j=1}^N \alpha_j(t) = 1$:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) A_j W + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t) (A_i W + A_j W) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) A_i W = \sum_{i=1}^N \alpha_j(t) A_i W.$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) W A_j^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t) (W A_i^T + W A_j^T) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) W A_j^T = \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) W A_j^T.$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) B_j Z A_j^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) (B_i Z A_j^T + B_j Z A_i^T) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) B_i Z A_j^T.$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2(t) A_j Z^T B_j^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) (A_i Z^T B_j^T + A_j Z^T B_i^T) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) A_i Z^T B_j^T.$$

Logo, (37) torna-se

$$W \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) A_j^T + \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) A_i W + \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) B_i Z \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) A_j^T + \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) A_i Z^T \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) B_j^T < 0, \quad (38)$$

$$W A^T(\alpha(t)) + A(\alpha(t)) W + B(\alpha(t)) Z A^T(\alpha(t)) + A(\alpha(t)) Z^T B^T(\alpha(t)) < 0, \quad (39)$$

como $Z = K_d W$ substitui-se em (39), tem-se

$$W A^T(\alpha(t)) + A(\alpha(t)) W + B(\alpha(t)) K_d W A^T(\alpha(t)) + A(\alpha(t)) W K_d^T B^T(\alpha(t)) < 0. \quad (40)$$

Substituindo $W = P^{-1}$ e deixando em evidência $A(\alpha(t)) P^{-1}$ à esquerda e $P^{-1} A^T(\alpha(t))$ à direita, obtém-se

$$(I + B(\alpha(t)) K_d) P^{-1} A^T(\alpha(t)) + A(\alpha(t)) P^{-1} (I + B(\alpha(t)) K_d)^T < 0. \quad (41)$$

Aplicando o Lema 3.1 em (41) chega-se em

$$(I + B(\alpha(t)) K_d) P^{-1} A^T(\alpha(t)) < 0,$$

conclui-se que $(I + B(\alpha(t)) K_d)$ é invertível, sendo $\det(A^T(\alpha(t))) \neq 0$ (satisfazendo as condições da hipótese). Agora, multiplicando (41) à esquerda por $P(I + B(\alpha(t)) K_d)^{-1}$ e à direita por $(I + B(\alpha(t)) K_d)^{-T} P$, obtém-se

$$A^T(\alpha(t)) (I + B(\alpha(t)) K_d)^{-T} P + P (I + B(\alpha(t)) K_d)^{-1} A(\alpha(t)) < 0. \quad (42)$$

Multiplicando à esquerda por $x^T(t)$ e à direita por $x(t)$, obtém-se

$$x^T(t) A(\alpha(t))^T (I + B(\alpha(t)) K_d)^{-T} P x(t) + x^T(t) P (I + B(\alpha(t)) K_d)^{-1} A(\alpha(t)) x(t) < 0, \quad (43)$$

e de (31) em (43) obtém-se a função derivada segundo Lyapunov que deve ser menor que zero, para $x(t) \neq 0$. O qual fica demonstrado o teorema pois:

$$\dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) < 0, \quad (44)$$

$$x^T(t)Px(t) > 0. \quad (45)$$

□

3.2.1 Conclusões parciais

Nesta seção, apresentou-se a teoria da realimentação derivativa com parâmetro variante no tempo em conjunto com o critério de Lyapunov, de forma a garantir a estabilidade do sistema. Esta teoria pode ser aplicada no controle de sistemas em que dispõem-se de sensores acelerométricos, nos quais as derivadas dos estados são mais simples de serem obtidas do que as medidas das variáveis de estado. Esta seção apresentou uma preparação teórica para o desenvolvimento do controle *gain scheduling* proposto no Capítulo 4.

4 PROJETO DE CONTROLADOR *GAIN SCHEDULING* USANDO REALIMENTAÇÃO DERIVATIVA

Neste capítulo, procura-se uma solução para sistemas lineares com parâmetro variante no tempo, empregando a estratégia de controle *gain scheduling* usando realimentação derivativa. Para facilitar a obtenção da solução usa-se o Lema de Finsler evitando a multiplicação de matrizes que geram produtos cruzados.

4.1 Formulação LMI com Lema de Finsler

O objetivo do projeto do controlador é garantir a estabilidade do sistema

$$\dot{x}(t) = A(\alpha(t))x(t) + B(\alpha(t))u(t) \quad (46)$$

utilizando a realimentação derivativa, dada por:

$$u(t) = -K(\alpha(t))\dot{x}(t). \quad (47)$$

Substituindo (47) em (46) tem-se

$$\dot{x}(t) = A(\alpha(t))x(t) - B(\alpha(t))K(\alpha(t))\dot{x}(t). \quad (48)$$

Para aplicar o Lema de Finsler é necessário partir da igualdade (49), resultado da transformação do sistema (48).

$$0 = A(\alpha(t))x(t) - (I + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))\dot{x}(t). \quad (49)$$

Para obtenção das LMIs para o projeto dos controladores, utiliza-se o Lema 4.1.

Lema 4.1 (Lema de Finsler). *Considere $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathcal{B}(\alpha(t)) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ com posto $(\mathcal{B}(\alpha(t))) < n$ e $\mathcal{B}(\alpha(t))^\perp$ uma base para o espaço nulo de $\mathcal{B}(\alpha(t))$ (isto é $\mathcal{B}(\alpha(t))\mathcal{B}(\alpha(t))^\perp = 0$).*

Então as seguintes condições são equivalentes:

- (i) $\mathcal{W}^T \mathcal{D} \mathcal{W} < 0, \quad \forall \mathcal{W} \neq 0, \quad \mathcal{B}(\alpha(t)) \mathcal{W} = 0,$
- (ii) $\mathcal{B}(\alpha(t))^\perp{}^T \mathcal{D} \mathcal{B}(\alpha(t))^\perp < 0,$
- (iii) $\exists \rho \in \mathbb{R} : \mathcal{D} - \rho \mathcal{B}(\alpha(t))^T \mathcal{B}(\alpha(t)) < 0,$
- (iv) $\exists \mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{n \times m} : \mathcal{D} + \mathcal{Q} \mathcal{B}(\alpha(t)) + \mathcal{B}(\alpha(t))^T \mathcal{Q}^T < 0,$

sendo ρ e $\mathcal{Q}$ variáveis adicionais (ou multiplicadoras).

Prova: Veja (SKELTON; IWASAKI; GRIGORIADIS, 1997). ■

O Lema de Finsler é amplamente usado em muitas aplicações de controle ou análise de estabilidade de sistemas baseados em LMIs. Esse lema garante a relaxação do conjunto de LMIs devido à desassociação de matrizes ou à redução do número de LMIs em projeto de controladores (MOZELLI; PALHARES; AVELLAR, 2004).

4.1.1 Projeto do controlador com condição de estabilidade

Definindo os seguintes vetores e matrizes:

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}, \\ \mathcal{B}(\alpha(t)) &= \begin{bmatrix} A(\alpha(t)) & -[I + B(\alpha(t))K(\alpha(t))] \end{bmatrix}, \\ \mathcal{D} &= \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{Q} &= \begin{bmatrix} X \\ X \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

sendo X qualquer matriz não singular de dimensão adequada.

Usando estas definições e os itens *i)*, *iv)* do Lema de Finsler, no Teorema 3 são propostas condições suficientes para que o sistema (48) seja estabilizável. Para uma notação mais compacta ao longo do texto será utilizado “*” para denotar bloco simétrico da LMI.

Teorema 4. Se existir uma matriz simétrica positiva definida $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes Z_i , $Z_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que:

$$\begin{bmatrix} A_i Q^T + Q A_i^T & G + Q A_i^T - Q^T - B_i Z_i \\ * & -Q^T - B_i Z_i - Q - Z_i^T B_i^T \end{bmatrix} < 0 \quad (50)$$

$$i = 1, 2, \dots, N.$$

$$\begin{bmatrix} A_i Q^T + A_j Q^T + Q A_i^T + Q A_j^T & 2G + Q A_i^T + Q A_j^T - 2Q^T - B_i Z_j - B_j Z_i \\ * & -2Q^T - B_i Z_j - B_j Z_i - 2Q - Z_i^T B_j^T - Z_j^T B_i^T \end{bmatrix} < 0 \quad (51)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1; j = i+1, \dots, N.$$

então o sistema (48) é estabilizável e as matrizes do controlador podem ser dadas por:

$$K(\alpha(t)) = Z(\alpha(t))Q^{-T}. \quad (52)$$

Prova. Suponha que (50) e (51) sejam factíveis. Multiplicando (50) por $\alpha_i^2(t) > 0$, e somando em i , de $i = 1$ até $i = N$, segue que:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) A_i Q^T + \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) Q A_i^T \\ * \\ \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) G + \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) Q A_i^T - \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) Q^T - \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) B_i Z_i \\ - \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) Q^T - \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) B_i Z_i - \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) Q - \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) Z_i^T B_i^T \end{bmatrix} < 0. \quad (53)$$

Multiplicando (51) por $\alpha_i(t)\alpha_j(t) > 0$, e somando em $i = 1$, até $i = N-1$ e em $j = i+1$ até $j = N$, segue que:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t) [A_i Q^T + A_j Q^T + Q A_i^T + Q A_j^T] \\ * \\ \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t) [2G + Q A_i^T + Q A_j^T - 2Q^T - B_i Z_j - B_j Z_i] \\ \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t) [-2Q^T - B_i Z_j - B_j Z_i - 2Q - Z_i^T B_j^T - Z_j^T B_i^T] \end{bmatrix} < 0. \quad (54)$$

Somando (53) e (54), o bloco superior da diagonal principal da matriz resultante é:

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) A_i Q^T + \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) Q A_i^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) [A_i Q^T + A_j Q^T + Q A_i^T + Q A_j^T]. \quad (55)$$

O bloco superior fora da diagonal principal da matriz resultante é:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) G + \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) Q A_i^T - \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) Q^T - \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) B_i Z_i + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) [2G + Q A_i^T \\ & + Q A_j^T - 2Q^T - B_i Z_j - B_j Z_i]. \end{aligned} \quad (56)$$

O bloco inferior da diagonal principal da matriz resultante é:

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) Q^T - \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) B_i Z_i - \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) Q - \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) Z_i^T B_i^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) [-2Q^T \\ & - B_i Z_j - B_j Z_i - 2Q - Z_i^T B_j^T - Z_j^T B_i^T]. \end{aligned} \quad (57)$$

Genericamente sabemos que :

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j = \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j.$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j H_i R_j = \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 H_j R_j + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (H_i R_j + H_j R_i).$$

Então:

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) A_i Q^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) (A_i Q^T + A_j Q^T) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) A_j Q^T.$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) Q A_i^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) (Q A_i^T + Q A_j^T) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) Q A_j^T.$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) B_i Z_i + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) (B_i Z_j + B_j Z_i) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) B_i Z_j.$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) Z_i^T B_i^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) (Z_i^T B_j^T + Z_j^T B_i^T) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) Z_i^T B_j^T.$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) G + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) (2G) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) G.$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) Q + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) (2Q) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) Q.$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) Q^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) (2Q^T) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) Q^T.$$

Logo substituindo nos termos da matriz, torna-se

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) A_j Q^T + \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) Q A_j^T & \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) G \right. \\ * & \left. \left(- \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) Q^T \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) Q A_j^T - \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) Q^T - \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) B_i Z_j \right) \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) B_i Z_j - \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) Q - \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) Z_i^T B_j^T \right) \end{bmatrix} < 0 \quad (58)$$

sendo $\sum_{i=1}^N \alpha_i(t) = 1$ e $\sum_{j=1}^N \alpha_j(t) = 1$, substituindo correspondentemente, obtém-se

$$\begin{bmatrix} A(\alpha(t))Q^T + QA^T(\alpha(t)) & G + QA^T(\alpha(t)) - Q^T - B(\alpha(t))Z(\alpha(t)) \\ * & -Q^T - B(\alpha(t))Z(\alpha(t)) - Q - Z^T(\alpha(t))B^T(\alpha(t)) \end{bmatrix} < 0. \quad (59)$$

Substituindo $Q = X^{-1}$, $G = X^{-1}PX^{-T}$ e $Z(\alpha(t)) = K(\alpha(t))X^{-T}$ obtém-se

$$\begin{bmatrix} A(\alpha(t))X^{-T} + X^{-1}A^T(\alpha(t)) \\ * \\ X^{-1}PX^{-T} + X^{-1}A^T(\alpha(t)) - X^{-T} - B(\alpha(t))K(\alpha(t))X^{-T} \\ -X^{-T} - B(\alpha(t))K(\alpha(t))X^{-T} - X^{-1} - (K(\alpha(t))X^{-T})^T B^T(\alpha(t)) \end{bmatrix} < 0. \quad (60)$$

Multiplicando à esquerda pela matriz $\text{diag}(X \ X)$ e à direita pela matriz $\text{diag}(X \ X)^T$, torna-se

$$\begin{bmatrix} XA(\alpha(t)) + A^T(\alpha(t))X^T \\ * \\ P + A^T(\alpha(t))X^T - X - XB(\alpha(t))K(\alpha(t)) \\ -X - XB(\alpha(t))K(\alpha(t)) - X^T - (K(\alpha(t)))^T B^T(\alpha(t))X^T \end{bmatrix} < 0, \quad (61)$$

e colocando-se em evidência X e X^T , obtém-se

$$\begin{bmatrix} XA(\alpha(t)) + A^T(\alpha(t))X^T \\ * \\ P + A^T(\alpha(t))X^T - X[I + B(\alpha(t))K(\alpha(t))] \\ -X[I + B(\alpha(t))K(\alpha(t))] - [I + (K^T(\alpha(t)))B^T(\alpha(t))]X^T \end{bmatrix} < 0. \quad (62)$$

Separando em termos semelhantes, obtém-se

$$\begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} XA(\alpha(t)) & -X[I + B(\alpha(t))K(\alpha(t))] \\ XA(\alpha(t)) & -X[I + B(\alpha(t))K(\alpha(t))] \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} A^T(\alpha(t))X^T & A^T(\alpha(t))X^T \\ -[I + (K^T(\alpha(t)))B^T(\alpha(t))]X^T & -[I + (K^T(\alpha(t)))B^T(\alpha(t))]X^T \end{bmatrix} < 0. \quad (63)$$

O produto de matriz é separado em matrizes de produto e, torna-se

$$\begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X \\ X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(\alpha(t)) & -[I + B(\alpha(t))K(\alpha(t))] \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} A^T(\alpha(t)) \\ -[I + B(\alpha(t))K(\alpha(t))]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^T & X^T \end{bmatrix} < 0, \quad (64)$$

então, representa os vetores e matrizes definidos no começo da seção que pertencem ao Lema de Finsler, sendo :

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B}(\alpha(t)) = \begin{bmatrix} A(\alpha(t)) & -[I + B(\alpha(t))K(\alpha(t))] \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B}(\alpha(t))^T = \begin{bmatrix} A^T(\alpha(t)) \\ -[I + B(\alpha(t))K(\alpha(t))]^T \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} X \\ X \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix}.$$

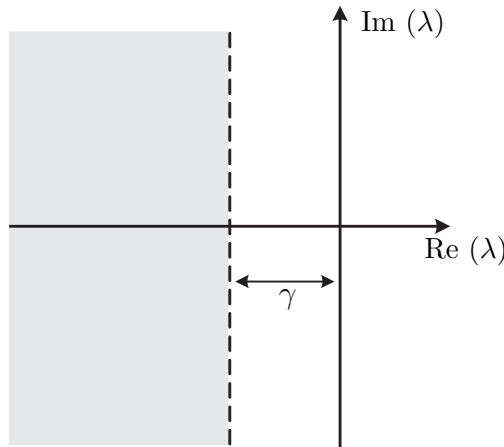
Que satisfaz o item *i*) do Lema de Finsler, então existe uma matriz $P = P^T > 0$, satisfazendo as condições de Lyapunov para o sistema (46), tendo em conta as matrizes de ganho (52), logo o sistema é assintoticamente estável.

Para melhorar o desempenho transitório do sistema, pode-se acrescentar uma restrição de taxa de decaimento, como proposto na seção seguinte. $\square$

4.1.2 Projeto do controlador com condição de estabilidade e taxa de decaimento

Dada uma constante real $\gamma > 0$, pode-se impor uma restrição de taxa de decaimento como se mostra na Figura 1, se a condição (65) for satisfeita para toda a trajetória $x(t) \neq 0$ do sistema, $t \geq 0$ (BOYD et al., 1994).

Figura 1 - Região γ para alocação dos autovalores.



Fonte: (SILVA et al., 2012)

$$\dot{V}(x(t)) < -2\gamma V(x(t)), \tag{65}$$

que equivale à:

$$\dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) < -2\gamma x(t)^T P x(t). \quad (66)$$

De (48) fazendo-se o trabalho algébrico, obtém-se:

$$\dot{x}(t) = (I + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^{-1} A(\alpha(t))x(t). \quad (67)$$

Substituindo (67) em (66), a consideração da taxa de decaimento é equivalente à solução de (68):

$$\begin{aligned} A(\alpha(t))^T (I + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^{-T} P + P (I + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^{-1} A(\alpha(t)) &< -2\gamma P, \\ P &> 0. \end{aligned} \quad (68)$$

Considerando o Lema 4.1(Finsler), condições suficientes para que o sistema (46) seja estabilizável com restrições na taxa de decaimento $\gamma > 0$ e definindo os seguintes vetores e matrizes:

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}, \\ \mathcal{B}(\alpha(t)) &= \begin{bmatrix} A(\alpha(t)) & -[I + B(\alpha(t))K(\alpha(t))] \end{bmatrix}, \\ \mathcal{D} &= \begin{bmatrix} 2\gamma P & P \\ P & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{Q} &= \begin{bmatrix} X \\ X \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

sendo X qualquer matriz não singular de dimensão adequada.

A partir destas informações, através do Teorema 5 são propostas condições suficientes para que o sistema (48) seja estabilizável com taxa de decaimento $\gamma > 0$.

Teorema 5. *Se existirem uma matriz simétrica positiva definida $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes Z_i , $Z_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que:*

$$\begin{bmatrix} 2\gamma G + A_i Q^T + Q A_i^T & G + Q A_i^T - Q^T - B_i Z_i \\ * & -Q^T - B_i Z_i - Q - Z_i^T B_i^T \end{bmatrix} < 0 \quad (69)$$

$$i = 1, 2, \dots, N.$$

$$\begin{bmatrix} 4\gamma G + A_i Q^T + A_j Q^T + Q A_i^T + Q A_j^T & 2G + Q A_i^T + Q A_j^T - 2Q^T - B_i Z_j - B_j Z_i \\ * & -2Q^T - B_i Z_j - B_j Z_i - 2Q - Z_i^T B_j^T - Z_j^T B_i^T \end{bmatrix} < 0 \quad (70)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1; j = i+1, \dots, N.$$

então o sistema (48) é estabilizável, com taxa de decaimento maior ou igual à γ , e as matrizes do controlador podem ser dadas por:

$$K(\alpha(t)) = Z(\alpha(t))Q^{-T}. \quad (71)$$

Prova. A demonstração segue passos similares aos da demonstração do Teorema 4, considerando a condição de estabilidade com restrição de taxa de decaimento (68). $\square$

4.1.3 Projeto do controlador com condição de estabilidade e incertezas politópicas

Considere um sistema contínuo, controlável, linear e com incertezas descrito da seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha(t), \beta)x(t) + B(\alpha(t), \beta)u(t), \quad (72)$$

sendo $A(\alpha(t), \beta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz que contém $\alpha(t)$, parâmetro dependente do tempo e β as incertezas politópicas, $B(\alpha(t), \beta) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ uma matriz que contém os mesmos parâmetros, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle do sistema e $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados. É importante ressaltar que $\alpha(t)$ é um parâmetro conhecido, enquanto β é desconhecido (modelo de incertezas politópicas, com ou sem falhas estruturais).

Neste trabalho, por simplicidade é suposto que $\alpha(t)$ e β não compõe o mesmo elemento de $A(\alpha(t), \beta)$ ou $B(\alpha(t), \beta)$. Logo, o sistema (72) pode ser decomposto na seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i(t) A_{\alpha_i} + \sum_{j=1}^r \beta_j A_{\beta_j} \right) x(t) + \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i(t) B_{\alpha_i} + \sum_{j=1}^r \beta_j B_{\beta_j} \right) u(t), \quad (73)$$

sendo que $A_{\alpha_i} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_{\alpha_i} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $A_{\beta_j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B_{\beta_j} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ são os vértices do politopo e as variáveis $\alpha_i(t)$ e β_j satisfazem a relação:

- Parcela do modelo com parâmetros $\alpha_i(t)$ conhecidos.

$$A_\alpha = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) A_{\alpha_i} \text{ e } B_\alpha = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) B_{\alpha_i},$$

$$\alpha_i(t) \geq 0, i = 1, 2, \dots, N.$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i(t) = 1. \quad (74)$$

-Parcela do modelo de incerteza com parâmetros β_j desconhecidos.

$$A_\beta = \sum_{j=1}^r \beta_j(t) A_{\beta_j} \text{ e } B_\beta = \sum_{j=1}^r \beta_j B_{\beta_j},$$

$$\beta_j > 0, j = 1, 2, \dots, r.$$

$$\sum_{j=1}^r \beta_j = 1. \quad (75)$$

O projeto do controlador *gain scheduling* para o sistema (72) utiliza a realimentação da derivada dos estados,

$$u(t) = -K(\alpha(t))\dot{x}(t). \quad (76)$$

Para aplicar o Lema de Finsler, definem-se os seguintes vetores e matrizes:

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B}(\alpha(t), \beta) = \begin{bmatrix} A(\alpha(t), \beta) & -[I + B(\alpha(t), \beta)K(\alpha(t))] \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} X \\ X \end{bmatrix},$$

sendo X qualquer matriz não singular de dimensão adequada.

Usando estas definições e os itens *i)*, *iv)* do lema de Finsler, no Teorema 6 são propostas condições suficientes para que o sistema (73) com o uso da lei de controle (76) seja estabilizável.

Teorema 6. *Se existirem uma matriz simétrica positiva definida $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes Z_i , $Z_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que:*

$$\begin{bmatrix} A_{\alpha_i} Q^T + Q A_{\alpha_i}^T & \frac{G}{2} + Q A_{\alpha_i}^T - \frac{Q^T}{2} - B_{\alpha_i} Z_i \\ * & -\frac{Q^T}{2} - B_{\alpha_i} Z_i - \frac{Q}{2} - Z_i^T B_{\alpha_i}^T \end{bmatrix} < 0, \quad (77)$$

$$i = 1, 2, \dots, N.$$

$$\begin{bmatrix} A_{\alpha_i} Q^T + A_{\alpha_j} Q^T + Q A_{\alpha_i}^T + Q A_{\alpha_j}^T & G + Q A_{\alpha_i}^T + Q A_{\alpha_j}^T - Q^T - B_{\alpha_i} Z_j - B_{\alpha_j} Z_i \\ * & -Q^T - B_{\alpha_i} Z_j - B_{\alpha_j} Z_i - Q - Z_i^T B_{\alpha_j}^T - Z_j^T B_{\alpha_i}^T \end{bmatrix} < 0, \quad (78)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1; j = i+1, \dots, N.$$

$$\begin{bmatrix} A_{\beta_j} Q^T + Q A_{\beta_j}^T & \frac{G}{2} + Q A_{\beta_j}^T - \frac{Q^T}{2} - B_{\beta_j} Z_i \\ * & -\frac{Q^T}{2} - B_{\beta_j} Z_i - \frac{Q}{2} - Z_i^T B_{\beta_j}^T \end{bmatrix} < 0, \quad (79)$$

$$i = 1, 2, \dots, N; j = 1, \dots, r,$$

então o sistema (73) é estabilizável através de (76) e as matrizes do controlador podem ser dadas por:

$$K(\alpha(t)) = Z(\alpha(t))Q^{-T}. \quad (80)$$

Prova. Suponha que (77), (78) e (79) sejam factíveis. Multiplicando (77) por $\alpha_i^2(t) > 0$, e somando em i , de $i = 1$ até $i = N$, segue que:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) A_{\alpha_i} Q^T + \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) Q A_{\alpha_i}^T & \\ * & \\ \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) G + \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) Q A_{\alpha_i}^T - \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) Q^T - \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) B_{\alpha_i} Z_i & \\ - \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) Q^T - \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) B_{\alpha_i} Z_i - \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) Q - \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) Z_i^T B_{\alpha_i}^T & \end{bmatrix} < 0 \quad (81)$$

Multiplicando (78) por $\alpha_i(t)\alpha_j(t) > 0$, e somando em $i = 1$, até $i = N-1$ e em $j = i+1$ até $j = N$, segue que:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t) [A_{\alpha_i} Q^T + A_{\alpha_j} Q^T + Q A_{\alpha_i}^T + Q A_{\alpha_j}^T] & \\ * & \\ \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t) [G + Q A_{\alpha_i}^T + Q A_{\alpha_j}^T - Q^T - B_{\alpha_i} Z_j - B_{\alpha_j} Z_i] & \\ \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t) [-Q^T - B_{\alpha_i} Z_j - B_{\alpha_j} Z_i - Q - Z_i^T B_{\alpha_j}^T - Z_j^T B_{\alpha_i}^T] & \end{bmatrix} < 0 \quad (82)$$

Multiplicando (79) por $\alpha_i(t)\beta_j(t) > 0$, e somando em $i = 1$, até $i = N$ e em $j = 1$ até $j = r$, segue que:

$$\left[\begin{array}{cc} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^r \alpha_i(t)\beta_j(t)[A_{\beta_j}Q^T + QA_{\beta_j}^T] & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^r \alpha_i(t)\beta_j(t)[\frac{G}{2} + QA_{\beta_j}^T - \frac{Q}{2} - B_{\beta_j}Z_i] \\ * & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^r \alpha_i(t)\beta_j(t)[-\frac{Q^T}{2} - B_{\beta_j}Z_i - \frac{Q}{2} - Z_i^T B_{\beta_j}^T] \end{array} \right] < 0. \quad (83)$$

Somando (81), (82) e (83), o bloco superior da diagonal principal da matriz resultante é:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t)A_{\alpha_i}Q^T + \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t)QA_{\alpha_i}^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)[A_{\alpha_i}Q^T + A_{\alpha_j}Q^T + QA_{\alpha_i}^T + QA_{\alpha_j}^T] \\ & + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^r \alpha_i(t)\beta_j(t)[A_{\beta_j}Q^T + QA_{\beta_j}^T]. \end{aligned} \quad (84)$$

O bloco superior fora da diagonal principal da matriz resultante é:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t)\frac{G}{2} + \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t)QA_{\alpha_i}^T - \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t)\frac{Q^T}{2} - \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t)B_iZ_i + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)[G + QA_{\alpha_i}^T \\ & + QA_{\alpha_j}^T - Q^T - B_{\alpha_i}Z_j - B_{\alpha_j}Z_i] + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^r \alpha_i(t)\beta_j(t)[\frac{G}{2} + QA_{\beta_j}^T - \frac{Q}{2} - B_{\beta_j}Z_i]. \end{aligned} \quad (85)$$

O bloco inferior da diagonal principal da matriz resultante é:

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t)Q^T - \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t)B_{\alpha_i}Z_i - \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t)Q - \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t)Z_i^T B_{\alpha_i}^T \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t)\alpha_j(t)[-Q^T \\ & - B_{\alpha_i}Z_j - B_{\alpha_j}Z_i - Q - Z_i^T B_{\alpha_j}^T - Z_j^T B_{\alpha_i}^T] + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^r \alpha_i(t)\beta_j(t)[-\frac{Q^T}{2} - B_{\beta_j}Z_i - \frac{Q}{2} - Z_i^T B_{\beta_j}^T]. \end{aligned} \quad (86)$$

Genericamente sabemos que :

$$\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^N \alpha_i)(\sum_{i=1}^N \alpha_i + \sum_{j=1}^r \beta_j) = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j + (\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^r \alpha_i \beta_j).$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j H_i R_j = \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 H_j R_j + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (H_i R_j + H_j R_i).$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^r \beta_j H_j R_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^r \alpha_i \beta_j (H_j R_i).$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^r \beta_j H_i R_j = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^r \alpha_i \beta_j (H_i R_j).$$

Então:

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) A_{\alpha_i} Q^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) (A_{\alpha_i} Q^T + A_{\alpha_j} Q^T) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) A_{\alpha_j} Q^T.$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^r \alpha_i(t) \beta_j (A_{\beta_j} Q^T) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^r \beta_j(t) A_{\beta_j} Q^T.$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) Q A_{\alpha_i}^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) (Q A_{\alpha_i}^T + Q A_{\alpha_j}^T) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) Q A_{\alpha_j}^T.$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^r \alpha_i(t) \beta_j (Q A_{\beta_j}^T) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^r \beta_j Q A_{\beta_j}^T.$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) B_{\alpha_i} Z_i + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) (B_{\alpha_i} Z_j + B_{\alpha_j} Z_i) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) B_{\alpha_j} Z_i.$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^r \alpha_i(t) \beta_j (B_{\beta_j} Z_i) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^r \beta_j B_{\beta_j} Z_i.$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) Z_i^T B_{\alpha_i}^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) (Z_i^T B_{\alpha_j}^T + Z_j^T B_{\alpha_i}^T) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) Z_j^T B_{\alpha_i}^T.$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^r \alpha_i(t) \beta_j (Z_j^T B_{\beta_i}^T) = \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \beta_j Z_j^T B_{\beta_i}^T.$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) \frac{G}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) G + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^r \alpha_i(t) \beta_j \frac{G}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i(t) + \sum_{j=1}^r \beta_j \right) G.$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) \frac{Q}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) Q + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^r \alpha_i(t) \beta_j \frac{Q}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i(t) + \sum_{j=1}^r \beta_j \right) Q.$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) \frac{Q^T}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) Q^T + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^r \alpha_i(t) \beta_j \frac{Q^T}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i(t) + \sum_{j=1}^r \beta_j \right) Q^T.$$

Logo de (4), (85) e (86):

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) A_{\alpha_i} Q^T + \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) Q A_{\alpha_i}^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) A_{\alpha_i} Q^T + \right. \\ & \left. \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) Q A_{\alpha_j}^T + \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^r \beta_j A_{\beta_j} Q^T + \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^r \beta_j Q A_{\beta_j}^T \right) \\ & * \\ & \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) \frac{G}{2} + \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) Q A_{\alpha_i}^T - \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) \frac{Q^T}{2} - \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) B_{\alpha_i} Z_i \right. \\ & \left(- \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) \frac{Q^T}{2} - \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) B_{\alpha_i} Z_i - \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) \frac{Q}{2} - \sum_{i=1}^N \alpha_i^2(t) Z_i^T B_{\alpha_i}^T \right. \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) G + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) Q A_{\alpha_i}^T + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) Q A_{\alpha_j}^T \\ & - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) Q^T - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) B_{\alpha_i} Z_j - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) B_{\alpha_j} Z_i \\ & - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) Q^T - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) B_{\alpha_i} Z_j - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) B_{\alpha_j} Z_i \\ & - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) Q - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) Z_i^T B_{\alpha_j}^T - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^N \alpha_i(t) \alpha_j(t) Z_j^T B_{\alpha_i}^T \\ & + \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^r \beta_j \frac{G}{2} - \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^r \beta_j \frac{Q}{2} + \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^r \beta_j Q A_{\beta_j}^T \\ & - \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^r \beta_j \frac{Q^T}{2} - \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^r \beta_j \frac{Q}{2} - \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^r \beta_j B_{\beta_j} Z_i \\ & \left. \left. - \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \beta_j B_{\beta_j} Z_i \right) \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^r \beta_j Z_i^T B_{\beta_j}^T \right) \Big] < 0, \tag{87}
 \end{aligned}$$

substitui-se correspondentemente e obtém-se

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{c} \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) A_{\alpha_j} Q^T + \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) Q A_{\alpha_j}^T \right. \\ \quad \left. + \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^r \beta_j A_{\beta_j} Q^T + \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^r \beta_j Q A_{\beta_j}^T \right) \\ \quad * \\ \left(\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \right) \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i(t) + \sum_{j=1}^r \beta_j \right) G + \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) Q A_{\alpha_j}^T \right. \\ \left(-\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \right) \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i(t) + \sum_{j=1}^r \beta_j \right) Q^T - \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) B_{\alpha_j} Z_j \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \right) \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i(t) + \sum_{j=1}^r \beta_j \right) Q^T - \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) B_{\alpha_j} Z_j \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \right) \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i(t) + \sum_{j=1}^r \beta_j \right) Q - \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) Z_j^T B_{\alpha_j}^T \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) Q A_{\beta_j}^T - \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^N \beta_j B_{\beta_j} Z_i \right) \\ \left. - \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^r \beta_j B_{\beta_j} Z_i - \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \sum_{j=1}^r \beta_j Z_i^T B_{\beta_j}^T \right) \end{array} \right] < 0, \quad (88)
 \end{aligned}$$

sendo $\sum_{i=1}^N \alpha_i(t) = 1$, $\sum_{j=1}^N \alpha_j(t) = 1$, $\sum_{j=1}^r \beta_j(t) = 1$ e agrupando termos semelhantes, substitui-se correspondentemente e obtém-se

$$\left[\begin{array}{cc} A(\alpha(t), \beta) Q^T + Q A^T(\alpha(t), \beta) & G + Q A^T(\alpha(t), \beta) - Q^T - B(\alpha(t), \beta) Z(\alpha(t)) \\ * & -Q^T - B(\alpha(t), \beta) Z(\alpha(t)) - Q - Z^T(\alpha(t)) B^T(\alpha(t), \beta) \end{array} \right] < 0. \quad (89)$$

Substituindo $Q = X^{-1}$, $G = X^{-1} P X^{-T}$ e $Z(\alpha(t)) = K(\alpha(t)) X^{-T}$ obtém-se

$$\left[\begin{array}{c} A(\alpha(t), \beta) X^{-T} + X^{-1} A^T(\alpha(t), \beta) \\ * \\ X^{-1} P X^{-T} + X^{-1} A^T(\alpha(t), \beta) - X^{-T} - B(\alpha(t), \beta) K(\alpha(t)) X^{-T} \\ - X^{-T} - B(\alpha(t), \beta) K(\alpha(t)) X^{-T} - X^{-1} - (K(\alpha(t)) X^{-T})^T B^T(\alpha(t), \beta) \end{array} \right] < 0. \quad (90)$$

Multiplicando à esquerda pela matriz $\text{diag}(X \ X)$ e à direita pela matriz $\text{diag}(X \ X)^T$, torna-se

$$\begin{bmatrix} XA(\alpha(t), \beta) + A^T(\alpha(t), \beta)X^T \\ * \\ P + A^T(\alpha(t), \beta)X^T - X - XB(\alpha(t), \beta)K(\alpha(t)) \\ -X - XB(\alpha(t), \beta)K(\alpha(t)) - X^T - (K(\alpha(t)))^T B^T(\alpha(t), \beta)X^T \end{bmatrix} < 0, \quad (91)$$

deixando em evidência X e X^T , obtém-se

$$\begin{bmatrix} XA(\alpha(t), \beta) + A^T(\alpha(t), \beta)X^T \\ * \\ P + A^T(\alpha(t), \beta)X^T - X[I + B(\alpha(t), \beta)K(\alpha(t))] \\ -X[I + B(\alpha(t), \beta)K(\alpha(t))] - [I + (K^T(\alpha(t)))B^T(\alpha(t), \beta)]X^T \end{bmatrix} < 0. \quad (92)$$

Separando em termos semelhantes, obtém-se

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} XA(\alpha(t), \beta) & -X[I + B(\alpha(t), \beta)K(\alpha(t))] \\ XA(\alpha(t), \beta) & -X[I + B(\alpha(t), \beta)K(\alpha(t))] \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} A^T(\alpha(t), \beta)X^T & A^T(\alpha(t), \beta)X^T \\ -[I + (K^T(\alpha(t)))B^T(\alpha(t), \beta)]X^T & -[I + (K^T(\alpha(t)))B^T(\alpha(t), \beta)]X^T \end{bmatrix} < 0. \end{aligned} \quad (93)$$

O produto de matriz é separado em matrizes de produto e, torna-se

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X \\ X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(\alpha(t), \beta) & -[I + B(\alpha(t), \beta)K(\alpha(t))] \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} A^T(\alpha(t), \beta) \\ -[I + B(\alpha(t), \beta)K(\alpha(t))]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^T & X^T \end{bmatrix} < 0, \end{aligned} \quad (94)$$

então, representa os vetores e matrizes definidos no começo da seção que pertencem ao lema de Finsler, sendo :

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}, \\ \mathcal{B}(\alpha(t)) &= \begin{bmatrix} A(\alpha(t), \beta) & -[I + B(\alpha(t), \beta)K(\alpha(t))] \end{bmatrix}, \\ \mathcal{B}(\alpha(t), \beta)^T &= \begin{bmatrix} A^T(\alpha(t)) \\ -[I + B(\alpha(t), \beta)K(\alpha(t))]^T \end{bmatrix}, \\ \mathcal{Q} &= \begin{bmatrix} X \\ X \end{bmatrix}, \\ \mathcal{D} &= \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Que satisfaz o item *i*) do Lema de Finsler, então existe uma matriz $P = P^T > 0$, satisfazendo as condições de Lyapunov para o sistema (73) com realimentação (76), tendo em conta as matrizes de ganho (80), logo o sistema é assintoticamente estável. $\square$

4.1.4 Projeto do controlador com condição de estabilidade para incertezas politópicas e taxa de decaimento

Dada uma constante real $\gamma > 0$, pode-se impor uma restrição de taxa de decaimento como se mostra na Figura 1, se a condição (65) for satisfeita para toda a trajetória $x(t) \neq 0$ do sistema, $t \geq 0$ (BOYD et al., 1994).

Para aplicar o Lema de Finsler, definem-se os seguintes vetores e matrizes:

$$\begin{aligned}\mathcal{W} &= \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}, \\ \mathcal{B}(\alpha(t), \beta) &= \begin{bmatrix} A(\alpha(t), \beta) & -[I + B(\alpha(t), \beta)K(\alpha(t))] \end{bmatrix}, \\ \mathcal{D} &= \begin{bmatrix} 2\gamma P & P \\ P & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{Q} &= \begin{bmatrix} X \\ X \end{bmatrix},\end{aligned}$$

sendo X qualquer matriz não singular de dimensão adequada.

Usando estas definições e os itens *i*), *iv*) do lema de Finsler, no Teorema 7 são propostas condições suficientes para que o sistema (73) com o uso da lei de controle (76) seja estabilizável.

Teorema 7. *Dada uma constante $\gamma > 0$, se existirem uma matriz simétrica positiva definida $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $Z_i, Z_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que:*

$$\begin{bmatrix} A_{\alpha_i}Q^T + QA_{\alpha_i}^T + \gamma G & \frac{G}{2} + QA_{\alpha_i}^T - \frac{Q^T}{2} - B_{\alpha_i}Z_i \\ * & -\frac{Q^T}{2} - B_{\alpha_i}Z_i - \frac{Q}{2} - Z_i^T B_{\alpha_i}^T \end{bmatrix} < 0, \quad (95)$$

$$i = 1, 2, \dots, N.$$

$$\begin{bmatrix} A_{\alpha_i}Q^T + A_{\alpha_j}Q^T + QA_{\alpha_i}^T + QA_{\alpha_j}^T + 2\gamma G & G + QA_{\alpha_i}^T + QA_{\alpha_j}^T - Q^T - B_{\alpha_i}Z_j - B_{\alpha_j}Z_i \\ * & -Q^T - B_{\alpha_i}Z_j - B_{\alpha_j}Z_i - Q - Z_i^T B_{\alpha_j}^T - Z_j^T B_{\alpha_i}^T \end{bmatrix} < 0, \quad (96)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1; j = i+1, \dots, N.$$

$$\begin{bmatrix} A_{\beta_j} Q^T + Q A_{\beta_j}^T + \gamma G & \frac{G}{2} + Q A_{\beta_j}^T - \frac{Q^T}{2} - B_{\beta_j} Z_i \\ * & -\frac{Q^T}{2} - B_{\beta_j} Z_i - \frac{Q}{2} - Z_i^T B_{\beta_j}^T \end{bmatrix} < 0, \quad (97)$$

$$i = 1, 2, \dots, N; j = 1, \dots, r,$$

então o sistema (73) é estabilizável através de (76) com taxa de decaimento maior ou igual γ e as matrizes do controlador podem ser dadas por:

$$K(\alpha(t)) = Z(\alpha(t))Q^{-T}. \quad (98)$$

Prova. A demonstração segue passos similares aos da demonstração do Teorema 6, considerando a condição de estabilidade com restrição de taxa de decaimento (66). $\square$

4.1.5 Relaxação do conjunto para soluções menos conservadoras

Na seção anterior o projeto do controlador usando o Lema de Finsler considerando a taxa de decaimento apresenta soluções que podem ser melhoradas, dado à resultados empíricos o valor de γ é limitado. Aplicando uma estratégia similar, mas incorporando um valor escalar $\kappa > 0$ às desigualdades, pode-se obter soluções menos conservadoras, naturalmente com um valor adequado de κ , (SILVA et al., 2011).

O Teorema 8 é uma extensão do Teorema 6 e é baseado no Teorema proposto em (SILVA et al., 2011).

Teorema 8. Dada uma constante $\gamma > 0$ e um escalar arbitrário $\kappa > 0$, se existirem uma matriz simétrica positiva definida $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $Z_i, Z_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que:

$$\begin{bmatrix} A_{\alpha_i} Q^T + Q A_{\alpha_i}^T + \gamma G & \frac{G}{2} + \kappa Q A_{\alpha_i}^T - \frac{Q^T}{2} - B_{\alpha_i} Z_i \\ * & -\kappa \frac{Q^T}{2} - \kappa B_{\alpha_i} Z_i - \kappa \frac{Q}{2} - \kappa Z_i^T B_{\alpha_i}^T \end{bmatrix} < 0, \quad (99)$$

$$i = 1, 2, \dots, N.$$

$$\begin{bmatrix} A_{\alpha_i} Q^T + A_{\alpha_j} Q^T + Q A_{\alpha_i}^T + Q A_{\alpha_j}^T + 2\gamma G \\ * \\ G + \kappa Q A_{\alpha_i}^T + \kappa Q A_{\alpha_j}^T - Q^T - B_{\alpha_i} Z_j - B_{\alpha_j} Z_i \\ -\kappa Q^T - \kappa B_{\alpha_i} Z_j - \kappa B_{\alpha_j} Z_i - \kappa Q - \kappa Z_i^T B_{\alpha_j}^T - \kappa Z_j^T B_{\alpha_i}^T \end{bmatrix} < 0. \quad (100)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1; j = i+1, \dots, N.$$

$$\begin{bmatrix} A_{\beta_j}Q^T + QA_{\beta_j}^T + \gamma G & \frac{G}{2} + \kappa QA_{\beta_j}^T - \frac{Q^T}{2} - B_{\beta_j}Z_i \\ * & -\kappa \frac{Q^T}{2} - \kappa B_{\beta_j}Z_i - \kappa \frac{Q}{2} - \kappa Z_i^T B_{\beta_j}^T \end{bmatrix} < 0, \quad (101)$$

$$i = 1, 2, \dots, N; j = 1, \dots, r,$$

então o sistema (73) é estabilizável através de (76) com taxa de decaimento maior ou igual γ e as matrizes do controlador podem ser dadas por:

$$K(\alpha(t)) = Z(\alpha(t))Q^{-T}. \quad (102)$$

Prova. A demonstração segue passos similares aos da demonstração do Teorema 6, considerando a condição de estabilidade com restrição de taxa de decaimento (66) e (103). $\square$

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} X \\ \kappa X \end{bmatrix}. \quad (103)$$

4.1.6 Conclusões parciais

Nesta seção foi proposto controlador *gain scheduling* usando realimentação derivativa com parâmetro variante no tempo e incertezas politópicas. Projetou-se o controlador *gain scheduling* aplicando o Lema de Finsler, garantindo um relaxamento ao sistema. O fato de aplicar o Lema de Finsler garante que pode-se obter o valor do controlador sem inverter uma matriz literal, sendo essa inversão literal uma necessidade das metodologias existentes na literatura (MONTAGNER; PERES, 2004), essa é uma vantagem da metodologia proposta.

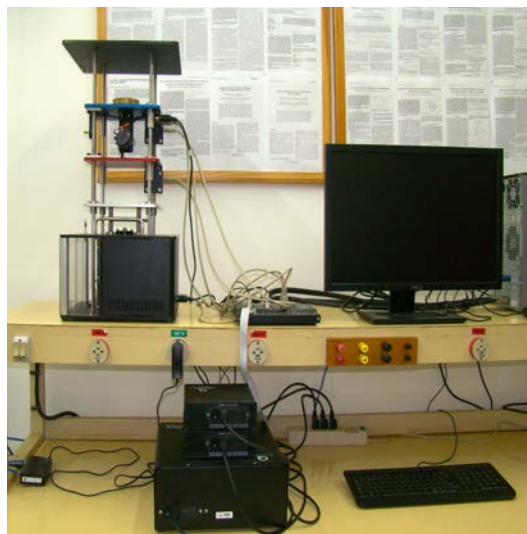
5 IMPLEMENTAÇÃO PRÁTICA

Neste capítulo, é testada a metodologia proposta no Capítulo 4 usando a implementação prática como meio para obter a solução do exemplo. Mostra-se as soluções encontradas das matrizes Q , $Z(\alpha(t))$ e $K(\alpha(t))$ usando a metodologia proposta. Plota-se a resposta do sistema no tempo e o sinal de controle $u(t) = -K(\alpha(t))\dot{x}(t)$ para validar o desempenho do controle *gain scheduling* com realimentação derivativa.

5.1 Sistema de suspensão ativa de um veículo

O sistema de suspensão ativa utilizado, fabricado pela Quanser, pode ser visto na Figura 2. O sistema consiste de um conjunto composto por duas massas, denominadas

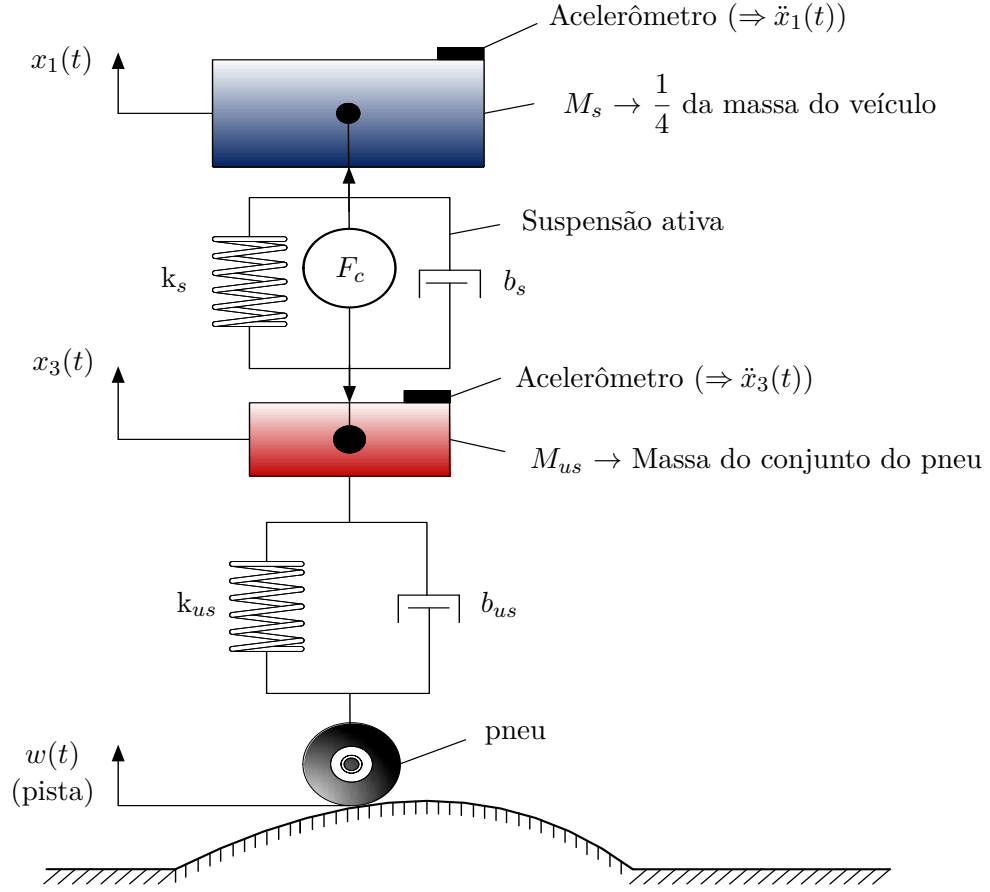
Figura 2 - Sistema de suspensão ativa Quanser.



Fonte: Pertence ao LPC-FEIS-UNESP

M_s e M_{us} . A massa M_s representa $\frac{1}{4}$ do corpo total do veículo e é suportada pela mola k_s e pelo amortecedor b_s . A massa M_{us} corresponde à massa do conjunto do pneu do veículo e é suportada pela mola k_{us} e pelo amortecedor b_{us} . Para atenuar as vibrações causadas

Figura 3 - Modelo esquemático do sistema de suspensão ativa.



Fonte: (OLIVEIRA et al., 2014)

por irregularidades na pista utiliza-se o sistema de suspensão ativa, representado por um motor (atuador) conectado entre as massas M_s e M_{us} , e controlado pela força F_c . Os valores dos parâmetros estão dispostos na Tabela 1.

O modelo esquemático (Quanser, 2009), mostrado na Figura 3 pode ser representado em espaços de estados, como segue:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{-ks}{Ms} & \frac{-bs}{Ms} & 0 & \frac{bs}{Ms} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-ks}{Mus} & \frac{bs}{Mus} & \frac{-kus}{Mus} & \frac{-(bs+bus)}{Mus} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{Ms} \\ 0 \\ \frac{-1}{Mus} \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t), \quad (104)$$

sendo $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$ e $x_4(t) = \dot{x}_3(t)$, representando as velocidades respectiva de cada massa.

Tabela 1 - Parâmetros da suspensão ativa.

Símbolos	Valor
M_s	2,45 (Kg)
M_{us}	1 (Kg)
K_s	900 (N/m)
k_{us}	2500 (N/m)
b_s	7,5 (Ns/m)
b_{us}	5 (Ns/m)

Fonte: (OLIVEIRA et al., 2014)

Os parâmetros do sistema dados na Tabela 1 possuem pequenas variações ao longo do tempo. Com objetivo de se fazer um teste mais severo do controlador *gain scheduled* é implementado uma variação temporal $\alpha(t)$ no ganho do canal de saída do sinal de controle $u(t)$. Isso é feito via *software*, emulando uma variação ao longo do tempo do ganho do amplificador de potência que alimenta o motor C.C. do atuador. Essa variação paramétrica pode ser representada no modelo considerando-se dois vértices do politopo no vetor de entrada $B(\alpha(t))$ em (46).

Primeiro caso:

A variação paramétrica $\alpha(t)$ impõe dois vértices, sendo que um representa o ganho do amplificador com 100% e o outro com 70%. Portanto, para realizar o projeto de controle foram considerados os seguintes vértices do politopo:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -367,347 & -3,061 & 0 & 3,061 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = A_1, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,408 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,286 \\ 0 \\ -0,7 \end{bmatrix}.$$

Para este exemplo, usando as LMIs (50) e (51) do Teorema 4, os ganhos foram calculados utilizando-se (52):

$$K_{d_1} = Z_1 Q^{-T} = \begin{bmatrix} 2,7733 & 6,3201 & -2,0170 & -23,4548 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 0,0203 & 0,1829 & -0,0116 & 0,0071 \\ -1,3776 & 2,8268 & 0,7442 & 0,6580 \\ -0,0131 & 0,1003 & 0,0093 & 0,0333 \\ 2,7669 & -4,6576 & -2,0187 & -0,5443 \end{bmatrix}, \quad (105)$$

logo,

$$K_{d_1} = \begin{bmatrix} 381,9988 & 5,6279 & -955,6624 & -3,5189 \end{bmatrix}.$$

Ainda,

$$K_{d_2} = Z_2 Q^{-T} = \begin{bmatrix} 2,7733 & 6,3201 & -2,0170 & -23,4548 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,0203 & 0,1829 & -0,0116 & 0,0071 \\ -1,3776 & 2,8268 & 0,7442 & 0,6580 \\ -0,0131 & 0,1003 & 0,0093 & 0,0333 \\ 2,7669 & -4,6576 & -2,0187 & -0,5443 \end{bmatrix}, \quad (106)$$

logo,

$$K_{d_2} = \begin{bmatrix} 526,7458 & 7,7694 & -1319,975 & -4,8951 \end{bmatrix}.$$

Os valores dos elementos de $K(\alpha(t))$ ao longo do tempo estão ilustrados na Figura 4.

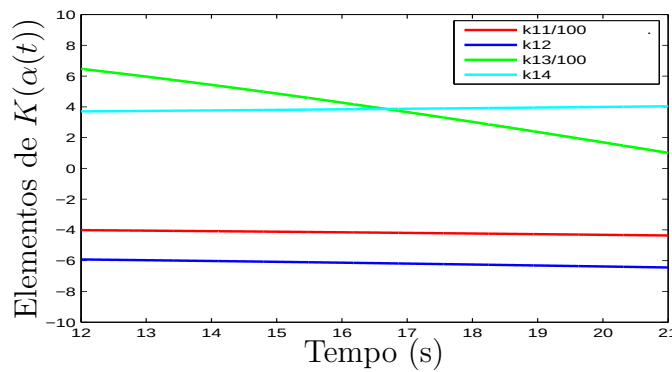
Nesse caso, o controlador é dado por :

$$K(\alpha(t)) = \alpha_1(t)K_{d_1} + (1 - \alpha_1(t))K_{d_2}, \quad (107)$$

sendo

$$\alpha_1(t) = 0,5 + 0,5 \sin(2\pi 0,01t + \frac{\pi}{2}). \quad (108)$$

Figura 4 - Elementos de $K(\alpha(t))$ em função do tempo.

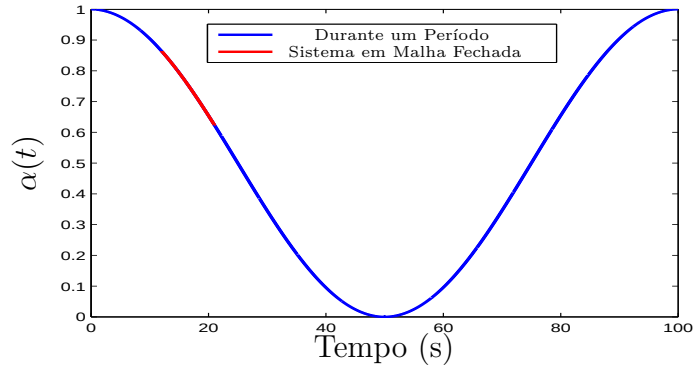


Fonte: Resultado do próprio autor

A variação de $\alpha(t)$ é ilustrada na Figura 5, onde se destaca o período em que o sistema se encontra em malha fechada. Como está mostrado a seguir, o tempo total do aciona-

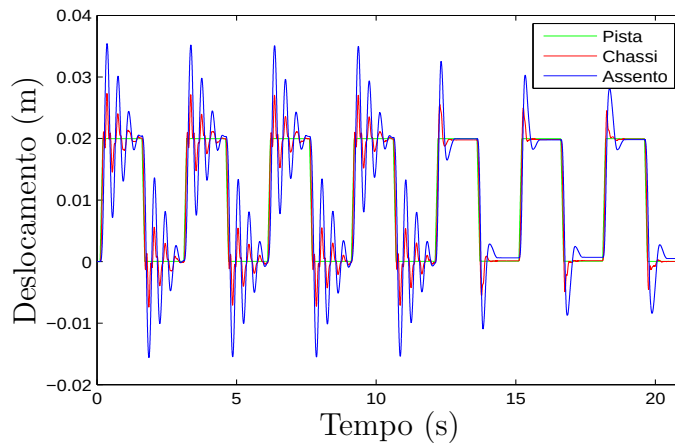
mento da suspensão foi de 21 s, para que se possa fazer a aquisição de dados para análise dos resultados e mostrar em um único gráfico.

Figura 5 - Função senoidal $\alpha(t)$.



Fonte: Resultado do próprio autor

Figura 6 - Resposta transitória prática de malha aberta (0-12s) e de malha fechada (12,01-21s).



Fonte: Resultado do próprio autor

A Figura 6 mostra como o sistema em malha aberta é estável, embora apresente oscilações que possam afetar o conforto do motorista. Nota-se que o sistema em malha fechada garante um bom desempenho ao sistema, diminuindo as oscilações e a amplitude do movimento do assento do motorista.

Segundo caso:

Usando as LMIs (69) e (70) do Teorema 5 com valor de $\gamma = 0,9$, os ganhos foram calculados utilizando-se (71):

$$K_{d1} = Z_1 Q^{-T} = \begin{bmatrix} 72,5515 & 679,8899 & -59,4334 & -881,5693 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 0,8950 & -47,6520 & -0,5471 & 80,8184 \\ 21,7343 & -79,1673 & 6,1683 & -156,6314 \\ -0,2967 & 16,6694 & 0,3327 & -64,1360 \\ -19,8673 & 643,9719 & 7,1074 & -130,8288 \end{bmatrix}, \quad (109)$$

logo,

$$K_{d_1} = \begin{bmatrix} 68,0543 & 1,8502 & -89,9187 & 0,6263 \end{bmatrix}.$$

Ainda,

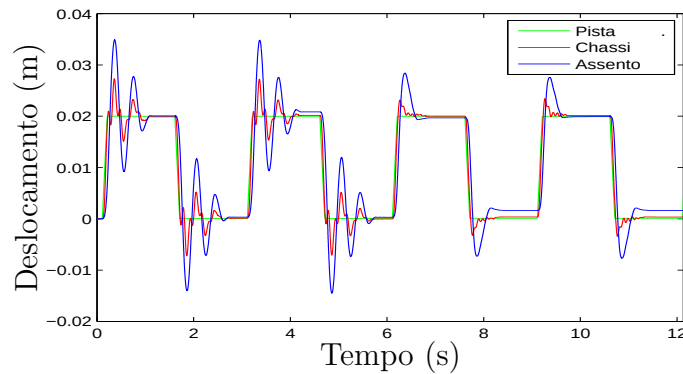
$$K_{d_2} = Z_2 Q^{-T} = \begin{bmatrix} 95,7 & 938,4 & -79,6 & -1135,1 \end{bmatrix} \\ \times \begin{bmatrix} 0,8950 & -47,6520 & -0,5471 & 80,8184 \\ 21,7343 & -79,1673 & 6,1683 & -156,6314 \\ -0,2967 & 16,6694 & 0,3327 & -64,1360 \\ -19,8673 & 643,9719 & 7,1074 & -130,8288 \end{bmatrix}, \quad (110)$$

logo,

$$K_{d_2} = \begin{bmatrix} 91,6154 & 2,5229 & -116,1827 & 0,8707 \end{bmatrix}.$$

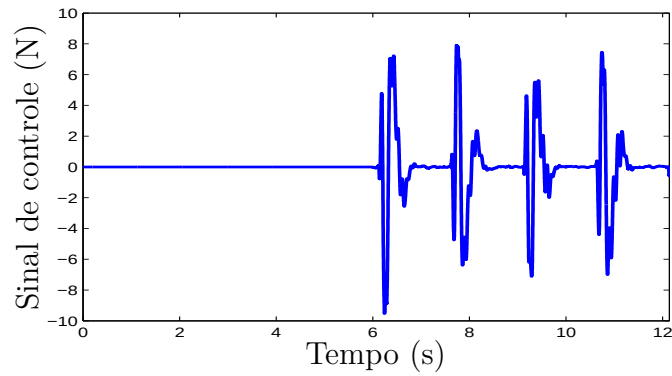
Aplicando a metodologia proposta pelo Teorema 5, as Figuras 7 e 9 mostram como o sistema com taxa de decaimento de 0,9 garante um bom desempenho ao sistema para os casos nos quais o parâmetro $\alpha(t)$ varia com frequência de 0,1Hz e 1Hz, respectivamente.

Figura 7 - Resposta transitória prática de malha aberta (0-6s) e de malha fechada (6-12,2s) para $\alpha(t)$ com frequência de 0,1Hz.



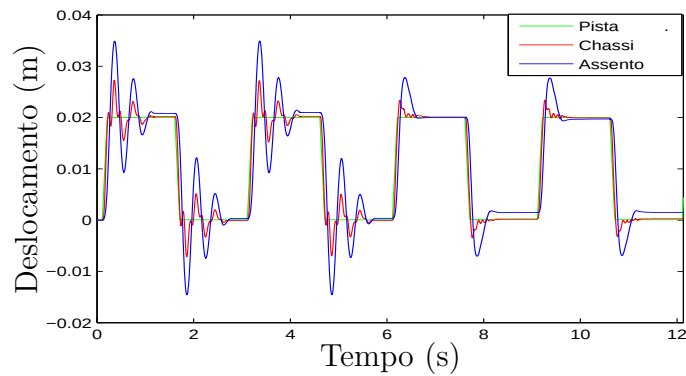
Nas Figuras 8 e 10 mostram-se as respostas do sinal de controle submetido a frequências diferentes, pode-se notar como a magnitude do valor cresceu, informação importante para determinar o desempenho da ação do controlador, nesse caso associado à frequência.

Figura 8 - Sinal de controle para $\alpha(t)$ com frequência de $0,1Hz$.



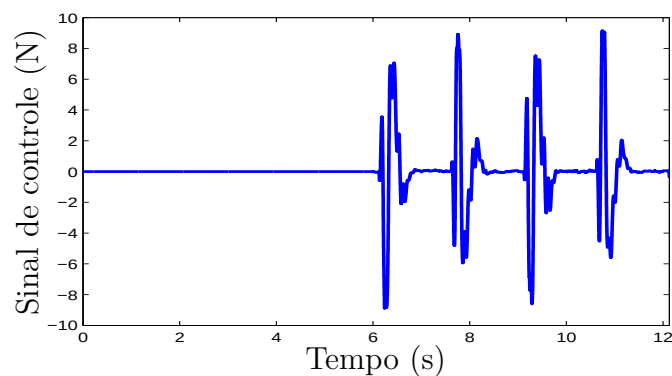
Fonte: Resultado do próprio autor

Figura 9 - Resposta transitória prática de malha aberta (0-6s) e de malha fechada (6-12,2s) para $\alpha(t)$ com frequência de $1Hz$.



Fonte: Resultado do próprio autor

Figura 10 - Sinal de controle para $\alpha(t)$ com frequência de $1Hz$.



Fonte: Resultado do próprio autor

Terceiro caso:

No Teorema 6, Teorema 7 e Teorema 8 apresenta-se uma metodologia para projetar o controlador considerando a influência de incertezas paramétricas. A metodologia foi aplicada para o seguinte exemplo:

$$A(\alpha(t), \beta) = A(\alpha(t)) + A(\beta),$$

$$B(\alpha(t), \beta) = B(\alpha(t)) + B(\beta),$$

sendo $A(\alpha(t))$, $A(\beta)$, $B(\alpha(t))$ e $B(\beta)$ combinações convexas definidas em (73).

Considere as matrizes:

$$A(\alpha(t), \beta) = \begin{bmatrix} -2 & \alpha(t) \\ \beta & -3 \end{bmatrix}, \quad B(\alpha(t), \beta) = \begin{bmatrix} \alpha(t) \\ \beta \end{bmatrix}, \quad (111)$$

A variação paramétrica $\alpha(t)$ impõe dois vértices, considerando a faixa de incertezas de 0,5 à 1 e a variação paramétrica β impõe outros dois vértices dado pelos valores 1 e 2.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0,5 \\ 0 & -1,5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1,5 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1,5 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1,5 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Usando as LMIs (99), (100) e (101) do Teorema 8 com valor de $\gamma = 1,8$ e $\kappa = 0,1$, os ganhos foram calculados usando (52):

$$K_{d_1} = Z_1 Q^{-T} = \begin{bmatrix} -57,7862 & -43,9332 \\ 0,0052 & -0,0001 \\ -0,0013 & 0,0040 \end{bmatrix}, \quad (112)$$

logo,

$$K_{d_1} = \begin{bmatrix} -0,2464 & -0,1709 \end{bmatrix}.$$

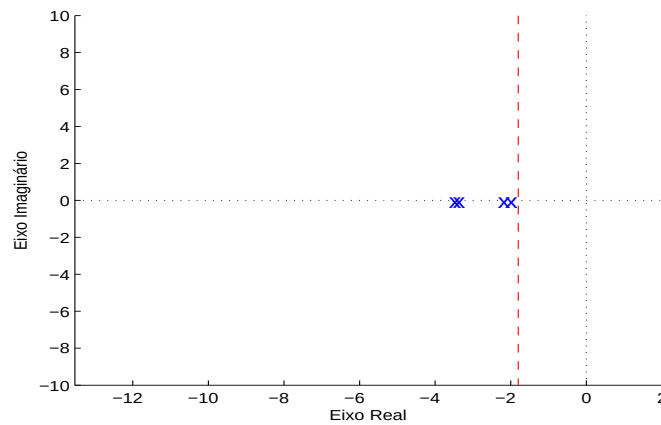
Ainda,

$$\begin{aligned} K_{d_2} = Z_2 Q^{-T} &= \begin{bmatrix} -58,6722 & -34,7838 \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} 0,0052 & -0,0001 \\ -0,0013 & 0,0040 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (113)$$

logo,

$$K_{d_2} = \begin{bmatrix} -0.2628 & -0.1338 \end{bmatrix}.$$

Figura 11 - Localização dos autovalores do sistema.



Fonte: Resultado do próprio autor

Tabela 2 - Localização dos autovalores do sistema realimentado com os ganhos (112) e (113).

Vértices	Autovalores
$A_1, A_3, B1, B3$	-2,1415 -3,6381
$A_1, A_4, B1, B4$	-2,0596 -4,5370
$A_2, A_3, B2, B3$	-2,3441 -3,5350
$A_2, A_4, B2, B4$	-2,1179 -4,0223

Fonte: Resultado do próprio autor

A Figura 11 e a Tabela 2 certificam que os valores dos ganhos garantiram a estabilidade do sistema, permitindo que os autovalores se encontrem no semiplano esquerdo e a esquerda do valor de gama estipulado.

5.1.1 *Conclusões parciais*

Nesse capítulo apresentou-se a teoria aplicada em um exemplo prático, demonstrando que as condições propostas são suficientes para projetar o controlador *gain scheduling* usando realimentação derivativa. Na implementação prática verificou-se a eficiência da nova técnica proposta, sob o cenário de se considerar a frequência de oscilação do parâmetro $\alpha(t)$ entre 0,01 e 1Hz. O Lema de Finsler foi muito útil para garantir a estabilidade do sistema. Os resultados numéricos mostram que a metodologia apresentada é viável.

6 CONCLUSÕES

Apresentaram-se, nesta dissertação, diferentes técnicas para síntese de controladores *gain scheduling* de sistemas com parâmetros variantes no tempo e realimentação derivativa, utilizando-se funções de Lyapunov quadráticas e o Lema de Finsler cujas formulações se basearam em LMIs.

A estratégia de controle apresentada no Capítulo 4 representa uma ferramenta útil em sistemas lineares com realimentação derivativas. O fato de usar o Lema de Finsler permitiu obter o valor do controlador sem ter que inverter uma matriz literal, sendo isto uma vantagem. A metodologia proposta permite que o projetista obtenha um controlador que estabilize o sistema com parâmetro variante no tempo com ou sem incertezas paramétricas.

A implementação prática foi uma ferramenta importante para validar a metodologia proposta, abrindo as portas à futuras pesquisas.

6.1 Sugestões para pesquisas futuras

- Projetar o controlador considerando a derivada do parâmetro em função do tempo.
- Obtenção de novos conjuntos menos conservadores.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABDELAZIZ, T. Pole assignment by state derivate feedback for single-input linear systems. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part I: Journal Systems Control Engineering*, London, v. 221, n. 7, p. 991 – 1000, 2007.
- ABDELAZIZ, T. Robust pole assignment for linear time-invariant systems using state-derivative feedback. *Part I: Journal Systems Control Engineering*, London, v. 223, n. 2, p. 187 – 199, 2009.
- ABDELAZIZ, T. Optimal control using derivative feedback for linear systems. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part I: Journal Systems Control Engineering*, London, v. 224, n. 2, p. 185 – 202, 2010.
- ABDELAZIZ, T.; VALASEK, M. Pole-placement for siso linear systems by state-derivative feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 151, n. 4, p. 377 – 385, 2004.
- ABDELAZIZ, T.; VALASEK, M. Eigenstruture assigment by proportional-plus-derivative feedback for second-order linear control systems. *Kybertinica*, Prague, v. 41, n. 5, p. 661 – 676, 2005b.
- ABDELAZIZ, T.; VALASEK, M. Direct algorithm for pole placement by state-derivative feedback for multi-input linear systems-nonsingular case. *Kybertinica*, Prague, v. 41, n. 5, p. 637 – 660, 2005c.
- APKARAIN, P.; GAHINET, P.; BECKER, G. Self-scheduled $\mathcal{H}_\infty$ control of linear parameter-varying systems: a design example. *Automática*, Kidlington, v. 31, n. 9, p. 1251–1261, 1995.
- ARAÚJO, J. M.; CASTRO, A. C.; SANTOS, E. T. F. Alocação de pólos em sistemas lineares invariantes no tempo utilizando realimentação da derivada de estados e a equação de lyapunov. *Sba: Controle Automação Sociedade Brasileira de Automatica*, Campinas, v. 20, p. 263 – 270, 09 2009.
- ASTROM, K. J.; WITTENMARK, B. *Adaptative control*. 2. ed. New York: Addison-Wesley, 2008.
- BIANCHI, F. D.; MANTZ, R. J. C. C. F. Control of variable-speed wind turbines by lpv gain scheduling. *Wind Energy*, Chichester, v. 8, n. 1, p. 1–7, 2004.
- BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. 2. ed. Philadelphia: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994. (Studies in Applied Mathematics, 15).
- CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; COVACIC, M. R. Design of

- state-derivative feedback controllers using a state feedback control design. In: *IFAC Symposium on System, Structure and Control*. Foz de Iguaçu: 3, 2007.
- CHEN, C. *Linear system theory and design*. 3. ed. New York: Oxford University Press, 1999. 352 p. (Oxford Series in Electrical and Computer Engineering).
- CHILALI, M.; GAHINET, P.; APKARIAN, P. Robust pole placement in LMI regions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 44, n. 12, p. 2257–2270, 1999.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. *Sistemas de controle modernos*. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. 659 p.
- DUAN G. R.; IRWIN, G. W. L. G. P. Robust stabilization of descriptor linear systems via proportional-plus-derivative state feedback. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 1999, San Diego. *Proceedings of the 1999 American Control Conference*. California, 1999. p. 1304–1308.
- FARIA, F. A. *Alocação de Polos com Realimentação da Derivada dos Estados usando LMIs*. 2005. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2005.
- FARIA, F. A.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M. Realimentação da derivada dos estados em sistemas multivariáveis lineares usando lmis. *Sba: Controle Automação Sociedade Brasileira de Automatica*, Campinas, v. 20, p. 83 – 93, 2009.
- GARCIA-PLANAS, M. Regularizing generalized linear systems by means a derivative feedback. In: PHYSICS AND CONTROL, 2003. St. Petersburg:IEEE, 2003. p. 1134–1140.
- HYDE, R.; GLOVER, K. The application of scheduled $\mathcal{H}_\infty$ controllers to a vstol aircraft. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 38, n. 7, p. 1021–1039, 1993.
- LEITH, D. . J. .; LEITHEAD, W. E. . Survey of gain-scheduling analysis and design. *International Journal of Control*, Abingdon, v. 73, n. 11, p. 1001–1025, 2000.
- LEWIS, F.; SYRMOS, V. A geometric theory for derivative feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 36, n. 9, p. 1111 – 1116, 1991.
- MICHIELS, W.; VYHLÍDAL, T.; HUIJBERTS, H.; NIJMEIJER, H. Stabilizability and stability robustness of state derivative feedback controllers. *SIAM Journal on Control and Optimization*, Philadelphia, v. 47, n. 6, p. 3100–3117, 2009.
- MONTAGNER, V. F. .; PERES, P. L. D. State feedback gain scheduling for linear systems with time-varying parameters. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2004,BOSTON. Boston: IEEE, 2004. v. 3, n. 1, p. 2004–2009.
- MOREIRA, M. R.; ESTEVES, T.; TEIXEIRA, M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO E.; FARIA, F. A. Stabilizability and disturbance rejection withs tate-derivative feedback. *ResearchGate*, New York, v. 151, p. 12, 2010.
- MOZELLI, L. A.; PALHARES, R. M.; AVELLAR, G. S. C. A systematic approach to improve multiple lyapunov function stability and stabilization conditions for fuzzy

systems. *Wind Energy*, Chichester, v. 8, n. 1, p. 1–7, 2004.

NAUS, G. *Gain scheduling Robust Design and Automated Tuning of Automotive Controllers*. Dissertação (Mestrado) — University of Technology Eindhoven, Eindhoven, 2009.

OGATA, K. *Engenharia de controle moderno*. 4. ed. New York: Prentice Hall, 2003. 800 p.

OLIVEIRA, D. R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ; ASSUNÇÃO, E.; SOUZA, W. A.; MOREIRA, M. R.; SILVA, J. H. P. Projeto de controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ chaveado: Implementação prática em um sistema de suspensão ativa. In: AUTOMATIC CONTROL, CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 2014. Belo Horizonte: SBA, 2014. p. 8. Disponível em: < <http://www.swge.inf.br/CBA2014/anais/PDF/1569934845.pdf>>. Acesso em: 22 set. 2015.

QUANSER, Active Suspension - User's Manual. 2009.

SHAMMA, J.; ATHANS, M. Stabilizability and stability robustness of state derivative feedback controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 35, n. 8, p. 3100–3117, 1990.

SILVA, E. R. da; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C.; FARIA, F. A.; BUZACHERO, L. F. Less conservative control design for linear systems with polytopic uncertainties via state-derivative feedback. *Mathematical Problems in Engineering*, New York, v. 2012, p. 1–21, 2012.

SILVA, E. R. P. da; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C.; FARIA, F. A.; BUZACHERO, L. F. Parameter-dependent Lyapunov functions for state-derivative feedback control in polytopic linear systems. *International Journal of Control*, Abingdon, v. 84, n. 8, p. 1377–1386, 2011.

SKELTON, R. E.; IWASAKI, T. E.; GRIGORIADIS, K. *A Unified Algebraic Approach to Control Design*. [S.l.]: Bristol: Taylor & Francis, 1997.

SOUZA, C. E.; TROFINO, A. Gain-scheduled H_2 controller synthesis for linear parameter varying systems via parameter-dependent lyapunov functions. *International journal of robust and nonlinear control*, Chichester, v. 2006, n. 16, p. 243–257, 2005.