Universidade Estadual Paulista

Campus de Rio Claro

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Análise Funcional: um texto para iniciação científica

Liliane Martinez Antonow

Orientadora: Prof^{a}. Dr^{a}. Simone Mazzini Bruschi

Dissertação apresentada ao Programa de Pós -Graduação - Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Departamento de Matemática como requisito para a obtenção do grau de Mestre.

Rio Claro - SP

Julho - 2011

TERMO DE APROVAÇÃO

Liliane Martinez Antonow
Análise Funcional: um texto para iniciação científica

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Simone Mazzini Bruschi
Orientadora

Prof. Dr. Ricardo Parreira da Silva
IGCE - Unesp/Rio Claro-SP

Profa. Dr. Vera Lúcia Carbone
UFSCAR /São Carlos-SP

Rio Claro, 28/07/2011.

Aos meus pais, Ana Reis e Elio Antonow, com todo amor.

Agradecimentos

A Deus.

Aos meus pais, Elio Antonow e Ana Reis, pelo apoio e confiança.

Ao meu noivo, Marcos Pavani de Carvalho, pelo amor, dedicação e paciência.

A professora Simone Mazzini Bruschi, pela orientação, seriedade e atenção.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática Universitária, pelas contribuições e apoio.

Aos funcionários do Departamento de Matemática da UNESP pela cordialidade e disponibilidade no atendimento.

Aos meus colegas de pós-graduação, em especial: Ana Paula, Juliana, Vania, Marinéia, Rejane, Nilton, Juracélio e Gustavo, todos estes amigos queridos em Rio Claro.

A todos, que de alguma forma contribuíram para a conclusão deste trabalho.

“Posso não concordar com nenhuma das palavras que você disser, mas defenderei até a morte o direito de você dizê-las.”

Voltaire

Resumo

Este trabalho consistiu em coletar e desenvolver uma sequência didática para o ensino de Análise Funcional aos estudantes de iniciação científica. Neste sentido a dissertação foi escrita para ser utilizada como livro-texto, transmitindo uma introdução de Análise Funcional e com o objetivo que ao final os estudantes estejam aptos a estudar textos mais específicos.

Palavras-chave: Análise Funcional, espaços normados, Teoremas de Hahn-Banach.

Abstract

This work suggests a didatic road map for teaching Functional Analysis to undergraduated students who wish to initiate a scientific carrier. The dissertation was written an introductory text book of Functional Analysis ofter which students could migrate to more specific papers.

Keywords: Functional Analysis, normed spaces, Hahn-Banach Theorem.

Sumário

Capítulo 1

Espaços Normados

Neste capítulo abordaremos o assunto de espaços vetoriais, veremos as definições e principais resultados, também serão estudados os teoremas de Banach-Steinhaus, Aplicação Aberta e Gráfico Fechado.

1.1 Espaço Vetorial

Definição 1.1.1 *Sejam E um conjunto e $\mathbb{K}$ um corpo. Suponhamos que existem aplicações de $E \times E$ em E e de $\mathbb{K} \times E$ em E, as quais denotaremos por $(x, y) \to x+y$ e $(\lambda, x) \to \lambda x$, respectivamente, satisfazendo as seguintes condições: $\forall\ x, y, z \in E$ e $\forall\ \lambda, \xi \in \mathbb{K}$*

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. *existe um elemento* 0 *de* E *tal que* $x + 0 = x$ *para todo* x
4. *a todo* x *de* E *corresponde um elemento, denotado por* $-x$*, tal que* $x+(-x) = 0$
5. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
6. $(\lambda + \xi)x = \lambda x + \xi x$
7. $(\lambda\xi)x = \lambda(\xi x)$
8. $0.x = 0$

9. $1.x = x$

Dizemos que E*, com estas duas aplicações, constitue um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$*.*

Serão considerados espaços vetoriais sobre o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ e sobre o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$.

Exemplo 1.1.1 $E = \mathbb{R}$ *e* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*, com as operações usuais em* $\mathbb{R}$*, é um espaço vetorial.*

Exemplo 1.1.2 $E = \mathbb{R}^n$ *e* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*, com as seguintes operações*

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \text{ e}$$
$$\lambda.(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \ \lambda \in \mathbb{R},$$

é um espaço vetorial.

Exemplo 1.1.3 $E = \{(x_1, \ldots, x_n)/x_i \in \mathbb{C}, i = 1, \ldots, n\} = l(n)$ *e* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *com as operações*

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \text{ e}$$
$$\lambda.(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \ \lambda \in \mathbb{C},$$

constitui um espaço vetorial.

Exemplo 1.1.4 *Definimos* $l_p(\mathbb{N}) = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}/x_n \in \mathbb{C} \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$*, se* $1 \leq p < \infty$ *e* $l_\infty(\mathbb{N}) = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}/x_n \in \mathbb{C} \text{ e } \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$*, se* $p = \infty$*.*

Sejam $x = (x_n)$, $y = (y_n) \in l_p(\mathbb{N})$ *e para cada* $\lambda \in \mathbb{K}$ *definimos*

$$x + y = (x_n + y_n) \text{ e}$$
$$\lambda x = (\lambda x_n).$$

Se $1 \leq p < \infty$*, para provar que a adição em* $l_p(\mathbb{N})$ *está bem definida, mostremos que se*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \ \ e \ \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p < \infty$$

então

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p < \infty.$$

De fato,

$$\begin{aligned} |x_n + y_n|^p &\leq (|x_n| + |y_n|)^p \\ &\leq (2\sup\{|x_n|, |y_n|\})^p \\ &= 2^p \sup\{|x_n|^p, |y_n|^p\} \\ &\leq 2^p(|x_n|^p + |y_n|^p). \end{aligned}$$

Logo, $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} |x_n + y_n|^p$ *é limitada por* $\displaystyle 2^p\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p\right) < \infty$.

Se $p = \infty$, *mostremos que*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty \quad e \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n| < \infty \quad \textit{então} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n + y_n| < \infty.$$

De fato,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n + y_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}(|x_n| + |y_n|) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| + \sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n| < \infty.$$

Portanto, $l_p(\mathbb{N})$ *é um espaço vetorial.*

Definição 1.1.2 *Seja* E *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ *e seja* F *um subconjunto de* E. *Então* F *é um subespaço vetorial de* E *se* F *é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ *com as operações de adição e mulplicação por escalar definidas no espaço* E.

Exemplo 1.1.5 *Seja* E *um espaço vetorial. O conjunto* $\{0\}$ *e o espaço* E *são chamados de subespaços triviais de* E.

Exemplo 1.1.6 *A intersecção de dois subespaços de* E *é também um subespaço vetorial de* E.

Seja E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. Um subconjunto F de E é dito *linearmente dependente* se existem vetores distintos $x_1, x_2, \ldots, x_n \in F$ e escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, não todos nulos, tais que $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$. Um conjunto que não é linearmente dependente é dito *linearmente independente*.

Se E é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que $B \subset E$ é uma *base* de E se são válidas as seguintes condições: $i)$ B gera E; $ii)$ B for linearmente independente.

Se E contém um conjunto de n vetores linearmente independente e se qualquer subconjunto de E com $n+1$ vetores é linearmente dependente, então dizemos que E tem *dimensão finita* n e representamos por $\dim E = n$.

Se E não for de dimensão finita, então é de *dimensão infinita*.

Definição 1.1.3 *Sejam E e F espaços vetorias sobre $\mathbb{K}$. Uma aplicação $T : E \to F$ será dita transformação linear se*

i) homogênea, isto é, $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e todo $x \in E$;

ii) aditiva, isto é, $T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2), \quad x_1, x_2 \in E$.

No caso em que $E = F$ dizemos que T é um *operador linear* e no caso em que $F = \mathbb{K}$ dizemos que T é um *funcional linear*.

Se a aplicação linear for bijetora dizemos que é *isomorfismo linear*.

Teorema 1.1.1 *Seja $T : E \longrightarrow F$ uma transformação linear, então*

i) A imagem de T, $R(T)$; é um subespaço vetorial de F,

ii) O núcleo de T, $N(T) = \{x \in E : T(x) = 0\}$; é um subespaço vetorial de E,

iii) Se $\dim D(T) = n < \infty$, onde $D(T)$ é domínio de T, então $\dim R(T) \leq n$.

Definição 1.1.4 *Uma norma em um espaço vetorial E sobre $\mathbb{R}$, é uma aplicação*

$$\| \,.\, \| : E \to \mathbb{R}$$

tal que:

i) $\|x\| \geq 0$ *e* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; *(positividade)*

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$; *(homogeneidade)*

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. *(desigualdade triangular)*

Temos as seguintes consequências imediatas:

1) Tomando $\lambda = -1$ em ii) temos

$$\| - x\| = \|x\|$$

em particular, $\|y - x\| = \|x - y\|$.

2) Temos que $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

Aplicando iii) em $x = (x - y) + y$ temos

$$\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

Aplicando iii) em $y = (y - x) + x$ temos

$$\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \geq -\|x - y\|.$$

Portanto,

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

Observação 1.1.1 *Definimos também o conceito de seminorma omitindo-se da definição de norma a propriedade* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

A transformação $T : E \longrightarrow F$ é uma *isometria*, se T é um isomorfismo linear que preserva normas, isto é, $\|T(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in E$.

1.2 Espaço Vetorial Normado

Definição 1.2.1 *Um espaço vetorial normado é um espaço vetorial no qual está definida uma norma.*

Exemplo 1.2.1 *$E = \mathbb{R}$ com a norma $\|x\| = |x|$.*

Exemplo 1.2.2 *$E = l(n)$, sendo $x = (x_1, \ldots, x_n)$*

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad e \qquad \|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

são normas.

Proposição 1.2.1 *Todo espaço normado E é um espaço métrico relativamente à métrica natural d defina por*

$$d(x, y) = \|y - x\|$$

se $x, y \in E$.

i) $d(x + z, y + z) = d(x, y)$;

ii) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$;

iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. *(desigualdade triangular)*

Demonstração.

A prova de $i)$ bem como a de $ii)$ é direta.

$iii)$ A desigualdade triangular resulta de

$$d(x, z) = \|z - x\| = \|z - y + y - x\| \leq \|y - x\| + \|z - y\|.$$

■

É conveniente recordarmos algumas definições.

Definição 1.2.2 *Sejam E um espaço vetorial normado, $a \in E$ e $\delta \geq 0$. Definimos:*

1. *Bola aberta de centro a e raio δ.*

$$B(a, \delta) = \{x \in E / \|x - a\| < \delta\}.$$

2. *Bola fechada de centro a e raio δ.*

$$B[a, \delta] = \{x \in E / \|x - a\| \leq \delta\}.$$

Um conjunto é *aberto* em E se é a reunião (finita ou não) de bolas abertas. Equivalentemente, um subconjunto $V \subset E$ será aberto se para todo $a \in V$ existir um $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subset V$. Temos que toda bola aberta $B(a, \delta)$ é um conjunto aberto.

Um conjunto F será *fechado* em E se seu complementar $E \backslash F$ for aberto em E.

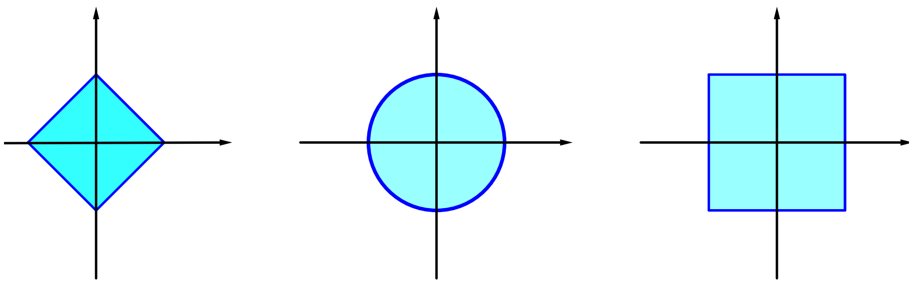
Um ponto $a \in E$ é chamado de *aderente* ao conjunto $G \subset E$ se toda bola centrada em a intercepta G. Isso signica que há pontos de G arbitrariamente próximos de a.

O *fecho* de um subconjunto G de E é o conjunto de seus pontos aderentes e é denotado por $\overline{G}$.

Exemplo 1.2.3 *As representações gráficas para as bolas*

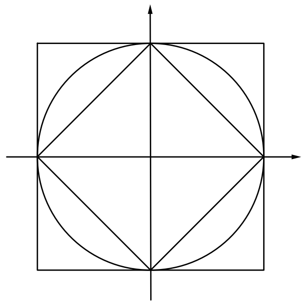
$$B_1[0,1] = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x\|_1 \leq 1\};$$
$$B_2[0,1] = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x\|_2 \leq 1\} \ e$$
$$B_\infty[0,1] = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x\|_\infty \leq 1\}.$$

são, respectivamente:



$B_1[0,1]$ $\quad$ $B_2[0,1]$ $\quad$ $B_\infty[0,1]$

Observe que:



$\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1 \leq 2\|\cdot\|_\infty$

Bolas em $\mathbb{R}^2$.

1.3 Desigualdades de Young, Hölder e Minkowski

Exemplo 1.3.1 *Seja* $1 \leq p \leq \infty$. *Definimos o espaço* $l_p(n)$ *como sendo o espaço* $\mathbb{R}^n$ *munido da norma*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \text{ se } 1 \leq p < \infty \text{ e}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \text{ se } p = \infty.$$

Primeiramente vamos provar que $\| \,.\, \|_p$ *é uma norma em* $l_p(n)$.

As propriedades $i)$ *e* $ii)$ *são facilmente verificadas. Para a verificação da propriedade* $iii)$ *utilizaremos as desigualdades de Young e Hölder que veremos a seguir.*

Dado $p > 1$, dizemos que $q > 1$ é o *conjugado* de p se $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Se $p = 1$ o seu conjugado é, por definição, $q = \infty$.

Daqui resulta que

$$q = \frac{p}{p-1} \quad \text{e} \quad p = \frac{q}{q-1}$$

e, além disso,

$$1 = \frac{p+q}{pq}, \;\; pq = p + q \quad \text{e} \quad (p-1)(q-1) = 1.$$

Desigualdade de Young

Dados $a, b \geq 0$, $p > 1$ e $q > 1$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, temos

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração.

Consideremos o caso em que a, $b > 0$, pois se $a = 0$ ou $b = 0$ é trivial.

Seja $m = \dfrac{1}{p}$, claro que $0 < m < 1$.

Consideremos a função $f(t) = m(t-1) - (t^m - 1)$. A derivada de f é dada por $f'(t) = m - mt^{m-1} = mt^{m-1}(t^{1-m} - 1)$.

Temos que $f(t) \geq 0$ para $t \geq 0$, pois observamos

$$0 < t < 1 \Rightarrow f'(t) < 0 \Rightarrow f(t) \geq f(1) = 0, \qquad 0 \leq t \leq 1 \quad \text{e}$$

$$t > 1 \Rightarrow f'(t) > 0 \Rightarrow f(t) \geq f(1) = 0, \qquad t \geq 1.$$

Desde que $f(t) = m(t-1) - (t^m - 1) \geq 0$, então $t^m \leq mt - m + 1, \quad \forall\, t \geq 0$.

Como $m = \dfrac{1}{p}$ e $t = \dfrac{a^p}{b^q}$, temos que

$$\frac{a}{b^{\frac{q}{p}}} \leq \frac{1}{p}\frac{a^p}{b^q} + \frac{1}{q} \Rightarrow ab^{q-\frac{q}{p}} \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

onde $q - \dfrac{q}{p} = 1$.

Portanto,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

■

Desigualdade de Hölder

Sejam $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ em $\mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{R}^n$. Sejam $p \geq 1$, $q \leq \infty$ tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ temos:

$$\sum_{i=1}^{n} \mid x_i y_i \mid \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \mid x_i \mid^p \right)^{\frac{1}{p}} . \left(\sum_{i=1}^{n} \mid y_i \mid^q \right)^{\frac{1}{q}}, \text{ se } 1 < p < \infty;$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mid x_i y_i \mid \leq \sum_{i=1}^{n} \mid x_i \mid . \sup_{1\leq i\leq n} \mid y_i \mid, \text{ se } p = 1 \text{ e } q = \infty.$$

Demonstração.

Consideremos $1 < p < \infty$, pois o caso $p = 1$ é imediato.

Usando a desigualdade de Young com $a_i = \dfrac{|x_i|}{\|x\|_p}$, $b_i = \dfrac{|y_i|}{\|y\|_q}$ sendo $i = 1, 2, \ldots, n$; temos

$$\begin{aligned}
\frac{|x_1 y_1|}{\|x\|_p \|y\|_q} &\leq \frac{1}{p}.\frac{|x_1|^p}{(\|x\|_p)^p} + \frac{1}{q}.\frac{|y_1|^q}{(\|y\|_q)^q} \\
\frac{|x_2 y_2|}{\|x\|_p \|y\|_q} &\leq \frac{1}{p}.\frac{|x_2|^p}{(\|x\|_p)^p} + \frac{1}{q}.\frac{|y_2|^q}{(\|y\|_q)^q} \\
\frac{|x_3 y_3|}{\|x\|_p \|y\|_q} &\leq \frac{1}{p}.\frac{|x_3|^p}{(\|x\|_p)^p} + \frac{1}{q}.\frac{|y_3|^q}{(\|y\|_q)^q} \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
\frac{|x_n y_n|}{\|x\|_p \|y\|_q} &\leq \frac{1}{p}.\frac{|x_n|^p}{(\|x\|_p)^p} + \frac{1}{q}.\frac{|y_n|^q}{(\|y\|_q)^q}.
\end{aligned}$$

Somando as n desigualdades, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|x\|_p \|y\|_q} \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| &= \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_q} \\
&\leq \frac{1}{p}.\frac{1}{(\|x\|_p)^p} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p + \frac{1}{q}.\frac{1}{(\|y\|_q)^q} \sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.
\end{aligned}$$

Consequentemente, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} \mid x_i y_i \mid \leq \|x_i\|_p \|y_i\|_q.$$

■

Observação 1.3.1 *Note que para $p = q = 2$ obtemos a Desigualdade de Cauchy-Schwarz.*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x_i\|_2 \|y_i\|_2.$$

Desigualdade de Minkowski

Dados $p \geq 1$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ em $\mathbb{C}^n$ temos

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

Demonstração.

Com efeito, para $p = 1$ ou $p = \infty$ é imediato.

Suponhamos o caso em que $1 < p < \infty$. Queremos mostrar que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Temos,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p &= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{p-1} |x_i + y_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{p-1} (|x_i| + |y_i|) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Big[|x_i + y_i|^{p-1} |x_i| + |x_i + y_i|^{p-1} |y_i| \Big] \\ &= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{p-1} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} \mid x_i + y_i \mid^{p-1} \mid y_i \mid . \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder a cada uma das parcelas acima, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Desde que $(p-1)q = p$ temos

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \right].$$

Dividindo esta última desigualdade por $\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}$ temos

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Portanto

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

■

Exemplo 1.3.2 $l_p(\mathbb{N})$ *munido da norma*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ se\ 1 \leq p < \infty \quad e \quad \|x\|_p = \sup_{i\in\mathbb{N}}|x_i|,\ se\ p=\infty$$

é um espaço vetorial normado

A demonstração é análoga a de que $l_p(n)$ é normado.

Exemplo 1.3.3 *Seja $E = C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}/f$ é função contínua$\}$ sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar de funções.*

Provaremos que

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad e \qquad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]}|f(x)|,$$

se $1 \leq p < \infty$ e $p = \infty$ respectivamente, são normas em $C[a,b]$.

Temos as seguintes afirmações.

Desigualdade de Hölder

Sejam $1 \leq p \leq \infty$, com $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$ e sejam $f, g \in C[a,b]$ então se $1 < p < \infty$

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} . \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

e se $p = 1$

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|dx\right). \sup_{x\in[a,b]} |g(x)|.$$

Demonstração.

Os casos $p = 1$ ou $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$ são imediatos.

Seja $1 < p < \infty$, com as integrais finitas e não nulas, considere $\|f\|_p \neq 0$ e $\|g\|_q \neq 0$; definimos $\dfrac{|f(x)|}{\|f\|_p}$ e $\dfrac{|g(x)|}{\|g\|_q}$.

Para cada $x \in [a, b]$, pela desigualdade de Young, temos

$$\frac{|f(x)||g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q} \leq \frac{1}{p}\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}\right)^q.$$

Por integração, temos

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\int_a^b |f(x)||g(x)|dx \leq \frac{1}{p}\frac{1}{\|f\|_p^p}\int_a^b |f(x)|^p dx + \frac{1}{q}\frac{1}{\|g\|_q^q}\int_a^b |g(x)|^q dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\int_a^b |f(x)||g(x)|dx \leq \frac{1}{p}\frac{1}{\|f\|_p^p}\|f\|_p^p + \frac{1}{q}\frac{1}{\|g\|_q^q}\|g\|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Logo, $\displaystyle\int_a^b |f(x)||g(x)|dx \leq \|f\|_p\|g\|_q$.

Em outras palavras,

$$\int_a^b |f(x)||g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

■

Desigualdade de Minkowski

Seja $1 \leq p < \infty$ e sejam $f, g \in C[a, b]$ então

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Se $p = \infty$ então

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |g(x)|.$$

Demonstração.

Suponha que $f, g \in C[a,b]$ não sejam simultaneamente nulas.

Para $p = 1$ ou $p = \infty$ conclusão direta. Para $1 < p < \infty$ e $f, g \in C[a,b]$, temos

$$\begin{aligned}\int_a^b (|f(x)|+|g(x)|)^p dx &= \int_a^b (|f(x)|+|g(x)|)^{p-1}.(|f(x)|+|g(x)|)dx \\ &= \int_a^b (|f(x)|+|g(x)|)^{p-1}|f(x)|dx + \int_a^b (|f(x)|+|g(x)|)^{p-1}|g(x)|dx.\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder nas duas parcelas do 2º membro da igualdade, obtemos

$$\begin{aligned}\int_a^b (|f(x)|+|g(x)|)^{p-1}|f(x)|dx &\leq \left(\int_a^b [(|f(x)|+|g(x)|)^{p-1}]^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_a^b (|f(x)|+|g(x)|)^p dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

e

$$\int_a^b (|f(x)|+|g(x)|)^{p-1}|g(x)|dx \leq \left(\int_a^b (|f(x)|+|g(x)|)^p dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Assim, temos que

$$\int_a^b (|f(x)|+|g(x)|)^p dx \leq \left(\int_a^b (|f(x)|+|g(x)|)^p dx\right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right].$$

Logo,

$$\frac{\displaystyle\int_a^b (|f(x)|+|g(x)|)^p dx}{\left(\int_a^b (|f(x)|+|g(x)|)^p dx\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

e como $1 - \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p}$, obtemos

$$\left(\int_a^b (|f(x)|+|g(x)|)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

■

1.4 Espaço das Transformações Lineares Limitadas

Definição 1.4.1 *Sejam E e F espaços vetoriais normados e $T : E \to F$ uma transformação linear. Dizemos que T é limitada se existir uma constante $C \geq 0$ tal que $\|T(x)\| \leq C\|x\|$, $\forall\ x \in E$, ou seja, existe $C \geq 0$ tal que $\dfrac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq C$, $\forall$ $x \in E \setminus \{0\}$.*

Exemplo 1.4.1 *Seja $T : E \to E$, $T(x) = x$ a Definição 1.4.1 é satisfeita considerando $C \geq 1$.*

Denotamos o *conjunto das transformações lineares limitadas de E em F* por $\mathcal{L}(E, F)$.

No caso em que $E = F$ denotaremos o espaço $\mathcal{L}(E, E)$ simplesmente por $\mathcal{L}(E)$. No caso em que $F = \mathbb{K}$ chamamos $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ de *dual* do espaço vetorial normado E, e denotamos por E^*.

Definição 1.4.2 *Dada $T \in \mathcal{L}(E, F)$, definimos*

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}.$$

Devido a linearidade de T temos

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|.$$

De fato,

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \left\| T\left(\frac{1}{\|x\|} x \right) \right\| = \sup_{\|y\|=1} \|T(y)\|.$$

Mostraremos a seguir que $\|T\|$ é uma norma em $\mathcal{L}(E, F)$.

Proposição 1.4.1 *Sejam E, F espaços normados.*

A função $T \in \mathcal{L}(E, F) \to \|T\|$ define uma norma em $\mathcal{L}(E, F)$.

Demonstração.

Claro que $\|T\| \geq 0$ e $\|T\| = 0$ se, e somente se, $T = 0$.

E também
$$\|\lambda T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\lambda T(x)\|}{\|x\|} = |\lambda| \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = |\lambda| \|T\|.$$

Finalmente para provar a desigualdade triangular, temos que

$$\|T + U\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x) + U(x)\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} + \sup_{x \neq 0} \frac{\|U(x)\|}{\|x\|} = \|T\| + \|U\|$$

para quaisquer T e U em $\mathcal{L}(E, F)$.

■

O Teorema a seguir nos dá uma relação entre a limitação e a continuidade de $T \in \mathcal{L}(E, F)$

Teorema 1.4.1 *Sejam E e F espaços vetoriais normados, $T : E \to F$ uma transformação linear, então as afirmações abaixo são equivalentes:*

i) *T é uniformemente contínua, isto é, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, $\|x - y\| < \delta$ implica $\|T(x) - T(y)\| < \epsilon$, para quaisquer $x, y \in E$.*

ii) *T é contínua.*

iii) *T é contínua em $x = 0$.*

iv) *Existe $c > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq c$, $\forall x \in E$ com $\|x\| = 1$.*

v) *Existe $d > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq d\|x\|$, $\forall x \in E$.*

Demonstração.

$i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii)$ Direto.

$iii) \Rightarrow iv)$
Suponhamos que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in E$ tal que $\|T(x_n)\| > n$ com $\|x_n\| = 1$.

Seja $y_n = \dfrac{1}{n} x_n$, assim temos

$$\|y_n\| = \left\|\frac{1}{n}x_n\right\| = \left|\frac{1}{n}\right|\|x_n\| = \frac{1}{n}\|x_n\| = \frac{1}{n}.$$

Assim $\|y_n\| \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$.

Calculndo $T(y_n)$, temos

$$T(y_n) = T\left(\frac{1}{n}x_n\right) = \frac{1}{n}T(x_n).$$

Logo, $\|T(y_n)\| = \left\|\frac{1}{n}T(x_n)\right\| = \frac{1}{n}\|T(x_n)\| > \frac{1}{n}n = 1.$

Assim, $T(y_n)$ não tende a zero.

Portanto T não é contínua em $x = 0$.

iv) $\Rightarrow$ *v)*
Seja $d = c$. Dado $x \in E$, se $x = 0$ temos $T(0) = 0$, logo $\|T(0)\| = \|0\| = c\|0\|$.

Se $x \neq 0$, seja $y = \frac{x}{\|x\|} = \frac{1}{\|x\|}x$, assim $\|y\| = 1$

Logo,

$$\frac{1}{\|x\|}\|T(x)\| = \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \|T(y)\| \leq c.$$

Portanto, $\|T(x)\| \leq c\|x\|$.

v) $\Rightarrow$ *i)*
Temos que

$$\|T(x) - T(y)\| = \|T(x-y)\| \leq d\|x-y\| \Rightarrow \|T(x) - T(y)\| \leq d\|x-y\|.$$

Logo T é Lipschitz.
Portanto, T é uniformemente contínua.

■

Nem toda transformação linear $T : E \to F$, definida num espaço vetorial normado qualquer E, é contínua. Vejamos o seguinte exemplo.

Exemplo 1.4.2 *Seja E o conjunto dos polinômios reais com uma variável munido da seguinte norma $\|p\| = \sup\limits_{0\leq x\leq 1} |p(x)|$. Seja $T : E \to \mathbb{R}$ definida por $T(p) = p(2)$. O funcional linear T é descontínuo no ponto $0 \in E$. Tomando $\epsilon = \frac{1}{2}$, temos que para cada $n \in \mathbb{N}$ encontramos um polinômio $p_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n$, tal que $\|p_n - 0\| = \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$ mas $|T(p_n) - T(0)| = |T(p_n)| = 1$.*

O Lema a seguir nos dá que $\|T\|$ pode ser definida por outra expressão.

Lema 1.4.1 *Se $T : E \to F$ é uma transformação linear limitada entre espaços normados, então*

$$\|T\| = \inf\{C > 0 : \|T(x)\| \leq C\|x\|, \ \forall x \in E\}.$$

Assim, $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$.

Demonstração.

Verifiquemos que $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$ para todo $x \in E$.

Suponha, por absurdo, que existe $x_0 \in E$ tal que $\|T(x_0)\| > \|T\|\|x_0\|$, o que implica que $\frac{\|T(x_0)\|}{\|x_0\|} > \|T\|$, que é uma contradição a definição de $\|T\|$.

Tomando $C \geq 0$ tal que $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in E$, temos $\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq C$ para todo $x \in E \setminus \{0\}$.

Pela definição $\|T\| = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$, concluimos que $\|T\| \leq \inf\{C > 0 : \|T(x)\| \leq C\|x\|, \ \forall\, x \in E\}$.

Como $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$ para todo $x \in E$, temos que $\|T\| \geq \inf\{C > 0 : \|T(x)\| \leq C\|x\|, \ \forall\, x \in E\}$.

Portanto, $\|T\| = \inf\{C > 0 : \|T(x)\| \leq C\|x\|, \ \forall\, x \in E\}$.

■

1.5 Dimensão Finita

Nesta seção mostraremos algumas propriedades que caracterizam os espaços normados de dimensão finita. Se E possui dimensão finita, toda transformação linear de E em F é contínua e as normas em E são equivalentes.

Lema 1.5.1 *Seja $\{x_1, ..., x_n\}$ um conjunto linearmente independente de vetores do espaço vetorial normado E de dimensão finita. Então existe uma constante $C > 0$ tal que para quaisquer α_i, $1 \leq i \leq n$, temos*

$$\|\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n\| \geq C(|\alpha_1| + ... + |\alpha_n|). \tag{1.1}$$

Demonstração.
Façamos

$$S = |\alpha_1| + ... + |\alpha_n|.$$

Se $S = 0$ então todos os α_j são nulos e (1.1) é verdade. Suponhamos que $S > 0$. Dividindo (1.1) por S, obtemos a desigualdade

$$\|\beta_1 x_1 + ... + \beta_n x_n\| \geq C \text{ e } \sum_{j=1}^{n} |\beta_j| = 1$$

com $\beta_1 = \dfrac{\alpha_1}{|\alpha_1| + ... + |\alpha_n|}, \ \dots \ , \beta_n = \dfrac{\alpha_n}{|\alpha_1| + ... + |\alpha_n|}$.

Para provar (1.1) basta provar que existe $C > 0$ tal que

$$\|\beta_1 x_1 + ... + \beta_n x_n\| \geq C \tag{1.2}$$

para quaisquer $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |\beta_j| = 1$.

Suponhamos que (1.2) seja falsa. Então, existe uma sequência $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ em E tal que

$$\begin{gathered}
y_1 = \beta_1^{(1)} x_1 + ... + \beta_n^{(1)} x_n \\
y_2 = \beta_1^{(2)} x_1 + ... + \beta_n^{(2)} x_n \\
\vdots \\
y_k = \beta_1^{(k)} x_1 + ... + \beta_n^{(k)} x_n \\
\vdots
\end{gathered}$$

temos que $\sum_{j=1}^{n} |\beta_j^{(m)}| = 1$ e $\|y_m\|$ converge para 0 quando m tende para infinito.

Os índices sobrescritos estão de acordo com o índice da sequência $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ e os subescritos com a coordenada do elemento na sequência.

Assim, para cada j fixado na sequência obtemos

$$\begin{gathered}(\beta_1^{(m)}) = (\beta_1^{(1)}, \beta_1^{(2)}, \ldots) \\ (\beta_2^{(m)}) = (\beta_2^{(1)}, \beta_2^{(2)}, \ldots) \\ \vdots \\ (\beta_n^{(m)}) = (\beta_n^{(1)}, \beta_n^{(2)}, \ldots)\end{gathered}$$

Como $\sum_{j=1}^{n} |\beta_j^{(m)}| = 1$, temos que $|\beta_j^{(m)}| \leq 1$. Assim, $(\beta_j^{(m)}) = (\beta_j^{(1)}, \beta_j^{(2)}, \ldots)$ é limitada.

Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, cada sequêcia limitada possui uma subsequência convergente. Logo, a sequência limitada $(\beta_1^{(m)}) = (\beta_1^{(1)}, \beta_1^{(2)}, \ldots)$ possui uma subsequência convergente. Sejam β_1 o seu limite e $(y_1^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ a correspondente subsequência de $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$.

Da mesma forma, $(\beta_2^{(m)})$ possui uma subsequência convergente, sendo β_2 o seu limite e $(y_2^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ a correspondente subsequência de $(y_1^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$.

Com esse mesmo argumento, para $j = 3, \ldots, n$ obtemos uma nova sequência de $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ da seguinte forma

$$(y_n^{(m)}) = (y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, \ldots) \text{ de } (y_m)$$

com termos

$$\begin{aligned} y_n^{(1)} &= \eta_1^{(1)} x_1 + \eta_2^{(1)} x_2 + \ldots + \eta_n^{(1)} x_n \\ y_n^{(2)} &= \eta_1^{(2)} x_1 + \eta_2^{(2)} x_2 + \ldots + \eta_n^{(2)} x_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Logo,

$$y_n^{(m)} = \sum_{j=1}^{n} \eta_j^{(m)} x_j \text{ e } \sum_{j=1}^{n} |\eta_j^{(m)}| = 1$$

com $\eta_1^{(m)} \longrightarrow \beta_1$, $\eta_2^{(m)} \longrightarrow \beta_2$, $\ldots$, $\eta_n^{(m)} \longrightarrow \beta_n$, ou seja, $\eta_j^{(m)} \longrightarrow \beta_j$ quando $m \longrightarrow \infty$.

Assim, quando $m \longrightarrow \infty$, $y_n^{(m)} \longrightarrow y = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j$, com $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |\beta_j| = 1$, assim nem todos os β_j são nulos e como o conjunto $\{x_1, ..., x_n\}$ é linearmente independente, temos que $y \neq 0$.

Por outro lado, $y_n^{(m)} \longrightarrow y$ então $\|y_n^{(m)}\| \longrightarrow \|y\|$, pela continuidade de norma. Como $\|y_m\| \longrightarrow 0$ e $(y_n^{(m)})$ é subsequência de (y_m), temos que $\|y_n^{(m)}\| \longrightarrow 0$

Portanto, pela definição de norma temos que $\|y\| = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Contradição, pois $y \neq 0$.

■

Teorema 1.5.1 *Se um espaço vetorial normado E é de dimensão finita, então toda transformação linear de E em F é limitada.*

Demonstração.

Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de E, sendo $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ e T uma transformação linear.

Assim,

$$\|T(x)\| = \left\| T\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \right) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i T(e_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| \|T(e_i)\| \leq \max_k \|T(e_k)\| \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|.$$

Pelo Lema 1.5.1, temos

$$\sum_{i=1}^{n} |\xi_i| \leq \frac{1}{C} \left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \right\| = \frac{1}{C} \|x\|.$$

Logo, $\|T(x)\| \leq \alpha \|x\|$, onde $\alpha = \dfrac{1}{C} \max\limits_k \|T(e_k)\|$.

Portanto T é limitado.

■

Nem toda transformação linear num espaço de dimensão infinita é limitada; vejamos o seguinte exemplo.

Exemplo 1.5.1 *Seja $C^1[0,1]$ o conjunto das funções definidas em $[0,1]$ cuja 1ª derivada existe e é contínua. Dado $T : C^1[0,1] \to C[0,1]$; $C[0,1]$ com a norma $\| \, . \, \|_\infty$ e com a seguinte transformação $(Tf)(x) = f'(x)$. Essa transformação é linear e não é limitada.*

De fato, seja $x_n(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Então $\|x_n\| = \sup |x_n(t)| = \sup |t^n| = 1$ e $T(x_n) = nt^{n-1}$.

Logo, $\|T(x_n)\| = n$ e $\dfrac{\|T(x_n)\|}{\|x_n\|} = n$. Dado $C > 0$, existe n tal que $\dfrac{\|T(x_n)\|}{\|x_n\|} \geq C$.

Portanto, T não é limitada.

Definição 1.5.1 *(Normas equivalentes) Uma norma $\| \, . \, \|$ de um espaço vetorial E é equivalente a norma $\| \, . \, \|'$ se existem constantes positivas a, b tal que*

$$a\| \, . \, \|' \leq \| \, . \, \| \leq b\| \, . \, \|'.$$

Teorema 1.5.2 *Seja E um espaço vetorial normado de dimensão finita, todas as normas são equivalentes.*

Demonstração.

Suponhamos que $\dim E = n$ e $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base de E. Então qualquer $x \in E$ pode ser escrito como

$$x = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n.$$

Pelo Lema 1.5.1 existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|x\| \geq C(|\alpha_1| + ... + |\alpha_n|) = C\left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|\right). \tag{1.3}$$

Por outro lado temos

$$\|x\|' = \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right\|' \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \, \|e_i\|' \leq K\left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|\right). \tag{1.4}$$

sendo $K = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \|e_i\|'$

Portanto, por (1.3) e (1.4) temos

$$\frac{1}{K}\|x\|' \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \leq \frac{1}{C}\|x\|.$$

Assim, $\dfrac{C}{K}\|x\|' \leq \|x\|$, ou seja, $a\|x\|' \leq \|x\|$ com $a = \dfrac{C}{K} > 0$.

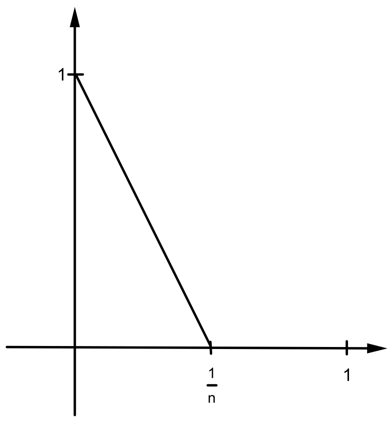
A outra desigualdade é encontrada de forma análoga, isto é, $\|x\| \leq b\|x\|'$, com $b > 0$.

■

Enquanto num espaço de dimensão finita todas as normas são equivalentes, num espaço de dimensão infinita isso nem sempre ocorre, como mostraremos no exemplo a seguir.

Exemplo 1.5.2 *Considere em $C[0,1]$ a sequência de funções (f_n), onde cada f_n é definida por*

$$f_n(x) = \begin{cases} -nx+1, & 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ 0, & \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$



Note que com a norma $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$, temos que $\|f_n\|_1 = \dfrac{1}{2n}$ e assim a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para a função nula que denotaremos por 0.

Agora, usando a norma $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ a mesma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge. Se a sequência convergisse, existiria $g \in C[0,1]$ tal que $f_n \to g$ uniformemente. Mas neste caso teríamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para g pontualmente, o que é um absurdo, pois o limite pontual de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a função:

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

que por sua vez não pertence a $C[0,1]$.

1.6 Espaço Normado Completo

Definições 1.6.1

1. *Dizemos que uma sequência* (x_n) *no espaço vetorial normado* E *é de* Cauchy *se para qualquer* $\epsilon > 0$, *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que sempre* $m, n > n_0$ *temos* $\|x_m - x_n\| < \epsilon$.

2. *Uma sequência* (x_n) *é* limitada *se existe uma constante* $k > 0$ *tal que* $\|x_n\| \leq k$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 1.6.1 *Toda sequência convergente em* E *é uma sequência de Cauchy em* E.

Demonstração.

Seja (x_n) uma sequência convergente para $\overline{x}$, assim

$$\forall \epsilon > 0, \exists\, n_0 / n \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - \overline{x}\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo, se $m, n \geq n_0$ pela desigualdade triangular, temos

$$\|x_m - x_n\| = \|(x_m - \overline{x}) + (\overline{x} - x_n)\| \leq \|x_m - \overline{x}\| + \|x_n - \overline{x}\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto, (x_n) é de Cauchy.

■

Observação 1.6.1 *A recíproca da proposição anterior nem sempre é verdadeira.*

Com efeito, seja (x_n) *uma sequência de números racionais convergindo para um número irracional. Numericamente, temos a seguinte sequência*

$$1;\ 1,4;\ 1,41;\ 1,414;\ \ldots$$

que converge para $\sqrt{2}$. Sendo convergente em $\mathbb{R}$ temos que (x_n) é de Cauchy em $\mathbb{R}$, e portanto, em $\mathbb{Q}$. Porém (x_n) não é convergente em $\mathbb{Q}$.

Proposição 1.6.2 *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração.

Seja (x_n) uma sequência de Cauchy. Então, dado $\epsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq n_0 \Rightarrow \|x_m - x_n\| < 1$.

Logo, $\|x_n - x_{n_0}\| < 1$ para $n > n_0$. Pela desigualdade triangular, temos

$$\|x_n\| \leq \|x_{n_0}\| + \|x_n - x_{n_0}\| < \|x_{n_0}\| + 1$$

para $n > n_0$.

Tome $k = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|, \ldots, \|x_{n_0-1}\|, \|x_{n_0}\| + 1\}$

Portanto, (x_n) é uma sequência limitada.

■

Observação 1.6.2 *Nem toda sequência limitada é de Cauchy.*

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com

$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ 0 & \text{se } n \text{ for par} \end{cases}$$

temos que a sequência é limitada, porém $\|x_n - x_{n+1}\| = 1$ e portanto a sequência não é de Cauchy.

Definição 1.6.1 *Dizemos que um espaço vetorial normado é completo se toda sequência de Cauchy nesse espaço for convergente.*

Exemplo 1.6.1 *O espaço $\mathbb{Q}$ não é completo.*

Exemplo 1.6.2 *O espaço* $l_p(\mathbb{N})$ *com* $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, *se* $1 \leq p < \infty$ *é completo.*

De fato, seja $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de Cauchy em* $l_p(\mathbb{N})$, $x_m = (\xi_j^{(m)})_{j\in\mathbb{N}}$. *Assim, dado* $\epsilon > 0$, *existe* n_0 *tal que* $m, n > n_0$ *então*

$$\|x_m - x_n\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

Como $|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}| \leq \|x_m - x_n\|_p$ *então para todo* $\epsilon > 0$ *existe* n_0 *tal que*

$$|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}| < \epsilon,$$

para quaisquer números $n, m > n_0$ *e* $j \in \mathbb{N}$. *Assim, para cada* $j \in \mathbb{N}$, $(\xi_j^{(n)})$ *é uma sequência de Cauchy em* $\mathbb{K}$. *Como* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *com as métricas usuais são completos, a sequência* $(\xi_j^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente para cada* $j \in \mathbb{N}$.

Seja a_k *o limite da sequência* $(\xi_j^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ *e façamos* $a = (a_1, \ldots, a_k, \ldots)$, *desde que para quaisquer números naturais* $n, m > n_0$ *e para qualquer* $r \in \mathbb{N}$ *temos*

$$\sum_{k=1}^{r}|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}|^p < \epsilon^p,$$

fazendo $m \longrightarrow \infty$ *obtemos*

$$\sum_{k=1}^{r}|\xi_k^{(n)} - a_k|^p \leq \epsilon^p.$$

Fazendo agora $r \longrightarrow \infty$ *obtemos*

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k^{(n)} - a_k|^p \leq \epsilon^p,$$

o que mostra que $(x_n - a) \in l_p(\mathbb{N})$.

Assim, $\|x_n - a\|_p < \epsilon$. *Como* $x_n \in l_p(\mathbb{N})$ *e* $a = (a - x_n) + x_n$ *temos* $a \in l_p(\mathbb{N})$, *ou seja,* $x_n \longrightarrow a$ *em* $l_p(\mathbb{N})$.

Exemplo 1.6.3 $\mathbb{R}^n$ *é completo.*

A demonstração é análoga ao exemplo anterior.

Definição 1.6.2 *Sejam E um espaço vetorial normado e (x_n) uma sequência em E. Dizemos que uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente quando a sequência (s_n) de suas somas parciais, $s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, for convergente. Nesse caso, a soma da série é o limite da sequência (s_n), isto é:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} s_n.$$

Quando uma série não converge, ela é denominada divergente.

Definição 1.6.3 *Se $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ é convergente, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é chamada de absolutamente convergente.*

Definição 1.6.4 *Um espaço vetorial normado E é compacto se toda sequência em E possui uma subsequência convergente. Um subconjunto M em E é compacto se toda sequência em M possui uma subsequência cujo limite é um elemento de M.*

Teorema 1.6.1 *Seja E um espaço vetorial normado de dimensão finita, um subconjunto $M \subset E$ é compacto se, e somente se, M é fechado e limitado.*

Demonstração.

Dado $x \in \overline{M}$ temos que existe uma sequência (x_n) em M tal que $x_n \longrightarrow x$. Sendo M compacto, segue que $x \in M$. Sendo x arbitrário segue que $\overline{M} \subset M$ e como $M \subset \overline{M}$ temos que $M = \overline{M}$, isto é, M é fechado.

Suponhamos agora que M não seja limitado. Então para todo $k > 0$ dado, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|y_n\| > k$. Logo, (y_n) não pode ter uma subsequência convergente, e portanto M não pode ser compacto. Logo, M é limitado.

Agora, suponhamos então M fechado e limitado. Sejam $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ uma base de E e (x_m) uma sequência em M. Assim, $x_m = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^{(m)} e_j$.

Sendo M limitado, então existe $k > 0$ tal que $\|x_m\| \leq k$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Assim, pelo Lema 1.5.1, existe $C > 0$ tal que

$$k \geq \|x_m\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \xi_j^{(m)} e_j \right\| \geq C. \sum_{j=1}^{n} |\xi_j^{(m)}|,$$

para cada $j = 1, 2, \ldots, n$.

Como $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |\xi_j^{(m)}| \leq \frac{k}{C}$, temos que $|\xi_j^{(m)}| \leq \dfrac{k}{C}$. Assim, $(\xi_j^{(m)}) = (\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \ldots)$ é limitada.

Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, cada sequêcia limitada possui uma subsequência convergente. Logo, a sequência limitada $(\xi_1^{(m)}) = (\xi_1^{(1)}, \xi_1^{(2)}, \ldots)$ possui uma subsequência convergente. Sejam ξ_1 o seu limite e $(x_1^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ a correspondente subsequência de $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$.

Da mesma forma, $(\xi_2^{(m)})$ possui uma subsequência convergente, sendo ξ_2 o seu limite e $(x_2^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ a correspondente subsequência de $(x_1^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$.

Com esse mesmo argumento, para $j = 3, \ldots, n$ obtemos uma nova sequência de $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ da seguinte forma

$$(x_n^{(m)}) = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots) \text{ de } (x_m).$$

Portanto, como no Lema 1.5.1, temos que (x_m) possui uma subsequência $(x_n^{(m)})$ tal que $x_n^{(m)} \longrightarrow x = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$, com $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |\xi_j^{(m)}| \leq \frac{k}{C}$.

Como M é fechado, $x \in M$. Isso mostra que uma sequência arbitrária (x_m) em M possui uma subsequência convergente em M.

Portanto, M é compacto.

$\blacksquare$

Observação 1.6.3 *Seja E um espaço vetorial normado, um subconjunto $M \subset E$ é compacto então M é fechado e limitado, porém a recíproca do Teorema 1.6.1 em geral não ocorre quando a dimensão do espaço é infinita.*

De fato, tomemos

$$E = \{x = (x_n)/x_n \in \mathbb{C} \text{ e } x_n = 0, \text{exceto para um número finito de índices}\} \subset l_\infty(\mathbb{N}),$$

com a norma $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.

Seja S a esfera unitária centrada na origem,

$$S = \{x \in E / \|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_n| = 1\}.$$

Seja $f : E \to \mathbb{R}$ definida por $x \to \|x\|_\infty$, f é contínua e $\{1\}$ é um conjunto fechado de $\mathbb{R}$, então $f^{-1}(\{1\}) = S$ é um conjunto fechado de E, pois é a imagem inversa de fechado.

O conjunto S é limitado por 1, mas S não é um conjunto compacto. De fato, a sequência definida por

$$\begin{aligned} x_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots) \\ x_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots) \\ &\vdots \\ x_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1, \ldots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

não contém subsequência convergente em S.

Lema 1.6.1 (Riesz) *Sejam F e G subespaços de um espaço vetorial normado E sendo F um subconjunto fechado e próprio de G. Então para todo número real θ no intervalo $(0, 1)$ existe $z \in G$ tal que $\|z\| = 1$ e $\|z - y\| \geq \theta, \quad \forall\, y \in F$.*

Demonstração.

Seja $v \in G \backslash F$ e a distância de v a F como sendo $d(v, F) = \inf_{y \in F} \|v - y\| = a$. Como F é fechado temos que $a > 0$. Assim, dado $\theta \in (0, 1)$ existe $y_0 \in F$ tal que

$$a = \inf_{y \in F} \|v - y\| \leq \|v - y_0\| \leq \frac{a}{\theta}.$$

Fazendo $z = \dfrac{v - y_0}{\|v - y_0\|}$, temos que $\|z\| = 1$ e para qualquer $y \in F$,

$$\begin{aligned} \|z - y\| &= \left\| \frac{v - y_0}{\|v - y_0\|} - y \right\| \\ &= \frac{1}{\|v - y_0\|} \left\| (v - y_0) - \|v - y_0\| y \right\| \\ &= c \|v - y_1\|, \end{aligned}$$

onde $c = \dfrac{1}{\|v - y_0\|}$ e $y_1 = y_0 + c^{-1}y$.

Como $y_1 \in F$ então $a \leq \|v - y_1\|$.

Portanto,

$$\|z - y\| = c\|v - y_1\| \geq c.a = \frac{a}{\|v - y_0\|} \geq \theta.$$

■

Teorema 1.6.2 *Se E é um espaço vetorial normado tal que a bola fechada e unitária $B = B[0,1] = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ é compacta, então E é um espaço de dimensão finita.*

Demonstração.

Suponhamos que B é compacta e que E tem dimensao infinita. Seja x_1 em E um vetor tal que $\|x_1\| = 1$. O espaco M_1 gerado por $\{x_1\}$ é um subespaço próprio de E fechado e de dimensão um. Pelo Lema de Riesz, existe $x_2 \in E \backslash M_1$ tal que $\|x_2\| = 1$ e

$$\|x_2 - x_1\| \geq \theta = \frac{1}{2}.$$

Os vetores x_1 e x_2 geram um subespaço próprio M_2 de E fechado e de dimensão 2. Pelo Lema de Riesz, existe $x_3 \in E \backslash M_2$ tal que $\|x_3\| = 1$ e

$$\|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2} \text{ e } \|x_3 - x_2\| \geq \frac{1}{2}.$$

Recursivamente, por esse processo, obtemos uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de B tal que $\|x_n - x_m\| \geq \dfrac{1}{2}$ para $m \neq n$

Assim, a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não possui subsequência convergente, isto contradiz a compacidade de B. Portanto, E tem dimensão finita.

■

Definição 1.6.5 *Um espaço de Banach é um espaço normado completo.*

A denominação "espaço de Banach" foi uma homenagem ao matemático polônes, nascido em Cracóvia, Stefan Banach que em 1932 publicou um livro com resultados sobre espaços normados e notações que foram adotadas pela comunidade matemática.

Exemplo 1.6.4 *O espaço $C[a,b]$ com a norma $\| \,.\, \|_\infty$ é um espaço de Banach.*

Exemplo 1.6.5 *O espaço $l_p(\mathbb{N})$ é um espaço de Banach se $1 \leq p < \infty$.*

Teorema 1.6.3 *Sejam E e F espaços vetorias normados. Se F é de Banach, então $\mathcal{L}(E,F)$ é também um espaço de Banach.*

Demonstração.

Para mostrar que $\mathcal{L}(E,F)$ é um espaço de Banach, mostraremos que toda sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(E,F)$ é convergente em $\mathcal{L}(E,F)$.

Seja $(T_n)_n$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(E,F)$, isto é, para todo $\epsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geq N_0$ temos $\|T_n - T_m\| < \epsilon$.

Assim,

$$\|(T_n - T_m)(x)\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\| < \epsilon\|x\|,$$

$\forall\ x \in E$, se $n, m \geq N_0$.

Logo, $T_n(x)$ é uma sequência de Cauchy em F.

Como F é de Banach, a sequência $T_n(x)$ é convergente em F.

Definimos uma transformação $T : E \to F$, dada por $T(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(x)$ em F.

Mostraremos que $T \in \mathcal{L}(E,F)$.

Se $x, y \in E$, temos

$$T(x+y) = \lim_{n\to\infty} T_n(x+y) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \lim_{n\to\infty} T_n(y) = T(x) + T(y).$$

E se $x \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\lambda T(x) = \lambda \lim_{n\to\infty} T_n(x) = \lim_{n\to\infty} [\lambda T_n(x)] = \lim_{n\to\infty} T_n(\lambda x) = T(\lambda x).$$

Por ser de Cauchy, a sequência T_n é limitada, isto é, existe $K > 0$ tal que $\|T_n\| \leq K$.

Daí, $\|T_n(x)\| \leq K\|x\|$ para todo x, segue que $\|T(x)\| \leq K\|x\|$.

Assim, $\|T\|$ é limitada.

Logo, T é linear e limitada, $T \in \mathcal{L}(E,F)$.

Desde que $\|T_m(x) - T_n(x)\| < \epsilon\|x\|$ para $n, m \geq N_0$ e $x \in E$, fazendo $n \to \infty$, temos que

$$\|T_m(x) - T(x)\| < \epsilon\|x\|.$$

Assim, $\|T_n - T\| < \epsilon$, para $n \geq N_0$. Logo $T_n \to T$ em $\mathcal{L}(E, F)$.

Portanto, $\mathcal{L}(E, F)$ é completo.

■

Proposição 1.6.3 *Um subespaço de um espaço de Banach é um espaço de Banach se, e somente se, é fechado.*

Demonstração.

Sejam E um espaço de Banach, F um subespaço de Banach em E e (x_n) uma sequência em F com x_n convergindo para x, assim a sequência (x_n) é de Cauchy, e como F é Banach, temos que $x \in F$. Portanto, F é um subespaço fechado.

Sejam $F \subset E$ um subespaço fechado de E e (x_n) uma sequência de Cauchy em F. Logo, (x_n) será uma sequência de Cauchy em E, assim existe $x \in E$ tal que $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Mas, como F é fechado temos que $x \in F$. Logo, F é Banach.

■

1.7 Teoremas: Banach-Steinhaus, Aplicação Aberta e Gráfico Fechado.

Os próximos resultados serão auxiliares para o Teorema de Banach-Steinhaus, o Teorema da Aplicação Aberta e o Teorema do Gráfico Fechado.

Um subconjunto X de um espaço vetorial E é *convexo* se, para quaisquer $x, y \in X$ e $\lambda \in [0, 1]$ temos $\lambda x + (1 - \lambda)y \in X$.

Sejam x um ponto e A um subconjunto não vazio de um espaço métrico E. Definimos a distância entre x e A por $d(x, A) = \inf\{|x - y|; y \in A\}$.

Dados A e B dois subconjuntos não vazios de um espaço métrico E. Definimos a distância entre A e B por $d(A, B) = \inf\{|x - y|; x \in A, y \in B\}$.

Denotamos por $A+B$ o conjunto $\{x+y : x \in A,\ y \in B\}$ e por λA o conjunto $\{\lambda x : x \in A\}$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dado um espaco métrico (X,d), dizemos que um subconjunto A é *magro* em X quando é uma reunião enumerável, $A = \cup A_n$, tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $int\overline{A_n} = \emptyset$.

Teorema 1.7.1 (Teorema de Baire) *Seja X um espaço métrico completo. Todo conjunto magro em X tem interior vazio.*

Corolário 1.7.2 *Seja X um espaço métrico completo. Se $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, onde cada A_n é fechado em X, então existe pelo menos um n tal que $intA_n \neq \emptyset$.*

Teorema 1.7.3 (Teorema de Banach-Steinhaus) *Sejam E um espaco de Banach, F um espaco normado e $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de transformações lineares contínuas de E em F. Suponhamos que para cada $x \in E$, existe $C_x > 0$ tal que $\|T_n(x)\| \leq C_x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, existe $C > 0$ tal que $\|T_n\| \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração.

Para cada número natural k, definimos

$$A_k = \{x \in E : \|T_n(x)\| \leq k, \forall\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Os conjuntos A_k são fechados. De fato, seja $x \in \overline{A_k}$, então existe $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in A_k$ tal que $x_i \to x$. Assim, temos $\|T_n(x_i)\| \leq k$, para todo n. Como T_n é contínua, $T_n(x_i) \to T_n(x)$ o que implica $\|T_n(x_i)\| \to \|T_n(x)\|$.

Logo, $\|T_n(x)\| \leq K$.

Portanto, $x \in A_k$. O que nos mostra que A_k são fechados.

Como para cada $x \in E$, existe $C_x > 0$ tal que $\|T_n(x)\| \leq C_x$ para qualquer número natural n, temos que $E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$

O Corolário 1.7.2 nos garante que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que A_m tem interior não vazio. Assim, existem $x_0 \in E$ e $r > 0$ tais que $B(x_0, r) \subseteq A_m$.

Para cada $x \in E \backslash \{0\}$, definimos

$$x' = x_0 + \frac{r}{2\|x\|} x.$$

Então $\|x' - x_0\| = \dfrac{r}{2}$ e, portanto,

$$x' \in B(x_0, r) \subseteq A_m,$$

o que implica

$$\|T_n(x')\| \leq m \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, para cada $x \in E \backslash \{0\}$ temos

$$\begin{aligned}
\|T_n(x)\| &= \left\| T_n \left(\frac{2\|x\|}{r} (x' - x_0) \right) \right\| \\
&= \frac{2\|x\|}{r} \|T_n(x' - x_0)\| \\
&\leq \frac{2\|x\|}{r} \|T_n(x')\| + \frac{2\|x\|}{r} \|T_n(x_0)\| \\
&\leq \frac{2\|x\|}{r} m + \frac{2\|x\|}{r} m \\
&= \frac{4m}{r} \|x\|;
\end{aligned}$$

o que mostra que $\|T_n\| \leq \dfrac{4m}{r}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

■

O Teorema de Banach-Steinhaus também é conhecido como Princípio da Limitação Uniforme.

Os próximos resultados serão utilizados para a demonstração do teorema da Aplicação Aberta.

Lema 1.7.1 *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \longrightarrow F$ uma transformação linear contínua sobrejetora. Então, existe $r > 0$ tal que*

$$\overline{T(B(0,1))} \supset B(0, r),$$

onde $B(0, r) \in F$ e $B(0, 1) \in E$.

Demonstração.

Seja
$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(0,n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nB(0,1).$$

Como T é sobrejetora, temos que
$$F = T(E) = T\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} nB(0,1)\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(nB(0,1)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nT(B(0,1)).$$

Assim, também é válido que
$$F = T(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{nT(B(0,1))}.$$

De fato,

$i)$ dado n, $\overline{nT(B(0,1)))} = \overline{T(nB(0,1))} = \overline{T(B(0,n))} \subset F$, então
$$F = T(E) \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{nT(B(0,1))};$$

$ii)$ dado $y \in F$, sendo T sobrejetiva existe $x \in E$ tal que $y = T(x)$. Para este x existe um n_0 tal que $x \in B(0,n_0) = n_0 B(0,1)$ e então
$$y = T(x) \in T(B(0,n_0)) = T(n_0 B(0,1)) = n_0 T(B(0,1)) \subset \overline{n_0 T(B(0,1))}.$$

Logo, como $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{nT(B(0,1))}$ e para cada n, $\overline{nT(B(0,1))}$ é um conjunto fechado, do Corolário 1.7.2 segue que existe n_0 tal que
$$int(\overline{n_0 T(B(0,1))}) \neq \emptyset$$
e portanto
$$int(\overline{T(B(0,1))}) = int\left(\overline{\frac{n_0}{n_0} T(B(0,1))}\right) = \frac{1}{n_0} int(\overline{n_0 T(B(0,1))}) \neq \emptyset.$$

Seja $y \in F$ e $r > 0$ tal que $B(y,2r) \subset \overline{T(B(0,1))}$. Assim, $y \in \overline{T(B(0,1))}$, e também $-y \in \overline{T(B(0,1))}$.

Temos que $\overline{T(B(0,1))}$ é convexo. De fato, sendo $B(0,1)$ convexo, dados $x_0, y_0 \in B(0,1)$ e $\lambda \in [0,1]$ segue que

$$\lambda x_0 + (1-\lambda)y_0 \in B(0,1).$$

Então, dados a, b em $\overline{T(B(0,1))}$ existem $T(x_n)$ e $T(y_n)$ sendo x_n, y_n em $B(0,1)$ tal que $T(x_n) \longrightarrow a$ e $T(y_n) \longrightarrow b$.

Sendo $\lambda \in [0,1]$, temos

$$\begin{aligned} T(z_n) &= T(\lambda x_n + (1-\lambda)y_n) \\ &= T(\lambda x_n) + T((1-\lambda)y_n) \\ &= \lambda T(x_n) + (1-\lambda)T(y_n). \end{aligned}$$

E assim, $\lambda T(x_n) + (1-\lambda)T(y_n) \longrightarrow \lambda a + (1-\lambda)b$.

E como para cada n, $\lambda x_n + (1-\lambda)y_n \in B(0,1)$ temos que $z_n \in B(0,1)$ e portanto

$$\lambda a + (1-\lambda)b \in \overline{T(B(0,1))}.$$

Logo, $\overline{T(B(0,1))}$ é convexo.

Então $B(0,2r) = B(y,2r) - y \subset \overline{T(B(0,1))} + \overline{T(B(0,1))} = 2\overline{T(B(0,1))}$, pois $\overline{T(B(0,1))}$ é convexo.

Dessa forma,

$$\overline{T(B(0,1))} = \frac{2}{2}\overline{T(B(0,1))} = \frac{1}{2}\overline{(2T(B(0,1)))} \supset \frac{1}{2}B(0,2r) = B(0,r).$$

■

Corolário 1.7.4 *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \longrightarrow F$ uma transformação linear contínua sobrejetora. Então, existe $\tilde{r}$ tal que*

$$T(B(0,1)) \supset B(0,\tilde{r}).$$

Demonstração.

Seja r dado no Lema 1.7.1. Considere $\tilde{r} = r/2$ e seja $y \in B\left(0, \frac{r}{2}\right)$, pelo Lema 1.7.1, temos que

$$\overline{T\left(B\left(0,\frac{1}{2}\right)\right)} \supset B\left(0,\frac{r}{2}\right),$$

então

$$B\left(y,\frac{r}{4}\right) \cap T\left(B\left(0,\frac{1}{2}\right)\right) \neq \emptyset.$$

Logo, existe $x_1' \in E$ com $\|x_1'\| < \dfrac{1}{2}$ tal que $T(x_1') \in B\left(y,\dfrac{r}{4}\right)$ e assim

$$\|T(x_1') - y\| = \|y - T(x_1')\| < \frac{r}{4}.$$

Então, $y - T(x_1') \in B\left(0,\dfrac{r}{4}\right)$. Novamente, pelo Lema 1.7.1, temos que

$$\overline{T\left(B\left(0,\frac{1}{4}\right)\right)} \supset B\left(0,\frac{r}{4}\right),$$

então

$$B\left(y - T(x_1'),\frac{r}{8}\right) \cap T\left(B\left(0,\frac{1}{4}\right)\right) \neq \emptyset.$$

Logo, existe $x_2' \in E$ com $\|x_2'\| < \dfrac{1}{4}$ tal que $T(x_2') \in B\left(y - T(x_1'),\dfrac{r}{8}\right)$ e assim

$$\|y - T(x_1') - T(x_2')\| < \frac{r}{8}.$$

Então, $y - T(x_1') - T(x_2') \in B\left(0,\dfrac{r}{8}\right)$.

Com o mesmo argumento, encontramos uma sequência $(x_n')_{n\in\mathbb{N}}$ em E tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $\|x_n'\| < \dfrac{1}{2^n}$ tal que $\|y - T(x_1' + \ldots + x_n')\| < \dfrac{r}{2^{n+1}}$.

Fazendo $x_n = x_1' + x_2' + \ldots + x_n'$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ se $n, p \geq 1$

$$\|x_{n+p} - x_n\| = \|x_{n+1}' + \ldots + x_{n+p}'\| \leq \|x_{n+1}'\| + \ldots + \|x_{n+p}'\| < \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} < \frac{1}{2^n}.$$

temos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em E é uma sequência de Cauchy.

Como E é um espaço de Banach, existe $x \in E$ tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x, logo, $T(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $T(x)$, pois $T \in \mathcal{L}(E,F)$.

Agora, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $\|y - T(x_n)\| < \dfrac{r}{2^{n+1}}$, assim, $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para y.

Portanto, $T(x) = y$. Como para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x_n\| \leq \|x_1'\| + \|x_2'\| + \ldots + \|x_n'\| < \|x_1'\| + \frac{1}{2} < 1.$$

Logo, fazendo $n \longrightarrow \infty$ temos $\|x\| \leq \|x_1'\| + 1/2 < 1$.

Portanto, $x \in B(0,1)$.

■

Para garantir que uma transformação linear T, seja aberta; basta mostrar que a imagem de uma bola por T contém alguma bola aberta.

Teorema 1.7.5 (Aplicação Aberta) *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \longrightarrow F$ uma transformação linear contínua sobrejetora. Para todo conjunto aberto $U \subset E$, $T(U)$ é aberto em F.*

Demonstração.

Seja $y \in T(U)$, logo existe $x \in U$ tal que $y = T(x)$ e sendo U aberto, existe $\delta > 0$ tal que $B(x,\delta) \subset U$.

Sabemos que,
$$\begin{aligned} T(U) \supset T(B(x,\delta)) &= T(x + B(0,\delta)) \\ &= T(x) + T(B(0,\delta)) \\ &= T(x) + T(\delta B(0,1)) \\ &= T(x) + \delta T(B(0,1)). \end{aligned}$$

Do Corolário 1.7.4, existe $r > 0$ de modo que $T(B(0,1)) \supset B(0,r)$, então

$$T(x) + \delta T(B(0,1)) \supset T(x) + \delta B(0,r) = T(x) + B(0,\delta r) = B(T(x),\delta r).$$

Logo, $T(U) \supset B(T(x),\delta r)$ ou seja, $T(U)$ é aberto em F .

■

Corolário 1.7.6 *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \longrightarrow F$ uma transformação linear contínua bijetora, então T é homeomorfismo.*

Demonstração.

Sendo T uma transformação linear bijetora, esta possui uma transformação inversa T^{-1} linear. Do teorema 1.7.5, dado o aberto $U \subset E$, $T(U)$ é um aberto em F e portanto T^{-1} é contínua, sendo que $T^{-1}(T(U)) = U \subset U$, logo T é homeomorfismo.

■

Exemplo 1.7.1 *Sejam E um espaço de Banach e $I : (E, \|.\|_1) \to (E, \|.\|_2)$ a transformação identidade; se existe $c > 0$ tal que $\|.\|_2 \leq c\|.\|_1$ então $\|.\|_1$ e $\|.\|_2$ são equivalentes. De fato, desde que para todo $x \in E$ temos que $\|x\|_2 \leq c\|x\|_1$ então I é contínua. Como I é bijetora então, pelo Corolário 1.7.6, temos que I é um homeomorfismo e assim, existe $d > 0$ tal que $\|x\|_1 \leq d\|x\|_2$, logo $\|.\|_1$ e $\|.\|_2$ são equivalentes.*

Definição 1.7.1 *Dada uma aplicação $T : E \to F$, o gráfico de T é denotado por $G(T)$ e dado por*

$$G(T) = \{(x, T(x)) \in E \times F : x \in E\}.$$

Sendo T linear, o gráfico $G(T)$ é um subespaço vetorial de $E \times F$, munido da norma $\|(x, y)\| := \|x\| + \|y\|$.

Definição 1.7.2 *A transformação linear $T : D(T) \subset E \to F$ é fechada se para toda sequência $(x_n) \subset D(T)$ tal que $x_n \to x$ e $T(x_n) \to y$, tenhamos $x \in D(T)$ e $y = T(x)$.*

O próximo teorema nos mostra que os conceitos de transformação linear fechada e contínua são equivalentes quando a transformação ocorre em espaços de Banach.

Teorema 1.7.7 (Gráfico Fechado) *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \to F$ uma transformação linear. Então, T é contínua se, e somente se, seu gráfico é fechado.*

Demonstração.

Suponha que T seja contínua. O gráfico de T, $G(T)$, é fechado pois uma sequência $(x_n, y_n) \in E \times F$ converge para um ponto $(x, y) \in E \times F$ se, e somente se, $x_n \longrightarrow x$ e $y_n \longrightarrow y$; mas se $(x_n, y_n) \in G(T)$ então $y_n = T(x_n)$ e da continuidade de T segue que $y = T(x)$, isto é, $(x, y) \in G(T)$.

Reciprocamente, suponha que $G(T)$ seja um subespaço fechado de $E \times F$, então sendo $G(T)$ subespaço vetorial do espaço de Banach $E \times F$, segue que $G(T)$ também é um espaço de Banach.

Considere as projeções,

$$\pi_1 : E \times F \longrightarrow E \quad e \quad \overline{\pi_1} : G(T) \longrightarrow E.$$

Temos que $\overline{\pi_1}$ linear, bijetora e contínua do espaço de Banach $G(T)$ sobre o espaço de Banach E. De fato, dados $(x, T(x)), (y, T(y))$ em $G(T)$ e o escalar λ temos que

$$\begin{aligned} \overline{\pi_1}((x, T(x)) + (y, T(y))) &= \overline{\pi_1}(x + y, T(x) + T(y)) \\ &= \overline{\pi_1}(x + y, T(x + y)) \\ &= x + y \\ &= \overline{\pi_1}(x, T(x)) + \overline{\pi_1}(y, T(y)). \end{aligned}$$

Temos também que

$$\begin{aligned} \overline{\pi_1}(\lambda(x, T(x))) &= \overline{\pi_1}(\lambda x, \lambda T(x)) \\ &= \overline{\pi_1}(\lambda x, T(\lambda x)) \\ &= \lambda x \\ &= \lambda \overline{\pi_1}(x, T(x)). \end{aligned}$$

Portanto, temos que $\overline{\pi_1}$ é linear.

Dado $x_0 \in E$, tome $(x_0, T(x_0)) \in G(T)$ e então $\overline{\pi_1}(x_0, T(x_0)) = x_0$, logo $\overline{\pi_1}$ é sobrejetora.

Sejam $(x, T(x)), (y, T(y)) \in G(T)$, logo se $\overline{\pi_1}(x, T(x)) = \overline{\pi_1}(y, T(y))$ então $x = y$ e portanto $T(x) = T(y)$, assim $\overline{\pi_1}$ é injetora.

Portanto $\overline{\pi_1}$ é bijetora.

Novamente, sejam $(x, T(x))$ e $(y, T(y)) \in G(T)$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \epsilon$ tal que

$d((x, T(x)), (y, T(y))) < \delta$, isso implica que $d(\overline{\pi_1}(x, T(x)), \overline{\pi_1}(y, T(y))) = d(x, y)$, daí

$$d(x, y) \leq d(x, y) + d(T(x), T(y)) = d((x, T(x)), (y, T(y))) < \delta = \epsilon.$$

Portanto $\overline{\pi_1}$ é uma função contínua.

Pelo Corolário 1.7.6, segue que $\overline{\pi_1}$ é homeomorfismo.

Temos também que $\pi_2 : E \times F \longrightarrow F$ é contínua. De fato, sejam (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em $E \times F$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \epsilon$ tal que $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) < \delta$, isso implica que

$$d(\pi_2(x_1, y_1), (\pi_2(x_2, y_2)) = d(y_1, y_2) \leq d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2) = d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) < \delta = \epsilon.$$

Portanto π_2 é uma função contínua.

Assim, segue que a função composta

$$T = \pi_2 \circ (\overline{\pi_1})^{-1}$$

é contínua.

$\blacksquare$

O resultado do Corolário 1.7.6, também pode ser provado a partir do Teorema do Gráfico Fechado.

Seja a sequência $(y_n, T^{-1}(y_n)) \in G(T^{-1})$ que converge para $(y_0, x_0) \in F \times E$. Assim, $y_n \longrightarrow y_0$ e $T^{-1}(y_n) \longrightarrow x_0$; e da continuidade de T temos $y_n \longrightarrow T(x_0)$ segue que $x_0 = T^{-1}(y_0)$, isto é, $(y_0, x_0) \in G(T^{-1})$. Logo, $G(T^{-1})$ é fechado. Portanto, T^{-1} é contínua.

$\blacksquare$

Caso os espaços E e F não sejam Banach, abaixo veremos exemplos de $i)$ transformação linear contínua e gráfico não fechado; $ii)$ transformação linear não contínua e gráfico fechado.

Exemplo 1.7.2 *Sejam E um espaço de Banach e $I : D(I) \to E$ uma transformação linear com $D(I)$ um subespaço próprio e denso de E.*

A transformação linear $I(x) = x$ *é contínua, logo limitada. Mas* I *não é fechada. De fato, seja* $(x_n) \subset D(I)$, *tal que* $x_n \to x$, *com* $x \in E \setminus D(I)$. *Como* $x_n \to x$ *e* $I(x_n) \to x$ *mas* $x \notin D(I)$, *temos que gráfico da transformação não é fechado.*

Exemplo 1.7.3 *Seja* $C^1[0,\pi]$ *o espaço das funções continuamente diferenciáveis de* $[0,\pi]$ *em* $\mathbb{R}$. *Dados* $C^1[0,\pi] \subset C[0,\pi]$ *e* $T : C^1[0,\pi] \to C[0,\pi]$ *definida por* $(Tf)(t) = f'(t)$.

A transformação linear T *não é contínua, pois considere* $f_n(t) = \dfrac{sen(nt)}{n}$ *convergindo a zero, enquanto* $(Tf_n)(t) = \cos(nt)$ *não converge uniformemente a zero. Logo,* T *não é limitada.*

Agora, dados $f_n \to f$ *e* $T(f_n) \to \varphi$, *então*

$$\int_0^t \varphi(s)ds = \int_0^t \lim_{n\to\infty} f_n'(s)ds = \lim_{n\to\infty} \int_0^t f_n'(s)ds = \lim_{n\to\infty} (f_n(t) - f_n(0)) = f(t) - f(0).$$

Logo, $f(t) = f(0) + \displaystyle\int_0^t \varphi(s)ds$.

Assim, $f \in D(T)$ *e* $f'(t) = \varphi \Leftrightarrow (Tf)(t) = \varphi(t)$, $\forall\ t$.

Logo, T *é fechada. Portanto* $G(T)$ *é fechado.*

Capítulo 2

Teoremas de Hahn-Banach

O Teorema de Hahn-Banach trata das extensões de funcionais lineares definidos em subespaços vetoriais que preservam certas propriedades. Os matemáticos, Riesz e Helly, em 1911 e 1912 respectivamente, obtiveram os primeiros teoremas de extensão de funcionais em alguns espaços de funções. O primeiro resultado para o caso real foi obtido por Hahn em 1927 e, de forma mais geral, por Banach em 1929. A versão complexa foi publicada em 1938, por Bohnenblust e Sobczyk.

Neste capítulo são apresentadas duas versões e algumas aplicações para o teorema de Hahn-Banach, uma analítica e a outra geométrica, no caso do espaço vetorial real, mas antes recordaremos alguns conceitos de relação de ordem.

Seja P um conjunto não vazio dotado de uma relação de *ordem (parcial)* denotada por $\leq$, onde são satisfeitas as seguintes condições:

i) $a \leq a, \quad \forall\, a \in P$.

ii) Se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b, \quad \forall\, a, b \in P$.

iii) Se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c, \quad \forall\, a, b, c \in P$.

Um subconjunto $Q \subset P$ está *totalmente ordenado* se, para quaisquer $a, b \in Q$ temos uma das seguintes relações: $a \leq b$ ou $b \leq a$. O elemento $c \in P$ é uma *cota superior* de Q se para todo $a \in Q$ temos $a \leq c$.

Dizemos que $m \in P$ é um *elemento maximal* de P se para todo $x \in P$ tal que $m \leq x$ implica $m = x$.

Lema 2.0.2 (Zorn) *Seja um conjunto não-vazio e parcialmente ordenado, se todo subconjunto totalmente ordenado tem uma cota superior, então o conjunto tem um elemento maximal.*

O nome dado ao Lema faz referência ao matemático Max Zorn que o provou em 1935, mas sua primeira formulação, em 1922, deve-se ao matemático polonês Kazimierz Kuratowski.

O Lema de Zorn tem muitas e importantes aplicações em Análise, é uma ferramenta indispensável para estabelecer certos resultados de existência. Uma aplicação do Lema de Zorn é o seguinte resultado:

Proposição 2.0.1 *Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Então E possui uma base.*

A denominação "Lema" aparece apenas por razões históricas. O Lema de Zorn é equivalente ao Axioma de Escolha, que nos diz: "O produto cartesiano de uma família qualquer de conjuntos não-vazios é não-vazio." Esse axioma foi proposto pelo matemático alemão, Ernst Zermelo no início do século XX.

Para os resultados a seguir, trabalharemos com o espaço vetorial real.

Definição 2.0.3 *Sejam E um espaço vetorial e $p : E \to \mathbb{R}$ uma aplicação tal que para todo x, y em E temos*

i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

ii) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$; $\lambda \in \mathbb{R}$. *(positivo-homogêneo)*

Dizemos então que p é uma função sublinear.

Exemplo 2.0.4 *Uma seminorma, em particular uma norma, num espaço vetorial é uma função sublinear.*

Definição 2.0.4 *Dados $X \subset Y$, uma aplicação $F : Y \to Z$ chama-se* extensão *de $f : X \to Z$ quando $F(x) = f(x)$ para todo $x \in X$, ou seja, quando $F|_X = f$.*

Lema 2.0.3 *Seja E_0 um subespaço próprio do espaço vetorial real E, isto é, $E_0 \neq \{0\}$ e $E_0 \neq E$. Seja $x_0 \in E \backslash E_0$. Considere o subespaço $E_1 = E_0 \oplus [x_0]$ e suponha que f seja um funcional linear definido em E_0 e p seja uma função sublinear definida em E, tal que*

$$f(x) \leq p(x), \forall\, x \in E_0.$$

Então f pode ser estendido a um funcional linear F, definido em E_1 tal que

$$F(x) \leq p(x), \forall\, x \in E_1.$$

Demonstração.

Como $f(x) \leq p(x)$ em E_0, dados $x_1, x_2 \in E_0$ temos

$f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2) \leq p(x_1 - x_2) = p(x_1 + x_0 - x_2 - x_0) \leq p(x_1 + x_0) + p(-x_2 - x_0)$.

Logo,

$$-\,p(-x_2 - x_0) - f(x_2) \leq p(x_1 + x_0) - f(x_1). \tag{2.1}$$

Fixando arbitrariamente x_1 em E_0 e variando x_2 em E_0, temos que o conjunto de números reais

$$\{-p(-x_2 - x_0) - f(x_2) : x_2 \in E_0\}$$

é limitado superiormente, logo tem supremo.

Seja então

$$a = \sup\{-p(-x_2 - x_0) - f(x_2) : x_2 \in E_0\}.$$

De forma análoga, podemos garantir a existência de

$$b = \inf\{p(x_1 + x_0) - f(x_1) : x_1 \in E_0\}.$$

De (2.1) temos que $a \leq b$. Assim, existe $c_0 \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq c_0 \leq b$.

Se $a = b$ então c_0 é o valor comum. Seja agora $y \in E_0$ qualquer, logo

$$-\,p(-y - x_0) - f(y) \leq p(y + x_0) - f(y). \tag{2.2}$$

Dado $x \in E_1$, existe $y \in E_0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$x = y \oplus \lambda x_0.$$

Podemos definir

$$F : E_1 \to \mathbb{R}$$

dado por

$$F(x) = F(y + \lambda x_0) = f(y) + \lambda c_0$$

a qual está bem definida, devido a unicidade de representação. Além disso F é um funcional linear sobre E_1.

Assim, resta mostrar que $F(x) \leq p(x)$, $\forall\, x \in E_1$.

Para isso, teremos $x \in E_1$ e $x = y + \lambda x_0$, sendo considerados três casos:

i) $\lambda = 0$.
Neste caso,

$$F(x) = F(y + 0x_0) = f(y) \leq p(y) = p(x).$$

ii) $\lambda > 0$.
De (2.2), trocando y por $\dfrac{y}{\lambda}$ temos,

$$c_0 \leq p\left(\frac{y}{\lambda} + x_0\right) - f\left(\frac{y}{\lambda}\right).$$

Multiplicando por $\lambda > 0$ obtemos,

$$\lambda c_0 \leq \lambda p\left(\frac{y}{\lambda} + x_0\right) - \lambda f\left(\frac{y}{\lambda}\right).$$

Então,

$$\lambda f\left(\frac{y}{\lambda}\right) + \lambda c_0 \leq \lambda p\left(\frac{y}{\lambda} + x_0\right).$$

Assim,

$$f(y) + \lambda c_0 \leq p(y + \lambda x_0).$$

Logo, $\quad F(x) \leq p(y + \lambda x_0) = p(x)$.

iii) $\lambda < 0$.
Novamente de (2.2), trocando y por $\dfrac{y}{\lambda}$ temos,

$$-p\left(-\frac{y}{\lambda} - x_0\right) - f\left(\frac{y}{\lambda}\right) \leq c_0.$$

Multiplicando por $\lambda < 0$ temos,

$$-\lambda p\left(-\frac{y}{\lambda} - x_0\right) - \lambda f\left(\frac{y}{\lambda}\right) \geq \lambda c_0.$$

Logo,

$$p(y + \lambda x_0) \geq \lambda c_0 + f(y).$$

Assim, $\quad p(x) \geq F(x)$.

■

2.1 Teorema de Hahn-Banach Analítico

Teorema 2.1.1 (Hahn-Banach Analítico) *Seja E um espaço vetorial real. Sejam E_0 o subespaço próprio de E; p uma função sublinear sobre E e f um funcional linear sobre E_0 tal que*

$$f(x) \leq p(x), \quad \forall\, x \in E_0.$$

Então f pode ser estendido a um funcional linear F sobre E tal que

$$F(x) \leq p(x), \quad \forall\, x \in E.$$

Demonstração.

Seja G um conjunto de todos os funcionais lineares $\tilde{f}$, que estendem f, tal que

$$\tilde{f}(x) \leq p(x), \quad \forall x \, \in D(\tilde{f}).$$

Temos que $G \neq \emptyset$ pois pelo Lema 2.0.3 existe $\tilde{f} \in G$ e por hipótese temos também, $\tilde{f}(x) \leq p(x), \quad \forall x \, \in D(\tilde{f}) = E_1$.

Definimos em G a seguinte relação $\tilde{f}_1 < \tilde{f}_2$ se $\tilde{f}_2$ estende $\tilde{f}_1$.

Vamos verificar que a relação é uma ordem.

De fato,

i) $\tilde{f}_1 < \tilde{f}_1$, pois $D(\tilde{f}_1) \subset D(\tilde{f}_1)$ e $\tilde{f}_1|_{D(\tilde{f}_1)} = \tilde{f}_1$.

ii) Se $\tilde{f}_1 < \tilde{f}_2$ e $\tilde{f}_2 < \tilde{f}_3$, segue que

$D(\tilde{f}_1) \subset D(\tilde{f}_2)$, $\tilde{f}_2|_{D(\tilde{f}_1)} = \tilde{f}_1$; e $D(\tilde{f}_2) \subset D(\tilde{f}_3)$, $\tilde{f}_3|_{D(\tilde{f}_2)} = \tilde{f}_2$.

Então $D(\tilde{f}_1) \subset D(\tilde{f}_3)$ e $\tilde{f}_3|_{D(\tilde{f}_1) \subset D(\tilde{f}_2)} = \tilde{f}_2|_{D(\tilde{f}_1)} = \tilde{f}_1$, isto é, $\tilde{f}_1 < \tilde{f}_3$.

iii) Se $\tilde{f}_1 < \tilde{f}_2$ e $\tilde{f}_2 < \tilde{f}_1$, temos,

$D(\tilde{f}_1) \subset D(\tilde{f}_2)$ e $\tilde{f}_2|_{D(\tilde{f}_1)} = \tilde{f}_1$;

$D(\tilde{f}_2) \subset D(\tilde{f}_1)$ e $\tilde{f}_1|_{D(\tilde{f}_2)} = \tilde{f}_2$.

Logo, $D(\tilde{f}_1) = D(\tilde{f}_2)$ e $\tilde{f}_1 \equiv \tilde{f}_2$.

Assim G é parcialmente ordenado.

Provaremos que todo subconjunto totalmente ordenado possui um limitante superior.

Considere $T = \{\tilde{f}_\alpha\}$ um subconjunto de G totalmente ordenado, mostremos que existe um limitante superior de T. Para isso, considere a aplicação $\tilde{f}$, cujo domínio é $D(\tilde{f}) = \bigcup_\alpha D(\tilde{f}_\alpha)$ e para $x \in \bigcup_\alpha D(\tilde{f}_\alpha)$, existe algum α tal que $x \in D(\tilde{f}_\alpha)$ então definimos $\tilde{f}(x) = \tilde{f}_\alpha(x)$.

Temos que $D(\tilde{f})$ é um subespaço vetorial de E.

De fato, se $x \in \bigcup_\alpha D(\tilde{f}_\alpha)$, existe α tal que $x \in D(\tilde{f}_\alpha)$, desde que $D(\tilde{f}_\alpha)$ seja um subespaço vetorial, então para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ temos que $\lambda x \in D(\tilde{f}_\alpha)$.

Agora, $x, y \in \bigcup_\alpha D(\tilde{f}_\alpha)$, então para algum α_1 e α_2; temos que $x \in D(\tilde{f}_{\alpha_1})$ e $y \in D(\tilde{f}_{\alpha_2})$ e T totalmente ordenado então, $D(\tilde{f}_{\alpha_1}) \subset D(\tilde{f}_{\alpha_2})$ ou $D(\tilde{f}_{\alpha_2}) \subset D(\tilde{f}_{\alpha_1})$, assim, ou $x, y \in D(\tilde{f}_{\alpha_1})$ ou $x, y \in D(\tilde{f}_{\alpha_2})$. Então $x + y \in \bigcup_\alpha D(\tilde{f}_\alpha)$.

Portanto $\bigcup_\alpha D(\tilde{f}_\alpha)$ é um subespaço vetorial de E.

Suponha $x \in D(\tilde{f}_\alpha)$ e $x \in D(\tilde{f}_\beta)$; pela definição temos que $\tilde{f}(x) = \tilde{f}_\alpha(x)$ e $\tilde{f}(x) = \tilde{f}_\beta(x)$. Mas T é totalmente ordenado, portanto $D(\tilde{f}_\alpha) \subset D(\tilde{f}_\beta)$ ou $D(\tilde{f}_\beta) \subset D(\tilde{f}_\alpha)$ o que implica $\tilde{f}_\alpha(x) = \tilde{f}(x) = \tilde{f}_\beta(x)$.

É claro que $\tilde{f}$ é linear, estende f e tal que $\tilde{f}(x) \leq p(x)$, $\forall\, x \in D(\tilde{f})$, ou seja, $\tilde{f}$ é limitante superior de T em G.

Assim G é indutivamente ordenado e pelo Lema de Zorn, existe $F \in G$ tal que F é maximal de G, desde que $F \in G$, F estende f com a propriedade $F(x) \leq p(x)$, para todo $x \in D(F)$.

Para completar a prova, mostremos que $D(F) = E$.

Suponha que $D(F) \subsetneq E$. Então existe $x_1 \in E$ tal que $x_1 \notin D(F)$.

Pelo Lema 2.0.3, F pode ser estendido a outro funcional linear $\widehat{f}$ e que portanto estende f tal que $\widehat{f}(x) \leq p(x)$, para todo $x \in D(F) \oplus [x_1]$.

Assim, $\widehat{f} \in G$ e desde que $\widehat{f}$ estende F, F não seria elemento maximal. Contradição com a hipótese de ser maximal.

Portanto $D(F) = E$.

■

Corolário 2.1.2 *Seja E_0 um subespaço vetorial de E. Sejam p uma seminorma sobre o espaço vetorial real E e f um funcional linear sobre E_0 tal que*

$$|f(x)| \leq p(x), \quad \forall\, x \in E_0.$$

Então existe um funcional linear F que estende f e tal que

$$|F(x)| \leq p(x), \quad \forall\, x \in E.$$

Demonstração.

Como $|f(x)| \leq p(x)$ então $-p(x) \leq f(x) \leq p(x)$.

Assim, pela linearidade de f temos

$$-p(x) \leq f(x) \Leftrightarrow p(x) \geq -f(x) \Leftrightarrow p(-x) \geq f(-x), \quad \forall\, x \in E_0.$$

Logo,

$$f(x) \leq p(x), \quad \forall\, x \in E_0.$$

Então, pelo Teorema de Hahn-Banach Analítico existe um funcional linear F sobre E que estende f e tal que

$$F(x) \leq p(x), \quad \forall\, x \in E \Leftrightarrow |F(x)| \leq p(x), \quad \forall\, x \in E.$$

■

De forma similar, trabalharemos com o espaço vetorial complexo. A demonstração da versão complexa é obtida através da versão real e do uso da seguinte afirmação: Se $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ é um funcional linear complexo, então existe um funcional linear real $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) - ig(ix)$, $\forall\, x \in E$.

2.2 Aplicações do Teorema de Hahn-Banach Analítico

Seja E um espaço vetorial normado. Nesta seção utilizaremos a função sublinear $p : E \to \mathbb{R}$ dada por $p(x) = \|x\|$.

Lema 2.2.1 *Seja E um espaço vetorial normado e E_0 um subespaço de E. Então todo funcional linear limitado f_0 pode ser estendido a um funcional linear limitado f sobre E tal que*

$$\|f\| = \|f_0\|$$

Demonstração.

Se $f_0 = 0$, temos $f = 0$. Se $f_0 \neq 0$ consideremos a função sublinear p sobre E:

$$x \in E \to p(x) = \|f_0\| \, \|x\|.$$

Assim, $|f_0(x)| \leq \|f_0\| \, \|x\| = p(x)$, $\forall \ x \in E_0$, pelo Corolário 2.1.2 existe um funcional linear f que estende f_0 e tal que $|f(x)| \leq p(x)$, $\forall \ x \in E$.

Logo, $|f(x)| \leq p(x) = \|f_0\| \, \|x\|$, $\forall \ x \in E$ e portanto f é um funcional linear limitado sobre E.

E também,

$$\|f\| = \sup_{x \in E, \|x\|=1} |f(x)| \leq \sup_{x \in E, \|x\|=1} p(x) = \|f_0\|, \text{ isto é, } \|f\| \leq \|f_0\|.$$

Além disso,

$$\|f\| = \sup_{x \in E, \|x\|=1} |f(x)| \geq \sup_{x \in E_0, \|x\|=1} |f(x)| = \|f_0\|, \text{ isto é, } \|f\| \geq \|f_0\|.$$

Portanto, $\|f\| = \|f_0\|$.

$\blacksquare$

Teorema 2.2.1 *Seja E um espaço vetorial normado não-trivial e E^* seu espaço dual. Então:*

i) Se $x \in E$ com $x \neq 0$, então existe $f \in E^*$ com $f(x) = \|x\|$ e $\|f\| = 1$.

ii) Se $x_1 \neq x_2 \in E$, então existe $f \in E^*$ com $f(x_1) \neq f(x_2)$.

iii) *Se* $x \in E$ *e* $f(x) = 0$, $\forall f \in E^*$, *então* $x = 0$.

iv) *Se* $x \in E$, *então* $\|x\| = \sup\limits_{f \in E^*, \|f\|=1} |f(x)|$.

Demonstração.

i) Sejam $x_0 \in E$ não nulo e E_0 o espaço gerado por x_0. Cada $x \in E_0$ é da forma $x = \alpha x_0$ para um único $\alpha \in \mathbb{R}$

Definimos o funcional

$$f_0(x) = \alpha \|x_0\|$$

o funcional f_0 está bem definido e é linear, pois se $x = \alpha x_0$, $y = \beta x_0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então

$$f_0(x+y) = f_0(\alpha x_0 + \beta x_0) = f_0((\alpha+\beta)x_0) = (\alpha+\beta)\|x_0\| = f_0(x) + f_0(y);$$

$$f_0(\lambda x) = f_0(\lambda \alpha x_0) = \lambda \alpha \|x_0\| = \lambda f_0(x).$$

Vejamos que f_0 é limitado

$$|f_0(x)| = |\alpha| \, \|x_0\| = \|x\| \Rightarrow \|f_0\| \leq 1,$$

e desde que

$$|f_0(x_0)| = \|x_0\| \Rightarrow \left| f_0\left(\frac{x_0}{\|x_0\|} \right) \right| = \frac{1}{\|x_0\|}.|f_0(x_0)| = \frac{\|x_0\|}{\|x_0\|} = 1 \Rightarrow \|f_0\| \geq 1.$$

Portanto $\|f_0\| = 1$.

Pelo Lema 2.2.1 temos que f_0 pode ser estendido a f sobre E tal que $\|f\| = \|f_0\| = 1$.

ii) Se $x_1 \neq x_2$, então $x_1 - x_2 \neq 0$, e pelo item anterior existe $f \in E^*$ de forma que $0 \neq f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2)$.

iii) De fato, pois caso contrário negaria a afirmação *i)*.

iv) Se $x = 0$ o resultado é claro.

Se $x \neq 0$ e $f \in E^*$,

$$|f(x)| \leq \|f\| \|x\| \Rightarrow \sup_{f \in E^*, \|f\|=1} |f(x)| \leq \|x\|.$$

Por outro lado, por *i)* existe $f \in E^*$ tal que $f(x) = \|x\|$ e $\|f\| = 1$

$$\sup_{f\in E^*,\|f\|=1} |f(x)| \geq \|x\|.$$

Assim, $\displaystyle\sup_{f\in E^*,\|f\|=1} |f(x)| = \|x\|.$

■

Proposição 2.2.1 *Seja E um espaço vetorial normado. Seja F um subespaço fechado próprio de E e $x_0 \in E \setminus F$, com $0 < \delta = d(x_0, F) := \inf_{y\in F} \|x_0 - y\|$.*

Então, existe um funcional linear limitado $f \in E^*$ satisfazendo $\|f\| = 1$, $f(x_0) = \delta$ e $f\,|_F = 0$.

Demonstração.

De fato, seja $F_0 = F \oplus [x_0]$ um subespaço gerado por F e x_0.

Assim, todo $x \in F_0$ é escrito como $x = y + \lambda x_0$, $y \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definimos o funcional $g : F_0 \to \mathbb{R}$ dado por $g(x) = \lambda\delta$

Temos que o funcional g está bem definido e é linear, pois se $x_1 = y_1 + \lambda_1 x_0$ e $x_2 = y_2 + \lambda_2 x_0$ então $\forall x_1, x_2 \in F_0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$g(x_1 + x_2) = g(y_1 + \lambda_1 x_0 + y_2 + \lambda_2 x_0) = (\lambda_1 + \lambda_2)\delta = g(x_1) + g(x_2);$$

$$g(\alpha x_1) = \alpha\lambda_1\delta = \alpha g(x_1).$$

Temos também que g é limitado. De fato, pela definição de δ e para $\lambda \neq 0$ temos

$$|g(x)| = |g(y + \lambda x_0)| = |\lambda|\delta \leq |\lambda| \left\| \frac{y}{\lambda} + x_0 \right\| = \|y + \lambda x_0\| = \|x\|.$$

Logo,

$$|g(x)| \leq \|x\|, \forall\, x \in F_0.$$

e, assim, $\|g\| \leq 1$.

Sabemos que $\delta = d(x_0, F) := \inf_{y\in F} \|x_0 - y\|$, então existe uma sequência $\{y_n\} \subset F$ e tal que $\|x_0 - y_n\| \to \delta$.

Logo, desde que $g(y_n) = 0$ e que $x_0 - y_n \neq 0$, então

$$|g(x_0)| = |g(x_0 - y_n)| \leq \|g\| \, \|x_0 - y_n\| \Rightarrow \|g\| \geq \frac{|g(x_0)|}{\|x_0 - y_n\|} = \frac{\delta}{\|x_0 - y_n\|} \longrightarrow \frac{\delta}{\delta} = 1$$

Portanto, $\|g\| = 1$.

Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe uma extensão f de g sobre E tal que $\|f\| = 1$ como queríamos demonstrar.

■

2.3 Teorema de Hahn-Banach Geométrico

Nesta seção abordamos a versão geométrica do Teorema de Hahn-Banach, que nos dará condições suficientes para "separar" dois subconjuntos num espaço vetorial normado. Para os seguintes teoremas, as definições abaixo serão necessárias.

Definição 2.3.1 *Seja E um espaço vetorial normado. Um hiperplano é um conjunto da forma*

$$H = \{x \in E; f(x) = \alpha\},$$

onde f é um funcional linear sobre E, não identicamente nulo, e $\alpha \in \mathbb{R}$. Dizemos que H é um hiperplano de equação $(f = \alpha)$.

Proposição 2.3.1 *Um hiperplano H será fechado se, e somente se o funcional linear f for contínuo.*

Definição 2.3.2 *Seja E um espaço vetorial normado. Sejam $A \subset E$ e $B \subset E$. Dizemos que o hiperplano H de equação $(f = \alpha)$ separa A e B em sentido amplo se satisfaz*

$$f(x) \leq \alpha, \forall\, x \in A \quad e \quad f(x) \geq \alpha, \forall\, x \in B.$$

Dizemos que H separa A e B em sentido estrito se existe $\epsilon > 0$ tal que

$$f(x) \leq \alpha - \epsilon, \forall\, x \in A \quad e \quad f(x) \geq \alpha + \epsilon, \forall\, x \in B.$$

Lema 2.3.1 *[Funcional de Minkowski] Seja E um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{R}$ e $C \subset E$ um aberto convexo com $0 \in C$. Para todo $x \in E$ definimos $p : E \to \mathbb{R}$ por*

$$p(x) = \inf\{\alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in C\},$$

(p é o funcional de Minkowski de C). Então, p é uma função sublinear e verificamos

i) existe M tal que $0 \leq p(x) \leq M\|x\|$, $\forall\ x \in E$;

ii) $C = \{x \in E : p(x) < 1\}$.

Demonstração.

i) Seja $r > 0$ tal que $B(0,r) \subset C$; para todo $x \in E$ temos $(r-\epsilon)\dfrac{x}{\|x\|} \in B(0,r) \subset C$. De fato, pois $\left\|(r-\epsilon)\dfrac{x}{\|x\|} - 0\right\| < r$. Pela definição de $p(x)$,

$$p(x) \leq \frac{1}{r-\epsilon}\|x\|,$$

fazendo $M = \dfrac{1}{r-\epsilon}$ temos a afirmação satisfeita, para todo $\epsilon > 0$.

ii) Se $x \in C$, como C é aberto, existe $\epsilon > 0$ tal que $(1+\epsilon)x \in C$. Por definição,

$$p(x) \leq \frac{1}{1+\epsilon} < 1.$$

Reciprocamente, se $p(x) < 1$ existe $0 < \alpha < 1$ tal que $\alpha^{-1}x \in C$ e assim $x = \alpha(\alpha^{-1}x) + (1-\alpha)0 \in C$, pois C é convexo e contém a origem.

Vamos agora verificar que p é uma função sublinear. É claro que $p(\lambda x) = \lambda p(x), \lambda > 0$, isto é, p é positivo- homogêneo.

Sejam $x, y \in E$ e $\epsilon > 0$,
$$\frac{x}{p(x)+\epsilon} \in C \text{ e } \frac{y}{p(y)+\epsilon} \in C,$$

pois, seja $x \in E$ temos

$$p\left(\frac{x}{p(x)+\epsilon}\right) = \frac{p(x)}{p(x)+\epsilon} < 1.$$

De maneira análoga, mostramos que $\dfrac{y}{p(y)+\epsilon} \in C$.

Assim, pela definição de convexo

$$\frac{tx}{p(x)+\epsilon} + \frac{(1-t)y}{p(y)+\epsilon} \in C$$

para todo $t \in [0,1]$.

Em particular, para $t = \dfrac{p(x)+\epsilon}{p(x)+p(y)+2\epsilon}$ e $(1-t) = \dfrac{p(y)+\epsilon}{p(x)+p(y)+2\epsilon}$ obtemos

$$\frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\epsilon} \in C.$$

Assim, por *ii*)

$$p\left(\frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\epsilon}\right) < 1.$$

Como p é positivo- homogêneo, temos

$$\frac{1}{p(x)+p(y)+2\epsilon} p(x+y) < 1.$$

E segue o resultado $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$.

■

Lema 2.3.2 *Seja $C \subset E$ um convexo aberto não vazio e seja $x_0 \in E$ com $x_0 \notin C$. Então existe $f \in E^*$ tal que $f(x) < f(x_0)$, para todo $x \in C$. Em particular, o hiperplano de equação $(f = f(x_0))$ separa x_0 de C em sentido amplo.*

Demonstração.

Sem perda de generalidade, podemos supor que $0 \in C$. Do contrário, consideramos o conjunto $C - \{x\} = \{y \in E; y = a - x,\ \forall\, a \in C\}$ e o vetor $x_0 - x$ ao invés de C e x_0.

Sejam p o funcional de Minkowski de C e considere $G = [x_0]$ e $g : G \to \mathbb{R}$ dada por $g(tx_0) = t$.

Temos que,

$$g(tx_0) = \begin{cases} t \leq tp(x_0) = p(tx_0), & \text{se } t \geq 0 \\ t < p(tx_0), & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

pois o funcional de Minkowski p é não negativo.

Segue que $g(x) \leq p(x)$.

Logo, pelo Teorema de Hahn-Banach, existe um funcional linear f sobre E, que estende g, e tal que $f(x) \leq p(x)$, $\forall x \in E$.

De $i)$ do Lema 2.3.1, segue que f é limitada. Como $p(x) < 1$ para todo $x \in C$, segue que $f(x) \leq p(x) < 1 = f(x_0)$ para todo $x \in C$.

$\blacksquare$

Teorema 2.3.1 (Hahn-Banach Geométrico, primeira forma) *Seja E um espaço vetorial normado. Sejam $A \subset E$ e $B \subset E$ dois conjuntos convexos, não vazios e disjuntos. Suponhamos que A é aberto. Então existe um hiperplano fechado que separa A e B em sentido amplo.*

Demonstração.

Seja $C = A - B$ convexo. Desde que A e B são convexos, então dados $x, y \in A - B$ segue que $x = a_1 - b_1$ e $y = a_2 - b_2$, com $a_1, a_2 \in A$ e $b_1, b_2 \in B$. Então, sendo A e B conjuntos convexos, dado $\lambda \in [0, 1]$ segue que

$$\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2 \in A \text{ e } \lambda b_1 + (1-\lambda)b_2 \in B$$

Assim,

$$\lambda x+(1-\lambda)y = \lambda(a_1-b_1)+(1-\lambda)(a_2-b_2) = \lambda a_1+(1-\lambda)a_2-(\lambda b_1+(1-\lambda)b_2) \in A-B$$

Portanto, $C = A - B$ é um conjunto convexo.

O conjunto C é aberto. De fato, $C = \bigcup_{y \in B}(A - y)$, onde $A - y$ é aberto para cada $y \in B$ então $C = \bigcup_{y \in B}(A - y)$ é aberto.

Seja $x_0 = 0$, desde que $A \cap B = \emptyset$, se existissem $x \in A$ e $y \in B$ tais que $x - y = 0$ teríamos $x = y$ e $A \cap B \neq \emptyset$. Logo, $x_0 \notin C$.

Segundo o Lema 2.3.2, existe $f \in E^*$ tal que $f(z) < 0$, para todo $z \in C$, assim $f(x) < f(y)$, para todos $x \in A$ e $y \in B$.

Então, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\sup_{x \in A} f(x) \leq \alpha \leq \inf_{y \in B} f(y)$$

e então o hiperplano de equação $(f = \alpha)$ separa em sentido amplo A e B.

■

Teorema 2.3.2 (Hahn-Banach Geométrico, segunda forma) *Seja E um espaço vetorial normado. Sejam $A \subset E$ e $B \subset E$ dois conjuntos convexos, não vazios e disjuntos. Suponhamos que A é fechado e que B é compacto. Então existe um hiperplano fechado que separa A e B em sentido estrito.*

Demonstração.

Para $\epsilon > 0$ sejam $A_\epsilon = A + B(0, \epsilon)$ e $B_\epsilon = B + B(0, \epsilon)$ de forma que A_ϵ e B_ϵ sejam convexos, abertos e não vazios.

E também, para $\epsilon < \dfrac{d(A, B)}{2}$, temos que A_ϵ e B_ϵ são disjuntos. De fato, dados $\widetilde{x} = x + z\epsilon$ e $\widetilde{y} = y + \overline{z}\epsilon$ elementos de A_ϵ e B_ϵ, respectivamente com $z, \overline{z}$ em $B(0, 1)$.

Temos que

$$\begin{aligned} \|\widetilde{x} - \widetilde{y}\| &= \|x + z\epsilon - y - \overline{z}\epsilon\| \\ &= \|x - y + \epsilon(z - \overline{z})\| \\ &\geq \|x - y\| - \epsilon\|z - \overline{z}\| \\ &\geq \inf \|x - y\| - 2\epsilon \\ &> \inf \|x - y\| - d(A, B) = 0. \end{aligned}$$

Então $\|\widetilde{x} - \widetilde{y}\| > 0$. Portanto, A_ϵ e B_ϵ são disjuntos.

Pelo Teorema 2.3.1, existe um hiperplano fechado de equação $(f = \alpha)$ que separa A_ϵ e B_ϵ em sentido amplo. Temos então que para todo x em A, para todo y em B e para todo z em $B(0, 1)$,

$$f(x + \epsilon z) \leq \alpha \leq f(y - \epsilon z) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) + \epsilon f(z) \leq \alpha \leq f(y) - \epsilon f(z)$$

onde resulta que

$$f(x) < f(x) + \epsilon\|f\| \leq \alpha \leq f(y) - \epsilon\|f\| < f(y).$$

Concluímos que A e B estão separados em sentido estrito pelo hiperplano $(f = \alpha)$ já que $\|f\| \neq 0$.

■

Referências Bibliográficas

[1] Bachman, G. e L. Narici, *Functional Analysis*, Academic Press, 1966.

[2] Baroni, R. L. S. e N. P. V. Bertolo, *Notas de Análise Funcional*, UNESP-2003.

[3] Conway, J., *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1985.

[4] Junior, D. P. P., *Introdução à Análise Funcional*, EdUFF, 1999.

[5] Honig, C., S., *Análise Funcional e Aplicações*, vol 1, 1970.

[6] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis with Aplications*, John Wiley & Sons, 1978.

[7] Lusternik, L. A. e V. J. Sobolev, *Elements of Functional Analysis*, Delhi, 1961.

[8] Novosad, P., *Introdução à Análise Funcional*, Instituto de Matemática- UFPe, Textos de Matemática, nº 18, 1969 .

[9] Oliveira, C. R., *Introdução à Análise Funcional*, Publicações Matemáticas-IMPA, 2001.

[10] Riesz, F. e B. SZ. Nacy, *Functional Analysis*, Ungar, 1955.

[11] Rudin, W., *Functional Analysis*, McGraw-Hill, 1973.

[12] Yosida, K., *Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1968.