



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.004/18

Aplicação de teoria de sistema dinâmicos para inferência de causalidade entre séries temporais sintéticas e biológicas.

Rafael Lopes Paixão da Silva

Orientador
Roberto André Kraenkel

Abril de 2018

“O caos é uma ordem por decifrar”

José Saramago em “O homem duplicado”

Agradecimentos

Primeiramente é impossível dizer todas as influências desse trabalho e todas as pessoas que contribuíram para ele que é fruto de todas as minhas vivências, não só as profissionais como também as pessoais. A ciência é a minha maior fonte de prazer na vida e ela não é feita de indivíduos mas sim de comunidades, que precisam estar em sintonia e união. Sem ciência não há futuro. Abaixo tento humildemente listar as pessoas mais próximas e que contribuíram significativamente para este trabalho.

Agradeço ao meu orientador Roberto André Kraenkel, que aceitou o desafio de me guiar no mestrado, sua paciência, disposição em me ensinar e confiança em mim são as principais base desse trabalho, mais do que um professor você se tornou um amigo. Ainda no núcleo de pessoas ligadas diretamente com este trabalho tenho a agradecer especialmente, ao Brenno Cabella, que sempre esteve presente me ajudando incondicionalmente e viu de perto a maior parte desse trabalho ser construída. Agradeço ainda ao Renato Coutinho e Paulo Inácio, vocês estiveram ligados a esse trabalho desde seu início e com certeza contribuíram para ele, seja sanando minhas dúvidas ou até compartilhando debates e opiniões. Agradeço ainda ao Carlos Candia-Gallardo, que cedeu sua tese e seus dados que foram utilizados aqui.

Agradeço aqueles que compartilham o dia-a-dia da pesquisa comigo, entre eles meus colegas de pós-graduação, em especial, Jogean Carvalho, Gabriel Vieira, Silas Poloni, David Montenegro, Francisco Oliva, Kleber Oliveira, para citar alguns.

Agradeço a minha namorada e companheira, que sempre esteve presente e perto de mim, Mariana Zanetti Fonseca, sem seu apoio e carinho com certeza o caminho até aqui seria muito mais árduo.

Agradeço a minha família, Francisco Paixão da Silva e Aparecida Candido Lopes Paixão da Silva, meus pais, sem vocês nada do que sou hoje seria possível, vocês me deram a vida e me ensinaram tudo o que sei das relações humanas. Qualquer sucesso meu é também de vocês. Agradeço ao meu irmão, Thiago Lopes Paixão da Silva, por ser um amigo sempre presente.

Gostaria ainda de agradecer ao CNPq pela apoio financeiro através da bolsa.

Agradeço ao Instituto de Física Teórica (IFT) da Unesp pela infraestrutura e apoio institucional.

À meus pais

Resumo

A modelagem matemática é uma ferramenta presente nos campos da ecologia teórica e da biologia matemática. Porém tais modelos que tentam reproduzir parte da dinâmica natural são limitados, o que rapidamente esgota as possibilidades de investigações e exploração dos dados. Visando contornar isso partimos para o contexto da reconstrução de espaços-de-fase, pois queremos obter outras informações sobre aquilo que temos em mãos, a observação da natureza, o dado. De posse dessa nova aplicação da teoria de sistemas dinâmicos, é nos possibilitado uma nova inferência sobre o fenômeno observado, bem como suas causas que, através do modelo estavam ocultas. A técnica do mapeamento cruzado convergente, entre atratores gerados pela reconstrução de espaços-de-fase, através da representação do espaço-de-fase original num espaço euclidiano formado pela série temporal original e seus atrasos, possibilita uma inferência de causalidade mais pragmática e mais efetiva para sistemas que obedeçam uma dinâmica não-linear, o caso para as muitas séries ecológicas e biológicas de interesse.

Palavras Chaves: Sistemas Dinâmicos; Análises de séries temporais não-lineares.

Áreas do conhecimento: Sistemas Dinâmicos; Sistemas Complexos; Séries Temporais; Ecologia Teórica

Abstract

Mathematical modeling is an almost omnipresent tool in the fields of theoretical ecology and mathematical biology. However, such models that try to partially reproduce the natural dynamics are limited, which quickly runs out possibilities for data-driven investigation and exploration. Aiming to circumvent this, we set out to the context of phase-space reconstruction, since we want to obtain other information on what is in hands, an observation of nature, the data. In possession of the new application of the theory of dynamical systems, are enabled to us a new type of inference on the observed phenomenon, and its causes, until now hidden by the models. The technique of convergent-cross mapping, among attractors generated by phase-space reconstruction through the representation of the original phase-space in a Euclidean space formed by the original time series and its delays, enables us a more pragmatic inference of causality and more effective for systems that obey a nonlinear dynamics, the case for many ecological and biological series of interest.

Keywords: Dynamical Systems; Non-linear time series analysis .

Areas: Dynamical Systems; Complex Systems; Time series; Theoretical Ecology.

Sumário

1	Introdução	1
2	Reconstrução de atratores	3
2.1	Sistemas dinâmicos não-lineares	3
2.2	Atratores	7
2.3	Reconstrução de Atratores	9
3	Modelagem Dinâmica Empírica	14
3.1	Projeção Simplex e seleção de parâmetros	14
3.1.1	Projeção simplex	14
3.1.2	Seleção de parâmetros	19
3.2	Busca por causalidade	22
3.2.1	Mapeamento Cruzado Convergente (CCM)	22
3.2.2	Inferência e direção de causalidade	25
4	Aplicação do método em modelos artificiais e dados reais	30
4.1	Modelos sintéticos	30
4.1.1	Efeito Moran em recrutamento de adultos	30
4.1.2	Competição entre duas espécies com correlação miragem	37
4.2	Séries Temporais de borboletas	40
4.2.1	Seleção de parâmetros para a reconstrução	44
4.2.2	CCM entre espécies e os fatores climáticos	46
4.2.3	CCM entre espécies	51
5	Conclusão e perspectivas futuras	60
	Bibliografia	63

Lista de Figuras

2.1	Varição populacional de presas e predadores no tempo.	5
2.2	Retrato-de-fase para o sistema presa-predador construído a partir das duas populações.	6
2.3	Retratos-de-fase com a variação das condições iniciais em A e variação dos parâmetros em B.	7
2.4	Atrator gerado ao se integrar numericamente as equações 2.7, note que as trajetórias em nenhum momento se cruzam.	9
2.5	Cada variável do sistema de equações 2.7 também como uma série temporal.	10
2.6	Reconstrução do atrator de Lorenz com a série temporal de X e seus atrasos, $\tau = 6$	12
2.7	reconstrução do atrator de Lorenz com as séries temporais de Y e Z e seus atrasos, note que para Z a reconstrução falha não reproduzindo a estrutura de dois centros repulsores, lóbulos. $\tau = 6$	13
3.1	Ilustração do processo da projeção simplex em 2 dimensões, note que o simplex formado tem $3 = 2 + 1$ pontos. Figura extraída de [27]	16
3.2	Série temporal com o último ponto preenchido, e seus três pontos anteriores com formato diferente para destaque, demonstrando o padrão da dinâmica logo antes do ponto que queremos fazer uma predição para seu futuro.	17
3.3	Repetição de padrões similares, outros formatos de pontos, por toda a série.	18
3.4	Projeção desses passos seguintes e seus pesos segundo a fórmula 3.1 para a estimativa do passo seguinte do centro-preditor	19
3.5	Gráfico de ρ versus E , com destaque para o ponto em que o ρ é máximo.	20
3.6	Gráfico dos pontos observados (<i>obs</i>) versus os valores pontos preditos (<i>pred</i>), para diferente valores de E	21
3.7	Gráfico de ρ versus tp , com o fenômeno característico de sistemas dinâmicos do decaimento na habilidade de predição para tp cada vez maiores.	22
3.8	Ilustração do processo de mapeamento cruzado convergente. Os pontos ao redor, de Y_c em \mathbf{M}_Y identificam os vizinhos em \mathbf{M}_X , e daí se calcula o ponto estrela \star , \hat{X} é uma estimativa para o ponto X_c , figura extraída de [36]	24
3.9	Varição das duas séries temporais, após o regime transiente e valor da correlação média entre ambas, note que a correlação é baixa mesmo sabendo-se, pela equação (3.9) que há influência de Y em X	26
3.10	Gráficos de dimensão de <i>embedding</i> (E) calculado pela projeção simplex para as séries de X e Y . O Ponto preenchido denota o máximo da habilidade de predição (ρ), no caso ambas as séries tem uma dimensão de <i>embedding</i> ótima igual a 2.	27
3.11	Gráficos do decaimento do tempo de predição (tp) as séries de X e Y . O Ponto preenchido denota o máximo da habilidade de predição (ρ), ambas as séries tem decaimento exponencial, X ligeiramente mais rápido que Y e ambas as séries tem máximo de ρ para tp igual a 0.	28

3.12	Mapeamento cruzado convergente realizado nas duas direções, onde $X - xmap - Y$, em círculo cheio, nos dá um padrão de causalidade de Y em X , e o sentido contrário, $Y - xmap - Y$, que nos dá um padrão de falta de causalidade, como esperado pela equação 3.9.	29
4.1	Parte da variação populacional das duas populações de adultos no sistema de equações 4.1.	31
4.2	dimensão de <i>embedding</i> para cada uma das séries temporais do sistema 4.1	32
4.3	Mapeamento cruzado entre as séries temporais de N_1 e N_2 , note que o valor de ρ no CCM fica abaixo até do valor de correlação entre as séries	33
4.4	Dimensão ótima de <i>Embedding</i> para as séries de recrutamento, R_1 e R_2	34
4.5	Gráfico do CCM entre as séries da populações de recrutamento, R_1 e R_2 , a linha pontilhada como anteriormente é a correlação simples entre as séries.	35
4.6	Gráfico do CCM entre a série de adultos, N_1 , e os recursos R_1 e R_2 , a correlação entre as séries é negativa, $r_{(N_1,R_1)} = -0,23$ e $r_{(N_1,R_2)} = -0,15$	36
4.7	Gráfico do CCM entre a série de adultos, N_2 , e os recursos R_1 e R_2 , a correlação entre as séries é negativa $r_{(N_2,R_1)} = -0,13$, e $r_{(N_2,R_2)} = -0,28$	37
4.8	Variação das populações M_1 e M_2 , a correlação entre as séries é de apenas, $r(M_1, M_2) = 0,09$, porém sabemos das equações que há uma forte competição e, portanto, causalidade.	38
4.9	Gráfico da dimensão ótima de <i>embedding</i> para M_1 e M_2 , ambas tem dimensão ótima igual a 2.	39
4.10	CCM para os sentidos do sistema de competição com correlação miragem. A linha pontilhada é a correlação, $r = 0,09$	40
4.11	Borboletas da tribo "Ithomiini". A – H.ninonia, B – M.polymnia, C – M.lysimnia, D – H.euclea, E – H.lavinia, F – I.agnosia, G – E.eupompe, H – M.c.salonina. Imagem cedida por Candia-Gallardo, C.	41
4.12	Séries temporais com a variação da população estimada de cada espécie de borboleta da Tribo Ithomiini.	42
4.13	Séries temporais dos fatores climáticos possivelmente ligados à dinâmica da comunidade de borboletas.	43
4.14	Dimensão de <i>embedding</i> para as espécies de borboletas, os pontos preenchidos indicam o máximo de ρ para cada espécie, identificada no título de cada gráfico.	44
4.15	Dimensão de <i>embedding</i> para as espécies de borboletas, os pontos preenchidos indicam o máximo de ρ para cada espécie, identificada no título de cada gráfico.	45
4.16	Dimensão de <i>embedding</i> para os fatores climáticos, os pontos preenchidos indicam o máximo de ρ , identificada no título de cada gráfico.	46
4.17	CCM entre as espécie I.agnosia e H.ninonia, e os fatores climáticos. Pontos + com o fotoperíodo, ponto Δ com a chuva acumulada. A linha pontilhada (\cdots) é a correlação da espécie do título com a chuva e a linha tracejada ($---$) é a correlação entre a espécie e o fotoperíodo.	47
4.18	CCM entre das espécies M.polymnia e H.euclea, e os fatores climáticos. Pontos + com o fotoperíodo, ponto Δ com a chuva acumulada. A linha pontilhada (\cdots) é a correlação da espécie do título com a chuva e a linha tracejada ($---$) é a correlação entre a espécie e o fotoperíodo.	48
4.19	CCM entre das espécies H.lavinia e M.lysimnia e os fatores climáticos. Pontos + com o fotoperíodo, ponto Δ com a chuva acumulada. A linha pontilhada (\cdots) é a correlação da espécie do título com a chuva e a linha tracejada ($---$) é a correlação entre a espécie e o fotoperíodo.	49

4.20	CCM entre das espécies <i>E.eupompe</i> e <i>M.c.salomina</i> e os fatores climáticos. Pontos + com o fotoperíodo, ponto Δ com a chuva acumulada. A linha pontilhada (··) é a correlação da espécie do título com a chuva e a linha tracejada (—) é a correlação entre a espécie e o fotoperíodo.	50
4.21	CCM da espécie <i>I.agnosia</i> com as outras sete espécies.	51
4.22	CCM da espécie <i>H.ninonia</i> com as outras sete espécies.	52
4.23	CCM da espécie <i>M.polymnia</i> com as outras sete espécies.	53
4.24	CCM da espécie <i>H.euclea</i> com as outras sete espécies.	54
4.25	CCM da espécie <i>H.lavinia</i> com as outras sete espécies.	55
4.26	CCM da espécie <i>M.lysmnia</i> com as outras sete espécies.	56
4.27	CCM da espécie <i>E.eupompe</i> com as outras sete espécies.	57
4.28	CCM da espécie <i>M.c.salonina</i> com as outras sete espécies.	58
4.29	Rede com as relações causais encontradas para o CCM entre as espécies.	59

Capítulo 1

Introdução

A discussão sobre causalidade é uma das primeiras preocupações desde o início da prática científica de modo mais formal como ocorreu em princípio na civilização grega. Aristóteles já se debruçava sobre essa questão nos eventos naturais e na observação da natureza pelo homem, em sua filosofia. A definição clara de um efeito à uma dada causa sempre esteve presente naquilo que chamamos de prática científica mas nunca se tornou uma questão fechada. Até os dias de hoje e provavelmente por mais algum bom tempo, discutiremos relações de causa e como identificá-las. Sempre buscando uma métrica e/ou forma de medir aquilo que tomamos como efeito e causa. As definições para causalidade variam conforme a área do conhecimento e mesmo dentro de uma dada área ainda há espaço para mais de um forma de estabelecer-se relações de causalidade entre os objetos de estudo. Na biologia e ecologia, tudo o que se usa para causalidade é advindo de outras áreas, são adaptações para aquilo que estuda-se. Isso se deve em parte porque essas áreas tem grandes dificuldades no controle de seus experimentos exatamente por lidarem com assuntos com um grande grau de complexidade. É impossível controlarmos todos os parâmetros relevantes que regulam o ciclo de vida e as interações de espécies de animais, por exemplo, às vezes mesmo mensurar de forma acurada certos parâmetros de interesse já se torna uma tarefa altamente trabalhosa. Portanto faz-se necessário então que para o estabelecimento de causalidade no estudo dessas relações utilizemos novas formas de abordagens que se baseiem principalmente em extrair o máximo de informação do dado que se tem em mãos.

No contexto de séries temporais e de certo modo amplamente na ciência a ideia de que correlação não implica causa é bem nítida porém mesmo assim existe ainda uma necessidade de substituir o uso de correlação entre séries como uma métrica de causalidade, principalmente em áreas que a utilizam como um forma adapta de estudo, o que ocorre na biologia e ecologia.

Os métodos mais tracionais no estudo de causalidades ambientais basicamente envolvem a ideia da causalidade de Granger [1] para sistemas estocásticos adaptados ao contexto biológico. Essa formulação tem se mostrado falha para muitos sistemas ecológicos, dado que se baseia numa análise estocástica simples: X causa Y se houver correlação entre os valores presentes de X e os valores imediatamente futuros de Y e se X é correlacionado com valores passados ou contemporâneos de Y e a correlação é menor que a primeira correlação tentada, significa realmente que X é causa de Y, no critério de Granger. Isso pode não ser condizente com a realidade, muitas vezes determinística ou com efeitos de sincronia, ou até de correlações espúrias entre as variáveis. As correlações simples podem não expressar as verdadeiras relações por trás do sistema ecológico. Novamente vale lembrar que correlação não implica causa e que a falta de correlação não implica na falta de causalidade, denotando a necessidade de alternativas no estudo desses sistemas.

Nessa linha surge em 2012 um método mais robusto para análise de sistemas dinâmicos ecológicos e/ou biológicos, o mapeamento cruzado convergente, ou em inglês *convergent-cross mapping*, aqui abreviado como CCM. Nesse novo método, George Sugihara, propõe uma abordagem diferente aos sistemas ecológicos [2,4]. Supõe-se como premissa que todas as variáveis são regidas por fatores determinísticos

e portanto tem um atrator comum entre suas partes, em inglês *Manifold*¹, no espaço-de-fase. Por atrator entende-se aqui a soma de trajetórias que não se cruzam nesse espaço.

Esse atrator não é observável mas sim somente algumas de suas variáveis sob a forma de séries temporais. No entanto com a ideia introduzida pelo teorema de Takens [3], pode-se reconstruir um novo atrator no qual se conserva a dinâmica bem como a topologia do atrator original. Esse novo atrator é conhecido como atrator-sombra ou variedade-sombra, em inglês *Shadow-Manifold*, a partir da reconstrução desses atratores-sombras para as variáveis observadas se faz o mapeamento, uma correspondência um a um entre os pontos desses atratores, em ambas as direções, ou seja, tenta-se mapear os pontos do atrator-sombra do efeito na causa e vice-versa. Se houver convergência para um valor conforme se aumentar o conjunto de pontos testados, então há causalidade, pois eles participam do mesmo atrator. Contraintuitivamente, se espera que haja convergência somente na direção do efeito para a causa, pois pontos do efeito mapeiam pontos do atrator da causa, dado que o efeito guarda informações de sua causa, o contrário não é esperado que seja observado, pois a causa não guarda informações daquilo que afeta. Esse é um argumento mais forte matematicamente que apenas a correlação entre as séries, e portanto pode-se afirmar que as séries temporais são causa e efeito, quando há mapeamento.

Com essa ideia em mente partimos para a análise de séries temporais ecológicas e verificamos as causas entre fatores ambientais, climáticos e interespecíficos na dinâmica de um sistema ecológico. Muitos são os exemplos de sistemas de interesse e passíveis de análise, como o ciclo de vida de uma espécie de borboleta e sua relação com o clima, ou a relação entre espécies de sardinhas e anchovas e as flutuações das mesmas com o passar do tempo. Sistemas epidemiológicos também podem ser de interesse, dado que pode haver uma relação entre fatores climáticos e a dinâmica da doença no ambiente e/ou em populações.

O presente trabalho está organizado da seguinte forma, no Capítulo 2 é apresentado um panorama geral dos aspectos teóricos principais para a reconstrução de atratores através do Teorema de Takens. No Capítulo 3, apresentamos o método de predição em sistemas dinâmicos introduzidos por G. Sugihara. Através desse método podemos selecionar parâmetros ótimos que permitem uma melhor predição da série temporal para a reconstrução de atratores. Ainda no Capítulo 3 mostramos o algoritmo de inferência de causalidade. Este algoritmo consiste em realizar predições entre duas séries temporais, conhecido como mapeamento cruzado convergente (CCM). No Capítulo 4 aplicamos esse algoritmo a exemplos clássicos de sistema dinâmicos com correlações que se tomadas como medida de causa podem levar a conclusões errôneas a cerca das relações de causa do sistema, e com essa análise podemos dar uma nova perspectiva para as relações de causalidades desses sistemas. Em seguida aplicamos o método sobre dados reais com a finalidade de estabelecer as suas principais relações causais. No Capítulo 5 discutimos os resultados e perspectivas para a utilização do CCM.

¹A questão envolvendo a ideia de atratores, variedades e *Manifold*, é mais complexa, nessa introdução não nos preocupamos, por hora, em clarificá-la

Capítulo 2

Reconstrução de atratores

Neste capítulo discutiremos o teorema de Takens de maneira informal. Ele permite a reconstrução do espaço-de-fase através de séries temporais atrasadas de uma única observação do sistema original. Inicialmente definimos as grandezas usadas bem como as estruturas e objetos com os quais estamos trabalhando, além da área de aplicabilidade do teorema. Vale ressaltar que usaremos os nomes em inglês por facilidade de inspeção na literatura, dado que muitos dos termos não tem um tradução única. ¹

Começamos com uma ideia dos objetos envolvidos no teorema e sua área de aplicabilidade; primeiro a área de aplicação e estudo, sistemas dinâmicos não-lineares, depois os objetos matemáticos, variedades (*Manifolds*), atratores, imersões, variedades-sombras (*Shadow Manifolds*), dimensão de mergulho (*Embedding dimension or Embedding vector*), observável e séries atrasadas.

Por fim, mostramos uma enunciação do teorema original mais simplificada porém mais moderna e mais acessível, e com uma menção a uma extensão do teorema.

2.1 Sistemas dinâmicos não-lineares

O estudo de sistemas dinâmicos está presente nas ciências há tempos. Estudar e entender em tempo real a evolução de um dado sistema, seja ele o que for, matemático, físico, ecológico, químico, e tantos outros exemplos, é uma atividade antiga. O fato de estarmos estudando processos em constante evolução, torna tudo um pouco mais complexo, mas mesmo assim ainda há a possibilidade de extrair alguma informação de tal estudo. Basicamente a área de sistemas dinâmicos é tudo aquilo que envolva evolução temporal através de uma dada regra [?], um sistema dinâmico em tempo discreto pode ser descrito por uma equação genérica do tipo:

$$X_1 = F(X_0), \quad (2.1)$$

Onde dizemos que $F(X_0)$ é a uma função de X_0 no tempo $t = 0$ ou no valor inicial de t , que dá a forma de X_1 no próximo passo de tempo, de modo geral temos:

$$X_n = F^n(X_0), \quad (2.2)$$

Em que $F^n(X_0)$ é uma função composta das funções dos passos anteriores, n é o número de iterações que realizamos ou o número de passos no tempo. Nos casos de nosso interesse essa função será não-linear. A equação 2.2 nos dá a informação que qualquer estado futuro de X_n em qualquer n , é dependente de seu estado inicial. Por mais simples que possa parecer a equação 2.2, ela nos fornece uma série temporal. Por exemplo se o sistema em estudo for a descrição de um movimento, significa que a posição, X_n , varia conforme a função F . Se é a descrição de uma população, significa que o número de indivíduos, X_n , varia conforme a função.

¹Aqueles termos que já tiverem uma tradução ou a tradução for consolidada serão utilizados em português.

Para o caso em que o tempo t é contínuo, ou seja, é uma função contínua de t , o estado X_n é definido também por uma função ϕ_t , a qual chamamos de fluxo [?], então a equação 2.2 se torna:

$$x_n = \phi_t(x_0), \quad (2.3)$$

Pode-se passar de uma sistema discreto para um contínuo apenas aumentando o número de passos, e conseqüentemente diminuindo o tamanho do passo a cada iteração, em termos computacionais isso é algo muito comum de se fazer, pois quando o tamanho do passo, ou a quantidade de iterações é tal, que não seja mais distinguível a diferença entre um passo e outro, passa-se de uma formulação para outra. O contrário também é válido, ao aumentar o tamanho de cada passo, passamos de um sistema contínuo para um discreto. O computador não é capaz de realizar cálculos sob diferenças infinitesimais, mas em certo grau as aproximações numéricas para a descrição de sistemas contínuos funcionam muito bem e contam com uma extensa literatura [5–7].

A próxima consideração a se fazer é pensar vários sistemas dinâmicos em conjunto e interagindo, basicamente essa ideia pode ser expressa pela equação a seguir:

$$\sum_{i=1}^N x_n^i = \phi_t^i(x_0^i, x_0^j), i \neq j \quad (2.4)$$

Onde o sobrescrito i identifica o número da equação e o subscritos é como em 2.3. Portanto a equação 2.4 nos diz que temos uma soma de N equações onde cada uma delas é um x_n dado em função de ϕ_t , que por sua vez é dependente x_0 bem como da condição inicial de outra equação, assim tornando essas equações acopladas.

Muitos sistemas dinâmicos seguem um modelo de equação semelhante à 2.4, eles estão presente numa grande variedade de campos da ciência. Um primeiro exemplo de sistema dinâmico não-linear é a equação de Lotka-Volterra, que descreve a dinâmica entre presa e predador, e como essas duas populações se conectam [8]:

$$\dot{x} = (b - py)x \quad (2.5)$$

$$\dot{y} = (rx - d)y \quad (2.6)$$

Nessas equações, x é a população de presas e tem sua variação, \dot{x} dependente da taxa de crescimento intrínseca da espécie e da taxa de predação à qual ela está sujeita. Já na equação de predadores 2.6, vemos uma forma parecida com a equação de presas 2.5, porém agora a taxa de nascimentos é que tem uma dependência com a outra espécie. O termo rx indica a taxa com que a população de predadores cresce. O termo intrínseco dy de 2.6 é a taxa de mortalidade dos predadores. O modelo de Lotka-Volterra foi o primeiro a mostrar a existência de ciclos intrínsecos em populações de predadores e presas, neste modelo o predador é dito especialista, pois não subsiste na ausência de presa. Quanto maior o consumo dos predadores, maior será sua população, em contrapartida a população de presas decresce, e quando a quantidade de presas disponíveis chega num ponto muito baixo, começa a faltar comida para os predadores que tem sua taxa de crescimento afetada e a população começa a decrescer. Isso alivia a população de presa e propicia seu crescimento, retomando o ciclo do começo, veja-se a Fig(2.1).

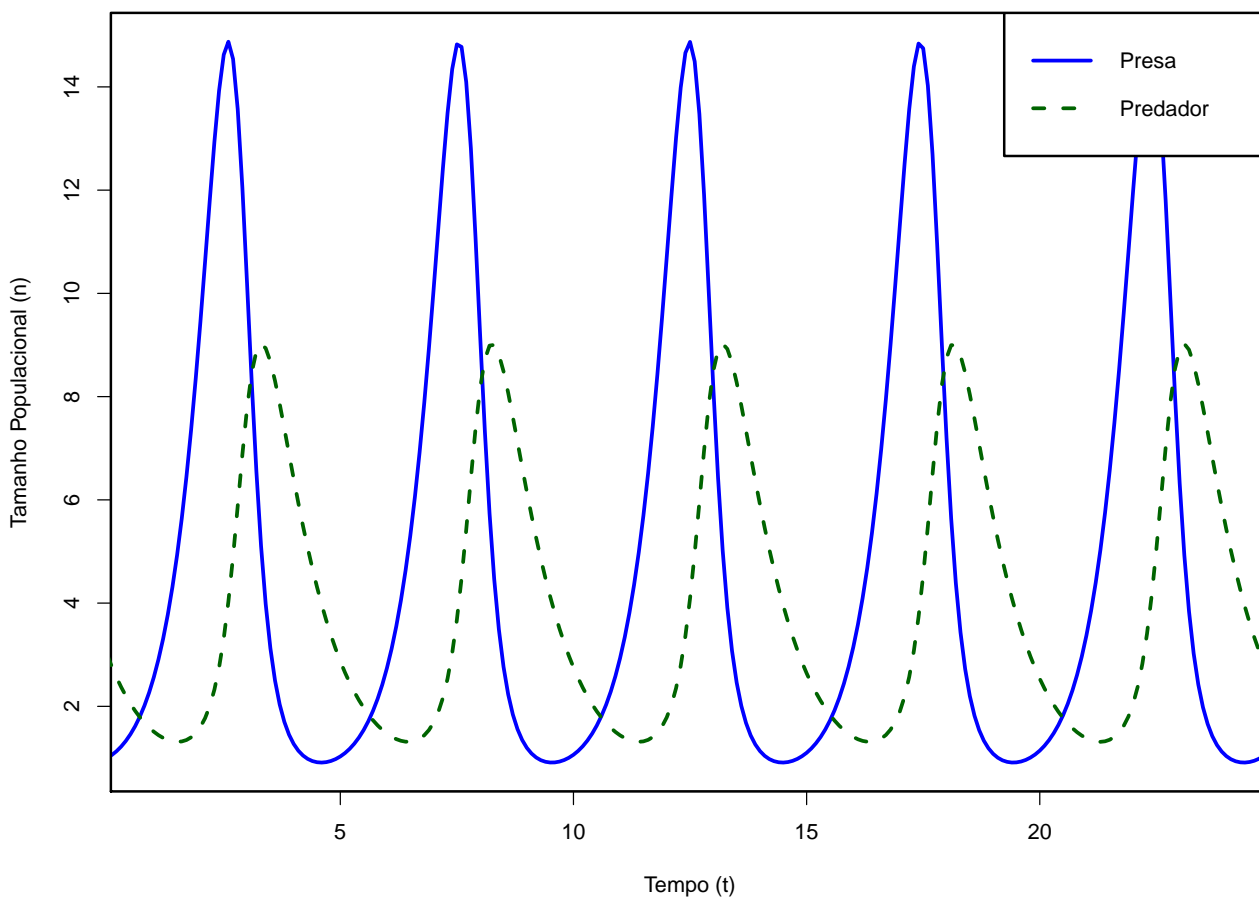


Figura 2.1: Variação populacional de presas e predadores no tempo.

É claro que, em condições naturais, ciclos populacionais não terão a regularidade que as soluções do modelo de Lotka-Volterra apresentam. Pois as equações não conseguem reproduzir e nem expressam exatamente todos os mecanismos envolvidos nos processos de interações entre presa e predador. As equações de Lotka-Volterra, são um exemplo de como a partir de simples conceitos matemáticos podemos explicar padrões dinâmicos de fato existentes na natureza.

Nos dizeres de Peter Turchin em [9], “talvez essas alternâncias de ciclos sejam um princípio básico da natureza”, que de modo geral são chamadas de oscilações consumidor-recurso, e que podem ser observadas em praticamente todas as escalas de populações.

Outra forma de visualizar essa noção de ciclos se dá quando colocamos cada variável num mesmo gráfico, ao que chamamos de espaço-de-fase do sistema. No exemplo das equações de Lotka-Volterra construímos esse gráfico colocando a população de presas no eixo x e a população de predadores no eixo y, como em Fig.(2.2).

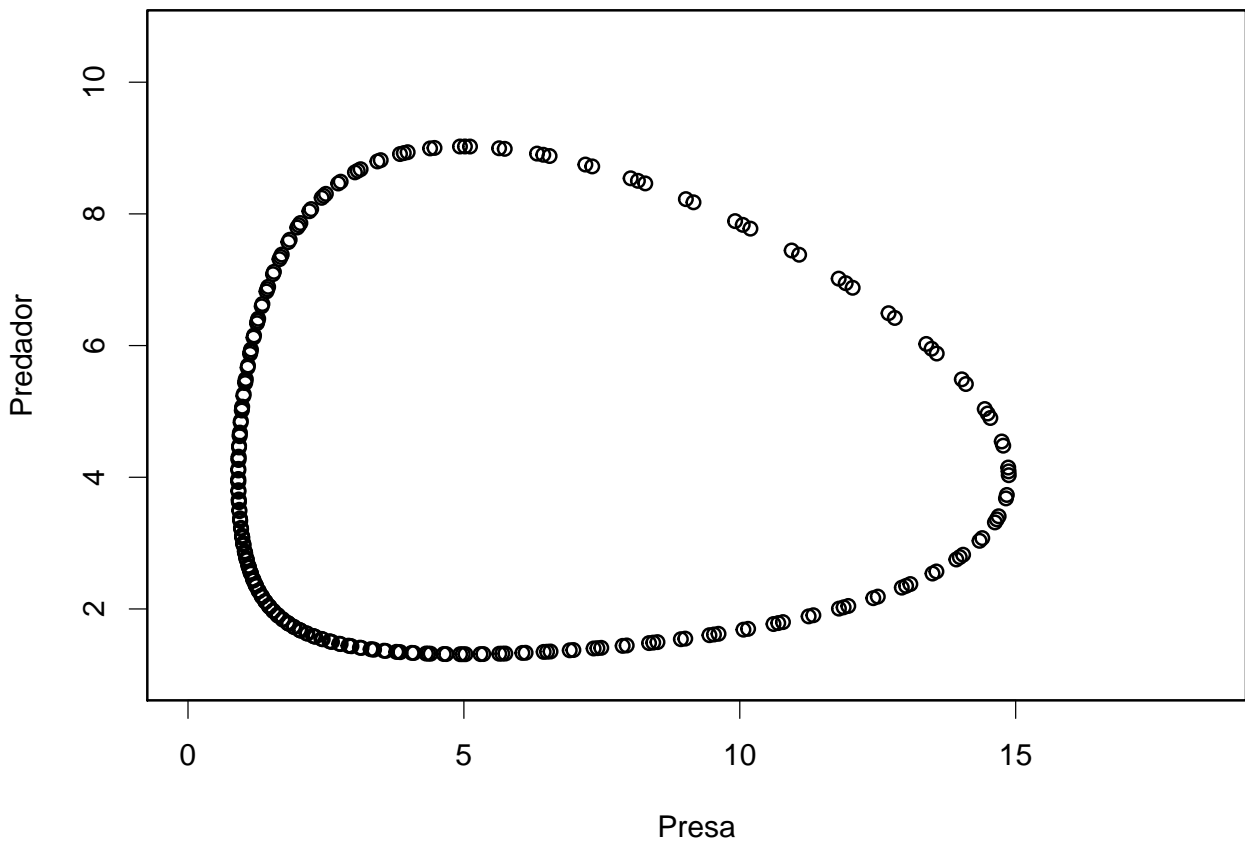


Figura 2.2: Retrato-de-fase para o sistema presa-predador construído a partir das duas populações.

Vemos na figura 2.2 que as oscilações tendem a um ciclo, porém esse ciclo é intrinsecamente ligado aos valores dados para os parâmetros do sistema e as condições iniciais. Podemos variar esses parâmetros de interação bem como as condições iniciais e ver quais novas trajetórias o sistema irá tender no espaço-de-fase, como em Fig.(2.3).

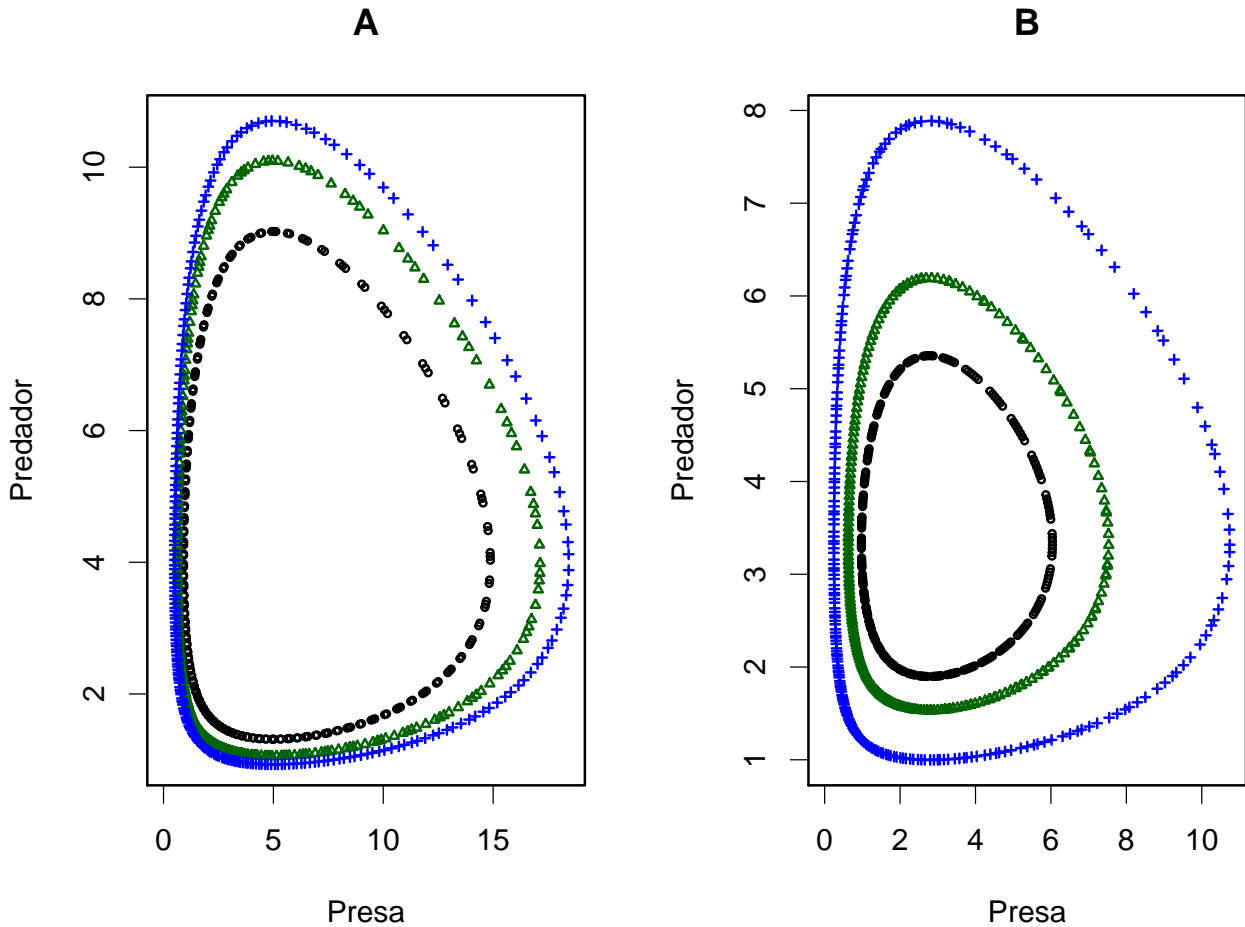


Figura 2.3: Retratos-de-fase com a variação das condições iniciais em A e variação dos parâmetros em B.

Essa imagem ilustra a dependência do sistema às condições iniciais, para cada símbolo tem-se valores iniciais diferentes das populações de cada espécie na Fig.(2.3A), isso leva a diferentes ciclos. Podemos ainda também variar os parâmetros do sistema, como na Fig.(2.3B), as variáveis que definem as taxas de mortalidade e nascimento, bem como a conversação de presas em predadores, os parâmetros b , p , r e d .

2.2 Atratores

Chamaremos o conjunto de pontos no espaço-de-fase nos quais a dinâmica de longos tempos se situa de atrator. Há diversos tipos de atratores, como pontos fixos, ciclos-limites e os famosos “atratores estranhos”.

O mais conhecido exemplo de um atrator-estranho vem do estudo de Lorenz [11] da dinâmica atmosférica de convecção. Lorenz estudou como se poderia resolver as equações que regem a dinâmica da atmosfera na esperança de realizar previsões sobre o tempo de forma mais precisa. No seu modelo ele percebeu que é possível fazer previsões da dinâmica, mas somente para um pequeno período de tempo, pois como constatou no artigo já citado, o modelo é altamente dependente das condições iniciais. Condições iniciais próximas dão, após um certo período de tempo de evolução, trajetórias muito divergentes. Por menor que fossem as diferenças nas condições iniciais o estado final do sistema divergia grandemente, impossibilitando assim qualquer tipo de previsões de longo prazo. Porém um ponto a se ressaltar no trabalho de Lorenz é que apesar da incapacidade de se realizar previsões sobre tal sistema,

o que se viu no espaço-de-fase do modelo é que ele sempre estava preso à um “atrator estranho”², que limitava de algum modo a região possível para a qual o sistema poderia evoluir. O atrator ao qual o sistema de Lorenz estava vinculado se caracterizava por ter uma dimensão fractal, ou seja, não pertencia nem a uma dimensão 2 nem à 3, a região na qual a dinâmica ficava confinada era de dimensão 2.3, daí o nome “estranho”, pois na resolução de um sistema de três equações diferenciais se tinha como resultado uma dinâmica de dimensão intermediária³. O sistema de Lorenz é dado pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -\sigma X + \sigma Y \\ \dot{Y} &= -XZ + rX - Y \\ \dot{Z} &= XY - bZ\end{aligned}\tag{2.7}$$

Essas equações são uma aproximação de um modelo para um fluido uniforme que é aquecido na parte de baixo e resfriado na parte superior, numa tentativa de descrever uma camada atmosférica. Lorenz descreve as variáveis do sistema sendo X proporcional à intensidade do movimento convectivo, Y proporcional à diferença de temperatura entre as correntes ascendentes e descendentes e Z proporcional à distorção vertical do perfil de temperatura [11]. Os parâmetros σ , r e b , são parâmetros hidrodinâmicos e que determinam como as equações evoluem no tempo.

O principal achado do trabalho de Lorenz, além das equações em si, é a observação de que em um sistema relativamente simples, a capacidade de predição cai conforme se tenta prever mais longe no futuro, em suas palavras: *“O resultado tem vastas consequências quando o sistema considerado é um sistema não-periódico observável o qual queremos realizar predições de seu estados futuros. Isso implica que dois estado, diferindo por valores imperceptíveis podem eventualmente evoluir em dois estados consideravelmente diferentes. Se, então, houver qualquer erro, seja qual for o estado presente observável—e em qualquer sistema real esses erros são inevitáveis—uma predição aceitável de um estado instantaneamente num futuro distante portanto será impossível.”* [11].

Com esse conceito Lorenz funda a teoria do caos, na forma como a conhecemos hoje [12]. O principal conceito da teoria é o fato de que sistemas aparentemente determinísticos pareçam exibir um comportamento aleatório. Num primeiro momento isso talvez pareça um obstáculo para a nossa incapacidade de predição porém, como veremos no próximo capítulo, essa incapacidade não é total. Lorenz constatou a incapacidade de se realizar predições para longos períodos para sistemas reais, pois mesmo que duas condições iniciais diferissem por diferenças ínfimas, elas irão evoluir, de forma divergente. Numa situação real, isso introduz a incapacidade de se realizar predições de longo prazo, pois sempre se tem erros, como foi constatado por Lorenz, o que pode levar a cenários futuros altamente discrepantes. A corroboração dessa afirmação de Lorenz se dá quando observa-se o espaço-de-fase do sistema por ele estudado, quando integramos numericamente as equações 2.7 e colocamos as séries temporais de cada variável num espaço de três dimensões obtemos uma infundável coleção de pontos que seguem trajetórias que nunca se cruzam e também nunca passam mais de uma vez pelo mesmo ponto, gerando o que se denomina como atrator estranho, que como comentamos anteriormente tem uma dimensão de “*box-counting*” entre 2 e 3.

Abaixo mostramos tal atrator integrando numericamente as equações 2.7 para os valores dos parâmetros nos quais o atrator-estranho aparece, $\sigma = 10$, $r = 28$ e $b = 8/3$, onde os pontos fixos se tornam repulsivos e as trajetórias passeiam indefinidamente na superfície fractal formada:

²Lorenz não nomeou a figura da resolução das equações como um “atrator estranho”, essa terminologia aparece somente no trabalho de D. Ruelle e F. Takens [13] no estudo de turbulência em sistemas dissipativos da hidrodinâmica.

³A medida de estranheza de um atrator é uma questão que envolve o cálculo do expoente ν , que relaciona a dimensão fractal do atrator com a dimensão informacional dele, o artigo de Grassberger e Procaccia [14] discute essa medida.

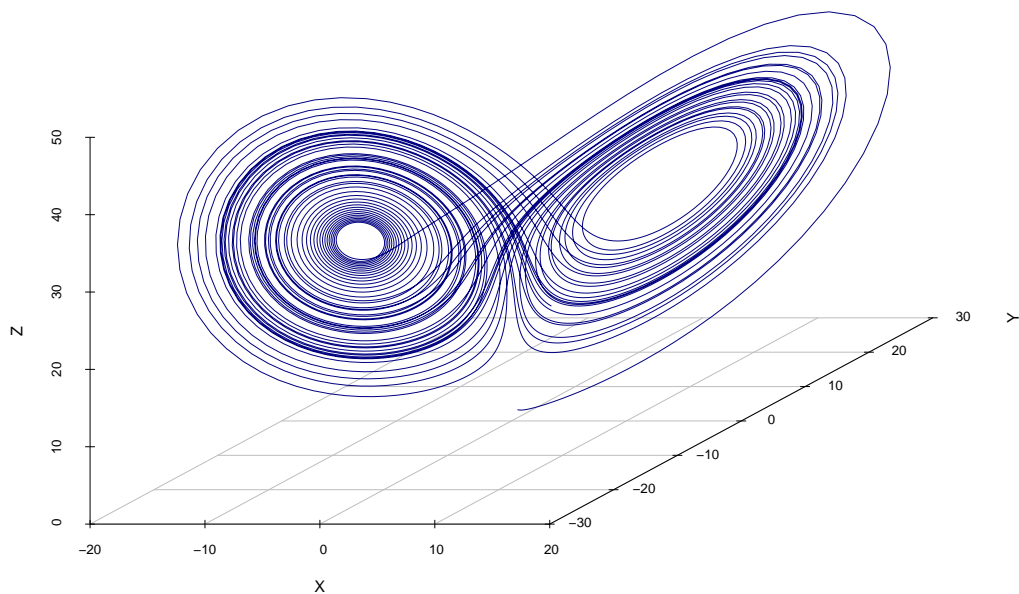


Figura 2.4: Atrator gerado ao se integrar numericamente as equações 2.7, note que as trajetórias em nenhum momento se cruzam.

Basicamente a grande maioria dos sistemas ecológicos e/ou biológicos de interesse exibem um comportamento caótico, em algum grau. Peter Turchin [15], argumenta que na natureza esses comportamentos seriam na verdade quase-caóticos e não caóticos no sentido completo, o que contesta os achados dos trabalhos de Robert May [16, 17] de que o caos, de forma forte, presente em modelos discretos e de simples reprodução, na verdade vagamente modelam a natureza e pouco entregam em verdadeira previsibilidade, ainda que exibam caos como característica básica. Turchin completa dizendo que, apesar de ter havido num primeiro momento um êxtase quanto à possibilidade de que a natureza fosse um sistema verdadeiramente caótico, o que abriria a possibilidade de se utilizar todo o conhecimento da teoria do caos para estudo da natureza. Porém após passado esse entusiasmo inicial, tenha ficado mais claro que na verdade as relações biológicas tenham um grau ainda maior de complexidade e somente alguns poucos exemplos pareçam exibir um comportamento caótico. Mesmo assim a teoria do caos em muito foi útil para as inovações e achados da dinâmica de populações e ecologia, pois com ela muito dos métodos, antes restritos à matemática e física de sistemas dinâmicos, foram incorporados à ecologia, entre eles a reconstrução de espaço-de-fase [18].

2.3 Reconstrução de Atratores

A reconstrução de atratores é uma representação matematicamente válida do atrator original a partir de uma única série temporal. Como vimos, um sistema dinâmico pode ser representado por um retrato-de-fase, que é a expressão conjunta de todas as variáveis do sistema num mesmo espaço euclidiano para um dado conjunto de parâmetros e condições iniciais. A projeção da dinâmica do atrator sobre um dos eixos fornece-nos uma série temporal. Se fizermos o gráfico de cada eixo do sistema de equações 2.7, por exemplo, com o valor de cada variável em função do instante de tempo, obtemos para cada uma delas as seguintes séries temporais:

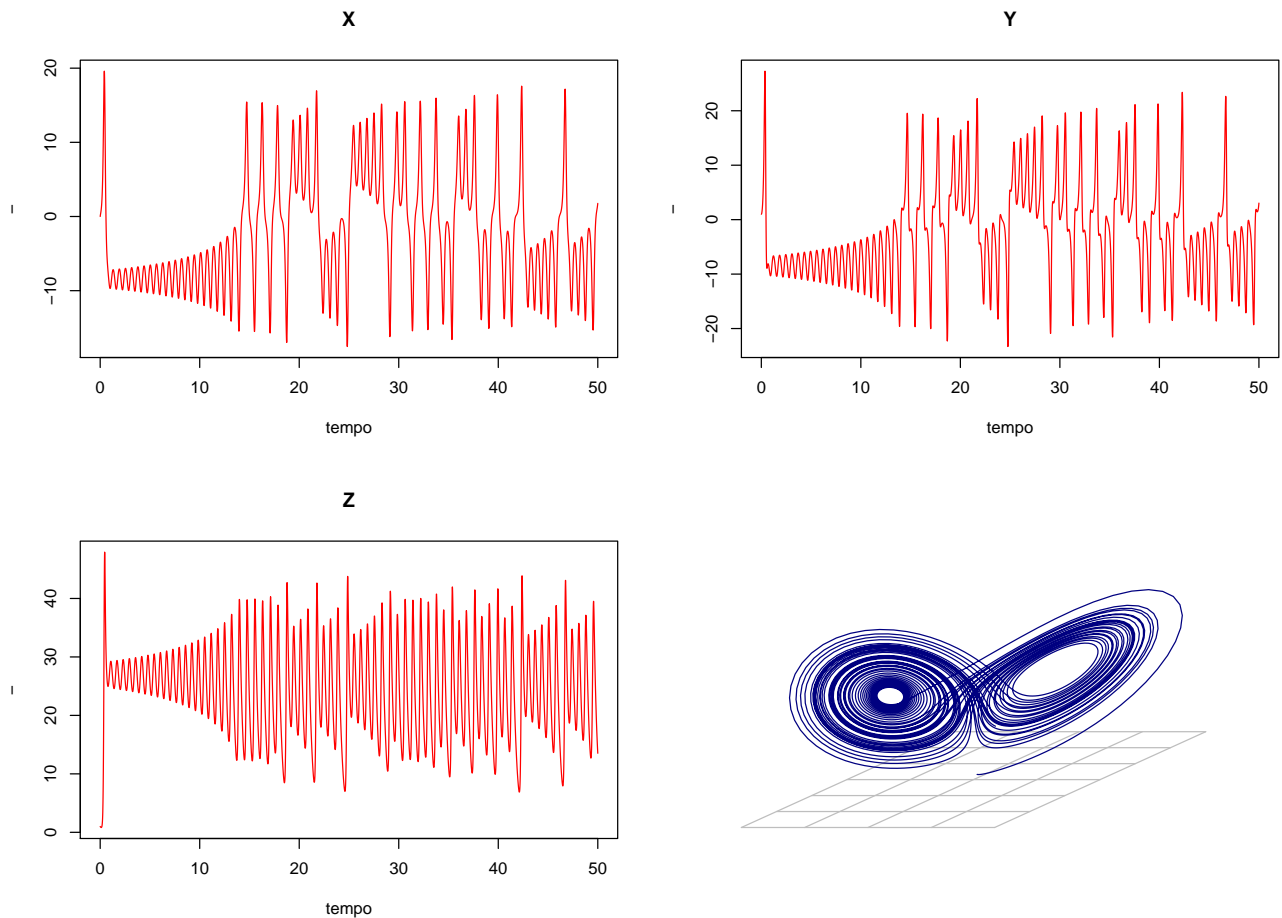


Figura 2.5: Cada variável do sistema de equações 2.7 também como uma série temporal.

O atrator de Lorenz é formado pela projeção conjunta das séries temporais num mesmo espaço-de-fase. A questão que se apresenta é: seria possível reconstruir o atrator a partir de apenas uma das séries temporais? A resposta é sim e está relacionada ao teorema de Takens. Notemos que este resultado tem consequências práticas notáveis, visto que para muitos sistemas, possuímos informações sobre apenas algumas das variáveis dinâmicas.

Antes de enunciar o teorema vamos formular alguns conceitos necessários para ele. Sempre estamos na busca de reconstruir um objeto que está num espaço intangível a nós, a esse objeto chamamos de variedade, ou variedade topológica. Uma variedade tem a característica marcante de ser o lugar topológico onde as trajetórias do espaço-de-fase do sistema se localizam. Normalmente nos referimos a ela como um letra maiúscula em negrito, \mathbf{M} . Se pudermos acessar uma variedade \mathbf{M} de dimensão m de um dado sistema, teremos a noção da dinâmica, $\phi : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$, bem como as características do sistema, por exemplo pode-se observar, se na variedade há ciclos, pontos fixos, atratores, etc. Daí, poderia-se inferir mecanismos pelos quais o sistema de interesse produziria esse tipo de dinâmica. Infelizmente não temos necessariamente sempre acesso a essa variedade, mais sim projeções da dinâmica dela em um dado eixo, essa projeção chamamos de funções observações da variedade, e elas realizam o seguinte mapeamento, $y_k : \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}$, que são as séries temporais de interesse que utilizamos. Os atrasos dessas séries temporais definidos como, $(y_k(\phi_{-\tau}(x)), \dots, y_k(\phi_{-2m\tau}(x))) : \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}$, também são funções observações de \mathbf{M} . Um último elemento para o teorema é o fluxo sobre a variedade, que é definido como, $\phi : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$, esse fluxo defini a dinâmica do sistema bem como a topologia da variedade. Se esse fluxo é um difeomorfismo, ou seja, é um função homeomórfica que leva univocamente pontos da variedade \mathbf{M} em outros pontos dela mesma e tem uma inversa igualmente homeomórfica, então definimos assim que na variedade \mathbf{M}

temos um sistema dinâmico descrito por uma dinâmica única também. Agora com todos esses elementos definimos o seguinte teorema, conhecido como teorema de Takens ⁴, que diz o seguinte:

Teorema 1 (Teorema de Takens generalizado). *Considere um difeomorfismo $\phi : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$ numa variedade compacta \mathbf{M} de dimensão m , com $2m+1$ funções observação, $\langle y_1, \dots, y_{2m+1} \rangle$, onde $y_k : \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}$, suaves; onde “suave” entende-se pelo menos que sejam (\mathbb{C}^2) ⁵.*

Então é uma propriedade genérica de todas as possíveis $\langle y_k \rangle$, que para o mapeamento definido por

$$\Phi_{\langle y_k \rangle}(\mathbf{x}) = (y_1(\mathbf{x}), y_2(\mathbf{x}), \dots, y_{2m+1}(\mathbf{x}))$$

*é uma embedding.*⁶

Se tivermos somente uma função observação da variedade \mathbf{M} que é uma série temporal, um mapa de coordenadas atrasadas pode ser definido.

Definição 2.3.1 (Mapa de coordenadas atrasadas). Se ϕ é um fluxo na variedade \mathbf{M} , τ é um atraso positivo, e $y : \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave, definimos o mapa de coordenadas atrasadas $F(y, \phi, \tau) : \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ por

$$F(y, \phi, \tau)(\mathbf{x}) = (y(\mathbf{x}), y(\phi_{-\tau}\mathbf{x}), \dots, y(\phi_{-2m\tau}(\mathbf{x})))$$

Com esse teorema podemos, em princípio, reconstruir qualquer atrator nele representado, através de funções observação da variedade, que para o nosso caso são as séries temporais do atrator em \mathbf{M} e seus atrasos, e através do teorema temos a garantia dessa reconstrução ser uma *embedding* da variedade, ou seja, uma nova variedade, que chamamos de variedade-sombra \mathbf{M}_s , e nos é garantido pelo teorema 1 que ela reproduz todas as propriedades topológicas da variedade original, bem como a dinâmica geradora do atrator, o qual queremos reconstruir.

Por exemplo, se temos somente o conhecimento de uma das variáveis do sistema de Lorenz, como a série temporal de $X(t)$, podemos tomar essa série temporal e suas séries atrasadas, $\langle X(t - \tau), X(t - 2\tau), \dots, X(t - 2m\tau) \rangle$, onde o τ é o atraso temporal. Então temos o conjunto $\Phi_{\langle y_k \rangle}(\mathbf{x})$, de forma geral, e de forma específica o $F(y, \phi, \tau)(\mathbf{x})$, de funções observações da variedade original \mathbf{M} , e com ele podemos reconstruir o atrator de Lorenz, se tivermos pelo menos $2m + 1$ ⁷ dessas funções observações e termos mapeado totalmente o atrator em um espaço euclidiano \mathbb{R}^{2m+1} .

Reproduzimos na Fig.(2.6) uma reconstrução do atrator de Lorenz usando a variável X e seus atrasos.

⁴O teorema de Takens foi formulado tanto no trabalho [3] como em [19], mas a versão a seguir é uma tradução da versão dada no teorema 2 de [4], todos esses artigos citados trazem a prova do teorema a seguir, que é extensa e não concerne ao escopo dessa dissertação, a formulação e prova mais recente e moderna do teorema estão em [4], nos teoremas 2 e 7 desse trabalho.

⁵Por \mathbb{C}^2 entende-se pelo menos contínua na segunda derivada.

⁶No inglês a palavra *embedding* significa literalmente incorporação, o termo matemático é traduzido como mergulho, mas optamos por usar ele em inglês. O termo imersão, que pode ser uma tradução também para *embedding* no contexto matemático defini outro tipo de representação topológica de uma variedade e tem seu equivalente em inglês com o termo *immersion* e não *embedding*.

⁷O número de atrasos necessários para reconstruir o atrator é um questão sutil, como veremos é possível reproduzir o atrator com um número menor de séries que $2m + 1$, pois essa condição é suficiente para o teorema, na verdade o número de séries necessárias está ligado também com a independência dessas séries entre si, veja-se [20].

Variedade-sombra de X

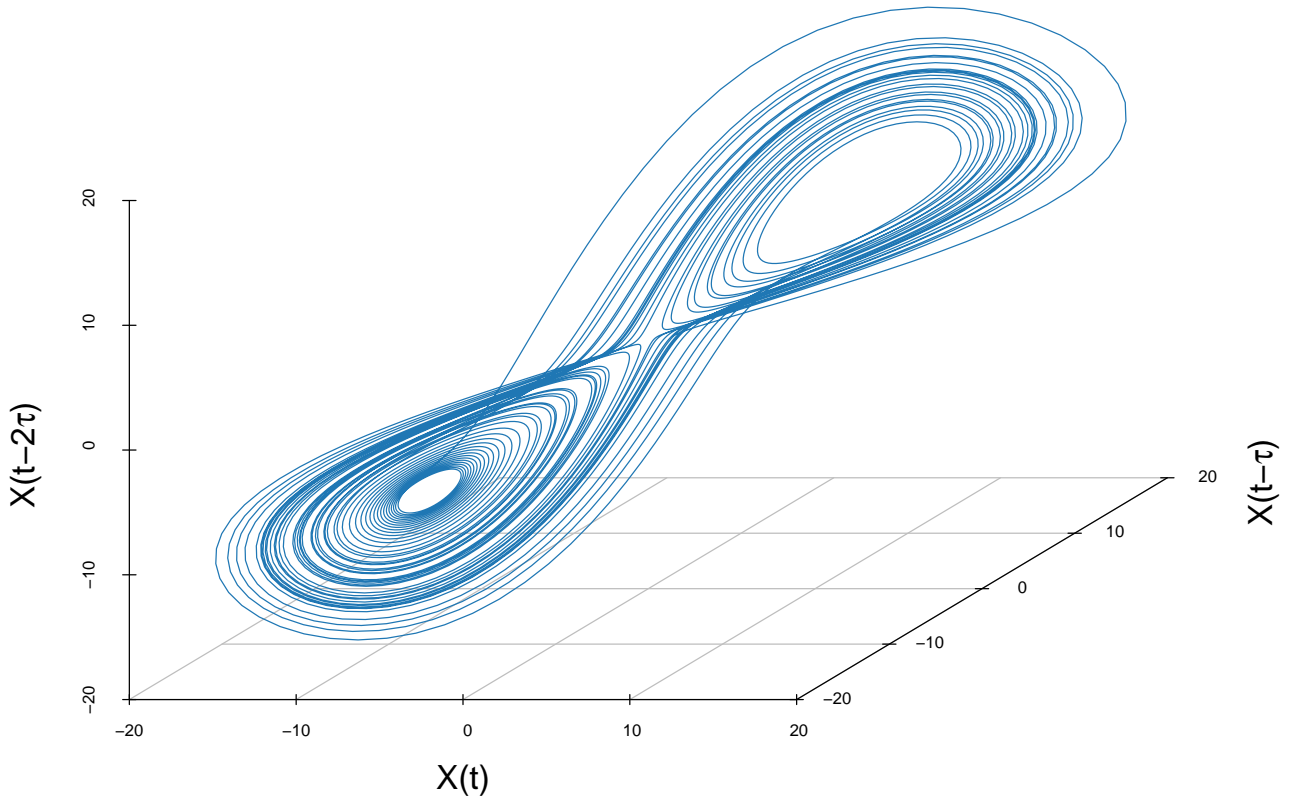
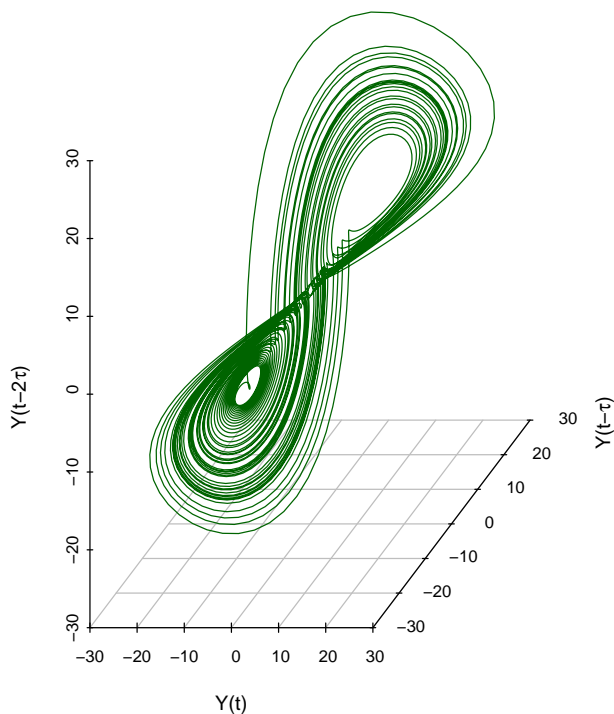


Figura 2.6: Reconstrução do atrator de Lorenz com a série temporal de X e seus atrasos, $\tau = 6$.

O mesmo pode ser feito para as outras séries temporais, se cada uma delas for um mapeamento de \mathbf{M} em \mathbb{R} , $y_k : \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}$, conseguiremos reproduzir o atrator, podemos ainda misturar séries temporais com atrasos de outras séries, desde que, novamente, sejam elas todas cada uma um mapeamento de \mathbf{M} em \mathbb{R} . As reconstruções reproduzem as principais características do sistema dinâmico. Segue-se na Fig.(2.7) a reprodução da reconstrução do atrator com as séries temporais de Y e Z e seus atrasos, a reconstrução com a série de Z falha em reproduzir o atrator perfeitamente pois a série temporal de Z não é um mapeamento de \mathbf{M} em \mathbb{R} . Os lóbulos da estrutura, tem a mesma coordenada no eixo Z , o que não mapeia univocamente essa série nos reais, quebrando uma premissa do teorema, que diz ser necessário que as funções observações da dinâmica sejam mapeamentos 1:1.

Variedade-sombra de Y



Variedade-sombra de Z

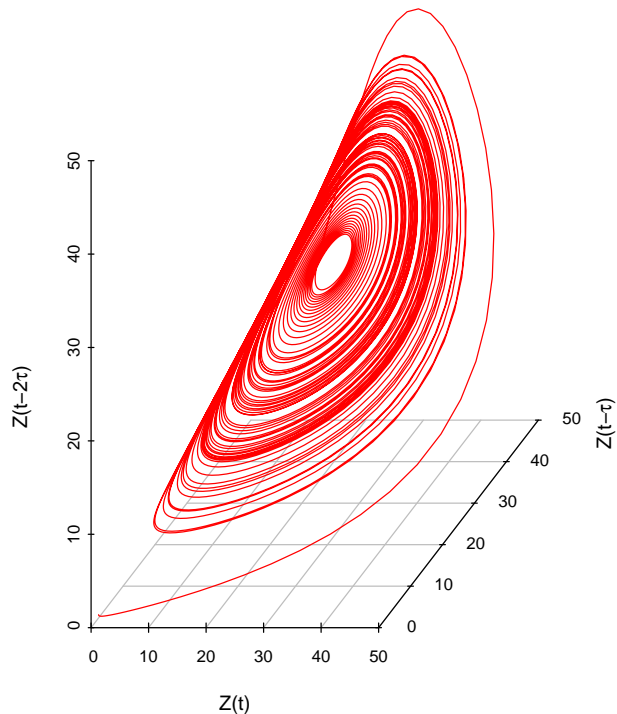


Figura 2.7: reconstrução do atrator de Lorenz com as séries temporais de Y e Z e seus atrasos, note que para Z a reconstrução falha não reproduzindo a estrutura de dois centros repulsores, lóbulos. $\tau = 6$.

Finalizamos este capítulo lembrando que o teorema de Takens é uma ótima ferramenta para entendimento e estudo de sistemas dinâmicos na falta de informações completas sobre todas as variáveis do sistema, podendo através da reconstrução evidenciar informações antes não tangíveis, somente a partir de dados. A utilização da metodologia de reconstrução de atratores é ampla, veja-se [21, 22].

Capítulo 3

Modelagem Dinâmica Empírica

Terminamos o capítulo anterior explorando uma forma de, utilizando-se do teorema de Takens, reconstruirmos um espaço-de-fase e conseqüentemente seu atrator. Neste capítulo vamos utilizar essa possibilidade de representação da dinâmica do sistema e métodos preditivos para, através da união de ambas as técnicas, sermos capazes de fazer inferência e analisarmos relações de causalidade entre séries temporais.

O capítulo começa com a apresentação da técnica de predição em séries temporais, a projeção simplex, e como ela auxilia na seleção de parâmetros para a reconstrução de atratores. Na segunda parte utilizamos-a para realizar predições entre eles, e se é possível tal mapeamento e sob algumas outras condições, somos capazes de definirmos relações causais entre séries temporais.

3.1 Projeção Simplex e seleção de parâmetros

Um dos principais interesses em análise de séries temporais é a possibilidade de se realizar predições sobre seu futuro próximo; qual será o valor da variável em poucos passos de tempo?

Existe uma vasta literatura em métodos preditivos em séries temporais, [23, 35], porém nosso interesse será nos métodos desenvolvidos por G. Sugihara, que visam integrar na predição a dinâmica do sistema. Em resumo, se vale da proximidade entre pontos no atrator para dizer quais obedecem uma dinâmica próxima, e com isso incorporar o caráter não-linear do sistema na predição. Os objetos de nosso estudo são frutos de uma dinâmica não-linear e portanto tem como resultado uma vizinhança de pontos que se relaciona de modo mais forte do que aqueles que estão mais distantes, o que denota a não-linearidade do sistema como um todo.

3.1.1 Projeção simplex

A ideia para a realização de predições através da projeção simplex [25, 26] é seguir os b pontos primeiros vizinhos, onde tipicamente $b = E + 1$. Os primeiros vizinhos são, $X_i(t)$, ao centro-preditor ($X_c(t)$), em inglês *predictee*¹, seus pontos mais próximos e através da evolução deles h passos no futuro, $X_i(t + h)$, estimar um ponto no futuro, $\hat{X}(t + h)$. Esse ponto no futuro tem seus vizinhos ponderados conforme eram distâncias dos pontos vizinhos ao centro-preditor. O peso, w_i , reproduz as distâncias ao centro-preditor, impondo que o primeiro vizinho mais próximo do centro-preditor deve estar também mais próximo do ponto estimado, o segundo deve estar menos próximo que o primeiro e assim por diante.

Ou seja, teremos:

¹A palavra *predictee* em inglês significa aquilo sobre o qual se está fazendo predições, para encurtar e facilitar a compreensão usamos a tradução de centro-preditor, ou seja, o centro da nossa tentativa de predição, de onde iniciamos a técnica de predição, no caso a projeção simplex.

$$\hat{X}(t+h) = \sum_{i=1}^b w_i X_i(t+h) \quad (3.1)$$

Onde o peso w_i é definido como:

$$\begin{cases} w_i = \frac{u_i}{\sum u_i}, \\ u_i = \exp\left(-\frac{\|X_c - X_i\|}{\|X_c - X_1\|}\right) \end{cases} \quad (3.2)$$

O que se passa é o seguinte: Após reconstruirmos o atrator da série temporal de interesse, escolhemos um ponto ($X_c(t)$) o qual se quer realizar predições, ou seja, queremos saber o próximo valor da série temporal, ou pelo menos termos uma boa predição para ele. No centro-preditor, olhamos os seus primeiros vizinhos ($X_i(t)$) no atrator, esses pontos, devem formar uma figura simplex, ao redor do centro-preditor. A figura simplex é a figura geométrica mais simples que se pode formar com $E + 1$ pontos, onde E é dimensão de *Embedding*. Precisamos de $E + 1$ pontos pois essa a única forma de univocamente determinar e seguir um ponto numa dimensão igual a E . Por exemplo, se temos uma *Embedding* igual a $E = 3$ então a figura simplex para um ponto de interesse será um tetraedro, pois teremos que encontrar $E + 1 = 4$ pontos primeiros vizinhos ao centro-preditor, traçar o simplex e seguir esses pontos, no passo futuro. Esses mesmos pontos ($X_i(t+h)$) se espalharão pelo atrator de modo que agora devemos encontrar um novo ponto ($\hat{X}(t+h)$) que terá como primeiros vizinhos esses pontos que seguimos, esse novo centro é a nossa previsão. A garantia de que esse novo ponto será de algum modo um boa predição vem do fato de que para acharmos ele obedecemos o distanciamento que havia anteriormente, ou seja, no simplex cada ponto tinha um distância ($\|X_c - X_i\|$) ao centro-preditor, determinando qual seria o primeiro vizinhos, o segundo, e assim por diante. Após seguirmos os pontos do simplex pelo atrator pesamos quão longe cada um desses novos pontos estará da nossa estimativa com as distâncias que haviam com relação ao centro-preditor, e através disso podemos dar nossa estimativa para o futuro do centro-preditor, sendo essa a projeção simplex dele h passos no futuro.

A figura 3.1 ilustrar esse procedimento para duas dimensões de *embedding*, portanto se utilizando de um simplex de três pontos:

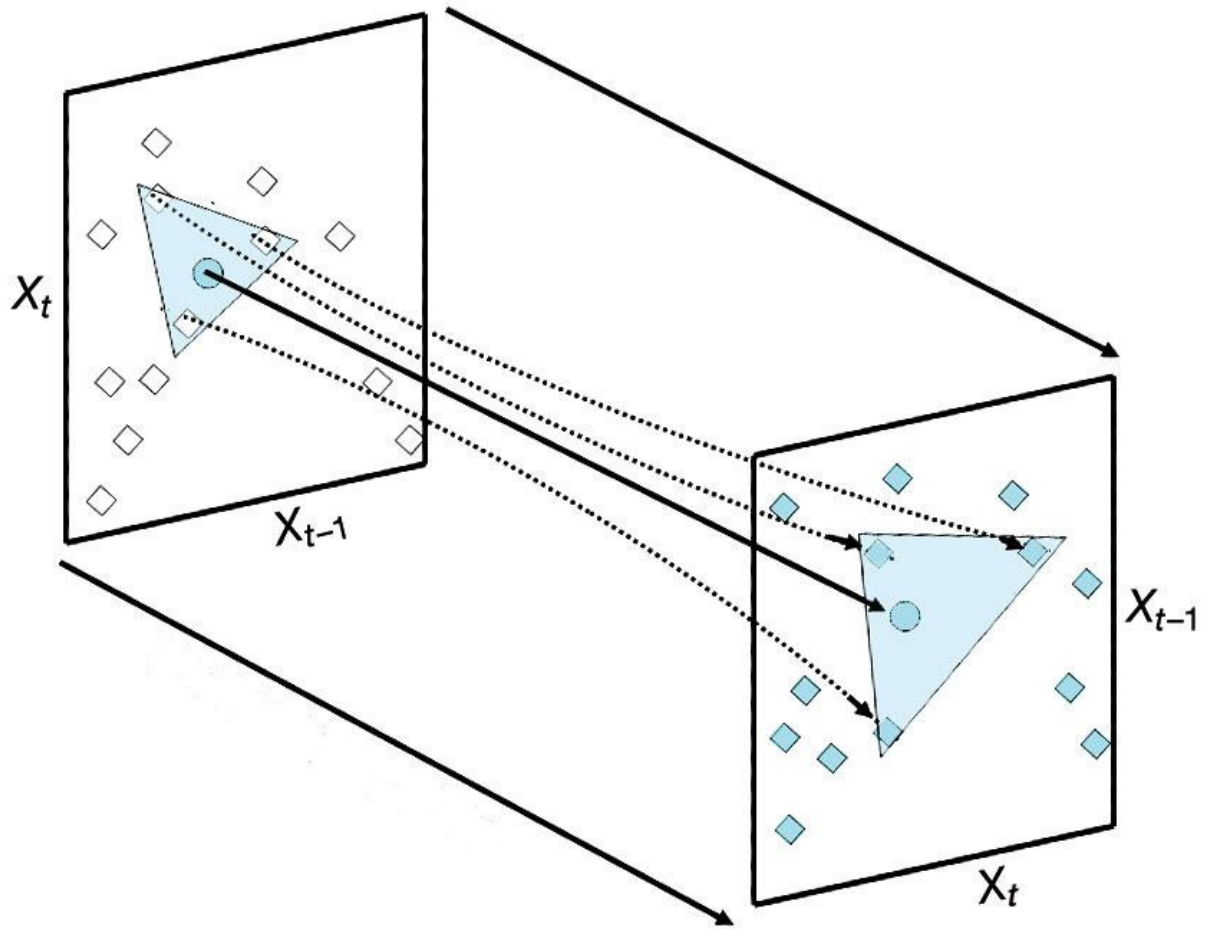


Figura 3.1: Ilustração do processo da projeção simplex em 2 dimensões, note que o simplex formado tem $3 = 2 + 1$ pontos. Figura extraída de [27]

A explicação para tal procedimento é que dentro do contexto de reconstrução de atratores, pontos vizinhos guardam uma dinâmica próxima, para o ponto que se quer conhecer o futuro imediato.

Vamos supor que X e Y sejam soluções das seguintes relações de recorrências.²

$$\begin{cases} X_t = 3,77X_{t-1} - 3,77(X_{t-2})^2 - 0,85Y_{t-1}X_{t-1} - 0,5X_{t-2} \\ Y_t = 3,78Y_{t-1} - 3,78(Y_{t-2})^2 \end{cases} \quad (3.3)$$

Seja X a série temporal de interesse. Quando queremos realizar previsões sobre o próximo passo da série temporal devemos nos fixar em seu último ponto e então projetarmos algo para seu futuro próximo, a projeção simplex nesse contexto realiza o seguinte: No fim da série olhamos o padrão exibido por ela, sequência de pontos imediatamente antes o centro-preditor, ou qualquer outro ponto de interesse. Esses pontos nos dão o padrão da dinâmica que tem como futuro o último ponto da série, portanto podemos estipular como o sistema se comporta em situações parecidas. Procedemos da seguinte maneira, na série temporal e fora do regime transiente, identificamos o padrão anterior, pontos azuis em forma de quadrado, ao ponto de interesse, como abaixo:

²A explicação alternativa a seguir para a projeção simplex é baseada no tutorial de [28] e nos seguintes tutoriais também [29]

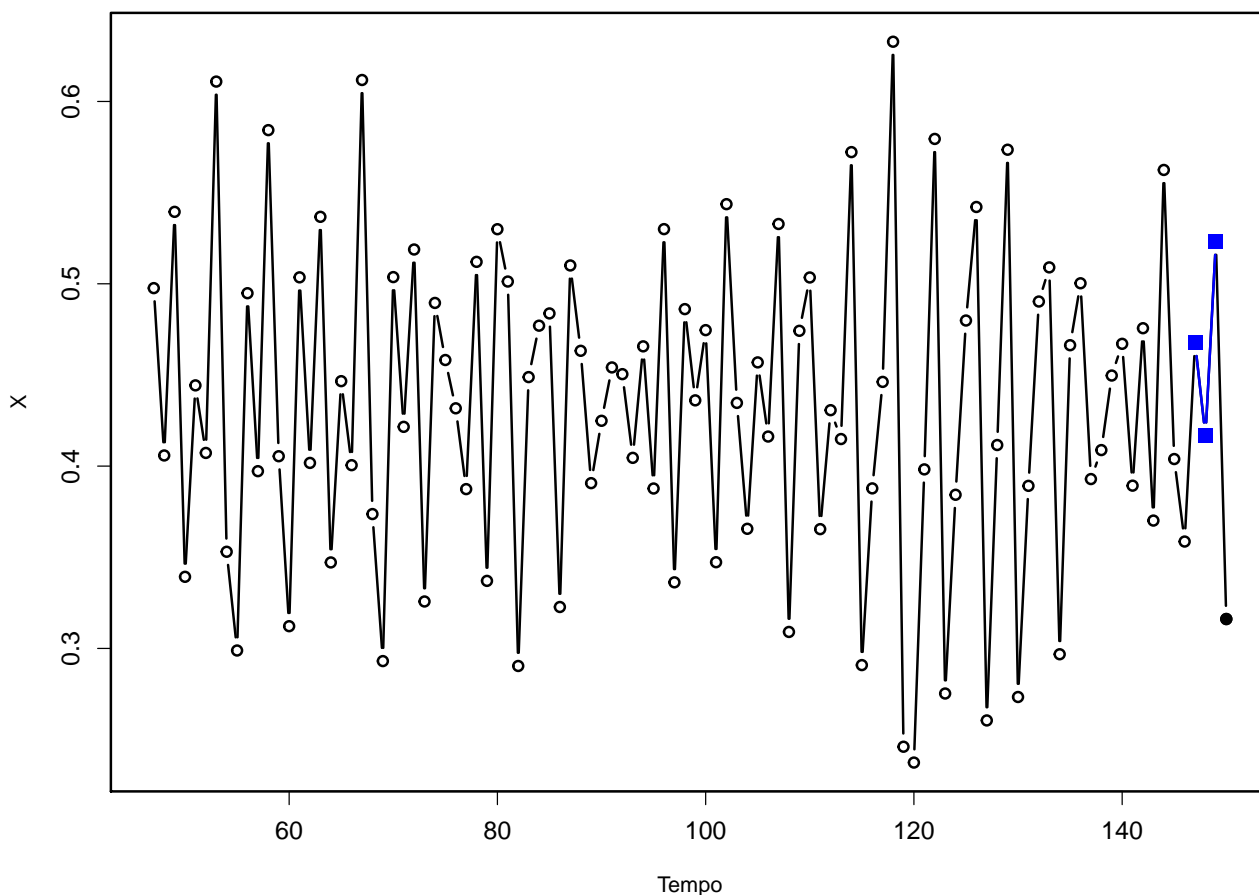


Figura 3.2: Série temporal com o último ponto preenchido, e seus três pontos anteriores com formato diferente para destaque, demonstrando o padrão da dinâmica logo antes do ponto que queremos fazer uma previsão para seu futuro.

Depois buscamos o mesmo padrão, pontos em forma de quadrado, imediatamente anterior ao centro-preditor, o ponto preenchido no fim, por toda série, e com esses padrões faremos a nossa previsão para o futuro do ponto final da série. Portanto a projeção simplex faz o seguinte na série temporal, ela procura por padrões repetidos e daí damos uma previsão, a série fica assim:

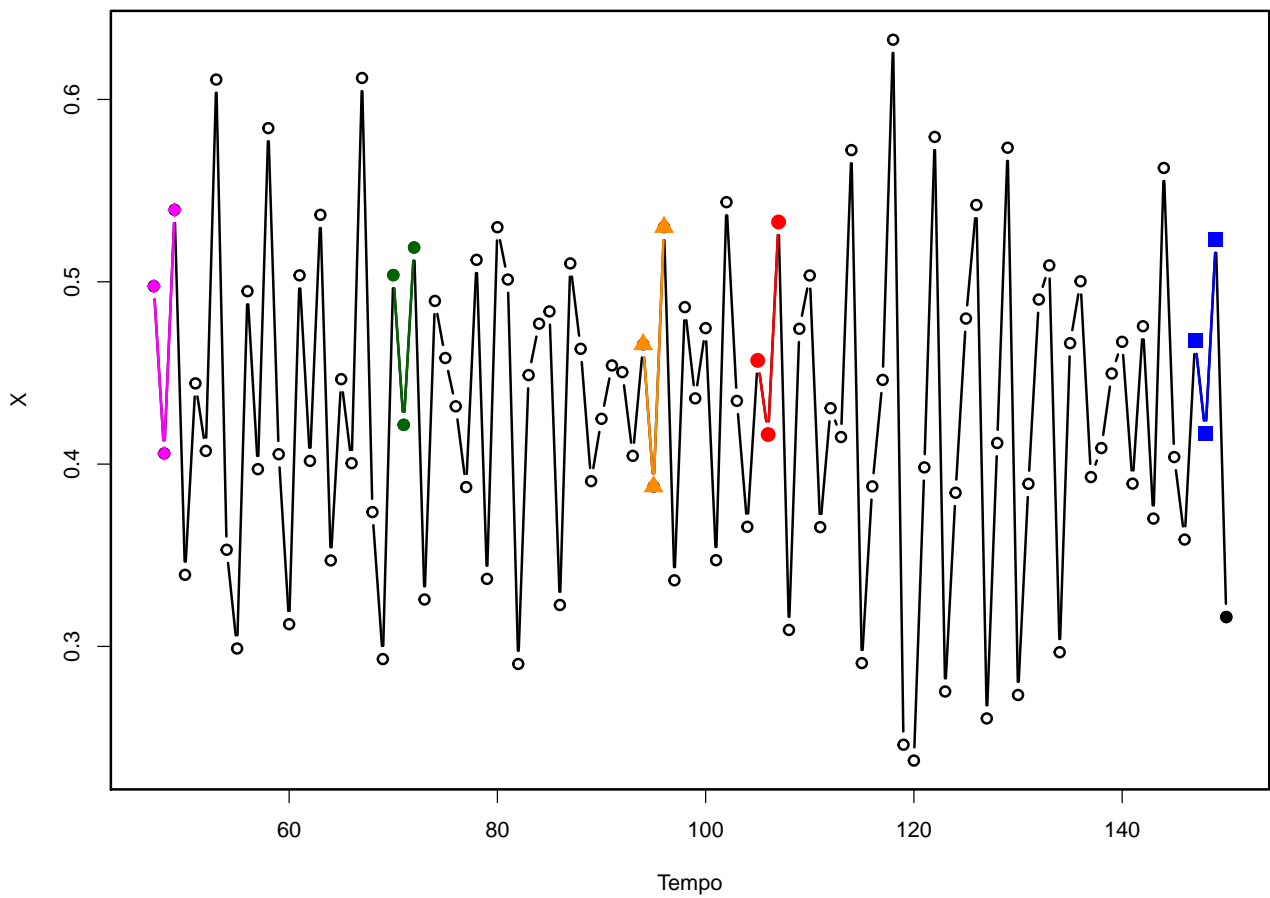


Figura 3.3: Repetição de padrões similares, outros formatos de pontos, por toda a série.

Agora que encontramos os padrões parecidos na série toda, podemos com eles, realizar uma estimativa para o futuro do centro-preditor, ponto preenchido final, olhando para o passo seguinte aos padrões, daí ponderamos os pesos de cada padrão segundo a fórmula 3.1, e com isso temos a nossa projeção simplex novamente.

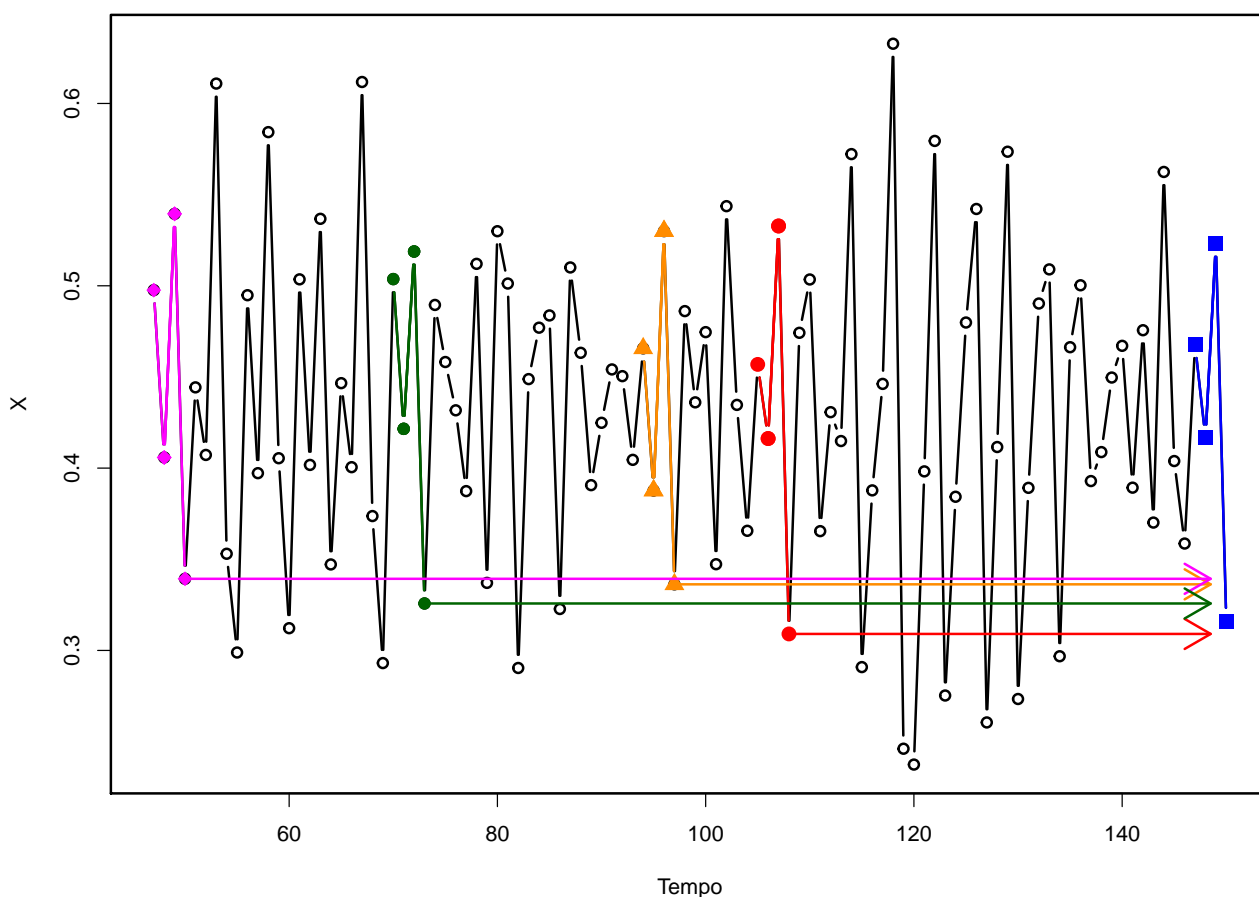


Figura 3.4: Projeção desses passos seguintes e seus pesos segundo a fórmula 3.1 para a estimativa do passo seguinte do centro-preditor

3.1.2 Seleção de parâmetros

Podemos ainda utilizar a projeção simplex para selecionar parâmetros ótimos para a reconstrução, esses parâmetros assim selecionados nos darão uma melhor predição para a série. Se calcularmos a correlação de Pearson entre o observado, a série original, e o predito, a série criada ao se fazer a projeção simplex por toda ela, temos uma estimativa de quão boa é nossa predição e se a projeção simplex está verdadeiramente prevendo os valores da série temporal. Essa correlação entre predito e observado chamamos de habilidade de predição, (*forecast skill*), simbolizada por ρ .

$$\rho = \rho_{O,P} = \frac{\text{cov}(O, P)}{\sigma_O \sigma_P} \quad (3.4)$$

Onde $\text{cov}(O, P)$ é covariância entre o observado e o predito, e o σ_O e σ_P são os respectivos desvios padrões. Ao computarmos o valor de ρ contra os valores de dimensão de *embedding*, podemos obter o valor que resulta na maior habilidade preditiva, portanto, aquele atrator que tem um número de dimensões ótimo para a reconstrução do atrator original. É nela que o sistema é melhor representado quando necessitamos fazer predições. A figura abaixo mostra isso, o ponto preenchido destaca para qual valor a dimensão de *embedding* tem o maior ρ .

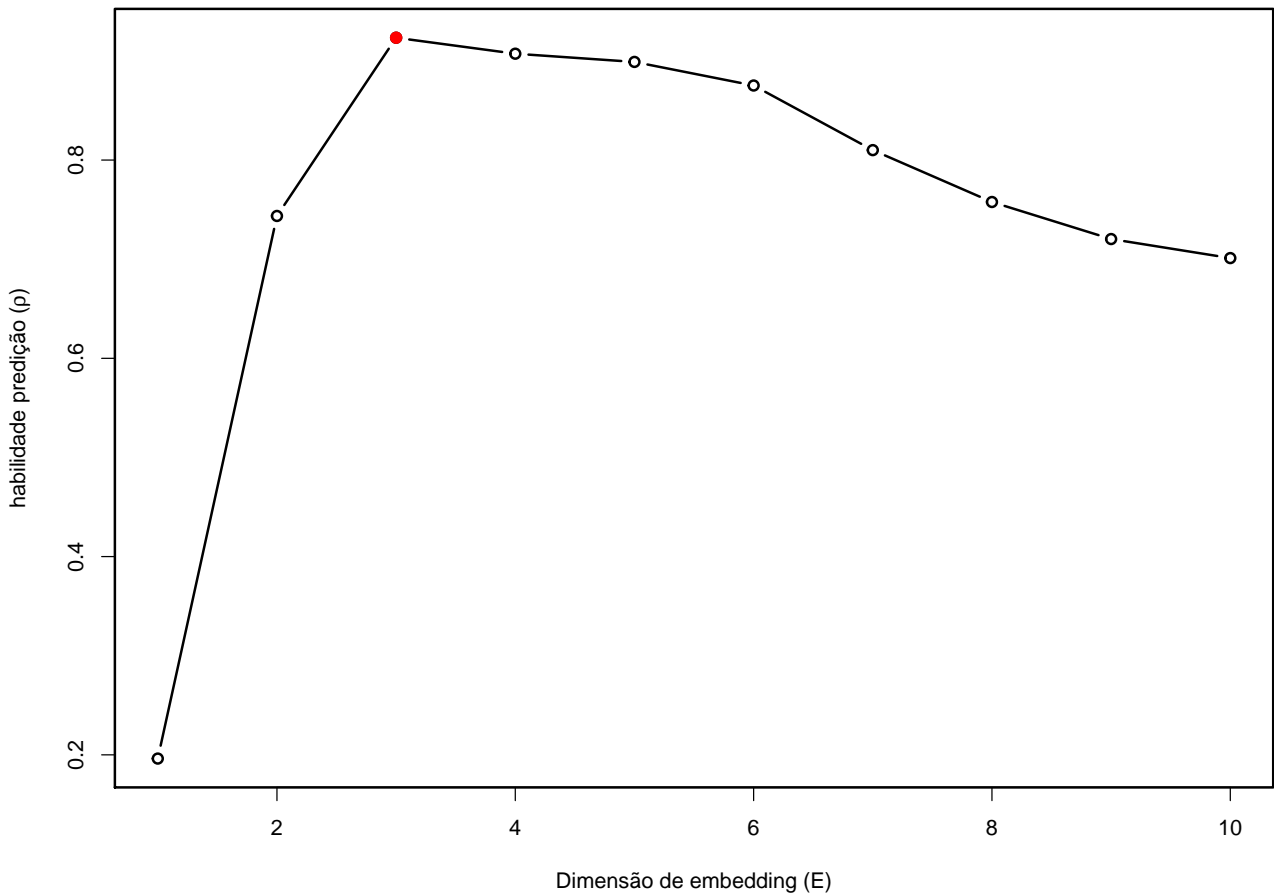


Figura 3.5: Gráfico de ρ versus E , com destaque para o ponto em que o ρ é máximo.

Um ponto a se notar na Fig. (3.5) é o fato de que nem sempre mais dimensões garantem uma melhor reconstrução, esse fenômeno ocorre devido à adição de dimensões que podem tornar a reconstrução mais ruidosa, resultando numa menor habilidade de predição. Nesse exemplo, a diminuição da habilidade de predição é pequena porém em sistemas reais, qualquer perda na habilidade de predição pode comprometer o estudo e o entendimento do sistema. Para visualizar isso podemos também fazer o gráfico dos valores observados em termos dos preditos, e vemos que com mais dimensões os preditos se espalham de forma mais desordenada quando comparado ao valor de *embedding* ótimo de ($E = 3$).

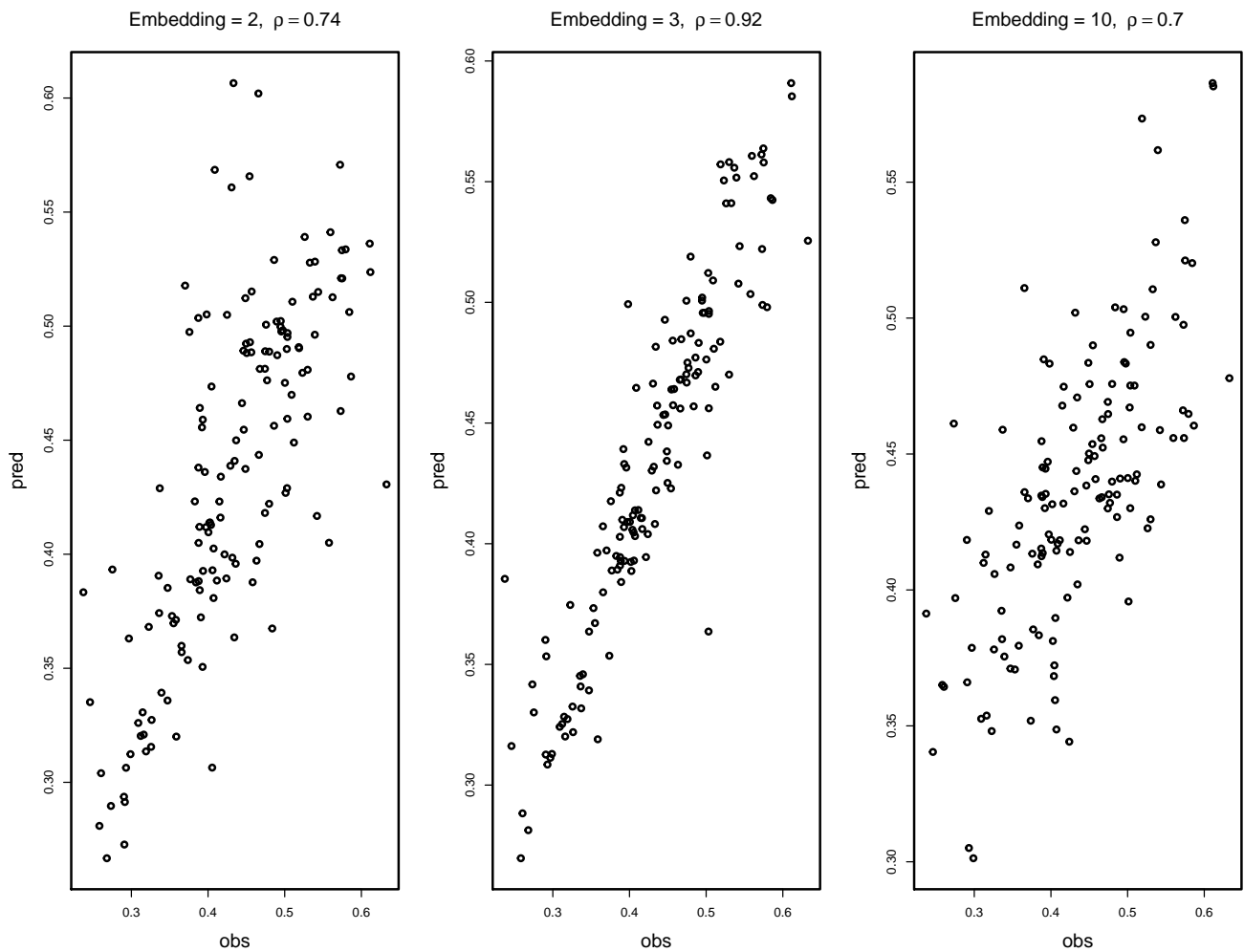


Figura 3.6: Gráfico dos pontos observados (*obs*) versus os valores pontos preditos (*pred*), para diferente valores de E

Outro parâmetro que podemos selecionar na projeção simplex é o tempo de predição (tp), que refere-se ao quão distante no futuro realizamos a previsão. Se nosso tp é 1, então só olhamos para o ponto imediatamente após o centro-preditor. Em particular, é interessante notar como ρ , depende de tp . Um exemplo é dado na figura (3.7). Esperamos sempre este padrão de decaimento da qualidade de predição conforme tp aumenta. Se isto não ocorrer é sinal de que a dinâmica não é dominada por efeitos não-lineares, podendo ser proveniente de uma dinâmica totalmente estocástica.

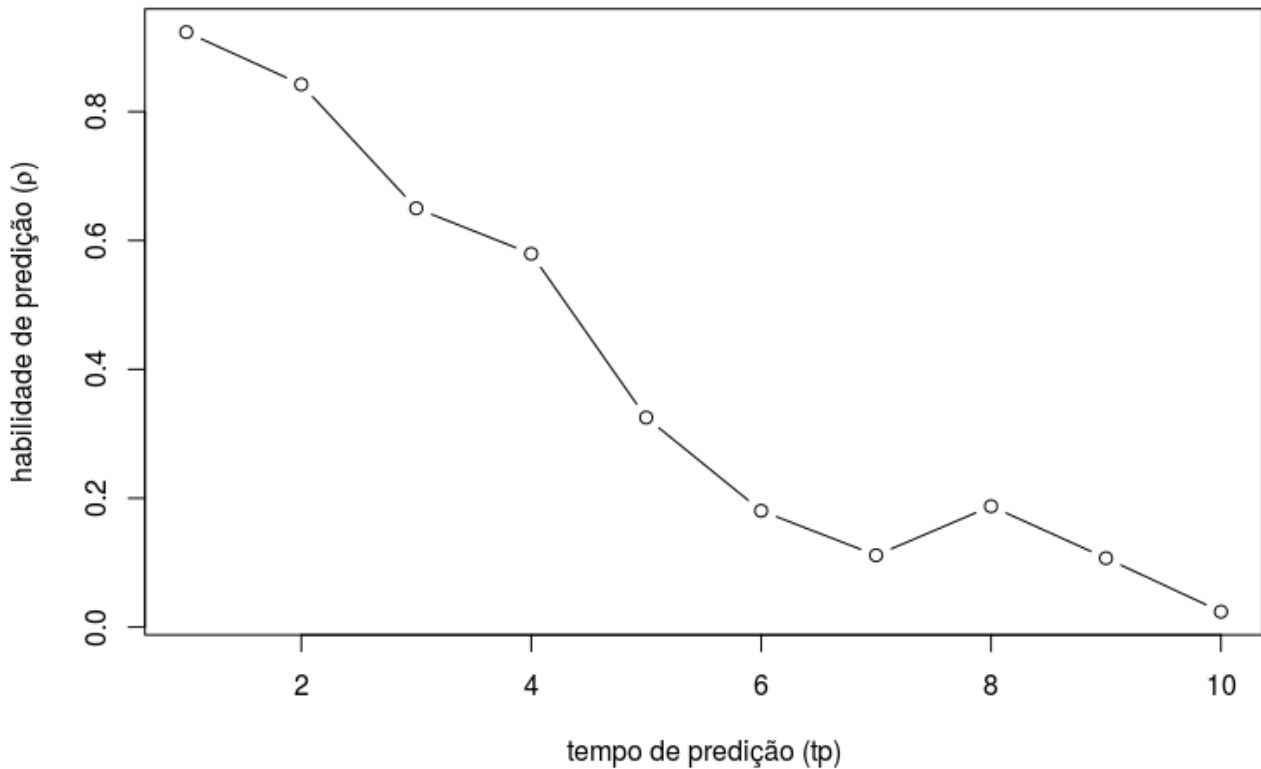


Figura 3.7: Gráfico de ρ versus tp , com o fenômeno característico de sistemas dinâmicos do decaimento na habilidade de predição para tp cada vez maiores.

3.2 Busca por causalidade

Até o momento só havíamos trabalhado com a reconstrução do espaço-de-fase de uma única série temporal e como realizar predições sobre ela, bem como selecionar parâmetros ótimos para a reconstrução do atrator através da projeção simplex. Uma consequência imediata do Teorema de Takens 1 é que pontos de uma série temporal $X(t)$ e seus primeiros-vizinhos do espaço-de-fase reconstruído, \mathbf{M}_S , variedade-sombra mapeiam 1:1 no espaço-de-fase original \mathbf{M} . Consequentemente dadas duas séries temporais e seus espaços-de-fase reconstruídos, pode-se verificar se elas derivam do mesmo sistema dinâmico quando há mapeamento entre seus espaços-de-fase. Se elas participam do mesmo sistema dinâmico, cada espaço reconstruído mapeia no espaço-de-fase original, então indiretamente também cada espaço-de-fase reconstruído mapeiam um no outro. Esse procedimento é descrito abaixo e é chamado de mapeamento cruzado convergente, tradução do termo *Convergent-cross mapping*, abreviado como (CCM). Vamos dizer que $x(t)$ e $y(t)$ estão causalmente ligados se participam do mesmo sistema dinâmico.

3.2.1 Mapeamento Cruzado Convergente (CCM)

Primeiro iniciamos a reconstrução do espaço-de-fase de cada série temporal selecionando os parâmetros para isso, através da projeção simplex (3.1) que, como vimos anteriormente, reconstrói o espaço-de-fase que possibilita as melhores predições. Numa série temporal que represente, por exemplo, o tamanho de uma população é muito improvável que seus ciclos dependam de valores distantes de fatores climáticos,

aqui sabidamente um fator causal. Dificilmente a quantidade de chuva de tempos muito anteriores vai influenciar a dinâmica e o tamanho de uma população que dependa da quantidade de água disponível no ambiente, indiretamente ligado à quantidade de chuva. Portanto, na seleção de parâmetros para o CCM nos concentramos na busca da melhor dimensão de *embedding*, fixando o *delay* em 1 passo de tempo.

Após termos reconstruído os atratores correspondentes às séries de $X(t)$ e $Y(t)$, podemos investigar se há um mapeamento entre os dois atratores e, então pode-se dizer que as séries são causalmente ligadas.

A função que realiza o mapeamento entre os atratores de cada série temporal é a própria projeção simplex (3.1), assim o CCM é, prever os pontos no atrator reconstruído de uma série temporal a partir do atrator da outra série temporal. Dadas duas séries temporais X e Y , e seus espaços-de-fase reconstruídos ou variedades-sombra, \mathbf{M}_X e \mathbf{M}_Y , então podemos prever os pontos em \mathbf{M}_Y utilizando-se dos pontos em \mathbf{M}_X , e vice-versa. Para gerar uma estimativa dos valores de $Y(t)$, denotado por $\hat{Y}(t)|\mathbf{M}_X$, achamos os $E+1$ primeiros vizinhos e o vector contemporâneo à $y(t)$ de interesse, $\underline{x}(t) = \langle X(t), X(t-\tau), \dots, X(t-(E-1)\tau) \rangle$. Esses $E+1$ primeiros vizinhos em \mathbf{M}_X são então organizados em ordem crescente de distância em relação à $\underline{x}(t)$, através de um índice temporal dado a eles, t_1, t_2, \dots, t_{E+1} , sendo t_1 o primeiro vizinho de $\underline{x}(t)$, e assim por diante.³ Esses índices então identificam a figura simplex em \mathbf{M}_Y que serão então utilizados para calcular $\hat{Y}(t)|\mathbf{M}_X$, através de uma média ponderada. Ou seja, temos:

$$\hat{Y}(t)|\mathbf{M}_X = \sum_{i=1}^{E+1} w_i Y(t_i) \quad (3.5)$$

como no simplex w_i é definido do seguinte modo:

$$\begin{cases} w_i = \frac{u_i}{\sum_{j=1}^{E+1} u_j}, \\ u_i = \exp\left(-\frac{\|\underline{x}(t) - \underline{x}(t_i)\|}{\|\underline{x}(t) - \underline{x}(t_1)\|}\right) \end{cases} \quad (3.6)$$

E de forma completa temos:

$$\hat{Y}(t)|\mathbf{M}_X = \sum_{i=1}^{E+1} \frac{u_i}{\sum_{j=1}^{E+1} u_j} Y(t_i) \quad (3.7)$$

Analogamente podemos definir o CCM de Y para X . Se realmente as duas variáveis são dinamicamente ligadas então os primeiros vizinhos em \mathbf{M}_X identificam os índices temporais dos primeiros vizinhos em \mathbf{M}_Y , e vice-versa. Se percorrermos todo o atrator reconstruído e conseguirmos sistematicamente identificar primeiros vizinhos num atrator utilizando-se dos primeiros vizinhos do outro, observa-se que as distâncias diminuem e portanto $\hat{Y}(t)$ converge para $Y(t)$. Analogamente o mesmo vale para $\hat{X}(t)$ e $X(t)$ [2]. Esse algoritmo ilustra uma propriedade que é presente em variados sistemas dinâmicos, que é a interdependência dos estados do sistema [31–36]. Abaixo uma figura ilustrativa desse processo:

³Como anteriormente, precisamos de $E+1$ pontos pra achar o simplex ao redor de um ponto num espaço E -dimensional.

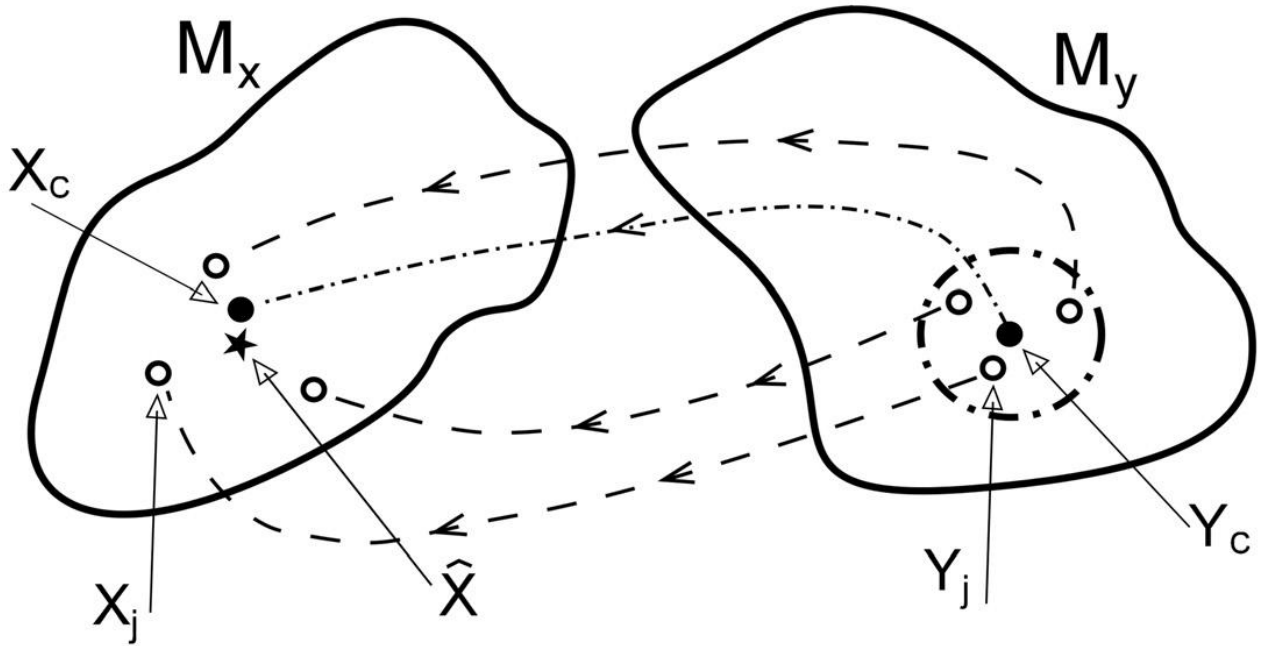


Figura 3.8: Ilustração do processo de mapeamento cruzado convergente. Os pontos ao redor, de Y_c em M_Y identificam os vizinhos em M_X , e daí se calcula o ponto estrela \star , \hat{X} é uma estimativa para o ponto X_c , figura extraída de [36]

Podemos definir a habilidade de mapeamento de modo análogo àquela usada nas projeções simplex. Para tal definimos.

$$\rho = \rho_{Y(t), \hat{Y}(t) | M_X} = \left\langle \frac{\text{cov}(Y(t), \hat{Y}(t) | M_X)}{\sigma_{Y(t)} \sigma_{\hat{Y}(t) | M_X}} \right\rangle \quad (3.8)$$

Para facilitar a notação, comprimimos os subscritos e adotamos a convenção de que o primeiro é o observado, e o segundo é o predito. Assim, se estamos calculando a habilidade de mapeamento de X em Y , estamos partindo de X e chegando em Y , isso será denotado por $\rho_{Y, \hat{X}}$. Às vezes denotamos ρ na forma, “ X **xmap** Y ”, ou seja, X mapeia em Y . Note que diferentemente do simplex, aqui não estamos realizando previsões propriamente ditas, ou seja, não estamos calculando valores possíveis da série temporal para o futuro, estamos realizando estimativas de valores contemporâneos ou passados de um atrator através de valores contemporâneos e passados do outro atrator.

Em resumo, dadas duas séries temporais, faz-se a reconstrução do atrator de cada uma usando os parâmetros os quais são obtidas as melhores previsões. Em cada atrator identificam-se os primeiros vizinhos do centro-preditor, e identificando cada vizinho com um índice conforme sua proximidade do centro-preditor. Esses índices então identificam os pontos contemporâneos no atrator da outra série temporal. Com os pesos para as distância desses pontos ao centro-preditor, faz-se uma estimativa do possível valor futuro da série alvo. Contabiliza-se quão precisa foi a previsão realizada através da correlação entre o predito e observado. Repete-se esse procedimento por todo o atrator, contabilizando agora a média dessa correlação, o $\rho_{Y, \hat{X}}$. Depois inverte-se a direção, o atrator que era alvo torna-se o ponto de saída e o ponto de saída torna-se alvo. Caso ambas as séries temporais sejam dinamicamente relacionadas, a correlação entre previsto e observado aumenta e converge para um valor conforme mais partes do atrator são analisadas, indicando que os estados de um atrator e seus primeiros vizinhos tem uma correspondência alta com os estados contemporâneos e seus primeiros vizinhos no outro atrator, ou seja, as séries temporais são causalmente ligadas. Esse é o critério para causalidade na metodologia do CCM. A correlação tende a um valor conforme se utiliza mais pontos de um atrator pra estimar o outro, isso

é o critério de causalidade pelo algoritmo do CCM, pois significa que os sistemas dinâmicos que são expressos na dinâmica do atrator de cada reconstrução se identificam, denotando que participam de um mesmo sistema dinâmico, ou seja, tem relação de causa. Resumindo o algoritmo do CCM é:

1. Selecionar a dimensão de *embedding* E , para a reconstrução de cada atrator.
2. Com as variedades-sombras, M_S , realizar a estimativa, \hat{X} , de pontos de um atrator se utilizando do outro. Nos dois sentidos e para todo os pontos de cada reconstrução.
3. Calcular a correlação entre os pontos estimados e os observados, $\rho_{X,\hat{Y}}$, “ $Y \mapsto X$ ”.
4. Se essa correlação convergir para um valor, é o indicador que as séries são causalmente ligadas.

3.2.2 Inferência e direção de causalidade

O critério para estabelecimento de causalidade é a convergência da habilidade de mapeamento ρ (3.8), de um atrator em outro, para um valor determinado, conforme se aumenta o número de pontos analisados. Porém, de nenhuma forma ainda falamos da direção da causalidade, apenas de sua existência. Qual é o efeito e qual é a causa, ou se há claramente uma relação de efeito e causa, ou se o sistema de interesse apresenta uma bidirecionalidade? A definição da direção de causa se dá através do seguinte procedimento, quando a habilidade de mapeamento de um atrator em outro converge para um valor determinado ou, como na figura 3.8, em que os pontos do atrator de Y são utilizados para estimar os pontos do atrator de X , ou seja, Y mapeia X , dizemos que X é a causa de Y , o contrário da direção de mapeamento. A razão para isso é que o efeito guarda informação de sua causa, ou seja, na série temporal do efeito há informações de sua causa.

Para melhor visualizar isso podemos pensar num sistema como na equação (3.3), porém com modificações para melhor demonstrar a direção da causalidade, considere:

$$\begin{cases} X_t = 3,82X_{t-1} - 3,82(X_{t-2})^2 - 0,191Y_{t-1}X_{t-1} \\ Y_t = 3,77Y_{t-1} - 3,77(Y_{t-2})^2 \end{cases} \quad (3.9)$$

Esse sistema é iterado um bom número de vezes e, após o transiente do sistema ter passado, temos como séries temporais para X e Y o seguinte:

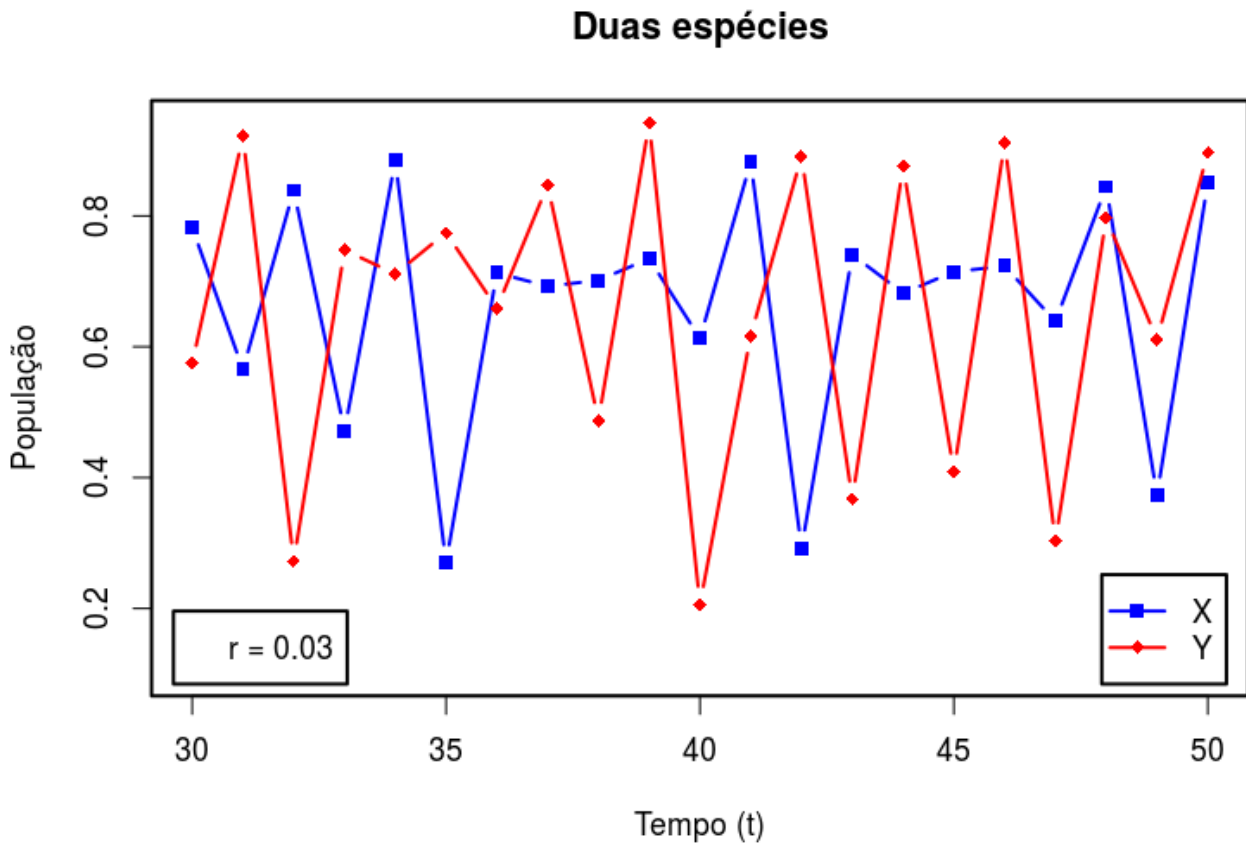


Figura 3.9: Variação das duas séries temporais, após o regime transiente e valor da correlação média entre ambas, note que a correlação é baixa mesmo sabendo-se, pela equação (3.9) que há influência de Y em X .

Prosseguimos com a análise conforme a metodologia do algoritmo do CCM, agora vamos fazer a projeção simplex em cada uma das séries para acharmos os valores ótimos de dimensão de *embedding*, para termos os atratores reconstruídos de cada série que melhor realizam previsões de curto prazo. A habilidade de previsão (da série nela mesma) dependerá da dimensão de *embedding* como na figura (3.10)

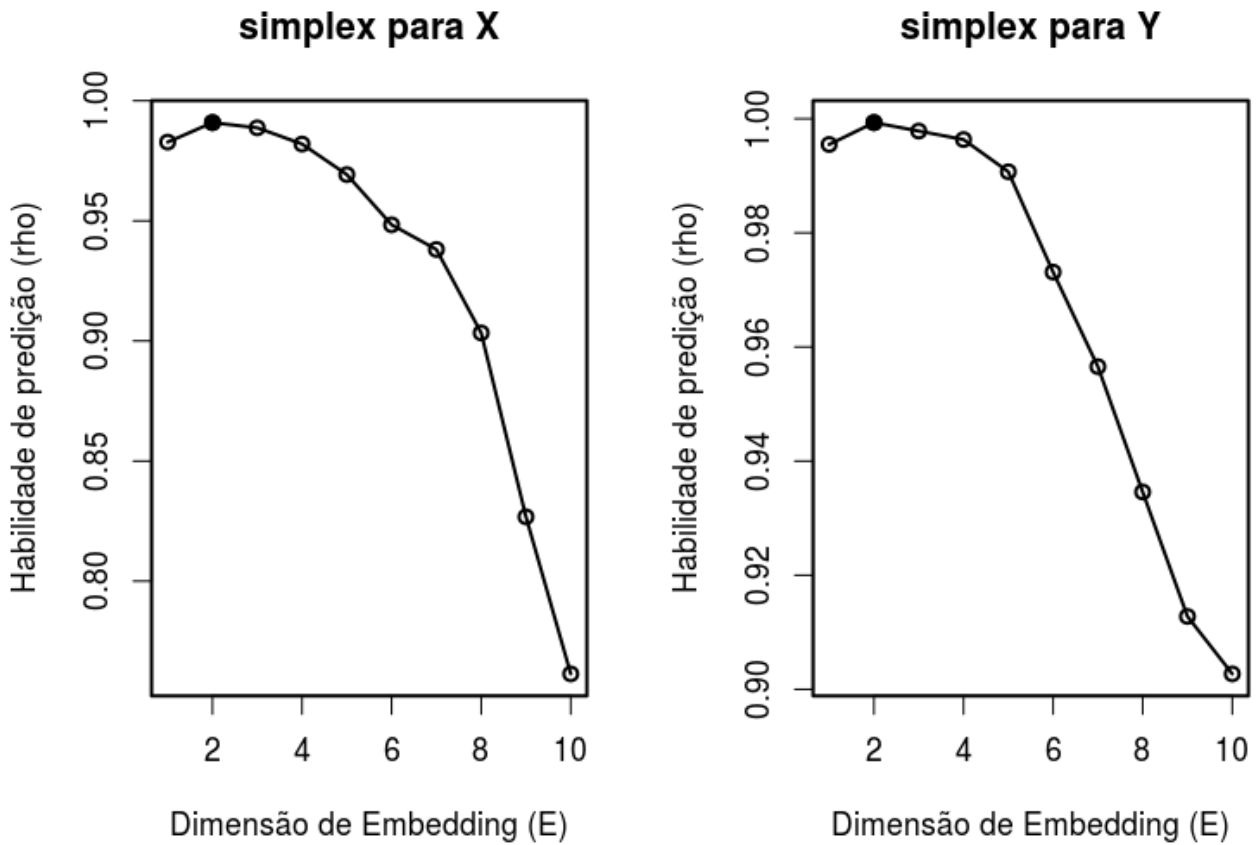


Figura 3.10: Gráficos de dimensão de embedding (E) calculado pela projeção simplex para as séries de X e Y . O Ponto preenchido denota o máximo da habilidade de predição (ρ), no caso ambas as séries tem uma dimensão de embedding ótima igual a 2.

Por completeza verificamos o decaimento do tempo de predição, ou seja, quão longe no futuro podemos tentar prever a série; o resultado está na figura (3.11)

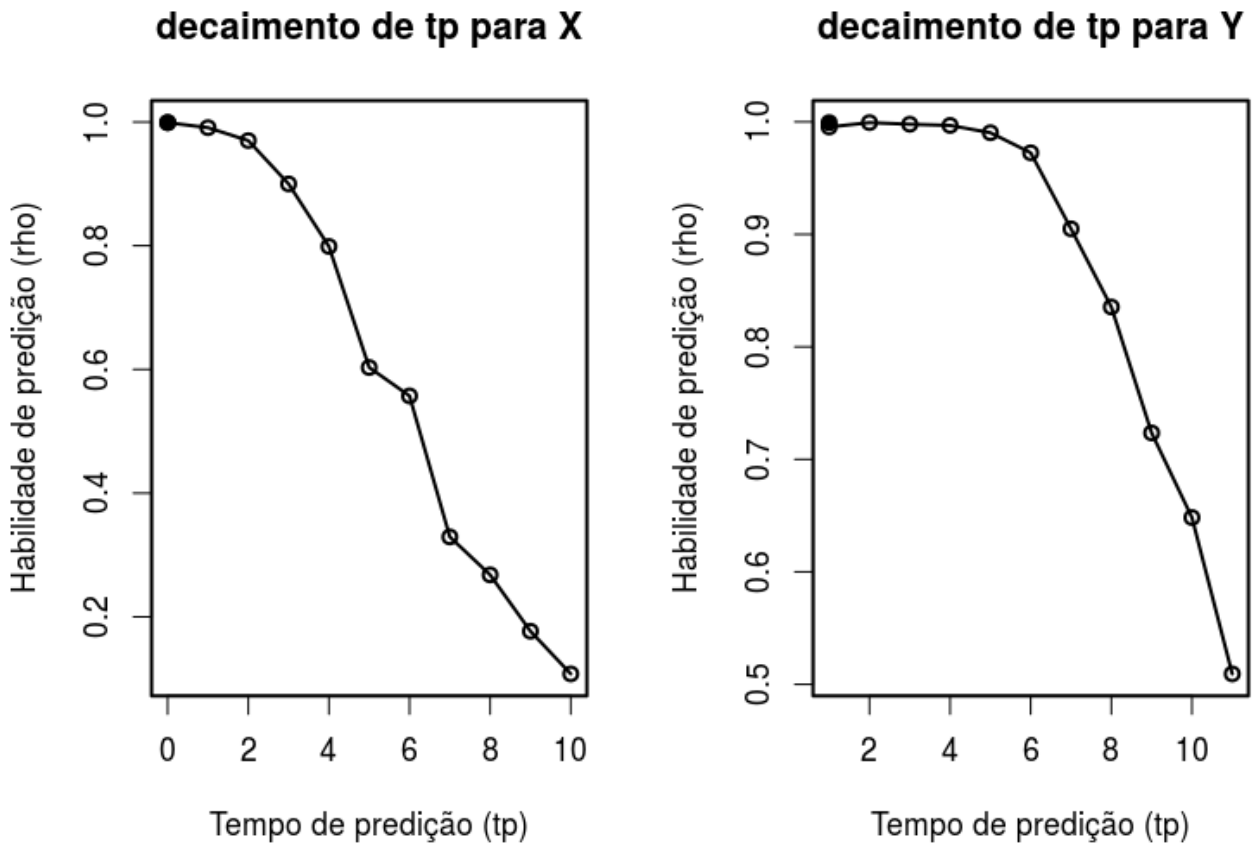


Figura 3.11: Gráficos do decaimento do tempo de predição (tp) as séries de X e Y . O Ponto preenchido denota o máximo da habilidade de predição (ρ), ambas as séries tem decaimento exponencial, X ligeiramente mais rápido que Y e ambas as séries tem máximo de ρ para tp igual a 0.

Agora estamos aptos a fazer o CCM propriamente dito. Sabemos que ambas séries apresentam um atrator ótimo reconstruído de duas dimensões. Aplicamos o algoritmo do CCM nas duas direções, X mapeando Y , denotado por $X - xmap - Y$, o que indica que procuramos a influência de Y em X . Também realizamos o CCM na direção contrária, agora Y mapeando X , denotado por $Y - xmap - X$, o que indicaria a influência de X em Y . Para o primeiro caso, $X - xmap - Y$, esperamos que haja causalidade, ou seja, conforme aumentamos a biblioteca de pontos utilizados de X para estimar pontos de Y a habilidade de mapeamento tende a aumentar e converge para um valor. Assim sendo, Y é um fator causal da dinâmica de X . Para o segundo caso, $Y - xmap - X$, não esperamos o mesmo que no caso anterior, pois estamos tentando verificar a causalidade de X em Y e isso, pela equação (3.9), é falso. O mapeamento de Y em X deve nos dar uma habilidade de mapeamento baixa e sem padrão de convergência conforme aumentamos a biblioteca de pontos de Y que utilizamos para estimar pontos de X . Os resultados são apresentados na figura (3.12)

Mapeamento Cruzado para X e Y

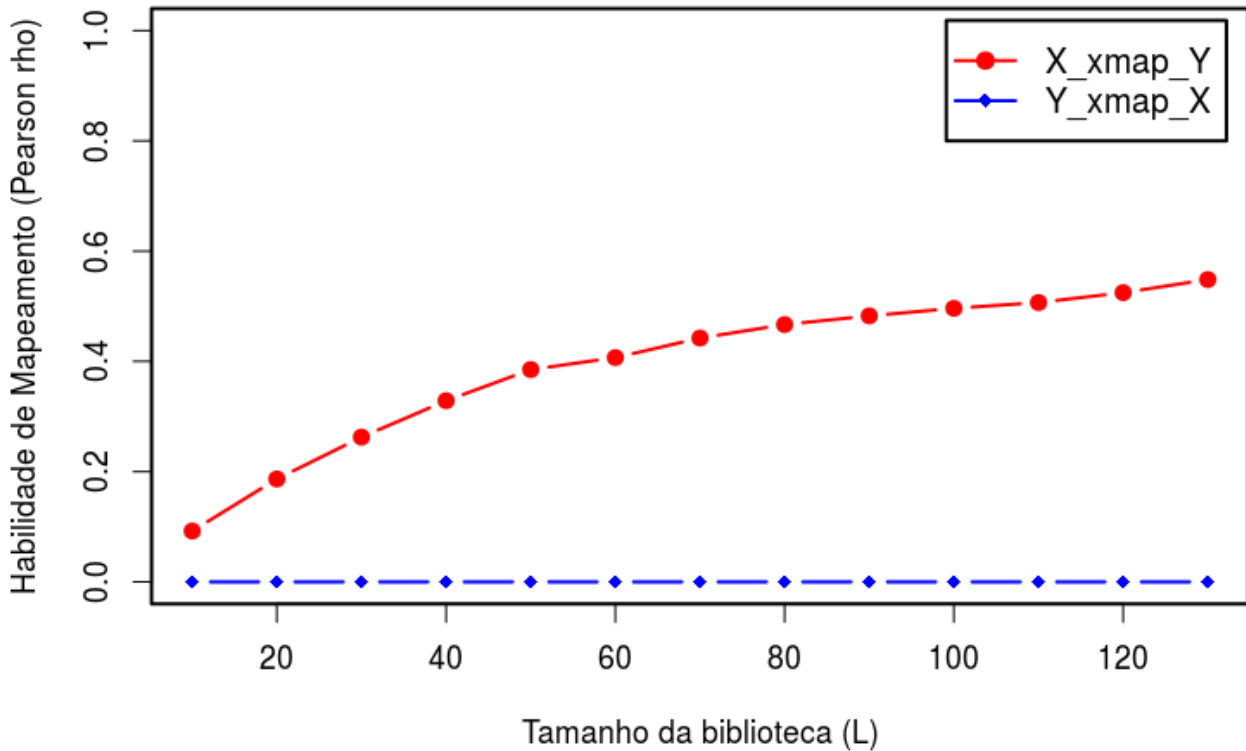


Figura 3.12: Mapeamento cruzado convergente realizado nas duas direções, onde $X - xmap - Y$, em círculo cheio, nos dá um padrão de causalidade de Y em X , e o sentido contrário, $Y - xmap - X$, que nos dá um padrão de falta de causalidade, como esperado pela equação 3.9.

Verificamos que o algoritmo do CCM foi capaz de distinguir, somente através das séries temporais, a verdadeira dinâmica por trás delas, Y é uma causa da dinâmica de X , mesmo em um caso em que as séries são fracamente correlacionadas.

Capítulo 4

Aplicação do método em modelos artificiais e dados reais

Como visto no fim do capítulo anterior, o método do CCM mostrou-se eficaz para identificar a causalidade em sistemas dinâmicos não lineares a partir de suas séries temporais. Neste capítulo mostramos a análise de CCM para dois sistemas sintéticos um pouco mais complexos que os estudados no capítulo anterior. Depois, vamos aplicá-lo a dados reais buscando desvendar quais são as relações causais presentes no sistema.

4.1 Modelos sintéticos

A seguir reproduzimos dois modelos sintéticos que exemplificam as diferentes possibilidades de utilização da metodologia do CCM. O primeiro é um sistema de duas espécies de peixes com recrutamento, em que os indivíduos adultos passam por um estágio inicial para depois atingir o final, e ambas espécies tem um forçante ambiental em comum. Apresenta-se alta correlação entre as espécies adultas porém mostraremos que não há causalidade nesse caso. O segundo é a modelagem da competição simples entre duas espécies que tem como característica principal uma correlação miragem que é muito baixa, mas há grande causalidade entre as séries. Este último é um refinamento dos sistemas utilizados anteriormente. Ambos foram retirados do artigo [37], que também realiza a análise do CCM. Aqui, porém, tomamos as séries temporais brutas e realizamos a análise do CCM.

4.1.1 Efeito Moran em recrutamento de adultos

Um modelo simples mas de interesse pode ser construído através das equações (4.1). Esse sistema foi primeiramente proposto por A.P. Moran [38] para a reprodução do ciclo de vida do lince canadense. O modelo é bem aceito pela comunidade e hoje em dia é um bom exemplo do sucesso das equações à diferenças na modelagem biológica. O que utilizamos na análise reproduz a dinâmica de interação entre duas espécies de peixes adultos que tem um estágio inicial de recrutamento¹.

$$\begin{cases} N_1(t+1) = 0.4N_1(t) + \max[R_1(t-3, 0)], \\ N_2(t+1) = 0.35N_2(t) + \max[R_2(t-3, 0)] \\ R_1(t+1) = 3.1N_1(t)[1 - N_1(t)]e^{-0.3V(t)}, \\ R_2(t+1) = 2.9N_2(t)[1 - N_2(t)]e^{-0.36V(t)} \end{cases} \quad (4.1)$$

¹Esse sistema é modificado em relação ao original de Moran, temos pra ele, ao invés de duas equações acopladas sendo uma delas com o forçante ambiental, quatro equações sendo duas acopladas uma na outra e cada uma das equações de estágio inicial com o forçante nelas, igual para ambas.

Para o nosso caso, temos duas populações de recrutamento, R_1 e R_2 , e duas populações de adultos, N_1 e N_2 . $V(t)$ é o forçante externo nas populações de recrutamento, que utilizamos somente uma série de ruído branco. Iteramos as equações por 1000 vezes e obtemos para as populações de adultos as seguintes variações populacionais:

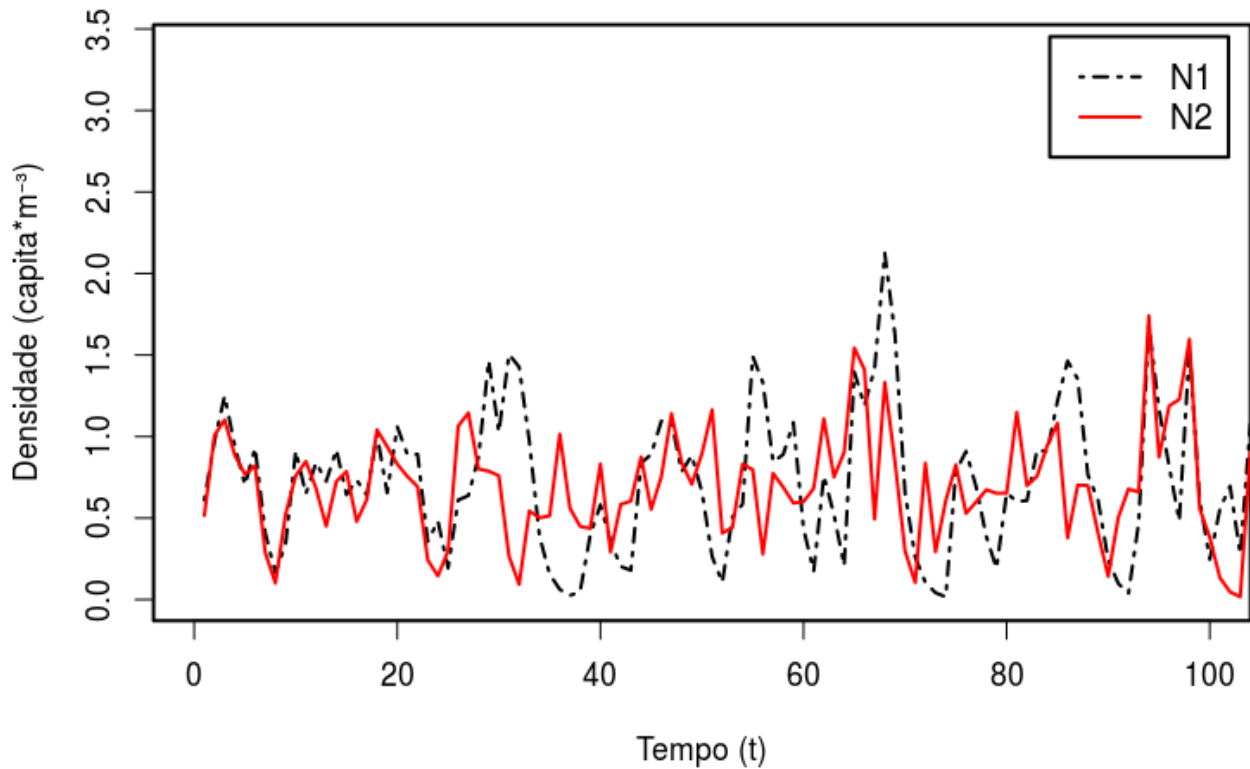


Figura 4.1: Parte da variação populacional das duas populações de adultos no sistema de equações 4.1.

Prosseguimos com a análise aplicando a projeção simplex em cada série e achando a dimensão de *embedding* ótima de cada série, os resultados estão na figura (4.2):

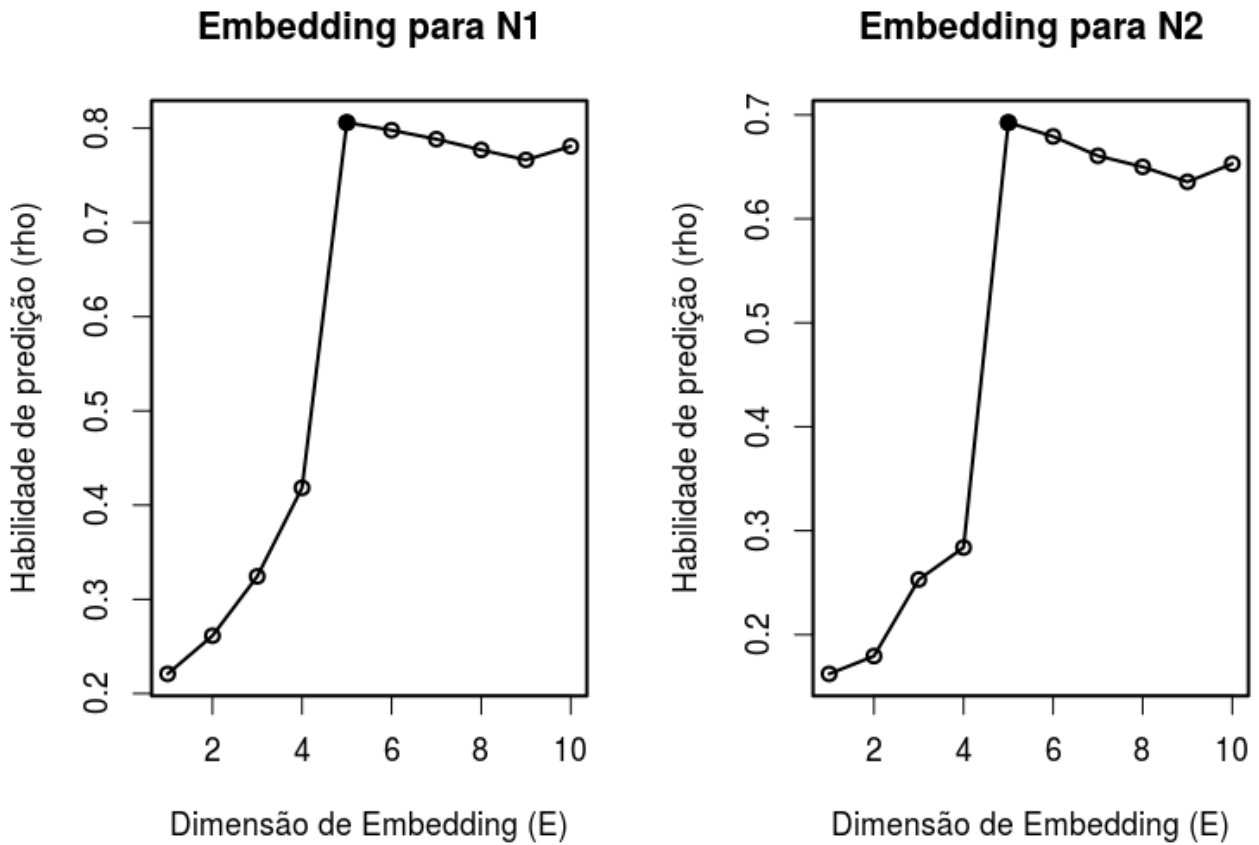


Figura 4.2: dimensão de embedding para cada uma das séries temporais do sistema 4.1

Note que ambas as séries tem dimensão ótima de *embedding* igual a 5. O sistema apresenta um valor razoável de correlação, porém sabemos das equações 4.1 que não há causalidade, porque por mais que as séries de N_1 e N_2 tenham correlação alta ainda assim as equações demonstram que essa sincronização entre elas é devido ao forçante ambiental, V . Assim esperamos que não haja causalidade entre as séries temporais, em nenhuma direção, pois nenhuma das duas espécies influencia a dinâmica da outra. Realizamos o mapeamento cruzado do atrator de cada uma das séries no outro atrator e os resultados são mostrados na figura (4.3)

CCM N1, N2

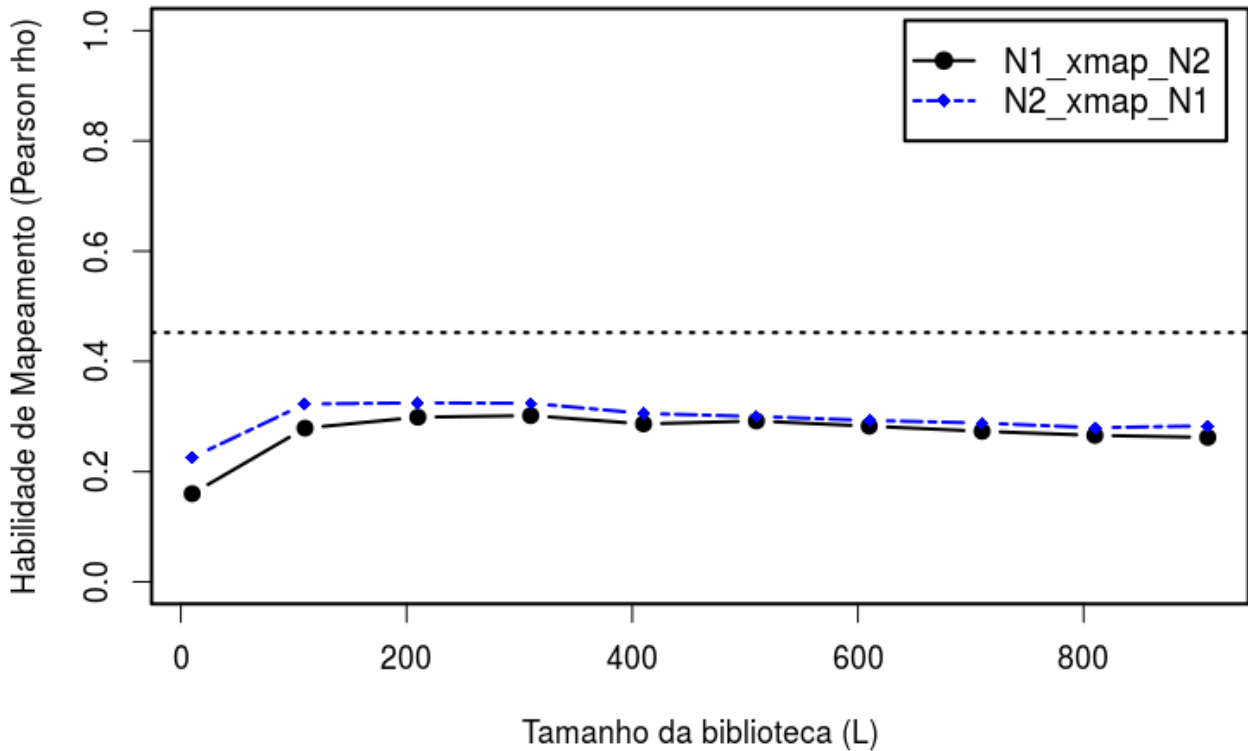


Figura 4.3: Mapeamento cruzado entre as séries temporais de N_1 e N_2 , note que o valor de ρ no CCM fica abaixo até do valor de correlação entre as séries

Como já havíamos notado não há causalidade entre as séries temporais de N_1 e N_2 , pois a habilidade de mapeamento é menor que a correlação entre as séries. A vantagem do CCM é que ele também é capaz de denotar quando não há causalidade entre as séries, como acima, pois o valor de $\rho_{ccm} < \rho_{corr}$ para o mapeamento entre os atratores. Note-se que somente da análise de correlação entre séries temporais nunca chegaríamos ao resultado acima.

Podemos estender a análise também as séries temporais de R_1 e R_2 , e verificar as relações de causa condizem com as equações do sistema 4.1. Para tanto realizamos a projeção simplex em ambas as séries para achar a dimensionalidade do sistema.

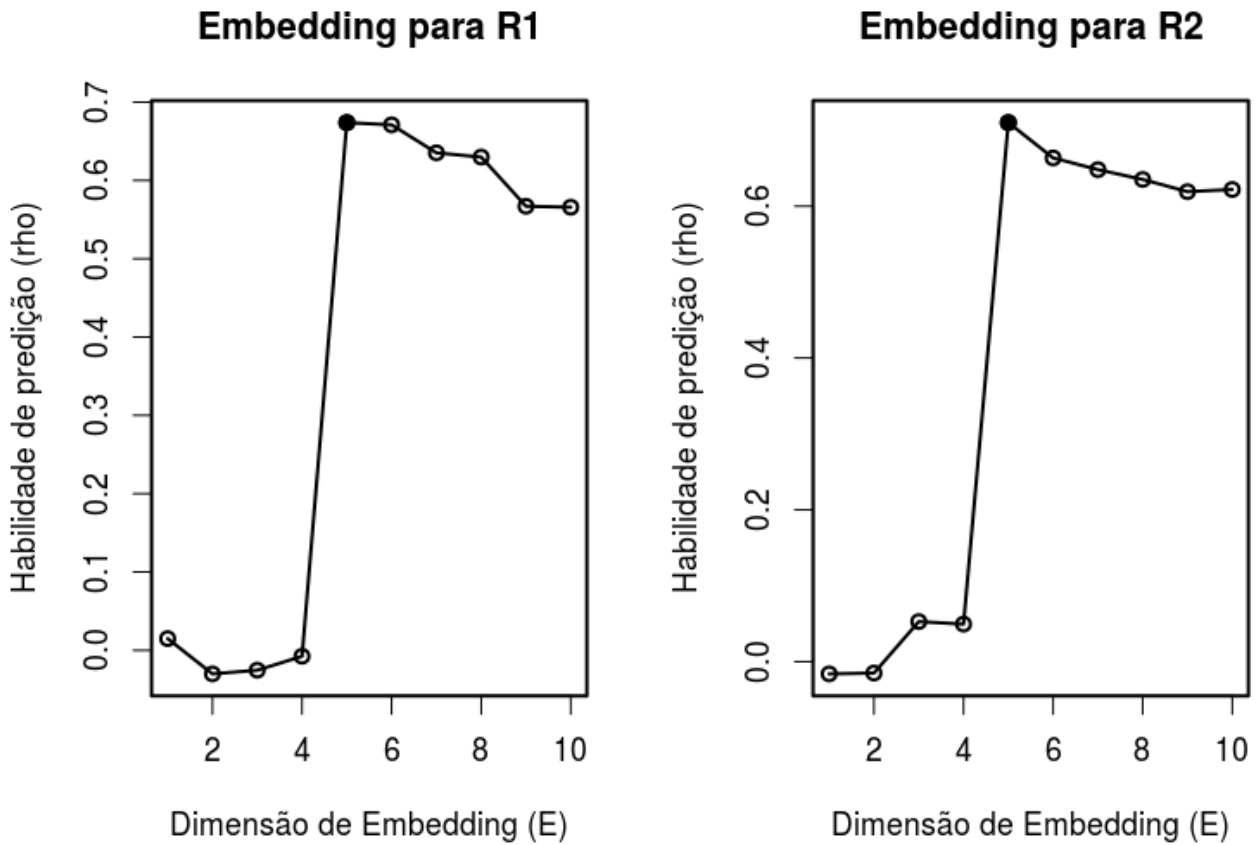


Figura 4.4: Dimensão ótima de Embedding para as séries de recrutamento, R_1 e R_2 .

Novamente a dimensão está condizente com aquela esperada pelas equações, 5. Prosseguimos com a análise mapeando um atrator de cada série no outro, esperamos que, conforme para N_1 e N_2 , não haja relações causais, pois tanto R_1 como R_2 dividem um forçante externo comum, e por isso qualquer efeito que pareça haver entre as séries somente se dá por sincronização devido ao forçante externo. Os resultados da análise por CCM estão na Fig (4.5).

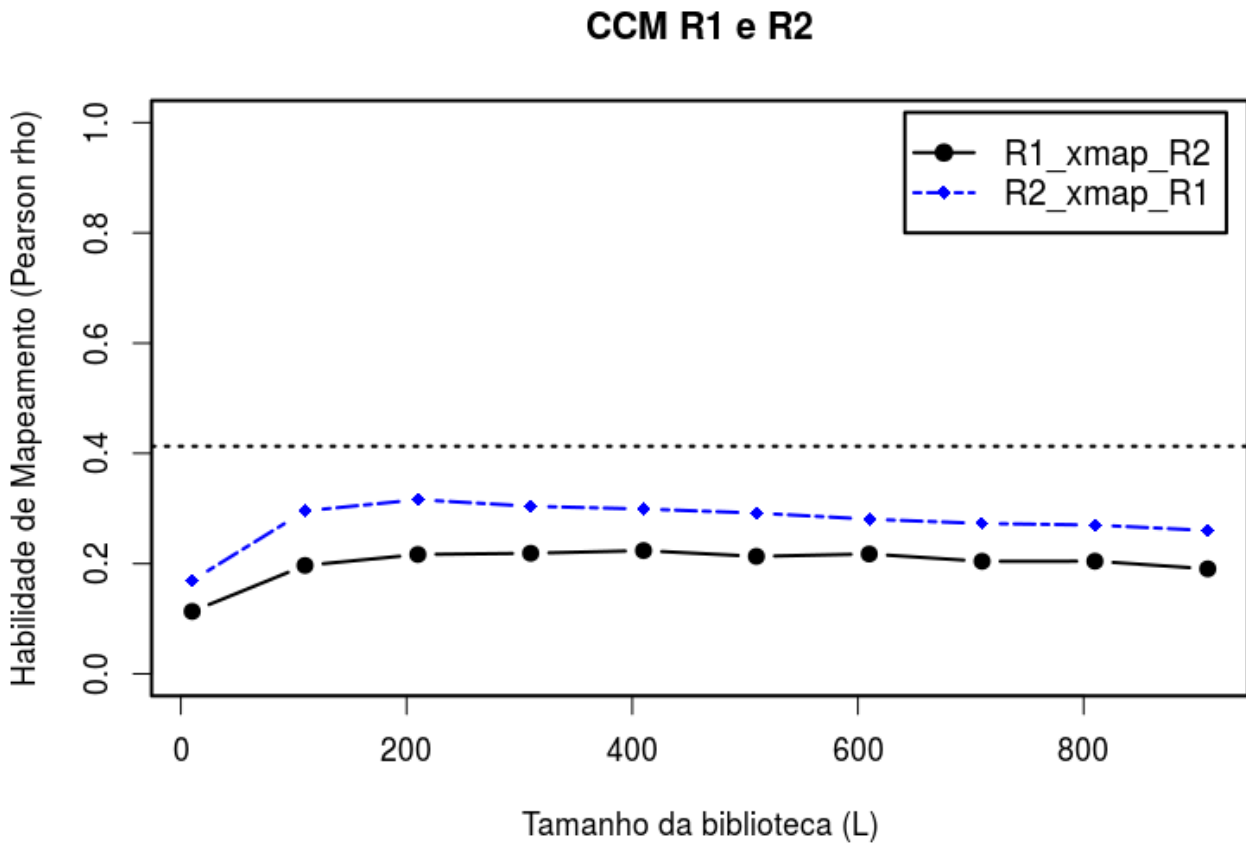


Figura 4.5: Gráfico do CCM entre as séries das populações de recrutamento, R_1 e R_2 , a linha pontilhada como anteriormente é a correlação simples entre as séries.

Como para as populações de adultos aqui temos ausência de causalidade entre as séries, uma vez que as populações de recrutamento só aparentam ter uma dinâmica acoplada pois compartilham um mesmo forçante ambiental. Podemos prosseguir com a análise e tentar ver as relações de causa entre populações de diferentes estágios, como por exemplo, N_1 e R_1 , ou ainda N_1 e R_2 . Esperamos que as relações de causa sejam então as seguintes: para as populações de uma mesma espécie mas em estágios diferentes de maturação, teremos forte relação causal, N_1 e R_1 bem como entre N_2 e R_2 . Todas essas relações com bidirecionalidade entre os estágios. Pois na equação temos que os adultos vem das populações de recrutamento e estes geram mais indivíduos das populações de recrutamento. Os resultados estão na figura (4.6)

CCM N1 para R1,R2, e vice-versa

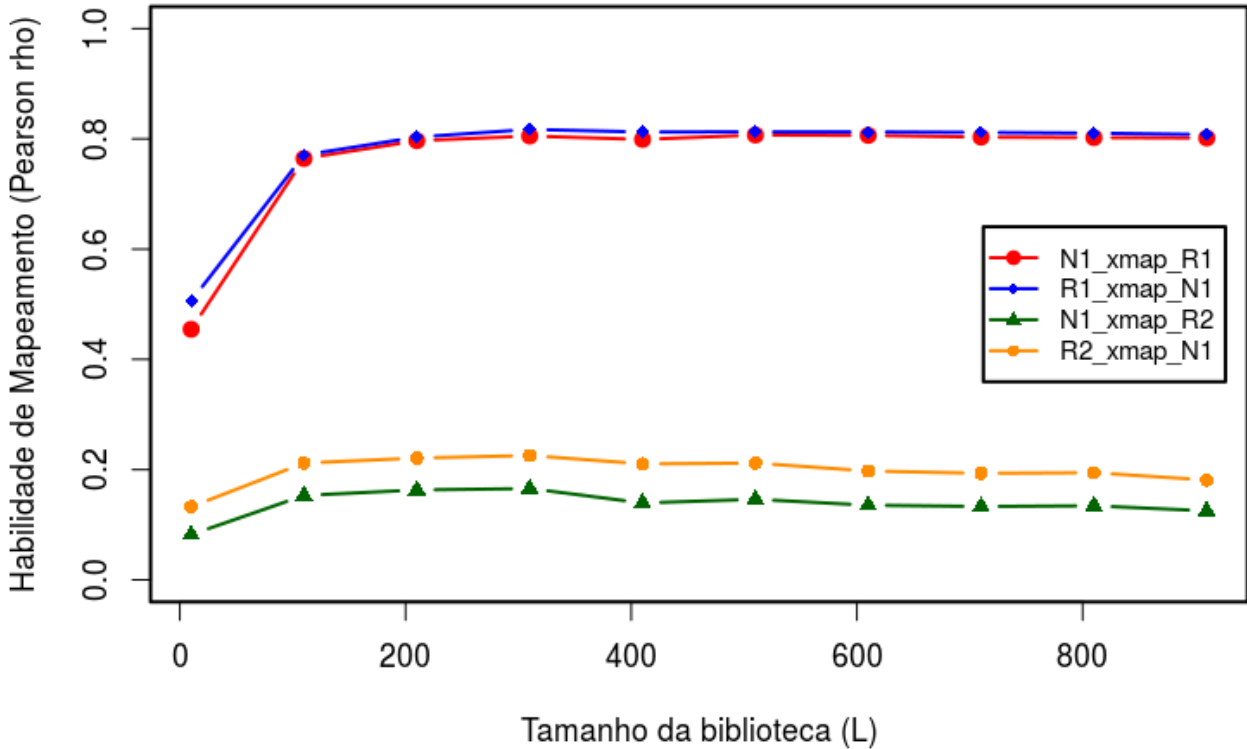


Figura 4.6: Gráfico do CCM entre a série de adultos, N_1 , e os recursos R_1 e R_2 , a correlação entre as séries é negativa, $r_{(N_1,R_1)} = -0,23$ e $r_{(N_1,R_2)} = -0,15$.

Conforme o esperado, o CCM entre N_1 e R_1 , apresenta um padrão convergente acima de sua correlação. Isso mostra que as séries de indivíduos adultos e seu recurso tem relações causais em ambos os sentidos, pois o adulto vem da população de recrutamento e o recrutamento quando escasso gera impacto na população de adultos. Já o CCM entre N_1 e o recurso R_2 , a convergência ocorre para um valor menor que ρ . Agora vamos completar a análise fazendo o mesmo para a série de N_2 . Esperamos aqui o mesmo que anteriormente, relação causal forte entre os adultos N_2 e seu recurso, R_2 , e relação causal nula entre a série de N_2 e recurso da outra espécie. Os resultados estão na figura (4.7).

CCM N2 para R1,R2, e vice-versa

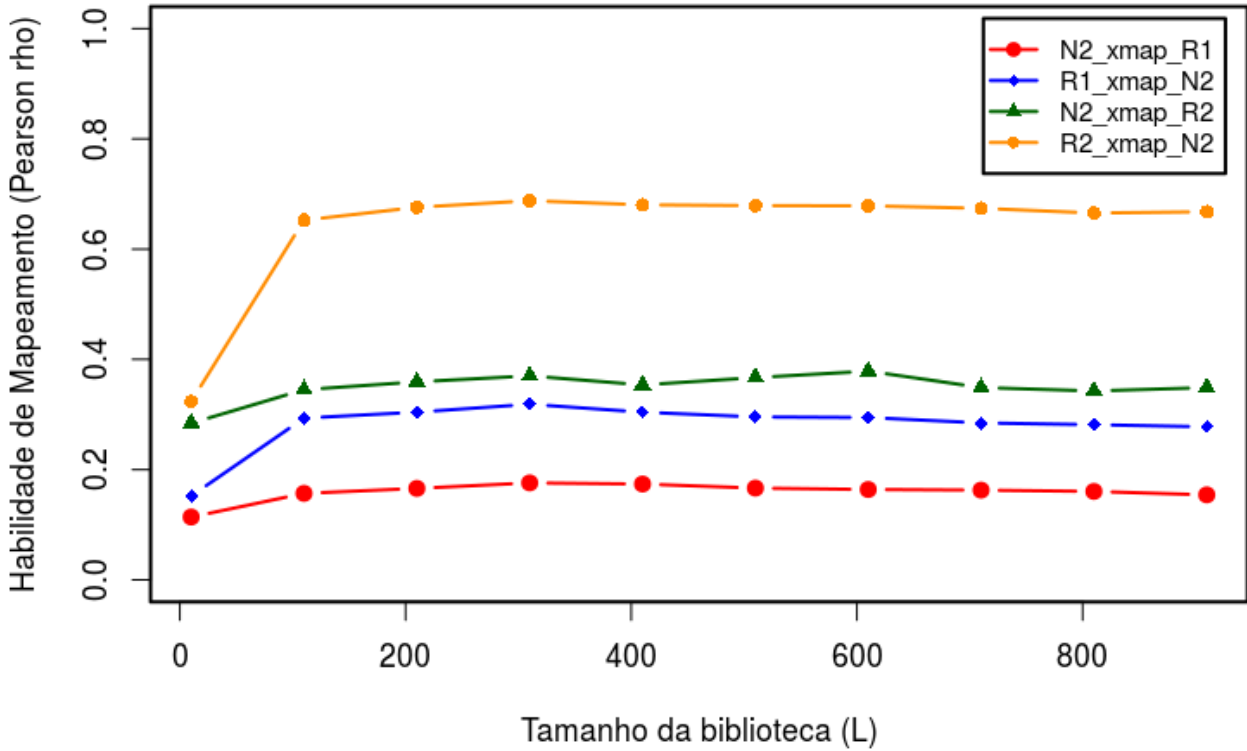


Figura 4.7: Gráfico do CCM entre a série de adultos, N_2 , e os recursos R_1 e R_2 , a correlação entre as séries é negativa $r_{(N_2,R_1)} = -0,13$, e $r_{(N_1,R_2)} = -0,28$.

Como esperado, há causalidade entre as séries de N_2 e R_2 , em ambas as direções, e não há causalidade entre as séries temporais de N_2 e o recurso da outra espécie R_1 , também em ambas as direções. Esse modelo estudado nessa sessão é importante pois demonstra na prática uma máxima da ciência que é frequentemente seguida, “Correlação não implica causalidade”. O motivo é que a medida de correlação entre séries temporais é só uma medida de similaridade entre elas. Mas, mesmo que as séries tenham dinâmica semelhante, isso não necessariamente implica em causa entre as mesmas. Como mostramos nessa sessão podemos observar o quão mais coerente o CCM torna as relações entre sistemas de equações e conseqüentemente entre séries temporais geradas por eles.

4.1.2 Competição entre duas espécies com correlação miragem

Para demonstrar a máxima sobre causalidade, “a falta de correlação não implica falta de causalidade”, construímos o exemplo a seguir. Trata-se de um sistema de competição entre duas espécies que apresenta uma correlação baixa. O sistema é o seguinte:

$$\begin{cases} M_1(t+1) = 3,8M_1(t)[1 - M_1(t)] - 0,02M_1(t)M_2(t), \\ M_2(t+1) = 3,5M_2(t)[1 - M_2(t)] - 0,08M_2(t)M_1(t) \end{cases} \quad (4.2)$$

Iteramos o sistema por mil vezes, e temos as seguintes séries temporais para M_1 e M_2 :

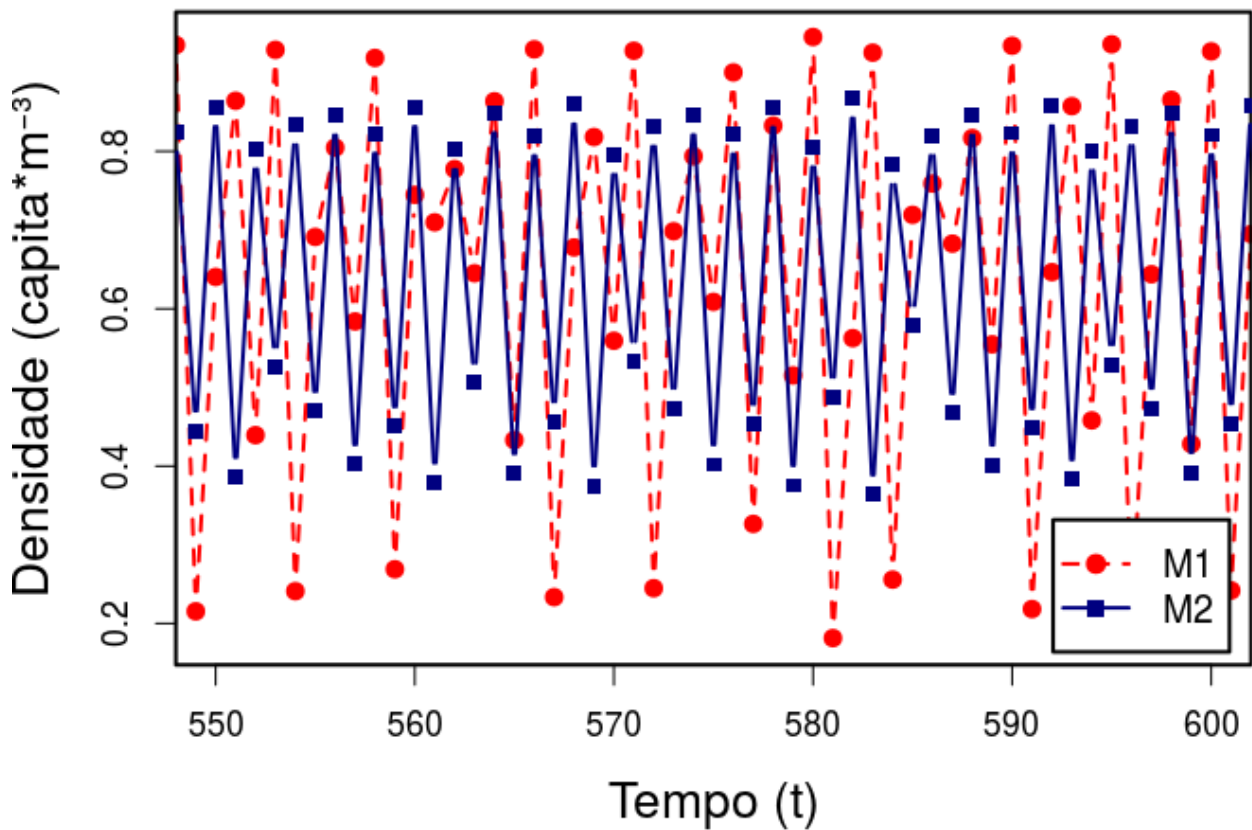


Figura 4.8: Variação das populações M_1 e M_2 , a correlação entre as séries é de apenas, $r(M_1, M_2) = 0,09$, porém sabemos das equações que há uma forte competição e, portanto, causalidade.

As populações tem um perfil de série temporal que varia muito no tempo, em certos momentos as séries parecem sincronizadas, e em outras partes parecem não ter correlação nenhuma, como fica evidente pela correlação média de toda a série ter um valor baixo de $r = 0,09$. Vejamos agora o que se obtém com o uso do CCM. Primeiro obtemos o valor da dimensão ótima de *embedding*, procurando a melhor forma de reconstruir o atrator das séries. Na figura 4.9 temos o gráfico da dimensão de *embedding*:

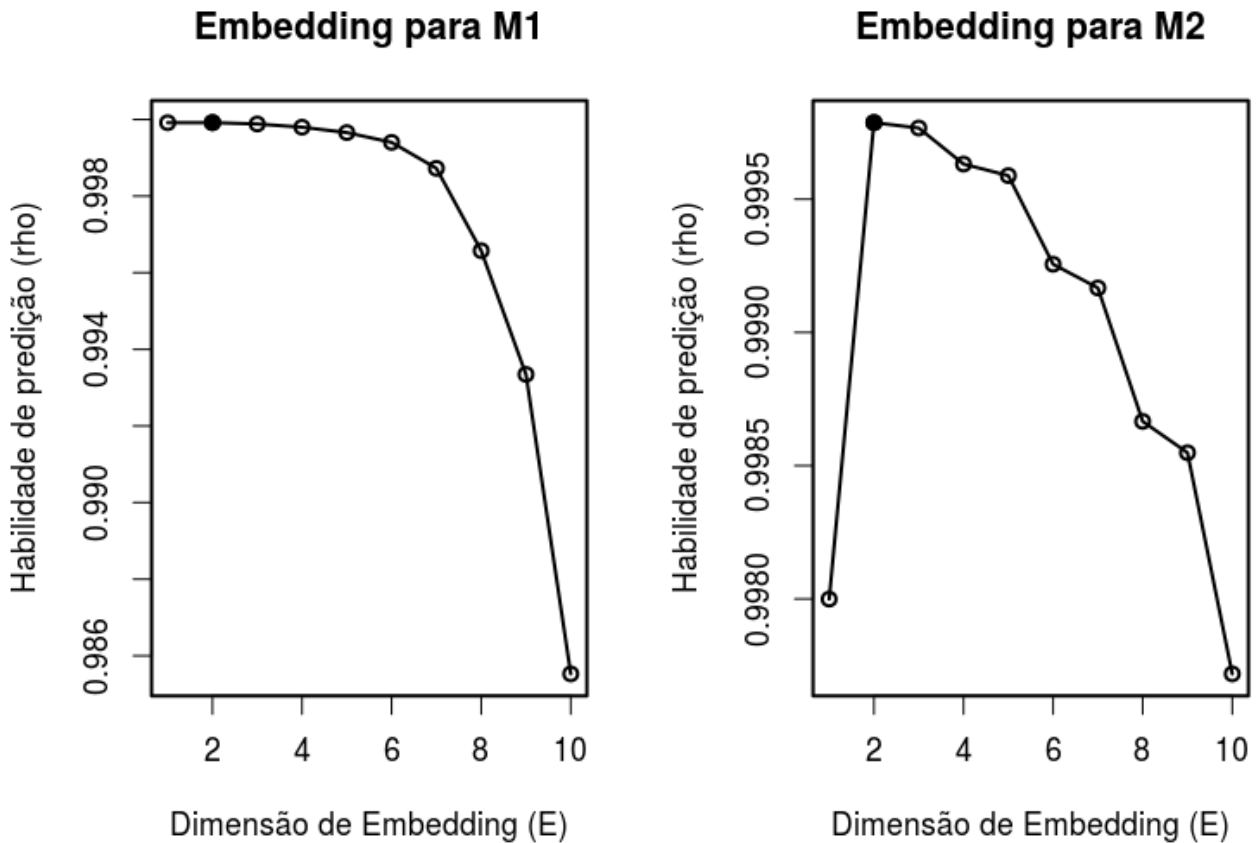


Figura 4.9: Gráfico da dimensão ótima de embedding para M_1 e M_2 , ambas tem dimensão ótima igual a 2.

Aqui devemos fazer uma ressalva, o gráfico acima para a dimensão ótima de *embedding* demonstrar que a dimensão é igual a 2, porém também vemos que os valores de ρ estão altos para outras dimensões próximas, isso indica que o sistema tem uma baixa dimensionalidade e que valores próximos do ótimo para a dimensão podem realizar uma construção com uma boa estimativa do mapeamento de um atrator reconstruído no outro, mas mesmo assim o algoritmo do simplex foi capaz de distinguir qual dessas dimensões melhor realiza a projeção para um futuro próximo. Essa questão também torna clara a necessidade de monitoramento e coleta de dados de forma perene para sistemas de interesse reais, pois qualquer informação a mais sobre o sistema ajuda na reconstrução do espaço-de-fase, bem como qualquer informação a menos pode tornar impossível chegar à uma conclusão sobre o sistema.

Apresentamos a seguir os resultados do CCM entre as duas espécies. Vemos que há causalidade recíproca. Esse fato fica claro também no gráfico do CCM, onde a causalidade de M_1 em M_2 é mais fortemente detectada que o contrário, o que é condizente com as equações do sistema. Os últimos termos, ou os termos cruzados, demonstram isso, na equação de M_1 ele tem um fator multiplicativo igual a 0,02, já em M_2 ele tem um fator de 0,08, quatro vezes maior. Os resultados estão na figura (4.10)

Competição entre duas espécies

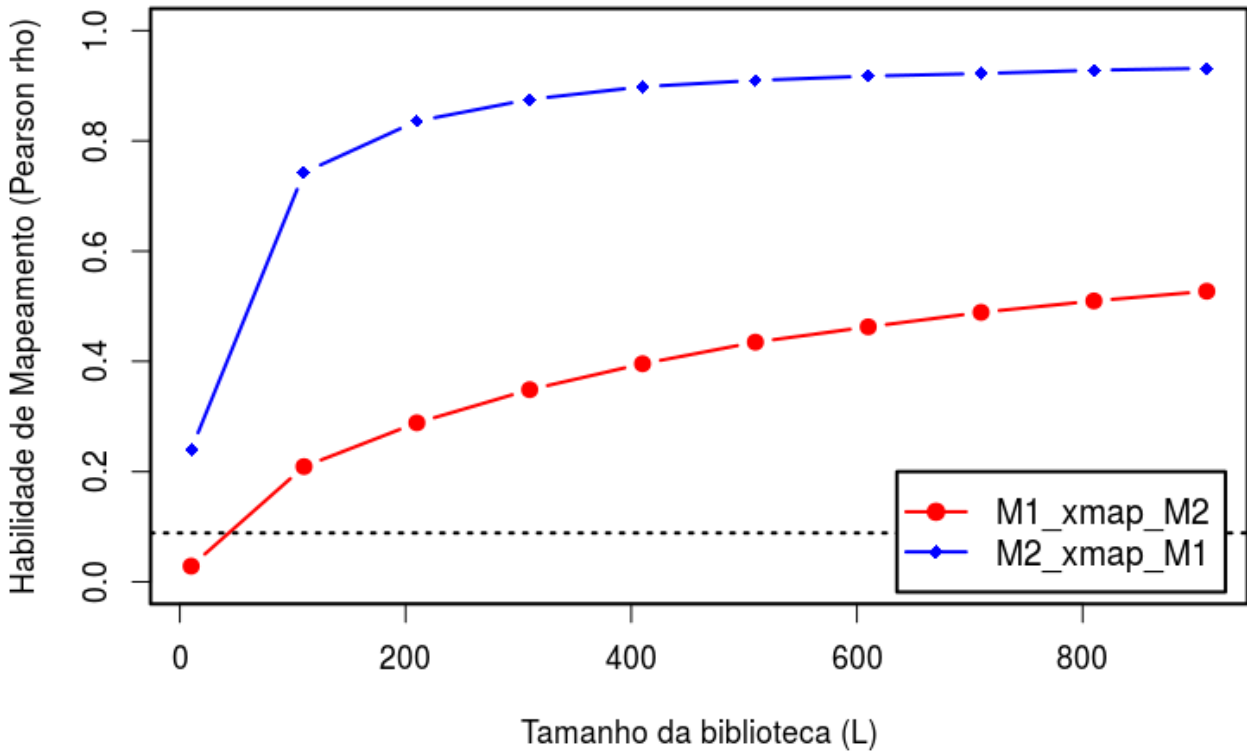


Figura 4.10: CCM para os sentidos do sistema de competição com correlação miragem. A linha pontilhada é a correlação, $r = 0,09$.

Como havíamos afirmado, a causalidade de M_1 em M_2 , linha superior, é mais pronunciada que M_2 em M_1 , linha inferior. Isso ocorre porque o sistema tem o termo cruzado com um fator multiplicador maior para a equação de M_1 do que da equação de M_2 , também como havíamos dito. Com isso demonstramos ainda outra propriedade que o CCM pode denotar sobre as séries temporais, além da direção da causalidade, o CCM consegue, para um sistema em que isso seja fortemente expresso, demonstrar uma força de causalidade, distinguindo entre um efeito forte e um efeito mais fraco de uma série na outra. Desde que o ruído tenha a mesma intensidade para as duas séries temporais.

4.2 Séries Temporais de borboletas

Nessa sessão vamos utilizar o método do CCM para estudar dados reais. Os dados são referentes ao comportamento de 8 espécies de borboletas (Fig. 4.11) e são séries temporais do número de indivíduos de cada espécie (Fig. 4.12). Essas espécies são todas da mesma tribo biológica de borboletas, a tribo “Ithomiini”, e tem um comportamento parecido, o que levanta a questão se elas formam uma comunidade biológica ou somente tem ciclos de vida parecidos. Uma questão evolucionária importante é saber porque ou como certas espécies evoluíram até chegarem num dado comportamento, no caso das borboletas que estudaremos a questão que fica é, sabe-se que o comportamento próximo delas é devido uma temporada de clima ruim para sua biologia mas por qual fator ou fatores elas se guiam para produzir tão comportamento. Há mecanismos de interação entre elas? Elas sincronizam seu ciclo de vida a partir de qual fator climático especificamente? Se esse comportamento se der via interações interespecíficas significa que apesar delas serem de distintas espécies elas ainda tem traços comuns, isso pode aparecer na análise do CCM como uma relação de causa entre as séries, por exemplo.

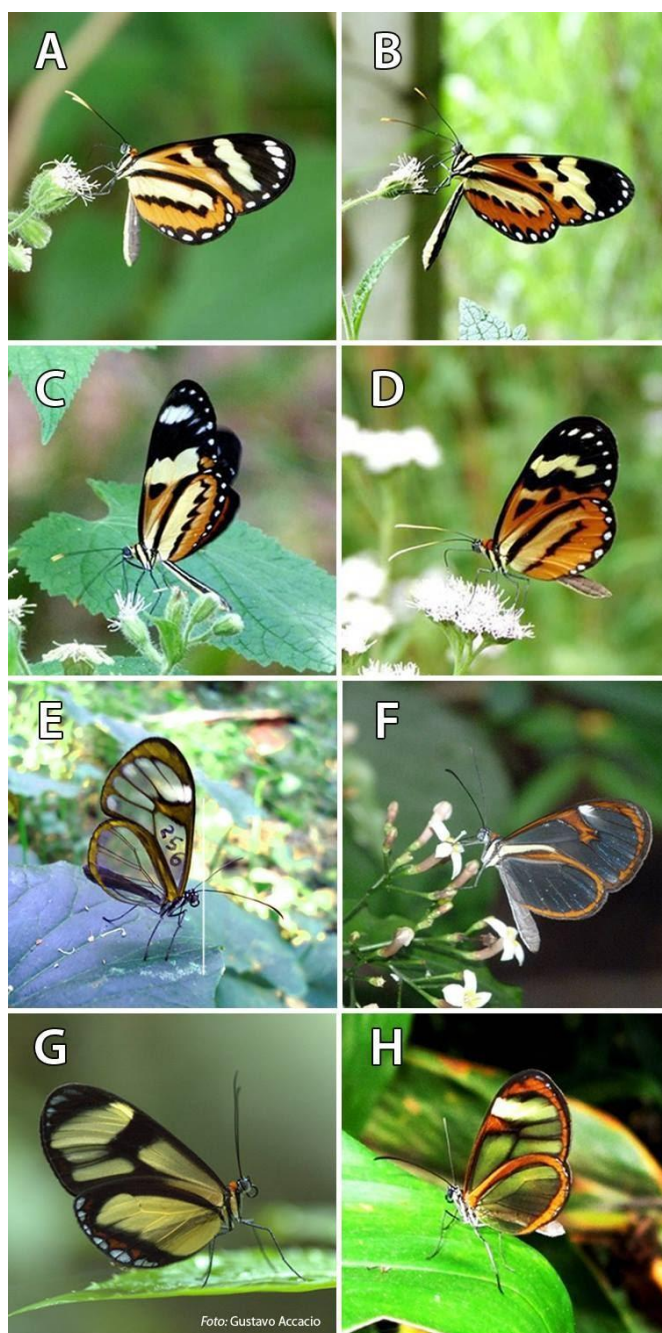


Figura 4.11: Borboletas da tribo “Ithomiini”. A – *H.ninonia*, B – *M.polymnia*, C – *M.lysimnia*, D – *H.euclea*, E – *H.lavinia*, F – *I.agnosia*, G – *E.eupompe*, H – *M.c.salonina*. Imagem cedida por Candia-Gallardo, C.

Os dados foram obtidos através do método de captura-marcação-recaptura, onde durante um certo período do mês coleta-se as borboletas no local já sabido de onde há maior concentração delas. Após a primeira captura faz-se a contagem de cada espécie, marcação de cada indivíduo e soltura, passado algum tempo repete-se o processo, novamente faz-se a contagem dos indivíduos, marcados e não-marcados, e depois a soltura. Com esses dados, de cada captura e recaptura, pode-se estimar os padrões de movimentos das borboletas e a efetividade em cada captura. Então cria-se uma série estimada do número de indivíduos de cada espécie. Esse trabalho foi realizado por Carlos Candia-Gallardo do IB-USP, e os dados foram gentilmente cedidos para nossa análise via CCM. As séries estimadas estão na Fig. (4.12).

Séries por espécies

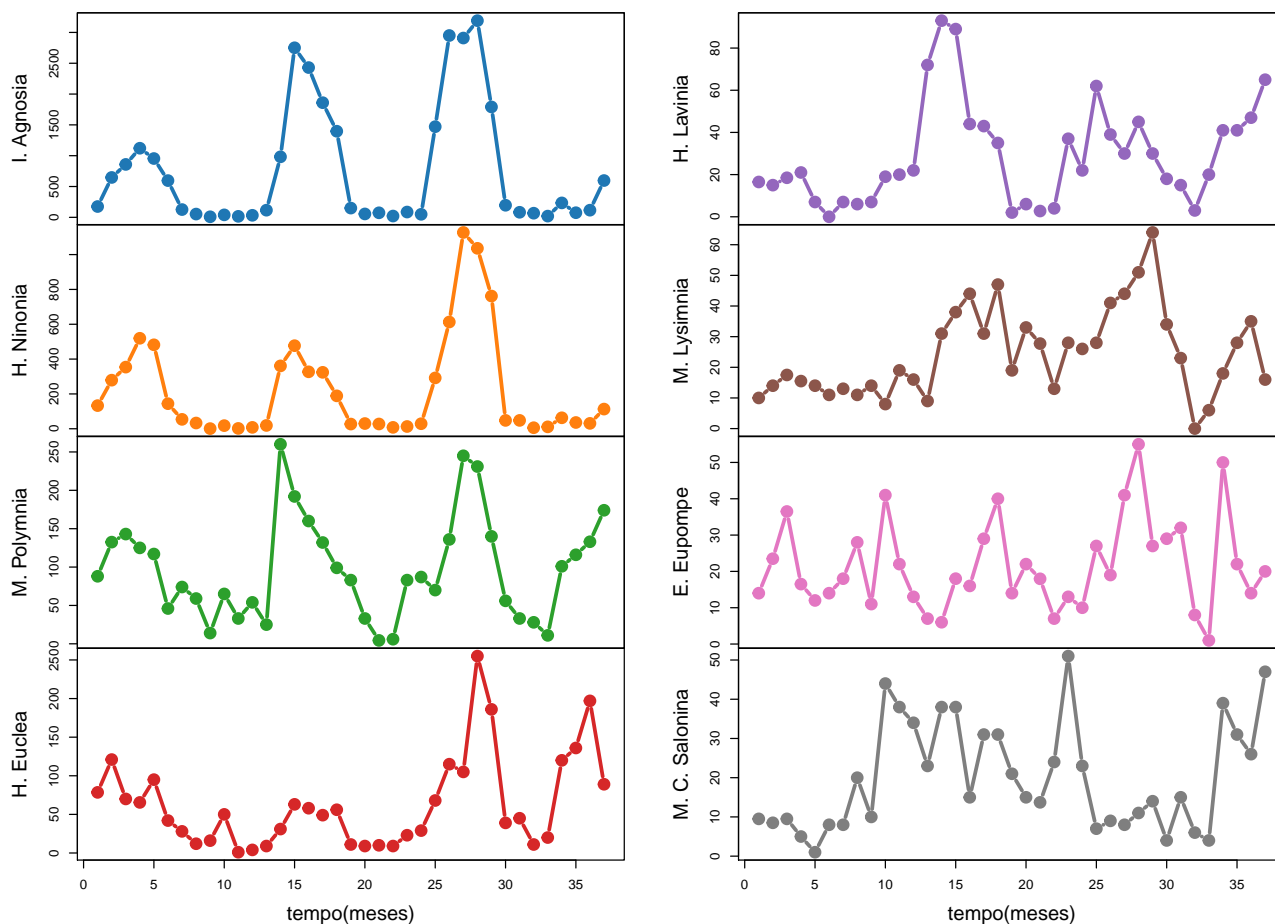


Figura 4.12: Séries temporais com a variação da população estimada de cada espécie de borboleta da Tribo Ithomini.

Temos também as séries temporais de dois fatores climáticos que foram considerados como forçantes da dinâmica da comunidade de borboletas: são eles a chuva total acumulada durante o último mês antes do início do período de coleta, e o fotoperíodo nos dias de coleta. As séries temporais de ambos os fatores para o mesmo período das séries das borboletas estão na Fig. (4.13).

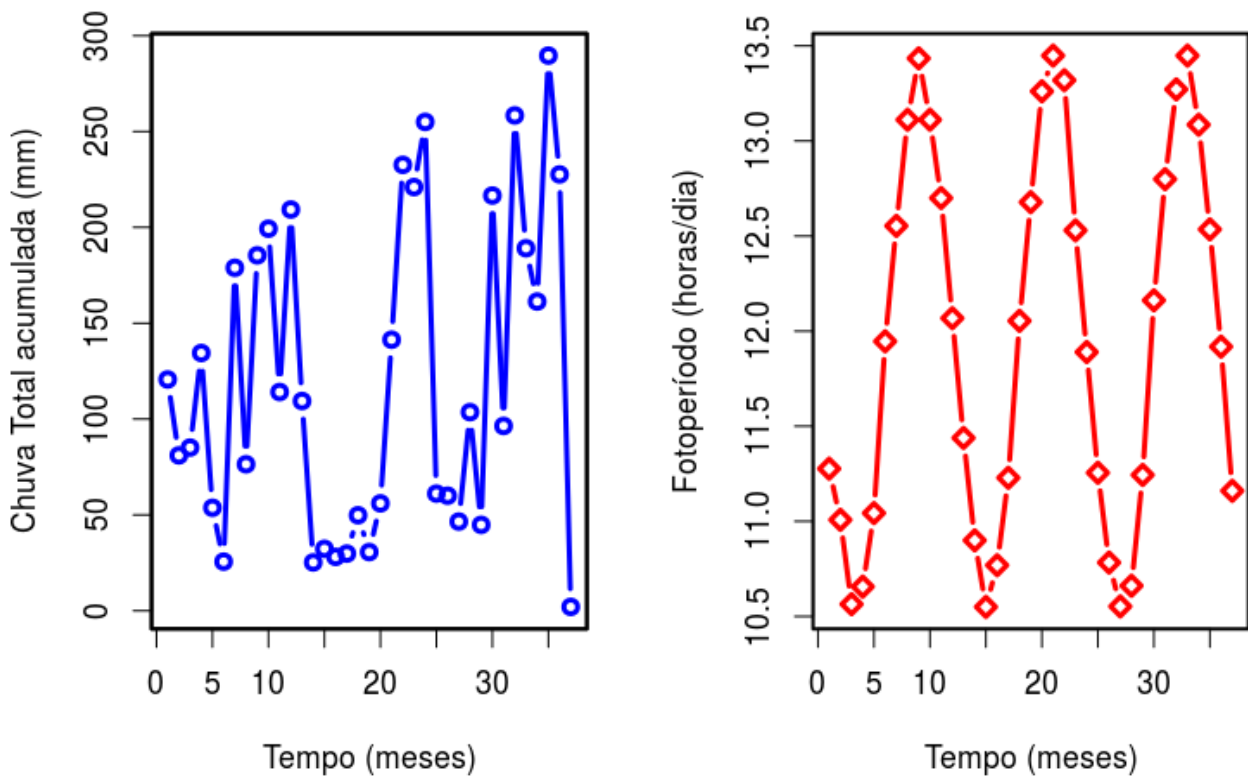


Figura 4.13: Séries temporais dos fatores climáticos possivelmente ligados à dinâmica da comunidade de borboletas.

As hipóteses levantadas sobre a dinâmica dessa comunidade de borboletas são de que, elas possuem alguma forma de antecipar os períodos das chuvas ou falta delas, para poderem se preparar, afim de garantirem a sua sobrevivência. A primeira questão levantada é somente relacionada aos fatores climáticos. Através das séries temporais de cada espécie e dos fatores climáticos tentamos revelar a verdadeira relação entre as borboletas e os fatores climáticos: A qual fator climático elas respondem, as chuvas acumuladas ou a variação do fotoperíodo? Antecipando a época de chuva e mudando seu comportamento, através da formação de assembleias. As borboletas das oito espécies juntam-se numa região favorável a elas, ou seja, com maior umidade e abrigo contra a chuva, e lá ficam concentradas até que possam novamente voar e reproduzirem-se. Essa é a primeira questão que nos propomos a responder através da análise de causalidade do CCM nas séries temporais das borboletas e fatores climáticos. Uma segunda questão, que vai ser abordada mais a frente, diz respeito a, possivelmente, um segundo sinal para a formação de assembleias. Quando elas formaram as assembleias, as borboletas tornam-se mais vulneráveis aos predadores pois, ficam paradas ou com baixa movimentação. Porém, algumas delas possuem uma defesa natural sendo impalatáveis. O problema dá-se no fato de que os predadores tem um tempo de aprendizado e para isso eles precisam comer uma certa quantidade de borboletas. A questão é que, essas borboletas são miméticas entre si, ou seja, tem características morfológicas parecidas, cores, formato de asas, padrão de voo, etc. Primeiro pensou-se que poderia haver uma dada espécie que fosse a guia para formação das assembleias para as outras espécies. Isso seria possível pois as outras espécies aproveitariam-se do mimetismo com a espécie-guia para legarem a ela o custo de aprendizado dos predadores. Os predadores aprenderiam que toda a tribo é impalatável comendo mais ou apenas indivíduos de única espécie, o que geraria um custo alto a essa espécie. Então a espécie que primeiro deslocar-se para a formação da assembleia teria sua população com menor número. Na análise do CCM isso seria

mostrado como a “causa” das séries temporais das outras espécies.

4.2.1 Seleção de parâmetros para a reconstrução

Iniciamos a análise selecionando os parâmetros para a reconstrução dos atratores de cada série temporal. Então fazemos a projeção simplex para cada uma das séries, as oito espécies de borboletas mais os dois fatores climáticos. Os resultados são mostrados nas figuras (4.14, 4.15 e 4.16).

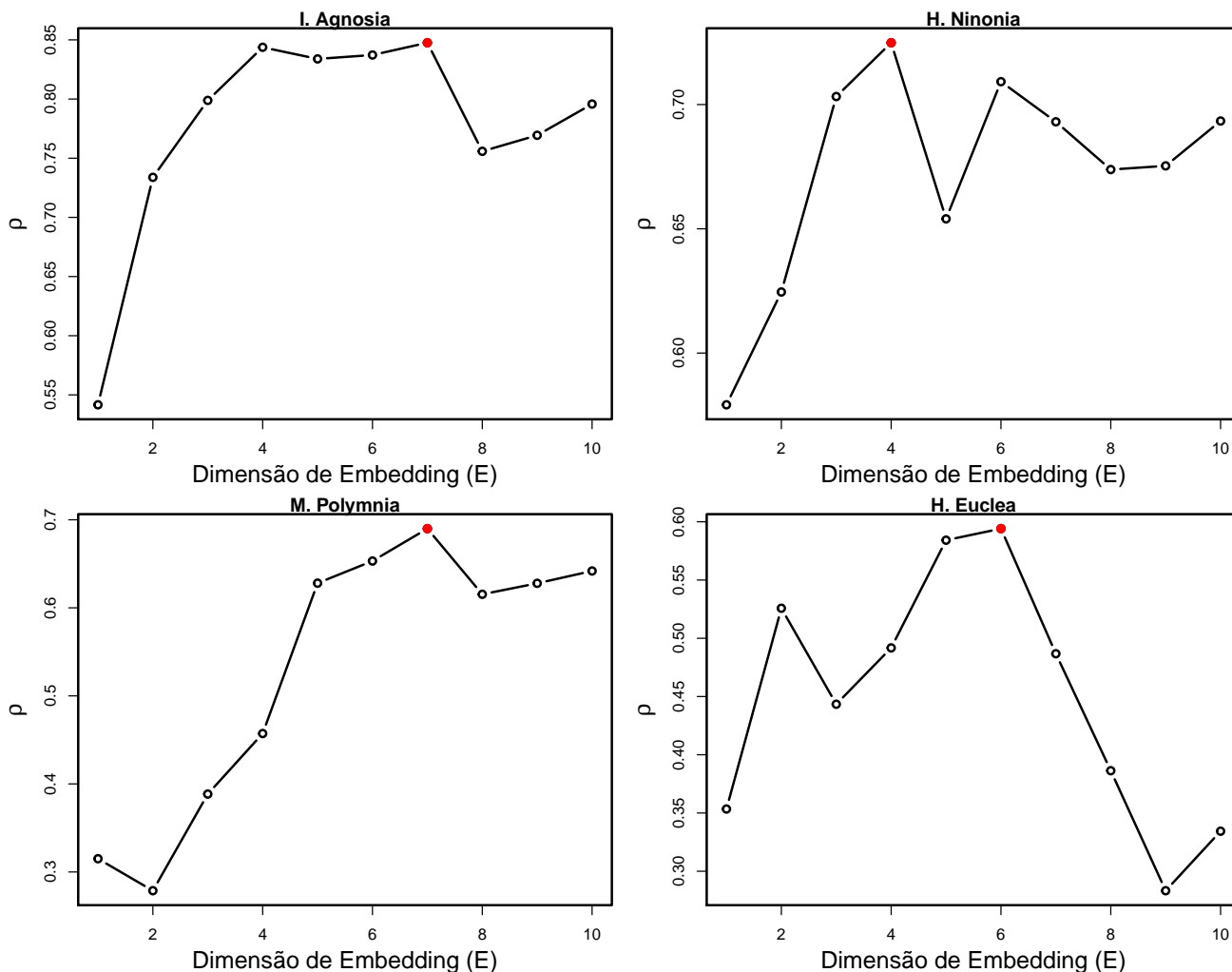


Figura 4.14: Dimensão de embedding para as espécies de borboletas, os pontos preenchidos indicam o máximo de ρ para cada espécie, identificada no título de cada gráfico.

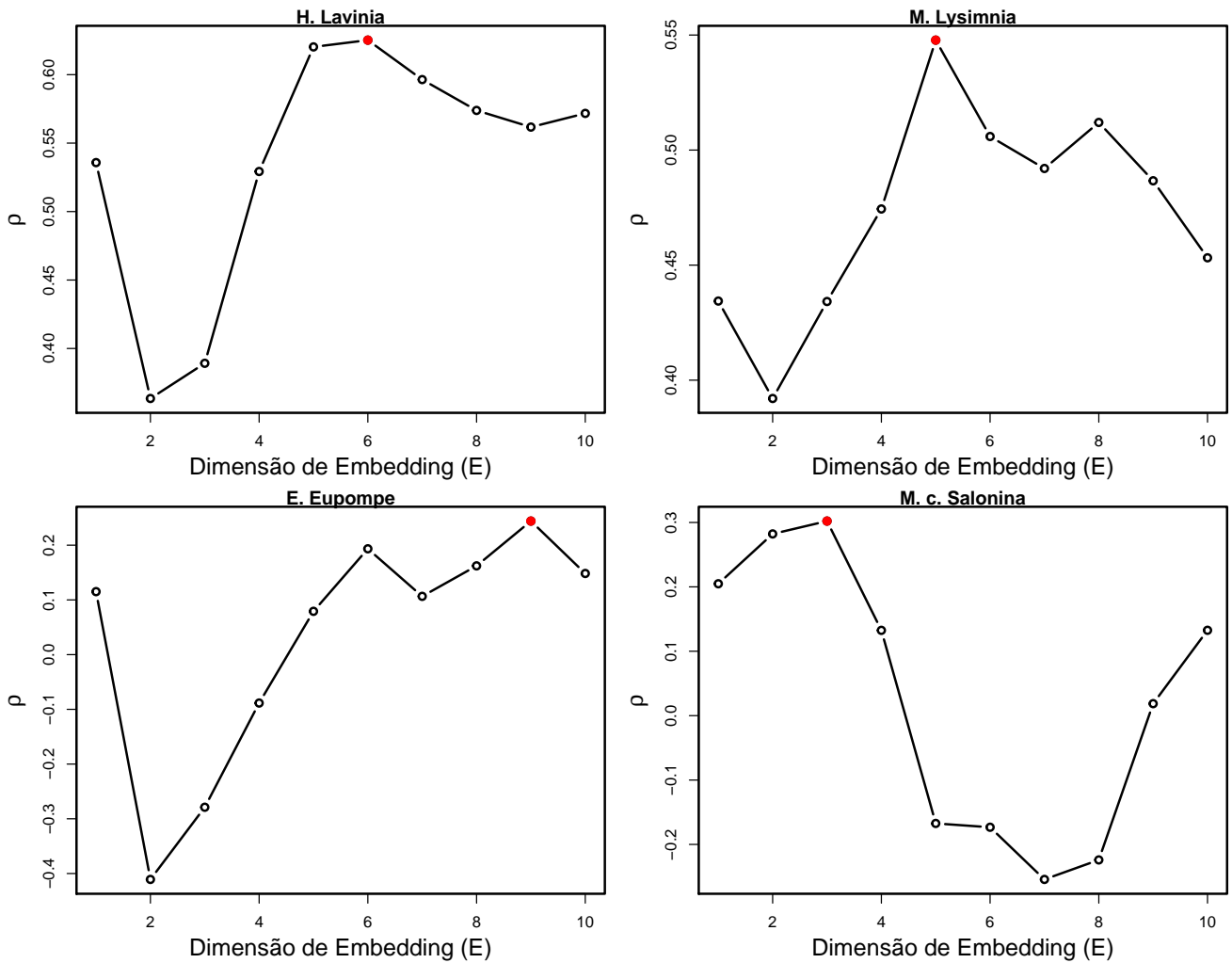


Figura 4.15: Dimensão de embedding para as espécies de borboletas, os pontos preenchidos indicam o máximo de ρ para cada espécie, identificada no título de cada gráfico.

Para os fatores climáticos temos os gráficos das figuras (4.16). O fotoperíodo se trata de uma variável altamente sazonal e regular, pois só depende da posição relativa entre Sol e Terra. Uma série perfeitamente periódica é facilmente previsível. Esse desenovelar ocorre então para $E = 2$ no caso.

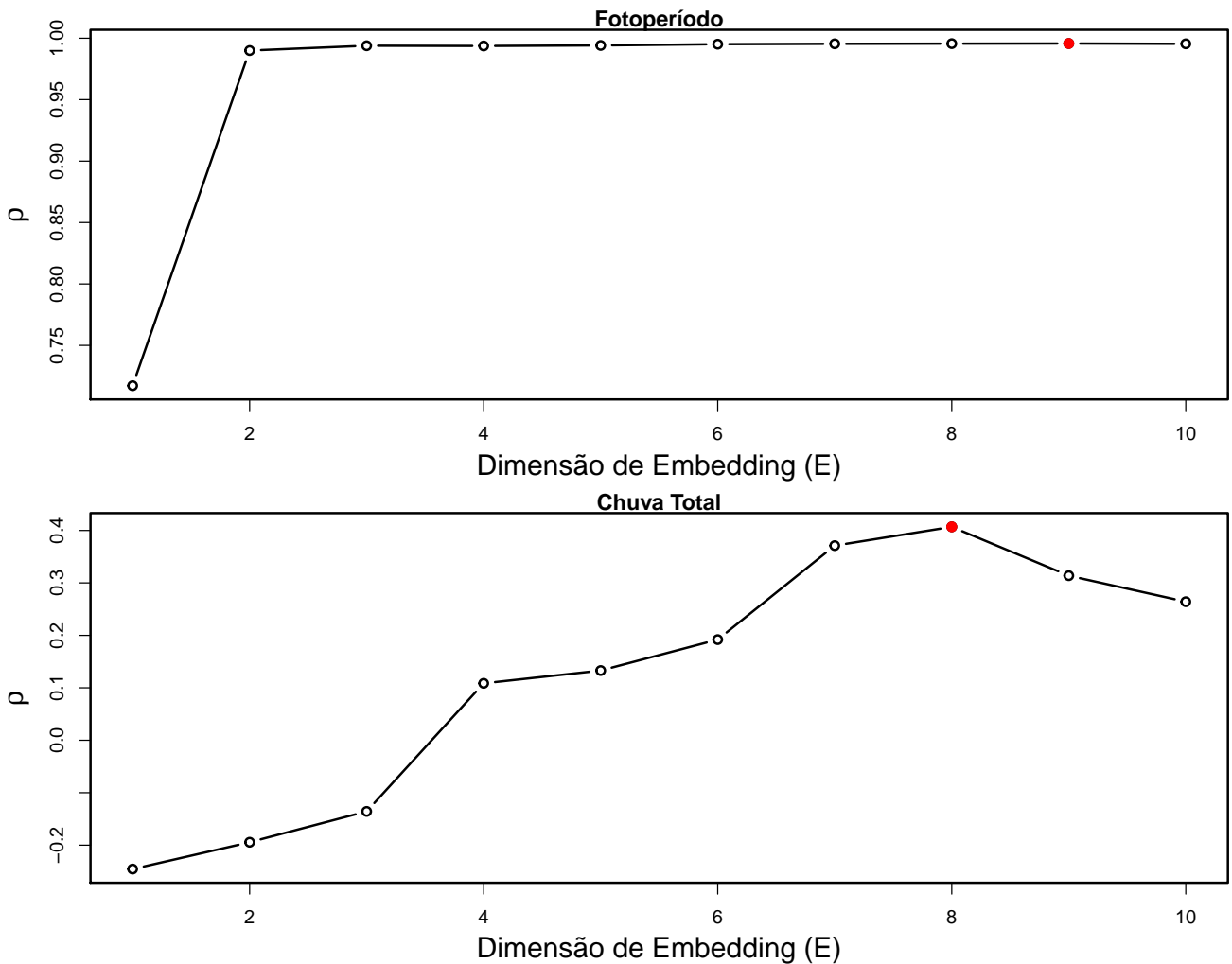


Figura 4.16: Dimensão de embedding para os fatores climáticos, os pontos preenchidos indicam o máximo de ρ , identificada no título de cada gráfico.

Os valores de *embedding* são variados, mas parecem estar num intervalo entre nove e quatro dimensões. A explicação é que cada série de cada espécie não necessariamente responde aos mesmo fatores causais e ainda temos o ruído das séries.

4.2.2 CCM entre espécies e os fatores climáticos

Traçamos o CCM para cada espécie com cada um dos fatores climáticos, sempre lembrando que o sentido de causalidade é o contrário do mapeamento. Então se mapeamos uma espécie no fator climático estamos tentando ver a causalidade desse fator climático na dinâmica da espécie. Queremos primeiramente saber se há causalidade entre os fatores climáticos e entre as espécies de borboletas. Podemos ponderar qual deva ser o resultado esperado baseados no conhecimento sobre o sistema. As borboletas em questão não podem voar sob chuvas e em dias muito secos, elas precisam de conjunção de fatores favoráveis para suas atividades normais. Espera-se que elas sejam capazes de anteciparem as mudanças climáticas desfavoráveis se, por exemplo, elas guiarem-se pela chuva acumulada do mês, um dia a mais de chuva ou um dia a menos significa alta taxa de mortalidade nas populações, e o sinal da chuva acumulada não dá nenhuma informação sobre se vai chover mais ou menos. Portanto esperamos que elas se guiem mais fortemente pelo fotoperíodo que pela chuva acumulada, o fotoperíodo tem a característica de ser altamente regular e altamente periódico, como vimos na figura 4.13. Então o fotoperíodo, pode denunciar para as borboletas de forma mais eficiente a chegada de chuvas ou de uma estação seca, e conseqüentemente espera-se que tenha um fator de causalidade no CCM mais pronunciado e evidente.

Os resultados são mostrados nas figuras (4.17, 4.18, 4.19, e 4.20). Para não poluir os gráficos optamos por não colocar legenda, cada uma das linhas denota o CCM entre uma espécie e um fator climático, a espécie utilizada vem identificada no título na parte central de cada gráfico, a linha com pontos em forma de cruz (+) é o CCM entre a espécie do título e a série do fotoperíodo, e a linha com pontos em forma de delta (Δ) é o CCM entre a espécie do título e a série da chuva total. Colocamos também a correlação simples de cada espécie com cada um dos fatores climáticos, a linha tracejada é a correlação entre fotoperíodo e a espécie do título, e a linha pontilhada a correlação da espécie e a série da chuva total.

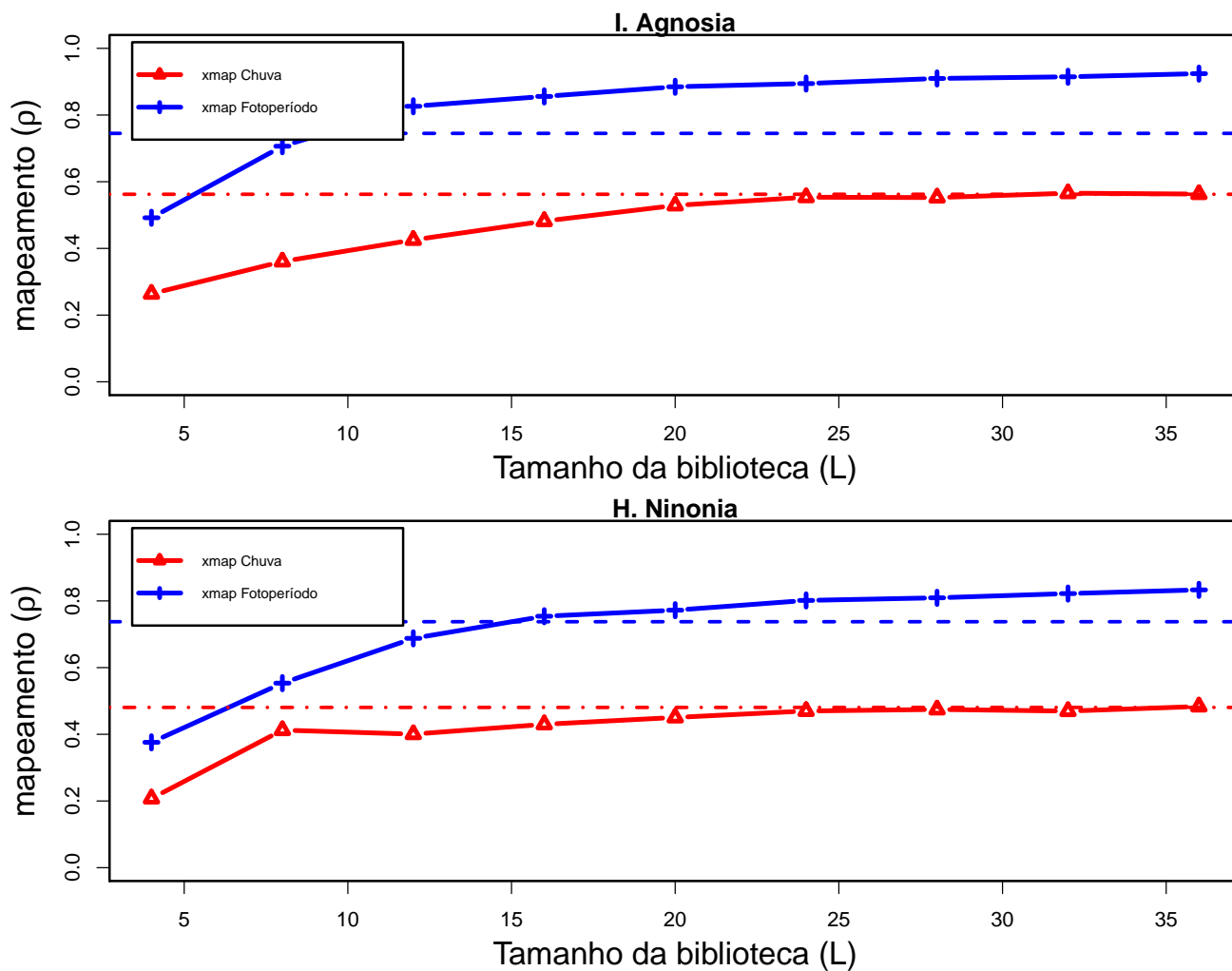


Figura 4.17: CCM entre as espécie *I.agnosia* e *H.ninonia*, e os fatores climáticos. Pontos + com o fotoperíodo, ponto Δ com a chuva acumulada. A linha pontilhada (\cdots) é a correlação da espécie do título com a chuva e a linha tracejada ($---$) é a correlação entre a espécie e o fotoperíodo.

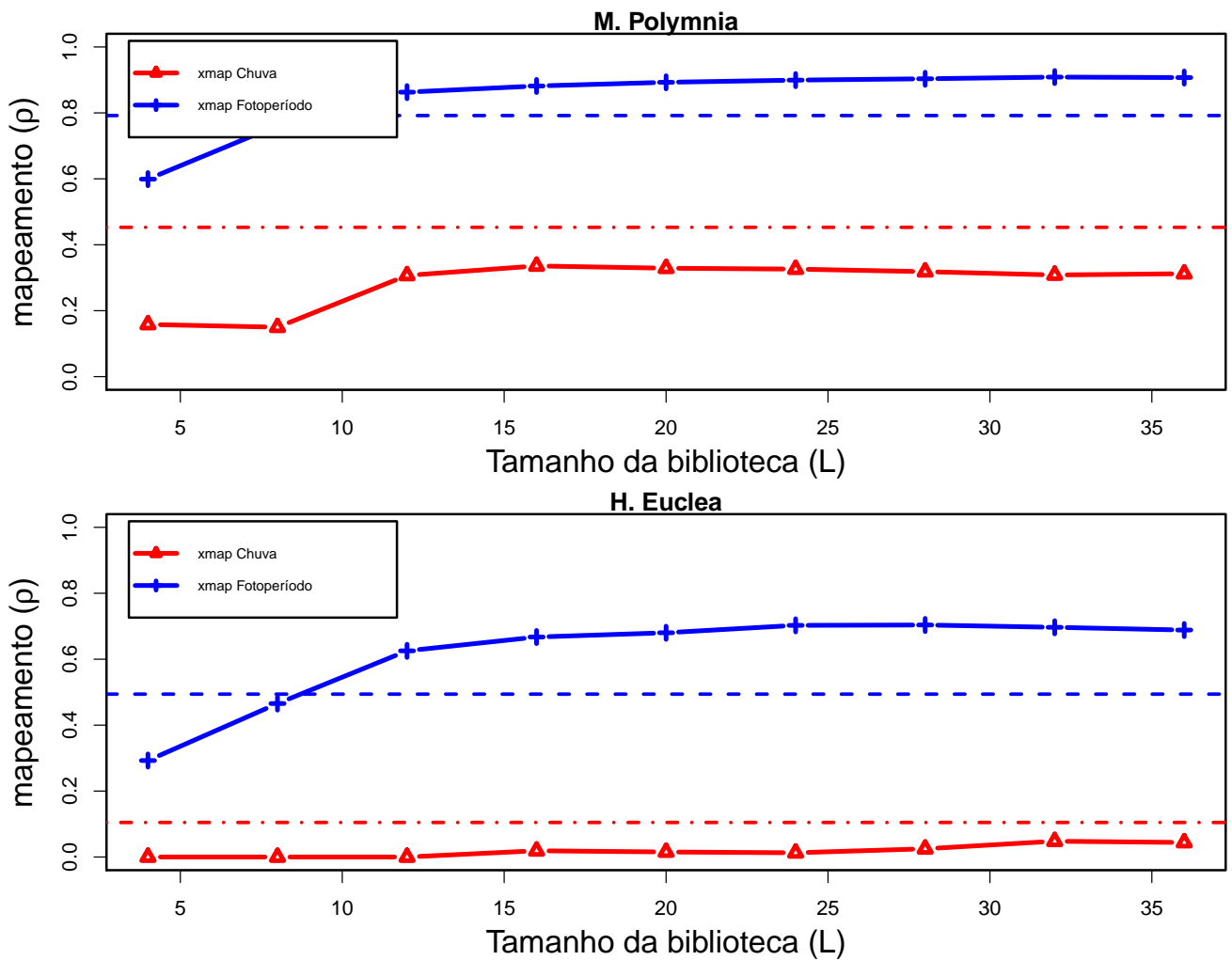


Figura 4.18: CCM entre das espécies *M. polymnia* e *H. euclea*, e os fatores climáticos. Pontos + com o fotoperíodo, ponto Δ com a chuva acumulada. A linha pontilhada (\cdots) é a correlação da espécie do título com a chuva e a linha tracejada ($---$) é a correlação entre a espécie e o fotoperíodo.

Nessas quatro primeiras espécies vemos que há padrões de convergência claros e mais fortes para o CCM da espécie com o fotoperíodo, que ele é um fator causal, quanto ao CCM entre a chuva total e as espécies temos variadas situações, as duas primeiras espécies apresentam padrão de convergência porém o valor de $\rho_{ccm} < \rho_{corr}$, indicando falta de causalidade. Para as duas últimas espécies, não temos um padrão de convergência do CCM e não temos valores acima da correlação simples, indicando falta de causalidade entre a espécie e a série da chuva total.

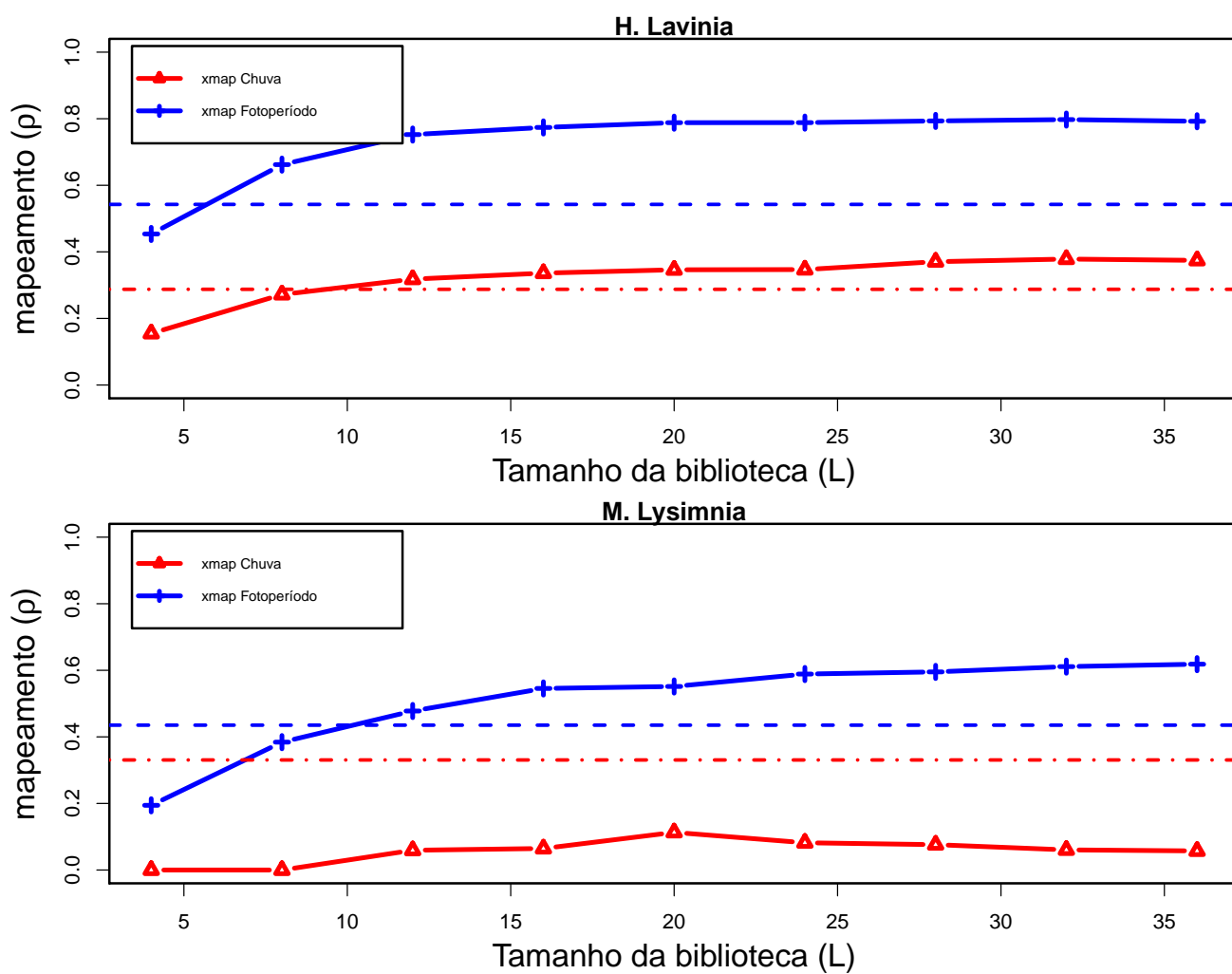


Figura 4.19: CCM entre das espécies *H.lavinia* e *M.lysimnia* e os fatores climáticos. Pontos + com o fotoperíodo, ponto Δ com a chuva acumulada. A linha pontilhada (\cdots) é a correlação da espécie do título com a chuva e a linha tracejada ($---$) é a correlação entre a espécie e o fotoperíodo.

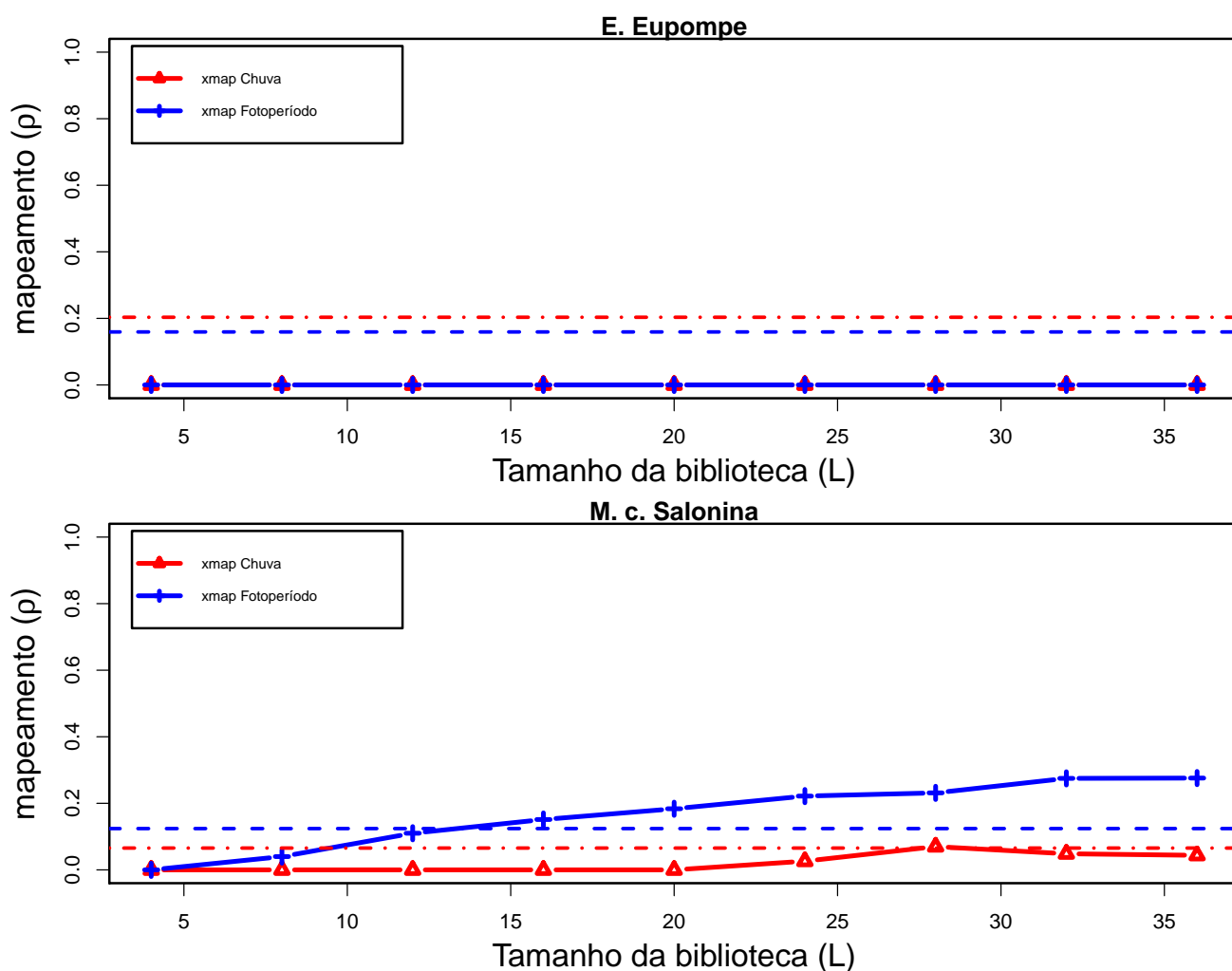


Figura 4.20: CCM entre das espécies *E.eupompe* e *M.c.salomina* e os fatores climáticos. Pontos + com o fotoperíodo, ponto Δ com a chuva acumulada. A linha pontilhada (\cdots) é a correlação da espécie do título com a chuva e a linha tracejada ($--$) é a correlação entre a espécie e o fotoperíodo.

Nessas quatro últimas espécies temos o seguinte: para as duas primeiras o padrão de convergência para o CCM com o fotoperíodo aparece, e não para o CCM com a chuva total. Nas duas últimas espécies, Fig (4.20) o CCM não indica a existência de relações causais. De certo modo isso era esperado, primeiro porque como se vê pelas séries estimadas em (4.12) essas espécies tem um ciclo menos regular e também tem as menores populações, o que pode indicar que elas estejam lá por outros fatores que não climáticos². Dentro dessa comunidade de borboletas elas não parecem interagir tão fortemente com as outras espécies, pois tem um tamanho populacional reduzido e padrão de ciclos menos regulares. Assim, não podemos afirmar quais são as causas da dinâmica dessas espécies, ficando uma questão a ser estudada mais a fundo caso haja mais dados.

Em resumo, a maioria das espécies da comunidade se guiam pelo fotoperíodo para a formação das assembleias, o que é corroborado pelo padrão mais forte do CCM de cada série de cada espécie com a série do fotoperíodo, assim como tínhamos observado a melhor forma para as borboletas anteciparem os períodos de seca e chuva, e poderem se precaverem dos danos. A evolução e a pressão seletiva fez com que as borboletas que conseguissem prever melhor e mais antecipadamente as épocas de secas sobreviviam. Como isso o que temos hoje é que essas espécies da tribo “*Ithomiini*” tem seu ciclo de vida sincronizado com o fotoperíodo que é o melhor preditor para se antecipar as épocas de secas. Ao terem confirmada a mudança do tempo através da variação do fotoperíodo as borboletas começam seu

²Ou ainda por se tratar de uma amostragem pequena também.

movimento de assembleia buscando uma condição melhor para sobreviverem. Se suspeitava que a chuva fosse a causa pois as borboletas tendem a ter esse comportamento em épocas de pouca chuva, mas não foi o que se viu, do ponto de vista morfológico as borboletas realmente se comportam desse modo pois precisam evitar os danos que a falta de água lhes causa, porém o melhor modo de se fazer isso é através da antecipação dessa época de poucas chuvas pelo fotoperíodo. Assim o fotoperíodo aparecer como causa da série de cada espécie e não a chuva é mais lógico, o que vai de encontro com os resultados obtidos no CCM.

4.2.3 CCM entre espécies

Nessa seção consideramos a influência das espécies umas nas outras. Ir mais a fundo na nossa hipótese de que possa haver junto do fator climático causal, causas ligadas as interações entre as espécies. O desafio aqui é sintetizar as informações obtidas do algoritmo do CCM aplicado a tantas relações. Como temos oito espécies precisamos procurar nas outras sete se há relação de causalidade entre elas, além disso o mapeamento de uma espécie na outra não é igual ao mapeamento no sentido inverso, uma espécie pode seguir outra mas o contrário pode não ser necessariamente verdade. Portanto obter 56 mapeamentos, das oito espécies cada uma nas outras sete. Faremos isso da seguinte forma: cada gráfico abaixo será de uma espécie fixa mapeando nas outras sete restantes, assim estamos buscando se há causalidade das outras sete nessa espécie fixada, portanto teremos para cada figura sete gráficos de CCM. Os resultados estão nas figuras (4.21, 4.22, 4.23, 4.24, 4.25, 4.26, 4.27, 4.28)

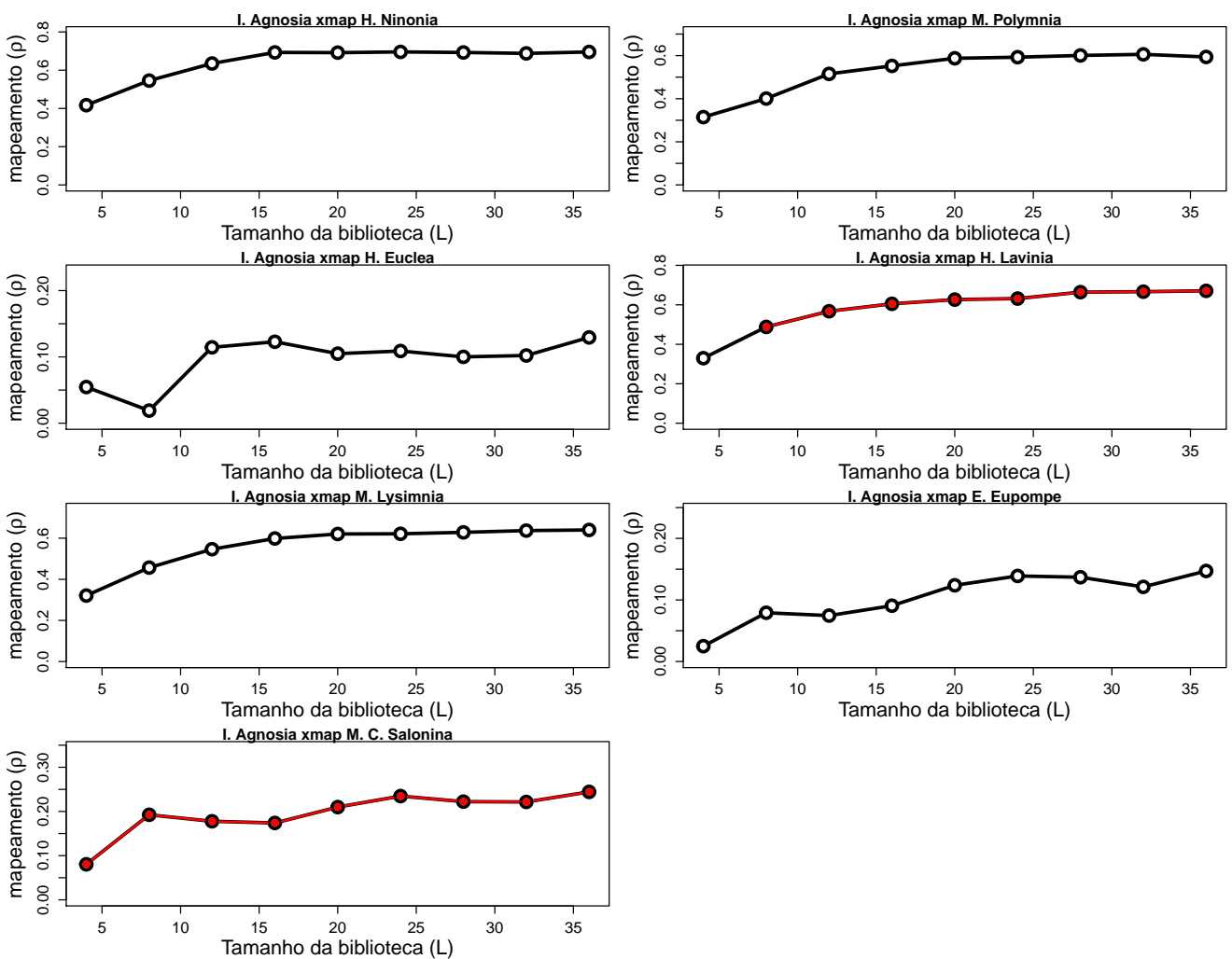


Figura 4.21: CCM da espécie *I. Agnosia* com as outras sete espécies.

No caso da Fig (4.21) vemos que dentre todos os CCMs pelo menos três padrões claros de convergência, porém só afirmamos que há causalidade se além disso o valor do $\rho_{ccm} > \rho_{corr}$ entre as espécies. Representamos isso nos gráficos com pontos cheios, se o valor do CCM é maior que o da correlação então há causalidade. Aqui somente a espécie *H.lavinia* completa os critérios, então podemos afirmar que a *I.agnosia* é causada por ela.

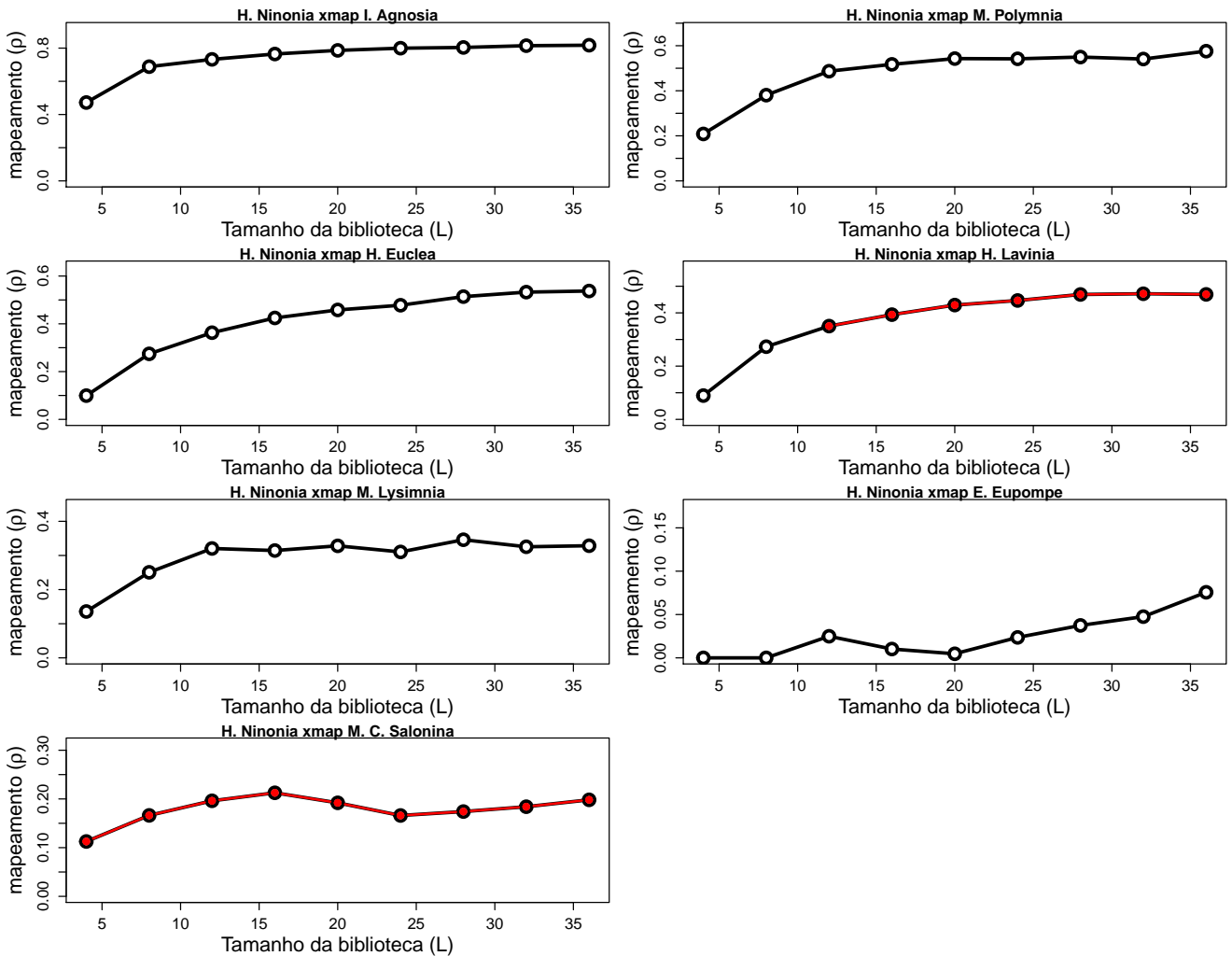


Figura 4.22: CCM da espécie *H.ninonia* com as outras sete espécies.

Na Fig (4.22) só temos o padrão de convergência e valores acima da correlação entre as espécies para um mapeamento, no caso com a espécie *H.lavinia*, portanto ela é um fator causal na dinâmica da *H.ninonia*.

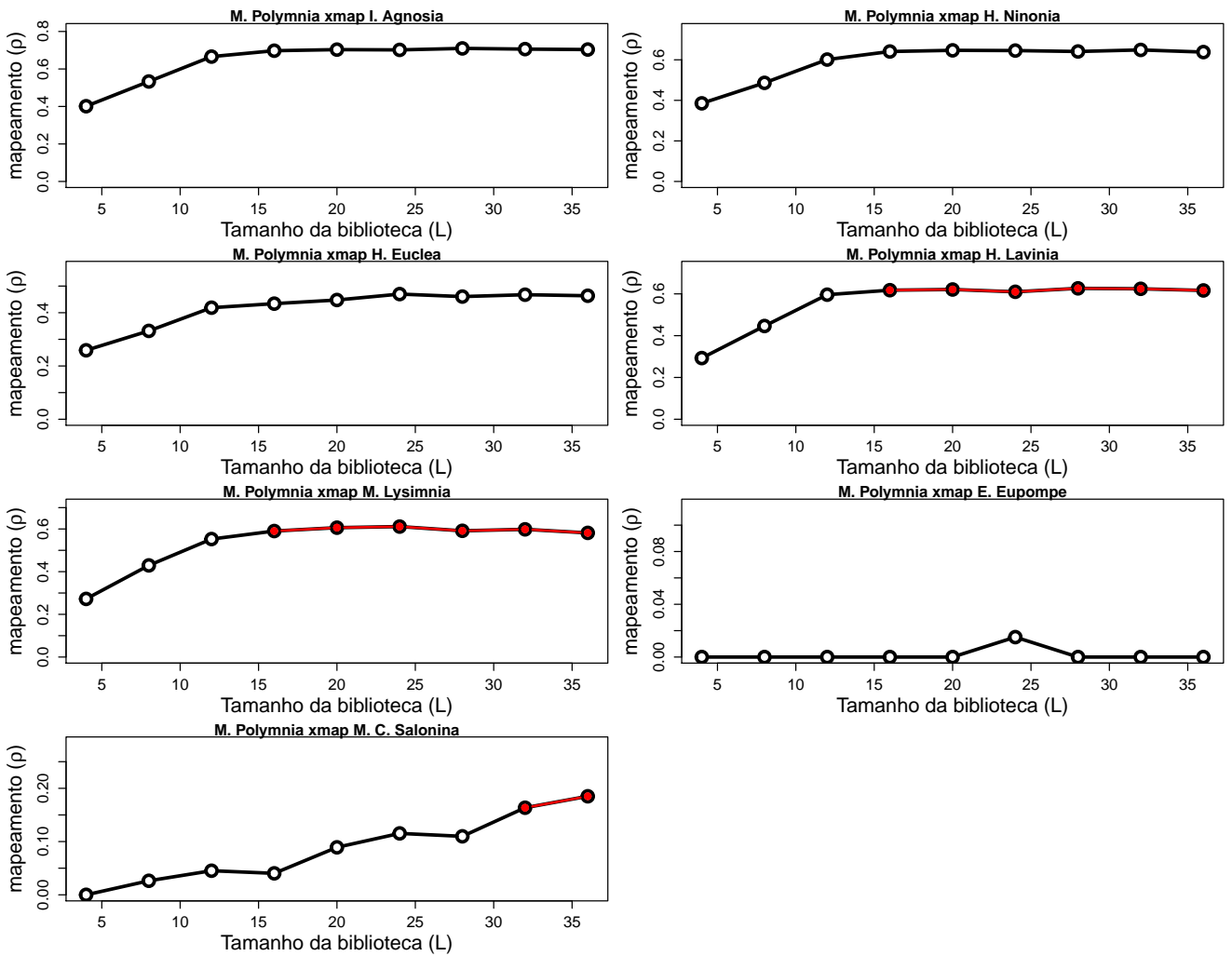


Figura 4.23: CCM da espécie *M. polymnia* com as outras sete espécies.

Já na Fig (4.23), há dois mapeamentos que obedecem os critérios de causalidade, novamente com a espécie *H. lavinia* e agora também com a espécie *M. lysimnia*.

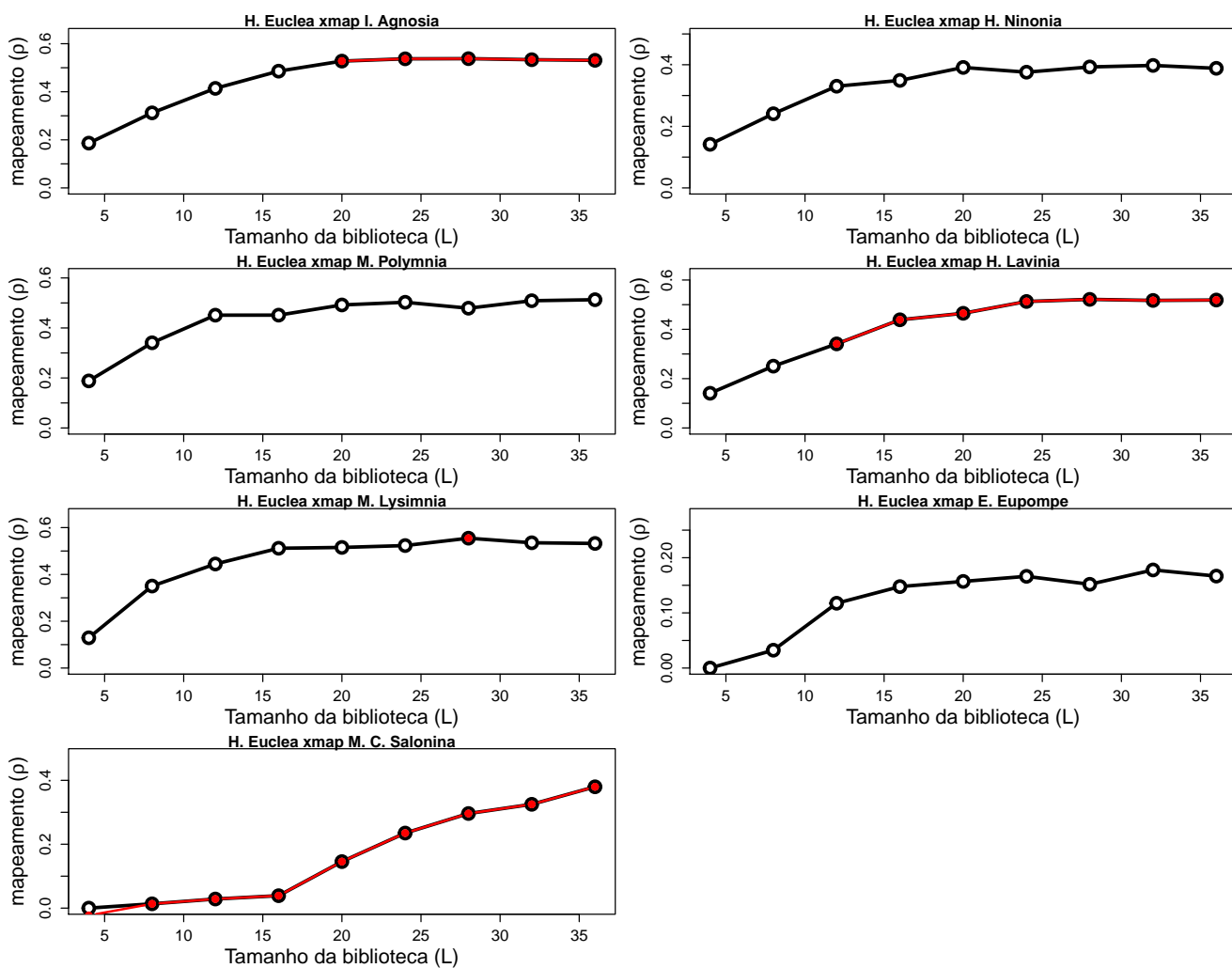


Figura 4.24: CCM da espécie *H.euclea* com as outras sete espécies.

Da mesma maneira, há dois mapeamentos com critérios de causalidade na Fig (4.24), entre a espécie *I.agnosia* e *H.lavinia*.

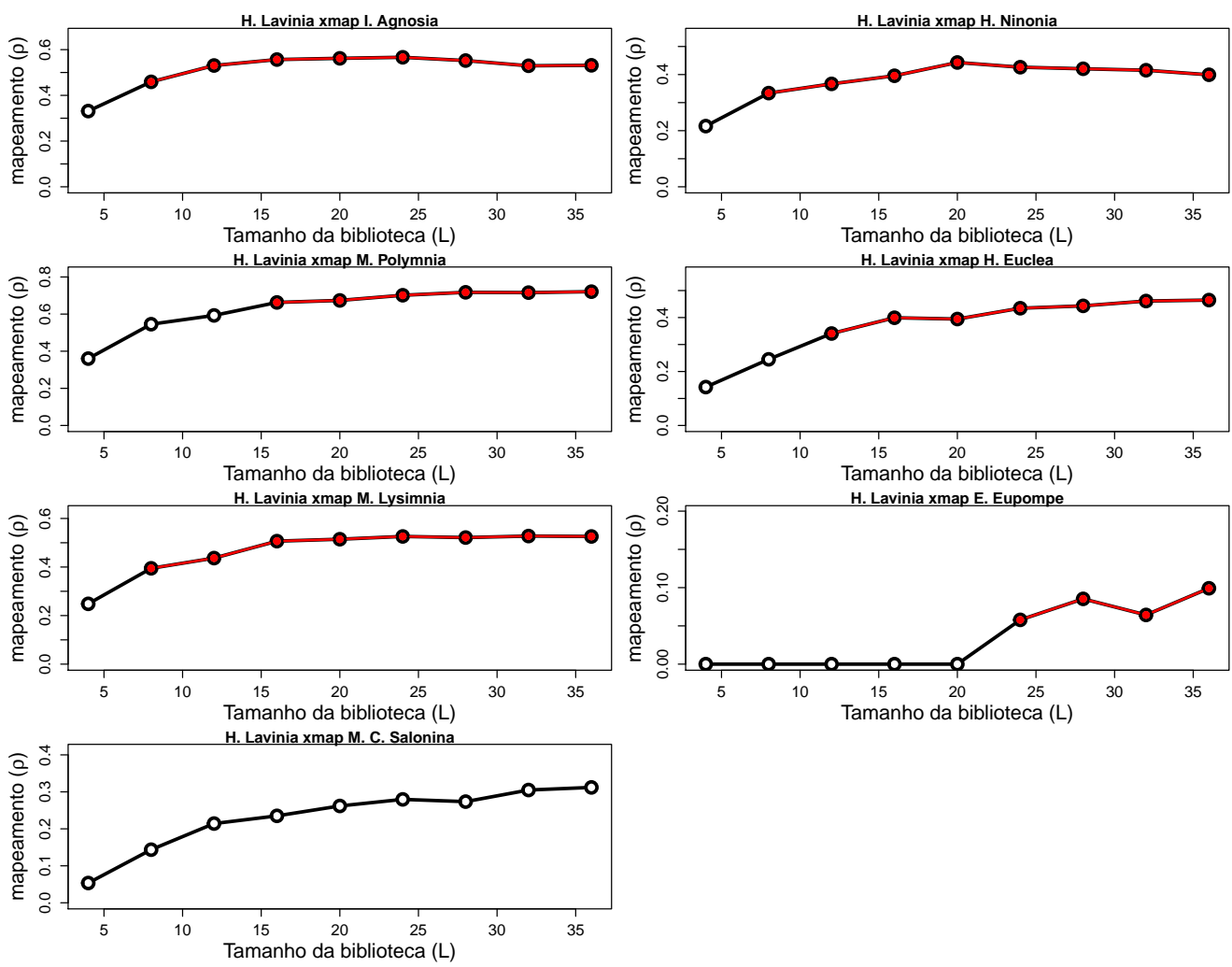


Figura 4.25: CCM da espécie *H.lavinia* com as outras sete espécies.

Para a quinta espécie, *H.lavinia*, temos algo interessante, os critérios de causalidade são obedecidos por cinco mapeamentos, para com as espécies *I.agnosia*, *H.ninonia*, *M.polymnia*, *H.euclea* e *M.lysimnia*. Os resultados estão na Fig (4.25).

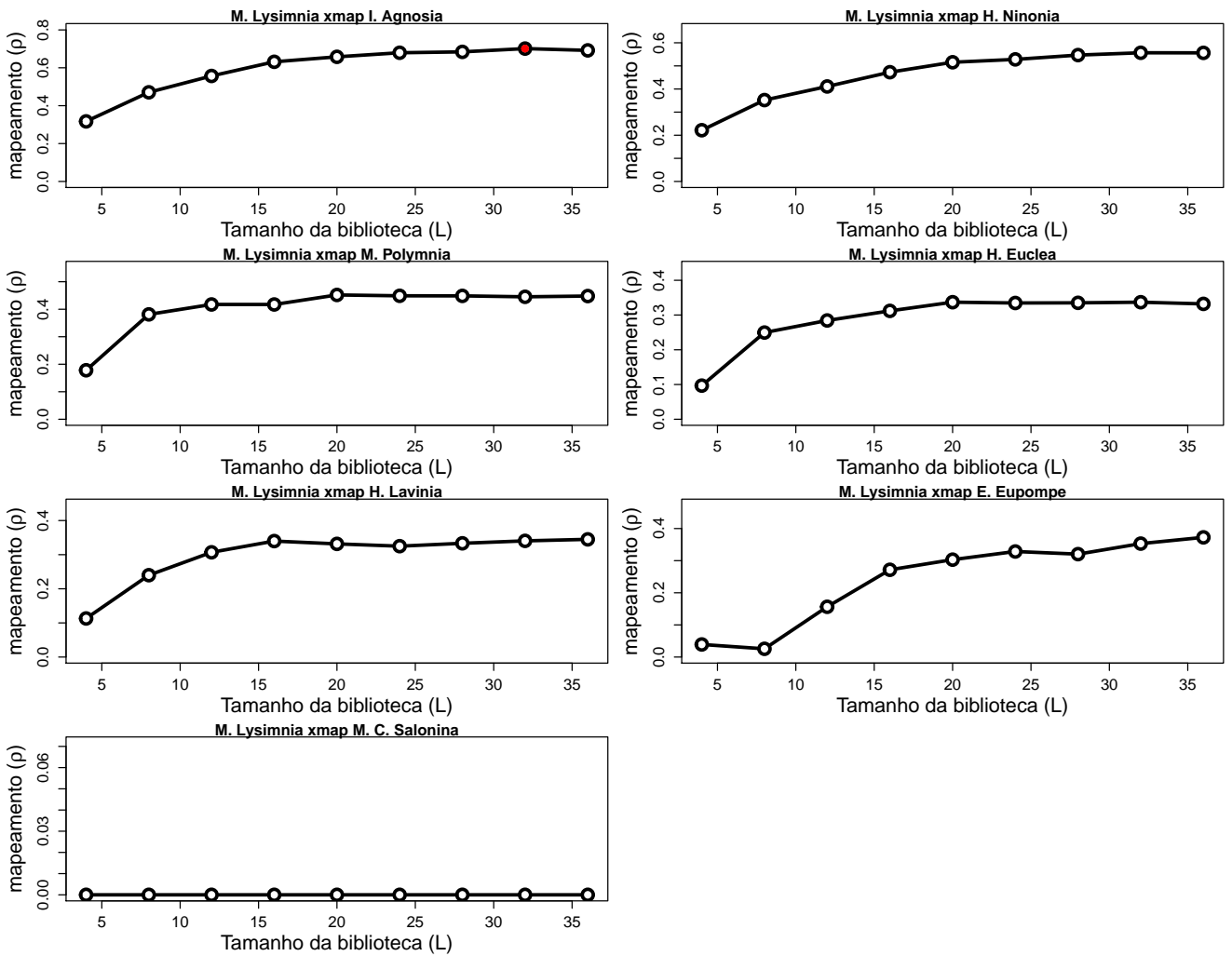


Figura 4.26: CCM da espécie *M.lysimnia* com as outras sete espécies.

Na Fig (4.26), somente a espécie *I.agnosia* atinge os critérios de causalidade, e ainda assim somente no fim da biblioteca que o valor de $\rho_{ccm} > \rho_{corr}$.

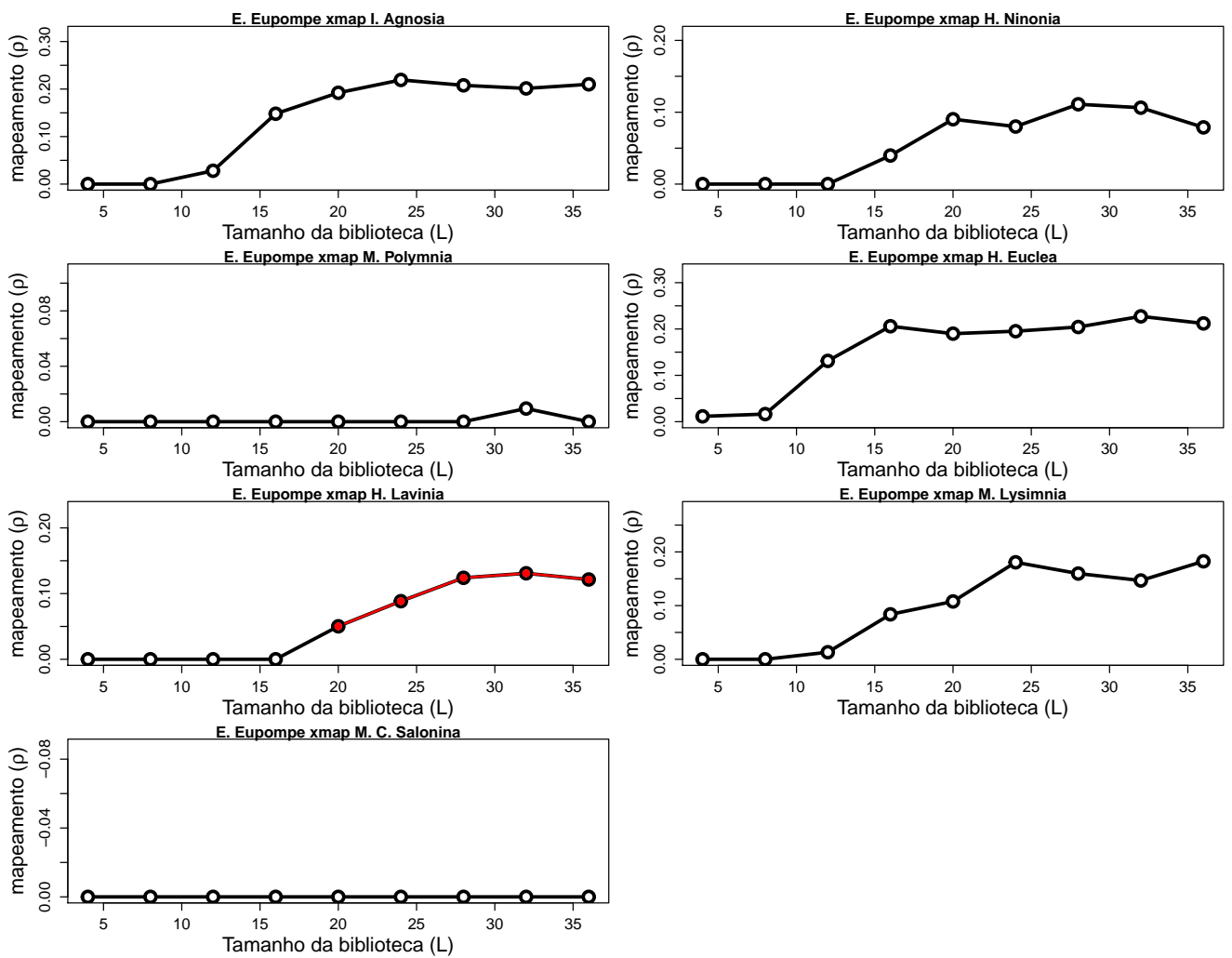


Figura 4.27: CCM da espécie *E.eupompe* com as outras sete espécies.

Já para a espécie *E.eupompe*, não há padrões de convergência do CCM, além de valores baixos para ρ_{ccm} .

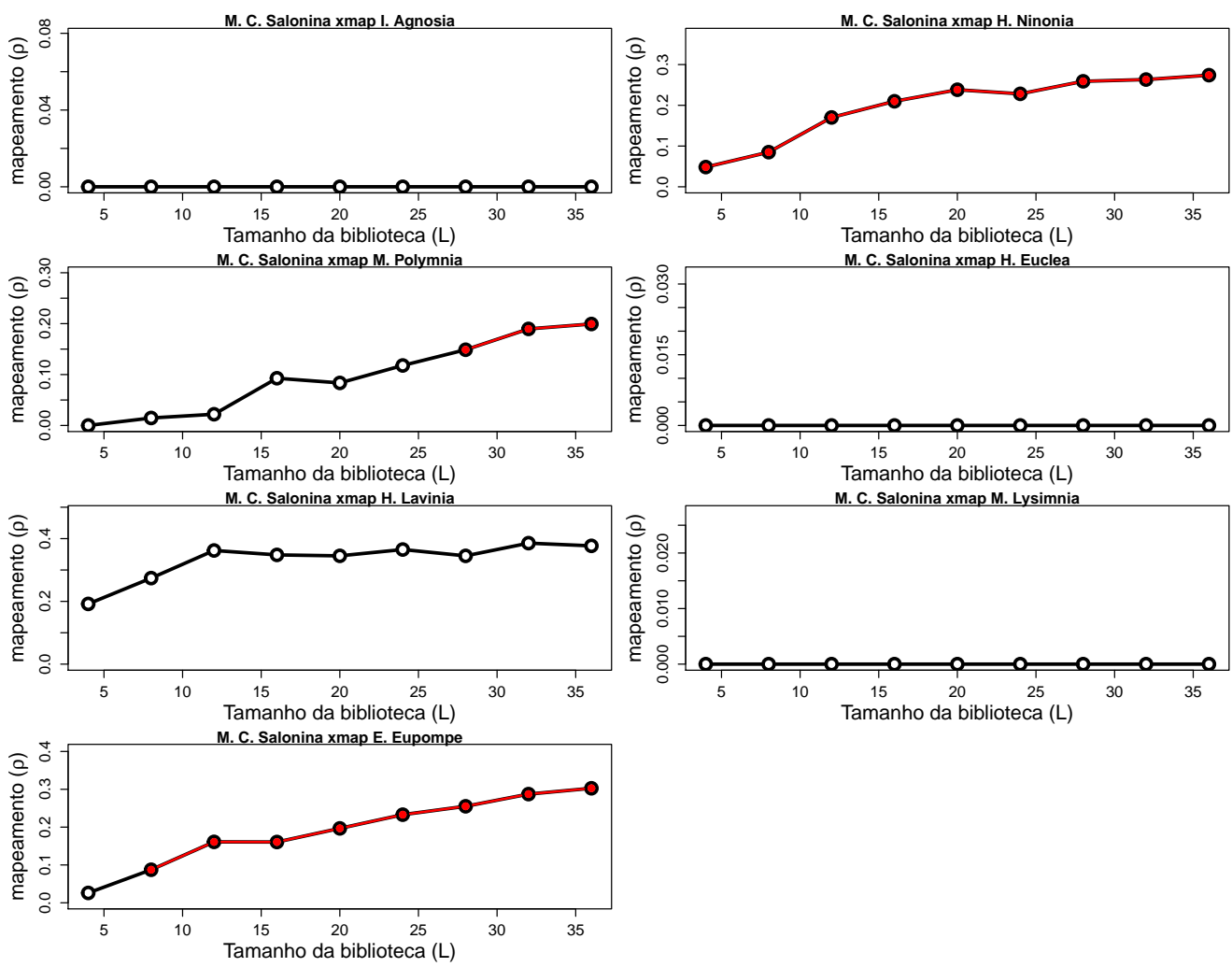


Figura 4.28: CCM da espécie *M.c.salonina* com as outras sete espécies.

Igualmente a espécie anterior *E.eupompe*, os CCM da espécie *M.c.salonina* não apresentam padrão de convergência, indicando ausência de causalidade na dinâmica com as outras. Como esperado as duas últimas espécies não apresentam nenhum padrão de convergência no CCM com as outras todas espécies, isso demonstra que apesar de fatores morfológicos, elas não tem uma dinâmica ligada nem ao fator climático nem aos fatores de interação com as outras espécies.

Em resumo, as conclusões que chegamos para o CCM entre as espécies, são de que, nas espécies que tem uma dinâmica parecida entre si, no caso as seis espécies mais abundantes, há um bom indício de que suas dinâmicas são acopladas. A espécie *H.lavinia* parece ser um fator comum de acoplamento das dinâmicas entre as séries temporais das outras espécies. O fato da dinâmica da espécie *H.lavinia* também sofrer influência das outras espécies pode ser um efeito de sincronia. Em sistemas em que a sincronia é muito forte, ou seja, a série do efeito se torna escrava da série da causa, é possível que o CCM aponte para causalidade no sentido inverso, da causa para o efeito [36]. A própria *H.lavinia* pode de algum modo estar sofrendo influência de outra espécie e se torna “escrava” dela, no caso podemos apontar que talvez isso seria devido a espécie *M.lysimnia*, única espécie que tem influência sobre a *H.lavinia*, porém não sofre influência dela. Isso sugere que a *M.lysimnia* seja uma referência, dentro da comunidade de borboletas para a formação de assembleias. A rede de interações abaixo traçada a partir de um matriz de adjacências resume as relações encontradas, com o valor 1 para a existência de uma relação causal e 0 para a ausência, o que na rede se dá como uma seta para a interação. Os resultados se encontram na Fig. (4.29).

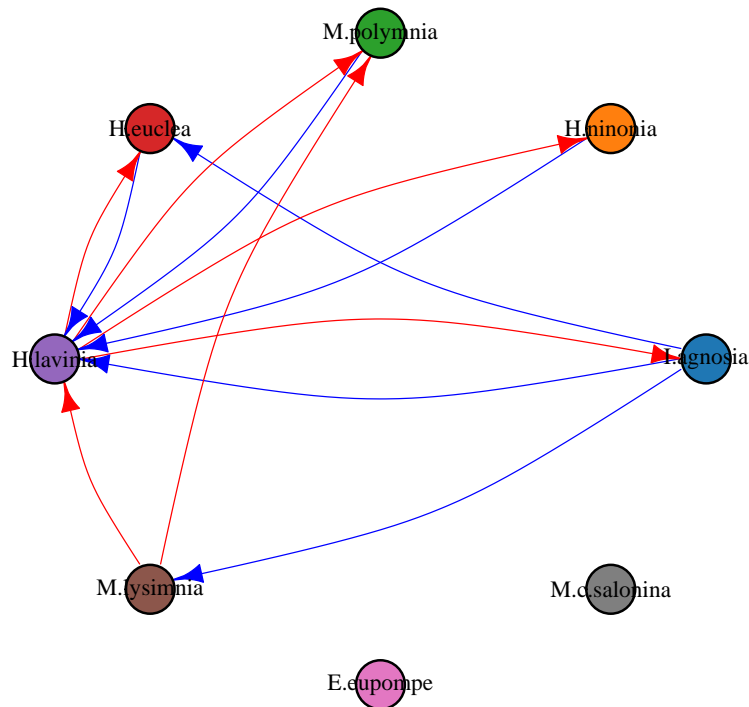


Figura 4.29: Rede com as relações causais encontradas para o CCM entre as espécies.

As espécies possuem mais de um fator para seu agrupamento. O fotoperíodo juntamente com a dinâmica da *M.lysimnia* disparam o sinal para que a *H.lavinia* também vá para o local de formação do bolsão. Com esse último sinal, as outras todas espécies se agrupam no bolsão e esperam que as condições sejam novamente favoráveis a elas. O fotoperíodo é um fator claro de causalidade da dinâmica das espécies, porém confiar somente nele para a formação de bolsões pode ser perigoso para as borboletas. Como essas espécies sofrem predação de pássaros, a primeira a chegar no bolsão seria mais predada. Elas são impalatáveis e normalmente um pássaro que come borboletas evita as espécies dessa tribo, isso porque ele aprende que elas tem gosto ruim, esse aprendizado gera um custo na comunidade. Por serem borboletas miméticas, há algumas espécies se aproveitando da semelhança entre elas para minimizarem esse custo sobre a sua própria espécie. Isso explicaria porque as quatro espécies mais abundantes, tem sua dinâmica ligada a espécie *H.lavinia* e indiretamente ligada à *M.lysimnia*, além do fotoperíodo. O agrupamento dessas duas espécies nos bolsões mais o fotoperíodo é o indicador de que o tempo vai ficar desfavorável. E mesmo que haja custo de predação sobre a espécie, esse custo foi diminuído, pois duas espécies que estão no local do bolsão e estão dividindo o custo de aprendizado dos pássaros entre elas. O custo de predação foi principalmente dividido entre *M.lysimnia* e *H.lavinia*, ele passa a não ser relevante para a espécie que chegar depois delas.

Capítulo 5

Conclusão e perspectivas futuras

A partir do exposto, podemos dizer que a técnica de mapeamento cruzado convergente (CCM) entre atratores reconstruídos de séries temporais é uma ferramenta útil para a exploração e entendimento de sistemas dinâmicos a partir de suas séries temporais. O método permite abordar questões de causalidade entre as variáveis do sistema, o que é relevante na compreensão de processos naturais. Mostramos que a correlação muitas vezes falha em revelar a verdadeira dinâmica de sistemas não-lineares. Um conjunto de equações que simula a dinâmica de competição entre predadores já é uma demonstração da necessidade de uma alternativa as análises baseadas somente nas correlações. As máximas sobre correlação e causalidade são evidenciadas com o CCM ao compará-los, “correlação não implica causalidade”, pôde ser verificada no exemplo do efeito Moran, onde as séries apresentavam correlação alta devido a um forçante comum externo. A outra máxima sobre correlação e causalidade, “falta de correlação não implica falta de causalidade”, foi testada no caso das séries temporais de predadores que competem entre e si. Neste caso, mesmo não havendo correlação entre as séries, o CCM foi capaz de mostrar a relação de causalidade mútua, como esperado pelas equação da dinâmica. A aplicação do CCM a esses exemplos, conhecidos e bem entendidos na literatura, nos permitiu enxergar de forma mais rápida e clara as sutilezas dessas relações de causa e efeito em sistemas dinâmicos.

Quando partimos para a aplicação do CCM a séries temporais reais, que no nosso caso foram de uma comunidade de espécies de borboletas, foi possível obter relações causais entre as espécies e fatores climáticos. Pudemos distinguir entre uma causa aparente e uma real, e assim confirmar que a dinâmica delas está realmente ligada a um, fotoperíodo, e não outro fator, chuva total acumulada. A comunidade de borboletas estudada, a tribo *Ithomiini*, tem um ciclo de formação de pequenos agrupamentos em épocas desfavoráveis a sua sobrevivência e reprodução. A seca ou a chuva são fatores de mortalidade elevada nessas espécies, e para sobreviverem precisam mudar seu comportamento. Para isso elas param suas atividades normais, alimentação e reprodução, e se aglomeram para esperar a volta de condições climáticas favoráveis. Em nosso estudo buscamos entender como elas eram capazes de antecipar essas épocas de secas ou chuvas. Para tal tinha-se a hipótese de que seus ciclos de vida eram ligados a fatores climáticos que davam o sinal de que tal mudança estava por vir, mas a dúvida persistia em qual era o fator determinante para isso. Testamos através do algoritmo do CCM, se as séries de borboletas eram mais capazes de mapear a série do fotoperíodo ou da chuva acumulada, ambos fatores climáticos suspeitos para a regulação do ciclo de vida das borboletas. O resultado da análise mostrou que o fotoperíodo é o fator climático determinante na dinâmica de cada espécie da comunidade. Isso pode ser explicado pelo fato do fotoperíodo ter uma variação mais regular e precisa, qualquer mudança nesse sinal é um indicativo mais certo da mudança climática e portanto um sinal para o início do comportamento de aglomeração. Esse resultado também abre o questionamento de que possa haver outras espécies que tenham ciclos aparentemente regulados pela falta de umidade, e que na verdade se antecipam a esses fenômenos através da sincronia com o fotoperíodo, que marca bem os ciclos climáticos durante o ano.

Pudemos ainda testar se a dinâmica da comunidade de borboletas possuíam interações entre elas. Essa hipótese foi levantada pois são borboletas miméticas, ou seja, possuem uma morfologia muito semelhante entre si. Neste caso, o mimetismo é uma relação conveniente para o “imitador” e neutra para quem é “imitado”. Para testarmos esta hipótese, o aplicamos o CCM entre as espécies, calculando a causalidade entre elas. Se o mapeamento ocorre nas duas direções há bidirecionalidade, se ocorrer só numa direção então uma espécie serve de guia para a outra.

Os resultados que obtivemos foram, de que a espécie *H.lavinia* parece ser um fator causal comum às quatro espécies mais abundantes da comunidade, *I.agnosia*, *H.ninonia*, *M.polymnia*, *H.euclea*. Isso mostra que essas espécies mais abundantes se guiam pela *H.lavinia* para formarem as assembleias e evitarem a pressão seletiva dos predadores sobre si. Como discutimos, elas são miméticas e a espécie que primeiro seguir para formação do bolsão de borboletas sofrerá maiores perdas. O bolsão é um comportamento expositivo aos predadores. O fato de que dentre as espécies da comunidade a *H.lavinia* ser uma das menos abundantes, indica que, realmente, ela sofre maiores efeitos dessa predação. Outro aspecto que corrobora esta hipótese, é que dentre todas as espécies da comunidade, das seis mais abundantes e que tem um ciclo próximo, somente a espécie *M.lysimnia* parece ser o fator causal da *H.lavinia*, então o que ela sofre das outras espécies, de ser a primeira a chegar ao bolsão e portanto ter diminuição no seu tamanho populacional, parece ser também reproduzido entre a relação dela com a *M.lysimnia*. Não à toa essa última espécie é a de menor tamanho populacional dentre as seis espécies que tem um ciclo muito próximo.

O fotoperíodo é um fator causal e o primeiro sinal para a formação do bolsão mas, somente ele não é suficiente para o início da formação do bolsão por todas as espécies. Somente a espécie *M.lysimnia* parece seguir seu ciclo unicamente pelo fotoperíodo. Por ser a primeira a chegar no bolsão então tem um tamanho populacional menor que as outras cinco. Em seguida a espécie *H.lavinia* segue o sinal do fotoperíodo e da *M.lysimnia* e parte para a formação do bolsão juntamente dela. Essa é a confirmação para as outras espécies de que se juntem na aglomeração. Isso seria claro caso houvessem somente as relações de causa entre as quatro espécies mais abundantes e a *H.lavinia*. O fato do CCM mostrar que ela também tem sua dinâmica influenciada por essas quatro espécies mais abundantes, pode ser entendido como um efeito de sincronia forte, entre a série da *H.lavinia* e as outras. Esse resultado abre a necessidade de mais investigações, dentre elas outros testes com algoritmos de causalidade, ou um refinamento do método. Na aplicação do CCM às séries, não testamos a hipótese desta relação ter sido obtida devido à sazonalidade. Isto pode ser testado pelo uso de séries substitutas (*surrogates*). A técnica do *surrogate* consiste basicamente em decompor a série nas componentes sazonal e de resíduos. Uma série *surrogate* é obtida ao embaralharmos os resíduos e somá-los à sazonalidade. Ao repetir este procedimento algumas centenas de vezes e calcularmos o ρ para cada uma delas, obtemos a distribuição de probabilidades de ρ sob a hipótese de sazonalidade. Em seguida comparamos o valor de ρ da série original com a distribuição dos *surrogates*. Se o valor obtido estiver nos valores acima dos 95º percentil, consideramos este ρ como significativo, ou seja, rejeitamos a hipótese nula de que a causalidade é devido à sazonalidade. Essa técnica é uma motivação para possíveis investigações futuras e uma perspectiva imediata de continuidade do trabalho com as séries temporais de borboletas, bem como um ponto a ser considerado em outras aplicações do CCM.

O presente trabalho traz uma nova ferramenta simples para a investigação de relações causais, a partir de dados reais. Sabemos porém que isso não é um fechamento nas questões sobre causalidade e metodologias para seu estabelecimento, temos claro que há ainda necessidade de refinamento do método em certos pontos, como no caso de séries com forte sazonalidade e em sistemas de forte sincronia. Nos últimos anos tem-se notado uma maior exploração das possibilidades desses métodos e o CCM é um dos que estão na vanguarda dessas investigações. Formulações derivadas do CCM tem aparecido e dentre elas destacamos algumas, como o *extended cross-convergent mapping* [30] que varia o horizonte de predição para distinguir relações causais com atraso. Temos também o *cross-embedding* [39] que sugere uma forma de diminuir a dimensão de *embedding*, e mais recentemente a noção de causalidade topológica [40]. Assim podemos futuramente explorar outras situações com relações mais claras de

causa mas que exijam maiores conjuntos de dados. Há trabalhos que se utilizam do CCM para esclarecer, por exemplo, os fatores do clima global para os episódios epidêmicos de doenças sazonais, como a gripe [41]. Esse sistema tem relações de causa e efeito mais claras, porém, exige um maior poder de processamento, pois o conjunto de dados é muito maior [42]. É crescente as aplicações do CCM como também a necessidade de um melhor estabelecimento daquilo que se tem por causalidade e este trabalho tem a construir mais um pedaço nessas investigações.

Referências Bibliográficas

- [1] Granger, Clive WJ. “Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods.” *Econometrica: Journal of the Econometric Society* (1969): 424-438.
- [2] Sugihara, George, et al. “Detecting causality in complex ecosystems.” *science* 338.6106 (2012): 496-500.
- [3] Takens F. (1981) “Detecting strange attractors in turbulence.” In: Rand D., Young LS. (eds) “Dynamical Systems and Turbulence”, Warwick 1980. *Lecture Notes in Mathematics*, vol 898. Springer, Berlin, Heidelberg: 366-381
- [4] Deyle, Ethan R and Sugihara, George, “Generalized theorems for nonlinear state space reconstruction”, *PLoS One*, 6, 3, 2011, e18295, Public Library of Science.
- [5] Chapra, Steven C., and Raymond P. Canale. “Numerical methods for engineers.” Vol. 2. New York: McGraw-Hill, 1988.
- [6] Davis, Philip J., and Philip Rabinowitz. “Methods of numerical integration.” Courier Corporation, 2007.
- [7] James, Merlin L., Gerald M. Smith, and J. C. Wolford. “Applied numerical methods for digital computation.” Vol. 2. New York: Harper & Row, 1985.
- [8] Iannelli, Mimmo, and Andrea Pugliese. “An Introduction to Mathematical Population Dynamics: Along the trail of Volterra and Lotka.” Vol. 79. Springer, 2015.
- [9] Turchin, Peter. “Complex population dynamics: a theoretical/empirical synthesis.” Vol. 35. Princeton University Press, 2003.
- [10] Murray, James D. “Mathematical Biology 1: An Introduction” 3rd edition. *Series of Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer. 2007.
- [11] Lorenz, Edward N. “Deterministic nonperiodic flow.” *Journal of the atmospheric sciences* 20.2 (1963): 130-141.
- [12] Lorenz, Edward N. “The essence of chaos.” University of Washington Press, 1995.
- [13] Ruelle, David, and Floris Takens. “On the nature of turbulence.” *Communications in mathematical physics* 20.3 (1971): 167-192.
- [14] Grassberger, Peter, and Itamar Procaccia. “Measuring the strangeness of strange attractors.” In: *The Theory of Chaotic Attractors*. Springer New York, 2004. pg 170-189.
- [15] Turchin, Peter. “Complex population dynamics: a theoretical/empirical synthesis.” Vol. 35. Princeton University Press, 2003. chapter 15, page 390-392, section “What about Chaos?”.

- [16] May, Robert M. “Biological populations with nonoverlapping generations: stable points, stable cycles, and chaos.” *Science* 186.4164 (1974): 645-647.
- [17] May, Robert M. “Simple mathematical models with very complicated dynamics.” *Nature* 261.5560 (1976): 459-467.
- [18] Schaffer, William M. “Order and chaos in ecological systems.” *Ecology* 66.1 (1985): 93-106.
- [19] Sauer, Tim, James A. Yorke, and Martin Casdagli. “Embedology.” *Journal of statistical Physics* 65.3 (1991): 579-616.
- [20] Pecora, Louis M., et al. “A unified approach to attractor reconstruction.” *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 17.1 (2007): 013110.
- [21] Small, Michael. “Applied nonlinear time series analysis: applications in physics, physiology and finance.” Vol. 52. World Scientific, 2005.
- [22] Ruelle, David. “Turbulence, strange attractors and chaos.” Vol. 16. World scientific, 1995.
- [23] Kantz, Holger, and Thomas Schreiber. “Nonlinear time series analysis.” Vol. 7. Cambridge university press, 2004.
- [24] Casdagli, Martin. “Nonlinear prediction of chaotic time series.” *Physica D: Nonlinear Phenomena* 35.3 (1989): 335-356.
- [25] Sugihara, George, and Robert M. May. “Nonlinear forecasting as a way of distinguishing chaos from measurement error in time series.” *Nature* 344.6268 (1990): 734.
- [26] Sugihara, George. “Nonlinear forecasting for the classification of natural time series.” *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* 348.1688 (1994): 477-495.
- [27] Liu, Hui, et al. “Nonlinear dynamic features and co-predictability of the Georges Bank fish community.” *Marine Ecology Progress Series* 464 (2012): 195-207.
- [28] <http://opetchey.github.io/RREEBES>
- [29] <https://mathbio.github.io/edmTutorials/>
- [30] Ye, Hao, et al. “Distinguishing time-delayed causal interactions using convergent cross mapping.” *Scientific reports* 5 (2015): 14750.
- [31] Packard, Norman H., et al. “Geometry from a time series.” *Physical review letters* 45.9 (1980): 712.
- [32] Josic, Kresimir. “Synchronization of chaotic systems and invariant manifolds.” *Nonlinearity* 13.4 (2000): 1321.
- [33] Schiff, Steven J., et al. “Detecting dynamical interdependence and generalized synchrony through mutual prediction in a neural ensemble.” *Physical Review E* 54.6 (1996): 6708.
- [34] Hsieh, Chih-hao, Christian Anderson, and George Sugihara. “Extending nonlinear analysis to short ecological time series.” *The American Naturalist* 171.1 (2007): 71-80.
- [35] Casdagli, Martin. “Nonlinear prediction of chaotic time series.” *Physica D: Nonlinear Phenomena* 35.3 (1989): 335-356.

- [36] BozorgMagham, Amir E., et al. "Causality analysis: Identifying the leading element in a coupled dynamical system." *PloS one* 10.6 (2015): e0131226.
- [37] Chang, Chun-Wei, Masayuki Ushio, and Chih-hao Hsieh. "Empirical dynamic modeling for beginners." *Ecological Research* 32.6 (2017): 785-796.
- [38] Moran, P. A. P. "The statistical analysis of the Canadian Lynx cycle." *Australian Journal of Zoology* 1.3 (1953): 291-298.
- [39] Tajima, Satohiro, et al. "Untangling brain-wide dynamics in consciousness by cross-embedding." *PLoS computational biology* 11.11 (2015): e1004537.
- [40] Harnack, Daniel, et al. "Topological Causality in Dynamical Systems." *Physical review letters* 119.9 (2017): 098301.
- [41] Deyle, Ethan R., et al. "Global environmental drivers of influenza." *Proceedings of the National Academy of Sciences* 113.46 (2016): 13081-13086.
- [42] Deyle, Ethan R., et al. "Tracking and forecasting ecosystem interactions in real time." *Proc. R. Soc. B*. Vol. 283. No. 1822. The Royal Society, 2016.