



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Rafael Freitas Rocha

*O Problema de Corte de Estoque numa Indústria
Moveleira*

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
Rua Cristóvão Colombo, 2265, 15054-000
São José do Rio Preto - SP - Brasil
Telefone: (17) 3221-2444 - Fax: (17) 3221-2445

Rafael Freitas Rocha

*O Problema de Corte de Estoque numa
Indústria Moveleira*

Orientador:
Prof. Dr. Silvio Alexandre de Araujo

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
INSTITUTO DE BIOCÊNCIAS, LETRAS E CIÊNCIAS EXATAS
CAMPUS DE SÃO JOSÉ DO RIO PRETO

São José do Rio Preto

21 de Agosto de 2015

Rafael Freitas Rocha

O Problema de Corte de Estoque numa Indústria Moveleira

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Matemática Aplicada, junto ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Silvio Alexandre de Araujo
Professor Doutor
UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Prof^ª. Dra. Maria do Socorro Nogueira Rangel
Professora Doutora
UNESP - São José do Rio Preto

Prof^ª. Dra. Adriana Cristina Cherri
Professora Doutora
UNESP - Bauru

São José do Rio Preto, 21 de Agosto de 2015.

Aos meus amados pais, Rita e Aduino.

À minha querida irmã, Amanda.

À minha namorada Bárbara e amigos.

Dedico.

Agradecimentos

Os caminhos que levam aos nossos objetivos são sempre muito estreitos e cheios de desvios. No entanto, existem pessoas que estão sempre presentes para nos orientar, acalmar, apoiar e guiar para os caminhos mais seguros e corretos. A força que me mantém em pé nas batalhas não vem apenas de apoio físico, mas também da fé interior que sempre foi maior que tudo.

Agradeço primeiramente a Deus, que me concebeu o dom da vida e sempre guiou os meus caminhos para que pudesse atingir meus objetivos, sempre me dando forças em todos os momentos.

Ao meu professor Silvio Araujo, que prontamente atendeu ao meu pedido de orientação em 2013 acreditando no meu trabalho. Obrigado pela dedicação e conselhos durante a elaboração deste mestrado e espero que possamos repetir esta parceria em outros projetos.

Aos meus pais, Adauto e Rita, que me incentivam fortemente durante todos os meus desafios. Lembro muito bem de todos os momentos em família que não pude estar presente, mas sei que em todos eles vocês entendiam o motivo da minha ausência e tentavam de todas as formas não deixar transparecer a saudade enorme que sentiam. Pai, agradeço por todos os momentos em que você me tirou da rotina só para me ajudar e ficar perto de mim. Você é um exemplo de homem e tenho muito orgulho da família que construiu. Mãe, obrigado por todos os ensinamentos de honestidade, de sabedoria e pelas palavras que sempre me traziam paz no momentos turbulentos. Você foi a escolhida por Deus para demonstrar força para todos nós perante uma grande dificuldade. Sabemos o quão difícil para você está sendo este tempo, mas sei que em um futuro muito breve, sobrarão só as lembranças de quanto ficamos mais unidos de uns tempos para cá. Ter você saudável e sorrindo é uma sensação inexplicável. Todo este trabalho e dedicação é por você.

À minha irmã, Amanda, que desde sempre me acompanhou nesta jornada acadêmica e sempre me ajudou a ter paciência nos momentos onde já não era possível me acalmar sozinho. Períodos de provas eram sempre tensos e sei que meu humor não era o mesmo de sempre. Obrigado por segurar a barra e me ajudar sempre.

Ao meu amigo/irmão, Tiago Tiburcio, por todas as experiências e dificuldades que

enfrentamos juntos. Lembro bem das últimas provas que estudamos, as horas e horas na biblioteca e jamais me esquecerei de tudo o que fez por mim.

À minha namorada Bárbara, que me conheceu quando já fazia parte do meio acadêmico e que rapidamente aceitou um namorado que não podia estar presente em todos os momentos e que muitas vezes não dava a devida atenção ao amor. Hoje, mais maduro e adulto, agradeço por tudo o que trouxe de paz para mim.

Aos amigos da salinha, Diego, Michelli, Yen, Mariana, Pena e Marcelo, agradeço por vários momentos de risada e descontração. Um agradecimento especial à minha amiga Gislaïne, que por muitas e muitas vezes me salvou com comandos e arquivos do *CPLEX* entre outros, além de conselhos e conversas maduras. Desejo muito sucesso na carreira de todos vocês.

Um agradecimento especial aos professores Adalberto Spezamiglio e Maria Gorete Carreira Andrade, por acreditarem no meu trabalho e ter me dado a primeira oportunidade dentro da universidade. Os ensinamentos que tive com vocês levarei por toda a minha vida. Obrigado.

A todos os colaboradores e diretores da S. móveis, na cidade de Jaci-SP, e em especial ao Sandro e ao Sr. Jair, por toda a paciência que tiveram ao longo das minhas visitas na fábrica. Obrigado pelo profissionalismo e pelas informações valiosas dedicadas à elaboração deste trabalho. Aproveito para parabenizar a atuação excelente destes profissionais em suas devidas funções no dia a dia da fábrica.

A todos os professores e profissionais do IBILCE que tive oportunidade de trabalhar, obrigado por todos os ensinamentos e contribuições que fizeram para meu crescimento matemático e pessoal. Sem vocês, a jornada teria sido impossível.

Obrigado a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste projeto. Sintam-se todos cumprimentados.

À Capes pelo apoio financeiro.

“Quando você faz em fração de segundo
o que os outros levariam horas para
fazer, tudo parece mágica.”

Steve Jobs

Resumo

Os Problemas de Corte de Estoque (*PCE*) são frequentemente encontrados em indústrias moveleiras, onde deseja-se cortar objetos maiores (placas de madeira) em objetos menores (itens), cada qual com uma quantidade pré-estabelecida (demanda), a fim de que seja possível a construção de diversos produtos finais demandados. O foco deste trabalho é a solução dos *PCE* bidimensionais, em que duas dimensões são relevantes durante o processo de corte, utilizando diferentes métodos para elaborar maneiras distintas de se cortar um único objeto em estoque (elaboração de padrões de corte). Devido às diferentes prioridades que se tem dentro de uma indústria moveleira, pode ser que seja necessário cortar placas de madeira mais rapidamente para que os produtos sejam fabricados com maior agilidade. No entanto, esta rapidez na produção pode gerar maior perda de matéria-prima, ocasionando maiores gastos no processo produtivo. Para possibilitar a solução computacional desse problema foi desenvolvido um código computacional e alguns resultados são apresentados. É realizado um estudo comparativo entre a solução encontrada na prática de uma fábrica real de móveis com a solução encontrada neste trabalho. Os dados utilizados foram extraídos de uma empresa localizada na cidade de Jaci, no interior do estado de São Paulo, considerada de médio porte e que atende o mercado moveleiro a nível nacional.

Palavras-chave: Problemas de corte de estoque bidimensional, Método *Simplex* com geração de colunas, Indústria moveleira.

Abstract

The Cutting Stock Problems (CSP) are generally found in furniture industry, where is need to cut larger objects (wooden boards) into smaller objects (items), each one with a specific amount (demand), in order to produce several final products. The focus of this work is to solve the two-dimensional CSP, where two dimensions are relevant during the cutting process, using different methods to create different ways to cut a single object in stock (development of cutting patterns). Due to the different priorities that have in a furniture industry, sometimes could be necessary to cut wooden boards more quickly to make products as fast as possible. However, this agility in production process may generate greater loss of raw materials, making the manufacturing process more expensive. In order to present a computational solution to the problem, was developed a computational code and some computational results are presented. A comparative study is carried out with a solution found in the practice of real furniture factory and a solution found at this work. The data was obtained from a company located in Jaci, in the state of Sao Paulo, considered medium-sized and deal with furniture market at national level.

Palavras-chave: Two-dimensional Cutting Stock Problems, Simplex method with column generation, Furniture industry.

Sumário

Introdução	p. 11
1 Problemas de corte de estoque	p. 13
1.1 Um trabalho pioneiro	p. 13
1.2 Definição do problema	p. 16
1.3 Modelos matemáticos	p. 18
1.4 Método <i>Simplex</i> com geração de colunas	p. 31
2 O setor moveleiro	p. 37
2.1 O pólo moveleiro de Mirassol	p. 40
2.2 Uma fábrica característica	p. 41
2.2.1 Linha de produção da fábrica	p. 42
2.2.2 Planejamento da produção	p. 45
2.2.3 Padrões de corte utilizados pela fábrica	p. 48
2.3 Diferenças entre as fábricas moveleiras da região	p. 50
3 O problema de corte de estoque na indústria moveleira	p. 52
3.1 Geração de padrões de corte bidimensionais	p. 52
3.1.1 Geração de padrões de corte 2-estágios	p. 55
3.1.2 Geração de padrões de corte 1-grupo	p. 63
3.2 O problema de corte de estoque bidimensional	p. 71
3.3 Implementação computacional para solução do <i>PCE</i> em uma indústria moveleira	p. 76

4	Estudo computacional	p.84
4.1	Descrição dos exemplares	p.84
4.2	Resultados e análise do estudo computacional	p.87
4.2.1	Análise de acordo com a abordagem de independência de produção	p.88
4.2.2	Análise de acordo com a abordagem de produção conjunta	p.98
4.2.3	Análise comparativa dos diferentes modelos para geração de colunas	p.102
4.3	Comparação com os resultados obtidos na prática da fábrica	p.105
5	Considerações finais	p.108
	Referências Bibliográficas	p.110
	Apêndice A Composição dos produtos da fábrica	p.115

Introdução

A indústria moveleira pode ser considerada uma das mais antigas do setor industrial, devido ao início com os carpinteiros e artesãos produtores de móveis, que com a revolução industrial passaram a utilizar máquinas e ferramentas visando obter economias de esforço e tempo. Os avanços proporcionados pela industrialização permitiram a padronização e ganhos de tempo, de modo que a produção de móveis em grande escala deixou de ser artesanal e passou a ser feita através de máquinas, tornando o processo industrializado.

Ao longo dos anos, as indústrias nacionais aumentaram sua produção e tiveram que se adaptar ao exigente mercado externo, que consome parte dos produtos produzidos no Brasil. Os países da União Européia, por exemplo, só compram móveis brasileiros produzidos com madeira de origem regular certificada. Na Alemanha, além da exigência da madeira originária de reflorestamento, as embalagens dos móveis têm de ser feitas de material reciclável. Os móveis são enviados totalmente desmontados e são os consumidores finais que os montam. Essa característica do mercado consumidor do exterior, principalmente do europeu e do estadunidense, está se configurando numa nova tendência mundial, buscando, principalmente, a redução de custos (PEREIRA, 2009). Nos Estados Unidos, já está desaparecendo a função de montador de móveis. Essa novidade requer móveis mais práticos e funcionais, acompanhados de manuais de instruções de montagem.

O estado de São Paulo, juntamente com o Rio Grande do Sul, é responsável por boa parte da produção moveleira do país. Na região Noroeste de São Paulo, estão localizados os pólos moveleiros de Mirassol e Votuporanga. Ambos destinam a maior parte de sua produção para consumo local e possuem empresas consideradas de Pequeno e Médio portes.

A principal matéria prima utilizada nestas indústrias é o painel de madeira. É no corte deste material que surge um dos principais problemas do setor industrial: a perda de material. O melhor aproveitamento da mesma está relacionado com a determinação da forma com que os painéis devem ser cortados. Na maioria das empresas este processo é “manual”, ou seja, não há o uso de um sistema computacional específico ((STIPP, 2002), (CAVALI; RANGEL, 2003)).

Os problemas envolvendo perda de matéria prima são abordados pelos Problemas de Corte de Estoque (*PCE*), em que a partir de objetos grandes (placas de madeira) deseja-se obter determinadas quantidades de objetos menores (itens) de forma a atender a demanda destes itens menores. Na década de 60 foram publicados vários trabalhos relacionados aos *PCE*, sendo os mais repercutidos os trabalhos de Gilmore e Gomory (1961), (1963) e (1965).

A intenção deste trabalho é a solução dos *PCE* bidimensionais utilizando diferentes métodos para elaborar maneiras distintas de se cortar um único objeto em estoque (elaboração de padrões de corte). Ou seja, dado um objeto maior (placa de madeira), existem diversas maneiras de se cortar os itens a partir da placa de madeira. O objetivo é encontrar a melhor forma de cortar os itens de forma a minimizar a perda de matéria-prima. Devido às diferentes prioridades que se tem dentro de uma indústria de móveis, pode ser que seja necessário cortar placas de madeira mais rapidamente para que os produtos sejam produzidos com maior agilidade. Ou seja, deve-se encontrar uma maneira mais rápida para obter os itens a partir dos objetos maiores. No entanto, esta rapidez na produção pode causar uma maior perda de matéria-prima, ocasionando maiores gastos de produção. Por outro lado, há maneiras mais econômicas de se cortar os objetos maiores, porém o processo de produção dos itens que farão parte do produto acabado poderá ser mais lento. Tais aspectos serão analisados neste trabalho.

Este trabalho está dividido da seguinte maneira. No Capítulo 1, é feita uma descrição sobre os problemas de corte de estoque no qual serão apresentados os conceitos básicos e suas formulações clássicas, além da discussão sobre a solução do problema. O Capítulo 2 é destinado à apresentação do cenário atual do mercado moveleiro e da fábrica S. móveis, localizada na cidade de Jaci, no noroeste paulista, onde serão descritos os procedimentos de produção e alguns desafios encontrados pela empresa no processo de solução dos problemas de corte de estoque. No Capítulo 3, é feita uma revisão bibliográfica a respeito dos diferentes e principais tipos de padrões de corte bidimensionais que são utilizados nas indústrias moveleiras. Também será apresentado o código computacional proposto para solucionar os *PCE* utilizando diferentes formas para geração de um único padrão de corte, ou seja, utiliza-se o método *Simplex* para solução do *PCE* utilizando diferentes formas para geração de colunas. No Capítulo 4 serão apresentados os experimentos computacionais resultantes deste trabalho utilizando exemplos reais do dia-a-dia de produção da empresa S. móveis e, finalmente, as conclusões e ideias para trabalhos futuros são apresentados no Capítulo 5.

Capítulo 1

Problemas de corte de estoque

Este capítulo é destinado à discussão de algumas definições básicas sobre os problemas de corte de estoque (*PCE*), para os quais serão apresentadas algumas formulações e um método de solução existente na literatura. Devido às restrições impostas pelas indústrias moveleiras na maneira com que os objetos grandes devem ser cortados é necessário definir alguns conceitos, como por exemplo, cortes guilhotinados, espessura da serra de corte, rotação de itens, dentre outros. Para resolver os (*PCE*), será utilizado o método *Simplex* com geração de colunas, sendo este capaz de resolver problemas com grande quantidade de variáveis.

1.1 Um trabalho pioneiro

Os Problemas de Corte de Estoque (*PCE*) vem sendo estudados há muitas décadas, tendo como estudo pioneiro o artigo do matemático e economista soviético *Leonid Vitaliyevich Kantorovich* publicado em 1939. Este estudo foi traduzido para o inglês em 1960, onde o autor apresenta modelos matemáticos de programação linear para o planejamento e organização da produção, além de métodos de solução para os problemas apresentados. Dentre os problemas tratados no artigo estão os *PCE*.

Kantorovich (1960) cita em seu trabalho que muitos materiais utilizados nas indústrias são entregues em unidades grandes (objetos) que precisam ser cortados para que possam ser utilizados (placas de vidro, madeira, papel, ferro, etc). Para isto é necessário dividir estes objetos (matéria-prima) em partes menores (itens) com dimensões previamente especificadas. Ao realizar este procedimento, sobras de material são geradas e apenas um certo percentual do objeto original é utilizado. Em certos casos, estas sobras servem de material para outros setores, como por exemplo, combustível para fornos, no caso de

madeira ou papel e em outras situações, são consideradas perdas e não possuem qualquer utilidade. Assim sendo, o problema de minimização destas perdas parece ser um problema real de grande importância, uma vez que permitiria uma redução no gasto de materiais.

Em Kantorovich (1960) encontramos alguns exemplos pioneiros do *PCE*. A seguir é citado um dos exemplos contidos no artigo original.

Exemplo 1.1. Digamos que seja necessário fabricar 100 itens de comprimentos 2,9m, 2,1m e 1,5m a partir de peças de 7,4m. Uma maneira simples seria cortar as peças menores a partir do objeto de 7,4m da seguinte forma:

- 1 item de 2,9m;
- 1 item de 2,1m;
- 1 item de 1,5m;

O que totaliza 6,5m de material cortado e conseqüentemente, tem-se uma sobra de 0,9m. Dessa forma, serão necessárias 100 objetos cortados da maneira descrita acima para atender a demanda solicitada. Logo, tem-se uma sobra total de 90m ($= 100 \times 0,9m$). A Figura 1 abaixo ilustra a situação descrita acima:

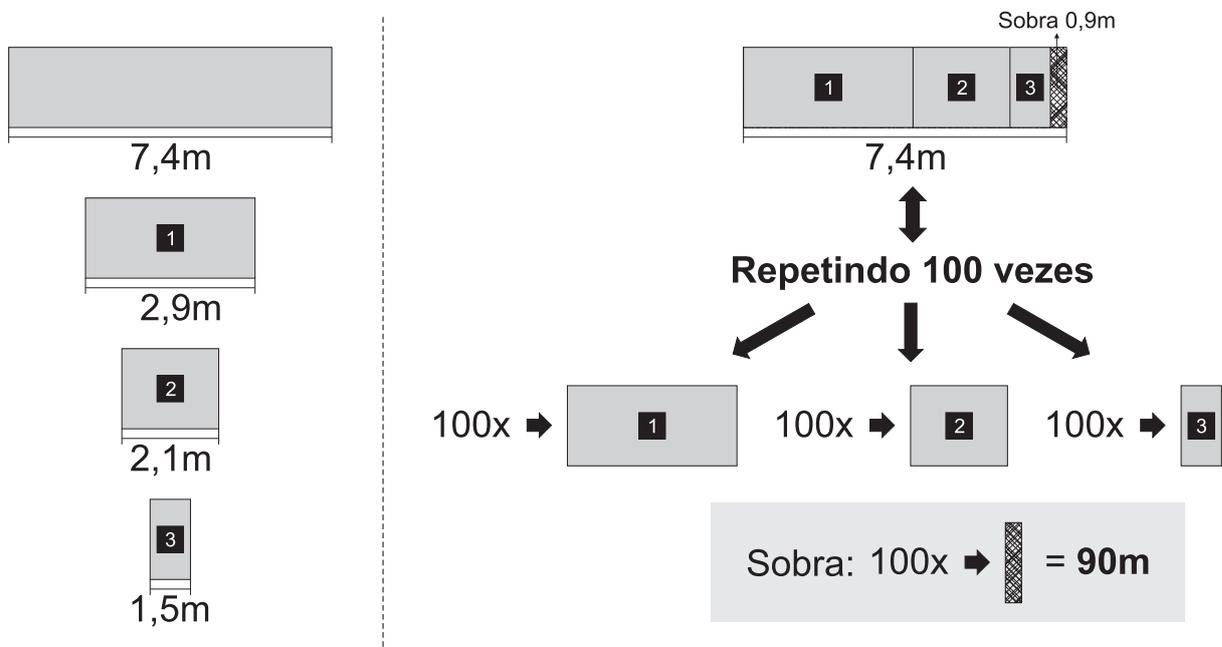


Figura 1: Disposição dos cortes para atendimento da demanda

Agora, considere 6 diferentes maneiras para cortar os objetos, conforme descrito na Tabela 1:

Maneiras	I	II	III	IV	V	VI
Itens(m)	2,9	2,9	2,1	2,9	1,5	2,9
	1,5	2,9	2,1	2,1	1,5	2,1
	1,5	1,5	1,5	2,1	1,5	1,5
	1,5		1,5		2,1	
Total utilizado(m)	7,4	7,3	7,2	7,1	6,6	6,5

Tabela 1: Diferentes formas para cortar as peças de 7,4m (fonte: Kantorovich (1960))

Entre estas maneiras existe apenas uma (I) que após ser cortada não possui sobras. Dessa forma, esta seria a maneira escolhida para cortar todos os objetos, uma vez que não possui desperdício.

No entanto, caso todas os objetos sejam cortadas seguindo esta maneira, nenhum item de tamanho 2,1m seria produzido, gerando uma falta de fabricação de itens deste tamanho.

A solução que dá a menor perda total, considerando a fabricação de todos os tipos de itens, seguindo o método descrito em Kantorovich (1960) é a seguinte:

- *30 objetos cortados de acordo com a maneira (I);*
- *10 objetos cortados de acordo com a maneira (II);*
- *50 objetos cortados de acordo com a maneira (IV);*

Ao todo seriam necessárias 90 objetos para a produção total, ao invés de 100 como na maneira mais simples descrita anteriormente.

A perda total deste processo é de 16m (= (10 x 0,1m) + (50 x 0,3m)). Em percentual, temos uma perda de 2,4% do material. Para encontrar a perda em valor percentual, basta seguir o seguinte cálculo:

$$\frac{\text{Perda Total}}{\text{Matéria-prima Total}} = \frac{16m}{90 * 7,4m} = \frac{16m}{666m} = 0,024 = 2,4\%$$

Nas condições do exemplo esta é a melhor solução do problema. Assim sendo, não deve se olhar apenas a questão de perda de material para obter uma solução viável para o PCE. É necessário que se obtenha todos os itens desejados, no entanto, desperdiçando o mínimo de material possível.

1.2 Definição do problema

A redução de custos é assunto frequente em qualquer setor industrial. Devido a este fato, as questões ligadas à matéria-prima tem sido tratadas com maior atenção pelas indústrias moveleiras que buscam poupar gastos durante a produção. Estas adquirem painéis de madeira (objetos) que devem ser cortados em objetos menores (itens) a fim de que seus produtos finais sejam produzidos e então vendidos para o consumidor final. É no corte destes painéis que surge o problema: como obter todos os itens necessários para a confecção dos produtos finais demandados de forma que seja desperdiçado o mínimo possível de material? A solução dos *PCE* é quem fornece, na maioria dos casos, a solução para este problema no dia-a-dia das empresas.

Existem várias formas de classificar os *PCE* na literatura, dentre elas, destaca-se a classificação de Dyckhoff (1990). Nesta o autor considera algumas características importantes do problema, como por exemplo, dimensão, restrições no corte, variação da quantidade de objetos, entre outras e cria uma tipologia formada por quatro caracteres $\alpha/\beta/\gamma/\delta$ representando a combinação de quatro propriedades relativas ao problema. Mais detalhes sobre esta classificação podem ser encontrados no artigo original. Wascher, Haubner e Schumann (2007) foram além, dividindo os *PCE* em problemas básicos, envolvendo o tipo de atribuição (maximização da produção ou minimização do consumo) e o sortimento dos itens (relativo a quão idênticos os itens são entre si); problemas intermediários, envolvendo também o sortimento dos objetos (relativo à existência de diferentes tipos de objetos); e problemas refinados, envolvendo ainda a forma dos itens. Mais detalhes desta classificação são encontrados no artigo original.

Os objetos maiores (placas de madeira) e objetos menores (itens) podem ter uma, duas ou três dimensões do espaço Euclidiano relevantes para o processo de corte. A seguir são descritos os casos unidimensionais e bidimensionais onde são expostos exemplos para melhor compreensão.

Unidimensional

Os Problemas de Corte de Estoque são ditos unidimensionais quando apenas uma dimensão é importante no processo de corte. Suponha que seja dado um objeto (bobina, barra de ferro, etc) e este deve ser cortado ao longo de seu comprimento para a obtenção de itens menores com tamanhos pré-estabelecidos. Digamos que:

- ✓ L é o comprimento total do objeto;

- ✓ m é a quantidade de itens distintos que devem ser cortados;
- ✓ l_i é o comprimento de cada item i , $i = 1, \dots, m$;
- ✓ d_i é a demanda necessária de cada item i , $i = 1, \dots, m$.

A solução do *PCE* unidimensional é dada através da resolução de um problema de otimização combinatória, que busca produzir toda a demanda de cada item, respeitando a limitação do comprimento total do objeto, de maneira a minimizar uma função objetivo, como por exemplo, minimizar o número de objetos utilizados para que se tenha os itens desejados em suas determinadas quantidades. Este tipo de problema é encontrado principalmente em metalúrgicas e indústrias de papel. A Figura 2 ilustra um exemplo deste problema.

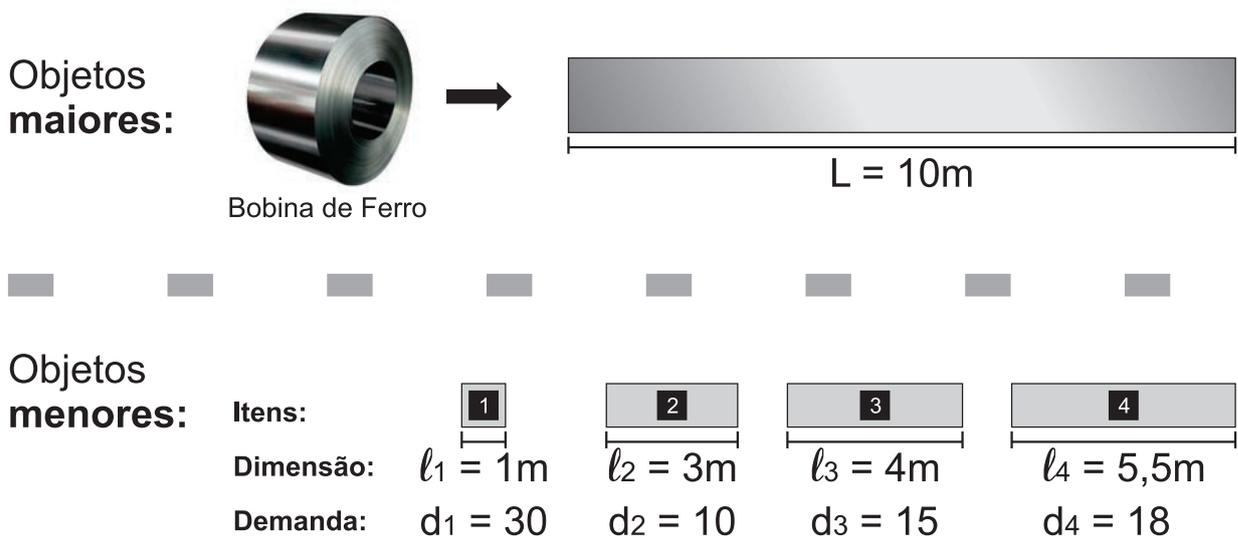


Figura 2: Exemplo de *PCE* unidimensional

Bidimensional

Um Problema de Corte de Estoque é dito bidimensional quando exatamente duas dimensões são relevantes para o processo de corte. Suponha que seja dado um objeto (painel de madeira, placa de vidro, etc) e este deve ser cortado ao longo de seu comprimento e largura para a obtenção de itens menores com tamanhos pré-estabelecidos. Além dos parâmetros definidos anteriormente para o caso unidimensional, considere:

- ✓ W é a largura do objeto;
- ✓ ω_i a largura de cada item, $i = 1, \dots, m$;

Assim como no caso unidimensional, a solução deste problema é dada através da resolução de um problema de otimização combinatória. No decorrer deste trabalho será apresentado o método de solução utilizado para os *PCE* bidimensionais, em que uma das técnicas utilizadas leva à solução de vários problemas unidimensionais. Podemos encontrar problemas desta forma em indústrias moveleiras, indústrias de vidros, entre outras. A Figura 3 ilustra um exemplo deste problema.

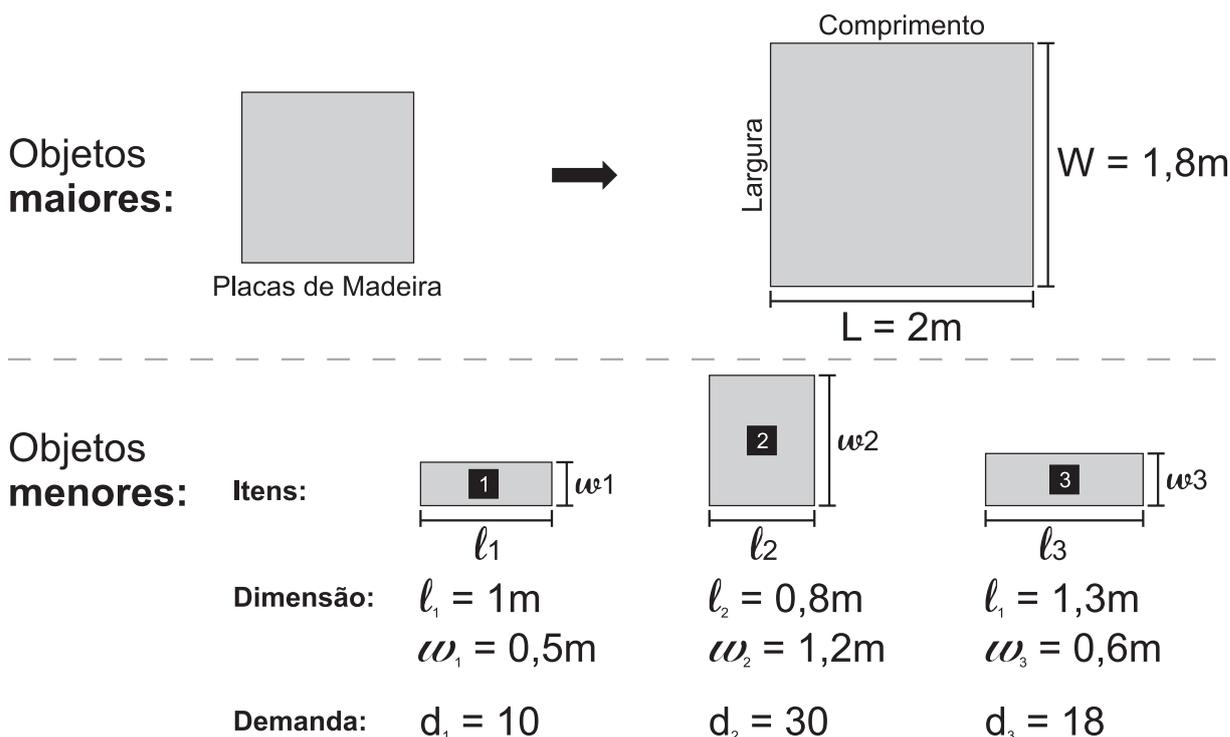


Figura 3: Exemplo de *PCE* bidimensional

1.3 Modelos matemáticos

Nesta seção apresentaremos as formulações matemáticas clássicas para os *PCE* tanto para o caso unidimensional quanto o bidimensional. Modelos como o apresentado em Valério de Carvalho (2002) atribuído a Kantorovich (1960) e a formulação dada por Gilmore e Gomory (1961) serão expostos. Será apresentada a maneira que são tratados os *PCE* no dia-a-dia das indústrias de uma forma matemática, para então buscar uma solução computacional.

Há diversos fatores que podem ser considerados na formulação destes problemas, como por exemplo, o número de tipos de objetos em estoque (por exemplo, painéis de madeira de diferentes tamanhos), a quantidade de objetos disponível (matéria prima limitada ou

não), tipo de corte permitido, entre outros. No decorrer do trabalho será explicitado como estes fatores influenciam na formulação dos problemas.

Formalização do problema de corte unidimensional

Considerando os parâmetros definidos anteriormente, o problema consiste em cortar itens menores a partir de objetos (matérias-primas) de forma a atender à demanda necessária de cada um deles e de modo a minimizar uma função objetivo, como por exemplo, a minimização do comprimento desperdiçado no processo de corte ou o número mínimo de objetos necessários para a produção de todos os itens.

De modo geral, a modelagem matemática do problema acima é dada da seguinte forma:

$$\min Z = cx \quad (1.1)$$

Sujeito a:

$$Ax \geq d \quad (1.2)$$

$$x \in \mathbb{Z}_+^n \quad (1.3)$$

em que $c \in \mathbb{R}_+^n$ é o vetor de custos do corte dos objetos, $d \in \mathbb{Z}_+^n$ é o vetor de demanda dos m itens, $A \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ é a matriz de padrões do problema e $x \in \mathbb{Z}_+^n$ é a variável de decisão, assumindo valores inteiros pois refere-se à quantidade de objetos que serão cortados.

As colunas da matriz A fornecem os **padrões de corte**, sendo estes definidos da seguinte maneira:

Definição 1.1 (Padrão de Corte Unidimensional). *Cada maneira diferente de se cortar os itens ao longo do objeto é chamado **padrão de corte**. A cada padrão de corte está associado um vetor m -dimensional que contabiliza os itens nele contidos: $A_j^t = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ sendo a_{ij} o número de vezes que o item i aparece no padrão de corte j . Um vetor m -dimensional $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ representa um padrão de corte j se, e somente se, satisfizer a restrição física do objeto, conhecida na literatura como **restrição da mochila**, dada por:*

$$a_{1j}l_1 + a_{2j}l_2 + \dots + a_{mj}l_m \leq L \quad (1.4)$$

ou seja, a soma dos comprimentos dos itens cortados não pode ultrapassar o compri-

mento total do objeto.

A Figura 4 mostra alguns exemplos de padrões de corte para um conjunto de 3 itens cortados ao longo do objeto.

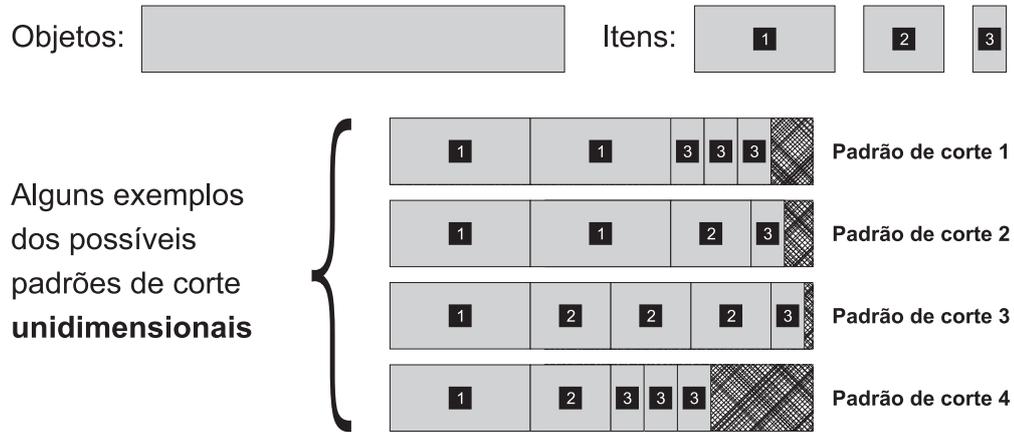


Figura 4: Alguns exemplos de padrões de corte unidimensionais

Para os padrões de corte da Figura 4, temos associados os seguintes vetores:

$$\begin{aligned}
 [2 \ 0 \ 3] &\rightarrow \text{Vetor associado ao Padrão de Corte 1} \\
 [2 \ 1 \ 1] &\rightarrow \text{Vetor associado ao Padrão de Corte 2} \\
 [1 \ 3 \ 1] &\rightarrow \text{Vetor associado ao Padrão de Corte 3} \\
 [1 \ 1 \ 3] &\rightarrow \text{Vetor associado ao Padrão de Corte 4}
 \end{aligned}$$

Figura 5: Vetores associados aos padrões de corte da Figura 4

A área hachurada em cada padrão de corte é sua respectiva **perda de matéria-prima**, sendo esta definida por:

Definição 1.2 (Perda de matéria prima). *Dizemos que existe **perda** de matéria-prima quando não existem itens demandados com comprimento menor ou igual ao que restou do objeto após o processo de corte. Tais sobras, referem-se às partes da matéria-prima de boa qualidade que se tornam inúteis devido às suas dimensões.*

A perda de matéria prima, para cada padrão de corte j , é calculada com a expressão

$$P_j = L - \sum_{i=1}^m a_{ij} l_i \quad (1.5)$$

Note que a decisão relacionada ao cálculo dos padrões de corte influencia diretamente nas perdas de matéria-prima. Dessa forma, este processo é parte crucial para uma solução consistente para o *PCE*.

Diz-se que dois **padrões de corte são equivalentes** quando ambos possuem exatamente os mesmos vetores associados. Além destes, existem os padrões de corte conhecidos na literatura como **homogêneos**, definidos da seguinte forma:

Definição 1.3 (Padrão de Corte Homogêneo). *Os padrões de corte que possuem apenas um tipo de item são chamados de **padrões de corte homogêneos**, ou seja, tais padrões de corte têm apenas uma das m coordenadas não-nula ($A_j^t = (0, \dots, 0, a_{ij}, 0, \dots, 0)$). Quando o número de vezes que o item aparece no padrão de corte homogêneo é o maior possível, é chamado de padrão de corte homogêneo maximal (DOLATABADI; LODI; MONACI, 2012) e neste caso, cada coordenada a_{ij} é calculada da seguinte forma:*

$$a_{ij} = \begin{cases} \left\lfloor \frac{L}{\ell_i} \right\rfloor, & i = j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1.6)$$

A Figura 6 a seguir ilustra padrões de corte homogêneos e padrões de corte homogêneos maximais, seguidos de seus respectivos vetores associados.

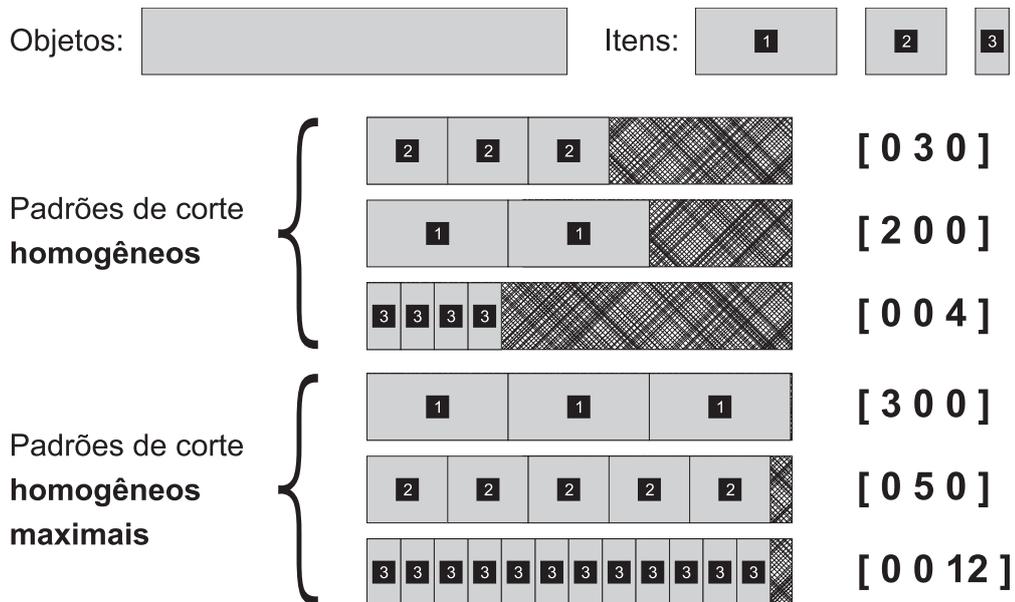


Figura 6: Exemplo de padrões de corte homogêneos

Com as definições acima pode-se introduzir a formulação do modelo matemático para o *PCE* apresentado por Valério de Carvalho (2002) e atribuído a Kantorovich (1960), cujo

objetivo é a minimização do número de padrões de corte utilizados para atendimento total da demanda dos itens. A seguir tem-se o modelo:

$$\min Z_{Kan} = \sum_{j=1}^K y_j \quad (1.7)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^K x_{ij} \geq d_i, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (1.8)$$

$$\sum_{i=1}^m \ell_i x_{ij} \leq L y_j, \quad \forall j = 1, \dots, K \quad (1.9)$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}_+, \quad y_j \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, K \quad (1.10)$$

em que:

- ✓ K é um valor supostamente conhecido para o número máximo de objetos necessários para o problema;
- ✓ x_{ij} é o número de vezes que o item i aparece no objeto j ;
- ✓ $y_j = \begin{cases} 1, & \text{se o } j\text{-ésimo objeto é utilizado} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

No modelo descrito em (1.7)-(1.10), x_{ij} e y_j , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, K$, são as variáveis do modelo. O conjunto de restrições (1.8) garantem que a demanda de cada item i seja atendida, $i = 1, \dots, m$, permitindo a produção de itens excedentes. Já o conjunto de restrições (1.9) garantem que, caso o objeto j seja utilizado ($y_j = 1$), os itens nele cortados não podem exceder o comprimento L total do objeto. Em outras palavras, estamos nos referindo à restrição da mochila (1.4). Por fim, o conjunto de restrições (1.10) refere-se ao domínio das variáveis.

No modelo apresentado em (1.7) - (1.10), K é um limitante superior para o número total de objetos, sendo que cada padrão de corte é determinado durante a resolução do problema, através do conjunto de restrições (1.9). No entanto, a quantidade destes padrões pode chegar à ordem de milhões ou bilhões, já que o número de itens nas indústrias pode ser da ordem de dezenas ou centenas. Gilmore e Gomory (1961), apresentaram outra maneira de formular o *PCE*, considerando que n padrões de corte possíveis sejam conhecidos *a priori*. O problema é formulado como:

$$\min Z_{GG} = \sum_{j=1}^n x_j \quad (1.11)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq d_i, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (1.12)$$

$$x_j \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (1.13)$$

em que:

- ✓ a_{ij} é o número de vezes que o item i aparece no padrão de corte j ;
- ✓ x_j é a variável do problema que equivale à quantidade de objetos que serão cortados de acordo com o padrão de corte j .

Assim como no modelo (1.7) - (1.10), o objetivo do modelo de Gilmore e Gomory (1961) é a utilização do menor número possível de objetos cortados para total atendimento da demanda, permitindo produção excedente de itens (conjunto de restrições (1.12)).

Existe uma equivalência entre os modelos (1.7) - (1.10) e (1.11) - (1.13), obtida pela aplicação da decomposição de Dantzig e Wolfe (1960) ao modelo (1.7) - (1.10). Mais detalhes a respeito desta equivalência são encontrados em (VANCE, 1998).

Vale observar que em (1.11) - (1.13) apenas $x_j, j=1, \dots, n$, são as variáveis do problema, enquanto que em (1.7) - (1.10) as variáveis são x_{ij} e $y_j, i=1, \dots, m, j=1, \dots, K$. Isto é devido ao fato de que em (1.11) - (1.13) os padrões de corte são conhecidos *a priori* e em (1.7) - (1.10) eles são encontrados durante a solução do problema.

Dessa forma, para resolver o *PCE* com a formulação de Gilmore e Gomory (1961) deve-se conhecer os padrões de corte do problema. Ou seja, encontrar todas as soluções possíveis do problema da mochila (MATELLO; TOTH, 1990) em que os pesos são os comprimentos dos itens ($\ell_i, i=1, \dots, m$) e a capacidade da mochila é o tamanho do objeto (dimensão L). No entanto, encontrar todas estas soluções não é uma tarefa fácil. Assim sendo, outra estratégia de solução será abordada ao longo do texto.

Formalização do problema de corte bidimensional

A principal diferença entre os *PCE* unidimensionais e bidimensionais está na forma com que construímos os padrões de corte. Dado um vetor m -dimensional $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$,

em que a_{ij} representa o número de itens i no padrão de corte j , é uma tarefa simples para o caso unidimensional imaginar como estes itens estarão dispostos ao longo do objeto de comprimento L . Já para o caso bidimensional, esta tarefa não é tão simples, visto que além da sobreposição de itens e respeito aos limites do objeto, temos muitas possibilidades para dispor estes itens ao longo do objeto de dimensões $L \times W$ e . Para exemplificar esta situação, considere a Figura 7 abaixo.

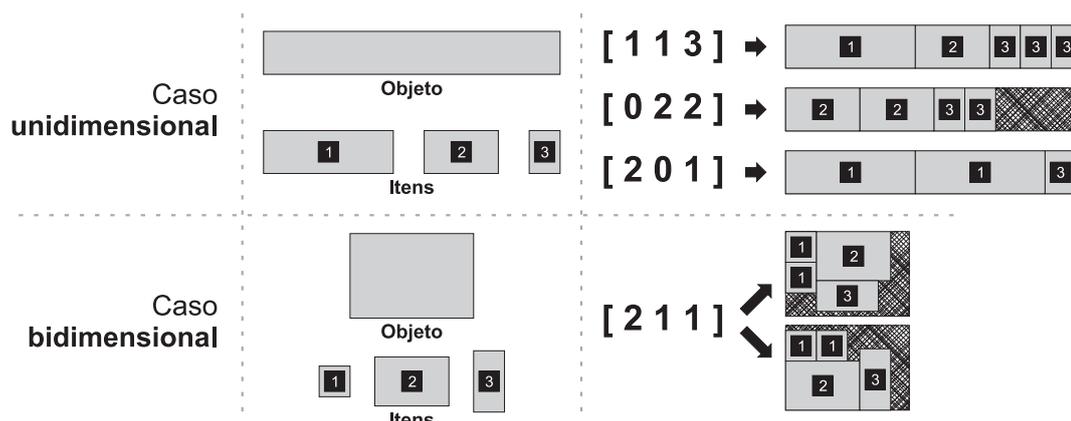


Figura 7: Disposição dos itens ao longo dos objetos para formar padrões de corte

Para o caso bidimensional, obter padrões de corte não equivale a resolver simplesmente o problema da mochila, como no caso unidimensional. Deve-se considerar outros fatores como, por exemplo, a permissão para rotacionar itens, o tipo de corte que será efetuado (guilhotinado ou não-guilhotinado) e o número de estágios permitidos. A seguir, estes e outros conceitos serão definidos assim como o Problema de Corte de Estoque Bidimensional, onde serão associados os conceitos definidos para o caso unidimensional e será apresentada a formulação matemática para o *PCE* bidimensional.

Assim como no caso unidimensional, o *PCE* Bidimensional pode ser definido da seguinte forma: suponha que se tem em estoque uma quantidade suficiente de objetos (placas de madeira) e deseja-se produzir m itens, cada um com demanda e dimensão pré-estabelecidas. Considere os objetos retangulares de dimensões $L \times W$ (comprimento e largura), m itens com dimensões $\ell_i \times \omega_i$ (comprimento e largura) e demanda d_i , $i=1, \dots, m$. O problema consiste em produzir os itens, a partir do corte dos objetos em estoque, atendendo à demanda de tal maneira que se otimize alguma função objetivo como, por exemplo, minimizar uma função perda de material, minimizar o número de objetos cortados, entre outros.

Note ainda que, para calcular a perda total no caso bidimensional, deve-se considerar

as duas dimensões do objeto. Assim, se P_j é a **perda total** gerada pelo padrão de corte bidimensional j , tem-se:

$$P_j = L * W - \sum_{i=1}^m (\ell_i * \omega_i) * a_{ij} \quad (1.14)$$

A Figura 8 a seguir ilustra a perda de material obtida em um padrão de corte bidimensional.

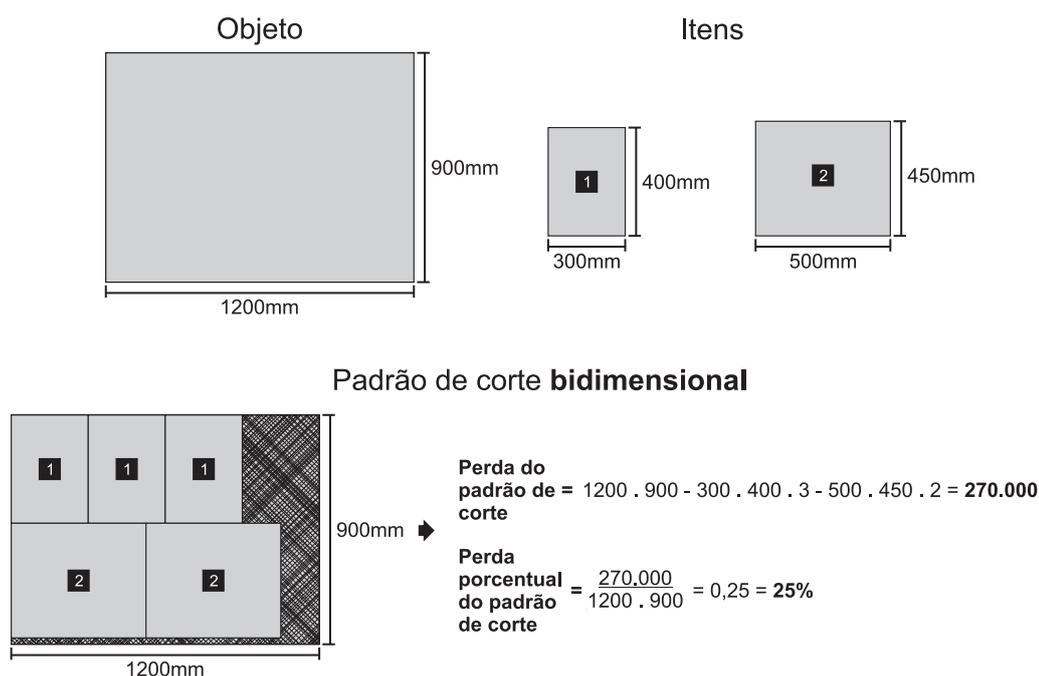


Figura 8: Perda de matéria-prima obtida em um único padrão de corte bidimensional

Suponha que n padrões de corte possíveis sejam conhecidos *a priori*, da mesma forma em que Gilmore e Gomory (1961) o fez para o caso unidimensional. Dessa forma, o modelo apresentado em (1.11) - (1.13) para o caso unidimensional é o mesmo utilizado no caso bidimensional, a menos da fórmula utilizada para cálculo da perda, que no caso unidimensional é dada por (1.5) e no caso bidimensional é dada por (1.14) e também pela forma com que serão encontrados os padrões de corte (processo denominado geração de colunas). Assim sendo, o modelo que será utilizado neste trabalho para solução do *PCE* bidimensional, apresentado em Gilmore e Gomory (1965), é dado por (1.11) - (1.13).

Para encontrar os padrões de corte homogêneos maximais bidimensionais o procedimento é tão simples quanto para o caso unidimensional, bastando apenas encontrar os seguintes valores:

$$a_{ij} = \begin{cases} \left\lfloor \frac{L}{\ell_j} \right\rfloor * \left\lfloor \frac{W}{\omega_j} \right\rfloor, & i = j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1.15)$$

A Figura 9 a seguir ilustra um padrão de corte homogêneo e outro padrão de corte homogêneo maximal, ambos bidimensionais.

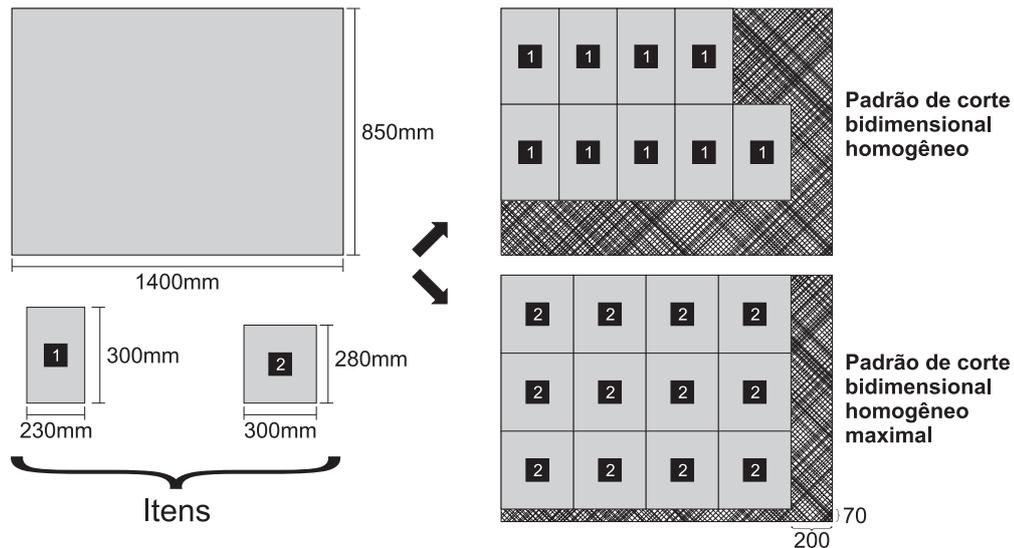


Figura 9: Padrões de corte bidimensionais homogêneo e homogêneo maximal

As indústrias nas quais se utilizam os *PCE* bidimensionais na maioria dos casos impõem algumas restrições nos padrões de corte que serão gerados durante a solução do problema. Tendo em vista tais restrições, alguns conceitos serão definidos para melhor compreender as limitações nos padrões de corte, como por exemplo: cortes guilhotinados, rotação de itens, número estágios, grupos, problemas restritos ou irrestritos, espessura da serra do corte, entre outros. A seguir são descritas detalhadamente cada uma destas restrições.

Definição 1.4 (Corte guilhotinado). *Um corte é dito guilhotinado ortogonal, ou simplesmente guilhotinado, quando é feito paralelamente a um dos lados de um objeto retangular e o divide em dois novos retângulos. Um padrão de corte composto apenas por cortes guilhotinados é chamado de padrão de corte guilhotinado.*

A Figura 10 representa um padrão de corte guilhotinado.

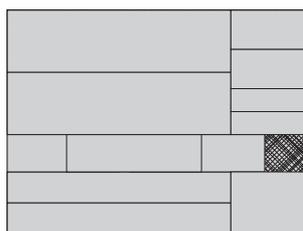


Figura 10: Ilustração de um padrão de corte guilhotinado

Muitas vezes algumas restrições são necessárias para que não haja perda excessiva de tempo (ou matéria-prima) em alguma etapa da produção. Por exemplo, em algumas indústrias do setor moveleiro, existem máquinas automatizadas que fazem os cortes das placas de madeiras para obtenção dos itens. No entanto, a movimentação giratória destes objetos para que o corte seja realizado é feita manualmente por algum colaborador da fábrica. Assim sendo, quanto menor a quantidade de vezes que este objeto for rotacionado para que sejam obtidos os itens, mais rápida será a evolução dos cortes e conseqüentemente menor será o tempo gasto nesta operação.

Os padrões de corte guilhotinados são classificados de acordo com o número de estágios de corte necessários para obtenção dos itens alocados em um objeto, sendo estes definidos por:

Definição 1.5 (Estágio de corte). *O número de estágios de um padrão de corte guilhotinado é o número de vezes que o objeto deve ser rotacionado de 90° para que os cortes guilhotinados sejam efetuados.*

Quando a quantidade de estágios é limitada, diz-se que o problema de corte é estagiado e o número de estágios (k) define um padrão de corte k -estágios. Na Figura 11 é apresentado um padrão de corte em 2-estágios, sendo que cada estágio é indicado no desenho.

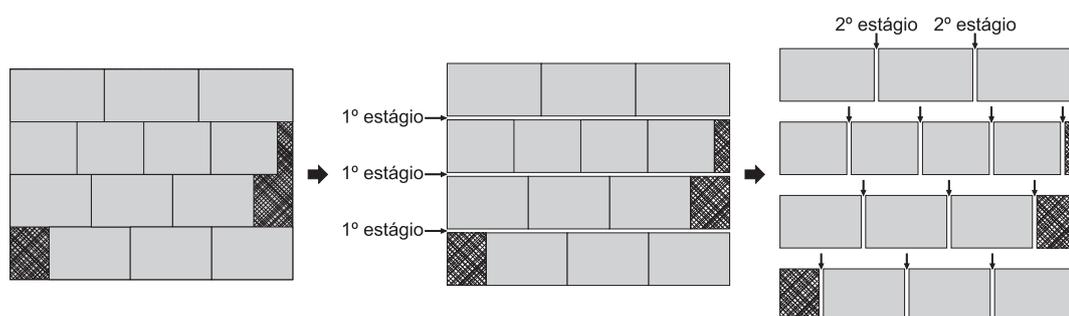


Figura 11: Padrão de corte 2-estágios

O número de estágios de corte é inversamente proporcional à eficiência padrão, pois padrões de corte com alta eficiência devem ser cortados rapidamente (poucos estágios). Como a cada estágio é realizada uma mudança ortogonal de direção do corte, quanto mais estágios o padrão de corte apresenta, maior o tempo gasto pelo operador para rotacionar o objeto a ser cortado. Por este motivo uma importante categoria de padrões de corte guilhotinados são os padrões de corte 2-estágios. Estes aparecem abundantemente nas indústrias moveleiras por sua alta eficiência operacional.

Definição 1.6 (Padrão de corte 1-grupo ou tabuleiro). *Um caso particular de um padrão 2-estágios é o chamado padrão de corte guilhotinado 1-grupo ou padrão de corte tabuleiro, em que os cortes do segundo estágio são realizados simultaneamente nas faixas resultantes do primeiro estágio.*

A Figura 12 ilustra este caso.

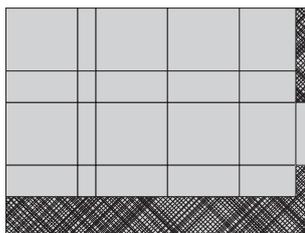


Figura 12: Padrão de corte 2-estágios 1-grupo (padrão tabuleiro)

Um importante conceito para aumentar a agilidade da produção e também diminuição da perda de matéria-prima utilizada é a permissão para produção de itens rotacionados, sendo este definido por:

Definição 1.7 (Rotação de itens). *Dizemos que a rotação de itens é permitida, quando itens de dimensões $\ell_i \times \omega_i$ podem ser produzidos também com dimensões $\omega_i \times \ell_i$ podendo estes serem contabilizados como um único item. Neste caso, o problema passa a ter $2m$ itens, exceto quando algum item s não possa ser rotacionado, ou seja, $\ell_s > W$ ou $\omega_s > L$.*

Após os cortes realizados de forma completa no objeto, temos uma determinada quantidade de cada item desejado. Se o número de itens resultantes puder ser maior ou igual à sua demanda, dizemos que o problema é **irrestrito**. Caso contrário, ou seja, se o número de itens produzidos for exatamente igual à sua demanda, dizemos que o problema é **restrito**.

Outro importante conceito para a correta interpretação do processo de corte é a espessura da serra utilizada durante o corte dos itens. Para considerar a perda de material

provocada pela espessura da serra basta adicionar às dimensões dos objetos e dos itens o devido valor desta espessura (MORABITO; ARENALES, 2000). Isto é, considere que a espessura da serra seja σ , as dimensões dos objetos e dos itens devem ser respectivamente alteradas para:

$$(L + \sigma) \times (W + \sigma) \text{ e } (\ell_i + \sigma) \times (\omega_i + \sigma), i = 1, \dots, m$$

Nesses casos, se a espessura da serra for desconsiderada, os padrões de corte produzidos podem ser impossíveis de serem efetuados na prática, como no exemplo a seguir.

Exemplo 1.2. *Suponha que temos em estoque um objeto de dimensões $L \times W = 448\text{mm} \times 300\text{mm}$ e queremos obter 2 itens com dimensões: $\ell_1 \times \omega_1 = 112\text{mm} \times 50\text{mm}$ e $\ell_2 \times \omega_2 = 224\text{mm} \times 20\text{mm}$, conforme mostra a Figura 13.*

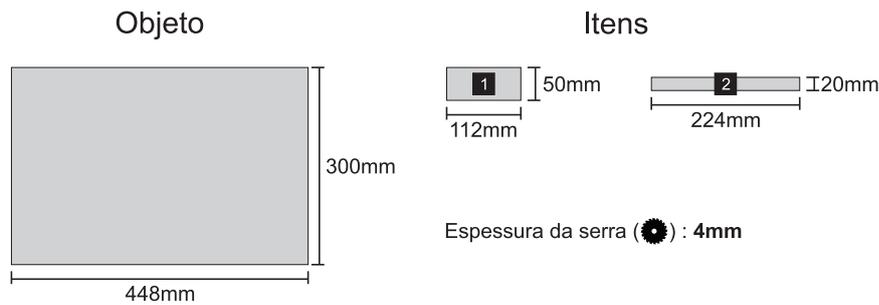


Figura 13: Espessura da serra: dimensões do objeto e itens em questão

Considerando que a espessura da serra seja de 4mm, devemos somá-la às dimensões do objeto e dos itens, obtendo: $L \times W = 452\text{mm} \times 304\text{mm}$, $\ell_1 \times \omega_1 = 116\text{mm} \times 54\text{mm}$ e $\ell_2 \times \omega_2 = 228\text{mm} \times 24\text{mm}$. Dessa forma temos que é possível construir o padrão de corte da Figura 14(a), porém, é impossível a utilização do padrão de corte da Figura 14(b).

Isto pode ser explicado da seguinte forma: Desconsiderando o desgaste da serra, é possível criar o padrão de corte da Figura 14(b), em que o item 1 cabe exatamente 4 vezes nas três primeiras faixas dispostas ao longo do comprimento do objeto, pois $4 \times 112\text{mm} = 448\text{mm}$ (mesmo comprimento do objeto). Agora, levando em consideração a espessura da serra, o padrão de corte ilustrado na Figura 14(b) não é possível de ser executado, uma vez que $4 \times 116\text{mm} = 464\text{mm}$ que é maior do que 448mm disponíveis como comprimento do objeto. Portanto, o desgaste provocado pela serra deve ser considerado para construir os padrões de corte utilizados na prática das indústrias, pois caso contrário, padrões de corte impossíveis de serem aplicados podem ser encontrados.

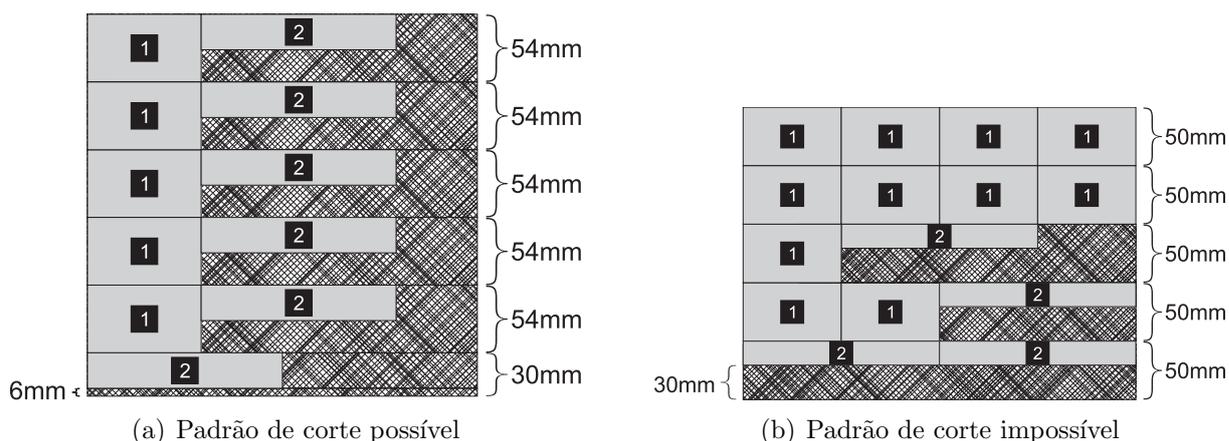


Figura 14: Diferença entre padrões de corte possível e impossível

Esta alteração garante que os padrões de corte resultantes sejam possíveis de serem reproduzidos na prática.

Após a execução dos cortes para a produção dos itens demandados, pode ser que seja necessário realizar cortes adicionais (aparas) para a obtenção do item demandado. Isto é necessário devido à existência de padrões de corte exatos e não-exatos.

Definição 1.8 (Padrão de corte não-exato). *Ocorre quando o item tem largura menor ou igual à largura da faixa no qual está inserido. Neste caso, um terceiro estágio de corte é necessário para obtenção do item final, no entanto, este não é considerado como um estágio a mais no corte, uma vez que na maioria dos casos este corte é feito manualmente, não sendo utilizada a mesma máquina da produção para realizá-lo.*

Quando os itens possuem exatamente a largura da faixa no qual está inserido, dizemos que o padrão de corte é exato. A Figura 15 ilustra estas situações.

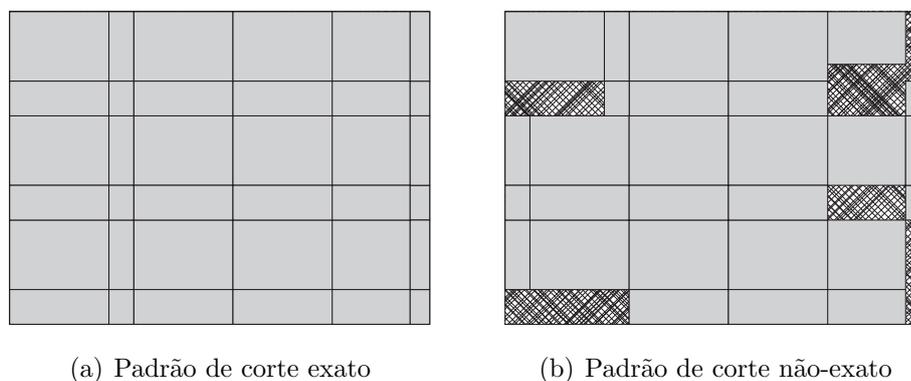


Figura 15: Padrões de corte 2-estágios exato e não-exato

Outro importante conceito contido nos *PCE* é o de ciclos da serra. Formalmente, estes são definidos por:

Definição 1.9 (Ciclos da serra (YANASSE; HARRIS; ZINOBER, 1993)). *É o conjunto de todas as operações necessárias para cortar um, ou mais objetos, segundo um mesmo padrão de corte, incluindo o ato de carregar a máquina de corte com um determinado número de objetos e cortá-los simultaneamente, até que todos os itens sejam obtidos.*

A seguir será descrito o método de solução para o problema de corte de estoque bidimensional utilizado neste trabalho, conhecido na literatura como método *Simplex* com geração de colunas.

1.4 Método *Simplex* com geração de colunas

As equações do modelo descrito em (1.11) - (1.13) podem ser escritas na forma matricial, dada por:

$$\min Z_{CG} = f(x) = c^T x \quad (1.16)$$

Sujeito a:

$$Ax \geq d \quad (1.17)$$

$$x \in \mathbb{Z}_+^n \quad (1.18)$$

, em que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, com $n \gg m$ cujas colunas são os padrões de corte do problema, $x \in \mathbb{Z}_+^n$ é o vetor cujas coordenadas representam o número de vezes que cada padrão de corte da matriz A será utilizado e $c^T \in 1^n$ é o vetor de custos da função objetivo.

Existem algumas dificuldades para resolver os *PCE*, como por exemplo, a restrição de integralidade sobre as variáveis de decisão (número de vezes que um padrão de corte será utilizado) e o grande número de colunas (variáveis ou padrões de corte) que podem existir. Por esse motivo, a maneira mais utilizada e conhecida para resolver este tipo de problema é relaxar a condição de integralidade das variáveis do problema original, admitindo que estas possam atingir valores reais, não-negativos, e resolver a relaxação linear pelo método *Simplex* com geração de colunas. O nome geração de colunas vem do fato que cada variável é associada a uma coluna da matriz de restrições (A). O algoritmo trabalha com um subconjunto inicial de variáveis e, a cada iteração, procura por uma nova variável, com o objetivo de melhorar o valor da função objetivo.

Gilmore e Gomory (1965) propuseram a técnica de geração de colunas para a solução do problema de corte de estoque. Basicamente, a cada iteração do método *Simplex* são gerados novos padrões de corte que serão inseridos na matriz A , caso este contribua para a redução do número de objetos total que devem ser cortados para que a demanda seja atendida.

Considere a relaxação linear do problema (1.16) - (1.18) escrita em notação matricial:

$$\min Z_{GGRL} = f(x) = c^T x \quad (1.19)$$

Sujeito a:

$$Ax \geq d \quad (1.20)$$

$$x \in \mathbb{R}_+^n \quad (1.21)$$

Para que seja possível a aplicação do método *Simplex*, é necessário que $\text{posto}(A)=m$. No entanto, isto é facilmente verificado uma vez que sempre existirão m colunas linearmente independentes na matriz A , dadas pelos padrões homogêneos, de acordo com a definição dada em 1.15 para o caso bidimensional.

A solução geral do problema (1.19) - (1.21) pode ser descrita da seguinte maneira. Considere as partições básica e não-básica nas colunas de (A) , $A = [B \ N]$. A matriz $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é chamada de matriz básica e é formada por m colunas linearmente independentes da matriz (A) . A matriz $N \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ é chamada de matriz não-básica.

Esta partição nas colunas de (A) definem também uma partição nos vetores x e c , $x = (x_B, x_N)^T$ e $c = (c_B, c_N)$. As variáveis x_B são chamadas de básicas e x_N de não-básicas, e c_B e c_N representam os custos associados a estas variáveis, respectivamente, na função objetivo.

Para iniciar o método *Simplex*, é necessário uma solução básica factível inicial, ou seja, uma solução não-negativa cuja matriz básica associada é não-singular (invertível). Para o problema de corte de estoque (1.19) - (1.21), encontrar uma solução básica inicial é simples, conforme dito anteriormente, basta tomarmos a matriz formada pelos m padrões de corte homogêneos maximais, uma vez que a produção de itens em excesso é permitida. Caso não seja permitida a produção de itens excedentes, basta tomar o número máximo permitido para a produção de cada item em seu respectivo vetor do padrão de corte homogêneo. Assim, de acordo com a definição 1.15, a base inicial é dada por:

$$B = [A_1 A_2 \dots A_m] = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

Observe que, B é não-singular, pois todas as colunas de B são linearmente independente, ou seja, $\text{posto}(B) = m$.

Aplicando as partições $x = (x_B, x_N)^T$ e $c = (c_B, c_N)$ em (1.19) - (1.21), não permitindo a produção excedente de itens (problema restrito), tem-se:

$$f(x) = c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N \quad (1.23)$$

$$Ax = d \Leftrightarrow [BN](x_B, x_N)^T = d \Leftrightarrow Bx_B + Nx_N = d \Leftrightarrow x_B = B^{-1}d - B^{-1}Nx_N \quad (1.24)$$

com $x_B, x_N \geq 0$. Substituindo a equação (1.24) em (1.23) temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ &= c_B^T (B^{-1}d - B^{-1}Nx_N) + c_N^T x_N \\ &= c_B^T B^{-1}d + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N \end{aligned} \quad (1.25)$$

Quando $x_N^0 = 0$ temos por (1.24) uma solução básica dada por $x_B^0 = B^{-1}d$. Caso $x_B^0 \geq 0$, então a solução básica é factível.

Note que, por (1.25) temos $f(x^0) = c_B^T B^{-1}d$, ou ainda, $f(x^0) = c_B^T x_B^0$, ou seja, $f(x^0)$ é o valor da função objetivo para uma solução básica factível particular x^0 .

O vetor π , dado por $\pi^T = c_B^T B^{-1}$, é o vetor das variáveis duais associadas, também chamado de vetor multiplicador *Simplex*. Assim, por (1.25) temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= c_B^T B^{-1}d + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N \\ &= f(x^0) + c_N^T x_N - \pi^T N x_N \\ &= f(x^0) + (c_N^T - \pi^T N)x_N \\ &= f(x^0) + \sum_{j \in \mathcal{N}} (c_j - \pi^T A_j)x_j \end{aligned} \quad (1.26)$$

, em que \mathcal{N} é o conjunto dos índices das colunas não-básicas de (A) .

A próxima etapa do método *Simplex* é decidir qual coluna entrará na partição básica da matriz (A) . Para isto, é necessário calcular os custos relativos das variáveis não-básicas, que são determinados por $c_j - \pi^T a_j$, $j \in \mathcal{N}$. No entanto, existem m variáveis básicas e, conseqüentemente, $(n - m)$ variáveis não-básicas, o que resulta em um número muito grande, uma vez que $n \gg m$. Desta forma, calcular os custos relativos de todas as variáveis não-básicas torna-se impraticável. Uma forma de contornar este problema é gerar a variável não-básica (coluna), isto é, um novo padrão de corte para o *PCE*, utilizando o critério de *Dantzig*, que procura a variável x_k com o menor custo relativo para entrar na base, uma vez que o objetivo é minimizar Z_{GGRL} .

Isto nos leva à busca por uma coluna (A_k) da partição não-básica da matriz (A) tal que $\hat{c}_k = c_k - \pi^T A_k = \min\{c_j - \pi^T A_j, j \in \mathcal{N}\}$. Isto é, a coluna procurada pode ser obtida resolvendo o seguinte **sub-problema**:

$$f(A_k) = \min (c_j - \pi^T A_j) \quad (1.27)$$

Sujeito a:

$$A_j \text{ é um padrão de corte bidimensional} \quad (1.28)$$

No caso do problema de corte de estoque, quando o objetivo é minimizar o número de objetos utilizados temos que todos os coeficientes da função objetivo são 1, conforme dito anteriormente. Assim, a equação (1.27) pode ser reescrita por:

$$f(a_k) = \min (1 - \pi^T A_j) = 1 - \min(-\pi^T A_j) = 1 - \max(\pi^T A_j)$$

Assim, resolver o sub-problema (1.27) - (1.28) é equivalente a resolver:

$$f(A_k) = \max (\pi^T A_j) \quad (1.29)$$

Sujeito a:

$$A_j \text{ é um padrão de corte bidimensional} \quad (1.30)$$

Teste de otimalidade:

Da equação (1.26) temos que $f(x) = f(x^0) + \sum_{j \in \mathcal{N}} (1 - \pi^T A_j) x_j$.

- Se as parcelas $(1 - \pi^T A_j) \geq 0, \forall j \in \mathcal{N}$ temos que a solução básica corrente é ótima, pois o objetivo é minimizar $f(x)$ e $x_j \geq 0, \forall j \in \mathcal{N}$. Ou seja, se $\bar{c} = 1 - f(A_k) \geq 0$ não há como melhorar a solução do problema.
- Senão, $\bar{c} = 1 - f(A_k) < 0$, a coluna (padrão de corte) A_k entra na base, melhorando o valor de $f(x)$. A coluna a sair da base segue os passos usuais do método *Simplex*.

O método *Simplex* segue com a determinação do tamanho da passo e da variável que sairá da partição básica da matriz (A) . Este processo é repetido até que não seja encontrada uma melhora na função objetivo, ou seja, enquanto $f(A_k) > 1$. Maiores detalhes a respeito deste método podem ser encontrados em Chvátal (1983) e Bazaraa, Jarvis e Serali (1990).

Apesar do método de geração de colunas ser muito eficiente, este procedimento pode apresentar problemas de estabilização e pode ter uma convergência lenta para a solução ótima do problema relaxado. Nas primeiras iterações o valor da função objetivo decresce rapidamente mas, à medida que a solução se aproxima da ótima, este decréscimo é cada vez menor. Este comportamento, conhecido como *tailing-off*, é típico da geração de colunas e ocorre devido às degenerações primais e pelas excessivas oscilações das variáveis duais (ALVEZ; VALÉRIO DE CARVALHO, 2004).

Observe que todo o método de solução aqui apresentado é aplicado na **relaxação linear** do problema, o que pode resultar em soluções fracionárias. Portanto, o fato de resolver o problema linear através do método de geração de colunas não implica, necessariamente, em uma solução ótima para o problema original (inteiro). Assim, depois de resolvido o problema linear, surge um novo problema: encontrar uma solução inteira para o problema original a partir da solução da relaxação linear. Esta questão será abordada na Seção 3.3.

A Figura 16 a seguir, extraída de Andrade (2006), resume o procedimento do método *Simplex* aqui apresentado.

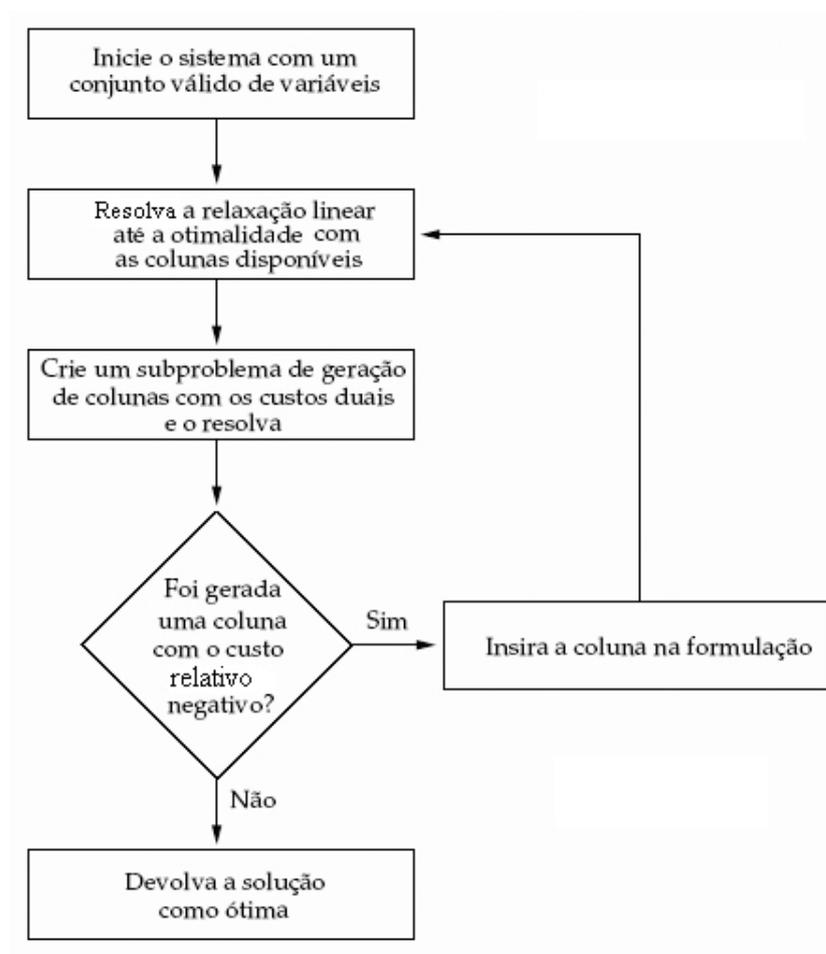


Figura 16: Resumo do método *Simplex* com geração de colunas (ANDRADE, 2006)

No capítulo a seguir é apresentado o cenário das indústrias moveleiras no noroeste do estado de São Paulo, onde serão apresentados o processo produtivo e alguns desafios enfrentados no mercado por uma indústria moveleira localizada na cidade de Jaci-SP.

Capítulo 2

O setor moveleiro

O setor moveleiro nacional é composto, aproximadamente, por 19 mil indústrias, que empregam cerca de 330 mil profissionais em todo o país, conforme último relatório (2014) do IEMI - Instituto de Estudos e Marketing Industrial. Essas empresas produziram, em 2013, 508,6 milhões de peças que, em valores, significam algo próximo de R\$ 42,9 bilhões. Atualmente o Brasil possui pólos moveleiros localizados em quase todos os estados, sendo os principais situados nas regiões Sul e Sudeste, em: Bento Gonçalves/RS, Caxias do Sul/RS, Lagoa Vermelha/RS, São Bento do Sul/SC, Arapongas/PR, Mirassol/SP, Votuporanga/SP, Grande São Paulo/SP, Ubá/MG, Grande Belo Horizonte/MG, Grande Rio de Janeiro/RJ e Linhares/ES.

Segundo o IEMI (2014), no período de 2009 a 2013, o volume do consumo de móveis (incluindo residenciais e escritórios) cresceu a um ritmo aproximado de 7% ao ano, sendo que a região Sudeste é responsável por 46% do consumo total de móveis do país. Já os valores nominais, valor gasto com as compras de móveis, cresceram 68% no mesmo período incluindo a inflação, que se descontada, fornece um crescimento real de 35%. Para o ano de 2014, estimou-se uma queda de 2,8% no consumo de móveis e uma alta de 1,6% no valor nominal, devido à alta nos preços em virtude da situação econômica nacional. A Figura 17 mostra a evolução do consumo e dos valores nominais no período apresentado.

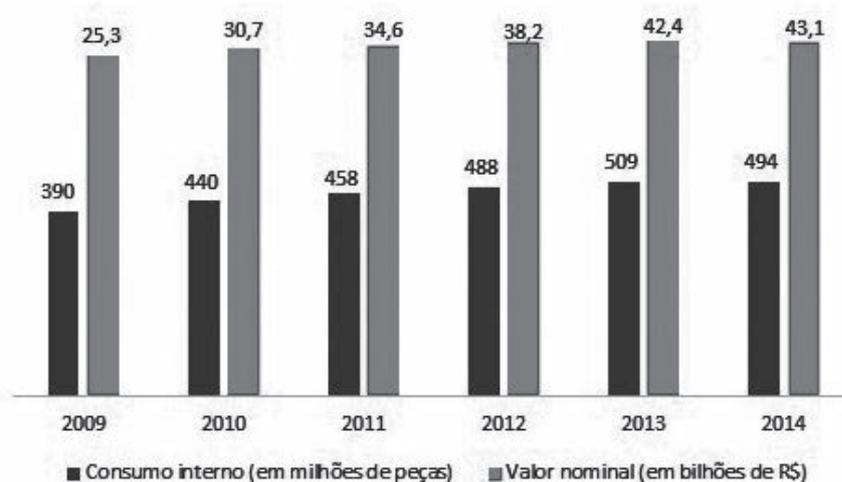


Figura 17: Evolução do Consumo e valores nominais de móveis (IEMI, 2014)

A ascensão das classes C e B2, com renda familiar anual entre 5 e 10 salários mínimos e de 11 a 15 salários mínimos, respectivamente, fez com que estas se tornassem as duas principais classes com o poder de compra de imóveis, representando 57,3% de todo o valor gasto com móveis em 2013. A Figura 18 mostra o percentual do valor nominal gasto nos anos 2009 e 2013, distribuídos nas diferentes classes de renda familiar.

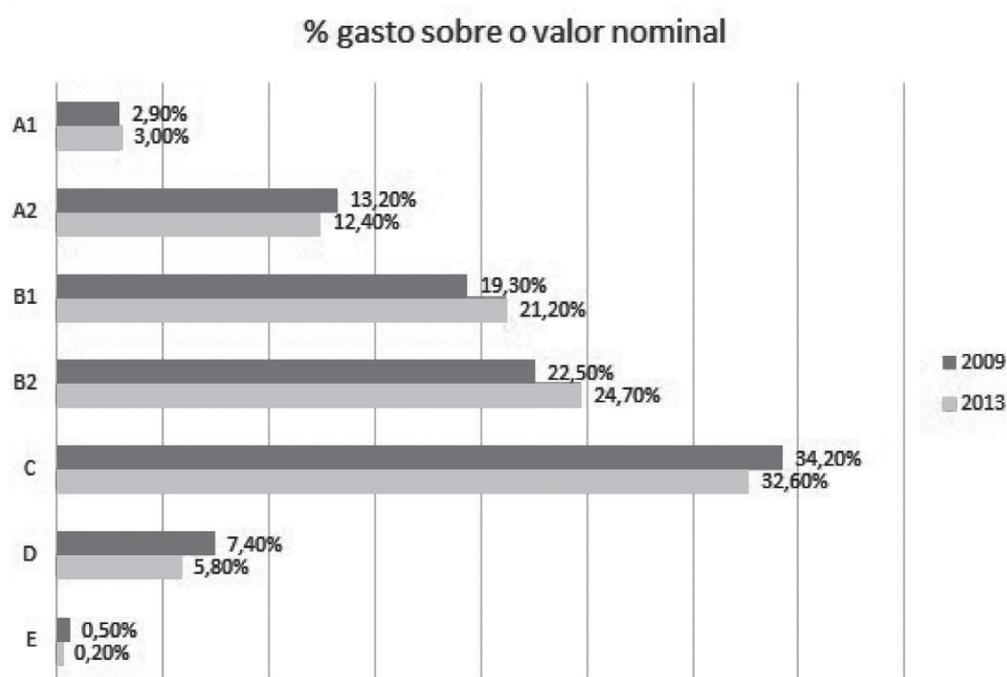


Figura 18: Distribuição do valor nominal de 2009 e 2013 de acordo com a renda familiar (IEMI, 2014)

Projetos do Governo Federal, como o Minha Casa Melhor, também estimularam o crescimento do setor moveleiro. Fundamentado na distribuição de crédito no valor de R\$ 5.000,00 para todos aqueles que estão em dia com as prestações dos imóveis adquiridos através do programa Minha Casa Minha Vida, o programa Minha Casa Melhor oferece a oportunidade para muitos brasileiros comprarem móveis e eletrodomésticos para suas casas, aumentando o faturamento do setor moveleiro nacional. É uma espécie de financiamento facilitado e sem grandes burocracias, sendo o valor pago em até 48 vezes com taxa de juros fixa de 5% ao ano.

Apesar deste incentivo, o cenário atual do país não é altamente favorável ao mercado moveleiro. Em dezembro de 2014, o Simovale - Sindicato da Indústria Madeireira e Moveleira do Vale do Uruguai - promoveu, em Chapecó/SC, uma assembleia geral ordinária com a diretoria e associados da entidade para discutir a deliberação do plano orçamentário para o ano de 2015, além de avaliar o balanço econômico e de produção do setor moveleiro no ano de 2014 e suas projeções e expectativas para 2015. Segundo conteúdo publicado em 04 de dezembro de 2014 no site Portal... (2015), os empresários do setor, fundamentados nas projeções da FIESC - Federação das Indústrias do Estado de Santa Catarina, preveem muitas dificuldades no que se refere ao cenário econômico em 2015. As preocupações se voltam para o mercado cambial, pois há uma demanda do mercado por móveis, no entanto, devido aos custos - que vão desde a produção até a logística, os preços não se tornam atrativos, reduzindo a competitividade dos produtos diante do cenário mundial. A falta de incentivos fiscais em custos como o da energia elétrica também foram apontados como fatores prejudiciais ao mercado moveleiro.

Segundo Silva e Santos (2005), o esforço para uma indústria se manter no mercado requer a adoção de um planejamento estratégico mais minucioso para que o retorno sobre investimentos internos seja favorável em médio e longo prazos. Desta maneira, um dos fatores críticos de competitividade que merecem uma análise mais detalhada, além de fatores como diferenciação de produto, incorporação de novas máquinas, equipamentos e matéria-prima, é a adoção de inovações organizacionais que visem a modernização e a racionalização dos processos produtivos da empresa (ABID, 2008). Daí a grande importância da utilização da matemática, em particular a programação linear, buscando uma melhora nos processos produtivos, bem como no planejamento da produção. (MARTINS, 2010)

2.1 O pólo moveleiro de Mirassol

Mirassol é um município brasileiro do estado de São Paulo, localizado a 453km da cidade de São Paulo, com população de 57.390 habitantes (IBGE/2014) e recebe esse nome devido ao centro da cidade ser considerado um dos pontos mais altos da região, podendo-se vislumbrar o nascer e o pôr-do-sol ao horizonte.

A industrialização da cidade se deu a partir de 1917, quando Feliciano Sales Cunha montou uma serraria na cidade. Por volta de 1920, a industrialização de Mirassol ganhou uma nova força, com a fabricação de carros movidos a gasogênio (mistura combustível de gases). No mesmo período instalou-se em Mirassol a fundadora de um bazar, estabelecimento que foi crescendo e passou a ser uma casa de tecidos, depois loja de móveis e, mais tarde, transformou-se em uma fábrica de móveis, que atualmente é a maior da cidade e região.

Visando uma maior abrangência das indústrias moveleiras da região de Mirassol no cenário nacional, foi criado em abril de 2013 o Projeto de Melhoria da Logística de Saída do Polo Moveleiro de Mirassol, desenvolvido em uma parceria do Sebrae-SP com o Sindicato da Indústria do Mobiliário de Mirassol - SIMM. Este projeto foi baseado na melhora da logística de escoamento da produção da região, devido a um problema muito grande de envio da produção para regiões distantes, como o Nordeste por exemplo, onde uma carga poderia levar até 40 dias para ser entregue. Para solucionar este problema, foi proposta a criação de uma central de carga digital, que reuniria todas as encomendas para uma determinada região e quando fosse atingido o volume necessário a carga seria despachada. Esta central poderia diminuir os prejuízos provocados pela demora na entrega e aumentar a participação do pólo moveleiro do Noroeste Paulista em outros mercados.

Para atender a demanda de mão-de-obra da indústria de móveis da região de Mirassol, o Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial de São Paulo - Senai-SP - inaugurou em outubro de 2013 um Centro de Treinamento moveleiro no município, abrangendo diversas etapas do processo industrial do setor moveleiro. No conteúdo programático do curso, é possível encontrar disciplinas como matemática aplicada, ensinando os conceitos básicos de proporcionalidade, porcentagens entre outros, até disciplinas voltadas para a usinagem em máquinas convencionais ou a CNC - Comando Numérico Computadorizado.

Hoje, a indústria moveleira da região conta com mais de 230 fábricas que geram cerca de oito mil empregos diretos, envolvendo as cidades de Mirassol, São José do Rio Preto, Jaci, Catanduva, Olímpia, Novo Horizonte, entre outras. As indústrias produzem móveis

com predominância do *MDF* e em série, como racks, estantes, estofados, colchões, dormitórios, salas de jantar e poltronas decorativas para todo o Brasil, além das exportações que já atingem mercados como América do Sul, América Central, Estados Unidos, África e Oriente Médio.

Uma das cidades pertencentes ao pólo moveleiro de Mirassol é Jaci, localizada a aproximadamente 10km de Mirassol com 6.361 habitantes (IBGE/2014). A indústria moveleira é a principal atividade econômica da cidade, com cerca de 72 fábricas, entre grandes, médias e pequenas empresas, segundo informações do site oficial da prefeitura do município (PREFEITURA... , 2015). Uma das indústrias moveleiras de Jaci é a **S. móveis**, empresa de médio porte fundada em 1991 e que atualmente emprega cerca de 42 colaboradores, sendo o setor industrial composto por 30 colaboradores, e atende o mercado de várias regiões brasileiras. A fábrica passa por algumas adaptações no seu processo produtivo, visando o aumento da eficiência de sua produção e um melhor atendimento do mercado. A seguir é descrito o processo produtivo encontrado na fábrica.

2.2 Uma fábrica característica

A produção da S. móveis é essencialmente de móveis residenciais, sendo que alguns produtos também são utilizados por escritórios. Ao todo são 32 produtos disponíveis no mercado em seis cores (nogal/avelã, imbuia/preto, branco/preto, carvalho branco/preto, branco e teka). Os produtos: mesa de computador havana, painel S., mesa de centro Condessa e organizador super, são os principais produtos da empresa, representando aproximadamente 48% de toda a produção mensal. A produção é feita por lotes e varia de acordo com os pedidos e o estoque disponível no determinado momento. A programação da produção é passada diariamente ao operador da máquina seccionadora (máquina responsável pelo corte) que inicia a preparação para o corte da matéria prima necessária.

Antigamente, cada lote de produção possuía tamanho fixo e era relativo a apenas um tipo de produto. Ou seja, havia uma quantidade fixa a ser produzida para cada tipo de produto, independentemente se toda a produção já estava vendida ou não. Com o passar dos anos e com a chegada da crise econômica atual, que alterou boa parte do cenário moveleiro nacional, a fábrica se viu forçada a alterar esta dinâmica de produção, sendo produzidos em cada lote somente os produtos que já estão encomendados e/ou vendidos. Esta alteração fez com que vários produtos diferentes pudessem ser fabricados de uma só vez, algo que não acontecia anteriormente. Esta alteração também impactou no cálculo

dos padrões de corte da fábrica, tornando-os mais complexos, uma vez que uma maior quantidade de itens distintos são necessários para produção.

A principal matéria-prima utilizada para a produção dos móveis é o MDF. Os painéis de aglomerados também são utilizados, mas apenas em alguns produtos. Bastante populares no setor moveleiro, o MDF e o painel aglomerado são amplamente utilizados no segmento dos móveis (planejados ou não) e são fabricados de maneira bem distinta. O MDF (placa de fibra de média densidade) é produzido a partir da aglutinação de fibras de madeira combinadas com resinas sintéticas e aditivos químicos. As placas de madeira são coladas umas sobre as outras com resina e na sequência, fixadas através de pressão. Já os painéis aglomerados, ao invés de utilizar fibras de madeira, como o MDF, são constituídos por pequenas partículas de madeira aglutinadas entre si. Para uni-las, são adicionadas resinas ureicas (resinas sintéticas produzidas pela reação de formol e uréia) e, em seguida, o material sofre ação de altas temperaturas e pressão. A vantagem é que o aglomerado utiliza menos matéria-prima durante a sua produção, o que diminui o custo. Porém, ele tem utilização limitada, podendo ser aplicado apenas em móveis e peças retas, como laterais de mobiliários, prateleiras e divisórias. Já o MDF é completamente versátil, pois possuem superfícies homogêneas e sem orientação de fibras, permitindo a realização de cortes em qualquer sentido.

Foram realizadas visitas ao setor industrial da S. móveis com o intuito de acompanhar o planejamento de produção diário, entender o funcionamento da máquina seccionadora no dia-a-dia e observar a maneira que é decidido o corte das placas de madeira para a produção dos móveis, ou seja, como são definidos os padrões de corte que serão utilizados para a produção de cada lote. Nas próximas seções, são detalhadas a linha de produção e o planejamento de produção da empresa.

2.2.1 Linha de produção da fábrica

Toda a matéria-prima utilizada na produção dos móveis fica estocada em um galpão a cerca de 80m da fábrica S. móveis. Todos os dias, após o início do expediente dos colaboradores (7h00 - 17h00), o operador da máquina de corte recebe uma lista (Ordem de Produção) com todos os produtos que serão produzidos ao longo do dia e então decide a quantidade de placas de madeira que será transportada para a fábrica para que o processo de corte seja iniciado, juntamente com a decisão sobre os padrões de corte que deverão ser utilizados.

O processo de produção de um móvel se inicia com o corte da matéria-prima, onde

placas de madeira com dimensões maiores (objetos) são cortadas para a formação de placas de madeira com dimensões menores (itens) que compõem a estrutura do móvel. Na empresa em questão, este corte é realizado em dois estágios e por duas máquinas de corte distintas com iguais capacidades e mecânicas (máquinas seccionadoras). A primeira máquina realiza cortes do 1º estágio, geralmente ao longo do comprimento do objeto. Já a segunda máquina, conhecida internamente como Repicadeira, realiza cortes do 2º estágio. Ambas as máquinas seccionadoras são operadas pelo mesmo colaborador da empresa.

No primeiro estágio são realizados cortes ao longo do comprimento do objeto, de acordo com as informações contidas na tela do computador da seccionadora 1 (Figura 19). No exemplo da Figura 19 é possível observar que foram cortadas 4 faixas com largura de 660 mm e 1 faixa com 71 mm de largura. O comprimento destas faixas são os mesmos comprimentos dos objetos (cortes realizados ao longo do comprimento).

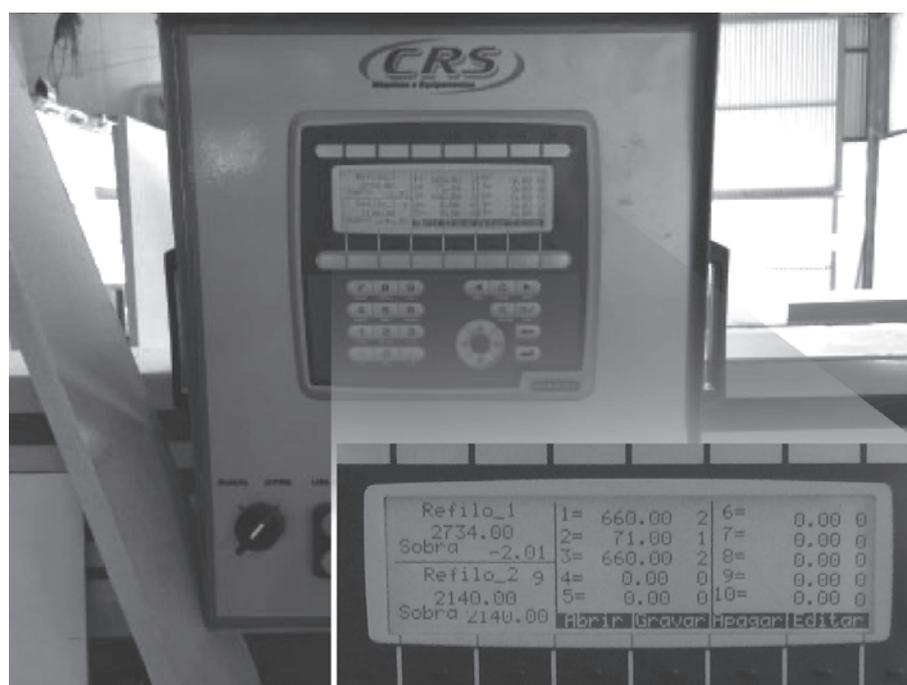


Figura 19: Informações do computador que comanda os cortes da seccionadora

No segundo estágio de corte, as faixas obtidas na seccionadora 1 são levadas para a seccionadora 2 e novos cortes são realizados, no entanto, ao longo da largura dos objetos. A mecânica de inserção das informações na seccionadora 2 é a mesma utilizada na outra máquina. Por fim, caso seja necessário algum corte adicional para obtenção final dos itens (apara) estes são realizados manualmente por outra máquina, com porte muito menor do que as demais máquinas de corte.

Após o corte dos objetos e obtenção dos itens, estes são empilhados e cada pilha de itens recebe uma etiqueta referente à cor que deverão ser pintados posteriormente. Depois de serem cortados os itens seguem para a furação, onde são realizados todos os furos necessários para o encaixe de cada item, e após esta etapa seguem para a pré-montagem. Nesta etapa apenas 1 exemplar de cada produto é montado completamente, com o intuito de verificar se as dimensões de cada produto estão corretas, assim como o encaixe de parafusos. Caso esteja tudo correto, alguns itens seguem diretamente para a colagem de bordas arredondadas, enquanto outros seguem para a usinagem e posterior lixamento (estas não possuem bordas arredondadas). Após estas etapas, os itens seguem para a pintura UV (ultravioleta), sendo que alguns itens ainda são submetidos pela pintura PU (Poliuretânicas) antes de receberem a pintura UV. A diferença entre estes dois processos de pintura basicamente se dá pela facilidade com que a tinta é absorvida pela madeira e também durante o processo de secagem, sendo que na pintura UV a emissão de solventes para atmosfera durante a secagem é praticamente nula.

Com relação aos “gargalos” de produção, etapas em que se tem demora excessiva na produção, pode-se citar o processo de corte e furação de itens. No processo de corte é devido ao fato de que este processo é fortemente dependente da experiência do operador da máquina, sendo que quando este se ausenta do trabalho o processo de corte fica parado. Já no processo de furação, o problema é que geralmente os lotes diários sobrecarregam uma máquina, sendo que a empresa possui três destas máquinas. Caso outra máquina seja colocada em operação, o custo gerado por esta segunda máquina não compensa a ociosidade gerada nas duas máquinas, visto que desta forma, o tamanho do lote diário se torna pequeno perante a operação conjunta de duas máquinas.

Os itens que passam pelo setor de furação e não recebem bordas arredondadas são encaminhados para o processo de lixamento de borda antes de serem pintados. A atividade de lixa é executada por três colaboradores e a pintura por um único colaborador. Os processos de lixamento e pintura devem ser repetidos duas vezes com descanso de um dia, para garantir a qualidade do produto.

Chegando na etapa final, os itens recebem as estampas necessárias e são embalados. Atualmente, na pintura de estampa não é necessária a lavagem do rolo de tinta, pois toda a sequência de produção desta atividade é composta por todas as cores com que a S. móveis possui em seu catálogo de produtos. Futuramente este processo sofrerá mudanças, devido à fabricação de novos modelos de móveis em cores diferentes das existentes atualmente e, conseqüentemente, surgirá um problema de sequenciamento das cores. Por fim, os

produtos são embalados, acondicionados em paletes e encaminhados por empilhadeiras para o estoque.

A Figura 20 a seguir ilustra as etapas da linha de produção da S. móveis, sendo que esta não difere em muitas etapas de outras empresas de médio e pequeno portes, a não ser pela tecnologia das máquinas ou estágios específicos de algum produto, segundo uma comparação realizada com o trabalho de Cavali (2004).

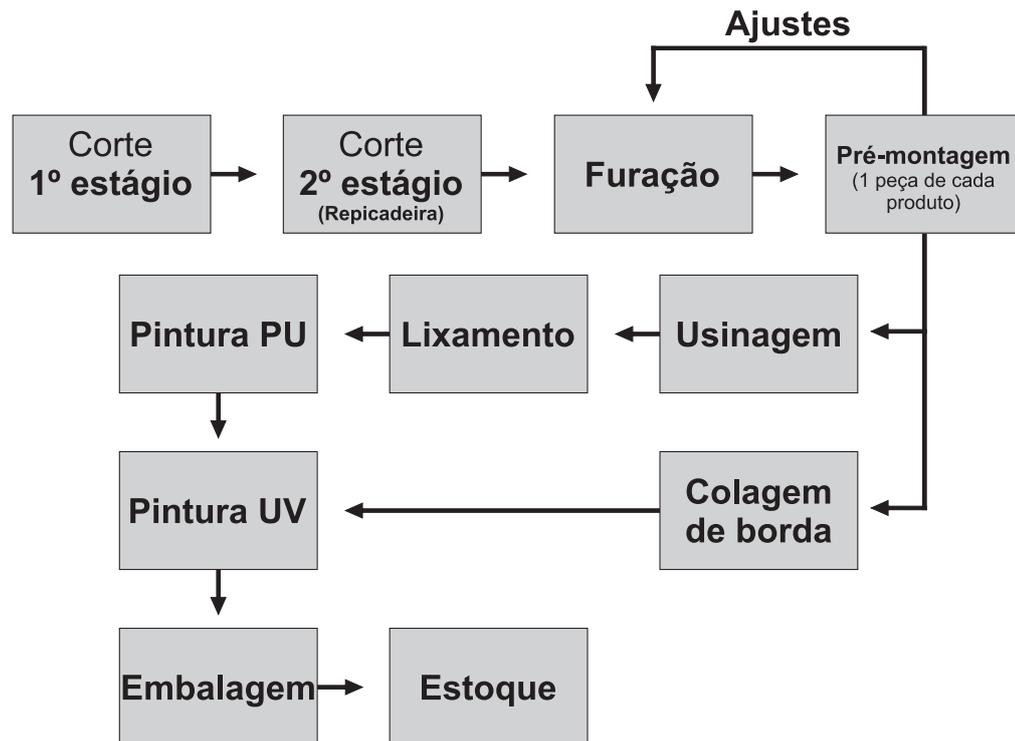


Figura 20: Esboço da linha de produção da S. móveis

2.2.2 Planejamento da produção

O planejamento da produção na S. móveis é feito diariamente com base nos pedidos que chegam do setor administrativo da empresa, localizado a aproximadamente 1,5km do setor industrial, onde são decididos quais pedidos serão atendidos em determinado lote de produção. Como a empresa envia seus produtos em caminhões terceirizados e são as próprias transportadoras que decidem a carga que determinado caminhão levará, a S. móveis geralmente leva desvantagem na logística de transporte, pois a decisão sobre qual carga levar é tomada baseada na massa da carga de cada empresa que contrata o serviço de transporte. Assim sendo, quanto maior a massa da carga mais vantajoso para a empresa transportadora, pois terá maior lucro com a carga, e os produtos da S. móveis são, em sua maioria, leves. Dessa forma, frequentemente há risco dos produtos serem

entregues fora do prazo pré-estabelecido pela empresa.

Após tomada a decisão de quais pedidos serão produzidos, o setor administrativo “libera” os produtos para o setor de produção, através do *software* de controle da empresa, gerando um arquivo de produção. Este arquivo não leva em consideração a quantidade em estoque de alguns produtos, sendo responsabilidade do gerente de produção, sempre no final da tarde de todos os dias, tomar as decisões relativas aos itens que serão produzidos considerando os produtos em estoque. Após esta manipulação de dados através do *software*, é gerado um relatório onde consta a quantidade de cada móvel que deverá ser produzido. Com este relatório, o gerente gera a O.P - Ordem de Produção - e entrega ao operador da máquina de corte no início do expediente do dia seguinte, e a partir daí, a produção se inicia. A Figura 21 exemplifica uma O.P. recebida pelo operador da máquina de corte.

SMÓVEIS **Ordem de Produção** **Número: 0000160252**

18/05/2015
07:28 am

JACI - SP

Código	Descrição	Material	Qtd. Ordem		
00000672	BASE - 0,680 x 0,388 (RISCO AZUL)	MDF/12	40		
Lote	Série	Padrão	Locomoção	Qtd. Pilhas	Qtd. na Pilha
0000003280	AMARELO (001)	BRANCO	PRACHA DE 1,40	1	50

Item utilizado nos seguintes produtos:

Código	Descrição
00000069	FRUTEIRA CONDESSA - BRANCA

Ordem	Operação	Máquina	Hora Início	Hora Fim	Qtd. Entrad.	Qtd. Saída	Data Saída	Responsável
1	CORTAR (001)	0						
2	REPLICAR - SECCIONADORA (014)	0						
3	FURAR (002)	0						
4	MODELAR (CADEIRINHA) (004)	0						
5	APLICAR SELADORA - 1 MÃO (009)	0						
6	1 MÃO LIXAR BORDO MANUAL LIX 180 E	0						
7	APLICAR SELADORA - 2 MÃO (003)	0						
8	2 MÃO LIXA BORDO MANUAL -	0						
9	PINTAR BORDO - PU (011)	0						
10	PINTAR - LINHA DE PINTURA UV (012)	0						
11	EMBALAR (013)	0						

Lote	Data Criação	Início Produção	Final Produção	Qtd. Lote	Qtd. Prod.	Lote - Produção
00000069 FRUTEIRA CONDESSA - BRANCA						
0000003280	15/5/2015	18/5/2015		40	0	40
Gerado automaticamente pela Sugestão de Produção						
00001326 FRUTEIRA CONDESSA II - BRANCA/PRETO						
0000003280	15/5/2015	18/5/2015		20	0	20
Gerado automaticamente pela Sugestão de Produção						
00000072 FRUTEIRA TAMARA - BRANCA						
0000003280	15/5/2015	18/5/2015		20	0	20
Gerado automaticamente pela Sugestão de Produção						
00001327 FRUTEIRA TAMARA II - BRANCA/PRETO						
0000003280	15/5/2015	18/5/2015		40	0	40
Gerado automaticamente pela Sugestão de Produção						
00000029 MESA COMP. BELIZE - BRANCA						
0000003280	15/5/2015	18/5/2015		30	0	30
Gerado automaticamente pela Sugestão de Produção						
00000029 MESA COMP. BELIZE - CARVALHO BIANCO/PRET						
0000003280	15/5/2015	18/5/2015		20	0	20
Gerado automaticamente pela Sugestão de Produção						
00000029 MESA COMP. BELIZE - IMBUIA/PRETO						
0000003280	15/5/2015	18/5/2015		10	0	10
Gerado automaticamente pela Sugestão de Produção						
00000029 MESA COMP. BELIZE - TECA						
0000003280	15/5/2015	18/5/2015		60	0	60
Gerado automaticamente pela Sugestão de Produção						
00000068 MESA COMP. LEIA - AVELA/NOGAL BRILHO						
0000003280	15/5/2015	18/5/2015		30	0	30
Gerado automaticamente pela Sugestão de Produção						

Figura 21: Exemplo de uma Ordem de Produção recebida pelo operador das seccionadora

Para a fabricação de um móvel, é necessário que vários itens sejam produzidos e encaixados uns aos outros para que se obtenha o produto final. Cada item que compõe o produto tem suas especificações pré-definidas, tais como: largura, comprimento, espessura, tipo de material, etc. Isto significa que nem todos os itens serão cortados a partir do mesmo tipo de objeto. Na empresa em questão, os itens obtidos a partir de painéis de MDF são cortados separadamente de acordo com a espessura do objeto, assim como os itens obtidos a partir das placas de aglomerado. No entanto, as dimensões dos painéis são as mesmas para todas as espessuras e tipos de material. Dessa forma, para resolver um Problema de Corte de Estoque decidindo quais padrões de corte utilizar na produção dos itens requisitados, devemos resolver o problema (1.11)-(1.13), apresentado na Seção 1.3, para cada espessura diferente necessária.

Devido à dinâmica dos cortes realizados pela empresa, são permitidos apenas cortes guilhotinados. Quanto ao número de estágios, os padrões de corte utilizados pela S. móveis são todos em 2-estágios. Apesar de padrões de corte com um maior número de estágios aproveitarem melhor os objetos, com relação à perda de matéria-prima, estes demandam um tempo excessivo dos operadores da seccionadora, pois teriam que rotacionar os objetos mais vezes para realizar os cortes, aumentando o tempo de corte de um único objeto. Como a mão-de-obra é limitada e o tempo altamente relevante, a empresa admite apenas cortes guilhotinados 2-estágios.

Devido às restrições de corte da seccionadora, um recurso utilizado pelos operadores da máquina para economizar tempo, é o corte simultâneo de faixas resultantes do primeiro estágio, caso seja possível. O fato dos padrões serem do tipo guilhotinados e, na maioria, em 2-estágios é o que facilita esta prática. Na Figura 22 a seguir é ilustrada esta situação.



Figura 22: Cortes realizados simultaneamente em faixas resultantes do primeiro estágio

Uma tentativa para melhorar ainda mais a eficiência dos cortes, com relação ao tempo gasto para o corte de um único objeto, é a utilização de padrões de corte 1-grupo, dado que estes possuem tempo de corte menor do que padrões de corte 2-estágios. No entanto, a perda gerada por estes tipos de padrões de corte sugeridos é, geralmente, maior do que padrões de corte 2-estágios. Em padrões de corte 1-grupo, as faixas resultantes da primeira etapa de corte são amontoadas em uma “pilha” e cortadas simultaneamente, obtendo os itens desejados. A única restrição deste tipo de corte, é que deve-se atentar para que a altura da pilha seja suportada pela seccionadora. Além da operação da máquina de corte, a eficácia do processo de corte da matéria-prima está também relacionada com a qualidade dos padrões de corte utilizados e ao modo como estes são executados. A seguir discutiremos sobre os padrões de corte utilizados pela fábrica em questão.

2.2.3 Padrões de corte utilizados pela fábrica

Por muitos anos, a experiência do operador das máquinas seccionadoras fez com que este se tornasse o “cérebro” da empresa, sendo responsável por toda a elaboração dos padrões de corte utilizados no dia-a-dia da produção. A criação de um novo produto se iniciava com um esboço (desenho) do móvel mas sem dimensões muito bem estabelecidas, sendo que estas eram definidas a partir da elaboração dos padrões de corte que seriam utilizados para a produção deste novo móvel. Atualmente, devido a diversas mudanças que ocorreram e ainda ocorrem na empresa, os padrões de corte que eram utilizados foram introduzidos no computador que controla as máquinas de corte, sendo necessário apenas alguns cliques para executá-los. Como tudo fica salvo na máquina de corte, não existe um local físico (pastas) onde são guardados os desenhos dos planos de corte, juntamente com a quantidade de itens produzidos em cada padrão e sua perda de matéria prima correspondente. No entanto, apesar de vários padrões de corte estarem salvos na máquina seccionadora, a decisão sobre quais padrões de corte serão utilizados é tomada pelo operador da máquina, tendo livre poder de decisão entre utilizar os padrões salvos ou criar outros que julgar melhor para determinada situação. Devido à não existência física dos padrões de corte utilizados no processo de corte, foi necessário obter todas as informações dos padrões de corte através do operador da máquina seccionadora e elaborar manualmente os padrões de corte que são utilizados atualmente pela empresa, com o intuito de analisar a perda e comparar as soluções com as obtidas neste trabalho.

Segundo Martins (2010), determinar os padrões de corte que serão utilizados na prática, em geral não é uma tarefa simples, dado que é preciso levar em consideração vários

fatores, como por exemplo, a perda de matéria-prima, a carteira de pedidos, os prazos de entrega, a capacidade de produção da fábrica, entre outros. Segundo o gerente de produção empresa, a qualidade de um padrão de corte está fortemente ligada a dois aspectos: a facilidade de cortá-lo e o menor índice de perda possível. O primeiro aspecto, refere-se à preferência por padrões de corte que necessitem de pouco manuseio (rotações) do objeto. Já o segundo, a busca por trabalhar com padrões de corte que apresentem a menor perda possível.

Apesar da perda de matéria-prima ser fator importante na decisão dos padrões de corte, segundo o gerente de produção, atualmente não há conhecimento exato a respeito das perdas dos padrões de corte utilizados na empresa. Para os novos produtos, há um maior controle nesta questão pelo conhecimento das perdas resultantes no processo de corte, no entanto, é conhecida apenas a perda total do processo, contabilizando todos os itens que compõem o móvel, e não a perda individual de cada padrão de corte.

Na S. móveis, os padrões de corte utilizados são, em sua maioria, determinados por tentativa e erro. Quando um novo produto entra em estudo para fabricação, o gerente de produção utiliza o site Placa... (2015) para encontrar padrões de corte para a produção deste novo produto. No entanto, os padrões de corte resultantes desta ferramenta nem sempre são aceitáveis para empresa, devido à restrição de cortes guilhotinados em 2-estágios. Quando um padrão de corte inviável é encontrado, é realizada uma tentativa de transformar a solução em uma outra que seja factível aos moldes da empresa, havendo sempre a preocupação em utilizar a menor quantidade de objetos possível para realizar o corte de determinado lote do produto. Uma outra preocupação importante da empresa durante a montagem dos padrões de corte é a obtenção de padrões de corte que possam ser cortados repetidas vezes, a fim de utilizar a capacidade da máquina seccionadora de forma mais proveitosa, além de reduzir o número de ciclos da serra (definição 1.9 da Seção 1.3).

Um problema frequentemente encontrado pelas indústrias moveleiras está relacionado às dimensões dos objetos que são comprados de diversos fornecedores. Muitas vezes, na compra de um lote de matéria prima, os objetos possuem comprimento e/ou largura diferentes do lote adquirido anteriormente, fazendo com que padrões de corte que antes eram utilizados necessitem de ajustes. Isto prejudica fortemente o andamento da produção, visto que todos os padrões de cortes devem ser reajustados para as novas dimensões do objeto, causando perda no tempo de produção. No entanto, na empresa em questão este problema não acontece, visto que possuem um único fornecedor de matéria prima ($L \times W$

= 2750mm x 1830mm). Por este motivo, juntamente com a não renovação do catálogo de produtos da empresa, os padrões de corte não precisaram de adaptações por muitos anos. Porém, devido às mudanças existentes na empresa, novos produtos estão sendo analisados para incorporação ao catálogo, havendo necessidade de calcular novos padrões de corte viáveis para estes produtos.

Um importante conceito que deve ser fortemente observado durante a utilização da máquina de corte é o desgaste da matéria-prima causado pela espessura da serra de corte. Inevitavelmente, quando a serra percorre o objeto, é causado um desgaste no mesmo devido à sua espessura. Na fábrica em questão, a espessura da serra da seccionadora é de 5mm. Para que sejam construídos padrões de cortes que levam a espessura da serra em questão é necessário realizar adaptações nas dimensões dos itens e objetos, conforme apresentado na Seção 1.3 do Capítulo 1.

Em algumas situações o operador da máquina seccionadora utiliza apenas metade de uma placa de madeira para obtenção dos itens e não produz a quantidade total necessária de determinado item. Isto se deve ao fato de que ele já possui este mesmo item como resultado de produção excedente de outro lote de corte e conseqüentemente, produzirá apenas o que resta para completar a demanda solicitada. A outra metade restante da placa de madeira é armazenada próximo à máquina seccionadora e pode ser utilizada a qualquer momento para a produção de outros itens. Este processo de corte, com parte da matéria prima, se dá com o objetivo de reduzir a quantidade produzida de itens excedentes, deixando a matéria prima em um tamanho que possa ser aproveitada para a produção de outros itens com maior necessidade (CHERRI et al., 2014). No entanto, não há qualquer controle computacional dos itens excedentes existentes na fábrica. Ao longo deste trabalho, não serão considerados padrões de corte dessa forma, ou seja, apenas padrões de corte ao longo do objeto completo serão admitidos.

2.3 Diferenças entre as fábricas moveleiras da região

De maneira geral, todas as fábricas moveleiras possuem os mesmo processos para a produção de um móvel. Em se tratando mais especificamente da região compreendida pelo pólo moveleiro de Mirassol, pode-se observar ligeiras diferenças ao longo dos processos produtivos das fábricas e algumas peculiaridades obtidas pelos diferentes maquinários que as compõem. Por exemplo, na fábrica citada em Figueiredo e Rangel (2006) pode ser observado que alguns itens são submetidos à primeira demanda de tinta antes mesmo

de serem lixados, o que não acontece na linha de produção da fábrica apresentada neste trabalho. Outra diferença entre estas duas fábricas é relativo à preferência por produção de itens excedentes ao longo do corte da matéria-prima, uma vez que as fábricas nem sempre possuem espaço físico o suficiente para armazenar estes itens que pertencem a um estoque intermediário.

Considerando os tipos de padrões de corte admitidos pelas fábricas, foi citado anteriormente que a S. móveis tem preferência pela utilização de padrões de corte 2-estágios e 1-grupo, o que favorece a utilização das máquinas de corte que esta empresa possui. Já na fábrica objeto do estudo de Faccio e Rangel (2009) há preferência por outros tipos de padrões de corte ao longo da produção, sendo estes conhecidos na literatura por 2-grupos, 3i-grupo ou 3t-grupos.

Em se tratando das matérias-primas utilizadas, várias empresas utilizam sempre o *MDF* ou Aglomerado, em virtude dos menores custos e qualidades oferecidas por estes materiais. Mais detalhes sobre as fábricas moveleiras da região podem ser obtidos em Cavali (2004), Mosquera (2007), Faccio (2008) e Martins (2010).

Capítulo 3

O problema de corte de estoque na indústria moveleira

Neste capítulo será realizada uma revisão bibliográfica sobre geração de padrões de corte bidimensionais e serão abordados diversos tipos de padrões de cortes além da forma com a qual pode-se gerá-los. Este processo é de fundamental importância para a solução dos *PCE* devido à necessidade da geração de novas colunas para que seja possível encontrar uma solução com o método descrito na Seção 1.4. Além disso, serão apresentadas outras abordagens de solução para o *PCE* e será apresentado o código computacional desenvolvido para a solução do *PCE* bidimensional proposto neste trabalho, o qual será utilizado para a obtenção dos resultados computacionais no Capítulo 4.

3.1 Geração de padrões de corte bidimensionais

Um padrão de corte corresponde ao arranjo geométrico dos itens a serem cortados a partir de um objeto, isto é, à forma com que os objetos serão cortados para produzir itens menores. Para que o padrão de corte seja considerado factível, os itens devem ser dispostos de modo que não haja sobreposição e que não sejam excedidas as dimensões do objeto. Um padrão de corte é dito bidimensional quando duas dimensões (comprimento e largura) são relativas durante o processo de corte.

A um padrão de corte j , pode ser associado um vetor $A_j \in \mathbb{Z}_+^n$, no qual cada componente a_{ij} registra a quantidade de cada item i a ser cortada nesse padrão j . Os retângulos gerados após a aplicação do padrão de corte em um objeto e que não possuem representação em seu vetor associado são chamados de perda e descartados no processo produtivo.

Do ponto de vista operacional, algumas características devem ser consideradas para

garantir a viabilidade de execução da solução teórica encontrada para o padrão de corte e para a avaliação da qualidade do mesmo, como o tipo de corte, o número de estágios do padrão, a possibilidade de rotação dos itens e a forma de padrões de cortes em grupos.

Para calcular padrões de corte pode-se utilizar uma espécie de raciocínio lógico para alocar os itens sobre o objeto. No entanto, este processo é muito lento, não só devido às características dos cortes da indústria moveleira, mas também ao fato de, na maioria das vezes, o número de itens ser grande, o que causaria muitas possibilidades no cálculo manual. Assim sendo, modelos para criação dos padrões de corte foram criados para que esse processo se tornasse ágil e capaz de ser resolvido computacionalmente.

A determinação de um padrão de corte é considerado um problema de otimização combinatória e não apresenta tempo de solução polinomial (LUEKER, 1975). Diz-se que um algoritmo para um determinado problema é polinomial se a quantidade de passos requeridos para resolver qualquer instância do problema for limitada por um polinômio do tamanho da entrada (CINTRA, 2004).

Em Gilmore e Gomory (1965), a geração dos padrões de corte bidimensionais em 2-estágios foi realizada em duas etapas: primeiramente, resolve-se um problema da mochila para agrupar os itens em faixas, considerando cortes paralelos ao comprimento do objeto; em seguida, resolve-se outro problema da mochila para agrupar as faixas da primeira etapa, considerando agora a largura das faixas. Ou seja, o problema para encontrar um padrão de corte bidimensional é reduzido a $m+1$ problemas unidimensionais, m para a construção das faixas e o outro para melhor aproveitamento das mesmas ao longo do objeto.

Já em Gilmore e Gomory (1966), foi apresentada uma rotina fundamentada em programação dinâmica, que gera padrões de corte guilhotinados não-estagiados, ou seja, não há uma limitação no número de estágios. Os métodos propostos por Gilmore e Gomory são usados nos casos em que o número de vezes que uma peça pode ser produzida em um padrão de corte não está limitado, ou seja, problemas irrestritos.

Herz (1972) propôs uma melhoria no método de solução proposto por Gilmore e Gomory (1966), utilizando algoritmos recursivos para determinar o melhor padrão de corte possível na resolução de problemas bidimensionais irrestritos. Embora alguns pesquisadores tenham feito algumas modificações nos algoritmos propostos por Gilmore e Gomory, ou mesmo desenvolvido algoritmos alternativos (HERZ, 1972), o benefício obtido com as alterações promovidas, segundo Oliveira e Ferreira (1993), não compensa o acréscimo de dificuldade na implementação desses algoritmos.

Em Russo, Souza e Sterle (2013) são apresentados três erros no procedimento original proposto em Gilmore e Gomory (1966). Um deles foi notado e descrito por Herz (1972), porém nenhuma correção teria sido apresentada até então. Os outros dois nunca tinham sido expostos anteriormente. Estes afetam a eficácia e causam um aumento no esforço computacional para encontrar a solução do problema. Os autores apresentam as modificações para correção dos erros na função recursiva do procedimento de Gilmore e Gomory (1966) e um novo procedimento computacional é proposto. Os resultados obtidos são de significativa melhoria, no entanto este processo continua com esforço computacional alto.

Christofides e Whitlock (1977) desenvolveram um método de busca em árvore que encontra a solução exata para o problema de geração de padrões de corte guilhotinados bidimensionais, no qual utilizaram os resultados de Gilmore e Gomory (1966) e uma rotina baseada no problema clássico de transporte para determinar limitantes superiores para os nós durante a busca. No entanto, este algoritmo não consegue encontrar alguma solução quando se tem uma demanda com mais que vinte itens (FRITSCH; VORBERGER, 1995).

Wang (1983) propôs um método combinatório para geração de padrões de cortes, através de sucessivas combinações verticais e horizontais de semi-soluções já geradas. As novas semi-soluções são aceitas se não excederem as dimensões do objeto, ou tem uma perda máxima tolerável estabelecida no início do processo, relativa à área do objeto. Melhorias para o algoritmo de Wang foram propostas por Vasko (1989), Oliveira e Ferreira (1990), e Daza, Alvarenga e Diego (1995).

Cung, Hifi e Cun (2000) desenvolveram um algoritmo *Branch-and-Bound*, que é uma nova versão do algoritmo proposto por Hifi (1997) para problemas de corte bidimensionais restritos, ou seja, quando a demanda produzida de cada item é limitada. Para melhorar o desempenho do algoritmo, foi aumentado o limite inferior inicial, diminuindo inicialmente o espaço de busca. Também se tentou aperfeiçoar o limite superior efetuado a cada nó desenvolvido na árvore, aplicando algumas combinações simples e eficientes. Além disso, foram introduzidas novas estratégias para eliminação de simetrias e evitar a geração de padrões de corte duplicados.

Scheithauer (2002) desenvolveu um método para geração de padrões de corte 1-grupo utilizando um modelo matemático em que se determina a largura e comprimento das faixas a serem cortadas de uma só vez. O modelo original é composto por variáveis binárias e é voltado para padrões de corte restritos. No entanto, pode ser estendido facilmente para o caso irrestrito.

Lodi e Monaci (2003) apresentaram um método para geração de padrões de corte

bidimensionais 1-grupo restrito. Cortes deste tipo são utilizados em indústrias quando necessita-se de maior agilidade no processo de corte. No entanto, a perda obtida nesses padrões de corte é maior do que em padrões de corte 2-estágios, por exemplo. No trabalho, os autores consideraram cada unidade de demanda de um tipo de item separadamente, obtendo assim um modelo para o caso restrito. No entanto, este modelo não é facilmente estendido para o caso irrestrito, em que não há limitação para a produção de determinado item.

Yanasse e Morabito (2006) apresentaram um modelo não-linear também para a geração de padrões de corte 1-grupo. Neste, os autores apresentam um modelo utilizando padrões de corte não-exatos e comentam sobre a possibilidade de adaptar o modelo proposto para o caso exato, ou seja, o item possuir exatamente a mesma largura da faixa que está inserido, bastando apenas uma redefinição de variável no modelo. Além disso, uma linearização do modelo apresentado é proposta baseando-se no procedimento descrito em Harjunkoski et al. (1997).

Faccio e Rangel (2009) realizaram uma comparação entre os padrões de corte do tipo n -grupos, sendo estes divididos em 1-grupo, 2-grupos, 3i-grupo e 3t-grupos, durante a solução do problema de corte bidimensional e também ao longo do processo de geração de colunas. Os modelos foram testados com dados reais de uma fábrica de móveis e como conclusão obtiveram que a geração de padrões de corte do tipo 3t-grupos geraram uma menor perda de matéria-prima. No entanto, o tempo computacional utilizado para encontrar a solução de acordo com este tipo padrão de corte foi considerado alto.

Em Yanasse e Morabito (2013) é feita uma comparação entre diferentes modelos para geração de padrões de corte 1-grupo. Além disso, é proposto um novo modelo baseado em Scheithauer (2002), porém com geração de padrões de corte 2-estágios (e não 1-grupo). Os resultados computacionais mostraram menor tempo de solução para os modelos propostos, quando comparados aos originais. No artigo os autores citam o interesse na utilização destes modelos acoplados à solução do *PCE*, dada a importância desta etapa no processo de solução de Gilmore e Gomory (1965).

3.1.1 Geração de padrões de corte 2-estágios

A seguir serão apresentadas diferentes maneiras para geração de padrões de corte bidimensionais a serem utilizados neste trabalho na solução dos Problemas de Corte de Estoque (*PCE*) de acordo com a abordagem proposta em 1.4.

O procedimento de Gilmore e Gomory (1965)

Frequentemente chamado de Métodos das Duas Fases, o procedimento é utilizado para a geração de padrões de corte 2-estágios durante a utilização do método *Simplex* com geração de colunas e tem sua base fundamentada no problema da mochila. No entanto, segundo Arenales, Morabito e Yanasse (2004), este termo (problema da mochila) é comumente utilizado na literatura para tratar de problemas unidimensionais, o que não é o problema aqui tratado. Por outro lado, o termo “problema da mochila bidimensional” também não representa a situação aqui encontrada, pois este é utilizado para uma classe de problemas com duas restrições, o que também não modela a situação aqui encontrada. Assim sendo, este problema é geralmente tratado por problema de corte bidimensional.

Considere um objeto com dimensões $L \times W$, o qual será cortado para a produção de m itens com dimensões $\ell_i \times \omega_i$, $i = 1, \dots, m$. Além disso, considere que para cada item i , $i = 1, \dots, m$, seja conhecido um valor de utilidade v_i , que será o peso do item i na função objetivo do problema. Muitas vezes é utilizada a área do item como valor de utilidade, pois deseja-se maximizar a área cortada do objeto.

Seja $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)^T$ o vetor associado a um padrão de corte para o objeto $L \times W$, isto é, α_i é o número de itens do tipo i , $i = 1, \dots, m$, no padrão de corte. O problema de corte bidimensional é genericamente formulado por:

$$\max v_1\alpha_1 + v_2\alpha_2 + \dots + v_m\alpha_m \quad (3.1)$$

Sujeito a:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \quad \text{corresponde a um padrão de corte para o objeto } L \times W. \quad (3.2)$$

Note que a restrição (3.2) não pode ser modelada facilmente utilizando o problema da mochila, como no caso unidimensional, uma vez que duas dimensões são importantes no processo. Dessa forma, Gilmore e Gomory (1965) abordaram esta restrição da seguinte forma:

Fase 1: Determinar as melhores maneiras de se cortar as faixas: $L \times \omega_1, L \times \omega_2, \dots, L \times \omega_m$

Os itens que serão obtidos na faixa com largura ω_1 , por exemplo, obviamente não podem ter largura maior ou igual a ω_1 , pois caso contrário seria impossível cortar estes itens desta faixa. Devido à essa restrição, faz-se necessário a construção de conjuntos nos

quais os elementos são os itens que podem ser alocados em cada faixa, ou seja:

$$\Omega_k = \{ i \text{ tal que } : \omega_i \leq \omega_k \} \quad (3.3)$$

Esta definição de faixas é realizada apenas para diferentes valores de ω_i , $i = 1, \dots, m$, pois se $\omega_s = \omega_t$ então as faixas $L \times \omega_s$ e $L \times \omega_t$ são iguais. Dessa forma, suponhamos que existam r valores distintos para ω_i , $i = 1, \dots, m$. Por simplicidade de notação, suponhamos que as r primeiras larguras sejam as diferentes, ou seja, considera-se somente as faixas: $L \times \omega_1, L \times \omega_2, \dots, L \times \omega_r$. O exemplo apresentado em Arenales, Morabito e Yanasse (2004) ilustra esta situação:

Exemplo 3.1. Considere o problema de corte bidimensional, em que o objeto $L \times W = 110 \times 110$ deve ser cortado para a produção de 4 itens cujos comprimentos, larguras e valores de utilidade estão na tabela abaixo:

item i	$l_i \times \omega_i$	v_i
1	20 x 30	6
2	30 x 40	12
3	50 x 60	30
4	60 x 60	36

Para os itens descritos acima, temos 3 valores distintos de larguras (30, 40 e 60) e dessa forma, $r=3$. Logo, as faixas que serão cortadas terão dimensões 110×30 , 110×40 e 110×60 . Além disso, os conjuntos Ω_k , $k = 1, 2, 3$, são definidos da seguinte forma:

$$\text{Faixa 1 : } 110 \times 30 \Rightarrow \Omega_1 = \{1\}$$

$$\text{Faixa 2 : } 110 \times 40 \Rightarrow \Omega_2 = \{1, 2\}$$

$$\text{Faixa 3 : } 110 \times 60 \Rightarrow \Omega_3 = \{1, 2, 3, 4\}$$

Assim sendo, na Faixa 1 serão obtidos apenas itens 1. Já na Faixa 2 podem ser obtidos itens 1 ou 2, enquanto que na Faixa 3 podem ser obtidos quaisquer itens do problema. Note que faixas com valores de largura diferentes dos citados gerariam perdas, por exemplo, faixas com dimensões 110×35 , sempre teriam 5 cm de perda, pois o único item que pode ser cortado nesta faixa é o item 1, com 30cm de largura. Note que na faixa 3 não podem ser produzidos itens 1 empilhados, mesmo que a soma de suas larguras (30+30)

não exceda a largura da faixa, pois caso isto seja permitido a característica 2-estágios do padrão de corte é perdida.

Definidas as faixas que serão cortadas ao longo do objeto, é necessário definir a melhor maneira para se cortar os itens dentro de cada faixa, ou seja, obter o maior valor de utilidade possível dentro de cada faixa. Assim, para cada faixa $L \times \omega_k$, ($k = 1, \dots, r$), devemos resolver o seguinte problema da mochila:

$$V_k = \max \sum_{i \in \Omega_k} v_i \gamma_{ik} \quad (3.4)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i \in \Omega_k} \ell_i \gamma_{ik} \leq L \quad (3.5)$$

$$\gamma_{ik} \in \mathbb{Z}_+, i \in \Omega_k \quad (3.6)$$

em que γ_{ik} é o número de itens do tipo i na faixa $L \times \omega_k$

Resolvem-se os r problemas da mochila acima e tem-se as melhores faixas do padrão de corte. Veja esta etapa exemplificada abaixo:

Continuação do exemplo 3.1: Para cada uma das faixas 110×30 , 110×40 e 110×60 resolvemos um problema da mochila, assim:

Faixa 1: 110×30 com $\Omega_1 = \{1\}$

$$V_1 = \max 6\gamma_{11} \quad (3.7)$$

Sujeito a:

$$20\gamma_{11} \leq 110 \quad (3.8)$$

$$\gamma_{11} \in \mathbb{Z}_+ \quad (3.9)$$

Solução: $\gamma_{11} = 5$ e $V_1 = 30$

Faixa 2: 110×40 com $\Omega_2 = \{1, 2\}$

$$V_2 = \max 6\gamma_{12} + 12\gamma_{22} \quad (3.10)$$

Sujeito a:

$$20\gamma_{12} + 30\gamma_{22} \leq 110 \quad (3.11)$$

$$\gamma_{12}, \gamma_{22} \in \mathbb{Z}_+ \quad (3.12)$$

Solução: $\gamma_{12} = 1, \gamma_{22} = 3$ e $V_2 = 42$

Faixa 3: 110×60 com $\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4\}$

$$V_3 = \max 6\gamma_{13} + 12\gamma_{23} + 30\gamma_{33} + 36\gamma_{43} \quad (3.13)$$

Sujeito a:

$$20\gamma_{13} + 30\gamma_{23} + 50\gamma_{33} + 60\gamma_{43} \leq 110 \quad (3.14)$$

$$\gamma_{13}, \gamma_{23}, \gamma_{33}, \gamma_{43} \in \mathbb{Z}_+ \quad (3.15)$$

Solução: $\gamma_{13} = 0, \gamma_{23} = 0, \gamma_{33} = 1, \gamma_{43} = 1$ e $V_3 = 66$

Assim sendo, tem-se o valor máximo de utilidade de cada uma das faixas, $V_1 = 30$, $V_2 = 42$ e $V_3 = 66$, ou seja, cada vez que a faixa 1, por exemplo, for utilizada para compor o padrão de corte bidimensional, esta contribuirá com 30 unidades no valor de utilidade de padrão de corte (cujo este valor quer-se maximizar).

Dessa forma, a última etapa para encontrar o padrão de corte bidimensional é descobrir quantas vezes utilizaremos cada uma das r faixas criadas.

Fase 2: Determinar quantas vezes a faixa *Lemphx* $\omega_k, k = 1, \dots, r$ será utilizada no padrão

Como a largura do objeto é limitada por W , é claro que a combinação de faixas que serão utilizadas para compor o padrão de corte bidimensional não pode exceder este valor. Desta forma, para descobrir a melhor maneira de distribuir as faixas de largura $\omega_k, k = 1, \dots, r$ ao longo de W , basta resolver o seguinte problema da mochila:

$$V = \max \sum_{i=1}^r V_i \beta_i \quad (3.16)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^r \omega_i \beta_i \leq W \quad (3.17)$$

$$\beta_i \in \mathbb{Z}_+, i = 1, \dots, r \quad (3.18)$$

em que $\beta_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = 1, \dots, r$ é o número de vezes que a faixa L *emphx* ω_k , $k = 1, \dots, r$, será utilizada no padrão de corte bidimensional.

Continuação do exemplo 3.1:

Depois de resolvidas as 3 mochilas, para determinar quais itens serão cortados em cada faixa, resta ainda o problema da mochila que define quantas vezes as faixas devem ser utilizadas para formar o padrão de corte bidimensional:

$$V = \max 30\beta_1 + 42\beta_2 + 66\beta_3 \quad (3.19)$$

Sujeito a:

$$30\beta_1 + 40\beta_2 + 60\beta_3 \leq 110 \quad (3.20)$$

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{Z}_+ \quad (3.21)$$

Solução: $\beta_1 = 1, \beta_2 = 1, \beta_3 = 1$ e $V = 138$

Sendo assim, basta juntar as faixas nas quantidades acima e compor o padrão de corte bidimensional.

De uma forma resumida, pode-se dizer que o procedimento descrito por Gilmore e Gomory (1965) para a geração de padrões de corte bidimensionais é dado por:

1. Resolver os r problemas da mochila (3.4) - (3.6) obtendo os valores de utilidade de cada um deles;
2. Resolver o problema da mochila (3.16) - (3.18) para encontrar o padrão de corte bidimensional.

Para encontrar o vetor associado $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ ao padrão de corte gerado basta

efetuar as seguintes operações:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)^T = \left(\sum_{k=1}^r \gamma_{1k} \beta_k, \sum_{k=1}^r \gamma_{2k} \beta_k, \dots, \sum_{k=1}^r \gamma_{mk} \beta_k \right)$$

Note que esta estratégia de solução gera padrões de corte bidimensionais não-exatos, uma vez que permite-se a inclusão de itens com largura menor ou igual à largura da faixa L

emphx $\omega_k, k = 1, \dots, r$. Para gerar padrões de corte exato, basta alterar a definição dos conjuntos Ω_k em (3.3) para:

$$\Omega_k = \{ i \text{ tal que } : \omega_i = \omega_k \} \quad (3.22)$$

O modelo matemático de Yanasse e Morabito (2013)

Uma outra maneira que pode ser utilizada para a geração de padrões de corte 2-estágios durante a execução do método *Simplex* com geração de colunas é apresentada em Yanasse e Morabito (2013), que consiste na redefinição de algumas variáveis do modelo descrito em Scheithauer (2002). Diferentemente do procedimento apresentado anteriormente, esta forma de geração de padrões de corte 2-estágios é fundamentada na solução de um único modelo matemático. Para apresentar formalmente o modelo, considere os seguintes parâmetros:

- ✓ m é o número de itens distintos;
- ✓ L, W são o comprimento e largura, respectivamente, do objeto;
- ✓ ℓ_i e ω_i são o comprimento e largura, respectivamente, dos itens, $i = 1, \dots, m$;
- ✓ v_i são os valores de utilidade de cada item (por exemplo, área) $i = 1, \dots, m$;
- ✓ $b_i, i = 1, \dots, m$, é a quantidade máxima permitida para a produção de cada item i ;
- ✓ P - Número máximo de faixas da esquerda para a direita no padrão $\left(P = \left\lfloor \frac{L}{\ell_{min}} \right\rfloor \right)$;
- ✓ Q - Número máximo de faixas de baixo para cima no padrão $\left(Q = \left\lfloor \frac{W}{\omega_{min}} \right\rfloor \right)$;

As variáveis do modelo são definidas por:

- ✓ W_k : largura da k -ésima faixa (de baixo para cima) no padrão de corte ($k = 1, \dots, Q$);
- ✓ $x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{se o item tipo } i \text{ é colocado na } j\text{-ésima posição da faixa } k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$,
 $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, P, k = 1, \dots, Q$.

Dessa forma, o modelo para gerar um padrão de corte guilhotinado 2-estágios, não-exato e restrito é dado por:

$$\max Z_{YM} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^P \sum_{k=1}^Q v_i x_{ijk} \quad (3.23)$$

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^Q W_k \leq W \quad (3.24)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ijk} \leq 1, \forall j = 1, \dots, P, k = 1, \dots, Q \quad (3.25)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^P \ell_i x_{ijk} \leq L, \forall k = 1, \dots, Q \quad (3.26)$$

$$\sum_{i=1}^m \omega_i x_{ijk} \leq W_k, \forall j = 1, \dots, P, k = 1, \dots, Q \quad (3.27)$$

$$\sum_{j=1}^P \sum_{k=1}^Q x_{ijk} \leq b_i, \forall i = 1, \dots, m \quad (3.28)$$

$$W_k \geq W_{k+1}, \forall k = 1, \dots, Q \quad (3.29)$$

$$W_k \geq 0, \forall k = 1, \dots, Q \quad (3.30)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}, \forall i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, P, k = 1, \dots, Q \quad (3.31)$$

A função objetivo (3.23) maximiza o valor dos itens cortados no padrão de corte. A restrição (3.24) garante que não sejam escolhidas faixas cuja largura do padrão de corte selecionado excedam os limites do objeto. As restrições (3.25) garantem que na j -ésima posição da faixa k seja alocado no máximo 1 item, ou seja, não haverá sobreposição de itens. As restrições (3.26) e (3.27) não permitem que os itens alocados nas faixas horizontais ou verticais excedam as dimensões da própria faixa. As restrições (3.28) referem-se à quantidade máxima permitida para a produção de cada item e as restrições

(3.29) eliminam simetrias no modelo, ou seja, eliminam padrões de corte equivalentes com disposições dos itens sobre o objeto de modo distinto, reduzindo assim o espaço de busca. As restrições (3.30) e (3.31) referem-se à não-negatividade e à característica binária das variáveis, respectivamente.

Com relação à permissão para produção de itens rotacionados, não há qualquer tipo de limitação que impeça a utilização deste modelo. No entanto, deve ser realizada uma verificação sobre quais itens não permitem rotação, ou seja, itens que quando rotacionados possuem dimensões superiores às dimensões do objeto. Caso algum item que não possa ser rotacionado seja encontrado, este não deve fazer parte da função objetivo e das restrições do modelo descrito acima. Com relação à restrição da produção máxima de certo tipo de item, deve ser considerado a soma das quantidades produzidas deste item com o seu respectivo item rotacionado.

Note que este modelo é facilmente estendido para o caso irrestrito, ou seja, quando não há limitação para a produção dos itens, bastando apenas retirar a restrição (3.28).

3.1.2 Geração de padrões de corte 1-grupo

Devido à rapidez no processo de corte propiciada por este tipo de padrão de corte, estes são empregados quando a busca pela otimização de tempo na produção é algo fortemente necessário, pois na maioria dos casos, padrões de cortes formados por 1-grupo geram perdas de materiais maiores do que os padrões de corte em k-estágios.

O modelo matemático de Yanasse e Morabito (2006)

A seguir será apresentado o modelo para obtenção de padrões de corte guilhotinados 1-grupo restrito exato e não-exato, apresentado em Yanasse e Morabito (2006). O modelo considera que os itens tem orientação fixa, ou seja, não é permitida a rotação de itens.

Primeiramente será tratado o caso não-exato utilizando um problema de programação não-linear inteira. Considere os parâmetros definidos em (3.1.1) e os seguintes parâmetros adicionais:

- ✓ J - a quantidade de comprimentos diferentes $\ell_i, i = 1, \dots, m$;
- ✓ K - a quantidade de larguras diferentes $\omega_i, i = 1, \dots, m$;

O parâmetro v_{ijk} , que representa o valor de cada item $i = 1, \dots, m$, alocado dentro de um retângulo de dimensões $\ell_j x \omega_k$, $j = 1, \dots, J$ e $k = 1, \dots, K$, é definido por:

$$v_{ijk} = \begin{cases} v_i, & \text{se } \ell_i \leq \ell_j \text{ e } \omega_i \leq \omega_k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.32)$$

Basicamente a ideia do modelo é a seguinte: criar retângulos de dimensões $\ell_j x \omega_k$, $j = 1, \dots, J$ e $k = 1, \dots, K$ e permitir a inserção de itens de dimensões menores nestes retângulos. O objetivo é encontrar os valores das seguintes variáveis:

- ✓ λ_j - número de vezes que o comprimento ℓ_j ($j = 1, \dots, J$) é cortado ao longo de L ;
- ✓ μ_k - número de vezes que a largura ω_k ($k = 1, \dots, K$) é cortada ao longo de W ;
- ✓ a_{ijk} - número de retângulos $\ell_j x \omega_k$ que contém itens do tipo i , $i = 1, \dots, m$.

O modelo não linear 1-grupo para gerar um padrão de corte restrito não-exato é dado por:

$$\max Z_1 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K v_{ijk} a_{ijk} \quad (3.33)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^J \ell_j \lambda_j \leq L \quad (3.34)$$

$$\sum_{k=1}^K \omega_k \mu_k \leq W \quad (3.35)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ijk} \leq \lambda_j \mu_k, \quad \forall j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K \quad (3.36)$$

$$\sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K a_{ijk} \leq b_i, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (3.37)$$

$$\lambda_j \in \mathbb{Z}_+; \quad \forall j = 1, \dots, J \quad (3.38)$$

$$\mu_k, a_{ijk} \in \mathbb{Z}_+; \quad \forall i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, J, k = 1, \dots, K \quad (3.39)$$

A função objetivo (3.33) maximiza o valor total dos itens cortados no padrão. Já as restrições (3.34) e (3.35) impedem que o comprimento e largura, respectivamente, das

faixas não excedam as dimensões do objeto. Ou seja, quando analisa-se a construção de faixas de comprimento ℓ_j , $j = 1, \dots, J$ (restrições (3.34)) pode-se imaginar que o problema é unidimensional, não importando a largura. Analogamente, o raciocínio para a criação das faixas de largura ω_k , $k = 1, \dots, K$ é o mesmo. A restrição (3.36) possui o termo não-linear $\lambda_j \mu_k$ correspondente ao número de retângulos $\ell_j x \omega_k$ no padrão. Esta restrição limita o total de itens de todos os tipos cortados no padrão, pois não se pode produzir mais itens do que a quantidade existente de retângulos $\ell_j x \omega_k$. A restrição (3.37) garante um padrão de corte restrito, isto é, limita a quantidade de itens do tipo i produzidos no objeto e a restrição (3.38) diz respeito à não negatividade e integralidade das variáveis.

Observe que a formulação descrita em (3.33) - (3.39) tem como solução um padrão de corte bidimensional não-exato e restrito. Para obter padrões de corte exatos, ou seja, sem necessidade de aparas para obter os itens, basta alterar a definição dos parâmetros v_{ijk} em (3.32) para:

$$v_{ijk} = \begin{cases} v_i, & \text{se } \ell_i = \ell_j \text{ e } \omega_i = \omega_k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.40)$$

Observe que na utilização de padrões de corte exatos não há necessidade de definir as variáveis a_{ijk} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, J$, $k = 1, \dots, K$ com três índices, sendo que esta representa o número de retângulos $\ell_j x \omega_k$ que contém itens do tipo i , $i = 1, \dots, m$, pois não existe a possibilidade de alocar um item de dimensão $\ell_i x \omega_i$ em um retângulo com dimensões maiores e sim em retângulos com dimensões exatamente igual ao tamanho dos itens (caso exato). Dessa forma, redefinindo as variáveis a_{ijk} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, J$, $k = 1, \dots, K$ temos $a_{jk} = \sum_{i=1}^m a_{ijk}$, $\forall j = 1, \dots, J$ e $\forall k = 1, \dots, K$. Assim sendo, a_{jk} representa o número de itens com dimensões $\ell_j x \omega_k$, $j = 1, \dots, J$ e $\forall k = 1, \dots, K$. Logo, o modelo para geração de padrões de corte 1-grupo exato restrito é dado por:

$$\max Z_2 = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K v_{jk} a_{jk} \quad (3.41)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^J \ell_j \lambda_j \leq L \quad (3.42)$$

$$\sum_{k=1}^K \omega_k \mu_k \leq W \quad (3.43)$$

$$a_{jk} \leq \lambda_j \mu_k, \quad \forall j = 1, \dots, J; \quad k = 1, \dots, K \quad (3.44)$$

$$a_{jk} \leq b_i, \text{ com } \ell_i = \ell_j, \quad \omega_i = \omega_k, \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, J, \quad k = 1, \dots, K \quad (3.45)$$

$$\lambda_j, \mu_k, a_{jk} \in \mathbb{Z}_+; \quad \forall j = 1, \dots, J, \quad k = 1, \dots, K \quad (3.46)$$

Independentemente do tratamento que se dá à geração do padrão de corte através dos modelos (3.33) - (3.39) e (3.41) - (3.46), é notável que ambos os modelos são não-lineares, devido às restrições (3.36) e (3.44), respectivamente. Será apresentada uma formulação linear destes modelos descrita em Yanasse e Morabito (2006) baseada em um método proposto por Harjunkoski et al. (1997), que utiliza representações binárias para reescrever a restrição não-linear do modelo sob uma forma linear. Será apresentada a formulação linear para o modelo (3.33) - (3.39), sendo a linearização do modelo (3.41) - (3.46) de forma análoga.

A não-linearidade do modelo (3.33) - (3.39) se dá através da restrição (3.36) e mais precisamente ao termo $\lambda_j \mu_k$. Assim sendo, uma destas variáveis é escolhida para ser escrita com representação binária. Seja λ_j a variável escolhida. Assim, $\lambda_j = \sum_{s=1}^{s_j} 2^{s-1} \beta_{js}$, onde $\beta_{js} \in \{0, 1\}$ e s_j é o número de dígitos necessários para representar o número $\left\lfloor \frac{L}{\ell_j} \right\rfloor$ na notação binária, isto é, $2^{s_j-1} \leq \left\lfloor \frac{L}{\ell_j} \right\rfloor < 2^{s_j}$. Para melhor entendimento de s_j , considere o seguinte Exemplo 3.2.

Exemplo 3.2. *Seja $L = 13$ cm e $\ell_1 = 4$ cm. Dessa forma, tem-se:*

$$2^{s_1-1} \leq \left\lfloor \frac{13}{4} \right\rfloor < 2^{s_1} \Leftrightarrow 2^{s_1-1} \leq 3 < 2^{s_1}$$

Para que a equação acima seja satisfeita devemos ter $s_1=2$. Além disso, de acordo com a definição de λ_j tem-se $\lambda_1 = 3$. Note que o número 3 em notação decimal é dado em notação binária por 11, conforme mostra a Figura 23. Ou seja, $(3)_{10} = (11)_2$

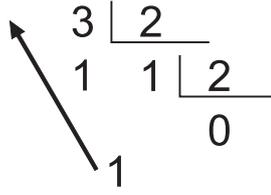


Figura 23: Representação binária de λ_1

Substituindo $s_1=2$ e $\lambda_1 = 3$ em $\lambda_j = \sum_{s=1}^{s_j} 2^{s-1} \beta_{js}$ temos que:

$$3 = \sum_{s=1}^2 2^{s-1} \beta_{1s} = 1 * \beta_{11} + 2 * \beta_{12} \quad (3.47)$$

Agora, suponhamos que $\beta_{11} = 1$ e $\beta_{12} = 1$. Substituindo estes valores em (3.47) a igualdade está satisfeita. Dessa forma, β_{js} são, de fato, os valores das componentes do número λ_j em representação binária.

Substituindo $\lambda_j = \sum_{s=1}^{s_j} 2^{s-1} \beta_{js}$ em (3.36) temos que a restrição é dada por:

$$\sum_{i=1}^m a_{ijk} \leq \lambda_j \mu_k = \sum_{s=1}^{s_j} 2^{s-1} \beta_{js} \mu_k, \forall j, k.$$

Note que após esta alteração a restrição continua não-linear, devido ao produto $\beta_{js} \mu_k$ uma vez que ambos os termos são variáveis do problema (β_{js} também é variável pois provém de λ_j). Devido a esta questão, faz-se $f_{jks} = \beta_{js} \mu_k$, ou seja, se $\beta_{js} = 1$ tem-se $f_{jks} = \mu_k$. Por outro lado, se $\beta_{js} = 0$ tem-se $f_{jks} = 0$. Note que $f_{jks} \geq 0$, pois β_{js} e μ_k o são. Dessa forma, a mudança de variável $f_{jks} = \beta_{js} \mu_k$ lineariza e não altera a restrição desde que sejam impostas as seguintes condições:

$$f_{jks} \leq \mu_k \quad (3.48)$$

$$f_{jks} \geq \mu_k - M(1 - \beta_{js}) \quad (3.49)$$

$$f_{jks} \leq M\beta_{js} \quad (3.50)$$

Se $\beta_{js} = 0$ as inequações (3.49) e (3.50) garantem que $f_{jks} = 0$, uma vez que $f_{jks} \geq 0$. Por outro lado, se $\beta_{js} = 1$ as inequações (3.48) e (3.49) garantem que $f_{jks} = \mu_k$. Assim sendo, podemos substituir a restrição (3.36) por:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m a_{ijk} &\leq \sum_{s=1}^{s_j} 2^{s-1} f_{jks} \\ f_{jks} &\leq \mu_k \\ f_{jks} &\geq \mu_k - M(1 - \beta_{js}) \\ f_{jks} &\leq M\beta_{js} \end{aligned}$$

O modelo linear inteiro para geração de padrões de corte 1-grupo não-exato restrito é dado por:

$$\max Z_3 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K v_{ijk} a_{ijk} \quad (3.51)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^J \ell_j \sum_{s=1}^{s_j} 2^{s-1} \beta_{js} \leq L \quad (3.52)$$

$$\sum_{k=1}^K \omega_k \mu_k \leq W \quad (3.53)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ijk} \leq \sum_{s=1}^{s_j} 2^{s-1} f_{jks}, \quad \forall j = 1, \dots, J, k = 1, \dots, K \quad (3.54)$$

$$f_{jks} \leq \mu_k, \quad \forall j = 1, \dots, J, k = 1, \dots, K, s = 1, \dots, s_j \quad (3.55)$$

$$f_{jks} \geq \mu_k - M(1 - \beta_{js}), \quad \forall j = 1, \dots, J, k = 1, \dots, K, s = 1, \dots, s_j \quad (3.56)$$

$$f_{jks} \leq M\beta_{js}, \quad \forall j = 1, \dots, J, k = 1, \dots, K, s = 1, \dots, s_j \quad (3.57)$$

$$\sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K a_{ijk} \leq b_i, \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad (3.58)$$

$$\beta_{js} \in \{0, 1\}, \quad \forall j = 1, \dots, J, s = 1, \dots, s_j \quad (3.59)$$

$$\mu_k \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall k = 1, \dots, K \quad (3.60)$$

$$a_{ijk} \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, J, k = 1, \dots, K \quad (3.61)$$

Note que, a função objetivo (3.51) e as restrições (3.52), (3.53) e (3.58) são as mesmas que aparecem no modelo não linear 1-grupo (3.33) - (3.39). Apenas a restrição (3.36) foi substituída pelas restrições (3.54) - (3.57). Dessa forma, tem-se um modelo linear para a

geração de padrões de corte 1-grupo exato restrito, dado por (3.51) - (3.61).

O modelo matemático de Scheithauer (2002)

A seguir será introduzido outro modelo matemático para geração de padrões de corte 1-grupo não-exato, apresentado por Scheithauer (2002) e também descrito em Yanasse e Morabito (2013). Diferentemente das variáveis do modelo (3.33) - (3.39), deseja-se encontrar os comprimentos e larguras de cada faixa a ser cortada, e não quantas vezes cortaremos uma faixa de comprimento $\ell_j x \omega_k$, como no modelo referido anteriormente. Para isso, considere os parâmetros definidos em (3.1.1) e as seguintes variáveis:

- ✓ L_j : comprimento da j -ésima faixa (da esquerda para a direita) no padrão de corte ($j = 1, \dots, P$);
- ✓ W_k : largura da k -ésima faixa (de baixo para cima) no padrão de corte ($k = 1, \dots, Q$);
- ✓ $x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{se o item tipo } i \text{ é colocado no retângulo } L_j x W_k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$,
 $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, P$, $k = 1, \dots, Q$.

Note que neste novo modelo, a variável x_{ijk} determina se o item i será cortado do retângulo $L_j x W_k$ ou não, diferente do modelo (3.33) - (3.39), em que a variável a_{ijk} define a quantidade de itens i cortados no retângulo $L_j x W_k$. O modelo a seguir encontra padrões de corte 1-grupo não-exato restrito.

$$\max Z_4 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^P \sum_{k=1}^Q v_i x_{ijk} \quad (3.62)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^P L_j \leq L \quad (3.63)$$

$$\sum_{k=1}^Q W_k \leq W \quad (3.64)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ijk} \leq 1, \quad \forall j = 1, \dots, P, k = 1, \dots, Q \quad (3.65)$$

$$\sum_{i=1}^m \ell_i x_{ijk} \leq L_j, \quad \forall j = 1, \dots, P, k = 1, \dots, Q \quad (3.66)$$

$$\sum_{i=1}^m \omega_i x_{ijk} \leq W_k, \quad \forall j = 1, \dots, P, k = 1, \dots, Q \quad (3.67)$$

$$\sum_{j=1}^P \sum_{k=1}^Q x_{ijk} \leq b_i, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (3.68)$$

$$L_j \geq L_{j+1}, \quad \forall j = 1, \dots, P \quad (3.69)$$

$$W_k \geq W_{k+1}, \quad \forall k = 1, \dots, Q \quad (3.70)$$

$$L_j, W_k \geq 0, \quad j = 1, \dots, P, k = 1, \dots, Q \quad (3.71)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}, \quad \forall i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, P, k = 1, \dots, Q \quad (3.72)$$

A função objetivo (3.62) maximiza o valor dos itens cortados no padrão de corte. As restrições (3.63) e (3.64) garantem que não sejam escolhidas faixas cujo comprimento e largura, respectivamente, do padrão de corte selecionado excedam os limites do objeto. As restrições (3.65) garantem que em um retângulo de dimensões $\ell_j x \omega_k$ seja alocado no máximo 1 item. As restrições (3.66) e (3.67) não permitem que os itens alocados nas faixas horizontais ou verticais excedam as dimensões da própria faixa. As restrições (3.68) referem-se à quantidade máxima permitida para a produção de cada item e as restrições (3.69) e (3.70) eliminam simetrias no modelo, ou seja, eliminam padrões de corte equivalentes com disposições dos itens sobre o objeto de modo distinto, reduzindo assim o espaço de busca. As restrições (3.71) e (3.72) referem-se à não-negatividade e à característica inteira das variáveis, respectivamente. Note que as variáveis L_j e W_k não precisam ser inteiras.

O modelo (3.62)-(3.72) pode ser facilmente estendido para gerar padrões de corte irrestritos, ou seja, sem uma quantidade limite para a produção de cada item, bastando retirar a restrição (3.68) do modelo. Com relação à rotação dos itens, não há questões que limitam o tratamento desta questão no modelo (3.62)-(3.72), pois não é exigido ordenação

de itens para organização de dados e podemos facilmente eliminar o número máximo de produção de cada item, bastando apenas retirar as restrições (3.68) do modelo.

3.2 O problema de corte de estoque bidimensional

Os primeiros estudos com grande expressão em problemas de corte são encontrados em Gilmore e Gomory (1961) e Gilmore e Gomory (1963), em que o problema de corte unidimensional é tratado como um problema de programação linear inteira no qual as colunas correspondentes aos padrões de corte são geradas através da solução de um problema da mochila.

Com relação à solução dos *PCE* bidimensionais, onde o problema é resolvido levando-se em consideração a demanda de cada item e não somente a geração de um único padrão de corte, pode-se citar trabalhos como os de Martello, Pisinger e Vigo (2000), Puchinger e Raidl (2007), Lodi, Martello e Vigo (2004), Amossen (2005), Alves et al. (2009), entre outros.

O modelo Matemático de Macedo, Alves e Valério de Carvalho (2010)

Uma abordagem utilizada para a solução dos *PCE* bidimensionais foi apresentada por Macedo, Alves e Valério de Carvalho (2010), em que adaptaram o modelo de fluxo em arcos proposto por Valério de Carvalho (1999) para a solução de *PCE* unidimensionais com cortes guilhotinados. Macedo, Alves e Valério de Carvalho (2010) estenderam o modelo de Valério de Carvalho (1999) para o caso bidimensional com cortes guilhotinados 2-estágios, utilizando o mesmo conceito de **faixas** descrito por Gilmore e Gomory (1965). Para o primeiro estágio de cortes, considere a definição dos seguintes elementos:

- O conjunto $W^* = \{\omega_1^*, \omega_2^*, \dots, \omega_t^*\}$, formado por t larguras diferentes dos m itens, ordenados em forma crescente;
- O grafo $G^0 = (V^0, A^0)$ com $V^0 = \{0, 1, 2, \dots, W\}$ e $A^0 = \{(a, b) : 0 \leq a < b \leq W \text{ e } b - a = \omega_i^*, \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, t\}\}$

Já para o segundo estágio de cortes, para cada $s \in \{1, 2, \dots, t\}$ considere o seguinte grafo: $G^s = (V^s, A^s)$, onde $V^s = \{0, 1, 2, \dots, L\}$ e $A^s = \{(d, e) : 0 \leq d < e \leq W, e - d = \ell_i^*, \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, m\} : \omega_i \leq \omega_s\}$. Assim sendo, o modelo linear inteiro para a solução

do *PCE* bidimensional guihotinado 2-estágios não-exato proposto por Macedo, Alves e Valério de Carvalho (2010) é dado por:

$$\min z^0 \quad (3.73)$$

Sujeito a:

$$\sum_{(a,b) \in A^0} x_{ab}^0 - \sum_{(b,c) \in A^0} x_{bc}^0 = \begin{cases} -z^0, & \text{se } b = 0 \\ 0, & \text{se } b = 1, 2, \dots, W-1 \\ z^0, & \text{se } b = W \end{cases} \quad (3.74)$$

$$\sum_{(c,c+\omega_s^*) \in A^0} x_{c,c+\omega_s^*}^0 - z^s = 0, \quad \forall s \in \{1, \dots, t\} \quad (3.75)$$

$$\sum_{\substack{(d,e) \in A^s \\ \omega^* \in W^*}} x_{de\omega^*}^s - \sum_{\substack{(e,f) \in A^s \\ \omega^* \in W^*}} x_{ef\omega^*}^s = \begin{cases} -z^s, & \text{se } e = 0 \\ 0, & \text{se } e = 1, 2, \dots, L-1 \\ z^0, & \text{se } e = L \end{cases}, \quad \forall s \in \{1, \dots, t\} \quad (3.76)$$

$$\sum_{s=1}^t \sum_{(f,f+\ell_i) \in A^s} x_{f,f+\ell_i,\omega_i}^s \geq d_i, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (3.77)$$

$$x_{ab}^0 \in \mathbb{Z}_+; \quad \forall (a,b) \in A^0 \quad (3.78)$$

$$x_{de\omega^*}^s \in \mathbb{Z}_+; \quad \forall (d,e) \in A^s, \forall s \in \{1, \dots, t\} \quad \forall \omega^* \in W^* \quad (3.79)$$

, em que z^0 representa o número de objetos em estoque que serão utilizados no processo de corte e $z^s, \forall s \in \{1, 2, \dots, t\}$, é o número de faixas com largura ω_s cortadas no primeiro estágio.

As variáveis x_{ab}^0 representam o fluxo na aresta (a,b) do grafo G^0 e $x_{cd\omega^*}^s$ representa o fluxo na aresta $(c,d) \in G^s$, relacionada com os itens de comprimento $(d-c)$ e largura $\omega^* \in W^*$. Note que o terceiro índice ω^* diferencia itens de mesmo comprimento e larguras diferentes no mesmo grafo G^s .

O conjunto de restrições (3.75) realizam o acoplamento entre as duas fases (estágios) do problema, ou seja, o número de faixas com altura $\omega_i^*, \forall i \in \{1, 2, \dots, t\}$, cortadas no primeiro estágio deve ser igual ao número de faixas com altura ω_i^* cortadas no segundo estágio. As restrições (3.74) e (3.76) são relacionadas à conservação do fluxo no primeiro e segundo estágios, respectivamente, e as restrições (3.77) garantem que a demanda de cada item seja satisfeita com a permissão de produção excedente de itens. Já as restrições (3.78) e (3.79) referem-se ao domínio das variáveis.

No artigo original são apresentadas algumas estratégias para a redução da complexidade do modelo, como por exemplo, a redução do número de arestas nos grafos. Além destas, são apresentadas restrições para a eliminação de padrões de corte simétricos e também é abordado o caso quando há permissão para a produção de itens rotacionados. Exemplos computacionais são expostos e conclui-se que o modelo apresentado possui desempenho altamente satisfatório.

O modelo Matemático de Silva, Alvelos e Valério de Carvalho (2010)

Silva, Alvelos e Valério de Carvalho (2010) propuseram um modelo matemático linear inteiro para a solução do *PCE* bidimensional que não é baseado no processo de geração de colunas. A partir do modelo proposto por Dyckhoff (1981) para a solução do *PCE* unidimensional, os autores estenderam a formulação para o caso bidimensional.

A dinâmica do modelo é baseada nos objetos resultantes após a obtenção de um item, chamados de objetos residuais. Por exemplo, considere um *PCE* bidimensional com objetos de dimensão $L \times W = 6 \times 6$ e os itens a ser cortados na tabela abaixo:

$Item(i)$	$Comprimento(\ell_i)$	$Largura(\omega_i)$	$Demanda(d_i)$
1	4	3	5
2	2	2	5

Um exemplo de cortes deste objeto é: a partir do objeto inicial ($L \times W = 6 \times 6$) corte um item 1 de acordo com a Figura 24:

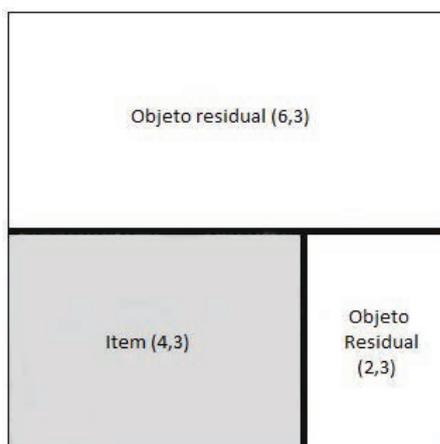


Figura 24: Dinâmica do primeiro corte do objeto (SILVA; ALVELOS; VALÉRIO DE CARVALHO, 2010)

A partir do objeto residual (6,3) é cortado um item 2, de acordo com a Figura 25:



Figura 25: Dinâmica do segundo corte do objeto residual (SILVA; ALVELOS; VALÉRIO DE CARVALHO, 2010)

Dessa forma, os itens vão sendo obtidos a partir dos objetos residuais gerados a cada iteração. De modo geral, a dinâmica do modelo é obter um item a partir de dois cortes guilhotinados e gerar objetos residuais, utilizando os objetos residuais para a produção de novos itens. Este processo é repetido até que todos os itens demandados sejam obtidos.

Para que seja possível a utilização do modelo proposto por Silva, Alvelos e Valério de Carvalho (2010) é necessário que se conheça todos os cortes e objetos residuais possíveis para o problema. Desse modo, no artigo original é proposto um algoritmo para encontrar a enumeração dos cortes de forma que o modelo seja passível de utilização.

Supondo que todos os cortes e objetos residuais sejam conhecidos, o modelo proposto por Silva, Alvelos e Valério de Carvalho (2010) para a solução do *PCE* bidimensional guilhotinado 2-estágios não-exato é formalmente apresentado por:

$$\min \sum_{i=1}^m x_{i0} \quad (3.80)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=0}^n x_{ij} \geq d_i, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (3.81)$$

$$\sum_{j=0}^n \sum_{i=1}^m a_{ijk} x_{ij} \geq \sum_{i=1}^m x_{ik}, \quad \forall k = 1, \dots, n \quad (3.82)$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}_+; \quad \forall i = 1, \dots, m; \quad \forall j = 0, \dots, n \quad (3.83)$$

com:

- m : número de itens do problema
- n : número de tipos de objetos residuais

Os objetos são indexados por j , $j = 0, 1, \dots, n$ onde $j = 0$ é relativo ao objeto original (objeto em estoque) e $j = 1, \dots, n$ correspondem aos tipos de objetos residuais. A demanda de cada item i , $i = 1, \dots, m$ é denotada por d_i .

A variável de decisão x_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 0, 1, \dots, n$ é definida como o número de vezes que o item i é cortado à partir do objeto j . O parâmetro a_{ijk} , $i = 1, \dots, m$, $j = 0, 1, \dots, n$ e $k = 1, \dots, n$ é definido da seguinte forma:

$$a_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{se o objeto do tipo } k \text{ é resultado do corte do item } i \text{ a partir do objeto } j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A função objetivo (3.80) minimiza o número de cortes no objeto inicial, de forma que os objetos residuais tenham as maiores dimensões possíveis, possibilitando melhor encaixe dos itens restantes e conseqüente diminuição do número de objetos necessários para atender a demanda total dos itens. O conjunto de restrições (3.81) garantem que a demanda de cada item seja satisfeita, permitindo a produção excedente de itens.

Já as restrições (3.82) garantem que, para cada tipo de objeto residual, o número de cortes resultantes deste objeto residual deve ser maior ou igual ao número de itens cortados neste objeto residual, ou seja, só podem ser executados cortes em objetos residuais existentes.

No artigo original é feita uma discussão a respeito do tamanho do modelo e suas peculiaridades. Como conclusão, é apresentado que, ao contrário das demais abordagens, esta possui bom comportamento para problemas com poucos itens. Além disso, é feita uma discussão dos limites superiores do modelo e são apresentados resultados computacionais utilizando dados reais.

A seguir será descrito o desenvolvimento do código computacional utilizado para resolver o *PCE* utilizando diferentes formas para gerar padrões de corte bidimensionais, ou seja, a geração de colunas será efetuada por diferentes modelos matemáticos para que o método *Simplex* atinja uma solução do problema, conforme descrito na Seção 1.4.

3.3 Implementação computacional para solução do PCE em uma indústria moveleira

Nesta seção será apresentado o funcionamento do código computacional desenvolvido (utilizando o método de solução apresentado na Seção 1.4) em linguagem de programação C++ utilizando a tecnologia *Concert* do *software CPLEX* (IBM, 2009), que permite a utilização da biblioteca *Callable*, sendo esta a responsável pela utilização dos recursos disponíveis no *CPLEX* em um código computacional escrito em linguagem C++ através do compilador *Visual C++ 2008 Express Edition*. O objetivo computacional é resolver o PCE bidimensional considerando padrões de corte guilhotinados 2-estágios para encontrar a menor quantidade de objetos possível a ser cortada para a obtenção dos itens desejados. Inicialmente é fornecida uma visão geral do procedimento (programa principal) e depois cada uma das etapas são detalhadas separadamente. De maneira geral, o processo se resume a:

Programa principal

Entrada: Dimensões dos objetos, itens e restrições sobre os padrões de corte que serão gerados;

Saída: Frequências e disposições dos padrões de corte com suas respectivas perda de matéria-prima e a perda total do processo;

1. Gerar um conjunto inicial de padrões de corte;
2. Formular um problema de programação linear inteira com o conjunto inicial de padrões de corte gerado;
3. Enquanto existirem padrões de corte melhores faça:
 - 3.1. Resolver o problema de programação linear inteira relaxado;
 - 3.2. Atribuir valores duais aos itens;
 - 3.3. Encontrar o melhor padrão de corte com os pesos associados (valores duais);
 - 3.4. Se o valor do padrão de corte for maior que 1 continuar o processo, senão fim enquanto;
 - 3.5. Acrescente o padrão no formato de coluna no problema linear;
4. Aplicar uma técnica para obter solução inteira;
5. Retorne as informações de saída;

Note que no passo 3.4. é realizada a verificação se o método continua ou não, conhecido como critério de parada. Devido à explicação dada na Seção 1.4, verifica-se o peso associado ao padrão de corte, caso seja maior que 1, o procedimento é interrompido e encontra-se a sequência de padrões de corte que serão utilizados. A seguir, cada passo do procedimento acima descrito é detalhado.

Entrada de Dados e Inicializações

Primeiramente, deve-se conhecer as dimensões dos objetos e dos itens os quais quer-se produzir. Estas informações devem ser inseridas pelo usuário do sistema e para armazená-las, é utilizado um arquivo de texto (com extensão *.txt*). Além destas informações, o usuário deve inserir a espessura da serra utilizada pela máquina de corte, para que seja possível a elaboração de padrões de corte factíveis. Os itens a seguir são as informações contidas neste arquivo:

Informações iniciais

1. *Quantidade de itens (m)*
2. *Comprimento do objeto (L)*
3. *Largura do objeto (W)*
4. *Espessura da serra (σ)*
5. *Larguras dos itens (ω_i)*
6. *Comprimento dos itens (ℓ_i)*
7. *Demanda de cada item (d_i)*

Além da espessura da serra, no código computacional desenvolvido foi considerada a permissão (ou não) da produção de itens rotacionados, conforme a definição 1.7 dada na Seção 1.3. Para isto, utilizou-se o procedimento descrito em Cavali (2004), dado por:

Considerando um problema com m itens, no qual a rotação de todos os itens é viável, os dados de entrada do sub-problema de geração de colunas terá $2m$ itens (itens originais + itens rotacionados). Mas, a coluna gerada que entrará na base do método *Simplex* deve conter apenas m itens. Assim, a criação dos itens rotacionados é feita da seguinte forma:

Inclusão dos itens rotacionados para $i = 1$ até m faça:

$$l_{m+i} \leftarrow \omega_i$$

$$\omega_{m+i} \leftarrow l_i$$

fim.

A coluna j gerada com estes dados terá $2m$ itens, para ajustá-la ao problema faz-se:

$$a_{ij} \leftarrow a_{ij} + a_{m+i,j}, i = 1, \dots, m.$$

Note que o “peso” (variável dual) do item $m + i$ deve ser o mesmo peso do item i .

A escolha pela rotação se dá após o código ser compilado, em que o código irá questionar o usuário sobre duas informações:

Informações adicionais

1. *Deseja permitir a rotação de itens? Resposta: Sim ou não*
2. *Qual o método desejado para a geração de padrões de corte bidimensionais? Respostas possíveis:*
 - (a) *Método 1*
 - (b) *Método 2*
 - (c) *Método 3*

O método para geração de padrões de corte bidimensionais escolhido será utilizado durante o processo de geração de colunas do método *Simplex* (sub-problema). A escolha pelo *Método 1* se refere a Gilmore e Gomory (1965)(Seção 3.1.1), enquanto o *Método 2* é relacionado a Scheithauer (2002)(Seção 3.1.2) e o *Método 3* a Yanasse e Morabito (2013)(Seção 3.1.1).

Após o usuário tomar suas decisões com relação às perguntas mencionadas no quadro acima, o código automaticamente continua sua execução até que uma solução seja encontrada.

Conjunto inicial de padrões de corte

Muitas indústrias possuem alguns padrões de corte que são diariamente utilizados em sua produção. Sendo assim, é de interesse das mesmas colocar seus padrões de corte para o sistema analisar a qualidade destes perante os outros encontrados durante a solução do

PCE. Visando satisfazer esta verificação, foi criado um novo arquivo de texto em que os padrões de corte conhecidos são inseridos para o problema.

Após o preenchimento deste arquivo, todos os padrões de corte ali presentes são inseridos como colunas na matriz A . Além destes, outros padrões de corte são inseridos na matriz A para garantir a viabilidade de uma matriz de padrões de corte com dimensões suficientes para a inicialização do problema ($m \times m$). Desta forma, esta matriz é composta pelos padrões de corte homogêneos (maximais ou não) definidos na Seção 1.3 adicionado aos padrões existentes no arquivo de texto.

Formulação do problema

Para adequar o problema de corte de estoque bidimensional ao formato de um problema de programação linear inteira, tem-se a seguinte estrutura do problema:

Descrição do problema

- **Objetivo:** *Atender a demanda com o menor número de objetos possível*
- **Restrições:** *O número de itens obtidos com os padrões de corte usados deve ser maior ou igual à demanda.*
- **Informações conhecidas:** *Demanda de cada item, dimensões dos itens e objetos e padrões de corte (gerados e informados).*
- **Informações desconhecidas:** *Quantas vezes um determinado padrão de corte será utilizado.*

De acordo com a formulação dada no *Capítulo 1*, temos o seguinte problema descrito em (1.11) - (1.13):

$$\min Z_{GG} = \sum_{j=1}^n x_j$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq d_i, i = 1, \dots, m$$

$$x_j \in \mathbb{Z}_+, j = 1, \dots, n$$

Tem-se o problema formulado como programação linear inteira, devido à inviabilidade da utilização de soluções fracionárias para este problema. Dessa forma, o problema consiste em minimizar o número de objetos a ser cortados, atendendo a uma demanda d_i de itens de dimensões $\ell_i x \omega_i$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Por se tratar de um problema NP-Difícil, pode não ser viável encontrar a solução ótima para este problema de programação linear inteira com muitas variáveis. Dessa forma, será resolvida a relaxação linear deste problema, conforme descrito no modelo (1.19) - (1.21), utilizando a técnica de geração de colunas descrita na Seção 1.4.

Geração de padrões de corte mais eficientes

A partir da formulação do problema acima descrito é iniciada a busca pela solução. O problema é criado e armazenado em um arquivo de texto (problema inicial). O *solver CPLEX* é então acionado para resolver este problema. No entanto, as colunas existentes na matriz formada pelos padrões de corte não são as únicas possíveis para o problema. A questão é como encontrar padrões de cortes melhores para inserir nesta matriz. É nessa hora que entra o processo de geração de colunas.

A solução do problema inicial é encontrada pelo método *Simplex*. Os valores das variáveis duais são armazenados em um vetor e serão utilizados para encontrar um novo padrão de corte, de acordo com o método escolhido no início do processo. Para isso, os valores duais se tornam os coeficientes da função objetivo de cada um dos métodos descritos na seção 3.1.1 para a geração de novos padrões de corte bidimensionais (sub-problema). Este novo padrão de corte gerado é inserido na matriz A com os padrões de cortes iniciais e o problema é novamente resolvido, até que a função objetivo do sub-problema seja menor ou igual a 1. Resumidamente, o processo é descrito por:

Geração de novos padrões de corte

1. Enquanto a função objetivo do sub-problema for maior que 1, faça:
 - 1.1. O problema relaxado é resolvido pelo CPLEX e as variáveis duais armazenadas.
 - 1.2. Gerar um novo padrão de corte com os valores das variáveis duais armazenadas (sub-problema).
 - 1.3. Se o valor da função objetivo for menor ou igual a 1, pare!
 - 1.4. Formular um novo problema de programação linear inteira com o conjunto de padrões de corte anterior acrescentando o padrão de corte gerado.

Ao resolver a relaxação linear no problema, as restrições que obrigam a solução encontrada ser inteira são eliminadas, fazendo com que esta, eventualmente, seja inactivável para o problema inicial. Um procedimento de arredondamento será aplicado para que seja encontrada uma solução factível para o problema inteiro.

Obter soluções inteiras

Após finalizado o processo acima descrito, temos uma solução que pode ser fracionária para o *PCE*, uma vez que o problema relaxado foi resolvido. No entanto, estas soluções não fazem sentido para o *PCE*, uma vez que um padrão de corte é realizado em um objeto por inteiro e não em partes dele. Para lidar com esta situação existem diferentes formas para obter soluções inteiras a partir das soluções fracionárias encontradas. Neste trabalho foram aplicadas duas técnicas para obter soluções inteiras para o *PCE*.

Arredondamento para cima

O arredondamento para cima é utilizado quando há maior preocupação em resolver o problema de forma eficiente (em tempo viável) e não há muita preocupação com a solução exata do problema. Além disso, arredondar para cima garante que estamos cumprindo o objetivo de atender a demanda com padrões de corte inteiros e com sobra de itens.

Para realizar este arredondamento basta aumentar os valores encontrados para o número de vezes que um padrão de corte será utilizado para o menor inteiro que seja maior ou igual ao valor encontrado. Por exemplo, suponha que determinado padrão de corte deve ser utilizado 3,4 vezes. Após o arredondamento, este padrão de corte será utilizado 4 vezes.

Solução do Problema Inteiro

Após resolvido o problema relaxado, tem-se um conjunto de padrões de corte que será utilizado e o número de vezes que cada um deles será repetido. Esta abordagem de solução resolve um novo problema de corte de estoque, porém a matriz com os padrões de corte é formada apenas pelos padrões de corte resultantes da solução do *PCE* relaxado e as variáveis agora são inteiras. Dessa forma, resolve-se o seguinte problema de programação inteira:

$$\begin{aligned} \min \quad & Z_I = y_1 + y_2 + \dots + y_h \\ \text{sujeito a} \quad & Fy \geq d \\ & y \in \mathbb{Z}_+^h \end{aligned}$$

em que as colunas da matriz F são os padrões de corte resultantes da solução do *PCE* relaxado (suponha que esta matriz seja composta por h padrões de corte), $y^T = [y_1, y_2, \dots, y_h]$ é um vetor com coordenadas inteiras que armazena o número de vezes que cada padrão de corte da matriz F será utilizado e $d^T = [d_1, d_2, \dots, d_m]$ é o vetor de demandas dos itens. Este novo problema é resolvido com o *solver* *CPLEX* e agora tem-se uma solução inteira (viável) para o *PCE* original.

Perda total de matéria prima

Uma medida muito utilizada pelas indústrias moveleiras é a perda total de material dos padrões de cortes utilizados para atender a demanda. Com este parâmetro, é possível analisar a viabilidade da solução encontrada pelo método descrito quando comparado aos padrões de corte que são utilizados pelas indústrias.

A perda total, segundo Cavali (2004), é calculada da seguinte forma:

$$\text{perda total} = \left[1 - \frac{\text{área produzida}}{\text{área utilizada}} \right] .100, \quad (3.84)$$

em que a área utilizada refere-se à soma das áreas de todos os objetos utilizados, isto é,

$$\text{área utilizada} = y^* .L.W$$

sendo y^* o número de objetos cortados para a produção dos itens (por exemplo, $y^* = \sum_{j=1}^h y_j$), obtido em virtude do arredondamento da solução ótima do problema relaxado. Já a área produzida corresponde à soma das áreas de todos os itens que serão produzidos, e é calculada da seguinte forma:

Encontrar a área produzida com os cortes

1. *Determina-se a soma das áreas dos itens produzidos no padrão de corte j:*

$$\sum_{i \in F_j} l_i \omega_i$$

2. *Multiplica-se este valor pela quantidade de vezes que o padrão de corte j é utilizado:*

$$\left(\sum_{i \in F_j} l_i \omega_i \right) \cdot y_j^*$$

3. *Calcula-se a área total produzida:*

$$\sum_{j=1}^h \left(\sum_{i \in F_j} l_i \omega_i \right) \cdot y_j^*$$

No capítulo a seguir, utilizaremos o pseudo-código computacional descrito acima e alguns lotes diários da produção da S. móveis para encontrar os padrões de corte que melhor resolvem o *PCE* bidimensional da empresa, utilizando a metodologia descrita na Seção 3.3 do Capítulo 3.

Capítulo 4

Estudo computacional

Neste capítulo serão apresentados os resultados computacionais obtidos neste trabalho com a utilização do código computacional desenvolvido e descrito na Seção 3.3. O objetivo é comparar a quantidade de objetos utilizada pela empresa S. Móveis para a produção de todos os itens demandados em determinado período de produção com a solução encontrada por diferentes métodos de geração de padrões de corte (colunas). Além disso, há interesse na comparação da perda de matéria prima obtida pela empresa com a solução obtida com o código computacional desenvolvido.

Para a realização dos testes computacionais foi utilizado um computador com processador *Intel Core i5*, com *2,60 GHz* e *8,00 GB* de memória *RAM*, sob a plataforma *Windows 8.1*, em sua versão de *64 bits*. A este computador, foi adicionado o compilador de linguagem *C++*, o *Visual C++ 2008 Express Edition* e acoplada a biblioteca *Callable* do *solver CPLEX*, utilizando a tecnologia *Concert* disponível no *CPLEX* (IBM, 2009). O desenvolvimento do código computacional em linguagem *C++* possibilita a interação entre o modelo do *PCE* bidimensional e o *solver CPLEX*, o que torna possível a implementação da técnica de geração de colunas descrita na Seção 1.4. O problema mestre inteiro/relaxado e os modelos matemáticos dos subproblemas apresentados na Seção 1.4 são resolvidos com o auxílio do *CPLEX* e o tempo de solução dos subproblemas (geração de colunas) é limitado em 30 segundos.

4.1 Descrição dos exemplares

Para elaboração dos resultados computacionais, foram utilizados dados da produção da S. móveis coletados entre os dias 14/05/2015 e 19/05/2015. Para melhor organização dos dados, será descrita a composição dos produtos que foram produzidos ao longo do

período de produção mencionado, separando-os por diferentes tipos de madeira e espessuras. Para a produção dos móveis utilizados, foram necessários 6 tipos de placas de madeira (objetos) diferentes, sendo eles: *MDF* 3mm, Aglomerado 12mm, *MDF* 12mm, Aglomerado 15mm, *MDF* 15mm e *MDF* 22mm. Na composição de um único produto podem ser utilizados diferentes tipos de madeira, sendo esta composição baseada no custo de produção e também na utilidade do produto, uma vez que móveis destinados a suportarem massas maiores (impressora, scanner, pilhas de papel, etc) devem possuir madeiras mais resistentes. Em virtude da utilização de diferentes tipos de madeira em um único produto, faz-se necessário a solução de um *PCE* bidimensional para cada tipo e espessura de madeira utilizada. A Tabela 2 a seguir exhibe os produtos analisados ao longo de todo o horizonte de planejamento considerado e os tipos de madeiras que compõem cada um deles.

Código	Descrição do produto	Tipo de madeira	Espessuras (mm)
MCH	Mesa de computador Havana	Aglomerado	12
		MDF	12 e 3
MCB	Mesa de computador Belize	Aglomerado	12, 15
		MDF	15 e 3
MCL	Mesa de computador Leia	Aglomerado	12, 15
		MDF	12, 15 e 3
PAI	Painel S.	Aglomerado	15
		MDF	15
SCM	Sofá cama	Aglomerado	12 e 15
		MDF	22
CSFA	Cama de solteiro França com auxiliar	Aglomerado	12, 15
		MDF	12, 15 e 3
FRTC	Fruteira Condessa	Aglomerado	12
		MDF	12, 3
FRTT	Fruteira Tâmara	Aglomerado	12
		MDF	12, 3
ORGP	Organizador prático	Aglomerado	12, 15
		MDF	12, 3
ORGS	Organizador super	Aglomerado	12, 15
		MDF	12, 3

Tabela 2: Descrição dos móveis de acordo com sua composição

Para efeito de organização dos itens que serão cortados para a produção demandada, o Apêndice A ilustra a composição de cada um dos produtos descritos, sendo que q_{ij} , $i = 1, \dots, 10$ e $j = 1, \dots, m_i$, é a quantidade necessária do item j para a produção de 1 unidade do produto i , com m_i , $i = 1, \dots, 10$, sendo a quantidade total de itens que compõem o produto i acabado.

O corte da matéria prima será dividido em 2 momentos. No primeiro momento será produzida determinada quantidade de alguns produtos, para o atendimento parcial da demanda do mercado e em um segundo momento, ocorrerá a produção restante para atendimento total dos pedidos da S. móveis no período citado acima. A distribuição dos móveis para produção em cada momento foi decidida pela própria S. móveis, de acordo com a chegada dos pedidos à fábrica e considerando a máxima produtividade possível. A Tabela 3 a seguir ilustra a quantidade a ser produzida de cada produto nos dois momentos de produção.

(a) Produção 1º momento		(b) Produção 2º momento	
Produto	Quantidade produzida	Produto	Quantidade produzida
MCH	180	MCB	120
PAI	135	MCL	30
SCS	30	PAI	180
CSFA	55	FRTC	60
FRTT	20	FRTT	60
		ORGP	60
		ORGS	60

Tabela 3: Tamanho dos lotes de produção

Em virtude dos outros processos a que os itens cortados devem ser submetidos (furação, colagem de borda, etc), os itens obtidos a partir do *MDF* são cortados primeiro que os demais. Dessa forma, a análise dos resultados sempre terá placas de *MDF* como prioridade, seguidas pelos painéis de aglomerado.

O corte dos itens demandados será analisado em diferentes ordens na produção, sempre em busca da solução mais econômica e eficiente. Inicialmente serão analisados os itens cortados produto a produto (**independência de produção**), ou seja, o corte é focado em um único produto e considera-se o corte conjunto de itens que possuem o mesmo tipo de matéria prima. Quando todos os itens necessários para a produção de determinado produto são cortados, inicia-se o corte focado em outro produto. Esta mecânica de corte é vantajosa devido à produção por completo de um lote do produto, sendo que a partir do momento em que se inicia a produção de determinado produto, esta será finalizada com o produto totalmente embalado, sem que haja necessidade de armazenamento de parte do produto, aguardando itens restantes para que seja possível embalar e despachar o mesmo. Posteriormente, todos os itens demandados serão analisados para que seja possível uma **produção conjunta** de itens, de acordo com a matéria prima que os compõem. Ou seja, inicia-se o corte de todos os itens demandados (de todos os móveis a serem produzidos) a partir do *MDF* 12mm, por exemplo. Após obter todos os itens que são compostos

por este material, inicia-se o corte de itens de outro tipo de matéria prima, e assim por diante, até que todos os tipos de matéria prima necessários para a produção da demanda sejam cortados. O intuito desta análise comparativa é verificar a quantidade de objetos utilizados e a perda de matéria prima obtida utilizando um conjunto maior de itens de uma só vez (produção conjunta de itens).

A quantidade total (demanda) de cada item que será cortado na abordagem com **independência de produção** é obtida multiplicando-se a quantidade necessária de cada item de determinado produto no Apêndice pela sua respectiva quantidade produzida, dada na Tabela 3, considerando o momento de produção desejado. Já a demanda total de cada item de acordo com a abordagem de **produção conjunta** pode ser obtida agrupando-se todos os itens provenientes da mesma matéria prima de todos os produtos, de acordo com o momento de produção em que se referem, depois de consideradas as quantidades produzidas de cada produto.

Na S. Móveis todas as placas de madeira (objetos) possuem as mesmas dimensões, $L \times W = 2750 \times 1830$ e a espessura da serra utilizada na máquina de corte é de 5mm. No processo produtivo da fábrica é permitida a produção de itens excedentes, sendo estes armazenados para posterior utilização e também é permitida a produção de itens rotacionados. Apenas cortes guilhotinados em 2-estágios são admitidos, podendo ser 1- grupo (definição 1.6 do Capítulo 1) ou não. Além disso, é permitida a utilização de padrões de corte não-exatos, sendo os cortes extras (aparas) executados em outras máquinas, diferentes das utilizadas para o restante da produção, quando necessários.

4.2 Resultados e análise do estudo computacional

Nesta seção serão apresentados os resultados computacionais obtidos para a solução dos *PCE* bidimensionais descritos anteriormente utilizando o método *Simplex* com 3 métodos distintos de geração de padrões de corte (colunas), conforme descrito na Seção 3.3 do Capítulo 3. A análise é sempre classificada pelo método de geração de colunas desejado e também pela opção da produção de itens rotacionados, quando permitida. Não há limitação de tempo para a solução do problema mestre relaxado, havendo limitação apenas no processo de solução do subproblema, onde este foi limitado em 30 segundos. Este tempo foi determinado em virtude dos diferentes testes realizados e que não houveram diferenças significativas no padrão de corte encontrado. Em todos os resultados aqui apresentados utilizou-se o procedimento de solução do problema inteiro (descrito na

Seção 3.3 do Capítulo 3) para que fosse possível a obtenção de soluções inteiras para o *PCE* bidimensional em questão.

Nas Tabelas que seguem, as colunas representadas por **N° pad** representam o número de padrões de corte distintos necessários para a obtenção de todos os itens demandados e **N° obj** refere-se ao número total de objetos (placas de madeira) cortados para a produção total desejada. Já as colunas representadas por **Perda** são relativas à perda total de matéria-prima obtida com o corte dos itens demandados, sendo esta calculada pela expressão (3.84), dada no Capítulo 3. As colunas com o termo **IE** representam o número total de itens excedentes gerados pelo processo de corte em cada uma das situações, **N° it** representa a quantidade de iterações realizadas para que fosse possível a obtenção da solução do problema, ou seja, quantas vezes o processo de geração de colunas foi repetido até que se encontrasse uma solução para o problema. As colunas expressas por **Tempo** representam o tempo total de processamento para a solução completa do problema, sendo esta fornecida em milissegundo (ms), onde 1000 milissegundos representam 1 segundo. As células preenchidas com o símbolo (-) referem-se à não obtenção de solução pelo método utilizado, sendo a memória insuficiente o principal causador da impossibilidade para encontrar soluções.

4.2.1 Análise de acordo com a abordagem de independência de produção

As Tabelas 4, 7 e 9 referem-se aos resultados obtidos utilizando-se a abordagem de independência de produção para os dados do momento 1 da produção da S. Móveis. Já as Tabelas 5, 8 e 10 são relativas ao momento 2 da produção da fábrica, todas utilizando a abordagem de independência de produção.

As Tabelas 4 e 5 mostram os resultados obtidos para os momentos 1 e 2, respectivamente, com a produção independente de itens utilizando o método de geração de colunas proposto por Gilmore e Gomory (1965) (descrito na Seção 3.1.1 do Capítulo 3). Nestas tabelas pode-se observar que em 82,93% dos casos, a perda de matéria-prima com a permissão de produção dos itens rotacionados é menor, quando comparada à não permissão de itens rotacionados. Já em 17,07% a perda de material é igual em ambos casos. Ou seja, a permissão da produção de itens rotacionados sempre gerou perdas de matéria-prima menores, salvo os casos em que os itens não podem ser rotacionados ao longo do objeto devido às suas dimensões. Quando se analisa a quantidade total de objetos necessários para a obtenção total dos itens, a relação observada para a perda de material considerando

itens rotacionados ou não rotacionados não é exatamente a mesma, pois nem sempre é mais vantajoso utilizar a rotação de itens. Em 46,34% dos casos a quantidade de objetos utilizados permitindo-se a rotação de itens é menor do que os casos onde não se permite a rotação. Já 43,90% possuem as mesmas quantidades de objetos e em 9,76% a permissão da produção de itens rotacionados ocasiona um aumento de objetos utilizados. Isto é justificado quando leva-se em consideração a quantidade de itens excedentes produzidos. Por exemplo, analisando a produção de itens provenientes do *MDF* 12mm das Fruteiras Condessa (FRTC) no momento 2 de produção, pode-se observar que a quantidade de objetos utilizados permitindo-se a rotação de itens (11) é superior ao caso sem permissão de itens rotacionados (10). No entanto, a produção de itens excedentes no caso rotacionado (36) é superior ao caso não rotacionado (8), o que resulta em uma perda de matéria prima menor para o caso rotacionado (2,90%), uma vez que a matéria prima está sendo melhor aproveitada, mesmo que seja com a produção de itens excedentes. O tempo computacional e o número de iterações é naturalmente maior quando é permitida a produção de itens rotacionados, pois aumenta a quantidade de itens a ser analisada pelo método. No entanto, independentemente da situação, os tempos computacionais são bastante satisfatórios. Com relação à quantidade de padrões de corte distintos, em 75,61% dos casos a quantidade de padrões de corte utilizados foi a mesma, comparando a permissão ou não da produção de itens rotacionados, e em 19,51% a quantidade de padrões de corte do caso rotacionado superou o não-rotacionado. É importante observar que o processo de geração de colunas de acordo com Gilmore e Gomory (1965) não é sensível às dimensões dos itens, no seguinte sentido: comprimentos ou larguras pequenas, não influenciam na complexidade do modelo, sendo todos os exemplares resolvidos em tempo computacional altamente satisfatório.

Já as Tabelas 7 e 8 mostram os resultados obtidos para os momentos 1 e 2, respectivamente, com a produção independente de itens utilizando o modelo proposto por Yanasse e Morabito (2013) para a geração de colunas (descrito na Seção 3.1.1 do Capítulo 3). Em alguns casos pode-se observar que não foi possível encontrar uma solução para o problema em questão, como são os casos do corte do Aglomerado de 12mm das Mesas de Computador Havana (MCH) e Léia (MCL), nos momentos 1 e 2 da produção, respectivamente. A impossibilidade para encontrar uma solução pode estar relacionada às dimensões de alguns itens em cada uma das situações, como por exemplo, o item com dimensão 615 x 30 do Aglomerado de 12mm da Mesa de Computador Havana (MCH) no momento 1 e o item com dimensão 180 x 97 também do Aglomerado de 12mm da Mesa de Computador Léia (MCL) no momento 2 da produção. Como o modelo utilizado para a geração de

colunas nestes exemplares (YANASSE; MORABITO, 2013) é sensível à largura mínima dos itens que constituem o problema (influenciando a quantidade de variáveis do modelo) tem-se que quando é permitida a rotação de itens, o que naturalmente aumenta o número de variáveis, o modelo aumenta rapidamente a quantidade de variáveis que o compõe, ocasionando problemas durante a solução em virtude da memória computacional disponível para os testes. A dificuldade de solução é também encontrada pelos problemas onde não se permite a produção de itens rotacionados, como o caso do Aglomerado de 12mm da Mesa de Computador Léia (MCL) no momento 2 da produção, onde o tempo computacional para obtenção da solução é muito alto em comparação aos demais. Neste caso, além de um dos itens que compõem o problema possuir dimensão reduzida, a quantidade de itens é superior aos demais exemplares, contribuindo para o aumento do tempo gasto para encontrar a solução. Assim como descrito para o caso onde utiliza-se a geração de colunas como descrito em Gilmore e Gomory (1965), a perda de matéria prima utilizando a produção de itens rotacionados foi menor na maioria dos casos, representando 77,14% do total dos casos onde houve obtenção de solução. Já em 20% dos casos a perda de material foi a mesma para ambas as situações e em apenas 1 exemplar esta perda foi superior para o caso rotacionado. Com relação à quantidade de objetos utilizados para o corte de todos os itens necessários, em todos os casos esta quantidade foi menor ou igual, quando comparada à não permissão de itens rotacionados. Além disto, mesmo com um número de objetos igual ou inferior para a obtenção dos itens, o caso rotacionado teve uma produção superior de itens excedentes em 45,71% dos casos, o que comprova ainda mais o melhor aproveitamento com a produção de itens rotacionados. Já com relação à quantidade de padrões de corte distintos necessários para a obtenção dos itens, o caso rotacionado apresentou um número maior de padrões em 22,86% dos casos e em 74,29% um número igual de padrões de corte.

Os resultados apresentados nas Tabelas 9 e 10 referem-se aos momentos 1 e 2 da produção, respectivamente, com a produção independente de itens utilizando o modelo proposto por Scheithauer (2002) para a geração de colunas (descrito na Seção 3.1.2 do Capítulo 3). A utilização de padrões de corte 1-grupo também apresentou bom desempenho com relação à perda de material, quando comparados os casos com permissão de itens rotacionados ou não, representando 62,16% dos casos onde houve obtenção de solução e ainda 32,43% obteve-se a mesma perda para ambos os casos.

Geração de colunas com Gilmore e Gomory (1965)														
Madeira	Sem rotação							Com rotação						
	Nº pad.	Nº obj.	Perda	IE	Nº it	Tempo(ms)	Nº pad.	Nº obj.	Perda	IE	Nº it	Tempo(ms)		
MCH	MDF 12mm	3	54	24,0608%	12	3	127	3	45	6,8724%	26	5	332	
	Aglo 12mm	2	9	13,2337%	16	3	105	2	8	1,5001%	62	4	173	
	MDF 3mm	1	6	9,6100%	48	1	28	1	5	4,2929%	0	2	71	
PAI	MDF 15mm	2	5	4,2555%	141	1	47	2	5	2,1610%	150	3	156	
	Aglo 15mm	3	64	4,0446%	117	4	222	4	61	1,3437%	7	4	370	
SFC	MDF 15mm	2	18	23,9023%	3	2	62	2	17	20,8207%	1	3	78	
	MDF 22mm	1	2	31,2675%	2	1	31	1	2	31,2675%	2	1	31	
CSFA	MDF 12mm	1	2	2,0854%	10	1	31	1	2	2,0854%	10	1	31	
	Aglo 12mm	1	4	1,5018%	174	3	78	2	3	1,4978%	38	3	125	
	MDF 15mm	6	31	7,9455%	32	10	656	6	31	6,3467%	34	12	954	
	Aglo 15mm	1	5	5,5142%	35	1	15	1	5	3,6615%	40	2	63	
	MDF 3mm	1	6	27,1521%	16	1	16	1	5	13,2763%	15	2	63	
FRIT	MDF 12mm	2	6	4,0203%	20	4	140	4	7	2,3064%	56	8	630	
	Aglo 12mm	2	6	8,5585%	11	3	170	4	6	4,6661%	17	4	382	
	MDF 3mm	1	3	6,4648%	18	2	72	1	3	6,4648%	18	2	72	
Total	29	221	11,5745%	655	40	1800	35	205	7,2376%	476	56	3531		

Tabela 4: Resultados computacionais do momento 1 utilizando o método de geração de colunas de Gilmore e Gomory (1965) com independência de produção

Geração de colunas com Gilmore e Gomory (1965)													
	Madeira	Sem rotação						Com rotação					
		Nº pad.	Nº obj.	Perda	IE	Nº it	Tempo(ms)	Nº pad.	Nº obj.	Perda	IE	Nº it	Tempo(ms)
FRTC	MDF 12mm	2	10	3,6332%	8	3	109	3	11	2,8953%	36	3	187
	Aglo 12mm	5	15	4,6409%	232	5	281	5	14	1,1338%	115	11	797
	MDF 3mm	2	6	8,1867%	84	1	31	2	5	3,8040%	42	3	125
FRTT	MDF 12mm	2	15	4,0203%	0	4	156	4	16	2,7199%	29	8	719
	Aglo 12mm	2	18	8,5585%	33	3	172	4	17	4,7748%	31	4	343
	MDF 3mm	2	8	7,2081%	42	2	78	2	7	6,3309%	8	4	188
MCB	Aglo 12mm	6	13	0,7635%	98	16	98	5	13	0,6681%	104	21	1844
	MDF 15mm	1	15	42,7846%	0	1	31	1	11	21,3289%	1	2	47
	Aglo 15mm	2	30	32,2698%	20	2	62	1	26	9,7079%	456	2	93
	MDF 3mm	2	4	10,7364%	3	2	62	2	5	6,3743%	77	3	140
MCL	MDF 12mm	1	1	4,6668%	123	1	31	1	1	1,5513%	128	2	63
	Aglo 12mm	5	5	1,0589%	107	23	1672	5	5	0,5751%	92	22	2641
	MDF 15mm	1	4	42,7846%	2	1	31	1	3	21,3289%	3	2	63
	Aglo 15mm	2	8	17,6759%	16	5	235	3	8	8,1724%	45	7	594
	MDF 3mm	3	3	7,7349%	68	6	250	3	3	3,2729%	69	5	328
ORGP	MDF 12mm	1	5	14,6778%	0	1	31	1	5	14,6778%	0	1	31
	Aglo 12mm	1	24	13,7971%	0	2	62	2	24	7,7177%	36	2	94
	Aglo 15mm	1	15	41,8071%	0	1	16	1	10	12,7106%	0	2	62
	MDF 3mm	1	15	39,8231%	0	1	31	1	15	39,8231%	0	1	31
ORGS	Aglo 12mm	1	13	9,3508%	12	1	32	1	13	9,3508%	12	1	47
	MDF 15mm	1	8	22,3377%	8	1	31	1	7	7,7760%	13	2	63
	Aglo 15mm	2	44	37,8971%	0	1	47	2	29	3,5043%	6	3	109
	MDF 3mm	1	20	32,8513%	0	1	31	1	20	32,8513%	0	1	47
PAI	MDF 15mm	2	6	3,9225%	90	1	47	2	6	2,1771%	99	3	140
	Aglo 15mm	4	84	4,0163%	56	4	276	4	81	1,3424%	12	4	438
Total		53	389	16,6882%	1002	89	3903	58	355	9,0628%	1414	119	9234

Tabela 5: Resultados computacionais do momento 2 utilizando o método de geração de colunas de Gilmore e Gomory (1965) com independência de produção

A vantagem pela utilização de itens rotacionados é fortalecida ainda mais quando analisa-se a quantidade total de objetos utilizados para ambos os momentos da produção, em que pode ser observado uma redução de 35,52% na quantidade de placas de madeira necessárias para a produção total dos itens demandados, representando 222 objetos economizados. O número de iterações para obtenção da solução, assim como o tempo computacional gasto, foi superior para o caso rotacionado em virtude do aumento de itens a serem analisados pelo processo.

De maneira geral, considerando a independência de produção e a permissão para a rotação de itens, foram necessários 205 e 355 objetos para a produção total do primeiro e segundo momentos da produção, respectivamente, segundo o modelo com geração de colunas de acordo com Gilmore e Gomory (1965). Para que fosse possível a comparação destas quantidades com os resultados obtidos através da geração de colunas utilizando Yanasse e Morabito (2013) e Scheithauer (2002) foi necessário completar a produção com alguns objetos desconsiderando a rotação de itens, uma vez que não foi possível encontrar uma solução para todos os casos rotacionados nestes dois modelos, como é o caso do corte do Aglomerado 12mm durante a produção das Mesas de Computador Havana (MCH), conforme ilustram as Tabelas 7 e 9. Desta forma, quando não foi possível encontrar uma solução, considerou-se a solução encontrada para o caso em que não houve permissão para a produção de itens rotacionados, o que possibilita a comparação com a produção completa de acordo com os diferentes métodos de geração de colunas. Assim sendo, foram necessários 210 e 359 objetos para a produção dos momentos 1 e 2, respectivamente, utilizando a geração de colunas de acordo com Yanasse e Morabito (2013). Já para o caso onde utilizou-se a geração de colunas de acordo com Scheithauer (2002), a quantidade de objetos necessária para a produção total foi de 216 e 372 nos momentos 1 e 2, respectivamente. Na Tabela 6 a seguir é apresentado um resumo dos casos descritos acima.

Método utilizado durante a geração de colunas	Quantidade de objetos necessários	
	Momento 1	Momento 2
Gilmore e Gomory (1965)	205	355
Yanasse e Morabito (2013)	210	359
Scheithauer (2002)	216	372

Tabela 6: Resumo da quantidade total de objetos utilizados

Geração de colunas com Yanasse e Morabito (2013)													
	Madeira	Sem rotação						Com rotação					
		Nº pad.	Nº obj.	Perda	IE	Nº it	Tempo(ms)	Nº pad.	Nº obj.	Perda	IE	Nº it	Tempo(ms)
MCH	MDF 12mm	3	54	24,0608%	12	3	368	3	45	6,8724%	26	5	1416
	Aglo 12mm	2	9	13,2337%	16	3	433	-	-	-	-	-	-
	MDF 3mm	1	6	9,6100%	48	1	36	1	5	4,2929%	0	2	4512
PAI	MDF 15mm	2	5	4,2555%	141	1	141	2	5	2,1418%	177	3	91830
	Aglo 15mm	3	64	4,0446%	117	4	36084	-	-	-	-	-	-
SFC	MDF 15mm	2	18	23,9023%	3	2	63	2	17	20,8207%	1	3	109
	MDF 22mm	1	2	31,2675%	2	1	31	1	2	31,2675%	2	1	31
CSFA	MDF 12mm	1	2	2,0854%	10	1	47	1	2	2,0854%	10	1	296
	Aglo 12mm	1	4	1,5018%	174	3	2234	2	4	2,1821%	158	3	90443
	MDF 15mm	6	31	7,8510%	28	10	7469	6	31	6,3467%	34	12	118465
	Aglo 15mm	1	5	5,5142%	35	1	31	1	5	3,6615%	40	2	4392
	MDF 3mm	1	6	27,1521%	16	1	31	1	5	13,2763%	15	2	125
FRIT	MDF 12mm	2	6	4,0203%	20	4	1080	4	7	2,6321%	45	6	5987
	Aglo 12mm	2	6	8,5585%	11	3	262	4	6	4,6661%	17	4	35946
	MDF 3mm	1	3	6,4648%	18	2	126	1	3	6,4648%	18	4	1008
Total		29	221	11,5682%	651	40	48436	29	137	8,2085%	543	48	354560

Tabela 7: Resultados computacionais do momento 1 utilizando o método de geração de colunas de Yanasse e Morabito (2013) com independência de produção

Geração de colunas com Yanasse e Morabito (2013)													
Madeira	Sem rotação						Com rotação						
	Nº pad.	Nº obj.	Perda	IE	Nº it	Tempo(ms)	Nº pad.	Nº obj.	Perda	IE	Nº it	Tempo(ms)	
FRTC	MDF 12mm	2	10	3,6332%	8	3	4480	3	11	2,8953%	36	3	33812
	Aglo 12mm	5	14	4,8615%	102	5	129963	5	14	1,1399%	109	9	273820
	MDF 3mm	2	6	8,1867%	84	1	31	2	5	3,8040%	42	3	32050
FRTT	MDF 12mm	2	15	4,0203%	0	4	1406	4	16	2,7199%	29	8	641
	Aglo 12mm	2	18	8,5585%	33	3	281	4	17	4,7748%	31	4	35581
	MDF 3mm	2	8	7,2081%	42	2	110	2	7	6,3309%	8	4	1000
MCB	Aglo 12mm	6	13	0,7970%	66	13	366089	-	-	-	-	-	-
	MDF 15mm	1	15	42,7846%	0	1	16	1	11	21,3289%	1	2	62
	Aglo 15mm	2	30	32,2698%	20	2	328	1	26	9,7079%	456	2	2969
	MDF 3mm	2	4	10,7364%	3	2	1672	2	5	6,3743%	77	3	18270
MCL	MDF 12mm	1	1	4,6668%	123	1	31	1	1	1,5513%	128	2	4594
	Aglo 12mm	5	6	1,4024%	156	14	422340	-	-	-	-	-	-
	MDF 15mm	1	4	42,7846%	2	1	15	1	3	21,3289%	3	2	78
	Aglo 15mm	2	8	17,6759%	16	5	3782	3	8	8,1724%	45	7	95607
	MDF 3mm	3	3	7,7349%	68	6	12819	3	3	2,2729%	69	5	89624
ORGP	MDF 12mm	1	5	14,6778%	0	1	31	1	5	14,6778%	0	1	31
	Aglo 12mm	1	24	13,7971%	0	2	78	2	24	7,7177%	36	2	234
	Aglo 15mm	1	15	41,8071%	0	1	31	1	10	12,7106%	0	2	78
	MDF 3mm	1	15	39,8231%	0	1	31	1	15	39,8231%	0	1	31
ORGS	Aglo 12mm	1	13	9,3508%	12	1	31	1	13	9,3508%	12	1	79
	MDF 15mm	1	8	22,3377%	8	1	31	1	7	7,7760%	13	2	78
	Aglo 15mm	2	44	37,8971%	0	1	32	2	29	3,5043%	6	3	172
	MDF 3mm	1	20	32,8513%	0	1	15	1	20	32,8513%	0	1	32
PAI	MDF 15mm	2	6	3,9225%	90	1	156	2	6	2,1610%	126	3	91743
	Aglo 15mm	4	84	4,0163%	56	4	35791	-	-	-	-	-	-
Total	53	389	16,7121%	889	77	979590	44	256	10,1352%	1227	70	680586	

Tabela 8: Resultados computacionais do momento 2 utilizando o método de geração de colunas de Yanasse e Morabito (2013) com independência de produção

Geração de colunas com Scheithauer (2002)														
Madeira	Sem rotação							Com rotação						
	Nº pad.	Nº obj.	Perda	IE	Nº it	Tempo(ms)	Nº pad.	Nº obj.	Perda	IE	Nº it	Tempo(ms)		
MCH	MDF 12mm	3	54	24,0608%	12	3	149	3	49	15,7047%	16	5,00%	1765	
	Aglo 12mm	2	9	13,2337%	16	3	540	-	-	-	-	-	-	
	MDF 3mm	1	6	9,6100%	48	1	32	1	6	9,6100%	48	1	654	
PAI	MDF 15mm	2	5	4,2555%	141	1	1578	2	5	3,0855%	155	2	61201	
	Aglo 15mm	4	64	4,2586%	101	1	3822	-	-	-	-	-	-	
SFC	MDF 15mm	2	20	33,2903%	0	1	47	2	18	23,2437%	4	2	63	
	MDF 22mm	1	2	31,2675%	2	1	31	1	2	31,2675%	2	1	31	
CSFA	MDF 12mm	1	2	2,0854%	10	1	31	1	2	2,0854%	10	1	265	
	Aglo 12mm	1	4	1,5018%	174	3	438	1	4	1,5018%	174	3	30746	
	MDF 15mm	6	32	8,0883%	56	8	4532	6	31	7,8557%	24	10	23622	
	Aglo 15mm	1	5	5,5142%	35	1	31	1	5	3,6615%	40	2	891	
	MDF 3mm	1	6	27,1521%	16	1	32	1	5	13,2763%	15	2	78	
FRTT	MDF 12mm	3	6	9,4186%	12	4	262	4	6	5,1365%	20	5	3648	
	Aglo 12mm	4	6	11,7979%	7	1	109	4	6	4,6661%	17	4	2726	
	MDF 3mm	2	4	21,0897%	34	1	90	2	4	11,2360%	52	2	878	
Total	34	225	13,7750%	664	31	11724	29	143	10,1793%	527	40	126568		

Tabela 9: Resultados computacionais do momento 1 utilizando o método de geração de colunas de Scheithauer (2002) com independência de produção

Geração de colunas com Scheithauer (2002)													
	Madeira	Sem rotação						Com rotação					
		Nº pad.	Nº obj.	Perda	IE	Nº it	Tempo(ms)	Nº pad.	Nº obj.	Perda	IE	Nº it	Tempo(ms)
FRTC	MDF 12mm	3	11	5,5418%	48	2	203	2	11	3,5256%	56	3	13846
	Aglo 12mm	5	15	6,2688%	194	1	12876	5	16	3,0730%	314	4	121712
	MDF 3mm	2	6	8,1867%	84	1	47	2	5	3,8040%	42	3	1032
FRTT	MDF 12mm	3	17	9,0104%	24	4	234	4	16	5,4471%	17	5	3828
	Aglo 12mm	4	18	11,7979%	21	1	109	4	17	4,7748%	31	4	2704
	MDF 3mm	2	9	21,4112%	26	1	94	2	8	11,0401%	28	2	887
MCB	Aglo 12mm	6	15	4,1311%	263	5	127455	6	16	6,5236%	388	3	92294
	MDF 15mm	1	15	42,7846%	0	1	31	1	15	42,7846%	0	1	47
	Aglo 15mm	2	30	32,5876%	6	2	985	1	26	13,7936%	300	2	2969
	MDF 3mm	2	5	12,4452%	57	1	281	2	5	11,4108%	60	2	9763
MCL	MDF 12mm	1	1	4,6668%	123	1	47	1	1	2,7975%	126	2	3266
	Aglo 12mm	7	8	4,7659%	416	5	150850	7	7	6,5888%	342	3	93885
	MDF 15mm	1	4	42,7846%	2	1	31	1	4	42,7846%	2	1	63
	Aglo 15mm	4	9	19,7730%	44	8	14248	2	8	9,1341%	69	3	28705
	MDF 3mm	3	3	12,5857%	63	1	6376	3	3	12,0111%	64	2	60460
ORGP	MDF 12mm	1	5	14,6778%	0	1	31	1	5	14,6778%	0	1	31
	Aglo 12mm	1	24	13,7971%	0	2	93	2	24	7,7177%	36	2	156
	Aglo 15mm	1	15	41,8071%	0	1	31	1	10	12,7106%	0	2	63
	MDF 3mm	1	15	39,8231%	0	1	32	1	15	39,8231%	0	1	31
ORGS	Aglo 12mm	1	13	9,3508%	12	1	31	1	13	9,3508%	12	1	62
	MDF 15mm	1	8	22,3377%	8	1	31	1	8	22,3377%	8	1	46
	Aglo 15mm	2	44	37,8971%	0	1	31	2	29	3,5043%	6	3	140
	MDF 3mm	1	20	32,8513%	0	1	32	1	20	32,8513%	0	1	31
PAI	MDF 15mm	2	6	3,9225%	90	1	1593	2	6	2,9475%	104	2	61163
	Aglo 15mm	4	84	4,2277%	88	1	3883	-	-	-	-	-	-
Total		61	400	18,3773%	1569	46	319655	55	288	13,5589%	2005	54	497184

Tabela 10: Resultados computacionais do momento 2 utilizando o método de geração de colunas de Scheithauer (2002) com independência de produção

Além da vantagem obtida na quantidade de objetos pela geração de colunas através de Gilmore e Gomory (1965), o tempo computacional necessário para obtenção da solução utilizando este método de geração de colunas é amplamente menor, quando comparado aos demais.

4.2.2 Análise de acordo com a abordagem de produção conjunta

A seguir serão analisadas as relações entre os resultados obtidos utilizando padrões de corte em 2-estágios e 1-grupo durante o processo de geração de colunas para um mesmo momento de produção. O objetivo é identificar os prós e contras das soluções encontradas de acordo com cada um dos métodos expostos neste trabalho. Na seção anterior foi realizada a análise para os momentos 1 e 2 da produção sempre utilizando o mesmo modelo para geração de colunas, ou seja, fixado o modelo para geração de colunas foi analisado os resultados nos momentos 1 e 2 da produção. De agora em diante, serão analisados os diferentes modelos de geração de colunas dentro de um mesmo momento de produção, ou seja, fixado o momento da produção serão analisados os resultados de acordo com os diferentes modelos de geração de colunas, com o intuito de aprimorar os estudos para o corte de matéria prima da S. Móveis. Na tentativa pela busca de soluções mais vantajosas, foi realizado um estudo considerando a produção conjunta de itens para os diferentes tipos de matéria prima considerados neste trabalho. As Tabelas 11, 12 e 13 ilustram os resultados obtidos para o momento 1 da produção e as Tabelas 14, 15 e 16 mostram os resultados para o momento 2 da produção.

A solução do *PCE* bidimensional através da geração de colunas com Gilmore e Gomory (1965) se mostrou eficiente mesmo para os casos em que foi aumentado consideravelmente a quantidade de itens do problema, tendo encontrado uma solução em todos os exemplares testados. A exemplo do que ocorreu com a produção independente de itens, o caso rotacionado gerou perda de matéria prima inferior na maioria dos testes, assim como uma menor quantidade de objetos utilizados para a produção total dos itens. Considerando esta abordagem de solução, ou seja, a produção conjunta de itens com o processo de geração de colunas de acordo com Gilmore e Gomory (1965) e permitindo a produção de itens rotacionados, foram necessários 196 e 317 objetos para produção total dos itens demandados para os momentos 1 e 2 da produção, respectivamente. Dessa forma, ao comparar estas quantidades com suas correspondentes utilizando a abordagem com produção independente, tem-se uma redução de 5,77% (de 208 para 196) na quantidade de objetos utilizados no momento 1 da produção, e uma redução de 10,70% (de 355 para 317)

nesta quantidade para o momento 2 da produção. Assim sendo, a utilização da produção conjunta de itens se torna mais atrativa em comparação à produção independente porque reduz o custo monetário do processo de corte da fábrica, uma vez que necessita de uma menor quantidade de placas de madeira.

Por outro lado, esta abordagem conjunta gera um impacto na logística dos itens dos diversos produtos que serão produzidos pelo seguinte motivo: como todos os itens necessários provenientes do *MDF* 12mm serão cortados juntos, estes itens devem ser separados de acordo com a composição de cada produto que será fabricado. Após o corte desta matéria prima, são produzidos todos os itens do *MDF* 15mm e estes são agrupados aos demais itens que compõem cada tipo de produto, e assim por diante, até que todos os itens de cada produto sejam produzidos. Após o corte total dos itens, estes seguem para os demais processos de cada tipo de produto deve ser submetido. O fato dos itens que compõem cada produto serem cortados aos poucos pode gerar um acúmulo grande de itens no estoque da fábrica, impedindo a liberação de parte da produção, uma vez que pode demorar a obtenção de todos os itens de um único produto, o que pode atrasar o envio e conseqüentemente a entrega do produto ao cliente final. Porém, este é um problema que pode ser administrado com algumas alterações na logística do processo, o que foge do escopo deste trabalho. Assim sendo, analisando o processo de corte, a abordagem de produção conjunta se mostrou mais vantajosa economicamente do que a produção independente.

Não foi possível realizar a mesma análise feita anteriormente para os casos em que utilizou-se a geração de colunas de acordo com Yanasse e Morabito (2013) e Scheithauer (2002). Isto se deve ao fato de que mesmo desconsiderando a produção de itens rotacionados não foi possível obter uma solução para o corte do *MDF* 15mm (falta de memória computacional), no momento 1 da produção e para o corte do Aglomerado 12mm, no momento 2 da produção, conforme ilustram as Tabelas 12, 13, 15 e 16. Dessa forma, não é possível contabilizar a quantidade de objetos necessários para a produção total dos itens demandados utilizando estes métodos de geração de colunas com a produção conjunta de itens e conseqüentemente não há uma comparação.

Tabela 11: Resultados computacionais do momento 1 utilizando o método de geração de colunas de Gilmore e Gomory (1965) com produção conjunta
Geração de colunas com Gilmore e Gomory (1965)

Madeira	Sem rotação					Com rotação						
	Nº pad.	Nº obj.	Perda	IE	Nº it	Tempo(ms)	Nº pad.	Nº obj.	Perda	IE	Nº it	Tempo(ms)
MDF 12mm	7	54	8,9265%	105	15	967	7	49	2,2008%	32	18	2480
Aglo 12mm	7	19	7,4823%	172	13	963	6	16	1,0469%	36	19	2136
MDF 15mm	9	51	7,7772%	86	16	1719	10	49	6,8723%	62	23	3766
Aglo 15mm	5	67	3,6947%	31	6	415	5	65	0,9281%	47	10	1138
MDF 22mm	1	2	31,2675%	2	1	31	1	2	31,2675%	2	1	31
MDF 3mm	4	13	7,5314%	48	6	364	4	12	4,9010%	38	10	934
Total	33	206	11,1133%	444	57	4459	33	193	7,8694%	217	81	10485

Tabela 12: Resultados computacionais do momento 1 utilizando o método de geração de colunas de Yanasse e Morabito (2013) com produção conjunta
Geração de colunas com Yanasse e Morabito (2013)

Madeira	Sem rotação					Com rotação						
	Nº pad.	Nº obj.	Perda	IE	Nº it	Tempo(ms)	Nº pad.	Nº obj.	Perda	IE	Nº it	Tempo(ms)
MDF 12mm	6	54	9,1128%	88	11	8766	7	49	2,1607%	32	16	144228
Aglo 12mm	7	18	7,7020%	81	10	302743	-	-	-	-	-	-
MDF 15mm	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Aglo 15mm	5	67	3,6947%	31	7	185975	-	-	-	-	-	-
MDF 22mm	1	2	31,2675%	2	1	31	1	2	31,2675%	2	1	31
MDF 3mm	4	13	7,5314%	48	6	10389	4	12	4,9010%	38	10	123182
Total	23	154	11,8671%	250	35	507094	12	63	12,7764%	72	27	267441

Tabela 13: Resultados computacionais do momento 1 utilizando o método de geração de colunas de Scheithauer (2002) com produção conjunta
Geração de colunas com Scheithauer (2002)

Madeira	Sem rotação					Com rotação						
	Nº pad.	Nº obj.	Perda	IE	Nº it	Tempo(ms)	Nº pad.	Nº obj.	Perda	IE	Nº it	Tempo(ms)
MDF 12mm	8	61	19,9525%	40	8	8702	7	55	9,6973%	54	10	64703
Aglo 12mm	8	19	8,0316%	288	7	154896	-	-	-	-	-	-
MDF 15mm	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Aglo 15mm	5	69	4,3496%	136	1	4152	-	-	-	-	-	-
MDF 22mm	1	2	31,2675%	2	1	31	1	2	31,2675%	2	1	31
MDF 3mm	4	14	16,7228%	36	4	3812	3	13	9,1424%	52	5	33319
Total	26	165	16,0648%	502	21	171593	11	70	16,7024%	108	16	98053

Tabela 14: Resultados computacionais do momento 2 utilizando o método de geração de colunas de Gilmore e Gomory (1965) com produção conjunta
Geração de colunas com Gilmore e Gomory (1965)

Madeira	Sem rotação					Com rotação						
	Nº pad.	Nº obj.	Perda	IE	Nº it	Tempo(ms)	Nº pad.	Nº obj.	Perda	IE	Nº it	Tempo(ms)
MDF 12mm	4	30	3,7982%	68	9	458	7	29	1,2166%	17	16	1943
Aglo 12mm	18	80	3,2871%	99	60	12655	18	78	1,3832%	112	66	21385
MDF 15mm	3	27	15,8163%	114	3	179	4	23	2,1397%	62	12	982
Aglo 15mm	11	157	8,6258%	42	24	2864	11	146	1,6027%	40	24	4866
MDF 3mm	9	44	9,9454%	52	14	1274	8	41	4,1730%	34	26	4040
Total	45	338	8,2946%	375	110	17430	48	317	2,1030%	265	144	33216

Tabela 15: Resultados computacionais do momento 2 utilizando o método de geração de colunas de Yanasse e Morabito (2013) com produção conjunta
Geração de colunas com Yanasse e Morabito (2013)

Madeira	Sem rotação					Com rotação						
	Nº pad.	Nº obj.	Perda	IE	Nº it	Tempo(ms)	Nº pad.	Nº obj.	Perda	IE	Nº it	Tempo(ms)
MDF 12mm	5	30	4,5475%	29	9	92946	-	-	-	-	-	-
Aglo 12mm	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
MDF 15mm	3	27	15,8163%	114	3	36576	-	-	-	-	-	-
Aglo 15mm	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
MDF 3mm	9	44	10,1641%	46	15	263922	7	46	5,8094%	315	4	99912
Total	17	101	10,1760%	189	27	393444	7	46	5,8094%	315	4	99912

Tabela 16: Resultados computacionais do momento 2 utilizando o método de geração de colunas de Scheithauer (2002) com produção conjunta
Geração de colunas com Scheithauer (2002)

Madeira	Sem rotação					Com rotação						
	Nº pad.	Nº obj.	Perda	IE	Nº it	Tempo(ms)	Nº pad.	Nº obj.	Perda	IE	Nº it	Tempo(ms)
MDF 12mm	5	32	6,9593%	90	4	6777	6	33	4,8529%	206	6	85756
Aglo 12mm	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
MDF 15mm	3	27	15,8163%	114	2	1795	-	-	-	-	-	-
Aglo 15mm	11	160	10,2396	124	14	184857	-	-	-	-	-	-
MDF 3mm	8	45	13,6743%	28	13	34333	-	-	-	-	-	-
Total	27	264	11,6724%	356	33	227762	6	33	4,8529%	206	6	85756

4.2.3 Análise comparativa dos diferentes modelos para geração de colunas

Naturalmente os tempos computacionais necessários para obtenção da solução utilizando a produção conjunta de itens são maiores, quando comparados à abordagem com independência de produção, independentemente do método de geração de colunas utilizado. Isto se deve ao fato de que um maior número de itens é considerado em um mesmo problema, visto que os itens provenientes da mesma matéria prima de todos os produtos são cortados ao mesmo tempo. Este aumento na quantidade de itens em cada problema, adicionado à sensibilidade dos métodos de geração de colunas de Yanasse e Morabito (2013) e Scheithauer (2002) com relação às larguras e comprimentos mínimos dos itens de cada problema, ocasionam uma grande quantidade de exemplares em que não é encontrada uma solução para o *PCE* bidimensional, através do método *Simplex* com geração de colunas, como por exemplo, o corte do *MDF* 15mm nas Tabelas 12, 13 e o corte dos *MDF* 12mm e 15mm e Aglomerado 12mm e 15mm na Tabela 15, considerando a rotação de itens.

Visando a comparação entre os resultados obtidos para o *PCE* bidimensional utilizando o método *Simplex* com geração de colunas e as abordagens de produção independente e produção conjunta, será analisado o corte do *MDF* 12mm para o momento 1 da produção através de diferentes modelos para geração de colunas, uma vez que esta foi a única matéria prima em que encontrou-se uma solução utilizando os três métodos distintos de geração de colunas e as duas abordagens de produção (independente e conjunta), conforme ilustram as Tabelas 11, 12 e 13. Considere a Figura 26, onde são resumidos alguns resultados encontrados ao longo dos testes realizados.

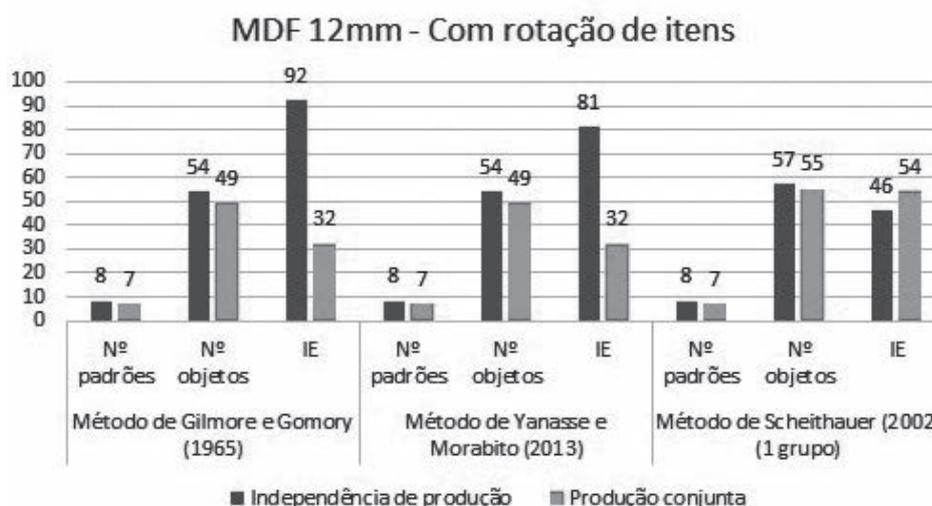


Figura 26: Resultados obtidos para o corte do *MDF* 12mm permitindo a produção de itens rotacionados

Note que, independentemente do método de geração de colunas escolhido, os resultados obtidos com a abordagem de produção conjunta são sempre melhores.

A redução no número de padrões de corte distintos necessários para a produção total dos itens demandados implica em uma maior agilidade no processo de corte, reduzindo o tempo necessário para preparação na máquina de corte para a execução de um novo padrão de corte.

A quantidade de objetos necessários utilizando a geração de novos padrões de corte do tipo 1-grupo (55), ou seja, utilizando o método de geração de colunas de Scheithauer (2002), é maior do que quando comparada à utilização de padrões de corte 2-estágios (49 e 49). No entanto, padrões de corte 1-grupo são cortados mais rapidamente pela máquina seccionadora, reduzindo o tempo total para obtenção dos itens e consequentemente fornecendo maior rapidez ao processo de fabricação de um produto. Dessa forma, a utilização de padrões de corte 1-grupo geram maior rapidez no processo de corte, mas por outro lado, geram maior perda de matéria prima quando comparada à utilização de padrões de corte 2-estágios.

Para analisar a perda de matéria prima obtida com os diferentes métodos de geração de colunas e as abordagens de produção independente e conjunta de itens foi necessário o cálculo de um único valor para as perdas de matéria prima do *MDF* 12mm utilizando a produção independente de itens. Conforme pode-se observar nas Tabelas 4, 7 e 9, é necessário que se obtenha um único valor para a perda de matéria prima considerando o

MDF 12mm de todos os produtos. Para isso, foi realizado o seguinte cálculo:

Procedimento para unificação de perdas

Enquanto houver MDF 12mm para ser cortado na composição de algum produto **faça** {

Calcule a área total de matéria prima desperdiçada durante o processo de corte deste produto; (Ex: $54 \times 2750 \times 1830 \times 24,0608\%$)

}

Some todos os valores obtidos no passo anterior e divida pela área total dos objetos utilizados durante a produção de todos os móveis envolvidos.

Dessa forma, pode-se comparar os dois procedimentos (produção independente e conjunta) de acordo com os diferentes métodos de geração de colunas. A Figura 27 ilustra os resultados obtidos

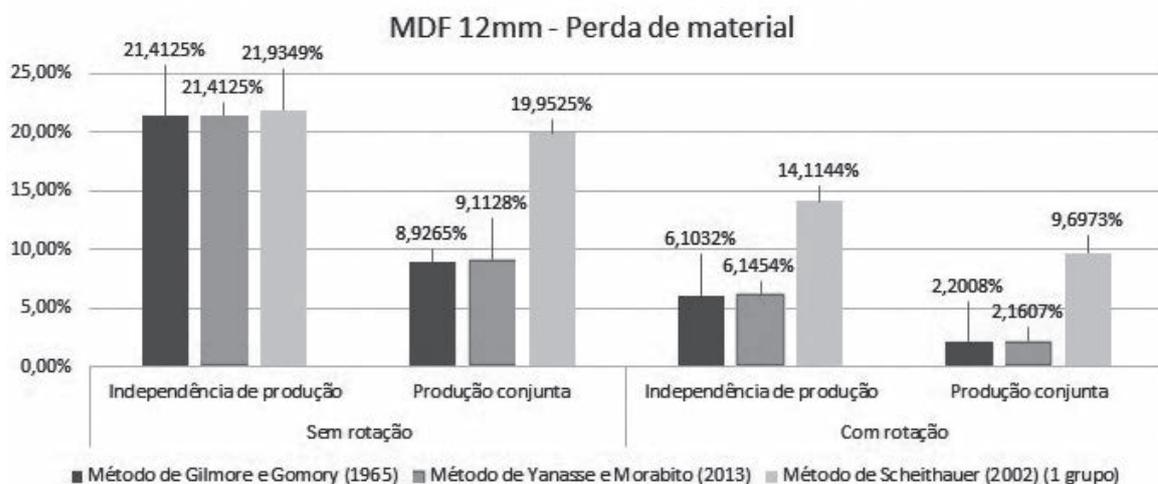


Figura 27: Perda de matéria prima obtida para o corte do MDF 12mm

Note que a menor perda de matéria prima sempre foi obtida considerando-se a produção conjunta de itens permitindo a produção de itens rotacionados, sendo o menor valor obtido com a geração de colunas de acordo com Yanasse e Morabito (2013) e seguido por uma diferença muito pequena pelo resultado obtido com a geração de colunas de acordo com Gilmore e Gomory (1965). Vale ressaltar que não se deve comparar friamente os resultados de perda obtidos com a utilização do método de Scheithauer (2002) com os demais, uma vez que os tipos de padrões de corte gerados por estes diferentes modelos

possuem diferentes eficiências, conforme citado anteriormente. Como o tempo computacional necessário para a obtenção da solução para o caso onde utilizou-se a geração de colunas com Yanasse e Morabito (2013) é superior ao obtido através da utilização do método de Gilmore e Gomory (1965), conclui-se que, em se tratando de geração de padrões de corte do tipo 2-estágios, é mais vantajoso a geração de colunas de acordo com Gilmore e Gomory (1965).

4.3 Comparação com os resultados obtidos na prática da fábrica

Com o objetivo de analisar de forma prática as soluções encontradas para o *PCE* bidimensional através do método computacional abordado e desenvolvido neste trabalho, foi realizado um estudo comparativo entre as soluções obtidas pela fábrica S. móveis com as encontradas ao longo deste trabalho.

A partir dos resultados apresentados anteriormente, concluiu-se que a melhor abordagem, considerando a quantidade de objetos necessários e a perda de material obtida com a utilização de padrões de corte 2-estágios em tempo computacional eficiente, foi a solução através do método *Simplex* com geração de colunas de acordo com Gilmore e Gomory (1965) utilizando a produção conjunta de itens e permitindo a rotação dos mesmos. Dessa forma, todos os resultados apresentados nesta comparação são relativos à utilização desta abordagem computacional.

Para viabilizar tal estudo comparativo, foram utilizados todos os dados do momento 1 da produção da fábrica. Este estudo prático e comparativo não foi realizado para o momento 2 da produção, uma vez que as informações principais são os padrões de corte utilizados pela fábrica e estas são de conhecimento apenas do operador da máquina seccionadora. Dessa forma, enquanto o operador está focado no fornecimento de dados para a realização deste trabalho a linha de produção da fábrica está parada, podendo ter consequências desagradáveis para a empresa. Por este motivo, optou-se por realizar a análise detalhada do momento 1 da produção e não para ambos os momentos. No entanto, os dados apresentados são suficientes para analisar a diferença entre a solução executada na prática pela fábrica e a obtida neste trabalho.

Como as maneiras com que se cortam as placas de madeira da S. móveis são decididas pelo próprio operador da máquina seccionadora, foi realizada uma reunião específica com este colaborador para que fosse possível a obtenção dos padrões de corte utilizados

pelo mesmo. O colaborador também utiliza a abordagem de produção conjunta de itens durante a busca por sua solução. No entanto, como utiliza apenas o raciocínio para os cálculos, aborda somente alguns itens por vez na análise de seus padrões de corte, fazendo com que se aproxime da abordagem de produção independente.

Em alguns casos, o operador utilizou apenas parte de uma placa de madeira para a obtenção parcial da demanda de determinado item, sendo a demanda total preenchida com itens que foram cortados a partir de objetos com dimensões reaproveitáveis e armazenados em outra ocasião pelo operador. Nestes casos, para que a comparação dos resultados fosse possível, criou-se um novo padrão de corte com todos os itens que foram gerados de forma reaproveitável pelo operador, respeitando as restrições necessárias em cada padrão de corte (guilhotinados e 2-estágios) e sem gerar outros itens excedentes, pois esta prática não é comum na fábrica, sendo realizado o armazenamento de placas de madeira já cortadas e com dimensões menores.

Após colher todas as informações necessárias, foi realizado um resumo da solução apresentada pelo operador, juntamente com a solução encontrada ao longo deste trabalho, conforme consta a Tabela 17.

	Solução da fábrica			Solução do estudo		
	Nº pad.	Nº obj.	Perda	Nº pad.	Nº obj.	Perda
MDF 12mm	8	54	8,9221%	7	49	2,2008%
Aglomerado 12mm	8	17	5,2117%	6	16	1,0469 %
MDF 15mm	9	48	3,6600%	10	49	6,8723%
Aglomerado 15mm	6	67	2,9379%	5	65	0,9281%
MDF 22mm	1	2	31,2675%	1	2	31,2675%
MDF 3mm	4	12	10,5965%	4	12	4,9010%
Total	36	200	10,4326%	33	193	7,8694%

Tabela 17: Resultado comparativo entre as soluções da fábrica e deste trabalho para o momento 1 da produção

Ao todo foram necessários 200 objetos, de acordo com a solução da fábrica, para a obtenção total dos itens. Já a solução obtida neste estudo utilizou um total de 193 objetos para produzir a mesma quantidade de itens, obtendo uma redução de 7 objetos neste lote de produção, o que reduz significativamente o custo de produção da S. móveis,

principalmente quando considera-se a produção de vários lotes. Com relação à perda de matéria prima não pode ser realizada uma comparação apenas analisando os valores da Tabela 17, pois em alguns casos a sobra da matéria prima calculada pelo operador da máquina de corte é deixada em pedaços grandes com dimensões específicas. O operador conhece a maior probabilidade de utilização de cada um dos pedaços grandes deixados, e no caso da solução obtida, estes pedaços tem as menores dimensões possíveis, podendo ou não ser aproveitados.

Outra vantagem significativa é o tempo necessário para obtenção destas soluções. Apesar de toda a experiência incontestável do operador da máquina seccionadora, é inevitável que algum tempo seja necessário para a elaboração dos padrões de corte, sendo a solução computacional encontrada mais rapidamente. Outro fator a ser destacado é a quantidade de padrões de corte distintos necessários para o corte total da demanda. Isto é justificado pelo fato de que, mesmo com o foco em analisar vários itens por vez no corte, em vários casos o operador da máquina utilizou padrões de corte homogêneos maximais, algo menos comum durante a solução obtida através do estudo realizado, fazendo com que fossem necessários mais padrões de corte para cortar toda a demanda. Vale ressaltar que não é uma tarefa trivial resolver um problema com muitos itens da forma com que o operador realiza, utilizando apenas o raciocínio lógico.

Toda esta comparação efetuada entre os padrões de corte da fábrica da S. móveis e os resultados obtidos neste trabalho não pode ser realizada utilizando o processo de geração de colunas de Yanasse e Morabito (2013) e Scheithauer (2002), uma vez que mesmo desconsiderando a produção de itens rotacionados, não foi possível encontrar a solução computacional dos problemas em virtude das dimensões reduzidas de alguns itens. Isto faz com que não sejam produzidos todos os itens necessários para a produção completa dos lote e conseqüentemente não pode ser comparada a quantidade de objetos com a prática da fábrica.

Capítulo 5

Considerações finais

Neste trabalho foi realizado um estudo relacionado à solução do Problema de Corte de Estoque Bidimensional através do método *Simplex* com geração de colunas. Foram também apresentadas diferentes abordagens para este problema e alguns modelos utilizados para a geração de um único padrão de corte, tanto para padrões de corte 2-estágios, quanto para padrões com cortes mais eficientes (com relação ao tempo), denominados 1-grupo.

Para viabilizar os estudos computacionais deste trabalho, foi implementado um código computacional em linguagem de programação *C++* e a este foi acoplado o *solver CPLEX* tornando viável a implementação da técnica de geração de colunas e consequentemente resolução do problema proposto. Os dados utilizados durante a obtenção dos resultados computacionais foram coletados em uma fábrica de móveis de médio porte da cidade de Jaci, localizada no interior de São Paulo, onde foi possível o estudo comparativo entre as diferentes abordagens de solução contidas neste trabalho com a solução utilizada pela fábrica, com o intuito de verificar a qualidade da solução obtida utilizando o método computacional proposto.

O objetivo principal deste trabalho foi realizar o estudo comparativo entre as soluções obtidas para os Problemas de Corte de Estoque Bidimensionais utilizando diferentes modelos matemáticos para o procedimento de geração de colunas, contido na abordagem de solução utilizada para o problema. Ao longo das soluções, foram considerados os casos com permissão para a produção de itens rotacionados, o que melhora significativamente a qualidade da solução obtida e também analisadas duas abordagens distintas na produção, independência de produção e produção conjunta, o que melhorou ainda mais as soluções obtidas.

Os resultados obtidos evidenciaram que a utilização de padrões de corte do tipo 1-grupo geram maior quantidade de objetos necessários para a produção demandada, quando comparada à utilização de padrões de corte 2-estágios. No entanto, a agilidade obtida no processo de produção com padrões de corte deste tipo é superior à utilização dos demais, cabendo a decisão sobre qual tipo de padrão de corte utilizar à fábrica de móveis, dependendo da necessidade (e urgência) de cada lote de produção.

Ao longo das visitas realizadas na fábrica e das reuniões com os responsáveis pelo corte e produção da S. móveis foi observado que há maneiras de melhorar ainda mais o processo de corte da fábrica. Uma delas é a implementação de um sistema computacional que considere a quantidade de itens excedentes cortados em estoque com a demanda do próximo lote que será cortado. Ou seja, deve haver uma comunicação entre o sistema que controla a produção dos móveis da fábrica atualmente com o sistema que produzirá padrões de corte para cada lote. Isto se faz necessário em virtude do melhor aproveitamento de matéria prima e consequente agilidade na utilização dos itens excedentes da fábrica, que hoje não são administrados por qualquer sistema. Vale ressaltar que o atual processo de corte da S. móveis é fortemente gerido pelos responsáveis da área, sendo todas as decisões tomadas de forma consciente.

Como proposta de trabalho futuro sugere-se a implementação deste novo sistema, cuja a utilização seria destinada ao gerente de produção e também ao operador da máquina de corte, sendo este o principal usuário da solução obtida com este sistema. Isto contribuiria muito para uma melhor organização do processo de corte e também reduziria significativamente os gastos com matéria prima da fábrica, visto que esta representa boa parte do gasto médio mensal da fábrica. Em se tratando de melhorias no âmbito científico deste estudo, propõe-se uma alteração na técnica de geração de colunas, onde pode-se analisar a inserção de um bloco de colunas na matriz de padrões de corte do problema, uma vez que para encontrar uma solução para os subproblemas são analisadas muitas outras soluções factíveis, o que pode tornar o processo de solução ainda mais eficiente. Além disto, uma expressiva contribuição científica é o estudo comparativo entre a solução dos *PCE* obtida neste trabalho, com a utilização da técnica de geração de colunas, e as demais abordagens de solução descritas na Seção 3.2 do Capítulo 3.

Referências Bibliográficas

- ABID. Relatório de acompanhamento setorial: Indústria moveleira. In: *Agência Brasileira de Desenvolvimento Industrial e Núcleo de Economia Industrial e da Tecnologia do Instituto de Economia da Universidade Estadual de Campinas*. 2008.
- ALVES, C. et al. An exact branch-and-price algorithm for the two-dimensional cutting stock problem. *workingpaper*, 2009.
- ALVEZ, C.; VALÉRIO DE CARVALHO, J. M. Accelerating column generation for the single and variable sized bin-packing problem. *Anais do V Optimization*, 2004.
- AMOSSEN, R. *Constructive algorithms and lower bounds for guillotine cuttable orthogonal bin packing problems*. Dissertação (Mestrado) — Department of Computer Science - University of Copenhagen - Denmark, 2005.
- ANDRADE, C. E. *Um algoritmo exato para o problema de empacotamento bidimensional em faixas*. Dissertação (Mestrado) — UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas, 2006.
- ARENALES, M. N.; MORABITO, R.; YANASSE, H. H. Problemas de corte e empacotamento. In: *Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional - São João del Rei, MG*. 2004.
- BAZARAA, M. S.; JARVIS, J. J.; SHERALI, H. F. Linear programming and network flows. *JohnWiley and Sons, New York*, 1990.
- CAVALI, R. *Problemas de corte e empacotamento na indústria de móveis: um estudo de caso*. Dissertação (Mestrado) — Ibilce-UNESP, São José do Rio Preto - SP, 2004.
- CAVALI, R.; RANGEL, S. O problema do corte bidimensional aplicado à indústria moveleira. In: *Anais do XXVI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, São José do Rio Preto, SP*. 2003.
- CHERRI, A. C. et al. The one-dimensional cutting stock problem with usable leftovers - a survey. *European Journal of Operational Research*, v. 236, p. 395–402, 2014.
- CHRISTOFIDES, N.; WHITLOCK, C. An algorithm for two-dimensional cutting problems. *Operations Research*, v. 25, p. 30–44, 1977.
- CHVÁTAL, V. Linear programming. *W. H. Freeman and Company, New York*, 1983.
- CINTRA, G. F. *Algoritmos para Problemas de Corte de Guilhotina Bidimensional*. Tese (Doutorado) — Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2004.

- CUNG, V.; HIFI, M.; CUN, B. L. Constrained two-dimensional cutting stock problems. a best-first branch-and-bound algorithm. *International Transactions in Operational Research*, v. 7, p. 185–210, 2000.
- DANTZIG, G.; WOLFE, P. Decomposition principle for linear programs. *Oper. Res.*, v. 8, p. 101–111, 1960.
- DAZA, V.; ALVARENGA, A. G.; DIEGO, J. Exact solutions for constrained two-dimensional cutting problems. *European Journal of Operational Research*, v. 83, p. 633–644, 1995.
- DOLATABADI, M.; LODI, A.; MONACI, M. Exact algorithms for the two-dimensional guillotine knapsack. *Computers and Operations Research*, v. 39, p. 48 – 53, 2012.
- DYCKHOFF, H. A new linear programming approach to the cutting stock problem. *Operations Research*, v. 29(6), p. 1092–1104, 1981.
- DYCKHOFF, H. A typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, v. 44, p. 145 – 159, 1990.
- FACCIO, A. P. *Propostas de solução para o problema de corte de estoque bidimensional de uma fábrica de móveis de pequeno porte*. Dissertação (Mestrado) — Ibilce-UNESP, São José do Rio Preto - SP, 2008.
- FACCIO, A. P.; RANGEL, S. Geração de padrões de corte n-grupos para a indústria moveleira. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*, v. 27, p. 41–57, 2009.
- FIGUEIREDO, A. G.; RANGEL, S. O problema de corte de estoque em indústrias de móveis de pequeno e médio portes. *Anais do XXXVIII SBPO*, p. 1626–1636, 2006.
- FRITSCH, A.; VORBERGER, O. Cutting stock by iterated matching. *International Conference on Operations Research*, v. 145, p. 92–97, 1995.
- GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E. A linear programming approach to the cutting-stock problem. *International Business Machines Corporation, Research Center, Yorktown, New York*, 1961.
- GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E. A linear programming approach to the cutting-stock problem-part ii. *International Business Machines Corporation, Research Center, Yorktown, New York*, 1963.
- GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E. Multistage cutting stock problems of two and more dimensions. *Operations Research*, v. 13, p. 94–120, 1965.
- GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E. The theory and computation of knapsack functions. *Operations Research*, v. 14, p. 1045–1074, 1966.
- HARJUNKOSKI, I. et al. Different strategies for solving bilinear integer non-linear programming problems with convex transformations. *Computers Chem. Eng.*, v. 21, p. 487–492, 1997.
- HERZ, J. Recursive computational procedures for two-dimensional stock cutting. *IBM Journal of Research and Development*, v. 16, p. 462–469, 1972.

- HIFI, M. An improvement of viswanathan and bagchi's exact algorithm for cutting stock problems. *Computers & Operations Research*, v. 24, p. 727–736, 1997.
- IBM, C. *CPLEX*. <http://www-01.ibm.com/software/integration/optimization/cplex-optimizer/>, 2009. Visitada pela última vez em 10/02/2015.
- IEMI. Estudo dos canais do varejo de móveis. In: *Relatório do Instituto de Estudos e Marketing Industrial*. 2014.
- KANTOROVICH, L. V. Mathematical methods of organizing and planning production (traduzido de um trabalho em russo datado em 1939). *Management Science*, v. 6, p. 366–422, 1960.
- LODI, A.; MARTELLO, S.; VIGO, D. Models and bounds for two-dimensional level packing problems. *Journal of Combinatorial Optimization*, v. 8, p. 363–379, 2004.
- LODI, A.; MONACI, M. Integer programming models for 2-staged two-dimensional knapsack problems. *Mathematical Programming*, v. 94, p. 257–278, 2003.
- LUEKER, G. Two np-complete problems in nonnegative integer programming. *Computer Science Laboratory - Princeton University*, Report n. 178, 1975.
- MACEDO, R.; ALVES, C.; VALÉRIO DE CARVALHO, J. Arc-flow model for the two-dimensional guillotine cutting stock problem. *Computers and Operations Research*, v. 37, p. 991–1001, 2010.
- MARTELLO, S.; PISINGER, D.; VIGO, D. The three-dimensional bin packing problem. *Operations Research*, v. 48(2), p. 256–267, 2000.
- MARTINS, A. T. *Estratégias para a redução de ciclos da serra no problema de corte de estoque na indústria moveleira*. Dissertação (Mestrado) — Ibilce/UNESP, 2010.
- MARTELLO, S.; TOTH, P. *Knapsack Problems*. : John Wiley And Sons, 1990.
- MORABITO, R.; ARENALES, M. N. Optimizing the cutting of stock plates in a furniture company. *International Journal of Production Research*, v. 38, p. 2725–2742, 2000.
- MOSQUERA, G. P. *Contribuições para o Problema de Corte de Estoque Bidimensional na Indústria Moveleira*. Dissertação (Mestrado) — Ibilce-UNESP, São José do Rio Preto - SP, 2007.
- OLIVEIRA, J.; FERREIRA, J. An improved version of wang.s algorithm for two dimensional cutting problems. *European Journal of Operational Research*, v. 44, p. 256–266, 1990.
- OLIVEIRA, J.; FERREIRA, J. A geração rápida de colunas: uma alternativa na técnica de gilmore e gomory para problemas de corte. *Investigação Operacional*, v. 13, p. 101–117, 1993.
- PEREIRA, T. C. P. A indústria moveleira no brasil e os fatores determinantes das exportações. In: . 2009, (Trabalho de conclusão de curso de graduação (Bacharelado em Ciências Econômicas)).

- PLACA centro. <http://www.placacentro.com/bra/servicos/otimizador.html>, 2015. Visitada pela última vez em 13/05/2015.
- PORTAL Moveleiro. <http://conteudo.portalmoveleiro.com.br/index.php>: , 2015. Visitada pela última vez em 30/03/2015.
- PREFEITURA Municipal de Jaci. <http://www.jaci.sp.gov.br>, 2015. Visitada pela última vez em 15/04/2015.
- PUCHINGER, J.; RAIDL, G. Models and algorithms for three-stage two-dimensional bin packing. *European Journal of Operational Research*, v. 127(3), p. 1304–1327, 2007.
- RUSSO, M.; SOUZA, A.; STERLE, C. An improvement of the knapsack function based algorithm of gilmore and gomory for the unconstrained two-dimensional guillotine cutting problem. *Elsevier - Int. J. Production Economics*, v. 145, p. 451–462, 2013.
- SCHEITHAUER, G. On a two-dimensional guillotine cutting problem. *International Federation of Operational Research Societies - IFORS*, v. 16, 2002.
- SILVA, E.; ALVELOS, F.; VALÉRIO DE CARVALHO, J. An integer programming model for two- and three-stage two-dimensional cutting stock problems. *European Journal of Operational Research*, v. 205, p. 699–708, 2010.
- SILVA, E. M.; SANTOS, F. C. A. Análise do alinhamento da estratégia de produção com a estratégia competitiva na indústria moveleira. *Revista Produção*, v. 15, p. 286–292, 2005.
- STIPP, M. S. M. *Cluster Industrial: o pólo moveleiro de Votuporanga-SP*. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Ciências e Letras, Universidade Estadual Paulista, 2002.
- VALÉRIO DE CARVALHO, J. Exact solution of bin-packing problems using column generation and branch-and-bound. *Annals of Operations Research*, v. 86, p. 629–659, 1999.
- VALÉRIO DE CARVALHO, J. M. Lp models for bin packing and cutting stock problems. *European Journal of Operational Research*, v. 141, p. 253–273, 2002.
- VANCE, P. Branch-and-price algorithms for the one-dimensional cutting stock problem. *Computational Optimization and Applications*, v. 9, p. 211–228, 1998.
- VASKO, F. J. A computational improvement to wang’s two-dimensional cutting stock algorithm. *Computers and Industrial Engineering*, v. 16, p. 109–115, 1989.
- WANG, P. Y. Two algorithms for constrained two-dimensional cutting stock problems. *Operations Research*, v. 31, p. 573–586, 1983.
- WASCHER, G.; HAUBNER, H.; SCHUMANN, H. An improved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, v. 183, p. 1109 – 1130, 2007.
- YANASSE, H. H.; HARRIS, R. G.; ZINOBER, A. S. I. Uma heurística para redução do número de ciclos da serra no corte de chapas. *XIII ENEGEP - Congresso Latino Americano de Engenharia Industrial, São Carlos. Anais do XII ENEGEP*, v. 2, 1993.

YANASSE, H. H.; MORABITO, R. Linear models for 1-group two-dimensional guillotine cutting problems. *International Journal of Production Research*, v. 44, p. 3471–3491, 2006.

YANASSE, H. H.; MORABITO, R. Modelos lineares e não lineares inteiros para problemas da mochila bidimensional restrita a 2 estágios. *Produção*, v. 23, p. 887–901, 2013.

APÊNDICE A

Composição dos produtos da fábrica

A seguir é descrita a composição de cada um dos móveis da S. móveis utilizados neste trabalho. Todos os produtos utilizados são descritos, seguidos pelos tipos de matéria-prima que os compõem e também pela descrição das dimensões e quantidades de itens necessários para a montagem de uma unidade de cada produto.

		Mesa de computador Havana (i=1)				Painel Seale (i=2)			
	item	l_i	l_{ij}	q_{ij}	item	l_i	l_{ij}	q_{ij}	
MDF - 12mm	lateral direita - 0098	404	740	1					
	lateral esquerda - 0094	404	740	1					
	Prateleira fixa 0095	337	615	1					
	Tampo 0099	450	683	1					
Aglomerado - 12mm	Bandeja teclado - 0100	592	299	1					
	Travessa - 2042	615	30	1					
MDF - 15 mm	Aplique - 3629					60	320	1	
	Aplique - 3622					60	900	2	
Aglomerado - 15mm	Aplique lateral cru - 4132					680	60	2	
	Divisória central - 3609					290	145	1	
	Divisória direita - 3534					290	145	1	
	Divisória esquerda - 3608					290	145	1	
	Painel inferior - 4082					1369	450	1	
	Painel superior - 3535					1369	450	1	
	Prateleira inferior - 3607					1250	300	1	
	Prateleira superior - 3533					1250	300	1	
MDF - 22 mm	Fundo traseiro - 10004504	635	100	2					

Autorizo a reprodução xerográfica para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 21 de Agosto de 2015.

Rafael Freitas Rocha