IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORADO

IFT-T.011/02

Dp-branas à Temperatura Finita

Alexandre L. Gadelha

Orientador

Maria Cristina Batoni Abdalla

Co-orientador

Ion Vasile Vancea

Novembro de 2002

Agradecimentos

Agradeço à Profa. Dra. Maria Cristina Batoni Abdalla, pela Orientação, pela Compreensão, pela Paciência e sobre tudo pela Amizade.

Agradeço ao Prof. Dr. Ion Vasile Vancea pela Co-orientação, pelos Ensinamentos, pelo Amigo que é e pelo Seu Brilho.

Agradeço ao Prof. Dr. Celso L. Lima pela indicação e por sua confiança no meu trabalho.

Agradeço ao Prof. Dr. Bruto Max Pimental Escobar por ter aberto as portas do IFT, por ter me iniciado e pelo Aprendizado que me propocionou.

Agradeço a Walderez Gadelha (em memória), Neuza Maria Leite Gadelha, Symone Leite Gadelha e Maria Cairo Leite, Minha Gente, por ser quem sou.

Agradeço à Dimaura (Di) F. Carvalho, pelo Amor, pela Paixão, pela Alegria de Viver e por transformar os últimos anos, nos mais completos de minha vida.

Agradeço ao IFT e a todos os funcionários, pessoas que fazem a Instituição respirar.

Agradeço à CAPES por financiar o meu trabalho.

Resumo

Apresentamos uma formulação geral para a Dinâmica de Campos Térmicos em termos de geradores que satisfazem a álgebra do grupo $SU(1,1)$. Introduzimos o Operador Entropia dentro deste contexto. Construímos estados de contorno bosônicos à temperatura finita. Estes estados são interpretados como D_p-branas térmicas. A entropia da corda bosônica fechada, bem como a da D_p-brana térmica na presença de um campo externo abeliano constante, é obtida.

Abstract

A general formulation of Thermo Field Dynamics using $su(1,1)$ generators is presented. In this framework an entropy operator is introduced and boundary state is constructed at finite temperature. This boundary state is interpreted as a thermal D_p-brane. The entropy of bosonic closed string is obtained as well that of D_p-brane in an abelian external field using the general expression for the entropy operator.

Índice

Capítulo 1

Introdução

Cordas, enquanto objetos fundamentais, têm sido intensivamente estudadas nas últimas décadas. Desde a década de 60, quando da descoberta de Veneziano [1], no estudo de amplitudes de espalhamento hadrônicos até os dias de hoje os avanços foram consideráveis. A despeito do fato da teoria que descreve tais objetos reinar em uma escala de energia inacessível aos experimentos disponíveis atualmente, ela tem atraido cada vez mais pesquisadores. O crescente interesse se deve a possibilidade da teoria que descreve as cordas, ser uma das candidatas a unificar as forças existentes na natureza.

A Corda é um objeto unidimensional que ao percorrer o espaço-tempo varre uma superfície chamada de folha-mundo (ao invés da linha-mundo que descreve o movimento de uma partícula no espaço-tempo). Estes objetos podem ser de dois tipos, a corda aberta e a corda fechada. O estudo do espéctro da corda bosônica, mostrou que dependendo dos modos no qual a corda vibra sugem partículas que podem ser associadas aos fótons e aos grávitons, por exemplo, levando a crer que tal teoria seria capaz de acomodar uma teoria quântica da gravidade, juntamente com as teorias que descrevem as outras interações fundamentais, que por sua vez são unificadas no Modelo Padrão. O fato de um dos modos de vibração corresponder a uma partícula de massa nula e *spin* 2, interpretada como gráviton foi o que motivou o estudo progressivo e cada vez mais profundo das possibilidades desta teoria.

Na década de 80, chegou-se a conclusão de que era possível considerar cinco teorias distintas de cordas, como igualmente prováveis candidatas a unificar as interações fundamentais, bem como descrever o universo em escalas de energia superiores à escala de Planck [2]. Ou seja, tinha-se cinco teorias igualmente consistentes que poderiam descrever o Todo. Todas elas em dimensões superiores às usuais quatro dimensões espaço-temporais, nas quais acreditamos viver. Além disso todas elas exibiam a necessidade de introdução de parceiros fermiônicos para cada bóson existente e *vice versa*. Ou seja, trata-se de teorias supersimétricas. Com o intuito de contornar o problemas das dimensões ditas extras, supõe-se que algumas das dimensões espaciais estariam enroladas, ou seja, compactar as dimensões extras seria a alternativa para descrever o mundo quadridimensional em que vivemos. Este conjunto de possibilidades, ou necessidades de uma teoria de cordas para descrever o mundo tal como o observamos, fez com que a ela fosse alvo de sérias críticas e considerada por muitos como um exercício puramente acadêmico, sem qualquer conexão com a realidade.

Na década de 90 uma luz foi lançada sobre a teoria. A descoberta de dualidades que relacionam as várias teorias de supercorda, leva a crer que elas são vácuos distintos de uma única teoria chamada de Teoria M. Dentro destes estudo de dualidade, um outro ente surge: a D-brana. D-branas seriam objetos extendidos onde as cordas podem ter seus extremos fixados. São de grande importância nos estudos de dualidades entre as teorias de supercordas, pois podem mapear uma teoria em outra. Estes objetos têm lugar em dois limites distintos de teorias de cordas. Um deles o não perturbativo, onde as D-branas surgem como soluções solitônicas da supergravidade, um limite de baixas energias da teoria de cordas, e outro, o limite perturbativo, para acoplamento fraco da corda, onde a D-branas aparecem como estados de contorno contruídos no espaço de Fock da corda.

A descoberta das dualidades, bem como a possibilidade de testar experimentalmente a supersimetria ainda nesta década, torna as teorias de supercordas ainda mais atraentes. Mesmo que a comprovação ou o descarte da teoria de cordas estejam longe ou talvez inacessíveis do ponto de vista tecnológico, sua estrutura rica, aglomerando várias áreas de conhecimento dentro da física em um único modelo, por si só, atrai interesse de estudo. Ainda mais quando estes estudos levam ao desenvolvimento de técnicas que podem contribuir para o entendimento de teorias como a teoria quântica de campos e a gravitacão. De fato, a partir do estudo de D-branas é possível obter uma descrição microscópica da entropia de Beckenstein-Hawking para buracos negros [3, 19], assim como propriedades de supercordas vem sendo usa-das para estudo do universo primitivo [20, 21]. Mesmo do ponto de vista teórico, o descarte de uma teoria como esta só pode ser feito depois de muito estudo e profundo entendimento de suas propriedades no maior número de contextos possíveis.

Um dos objetivos do trabalho que agora apresento, é justamente dar alguma contribuição ao entendimento desta teoria. Mais especificamente, no entendimento de propriedades estatísticas e termodinâmicas das D-branas. Estas propriedades têm sido intensamente estudadas no limite não perturbativo de teoria de cordas [22, 33]. Entretanto, no limite perturbativo, os mecanismos de introduç ão de temperatura no sistema têm sido pouco explorados. Nosso foco aqui é então estudar como introduzir temperatura neste limite, bem como analisar o comportamento e dependência do sistema para com esta grandeza.

No limite perturbativo as D-branas são vistas como estados que satisfazem determinadas condições de contorno, construídos no espaço de Fock da corda. Estes estados, chamados de estados de contorno, são portanto definidos por relações operatoriais. Para introduzir temperatura no sistema, devemos portanto utilizar um formalismo operatorial, ou seja, dentre os formalismos existentes para introdução de temperatura em sistemas quânticos, somos levados a lançar mão do formalismo conhecido originalmente como *Thermofield Dynamics* [35] e que aqui traduzimos livremente como Dinâmica de Campos Térmicos. Referiremo-nos muitas vezes neste texto, simplesmente como Campos Térmicos.

A Dinâmica de Campos Térmicos é um formalismo de tempo real. Tem como pedra fundamental, escrever médias estatísticas de operadores em termos de valores esperados em teoria quântica de campos [35]. Estes por sua vez, são calculados em estados que carregam dependência para com a temperatura. O procedimento consiste basicamente na duplicação dos graus de liberdade do sistema e da mistura destes graus, os originais com os introduzidos, através de uma transformação de Bogoliubov. Em 1981, Ojima [36] mostrou a equivalência entre Dinâmica de campos Térmicos e a abordagem que usa métodos algébricos rigorosos, para formulação da mecânica estatística [37].

Desde sua concepção em 1975, até os dias de hoje, o formalismo vem sendo usado para estudar desde supercondutividade [38], física de partículas e teoria de cordas [39, 44] até dissipação quântica [45] e dinâmicas cerebrais[46]. Durante o desenvolvimento do projeto que deu origem a esta tese, vem sendo utilizado também para estudos de estados de contorno associados a D-branas [47, 48, 49, 50, 51]. Este estudo nos levou também a possibilidade de uma contribuição para o entendimento mais profundo da Dinâmica de Campos Térmicos, sobretudo em sua construção geral para sistemas bosônicos, quando é feito uso de geradores de transformação que satisfazem a álgebra $su(1,1)$. Esta contribuição constitui o outro objetivo do trabalho aqui apresentado.

Este trabalho tem a seguinte estrutura. No capítulo 2 apresentamos o formalismo de Campos Térmicos e introduzimos sua construção geral em termos de geradores do grupo $SU(1,1)$. No capítulo 3 apresentamos o sistema que desejamos estudar, que contitui-se de um teoria de corda bosônica e da construção do estado de contorno associado à D-brana. No capítulo 4, aplicamos a Dinâmica de Campos Térmicos à teoria de cordas bosónicas. Construimos o estado de contorno dependente da temperatura, ao qual chamamos de D–brana térmica. Concluimos este trabalho no capítulo 5, onde apresentamos um resumo do que foi feito e as perspectivas.

Capítulo 2

Dinâmica de Campos Térmicos

Neste capítulo apresentaremos a abordagem de Campos Térmicos para o tratamento de sistemas com infinitos graus de liberdade à temperatura finita. Por Dinâmica de Campos Térmicos consideramos o formalismo desenvolvido por Takahashi e Umezawa [35] para introduzir temperatura em sistemas físicos inicialmente à temperatura zero. Este formalismo é conhecido como *Thermo Field Dynamics.* Iniciaremos considerando a equivalência entre o tratamento da mecânica estatística e o de teoria de campos à temperaura finita, como apresentado por Takahashi e Umezawa no artigo original onde o nome *Thermo Field Dynamics* foi cunhado [35]. Veremos que a equivalência é feita supondo a existência de um estado dependente da temperatura e que este, para ser definido, carece da duplicação dos graus de liberdade do sistema, ou seja, da duplicação do Espaço de Hilbert original.

Exemplificaremos a abordagem aplicando-a para o oscilador harmônico bosônico e verificaremos que o estado térmico pode ser obtido a partir de uma transformação canônica feita sobre o sistema duplicado. Esta aplicação é puramente pedagógica, no sentido de apresentar o algorítmo (por assim dizer) de funcionamento do formalismo em questão. Como a observação de efeitos térmicos exige infinitos graus de liberdade uma generalização do tratamento do oscilador harmônico bosônico para infinitos osciladores de mesma natureza é necessária.

Uma vez esclarecida a mecânica do formalismo, introduziremos a formulação geral para o de Campos Térmicos em suas duas formulações possíveis: a formulação não unitária e a formulação unitária. A relação de ambas com o trabalho original de Takahashi e Umezawa é estabelecida. Introduziremos ainda dentro da formulação geral o operador entropia para sistemas bosônicos *.

---

*Uma excelente exposição sobre Dinâmica de Campos Térmicos pode ser encontrada em [34], assim como belos apêndices, onde muitos cálculos não explicitados aqui são apresentados.

2.1 Relação entre Mecânica Estatística e o Formalismo de Campos Térmicos

Em 1975 Tahahashi e Umezawa [35] introduziram o formalismo de campos térmicos como uma alternativa ao método de Matsubara [56] para tratar sistemas térmicos. A idéia era escrever médias térmicas em termos de valores esperados em teoria de campos. Os valores esperados deveriam ser tomados em estados que contivessem dependência em um parâmetro identificado como sendo a temperatura. Mais especificamente $\beta = (k_B T)^{-1}$, sendo k_B e T a constante de Boltzmann e a temperatura, respectivamente. Estes estados são então chamados de estados térmicos. O que buscava-se então era uma relação do tipo

$$\langle A \rangle = \frac{1}{Z(\beta)} Tr\left[\rho A\right] \equiv \langle 0(\beta) \left| A \right| 0(\beta) \rangle, \tag{2.1}$$

sendo A um operador representando alguma grandeza do sistema, $Z(\beta)$ a função de partição dada por

$$Z(\beta) = Tr\left[\rho\right],$$

ρ a matriz de densidade e $|0(\beta)\rangle$ o estado térmico. Para que a relação (2.1) seja satisfeita, Takahashi e Umezawa verificaram que do lado direito da mesma, o sistema deveria ser descrito em termos de um espaço de Hilbert estendido. Mais especificamente, verificaram a necessidade de duplicar o espaço físico original introduzindo assim um espaço Hilbert auxiliar, sendo seus elementos denotados por um til. O espaço estendido seria portanto composto do produto do espaço físico original por um outro espaço idêntico e ortogonal ao primeiro. Ou seja, denotando o espaço estendido por $\widehat{\mathcal{H}}$, temos

$$\widehat{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \otimes \widetilde{\mathcal{H}}, \tag{2.2}$$

sendo $\widetilde{\mathcal{H}}$ o espaço auxiliar. Portanto para que a relação em questão seja satisfeita é necessário que o espaço seja duplicado e tenha então, o dobro dos graus de liberdade de sistema original, ou físico.

O estado que satisfaz a relação acima foi encontrado como sendo

$$|0(\beta)\rangle = \frac{1}{(Z(\beta))^{1/2}} \sum_n e^{-\frac{\beta}{2}E_n} \left| n, \tilde{n} \right\rangle, \tag{2.3}$$

para a qual E_n é o autovalor do Hamiltoniano (H) do sistema físico,

$$H\left| n \right\rangle = E_n \left| n \right\rangle, \tag{2.4}$$

com

$$\langle m \left| n \right\rangle = \delta_{mn}, \tag{2.5}$$

e, uma vez que físico e fictício são idênticos, E_n é também autovalor do operador Hamiltoniano $\widetilde{H}$ definido no espaço de Hilbert auxiliar, ou seja

$$\widetilde{H}\,|\widetilde{n}\rangle = E_n\,|\widetilde{n}\rangle\,, \tag{2.6}$$

com

$$\langle\widetilde{m}\,|\widetilde{n}\rangle = \delta_{mn}. \tag{2.7}$$

Temos ainda em (2.3) a introducão da seguinte notação

$$|n,\widetilde{n}\rangle \equiv |n\rangle \otimes |\widetilde{n}\rangle\,, \tag{2.8}$$

que são estados duplicados pertencentes a $\widehat{\mathcal{H}}$, o espaço de Hilbert duplicado ou estendido e, pela ortonormalidade de seus espaços constituintes, também é ortonormal

$$\langle m,\widetilde{m}\,|n,\widetilde{n}\rangle = \delta_{mn}\delta_{mn}. \tag{2.9}$$

Considerando um sistema bosônico, os operadores que atuam no espaço de Hilbert original comutam com aqueles que atuam no espaço auxiliar: seja A e $\tilde{A}$ operadores quaisquer atuando em $\mathcal{H}$ e $\widetilde{\mathcal{H}}$ respectivamente, temos

$$\left[A,\widetilde{A}\right] = 0. \tag{2.10}$$

A formulação apresentada acima de uma forma geral será exemplifida agora para o oscilador harmônico bosônico. Veremos que o estado térmico dado em (2.3) pode ser obtido se executarmos uma determinada transformação canônica no vácuo (a ser definido) do espaço duplicado.

2.1.1 Aplicação Simples - Oscilador Harmônico Bosônico

Condidere o Hamiltoniano do oscilador harmônico bosônico dado por

$$H = \omega a^{\dagger}a. \tag{2.11}$$

Os operadores $a^{\dagger}$ e a chamados de operadores de criação e aniquilação, respectivamente satsfazem as seguintes relações de comutação

$$[a^{\dagger},a] = 1; \quad [a,a] = [a^{\dagger},a^{\dagger}] = 0. \tag{2.12}$$

O espaço onde estes operadores atuam é varrido pelos vetores

$$|n\rangle = \frac{(a^{\dagger})^n}{\sqrt{n!}}\,|0\rangle\,, \tag{2.13}$$

para todo n inteiro positivo, sendo $|0\rangle$ o vácuo do sistema definido por

$$a\,|0\rangle = 0.$$

Duplicando o sistema original temos agora um operador Hamiltoniano associado ao sistema auxiliar dado por

$$\widetilde{H} = \omega \widetilde{a}^{\dagger} \widetilde{a}, \tag{2.14}$$

sendo

$$[\widetilde{a}^{\dagger}, \widetilde{a}] = 1; \quad [\widetilde{a}, \widetilde{a}] = [\widetilde{a}^{\dagger}, \widetilde{a}^{\dagger}] = 0 \tag{2.15}$$

e o espaço auxiliar sendo varrido pelos estados

$$|\widetilde{n}\rangle = \frac{(\widetilde{a}^{\dagger})^n}{\sqrt{n!}} \left|\widetilde{0}\right\rangle,$$

para todo n inteiro positivo. O estado $\left|\widetilde{0}\right\rangle$ é o vácuo do sistema auxiliar e é definido por

$$\widetilde{a}\,|\widetilde{0}\rangle = 0.$$

O vácuo do sistema duplicado é definido por

$$a\,|0\rangle\rangle = \widetilde{a}\,|0\rangle\rangle = 0, \tag{2.16}$$

sendo que introduzimos a seguinte notação

$$|0\rangle\rangle \equiv \left|0, \widetilde{0}\right\rangle = |0\rangle \otimes \left|\widetilde{0}\right\rangle. \tag{2.17}$$

O espaço físico é ortogonal ao espaço auxiliar, e as relações de comutação entre operadores dos diferentes espaços são dadas por

$$[a, \widetilde{a}] = \left[a, \widetilde{a}^{\dagger}\right] = [a^{\dagger}, \widetilde{a}^{\dagger}] = [a^{\dagger}, \widetilde{a}] = 0, \tag{2.18}$$

ou seja, operadores que atuam nos diferentes espaços comutam.

O estado térmico dado em (2.3) é agora dado, para o sistema em questão, por

$$\begin{aligned}
|0\,(\beta)\rangle &= Z^{-1/2}(\beta) \sum_n e^{-\frac{1}{2}\beta n \omega} \frac{(a^{\dagger})^n (\widetilde{a}^{\dagger})^n}{n!}\,|0\rangle\rangle \\
&= Z^{-1/2}(\beta) \sum_n \frac{1}{n!} \left[\exp\left(-\frac{1}{2}\beta\omega\right) a^{\dagger}\widetilde{a}^{\dagger}\right]^n |0\rangle\rangle \qquad (2.19) \\
&= Z^{-1/2}(\beta) \exp\left[e^{-\frac{1}{2}\beta\omega} a^{\dagger}\widetilde{a}^{\dagger}\right] |0\rangle\rangle\,. \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

Note que sendo

$$Z(\beta) = \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega}}, \tag{2.21}$$

para que tenhamos

$$\langle 0(\beta) | 0(\beta) \rangle = 1, \tag{2.22}$$

se definirmos

$$\begin{aligned} u(\beta) &\equiv \left(1 - e^{-\beta\omega}\right)^{-1/2}, &(2.23)\\ v(\beta) &\equiv \left(e^{\beta\omega} - 1\right)^{-1/2}, &(2.24) \end{aligned}$$

o vácuo térmico pode ser escrito como

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= \sqrt{(1 - e^{-\beta\omega})} \exp\left[\left(\frac{1 - e^{-\beta\omega}}{e^{\beta\omega} - 1}\right)^{1/2} a^\dagger \tilde{a}^\dagger\right] |0\rangle\rangle \\ &= \frac{1}{u(\beta)} \exp\left[\frac{v(\beta)}{u(\beta)} a^\dagger \tilde{a}^\dagger\right] |0\rangle\rangle . \end{aligned} \tag{2.25}$$

O estado $|0(\beta)\rangle$ pode ser obtido através de uma transformação cujo gerador é definido por

$$G_B \equiv -i\theta(\beta)(a\tilde{a} - a^\dagger \tilde{a}^\dagger), \tag{2.26}$$

sendo o parâmetro da transformação definido pelas relações abaixo

$$\begin{aligned} \cosh\theta(\beta) &= u(\beta) \equiv \left(1 - e^{-\beta\omega}\right)^{-1/2}, &(2.27)\\ \sinh\theta(\beta) &= v(\beta) \equiv \left(e^{\beta\omega} - 1\right)^{-1/2}. &(2.28) \end{aligned}$$

O subíndice B é introduzido em (2.26) pelo fato do gerador G_B ser aquele que define uma transformação de Bogoliubov, no caso executada sobre o vácuo do sistema duplicado. Temos então

$$|0(\beta)\rangle = e^{-iG_B} |0\rangle\rangle, \tag{2.29}$$

que explicitamente fica dado por

$$|0(\beta)\rangle = \frac{1}{\cosh\theta(\beta)} \exp\left\{\tanh[\theta(\beta)]\, a^\dagger \tilde{a}^\dagger\right\} |0\rangle\rangle, \tag{2.30}$$

sendo que usamos (2.25), as definições de u e v dadas em (2.27) e (2.28) respectivamente, além do fato de a e $\tilde{a}$ atuarem no vácuo dobrado aniquilando-o como dado em (2.16).

A transformação de Bogoliubov atua nos operadores aniquilação como segue

$$\begin{aligned} a(\beta) &= e^{-iG_B} a \, e^{iG_B} = u(\beta)\, a - v(\beta)\, \tilde{a}^\dagger, \\ \tilde{a}(\beta) &= e^{-iG_B} \tilde{a} \, e^{iG_B} = u(\beta)\, \tilde{a} - v(\beta)\, a^\dagger, \end{aligned} \tag{2.31}$$

e a transformação para os operadores de criação é obtida através de uma conjugação hermitiana das expressões acima, notando que

$$(G_B)^\dagger = G_B, \tag{2.32}$$

e portanto a transformação aqui considerada é unitária

$$(e^{iG_B})^\dagger e^{iG_B} = e^{-iG_B} e^{iG_B} = \mathbb{I}. \tag{2.33}$$

A transformação inversa nos fornece

$$\begin{aligned} a &= u(\beta)\, a(\beta) + v(\beta)\, \tilde{a}^\dagger(\beta), \\ \tilde{a} &= u(\beta)\, \tilde{a}(\beta) + v(\beta)\, a^\dagger(\beta). \end{aligned} \tag{2.34}$$

Como deveríamos esperar,

$$\begin{aligned} a(\beta)\, |0(\beta)\rangle &= \tilde{a}(\beta)\, |0(\beta)\rangle = 0, \\ \langle 0(\beta)|\, a^\dagger(\beta) &= \langle 0(\beta)|\, \tilde{a}^\dagger(\beta) = 0, \end{aligned} \tag{2.35}$$

justificando assim o nome vácuo térmico para o estado $|0(\beta)\rangle$.

Com esta construção, o espaço transformado (térmico) é varrido pelos vetores

$$\begin{aligned} &|0(\beta)\rangle, \quad a^\dagger(\beta)\, |0(\beta)\rangle, \quad \tilde{a}^\dagger(\beta)\, |0(\beta)\rangle, \ldots \\ &\frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{\sqrt{m!}} [a^\dagger(\beta)]^n [\tilde{a}^\dagger(\beta)]^m \, |0(\beta)\rangle, \ldots \end{aligned} \tag{2.36}$$

As relações de comutação para os operadores dependentes de β são as mesmas apresentadas pelo sistema original, uma vez que a transformação de Bogoliubov é canônica. Ou seja, a transformação de Bogoliubov gerada por (2.26) mantém a estrutura de oscilador harmônico do sistema original.

Devemos notar, que o valor esperado do operador número definido por

$$N = a^\dagger a,$$

calculado no vácuo térmico nos fornece a distribuição de Bose-Einstein ($f_{BE}(\omega)$). De fato, sendo

$$\langle 0(\beta)| N |0(\beta)\rangle = \langle 0(\beta)| a^{\dagger}a |0(\beta)\rangle , \tag{2.37}$$

escrevendo os operadores $a^{\dagger}$ e a em termos dos operadores dependentes de β, obtemos

$$\langle 0(\beta)| N |0(\beta)\rangle = v^2(\beta) = \frac{1}{e^{\beta\omega}-1} = f_{BE}(\omega) .$$

A construção aqui apresentada pode ser generalizada para um número infinito de osciladores harmônicos bosônicos. Como dito no início do capítulo, na verdade isso não é apenas um possibilidade, mas sim uma exigência para que possamos tratar de fato efeitos térmicos [57]. Não faz sentido referir-se a um sistema com apenas dois osciladores como sendo um sistema capaz de apresentar efeitos térmicos uma vez que estes efeitos manifestam-se macroscopicamente. Sendo assim, sistemas térmicos necessitam de um número grande de graus de liberdade, ou infinitos. O último caso sugere a necessidade de uma teoria de campos que seja capaz de descrever os efeitos desejados. De fato, a necessidade de infinitos graus de liberdade concorda com a física térmica usual uma vez que o equilíbrio térmico de um sistema a ser estudado é controlado colocando-o em contato com um reservatório térmico que deve ser inexaurível sugerindo assim a noção de campo representando o reservatório térmico. Para campos livres, por exemplo, a extensão da metodologia apresentada aqui para tratar um oscilador pode ser facilmente extendida para um conjunto infinito de osciladores, tendo cada um deles o seu parceiro fictício. Dentro deste contexto, buscaremos discutir a duplicação dos graus de liberdade do sistema através da introdução de um espaço fictício e apresentaremos uma interpretação para estes graus de liberdade até agora referidos como sendo auxiliares. Isso será feito na próxima seção, onde uma formulação geral de Campos Térmicos será apresentada. Questões tais como qual a forma do operador Hamiltoniano do sistema duplicado e qual a condição para que um estado possa ser considerado de fato térmico, dentre outras, serão também discutidas.

2.2 Formulação Geral para Campos Térmicos

O objetivo desta seção é generalizar o tratamento dado na seção anterior, para o oscilador livre bosônico, para o caso de infinitos osciladores, bem como introduzir uma construção geral, explorando as possibilidades de geradores que podem ser utilizados para produzir a transformação de Bogoliubov térmica.

Observando a expressão para o vácuo térmico dada em (2.30) notamos que ele é invariante pela troca de operadores com til, que atuam no espaço auxiliar, por operadores que atuam no espaço original. Isso basicamente reflete o fato do vácuo térmico ser um condensado de pares de partículas criadas por $a^\dagger\tilde{a}^\dagger$ e potências deste produto [57]. Definindo conjugação til como a operação que leva operadores do sistema físico em operadores do sistema auxiliar e vice-versa, temos que o vácuo térmico dado em (2.30) é invariante por tal conjugação. Formalizemos esta operação definindo as regras de conjugação til como segue [57]

$$\begin{aligned}
(AB)^{\sim} &= \tilde{A}\tilde{B}, \\
(c_1A + c_2B)^{\sim} &= \left(c_1^*\tilde{A} + c_2^*\tilde{B}\right), \\
(A^\dagger)^{\sim} &= \tilde{A}^\dagger, \\
\left(\tilde{A}\right)^{\sim} &= A, \\
(|0(\theta)\rangle)^{\sim} &= |0(\theta)\rangle, \\
(\langle 0(\theta)|)^{\sim} &= \langle 0(\theta)|,
\end{aligned} \tag{2.38}$$

sendo A e B operadores e c_1,$c_2 \in \mathbb{C}$[†]. Então, no formalismo de campos térmicos cada operador do sistema físico tem um parceiro que atua em um outro espaço vetorial representado pelo símbolo til e cujo mapeamento de elementos de um espaço em outro é dado pelas regras de conjugação acima relacionadas. Além disso o vácuo que depende do parâmetro θ deve ser invariante por conjugação til.

O hamiltoniano que rege a dinâmica do sistema duplicado ainda não foi definido. Inicialmente devemos supor que ele tenha uma forma tal, que não altere a dinâmica do sistema físico [57]. Isto significa que ele não pode conter termos compostos do produto de operadores que atuem no espaço físico por operadores do sistema auxiliar. Uma outra imposição que temos sobre a forma do Hamiltoniano é a de gerar uma dinâmica para o sistema auxiliar que seja idêntica à dinâmica do sistema físico. Diante destas duas condições, supondo a existência de um campo ϕ no cenário de Heisenberg, cuja dinâmica é regida pela equação de Heisenberg, ou seja,

$$i\frac{\partial}{\partial t}\phi = \left[\phi, \widehat{H}\right], \tag{2.39}$$

sendo $\widehat{H}$ o Hamiltoniano do sistema dobrado cuja forma desejamos encontrar. Aplicando a regra de conjugação til à equação acima, temos

$$-i\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\phi} = \left(\left[\tilde{\phi}, \left(\widehat{H}\right)^{\sim}\right]\right) \Rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\phi} = \left(\left[\tilde{\phi}, (-1)\left(\widehat{H}\right)^{\sim}\right]\right). \tag{2.40}$$

[†]Note que introduzimos o parâmetro θ para especificar a dependência do vácuo para com a temperatura. Os motivos ficaram claros quando introduzirmos a formulação Unitária na seção 2.2.3.

Como estamos impondo que a dinâmica do sistema seja a mesma tanto para ϕ quanto para $\tilde{\phi}$, temos que

$$\left(\widehat{H}\right)^{\sim} = -\widehat{H}, \tag{2.41}$$

e portanto temos que a forma do operador Hamiltoniano do sistema duplicado deve ser

$$\widehat{H} = H - \widetilde{H}.$$

2.2.1 Transformação de Bogoliubov Generalizada

Como vimos para o caso do oscilador harmônico bosônico uma transformação do tipo Bogoliubov é a responsável por levar operadores e estados da temperatura zero em operadores e estados térmicos. Esta transformação é tal que mantem a estrutura de osciladores apresentadas à temperatura zero garantindo que as relações de comutação dos operadores transformados sejam as mesmas que as apresentadas à temperatura zero. Ou seja, a dinâmica do sistema permanece a mesma sendo isso obtido pelo fato de a transformação de Bogoliubov ser canônica. O gerador da transformação deve portanto, ser construído de tal forma que garanta que a transformação por ele produzida sobre o espaço duplicado seja canônica. A ação do gerador é a de misturar elementos do espaço físico com aqueles da espaço auxiliar, introduzindo no espaço transformado uma dependência para com o parâmetro da transformação. Este por sua vez pode ser associado com a temperatura. Além disso o gerador deve ser tal que preserve as regras de conjugação til definida na seção anterior.

Em suma precisamos que o gerador da transformação de Bogoliubov satisfaça as seguintes propriedades [57, 58]:

$G1$: a transformação deve ser canônica, ou seja

$$\begin{pmatrix} A' \\ \tilde{A}^{\dagger\prime} \end{pmatrix} = e^{-iG}\begin{pmatrix} A \\ \tilde{A}^{\dagger} \end{pmatrix} e^{iG} = \mathbb{B}\begin{pmatrix} A \\ \tilde{A}^{\dagger} \end{pmatrix}, \tag{2.42}$$

$$\begin{pmatrix} A^{\dagger\prime} & -\tilde{A}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{\dagger} & -\tilde{A} \end{pmatrix}\mathbb{B}^{-1} \tag{2.43}$$

sendo

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix}, \qquad uw - xv = 1, \tag{2.44}$$

com u, v, x e w pertencentes a $\mathbb{C}$.

$G2$: o gerador da transformação deve comutar com o hamiltoniano do sistema total ($\widehat{H}$):

$$\left[\widehat{H}, G\right] = 0. \tag{2.45}$$

$G3$: a transformação tem que preservar a invariância do vácuo térmico por conjugação til e portanto seu gerador deve mudar de sinal sob tal operação:

$$(G)\tilde{} = -G. \tag{2.46}$$

As três propriedades acima formam o que chamamos de G-simetria[‡].

Os geradores que mantêm a G-simetria são dados por [57, 58]

$$g_1 = i\theta_1\left(A\widetilde{A} - \widetilde{A}^\dagger A^\dagger\right), \quad g_2 = i\theta_2\left(A\widetilde{A} + \widetilde{A}^\dagger A^\dagger\right), \quad g_3 = i\theta_3\left(A^\dagger A + \widetilde{A}\widetilde{A}^\dagger\right), \tag{2.47}$$

sendo θ_1, θ_2 e θ_3 reais, e a álgebra dos operadores dada, como usual, por

$$\begin{aligned}
[A^\dagger, A] &= [\widetilde{A}^\dagger, \widetilde{A}] = 1, \\
[A, \widetilde{A}] &= \left[A, \widetilde{A}^\dagger\right] = [A^\dagger, \widetilde{A}^\dagger] = [A^\dagger, \widetilde{A}] = 0.
\end{aligned}$$

A rigor como estamos aqui considerando infinitos graus de liberdade, cada operador acima depende do momento k. Além disso podem trazer consigo índices de espaço-tempo e deveriam portanto carregar rótulos explicitando tais dependências. Não os rotulamos aqui por uma questão de simplicidade, deixando para indicar completamente as dependências quando aplicarmos as considerações aqui feitas para o sistema que desejamos estudar, ou quando acharmos conveniente.

Considerando os três geradores acima, podemos construir um gerador que seja uma combinação destes como segue

$$G = \sum_{i=1}^{3} g_i.$$

Combinando os produtos bilineares podemos escrever G como

$$G(\theta) = \lambda_1(\theta)\,\widetilde{A}^\dagger A^\dagger - \lambda_2(\theta)\,A\widetilde{A} + \lambda_3(\theta)\left(A^\dagger A + \widetilde{A}\widetilde{A}^\dagger\right), \tag{2.48}$$

sendo que o argumento de G representa sua dependência com os tetas através dos coeficientes

$$\lambda_1(\theta) = i(\theta_2 - \theta_1), \qquad \lambda_2(\theta) = -i(\theta_1 + \theta_2), \qquad \lambda_3(\theta) = i\theta_3. \tag{2.49}$$

Daqui em diante omitiremos a dependência dos parâmetros λ para com os ângulos de mistura θ. Quando necessário voltaremos a explicitar tal dependência.

De posse do gerador da transformação de Bogoliubov, devemos chamar atenção para o fato deste não ser hermitiano. Isso significa que a transformação gerada por

[‡]Na realidade a propriedade $G3$ restringe as componentes da matriz de transformação $\mathbb{B}$, exigindo que elas sejam reais.

este operador não é unitária e que portanto os operadores $A^{\dagger}(\theta)$ e $\widetilde{A}^{\dagger}(\theta)$ não são de fato hermitianos conjugados de $A(\theta)$ e $\widetilde{A}(\theta)$. Voltaremos a este ponto mais adiante.

O gerador $G(\theta)$ nos conduz à seguinte matriz de transformação

$$\mathbb{B}(\theta) = \cosh(i\Lambda) + \frac{\sinh(i\Lambda)}{\Lambda}\begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & -\lambda_3 \end{pmatrix}, \tag{2.50}$$

cuja inversa é dada por

$$\mathbb{B}^{-1}(\theta) = \cosh(i\Lambda) - \frac{\sinh(i\Lambda)}{\Lambda}\begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & -\lambda_3 \end{pmatrix} \tag{2.51}$$

e

$$\Lambda^2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_3^2. \tag{2.52}$$

Ou seja, os operadores transformados são dados por

$$\begin{aligned} A(\theta) &= \left[\cosh(i\Lambda) + \frac{\lambda_3}{\Lambda}\sinh(i\Lambda)\right] A + \frac{\lambda_1}{\Lambda}\sinh(i\Lambda)\,\widetilde{A}^{\dagger}, &(2.53)\\ \widetilde{A}(\theta) &= \left[\cosh(i\Lambda) + \frac{\lambda_3}{\Lambda}\sinh(i\Lambda)\right] \widetilde{A} + \frac{\lambda_1}{\Lambda}\sinh(i\Lambda)\,A^{\dagger}, &(2.54)\\ A^{\ddagger}(\theta) &= \left[\cosh(i\Lambda) - \frac{\lambda_3}{\Lambda}\sinh(i\Lambda)\right] A^{\dagger} + \frac{\lambda_2}{\Lambda}\sinh(i\Lambda)\,\widetilde{A}, &(2.55)\\ \widetilde{A}^{\ddagger}(\theta) &= \left[\cosh(i\Lambda) - \frac{\lambda_3}{\Lambda}\sinh(i\Lambda)\right] \widetilde{A}^{\dagger} + \frac{\lambda_2}{\Lambda}\sinh(i\Lambda)\,A. &(2.56)\end{aligned}$$

Aqui usamos o símbolo $\ddagger$ para explicitar o fato de que o os operadores $A^{\ddagger}(\theta)$ e $\widetilde{A}^{\ddagger}(\theta)$ não poderem ser obtidos tomando o hermitiano conjugado de $A(\theta)$ e $\widetilde{A}(\theta)$, dados em termos dos operadores que atuam em $\widehat{\mathcal{H}}$.

A transformação inversa dos operadores é dada por

$$\begin{aligned} A &= \left[\cosh(i\Lambda) - \frac{\lambda_3}{\Lambda}\sinh(i\Lambda)\right] A(\theta) - \frac{\lambda_1}{\Lambda}\sinh(i\Lambda)\,\widetilde{A}^{\ddagger}(\theta), &(2.57)\\ \widetilde{A} &= \left[\cosh(i\Lambda) - \frac{\lambda_3}{\Lambda}\sinh(i\Lambda)\right] \widetilde{A}(\theta) - \frac{\lambda_1}{\Lambda}\sinh(i\Lambda)\,A^{\ddagger}(\theta), &(2.58)\\ A^{\dagger} &= \left[\cosh(i\Lambda) + \frac{\lambda_3}{\Lambda}\sinh(i\Lambda)\right] A^{\ddagger}(\theta) - \frac{\lambda_2}{\Lambda}\sinh(i\Lambda)\,\widetilde{A}(\theta), &(2.59)\\ \widetilde{A}^{\dagger} &= \left[\cosh(i\Lambda) + \frac{\lambda_3}{\Lambda}\sinh(i\Lambda)\right] \widetilde{A}^{\ddagger}(\theta) - \frac{\lambda_2}{\Lambda}\sinh(i\Lambda)\,A(\theta). &(2.60)\end{aligned}$$

A matriz de transformação $\mathbb{B}(\theta)$ dada em (2.50) é comumente escrita na forma

$$\mathbb{B} = \frac{1}{\sqrt{1-f}}e^{s\tau_3}\begin{pmatrix} 1 & -f^{\alpha} \\ -f^{1-\alpha} & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.61}$$

sendo

$$s = \frac{1}{2}\ln(\frac{u}{x}), \qquad f = \frac{vw}{ux}, \qquad \alpha = \frac{\ln(\frac{v}{u})}{\ln\left(\frac{vw}{ux}\right)}, \qquad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2.62}$$

e u, v, w e x elementos da matriz dada em (2.44) que são dados explicitamente, usando (2.50), por

$$u = \cosh(i\Lambda) + \frac{\lambda_3}{\Lambda}\sinh(i\Lambda), \tag{2.63}$$

$$v = \frac{\lambda_1}{\Lambda}\sinh(i\Lambda), \tag{2.64}$$

$$w = \frac{\lambda_2}{\Lambda}\sinh(i\Lambda), \tag{2.65}$$

$$x = \cosh(i\Lambda) - \frac{\lambda_3}{\Lambda}\sinh(i\Lambda), \tag{2.66}$$

todos reais.

2.2.2 Condição de Estado Térmico

O vácuo térmico do sistema é definido pelas seguintes relações

$$\begin{aligned} A(\theta)|0(\theta)\rangle &= \widetilde{A}(\theta)|0(\theta)\rangle = 0, \\ \langle 0(\theta)|A^{\ddagger}(\theta) &= \langle 0(\theta)|\widetilde{A}^{\ddagger}(\theta) = 0. \end{aligned}$$

Como os operadores dependentes de θ são dados em termos dos operadores que atuam em $\widehat{\mathcal{H}}$, como descrito em (2.53)-(2.56), vemos que o vácuo térmico é definido em termos destes operadores por

$$\begin{aligned} \left\{\left[\cosh(i\Lambda) + \frac{\lambda_3}{\Lambda}\sinh(i\Lambda)\right]A + \frac{\lambda_1}{\Lambda}\sinh(i\Lambda)\widetilde{A}^{\dagger}\right\}|0(\theta)\rangle &= 0, \\ \left\{\left[\cosh(i\Lambda) + \frac{\lambda_3}{\Lambda}\sinh(i\Lambda)\right]\widetilde{A} + \frac{\lambda_1}{\Lambda}\sinh(i\Lambda)A^{\dagger}\right\}|0(\theta)\rangle &= 0, \\ \langle 0(\theta)|\left\{\left[\cosh(i\Lambda) - \frac{\lambda_3}{\Lambda}\sinh(i\Lambda)\right]A^{\dagger} + \frac{\lambda_2}{\Lambda}\sinh(i\Lambda)\widetilde{A}\right\} &= 0, \\ \langle 0(\theta)|\left\{\left[\cosh(i\Lambda) - \frac{\lambda_3}{\Lambda}\sinh(i\Lambda)\right]\widetilde{A}^{\dagger} + \frac{\lambda_2}{\Lambda}\sinh(i\Lambda)A\right\} &= 0, \end{aligned}$$

ou, usando u, v, w e x dados em (2.63)-(2.66),

$$\left[A + \frac{v}{u}\widetilde{A}^{\dagger}\right]|0(\theta)\rangle = 0, \tag{2.67}$$

$$\left[\widetilde{A} + \frac{v}{u}A^{\dagger}\right]|0(\theta)\rangle = 0, \tag{2.68}$$

$$\langle 0(\theta)|\left[A^{\dagger} + \frac{w}{x}\widetilde{A}\right] = 0, \tag{2.69}$$

$$\langle 0(\theta)|\left[\widetilde{A}^{\dagger} + \frac{w}{x}A\right] = 0. \tag{2.70}$$

As relações acima são chamadas de Condições de Estados Térmicos. Estas podem ser escritas ainda em termos dos parâmetros s, f e α dados em (2.62) como segue

$$\left[A - f^{\alpha}\widetilde{A}^{\dagger}\right]|0(\theta)\rangle = 0, \tag{2.71}$$

$$\left[\widetilde{A} - f^{\alpha}A^{\dagger}\right]|0(\theta)\rangle = 0, \tag{2.72}$$

$$\langle 0(\theta)|\left[A^{\dagger} - f^{1-\alpha}\widetilde{A}\right] = 0, \tag{2.73}$$

$$\langle 0(\theta)|\left[\widetilde{A}^{\dagger} - f^{1-\alpha}A\right] = 0. \tag{2.74}$$

A forma explícita do vácuo térmico ($|0(\theta)\rangle$) pode ser obtida usando o gerador da transformação como feito na aplicação para o oscilador harmônico bosônico((2.29) e (2.30)). Ou seja

$$\begin{aligned} |0(\theta)\rangle &= e^{-iG(\theta)}\,|0\rangle\rangle \\ &= e^{\lambda_1\widetilde{A}^{\dagger}A^{\dagger}-\lambda_2A\widetilde{A}+\lambda_3\left(A^{\dagger}A+\widetilde{A}\widetilde{A}^{\dagger}\right)}\,|0\rangle\rangle\,, \end{aligned} \tag{2.75}$$

sendo $|0\rangle\rangle$ o vácuo do espaço dobrado de $\widehat{\mathcal{H}} = \mathcal{H}\otimes\widetilde{\mathcal{H}}$ e definido por

$$A\,|0\rangle\rangle = \widetilde{A}\,|0\rangle\rangle = 0. \tag{2.76}$$

A exponencial acima pode ser escrita como [64, 65]

$$e^{\lambda_1\widetilde{A}^{\dagger}A^{\dagger}-\lambda_2A\widetilde{A}+\lambda_3\left(A^{\dagger}A+\widetilde{A}\widetilde{A}^{\dagger}\right)} = e^{\Gamma_1\widetilde{A}^{\dagger}A^{\dagger}}e^{\ln(\Gamma_3)\left(A^{\dagger}A+\widetilde{A}\widetilde{A}^{\dagger}\right)}e^{\Gamma_2A\widetilde{A}}, \tag{2.77}$$

sendo

$$\Gamma_1 = \frac{-\lambda_1\sinh(i\Lambda)}{\Lambda\cosh(i\Lambda)+\lambda_3\sinh(i\Lambda)},\quad \Gamma_2 = \frac{\lambda_2\sinh(i\Lambda)}{\Lambda\cosh(i\Lambda)+\lambda_3\sinh(i\Lambda)},$$

$$\Gamma_3 = \frac{\Lambda}{\Lambda\cosh(i\Lambda)+\lambda_3\sinh(i\Lambda)}. \tag{2.78}$$

A exponencial do lado esquerdo de (2.77) foi desentrelaçada observando que os operadores dos três termos podem ser redefinidos como

$$K_+ = \widetilde{A}^{\dagger}A^{\dagger},\quad K_- = A\widetilde{A},\quad K_0 = \frac{1}{2}\left(A^{\dagger}A+\widetilde{A}\widetilde{A}^{\dagger}\right), \tag{2.79}$$

que satisfazem a álgebra $su(1,1)$

$$[K_0, K_+] = K_+,\quad [K_0, K_-] = -K_-,\quad [K_+, K_-] = -2K_0. \tag{2.80}$$

Estes operadores podem ser escritos em termos de matrizes que satisfazem a álgebra, que por sua vez são dadas por

$$K_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad K_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\quad K_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.81}$$

Inserindo estas matrizes em (2.77) e expandindo ambos os lados da igualdade obtém-se os coeficientes[§] Γ_i, $i = 1, 2, 3$.

Voltando à expressão para o vácuo térmico temos, usando (2.77),

$$|0(\theta)\rangle = e^{\Gamma_1 \tilde{A}^\dagger A^\dagger} e^{\ln(\Gamma_3)\left(A^\dagger A + \tilde{A}\tilde{A}^\dagger\right)} e^{\Gamma_2 A\tilde{A}} \,|0\rangle\rangle\,. \tag{2.82}$$

Expandindo as exponenciais e usando (2.76) chegamos a

$$|0(\theta)\rangle = \Gamma_3 e^{\Gamma_1 \tilde{A}^\dagger A^\dagger} \,|0\rangle\rangle\,, \tag{2.83}$$

ou ainda

$$|0(\theta)\rangle = \frac{1}{u} e^{-\frac{v}{u}\tilde{A}^\dagger A^\dagger} \,|0\rangle\rangle \tag{2.84}$$

que, de fato, satisfaz as condições de estado térmico dadas em (2.67)-(2.70). O "bra" térmico é obtido através de

$$\langle 0(\theta)| = \langle\langle 0|\, e^{iG(\theta)}. \tag{2.85}$$

Utilizando do procedimento que nos levou à forma explicita de $|0(\theta)\rangle$, obtemos

$$\langle 0(\theta)| = \langle\langle 0|\, \frac{1}{w} e^{-\frac{w}{x}\tilde{A}A}, \tag{2.86}$$

que também satisfaz as condições de estado térmico.

2.2.3 Formulação Unitária

Como já salientamos, a transformação geral que mantém a $G-$simetria é não unitária. Uma transformação geral unitária pode também ser construída se quebrarmos a $G-$simetria, saindo portanto do escopo da Dinâmica de Campos Térmicos da maneira que foi construída historicamente. Esta formulação no entanto, ainda garante que efeitos térmicos sejam obtidos, embora a $G-$simetria não seja mantida. O objetivo desta seção é apresentar tal formulação e esclarecer as implicações de não considerarmos a $G-$simetria.

Em princípio, qualquer transformação canônica que misture os operadores do espaço físico com os operadores do espaço auxiliar pode ser usada para criar o vácuo térmico bem como os operadores que constróem o espaço de Fock a partir dele [57]. A transformação linear canônica mais geral possível que produz esta mistura dos operadores não preserva nem a hermiticidade nem as regras de conjugação til [60]. Ou seja, temos um mapeamento linear ϕ, que em sua forma mais geral fornece

$$\phi\left(a^\dagger\right) \neq \left[\phi\left(a\right)\right]^\dagger \qquad \wedge \qquad \phi\left(\tilde{a}\right) \neq \left[\phi\left(a\right)\right]^{\tilde{}}.$$

[§]Note que a definição de K_0 requer que $\lambda_3 \to \lambda_3' = 2\lambda_3$.

Isso acontece pelo fato de estarmos tratando de sistemas com infinitos graus de liberdade e que uma transformação canônica geral mapeia elementos de um dado espaço de Hilbert (no caso $\widehat{\mathcal{H}}$), em elementos de um outro espaço de Hilbert (até agora parametrizado por θ e denotado por $\mathcal{H}(\theta)$). Cada um destes espaços tem suas próprias operações de conjugação hermitiana e conjugação til e é dentro de cada um deles que estas operações devem estar definidas. A única transformação que mistura os dois operadores e para a qual as operações de conjugação hermitiana e til são as mesmas nos dois diferentes espaço é a gerada por g_1 dado em (2.47) (ou seja, considerando $\theta_2 = \theta_3 = 0$ em (2.48), ou ainda $s = 0$, $\alpha = 1/2$ e $f = (\tanh(\theta_1))^{-2}$ em (2.61)). Este gerador fornece a matriz de transformação que chamamos de $\mathbb{B}_1$ e que é dada explicitamente por

$$\mathbb{B}_1 = \begin{pmatrix} \cosh(\theta_1) & -\sinh(\theta_1) \\ -\sinh(\theta_1) & \cosh(\theta_1) \end{pmatrix}. \tag{2.87}$$

A transformação gerada por g_1 é, a menos de um sinal, a mesma usada quando apresentamos o formalismo aplicando-o para o oscilador harmônico bosônico.

Considerando o mapeamento mais geral cujo gerador satisfaz a G-simetria temos as regras de conjugação til operando da mesma maneira nos dois espaços mas perdemos a unitariedade da transformação. Esta é a construção apresentada na seção anterior. Um outro conjunto de três geradores pode, no entanto, ser montado de tal forma que a transformação seja unitária. São eles

$$f_1 = \gamma_1 \left(A\widetilde{A} + \widetilde{A}^\dagger A^\dagger \right), \quad f_2 = i\gamma_2 \left(A\widetilde{A} - \widetilde{A}^\dagger A^\dagger \right), \quad f_3 = \gamma_3 \left(A^\dagger A + \widetilde{A}\widetilde{A}^\dagger \right),$$

com γ_1, γ_2 e γ_3 reais. O gerador desta transformação tem, após a combinação dos produtos bilineares, a mesma forma apresentada em (2.48), ou seja

$$G(\gamma) = \lambda_1(\gamma)\, \widetilde{A}^\dagger A^\dagger - \lambda_2(\gamma)\, A\widetilde{A} + \lambda_3(\gamma) \left(A^\dagger A + \widetilde{A}\widetilde{A}^\dagger \right). \tag{2.88}$$

No entanto, os coeficientes são dados por

$$\lambda_1(\gamma) = \gamma_1 - i\gamma_2, \qquad \lambda_2(\gamma) = -\lambda_1^*, \qquad \lambda_3(\gamma) = \gamma_3. \tag{2.89}$$

Note que de fato, $[G(\gamma)]^\dagger = G(\gamma)$, entretanto $[G(\gamma)]^{\sim} = G^*(\gamma) \neq -G(\gamma)$, o que significa que embora tenhamos a conjugação hermitiana garantida, a transformação gerada por (2.88) não preserva as regras de conjugação til como definidas em (2.38), quebrando portanto a $G-$simetria. Mais especificamente a propriedade $G3$ dada em (2.46) não é, admitindo a formulação unitária, satisfeita [60]. Como o formalismo Dinâmica de Campos Térmicos é fundamentado nas propriedades $G1$, $G2$ e $G3$ listadas em (2.44)-(2.46), a transformação escolhida para mapear o sistema à temperatura zero para o mesmo à temperatura finita é a dada usualmente pela matriz $\mathbb{B}(\theta)$ apresentada em (2.50) (ou, 2.61).

Na formulação unitária a matriz de transformação tem a mesma forma de $\mathbb{B}(\theta)$, no entanto a dependência dos parâmetros λ para com os ângulos de mistura γ, diferente da apresentada na formulação não unitária, implicam numa estrutura distinta. O gerador que definimos como $G(\gamma)$ produz uma transformação que é dada pela matriz $\mathbb{B}(\gamma)$ e que tem a forma

$$\mathbb{B}(\gamma) = \begin{pmatrix} u & v \\ w = v^* & x = u^* \end{pmatrix}, \tag{2.90}$$

sendo u e v dependentes de γ como segue

$$u = u(\gamma) = \cosh(i\Lambda(\gamma)) + \frac{\lambda_3(\gamma)}{\Lambda(\gamma)}\sinh(i\Lambda(\gamma)), \tag{2.91}$$

$$v = v(\gamma) = \frac{\lambda_1(\gamma)}{\Lambda(\gamma)}\sinh(i\Lambda(\gamma)). \tag{2.92}$$

Temos portanto que a forma dos geradores e das matrizes de transformação apresentados para a formulação unitária e não unitária é a mesma e portanto as expressões obtidas a partir deles são idênticas a não ser quando explicitamos os parâmetros λ em termos de seus respectivos ângulos de mistura (γ para a formulação unitária e θ para a formulação não unitária).

O vácuo térmico obtido por esta construção, embora não seja invariante por conjugação til, ainda preserva o caráter de condensado de pares de partículas, pois sua expressão é a mesma dada em (2.83) sendo que Γ_1, que aparece na exponencial, é agora função dos ângulos de mistura γ, bem como Γ_3. Sob as regras de conjugação til apresentadas em (2.38), $\Gamma_1(\gamma)$ e $\Gamma_3(\gamma)$ mudam de forma implicando na não invariância do vácuo sob tais regras de conjugação. Devemos salientar, mais uma vez, que estas regras de conjugação são definidas no espaço dobrado, e que no espaço transformado estas regras devem ser redefinidas [60].

2.2.4 Sobre as Formulações Unitária e Não Unitária para Dinâmica de Campos Térmicos

Em suma, temos o seguinte cenário: desejando fazer uma construção geral para a Dinâmica de Campos Térmicos, usando os geradores possíveis para promover a transformação, devemos fazer uma escolha de qual tipo de propriedade deve ser mantida. Ou aquela relacionada às regras de conjugação til ($\phi(\tilde{a}) = [\phi(a)]^{\tilde{}}$), implicando numa transformação não unitária e portanto na necessidade de redefinição, dentro do espaço transformado (obtido usando $G(\theta)$), da hermiticidade, para obter a construção o espaço de Fock transformado, ou a unitariedade da transformação ($\phi\left(a^{\dagger}\right)=\left[\phi\left(a\right)\right]^{\dagger}$), implicando na redefinição das regras de conjugação til no espaço transformado [60] (obtido usando $G\left(\gamma\right)$).

Note que em ambas as formulações é possível fazer uma escolha de ângulos de mistura de tal forma que elas coincidam e que preservem tanto a hermiticidade quanto as regras de conjugação til ($\theta_2=\theta_3=0$, na formulação não unitária e $\gamma_1=\gamma_3=0$ na formulação unitária, como já dito).

2.3 Operador Entropia

Em [35], Takahashi e Umezawa apresentaram um operador ao qual nomearam de entropia. Este nome foi dado pois o valor esperado deste, calculado no vácuo térmico e dividido pela constante de Boltzmann fornece a fórmula geral para a entropia, na aproximação de Stirling. A saber, seja K o operador entropia para um sistema bosônico, este é tal que [¶]

$$\frac{1}{k_B}\langle 0\left(\beta\right)|\,K\,|0\left(\beta\right)\rangle=\left\{\sum_k\left[\left(1+n_k\right)\log\left(1+n_k\right)-n_k\log\left(n_k\right)\right]\right\}, \tag{2.93}$$

sendo n_k o valor esperado do operador número, definido por $N_k=A_k^{\dagger}A_k$, calculado no vácuo térmico e k_B a constante de Boltzmann.

Para a formulação geral, o operador entropia para o sistema bosônico fica definido por

$$K=-\sum_k\left[A_k^{\dagger}A_k\log\left(\frac{\lambda_{1_k}\lambda_{2_k}}{\Lambda_k^2}\sinh^2\left(i\Lambda_k\right)\right)-A_kA_k^{\dagger}\log\left(1+\frac{\lambda_{1_k}\lambda_{2_k}}{\Lambda_k^2}\sinh^2\left(i\Lambda_k\right)\right)\right], \tag{2.94}$$

A escolha desta forma para K é baseada no fato de ser possível reproduzir o operador entropia apresentado por [35], quando $\theta_{2_k}=\theta_{3_\kappa}=0$, na formulação não unitária, ou $\gamma_{1_k}=\gamma_{3_k}=0$, na formulação unitária. De fato, fazendo $\theta_{2_k}=\theta_{3_\kappa}=0$ obtemos

$$K=-\sum_k\left[A_k^{\dagger}A_k\log\left(\sinh^2\left(\theta_{1_k}\right)\right)-A_kA_k^{\dagger}\log\left(\cosh^2\left(\theta_{1_k}\right)\right)\right],$$

que é exatamente o operador definido por Takahashi e Umezawa para um sistema de bósons em [35]. O mesmo resultado pode ser obtido se considerarmos $\gamma_{1_k}=\gamma_{3_k}=0$ na formulação unitária.

[¶] Explicitaremos nesta seção a dependência dos operadores para com o momento k.

Sendo N_k o operador número, temos[||]

$$\begin{aligned} n_k &= \langle 0(\beta)| N |0(\beta)\rangle \\ &= \langle 0(\beta)| A_k^{\dagger} A_k |0(\beta)\rangle \\ &= \frac{\lambda_{1_k}\lambda_{2_k}}{\Lambda_k^2}\sinh^2(i\Lambda_k), \end{aligned} \tag{2.95}$$

que, no equilíbrio térmico equivale à distribuição de Bose-Einstein, ou seja,

$$n_k = \frac{\lambda_{1_k}\lambda_{2_k}}{\Lambda_k^2}\sinh^2(i\Lambda_k) = \frac{e^{-(k_BT)^{-1}\omega_k}}{1-e^{-(k_BT)^{-1}\omega_k}}. \tag{2.96}$$

De posse deste resultado, pode-se verificar que, de fato, o valor esperado no vácuo térmico do operador entropia em sua forma geral dado em (2.94), nos conduz à fórmula geral da entropia para um sistema bosônico na aproximação de Stirling.

Temos ainda que, considerando mais uma vez $\theta_{2_k} = \theta_{3_\kappa} = 0$ (ou $\gamma_{1_k} = \gamma_{3_k} = 0$), obtemos para n_k o seguinte resultado

$$n_k = \sinh^2(\gamma_{2_k}) = \sinh^2(\theta_{1_k}) = \frac{e^{-(k_BT)^{-1}\omega_k}}{1-e^{-(k_BT)^{-1}\omega_k}}, \tag{2.97}$$

que é o mesmo obtido por [35] para o valor esperado do operador número calculado no vácuo térmico para um sistema bosônico.

[||]Sempre que quisermos, daqui por diante, exprimir a dependência para com a temperatura, sem especificar se estamos na formulação unitária ou não, usaremos $\beta = 1/(k_BT)$ nos argumentos, uma vez que tanto os γ quanto os θ têm dependência para com este parâmetro.

Capítulo 3

Cordas Bosônicas e D-branas

O sistema que desejamos estudar à temperatura finita é o de uma corda, objeto unidimensional, imerso num espaço-tempo de Minkowski, em princípio d-dimensional e o estado construído em seu espaço de Fock chamado de D-brana. Com este intuito fazemos, neste capítulo, um resumo dos constituintes básicos da teoria de cordas bosônicas á temperatura zero. Mostramos ainda como as D-branas são definidas como estados de contorno no limite perturbativo da teoria *.

3.1 Corda Bosônica

A corda ao propagar-se no espaço-tempo descreve uma superficie bidimensional a qual denotamos por folha-mundo e que pode ser parametrizada pelas coordenadas (τ, σ). Desta forma temos uma função destas coordenadas que descreve a evolução espaço-temporal da corda e é dada por $X^{\mu}(\tau, \sigma)$, sendo $\mu = 0, 1...d-1$.

O sistema de interesse é descrito pela ação de Polyakov que é dada por

$$S = -\frac{T}{2}\int_M d\sigma^2\sqrt{-h}h^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu}, \tag{3.1}$$

onde $T = \frac{1}{2\pi\alpha'}$ é a tensão da corda, M , é folha-mundo que é descrita pelos parâmetros σ^α, $\alpha = 0, 1$, sendo $\sigma^0 = \tau$ e $\sigma^1 = \sigma$. $h^{\alpha\beta}$ é o tensor métrico da folha-mundo, cujo determinate é h. $\eta_{\mu\nu}$ é o tensor métrico do espaço-tempo onde a corda está imersa, que no caso é um espaço tempo de Minkowski. $X^\mu(\tau, \sigma)$ são d campos na folha mundo e $h^{\alpha\beta}$, por ser simétrico, possui três campos independentes.

3.1.1 Simetrias da Ação

A ação de Polyakov é explicitamente um invariante de Poincaré. Além desta simetria global, a ação possui três simetrias locais. É invariante por transformações gerais de

*Neste capítulo usamos as referências [52, 53, 54, 61, 62, 63, 55].

coordenadas (invariante por reparametrização ou difeomorfismo) na folha-mundo, ou seja, considerando uma transformação geral infinitesimal $\sigma^\alpha \to \sigma^\alpha + \xi^\alpha$, temos que a ação é invariante, sendo

$$\delta X^\mu = \xi^\alpha \partial_\alpha X^\mu, \tag{3.2}$$

$$\delta h^{\alpha\beta} = \xi^\gamma \partial_\gamma h^{\alpha\beta} - \partial_\gamma \xi^\alpha h^{\gamma\beta} - \partial_\gamma \xi^\beta h^{\gamma\alpha}, \tag{3.3}$$

$$\delta\left(\sqrt{-h}\right) = \partial_\alpha \left(\xi^\alpha \sqrt{-h}\right). \tag{3.4}$$

A ação é invariante ainda por re-escalonamento da métrica, ou seja apresenta invariância de Weyl

$$\delta h^{\alpha\beta} = \Omega(\sigma)\, h^{\alpha\beta}, \tag{3.5}$$

$$\delta X^\mu(\sigma) = 0. \tag{3.6}$$

3.1.2 Equações de Movimento e Tensor de Energia-momento

As equações de movimento da corda podem ser obtidos variando a ação com respeito a X^μ e $h^{\alpha\beta}$. De fato, variando a ação com relação a X^μ, e impondo que esta variação é zero, obtém-se

$$\delta S = -T \int_{\partial M} d\tau \left(n^\gamma \partial_\gamma X^\mu\right)(\delta X_\mu) + T \int_M d\sigma^2 \partial^\alpha \partial_\alpha X^\mu (\delta X_\mu) = 0, \tag{3.7}$$

sendo n^γ as componentes do versor normal a folha-mundo. Para δX_μ arbitrário, chegamos a

$$\partial^\alpha \partial_\alpha X^\mu = 0, \tag{3.8}$$

$$n^\gamma \partial_\gamma X^\mu|_{\partial M} = 0, \tag{3.9}$$

que satisfazem $\delta S = 0$. A primeira expressão é a equação de movimento da corda e a segunda é a condição de contorno do tipo Neumann, implicando que os extremos da corda estão livres. As duas expressões acima asseguram estarmos tratando de um teoria de corda aberta.

Note no entanto, que se considerarmos condições de contorno periódicas para os campos, ou seja†,

$$X^\mu(\tau, 0) = X^\mu(\tau, \pi), \tag{3.10}$$

$$\partial^\alpha \partial_\alpha X^\mu = 0, \tag{3.11}$$

†Consideramos aqui e na sequência, o comprimento da corda como parametrizado por π, ou seja, $\sigma \in [0, \pi]$.

temos que $\delta S = 0$, e estas expressões indicam que não temos contornos, sendo os extremos da corda unidos formando a corda fechada.

Portanto, as condições de contorno impostas sobre os campos $X^\mu(\tau,\sigma)$, definem se estamos tratando de cordas abertas ou cordas fechadas. Estas condições de contorno são as únicas possibilidades que são consistentes com as equações de movimento e com a invariância d-dimensional de Poincaré.

Note ainda que uma outra condição pode ser imposta sobre os campos (embora quebre a invariância acima citada) que garante, juntamente com a equação de movimento, que a variação da ação seja nula. Trata-se de considerar a corda aberta sendo que, ao invés de impor a condição do tipo Neumann, pode-se impor a condição de Dirichlet. De fato, considerando

$$\partial^\alpha \partial_\alpha X^\mu = 0, \tag{3.12}$$

$$\delta X^\mu|_{\partial M} = 0, \tag{3.13}$$

temos também que $\delta S = 0$. Esta condição especifica uma localidade do espaço-tempo onde a corda aberta termina. Isso só faz sentido se considerarmos que a corda está em contato com um objeto físico. Este objeto, como veremos mais tarde, é o que definimos como D-branas, sendo o D devido a condição de Dirichlet e "brana" referente a membrana.

Variando a ação com relação à métrica $h^{\alpha\beta}$ obtemos o tensor de energia-momento definido por

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{2}{T\sqrt{-h}}\frac{\delta S}{\delta h^{\alpha\beta}} = 0, \tag{3.14}$$

e que é nulo uma vez que

$$\frac{\delta S}{\delta h^{\alpha\beta}} = 0. \tag{3.15}$$

Explicitamente temos

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} h^{\gamma\delta} \partial_\gamma X^\mu \partial_\delta X_\mu = 0, \tag{3.16}$$

sendo que usamos

$$\frac{\partial\sqrt{-h}}{\partial h^{\alpha\beta}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-h}\, h_{\alpha\beta}. \tag{3.17}$$

Esta propriedade do tensor de energia-momento, representa vínculos da teoria clássica que devem ser satisfeitos também pela teoria quantizada.

Uma outra propriedade de $T_{\alpha\beta}$ é a de possuir traço nulo, como consequência da invariância de Weyl

$$Tr\, h^{\alpha\beta} = h^\alpha{}_\alpha = 0. \tag{3.18}$$

Neste ponto devemos notar que temos o mesmo número de simetrias locais que de componentes independentes em $h^{\alpha\beta}$. A Simetria por reparametrização permite fixar (em duas dimensões) duas das componentes, enquanto que a simetria de Weyl permite fixar a que resta. De fato, as simetrias locais permitem a escolha de $h^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$. Esta escolha para métrica da folha-mundo é denominada calibre conforme, e as equações de movimento para os X^μ neste calibre são dadas por[‡]

$$\partial^\alpha \partial_\alpha X^\mu = \left(\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} \right) X^\mu (\tau, \sigma) = 0, \tag{3.19}$$

ou seja, a equação de movimento se reduz a equação de onda sem massa. Já os vínculos (3.16), em termos das componentes ficam,

$$T_{00} = T_{11} = \frac{1}{2} \left(\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X_\mu + \partial_\sigma X^\mu \partial_\sigma X_\mu \right) = 0, \tag{3.20}$$

$$T_{01} = T_{10} = \partial_\tau X^\mu \partial_\sigma X_\mu = 0 \tag{3.21}$$

A solução para a equação de movimento para a corda fechada (3.10) pode ser escrita em termos da expansão de Fourier como

$$X^\mu (\tau, \sigma) = x^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n\neq 0} \left(\frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-2in(\tau-\sigma)} + \frac{\beta_n^\mu}{n} e^{-2in(\tau+\sigma)} \right). \tag{3.22}$$

A solução X^μ, para a corda bosônica fechada, é portanto uma superposição linear de modos de oscilação que se movem para a direita e para a esquerda da corda, com coeficientes de Fourrie dados por α_n^μ e β_n^μ, respectivamente. Temos ainda os vetores x^μ e p^μ que são as coordenadas e seus momentos canonicamente conjugados, do centro de massa da corda fechada. Um expressão mais compacta pode ser obtida se introduzimos a notação $\alpha_0^\mu = \beta_0^\mu = p^\mu \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}$. O fato de $X^\mu (\tau, \sigma)$ ser real implica em

$$\alpha_{-n}^\mu = (\alpha_n^\mu)^*, \qquad \beta_{-n}^\mu = (\beta_n^\mu)^* \qquad n > 0. \tag{3.23}$$

As soluções da corda aberta dependem das diferentes condições de contorno que podem ser impostas sobre suas extremidades. Para condições de contorno do tipo Neumann, imposta nas duas extremidades da corda (N-N), temos como solução

$$X^\mu (\tau, \sigma) = x^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau + 2i\alpha' \sum_{n\neq 0} \left[\frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-in\tau} \cos (n\sigma) \right], \tag{3.24}$$

sendo que para a corda aberta $\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'} p^\mu$. Para Dirichlet, imposta em âmbas as extremidades (D-D), temos

$$X^\mu (\tau, \sigma) = \frac{x^\mu (\pi - \sigma) + y^\mu \sigma}{\pi} - \sqrt{2\alpha'} \sum_{n\neq 0} \left[\frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-in\tau} \mathrm{sen}\, (n\sigma) \right]. \tag{3.25}$$

[‡]Daqui em diante consideraremos a teoria de cordas no calibre conforme.

Para condições de contorno mistas Dirichler-Neumann (D-N), temos

$$X^{\mu}(\tau,\sigma) = x^{\mu} - \sqrt{2\alpha'} \sum_{r\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \left[\frac{\alpha_r^{\mu}}{r} e^{-ir\tau} \mathrm{sen}\,(r\sigma)\right], \tag{3.26}$$

e para Neumann-Dirichlet (N-D)

$$X^{\mu}(\tau,\sigma) = x^{\mu} + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{r\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \left[\frac{\alpha_r^{\mu}}{r} e^{-ir\tau} \cos(r\sigma)\right]. \tag{3.27}$$

Voltemos agora às equações de vínculo da teoria (3.20) e (3.21). Estes podem ser escritos convenientemente, nas coordenadas do cone de luz, como segue: introduzindo

$$\sigma^{+} = \sigma^{0} + \sigma^{1} = \tau + \sigma, \qquad \sigma^{-} = \sigma^{0} - \sigma^{1} = \tau - \sigma, \tag{3.28}$$

temos

$$\partial_{\tau} = \partial_{+} + \partial_{-}, \qquad \partial_{\sigma} = \partial_{+} - \partial_{-}. \tag{3.29}$$

A métrica nestas coordenadas é dada por $\eta_{+-} = \eta_{-+} = -1/2$, e $\eta_{++} = \eta_{--} = 0$. Portanto,

$$T_{++} = \frac{1}{2}(T_{00} + T_{01}) = \partial_{+}X^{\mu}\partial_{+}X_{\mu} = (\partial_{\tau}X_{E}^{\mu})^{2} = 0, \tag{3.30}$$

$$T_{--} = \frac{1}{2}(T_{00} - T_{01}) = \partial_{-}X^{\mu}\partial_{-}X_{\mu} = (\partial_{\tau}X_{D}^{\mu})^{2} = 0, \tag{3.31}$$

sendo que usamos, na última igualdade de cada expressão, o fato de que em duas dimensões a solução geral para a equação de onda, dada em (3.19), poder ser escrita como

$$X^{\mu}(\tau,\sigma) = X_{D}^{\mu}(\sigma^{-}) + X_{E}^{\mu}(\sigma^{+}). \tag{3.32}$$

Os sub-índices referem-se aos modos à direita e àesquerda, com

$$X_{D}^{\mu}(\sigma^{-}) = \frac{1}{2}x^{\mu} + \alpha' p^{\mu}\sigma^{-} + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n\neq 0} \frac{\alpha_n^{\mu}}{n} e^{-2in\sigma^{-}}, \tag{3.33}$$

$$X_{E}^{\mu}(\tau,\sigma) = \frac{1}{2}x^{\mu} + \alpha' p^{\mu}\sigma^{+} + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n\neq 0} \frac{\beta_n^{\mu}}{n} e^{-2in\sigma^{+}}. \tag{3.34}$$

Temos ainda que T_{-+} e T_{+-} são identicamente nulos.

3.1.3 Dinâmica Hamiltoniana

A densidade lagrangeana $\mathcal{L}$ é dada, da ação da corda bosônica (3.1), no calibre conforme ($h^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$), por

$$\mathcal{L} = -\frac{T}{2}\partial_{\alpha}X^{\mu}\partial^{\alpha}X_{\mu}. \tag{3.35}$$

Os momentos canônicamente conjugados são obtidos da densidade lagrangeana como segue:

$$\Pi^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\tau} X^{\mu}\right)} = T\partial_{\tau} X^{\mu}. \tag{3.36}$$

Desta forma, os colchetes de Poisson são dados, para o mesmo τ, por

$$\begin{aligned} \left\{X^{\mu}(\sigma,\tau), \Pi^{\nu}(\sigma',\tau)\right\} &= \eta^{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma'), \\ \left\{\Pi^{\mu}(\sigma,\tau), \Pi^{\nu}(\sigma',\tau)\right\} &= \left\{X^{\mu}(\sigma,\tau), X^{\nu}(\sigma',\tau)\right\} = 0, \end{aligned} \tag{3.37}$$

que em termos dos coeficientes de Fourier fornecem

$$\left\{\alpha_m^{\mu}, \alpha_n^{\nu}\right\} = \left\{\beta_m^{\mu}, \beta_n^{\nu}\right\} = im\eta^{\mu\nu}\delta_{m+n,0}, \tag{3.38}$$

$$\left\{p^{\mu}, x^{\nu}\right\} = \eta^{\mu\nu}, \tag{3.39}$$

e todos os outros são zero. Podemos escrever ainda, os vínculos dados em (3.20) e (3.21) em termos de Π^{μ}:

$$\Pi^{\mu}\Pi_{\mu} + T^2\partial_{\sigma}X^{\mu}\partial_{\sigma}X_{\mu} = 0, \tag{3.40}$$

$$\Pi^{\mu}\partial_{\sigma}X_{\mu} = 0. \tag{3.41}$$

A densidade Hamiltoniana é obtida, a partir da densidade lagrangeana através de um transformação de Legendre, como usual

$$\mathcal{H} = \partial_{\tau}X^{\mu}\Pi_{\mu} - \mathcal{L} \tag{3.42}$$

$$= \frac{T}{2}\left(\Pi^{\mu}\Pi_{\mu} + \partial_{\sigma}X^{\mu}\partial_{\sigma}X_{\mu}\right). \tag{3.43}$$

Integrando a densidade hamiltoniana em sua coordenada σ, chegamos a Hamiltoniana do sistema. Para a corda aberta ela é dada (considerando $\tau = 0$) por

$$H = \int_0^{\pi} d\sigma = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\alpha_{-n}\cdot\alpha_n, \tag{3.44}$$

e para a corda fechada

$$H = \int_0^{2\pi} d\sigma = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\alpha_{-n}\cdot\alpha_n + \beta_{-n}\cdot\beta_n\right). \tag{3.45}$$

Para obter as expressões acima, além de termos consideraro $\tau = 0$, usamos [67]

$$\int_0^{A} e^{\frac{2\pi i}{A}(n-n')a}da = A\delta_{n,n'}. \tag{3.46}$$

Voltando ás expressões para T_{--} e T_{++}, dadas (3.30) e (3.31), podemos definir

$$L_m^\alpha = \frac{T}{2}\int_0^\pi e^{-21m\sigma}T_{--}d\sigma = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\alpha_{m-n}\cdot\alpha_n, \tag{3.47}$$

$$L_m^\beta = \frac{T}{2}\int_0^\pi e^{-21m\sigma}T_{++}d\sigma = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\beta_{m-n}\cdot\beta_n, \tag{3.48}$$

sendo que aqui, introduzimos uma notação com supra-índices α e β, que querem dizer apenas que L^α é escrito em termos das componetes dos modos à direita, α_n^μ, e L^β é escrito em termos dos coeficientes de Fourier para os modos à esquerda, β_n^μ. Esperamos que esta notação não leve a confusões, mesmo porque, ela referese a grandezas que são escritas em termos de produtos escalares no espaço-tempo. Usando os colchetes de Poisson para os coeficientes de Fourries dados em (3.38), podemos verificar que L_m^α e L_m^β satisfazem a seguinte álgebra

$$\begin{aligned} \{L_m^\alpha, L_n^\alpha\} &= i(m-n)\,L_{m-n}^\alpha, \\ \{L_m^\beta, L_m^\beta\} &= i(m-n)\,L_{m-n}^\beta, \\ \{L_m^\alpha, L_n^\beta\} &= 0, \end{aligned} \tag{3.49}$$

que é conhecida como Álgebra de Virasoro. Note que podemos escrever as Hamiltonianas do sistema em termos dos geradores dessa álgebra, mais especificamente em termos do modo zero. Para a corda aberta, temos

$$H = L_0^\alpha = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\alpha_{-n}\cdot\alpha_n, \tag{3.50}$$

e para a corda fechada

$$H = L_0^\alpha + L_0^\beta = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\alpha_{-n}\cdot\alpha_n + \beta_{-n}\cdot\beta_n\right), \tag{3.51}$$

As expressões (3.30) e (3.31), juntamente com (3.47) e (3.48), implicam em $L_m^\alpha = L_m^\beta = 0$ para todo m. Especificamente, para a corda aberta, o vínculo

$$H = L_0^\alpha = 0, \tag{3.52}$$

unido ao fato de a massa estar relacionada com os momentos por $M^2 = -p^\mu p_\mu$, nos fornece

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{-n}\cdot\alpha_n, \tag{3.53}$$

para a corda aberta, e para a corda fechada, cujo vínculo é dado por

$$H = L_0^\alpha + L_0^\beta = 0, \tag{3.54}$$

temos

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \beta_{-n} \cdot \beta_n) . \tag{3.55}$$

Estas expressões para a massa ao quadrado, são as condições de camada de massa da teoria. Quando quantizarmos o sistema, serão utilizadas para fornecer a massa das partículas que surgem no espectro.

3.1.4 Calibre do Cone de Luz

Chamamos atenção agora para o fato de, embora termos escolhido o calibre conforme, temos ainda uma simetria local residual. De fato, de (3.3) e (3.5), podemos obter

$$\partial^\alpha \xi^\beta + \partial^\beta \xi^\alpha = \Omega \eta^{\alpha\beta} . \tag{3.56}$$

Isso significa que podemos usar esta simetria residual para impor uma condição de calibre adicional, Podemos então executando uma transforma ção de coordenadas (reparametrização) $(\tau, \sigma) \to (\widetilde{\tau}(\tau, \sigma), \widetilde{\sigma}(\tau, \sigma))$, tal que

$$\partial_\tau X^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \widetilde{\tau}} \frac{\partial \widetilde{\tau}}{\partial \tau} + \frac{\partial X^\mu}{\partial \widetilde{\sigma}} \frac{\partial \widetilde{\sigma}}{\partial \tau}, \tag{3.57}$$

$$\partial_\sigma X^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \widetilde{\tau}} \frac{\partial \widetilde{\tau}}{\partial \sigma} + \frac{\partial X^\mu}{\partial \widetilde{\sigma}} \frac{\partial \widetilde{\sigma}}{\partial \sigma}. \tag{3.58}$$

Os vínculos (3.20) e (3.21) implicam em

$$\frac{\partial \widetilde{\tau}}{\partial \sigma} = \frac{\partial \widetilde{\sigma}}{\partial \tau}, \qquad \frac{\partial \widetilde{\tau}}{\partial \tau} = \frac{\partial \widetilde{\sigma}}{\partial \sigma}, \tag{3.59}$$

de onde obtemos

$$\left(\partial_\tau^2 - \partial_\sigma^2\right) \widetilde{\tau} = \left(\partial_\tau^2 - \partial_\sigma^2\right) \widetilde{\sigma} = 0, \tag{3.60}$$

ou seja, os parâmetros satisfazem as equações de movimento da corda. Desta forma temos que os vínculos implicam numa relação entre as cordenadas. Uma vez determinado $\widetilde{\tau}$ teremos $\widetilde{\sigma}$ e *vice versa*. Para saber de forma explícita, como estas coordenadas são relacionadas, temos que resolver as equações de vínculo. Uma maneira de resolvê-las é impor o chamado calibre do cone de luz, que embora não manifeste invariância de Loretz explicitamente, fornece uma teoria livre de fantasmas, ou seja livre de estados com norma negativa.

Iniciemos introduzindo coordenadas do cone de luz no espaço-tempo:

$$X^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(X^0 + X^{d-1}\right), \qquad X^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(X^0 - X^{d-1}\right); \tag{3.61}$$

$$X^i = X^i, \qquad i = 1, 2, ..., d-2, \tag{3.62}$$

sendo X^i coordenadas transversas a X^+ e X^-. Desta forma, o que executamos foi uma rotação onde fizemos com que os eixos de X^0 e X^{d-1} coincidissem com os eixos do cone de luz. Nestas coordenadas, o produto escalar de dois vetores U e V é dado por

$$U \cdot V = U^i V^i - U^+ V^- - U^- V^+, \tag{3.63}$$

e temos $U^+ = -U_-$, $U^- = -U_+$ e $V^i = -V_i$.

A expressão (3.60) mostra que $\widetilde{\tau}$ (bem como $\widetilde{\sigma}$) satisfaz a mesma equação de onda que X^μ, como pode ser visto na expressão (3.19). A simetria residual permite portanto a escolha de $\widetilde{\tau} \propto X^\mu$. As coordenadas X^+ e X^- dadas em (3.61) também satisfazem (3.19)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right) X^+ = \left(\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right) X^- = 0. \tag{3.64}$$

A condição de calibre do cone de luz, corresponde a tomar

$$\widetilde{\tau} = \frac{1}{p^+} X^+ + b, \tag{3.65}$$

sendo p^+ o momento do centro de massa da corda no cone de luz, e b uma constante. Tal condição é usualmente expressa por

$$X^+ = \frac{p^+ \tau}{\pi T} + x^+, \tag{3.66}$$

sendo que renomeamos $\widetilde{\tau}$ por τ e x^+ corresponde à coordenada do centro de massa da corda no cone de luz.

Os momentos canonicamente conjugados às coordenadas espaço-temporais da corda, definidos em (3.36), são agora dados por

$$\Pi^+ = T \partial_\tau X^+, \qquad \Pi^- = T \partial_\tau X^-, \tag{3.67}$$

e derivando a expressão (3.66), obtemos

$$\partial_\tau X^+ = \frac{p^+}{\pi T}, \qquad \partial_\sigma X^+ = 0. \tag{3.68}$$

Desta forma, usando as equações de vínculo em termo dos momentos, dadas em (3.40) e (3.41), a expressão para produto escalar dada em (3.63) e as igualdades apresentadas (3.67) e (3.68), podemos obter

$$\partial_\tau X^- = \frac{\pi T}{2p^+} \left[\left(\partial_\tau X^i\right)^2 + \left(\partial_\sigma X^i\right)^2 \right], \tag{3.69}$$

$$\partial_\sigma X^- = \frac{\pi T}{p^+} \partial_\tau X^i \partial_\sigma X^i. \tag{3.70}$$

De posse destas expressões, podemos notar que, no calibre do cone de luz as equações de vínculo são dadas por uma única expressão em termos das derivadas das componentes transversais:

$$\partial_\tau X^- + \partial_\sigma X^- = \frac{\pi T}{2p^+}\left(\partial_\tau X^i + \partial_\sigma X^i\right). \tag{3.71}$$

Note que a expressão acima pode ser usada para exprimir X^- em termos dos X^i transversais. De fato no calibre do cone de luz, tanto X^- quanto X^+ podem ser eliminados. Assim, o sistema pode ser descrito usando apenas as coordenadas transversais. Considerando a corda aberta por exemplo, temos que a expansão em modos de X^- é dada por

$$X^- = x^- + 2\alpha' p^- + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^- e^{-in\tau}\cos(n\sigma). \tag{3.72}$$

Substituindo X^-, assim como a expanção para X^i na equação de vínculo (3.71), encontramos

$$\alpha_m^- = \frac{\sqrt{\pi T}}{2p^+}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n^i\alpha_{n-m}^i, \tag{3.73}$$

sendo que usamos $\alpha_0^- = \sqrt{2\alpha'}p^- = \frac{1}{\sqrt{\pi T}}p^+$. Ou seja, podemos escrever, usando a equação de vínculo, α_m^- em termos dos coeficientes transversais α_n^i. Notando ainda que a condição de calibre no cone de luz, dada em (3.66), corresponde a tomar $\alpha_n^+ = 0$ para todo $n \neq 0$, temos que neste calibre precisamos somente dos graus de liberdade transversais X^i, para tratar o sistema. A Hamiltoniana do sistema clássico por exemplo, é dada no cone de luz por

$$H_{CL} = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\alpha_n^i\alpha_{-n}^i = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\alpha_{-n}^i\alpha_n^i, \tag{3.74}$$

para a corda aberta e

$$\begin{aligned} H_{CL} &= \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\alpha_n^i\alpha_{-n}^i + \beta_n^i\beta_{-n}^i\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\alpha_{-n}^i\alpha_n^i + \beta_{-n}^i\beta_n^i\right), \end{aligned} \tag{3.75}$$

para a corda fechada.

3.1.5 Quantização no Calibre do Cone de Luz

A quantização do sistema é feita usando o princípio da correspondência para levar os colchetes de Poison, dados em (3.37), a relações operatoriais:

$$\begin{aligned} \left[X^i(\sigma,\tau), \Pi^j(\sigma',\tau)\right] &= i\delta^{ij}\delta(\sigma-\sigma'), \\ \left[\Pi^i(\sigma,\tau), \Pi^j(\sigma',\tau)\right] &= \left[X^i(\sigma,\tau), X^j(\sigma',\tau)\right] = 0, \end{aligned} \tag{3.76}$$

e todos os outros são zero, sendo os colchetes representando comutadores. Substituindo nas relações acima as expansões em termos das componentes de Fourier, que agora são operadores, temos

$$\begin{aligned} \left[\alpha^i_m, \alpha^j_n\right] &= \left[\beta^i_m, \beta^j_n\right] m\delta^{ij}\delta_{m+n,0}, \\ \left[x^-, p^+\right] &= -i, \\ \left[\alpha^i_m, \beta^j_n\right] &= 0 \end{aligned} \tag{3.77}$$

A condição de que as soluções X^i são reais, levam a expressão (3.23) a ser escrita, no cenário quântico, como

$$\alpha^i_{-n} = \left(\alpha^i_n\right)^\dagger, \qquad n > 0, \tag{3.78}$$

e o mesmo para os coeficientes (agora operadores) β^i_n que aparecem na corda fechada.

A Hamiltoniana quântica (operador Hamiltoniano) no calibre do cone de luz, é obtida impondo o ordenamento normal nos operadores da expressão (3.74) e (3.75), como segue:

$$H_{CL} = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} : \alpha^i_n \alpha^i_{-n} : -a, \tag{3.79}$$

e

$$H_{CL} = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} \left(: \alpha^i_n \alpha^i_{-n} : + : \beta^i_n \beta^i_{-n} :\right) - 2a, \tag{3.80}$$

sendo a uma constante aparentemente infinita. De fato, usando as relações de comutação (3.77) e a condição (3.78), o Hamiltoniano para a corda aberta, por exemplo, pode ser posto na forma

$$H_{CL} = \frac{1}{2}(\alpha_0)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^i_{-n}\alpha^i_n - a - \frac{d-2}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n, \tag{3.81}$$

de onde temos, para que o Hamiltoniano seja finito, ou seja, para que a energia da corda seja finita,

$$a = -\frac{d-2}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n. \tag{3.82}$$

Note que a soma divergente na expressão acima pode ser regularizada usando a função ζ, uma vez que $\sum_{n=1}^{\infty} n = \zeta(-1) = -\frac{1}{12}$. Portanto temos

$$a = \frac{d-2}{24}, \tag{3.83}$$

e então, uma vez determinado o valor de a, temos a dimensão do espaço-tempo d, onde a corda está imersa.

Espectro da Corda Bosônica Aberta

O espectro da corda aberta é obtido atuando os operadores transversais do estado fundamental, definido por

$$\begin{aligned} \alpha_n^i \left|0;p\right\rangle &= 0, \qquad n>0, \\ \widehat{p}^i \left|0;p\right\rangle &= p^i \left|0;p\right\rangle . \end{aligned} \tag{3.84}$$

O operador associado á expressão do quadrado da massa, dada em (3.53), é, no calibre do cone de luz ,

$$\begin{aligned} \widehat{M^2} &= 2p^+p^- - p^ip^i \\ &= 2\pi T H_{CL} - \pi T \alpha_0^i \alpha_0^i . \end{aligned} \tag{3.85}$$

Ou seja,

$$\widehat{M^2} = 2\pi T \left(N^\alpha - a\right) = \frac{1}{\alpha'}\left(N^\alpha - a\right) \tag{3.86}$$

sendo o operador N^α definido por[§]

$$N^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i . \tag{3.87}$$

A atuação de $\widehat{M^2}$ no estado fundamental determina a massa deste. Desta forma, da aplicação do operador de massa no estado fundamental da corda obtém-se

$$\alpha' \widehat{M^2} \left|0;p\right\rangle = -a \left|0;p\right\rangle , \tag{3.88}$$

que, se $a>0$, nos diz que a massa ao quadrado será menor que zero ($M^2<0$) e portanto teremos tachyons na teoria.

O primeiro estado excitado é dado por

$$\left|A^i\right\rangle = \alpha_{-1}^i \left|0;p\right\rangle , \tag{3.89}$$

para o qual temo $N^\alpha = 1$ e portanto

$$\alpha' \widehat{M^2} \left|1;p\right\rangle = (1-a)\left|1;p\right\rangle . \tag{3.90}$$

Neste ponto, a invariância da teoria por Lorentz pode nos ajudar a impor um valor para a. O grupo original da teoria quando fixamos o calibre conforme era $SO(1,d-1)$, cuja álgebra (clássica) é

$$\left\{J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}\right\} = i\eta^{\mu\sigma}J^{\nu\rho} + i\eta^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - i\eta^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - i\eta^{\nu\sigma}J^{\mu\rho},$$

[§] Ver comentario sobre a notação logo abaixo de (3.48).

para os geradores dados por

$$J^{\mu\nu} = \int_0^\pi d\sigma\,(X^\mu\Pi^\nu - X^\nu\Pi^\mu)\,.$$

No calibre do cone de luz temos que

$$\{J^{-i}, J^{-j}\} = 0.$$

No entanto, a álgebra quântica para os geradores no cone de luz, é dada, em termos dos operadors transversais α_n^i, por

$$[J^{-i}, J^{-j}] = \sum_{m=1}^{\infty}\left\{\left[m\left(1-\frac{d-2}{24}\right)+\frac{1}{m}\left(\frac{d-2}{24}-a\right)\right]\left(\alpha_m^i\alpha_{-m}^j - \alpha_{-m}^j\alpha_m^i\right)\right\}, \tag{3.91}$$

o que significa que temos uma simetria clássica que não é satisfeita quanticamente. Ou seja, temos uma anomalia. Para que a simetria seja obedecida temos que impor que

$$\frac{d-2}{24} = 1, \tag{3.92}$$

ou seja, para que a teoria quântica seja invariante por Lorentz ela tem que ser concebida em $d = 26$ dimensões. Fixar a dimensão do espaço-tempo $d = 26$ significa, pela relação (3.83), fixar $a = 1$. Temos portanto que, embora o calibre do cone de luz não manifeste, de forma explícita, a invariância por Lorentz, a escolha da dimensão do espaço-tempo em $d = 26$ nos garante que esta simetria seja satisfeita neste calibre.

Voltando então para as expressões do estado fundamental e para o primeiro estado excitado, temos: a primeira nos diz que existem tachyons no espectro. Já a segunda nos fornece 24 estados polarizados (transversais) de um bóson sem massa. Estes bosóns sem massa são associados a fótons.

O aparecimento de tachyons no estado fundamental, significa que o vácuo da teoria de corda bosônica aberta é instável. Este problema é resolvido introduzindo supersimetria. De fato, pode-se mostrar que teorias de cordas supersimétricas tem o espectro livre de tachyons. A introdução de supersimetria no sistema, bem como a demonstração do fato acima citado, estão fora do escopo do trabalho aqui apresentado.

Espectro da Corda bosônica Fechada

O espectro da corda bosonica fechada é obtido por um procedimento análogo ao utilizado para a corda aberta. No entanto agora, sabemos que o espaço-tempo em que as cordas estão imersas é 26-dimensional (sendo 24 dimensões transversais) e que $a = 1$.

As relações de comutação para os modos transversais, dadas em (3.77), mostram que a corda bosônica fechada é descrita por dois conjuntos de osciladores independentes. Os estados da corda bosônica são então descritos pelo produto tensorial de estados de corda aberta. O estado fundamental, com momento do centro de massa da corda fechada p^i definido, é dado por

$$\begin{aligned} \alpha_n^i \left|0\right\rangle_\alpha \otimes \left|0\right\rangle_\beta \otimes \left|p\right\rangle &= 0, \\ \beta_n^i \left|0\right\rangle_\alpha \otimes \left|0\right\rangle_\beta \otimes \left|p\right\rangle &= 0, \\ \widehat{p}^i \left|0\right\rangle_\alpha \otimes \left|0\right\rangle_\beta \otimes \left|p\right\rangle &= p^i \left|0\right\rangle_\alpha \otimes \left|0\right\rangle_\beta \otimes \left|p\right\rangle. \end{aligned} \tag{3.93}$$

A expressão para o quadrado da massa, dada em (3.55), é escrita para a teoria quantizada no calibre do cone de luz, como sendo o seguinte operador para a corda fechada

$$\begin{aligned} \widehat{M}^2 &= 4\pi T \left(N^\alpha + N^\beta - 2\right) \\ &= \frac{2}{\alpha'} \left(N^\alpha + N^\beta - 2\right), \end{aligned} \tag{3.94}$$

onde mais uma vez temos

$$N^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i, \qquad N^\beta = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{-n}^i \beta_n^i. \tag{3.95}$$

Do vínculo $L_0^\alpha = L_0^\beta$, temos $N^\alpha = N^\beta$. Sendo assim, atuando o operador $\widehat{M}^2$ no vácuo da corda fechada, encontramos $\alpha' M^2 = -4$ e temos portanto tachyons presentes também na teoria de cordas fechadas.

O primeiro nível exitado da corda bosônica é dado por

$$\left|V^{ij}\right\rangle = \alpha_{-1}^i \beta_{-1}^j \left|0\right\rangle_\alpha \otimes \left|0\right\rangle_\beta \otimes \left|p\right\rangle.$$

O operador de massa aplicado a este estado nos informa que ele é não massivo, $\alpha' M^2 = 0$. A parte simétrica deste estado e de traço nulo, transforma-se sob $SO\,(24)$ como uma partícula de massa nula e *spin* 2. Esta é a partícula associada ao graviton. A parte simetrizada deste estado nos fornece um campo escalar chamado dilaton e a parte anti-simétrica refere-se aos campos de anti-simétricos de Kalb-Ramond

3.2 D-branas

D-branas são objetos extendidos aos quais a corda aberta tem seus extremos ligados. Estes objetos varrem o espaço-tempo onde estão imersos descrevendo o que definimos como volume-mundo. São objetos que tem sua própria dinâmica sendo flexíveis e portanto sua forma pode variar.

O fato de ter cordas abertas acopladas a eles, implica na imposição de condições de contorno nos extremos da corda que, por sua vez, pode ter um ou âmbos os extremos ligados a esta menbrana hiperdimensional. Esta menbrana divide o espacotempo em p direções espaciais paralelas e as restantes transversais a mesma. A condição de contorno que localiza os extremos da corda na membrana, são as condições de Dirichlet impostas nas direções transversais a ela. O nome D_p-brana vem, justamente da condição de Dirichlet e de membrana, sendo o sub-índice p referente ao número de dimensões espaciais que ela ocupa. Referiremo-nos com frequência à D_p-brana como D-brana ou simplismente como brana. Como não existe nada que impeça as cordas de percorrer as direções paralelas ao volume de mundo da brana, as condições impostas nessa direção são as de Neumann

Apesar de suas possibilidades gerais, trataremos as D_p-branas como sendo objetos rígidos e planos, p-dimensionais, imersos num espaço-tempo de Minkowski 26-dimensional. O fato da brana dividir o espaço em direções transversais e paralelas a ela, indica claramente que a simetria de Lorentz é quebrada em sua presença. De fato ela quebra o grupo de Lorentz $SO\,(1, 25)$ em $SO\,(1, p) \otimes SO\,(25 - p)$.

O cenário de uma corda aberta com uma de suas extremidades ($\sigma = 0$ por exemplo) acoplada a D_p-brana, é implementado pelas seguintes condições de contorno para a corda fechada

$$\partial_\sigma X^a\big|_{\sigma=0} = 0, \qquad a = 0, 1, ..., p, \tag{3.96}$$

$$X^i\big|_{\sigma=0} = x^i, \qquad i = p + 1, ...25, \tag{3.97}$$

sendo a as direções paralelas a brana, nas quais impusemos condições de contorno do tipo Neumann às soluções da corda aberta, e i as direções perpendiculares (tranversais), nas quais impusemos condições do tipo Dirichlet às soluções em questão. x^i são as coordenadas da brana.

3.2.1 Estados de Contorno

Introduziremos aqui definição intuitiva de estado de contorno em teoria de cordas bosônicas. Considere uma corda aberta que possui suas extremidades ligadas a diferentes D-branas. A interação entre as duas branas se dá através de flutuações no vácuo da corda aberta que as une. Desta forma, tal interação pode ser descrita pelo diagrama de um laço¶ para a corda aberta. O diagrama de um laço para a corda aberta cujos extremos estão ligados a duas diferentes branas pode ser assumido como sendo uma corda fechada que parte de uma brana e se propaga (tendo como folhamundo um cilindro) até chegar na outra brana.

¶Usamos aqui a palavra laço como uma tradução livre para *loop*.

Do ponto de vista da corda fechada, o fenômeno pode ser entendido em nível de árvore. Este refere-se a uma corda fechada que é gerada do vácuo, se propaga por um intervalo de tempo e é aniquilada no vácuo. Sendo assim, podemos interpretar as D-branas como sendo estados inseridos no começo e no fim (contornos) da folha-mundo da corda fechada que se propaga. Existe então uma equivalência entre a descrição de branas interagindo através de flutuações no vácuo da corda aberta e branas que interagem através da corda fechada que se propaga entre elas. Estas duas descrições são chamadas de canal da corda aberta e canal da corda fechada, respectivamente.

Os estados inseridos no começo e fim da folha mundo da corda fechada, são os chamados estados de contorno. Estes são construídos no espaço de Fock da corda bosônica fechada.

As condições sobre as soluções da corda fechada, que correspondem àquelas impostas sobre as soluções da corda aberta, dadas em (3.96) e (3.97), são

$$\partial_\tau X^a\big|_{\tau=0} = 0, \qquad a = 0, 1, ...p, \tag{3.98}$$

$$X^i\big|_{\tau=0} = y^i, \qquad i = p+1, ..., 25. \tag{3.99}$$

Estas condições impostas sobre o espaço de Fock da corda fechada definem a D-brana como estado de contorno. De fato, usando a expressão para a solução da corda fechada dada em (3.22) e interpretando as coordenadas da corda no espaço-tempo como operadores, temos

$$\begin{aligned}\partial_\tau X^a\big|_{\tau=0} |B_X\rangle &= 0, \qquad a = 1, ...p,\\ \left(X^i\big|_{\tau=0} - y^i\right)|B_X\rangle &= 0, \qquad i = p+1, ..., 24,\end{aligned}$$

sendo $|B_X\rangle$ o estado de contorno, construído no espaço de Fock da corda fechada e interpretado como D_p-brana bosônica. As condições acima são equivalentes as seguintes equações operatoriais

$$\begin{aligned}\left(\alpha_n^a + \beta_{-n}^a\right)|B_X\rangle &= 0,\\ \left(\alpha_n^i - \beta_{-n}^i\right)|B_X\rangle &= 0, \quad \forall n \neq 0,\end{aligned} \tag{3.100}$$

$$\begin{aligned}\widehat{p}^a\,|B_X\rangle &= 0,\\ \left(\widehat{x}^i - y^i\right)|B_X\rangle &= 0.\end{aligned} \tag{3.101}$$

Definindo

$$S^{\mu\nu} = \left(\delta^{ab}, -\delta^{ij}\right), \tag{3.102}$$

podemos escrever as equações operatoriais acima como segue

$$\begin{aligned}
\left(\alpha_n^\mu + S^{\mu\nu}\beta_{-n}^\nu\right)|B_X\rangle &= 0, \quad \forall n \neq 0, \\
\widehat{p}^a |B_X\rangle &= 0, \\
\left(\widehat{x}^i - y^i\right)|B_X\rangle &= 0.
\end{aligned} \tag{3.103}$$

A solução destas equações é dada por

$$|B_X\rangle = N_p \delta^{24-p}(\hat{x}^i - y^i)\left(\prod_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{n}\alpha_{-n}\cdot S\cdot\beta_{-n}}\right)|0\rangle , \tag{3.104}$$

sendo

$$|0\rangle = |0\rangle_\alpha \otimes |0\rangle_\beta \otimes |p=0\rangle . \tag{3.105}$$

A função delta localiza o estado no espaço transversal ao volume-mundo, e N_p é a constante de normalização que é a metade da tensão da brana T_p

$$N_p = \frac{T_p}{2}. \tag{3.106}$$

Estando no calibre do cone de luz, estamos livres de fantasmas, no entanto os tachyons permanecem uma vez que o estado de brana é contruído no espaço de Fock da corda fechada.

3.2.2 D_p-branas na Presença de um Campo Externo

O intuito desta seção é o de descrever o estado de brana na presença de um campo externo. O campo externo é introduzido considerando que a corda aberta apresenta cargas pontuais em seus extremos $\sigma = 0$, $\sigma = \pi$, sendo que estas têm o mesmo valor absoluto e sinais opostos. Uma corda com estas características, quando ligada a brana, gerará campos abelianos na direção paralela ao volume-mundo. Desconsideraremos as exitações transversais. A ação para uma corda com cargas pontuais em seus extremos é dada por

$$S = \frac{T}{2}\int d\tau \int_0^\pi d\sigma \left\{\partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X_\mu - \left[\delta\left(\sigma\right) - \delta\left(\sigma - \pi\right)\right]\partial_\tau X^\mu A_\mu\left[X\right]\right\} \tag{3.107}$$

A variação da ação é dada por

$$\begin{aligned}
\delta S &= -T\int d\tau \int_0^\pi d\sigma \left\{\partial_\alpha \partial^\alpha X_\mu \delta X^\mu + \partial_\sigma\left(\partial_\sigma X_\mu \delta X^\mu\right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{T}\left[\delta\left(\sigma\right) - \delta\left(\sigma - \pi\right)\right]\left(-\partial_\tau A_\mu \delta X^\mu + \partial_\tau X^\mu \delta A_\mu\right)\right\},
\end{aligned} \tag{3.108}$$

Para $\delta S = 0$ temos a equação de movimento da corda

$$\partial_\alpha \partial^\alpha X^\mu = 0, \tag{3.109}$$

e a condição de contorno

$$T \int d\tau \left(\partial_\sigma X_\mu - \frac{1}{T} \partial_\tau X^\nu F_{\mu\nu} \right) \delta X^\mu \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} = 0, \tag{3.110}$$

sendo $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Considerando A^μ constante na direção transversal ao volume-mundo, temos que

$$\left(\partial_\sigma X_a - \frac{1}{T} \partial_\tau X^b F_{ab} \right) \Big|_{\sigma=0,\pi} = 0, \tag{3.111}$$

na direção paralela´a brana, e

$$X^i \big|_{\sigma=0} = y^i, \tag{3.112}$$

nas direções transversais. Podemos agora, passar para o canal da corda fechada onde as condições ficam dadas por

$$\left(\partial_\tau X_a + \mathbb{F}_{ba} \partial_\sigma X^b \right) \big|_{\tau=0} = 0, \tag{3.113}$$

$$X^i - y^i \big|_{\tau=0} = 0, \tag{3.114}$$

sendo $\mathbb{F}_{ba} = F_{ab}/T$. Usando a expressão para a solução da corda fechada em termos das componentes de Fourier e quantizando a teoria no calibre do cone de luz, obtemos

$$\left[(\mathbb{I} + \mathbb{F})^{ab} \alpha_n^b + (\mathbb{I} - \mathbb{F})^{ab} \beta_{-n}^b \right] |B_X\rangle = 0,$$

$$\left(\alpha_n^i - \beta_{-n}^i \right) |B_X\rangle = 0, \forall n \neq 0,$$

$$\widehat{p}^a \, |B_X\rangle = 0, \quad \left(\widehat{q}^i - y^i \right) |B_X\rangle = 0, \tag{3.115}$$

sendo $\mathbb{I}$ a matriz identidade. O estado que é solução das equações acima é dado por

$$|B_X\rangle = N_p\,(F)\, \delta^{(24-p)}\,(\hat{q} - y)\, e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_{-n} \cdot M \cdot \beta_{-n}} |0\rangle, \tag{3.116}$$

sendo $|0\rangle$ o mesmo da expressão (3.105), $N_p\,(F)$ a constante de normalização, cuja dependência com F é dada por

$$N_p\,(F) = \sqrt{-\det \left(\delta + \frac{F}{T} \right)}, \tag{3.117}$$

e $M^{\mu\nu}$ definido como sendo

$$M^{\mu\nu} = \left(\left[\frac{(\mathbb{I} - \mathbb{F})}{(\mathbb{I} + \mathbb{F})} \right]^{ab}, -\delta^{ij} \right). \tag{3.118}$$

Agora que temos definido o sistema de corda bosônica, assim como o estado de contorno contruído no espaço de de Fock da mesma, ou seja, a D-brana, podemos aplicar o formalismo apresentado no capítulo dois e obter sua versã á temperatura finita.

Capítulo 4

D_p-brana à Temperatura Finita

D_p-branas são objetos extensos ao qual cordas abertas podem estar ligadas através de seus extremos. Como estes objetos podem ser construídos sobre o vácuo da teoria de cordas, o objetivo deste capítulo é obter um cenário de cordas e D-branas térmicas, utilizando o conteúdo apresentado nos capítulos anteriores. Para ambas estruturas, efetuamos o cálculo da entropia a partir de valores esperados do operador Entropia, dado em sua formulação geral. Ou seja, uma vez construídos os sistemas à temperatura finita, calculamos, usando a expressão geral do operador Entropia, o valor esperado deste no vácuo térmico da corda bosônica fechada e no estado térmico de D-brana.

O mesmo procedimento é também utilizado para a construção da D-brana térmica na presença de um campo externo e para o cálculo da entropia deste sistema.

No intuito de deixar este capítulo auto-contido, repetiremos algumas expressões e considerações apresentadas nos capítulos anteriores. Sobre tudo àquelas apresentadas no capítulo dois, uma vez que aqui, explicitaremos a dependência dos operadores para com o espaço-tempo. Isso implicará em algumas modificações nas expressões apresentadas no capítulo 2.

4.1 Corda Bosônica Fechada à Temperatura Finita

Considere a corda bosônica fechada num espaço-tempo de Minkowski 26-dimensional. A corda bosônica fechada é obtida impondo a condição de periodicidade na solução de sua equação de movimento. Ou seja, $X^\mu = X^\mu(\tau, \sigma)$, satisfaz $X^\mu(\tau, 0) = X^\mu(\tau, \pi)$, sendo σ e τ os parâmetros da folha-mundo, com $\sigma \in [0, \pi]$. O índice μ refere-se a componentes espaço-temporais.

Para previnir o sistema da existência de fantasmas, escolhemos o calibre do cone de luz fazendo $X^{\pm} = X^0 \pm X^{25}$. A partir da escolha deste calibre, temos que o sistema é descrito apenas pelos modos transversais X^i, sendo $i = 1, 2, ...24$. A solução da equação de movimento admite uma expansão de Fourier, cujos coeficientes α_k, α_{-k} e β_k, β_{-k} referem-se ao setor direito e esquerdo da corda bosônica fechada. A quantização é feita respeitando a relação de comutação

$$\left[\alpha^i_m, \alpha^j_n\right] = k\delta^{ij}\delta_{m+n,0}. \tag{4.1}$$

Para introduzir temperatura no sistema, devemos escrever os modos dos setores à direita e à esquerda para a corda bosônica fechada em termos de operadores que satisfazem as relações de comutação do oscilador harmônico:

$$\begin{aligned} A^i_k &= \frac{1}{\sqrt{k}}\alpha^i_k, \qquad A^{i\dagger}_k = \frac{1}{\sqrt{k}}\alpha^i_{-k}, \\ B^i_k &= \frac{1}{\sqrt{k}}\beta^i_k, \qquad B^{i\dagger}_k = \frac{1}{\sqrt{k}}\beta^i_{-k}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

para $k > 0$. Seguindo o procedimento de construção dentro do formalismo de campos térmicos, dobra-se o espaço de Fock de tal maneira que o espaço total seja composto por dois sub-espaços: o original, ou físico e um outro, auxiliar, idêntico ao primeiro, o qual denotaremos por til ($\tilde{\ }$). Ou seja, o espaço estendido fica dado pelo produto tensorial de dois espaços de Fock de corda fechada

$$\widehat{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \otimes \widetilde{\mathcal{H}}. \tag{4.3}$$

Desta forma os estados que varrem o espaço total, são o produto tensorial dos estados de cada subespaço. Os estados de vácuo dos setores direito e esquerdo da corda fechada são então escritos como

$$\begin{aligned} |0\rangle\!\rangle_\alpha &= |0\rangle_\alpha \otimes \widetilde{|0\rangle}_\alpha = |0,0\rangle_\alpha, \\ |0\rangle\!\rangle_\beta &= |0\rangle_\beta \otimes \widetilde{|0\rangle}_\beta = |0,0\rangle_\beta, \end{aligned} \tag{4.4}$$

sendo $|\ \ \rangle\!\rangle$ o símbolo que denota os vetores no espaço estendido. Portanto, o vácuo do sistema é dado por

$$|0\rangle\!\rangle = |0\rangle\!\rangle_\alpha\, |0\rangle\!\rangle_\beta = \left(|0\rangle_\alpha \widetilde{|0\rangle_\alpha}\right)\left(|0\rangle_\beta \widetilde{|0\rangle_\beta}\right) = \left(|0\rangle_\alpha\, |0\rangle_\beta\right)\left(\widetilde{|0\rangle_\alpha}\widetilde{|0\rangle_\beta}\right). \tag{4.5}$$

Uma cópia idêntica dos operadores é necessária, sendo que suas álgebras (a do sistema original e do sistema til) são independentes

$$\begin{aligned} \left[A^i_k, A^{j\dagger}_m\right] &= \left[\tilde{A}^i_k, \tilde{A}^{j\dagger}_m\right] = \delta_{km}\delta^{ij}, \\ \left[A^i_k, \tilde{A}^j_m\right] &= \left[A^i_k, \tilde{A}^{j\dagger}_m\right] = \left[A^i_k, \tilde{B}^j_m\right] = \dots = 0. \end{aligned} \tag{4.6}$$

O operador Hamiltoniano do sistema total é construído de forma que garanta que o vácuo térmico, a ser definido, seja independente do tempo [57]. Isto é obtido se considerarmos este operador como sendo definido por

$$\begin{aligned}\widehat{H} &= H - \widetilde{H} \\ &= \sum_{n>0}^{\infty}\left(nA_n^\dagger \cdot A_n + nB_n^\dagger \cdot B_n\right) - \sum_{n>0}^{\infty}\left(n\widetilde{A}_n^\dagger \cdot \widetilde{A}_n + n\widetilde{B}_n^\dagger \cdot \widetilde{B}_n\right).\end{aligned} \tag{4.7}$$

Uma vez duplicado o sistema, os operadores e estados à temperatura zero são levados a operadores e estados à temperatura finita, através de uma transformação de Bogoliubov. De fato, transformações de Bogoliubov atuando em estados puros produzem ruído térmico [57]. Tais transformações são chamadas de transformações de Bogoliubov térmicas.

4.1.1 Transformação de Bogoliubov Térmica

O vácuo térmico pode ser criado por qualquer transformação que misture os operadores A_k^i, $\tilde{A}_k^{i\dagger}(B_k^i,\ \widetilde{B}_k^{i\dagger})$ e cujo gerador comute com o operador Hamiltoniano do sistema total. No entanto, estamos interessados, seguindo o formalismo de campos térmicos, em uma transformação que além de satisfazer as condições citadas acima, tenha a forma da transformação de Bogoliubov

$$\begin{pmatrix} A' \\ \tilde{A}^{\dagger\prime} \end{pmatrix} = e^{-iG}\begin{pmatrix} A \\ \tilde{A}^\dagger \end{pmatrix} e^{iG} = \mathbb{B}\begin{pmatrix} A \\ \tilde{A}^\dagger \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A^{\dagger\prime} & -\tilde{A}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^\dagger & -\tilde{A} \end{pmatrix}\mathbb{B}^{-1} \tag{4.8}$$

sendo

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix}, \qquad ux - vw = 1 \tag{4.9}$$

a matriz de transformação, G o gerador que denotamos por operador de Bogoliubov e A operadores do tipo dos osciladores bosônicos. Os operadores em questão, que satisfazem as condições exigidas são dados por [57]

$$\begin{aligned} g_{1_k}^{\alpha} &= i\theta_{1_k}\left(A_k \cdot \tilde{A}_k - \tilde{A}_k^\dagger \cdot A_k^\dagger\right), \qquad g_{1_k}^{\beta} = i\theta_{1_k}\left(B_k \cdot \tilde{B}_k - \tilde{B}_k^\dagger \cdot B_k^\dagger\right), \\ g_{2_k}^{\alpha} &= i\theta_{2_n}\left(A_k \cdot \tilde{A}_k + \tilde{A}_k^\dagger \cdot A_k^\dagger\right), \qquad g_{2_k}^{\beta} = i\theta_{2_k}\left(B_k \cdot \tilde{B}_k + \tilde{B}_k^\dagger \cdot B_k^\dagger\right), \\ g_{3_k}^{\alpha} &= i\theta_{3_n}\left(A_k^\dagger \cdot A_k + \tilde{A}_k \cdot \tilde{A}_k^\dagger\right), \qquad g_{3_k}^{\beta} = i\theta_{3_k}\left(B_k^\dagger \cdot B_k + \tilde{B}_k \cdot \tilde{B}_k^\dagger\right), \end{aligned} \tag{4.10}$$

sendo os supra-índices referentes aos setores esquerdo e direito da corda bosônica fechada.

Considerando então o gerador da transformação como

$$G = \sum_k \left(G_k^{\alpha} + G_k^{\beta} \right), \tag{4.11}$$

com

$$G_k^{\alpha}(\theta) = \lambda_{1_k} \tilde{A}_k^{\dagger} \cdot A_k^{\dagger} - \lambda_{2_k} A_k \cdot \tilde{A}_k + \lambda_{3_k} \left(A_k^{\dagger} \cdot A_k + \tilde{A}_k^{\dagger} \cdot \tilde{A}_k + tr\delta^{ij} \right), \tag{4.12}$$

$$G_k^{\beta}(\theta) = \lambda_{1_k} \tilde{B}_k^{\dagger} \cdot B_k^{\dagger} - \lambda_{2_k} B_k \cdot \tilde{B}_k + \lambda_{3_k} \left(B_k^{\dagger} \cdot B_k + \tilde{B}_k^{\dagger} \cdot \tilde{B}_k + tr\delta^{ij} \right), \tag{4.13}$$

e os coeficientes dados por

$$\lambda_{1_k}(\theta) = i(\theta_{2_k} - \theta_{1_k}), \quad \lambda_{2_k}(\theta) = -i(\theta_{1_k} + \theta_{2_k}), \quad \lambda_{3_k}(\theta) = i\theta_{3_k}. \tag{4.14}$$

Como vimos no capítulo dois, esta escolha conduz a uma tranformação não unitária e mantém as regras de conjugação til como definidas usualmente. Podemos no entanto fazer uma outra escolha para os coeficientes dos geradores que faz com que a transformação seja unitária, embora não mantenha as regras de conjugação til, implicando por exemplo, que o vácuo térmico não seja invariante por tal conjugação. Esta escolha é dada por

$$f_{1_k}^{\alpha} = \gamma_{1_k}^{\alpha} \left(A_k \cdot \tilde{A}_k + \tilde{A}_k^{\dagger} \cdot A_k^{\dagger} \right), \quad f_{1_k}^{\alpha} = i\gamma_{2_k} \left(A_k \cdot \tilde{A}_k - \tilde{A}_k^{\dagger} \cdot A_k^{\dagger} \right),$$

$$f_{3_k}^{\alpha} = \gamma_{3_n} \left(A_k^{\dagger} \cdot A_k + \tilde{A}_k \cdot \tilde{A}_k^{\dagger} \right),$$

e o mesmo para os modos a esquerda pela troca de A por B. A combinação linear destes geradores pode ser escrita como

$$G_k^{\alpha}(\gamma) = \lambda_{1_k} \tilde{A}_k^{\dagger} \cdot A_k^{\dagger} - \lambda_{2_k} A_k \cdot \tilde{A}_k + \lambda_{3_k} \left(A_k^{\dagger} \cdot A_k + \tilde{A}_k^{\dagger} \cdot \tilde{A}_k + tr\delta^{ij} \right),$$

e uma expressão semelhante para $G_k^{\beta}(\gamma)$ obtida pela troca de A por B. Agora os coeficientes são dados em termos dos γ como segue

$$\lambda_{1_k}(\gamma) = \gamma_{1_k} - i\gamma_{2_k}, \qquad \lambda_{2_k}(\gamma) = -\lambda_{1_k}^{*}(\gamma), \qquad \lambda_{3_k}(\gamma) = \gamma_{3_k}.$$

Definidos os operadores de Bogoliubov, partimos para a construção do vácuo e dos operadores térmicos.

4.1.2 Vácuo e Operadores Dependentes da Temperatura

O vácuo do sistema à temperatura finita é obtido através da transformação [35]

$$|0(\beta)\rangle = e^{-iG} \, |0\rangle\rangle \, . \tag{4.15}$$

Uma vez que os termos que compõem os geradores G_k^α e G_k^β satisfazem a álgebra $su(1,1)$ (tanto na formulação unitária quanto na não unitária), fazendo uso do Teorema do "Desentrelaçamento" [64, 65] podemos escrever o vácuo térmico como sendo

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= \prod_k e^{\Gamma_{1_k}\left(\tilde{A}_k^\dagger \cdot A_k^\dagger\right)} e^{\log(\Gamma_3)\left(A_k^\dagger \cdot A_k + \tilde{A}_k \cdot \tilde{A}_k^\dagger\right)} e^{\Gamma_{2_k}\left(A_k \cdot \tilde{A}_k\right)} \\ &\quad \times e^{\Gamma_{1_k}\left(\tilde{B}_k^\dagger \cdot B_k^\dagger\right)} e^{\log(\Gamma_3)\left(B_k^\dagger \cdot B_k + \tilde{B}_k \cdot \tilde{B}_k^\dagger\right)} e^{\Gamma_{2_k}\left(B_k \cdot \tilde{B}_k\right)} |0\rangle\rangle \end{aligned} \tag{4.16}$$

para o qual

$$\Gamma_{1_k} = \frac{-\lambda_{1_k} \sinh(i\Lambda_k)}{\Lambda_k \cosh(i\Lambda_k) + \lambda_{3_k} \sinh(i\Lambda_k)}, \quad \Gamma_{2_k} = \frac{\lambda_{2_k} \sinh(i\Lambda_k)}{\Lambda_k \cosh(i\Lambda_k) + \lambda_{3_k} \sinh(i\Lambda_k)},$$

$$\Gamma_{3_k} = \frac{\Lambda_k}{\Lambda_k \cosh(i\Lambda_k) + \lambda_{3_k} \sinh(i\Lambda_k)}, \tag{4.17}$$

e

$$\Lambda_k^2 \equiv \left(\lambda_{3_k}^2 + \lambda_{1_k}\lambda_{2_k}\right). \tag{4.18}$$

Como o vácuo dobrado é aniquilado pelos operadores A_k^i, B_k^i, $\tilde{A}_k^i$ e $\tilde{B}_k^i$, expandindo as exponenciais dos operadores na expressão (4.16) encontramos que a contribuição para o vácuo térmico é dada somente por

$$|0(\beta)\rangle = \prod_k \left(\Gamma_{3_k}\right)^{2Tr\delta^{ij}} e^{\Gamma_{1_k}\left(\tilde{A}_k^\dagger \cdot A_k^\dagger\right)} e^{\Gamma_{1_k}\left(\tilde{B}_k^\dagger \cdot B_k^\dagger\right)} |0\rangle\rangle \tag{4.19}$$

Os operadores são mapeados à temperatura finita como segue

$$\begin{aligned} A_k^i(\beta) &= e^{-iG_k^\alpha} A_k^i e^{iG_k^\alpha}, \qquad \tilde{A}_k^i(\theta) = e^{-iG_k^\alpha} \tilde{A}_k^i e^{iG_k^\alpha}, \\ B_k^i(\beta) &= e^{-iG_k^\beta} B_k^i e^{iG_k^\beta} \qquad \tilde{B}_k^i(\theta) = e^{-iG_k^\beta} \tilde{B}_k^i e^{iG_k^\beta}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Ou, em termos dos dubletos

$$\begin{pmatrix} A_k^i(\theta) \\ \tilde{A}_k^{i\dagger}(\theta) \end{pmatrix} = \mathbb{B}_k \begin{pmatrix} A_k^i \\ \tilde{A}_k^{i\dagger} \end{pmatrix}, \tag{4.21}$$

cuja forma explícita da matriz de transformação é

$$\mathbb{B}_k = \cosh(i\Lambda_k)\,\mathbb{I} + \frac{\sinh(i\Lambda_k)}{(i\Lambda_k)} \begin{pmatrix} i\lambda_{3_k} & i\lambda_{1_k} \\ i\lambda_{2_k} & -i\lambda_{3_k} \end{pmatrix}. \tag{4.22}$$

Temos agora todos os componentes necessários para a descrição térmica da corda bosônica fechada. Devemos salientar que o sistema à temperatura finita satisfaz a todas as propriedads do sistema à temperatura zero. Em particular, a partir das equações de movimento podemos construir um tensor de energia-momentum que tem a mesma forma que à temperatura zero. Isso garante que os operadores

$$L_m^\alpha(\beta) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_{-k}(\beta)\cdot\alpha_{k+m}(\beta), \tag{4.23}$$

$$L_m^\beta(\theta) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_{-k}(\beta)\cdot\beta_{k+m}(\beta) \tag{4.24}$$

satisfação a álgebra de Virasoro, o que significa que a simetria conforme não é quebrada pela nossa construção. Portanto, estamos de fato tratando de cordas bôsonicas fechadas à temperatura finita.

4.1.3 Entropia da Corda Bosônica Térmica

Em [35], Takahashi e Umezawa apresentaram um operador ao qual chamaram de entropia. Este nome foi dado pois sua média estatística multiplicada pela constante de Boltzmann fornece a fórmula geral para a entropia, na aproximação de Stirling, tanto para campos bosônicos quanto fermiônicos, quando o sistema está em equilíbrio. A saber, seja K o operador entropia, para campos bosônicos, obtém-se

$$\frac{1}{k_B}\langle 0(\beta)|\, K\, |0(\beta)\rangle = \left\{\sum_k \left[(1+n_k)\log(1+n_k) - n_k\log(n_k)\right]\right\}, \tag{4.25}$$

sendo n_k a densidade de número de partículas e k_B a constante de Boltzmann.

Acreditando na generalidade deste operador, definimos para o nosso sistema e para a construção apresentada até aqui, o operador entropia para a corda fechada como sendo

$$K = K^\alpha + K^\beta, \tag{4.26}$$

com

$$K^\alpha = -\sum_k\left[A_k^\dagger\cdot A_k \log\left(g\frac{\lambda_{1_k}\lambda_{2_k}}{\Lambda_k^2}\sinh^2(i\Lambda_k)\right) - A_k\cdot A_k^\dagger\log\left(1+g\frac{\lambda_{1_k}\lambda_{2_k}}{\Lambda_k^2}\sinh^2(i\Lambda_k)\right)\right], \tag{4.27}$$

$$K^\beta = -\sum_k\left[B_k^\dagger\cdot B_k \log\left(g\frac{\lambda_{1_k}\lambda_{2_k}}{\Lambda_k^2}\sinh^2(i\Lambda_k)\right) - B_k\cdot B_k^\dagger\log\left(1+g\frac{\lambda_{1_k}\lambda_{2_k}}{\Lambda_k^2}\sinh^2(i\Lambda_k)\right)\right], \tag{4.28}$$

sendo

$$g = \langle\!\langle 0|\, \tilde{A}_k\cdot\tilde{A}_k^\dagger\, |0\rangle\!\rangle = \langle\!\langle 0|\, \tilde{B}_k\cdot\tilde{B}_k^\dagger\, |0\rangle\!\rangle = Tr\,\delta^{ij}.$$

A escolha desta forma para o operador entropia é baseada no fato de conseguirmos reproduzir o operador entropia apresentado por [35], quando $\theta_{2_k} = \theta_{3_\kappa} = 0$ (ou

$\gamma_{1_k} = \gamma_{3_\kappa} = 0$) e se, ao invés de tomarmos o produto escalar entre os operadores, considerarmos a multiplicação comum entre eles, ou seja, tomarmos $g = 1$.

O operador K^α pode ser reescrito como segue

$$\begin{aligned} K^\alpha &= -\sum_k \left\{ A_k^\dagger \cdot A_k \log \left(\left[\frac{g \frac{\lambda_{1_k}\lambda_{2_k}}{\Lambda_k^2} \sinh^2(i\Lambda_k)}{1 + g \frac{\lambda_{1_k}\lambda_{2_k}}{\Lambda_k^2} \sinh^2(i\Lambda_k)} \right] \right) + \right. \\ &\quad \left. - g \log \left[1 + g \frac{\lambda_{1_k}\lambda_{2_k}}{\Lambda_k^2} \sinh^2(i\Lambda_k) \right] \right\}, \end{aligned}$$

e o mesmo para K^β pela troca de A por B. Esta forma é util uma vez que ela mostra que o cálculo do valor esperado do operador entropia se reduz ao cálculo do valor esperado dos operadores número definido por

$$N_k^\alpha = A_k^\dagger \cdot A_k,$$

e

$$N_k^\beta = B_k^\dagger \cdot B_k.$$

A estratégia que usamos para calcular tal valor esperado é transformar, usando a inversa da transformação de Bogoliubov térmica, os operadores que compõem N_k^α e N_k^β em operadores dependentes da temperatura $N_k^\alpha(\theta)$ e $N_k^\beta(\theta)$ na formulação não unitária e $N_k^\alpha(\gamma)$ e $N_k^\beta(\gamma)$ na formulação unitária. Usando esta estratégia, o resultado do valor esperado de N_k^α, por exemplo, calculado no vácuo térmico, é

$$\langle 0(\beta)| N_k^\alpha |0(\beta)\rangle = g \left[\frac{\lambda_{1_k}\lambda_{2_k}}{\Lambda_k^2} \sinh^2(i\Lambda_k) \right].$$

O mesmo resultado pode ser obtido para o valor esperado de N_k^β, calculado no vácuo térmico (lembrando sempre que os coeficientes λ são funções de θ na formulação não unitária e de γ na formulação unitária). Desta forma o cálculo o valor esperado do operador K no vácuo térmico do sistema, multiplicado pela constante de Boltzmann, nos fornece o que chamamos de entropia para a corda bosônica fechada, e que é dada por

$$\begin{aligned} S &= k_B \langle 0(\beta)| K |0(\beta)\rangle \\ &= 2k_B \sum_k \left[(g + n_k) \log(1 + n_k) - n_k \log(n_k) \right], \end{aligned} \tag{4.29}$$

sendo o fator dois oriundo da contribuição idêntica, para a entropia, dos setores à direita e à esquerda da corda e n_k dado por

$$n_k = \langle 0(\beta)| N_k^\alpha |0(\beta)\rangle = \langle 0(\beta)| N_k^\beta |0(\beta)\rangle = g \left[\frac{\lambda_{1_k}\lambda_{2_k}}{\Lambda_k^2} \sinh^2(i\Lambda_k) \right]. \tag{4.30}$$

Explicitamente em termos dos ângulos de mistura temos

$$n_k(\theta) = g\left(\frac{\theta_{1_k}^2 - \theta_{2_k}^2}{\theta_{1_k}^2 - \theta_{2_k}^2 + \theta_{3_k}^2}\right)\operatorname{senh}\left(\sqrt{-\theta_{1_k}^2 + \theta_{2_k}^2 - \theta_{3_k}^2}\right), \tag{4.31}$$

para a formulação não unitária. Fazendo $g = 1$, $\theta_{2_k} = \theta_{3_k} = 0$, chega-se a

$$n_k(\theta) = \operatorname{senh}^2(\theta_{1_k}). \tag{4.32}$$

Para a formulação unitária,

$$n_k(\gamma) = g\left(\frac{\gamma_{1_k}^2 + \gamma_{2_k}^2}{\gamma_{1_k}^2 + \gamma_{2_k}^2 - \gamma_{3_k}^2}\right)\operatorname{senh}\left(\sqrt{-\gamma_{1_k}^2 - \gamma_{2_k}^2 + \gamma_{2_k}^2}\right), \tag{4.33}$$

e fazendo $g = 1$, e $\gamma_{1_k} = \gamma_{3_k} = 0$,

$$n_k(\gamma) = \operatorname{senh}(\gamma_{2_k}). \tag{4.34}$$

Substituindo tanto (4.32) quanto (4.34) na expressão (4.29) chega-se à expressão original de Takahashi e Umezawa [57].

Note que construímos o operador entropia tomando a soma dos operadores para os setores direito e esquerdo, o que nos gera uma soma de entropias destes dois setores, significando que os tratamos como dois sub-sistemas do sistema total (corda bosônica fechada) e impomos a extensividade da grandeza. Uma outra observação importante é que a entropia encontrada vai a zero quando consideramos o sistema em equilíbrio, ou seja, quando tomamos a expressão usual para n_k [58, 66]

$$n_k = \frac{e^{-(k_BT)^{-1}\omega_k}}{1 - e^{-(k_BT)^{-1}\omega_k}}, \tag{4.35}$$

e fazemos o limite de $T \to 0$. Garantindo portanto a terceira lei da termodinâmica [66].

4.2 D_p-brana Térmica

Uma vez costruido e apresentado o cenário de cordas térmicas, partimos agora para a construção do estado de contorno à temperaura finita. Este será interpretado como sendo uma D_p-brana Térmica, em analogia com a interpretação dada para os estados de contorno, obtidos no capítulo anterior, à temperatura zero.

Como vimos, os estados de contorno que interpretamos como D_p-branas, no calibre do cone de luz, são obtidos impondo sobre a solução da corda aberta, na posição $\sigma = 0$, as condições de Neumann ao longo das direções $a = 1, ...p$ e Dirichlet ao longo das direções $i = p+1, ...26$. Vimos também que através de uma transformação conforme, é possível passar do setor de corda aberta para o setor de corda fechada.

Sendo assim, o estado de D_p-brana fica definido pelas seguintes relações no espaço de Hilbert da corda fechada

$$\begin{aligned}\left(A_n^a + B_n^{a\dagger}\right)|B_X\rangle &= \left(A_n^{a\dagger} + B_n^a\right)|B_X\rangle = 0,\\ \left(A_n^a - B_n^{a\dagger}\right)|B_X\rangle &= \left(A_n^{a\dagger} - B_n^i\right)|B_X\rangle = 0,\end{aligned}$$

para $n > 0$, e

$$\widehat{p}^a\,|B_X\rangle = \left(\widehat{q}^i - y^i\right)|B_X\rangle = 0,$$

sendo $\widehat{p}^\mu$ e $\widehat{q}^\mu$ os operadores de momento e posição do centro de massa da corda e $\{y^i\}$ as coordenadas da D_p-brana no espaço perpendicular a mesma. Vimos ainda que o estado que satisfaz as condições acima, é dado por

$$|B_X\rangle = N_p\delta^{(d_\perp)}\left(\widehat{q} - y\right)\exp\left[-\sum_{n=1}^{\infty} A_n^\dagger \cdot S \cdot B_n^\dagger\right]|0\rangle.$$

O espaço de Fock da corda bosônica deve agora ser duplicado e uma vez duplicado, operadores e estados são levados a temperatura finita via uma transformação de Bogoliubov Térmica. Este procedimento já foi realizado na seção anterior para os operadores do tipo oscilador e para o vácuo do sistema, levando em operadores e vácuo dependentes do parâmetro da transformação. O que difere para o caso agora em questão é o fato de o estado que desejamos transformar não ser mais um estado de vácuo e sim um estado contruído a partir deste. O procedimento que será usado aqui, é o de aplicar a transformação de Bogoliubov diretamente sobre o estado de contorno $|B_X\rangle$. Ou seja, o estado de contorno dependente da temperatura será obtido como segue:

$$|B_X(\beta)\rangle = e^{-iG}\,|B_X\rangle\rangle\,.$$

Sendo $|B_X\rangle\rangle = |B_X\rangle\,\widetilde{|B_X\rangle}$. Escrevendo $|B_X\rangle\rangle$ em termos da atuação dos operadores com til e sem til sobre o vácuo dobrado do sistema temos

$$\begin{aligned}|B_X(\beta)\rangle &= e^{-iG}\left\{N_p^2\delta^{(d_\perp)}\left(\widehat{q} - y\right)\delta^{(d_\perp)}\left(\widehat{\widetilde{q}} - \widetilde{y}\right)\times\right.\\ &\quad\left.\times\exp\left[-\sum_{n=1}^{\infty} A_n^\dagger \cdot S \cdot B_n^\dagger\right]\exp\left[-\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{A}_n^\dagger \cdot S \cdot \widetilde{B}_n^\dagger\right]\right\}|0\rangle\rangle\\ &= N_p^2\delta^{(d_\perp)}\left(\widehat{q} - y\right)\delta^{(d_\perp)}\left(\widehat{\widetilde{q}} - \widetilde{y}\right)\left\{e^{-iG}\exp\left[-\sum_{n=1}^{\infty} A_n^\dagger \cdot S \cdot B_n^\dagger\right]e^{iG}\right\}\times\\ &\quad\times\left\{e^{-iG}\exp\left[-\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{A}_n^\dagger \cdot S \cdot \widetilde{B}_n^\dagger\right]e^{iG}\right\}e^{-iG}\,|0\rangle\rangle\,,\end{aligned}$$

e portanto o estado de contorno dependente da temperatura é dado por

$$|B_X(\beta)\rangle = N_p^2\delta^{(d_\perp)}\left(\widehat{q} - y\right)\delta^{(d_\perp)}\left(\widehat{\widetilde{q}} - \widetilde{y}\right)\times$$

$$\times \exp\left[-\sum_{n=1}^{\infty} A_n^{\dagger}(\beta)\cdot S\cdot B_n^{\dagger}(\beta)\right]\exp\left[-\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{A}_n^{\dagger}(\beta)\cdot S\cdot \widetilde{B}_n^{\dagger}(\beta)\right]|0(\beta)\rangle.$$

Este estado satisfaz agora as seguintes condições

$$\begin{aligned}
\left[A_n^a(\beta)+B_n^{a\dagger}(\beta)\right]|B_X(\beta)\rangle &= \left[A_n^{a\dagger}(\beta)+B_n^a(\beta)\right]|B_X(\beta)\rangle=0,\\
\left[A_n^a(\beta)-B_n^{a\dagger}(\beta)\right]|B_X(\beta)\rangle &= \left[A_n^{a\dagger}(\beta)-B_n^i(\beta)\right]|B_X(\beta)\rangle=0,
\end{aligned}$$

que são as condições que definem o que chamamos de estado de D_p-brana térmica, ou simplesmente, brana térmica. Passemos agora estudo da brana térmica, na presença de um campo abeliano externo.

4.3 D_p-brana Térmica na Presença de um Campo Externo

No capítulo anterior, apresentamos os estados de contorno associados a branas na presença de um campo externo. Consideramos uma D-brana rígida localizada ao longo de X^a direções do espaço em $\{X^i = y^i\}$ sendo $a = 1, 2, ...p$ e $i = p+1, ...24$. Vimos que as condições de contorno que são usadas para definir a brana na presença de um campo externo é dada, no canal da corda fechada, por

$$\begin{aligned}
\left(\partial_\tau X_a + F_{ba}\partial_\sigma X^b\right)\big|_{\tau=0} &= 0, && (4.36)\\
X^i(\tau,\sigma) - y^i\big|_{\tau=0} &= 0. && (4.37)
\end{aligned}$$

Quantizando o sistema e introduzindo condições de contorno idênticas para o sistema til, podemos obter as condições de contorno dependentes da temperatura. Isso é feito através de uma transformação de Bogoliubov nos operadores associados as coordenadas da corda fechada, como segue

$$X^\mu(\beta) = e^{-iG}X^\mu e^{iG}. \tag{4.38}$$

Substituindo a expressão para $X^\mu(\beta)$ em termos dos operadores A e B, obtemos os vínculos que definem a brana térmica no espaço de Fock do sistema transformado. São estes

$$\begin{aligned}
\left[(\mathbb{I}+\mathbb{F})_b^a A_n^b(\beta) + (\mathbb{I}-\mathbb{F})_b^a B_n^{b\dagger}(\beta)\right]|B_X(\beta)\rangle &= 0,\\
\left[(\mathbb{I}+\mathbb{F})_b^a A_n^{b\dagger}(\beta) + (\mathbb{I}-\mathbb{F})_b^a B_n^{b}(\beta)\right]|B_X(\beta)\rangle &= 0,\\
\left[A_n^i(\beta) - B_n^{i\dagger}(\beta)\right]|B_X(\beta)\rangle &= 0,\\
\left[A_n^{i\dagger}(\beta) - B_n^{i}(\beta)\right]|B_X(\beta)\rangle &= 0,
\end{aligned} \tag{4.39}$$

para todo $n > 0$ e

$$\hat{p}^a \left|B_X(\beta)\right\rangle = \left[\hat{q}^i - y^i\right] \left|B_X(\beta)\right\rangle = 0. \tag{4.40}$$

Consideramos, ao escrever as expressões acima, que os campos A^a independem da temperatura.

Uma solução geral para as equações operatoriais que definem a brana térmica é dada por

$$\begin{aligned} \left|B_X(\beta)\right\rangle &= N_p^2(F)\,\delta^{(d_\perp)}(\hat{q}-y)\,\delta^{(d_\perp)}\left(\tilde{\hat{q}}-\tilde{y}\right) \times \exp\left[-\sum_{n=1}^{\infty} A_n^\dagger(\beta)\cdot M\cdot B_n^\dagger(\beta)\right] \\ &\times \exp\left[-\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n^\dagger(\beta)\cdot M\cdot \tilde{B}_n^\dagger(\beta)\right] \left|0(\beta)\right\rangle, \end{aligned} \tag{4.41}$$

sendo

$$M^{\mu\nu} = \left[\left(\frac{\mathbb{I}-\hat{\mathbb{F}}}{\mathbb{I}+\hat{\mathbb{F}}}\right)^{ab}; -\delta^{ij}\right], \tag{4.42}$$

e a constante de normalização dada por

$$N_p(F) = \sqrt{-\det(\delta + 2\pi\alpha' F)}. \tag{4.43}$$

Consideramos esta constante independente da temperatura, uma vez que esta dependência viria através do campo $F_{\mu\nu}$ que, por hipótese, não depende da temperatura.

4.3.1 Entropia para a D_p-brana na Presença de um Campo Externo

A D-brana térmica dada na expressão (4.41), representa uma superposição de estados coerentes no espaço de Fock da corda térmica. Portanto, calcular a entropia da D-brana é equivalente a calcular o valor esperado do operador entropia (4.26) no estado (4.41). Uma maneira de executar este cálculo, é expressar todos os operadores e estados em termos de seus correspondentes à temperatura finita. Sendo assim, precisamos da inversa da matriz de transformação de Bogoliubov. Como vimos no capítulo dois, esta é dada por

$$\mathcal{B}_k^{-1} = \cosh(i\Lambda_k)\,\mathbb{I} - \frac{\sinh(i\Lambda_k)}{(i\Lambda_k)} \begin{pmatrix} i\lambda_{3_k} & i\lambda_{1_k} \\ i\lambda_{2_k} & -i\lambda_{3_k} \end{pmatrix}. \tag{4.44}$$

Fazendo uso desta matriz inversa, obtemos para a formulação unitária,

$$\begin{aligned} A_k^\mu &= \left[\cosh(i\Lambda_k) - \frac{\sinh(i\Lambda_k)}{\Lambda_k}\lambda_{3k}\right] A_k^\mu(\beta) - \frac{\sinh(i\Lambda_k)}{\Lambda_k}\lambda_{1k}\tilde{A}_k^{\mu\dagger}(\beta), \\ A_k^{\mu\dagger} &= \left[\cosh(i\Lambda_k) - \frac{\sinh(i\Lambda_k)}{\Lambda_k}\lambda_{3k}\right] A_k^{\mu\dagger}(\beta) - \frac{\sinh(i\Lambda_k)}{\Lambda_k}\lambda_{2k}\tilde{A}_k^{\mu}(\beta), \end{aligned} \tag{4.45}$$

e então podemos escrever o operador entropia para o setor à direita em termos dos operadores térmicos e o mesmo para o setor à esquerda. Esta entropia tem a forma

$$\begin{aligned} \langle B_X(\beta)| K^\alpha |B_X(\beta)\rangle &= \langle B_X(\beta)| K^\beta |B_X(\beta)\rangle = -\sum_k \left\{ [1+2n_k]\mathcal{A}_k \log\left(\frac{n_k}{1+n_k}\right) \right. \\ &\left. + n_k \log(n_k) - (g+n_k)\log(1+n_k) \right\} \end{aligned} \tag{4.46}$$

sendo n_k dado por

$$n_k = g\frac{\lambda_{1k}\lambda_{2k}}{\Lambda_k}\sinh^2(i\Lambda_k), \tag{4.47}$$

e $\mathcal{A}_k$ simbolizando o valor esperado, no estado de brana térmica, da contribuição em todas a 24 direções do operador $N_k^i(\theta)$. Ou seja,

$$\mathcal{A}_k = \langle B_X(\beta)| \sum_{i=1}^{24} N_k^i(\beta) |B_X(\beta)\rangle. \tag{4.48}$$

Para calcular ação do operador número térmico, expandimos as exponenciais do estado coerente. Uma vez que todos os operadores e estados são dependentes da temperatura, omitiremos esta dependência. A expanção das exponenciais dos operadores não-til, por exemplo, dá a seguinte forma para $\mathcal{A}_k$:

$$\mathcal{A}_k = B^2\tilde{B}^2\langle 0| e^{\tilde{S}^\dagger} e^{\tilde{S}} \prod_{n=1}^{\infty}\prod_{\mu}\prod_{\nu}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-)^l}{l!}\left(A_n^\mu M_{\mu\nu}B_n^\nu\right)^l \tag{4.49}$$

$$\times |N_m^\alpha| \prod_{k}^{\infty}\prod_{\rho}\prod_{\sigma}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-)^s}{s!}\left(A_k^{\rho\dagger}M_{\rho\sigma}B_k^{\sigma\dagger}\right)^s |0\rangle, \tag{4.50}$$

sendo $\tilde{S}$ e $\tilde{S}^\dagger$ o argumento operatorial da parte til térmica, $B = N_p(F)\,\delta^{(d_\perp)}(\hat{q}-y)$ e $\widetilde{B} = N_p(F)\,\delta^{(d_\perp)}\left(\widetilde{\hat{q}}-\widetilde{y}\right)$. O resultado do cálculo deste valor esperado é

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_k &= B^2\tilde{B}^2 \sum_{t_1^{1,1},\ldots,t_n^{24,24}} \sum_{s_1^{1,1}\ldots s_n^{24,24}} \sum_\rho\sum_\sigma (M_{24,24})^{2t_1^{24,24}} \cdots \\ &\times (M_{1,1})^{2t_n^{1,1}} (M_{24,24})^{2s_1^{24,24}} \cdots (M_{1,1})^{2s_n^{1,1}} s_m^{\rho,\sigma}. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Aqui, $s_i^{\rho,\sigma} = 0,1,\ldots\infty$, $i = 1,2,\ldots,$, $n \to \infty$, e $\rho,\sigma = 1,2,\ldots,24$. Note que esta expressão é não normalizada e carrega toda a contribuição dos campos $F_{\mu\nu}$ para a entropia.

Analisando a expressão para a entropia dada em (4.46), temos que a dependência para com a temperatura está contida nos n_k, dados pela expressão (4.47).

Os modos à esquerda dão uma contribuição idêntica a obtida aqui para os modos à direita e portanto a entropia do sistema total é dada por é dada por

$$S = 2k_B \times \langle B_X(\beta)| K^\alpha |B_X(\beta)\rangle.$$

Note ainda que a expressão para a entropia da brana na presença do campo externo, podemos identificar que, os termos que não dependem de $F_{\mu\nu}$ dão exatamente a entropia da corda bosônica fechada, como visto na expressão (4.29).

Capítulo 5

Conclusões

Neste trabalho apresentamos uma construção geral para a Dinâmica de Campos Térmicos para sistema bosônicos. Esta construção é baseada na introdução de geradores que satisfazem a álgebra $su(1,1)$, seguindo a abordagem proposta em [57, 58]. Vimos que duas formulações são possíveis. Uma delas, já conhecida, a que preserva a regras de conjugação til mas é dada por uma transformação não unitária. A outra, permite a utilização de uma transformação unitária, mas as regras de conjugação til, ingrediente básico da Dinâmica de Campos Térmicos não são satisfeitas. Este fato nos leva a vácuos térmicos que não são invariantes pela conjugação til definida à temperatura zero, o que gera uma ambiguidade na escolha do vácuo transformado. Esta ambiguidade pode, no entanto, ser resolvida seguindo a idéia de Elmfors e Umezawa em [60], onde sugerem que as regras de conjugação til devem ser redefinidas no espaço transformado. Para isso é necessário a introdução de uma forma explícita, em termos dos operadores de criação e aniquilação, para os operadores modulares de Tomita-Takesaki [59]. Desta forma o cálculo da relação de comutação entre estes operadores e o gerador geral da transformação de Bogoliubov unitária, nos fornecerá as novas regras de conjugação til a serem utilizadas no sistema transformado. Este estudo entretanto, tem por objeto de análise a construção em termos de álgebra c^* da Dinâmica de Campos Térmicos [59, 36] e é deixado aqui como projeto a ser executado.

Apresentamos também neste trabalho, uma expressão geral para o operador entropia. Este operador fornece a estrutura usual para a entropia de sistemas bosônicos, e reduz-se à originalmente proposta em [35], através de uma escolha adequada de parâmetros.

Estabelecida a formulação geral de Campos Térmicos, ela foi aplicada para obtenção de estados e operadores térmicos para a corda bosônica fechada, bem como estados de contornos dependentes da temperatura. Estes últimos foram associados à D-brana térmica, e à D-brana térmica na presença de um campo abeliano constante.

Utilizando o operador entropia em sua formulação geral, foi obtida a entropia da corda bosônica fechada. A expressão para esta grandeza mostrou-se bem comportada, nos limites de temperatura indo a zero e infinito. Isso nos leva a crer que, para a corda bosônica fechada o formalismo aqui estudado pode ser utilizado aparentemente sem restrições.

Calculamos também a entropia da $D-$brana na presença do campo externo abeliano constante. A expressão obtida claramente trás a contribuição devido as corda bosônica fechada. No entanto, o termo dependente do campo externo apresenta um estrutura de difícil análise, sendo obviamente divergente e impedindo um estudo efetivo da dependência desta grandeza para com a temperatura.

Uma outra questão, ainda não citada no texto, surge quando usamos o operador geral de entropia definido em (2.94), para levar o vácuo dobrado da temperatura zero à temperatura finita, como apresentado por Takahashi e Umezawa. De fato, podemos ter, usando o operador geral de entropia, o seguinte estado

$$|0(\beta)\rangle' = e^{\alpha K}\left|\widehat{I}\right\rangle,$$

sendo

$$\left|\widehat{I}\right\rangle = e^{\sum\limits_k A_k^\dagger \widetilde{A}_k^\dagger} |0\rangle\rangle,$$

e α, como definido em (2.62), dado por

$$\alpha \equiv \alpha_k = \frac{\ln(-v_k/u_k)}{\ln(v_k w_k/u_k x_k)}.$$

A expressão explícita para o vácuo térmico $|0(\beta)\rangle'$ é

$$|0(\theta)\rangle' = \prod_k \left(\frac{1}{u_k v_k}\right)^\alpha e^{-\left(\frac{v_k}{u_k}\right) A_k^\dagger \widetilde{A}_k^\dagger} |0\rangle\rangle,$$

ou ainda, usando que

$$\frac{1}{u_k v_k} = 1 - f_k,$$

onde f_k foi definido em (2.62), temos

$$|0(\theta)\rangle' = \prod_k (1 - f_k)^\alpha e^{f^\alpha A_k^\dagger \widetilde{A}_k^\dagger} |0\rangle\rangle.$$

Note que $|0(\theta)\rangle'$ só será igual ao vácuo que apresentamos em (2.84) e o qual foi usado para o desenvolvimento deste trabalho, se

$$\left(\frac{1}{u_k v_k}\right)^\alpha \leftrightarrow \frac{1}{u_k}.$$

Infelizmente até o confecção desta não foi possível mostrar tal identificação. Na realidade acreditamos que a igualdade acima seja falsa. Temos portanto dois estados de vácuo que podem ser construídos. Diferente do problema apresentado sobre a invariância do vácuo por conjugação til para a transformação unitária, uma construção de vácuo térmico em termos do operador geral de entropia pode ser feita tanto para o caso unitário quanto o não unitário e em ambos os casos teremos vácuos diferentes daqueles obtidos diretamente pela atuação do gerador geral de transformação. Mais ainda, tanto o vácuo obtido diretamente pela atuação do gerador, quanto o obtido através do uso do operador entropia, reduzem-se a mesma expressão para o vácuo térmico quando escolhemos adequadamente os parâmetros. A saber a expressão para o vácuo térmico considerando somente um gerador como feito originalmente por Takahashi e Umezawa é

$$|0(\beta)\rangle = \frac{1}{\cosh(\theta_k)} e^{\tanh(\theta_k) A_k^\dagger \tilde{A}_k^\dagger} |0\rangle\rangle .$$

O fato de termos usado, ao longo do trabalho, o vácuo obtido diretamente pela atuação do gerador geral de transformação tem natureza puramente temporal, no sentido de termos obtido o vácuo térmico, usando o operador geral de entropia, somente quando este trabalho estava sendo escrito. Não tinhamos conhecimento deste resultado quando as contas referentes a esta tese foram executadas. Este é um problema que ainda caresce de resposta e que é deixado para estudo futuro.

Além das perspectivas de pesquisa acima mencionadas, temos, como continuação natural deste projeto, o estudo das D-branas à temperatura finita dentro de um processo de quantização covariante utilizando a Dinâmica de Campos Térmicos. Na realidade esta continuação já foi iniciada em [48]. Visamos em seguida estudar os efeitos da compactificação de dimensões para o sistema à temperatura finita, bem como mergulhá-lo em espaços-tempo curvos. Construir D-branas fermiônicas térmicas é um passo paralelo aos acima mencionados neste parágrafo e tem por objetivo analisar os efeitos da temperatura sobre D-branas supersimétricas.

Referências

[1] G. Veneziano, Nuovo Cim. 57 A**9**(1968)190

[2] J. H. Schwarz e N. Seiberg, "*String Theory, Supersymmetry, Unification, and All That*", hep-th/9803179

[3] A. Sen, Nucl. Phys. B**440**(1995)421

[4] A. Strominger e C. Vafa, Phys. Lett. B**379**(1996)99

[5] L. Susskind, hep-th/9309145

[6] G. Horowitz e J. Polchinski, Phys. Rev. D**55**(1997)6189

[7] T. Banks, W. Fischler, I. Klebanov e L. Susskind, Phys. Rev. Lett. 80(1998)226, JHEP 9801(1998)008

[8] S. Chaudhuri e D. Minic, Phys. Lett. B**433**(1998)301

[9] I. Klebanov e L. Susskind, Phys. Lett. B**416**(1998)62

[10] E. Halyo, hep-th/9709225

[11] S. Das, S. Mathur, S. Kalyana Rama e P. Ramadevi, Nucl. Phys. B**527**(1998)187

[12] G. Horowitz e E. Martinec, Phys. Rev. D**57**(1998)4935

[13] M. Li, JHEP 9801(1998)009; M. Li e E. Martinec, hep-th/9801070

[14] T. Banks, W. Fischler e I. Klebanov, Phys. Lett. B**423**(1998)54

[15] H. Liu e A. Tseytlin, JHEP 9801(1998)010

[16] D. Minic, hep-th/9712202

[17] A. Strominger, Phys. Rev. Lett.**71**(1993)3397

[18] I. V. Volovich, hep-th/9608137

[19] J. Maldacena e A. Strominger, JHEP 9807(1998)013

[20] E. Alvarez, Phys. Rev. **D31**(1985)418.

[21] A. K. Chaudhuri, hep-th/9706104

[22] M. V. Mozo, Phys. Lett. B**388**(1996)494

[23] J. L. F. Barbon e M. V. Mozo, Nucl. Phys. B**497**(1997)236

[24] S. A. Abel, J. L. F. Barbon, I. I. Kogan, E. Rabinovici, JHEP 9904(1999)015

[25] J. L. F. Barbon, E. Rabinovici, JHEP 0106(2001)029

[26] E. Kiritsis, JHEP 9910(1999)010

[27] E. Kiritsis e W. Taylor, hep-th/9906048

[28] G. Dvali, I. I. Kogan e M. Shifman, Phys. Rev. D**62**(2000)106001

[29] S. Abel, K. Freese e I. I. Kogan, JHEP 0101(2001)039

[30] I. I. Kogan, A. Kovner e M. Schvellinger, hep-th/0103235

[31] A. Bytsenko, S. Odintsov e L. Granada, Mod. Phys. Lett. A**11**(1996)2525

[32] J. Ambjorn, Yu. Makeenko, G. W. Semenoff e R. Szabo, Phys. Rev. D**60**(1999)106009

[33] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, M. Rangamani, E. Witten, hep-th/0009140

[34] H. Q. Plácido, "*O Operador Espalhamento para Férmions num Campo Externo em Thermofield Dynamics*", Tese de Doutorado, Instituto de Física Teórica - UNESP, IFT-T.009/02, 2002.

[35] Y. Takahashi e H. Umezawa, Collective Phenom. 2(1975)55

[36] I. Ojima, Ann. Phys. 137 (1981)1

[37] G. G, Emch, "*Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory*",John Wiley e Sons, Inc, New York,1972)

[38] L. Leplae, F. Mancini e H. Umezawa, Phys. Rev. B2 (1970)3594

[39] Y. Leblanc, Phys. Rev. D**38**(1988)3087

[40] Y. Leblanc, Phys. Rev. D**36**(1987)1780; Phys. Rev. D**37**(1988)1547; Phys. Rev. D**39**(1989)1139; Phys. Rev. D**39** (1989)3731

[41] Y. Leblanc, M. Knecht e J. C. Wallet, Phys. Lett. B**237** (1990)357

[42] H. Fujisaki e K. Nakagawa, Prog. Theor. Phys. **82**(1989)236; Prog. Theor. Phys. **82**(1989)1017; Prog. Theor. Phys. **83**(1990)18; Europhys. Lett. **20**(1992)677; Europhys. Lett. **28**(1994)471

[43] H. Fujisaki, Il Nuovo Cimento, **108**A(1995)1079

[44] H. Fujisaki e K. Nakagawa, Europhys. Lett. **35** (1996)493

[45] E. Celeghini, M. Rasetti e G. Vitiello, Annals Phys. **215**(1992)156.

[46] G. Vitiello, Int. J. Mod. Phys. B**9**(1995)973

[47] I. V. Vancea, Phys. Lett. B**487**(2000)175

[48] M. C. B. Abdalla, A. L. Gadelha e I. V. Vancea, Phys. Lett. A**273**(2000)235

[49] M. C. B. Abdalla, A. L. Gadelha e I. V. Vancea, Phys. Rev. D**64**(2001)086005

[50] M. C. B. Abdalla, E. Graça e I. V. Vancea, Phys. Lett. B**53**(2002)114.

[51] M. C. B. Abdalla, A. L. Gadelha e I. V. Vancea, Phys. Rev. D**66**(2002)065005.

[52] P. Di Vecchia e A. Liccardo, *D-Branes in String Theory*, hep-th/9912161, hep-th/9912275

[53] P. Di Vecchia, M. Frau, A. Lerda e A. Liccardo, Nucl. Phys. B**565**(2000)397

[54] I. V. Vancea, "*Introductory Lectures on D-Branas*", Notas do curso dado Escola Jorge André Swieca de Partículas e Campos, Campos do Jordão, Brasil, 2002, hep-th/0109029

[55] W. P. de Souza, hep-th/0208134.

[56] T. Matsubara, Prog. Theor. Phys. **14**(1955)351.

[57] H. Umezawa, *Advanced Field Theory: Micro, Macro and Thermal Field* (American Institute of Physics, 1993)

[58] H. Chu e H. Umezawa, Int. J. Mod. Phys. A**9**(1994)2363.

[59] N. P. Landsman e Ch. C. Van Weert, Phys. Rep. 145(1987)141

[60] P. Elmfors e H. Umezawa, Physica A **202**(1994)577.

[61] M. B. Green, J. H. Shwarz e E. Witten, *Superstring Theory* (Cambridge University Press 1987).

[62] C. V. Johnson, "D-brane primer," hep-th/0007170.

[63] C. Núñez, Escuela Latinoamericana de Cuerdas - ICTP LASS 2000, http://ft.ifisicacu.unam.mx/˜cuerdas/program.html.

[64] S. Chaturvedi, V. Srinivasan e G. S. Agarwal, J. Phys. A**32**(1999)1909.

[65] K. Wódkiewicz e J. H. Eberly, J. Opt. Soc. Am. B**3** (1985)485.

[66] K. Huang, *Statistical Mechanics* (John Wiley & Sons, 1987).

[67] C. W. Bernard, Phys. Rev. D **9**(1974)3312.