



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORADO

IFT - T.003/21

Descrição de Heisenberg da Eletrodinâmica Quântica
Generalizada

David Montenegro Coelho

Orientador

Bruto Max Pimentel Escobar

Outubro de 2021

C672d Coelho, David Montenegro.
Descrição de Heisenberg da eletrodinâmica quântica generalizada /
David Montenegro Coelho. – São Paulo, 2021
137 f.

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de
Física Teórica (IFT), São Paulo
Orientador: Bruto Max Pimentel Escobar

1. Teoria quântica de campos. 2. Correções radiativas. 3. Heisenberg,
princípios da incerteza de. I. Título

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca
do Instituto de Física Teórica (IFT), São Paulo. Dados fornecidos pelo
autor(a).

Agradecimentos

Esta tese só foi possível graças a contribuição direta e indireta de várias pessoas.

- Agradeço primeiramente ao prof. Bruto Pimentel que com sua enorme paciência me ajudou a trilhar os caminhos da pesquisa em Teoria Quântica de Campos. Sem os seus conselhos e suas orientações nada nesta tese seria possível. Espero continuar trabalhando em mais projetos na descrição de Heisenberg.
- Agradeço a equipe da secretaria. Entre eles, a Meire Cristina, Luzinete Martins e Rafael Sorrentino pelas conversas, histórias, risadas e o apoio nas atividades de cada ano do instituto.
- Durante a minha jornada no IFT, agradeço ao Silas Poloni pelas dicas de Magic e conversas. Também agradeço a Natáli, Luiz, e tantos outros que ajudaram.
- Agradeço aos meus amigos Jean, Cajuru, Silvânia, Rachel, Fernanda, Daisa pela amizade na vida e ajudar a suportar esse momento difícil da tese.
- Agradeço a Capes pelo apoio financeiro.

Resumo

Apresentamos nesta tese uma atualização dos problemas das divergências ultravioletas e infravermelhas das correções radiativas da eletrodinâmica quântica. Com esse propósito, introduzimos uma adaptação geométrica no propagador covariante do fóton para tornar finitas as flutuações quânticas de um loop. Utiliza-se, desta forma, a introdução de um termo com derivada de alta ordem na Lagrangiana do modelo de Maxwell-Lorentz para a obtenção desse propagador. Nesse contexto, a eletrodinâmica quântica generalizada amplia o espaço de interações dos férmions e fótons com a inclusão de um novo parâmetro físico m_P , responsável por aumentar a escala de energia natural no espaço dos momentos para $m^2 \leq p^2 \leq m_P^2$. Motivado por propriedades de estabilidade e unitariedade, a eletrodinâmica quântica generalizada fornece uma extensão natural e auto consistente da eletrodinâmica quântica. Conforme apontado pelo Teorema de Haag, a descrição da interação manifesta problemas para os fundamentos da teoria quântica de campos mesmo que suas previsões teóricas estejam de acordo com os experimentos. Com o propósito de manter uma definição correta dos objetos quânticos, lidamos com um modelo perturbativo quântico seguindo a descrição de Heisenberg. As principais consequências dessa estratégia construtiva é o estabelecimento de uma representação válida em todo o espaço de Hilbert para os estados limites assintóticos de entrada e saída e, também, a transformação unitária entre a representação de operadores livres e interagentes no espaço de Fock. Em seguida, calculamos explicitamente todas as correções radiativas a um loop em $(3 + 1)$ dimensões. Além disso, comentamos seus resultados principais como o momento magnético anômalo e o valor limite inferior ao parâmetro de Podolsky. Posteriormente, obtemos as correções radiativas em $(2 + 1)$ dimensões. Provamos que a teoria não apresenta efeito de momento magnético anômalo e sofre da singularidade na camada de massa. Finalmente, calculamos as correções radiativas para a eletrodinâmica quântica em $(2 + 1)$ dimensões.

Palavras Chave: Teoria Quântica de Campos - Descrição de Heisenberg - Correções Radiativas - Teorias de ordem superior

Áreas do conhecimento: Teoria Quântica de Campos

Abstract

In this thesis we present an update on the problems of ultraviolet and infrared divergences of quantum electrodynamics the radiative corrections. For this purpose, we introduce a geometric adaptation to the covariant propagator of the photon to become the quantum fluctuations of a loop finite. In this way, the introduction of high-order derivative term in the Maxwell-Lorentz Lagrangian model is used to obtain this propagator. In this context, generalized quantum electrodynamics expands the fermions and photons space of interactions by including a new physical parameter m_P , responsible for increasing the natural energy scale in momentum space $m^2 \leq p^2 \leq m_P^2$. Motivated by stability and unitarity properties, generalized quantum electrodynamics provides a natural and self-consistent extension of quantum electrodynamics . As pointed out by Haag's theorem, the interaction picture poses problems for the quantum field theory foundations even if this theoretical predictions are in agreement with the experiments. To maintain a correct definition of quantum objects, we follow the Heisenberg picture as a quantum perturbative model . In this constructive strategy, the main consequences are the ingoing and outgoing asymptotic limit states valid in all Hilbert space. In addition, the unitary transformation between the representation of free and interacting operators in Fock space. We therefore explicitly compute all radiative corrections to one-loop in $(3 + 1)$ dimensions. Furthermore, we comment the main results such as the anomalous magnetic moment and the lower limit value for the Podolsky parameter. Subsequently, we obtain the radiative corrections in $(2 + 1)$ dimensions. We prove this theory presents no anomalous magnetic moment effect and suffers from the singularity in the mass-shell. Finally, we evaluate the radiative corrections for quantum electrodynamics in $(2 + 1)$ dimensions.

Keywords: Quantum Field Theory - Heisenberg Picture -

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Uma Teoria Quântica de Campo	2
2	Fundamentação da Eletrodinâmica (Quântica) Generalizada—$GQED$	6
2.1	Teoria de Podolsky	8
2.2	Campo Fermiônico	13
2.3	Lagrangiana interagente	15
3	Descrição de Heisenberg	18
3.1	Teoria de Perturbação à la Källén	19
3.2	Matriz- S	23
4	Correções Radiativas $GQED_4$	28
4.1	Polarização do vácuo $\Pi_{\mu\nu}$	29
4.2	Vértice Γ_μ	34
4.3	Auto-Energia do Elétron Σ	38
4.4	Momento magnético do elétron	50
5	Correções Radiativas $GQED_3$	52
5.1	Polarização do Vácuo $\Pi_{\mu\nu}$	55
5.2	Vértice Γ_μ	64
5.3	Auto energia do elétron Σ	68
6	Correções Radiativas QED_3	82
6.1	Vértice Γ_μ	85
6.2	Auto energia do elétron Σ	89
7	Conclusão	98
A	Teorema de Wick	101
B	Green-Kubo	106
C	Matrizes de Dirac	110
C.1	Matrizes de Dirac em $3 + 1$ dimensões	110
C.2	Matrizes de Dirac em $2 + 1$ dimensões	111
D	Escalar	113
D.1	$GQED_4$	113
D.2	$GQED_3$	116

E	Vetorial	118
	<u>E.1</u> $GQED_4$	118
	<u>E.2</u> $GQED_3$	121
F	Tensorial	123
	<u>F.1</u> $GQED_4$	123
	<u>F.2</u> $GQED_3$	130

Capítulo 1

Introdução

A Mecânica Quântica (MQ) é um modelo teórico bem-sucedido que descreve os estados microscópicos da matéria em uma determinada faixa de energia em que os efeitos relativísticos não são relevantes, ou seja, em que a energia cinética da partícula é muito menor que a sua massa. A primeira estrutura matemática a descrever a dinâmica dos estados quânticos foi um modelo desenvolvido de forma independente por Schrödinger e Heisenberg. Ambos conseguiram explicar muito bem os processos de espalhamento, níveis de energia no átomo de hidrogênio, transição de fase, e outros experimentos em que a mecânica clássica não era suficiente [Sakurai and Napolitano \[2017\]](#).

Por meio do advento dos trabalhos de Einstein em 1905, dois novos requisitos passaram a ser utilizados na averiguação da auto consistência de uma teoria física. Primeiro, as medidas físicas devem se comunicar através de transformações lineares de Lorentz. Segundo, a velocidade da luz no vácuo é uma constante universal [Weinberg et al. \[1995\]](#). Através destas afirmações e olhando o trabalho de Schrödinger com um pouco mais de cuidado, existe uma assimetria nas coordenadas do espaço e do tempo. Em outras palavras, uma relação unívoca entre a evolução temporal e a translação do espaço na MQ está ausente, pois o tempo funciona como um parâmetro externo na equação de Schrödinger. Uma vez que o argumento da covariância de Lorentz é fundamental para uma teoria que almeja descrever um domínio maior dos resultados físicos, o modelo matemático e físico de Schrödinger não constitui uma base sólida e coerente com a relatividade especial. Esse problema é facilmente detectado na sua equação de onda em que as derivadas da coordenada espacial e da coordenada temporal não possuem a mesma ordem. Logo, inviabiliza a criação de uma função de onda covariante no espaço de Minkowski [Sakurai and Napolitano \[2017\]](#). Portanto, uma "nova" MQ deve surgir para "corrigir" o problema.

É necessário destacar que não é aconselhável fazer uma alusão da veracidade, propriamente dita, da MQ pela Equação de Schrödinger. Ela não está equivocada e, não obstante, conseguiu fazer boas previsões em vários experimentos não relativístico. Procuramos enfatizar, somente, a importância de levar em conta a escala de energia na aplicabilidade das teorias físicas e as novas diretrizes nas transformações cinemáticas no espaço-tempo [De Toledo Piza \[2003\]](#).

Com o intuito de resolver esse problema, duas equações invariantes de Lorentz foram criadas. Elas conseguiram descrever as funções de onda para um estado relativístico do férmion (*Equação de Dirac*) e do bóson (*Equação de Klein-Gordon*). É necessário a criação de um modelo matemático que opere com muitas partículas, desde que a relatividade permite a criação de partículas. Por certo, tal teoria modificaria os postulados

da *MQ*. A Teoria Quântica de Campo (*TQC*) surgiu da elaboração de vários autores para preencher essa e outras lacunas faltantes no entendimento físico no qual as teorias anteriores não possuíam um aparato interpretativo adequado.

1.1 Uma Teoria Quântica de Campo

Antes de enunciar os mais diversos postulados da *TQC*, é importante ressaltar a contribuição do ponto de vista físico da *MQ*. Se pretendermos tratar situações físicas em que o número de partículas é indeterminado, uma nova modificação deverá ser introduzida, primeiramente, no programa de quantização. Na sequência, os trabalhos de Dirac, Jordan e Fock, novos ingredientes foram inseridos com o propósito de estabelecer uma estrutura formal e lidar com o contexto não-trivial de um sistema com muitas partículas. Existem duas maneiras equivalentes de quantizar uma teoria de campo. A primeira é a quantização canônica que será abordada aqui e a segunda é conhecida com *Feynman path integral*. Faremos um breve resumo da primeira demaneira simplificada.

A "segunda" quantização é uma linguagem eficiente e prática de descrever um sistema quântico com um número variável de partículas. Um passo fundamental foi a criação de um objeto matemático (*operador*) que, grosso modo, possibilitasse calcular as transições quânticas na teoria de espalhamento. Para isso, os antigos campos clássicos foram levados ao patamar de operadores quânticos que atuam no espaço de Fock. Outro ponto a ser lembrado é que o estado físico de um sistema é descrito por um vetor complexo no espaço de Hilbert \mathcal{H} . Logo, se temos um sistema com n partículas em que a função de onda, descrita por um conjunto de funções quadrado integrável, é construída com n variáveis (x_1, \dots, x_n) . O seu produto interno é dado pela fórmula

$$(\Psi, \Phi) = \int dx^n \Psi(x_1, \dots, x_n) \Phi(x_1, \dots, x_n) \quad (1.1)$$

Uma vez que temos um sistema contendo um número indefinido de partículas, o espaço de Hilbert é, agora, transformado no espaço de Fock e a sua definição se dá por

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n \quad (1.2)$$

em que n é o número de partículas no espaço de Hilbert. O espaço de Fock nada mais é que a soma direta e infinita de todos os espaços de Hilbert \mathcal{H}_n juntamente com o correspondente à ausência de partículas \mathcal{H}_0 . Um estado qualquer de \mathcal{F} é dado por uma combinação linear de infinitos estados quânticos

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_2 + \dots + \Psi_n + \dots \quad (1.3)$$

Contudo, os **estados físicos** só são descritos após uma simetrização e antisimetrização do espaço de Fock

$$\mathcal{F}^{\pm} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n^{\pm} \quad (1.4)$$

Em que $\mathcal{H}_n^+ = S_n^+ \mathcal{H}_n$ é formado pelo operador simetrizado

$$S_n^+ \Psi_n = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} \Psi_n(x_{\pi 1}, \dots, x_{\pi n}) \quad (1.5)$$

em que π é a permutação. O operador $\mathcal{H}_n^- = S_n^- \mathcal{H}_n$ é formado pelo operador antisimetrizado

$$S_n^- \Psi_n = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} (-1)^{\pi} \Psi(x_{\pi_1}, \dots, x_{\pi_n}) \quad (1.6)$$

em que $(-1)^{\pi} = 1$ se a permutação for par e $(-1)^{\pi} = -1$ se a permutação for ímpar. O produto interno é agora escrito igual à

$$(\Psi, \Phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \int dx^n \Psi_n(x_1, \dots, x_n) \Phi_n(x_1, \dots, x_n) \quad (1.7)$$

Mesmo que as bases da segunda quantização sejam necessárias para estabelecer um formalismo coerente, precisamos caracterizar um outro elemento importante na descrição da interação dos operadores.

Nesse sentido, conceberemos a matriz de espalhamento com o propósito de analisar os processos físicos na escala atômica. Esse objeto matemático, chamado de matriz- S , é unitário, covariância relativística e causal. O seu desenvolvimento recebeu a contribuição de vários pesquisadores como Feynman, Tomonaga, Schwinger e Dyson [\[1\]](#), e sua fórmula matemática é

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} dx'_o \int_{-\infty}^{x'_o} \dots \int_{-\infty}^{x'_o} d^{(n)}x H^{(int)}(x'_o) \dots H^{(int)}(x_o^{(n)}) \quad (1.8)$$

Se quisermos estudar a estrutura interna, transições de estado, e desintegração de partículas, precisaremos encontrar cada elemento desta matriz. Contudo, é importante tomar uma precaução, pois os operadores $H^{(int)}$ não comutam em tempos diferentes. Frente a essa afirmação, é imprescindível a aplicação de um teorema que ordene temporalmente os produtos dentro dos elementos de matriz. Assim, usaremos o Teorema de Wick, ver Apêndice [\[A\]](#).

Um dos aspectos mais fundamentais da natureza é exibir as suas leis por meio da associação entre simetria e conservação de corrente. Antes de qualquer comparação com os experimentos, a investigação de novos modelos é facilitada se supormos que as simetrias estejam codificadas na Lagrangiana. Sabemos pela literatura que a eletrodinâmica quântica (QED_4) possui simetria abelina e de Lorentz. Essa teoria é a mais bem testada teoria de campo já existente. Suas contribuições trouxeram um enorme progresso na compreensão da interação da radiação com a matéria. Mesmo não sendo o cerne da tese abordar os assuntos da QED_4 , sugerimos as seguintes referências [\[Weinberg et al. 1995\]](#), [\[Källén et al. 1972\]](#), [\[Dyson 1951b\]](#). Durante o desenvolvimento da QED_4 , o aparecimento das expressões divergentes criaram um problema na sua consistência. Isso foi suficiente para produzir previsões teóricas não claras sob os experimentos. Nesse sentido, a QED_4 foi somente estabelecida quando os procedimentos de renormalização permitiram uma interpretação satisfatória das quantidades infinitas. A descrição de teorias de altas derivadas (equações diferenciais de terceira ordem ou mais) não é muito comum na física e na maioria das vezes sofre das patologias de Ostrogradski. Frequentemente, os termos de altas derivadas são usados meramente como uma correção perturbativa, mas esse pensamento não condiz com a realidade das teorias de altas derivadas. Finalmente, chegamos ao objeto central do estudo desta tese, o eletromagnetismo desenvolvido por Podolsky ou mais conhecido como *Generalized Quantum Electrodynamics* ($GQED_4$).

¹Uma referência histórica encontra-se no primeiro artigo [\[Dyson 1949\]](#).

Primeiramente, a teoria tem por objetivo principal não só sanar as divergências de origem clássica e quântica, mas também, se propor a ser uma extensão do Eletromagnetismo de Maxwell. Essa característica tornou a teoria de Podolsky naturalmente renormalizável, ou seja, sem a necessidade de nenhuma técnica de regularização. A Lagrangiana de Podolsky consegue abarcar um conjunto maior de fenômenos físicos devido ao fato de incorporar um termo de primeira derivada em relação ao campo eletromagnético $F^{\mu\nu}$. Assim, colocamos uma questão em pauta: *A $GQED_4$ seria a única descrição da interação da radiação-matéria para teorias de derivadas de segunda ordem?* Em uma resposta direta, a $GQED_4$, a menos de um termo de superfície, é a única configuração de teoria de gauge de segunda ordem que atende os pré-requisitos de linearidade e de invariância de Lorentz e de Gauge [Cuzinatto et al. 2007]. Portanto, as simetrias da QED_4 são também preservadas na $GQED_4$, a fim de que, por exemplo, a conservação de carga seja garantida. É conveniente pensar que Podolsky não pertence ao grupo de teorias efetivas de campo, pois a sua unitariedade está assegurada através dos conceitos de Lagrangiana "anchorado" pela Ref. [Kaparulin et al. 2014a]. O conhecimento destas afirmações assegura mais ainda o caráter promissor da $GQED_4$ como uma substituição segura e direta da QED_4 .

Por meio de um projeto, seria impossível responder todas as perguntas que a teoria de Podolsky abre, então, somente seus principais atributos serão abordadas de maneira a não fugir muito da linha desta tese. Outros trabalhos serão enunciados a medida que forem necessários e assim permitirão ao leitor uma melhor compreensão do tema.

Uma pergunta natural quando se estuda qualquer teoria física é se o seu ferramental matemático permite uma ponte entre os seus ingredientes e as suas medidas experimentais. Como é de conhecimento, a mecânica quântica possui um número finito de graus de liberdade e as descrições físicas de Schrödinger, Heisenberg e Interação são equivalentes entre si. Em outras palavras, existe uma representação unitária e equivalente das relações canônicas de comutação de cada representação. Nessa prerrogativa, é possível estabelecer um mapa unitário e inversível \mathcal{U} entre o conjunto de operadores $\{\mathcal{O}_1^i\}$ no espaço de Hilbert \mathcal{H}_1 para outros operadores $\{\mathcal{O}_2^i\}$ no espaço de Hilbert \mathcal{H}_2 . Logo, $\mathcal{O}_2^i = \mathcal{U}\mathcal{O}_1^i\mathcal{U}^{-1} \in \{\mathcal{O}_2^i\}$. A equivalência unitária é importante para que o valor esperado do observável seja o mesmo em todas as representações. No entanto, esta conexão uma-a-um não é mais válida quando o número de graus de liberdade é infinito. Largamente conhecida na literatura, a descrição de interação é a base para os cálculos dos processos de espalhamento. Esse modelo matemático, mostra uma excelente conciliação entre as previsões teóricas dos experimentos realizáveis fisicamente e os resultados experimentais das seções de choque. O Teorema de Haag provou uma inconsistência matemática na descrição de Interação em que não podemos assumir a unitariedade na equivalência entre a descrição de Heisenberg e Interação. Portanto, não é garantido mais assumir uma igualdade entre o valor esperado dos seus observáveis [Wightman and Schweber 1955a]. Além disso, a descrição de interação não constitui uma ferramenta adequada para analisar uma interação não-trivial, pois os operadores livres são ortogonais aos interagentes [Haag 1955]. Embora o Teorema de Haag avalie que a descrição de interação só é válida para operadores livres, isso não invalida a existência de outras formulações que contornem essa inconsistência matemática. Seguindo essa afirmação, a descrição de Heisenberg é promissora neste sentido e irá ser utilizada daqui para frente.

Esta tese tem o caráter construtivo e seguirá a descrição de Heisenberg como alicerce teórico fundamental no cálculo e interpretação física das propriedades quânticas. Neste sentido, implementaremos a eletrodinâmica quântica generalizada $GQED$ para os mais

diversos processos em $(3 + 1)$ e $(2 + 1)$ dimensões.

No capítulo [2](#), investigaremos as principais características da Lagrangiana de Podolsky na sua perspectiva clássica e quântica. Faremos uma breve revisão de como esta teoria de alta ordem influencia no comportamento da interação entre fótons e férmions. Este capítulo não será feito para ser uma descrição detalhada da teoria de Podolsky, mas apenas a possibilidade de inserir ao leitor como essa teoria altera a interpretação física do eletromagnetismo. Além disso, analisaremos como o novo conjunto de soluções da teoria de Podolsky altera a convergência de problemas clássicos do Eletromagnetismo. A peça principal é que a função de Green, objeto matemático utilizado no cálculo das interações, ganha um termo proporcional a um exponencial. Este capítulo é largamente baseado nas escrituras originais de Podolsky em [Podolsky \[1942\]](#), [Podolsky and Kikuchi \[1944\]](#).

O capítulo [3](#) é dedicado a introduzir, conceitualmente, os principais métodos perturbativos à la Källén sem apelar a um formalismo matemático mais rígido. Os resultados deste capítulo não são novos, mas criam uma aproximação do leitor com as dificuldades básicas de definir os objetos quânticos da *TQC*. Os operadores assintóticos, o vácuo interagente, as relações canônicas de comutação, a divisão da Hamiltoniana em livre e interagente e o vácuo do estado de Fock são alguns dos temas a serem abordados neste capítulo. Enfatizaremos os principais resultados do método perturbativo na descrição de Heisenberg, além das principais dificuldades físicas que a descrição de interação apresenta.

Nos seguintes capítulos, investigaremos os principais resultados da aplicação da teoria de Podolsky na descrição de Heisenberg. Os capítulos anteriores servem como base teórica para o estudo das principais correções radiativas. Assim, calcularemos a polarização do vácuo, correção do vértice e a auto-energia do elétron e , finalmente, destacaremos a atuação do parâmetro de Podolsky na convergência natural das flutuações quânticas. Os resultados serão apresentados separadamente nos quais salientaremos os motivos para a convergência ultravioleta acontecer sem o auxílio de métodos de regularização. A descrição de Heisenberg permite a possibilidade de definir os objetos quânticos em que os fundamentos matemáticos sejam respeitados. No capítulo 4 será dirigido aos efeitos em $(3 + 1)$ dimensões, largamente conhecidos na literatura. No capítulo 5 abordaremos os efeitos em $(2 + 1)$ dimensões em que a redução espacial na dimensão permite que novos fenômenos físicos.

O objetivo do capítulo [6](#) é discutir a QED_3 na descrição de Heisenberg. O resultado apresentado neste capítulo concerne a uma comparação com os trabalhos já publicados na descrição de interação e na teoria causal de Epstein-Glaser. No capítulo [7](#) concluiremos com um breve resumo das principais idéias apresentadas nesta tese e com uma perspectiva para futuros trabalhos.

Vários apêndices contam nesta tese. Revisamos o Teorema de Wick no apêndice [A](#), o Teorema Green-Kubo no apêndice [B](#) e a álgebra das matrizes de Dirac em $(3 + 1)$ e $(2 + 1)$ dimensões no apêndice [C](#). Um cálculo mais detalhado da componente escalar, vetorial e tensorial da correção do vértice em $(3 + 1)$ e $(2 + 1)$ dimensões são apresentadas nos apêndices [D](#), [E](#) e [F](#), respectivamente.

Capítulo 2

Fundamentação da Eletrodinâmica (Quântica) Generalizada—*GQED*

A teoria eletromagnética de Maxwell constituída pelas quatro equações tensoriais mais a força de Lorentz é um modelo bastante coerente tanto do ponto de vista teórico quanto experimental. Ela é capaz de descrever corretamente o campo eletromagnético e a sua interação com a matéria (férmions) nos mais diversos meios. O triunfo do eletromagnetismo acontece devido à dedução de novos efeitos físicos em conjunto com uma larga corroboração nos experimentos. Apesar do grande sucesso, o eletromagnetismo ainda se restringia ao mundo clássico e a sua influência na dinâmica microscópica ainda estava por ser descoberta. Durante esse período, novas observações viriam a transformar a convencional interpretação do mundo físico.

O experimento da catástrofe ultravioleta é uma das primeiras evidências que suscita a mudança de paradigmas do mundo convencional e determinístico da física clássica. Esse efeito conduz a uma região do espectro de energia em que os conceitos de dualidade partícula-onda e a discretização da energia em "pacotes" (fótons) são requisitos necessário na compreensão de uma nova teoria do mundo microscópico. Em 1901, após Planck publicar seu trabalho sobre a radiação do corpo negro, a mecânica ondulatória (como era chamado a *MQ* teve os seus primeiros esboços nesse novo cenário físico.

Uma possível pergunta se origina nessa conjuntura: *Como seria o eletromagnetismo aplicado ao mundo quântico e relativístico?* Por meio deste questionamento, uma quantização do eletromagnetismo de Maxwell nasceu e o antigo campo clássico $A_\mu(x)$ foi quantizado em um conjunto infinito de osciladores harmônicos quânticos. A eletrodinâmica quântica, *QED* (Quantum Electrodynamics), recebeu suas maiores contribuições vindas de Paul Dirac, Wolfgang Pauli, Eugene Wigner, Pascual Jordan e Werner Heisenberg. A soma de todas essas contribuições possibilitou a permanência da *QED* no modelo padrão.

Conhecer um pouco a *QED*₄ nos permitirá introduzir melhor a *GQED*₄. Iniciamos pela Lagrangiana para o campo eletromagnético livre, escrita como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (2.1)$$

em que o tensor eletromagnético é $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ¹ e satisfaz a identidade de Bianchi $\partial_\mu F^{\alpha\nu} + \partial_\alpha F^{\mu\nu} + \partial_\nu F^{\mu\alpha} = 0$. De maneira a evitar uma resposta no qual diferentes configurações do campo conduzem a um mesmo observável, introduzimos a condição de

¹Tomaremos as constantes naturais como $c = \hbar = 1$.

calibre. O último termo da equação acima corresponde a essa condição de calibre. É fácil perceber que a Lagrangiana acima é linear (princípio da superposição), invariante de calibre (simetria interna) $U(1)$ e de Lorentz (simetria externa) [Quigg \[2013\]](#).

Apesar do grande êxito da QED_4 , algumas incompatibilidades entre o seu valor teórico e experimental sugerem uma extensão da mesma. Em nível clássico, temos o cálculo da energia na carga pontual do elétron que é o problema conhecido como 4/3 do eletromagnetismo, além disso, a divergência clássica da energia estática de uma carga pontual. Em nível quântico, encontramos o momento magnético do muon [Abi \[2021\]](#) e o estado fundamental $1S$ do átomo do hidrogênio [Weitz et al. \[1995\]](#). As discrepâncias citadas são oportunidades de buscar uma nova física, se acreditarmos que a QED_4 é imprecisa na realização de tal tarefa. Como nenhuma teoria consegue encobrir todo o espectro de energia, é comum existir essas discrepâncias citadas em relação a alguns experimentos físicos. Desse modo, nasce um novo ensejo para estudar ainda mais a estrutura interna da interação férmion-fóton. Existem algumas possíveis modificações no Modelo Padrão como a SUSY [Kowalska et al. \[2015\]](#), Compostos de Higgs [STEFANIAK et al. \[2014\]](#), e a Teoria Efetiva de Campo [Boos \[2020\]](#).

É bem conhecido que adicionar na teoria original as correções de altas ordens na derivada é um processo para construir uma teoria mais fundamental [Reyes \[2009\]](#). Nos últimos anos, os modelos da Teoria Efetiva de Campo fizeram progresso em muitos contextos físicos, uma vez que podem incorporar diferentes escalas de energia. Além de serem fortemente recomendados para desenhar novas perspectivas sobre os aspectos subjacentes da física. É instrutivo observar que as teorias de altas e de baixas derivadas têm naturezas distintas. Em outras palavras, o domínio da solução de teorias de altas ordens (mais precisa) é maior que teorias de baixa ordem (menos precisa).

Devemos enfatizar que teorias de altas ordens na derivada apresentam pelo menos uma instabilidade linear [Becker et al. \[2017\]](#). Este comportamento que impede uma quantização canônica é responsável por modos de energias negativa e instabilidades no vácuo. Logo, o leitor atento se preocuparia em perguntar qual o procedimento sensato a se exigir para evitar essas inconsistências. Até agora, muito progresso foi feito para esclarecer qual é o sentido da noção de positividade da energia canônica de Noether para a determinação da estabilidade. No entanto, essa explicação deixa de lado várias teorias de altas ordens, pois o Teorema de Noether é uma condição suficiente, mas não necessária para detectar a instabilidade física. Para resolver esse problema, *Kaparulin et al.* sugere uma alternativa para ampliar o conceito de estabilidade no qual a Lagrangiana âncora associa uma integral de movimento limitada inferiormente com a invariância temporal [Kaparulin et al. \[2014b\]](#).

Neste capítulo, apresentaremos os principais fundamentos da teoria de Podolsky com o intuito de situar o leitor nos aspectos formais da versão ampliada e não equivalente do eletromagnetismo de Maxwell. Na seção [2.1](#) será abordada a Lagrangiana de Podolsky no caso livre. A seção [2.2](#) embora pareça diferente do propósito desse capítulo é de relevância pedagógica. Por último, na seção [2.3](#), estudaremos a interação da Lagrangiana de Podolsky com o setor fermiônico.

2.1 Teoria de Podolsky

Uma principal observação à respeito do termo cinético do campo de gauge (2.1) é a sua derivada de primeira ordem em A_μ . É importante lembrar que nenhum princípio fundamental justifica a restrição na inclusão de termos de altas ordens nas derivadas de gauge. Seguindo esta afirmação, Podolsky inicia um novo tratamento mediante uma teoria estendida que satisfaça as mesmas simetrias da anterior [Bufalo et al. 2014]. O estudo desta nova teoria se justifica, entre outros motivos, pelos seus resultados obtidos.

A generalização da Eletrodinâmica de Maxwell, conhecida pela sigla $GQED_4$ (Generalized Quantum Electrodynamics) em quatro dimensões, é a única extensão possível da QED_4 que é linear, invariante de Lorentz e de Gauge [Cuzinatto et al. 2011]. Inicialmente, abordaremos os trabalhos de Podolsky e seus alunos com o propósito de esclarecer os importantes fundamentos da teoria. Caso se queira uma visão mais completa e detalhada, aconselha-se os escritos originais. [Podolsky 1942], [Podolsky and Kikuchi 1944], [Podolsky and Schwed 1948].

Podolsky e Schwed reformularam as equações de Maxwell ao incluir uma derivada de gauge de segunda ordem. A extensão dada, *a priori*, inseria a Lagrangiana de Podolsky num patamar de teoria efetiva de campo

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(A_\alpha, \partial A_\alpha, \partial\partial A_\alpha) \quad (2.2)$$

Em geral, esse método é explorado em Teoria Efetiva que pode ser resumida por uma expansão de potência n na Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_o + \mathcal{L}^1 + \mathcal{L}^2 + \dots \quad (2.3)$$

em que \mathcal{L}_o é a Lagrangian sem termos de derivadas, \mathcal{L}^1 é a Lagrangiana com termos de primeira ordem e \mathcal{L}^2 é a Lagrangiana com termos de derivadas de segunda ordem. Podemos escrever a expansão acima de uma forma compacta como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_o + \sum_n \frac{C_{j,n}}{\Lambda^{n-4}} \mathcal{O}_{j,n}, \quad (2.4)$$

em que C_j é um coeficiente de Wilson, \mathcal{L}_o é um modelo renormalizável e conhecido e Λ uma nova escala física. O \mathcal{L}_o e $\mathcal{O}_{j,n}$ são termos compostos dos campos locais do modelo padrão que satisfazem as simetrias do modelo padrão. A Lagrangiana de Podolsky é escrita como

$$\mathcal{L} = \underbrace{-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}_{\mathcal{L}_o} + \frac{1}{2m_P^2} \partial^\mu F_{\mu\beta} \partial_\alpha F^{\alpha\beta}. \quad (2.5)$$

O parâmetro $m_P = \Lambda$ tem por finalidade de manter a dimensão da Lagrangiana correta na equação de Podolsky com a . Seu valor deve ser obtido pelo confronto com os experimentos, ou seja, não é determinado pelos fundamentos próprios da teoria. A Lagrangiana continua invariante de Lorentz sobre as transformações lineares $F'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta F_{\alpha\beta}$, sendo Λ_μ^α pertencente ao grupo orthochronous de Lorentz $SO(1, 3)^+$ [Weinberg et al. 1995]. É fácil reescrever a lagrangiana de Podolsky em termos dos campos vetoriais através da decomposição do tensor eletromagnético $F^{0i} = E^i$ e $B^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{jk}$

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2} \left(E^2 + H^2 \right)}_{\text{Maxwell}} + \underbrace{\frac{\square}{2m_P^2} \left[(\nabla \cdot E)^2 + (\nabla \times B - \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t})^2 \right]}_{\text{Podolsky}} \quad (2.6)$$

em que os campo vetorias E e B são o elétrico e magnético, respectivamente. Através do princípio variacional de Hamilton na Lagrangiana

$$\delta S = \int_{\Omega} \delta \mathcal{L}(A_{\alpha}, \partial A_{\alpha}, \partial \partial A_{\alpha}) d^4 x \quad (2.7)$$

e a A_{α} é a coordenada generalizada no espaço de configuração. Os campos A_{α} são definidos no volume Ω do espaço de Minkowski e anulam-se pelas condições de contorno $\delta A_{\alpha}|_{\partial\Omega} = 0$. Não levamos em conta a variação do volume $d^4 x$, pois a Lagrangiana é explicitamente independente das coordenadas generalizadas. Primeiramente, começaremos com a equação de Euler-Lagrange estendida

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\delta}} - \partial_{\gamma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\gamma} A_{\delta})} + \partial_{\xi} \partial_{\rho} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\xi} \partial_{\rho} A_{\delta})} = 0 \quad (2.8)$$

O cálculo direto da eq. (2.5) conduz à

$$\partial_{\alpha} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{m_P^2} (\square \partial_{\alpha} F^{\alpha\sigma} - \partial_{\sigma} \partial_{\beta} \partial_{\alpha} F^{\alpha\beta}) = 0 \quad (2.9)$$

É fácil ver que $\partial_{\sigma} \partial_{\beta} \partial_{\alpha} F^{\alpha\beta} = 0$, pois $F^{\mu\nu}$ é um tensor antissimétrico. Portanto, a equação de movimento no espaço de configuração é

$$(1 - \frac{\square}{m_P^2}) \partial_{\alpha} F^{\alpha\beta} = 0 \quad (2.10)$$

em que $\square = \partial^{\alpha} \partial_{\alpha}$. Antes de discutir os detalhes das equações de movimento, devemos prestar atenção que as teorias de gauge devem ter uma restrição para evitar excitações dos modos não físicos no espaço de Hilbert. O procedimento padrão em QED_4 , amplamente explorado na literatura padrão, corresponde ao gauge de Lorenz $\Omega_L[A] = \partial_{\mu} A^{\mu}$ Podolsky [1942], Podolsky and Kikuchi [1944], Podolsky and Schwed [1948]. Embora essa condição pareça uma opção adequada, pois é linear em A^{μ} e invariante de Lorenz, as transformações de calibre da dinâmica longitudinal não são eliminadas (2.10). Em outras palavras, os componentes longitudinais permanecem na dinâmica devido ao novo grau de liberdade na Lagrangiana (2.5). Uma outra escolha seria uma nova transformação de calibre chamada condição generalizada de Lorenz $\Omega_G[A] = (1 - \frac{\square}{m_P^2}) \partial_{\mu} A^{\mu}$, proposta por Galvao and Pimentel Escobar [1988]. Contudo, um argumento simples refuta essa proposta. Se inserirmos $\Omega_G[A]$ na Lagrangiana (2.5), a ordem de derivada da Lagrangiana de Podolsky não será respeitada. Logo, podemos dizer que a condição generalizada de Lorenz fornece uma correção adequada e produzirá fantasmas nas funções de Green. Para contornar este problema, precisamos deformar as condições generalizadas do calibre para $\Omega_P[A] = (\sqrt{1 - \frac{\square}{m_P^2}}) \partial_{\mu} A^{\mu}$ Lämmerzahl [1993], conhecida como *non-mixing* gauge e respeitar a potência correta do campo de calibre em nível da equação de movimento. Inserindo o *non-mixing* gauge na lagrangiana (2.5), temos

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2m_P^2} \partial^{\mu} F_{\mu\beta} \partial_{\alpha} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{2\xi} (1 - \frac{\square}{m_P^2}) (\partial_{\mu} A^{\mu})^2 - j^{\mu} A_{\mu} \quad (2.11)$$

A equação de movimento é agora

$$(1 - \frac{\square}{m_P^2})\square A_\mu(x) = 0 \quad (2.12)$$

As novas equações de Podolsky dos campos vetoriais eletromagnéticos na ausência de matéria são

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - \frac{\square}{m_P^2})\nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ (1 - \frac{\square}{m_P^2})(\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = 0 \\ (\nabla \cdot \vec{E} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right. \quad (2.13)$$

As equações acima se reduzem as equações de Maxwell quando o limite $m_P \rightarrow \infty$ é levado em conta. As duas últimas equações não sofrem modificações e por isso a identidade de Bianchi é preservada na teoria de Podolsky

$$\partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = 0 \quad (2.14)$$

Uma conclusão realizada por Podolsky por meio da eq. (2.10) foi a de estabelecer uma solução composta por duas partículas. Uma não massiva, fóton convencional da QED_4 e outra massiva. Seguindo essa linha de pensamento e o princípio da superposição linear, o campo vetorial pode ser decomposto pela soma de dois campos com características distintas

$$A^\mu(x) = A_{Maxwell}^\mu(x) + A_{Podolsky}^\mu(x) \quad (2.15)$$

em $A_{Maxwell}^\mu(x)$ é chamado campo ordinário enquanto $A_{Podolsky}^\mu(x)$ é o campo extraordinário. É fácil notar a dinâmica obedecida para cada um dos campos de calibre

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - \frac{\square}{m_P^2})A_{Podolsky}^\mu(x) = 0, \\ \frac{\square}{m_P^2}A^\mu(x) = A_{Podolsky}^\mu(x) \\ (1 - \frac{\square}{m_P^2})A^\mu(x) = A_{Maxwell}^\mu(x) \\ \square A_{Maxwell}^\mu(x) = 0 \end{array} \right. \quad (2.16)$$

Essa interpretação não está errada em nível de teoria de gauge livre, no entanto, partículas livres tem seção de choque nulo. Logo, um significado dinâmico é necessário para interpretar adequadamente a teoria de Podolsky Podolsky [1942].

Funções de Green

Um passo importante no estabelecimento das flutuações quânticas na teoria de Podolsky será o cálculo das funções de Green. O significado físico desses objetos matemáticos na representação de Heisenberg será exposto no capítulo (4) juntamente com a

construção covariante dos campos interagentes. Primeiramente, começaremos pela introdução de uma corrente de matéria j^μ na lagrangiana (2.5) acoplada minimamente com o campo de gauge²

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2m_P^2}\partial^\mu F_{\mu\beta}\partial_\alpha F^{\alpha\beta} - \frac{1}{2\xi}\left(1 - \frac{\square}{m_P^2}\right)(\partial_\mu A^\mu)^2 - j^\mu A_\mu \quad (2.17)$$

o objetivo aqui é reescrever $A_\mu = G_{\mu\nu}j^\nu$. A dinâmica da Lagrangiana acima é dada por

$$\left(1 - \frac{\square}{m_P^2}\right)\partial_\alpha F^{\alpha\beta} + \frac{1}{\xi}\left(1 - \frac{\square}{m_P^2}\right)\partial_\alpha\partial^\beta A^\alpha = j^\beta \quad (2.18)$$

Uma transformada de Fourier para o espaço dos momentos é

$$\left[\left(1 + \frac{p^2}{m_P^2}\right)(-p^2 g^{\alpha\beta} + p^\alpha p^\beta) - \frac{1}{\xi}\left(1 + \frac{p^2}{m_P^2}\right)(p^\alpha p^\beta)\right]A_\alpha = j^\beta \quad (2.19)$$

Assim, chegamos a uma expressão $j^\alpha = g^{\alpha\nu}j_\nu$

$$\left[-p^2 g^{\alpha\beta}\left(1 + \frac{p^2}{m_P^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\left(1 + \frac{p^2}{m_P^2}\right)p^\alpha p^\beta\right]G_\alpha^\mu = g^{\mu\beta} \quad (2.20)$$

em que procuramos uma solução que inverta a nossa matriz sob a forma $G_\alpha^\mu = \gamma g_\alpha^\mu + \beta p_\alpha p^\mu/p^2$. A equação (2.20) representa a soma da parte transversal e longitudinal. A matriz inversa da função de Green é

$$G^{\mu\alpha} = \frac{g^{\mu\alpha} - \frac{p^\alpha p^\mu}{p^2}}{p^2\left(1 + \frac{p^2}{m_P^2}\right)} + \frac{\xi}{p^2\left(1 + \frac{p^2}{m_P^2}\right)}\frac{p^\alpha p^\mu}{p^2} \quad (2.21)$$

em que cada escolha de ξ conduz a um gauge diferente. Escolheremos o Feynman-t' Hooft gauge $\xi = 1$. Como pode ser visto claramente após uma substituição direta

$$G^{\mu\alpha}(p^2) = \frac{g^{\mu\alpha}}{p^2\left(1 + \frac{p^2}{m_P^2}\right)} = g^{\mu\alpha}G(p^2) \quad (2.22)$$

A função de Green fornece diferentes informações dos estados excitados no Espaço de Hilbert em que os pólos representam a energia desse estado. Separando o propagador de Podolsky em duas contribuições, a forma final será

$$G(p^2) = \frac{1}{\left(1 + \frac{p^2}{m_P^2}\right)p^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{m_P^2 + p^2} \quad (2.23)$$

onde $G(p^2)$ representa a função de Green. Aplicando o operador da Eq. (2.12) no espaço de configuração na a solução geral acima, é fácil notar que

$$\left(1 + \frac{\square}{m_P^2}\right)\square \int d^4p e^{ipx}G(p^2) = -\delta(x - y) \quad (2.24)$$

²Usaremos explicitamente o gauge ξ por motivos de generalização.

A seguir, identificaremos, agora, outras funções de correlações que serão úteis ao longo da tese. A função de Green retardada $G^R(x) = -\Theta(x_o)G(x)$ e a avançada $G^A(x) = \Theta(-x_o)G(x)$ são

$$G_R(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{ipx} \left(\mathcal{P} \frac{1}{p^2} - \mathcal{P} \frac{1}{p^2 + a^{-2}} + i\pi(\delta(p^2) - \delta(p^2 + a^{-2}))\epsilon(p) \right), \quad (2.25a)$$

$$G_A(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{ipx} \left(\mathcal{P} \frac{1}{p^2} - \mathcal{P} \frac{1}{p^2 + a^{-2}} - i\pi(\delta(p^2) - \delta(p^2 + a^{-2}))\epsilon(p) \right) \quad (2.25b)$$

em que \mathcal{P} é o valor principal, e definimos a função sinal $\epsilon(p)$ e a função heaviside $\Theta(x_o)$ como

$$\epsilon(p) \equiv \frac{p_o}{|p_o|}, \quad \Theta(p) \equiv \frac{1 + \epsilon(p)}{2}, \quad (2.26)$$

Realizando a transformada de Fourier de $A_\mu(x)$ dada por

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_{\lambda=1}^4 \left\{ \epsilon_\mu^\lambda(p)(a(p)e^{ipx} + a^*(p)e^{-ipx}) + \eta_\mu(p)\bar{a}(p)e^{i\bar{p}x} + \eta_\mu^*(p)\bar{a}^*(p)e^{-i\bar{p}x} \right\}. \quad (2.27)$$

Temos dois espectros de energia com domínios disjuntos. As suas relações de dispersão são $\mathbf{p}^2 + \bar{p}_o^2 = m_P^2$ e $p = ip_o$. As relações de comutação não nulas para os operadores de criação $a(p)$ e destruição $a^*(p)$ são $[a^\lambda(p), a^{*\lambda'}(p')] = \delta_{p,p'}\delta_{\lambda\lambda'} = [\bar{a}^\lambda(p), \bar{a}^{*\lambda'}(p')]$. As polarizações não massivas e massivas são $\epsilon_\mu^\lambda(p)$ e $\eta_\mu(p)$, respectivamente, com $\epsilon^{\mu\lambda}(p)\epsilon_\mu^{\lambda'}(p) = \delta^{\lambda\lambda'}$ e $\eta^\mu(p)\eta_\mu^*(p) = -1$. Será útil estudar os comutadores a tempos arbitrários. Tomamos agora essa expressão de Fourier para derivar as relações invariantes de calibre á tempos iguais

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')]_{x_o=x'_o} = -i\delta_{\mu\nu}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.28)$$

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')]_{x_o=x'_o} = \left[\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_0}, \frac{\partial A_\nu(x')}{\partial x_0} \right]_{x_o=x'_o} = 0 \quad (2.29)$$

Se calcularmos a tempos arbitrários, recuperamos a covariância de Lorentz

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')] = -i\delta_{\mu\nu}G(x' - x) \quad (2.30)$$

Essa relação covariante relativística é claramente evidente na equação acima. A função $G(x' - x)$ é

$$G(x' - x) = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d^4k e^{ikx} \left(\delta(p^2) - \delta(p^2 + m_P^2) \right) \epsilon(p) \quad (2.31)$$

um propagador de uma função não homogênea. Além disso, estamos interessados na relação de anticomutação que fornece um *q-number*

$$\langle 0 | \{A_\mu(x), A_\nu(x')\} | 0 \rangle = -\delta_{\mu\nu}G^{(1)}(x' - x) \quad (2.32)$$

A função $G^{(1)}(x' - x)$ tem propriedades bem diferentes da função $G(x' - x)$. A primeira não desaparece em $x_o = 0$ no cone de luz, enquanto a última é física e prescreve a soma da função de Green retardada e avançada.

$$G^{(1)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4p e^{ipx} (\delta(p^2) - \delta(p^2 + m_p^2)) \quad (2.33)$$

2.2 Campo Fermiônico

O tema apresentado nessa seção é discutido intensamente em diversos livros, portanto, trataremos de maneira breve a quantização canônica dos operadores fermiônicos. A equação de Dirac livre para o campo fermiônico na ausência de potenciais externos é

$$(\gamma\partial + m)\psi(x) = 0 \quad (2.34)$$

A resolução dessa equação no espaço dos momentos apresenta duas soluções de natureza distintas: energia positiva e negativa. Além disso, é importante notar que essa equação se propõe a resolver o problema de apenas uma única partícula. As soluções são uma onda plana definida no espaço de Hilbert como $\psi_a(x) = u_a(\vec{p})e^{i(\vec{p}\vec{r} - p_0x_0)}$, em que o índice spinorial, a , indica que o campo fermiônico é um vetor do espaço espinorial. Primeiramente, expandimos $\psi_a(x)$ linearmente por operadores de criação e destruição acompanhados das suas respectivas funções de campos espinoriais.

$$\psi_a(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \left(\sum_{r=1}^2 a^r(\mathbf{p}) u_a^r(\mathbf{p}) e^{-ipx} + \sum_{r=1}^2 b^{*r}(\mathbf{p}) v_a^r(\mathbf{p}) e^{ipx} \right). \quad (2.35)$$

O seu conjugado é dado por $\bar{\psi}(x) = \psi^*(x)\gamma^4$

$$\bar{\psi}_a(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \left(\sum_{r=1}^2 a^{*r}(\mathbf{p}) \bar{u}_a^r(\mathbf{p}) e^{ipx} + \sum_{r=1}^2 b^r(\mathbf{p}) \bar{v}_a^r(\mathbf{p}) e^{-ipx} \right). \quad (2.36)$$

A anticomutação entre os operadores a tempos iguais conduz à

$$\begin{aligned} \{\bar{\psi}_a(x), \psi_b(y)\} &= \int d^3q \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{r=1}^2 \left(\{a^{r*}(\mathbf{p}), a^r(\mathbf{q})\} \bar{u}_a^r(\mathbf{p}) u_b^r(\mathbf{q}) e^{ipx} e^{-iqy} \right. \\ &\quad \left. + \{b^r(\mathbf{q}), b^{*r}(\mathbf{p})\} \bar{v}_a^r(\mathbf{p}) v_b^r(\mathbf{q}) e^{ipx} e^{-iqy} \right) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\frac{-1}{2E} (i\gamma p^+ - m)_{ba} e^{ip^+(x-y)} + (i\gamma p^- - m)_{ba} \frac{1}{2E} e^{ip^-(x-y)} \right) \end{aligned} \quad (2.37)$$

em que $p^- = (-iE, \vec{p})$ e $p^+ = (iE, \vec{p})$. Utilizamos as seguintes identidades espinoriais $\sum_{r=1}^2 \bar{u}_a^r u_b^r = -\frac{1}{2E} (i\gamma p^+ - m)_{ba}$ e $\sum_{r=1}^2 \bar{v}_a^r v_b^r = \frac{1}{2E} (i\gamma p^- - m)_{ba}$ e as relações de anticomutação a tempos iguais dadas por

$$\{a^{r*}(\mathbf{p}), a^r(\mathbf{q})\}_{x_0=x'_0} = \delta_{r^*r} \delta_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \quad (2.38)$$

$$\{a^r(\mathbf{p}), a^r(\mathbf{q})\}_{x_0=x'_0} = \{a^{r*}(\mathbf{p}), a^{r*}(\mathbf{q})\}_{x_0=x'_0} = 0 \quad (2.39)$$

Encontramos

$$\{\bar{\psi}_a(x), \psi_b(x'),\} = -iS_{ba}(x' - x) \quad (2.40)$$

Assim, a anticomutação em tempos diferentes leva a uma função de Green

$$S_{ba}(x' - x) = -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} (i\gamma p - m)_{ba} \epsilon(p) \delta^4(p^2 + m^2) e^{ip(x-x')} \quad (2.41)$$

As funções de Gren retardada $S_R(x) = -\Theta(x_o)S(x)$ e avançada $S^A(x) = \Theta(-x_o)S(x)$ são definidas no cone de luz superior ($x_o > 0$) e inferior ($x_o < 0$), respectivamente

$$S^R(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{i(x-x')p} (ip\gamma - m) \left[\mathcal{P} \frac{1}{p^2 + m^2} + i\pi \epsilon(p) \delta^4(p^2 + m^2) \right] \quad (2.42)$$

$$S^A(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{i(x-x')p} (ip\gamma - m) \left[\mathcal{P} \frac{1}{p^2 + m^2} - i\pi \epsilon(p) \delta^4(p^2 + m^2) \right] \quad (2.43)$$

Em seguida, calcularemos o valor esperado no vácuo da comutação dos operadores a tempos diferentes. O cálculo é realizado de forma análoga ao da Eq. (2.37). Desse modo

$$\begin{aligned} \langle 0 | [\bar{\psi}_a(x), \psi_b(x')] | 0 \rangle &= \int d^3 q \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(\sum_{r=1}^2 [a^*(\mathbf{p}), a(\mathbf{q})] \bar{u}_a(\mathbf{p}) u_b(\mathbf{p}) e^{ipx} e^{-iqx'} + \right. \\ &\quad \left. \sum_{r=1}^2 [b(\mathbf{q}), b^*(\mathbf{p})] \bar{v}_a(\mathbf{p}) u_b(\mathbf{p}) e^{ipx} e^{-iqx'} \right) \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(\frac{-1}{2p_o} (i\gamma p^+ - m)_{ba} e^{ip(x-x')} + (i\gamma p^- - m)_{ba} \frac{1}{2p_o} e^{ip(x-x')} \right) \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} (i\gamma p - m)_{ba} \delta^4(p^2 + m^2) e^{ip(x-x')} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Finalmente, encontramos

$$S_{ba}^{(1)}(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 p e^{ip(x-x')} (i\gamma p - m)_{ba} \delta^4(p^2 + m^2) \quad (2.45)$$

A função $S^{(1)}(x)$ não desaparece nas distâncias do tipo espaço, ou seja, a perturbação se propaga com valores maiores do que a velocidade da luz. Isso, *a priori*, levaria a uma contradição dos postulados da teoria da relatividade especial, contudo, o operador $\psi_a(x)$ não é utilizado na propagação de sinais entre dois observadores dentro do cone de luz, mas sim no que chamamos de bilinear [Weinberg et al. \[1995\]](#).

Em virtude do Teorema de Noether, a conservação de carga está associada a uma simetria global contínua $U(1)$ através da lei de transformação $\psi'(x) = e^{ie\alpha} \psi(x)$, em que α é o acoplamento de calibre. Com o resultado da lei de transformação da simetria, temos que a densidade da corrente clássica é $j^\mu(x) = e \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)$ e sua conexão em nível do operador é construída pela forma

$$j^\mu(x) \equiv \frac{ie}{2} [\bar{\psi}(x), \gamma^\mu \psi(x)]. \quad (2.46)$$

É fácil observar que podemos restabelecer a corrente para a forma normal $j^\mu(x) = ie : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) :$ pelo Teorema de Wick, ver Apêndice [\[A\]](#) e, assim, o valor esperado da corrente do vácuo desaparece

$$\langle 0|j^\mu(x)|0\rangle = 0, \quad (2.47)$$

Desse modo, a simetrização produz uma redefinição do operador garantido que o valor esperado no vácuo desapareça. Até agora, revisamos o material básico da teoria livre de férmions e bósons. Na próxima seção, investigaremos um esquema de perturbação para analisar a correção quântica de um sistema interagente na descrição de Heisenberg.

2.3 Lagrangiana interagente

Nas seções anteriores, analisamos o que constitui o problema no caso livre. Em outras palavras, o sistema quântico é descrito linearmente pela dinâmica proveniente da Hamiltoniana sem a interação não linear com outros operadores. A Lagrangiana geral correspondente a soma das partes cinéticas do operador de Dirac, do campo de gauge e do acoplamento mínimo

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_I \quad (2.48)$$

em que

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2m_P^2}\partial^\mu F_{\mu\beta}\partial^\alpha F_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\square}{m_P^2}\right)\partial_\mu A^\mu \quad (2.49)$$

$$\mathcal{L}_\psi = -\frac{1}{4}[\bar{\psi}, (\gamma\partial + m)\psi(x)] - \frac{1}{4}[(\gamma\partial + m)\bar{\psi}(x), \psi(x)] \quad (2.50)$$

$$\mathcal{L}_I = \frac{ie}{2}A_\mu[\bar{\psi}(x), \gamma_\mu\psi(x)] \quad (2.51)$$

Ao aplicar o princípio de Hamilton, chegamos às equações diferenciais de movimento

$$\left(1 - \frac{\square}{m_P^2}\right)\square A^\nu = -\frac{ie}{2}[\bar{\psi}(x), \gamma^\nu\psi(x)] \quad (2.52a)$$

$$(\gamma\partial + m)\psi(x) = ie\gamma A(x)\psi(x) \quad (2.52b)$$

A extensão da quantização canônica do sistema interagente se torna uma tarefa importante do ponto de vista teórica. A segunda quantização canônica nos fornece toda a base na descrição da álgebra dos operadores a partir das relações de comutação a tempos iguais

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')]_{x_o=x'_o} = \left[\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_o}, \frac{\partial A_\nu(x)}{\partial x'_o}\right]_{x_o=x'_o} = 0 \quad (2.53a)$$

$$\left[\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_o}, A_\nu(x')\right]_{x_o=x'_o} = -i\delta_{\mu\nu}\delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2.53b)$$

$$\{\psi(x), \psi(x')\}_{x_o=x'_o} = \{\bar{\psi}(x), \bar{\psi}(x')\}_{x_o=x'_o} = 0 \quad (2.53c)$$

$$\{\psi(x), \bar{\psi}(x')\}_{x_o=x'_o} = \gamma_4\delta^4(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2.53d)$$

$$[A_\nu(x), \psi(x')]_{x_o=x'_o} = \left[\frac{\partial A_\nu(x)}{\partial x_o}, \psi(x')\right]_{x_o=x'_o} = 0 \quad (2.53e)$$

$$[A_\nu(x), \bar{\psi}(x')]_{x_o=x'_o} = \left[\frac{\partial A_\nu(x)}{\partial x_o}, \bar{\psi}(x')\right]_{x_o=x'_o} = 0 \quad (2.53f)$$

Nosso aparato interpretativo deve estendido para incorporar um maior número de ingredientes que forneça a relação entre a estrutura formal da teoria quântica com as possíveis predições teóricas. Apenas em tempos iguais, os comutadores da teoria interagente fornecem um *c-number* como resposta, ou seja, os comutadores (2.53e) e (2.53a)

Uma outra preocupação viria com o antigo método de resolver problemas na Mecânica Quântica em que os autovalores de um sistema são encontrados pela diagonalização da Hamiltoniana a partir de uma base apropriada. Contudo, não é garantido que os resultados sejam covariantes ou mesmo que teremos uma Hamiltoniana diagonal no caso interagente. Lembramos que a ausência de diagonalização pode conduzir á resultados não covariantes em algum estágio, assim, possíveis infinitos na teoria dependeriam do referencial do observador.

Neste momento, podemos resolver as equações diferenciais dinâmicas (2.52a) e (2.52b) por métodos elementares

$$\psi(x) = \psi^{(0)}(x) - \int S_R(x - x') ie \gamma A(x') \psi(x') d^4 x' \quad (2.54)$$

$$A_\mu(x) = A_\mu^{(0)}(x) + \int G_R(x - x') ie [\bar{\psi}(x'), \gamma_\mu \psi(x')] d^4 x' \quad (2.55)$$

em que $\psi^{(0)}(x)$ e $A_\mu^{(0)}(x)$ são operadores Hermitianos no espaço de Hilbert, definidos numa hiper-superfície do tipo espaço, que diagonaliza a Hamiltoniana livre. Uma maneira mais adequada de escrever as equações das integrais (2.54) e (2.55) é incorporar a aproximação adiabática por meio do parâmetro α

$$\psi(x, \alpha) = \psi^{(0)}(x) - ie \int S_R(x - x') e^{-\alpha|x'_0|} \gamma^\nu A_\nu(x', \alpha) \psi(x', \alpha) d^4 x' \quad (2.56)$$

$$A_\mu(x, \alpha) = A_\mu^{(0)}(x) - ie \int G_R(x - x') e^{-\alpha|x'_0|} [\bar{\psi}(x', \alpha), \gamma_\mu \psi(x', \alpha)] d^4 x' \quad (2.57)$$

em que α é o termo adiabático inversamente proporcional ao tempo. Os operadores $A_\mu^{(0)}(x)$ e $\psi^{(0)}(x)$ independem de α . Definidas as condições iniciais $x_o \rightarrow -\infty$ antes da interação ser ligada de forma adiabática, os possíveis infinitos serão unicamente definidos por meio de uma formulação covariante e diagonal das equações acima. Antes de estender teoricamente a análise, é necessário que esses dois limites existam

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \psi(x, \alpha), \\ A_\mu(x) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} A_\mu(x, \alpha) \end{aligned} \quad (2.58)$$

Fisicamente, o comportamento adiabático está relacionado com a taxa de interação entre as partículas. O operador evolui de forma suave e contínua, satisfazendo assim as equações de movimento. O limite existe para desenvolver a estrutura causal e restaurar os objetos covariantes físicos que podem diagonalizar o hamiltoniano completo.

Comentários gerais

Neste capítulo foi demonstrado uma nova extensão do eletromagnetismo em que o termo de segunda ordem na derivada de gauge é acrescido a Lagrangiana [Podolsky](#)

[1942]. A primeira vista, a invariância de calibre somente é preservada apenas para um boson vetorial não massivo, o que com essa análise ingênua, levaríamos a concluir que o bóson massivo de Podolsky $A_{Pod}(x)$ quebraria a simetria de calibre em analogia com o modelo de Proca, já que a simetria abelina continua preservada. A primeira vista, a linearidade na equação de movimento de Podolsky, somente no caso livre, possibilita separar o propagador geral como uma soma da contribuição de uma partícula massiva e não massiva (2.15). No entanto, essa interpretação não corresponde ao caso interagente. A *GQED* é uma forma promissora de resolver e entender o comportamento do sistema materia-radiação.

Capítulo 3

Descrição de Heisenberg

Muitos métodos na TQC são propostos para resolver um variado número de problemas que vão desde a divergência em regiões de alta-energia, cálculo das amplitudes da seção de choque até as correções nos níveis de energia do átomo de Hidrogênio. Dentre as inúmeras ferramentas, podemos dividi-las em dois grupos disjuntos: métodos perturbativos e não-perturbativos. Esses métodos, largamente usados na TQC , permitem estudar os problemas físicos quando a solução analítica é inexistente. Embora a solução exata seja algo notório na descrição de sistemas quânticos, ela se torna uma exceção à regra quando se percebe o número de situações físicas que não chegam a esse tipo de resultado.

Antes de iniciarmos qualquer tratamento quântico, devemos tomar cuidado com o programa de quantização usado. A descrição de Heisenberg, usada pela primeira vez por Källén [Källén et al. 1972] para avaliar as flutuações quânticas, é válida em todo o espaço de Hilbert e permite descrever corretamente os objetos quânticos fundamentais. A princípio, nossa abordagem será bem diferente da convencional e aplicaremos a estrutura da descrição de Heisenberg sem uma definição axiomática. Faremos uma rápida introdução dos principais pontos da teoria perturbativa à la Källén com o propósito de esclarecer os assuntos abordados nos próximos capítulos.

O formalismo perturbativo padrão da TQC teve grande sucesso na obtenção de previsões físicas através dos experimentos de seção de choque. De acordo com a interpretação física convencional, a descrição da Interação é a base na exploração dos fenômenos quânticos não triviais. No entanto, as dúvidas em torno dos seus fundamentos quânticos mostraram várias complicações nessa descrição. Em essência, a descrição da Interação assume uma representação de Fock nos tempos assintóticos, governada pela hamiltoniana livre H_0 . Entretanto, a hamiltoniana interagente H_{int} não pode aniquilar o vácuo da teoria livre em que os fenômenos elementares ocorrem como a polarização do vácuo. Em outras palavras, não há um estado físico na descrição da Interação que se relaciona por meio de uma transformação unitária ao espaço de Fock, sendo assim, um cuidado maior deve-se ter, a fim de usar uma teoria consistente com os fundamentos físicos.

Este capítulo está organizado da seguinte forma. Na seção (3.1), um tanto técnica, abordaremos o método perturbativo sob a descrição de Heisenberg. Discutiremos mais descobertas sobre essa descrição quando construirmos a matriz $-S$ na seção (3.2). Finalmente, na seção (3.2) mais detalhes estão presentes sobre as dificuldades que a descrição da Interação acarreta nos fundamentos teóricos da TQC .

3.1 Teoria de Perturbação à la Källén

Nesta seção, introduziremos o método de perturbação "à la" Källén com a finalidade de investigar as correções radiativas da $GQED_4$ na descrição de Heisenberg. A principal diferença em relação aos métodos largamente conhecidos na literatura está na relevância do uso das equações diferenciais de movimento ao invés da expansão exponencial da Hamiltoniana de interação. Embora os dois procedimentos pareçam similares do ponto de vista operacional, já que a Hamiltoniana e as equações de movimento se comunicam, eles são distintos do ponto de vista conceitual da TQC . Explicaremos mais esse detalhe na seção (3.2).

Não é sempre possível encontrar um resultado analítico para um sistema interagente qualquer e nessas situações o método perturbativo se apresenta como uma ferramenta útil e eficaz. No entanto, algumas precauções ao utilizar a expansão de algum objeto de natureza matemática no estudo perturbativo. Entre elas temos que o resultado encontrado não pode diferir muito da solução conhecida ou livre, além de um parâmetro pequeno o suficiente, a tal ponto que o termo posterior seja menor que seu predecessor. As medidas experimentais dadas pela estrutura fina $\frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137} < 1$, (3 + 1 dimensões) mostram que o acoplamento de gauge é pequeno o suficiente. Assim, propomos um cenário para as expansões em série dos operadores

$$\psi(x) = \psi^{(0)}(x) + e\psi^{(1)}(x) + e^2\psi^{(2)}(x) + \dots \quad (3.1a)$$

$$\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}^{(0)}(x) + e\bar{\psi}^{(1)}(x) + e^2\bar{\psi}^{(2)}(x) + \dots \quad (3.1b)$$

$$A_\mu(x) = A_\mu^{(0)}(x) + eA_\mu^{(1)}(x) + e^2A_\mu^{(2)}(x) + \dots \quad (3.1c)$$

Substituindo essas expansões (3.1a), (3.1b) e (3.1c) na eq. (2.52b), temos

$$\begin{aligned} (\gamma\partial + m) \left(\psi^{(0)}(x) + e\psi^{(1)}(x) + e^2\psi^{(2)}(x) + \dots \right) &= \gamma^\mu \left[\left(A_\mu^{(0)}(x) + eA_\mu^{(1)}(x) \right. \right. \\ &\left. \left. + e^2A_\mu^{(2)}(x) + \dots \right) \right] \left(\psi^{(0)}(x) + e\psi^{(1)}(x) + e^2\psi^{(2)}(x) + \dots \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

O próximo passo será respeitar a ordem da constante de acoplamento ao igualar os diferentes termos da equação acima. Começaremos pela equação de ordem e^0

$$(\gamma\partial + m)\psi^{(0)}(x) = 0 \quad (3.3)$$

A equação de primeira ordem e é

$$(\gamma\partial + m)\psi^{(1)} = i\gamma^\nu A_\nu^{(0)}(x)\psi^{(0)}(x) \quad (3.4)$$

Ao resolver essa equação pelo mesmo procedimento usado na eq. (2.54), temos

$$\psi^{(1)}(x') = -i \int S^R(x - x') \gamma^\nu A_\nu^0(x') \psi^0(x') d^4x' \quad (3.5)$$

A equação de segunda ordem e^2 é

$$(\gamma\partial + m)\psi^{(2)} = i\gamma \left(A_\mu^{(0)}(x)\psi^{(1)}(x) + A_\mu^{(1)}(x)\psi^{(0)}(x) \right) \quad (3.6)$$

Resolvemos tal operação graças aos mesmos métodos matemáticos elementares utilizados na eq. (3.5). O operador de segunda ordem do férmion é

$$\begin{aligned} \psi^{(2)}(x) &= \frac{1}{4} \int d^4x' \int d^4x'' S_R(x-x') \gamma_\mu \{ \psi^0(x'), [\bar{\psi}(x''), \gamma^\mu \psi^0(x'')] \} G_R(x'-x'') \\ &\quad - \frac{1}{2} \int d^4x' \int d^4x'' S_R(x-x') \gamma^{\nu_1} S_R(x-x') \gamma^{\nu_2} \psi^0(x'') \{ A_{\nu_1}^0(x'), A_{\nu_2}^0(x'') \} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Uma simples aplicação do método recursivo conduz a uma fórmula geral do operador fermiônico

$$\psi^{(n+1)}(x) = -\frac{i}{2} \int d^4y S_R(x-x') \gamma^\mu \sum_{m=0}^n \{ A_\mu^{(m)}(x'), \psi^{(n-m)}(x') \}, \quad (3.8)$$

a simetrização acontece devido à propriedade de comutação a tempos iguais dos operadores Källén et al. (1972). Embora a simetrização seja dispensável, será conveniente para os futuros resultados. Substituindo as expansões dos operadores (3.1a), (3.1b) e (3.1c) na eq. (2.52b), temos

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\square}{m_P^2}\right) \square \left(A_\mu^{(0)}(x) + e A_\mu^{(1)}(x) + e^2 A_\mu^{(2)}(x) + \dots \right) &= -\frac{ie}{2} \left[\left(\bar{\psi}^{(0)}(x) + e \bar{\psi}^{(1)}(x) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. e^2 \bar{\psi}^{(2)}(x) + \dots \right), \gamma^\nu \left(\psi^{(0)}(x) + e \psi^{(1)}(x) + e^2 \psi^{(2)}(x) + \dots \right) \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

Reagruparemos essa equação respeitando a ordem do acoplamento do auge. Primeiro, renuremos os termos de ordem e^0

$$\left(1 - \frac{\square}{m_P^2}\right) \square A_\mu^{(0)} = 0 \quad (3.10)$$

Após isso, a equação de primeira ordem e é

$$\left(1 - \frac{\square}{m_P^2}\right) A_\mu^{(1)} = -\frac{ie}{2} \left([\bar{\psi}^{(1)}, \psi^{(0)}] + [\bar{\psi}^{(0)}, \psi^{(1)}] \right) \quad (3.11)$$

Ao resolver essa equação pelo mesmo procedimento usado na eq. (2.55), encontramos a perturbação de primeira ordem do campo de gauge

$$A_\mu^{(1)}(x) = \frac{i}{2} \int d^4x' G_R(x-x') [\bar{\psi}^{(0)}(x'), \gamma_\mu \psi^{(0)}(x')] \quad (3.12)$$

A equação de segunda ordem e^2 é

$$\left(1 - \frac{\square}{m_P^2}\right) A_\mu^{(2)} = -\frac{ie}{2} \left([\bar{\psi}^{(1)}, \psi^{(0)}] + [\bar{\psi}^{(1)}, \psi^{(1)}] + [\bar{\psi}^{(0)}, \psi^{(2)}] \right) \quad (3.13)$$

O termo de ordem e^2 é

$$\begin{aligned} A_\mu^{(2)}(x) &= \frac{1}{2} \int d^4x' \int d^4x'' G_R(x-x') \left([\bar{\psi}^{(0)}(x'), \gamma_\mu S_R(x'-x'') \gamma^\nu \psi^{(0)}(x'')] \right. \\ &\quad \left. + [\bar{\psi}^{(0)}(x'') \gamma_\nu S_A(x''-x'), \gamma_\mu \psi^{(0)}(x')] \right) A_\nu^{(0)}(x''). \end{aligned} \quad (3.14)$$

A relação recursiva geral do operador campo de gauge é

$$A_\mu^{(n+1)}(x) = \frac{i}{2} \int d^4x' G_R(x-x') \sum_{m=0}^n [\bar{\psi}^{(m)}(x') \gamma_\mu \psi^{(n-m)}(x')]. \quad (3.15)$$

No caso do operador conjugado da matéria $\bar{\psi}(x)$ segue o mesmo raciocínio da eq. (3.2). A equação de ordem e^0 é

$$\bar{\psi}^{(0)}(\gamma\partial + m)(x) = 0 \quad (3.16)$$

A equação de primeira ordem e é

$$\bar{\psi}^{(1)}(\gamma\partial + m) = i\gamma^\nu A_\nu^{(0)}(x)\psi^{(0)}(x) \quad (3.17)$$

O termo de ordem e

$$\bar{\psi}^{(1)}(x) = -i \int d^4x' \bar{\psi}^{(0)}(x') \gamma^\mu A_\mu^{(0)}(x') S_A(x'-x), \quad (3.18)$$

A equação de segunda ordem e^2 é

$$(\gamma\partial + m)\psi^{(2)} = i\gamma \left(A_\mu^{(0)}(x)\psi^{(1)}(x) + A_\mu^{(1)}(x)\psi^{(0)}(x) \right) \quad (3.19)$$

O termo de ordem e^2 é

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^{(2)}(x) &= \frac{1}{4} \int d^4x' \int d^4x'' \left\{ [\bar{\psi}^{(0)}(x''), \gamma_\mu \psi^{(0)}(x'')], \bar{\psi}^{(0)}(x') \right\} \gamma^\mu S_A(x'-x) G_A(x'-x'') \\ &\quad - \frac{1}{2} \int d^4x' \int d^4x'' \bar{\psi}^{(0)}(x'') \gamma^\nu S_A(x''-x') \gamma^\mu S_A(x'-x) \{A_\nu^{(0)}(x'), A_\mu^{(0)}(x'')\}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

O caso geral se escreve

$$\bar{\psi}^{(n+1)}(x) = -\frac{1}{2} \int d^4x' \sum_{m=0}^n \{ \bar{\psi}^{(m)}(x'), A_\mu^{(n-m)}(x') \} \gamma^\mu S_A(x'-x) \quad (3.21)$$

As fórmulas gerais (3.8), (3.15) e (3.21) possibilitam escrever um operador de ordem n em função dos operadores livres que diagonalizam a Hamiltoniana livre. As condições de validade (convergência) desse tratamento não estão bem postas por uma base matemática sólida e a sua utilização se dá pelos resultados alcançados. Vamos considerar uma expansão perturbativa do observável físico $j^\mu(x)$.

$$j_\mu = j_\mu^{(0)} + e j_\mu^{(1)} + e^2 j_\mu^{(2)} + \dots \quad (3.22)$$

É fácil calcular $j_\mu^{(n)}(x)$ por uma substituição direta das relações recursivas (3.8), (3.15) e (3.21). A princípio, o processo perturbativo de expansão do operador corrente pode ser levado até altas ordens. Apresentaremos os termos correspondentes com a comparação da ordem dos operadores. Assim, a corrente de ordem zero e é

$$j_\mu^{(0)} = \frac{ie}{2} [\bar{\psi}_0(x), \gamma_\mu \psi_0(x)] \quad (3.23)$$

A corrente de ordem e^2 é

$$j_\mu^{(1)} = \frac{ie^2}{2} [\bar{\psi}_1(x), \gamma_\mu \psi_0(x)] + \frac{ie^2}{2} [\bar{\psi}_0(x), \gamma_\mu \psi_1(x)] \quad (3.24)$$

Substituindo (3.5) e (3.18) em $j_\mu^{(1)}$, é fácil verificar que

$$j_\mu^{(1)}(x) = \frac{1}{2} \int d^4x' \left([\bar{\psi}^{(0)}(x), \gamma_\mu S_R(x-x') \gamma^\nu \psi^{(0)}(x')] + [\bar{\psi}^{(0)}(x') \gamma_\nu S_A(x'-x), \times \right. \\ \left. \gamma_\mu \psi^{(0)}(x)] \right) A_\nu^{(0)}(x'), \quad (3.25)$$

A corrente de ordem e^3 é

$$j_\mu^{(2)} = \frac{ie^3}{2} [\bar{\psi}_2(x), \gamma_\mu \psi_0(x)] + \frac{ie^3}{2} [\bar{\psi}_1(x), \gamma_\mu \psi_1(x)] + \frac{ie^3}{2} [\bar{\psi}_0(x), \gamma_\mu \psi_2(x)] \quad (3.26)$$

Substituindo as eqs. (3.5), (3.7), (3.18) e (3.20), encontramos

$$j_\mu^{(2)}(x) = \\ \frac{i}{8} \int d^4x' \int d^4x'' [\bar{\psi}^{(0)}(x), \gamma_\mu S_R(x-x') \gamma_\nu \{ \psi^{(0)}(x'), [\bar{\psi}^{(0)}(x''), \gamma^\nu \psi^{(0)}(x'')] \}] G_R(x'-x'') \\ - \frac{i}{4} \int d^4x' \int d^4x'' [\bar{\psi}^{(0)}(x), \gamma_\mu S_R(x-x') \gamma^{\nu_1} S_R(x'-x'') \gamma^{\nu_2} \psi^{(0)}(x'')] \{ A_{\nu_1}^{(0)}(x'), A_{\nu_2}^{(0)}(x'') \} \\ - \frac{i}{2} \int d^4x' \int d^4x'' [\bar{\psi}^{(0)}(x') \gamma^{\nu_1} A_{\nu_1}^{(0)}(x') S_A(x'-x), \gamma_\mu S_R(x-x'') \gamma^{\nu_2} A_{\nu_2}^{(0)}(x'') \psi^{(0)}(x'')] \\ + \frac{i}{8} \int d^4x' \int d^4x'' [\{ [\bar{\psi}^{(0)}(x''), \gamma^\nu \psi^{(0)}(x'')], \psi^{(0)}(x') \} \gamma_\nu S_A(x'-x), \gamma_\mu \psi^{(0)}(x)] G_R(x'-x'') \\ - \frac{i}{4} \int d^4x' \int d^4x'' [\bar{\psi}^{(0)}(x'') \gamma^{\nu_2} S_A(x''-x') \gamma^{\nu_1} S_A(x'-x), \gamma_\mu \psi^{(0)}(x)] \{ A_{\nu_1}^{(0)}(x'), A_{\nu_2}^{(0)}(x'') \} \quad (3.27)$$

Convém notar que as funções singulares $G_A(x'-x)$ e $S_A(x'-x)$ não codificam uma partícula *backward* no tempo. Elas são a consequência da ordem inversa do argumento $x-x'$. Ao contrário dos outros tratamentos da dinâmica de sistemas quânticos, Källén expande perturbativamente os operadores $(\psi(x), \bar{\psi}(x), A_\nu(x))$. Como pode ser notado, o operador interagente possui uma maior configuração eletrônica que no caso livre, ou seja, um maior número de processos físicos é envolvido nos elementos de matriz (3.7). Assim, o valor esperado no vácuo será obtido por meio da inserção de estados não degenerados de uma base completa e ortonormal $\sum_Z \int dx |Z\rangle \langle Z| = \mathbf{1}$. O primeiro exemplo de tal processo é a forma da eq. (3.7)

$$\langle 0 | \{ \psi^{(0)}(x'), [\bar{\psi}(x''), \gamma_\nu \psi^{(0)}(x'')] \} | q \rangle = \sum_Z \langle 0 | [\{ \psi^{(0)}(x') | Z \rangle \langle Z |, [\bar{\psi}(x''), \gamma_\nu \psi^{(0)}(x'')] \}] | q \rangle \quad (3.28)$$

Se fizermos $\psi^{(0)}(x') \rightarrow A$, $\bar{\psi}(x'') \rightarrow B$ e $\psi^{(0)}(x'') \rightarrow C$, e utilizarmos a igualdade $\{A, [B, C]\} = -\{[B, A], C\}$, juntamente com a equação

$$\langle q | [\bar{\psi}(x''), \psi(x')] | q \rangle = \langle 0 | [\bar{\psi}(x''), \psi(x')] | 0 \rangle = S^{(1)}(x'-x'') \quad (3.29)$$

encontramos o resultado

$$\langle 0 | \{ \psi^{(0)}(x'), [\bar{\psi}(x''), \gamma_\nu \psi^{(0)}(x'')] \} | q \rangle = -2S^{(1)}(x' - x) \gamma_\nu \langle 0 | \psi^{(0)}(x) | q \rangle \quad (3.30)$$

Pela questão tratada aqui, podemos inferir as configurações totais dos elementos de matriz acima juntamente com o princípio de exclusão de Pauli. O último termo da eq. (3.7) é

$$\begin{aligned} \langle 0 | \psi^{(0)}(x'') \{ A_{\nu_1}^{(0)}(x'), A_{\nu_2}^{(0)}(x'') \} | q \rangle &= \sum_Z \langle 0 | \psi^{(0)}(x'') | Z \rangle \langle Z | \{ A_{\nu_1}^{(0)}(x'), A_{\nu_2}^{(0)}(x'') \} | q \rangle \\ &= \langle 0 | \psi^{(0)}(x'') | q \rangle \langle q | \{ A_{\nu_1}^{(0)}(x'), A_{\nu_2}^{(0)}(x'') \} | q \rangle \\ &= \langle 0 | \psi^{(0)}(x'') | q \rangle \langle 0 | \{ A_{\nu_1}^{(0)}(x'), A_{\nu_2}^{(0)}(x'') \} | 0 \rangle \end{aligned} \quad (3.31)$$

Esse resultado é alcançado de forma simples ao analisar a quantidade total de operadores no elemento de matriz. Um rápido cálculo mostra que

$$\langle 0 | \psi^{(0)}(x'') \{ A_{\nu_1}^{(0)}(x'), A_{\nu_2}^{(0)}(x'') \} | q \rangle = \delta_{\nu_1 \nu_2} D^{(1)}(x' - x) \langle 0 | \psi^{(0)}(x) | q \rangle \quad (3.32)$$

O cálculo dessas correções leva a resultados razoáveis e o seu desenvolvimento a altas ordens é direto ao considerar apenas as bases teóricas da quantização canônica.

3.2 Matriz- S

O objetivo desta seção é descrever a matriz- S , responsável pela estrutura de processos físicos na descrição de Heisenberg, a fim de contornar as inconsistências já apontadas pelo Teorema de Haag [Haag 1955]. Uma das abordagens no estudo da matriz- S é através de uma estrutura perturbativa, ou seja, expressando essa matriz como uma expansão em torno de um acoplamento pequeno.

Vale ressaltar que a idéia por trás da descrição de interação é a separação do Hamiltoniano total em uma parte livre e interagente. Por outro lado, a descrição de Heisenberg admite um processo análogo no qual podemos construir os operadores (ψ, A_μ) por uma superposição homogênea e não homogênea da solução da equação de movimento. Na descrição de Heisenberg, a matriz- S conecta os estados assintóticos antes do espalhamento $(\psi, A_\mu)(t = -\infty)$ e depois do espalhamento $(\psi, A_\mu)(t = +\infty)$, por meio da seguinte eq. $(\psi, A_\mu)(+\infty) = S(\psi, A_\mu)(-\infty)$.

Seguimos a metodologia de Källén [Källén et al. 1972] para lançar alguma luz sobre as correções radiativas da $GQED_4$. Assim, concentraremos nossa atenção em escrever os termos perturbativos da matriz- S na $GQED_4$, que possui uma extensão direta à QED_4 . A demonstração pretendida nessa seção é fornecer uma base teórica sem uma prova matemática rigorosa. Antes de qualquer progresso, devemos reforçar o conceito de limite adiabático no processo de espalhamento. Em primeiro lugar, a interação deve sempre ser ativada adiabaticamente no tempo inicial ($x_o \rightarrow -\infty$) e desligada no tempo final ($x_o \rightarrow +\infty$). Esse aparato auxiliar, codificado pelo parâmetro α , é requerido tanto do ponto de vista matemático quanto físico. Primeiro, a matriz- S é um funcional e segundo os operadores livres são os objetos que constroem tanto a interação dos vértices quanto o estado assintótico. A partir dos métodos sistemáticos usados na seção anterior, escreveremos o conjunto de soluções para as equações de movimento (2.52a) e (2.52b).

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \psi^{(in)}(x) - ie \int d^3x' S_R(x-x') \gamma_\nu A^\nu(x') \psi(x') \\
A_\mu(x) &= A_\mu^{(in)}(x) + \frac{ie}{2} \int d^3x' G_R(x-x') [\bar{\psi}(x'), \gamma_\mu \psi(x')]
\end{aligned} \tag{3.33}$$

devido à solução não homogênea conter as funções retardadas, os operadores livres $(A^{(0)}, \psi^{(0)})$ no limite $x_o \rightarrow -\infty$ são os *incoming operator* $(A^{(in)}, \psi^{(in)})$. Naturalmente, podemos considerar também as função singulares avançadas na solução das equações diferenciais (2.52a) e (2.52b)

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \psi^{(out)}(x) - ie \int d^3x' S_A(x-x') \gamma_\nu A^\nu(x') \psi(x') \\
A_\mu(x) &= A_\mu^{(out)}(x) + \frac{ie}{2} \int d^3x' G_A(x-x') [\bar{\psi}(x'), \gamma_\mu \psi(x')]
\end{aligned} \tag{3.34}$$

onde $(A_\mu^{(out)}, \psi^{(out)})$ são definidos no limite $x_o \rightarrow +\infty$ para os operadores livres $(A_\mu^{(0)}, \psi^{(0)})$ e freqüentemente chamados de *outgoing operators*. Fisicamente, eles correspondem ao valor final de (A_μ, ψ) quando desligamos adiabaticamente a interação. Em outras palavras, a interação desaparece no limite $x_o \rightarrow +\infty$ e, portanto, o operador é governado pelas equações do operador livre. Além disso, também é essencial que os *ingoing* e *outgoing* operadores obedeçam a mesma relação de comutação dos operadores livres

$$\begin{cases}
\{\bar{\psi}_a^{(in)}(x), \psi_b^{(in)}(x')\} = -iS_{ba}(x'-x), \\
[A_\mu^{(in)}(x), A_\nu^{(in)}(x')] = -i\delta_{\mu\nu}G(x'-x), \\
[A_\mu^{(in)}(x), \psi_b^{(in)}(x')] = 0,
\end{cases} \tag{3.35}$$

e

$$\begin{cases}
\{\bar{\psi}_a^{(out)}(x), \psi_b^{(out)}(x')\} = -iS_{ba}(x'-x), \\
[A_\mu^{(out)}(x), A_\nu^{(out)}(x')] = -i\delta_{\mu\nu}G(x'-x), \\
[A_\mu^{(out)}(x), \psi_b^{(out)}(x')] = 0.
\end{cases} \tag{3.36}$$

A justificativa dessas regras de comutação diz respeito ao fato dos operadores livres, *ingoing* e *outgoing* compartilharem as mesmas equações diferenciais de movimento. Esse cenário ilustra que os operadores livres convergem para os operadores *ingoing* e *outgoing* em $(x_o \rightarrow -\infty)$ e $(x_o \rightarrow +\infty)$, respectivamente, Dyson [1949]. Para ser mais preciso, Haag exigia que essa transformação fosse uma convergência forte

$$\begin{aligned}
\lim_{x_o \rightarrow -\infty} \|\psi(x) - \psi^{(in)}(x)\| &= 0, \\
\lim_{x_o \rightarrow -\infty} \|A_\mu(x) - A_\mu^{(in)}(x)\| &= 0,
\end{aligned} \tag{3.37}$$

O limite existe para criar a estrutura causal e restaurar os objetos covariantes que podem diagonalizar a Hamiltoniano total Bogolubov et al. [1975]. Precisamos dessas relações nas eqs. (3.37) por uma perspectiva matemática e física. Em primeiro lugar, assumimos uma interação ligada $(x_o \rightarrow -\infty)$ e desligada $(x_o \rightarrow +\infty)$ adiabaticamente no tempo. Esse limite adiabático, portanto, reconhece a geração de estados assintóticos como um resultado de operadores livres. Assim, chegamos, sem dificuldade, a uma conclusão importante. Uma transformação canônica deve conectar os operadores assintóticos $(A_\mu^{(in)}, \psi^{(in)})$ e $(A_\mu^{(out)}, \psi^{(out)})$ uma vez que ambos estabelecem a mesma relação de comutação canônica. Logo,

$$\begin{aligned}\psi^{(out)}(x) &= S^{-1} \psi^{(in)}(x) S \\ A_\mu^{(out)}(x) &= S^{-1} A_\mu^{(in)}(x) S\end{aligned}\tag{3.38}$$

o operador S deve ser unitário, pois relaciona dois conjuntos de operadores ortogonais

$$SS^* = S^*S = \mathbb{1}\tag{3.39}$$

Os operadores de *ingoing* e *outgoing* residem nos *ingoing* \mathcal{H}_{in} e *outgoing* \mathcal{H}_{out} espaços de Hilbert, respectivamente. Com argumentos desenvolvidos até o momento, podemos construir um mapa unitário $S : \mathcal{H}_{in} \rightarrow \mathcal{H}_{out}$ tal que, de forma análoga a (3.38), o Hamiltoniano em $x_o \rightarrow +\infty$ pode ser decomposto em função do Hamiltoniano em $x_o \rightarrow -\infty$

$$H^{(0)}(\psi^{(out)}, A_\mu^{(out)}) = S^{-1} H^{(0)}(\psi^{(in)}, A_\mu^{(in)}) S,\tag{3.40}$$

A equação acima estabelece uma relação isomórfica devido à representação unitária das relações canônicas de comutação por meio da eqs. (3.35) e (3.36) Bogolubov et al. [1975]¹. Ao introduzir o conjunto de vetores próprios $|n\rangle$ de $H^{(0)}(\psi^{(in)}, A_\mu^{(in)})$, obtemos

$$\begin{aligned}H^{(0)}(A^{(in)}, \psi^{(in)})|n\rangle &= E_n|n\rangle, \\ H^{(0)}(A^{(out)}, \psi^{(out)})S^{-1}|n\rangle &= E_n S^{-1}|n\rangle,\end{aligned}\tag{3.41}$$

onde $|n\rangle$ e $S^{-1}|n\rangle$ são os autoestados iniciais ($x_o \rightarrow -\infty$) e finais ($x_o \rightarrow +\infty$), respectivamente. Com $|n\rangle = |n_k\rangle|n_q\rangle$ caracterizado como um produto tensorial no qual $|n_q\rangle$ (número de férmions) é o autovetor de $H^{(0)}(\psi^{(0)})$ e $|n_k\rangle$ (número de fótons) é o autovetor de $H^{(0)}(A_\mu^{(0)})$. Nesse momento, estabelecemos uma formulação geral como um primeiro passo na direção de uma matriz- S perturbativa. Ao substituir as eqs. (3.33) por (3.34), temos

$$\begin{aligned}\psi^{(out)}(x) &= S^{(-1)}\psi^{(0)}(x)S = \psi^{(0)}(x) - ie \int d^3x' S(x-x')\gamma_\nu A^\nu(x')\psi(x') \\ A_\mu^{(out)}(x) &= S^{(-1)}A_\mu^{(0)}(x)S = A_\mu^{(0)}(x) + \frac{ie}{2} \int d^3x' G(x-x')[\bar{\psi}(x'), \gamma_\mu\psi(x')].\end{aligned}\tag{3.42}$$

Na prática, adotamos a notação $(A_\mu^{(0)}, \psi^{(0)})$ sem perda de significado físico ao *ingoing* operadores. Reescrevemos as equações acima para ter uma visão sistemática da matriz- S

$$\begin{aligned}[S, \psi^{(0)}] &= -S \int d^3x' S(x-x')ie\gamma^\mu A_\mu(x')\psi(x'), \\ [S, A_\mu^{(0)}] &= -S \int d^3x' D(x-x')\frac{ie}{2}[\bar{\psi}(x'), \gamma_\mu\psi(x')]\end{aligned}\tag{3.43}$$

Devemos sublinhar que a ligação entre a descrição de Heisenberg e da Interação tem apenas a mesma forma matemática de uma expansão perturbativa, mas os conceitos físicos subjacentes transformam essa estrutura numa abordagem diferente da matriz de espalhamento Dyson [1951b]. As consequências dedutivas do Teorema de Haag mostram inconsistências na caracterização perturbativa da expansão da matriz- S . Uma delas é

¹Assumimos a completude assintótica, freqüentemente escrita por $\mathcal{H}_{in} = \mathcal{H}_o = \mathcal{H}_{out}$, em que não há estado ligado nas regiões assintóticas.

que não podemos escrever H e H_o no mesmo espaço de Hilbert, pois elas agem em espaços ortogonais na descrição da Interação, assim, a transformação unitária global da eq. (3.38) não é mais aplicada.

A matriz- S na descrição de Heisenberg é apropriada para realizar o processo de espalhamento e não apresenta inconsistências físicas. Usando o acoplamento de gauge e pela mesma razão dada nas expansões em (3.1a) á (3.1c), a expansão do operador S em séries de potência é

$$S = \mathbb{1} + eS^{(1)} + e^2S^{(2)} + \dots \quad (3.44)$$

Substituindo (3.44) em (3.43), a aproximação da primeira ordem é

$$[S^{(1)}, \psi^{(0)}(x)] = -S \int d^3x' S(x-x') ie\gamma^\mu A_\mu^{(0)}(x') \psi^{(0)}(x'), \quad (3.45a)$$

$$[S^{(1)}, A_\mu^{(0)}(x)] = -S \int d^3x' D(x-x') \frac{ie}{2} [\bar{\psi}^{(0)}(x'), \gamma_\mu \psi^{(0)}(x')]. \quad (3.45b)$$

Após algumas manipulações algébricas, o termo $S^{(1)}$ é

$$S^{(1)} = -ie \int d^3x : \bar{\psi}^{(0)}(x) \gamma^\mu \psi^{(0)}(x) : A_\mu^{(0)}(x) + s^{(1)}, \quad (3.46)$$

onde $s^{(1)}$ é um termo reminiscente da eq. (3.45a). Uma consequência da unitariedade da matriz- S é a relação $S^{(1)} = -S^{*(1)}$, que reflete $s^{(1)}$ como um número imaginário puro. Para simplificar, consideramos $s^{(1)}$ igual a zero. Também podemos multiplicar a eq. (3.46) por $e^{i\delta}$ com $\delta \in \mathbb{R}$ o que influencia apenas as flutuações no vácuo sem alterar o processo de espalhamento. A seguir, iremos nos concentrar no termo perturbativo de segunda ordem $S^{(2)}$ e para tal tarefa utilizaremos os procedimentos anteriores

$$S^{(2)} = \frac{e^2}{4} \int d^3x' d^3x'' T(: \bar{\psi}^{(0)}(x') \gamma^{\nu_1} \psi^{(0)}(x') :: \bar{\psi}^{(0)}(x'') \gamma^{\nu_2} \psi^{(0)}(x'') :) \times T(A_{\nu_1}^{(0)}(x') A_{\nu_2}^{(0)}(x'')). \quad (3.47)$$

Apesar das considerações acima parecerem complicadas, a obtenção do termo $S^{(n)}$ é direto. Após um longo cálculo, podemos estabelecer a representação perturbativa geral da matriz- S como

$$S = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^3x' \dots \int d^3x^{(n)} T(H_I(x') \dots H_I(x^{(n)})) \quad (3.48)$$

onde T denota o ordenamento temporal [Weinberg et al. \[1995\]](#). Usamos uma simplificação na notação da Hamiltoniana interagente $H_I(x') = H_I(A_\mu(x'), \psi(x'))$, que em nosso caso é $H_I(x') = : \bar{\psi}^{(0)}(x') \gamma^\mu \psi^{(0)}(x') : A_\mu(x')$. Devemos enfatizar que a descrição de Heisenberg e da Interação possuem apenas a mesma forma matemática de uma expansão perturbativa, contudo, os seus conceitos físicos subjacentes envolvidos tornam essas duas estruturas completamente diferentes.

Comentários adicionais

Embora a matemática por trás do método de Källén seja bem conhecida, a ideia original é restaurar a aplicabilidade dos esquemas de regularização para um sistema

de interação não-trivial. Ao olharmos com atenção, a descrição da Interação contorna os pressupostos do Teorema de Haag. Se lembrarmos bem, o esquema de regularização *cutoff* quebra a Invariância de Poincaré, e o *finite volume lattice* restaura os graus finitos de liberdade. Essas técnicas demonstram o sucesso da descrição da Interação quando comparamos as observações com as previsões teóricas. Além disso, a propriedade ingênua da descrição da Interação na qual podemos dividir o Hamiltoniano total, H por H_{int} e H_o , evita uma representação de Fock do vácuo interagente de H_{int} . Com isso em mente, podemos afirmar que a descrição de Heisenberg garante um vácuo que seja invariante sob as transformações do grupo Euclidiano, uma vez que os operadores assintóticos e livres possuem a mesma relações canônicas de comutação [Yang and Feldman \[1950\]](#).

A descrição de Heisenberg e da Interação são estruturas equivalentes na MQ não relativística (graus finitos de liberdade) em contraste com a TQC (graus infinitos da liberdade). Em outras palavras, há uma transformação unitária entre ambas as relações canônicas de comutação e, portanto, seus observáveis admitem o mesmo valor esperado no vácuo. Apesar do excelente sucesso empírico, a descrição da Interação não possui uma representação unitária nas relações canônicas de comutação em tempos diferentes [Streater and Wightman \[2000\]](#). Essa afirmação física garante uma não-representação de Fock para os seus operadores de interação. Além disso, essas particularidades não são apenas sutileza matemáticas, mas sim influenciam na coerência física dos modelos da TQC .

Exploraremos a descrição de Heisenberg na interpretação das correções radiativas de um loop. Essa descrição não é apenas uma simples alternativa matemática para contornar a descrição da Interação, mas sim um aparato consistente na definição dos objetos quânticos. A principal característica da descrição de Heisenberg é ter operadores definidos dentro de todo o espaço de Hilbert, equivalência unitária da representação Fock e um mapa linear entre os espaços assintóticos e livres.

Capítulo 4

Correções Radiativas $GQED_4$

O objetivo deste capítulo é tratar os fenômenos radiativos com base nos conceitos e ferramentais teóricos dos capítulos 2 e 3. Primeiramente, antes de efetuarmos os cálculos necessários, sugerimos uma reorganização dos termos da corrente da equação (3.27), pois assim, evidenciaremos os estados intermediários decorrentes da correção radiativa. Já, a interpretação física será evidenciada de forma mais clara à posteriori. Os estados de transição possíveis por $j_\mu^{(2)}(x)$ são facilmente visualizados através da composição de operadores livres. Dentre as várias configurações fisicamente permitidas, devemos destacar os elementos de matrizes que fornecem as flutuações quânticas em um loop.

$$\begin{aligned}
 e^3 \langle q | j_\mu^{(2)}(x) | q' \rangle &= \frac{ie}{2} \int d^4x' \int d^4x'' \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x), \gamma_\mu S_R(x-x')] \sum (x'-x'') \psi^{(0)}(x'') | q' \rangle + \\
 &\quad \frac{ie}{2} \int d^4x' \int d^4x'' \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x''), \sum (x''-x') S_A(x'-x), \gamma_\mu \psi^{(0)}(x)] | q' \rangle + \\
 &\quad \frac{ie}{2} \int d^4x' \int d^4x'' \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x'), \Gamma_\mu(x'-x, x-x'') \psi^{(0)}(x'')] | q' \rangle + \\
 &\quad \frac{ie}{2} \int d^4x' \int d^4x'' \Pi_{\mu\nu}(x-x') G^R(x'-x'') \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x''), \gamma^\nu \psi^{(0)}(x'')] | q' \rangle,
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

e

$$\begin{aligned}
 e^3 \langle 0 | j_\mu^{(2)}(x) | q, q' \rangle &= \frac{ie}{2} \int d^4x' \int d^4x'' \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x), \gamma_\mu S_R(x-x')] \sum (x'-x'') \psi^{(0)}(x'') | q' \rangle + \\
 &\quad \frac{ie}{2} \int d^4x' \int d^4x'' \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x''), \sum (x''-x') S_A(x'-x), \gamma_\mu \psi^{(0)}(x)] | q' \rangle + \\
 &\quad \frac{ie}{2} \int d^4x' \int d^4x'' \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x'), \Gamma_\mu(x'-x, x-x'') \psi^{(0)}(x'')] | q' \rangle + \\
 &\quad \frac{ie}{2} \int d^4x' \int d^4x'' \Pi_{\mu\nu}(x-x') G^R(x'-x'') \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x''), \gamma^\nu \psi^{(0)}(x'')] | q' \rangle,
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

4.1 Polarização do vácuo $\Pi_{\mu\nu}$

Nesta seção investigamos os efeitos das teorias de derivadas de altas ordem para compreender os aspectos qualitativos e quantitativos da polarização do vácuo. Posteriormente, discutiremos a implicação física da renormalização da carga e a influência do comprimento de Podolsky na polarização do vácuo. Esse fenômeno já era conhecido desde a mecânica quântica não relativística através das primeiras medições do Lamb shift. No entanto, não existia ainda na época uma base sólida para suportar um estudo mais aprofundado desse efeito. Com o desenvolvimento da TQC e do grupo de renormalização, a descrição da auto-energia do elétron foi totalmente esclarecida. Logo abaixo, estudaremos o seu efeito na descrição de Heisenberg.

Primeiramente, um campo externo fraco e não-quantizado $A_\mu^{ext}(x)$ é produzido no sistema. Antes de continuarmos, algumas observações devem ser feitas sobre o significado físico de $A_\mu^{ext}(x)$. Primeiro, o campo externo é independente da configuração eletrodinâmica do sistema. Segundo, não se pode escrevê-lo como uma superposição de operadores de criação e aniquilação. Finalmente, não se pode gera-lo pela dinâmica da densidade de partículas do sistema. Uma maneira simples de inserir o campo externo é por meio do termo $j^\mu A_\mu^{ext}$ na Lagrangiana. As equações de movimento (2.52a) e (2.52b) são reescritas como

$$\begin{aligned} (1 - a^2 \square) \square A^\nu &= -\frac{ie}{2} [\bar{\psi}(x), \gamma^\nu \psi(x)] \\ (\gamma \partial + m) \psi(x) &= ie \gamma (A(x) + A_{ext}(x) \mathbb{1}) \psi(x) \end{aligned} \quad (4.3)$$

O operador identidade $\mathbb{1}$ é adicionado por motivos de consistência física e matemática. No cálculo da polarização é a corrente que deve ser analisada cuidadosamente. Seguindo a eq. (3.22), temos

$$\begin{aligned} j^\mu(x) &= \frac{e}{2} [\bar{\psi}^0(x), \gamma^\mu \psi^0(x)] \\ &\quad - \frac{e^2}{2} \int d^4 y [\bar{\psi}^{(0)}(x), \gamma^\mu S_R(x-y) \gamma^\nu \psi^{(0)}(y)] (A_\nu^{(0)}(y) + A_\nu^{ext}(y)) \\ &\quad - \frac{e^2}{2} \int d^4 y [\bar{\psi}^{(0)}(y) \gamma^\nu S_A(y-x) \gamma^\mu, \psi^{(0)}(x)] (A_\nu^{(0)}(y) + A_\nu^{ext}(y)) + \\ &\quad + e^2 j^{(2)\mu} + \dots \end{aligned} \quad (4.4)$$

O valor esperado do vácuo é

$$\begin{aligned} \langle 0 | j^\mu(x) | 0 \rangle &= \frac{e}{2} \langle 0 | [\bar{\psi}^0(x), \gamma^\mu \psi^0(x)] | 0 \rangle \\ &\quad - \frac{e^2}{2} \int d^4 y \langle 0 | [\bar{\psi}^{(0)}(x), \gamma^\mu S_R(x-y) \gamma^\nu \psi^{(0)}(y)] | 0 \rangle (A_\nu^{(0)}(y) + A_\nu^{ext}(y)) - \\ &\quad - \frac{e^2}{2} \int d^4 y \langle 0 | [\bar{\psi}^{(0)}(y) \gamma^\nu S_A(y-x) \gamma^\mu, \psi^{(0)}(x)] | 0 \rangle (A_\nu^{(0)}(y) + A_\nu^{ext}(y)) + \\ &\quad + e^2 \langle 0 | j^{(2)\mu} | 0 \rangle + \dots \end{aligned} \quad (4.5)$$

O valor esperado do vácuo dessa corrente não é nula devido, unicamente, ao campo $A_\mu^{ext}(x)$. O nosso interesse reside, agora, nas contribuições da eq. (3.24) em que existe

apenas um momento interno de integração (1-loop). Um cálculo mais explícito através das propriedades dos traços espinoriais¹ revela que o segundo termo da equação acima é

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | [\bar{\psi}^{(0)}(x), \gamma^\mu S_R(x-y) \gamma^\nu \psi^{(0)}(y)] | 0 \rangle = \\
& \langle 0 | (\bar{\psi}_{\alpha_2}^{(0)}(x) \gamma_{\alpha_2 \alpha_3}^\mu S_R^{\alpha_3 \alpha_4}(x-y) \gamma_{\alpha_4 \alpha_5}^\nu \psi_{\alpha_5}^{(0)}(y)) - (\gamma_{\alpha_2 \alpha_3}^\mu S_R^{\alpha_3 \alpha_4}(x-y) \gamma_{\alpha_4 \alpha_5}^\nu \psi_{\alpha_5}^{(0)}(y) \bar{\psi}_{\alpha_2}^{(0)}(x)) | 0 \rangle \\
& = Tr[\gamma^\mu S_R(x-y) \gamma^\nu S^{(1)}(y-x)]
\end{aligned} \tag{4.6}$$

e, ao realizar o mesmo para o terceiro termo da eq. (4.5)

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | [\bar{\psi}^{(0)}(y) \gamma^\nu S_A(y-x) \gamma^\mu, \psi^{(0)}(x)] | 0 \rangle = \\
& \langle 0 | (\bar{\psi}_{\alpha_2}^{(0)}(y) \gamma_{\alpha_2 \alpha_3}^\nu S_A^{\alpha_3 \alpha_4}(y-x) \gamma_{\alpha_4 \alpha_5}^\mu \psi_{\alpha_5}^{(0)}(x)) - (\psi_{\alpha_5}^{(0)}(y) \bar{\psi}_{\alpha_2}^{(0)}(x) \gamma_{\alpha_2 \alpha_3}^\nu S_A^{\alpha_3 \alpha_4}(y-x) \gamma_{\alpha_4 \alpha_5}^\mu) | 0 \rangle \\
& = Tr[\gamma^\mu S^{(1)}(x-y) \gamma^\nu S_A(y-x)].
\end{aligned} \tag{4.7}$$

obtemos

$$\Pi^{\mu\nu}(x-y) = -\frac{e^2}{2} \left[Tr[S_R(x-y) \gamma^\nu S^{(1)}(y-x) \gamma^\mu] + Tr[\gamma^\mu S^{(1)}(x-y) \gamma^\nu S_A(y-x)] \right]. \tag{4.8}$$

Lembrando que o efeito a ser tratado aqui corresponde à uma aproximação linear dada pela ação de uma fonte externa (sinal de entrada) que produz uma corrente induzida (sinal de saída). Seguindo o mesmo raciocínio do Teorema da resposta linear, ver Apêndice B, o tensor de polarização do vácuo, $\Pi^{\mu\nu}(x-y)$ é representado matematicamente abaixo

$$\langle 0 | j^\mu(x) | 0 \rangle = \int d^4y \Pi^{\mu\nu}(x-y) A_\nu^{ext}(y), \tag{4.9}$$

em que $\langle 0 | j^\mu(x) | 0 \rangle$ expressa a interação do fóton com as partículas e antipartículas criadas no vácuo pela presença de $A_\mu^{ext}(x)$. Em outras palavras, $\langle 0 | j^\mu(x) | 0 \rangle$ expressa a transformada de Fourier da corrente induzida do termo $\Pi^{\mu\nu} A_\nu^{ext}$. A equação acima nos revela que a observável $\Pi^{\mu\nu}$ flutua na presença de um campo externo e essa flutuação deverá ser entendida por um processo de dissipação ou absorção.

O tensor $\Pi^{\mu\nu}(x-y)$ é escrito como um tensor de segunda ordem em (3+1) dimensões que obedece as mesmas simetrias de $\langle 0 | j^\mu | 0 \rangle$. No espaço de Fourier, $\Pi^{\mu\nu}(p)$ pode ser decomposta por uma estrutura tensorial irredutível em subgrupos do grupo de Lorentz $SO^+(3,1)$, cujo valor esperado da corrente se dá pela convolução de $\Pi^{\mu\nu}(x-y)$ e $A_\nu^{ext}(y)$. O efeito de polarização pode ser estudado por meio de uma decomposição das variáveis em componentes longitudinais e transversais. A polarização longitudinal e escalar não são excitações física em torno de um vácuo no espaço de Hilbert, mas somente responsáveis pela redefinição do campo $A_\mu(x)$. Os graus de liberdade transversais atuam nos estados físicos do sistema na qual trataremos com maiores detalhes ao longo do capítulo. Vemos que a forma mais geral do tensor de polarização é

¹Ver apêndice C.

$$\Pi^{\mu\nu}(p) = B(p)p^\mu p^\nu + \delta^{\mu\nu}H(p), \quad (4.10)$$

e que pelo Teorema de Noether, a simetria abeliana $U(1)$ gera a conservação da corrente que no espaço de Fourier toma a forma de $p^\mu \Pi_{\mu\nu}(p) = 0$. Vemos claramente que $B(p) = -H(p)$. Assim, o tensor pode ser escrito convenientemente igual à

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = B(p)(p_\mu p_\nu - p^2 \delta_{\mu\nu}) \quad (4.11)$$

Faremos a transformada de Fourier da eq. (4.8) com o auxílio de

$$\Pi_{\mu\nu}(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip(x-x')} \Pi_{\mu\nu}(p) \quad (4.12)$$

Por meio das equações (2.42), (2.43) e (2.45), a polarização (4.8) resulta em

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(p) = & \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p' d^4p'' \delta^4(p - p' + p'') Tr[\gamma_\mu(i\gamma p' - m)\gamma_\nu(i\gamma p'' - m)] \times \\ & \left(\delta^4(p' + m^2) \left(\mathcal{P} \frac{1}{p^{2''} + m^2} - i\pi\epsilon(p'') \delta^4(p^{2''} + m^2) \right) + \right. \\ & \left. \delta^4(p'' + m^2) \left(\mathcal{P} \frac{1}{p^{2'} + m^2} + i\pi\epsilon(p') \delta^4(p' + m^2) \right) \right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

ao mutiplicar ambos os lados por ip_μ ,

$$\begin{aligned} ip^\mu \Pi_{\mu\nu}(p) = & \frac{e^2}{16\pi^3} \int d^4p' d^4p'' \delta^4(p - p' + p'') \left(Tr[(i\gamma p'' - m)(i\gamma p' + m)(i\gamma p' - m)\gamma_\nu] \right. \\ & \left. - Tr[(i\gamma p'' - m)(i\gamma p'' + m)(i\gamma p' - m)\gamma_\nu] \right) \left(\delta^4(p' + m^2) \left[\mathcal{P} \frac{1}{p^{2''} + m^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. i\pi\epsilon(p'') \delta^4(p^{2''} + m^2) \right] + \delta^4(p'' + m^2) \left[\mathcal{P} \frac{1}{p^{2'} + m^2} - i\pi\epsilon(p'') \delta^4(p^{2''} + m^2) \right] \right. \\ & \left. + \delta^4(p'' + m^2) \left[\mathcal{P} \frac{1}{p^{2'} + m^2} + i\pi\epsilon(p') \delta^4(p' + m^2) \right] \right) \\ = & \frac{e^2}{4\pi^3} \int d^4p' d^4p'' \delta^4(p - p' + p'') \{ p'_\nu (p^{2''} - m^2) - p''_\nu (p^{2'} - m^2) \} \times \\ & \left\{ \delta^4(p' + m^2) \left[\mathcal{P} \frac{1}{p^{2''} + m^2} - i\pi\epsilon(p'') \delta^4(p^{2''} + m^2) \right] + \delta^4(p'' + m^2) \times \right. \\ & \left. \left[\mathcal{P} \frac{1}{p^{2'} + m^2} + i\pi\epsilon(p') \delta^4(p' + m^2) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.14)$$

O próximo passo será calcular a corrente observada. As integrais do tipo $\int dp'' p''_\nu \delta(p^{2''} - m^2)$ são iguais a zero se $\nu = 0$ ou $\nu = i$. Portanto, a integral acima desaparece e o Teorema de Noether é garantido. Retornando ao cálculo de $\Pi^{\mu\nu}(p)$, o traço da eq. (4.11) conduz à

$$\begin{aligned}
B(p) &= -\frac{1}{3p^2}\Pi_{\mu\mu}(p) = \int \frac{d^4p'}{48\pi^3p^2} d^4p'' \delta^4(p-p'+p'') \text{Tr}[\gamma_\mu(i\gamma p' - m)\gamma_\mu(i\gamma p'' - m)] \\
&\times \left\{ \delta^4(p'^2 + m^2) \left(\mathcal{P} \frac{1}{p'^2 + m^2} - i\pi\epsilon(p'') \delta^4(p'' + m^2) \right) + \delta^4(p''^2 + m^2) \left(\mathcal{P} \frac{1}{p''^2 + m^2} \right. \right. \\
&\left. \left. + i\pi\epsilon(p') \delta^4(p' + m^2) \right) \right\}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Dando sequência, calcularemos o valor imaginário de $B(p)$ que, fisicamente, corresponde à emissão de partículas e assim reflete a parte dissipativa ou absorptiva da polarização do vácuo.

$$\begin{aligned}
\text{Im}B(p) &= -\frac{1}{6\pi^2p^2} \int d^4p' [p'(p' - p) + 2m^2] \delta^4(p' + m^2) \delta^4((p - p')^2 + m^2) \times \\
&[\epsilon(p') + \epsilon(p - p')]
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Pelas propriedades da matriz gamma de Dirac no apêndice [C](#), temos $\text{Tr}[\gamma_\mu(i\gamma p' - m)\gamma_\nu(i\gamma p'' - m)] = 8\text{Tr}[p'(p' - p) + 2m^2]$. Então,

$$\begin{aligned}
&\text{Im}B(p) \\
&= -\frac{1}{6\pi^2p^2} \int \frac{d^3p'}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} [p'(p' - p) + 2m^2] \delta^4((p - p')^2 + m^2) [\epsilon(p') + \epsilon(p - p')] \\
&= -\frac{(m^2 - \frac{p^2}{2})}{12\pi^2p^2} \int \frac{d^3p'}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \left\{ \delta^4(p^2 - 2\mathbf{p}\mathbf{p}' + 2p_o\sqrt{\mathbf{p}'^2 + m^2}) \left[1 + \frac{p_o - \sqrt{\mathbf{p}'^2 + m^2}}{|p_o - \sqrt{\mathbf{p}'^2 + m^2}|} \right] \right. \\
&\left. + \delta^4(p^2 - 2\mathbf{p}\mathbf{p}' + 2p_o\sqrt{\mathbf{p}'^2 + m^2}) \left[-1 + \frac{p_o + \sqrt{\mathbf{p}'^2 + m^2}}{|p_o + \sqrt{\mathbf{p}'^2 + m^2}|} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

A integral desaparece se $p^2 < -4m^2$. Essa relação diz respeito ao nível de energia em que os efeitos da criação de partículas se manifestam, uma vez que $4m^2$ é a energia limiar de criação de um par (elétron-pósitron) [\[Källén et al. 1972\]](#). devido à invariância de Lorentz ser preservada nas etapas realizadas até agora, o cálculo da integral acima é mais fácil se adotarmos o referencial de repouso $\mathbf{p} = 0$. Veremos que a integral acima assumi a forma

$$\begin{aligned}
\text{Im}B(p) &= \frac{e^2}{3\pi} \left(1 + \frac{2m^2}{p_o^2} \right) \int_0^{\sqrt{p_o^2 - m^2}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + m^2}} \delta^4(2|p_o|\sqrt{x^2 + m^2} - p_o^2) \epsilon(p_o) \\
&= \frac{e^2}{3\pi} \left(1 + \frac{2m^2}{p_o^2} \right) \int_0^{\sqrt{p_o^2 - m^2}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + m^2}} \frac{\delta^4(x - \sqrt{p_o^2/4 - m^2})}{4\sqrt{p_o^2/4 - m^2}} \\
&= \frac{e^2}{3\pi} \left(1 + \frac{2m^2}{p_o} \right) \frac{(\sqrt{p_o^2/4 - m^2})^2}{p_o^2/2} \frac{1}{4\sqrt{p_o^2/4 - m^2}} \Theta\left(\frac{|p_o|}{2} - m\right)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Após um boost $p_o^2 \rightarrow -p^2$, o resultado geral é

$$\text{Im}B(p) = \frac{\pi\xi(p)\Pi^{(0)}(p^2)}{32} \tag{4.19}$$

em que

$$\Pi^{(0)}(p^2) = \frac{e^2}{12\pi^2} \left(1 - \frac{2m^2}{p^2}\right) \sqrt{1 + \frac{4m^2}{p^2}} \Theta(-p^2 - 4m) \quad (4.20)$$

A parte real da função $B(p)$ se obtém a partir da transformação de Hilbert da eq. (4.19)

$$\begin{aligned} \Re G(\mathbf{p}, p_o) &= \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{|x|} \frac{\bar{\Pi}^0(\mathbf{p}^2 - x^2)}{(x - p_o)} dx \\ &= \mathcal{P} \int_{4m^2}^{+\infty} \frac{\bar{\Pi}^0(-s)}{(s + p^2)} ds \end{aligned} \quad (4.21)$$

Usamos $x^2 - p_o^2 = s + p^2$. A parte imaginária e real se relacionam pois $B(p)$ é analítica [Källén et al. \[1972\]](#). Até agora, não tratamos do comportamento da corrente, e mantivemos os nossos esforços, apenas, no cálculo da função $B(p)$. Daremos uma pausa e abordaremos os aspectos físicos principais do operador corrente correspondente ao observável $\langle 0|j_\mu(x)|0\rangle$. Primeiro, pelo uso das eqs. (4.9) e (4.11), o valor esperado da corrente induzida assume a forma

$$\begin{aligned} \langle 0|j_\mu(x)|0\rangle &= \int d^4p d^4x' e^{ip(x-x')} B(p) [\square A_\mu^{(ext)}(x') - \partial_\mu \partial^\nu A_\nu^{(ext)}(x')] \\ &= - \int d^4p d^4x' e^{ip(x-x')} B(p) [j_\mu^{(ext)}(x')] \end{aligned} \quad (4.22)$$

É importante notar que o resultado observado experimentalmente equivale à soma de duas correntes físicas: externa e induzida

$$j_{ext}^\mu(x') + \langle 0|j^\mu(x')|0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p d^4x' [1 - B(p)] j_{ext}^\mu(x') e^{ip(x-x')} \quad (4.23)$$

O termo $1 - B(p)$, caso seja uma constante, atribuirá ao fenômeno de polarização do vácuo um rescalonamento da carga elétrica. No entanto, ao observar as deduções até o presente momento, $B(p)$ depende da escala de energia. Então, não podemos supor que $B(p)$ seja uma constante, mas mesmo assim, isso significa que $1 - B(p)$ seria um rescalonamento dependente do momento. Uma maneira de poder atribuir significado físico a corrente, sem violar os princípios gerais da *TQC*, seria ampliar seu aparato interpretativo.

É imediato verificar que a renormalização da carga elétrica, ou mais apropriadamente, uma subtração do nosso resultado por algum valor conhecido resolveria essa dificuldade. Não obstante, essa medida seria especificar o valor de $B(p)$ a um determinado nível de energia conhecido. Seguindo esse raciocínio, a medição da corrente no nível infravermelho em que a variação do momento ocorre de forma lenta ($p \approx 0$) é um valor conhecido na literatura, já que estamos tratando do regime clássico de interação entre duas correntes estacionárias. Uma vez delimitado esse valor, a corrente observada é definida como

$$j_{observada}^\mu = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p d^4x' [1 - B(p) + B(0)] j_{ext}^\mu(x') e^{ip(x-x')} \quad (4.24)$$

em que

$$B(p) - B(0) = \bar{\Pi}^0(p^2) - \bar{\Pi}^0(0) + i\pi\epsilon\bar{\Pi}^0(p^2) \quad (4.25)$$

A parte imaginária é finita, mas a parte real padece de divergência do tipo logarítmica $B(p)$, pois o cálculo da polarização realizou-se na soma de infinitos estados intermédios. A subtração realizada $B(p) - B(0)$ torna a polarização convergente

$$\bar{\Pi}^0(p^2) - \bar{\Pi}^0(0) = \int_0^{+\infty} \bar{\Pi}^0(-s) \left(\frac{1}{(s+p^2)} - \frac{1}{s} \right) ds = -p^2 \int_0^{+\infty} \frac{\bar{\Pi}^0(-s)}{s(s+p^2)} ds \quad (4.26)$$

É importante notar que a integral acima é convergente. Uma substituição de Euler leva a equação acima à

$$\bar{\Pi}^0(p^2) - \bar{\Pi}^0(0) = \frac{e^2 m^2 (1-\beta)^4}{3 \beta^2} \mathcal{P} \int_{-1}^0 d\alpha \frac{(1+\alpha)^2 (\alpha^2 - 4\alpha + 1)}{(\beta - \alpha)(\alpha - 1/\beta)(1-\alpha)^4} \quad (4.27)$$

por métodos elementares de cálculo de integração conduzem, a seguinte solução

Caso tenhamos $1 + \frac{4m^2}{p^2} > 0$, o logarítimo natural deverá ser trocado pela função arco tangente. Para valores pequenos de $\left| \frac{p^2}{m^2} \right|$, a solução analítica exata pode ser aproximada para

$$\bar{\Pi}^0(p^2) - \bar{\Pi}^0(0) = -\frac{p^2}{m^2} \frac{e^2}{60\pi^2} + \dots \quad (4.28)$$

Esse valor corresponde ao mesmo dos outros métodos de regularização encontrados na descrição de Interação. Logo, a descrição de Heisenberg e Interação conduzem ao mesmo resultado em primeira ordem. No entanto, essa afirmação não é mais assegurada para o caso de mais altas ordens e em uma análise não-perturbativa.

4.2 Vértice Γ_μ

A teoria de Podolsky fornecerá um conjunto a mais de graus de liberdade no espaço de parâmetro de fase que possibilitará introduzir um regulador natural para o fóton. Esta seção é a sequência natural da anterior e trata da correção no operador corrente na eq. (3.27). A função Gamma $\Gamma_\mu(x' - x, x - x'')$ é um "c-number" no espaço de Hilbert e sua forma é dada abaixo

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu(x' - x, x - x'') &= -\frac{e^2}{2} \gamma_\lambda \text{Tr} [S^{(1)}(x' - x) \gamma_\mu S^R(x - x'') D_P^R(x'' - x') + \\ &S_A(x' - x) \gamma_\mu S^{(1)}(x - x'') D_P^R(x'' - x') + S^A(x' - x) \gamma_\mu S_R(x - x'') G^{(1)}(x'' - x')] \gamma^\lambda \end{aligned} \quad (4.29)$$

A estrutura de causalidade está codificada nas funções retardadas e avançadas. O próximo passo será investigar esse vetor por meio de uma transformada de Fourier

$$\Gamma_\mu(q, q') = \frac{1}{(2\pi)^8} \int \int d^4 x' d^4 x'' e^{iq(x-x')} e^{iq'(x-x'')} \Gamma_\mu(x' - x, x - x'') \quad (4.30)$$

Se substituirmos as eqs. (5.6a), (5.7), (2.42), (2.43) e (2.45), a representação no espaço do momento do vetor acima é

$$\begin{aligned}
& \Gamma_\mu(q, q') \\
&= \frac{-e^2}{2} \int \frac{d^4 x'}{(2\pi)^8} d^4 x'' d^4 p d^4 k e^{-iq(x'-x)} e^{-iq'(x-x'')} \left(\gamma^\lambda (i\gamma p - m) \gamma_\mu (i\gamma p' - m) \gamma_\lambda \times \right. \\
& \left\{ \delta^4(p^2 + m^2) \left[\mathcal{P} \frac{1}{p'^2 + m^2} + i\pi \delta^4(p'^2 + m^2) \right] \left[\mathcal{P} \frac{1}{k^2} - \mathcal{P} \frac{1}{k^2 - m_p^2} + i\pi(\delta^4(k^2) - \right. \right. \\
& \delta^4(k^2 - m_p^2)) \epsilon(k) \left. \right] + \delta^4(p'^2 + m^2) \left[\mathcal{P} \frac{1}{k^2} - \mathcal{P} \frac{1}{k^2 - m_p^2} + i\pi(\delta^4(k^2) - \delta^4(k^2 - m_p^2)) \right. \\
& \left. \left. \epsilon(k) \right] \left[\mathcal{P} \frac{1}{p^2 + m^2} - i\pi \delta^4(p^2 + m^2) \epsilon(p) \right] + (\delta^4(k^2) - \delta^4(k^2 - m_p^2)) \left[\mathcal{P} \frac{1}{p'^2 + m^2} + \right. \right. \\
& \left. \left. i\pi \delta^4(p'^2 + m^2) \epsilon(p') \right] \left[\mathcal{P} \frac{1}{p^2 + m^2} - i\pi \delta^4(p^2 + m^2) \epsilon(p) \right] \right\} e^{ip(x'-x)} e^{ik(x-x'')} e^{ik(x''-x')}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Aplicando as deltas de Dirac $\delta^4(p - q + k)$ e $\delta^4(p' + k - q')$ originadas da exponencial e rearranjando os termos restantes, obtemos

$$\begin{aligned}
& \Gamma_\mu(q, q') = \frac{-e^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^3} \left(\mathcal{P} \frac{\delta^4(k^2) - \delta^4(k^2 + m_p^2)}{[(q - k)^2 + m^2][(q' - k)^2 + m^2]} + \right. \\
& \mathcal{P} \frac{\delta^4((q' - k)^2 + m^2) m_p^2}{[(q - k)^2 + m^2][k^2][k^2 + m_p^2]} + \mathcal{P} \frac{\delta^4((q - k)^2 + m^2) m_p^2}{[(q' - k)^2 + m^2][k^2][k^2 + m_p^2]} + i\pi \left(\mathcal{P} \frac{1}{k^2} - \right. \\
& \left. \mathcal{P} \frac{1}{k^2 + m_p^2} \right) \delta^4((q' - k)^2 + m^2) \delta^4((q - k)^2 + m^2) [1 - \epsilon(q - k) \epsilon(q' - k)] \epsilon(q' - q) + \\
& i\pi \mathcal{P} \frac{1}{(q - k)^2 + m^2} \delta^4((q' - k)^2 + m^2) (\delta^4(k^2) - \delta^4(k^2 + m_p^2)) [1 - \epsilon(k) \epsilon(k - q')] \epsilon(q') - \\
& i\pi \mathcal{P} \frac{1}{(q - k)^2 + m^2} \delta^4((q' - k)^2 + m^2) (\delta^4(k^2) - \delta^4(k^2 + m_p^2)) [1 - \epsilon(q - k) \epsilon(q - k)] \epsilon(q) \\
& + \pi^2 (\delta^4(k^2) - \delta^4(k^2 + m_p^2)) \delta^4((q' - k)^2 + m^2) \delta^4((q - k)^2 + m^2) [\epsilon(k) \epsilon(q - k) \\
& + \epsilon(k) \epsilon(q' - k) + \epsilon(q - k) \epsilon(q' - k)] \gamma_\lambda [(i\gamma(q - k) - m)] \gamma_\mu (i\gamma(q' - k) - m) \gamma^\lambda
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Uma maneira mais fácil de reescreveremos a função $\Gamma_\mu(q, q')$ é por meio da divisão entre as componentes reais e imaginárias

$$\Gamma_\mu(q, q') = \Gamma_\mu^{(1)}(q, q') + i\epsilon(q' - q) \Gamma_\mu^{(2)}(q, q'). \tag{4.33}$$

A parte real é

$$\begin{aligned}
& \Gamma_\mu^{(1)}(q, q') \\
&= -\frac{e^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^3} \left[\mathcal{P} \frac{\delta^4(k^2) - \delta^4(k^2 + m_p^2)}{[(q - k)^2 + m^2][(q' - k)^2 + m^2]} + \mathcal{P} \frac{m_p^2 \delta^4((q' - k)^2 + m^2)}{[(q - k)^2 + m^2][k^2][k^2 + m_p^2]} \right. \\
& \left. + \mathcal{P} \frac{m_p^2 \delta^4((q - k)^2 + m^2)}{[(q' - k)^2 + m^2][k^2][k^2 + m_p^2]} \right] \gamma^\lambda (i\gamma(q - k) - m) \gamma_\mu (i\gamma(q' - k) - m) \gamma_\lambda,
\end{aligned} \tag{4.34}$$

e a parte imaginária é

$$\Gamma_\mu^{(2)}(q, q') = -\frac{e^2}{16\pi^2} \int d^4k \delta^4((q-k)^2 + m^2) \delta^4((q'-k)^2 + m^2) \left(P \frac{1}{k^2} - P \frac{1}{k^2 + m_p^2} \right) \times [1 - \epsilon(q' - k)\epsilon(q - k)] \gamma^\lambda (i\gamma(q - k) - m) \gamma_\mu (i\gamma(q' - k) - m) \gamma_\lambda. \quad (4.35)$$

O setor fermiônico da integral acima pode ser escrito extensivamente como

$$\gamma_\lambda (i\gamma(q - k) - m) \gamma_\mu (i\gamma(q' - k) - m) \gamma_\lambda = i\gamma \cdot q \gamma_\mu i\gamma \cdot q' - i\gamma \cdot q \gamma_\mu m - m \gamma_\mu i\gamma \cdot q' + i\gamma \cdot k \gamma_\mu i\gamma \cdot k - i\gamma \cdot q \gamma_\mu i\gamma \cdot k - i\gamma \cdot k \gamma_\mu i\gamma \cdot q' + i\gamma \cdot k \gamma_\mu m + m \gamma_\mu i\gamma \cdot k + m^2 \gamma_\mu \quad (4.36)$$

A manipulação das matrizes gamma será importante na distinção dos processos físicos decodificados na eq. (4.33). Nesta operação, as matrizes serão simplificadas com o auxílio do apêndice C.1. Cada componente acima foi analisada separadamente

- $i\gamma q \gamma_\mu i\gamma q' = (i\gamma q + m) \gamma_\mu (i\gamma q' + m) - m \gamma_\mu (i\gamma q' + m) - (i\gamma q + m) \gamma_\mu m + m^2 \gamma_\mu \sim m^2 \gamma_\mu$
- $-i\gamma \cdot q \gamma_\mu i\gamma \cdot k = -(m + i\gamma \cdot q) \gamma_\mu i\gamma \cdot k + m \gamma_\mu i\gamma \cdot k \sim m \gamma_\mu i\gamma \cdot k$
- $\gamma_\lambda i\gamma \cdot q \gamma_\mu i\gamma \cdot q' \gamma^\lambda = -2i\gamma \cdot q' \gamma_\mu i\gamma \cdot q = +2q^\mu \gamma \cdot q' + 2\gamma \cdot q q'^\mu - 2(q' \cdot q) \gamma^\mu = i4q^\mu (i\gamma \cdot q' + m) - i2(i\gamma \cdot q + m) q'^\mu - 2(q' \cdot q) \gamma^\mu + 2imq^\mu + 2imq'^\mu \sim +2im(q^\mu + q'^\mu) - 2\gamma_\mu (Q^2 + 3m^2)$
- $\gamma_\lambda m^2 \gamma_\mu \gamma^\lambda = 4m^2 \gamma_\mu$

Antes de aplicarmos os resultados obtidos acima, é necessário pontuar que a integral na eq. (4.35) é decomposta em três diferentes tipos: tensorial, vetorial e escalar. A integral tensorial é

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \int d^4k \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \delta^4((q-k)^2 + m^2) \delta^4((q'-k)^2 + m^2) [1 - \epsilon(q' - k)\epsilon(q - k)] = \\ \frac{\pi\Theta(-Q^2 - 4m^2)}{Q^2(1 + \frac{4m^2}{Q^2})^{3/2}} \frac{m_P^2}{Q^2} \left\{ \left[\left(1 + \frac{4m^2}{Q^2} + \frac{3m_P^2}{Q^2} \right) \left(q'^\mu q'^\nu + q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu} \frac{Q^2}{2} \right) - \right. \right. \\ \left. \left(1 + \frac{4m^2}{Q^2} - \frac{m_P^2}{Q^2} \right) \left(q'^\mu q^\nu + q^\mu q'^\nu + g^{\mu\nu} \frac{Q^2}{2} \right) - g^{\mu\nu} \frac{4m^2}{Q^2} \left(1 + \frac{4m^2}{Q^2} + \frac{m_P^2}{Q^2} \right) \right] \\ \times \frac{\ln\left(1 - \frac{Q^2 + 4m^2}{m_P^2}\right)}{\left(1 + \frac{4m^2}{Q^2}\right)} + \left[\left(1 - \frac{2m^2}{Q^2} \right) (q^\mu q^\nu + q'^\mu q'^\nu - \frac{Q^2}{2} g^{\mu\nu}) - 2 \left(1 + \frac{m^2}{Q^2} \right) \right. \\ \left. \times (q'^\mu q^\nu + q^\mu q'^\nu + \frac{Q^2}{2} g^{\mu\nu}) - \left(1 + \frac{4m^2}{Q^2} \right) \frac{m_P^2}{2} \right] \left. \right\}, \quad (4.37) \end{aligned}$$

em que $Q = q' - q$ é a transferência de momento. A integral é a vetorial

$$\mathcal{P} \int d^4k \frac{k_\mu}{k^2} \delta^4((q-k)^2 + m^2) \delta^4((q'-k)^2 + m^2) [1 - \epsilon(q' - k)\epsilon(q - k)] = \frac{\pi\Theta(-Q^2 - 4m^2)}{Q^2(1 + \frac{4m^2}{Q^2})^{3/2}} \frac{m_P^2}{Q^2} \ln\left(1 - \frac{Q^2 + 4m^2}{m_P^2}\right) (q^\mu + q'^\mu). \quad (4.38)$$

A integral escalar é

$$\begin{aligned} & \mathcal{P} \int d^4k \, m_P^2 \frac{\delta^4((q-k)^2 + m^2)}{(k^2 + \mu^2)(k^2 + m_P^2)} \delta^4((q'-k)^2 + m^2) [1 - \epsilon(q'-k)\epsilon(q-k)] = \\ & \frac{\pi \Theta(-Q^2 - 4m^2)}{-Q^2 \sqrt{1 + \frac{4m^2}{Q^2}}} \left\{ \ln \left(1 - \frac{Q^2 + 4m^2}{\mu^2} \right) - \ln \left(1 - \frac{Q^2 + 4m^2}{m_P^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

O problema da divergência infravermelha aparecerá sempre que lidar-mos com fótons virtuais. Neste caso, adicionaremos uma massa fictícia μ que altera a relação de dispersão para $k^2 \rightarrow k^2 + \mu^2$. Devemos escrever a equação (4.35) de acordo com os dois processos físicos envolvidos

$$\Gamma_\mu^{(2)}(q, q') = \gamma_\mu F_1(Q^2) + i \frac{(q+q')_\mu}{2m} F_{2P}(Q^2), \quad (4.40)$$

O significado das integrais (4.37), (4.38) e (4.39), estão codificados nos termos acima. O $F_1(Q^2)$ é

$$\begin{aligned} F_1(Q^2) = & -\frac{e^2}{8\pi^2} \left\{ - \left(1 + \frac{2m^2}{Q^2} \right) \ln \left(\frac{\mu^2 - (Q^2 + 4m^2) m_P^2}{m_P^2 - (Q^2 + 4m^2) \mu^2} \right) + \frac{3m_P^2}{2Q^2} \frac{\left[3 + \frac{4m^2}{Q^2} \right]}{\left(1 + \frac{4m^2}{Q^2} \right)} \right. \\ & \left. + \frac{3m_P^2}{Q^2} \left[1 + \frac{4m^2}{Q^2} + \frac{m_P^2}{Q^2} \right] \ln \left(1 - \frac{Q^2 + 4m^2}{m_P^2} \right) \right\} \frac{\Theta(-Q^2 - 4m^2)}{\left(1 + \frac{4m^2}{Q^2} \right)^{5/2}}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

e o segundo termo do lado direito da eq. (4.40) é

$$F_{2P}(Q^2) = -\frac{e^2}{4\pi^2} \left(\frac{m_P^2}{Q^2} \right) \left(\frac{m^2}{Q^2} \right) \frac{\Theta(-Q^2 - 4m^2)}{\left(1 + \frac{4m^2}{Q^2} \right)^{3/2}} \ln \left(1 - \frac{Q^2 + 4m^2}{m_P^2} \right). \quad (4.42)$$

Deveremos relacionar a equação (4.34) com a equação (4.40).

$$\Gamma_\mu^{(1)}(q, q') = \gamma_\mu \bar{F}_{1P}(Q^2) + i \frac{(q+q')_\mu}{2m} \bar{F}_{2P}(Q^2). \quad (4.43)$$

Devido à analiticidade, causalidade e invariância translacional, os vetores $\Gamma_\mu^{(1)}$ e $\Gamma_\mu^{(2)}$ podem ser conectados pelas relações de Kramers-Kronig [Weinberg et al. \[1995\]](#)

$$\bar{F}_i(Q^2) = \int_0^\infty ds \frac{F_i(-s)}{(s+Q^2)}, \quad (4.44)$$

em que $i = \{1, 2\}$.

4.3 Auto-Energia do Elétron Σ

Nas duas seções anteriores, as correções radiativas do propagador do fóton e do vértice foram evidenciadas e corrigidas de maneira satisfatória até a ordem de 1-loop. O estudo dos efeitos perturbativos da $GQED_4$ somente ficará completo quando a correção radiativa do propagador do elétron for levado em consideração. Esse efeito corresponde à autointeração da partícula com seu próprio campo eletromagnético, sendo assim, teremos a emissão e a absorção de um fóton gerado pelo elétron.

O resultado esperado nesta seção será a correção da massa do elétron e não uma renormalização da carga elétrica como na seção (4.1). É importante ressaltar que ao contrário da auto-energia do fóton, a auto-energia do elétron é dependente da escolha de calibre. Continuaremos usando a descrição de Heisenberg na evolução dinâmica do nosso sistema quântico. Começaremos com o operador linear

$$\Sigma(x-x') = \frac{-e^2}{2} \int d^4x'' \gamma^\lambda [S^{(1)}(x-x'')G^A(x'-x) + S^R(x-x'')G^{(1)}(x'-x'')] \gamma_\lambda \psi^{(0)}(x') \quad (4.45)$$

em que $\psi(x')$ é sinal de entrada. Utilizando as funções singulares das eqs. (5.6b), (5.7), (2.42) e (2.45), obtemos

$$\begin{aligned} \Sigma(x-x') = & \int \frac{d^4p}{(2\pi)^7} d^4k (i\gamma p - m)_{\beta\alpha} e^{i(p-k)(x-x')} \left\{ \delta^4(p^2 + m^2) \left(\mathcal{P} \frac{1}{k^2} - \mathcal{P} \frac{1}{k^2 + m_p^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - i\pi\epsilon(k)(\delta^4(k^2) - \delta^4(k^2 + m_p^2)) \right) + \left(\mathcal{P} \frac{1}{p^2 + m^2} + i\pi\epsilon(p)\delta^4(p^2 + m^2) \right) \times \right. \\ & \left. (\delta^4(k^2) - \delta^4(k^2 + m_p^2)) \right\} \end{aligned} \quad (4.46)$$

o operador $\Sigma(x-x')$ é linear e analítico. Os estados *off-shell* serão representados pelas variáveis k e p . Utilizando a transformada inversa de Fourier

$$\Sigma(q) = \int d^4q e^{-iq(x-x')} \Sigma(x-x'), \quad (4.47)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \Sigma(q) = & \frac{-e^2}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} d^4k \delta^4(q-p+k) \gamma^\lambda (i\gamma p - m) \gamma_\lambda \times \left\{ \delta^4(p^2 + m^2) \left(\mathcal{P} \frac{1}{k^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. \mathcal{P} \frac{1}{k^2 + m_p^2} - i\pi\epsilon(k)(\delta^4(k^2) - \delta^4(k^2 + m_p^2)) \right) + (\delta^4(k^2) - \delta^4(k^2 + m_p^2)) \times \right. \\ & \left. \left(\mathcal{P} \frac{1}{p^2 + m^2} + i\pi\epsilon(p)\delta^4(p^2 + m^2) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Faremos uso da parte imaginária da equação acima. Essa abordagem não traz nenhum perda de significado físico, pois podemos construir via transformação de Hilbert a parte real de $\Sigma(x-x')$. A componente imaginária é dividida em

$$Im \Sigma(q) = \sum_1(q) + (i\gamma q + m) \sum_2(q) \quad (4.49)$$

É fácil notar que na equação acima, o traço da soma espinorial garante o isolamento do termo $\sum_2(q)$. Logo, $Tr[\gamma_\mu Im \sum_2(q)] = 4iq_\mu \sum_2(q)$ ²

$$\begin{aligned} 4iq_\mu \sum_2(q) &= \frac{-e^2}{16\pi^2} \int d^4p d^4k \delta^4(q-p+k) Tr[\gamma_\mu \gamma^\lambda (i\gamma p - m) \gamma_\lambda] \delta^4(p^2 + m^2) \times \\ &\quad (\delta^4(k^2) - \delta^4(k^2 + m_p^2)) [\epsilon(k) - \epsilon(p)] \\ &= \frac{-ie^2}{2\pi^2} \int dk (q+k)_\mu \delta^4((q+k)^2 + m^2) \delta^4(k^2) [\epsilon(k) - \epsilon(q+k)] \end{aligned} \quad (4.50)$$

mutiplicando ambos os lados por $-iq_\mu/4$ e eliminando a variável de integração p , temos

$$\begin{aligned} \sum_2(q) &= \frac{-e^2}{16\pi^2 q^2} \int d^4k (q^2 + qk) \delta^4(q^2 + m^2 + 2qk + k^2) (\delta^4(k^2) - \delta^4(k^2 + m_p^2)) \times \\ &\quad [\epsilon(k) - \epsilon(q+k)] \end{aligned} \quad (4.51)$$

Cada delta de Dirac traz dois comportamentos diferentes. No caso do "fóton não-massivo", $k^2 = 0$, temos $kq = -q^2/2 - m^2/2$ e no caso do "fóton massivo", $k^2 + m_p^2 = 0$, temos $kq = -q^2/2 - (m^2 - m_p^2)/2$. Devido à covariância de Lorentz, optaremos por um referencial em repouso $\mathbf{q} = 0$ para trabalhar a integral acima. Não é difícil ver que a integral se torna

$$\begin{aligned} \sum_2(q) &= \left(\frac{-e^2}{16\pi^2} \right) \left(1 - \frac{m^2}{q^2} \right) \int d^3\mathbf{k} \left\{ \mathbf{k} \left(\delta^4(-q_o^2 + m^2 - 2q_o\mathbf{k}) \left(1 - \frac{q_o + \mathbf{k}}{|q_o + \mathbf{k}|} \right) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\mathbf{k}^2}{2|\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_p^2}|} + \delta^4(-q_o^2 + m^2 + 2q_o\mathbf{k}) \left(-1 - \frac{q_o - \mathbf{k}}{|q_o - \mathbf{k}|} \right) \right) - \left(1 - \frac{m^2 - m_p^2}{q^2} \right) \right. \\ &\quad \times \left(\delta^4(-q_o^2 + m^2 - m_p^2 - 2q_o\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_p^2}) \left(1 - \frac{q_o + \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_p^2}}{|q_o + \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_p^2}|} \right) \right. \\ &\quad \left. \left. + \delta^4(-q_o^2 + m^2 - m_p^2 + 2q_o\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_p^2}) \left(-1 - \frac{q_o - \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_p^2}}{|q_o - \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_p^2}|} \right) \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.52)$$

Através dos cálculos elementares e das propriedades da distribuição de Dirac no apêndice [C](#), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_2(q) &= \left(\frac{-e^2}{4\pi} \right) \left\{ \left(1 - \frac{m^2}{q^2} \right) \int_0^{q_o} d^3\mathbf{k} \mathbf{k} \left(\frac{1}{2q_o} \delta^4(\mathbf{k} - \frac{q_o^2 - m^2}{2q_o}) \epsilon(q) \right) - \left(1 - \frac{m^2 - m_p^2}{q^2} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^{\sqrt{q_o^2 + m_p^2}} \frac{\mathbf{k} d\mathbf{k}}{2q_o} \left(\delta^4(\mathbf{k} - \sqrt{(\frac{q_o^2 - m^2 - m_p^2}{2q_o})^2 - m_p^2}) \epsilon(q) \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.53)$$

²Ver apêndice [C.1](#) para mais detalhes.

Algumas observações devem ser feitas acerca do limite de integração da função $\sum_2(q)$. Uma consequência natural da teoria de Podolsky concerne ao surgimento do parâmetro m_P . Resolvendo a integral da equação (4.53) por meio de técnicas já usadas na seção anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_2(q) = & \\ & \frac{e^2}{16\pi^2} \left\{ \left(1 - \frac{m^2}{q^2}\right) \left(\frac{q_o^2 - m^2}{q_o^2}\right) \Theta(q_o^2 - m^2) - \left(1 - \frac{m_T^2}{q^2}\right) \frac{1}{q_o} \sqrt{\left(\frac{q_o^2 - m^2 - m_P^2}{2q_o}\right)^2 - m_p^2} \right. \\ & \left. \times \Theta(-q^2 - (m + m_P)^2) \right\} \end{aligned} \quad (4.54)$$

escrevendo nosso resultado em um referencial geral por meio da transformação $-q_o^2 \rightarrow q^2$, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_2(q) = & \\ & \frac{e^2}{16\pi^2} \left\{ \left[1 - \left(\frac{m^2}{q^2}\right)^2\right] \Theta(-q^2 - m^2) - \left(1 - \frac{m^2 - m_P^2}{q^2}\right) \sqrt{\left(1 - \frac{m^2 - m_P^2}{-q^2}\right)^2 - \frac{4m_p^2}{-q^2}} \right. \\ & \left. \times \Theta(-q^2 - (m + m_P)^2) \right\} \end{aligned} \quad (4.55)$$

O detalhe na obtenção de $\sum_1(q)$ se dá por meio da soma nos índices espinoriais da eq. (4.49). Logo, $Tr[Im \sum(q)] = 4(\sum_1(q) + m \sum_2(q))$. Um cálculo mais direto mostra que

$$\begin{aligned} & 4\left(\sum_1(q) + m \sum_2(q)\right) \\ &= \frac{-me^2}{4\pi} \int d^4k \delta^4((q+k) + m^2) (\delta^4(k^2) - \delta^4(k^2 + m_p^2)) [\epsilon(k) - \epsilon(k+q)] \\ &= \frac{-me^2}{4\pi} \left\{ \int_0^{q_o} d^3\mathbf{k} \mathbf{k} \left(\delta^4(-q_o^2 + m^2 - 2|q_o|\mathbf{k}) \epsilon(q) \right) - \int_0^{\sqrt{q_o^2 + m_p^2}} \frac{\mathbf{k}^2 d\mathbf{k}}{2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_p^2}} \times \right. \\ & \left. \left(2\delta^4(-q_o^2 + m^2 - m_P^2 - 2|q_o|\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_p^2}) \right) \epsilon(q) \right\} \\ &= \frac{me^2}{4\pi} \epsilon(q) \frac{q_o^2 - m^2}{q_o^2} \Theta(q_o^2 - m^2) - \frac{(me^2)}{4\pi} \left(\sqrt{\left(1 - \frac{m_T^2}{-q^2}\right)^2 - \frac{4m_p^2}{-q^2}} \right) \epsilon(q) \Theta(q_o^2 - (m + m_P)^2) \\ &= \frac{me^2}{4\pi} \epsilon(q) \left\{ \left(1 + \frac{m^2}{q^2}\right) \Theta(-q^2 - m^2) - \sqrt{\left(1 - \frac{m^2 - m_P^2}{-q^2}\right)^2 - \frac{4m_p^2}{-q^2}} \times \right. \\ & \left. \Theta(-q^2 - (m + m_P)^2) \right\} \end{aligned} \quad (4.56)$$

substituindo o resultado da eq. (4.55), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_1(q^2) &= \frac{me^2}{16\pi^2} \left\{ \left(1 + \frac{m^2}{q^2}\right) \left(3 + \frac{m^2}{q^2}\right) \Theta(-q^2 - m^2) - \sqrt{\left(1 - \frac{m^2 - m_P^2}{-q^2}\right)^2 - \frac{4m_P^2}{-q^2}} \right. \\ &\quad \left. \times \left(3 + \frac{m^2 - m_P^2}{q^2}\right) \Theta(-q^2 - (m + m_P)^2) \right\} \end{aligned} \quad (4.57)$$

As outras componente da eq. (4.61) são fornecidas pela seguinte transformação de Hilbert

$$\bar{\sum}_i(q^2) = \mathcal{P} \int_0^{+\infty} ds \frac{\sum_i(-s)}{s + p^2} \quad (4.58)$$

em que $i = \{1, 2\}$. Levando em conta os resultados já obtidos na eq. (4.55), a componente real da função imaginária $\sum_2(q^2)$ é

$$\begin{aligned} \bar{\sum}_2(q^2) &= \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{\sum_2(-s)}{s + q^2} ds \\ &= \frac{e^2}{16\pi^2} \left\{ \mathcal{P} \int_{m^2}^{(m+m_P)^2} \frac{ds}{s + q^2} \left[1 - \left(\frac{m^2}{a}\right)^2\right] + \mathcal{P} \int_{(m+m_P)^2}^{+\infty} \frac{ds}{s + q^2} \left[1 - \left(\frac{m^2}{s}\right)^2\right] \right. \\ &\quad \left. - \left(1 + \frac{m^2 - m_P^2}{s}\right) \sqrt{\left(1 - \frac{m^2 - m_P^2}{s}\right)^2 - \frac{4m_P^2}{s}} \right\} \\ &= \frac{e^2}{16\pi^2} \left\{ \frac{m^4}{q^4} \ln\left(\frac{m^2 + q^2}{m^2}\right) - \frac{m^2}{q^2} - \ln(m^2 + q^2) + \frac{4mm_P}{q^2} \frac{(m + m_P)^2}{(m - m_P)^2} \ln \frac{2mm_P}{m^2 + m_P^2} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{q^2 + (m - m_P)^2}{q^2 + (m + m_P)^2}} \left(\frac{q^2 - (m^2 - m_P^2)}{q^2}\right) \frac{4mm_P}{(m - m_P)^2} \ln \frac{1 - \sqrt{\frac{q^2 + (m - m_P)^2}{q^2 + (m + m_P)^2}}}{1 + \sqrt{\frac{q^2 + (m - m_P)^2}{q^2 + (m + m_P)^2}}} \right\} \end{aligned} \quad (4.59)$$

e a componente real de $\sum_1(q^2)$ é

$$\begin{aligned} \bar{\sum}_1(q^2) &= \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{\sum_1(-s)}{s + q^2} ds \\ &= \frac{me^2}{16\pi^2} \left\{ \mathcal{P} \int_{m^2}^{(m+m_P)^2} \left(3 - \frac{m^2}{s}\right) \left(1 - \frac{m^2}{s}\right) + \mathcal{P} \int_{(m+m_P)^2}^{+\infty} \frac{ds}{s + q^2} \left(3 - \frac{m^2}{s}\right) \right. \\ &\quad \left. \times \left(1 - \frac{m^2}{s}\right) - \sqrt{\left(1 - \frac{m^2 - m_P^2}{s}\right)^2 - \frac{4m_P^2}{s}} \left(3 - \frac{m^2 - m_P^2}{s}\right) \right\} \\ &= \frac{me^2}{16\pi^2} \left\{ \frac{m^2}{q^2} \left(4 + \frac{m^2}{q^2}\right) \ln\left(\frac{m^2}{m^2 + q^2}\right) + \frac{m^2}{q^2} - 3\ln(m^2 + q^2) + \frac{4mm_P}{q^2} \times \right. \\ &\quad \frac{(m + m_P)^2}{(m - m_P)^2} \ln \frac{4mm_P}{m^2 + m_P^2} + \sqrt{\frac{q^2 + (m - m_P)^2}{q^2 + (m + m_P)^2}} \left(\frac{3q^2 + m^2 - m_P^2}{q^2}\right) \frac{4mm_P}{(m - m_P)^2} \\ &\quad \left. \times \ln \frac{1 - \sqrt{\frac{q^2 + (m - m_P)^2}{q^2 + (m + m_P)^2}}}{1 + \sqrt{\frac{q^2 + (m - m_P)^2}{q^2 + (m + m_P)^2}}} \right\} \end{aligned} \quad (4.60)$$

Reorganizando os cálculos feitos na integral (4.45), podemos reescrever o operador igual à

$$\sum(q) = \sum_1(q^2) + i\pi\epsilon(q) \sum_1(q^2) + (i\gamma q + m) [\sum_2(q^2) + i\pi\epsilon(q) \sum_2(q^2)] \quad (4.61)$$

Utilizando os resultados individuais encontrados nas eqs. (4.55), (4.57), (4.59) e (4.60). Podemos escrever a forma completa do operador linear como

$$\begin{aligned} & \sum(q) \\ &= \frac{e^2}{16\pi^2} \left\{ \left[\frac{m^2}{q^2} + \left(\frac{4m^2}{q^2} + \frac{m^4}{q^4} \right) \ln \left(1 + \frac{q^2}{m^2} \right) + 3 \frac{4mm_P}{q^2} \left(\frac{m+m_P}{m-m_P} \right)^2 \ln \left(\frac{2mm_P}{m^2+m_P^2} \right) \right. \right. \\ &+ \left. \left(3 + \frac{m^2-m_P^2}{q^2} \right) \sqrt{\frac{q^2+(m+m_P)^2}{q^2+(m-m_P)^2}} \ln \left(\frac{1-\sqrt{\frac{q^2+(m-m_P)^2}{q^2+(m+m_P)^2}}}{1+\sqrt{\frac{q^2+(m-m_P)^2}{q^2+(m+m_P)^2}}} \right) \right. \\ &\times \left. \left(3 + \frac{m^2}{q^2} \right) \Theta(-q^2-m^2) - \left(3 + \frac{m^2-m_P^2}{q^2} \right) \sqrt{\left(1 + \frac{m^2-m_P^2}{q^2} \right)^2 + \frac{4m_P^2}{q^2}} \right. \\ &\times \left. \Theta(-q^2-(m+m_P)^2) \right\} + (i\gamma q + m) \frac{me^2}{16\pi^2} \left\{ \left[-\frac{m^2}{q^2} - \frac{m^4}{q^4} \ln \left(1 + \frac{q^2}{m^2} \right) - \right. \right. \\ &4 \frac{mm_P}{q^2} \left(\frac{m+m_P}{m-m_P} \right)^2 \ln \left(\frac{2mm_P}{m^2+m_P^2} \right) - \left. \left(1 - \frac{m^2-m_P^2}{q^2} \right) \sqrt{\frac{q^2+(m+m_P)^2}{q^2+(m-m_P)^2}} \right. \\ &\times \left. \ln \left(\frac{1-\sqrt{\frac{q^2+(m-m_P)^2}{q^2+(m+m_P)^2}}}{1+\sqrt{\frac{q^2+(m-m_P)^2}{q^2+(m+m_P)^2}}} \right) \right. \\ &\times \left. \left(1 - \frac{m^2-m_P^2}{q^2} \right) \sqrt{\left(1 + \frac{m^2-m_P^2}{q^2} \right)^2 + \frac{4m_P^2}{q^2}} \Theta(-q^2-(m+m_P)^2) \right\}. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Após esse longo trajeto, o próximo passo será a investigação da auto-energia do elétron. Seguindo o modelo perturbativo da eq. (3.1a), os efeitos quânticos surgem de forma natural pela expansão do elemento de matriz $\langle 0|\psi(x)|q \rangle$

$$\langle 0|\psi(x)|q \rangle = \langle 0|\psi^{(0)}(x)|q \rangle + e\langle 0|\psi^{(1)}(x)|q \rangle + e^2\langle 0|\psi^{(2)}(x)|q \rangle + \dots \quad (4.63)$$

Aplicando as eqs. (3.5) e (3.12), obtemos

$$\langle 0|\psi(x)|q \rangle = \langle 0|\psi^{(0)}(x)|q \rangle + \int d^4x' S_R(x-x') \langle 0|\Phi_P(x')|q \rangle + \dots \quad (4.64)$$

É fácil notar que $\langle 0|\psi^{(1)}|q \rangle = 0$. Aplicando o operador $(\gamma\partial + m)$ em ambos os lados da expansão acima. O primeiro termo do lado direito da eq. (4.64) é nulo. O segundo termo do lado direito é

$$(\gamma\partial + m)\langle 0|\psi(x)|q \rangle = \int S_R(x-x') \sum_2^{(0)} (-m^2)(\gamma\partial' + m)\langle 0|\psi^{(0)}(x)|q \rangle dx' \quad (4.65)$$

Poderíamos suspeitar que esse termo desapareceria devido à aplicação do operador no elemento $\langle 0|\psi^{(0)}(x)|q\rangle$. Contudo, o papel desempenhado dessa integral é off-shell e isso nos capacita a realizar uma simples integração parcial. Averiguaremos essa operação com mais cuidado a seguir

$$\begin{aligned}
& \int d^4x' \left(\gamma \partial' + m \right) \left(S_R(x-x') \sum_2 \bar{} (-m^2) \langle 0|\psi^{(0)}(x')|q\rangle \right) \\
& \quad - \int d^4x' \underbrace{\left[(\gamma \partial' + m) S_R(x-x') \right]}_{\delta^4(x-x')} \sum_2 \bar{} (-m^2) \langle 0|\psi^{(0)}(x')|q\rangle \\
& = \gamma^\mu \left(S_R(x-x') \sum_2 \bar{} (-m^2) \langle 0|\psi^{(0)}(x')|q\rangle \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \sum_2 \bar{} (-m^2) \langle 0|\psi^{(0)}(x)|q\rangle
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Caso o experimento seja feito com atenção, o termo de borda será zero e não influenciará no resultado final. obtemos,

$$(\gamma \partial + m) \langle 0|\psi(x)|q\rangle = - \int d^4x' \langle 0| \sum (x-x', \alpha) \psi^{(0)}(x', \alpha) |q\rangle \tag{4.67}$$

em que o parâmetro α simboliza a hipótese adiabática sendo levada em conta no cálculo da correção. Calcularemos o termo do lado direito da equação acima

$$\begin{aligned}
& \int d^4x' \langle 0| \sum (x-x', \alpha) \psi^{(0)}(x', \alpha) |q\rangle = \frac{e^2}{2} \int_{-\infty}^x d^4x' e^{\alpha(x_o+x'_o)} \gamma^\lambda [S(x-x') G^{(1)}(x'-x) \\
& \quad - S^{(1)}(x-x') G_P(x'-x)] \gamma_\lambda \langle 0|\psi^{(0)}(x)|q\rangle
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Fazendo uma análise de Fourier com as eqs. (2.31), (5.7), (2.45) e (2.41), o resultado será

$$\begin{aligned}
& \int d^4x' \langle 0| \sum (x-x', \alpha) \psi^{(0)}(x', \alpha) |q\rangle \\
& = -\frac{1}{2} \int d^4p d^4k \delta^4(q-p+k) \gamma^\lambda (i\gamma p - m) \gamma_\lambda i\pi \left[\delta^4(p^2+m^2) \epsilon(k) \left(\delta^4(k^2) - \delta^4(k^2+m_P^2) \right) \right. \\
& \quad \left. - \epsilon(p) \left(\delta^4(k^2) - \delta^4(k^2+m_P^2) \right) \delta^4(p^2+m^2) \right] \\
& = \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^x d^4x' d^4p e^{\alpha(x_o+x'_o)} e^{ip(x-x')} \text{Im} F(p) \langle 0|\psi^{(0)}(x)|q\rangle \\
& = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4p \int_{-\infty}^x d^4x' e^{\alpha(x_o+x'_o)+ip(x-x')} \left[\sum_1 (p^2) + (i\gamma p + m) \sum_2 (p^2) \right] \epsilon(p) u(q) e^{iqx'}
\end{aligned} \tag{4.69}$$

O fator $e^{\alpha(x_o+x'_o)}$ provém da contribuição da equação diferencial em x e do operador $\sum (x-x', \alpha)$. Por meio da relação de dispersão $p^2 = -m^2$ *on-shell*, temos

$$\begin{aligned}
& \int d^4x' \langle 0 | \sum (x - x', \alpha) \psi^{(0)}(x', \alpha) | q \rangle \\
&= i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^x d^4x' e^{\alpha(x_o+x'_o)+ip(x-x')} \left[\sum_1 (-m^2) + (i\gamma p + m) \sum_2 (-m^2) \right] \epsilon(p) u(q) e^{iqx'}
\end{aligned} \tag{4.70}$$

Realizando a integração na variável x da eq. (4.69), obtemos

$$\begin{aligned}
& \int d^4x' \langle 0 | \sum (x - x', \alpha) \psi^{(0)}(x', \alpha) | q \rangle \\
&= i \frac{e^{(\alpha+i(p_o-q_o))x_o}}{\alpha + i(p_o - q_o)} e^{\alpha x_o} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_o \int_{-\infty}^x d\mathbf{p} e^{i\mathbf{p}\vec{x}} \epsilon(p) \delta^3(\mathbf{p} - \vec{q}) \left[\sum_1 (\mathbf{q}^2 - p_o^2) + (i\gamma_k \mathbf{p}_k + \right. \\
& i\gamma_4 p_4 + m) \sum_2 (\mathbf{q}^2 - p_o^2) \left. \right] u(q) \\
&= i e^{2\alpha x_o + iqx} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_o \epsilon(p)}{\alpha + i(p_o - q_o)} \left[\sum_1 (\mathbf{q}^2 - p_o^2) + (i\gamma_k \mathbf{p}_k - \gamma_4 p_o + m) \sum_2 (\mathbf{q}^2 - p_o^2) \right] u(q)
\end{aligned} \tag{4.71}$$

No último passo, fizemos $p_4 = ip_o$. Por questões de praticidade, resolveremos as integrais acima em duas partes. A primeira não possuirá a variável p_o na integração

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp_o \frac{\epsilon(p)}{p_o - q_o - i\alpha} \sum_i (\mathbf{q}^2 - p_o^2) = \int_0^{+\infty} ds \frac{\sum_i(-s)}{s + \mathbf{q}^2 - (q_o + i\alpha)^2} \tag{4.72}$$

em que $i = \{1, 2\}$. É importante notar que redefinimos $p_o^2 = a + \mathbf{q}^2$. A última parte da eq. (4.71) conduz à

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp_o \frac{p_o \epsilon(p)}{p_o - q_o - i\alpha} \sum_2 (\mathbf{q}^2 - p_o^2) = (q_o + i\alpha) \int_0^{+\infty} ds \frac{\sum_2(-s)}{a + \mathbf{q}^2 - (q_o + i\alpha)^2} \tag{4.73}$$

Reunindo as eqs. (4.72) e (4.73), a amplitude da eq. (4.71) assume a forma

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \langle 0 | \sum (x - x', \alpha) \psi^{(0)}(x', \alpha) | q \rangle \\
&= e^{2\alpha x_o} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s + \mathbf{q}^2 - (q_o + i\alpha)^2} \left[\sum_1 (-s) - i\alpha\gamma_4 \sum_2 (-s) \right] \langle 0 | \psi^{(0)}(x) | q \rangle
\end{aligned} \tag{4.74}$$

O termo $\sum_2(-s)$ será descartado ao tomar o limite adiabático $\alpha \rightarrow 0$, verificamos então que

$$\int d^4x \langle 0 | \sum (x - x') \psi^{(0)}(x') | q \rangle = \sum_1 (-m^2) \langle 0 | \psi^{(0)}(x) | q \rangle \tag{4.75}$$

substituindo o resultado acima na eq. (4.67), obtemos

$$\begin{aligned}
& (\gamma\partial_x + m)\langle 0|\psi|q\rangle \\
& = -\left[\bar{\sum}_1(-m^2) + i\pi\epsilon(q)\sum_1(-m^2) + (i\gamma q + m)\left(\bar{\sum}_2(-m^2) + i\epsilon(q)\sum_2(-m^2)\right)\right] \times \\
& \langle 0|\psi^{(0)}(x)|q\rangle
\end{aligned} \tag{4.76}$$

Os termos $\bar{\sum}_2$, \sum_1 e $\bar{\sum}_2$ anulam-se quando estabelecemos $q^2 = -m^2$

$$(\gamma\partial + m)\langle 0|\psi|q\rangle = -\bar{\sum}_1(-m^2)\langle 0|\psi^{(0)}(x)|q\rangle \tag{4.77}$$

A igualdade entre essa equação e a (4.75) nos fornece a validade da aplicação da hipótese adiabática. É importante destacar que a descrição de Heisenberg faz uso da equação de movimento para descrever as flutuações quânticas. Seguindo essa ideia, a equação acima pode ser reescrita com a forma da equação de Dirac

$$(\gamma\partial + m + \bar{\sum}_1(-m^2))\langle 0|\psi|q\rangle = 0 \tag{4.78}$$

Algumas observações importantes devem ser feitas. Primeiro, m não representa a verdadeira massa física do experimento. Em outras palavras, é comum se referir a m como um parâmetro fictício sujeito à soma de correções quânticas. A equação acima trata de maneira prática a transferência do polo da *bare mass* à massa observada. Mesmo assim, essa correção finita não corresponde à verdadeira massa, pois ordens mais altas de correção podem ser inclusas. O próximo passo é entender melhor o domínio de validade da eq. (4.78)

$$(\gamma\partial + m_{pole})\langle 0|\psi^{(r)}(x)|q\rangle = 0, \tag{4.79}$$

em que a massa experimental m_{pole} corresponde à verdadeira massa medida.

$$\langle 0|\psi^{(r)}(x)|q\rangle = Z_2^{-1/2}\langle 0|\psi^{(0)}(x)|q\rangle, \tag{4.80}$$

A estrutura matemática formal para esse estudo será por meio da subtração de (4.68) por (4.75). Então, temos

$$\begin{aligned}
& \int d^4x' \langle 0|\sum(x-x')\psi^{(0)}(x')|q\rangle - e^{2\alpha(x_o)}\bar{\sum}_1(-m^2)\langle 0|\psi^{(0)}(x)|q\rangle = \\
& e^{2\alpha x_o} \int ds \left[\bar{\sum}_1(-s) \frac{2iq_o\alpha - \alpha^2}{(a-m^2)a + \mathbf{q}^2 - (q_o + i\alpha)^2} - i\gamma_4\alpha \frac{\bar{\sum}_2(-s)}{a + \mathbf{q}^2 - (q_o + i\alpha)^2} \right] \langle 0|\psi^{(0)}|q\rangle
\end{aligned} \tag{4.81}$$

O fator $e^{2\alpha x_o}$ está presente já que a carga depende da posição, e por esse mesmo motivo, a energia não é mais conservada nesse sistema quântico. No entanto, o processo dissipativo não causa nenhuma perda da coerência quântica do sistema e o único efeito da dissipação será a possível emissão de *soft* fótons que não podem ser "reabsorvidos" pelo elétron. Substituindo a eq. (4.81) na eq. (4.64), obtemos

$$\begin{aligned} \langle 0|\psi(x)|q\rangle &= \langle 0|\psi^{(0)}(x)|q\rangle + i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} d^4x' e^{ip(x-x')} \delta^4(p^2 + m^2) \epsilon(p) (i\gamma p - m) e^{2\alpha x'_o} \times \\ & \int_0^{+\infty} ds \left[\bar{\Sigma}_2(-s) \frac{2iq_o\alpha - \alpha^2}{(a - m^2)a + \mathbf{q}^2 - (q_o + i\alpha)^2} - i\gamma_4\alpha \frac{\bar{\Sigma}_1(-s)}{a + \mathbf{q}^2 - (q_o + i\alpha)^2} \right] u(q) e^{iqx'} \end{aligned} \quad (4.82)$$

A integração das variáveis p e x' são

$$\begin{aligned} &= \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4p \int_{-\infty}^x d^4x' e^{ip(x-x')} \delta^4(p^2 + m^2) \epsilon(p) (i\gamma p - m) e^{2\alpha x'_o} e^{iqx'} \\ &= i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^x d^3x' \frac{e^{i\mathbf{p}\vec{x}'}}{2|p_o|} \frac{e^{i(2\alpha - q_o)x'_o}}{2\alpha + i(p_o - q_o)} (\delta^4(p_o - \sqrt{\mathbf{p}^2 - m^2}) - \delta^4(p_o + \sqrt{\mathbf{p}^2 - m^2})) \\ & (i\gamma p - m) e^{i\vec{q}\vec{x}'} e^{-i\mathbf{p}\vec{x}'} \\ &= \frac{i}{2q_o} e^{2\alpha x_o} \left[\frac{1}{2\alpha} (i\gamma q - m) - \frac{1}{2(\alpha - iq_o)} (i\gamma_k \mathbf{q}_k - \gamma_4 q_o - m) \right] e^{iqx} \end{aligned} \quad (4.83)$$

Substituindo na eq. (4.82), obtemos

$$\begin{aligned} \langle 0|\psi(x)|q\rangle &= \langle 0|\psi^{(0)}(x)|q\rangle + i \frac{e^{2\alpha x_o}}{2q_o} \left[\frac{1}{2\alpha} (i\gamma q - m) + \frac{1}{2(\alpha - iq_o)} (i\gamma_k \mathbf{q}_k - \gamma_4 q_o - m) \right] \\ & \times \int_0^{+\infty} ds \left[\frac{(2q_o\alpha + i\alpha^2) \bar{\Sigma}_1(-s)}{(s - m^2)(s + \mathbf{q}^2 - (q_o + i\alpha)^2)} - \alpha\gamma_4 \frac{\bar{\Sigma}_2(-s)}{s + \mathbf{q}^2 - (q_o + i\alpha)^2} \right] \langle 0|\psi^{(0)}(x)|q\rangle \end{aligned} \quad (4.84)$$

No limite adiabático $\alpha \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \langle 0|\psi(x)|q\rangle &= \langle 0|\psi^{(0)}(x)|q\rangle - \left[\frac{1}{2} (i\gamma q - m) \int_0^{+\infty} ds \left[\frac{\bar{\Sigma}_1(-s)}{(a - m^2)(a + \mathbf{q}^2 - (q_o)^2)} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\gamma_4}{2q_o} \frac{\bar{\Sigma}_2(-s)}{a + \mathbf{q}^2 - (q_o)^2} \right] \right] \langle 0|\psi^{(0)}(x)|q\rangle \end{aligned} \quad (4.85)$$

Lembrando que para valores pequenos de α , as relações on-shell continuam válidas $\mathbf{q}^2 - q_o^2 = -m^2$ e a equação passa a ser

$$\begin{aligned} \langle 0|\psi(x)|q\rangle &= \left[1 - \frac{1}{2} (i\gamma q - m) \int_0^{+\infty} ds \left[\frac{\bar{\Sigma}_1(-s)}{(a - m^2)^2} - \frac{\gamma_4}{2q_o} \frac{\bar{\Sigma}_2(-s)}{(a - m^2)} \right] \right] \langle 0|\psi^{(0)}(x)|q\rangle \\ &= \left[1 - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} ds \left(\frac{\bar{\Sigma}_2(-s)}{(a - m^2)} - 2m \frac{\bar{\Sigma}_1(-s)}{(a - m^2)^2} \right) \right] \langle 0|\psi^{(0)}(x)|q\rangle \end{aligned} \quad (4.86)$$

Em comparação com a eq. (4.80), a correção quântica decodificada em $Z_2^{-1/2}$ é dada por

$$Z_2^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} \left(\bar{\Sigma}_2(-m^2) + 2m \bar{\Sigma}_1'(-m^2) \right), \quad (4.87)$$

em que $(Z_2 - 1) \equiv \delta_2$ é o contra-termo, e obtemos

$$\delta_2 = \frac{\alpha}{4\pi b^3} \left\{ 2b + 3b^2 + 5b^3 + (1 - b^2 - 3b^3) \ln b + \frac{(1 - 2b - 3b^2 - 6b^3)}{\sqrt{(1 - 4b)}} \times \right. \\ \left. \left[\ln \left(\frac{b^2 - 2b + \sqrt{(1 - 4b)}}{b^2 - 2b - \sqrt{(1 - 4b)}} \right) - \ln \left(\frac{1 + \sqrt{(1 - 4b)}}{1 - \sqrt{(1 - 4b)}} \right) \right] \right\} \quad (4.88)$$

em que a constante da estrutura fina é $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ e $b = \frac{m^2}{m_P^2}$. Adicionaremos δm em ambos os lados na equação de Dirac (2.34)

$$(\gamma\partial + m + \delta m)\psi(x) = ie\gamma A(x)\psi(x) + \delta m\psi(x) \quad (4.89)$$

Para efeito de esclarecimento, o termo δm possui duas interpretações físicas diferentes. É claro que correções radiativas são interpretadas na parte não homogênea da equação diferencial, enquanto o lado esquerdo concebe a real dinâmica do sistema quântico. É intuitivo, também, esperar que δm dependa da carga. Portanto, em virtude do que foi apresentado, δm é tanto responsável pela dinâmica do sistema ao modificar a relação de dispersão quanto a massa de energia. Claramente, $\delta m \rightarrow 0$ quando $e \rightarrow 0$, e de fato, a carga representa a força de acoplamento entre os campos

$$\delta m = \sum_1^{\bar{}} (-m^2) \quad (4.90)$$

É importante observar que o termo está aproximado na primeira potência

Adição das correções radiativas

O último passo é combinar todas as correções radiativas calculadas neste capítulo. Reescreveremos as eqs. (4.1) e (4.2) em termos dos fenômenos radiativos apresentados nas seções anteriores. Os dois primeiros termos são

$$\frac{ie}{2} \int d^4x' \int d^4x'' \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x), \gamma_\mu S_R(x - x')] \sum (x' - x'') \psi^{(0)}(x'') | q' \rangle + \\ \frac{ie}{2} \int d^4x' \int d^4x'' \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x''), \gamma_\mu S_A(x' - x)] \psi^{(0)}(x) | q' \rangle \quad (4.91)$$

podem ser escrito através de algumas manipulações algébricas já elaboradas desde a eq. (4.81) até a eq. (4.87). Desse modo, temos

$$- \frac{1}{2} \left(\sum_2^{\bar{}} (-m^2) + 2m \sum_1^{\bar{}} (-m^2) \right) \frac{ie}{2} \left(\langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x), \gamma_\mu \psi(x')] | q' \rangle + \langle q | [\bar{\psi}(x'), \right. \\ \left. \gamma_\mu \psi^{(0)}(x)] | q' \rangle \right) \quad (4.92)$$

O resultado final é

$$\langle q | j_\mu^{(2)}(x) | q' \rangle = - \langle q | j_\mu^{(0)}(x) | q' \rangle \left(\sum_{247}^{\bar{}} (-m^2) + 2m \sum_1^{\bar{}} (-m^2) \right) \quad (4.93)$$

Daremos um passo adiante e reescreveremos o terceiro termo das eqs. (4.1) e (4.2) ao levar em conta os resultados já encontrados previamente. Seguindo os principais passos na Seção (4.2), temos

$$\frac{ie}{2} \int d^3x' \int d^3x'' \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x'), \Gamma_\mu(x' - x, x - x'') \psi^{(0)}(x'')] | q' \rangle \quad (4.94)$$

introduzindo a transformada de Fourier (5.73), obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{ie}{2} \int \frac{d^4x'}{(2\pi)^8} d^4x'' d^4q d^4q' e^{iq(x-x')} e^{iq'(x-x'')} \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x'), \Gamma_\mu(q, q') \psi^{(0)}(x'')] | q' \rangle \\ & \frac{ie}{2} \int \frac{d^4x'}{(2\pi)^8} d^4x'' d^4q d^4q' e^{iq(x-x')} e^{iq'(x-x'')} e^{iq(x)} e^{iq'(x)} \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x'), \Gamma_\mu(q, q') \psi^{(0)}(x'')] | q' \rangle \end{aligned} \quad (4.95)$$

o vetor de três pontos pode ser reescrito sob a forma da eq. (4.33). De fato,

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4x'}{(2\pi)^8} d^4x'' d^4q d^4q' e^{iq(x-x')} e^{iq'(x-x'')} \frac{ie}{2} \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x'), \left(\Gamma_\mu^{(1)}(Q^2) + i\pi\epsilon(Q)\Gamma_\mu^{(2)}(Q^2) \right) \\ & \times \psi^{(0)}(x'')] | q' \rangle \end{aligned} \quad (4.96)$$

consideramos explicitamente as eqs. (4.40) e (4.43), assim, temos

$$\begin{aligned} & = \int \frac{d^4x'}{(2\pi)^8} d^4x'' d^4q d^4q' e^{iq(x-x')} e^{iq'(x-x'')} \frac{ie}{2} \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x'), \gamma_\mu \left(\bar{F}_{1P}(Q^2) + i\epsilon(Q)\pi F_1(Q^2) \right) \\ & + i \frac{(q_\mu + q'_\mu)}{2m} (\bar{F}_{2P}(Q^2) + i\epsilon(Q)\pi F_{2P}(Q^2)) \psi^{(0)}(x'')] | q' \rangle \\ & = \int \frac{d^4x'}{(2\pi)^8} d^4x'' d^4q d^4q' e^{iq(x-x')} e^{iq'(x-x'')} \left\{ (\bar{F}_{1P}(Q^2) + i\epsilon(Q)\pi F_1(Q^2)) \frac{ie}{2} \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x'), \right. \\ & \times \gamma_\mu \psi^{(0)}(x'')] | q' \rangle - \frac{(q_\mu + q'_\mu)}{4m} (\bar{F}_{2P}(Q^2) + i\epsilon(Q)\pi F_{2P}(Q^2)) \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x'), \psi^{(0)}(x'')] | q' \rangle \left. \right\} \end{aligned} \quad (4.97)$$

Lembrando da igualdade dada pelo produto normal

$$\bar{\psi}^{(0)}(x') \psi^{(0)}(x'') =: \bar{\psi}^{(0)}(x') \psi^{(0)}(x'') : + \langle 0 | \bar{\psi}^{(0)}(x') \psi^{(0)}(x'') | 0 \rangle \quad (4.98)$$

podemos rearranjar o comutador do último termo da eq. (4.97) sob a forma de

$$\bar{\psi}^{(0)}(x') \psi^{(0)}(x'') - \psi^{(0)}(x'') \bar{\psi}^{(0)}(x') = 2 : \bar{\psi}^{(0)}(x') \psi^{(0)}(x'') : \quad (4.99)$$

substituindo a eq. (4.99) na eq. (4.97), temos

$$\begin{aligned} & = \int \frac{d^4x'}{(2\pi)^8} d^4x'' d^4q d^4q' e^{iq(x-x')} e^{iq'(x-x'')} \left\{ (\bar{F}_{1P}(Q^2) + i\epsilon(Q)\pi F_1(Q^2)) \frac{ie}{2} \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x'), \right. \\ & \times \gamma_\mu \psi^{(0)}(x'')] | q' \rangle - \frac{(q_\mu + q'_\mu)}{2m} (\bar{F}_{2P}(Q^2) + i\epsilon(Q)\pi F_{2P}(Q^2)) \langle q | : \bar{\psi}^{(0)}(x') \psi^{(0)}(x'') : | q' \rangle \left. \right\} \end{aligned} \quad (4.100)$$

A transformada de Fourier do operador spinorial

$$\bar{\psi}^{(0)}(x') = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \bar{\psi}^{(0)}(q) e^{ix'q} \quad (4.101)$$

conduz à reformulação da eq. (4.100) igual à

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^8} d^4q' e^{iqx} e^{iq'x} \left\{ (\bar{F}_{1P}(Q^2) + i\epsilon(Q)\pi F_{1P}(Q^2)) \frac{ie}{2} \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(q), \gamma_\mu \psi^{(0)}(q')] | q' \rangle \right. \\ \left. - \frac{(q_\mu + q'_\mu)}{2m} (\bar{F}_{2P}(Q^2) + i\epsilon(Q)\pi F_{2P}(Q^2)) \langle q | : \bar{\psi}^{(0)}(q) \psi^{(0)}(q') : | q' \rangle \right\} \quad (4.102)$$

Realizando a transformada de Fourier, temos que

$$\left\{ (\bar{F}_{1P}(Q^2) + i\epsilon(Q)\pi F_{1P}(Q^2)) \frac{ie}{2} \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x), \gamma_\mu \psi^{(0)}(x)] | q' \rangle - \frac{(q_\mu + q'_\mu)}{2m} (\bar{F}_{2P}(Q^2) \right. \\ \left. + i\epsilon(Q)\pi F_{2P}(Q^2)) \langle q | : \bar{\psi}^{(0)}(x) \psi^{(0)}(x) : | q' \rangle \right\} \quad (4.103)$$

O resultado final é

$$\langle q | j_\mu^{(2)}(x) | q' \rangle = \langle q | j_\mu^{(0)}(x) | q' \rangle (\bar{F}_{1P}(Q^2) + F_{1P}(Q^2)) - \frac{(q_\mu + q'_\mu)}{2m} (\bar{F}_{2P}(Q^2) + F_{2P}(Q^2)) \langle q | : \psi^{(0)} \psi^0 : | q' \rangle \quad (4.104)$$

Finalmente, trataremos do último termo das eqs. (4.1) e (4.2), responsável pela polarização na correção radiativa. Diferentemente do estudo usual feito na seção (4.1), através de uma corrente externa e clássica, a correção se dará por uma corrente quântica. Na prática, o termo envolve a convolução do tensor espinorial com a corrente da interação do vértice

$$\frac{ie}{2} \int d^4x' d^4x'' \Pi_{\mu\nu}(x-x') G^R(x'-x'') \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x''), \gamma^\nu \psi^{(0)}(x'')] | q' \rangle \quad (4.105)$$

O último termo é o operador corrente. Embora não tenha o mesmo significado físico da seção (4.1), continua com a mesma formulação matemática.

$$\frac{ie}{2} \int d^4x' d^4x'' \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik(x'-x'')} \Pi_{\mu\nu}(p) \left\{ \mathcal{P} \frac{1}{p^2} - \mathcal{P} \frac{1}{p^2 - m_P^2} + i\pi\epsilon(p)(\delta(p^2) \right. \\ \left. - \delta(p^2 - m_P^2)) \right\} e^{ip(x-x')} \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x''), \gamma^\nu \psi^{(0)}(x'')] | q' \rangle \quad (4.106)$$

Fazendo uso das deltas de Dirac, conseguimos simplificar essa fórmula sob a forma de

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} d^4x'' e^{ip(x-x'')} B(p) (p_\mu p_\nu - \delta_{\mu\nu} p^2) \left\{ \mathcal{P} \frac{1}{p^2} - \mathcal{P} \frac{1}{p^2 - m_P^2} + i\pi\epsilon(p)(\delta(p^2) - \right. \\ \left. \delta(p^2 - m_P^2)) \right\} \langle q | j^{(0)\nu}(x'') | q' \rangle \quad (4.107)$$

Alguns termos serão nulos devido às seguintes identidades $p^2 \delta^4(p^2)$ e $p^\mu j_\mu^{(0)}(x'') = \frac{\partial}{\partial_\nu} j_\mu^{(0)}(x'') = 0$. Desse modo

$$- \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} d^4 x'' e^{ip(x)} (B(p) - B(0)) \delta_{\mu\nu} \langle q | j^{(0)\nu}(x'') | q' \rangle \quad (4.108)$$

Lembrando do desenvolvimento matemático e da perspectiva argumentativa da eq. (4.25), inserimos um fator $B(0)$ correspondente à renormalização da carga do elétron que constitui um procedimento usual quando se calcula a polarização do vácuo. Assim, temos

$$\langle q | j_\mu^{(2)}(x) | q' \rangle = \langle q | j_\mu^{(0)}(x) | q' \rangle [- \bar{\Pi}^{(0)}(Q^2) + \bar{\Pi}^{(0)}(0) - i\pi\epsilon\Pi^{(0)}(Q^2)] \quad (4.109)$$

Somando as contribuições dos resultados (4.93), (4.104) e (4.109), a eq. (4.1) se torna

$$\begin{aligned} \langle q | j_\mu^{(2)}(x) | q' \rangle &= \langle q | j_\mu^{(0)}(x) | q' \rangle \left\{ - \bar{\Pi}(Q^2) + \bar{\Pi}(0) - i\epsilon(Q)\Pi(Q^2) - \sum_{2P}^{\bar{}} (-m^2) - \right. \\ &2m \sum_{1P}^{\bar{}} (-m^2) + \bar{F}_{1P}(Q^2) + i\epsilon(Q)F_{1P}(Q^2) \left. \right] - \frac{e}{2m} (q + q')_\mu \left[\bar{F}_{2P}(Q^2) + i\epsilon(Q)F_{2P}(Q^2) \right] \\ &\times \langle q | : \bar{\psi}^{(0)}(x) \psi^{(0)}(x) : | q' \rangle \end{aligned} \quad (4.110)$$

Já esperávamos uma contribuição proporcional a $j_\mu^{(0)}(x)$ e a outra cujo comportamento será analisado na próxima seção.

4.4 Momento magnético do elétron

A QED_4 se firmou como um modelo teórico em TQC quando Schwinger calculou o desvio do momento magnético do elétron na teoria de Dirac Schwinger [1962]. A previsão teórica desse comportamento físico trouxe um respaldo maior a QED_4 . Nos últimos anos, a investigação experimental mostra que o valor mais preciso do momento magnético anômalo é $a_{exp} = 1,15965218073 \times 10^{-3} \pm 2,8 \times 10^{-13}$ Nakamura et al. [2010]. O último termo da eq. (4.110) fornecerá uma interpretação direta e adequada para o momento magnético do elétron. Primeiro, deduziremos a identidade de Gordon

$$\begin{aligned} &\bar{u}(q) \gamma_\mu u(q') \\ &= \frac{m}{4m} \bar{u}(q) \gamma_\mu u(q') + \frac{m}{4m} \bar{u}(q) \gamma_\mu u(q') + \frac{m}{4m} \bar{u}(q) \gamma_\mu u(q') + \frac{m}{4m} \bar{u}(q) \gamma_\mu u(q') \\ &= \frac{i\bar{u}(q)}{4m} \left[q^\nu \gamma_\nu \gamma_\mu + \gamma_\nu \gamma_\mu q^\nu - q^\nu \gamma_\mu \gamma_\nu + q^\nu \gamma_\mu \gamma_\nu \right] u(q') + \frac{-i\bar{u}(q)}{4m} \left[q^\nu \gamma_\nu \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_\nu q^\nu \right. \\ &\left. + \gamma_\nu \gamma_\mu q^\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu q^\nu \right] u(q') \\ &= \frac{i\bar{u}(q)}{4m} \left[q^\nu [\gamma_\nu, \gamma_\mu] + \gamma_\mu \gamma_\nu (q^\nu + q'^\nu) \right] u(q') + \frac{-i\bar{u}(q)}{4m} \left[-q'^\nu [\gamma_\nu, \gamma_\mu] + \gamma_\nu \gamma_\mu \times \right. \\ &\left. (q^\nu + q'^\nu) \right] u(q') \\ &= \frac{i\bar{u}(q)}{2m} \left[-(q'^\nu - q^\nu) \frac{1}{2} [\gamma_\nu, \gamma_\mu] + (q^\mu + q'^\mu) \right] u(q') \\ &= \frac{i\bar{u}(q)}{2m} \left[-Q^\nu \sigma_{\mu\nu} + (q_\mu + q'_\mu) \right] u(q') \end{aligned} \quad (4.111)$$

em que $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma_\nu\gamma_\mu - \gamma_\mu\gamma_\nu)$ e $\psi^{(0)}(x) = \frac{u(q)e^{iqx}}{\sqrt{V}}$. Substituindo a expressão acima na eq. (4.110), temos

$$\frac{e}{2m}(q+q')_\mu \langle q | : \psi^{(0)}(x)\psi^{(0)}(x) : | q' \rangle = \langle q | j_\mu^{(0)}(x) | q' \rangle - \frac{ie}{2m}Q^\nu \langle q | : \psi^{(0)}(x)\sigma_{\mu\nu}\psi^{(0)}(x) : | q' \rangle \quad (4.112)$$

De acordo com o cálculo anterior, o elétron obtém uma mudança no momento magnético dada por

$$\frac{e}{2m} \langle q | : \psi^{(0)}(x)\sigma_{\mu\nu}\psi^{(0)}(x) : | q \rangle \left[\bar{F}_{2P}(Q^2) + i\epsilon(Q)F_{2P}(Q^2) \right]. \quad (4.113)$$

O próximo passo é tomar $Q^2 \rightarrow 0$

$$\frac{e}{2m} \langle q | : \psi^{(0)}(x)\sigma_{\mu\nu}\psi^{(0)}(x) : | q \rangle \left[1 + \bar{F}_{2P}(0) \right], \quad (4.114)$$

em que o fator de forma $\bar{F}_{2P}(0)$ é uma quantidade convergente, cuja a expressão é fornecida abaixo

$$\bar{F}_{2P}(0) = \frac{e^2}{4\pi^2} \int_{4m^2}^{\infty} \left(\frac{m_P^2}{a} \right) \left(\frac{m^2}{a} \right) \frac{\ln \left(1 - \frac{(4m^2-a)}{m_P^2} \right)}{\left(1 - \frac{4m^2}{a} \right)^{3/2}} \frac{da}{a} \quad (4.115)$$

Usando a substituição de Euler descrita nas identidades abaixo

$$\left(1 - \frac{4m^2}{a} \right) = \left(\frac{1+\xi}{1-\xi} \right)^2, \quad \frac{a}{m^2} = \frac{(1-\xi)^2}{-\xi}, \quad \frac{da}{m^2} = \left(\frac{1-\xi^2}{\xi^2} \right) d\xi \quad (4.116)$$

A integral (4.115) fica

$$\begin{aligned} & \bar{F}_{2P}(0) \\ &= \frac{e^2}{4\pi^2} \int_0^1 d\xi \left(\frac{\xi}{(1-\xi)^2(1+\xi)^2} \right) \ln \left(1 - b \frac{(1+\xi)^2}{\xi} \right) \\ &= \frac{e^2}{4\pi^2} \int_0^1 \frac{d\xi}{4} \left(\frac{1}{(1-\xi^2)^2} - \frac{1}{(1-\xi^2)} \right) \ln \left(1 - b \frac{(1+\xi)^2}{\xi} \right) \\ &= \frac{e^2}{4\pi^2} \int_0^1 \frac{d\xi}{4} \left\{ \left(\frac{1+\xi}{\xi(\xi-1+\beta+t)(\xi-1+\beta-t)} \right) - \left(\frac{1-\xi}{\xi(\xi-1+\beta+t)(\xi-1+\beta-t)} \right) \right\} \\ &= \frac{e^2}{(2\pi)^3 b^2} \left\{ (-b^2 + 2b + (2b-1) \ln b) - \left(\frac{2b^2 + 1 - 4b}{b^2 \sqrt{1-4b}} \right) \left(\ln \left(\frac{\sqrt{1-4b} + 1}{\sqrt{1-4b} - 1} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. \ln \left(\frac{2b-1 + \sqrt{1-4b}}{-2b+1 + \sqrt{1-4b}} \right) \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.117)$$

em que $b = \frac{m^2}{m_P^2}$. Interpretarmos essa solução como o erro na medição do momento magnético anômalo, e assim, estabelecemos a restrição no parâmetro de Podolsky $m_P \geq 3,7595 \times 10^{10} eV$ [Bufalo et al. \[2012\]](#). Ainda existem dúvidas na literatura acerca da possibilidade de medir m_P , já que o seu valor corresponderia a mesma ordem de grandeza do erro dos experimentos [Cuzinatto et al. \[2011\]](#).

Capítulo 5

Correções Radiativas $GQED_3$

O objetivo deste capítulo é abordar o tratamento das correções radiativas da $GQED_3$, eletrodinâmica quântica generalizada em $(2+1)$ dimensões, na descrição de Heisenberg. Antes de abordarmos esse problema principal, é importante lembrar que a formulação padrão da QED_3 já traz consigo características que tornam a sua investigação válida tanto do ponto de vista teórico quanto experimental e que serão melhor compreendidos no próximo capítulo.

A teoria eletrodinâmica em três dimensões é super-renormalizável, ou seja, corresponde a apenas um número finito de contra-termos. Em outras palavras, diferentemente das teorias renormalizáveis, a ordem da divergência não se mantém constante quando aumentamos a ordem da correção radiativa do fenômeno físico. Assim, somente um número finito de termos da matrix- S é não-analítico. Embora esse comportamento pareça promissor no estudo da QED_3 , o procedimento matemático de renormalização continua sendo essencial para lidar com as divergências ultravioletas. A $GQED_4$ assim como a QED_4 possuem particularidades físicas associadas com as simetrias, ou seja, o comportamento do fóton e do férmion são estritamente ligados à dimensionalidade do sistema. O nosso ponto de partida será incluir um termo de derivada de alta ordem nas equações padrões da QED_3 , e tal procedimento leva essa teoria ao posto da $GQED_3$. A lagrangiana da $GQED_3$ se escreve

$$\mathcal{L}_{GQED_3} = -\frac{1}{4e} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2m_P^2} \partial_\alpha F^{\mu\alpha} \partial^\gamma F_{\gamma\mu} + A_\mu j^\mu \quad (5.1)$$

Mesmo que o acomplamento do férmion-fóton seja invariante no quadro de Podolsky, algumas de suas sutilezas estão relacionadas à dimensionalidade do sistema. Antes de passar a uma descrição mais completa da $GQED_3$, o estudo dimensional mostra que a constante elétrica pode ser redefinida como $e'^2 = e^2/E$, em que E é alguma escala de energia. Nesse sentido, uma investigação dimensional mostra que os fótons são livres e fortemente acoplados no regime ultravioleta e infravermelho, respectivamente, [de Gracia et al. \[2019\]](#). Como foi abordado nos capítulos anteriores, a $GQED_4$ é unitária e não pertence ao domínio de uma teoria efetiva de campo. Isso nos garante um bom motivo para investigar o seu comportamento nas mais diversas aplicações e desenvolver uma base operacional sólida à sua aplicação.

O capítulo está organizado da seguinte forma. Na seção [5.1](#), procederemos com o cálculo da polarização do vácuo. Na seção [5.2](#) e [5.3](#), mostraremos como as correções de auto-energia do vértice e elétron exibem um loop finito, respectivamente. Finalmente, apresentaremos nossas discussões nos comentários finais.

Operador corrente

Utilizando o mesmo procedimento perturbativo do capítulo anterior, começaremos analisando a corrente de matéria j_μ . Se fizermos uma expansão em torno de um acoplamento de gauge (e) suficientemente pequeno, teremos a seguinte relação

$$j_\mu(x) = j_\mu^{(0)}(x) + e j_\mu^{(1)}(x) + e^2 j_\mu^{(2)}(x) + \dots \quad (5.2)$$

Antes de prosseguirmos com as correções radiativas à la Källén e por motivos pedagógicos, deduziremos o operador corrente derivado na seção (3.1) até a segunda ordem. No caso de três dimensões, o resultado é praticamente igual à (3.27), a menos de uma dimensão espacial no integrando. Não obstante, por uma substituição direta dos operadores de gauge e espinoriais na equação (3.22). Temos

$$\begin{aligned} j_\mu^{(2)} = & \frac{i}{8} \int d^3 x' \int d^3 x'' [\bar{\psi}^{(0)}(x), \gamma_\mu S_R(x-x') \gamma_\nu \{\psi^{(0)}(x'), [\bar{\psi}^{(0)}(x''), \gamma^\nu \psi^{(0)}(x'')]\}] G^R(x'-x'') \\ & - \frac{i}{4} \int d^3 x' \int d^3 x'' [\bar{\psi}^{(0)}(x), \gamma_\mu S_R(x-x') \gamma^{\nu_1} S_R(x'-x'') \gamma^{\nu_2} \psi^{(0)}(x'')] \{A_{\nu_1}^{(0)}(x'), A_{\nu_2}^{(0)}(x'')\} \\ & - \frac{i}{2} \int d^3 x' \int d^3 x'' [\bar{\psi}^{(0)}(x') \gamma^{\nu_1} A_{\nu_1}^{(0)}(x') S_A(x'-x), \gamma_\mu S_R(x-x'') \gamma^{\nu_2} A_{\nu_2}^{(0)}(x'') \psi^{(0)}(x'')] \\ & + \frac{i}{8} \int d^3 x' \int d^3 x'' [\{[\bar{\psi}^{(0)}(x''), \gamma^\nu \psi^{(0)}(x'')], \psi^{(0)}(x')\} \gamma_\nu S_A(x'-x), \gamma_\mu \psi^{(0)}(x)] G^R(x'-x'') \\ & - \frac{i}{4} \int d^3 x' \int d^3 x'' [\bar{\psi}^{(0)}(x'') \gamma^{\nu_2} S_A(x''-x') \gamma^{\nu_1} S_A(x'-x), \gamma_\mu \psi^{(0)}(x)] \{A_{\nu_1}^{(0)}(x'), A_{\nu_2}^{(0)}(x'')\} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Os elementos não nulos de matriz do vácuo de mais baixa ordem são definidos por $j_\mu^{(2)}$. Entre eles, encontramos os estados com dois pares de (elétron-pósitron) e nenhum fóton, um par de (elétron-pósitron) e dois fótons e um par de (elétron-pósitron) e nenhum fóton. Faremos o uso apenas das transições em que não são possíveis resolver pela conservação da energia e momento das partículas *on-shell*. Seguindo essa linha de raciocínio, somente o elemento de matriz com um par de (elétron-pósitron) e nenhum fóton possui essa propriedade.

Antes de realizarmos mais cálculos, faremos uma reorganização no operador corrente de segunda ordem e apontaremos os termos físicos a serem discutidos nos elementos de matriz $\langle q | j_\mu^{(2)} | q' \rangle$ e $\langle 0 | j_\mu^{(2)} | q, q' \rangle$.

$$\begin{aligned} e^3 \langle q | j_\mu^{(2)} | q' \rangle = & \frac{ie}{2} \int d^3 x' \int d^3 x'' \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x), \gamma_\mu S_R(x-x') \sum (x'-x'') \psi^{(0)}(x'')] | q' \rangle + \\ & \frac{ie}{2} \int d^3 x' \int d^3 x'' \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x'') \sum (x''-x') S_A(x'-x), \gamma_\mu \psi^{(0)}(x)] | q' \rangle + \\ & \frac{ie}{2} \int d^3 x' \int d^3 x'' \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x'), \Gamma_\mu(x'-x, x-x'') \psi^{(0)}(x'')] | q' \rangle + \\ & \frac{ie}{2} \int d^3 x' \int d^3 x'' \Pi_{\mu\nu}(x-x') G^R(x'-x'') \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x''), \gamma^\nu \psi^{(0)}(x'')] | q' \rangle, \end{aligned} \quad (5.4)$$

e

$$\begin{aligned}
e^3 \langle 0 | j^{(2)\mu} | q, q' \rangle &= \frac{ie}{2} \int d^3 x' \int d^3 x'' \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x), \gamma_\mu S_R(x-x')] \sum (x' - x'') \psi^{(0)}(x'') | q' \rangle + \\
&\frac{ie}{2} \int d^3 x' \int d^3 x'' \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x''), \sum (x'' - x') S_A(x' - x), \gamma_\mu \psi^{(0)}(x)] | q' \rangle + \\
&\frac{ie}{2} \int d^3 x' \int d^3 x'' \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x'), \Gamma_\mu(x' - x, x - x'') \psi^{(0)}(x'')] | q' \rangle + \\
&\frac{ie}{2} \int d^3 x' \int d^3 x'' \Pi_{\mu\nu}(x - x') G^R(x' - x'') \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x''), \gamma^\nu \psi^{(0)}(x'')] | q' \rangle,
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Prestando atenção em cada componente, podemos perceber que os dois primeiros termos corrigem o propagador do férmion, o terceiro envolve a correção do vértice e o último é a polarização do vácuo. Neste capítulo, as funções singulares abaixo serão imprescindíveis na resolução das flutuações quânticas.

$$G_R(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p e^{ipx} \left(\mathcal{P} \frac{1}{p^2} - \mathcal{P} \frac{1}{p^2 + m_P^2} + i\pi(\delta^3(p^2) - \delta^3(p^2 + m_P^2))\epsilon(p) \right), \tag{5.6a}$$

$$G_A(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p e^{ipx} \left(\mathcal{P} \frac{1}{p^2} - \mathcal{P} \frac{1}{p^2 + m_P^2} - i\pi(\delta^3(p^2) - \delta^3(p^2 + m_P^2))\epsilon(p) \right) \tag{5.6b}$$

$$G^{(1)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3 p e^{ipx} (\delta^3(p^2) - \delta^3(p^2 + m_P^2)) \tag{5.7}$$

5.1 Polarização do Vácuo $\Pi_{\mu\nu}$

Começamos no contexto de um tratamento perturbativo que emerge ao se considerar um campo externo fraco e não quantizado interagindo dinamicamente com um campo fermiônico. A polarização do vácuo é um fenômeno radiativo e abordaremos esse tipo de situação com o propósito de elucidar o comportamento físico do ponto de vista da $GQED_3$. Primeiramente, consideraremos um efeito linear dado por

$$\langle 0|j^\mu(x)|0\rangle = \int d^3y e^2 \Pi^{\mu\nu}(x-y) A_\nu^{ext}(y), \quad (5.8)$$

em que o tensor de polarização $\Pi^{\mu\nu}(x-y)$ caracteriza a resposta linear do vácuo. Para maiores detalhes sobre o efeito de resposta linear ver no apêndice [\(B\)](#). A equação acima exprime uma corrente induzida $\langle 0|j^\mu(x)|0\rangle$ por um campo externo fraco $A_\mu^{ext}(x)$. Levando em conta a simetria abeliana $U(1)$, válida na presença de um campo externo e de correções radiativas, a conservação da carga surge naturalmente pelo teorema de Noether

$$\partial_\mu \langle 0|j^\mu(x)|0\rangle = 0 \quad (5.9)$$

e realizando uma transformada de Fourier em três dimensões da equação acima e com a o auxílio de

$$\Pi_{\mu\nu}(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{ik(x-x')} \Pi_{\mu\nu}(k^2), \quad (5.10)$$

obtemos

$$k^\mu \Pi_{\mu\nu}(k^2) = 0. \quad (5.11)$$

Temos um tensor covariante de segunda ordem que pode ser representado de forma irredutível por objetos covariantes como k^μ , $g^{\mu\nu}$ e $\epsilon^{\mu\nu\alpha}$. Nesse sentido, a estrutura mais geral do tensor de polarização pode ser escrita

$$\Pi_{\mu\nu}(k^2) = g^{\mu\nu} H(k^2) + k^\mu k^\nu G(k^2) + im\epsilon^{\mu\nu\alpha} k_\alpha \Pi^{(2)}(k^2) \quad (5.12)$$

A invariância de gauge [\(5.11\)](#) fornece

$$k^\mu \Pi_{\mu\nu}(k^2) = 0 = k^\nu H(k^2) + k^2 k^\nu G(k^2) + 0 \quad (5.13)$$

Então $G(k^2)k^2 = -H(k^2)$. Depois de encontrar essa relação, a polarização do tensor é reescrita

$$\Pi_{\mu\nu} = -G(k^2)k^2 \left[g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right] + im\epsilon_{\mu\nu\alpha} k^\alpha \Pi^{(2)}(k^2) \quad (5.14)$$

É notório verificar que o tensor possui duas estruturas distintas e complementares. A primeira do lado esquerdo da equação é simétrica, enquanto que a última, anti-simétrica, é proveniente da álgebra das matrizes gamma em $(2+1)$ dimensões (Ver apêndice [\(C\)](#)). No entanto, o mesmo efeito não se percebe em $(3+1)$ dimensões em que o possível termo $k^\alpha k^\beta \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ seria nulo. Reescrevemos o tensor de polarização [\(5.14\)](#) como

$$\Pi_{\mu\nu}(k^2) = \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \Pi^{(1)}(k^2) + im\epsilon^{\mu\nu\alpha} k_\alpha \Pi^{(2)}(k^2) \quad (5.15)$$

em que definimos

$$\Pi^{(1)}(k^2) \equiv -k^2 G(k^2) \quad (5.16)$$

Efeando a contração de (5.15) com o termo $g^{\mu\nu}$, obtemos a contribuição simétrica

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}(k) &= \Pi_\mu^\mu(k) = -2k^2 G(k^2) \\ G(k^2) &= -\frac{1}{2k^2}\Pi_\mu^\mu(k) \end{aligned} \quad (5.17)$$

sendo $\Pi_\mu^\mu(k^2) = g^{\mu\nu}\Pi_{\mu\nu}(k^2)$, e agora com $\epsilon^{\mu\nu\alpha}$, a contribuição antisimétrica do tensor é

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mu\nu\alpha}\Pi^{\mu\nu}(k^2) &= i\epsilon_{\mu\nu\beta}\epsilon^{\mu\nu\beta}k^\beta m\Pi^{(2)}(k^2) \\ \Pi^{(2)}(k^2) &= -\frac{i}{2m}\frac{k_\alpha}{k^2}e^{\mu\nu\alpha}\Pi_{\mu\nu}(k^2) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Recapitulando, enunciamos o modelo físico de resposta linear do nosso sistema na eq. (5.8) em que uma corrente induzida é originada através da aplicação de um campo externo clássico. Podemos concluir que a definição da eq. (5.15) é independente da teoria fermiônica em questão, pois surge de uma aproximação em primeira ordem da interação do vácuo com um campo não quantizado e segue uma decomposição do subgrupo Lorentz em subespaços disjuntos: simétrico e antissimétrico. Em seguida, realizaremos uma construção do tensor de polarização com base nas equações diferenciais acopladas na descrição de Heisenberg, lembrando que a literatura mostra um resultado similar feito na descrição de Interação e de Heisenberg para a QED_3 , em Boldo et al. [2002] e Pimentel et al. [1994], respectivamente.

Primeiramente, inserimos um campo externo real $A_\mu^{ext}(x^\mu)$ no sistema por meio do acoplamento $j^\mu A_\mu^{ext}$ e as novas equações da dinâmica do operador são

$$\begin{aligned} (1 - a^2\Box)\Box A^\nu(x) &= -\frac{ie}{2}[\bar{\psi}(x), \gamma^\nu\psi(x)] \\ (\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi(x) &= ie\gamma(A(x) + A_{ext}(x))\psi(x) \end{aligned} \quad (5.19)$$

O ponto de partida é dado pela análise do Källén em Källén et al. [1972]. Para implementarmos a descrição de Heisenberg, expandimos os operadores de campo de gauge e de férmions baseado nas equações (3.1a) e (3.1b) sob a mesma prerrogativa da constante de acoplamento (e) ser pequena. E por sua vez, por meio da (3.22), podemos exprimir o operador corrente como

$$\begin{aligned} \langle 0|j^\mu(x)|0\rangle &= \langle 0|\frac{e}{2}[\bar{\psi}^0(x)\gamma^\mu, \psi^0(x)]|0\rangle \\ &\quad - \frac{e^2}{2}\int d^3y\langle 0|[\bar{\psi}^{(0)}(x), \gamma^\mu S_R(x-y)\gamma^\nu\psi^{(0)}(y)]|0\rangle(A_\nu^{(0)}(y) + A_\nu^{ext}(y)) - \\ &\quad - \frac{e^2}{2}\int d^3y\langle 0|[\bar{\psi}^{(0)}(y)\gamma^\nu S_A(y-x)\gamma^\mu, \psi^{(0)}(x)]|0\rangle(A_\nu^{(0)}(y) + A_\nu^{ext}(y)) + \\ &\quad + e^2\langle 0|j^{(2)\mu}|0\rangle + \dots \end{aligned} \quad (5.20)$$

sendo $\langle 0|[\bar{\psi}^0(x)\gamma^\mu, \psi^0(x)]|0\rangle = 0$, conseguimos escrever até a primeira ordem

$$\Pi^{\mu\nu}(x-y) = Tr[S_R(x-y)\gamma^\nu S^{(1)}(y-x)\gamma^\mu] + Tr[\gamma^\mu S^{(1)}(x-y)\gamma^\nu S_A(y-x)]. \quad (5.21)$$

Realizando uma transformada de Fourier inversa no tensor acima e das funções de correlação S_R , S_A e $S^{(1)}$. O tensor se reduz à

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}(k) &= \frac{1}{2(2\pi)^2} \int \int d^3p_1 d^3p_2 \delta^3(k - p_1 + p_2) Tr\{\gamma_\mu(p_1 + m)\gamma_\nu(p_2 + m)\} [\Pi^+ + \Pi^-] \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^2} \int d^3p \left((m^2 - p^\mu(p^\nu - k^\nu))g_{\mu\nu} + 2p^\mu(p^\nu - k^\nu) + 2(p^\mu - k^\mu)p^\nu \right. \\ &\quad \left. - 2im\epsilon^{\mu\alpha\nu}p_\alpha + 2im\epsilon^{\mu\nu\beta}(p - k)_\beta + 2g^{\mu\nu}m^2 \right) [\Pi^+ + \Pi^-]\end{aligned}\tag{5.22}$$

sendo a definição de Π^+ e Π^- igual à

$$\begin{aligned}\Pi^- &\equiv \delta^3(m^2 + p_1^2) \left[\mathcal{P} \frac{1}{m^2 + p_2^2} - i\pi\epsilon(p_2)\delta^3(m^2 + p_2^2) \right] \\ \Pi^+ &\equiv \delta^3(m^2 + p_2^2) \left[\mathcal{P} \frac{1}{m^2 + p_1^2} - i\pi\epsilon(p_1)\delta^3(m^2 + p_1^2) \right]\end{aligned}\tag{5.23}$$

Nas próximas seções analisaremos a parte simétrica e antisimétrica do tensor acima.

Termo antisimétrico

A parte antisimétrica do tensor é a contribuição referente à geração de massa da auto-energia do fóton. Ao substituir o resultado do tensor (5.22) em (5.18), introduziremos uma estrutura tensorial complexa com contribuição tanto na parte real quanto na parte imaginária. Lembrando que $\epsilon^{\mu\nu\alpha}g_{\mu\nu} = 0$.

$$\begin{aligned}\Pi^{(2)}(k^2) &= -\frac{i}{2m} \frac{k^\alpha}{k^2} \frac{e_{\mu\nu\alpha}}{2(2\pi)^2} \int d^3p \left[(m^2 + p^\mu(p^\nu - k^\nu))g_{\mu\nu} + 2p^\mu(p^\nu - k^\nu) + \right. \\ &\quad \left. 2(p^\mu - k^\mu)p^\nu + 2im\epsilon_{\mu\sigma\nu}k^\sigma + 2g^{\mu\nu}m^2 \right] [\Pi^+ + \Pi^-] \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3p [\Pi^+ + \Pi^-]\end{aligned}\tag{5.24}$$

Separando a parte real e a parte imaginária

$$\Pi^{(2)}(k^2) = \Re\Pi^{(2)}(k^2) + i\Im\Pi^{(2)}(k^2)\tag{5.25}$$

e substituindo as expressões em (5.23), temos

$$\Re\Pi^{(2)}(k^2) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3p \left[\mathcal{P} \frac{\delta^3(m^2 + p^2)}{m^2 + (p - k)^2} + \mathcal{P} \frac{\delta^3(m^2 + (p - k)^2)}{m^2 + p^2} \right]\tag{5.26}$$

$$\Im\Pi^{(2)}(k^2) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3p \delta^3(m^2 + p^2) \delta^3(m^2 + (p - k)^2) \left[\epsilon(p) - \epsilon(p - k) \right]\tag{5.27}$$

Componente Real. O procedimento analítico descrito abaixo será utilizado para resolver a parte real do tensor (5.26)

$$\frac{\delta^3(a)}{b} = \frac{1}{4\pi i} \int d\omega_1 d\omega_2 \frac{\omega_1}{|\omega_1|} e^{i\omega_1 a + i\omega_2 b} \quad (5.28)$$

$$\frac{\delta^3(b)}{a} = \frac{1}{4\pi i} \int d\omega_1 d\omega_2 \frac{\omega_2}{|\omega_2|} e^{i\omega_1 a + i\omega_2 b}$$

fazendo uma mudança nas variáveis de integração $\omega_1 = \omega\alpha$ e $\omega_2 = \omega(1-\alpha)$ com o Jacobiano $|\omega|$. Temos, $d\omega_1 d\omega_2 = |\omega| d\omega d\alpha$. Essa modificação na soma das eqs. (5.28) corresponde à

$$\mathcal{P} \left\{ \frac{\delta^3(a)}{b} + \frac{\delta^3(b)}{a} \right\} = \frac{1}{4\pi i} \int \omega d\omega d\alpha \left(\frac{\alpha}{|\alpha|} + \frac{(1-\alpha)}{|1-\alpha|} \right) e^{i\omega(\alpha a + (1-\alpha)b)} \quad (5.29)$$

A integral sobre a variável α é reescrita como

$$\int d\alpha \epsilon(\alpha) + \int d\alpha \epsilon(1-\alpha) = \int_0^\infty d\alpha - \int_{-\infty}^0 d\alpha + \int_{-\infty}^1 d\alpha - \int_1^\infty d\alpha = 2 \int_0^1 d\alpha \quad (5.30)$$

Então

$$\mathcal{P} \left\{ \frac{\delta^3(a)}{b} + \frac{\delta^3(b)}{a} \right\} = \frac{1}{2\pi i} \int \omega d\omega d\alpha e^{i\omega(\alpha a + (1-\alpha)b)} \quad (5.31)$$

Se fizermos $a = (m^2 + p^2)$ e $b = (m^2 + (p-k)^2)$, encontramos

$$\begin{aligned} \Re\Pi^{(2)}(k^2) &= \frac{-1}{(2\pi)^2} \int d^3 p \left[P \frac{\delta^3(m^2 + p^2)}{m^2 + (p-k)^2} + P \frac{\delta^3(m^2 + (p-k)^2)}{m^2 + p^2} \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3 p \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty \omega d\omega \int_0^1 d\alpha e^{i\omega(\alpha(m^2+p^2) + (1-\alpha)(m^2+(p-k)^2))} \end{aligned} \quad (5.32)$$

Rearranjando os termos dentro da exponencial e fazendo uma simples substituição de $p \rightarrow p + (1-\alpha)k$ com o propósito de tirar o termo misto pk , temos

$$\begin{aligned} \Re\Pi^{(2)}(k^2) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{-1}{(2\pi)^2} \int d^3 p \int_0^1 d\alpha \int_{-\infty}^\infty \omega d\omega e^{i\omega(-p^2 - (1-\alpha)^2 k^2 - 2pk(1-\alpha) + m^2 + (1-\alpha)k^2 + 2pk(1-\alpha))} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{-1}{(2\pi)^2} \int d^3 p \int_0^1 d\alpha \int_{-\infty}^\infty \omega d\omega e^{i\omega(m^2+p^2)} \end{aligned} \quad (5.33)$$

em que $M^2 \equiv m^2 - k^2\alpha(1-\alpha)$. Usando esse resultado e pela ajuda das seguintes identidades

$$\begin{aligned} \frac{1}{(A+i\epsilon)^{1+\lambda}} &= \frac{(-i)^{(1+\lambda)}}{\Gamma(1+\lambda)} \int_0^\infty dx x^\lambda e^{ix(A+i\epsilon)} \\ \frac{1}{(A-i\epsilon)^{1+\lambda}} &= \frac{(i)^{(1+\lambda)}}{\Gamma(1+\lambda)} \int_0^\infty dx x^\lambda e^{-ix(A-i\epsilon)} \end{aligned} \quad (5.34)$$

Seguiremos realizando, primeiramente, a operação na parte temporal do momentum p na eq. (5.33). Sendo a função gamma $\Gamma(1) \stackrel{58}{=} 1$ e $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. A integral (5.33) é

$$\begin{aligned}
\Re\Pi^{(2)}(k^2) &= \frac{i}{(2\pi)^3} \int_0^1 d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \omega d\omega \frac{1}{2\omega^{1/2}} \frac{\sqrt{\pi}}{i^{1/2}} \frac{\pi}{\omega} \frac{1}{(-i)} e^{i\omega M^2} \\
&= \frac{i}{8\pi^2} \int_0^1 d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{1}{2\omega^{1/2}} \frac{\sqrt{\pi}}{i^{1/2}} \frac{1}{(-i)} e^{i\omega M^2} \\
&= -\frac{1}{16\pi} \int_0^1 d\alpha \frac{1}{(m^2 - \alpha(1-\alpha)k^2)^{1/2}}
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Componente imaginária o ponto importante a ser observado da eq. (5.27) é que o termo proverá a "geração dinâmica de massa". Calcularemos a integral de forma direta

$$\Im\Pi^{(2)}(k^2) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3p \delta^3(m^2 + p^2) \delta^3(m^2 + (p-k)^2) \left(\frac{p_o}{|p_o|} - \frac{p_o - k_o}{|p_o - k_o|} \right) \tag{5.36}$$

Lembrando que o integrando não depende dos ângulos azimutal e polar. A integração no ângulo sólido dá um fator 2π . Aplicando a identidade de Dirac $\delta^3(m^2 + p^2)$ em dp_o , a integral se reduz a

$$\begin{aligned}
\Im\Pi^{(2)}(k^2) &= -\frac{1}{2} \int \frac{\mathbf{p}d\mathbf{p}}{|2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}|} \left[\delta^3(m^2 - k_o^2 + 2k_o\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} - 2\mathbf{k}\mathbf{p} - p^2) \times \right. \\
&\quad \left(1 + \frac{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} - k_o}{|\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} - k_o|} \right) + \delta^3(m^2 - k_o^2 - 2k_o\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + 2\mathbf{k}\mathbf{p} - p^2) \times \\
&\quad \left. \left(-1 + \frac{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + k_o}{|\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + k_o|} \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Pela invariância de Poincaré $p^2 + m^2 = 0$, escolhemos um determinado referencial no qual o sistema encontra-se em repouso $\mathbf{k} = 0$, já que estamos trabalhando como um tensor de Lorentz covariante de uma partícula massiva.

$$\begin{aligned}
\Im\Pi^{(2)}(k^2) &= -\frac{1}{2} \int \frac{\mathbf{p}}{|2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}|} d\mathbf{p} \left[\delta^3(k_o^2 - 2k_o\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}) \left(1 + \frac{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} - k_o}{|\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} - k_o|} \right) \right. \\
&\quad \left. + \delta^3(k_o^2 + 2k_o\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}) \left(-1 + \frac{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + k_o}{|\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + k_o|} \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.38}$$

A integral desaparece se $-k^2 < 4m^2$. Esta inequação diz respeito ao nível de energia em que os efeitos da teoria quântica de campos se manifestam no sistema, uma vez que $4m^2$ é a energia limiar na criação de uma partícula e antipartícula [Källén et al. \[1972\]](#). Com a ajuda das identidades de Dirac [\(C.2\)](#) e, prestando atenção ao sinal dado por $\epsilon(p_o - k_o)$ e $\epsilon(p_o + k_o)$, a integral [\(5.38\)](#) é reescrita igual à

$$\begin{aligned}
\Im\Pi^{(2)}(k^2) &= -\frac{1}{2} \int \frac{\mathbf{p}}{|2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}|} d\mathbf{p} \frac{1}{|2\sqrt{\mathbf{p}^2 - m^2}|} \left[\left(\delta^3(k_o - 2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}) - \delta^3(k_o) + \right. \right. \\
&\quad \left. \delta^3(k_o - 2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}) + \delta^3(k_o) \right) - \left(\delta^3(k_o - 2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}) - \delta^3(k_o) \right. \\
&\quad \left. \left. + \delta^3(k_o - 2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}) + \delta^3(k_o) \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Um cálculo direto e chegamos ao resultado

$$\Im\Pi^{(2)}(k^2) = -\frac{1}{4} \int \frac{\mathbf{p}d\mathbf{p}}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \left[\frac{\left(\delta^3(k_o/2 - \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}) + \delta^3(k_o/2 + \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}) \right)}{|2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}|} \right] \epsilon(k) \quad (5.40)$$

e por meio de

$$\epsilon(k) = \frac{1}{2} \left[\epsilon(k+p) - \epsilon(p-k) \right], \quad (5.41)$$

fazendo $\mathbf{p}d\mathbf{p} = \frac{da}{2}$ em (5.40) e substituindo $\mathbf{p}^2 \rightarrow a$, obtemos

$$\Im\Pi^{(2)}(k^2) = -\frac{1}{16} \int \frac{da}{\sqrt{a + m^2}} \left[\delta^3(-k_o^2/4 + a + m^2) \right] \Delta \quad (5.42)$$

Sendo Δ definido como

$$\delta^3 \equiv \frac{(m^2 + a)^{1/2} + k_o}{|(m^2 + a)^{1/2} + k_o|} - \frac{(m^2 + a)^{1/2} - k_o}{|(m^2 + a)^{1/2} - k_o|} \quad (5.43)$$

O cálculo da integral (5.40) é efetuado diretamente pela ação da delta de Dirac

$$\begin{aligned} \Im\Pi^{(2)} &= -\frac{1}{4} \int \frac{\mathbf{p}d\mathbf{p}}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \left[\frac{\left(\delta^3(k_o/2 - \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}) + \delta^3(k_o/2 + \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}) \right) \epsilon(k)}{|2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}|} \right] \\ &= -\frac{1}{8} \int \frac{\mathbf{p}d\mathbf{p}}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \frac{\delta^3(\mathbf{p} - \sqrt{k_o^2/4 - m^2})}{|\sqrt{k_o^2/4 - m^2}|} \\ &= -\frac{1}{8} \frac{\Theta(|k|/2 - m)}{\sqrt{k^2}} \end{aligned} \quad (5.44)$$

Assim, é importante notar que o setor físico para energias menores que a produção de dois pares desaparece. Então

$$\Im\Pi^{(2)}(0) = 0 \quad (5.45)$$

O resultado acima é válido para qualquer referencial devido à covariância do tensor de polarização. Através da averiguação das equações (5.35) e (5.45) em $k^2 = 0$. Obtemos

$$\Pi^{(2)}(0) = -\frac{1}{4\pi m}. \quad (5.46)$$

O valor finito encontrado no termo imaginário do tensor da eq. (5.25) não precisa de nenhum tipo de regularização para lidar no regime infravermelho.

Termo Simétrico

O próximo passo será calcular a parte simétrica e verificar o seu comportamento físico na polarização do vácuo. De modo direto, ao aplicar a métrica $g_{\mu\nu}$ na eq. (5.22)¹

¹A contração da métrica com o traço das matrizes de Dirac se dá pelas igualdades no apêndice (C.2).

$$\begin{aligned}
&= g_{\mu\nu} \text{Tr}[\gamma^\mu(p+m)\gamma^\nu(p+m)] \\
&= g_{\mu\nu} \left(2p_\alpha^1 p_\beta^2 \text{tr}[g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha}] + m^2 \text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] \right) \\
&= 6m^2 - 2p_1 \cdot p_2
\end{aligned} \tag{5.47}$$

É conveniente salientar que $g_\mu^\mu = 3$. Assim, segue imediatamente que o tensor contraído da eq. (5.22) resulta

$$\begin{aligned}
\Pi_\mu^\mu(k) &= \frac{1}{4(2\pi)^2} \int d^3 p_1 d^3 p_2 \delta^3(k - p_1 + p_2) \left(6m^2 - 2p_1 \cdot p_2 \right) \left\{ \delta^3(m^2 + p_1^2) \left(P \frac{1}{m^2 + p_2^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - i\pi\epsilon(p_2^2) \delta^3(m^2 + p_2^2) \right) + \delta^3(m^2 + p_2^2) \left(P \frac{1}{m^2 + p_1^2} + i\pi\epsilon(p_1) \delta^3(m^2 + p_1^2) \right) \right\} \\
&= \frac{1}{4(2\pi)^2} \int d^3 p_1 \left(6m^2 - 2p_1 \cdot (p_1 - k) \right) \left\{ \delta^3(m^2 + p_1^2) \left(P \frac{1}{m^2 + (p_1 - k)^2} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. i\pi\epsilon(p_1 - k) \delta^3(m^2 + (p_1 - k)^2) \right) + \delta^3(m^2 - (p_1 - k)^2) \left(P \frac{1}{m^2 + p_1^2} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. i\pi\epsilon(p_1) \delta^3(m^2 + p_1^2) \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{5.48}$$

Componente Imaginária: Primeiro, usaremos como ajuda a identidade dada na eq. (5.17) e calcularemos a parte imaginária por motivos de praticidade

$$\begin{aligned}
\Im \Pi^{(1)}(k^2) &= \frac{1}{4(2\pi)^2} \int d^3 p_1 \left(6m^2 - 2p_1 \cdot (p_1 - k) \right) \left\{ \delta^3(m^2 + p_1^2) (-\pi\epsilon(p_1 - k)) \times \right. \\
&\quad \left. \delta^3(m^2 + (p_1 - k)^2) + \delta^3(m^2 + (p_1 - k)^2) (\pi\epsilon(p_1) \delta^3(m^2 + p_1^2)) \right\} \\
&= \frac{1}{16\pi} \int d^3 p_1 \left(6m^2 - 2p_1 \cdot (p_1 - k) \right) \left\{ \delta^3(m^2 + p_1^2) \delta^3(m^2 + (p_1 - k)^2) \right\} \\
&\quad \times (\epsilon(p_1) - \epsilon(p_1 - k)) \\
&= \frac{1}{16} \int \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} d\mathbf{p} \left(6m^2 - 2p_1 \cdot (p_1 - k) \right) \left\{ \delta^3(m^2 - k_o^2 - 2k_o \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + \right. \\
&\quad \left. 2\mathbf{k}\mathbf{p} - p^2) \left(1 - \frac{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} - k_o}{|\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} - k_o|} \right) + \delta^3(m^2 - k_o^2 + 2k_o \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + 2\mathbf{k}\mathbf{p} - p^2) \right. \\
&\quad \left. \times \left(-1 + \frac{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + k_o}{|\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + k_o|} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{5.49}$$

Através das deltas de Dirac, é possível extrair as relações entre os momentos externos e internos: $p_1^2 + m^2 = 0$ e $(k - p_1)^2 + m^2 = 0$. É aconselhável escolher um referencial em repouso ($\mathbf{k} = 0$). A integral acima fica

$$\begin{aligned} \Im\Pi^{(1)}(k^2) &= \frac{1}{16} \int \frac{\mathbf{p}d\mathbf{p}}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} (4m^2 + k_o^2) \left\{ \delta^3(k_o^2 - 2k_o\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}) \left(1 - \frac{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} - k_o}{|\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} - k_o|}\right) \right. \\ &\quad \left. + \delta^3(k_o^2 + 2k_o\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}) \left(-1 + \frac{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + k_o}{|\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + k_o|}\right) \right\} \end{aligned} \quad (5.50)$$

mais algumas manipulações algébricas e a solução no referencial geral é

$$\begin{aligned} \Im\Pi^{(1)}(k^2) &= \frac{(4m^2 + k_o^2)}{16} \int \frac{\mathbf{p}d\mathbf{p}}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \left\{ \frac{1}{4} \frac{\delta^3(\mathbf{p} - \sqrt{k_o^2/4 - m^2}) + \delta^3(\mathbf{p} + \sqrt{k_o^2/4 - m^2})}{|2\sqrt{k_o^2/4 - m^2}|} \right\} \\ &= \frac{1}{32} (4m^2 - k^2) \frac{1}{\sqrt{-k^2}} \Theta(-k^2 - 4m^2) \end{aligned} \quad (5.51)$$

Componente Real: Agora, falta apenas a componente real da parte simétrica do tensor da eq. (5.22). Com o propósito de não ser redundante, utilizaremos o mesmo método aplicado na componente real da parte antisimétrica na eq. (5.26). Assim, temos que

$$\begin{aligned} \Re\Pi^{(1)}(k^2) &= \frac{1}{4(2\pi)^2} \int d^3p (6m^2 - 2p_1(p_1 - k)) \left\{ P \frac{\delta^3(m^2 - p_1^2)}{m^2 - (p_1 - k)^2} \right. \\ &\quad \left. + P \frac{\delta^3(m^2 - (p_1 - k)^2)}{m^2 - p_1^2} \right\} \end{aligned} \quad (5.52)$$

e o resultado final é

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{k^2 4(2\pi)^2} \int d^3p (6m^2 - 2(p + (1 - \alpha)k)(p - \alpha k)) \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \omega d\omega \int_0^1 d\alpha e^{i\omega(m^2 + p^2 - \alpha(1 - \alpha)k^2)} \\ &= -\frac{1}{k^2 4(2\pi)^2} \int_0^1 d\alpha \int d^3p (6m^2 - 2(p + (1 - \alpha)k)(p - \alpha k)) \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \omega d\omega e^{i\omega(m^2 + p^2)} \\ &= \frac{1}{4(2\pi)^2} \int_0^1 d\alpha \int d^3p (6m^2 - 2p^2 + 2\alpha(1 - \alpha)k^2) \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \omega d\omega e^{i\omega(m^2 + p^2)} \end{aligned} \quad (5.53)$$

Os termos lineares em p se anulam por simetria e o que resta é apenas as potências pares

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{16(4\pi)} \int_0^1 d\alpha \frac{(3m^2 + \alpha(1 - \alpha)k^2)}{(m^2 - \alpha(1 - \alpha)k^2)^{1/2}} - i \int \frac{d^3p}{2(2\pi)^3} (p_o^2 - \mathbf{p}^2) \int_0^1 d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega^2}{2} e^{i\omega(M^2 - p^2)} \\ &= \frac{3}{64\pi} \int_0^1 d\alpha (m^2 - \alpha(1 - \alpha)k^2)^{1/2} + \frac{k^2}{16\pi} \int_0^1 d\alpha \frac{\alpha(1 - \alpha)}{(m^2 - \alpha(1 - \alpha)k^2)^{1/2}} \\ &\quad - \frac{3}{64\pi} \int_0^1 d\alpha (m^2 - \alpha(1 - \alpha)k^2)^{(1/2)} + \frac{k^2}{16\pi} \int_0^1 d\alpha \frac{\alpha(1 - \alpha)}{(m^2 - \alpha(1 - \alpha)k^2)^{1/2}} \end{aligned} \quad (5.54)$$

No limite infravermelho ($k \rightarrow 0$), após alguns cálculos elementares

$$\Pi^{(1)}(0) = 0 \quad (5.55)$$

O Tensor de Polarização total é, das equações (5.35), (5.44), (5.51) e (5.54), igual à

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(k^2) = & \left\{ g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right\} \left(\frac{k^2}{16\pi} \int_0^1 d\alpha \frac{\alpha(1-\alpha)}{(m^2 - \alpha(1-\alpha)k^2)^{1/2}} - ie^2 \frac{(k^2 - 4m^2)}{32\pi^2 k^2} \frac{\Theta(k_o)}{\sqrt{-k^2}} \right) \\ & \times \Theta(-k^2 - 4m^2) + \left\{ im\epsilon^{\mu\nu\alpha} k_\alpha \right\} \left(-\frac{1}{4\pi} \int_0^1 d\alpha \frac{1}{(m^2 - \alpha(1-\alpha)k^2)^{1/2}} \right. \\ & \left. - i \frac{\Theta(k_o)}{8\pi^2} \frac{\Theta(|k|/2 - m)}{\sqrt{-k^2}} \right) \end{aligned} \quad (5.56)$$

A solução final é

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(k^2) = & \left\{ k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu \right\} \Theta(k_o) \left(\frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{4m}{k^2} + \frac{1}{\sqrt{k^2}} \left(1 + \frac{4m^2}{k^2} \right) \right\} \ln \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{-k^2}}{\sqrt{4m^2}}}{1 + \frac{\sqrt{-k^2}}{\sqrt{4m^2}}} \right) - \right. \\ & \left. \frac{1}{4\pi m} - ie^2 \frac{(k^2 - 4m^2)}{32\pi^2 k^2} \frac{\Theta(-k^2 - 4m^2)}{\sqrt{-k^2}} \right) + \left\{ im\epsilon^{\mu\nu\alpha} k_\alpha \right\} \frac{\Theta(k_o)}{\sqrt{-k^2}} \left(-\frac{1}{4\pi} \times \right. \\ & \left. \ln \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{-k^2}}{\sqrt{4m^2}}}{1 + \frac{\sqrt{-k^2}}{\sqrt{4m^2}}} \right) - i \frac{1}{8\pi^2} \frac{\Theta(|k|/2 - m)}{\sqrt{-k^2}} \right) \end{aligned} \quad (5.57)$$

O resultado apresentado acima corrobora o caráter topológico da massa do fóton. O limite infravermelho é insensível a derivadas de altas ordens e não sofre modificações pela teoria de Podolsky. Dentre as respostas básicas, encontramos no âmbito da proposta trabalhada nesse capítulo, que diferentes teorias microscópicas fornecem o mesmo comportamento emergente (macroscópico), independente das interações subjacentes dos graus de liberdade microscópicos, ou seja, o princípio da universalidade (largamente aplicado em teorias de campo efetiva).

Com o propósito de manter a covariância de Lorentz, a Lagrangiana de partículas e de interação são inalteradas pela $GQED_3$. De forma pragmática, o mecanismo responsável pela "geração dinâmica" da massa do fóton depende do acoplamento mínimo. Se a teoria de Podolsky tivesse uma diferente interação entre o fóton e o férmion, a massa gerada de forma dinâmica seria diferente.

5.2 Vértice Γ_μ

Daremos sequência à investigação de outros processos radiativos que compõem a estrutura básica dos fenômenos da $GQED_3$. A função do vértice, ou conhecida como função de três pontos, é responsável pela correção da interação de uma corrente com um fóton. Nesta seção, novos cenários serão abordados à luz das diretrizes oriundas da redução da dimensão espacial

$$\Gamma_\mu(x' - x, x - x'') = -\frac{e^2}{2}\gamma^\lambda Tr[S^{(1)}(x' - x)\gamma_\mu S_R(x - x'')G^R(x'' - x') +$$

$$S_A(x' - x)\gamma_\mu S^{(1)}(x - x'')G^R(x'' - x') + S_A(x' - x)\gamma_\mu S_R(x - x'')G_P^{(1)}(x'' - x')]\gamma_\lambda. \quad (5.58)$$

essa distribuição, invariante sob translação, foi, primeiramente, obtida em (3 + 1) dimensões por [Schwinger \[1962\]](#). No entanto, essa simetria translacional não pode ser bem definida na descrição de Interação. Examinaremos tal afirmação de forma bem mais clara. A descrição da Interação assume que o vácuo da teoria interagente $|\Omega\rangle$ é proporcional ao vácuo da teoria livre $|0\rangle$ a menos de um fator de fase. Além disso, é possível dividir o Hamiltoniano total em $H = H_o + H_{int}$. Para simplificar, consideramos o operador \mathcal{U} e o vácuo como um operador unitário do grupo euclidiano e o único estado invariante de Poincaré, respectivamente, [Bogolubov et al. \[1975\]](#). O problema pode ser entendido pelo seguinte: $|\Omega\rangle$ deve coincidir com o estado fundamental de Fock $|0\rangle$, invariante sob transformação euclidiana. Logo, a descrição de Interação afirma $\mathcal{U}|\Omega\rangle = |\Omega\rangle$ e, assim, impossibilita um sistema não trivial de interação [Weinberg et al. \[1995\]](#), ou seja, a separação dos Hamiltonianos H_o e H_{int} não admite uma representação de Fock na descrição do operador de interação.

A descrição de Heisenberg apresenta um modelo baseado na superposição de soluções homogêneas e não homogêneas [\(2.52a\)](#) e [\(2.52b\)](#), atuando no mesmo espaço de Hilbert. Para obter mais informações de Γ^μ , apresentamos uma transformação de Fourier.

$$\Gamma_\mu(q, q') = \int d^3x' d^3x'' e^{-iq(x'-x)} e^{-iq'(x-x'')} \Gamma_\mu(x' - x, x - x''). \quad (5.59)$$

Utilizando as funções singulares da igualdade [\(5.6b\)](#), [\(5.6a\)](#), [\(5.7\)](#), [\(2.44\)](#) e [\(2.45\)](#) no espaço do momento, temos

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu(q, q') = & \\ & \frac{-e^2}{2(2\pi)^3} \int d^3k \left(\mathcal{P} \frac{\delta^3(k^2) - \delta^3(k^2 + m_p^2)}{[(q-k)^2 + m^2][(q'-k)^2 + m^2]} + \frac{\delta^3((q'-k)^2 + m^2)m_p^2}{[(q-k)^2 + m^2][k^2][k^2 + m_p^2]} \right. \\ & \left. + \frac{\delta^3((q-k)^2 + m^2)m_p^2}{[(q'-k)^2 + m^2][k^2][k^2 + m_p^2]} + i\pi \left(\mathcal{P} \frac{1}{k^2} - \mathcal{P} \frac{1}{k^2 + m_p^2} \right) \delta^3((q'-k)^2 + m^2) \right) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta^3((q-k)^2 + m^2)[1 - \epsilon(q-k)\epsilon(q'-k)]\epsilon(q'-q) + i\pi\mathcal{P}\frac{1}{(q-k)^2 + m^2} \times \\
& \delta^3((q'-k)^2 + m^2)(\delta^3(k^2) - \delta^3(k^2 + m_p^2))[1 - \epsilon(k)\epsilon(k-q')]\epsilon(q') - i\pi\mathcal{P}\frac{1}{(q-k)^2 + m^2} \\
& \times \delta^3((q'-k)^2 + m^2)(\delta^3(k^2) - \delta^3(k^2 + m_p^2))[1 - \epsilon(q-k)\epsilon(q-k)]\epsilon(q) + \pi^2(\delta^3(k^2) - \\
& \delta^3(k^2 + m_p^2))\delta^3((q'-k)^2 + m^2)\delta^3((q-k)^2 + m^2)[\epsilon(k)\epsilon(q-k) + \epsilon(k)\epsilon(q'-k) + \\
& \epsilon(q-k)\epsilon(q'-k)] \gamma_\lambda(i\gamma(q-k) - m)\gamma_\mu(i\gamma(q'-k) - m)\gamma^\lambda
\end{aligned} \tag{5.60}$$

Nosso objetivo é analisar os estados intermediários da correção radiativa do operador corrente em que o fóton cumpre o papel principal. É interessante reescrever o vetor igual à

$$\Gamma_\mu(q, q') = \Gamma_\mu^{(1)}(q, q') + i\epsilon(q' - q)\Gamma_\mu^{(2)}(q, q'). \tag{5.61}$$

Verifica-se que $\Gamma^{(2)}$ é a interação entre férmion e anti-férmion no vértice, através de um fóton intermediário. Podemos simplificar essa integração acima ao lembrar que os férmions são *on-shell*^[2]. Assim, a integral acima permanece, apenas, com os termos proporcionais ao deslocamento do momento na radiação do vértice. Por uma questão de clareza, as informações físicas desses termos serão explícitas nos comentários finais. A primeira integral é

$$\begin{aligned}
& \Gamma_\mu^{(1)}(q, q') = \\
& \frac{-e^2}{8\pi^2} \int d^3k \left[\mathcal{P} \frac{\delta^3(k^2) - \delta^3(k^2 + m_p^2)}{((q-k)^2 + m^2)((q'-k)^2 + m^2)} + \mathcal{P} \frac{m_p^2 \delta^3((q'-k)^2 + m^2)}{((q-k)^2 + m^2)k^2(k^2 + m_p^2)} \right. \\
& \left. + \mathcal{P} \frac{m_p^2 \delta^3((q-k)^2 + m^2)}{((q'-k)^2 + m^2)k^2(k^2 + m_p^2)} \right] \gamma^\lambda(i\gamma(q-k) - m)\gamma_\mu(i\gamma(q'-k) - m)\gamma_\lambda,
\end{aligned} \tag{5.62}$$

e a segunda

$$\begin{aligned}
& \Gamma_\mu^{(2)}(q, q') = \frac{-e^2}{8\pi} \int d^3k \delta^3((q-k)^2 + m^2)\delta^3((q'-k)^2 + m^2) \left[\mathcal{P} \frac{1}{k^2} - \mathcal{P} \frac{1}{k^2 + m_p^2} \right] \times \\
& [1 - \epsilon(q'-k)\epsilon(q-k)]\gamma^\lambda(i\gamma(q-k) - m)\gamma_\mu(i\gamma(q'-k) - m)\gamma_\lambda.
\end{aligned} \tag{5.63}$$

Em contraste com qualquer esquema de regularização sofisticado da QED_3 , o procedimento de subtração da $GQED_3$ mantém a invariância de calibre e regula naturalmente a divergência ultravioleta. Consideramos mais conveniente resolver a eq. (5.61) separadamente. Por motivos de praticidade, calcularemos a componente escalar, vetorial e tensorial no apêndice (D), (E) e (F), respectivamente. A integral tensorial é

²É fácil verificar que no referencial $\vec{q} = 0$, as quantidades $\delta^3(k^2)\delta^3((qk)^2 + m^2)$ não podem ser determinadas simultaneamente.

$$\begin{aligned}
& \mathcal{P} \int d^3k \frac{m_P^2 \Gamma_\mu k_\nu}{k^2(k^2 + m_P^2)} \delta^3((q-k)^2 + m^2) \delta^3((q'-k)^2 + m^2) [1 - \epsilon(q'-k)\epsilon(q-k)] = \\
& \frac{\pi \Theta(Q_o)}{\sqrt{-Q^2}} \frac{m_P^2}{Q^2} \frac{\Theta(-Q^2 - 4m^2)}{Q^2(1 + \frac{4m^2}{Q^2})^2} \left\{ \left[\left(q'_\mu q'_\nu + q_\mu q_\nu - \frac{Q^2}{2} g_{\mu\nu} \right) - \left(q_\mu q'_\nu + q'_\mu q_\nu + \frac{Q^2}{2} g_{\mu\nu} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left(Q^2 - 4m^2 \right) g_{\mu\nu} \right] \frac{(Q^2 + 4m^2 + m_P^2)}{\sqrt{m_P^4 + m_P^2 Q^2 (1 + \frac{4m^2}{Q^2})}} + \left[\left(q'_\mu q'_\nu + q_\mu q_\nu - \frac{Q^2}{2} g_{\mu\nu} \right) - \left(q_\mu q'_\nu + \right. \right. \\
& \left. \left. q'_\mu q_\nu + \frac{Q^2}{2} g_{\mu\nu} \right) \right] \left. \right\}, \tag{5.64}
\end{aligned}$$

com $Q = q' - q$. A integral vetorial é

$$\begin{aligned}
& \mathcal{P} \int d^3k \frac{\Gamma_\mu}{k^2} \frac{m_P^2}{(k^2 + m_P^2)} \delta^3((q-k)^2 + m^2) \delta^3((q'-k)^2 + m^2) [1 - \epsilon(q'-k)\epsilon(q-k)] = \\
& \frac{\pi \Theta(Q_o)}{\sqrt{-Q^2}} \frac{m_P^2}{Q^2} \frac{\Theta(-Q^2 - 4m^2)}{(1 + \frac{4m^2}{Q^2})} \frac{(q' + q)_\mu}{\sqrt{m_P^4 + m_P^2 Q^2 (1 + \frac{4m^2}{Q^2})}}. \tag{5.65}
\end{aligned}$$

Antes de resolver a integral escalar, devemos regular a divergência infravermelha inserindo uma massa fictícia de fótons (μ) para evitar o problema infravermelho na região próxima a $k = 0$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{P} \int \frac{d^3k m_P^2}{(k^2 + \mu^2)(k^2 + m_P^2)} \delta^3((q-k)^2 + m^2) \delta^3((q'-k)^2 + m^2) [1 - \epsilon(q'-k)\epsilon(q-k)] = \\
& \times \frac{\pi \Theta(Q_o)}{\sqrt{-Q^2}} \Theta(-Q^2 - 4m^2) \left[\frac{1}{\sqrt{\mu^4 + \mu^2 Q^2 (1 + \frac{4m^2}{Q^2})}} - \frac{1}{\sqrt{m_P^4 + m_P^2 Q^2 (1 + \frac{4m^2}{Q^2})}} \right]. \tag{5.66}
\end{aligned}$$

Os resultados obtidos em (5.64), (5.65) e (5.66) em conjunto com a álgebra de Dirac da integral (5.63) permitem escrever a eq. (5.63) como a componente imaginária dos fatores de forma F_{1P} e F_{2P}

$$\Gamma_\mu^{(2)}(q, q') = \gamma_\mu F_{1P}(Q^2) + i \frac{(q + q')_\mu}{2m} F_{2P}(Q^2), \tag{5.67}$$

em que a parametrização sugere significados físicos distintos

$$\begin{aligned}
F_{1P}(Q^2) &= -\frac{e^2}{4\pi} \frac{\Theta(Q_o)(Q^2 + 8m^2)}{\sqrt{-Q^2}} \left[\frac{1}{\sqrt{\mu^4 + \mu^2 Q^2 (1 + \frac{4m^2}{Q^2})}} - \frac{1}{\sqrt{m_P^4 + m_P^2 Q^2 (1 + \frac{4m^2}{Q^2})}} \right] \\
&\times \Theta(-Q^2 - 4m^2), \tag{5.68}
\end{aligned}$$

A contribuição da integral tensorial (5.64) desaparece devido à álgebra spinorial

$$F_{2P}(Q^2) = -\frac{e^2}{3\pi} \frac{\Theta(Q_o)}{\sqrt{-Q^2}} \frac{m^2}{Q^2} \frac{m_P^2}{\sqrt{m_P^4 + m_P^2 Q^2 (1 + \frac{4m^2}{Q^2})}} \frac{\Theta(-Q^2 - 4m^2)}{(1 + \frac{4m^2}{Q^2})}. \tag{5.69}$$

Infelizmente, os resultados obtidos até agora de $\Gamma_\mu^{(2)}$, ainda, não permitem concluir se o modelo é ausente de momento magnético anômalo. Inferimos, imediatamente, que não é necessário resolver a eq. (5.62) explicitamente. Alternativamente, essa resolução pode ser tratada em uma forma mais conveniente, sem perder informações sobre as correções radiativas. Pela discussão usada na eq. (5.67), podemos expressar $\Gamma_\mu^{(1)}$ sob a forma de

$$\Gamma_\mu^{(1)}(q, q') = \gamma_\mu \bar{F}_{1P}(Q^2) + i \frac{(q + q')_\mu}{2m} \bar{F}_{2P}(Q^2). \quad (5.70)$$

Devido às propriedades de analiticidade, realizamos as relações de Kramers-Kronig entre (5.67) e (5.70) [Weinberg et al. 1995],

$$\bar{F}_{1P}(Q^2) = \int_0^\infty ds \frac{F_{1P}(-s)}{(s + Q^2)}, \quad \bar{F}_{2P}(Q^2) = \int_0^\infty ds \frac{F_{2P}(-s)}{(s + Q^2)}. \quad (5.71)$$

Os fatores de forma são

$$\begin{aligned} \bar{F}_{1P}(Q^2) = & \frac{3e^2}{4\pi\sqrt{-Q^2}} \left[\ln \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{-Q^2}{4m^2}}}{1 + \sqrt{\frac{-Q^2}{4m^2}}} \right) - \ln \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{-Q^2}{4m^2 + m_P^2}}}{1 + \sqrt{\frac{-Q^2}{4m^2 + m_P^2}}} \right) - \frac{8m^2}{Q^2 + 4m^2} \sqrt{\frac{-Q^2}{4m^2}} \right. \\ & \left. + \frac{8m^2}{Q^2 + 4m^2 + m_P^2} \sqrt{\frac{-Q^2}{4m^2}} \right], \end{aligned} \quad (5.72)$$

e

$$\begin{aligned} \bar{F}_{2P}(Q^2) = & \frac{(em)^2}{3\pi} \sqrt{\frac{m_P^2}{-Q^2}} \left[\frac{1}{(Q^2 + 4m^2)} \frac{\ln \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{-Q^2}{4m^2 + m_P^2}}}{1 + \sqrt{\frac{-Q^2}{4m^2 + m_P^2}}} \right)}{\sqrt{Q^2 + 4m^2 + m_P^2}} + \frac{1 - \sqrt{\frac{4m^2}{4m^2 + m_P^2}}}{(3Q^2 - 4m^2 + m_P^2)m_P^2} \right. \\ & \left. \times \int_{4m^2}^\infty \frac{ds}{\sqrt{s}} \frac{1}{(s - 4m^2)} \right]. \end{aligned} \quad (5.73)$$

em que essa integral mostra uma forte divergência infravermelha. A particularidade dimensional em $(2 + 1)$ introduz apenas correções cinemáticas no setor férmionico. A correção de vértice apenas remodela o propagador de férmions por uma constante multiplicativa

$$\bar{F}_{1P}(0) = -\frac{3}{4\pi m} \left(1 + \frac{4m^2}{4m^2 + m_P^2} \right). \quad (5.74)$$

Recuperamos as correções de QED_3 observadas em Epstein-Glaser [L. Tomazelli 1996] ao tomar o limite $m_P \rightarrow \infty$. Essa proposição funciona porque o spin planar tem características cinemáticas na ordem e^2 ao invés de dinâmicas [Alexandre et al. 2005]. Logo, observamos uma manifestação clara em que a $GQED_3 \rightarrow QED_3$ (6.23). Por outro lado, essa operação difere significativamente se aplicarmos esse limite a (5.73).

5.3 Auto energia do elétron Σ

Antes de enunciarmos os detalhes físicos da auto energia do elétron na descrição de Heisenberg, estudaremos o espectro de um operador linear Σ , uma função singular retardada na qual sua analiticidade implica em uma relação unívoca entre a parte real e a parte imaginária. A obtenção do espectro de um operador linear é algo bastante complicado e a sua resolução tem que ser tomada caso a caso. Através da eq. (5.4), a função Σ tem a forma

$$\Sigma(x-x') = \frac{-e^2}{2} \int dx' \gamma_\lambda [S^{(1)}(x-x') D_P^A(x'-x) + S^{(R)}(x-x') G_P^{(1)}(x'-x)] \gamma^\lambda \psi(x') \quad (5.75)$$

Com o auxílio das eqs. (5.6b), (5.7), (2.43) e (2.45), a função $\Sigma(x-x')$ é reescrita como

$$\begin{aligned} \Sigma(x-x') = & \frac{-e^2}{2} \int d^3x \gamma_\lambda \left[\frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3p (i\gamma p - m) e^{ip(x-x')} \delta^3(p^2 + m^2) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \left[\mathcal{P} \frac{1}{k^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. \mathcal{P} \frac{1}{k^2 + m_p^2} - i\pi\epsilon(k) (\delta^3(k^2) - \delta^3(k^2 + m_p^2)) \right] e^{ik(x'-x)} + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (i\gamma p - m) e^{ip(x-x')} \right. \\ & \left. \times \left[\mathcal{P} \frac{1}{(p^2 + m^2)} + i\pi\epsilon(p) \delta^3(p^2 + m^2) \right] \int \frac{d^3k}{(2\pi)^2} e^{ik(x'-x)} (\delta^3(k^2) - \delta^3(k^2 + m_p^2)) \right] \gamma^\lambda \end{aligned} \quad (5.76)$$

É conveniente estudar as funções singulares no espaço do momento. Pela transformada de Fourier abaixo

$$\Sigma(x-x') = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{iq(x-x')} \Sigma(q) \quad (5.77)$$

podemos estudar a estrutura da integral (5.76) mais facilmente e obtemos

$$\begin{aligned} \Sigma(q) = & \frac{-e^2}{2(2\pi)^5} \int d^3x' d^3k d^3p e^{i(x-x')(q+k-p)} \gamma_\lambda (ip\gamma - m) \gamma^\lambda \left[\delta^3(p^2 + m^2) \left[\mathcal{P} \frac{1}{(k^2)} \right. \right. \\ & \left. \left. - \mathcal{P} \frac{1}{k^2 + m_p^2} - i\pi\epsilon(k) (\delta^3(k^2) - \delta^3(k^2 + m_p^2)) \right] + (\delta^3(k^2) - \delta^3(k^2 + m_p^2)) \right. \\ & \left. \times \left[\mathcal{P} \frac{1}{(p^2 + m^2)} + i\pi\epsilon(p) \delta^3(p^2 + m^2) \right] \right] \\ & = \frac{-e^2}{2(2\pi)^2} \int d^3k \left(\gamma_\lambda (i\gamma(q+k) - m) \gamma^\lambda \right) \left[\delta^3((q+k)^2 + m^2) \left[\mathcal{P} \frac{1}{(k^2)} - \right. \right. \\ & \left. \left. \mathcal{P} \frac{1}{k^2 + m_p^2} - i\pi\epsilon(k) (\delta^3(k^2) - \delta^3(k^2 + m_p^2)) \right] + (\delta^3(k^2) - \delta^3(k^2 + m_p^2)) \times \right. \\ & \left. + \left[\mathcal{P} \frac{1}{(q+k)^2 + m^2} i\pi\delta^3((q+k)^2 + m^2) \epsilon(q+k) \right] \right] \end{aligned} \quad (5.78)$$

Por motivos de funcionalidade, faremos o uso da parte imaginária da integral acima

$$Im \sum(q) = \frac{-e^2}{8\pi} \int d^3k \gamma^\lambda (i\gamma(q+k) - m) \gamma_\lambda \delta^3((q+k)^2 + m^2) (\delta^3(k^2) - \delta^3(k^2 + m_p^2)) \times (\epsilon(q+k) - \epsilon(k)) \quad (5.79)$$

Antes de prosseguirmos com os cálculos, é importante notar que esta função imaginária pode ser decomposta em dois termos

$$Im \sum(q) = \epsilon(q) \left[\sum_1(q^2) + (i\gamma q + m) \sum_2(q^2) \right]. \quad (5.80)$$

Um cálculo rápido nos mostra que se multiplicarmos a identidade acima por γ_μ é fácil verificar que $Tr[\gamma_\mu Im \sum(q)] = \epsilon(q) Tr[i\gamma^\mu \gamma^\alpha q_\alpha \sum_2(q^2)] = \epsilon(q) 2iq^\mu \sum_2(q^2)$. Somente o termo $\sum_2(q^2)$ sobrevive a esse traço³ e a correspondente expressão é

$$2iq_\mu \epsilon(q) \sum_2(q^2) = \frac{e^2}{(8\pi)} \int d^3k Tr[\gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\alpha \gamma^\lambda] i(q+k)^\alpha \delta^3((q+k)^2 + m^2) (\delta^3(k^2) - \delta^3(k^2 + m_p^2)) [\epsilon(k) - \epsilon(q+k)] \quad (5.81)$$

se multiplicarmos em ambos os lados por $-iq_\mu/2$, encontramos

$$\epsilon(q) q^2 \sum_2(q^2) = \frac{-e^2}{8\pi} \int d^3k (q^2 + kq) \delta^3(q^2 + 2qk + k^2 + m^2) (\delta^3(k^2) - \delta^3(k^2 + m_p^2)) \times [\epsilon(k) - \epsilon(q+k)] \quad (5.82)$$

devido à covariância de Lorentz, apoiaremos nosso resultado no referencial em repouso $\mathbf{q} = 0$. Assim, teremos dois valores na integral acima correspondente à atuação de cada delta de Dirac. É fácil verificar que $q^2 + 2qk + k^2 + m^2 = 0$, assim $\delta^3(k^2)$ fornece $-q_o^2 + m^2 = 2q_o k_o$ e $\delta^3(k^2 + m_p^2)$ implica em $2q_o k_o = -q_o^2 + m^2 - m_p^2$. Portanto, a equação acima fica

$$\begin{aligned} \epsilon(q) \sum_2(q^2) &= \frac{-e^2}{16} \int d\mathbf{k} \left\{ \left(1 + \frac{m^2}{q_o^2} \right) \left(\delta^3(-q_o^2 - 2q_o \mathbf{k} + m^2) \left[1 - \frac{(q_o + \mathbf{k})}{|q + \mathbf{k}|} \right] + \right. \right. \\ &\delta^3(-q_o^2 + 2q_o \mathbf{k} + m^2) \left. \left[-1 - \frac{(q_o - \mathbf{k})}{|q_o - \mathbf{k}|} \right] \right) - \frac{\mathbf{k}}{|\sqrt{\mathbf{k}^2 - m_p^2}|} \left(1 + \frac{m^2 - m_p^2}{q_o^2} \right) \times \\ &\left[\delta^3(-q_o^2 - 2q_o \sqrt{\mathbf{k}^2 - m_p^2} + m_p^2 + m^2) \left[1 - \frac{q_o + \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_p^2}}{|q_o + \sqrt{\mathbf{k}^2 - m_p^2}|} \right] + \right. \end{aligned} \quad (5.83)$$

³Para maiores detalhes, ver o Apêndice (C).

$$\begin{aligned}
& \left. \delta^3(-q_o^2 + 2q_o\sqrt{\mathbf{k}^2 - m_P^2} + m_P^2 + m^2) \left[-1 - \frac{q_o - \sqrt{\mathbf{k}^2 - m_P^2}}{|q_o - \sqrt{\mathbf{k}^2 - m_P^2}|} \right] \right\} \\
& = \frac{e^2}{8} \left\{ \left(1 + \frac{m^2}{q_o^2} \right) \int_0^{q_o} d\mathbf{k} \left(\frac{1}{|2q_o|} \delta^3(\mathbf{k} - \frac{q_o^2 - m^2}{2q_o}) \epsilon(q) \right) - \left(1 + \frac{m^2 - m_P^2}{q_o^2} \right) \times \right. \\
& \left. \int_0^{\sqrt{q_o^2 + m_P^2}} \frac{d\mathbf{k}}{|2\sqrt{\mathbf{k}^2 - m_P^2}|} \left[\delta^3(-q_o^2 + m^2 - m_P^2 - 2|q_o|\sqrt{|\vec{k}|^2 - m_P^2}) \right] \epsilon(q) \right\} \quad (5.84)
\end{aligned}$$

O próximo passo é eliminar a dependência em \mathbf{k} pela delta de Dirac. A parte imaginária de $\epsilon(q) \sum_2(q^2)$ em um referencial qualquer não é divergente e a correspondência com o termo real será vista através das transformações de Hilbert.

$$\sum_2(q^2) = \frac{e^2}{16\pi} \frac{1}{\sqrt{-q^2}} \left\{ \left(1 + \frac{m^2}{q^2} \right) \Theta(-q^2 - m^2) - \left(1 + \frac{m^2 - m_P^2}{q^2} \right) \Theta(-q^2 - (m + m_P)^2) \right\} \quad (5.85)$$

À primeira vista, a constante de acoplamento m_P introduz naturalmente mais um parâmetro fundamental na $GQED_3$ em que, até então, só a massa e a carga do férmion eram esperadas. Agora, o próximo passo será obter $\epsilon(q) \sum_1(q^2)$ e o seu cálculo seguirá o mesmo raciocínio do $\sum_2(q^2)$. Nesse caso, tomaremos o traço da eq. (5.80)

$$\begin{aligned}
3\epsilon(q) \left[\sum_1(q^2) + m \sum_2(q^2) \right] & = Tr[Im \sum(q)] \\
& = \frac{e^2}{8\pi} \int dk Tr[\gamma^\lambda (i\gamma_\alpha p^\alpha - m) \gamma_\lambda] \delta^3((q+k)^2 + m^2) \left(\delta^3(k^2) - \delta^3(k^2 + m_P^2) \right) \times \\
& [\epsilon(k) - \epsilon(q+k)] \\
& = \frac{-me^2}{4} \left\{ \int \frac{d\mathbf{k}}{2} \left(\delta^3(m^2 - q_o^2 - 2q_o k_o) \left(1 - \frac{q_o + \mathbf{k}}{|q_o + \mathbf{k}|} \right) + \delta^3(m^2 - q_o^2 + 2q_o k_o) \times \right. \right. \\
& \left. \left. \left(-1 - \frac{q_o - \mathbf{k}}{|q_o - \mathbf{k}|} \right) \right) - \int \frac{\mathbf{k} d\mathbf{k}}{|\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_P^2}|} \left(\delta^3(m^2 - m_P^2 - q_o^2 - 2q_o \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_P^2}) \left(1 - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{q_o + \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_P^2}}{|q_o + \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_P^2}|} \right) + \delta^3(m^2 - m_P^2 - q_o^2 + 2q_o \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_P^2}) \left(-1 - \frac{q_o - \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_P^2}}{|q_o - \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_P^2}|} \right) \right) \right\} \\
& = \frac{me^2}{8|q_o|} \epsilon(q) \int d\mathbf{k} \left\{ \delta^3(\mathbf{k} \pm \frac{q_o^2 - m^2}{2q_o}) - \left[\delta^3(\mathbf{k} + \sqrt{-m_P^2 + \left(\frac{q_o^2 - m^2 - m_P^2}{2q_o} \right)^2}) \right] \right\} \\
& = \frac{me^2}{4} \frac{\epsilon(q)}{\sqrt{-q^2}} \left\{ \Theta(-q^2 - m^2) - \Theta(-q^2 - (m + m_P)^2) \right\} \quad (5.86)
\end{aligned}$$

Com a ajuda do resultado (5.85), o valor de $\epsilon(q) \sum_1(q^2)$ é

$$\begin{aligned}
\epsilon(q) \sum_1(q^2) &= \frac{me^2}{4} \epsilon(q) \frac{\Theta(q_0)}{\sqrt{-q^2}} \left\{ \Theta(-q^2 - m^2) - \Theta(-q^2 - (m + m_P)^2) \right\} \\
&- \epsilon(q) \frac{e^2}{16} \frac{\Theta(q_0)}{\sqrt{-q^2}} \left\{ \left(1 - \frac{m^2}{q^2}\right) \Theta(-q^2 - m^2) - \left(1 - \frac{m^2 - m_P^2}{q^2}\right) \Theta(-q^2 - (m + m_P)^2) \right\}
\end{aligned} \tag{5.87}$$

De tal forma que o valor de $\sum_1(q^2)$ é escrito

$$\sum_1(q^2) = \frac{me^2}{16} \frac{1}{\sqrt{-q^2}} \left(\left(1 + \frac{m^2}{q^2}\right) \Theta(-q^2 - m^2) - \left(1 + \frac{m^2 - m_P^2}{q^2}\right) \Theta(-q^2 - (m + m_P)^2) \right) \tag{5.88}$$

A componente imaginária das funções singulares \sum_1 e \sum_2 correspondem ao conjunto de partículas criadas pela interação. A transformação de Hilbert de \sum_1 e \sum_2 se dá pela fórmula

$$\bar{\sum}_i(q^2) = \mathcal{P} \int_0^\infty ds \frac{\sum_i(-s)}{s + q^2}, \tag{5.89}$$

em que $i = \{1, 2\}$. Calculando os termos separadamente, encontramos

$$\begin{aligned}
&\bar{\sum}_2^0(q^2) \\
&= \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{\sum_2^{(0)}(-s)}{s + q^2} ds \\
&= \frac{e^2}{16\pi} \Theta(q_0) \left\{ \mathcal{P} \int_{m^2}^{+\infty} \frac{ds}{s + q^2} \frac{1}{\sqrt{s}} \left(1 + \frac{m^2}{s}\right) - \mathcal{P} \int_{(m+m_P)^2}^{+\infty} \frac{ds}{s + q^2} \frac{1}{\sqrt{s}} \left(1 + \frac{m^2 - m_P^2}{s}\right) \right\} \\
&= \frac{e^2}{8\pi} \Theta(q_0) \left\{ \frac{mm_P}{(m + m_P)q^2} + \frac{1}{\sqrt{-q^2}} \left(1 - \frac{m^2}{q^2}\right) \ln \frac{m_P}{2m + m_P} + \frac{m_P^2}{q^2} \left(\frac{1}{(m + m_P)} - \right. \right. \\
&\left. \left. \frac{1}{\sqrt{-q^2}} \ln \frac{\left(1 - \sqrt{\frac{-q^2}{(m+m_P)^2}}\right)}{\left(1 + \sqrt{\frac{-q^2}{(m+m_P)^2}}\right)} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{5.90}$$

e

$$\begin{aligned}
\bar{\Sigma}_1^0(q^2) &= \int_0^{+\infty} \frac{\bar{\Sigma}_1^{(0)}(-s)}{s+q^2} ds \\
&= \frac{me^2}{16\pi} \int_{m^2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{s}} \frac{ds}{s+q^2} \left(3 - \frac{m^2}{s}\right) - \int_{(m+m_P)^2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{s}} \frac{ds}{s+q^2} \left(3 - \frac{m^2 - m_P^2}{s}\right) \\
&= \left[\left(3 + \frac{m^2 - m_P^2}{q^2}\right) \ln \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{-q^2}{(m+m_P)^2}}}{1 + \sqrt{\frac{-q^2}{(m+m_P)^2}}} \right) - \left(3 + \frac{m^2}{q^2}\right) \ln \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{-q^2}{m^2}}}{1 + \sqrt{\frac{-q^2}{m^2}}} \right) \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{\frac{4m_P^2}{-q^2}} \right]
\end{aligned} \tag{5.91}$$

A função $\Sigma(q)$ total é

$$\begin{aligned}
\Sigma(q) &= \bar{\Sigma}_1(q^2) + i\pi\epsilon(q) \Sigma_1(q^2) + (i\gamma q + m) [\bar{\Sigma}_2(q^2) + i\pi\epsilon(q) \Sigma_2(q^2)] \\
\Sigma(q) &= \frac{me^2}{8\pi\sqrt{-q^2}} \left\{ \left[\left(3 + \frac{m^2 - m_P^2}{q^2}\right) \ln \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{-q^2}{(m+m_P)^2}}}{1 + \sqrt{\frac{-q^2}{(m+m_P)^2}}} \right) - \left(3 + \frac{m^2}{q^2}\right) \ln \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{-q^2}{m^2}}}{1 + \sqrt{\frac{-q^2}{m^2}}} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sqrt{\frac{4m_P^2}{-q^2}} \right] + i\pi\epsilon(q) \frac{\Theta(q_0)}{2} \left[\left(3 + \frac{m^2}{q^2}\right) \Theta(-q^2 - m^2) - \left(3 + \frac{m^2 - m_P^2}{q^2}\right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \Theta(-q^2 - (m+m_P)^2) \right] \right\} + e^2 \frac{(i\gamma q + m)}{8\pi\sqrt{-q^2}} \left\{ \left[\left(1 - \frac{m^2 - m_P^2}{q^2}\right) \ln \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{-q^2}{(m+m_P)^2}}}{1 + \sqrt{\frac{-q^2}{(m+m_P)^2}}} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left(1 - \frac{m^2}{q^2}\right) \ln \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{-q^2}{m^2}}}{1 + \sqrt{\frac{-q^2}{m^2}}} \right) + \sqrt{\frac{4m_P^2}{-q^2}} \right] + i\pi\epsilon(q) \frac{\Theta(q_0)}{2} \left[\left(1 - \frac{m^2}{q^2}\right) \Theta(-q^2 - m^2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left(1 - \frac{m^2 - m_P^2}{q^2}\right) \Theta(-q^2 - (m+m_P)^2) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{5.92}$$

A auto-interação do elétron com seu campo eletromagnético desempenha um papel essencial no cálculo dos sistemas quânticos emergentes. Diferentemente do caso da polarização em que um campo não quantizado está acoplado à matéria, a auto-interação do propagador do elétron é um pouco mais sutil. O procedimento repetido aqui será o mesmo da seção (4.3), no entanto, algumas passagens serão suprimidas para que a apresentação não seja demasiadamente longa e possamos, assim, focar nas questões físicas pertinentes à $GQED_3$.

Um modo simples de resolver esse problema dinâmico consiste em expandir o elemento $\langle 0|\psi(x)|q\rangle$ não degenerado até a primeira ordem

$$\langle 0|\psi(x)|q\rangle = \langle 0|\psi^{(0)}(x)|q\rangle + \int d^3x' \int d^3x'' S_R(x-x') \langle 0|\Sigma(x'-x'')\psi^{(0)}(x'')|q\rangle + \dots \tag{5.93}$$

em que o operador $\sum(x' - x'')$ descreve as flutuações quânticas. Porém, é conveniente analisar esse operador de uma maneira ligeiramente diferente ao assumir um limite adiabático fraco dado pelo parâmetro α

$$\int d^3x' \langle 0 | \sum(x - x', \alpha) \psi^{(0)}(x', \alpha) | q \rangle = i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^x d^3x' e^{\alpha(x_o+x'_o)+ip(x-x')} \epsilon(p) \left[\sum_1(p^2) + (i\gamma p + m) \sum_2(p^2) \right] u(q) e^{iqx'}, \quad (5.94)$$

em que a função $e^{\alpha(x_o+x'_o)}$ suaviza a integral e reproduz a hipótese adiabática. Resolvendo a integral acima em x , temos

$$\begin{aligned} & \int d^3x' \langle 0 | \sum(x - x', \alpha) \psi^{(0)}(x', \alpha) | q \rangle = \\ &= \frac{i}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_o \frac{e^{(\alpha+i(p_o-q_o))x_o}}{\alpha + i(p_o - q_o)} e^{\alpha x_o} \epsilon(p) \int_{-\infty}^x d^2\vec{p} e^{i\vec{p}\vec{x}} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \left[\sum_1(\vec{p}^2 - p_o^2) \right. \\ &+ (i\gamma_k p_k + i\gamma_4 p_4 + m) \sum_2(\vec{p}^2 - p_o^2) \left. \right] u(q) \\ &= i e^{2\alpha x_o} \int \frac{dp_o \epsilon(p)}{\alpha + i(p_o - q_o)} \left[\sum_1(\mathbf{q}^2 - p_o^2) + (i\gamma_k p_k - \gamma_4 p_o + m) \sum_2(\mathbf{q}^2 - p_o^2) \right] u(q) e^{iqx}. \end{aligned} \quad (5.95)$$

Uma transformação adequada das variáveis $\mathbf{q}^2 + s = p_o^2$ fornece

$$\begin{aligned} & \int d^3x \langle 0 | \sum(x - x', \alpha) \psi^{(0)}(x', \alpha) | q \rangle \\ &= e^{2\alpha x_o} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s + \mathbf{q}^2 - (q_o + i\alpha)^2} \left[\sum_1(-s) - i\alpha\gamma_4 \sum_2(-s) \right] \langle 0 | \psi^{(0)}(x) | q \rangle. \end{aligned} \quad (5.96)$$

Tomar o limite adiabático $\alpha \rightarrow 0$ conduz à eliminação do termo $\sum_2(-a)$, além de levar a equação acima do estado interagente para o estado assintótico

$$\int d^4x \langle 0 | \sum(x - x') \psi^{(0)}(x') | q \rangle = \sum_1(-m^2) \langle 0 | \psi^{(0)}(x) | q \rangle. \quad (5.97)$$

em que α nos permite distinguir qual região do processo radiativo é levada em consideração. A exigência de tal transição fornece um operador auto-adjunto bem definido no espaço de Fock, compatível com uma representação unitária do grupo Poincaré [II et al. [1975]]. Esse mecanismo dinâmico contribui com a coerência interna da *TQC* ao modificar a Hamiltoniano do estado interagente $H(\psi, A_\mu)$ para a Hamiltoniana do estado assintótico $H(\psi^{out}, A_\mu^{out})$ [4]. Entender esse ponto é essencial para lidar com a correção do propagador do elétron e com as sutilezas que a descrição de Heisenberg propõe.

O próximo passo é analisar [5.93] ao multiplicar $(\gamma\partial + m)$ em ambos os lados

⁴A partir de H_o , podemos formar o Hamiltoniano de entrada e de saída por meio da operação $x_o \rightarrow +\infty$ e $x_o \rightarrow -\infty$, respectivamente. Eles satisfazem as mesmas relações de comutação e equações diferenciais de movimento [Yang and Feldman [1950]]

$$(\gamma\partial + m)\langle 0|\psi(x)|q\rangle = - \int d^3x' \langle 0|\sum(x-x')\psi(x')|q\rangle \quad (5.98)$$

Após obter o estado assintótico, impomos a relação de dispersão $q^2 = -m^2$ *on-shell*

$$\begin{aligned} (\gamma\partial + m)\langle 0|\psi|q\rangle &= - \left[\sum_1^{\bar{}}(-m^2) + i\pi\epsilon(q) \sum_1(-m^2) + (i\gamma q + m) \left(\sum_2^{\bar{}}(-m^2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + i\epsilon(q) \sum_2(-m^2) \right) \right] \langle 0|\psi^{(0)}(x)|q\rangle \\ &= - \left[\sum_1^{\bar{}}(-m^2) \right] \langle 0|\psi^{(0)}(x)|q\rangle. \end{aligned} \quad (5.99)$$

A concordância total deste resultado com a eq. (5.97) nos leva a concluir que o limite adiabático existe e seu resultado é compatível com os fundamentos da *TQC*. É aconselhável reescrever uma equação equivalente a da equação de Dirac "livre" na ordem e^2

$$(\gamma \cdot \partial + m + \sum_1^{\bar{}}(-m^2))\langle 0|\psi(x)|q\rangle = 0, \quad (5.100)$$

em que m e $\sum_1^{\bar{}}(-m^2)$ são quantidades infinitas. Na descrição de Heisenberg, os parâmetros necessários para a renormalização pertencem a equação do movimento de um único elétron. Torna-se claro pela eq. (5.100) que devemos interpretar a função da autoenergia $\sum_1^{\bar{}}(-m^2)$ igual à massa observada menos a *bare mass*. Esta operação, chamada de esquema *on-shell* de renormalização, permite reescrever a eq. (5.100) na forma

$$(\gamma \cdot \partial + m_{pole})\langle 0|\psi^{(r)}(x)|q\rangle = 0, \quad (5.101)$$

em que $\psi^{(r)}$ é um operador renormalizado finito e m_{pole} é o pólo finito ou massa observada. Em seguida, escrevemos essa equação diferencial de movimento em função de quantidades finitas⁵. O método utilizado na seção (4.3) será reproduzido igualmente aqui, no entanto, omitiremos as passagens não relevantes na *GQED*₃. De fato, as novas ideias serão implementadas à medida que forem necessárias à interpretação dos resultados. Um modo simples de resolver esse problema é estabelecer uma proporcionalidade entre ($\psi^{(r)}$ e $\psi^{(0)}$)

$$\langle 0|\psi^{(r)}(x)|q\rangle = Z_2^{-1/2} \langle 0|\psi^{(0)}(x)|q\rangle, \quad (5.102)$$

em que Z_2 é uma constante finita. A correção radiativa é obtida se fizermos a seguinte subtração

$$\begin{aligned} \langle 0|\Phi(x, \alpha)|q\rangle - e^{2\alpha x_0} \sum_1^{\bar{}}(-m^2) \langle 0|\psi^{(0)}(x)|q\rangle = \\ e^{2\alpha x_0} \int ds \left[\frac{\sum_1(-s)}{(s-m^2)} \frac{(2iq_0\alpha - \alpha^2)}{(s+\bar{q}^2 - (q_0+i\alpha)^2)} - \frac{(i\gamma_4\alpha) \sum_2(-s)}{s+\bar{q}^2 - (q_0+i\alpha)^2} \right] \langle 0|\psi^{(0)}(x)|q\rangle. \end{aligned} \quad (5.103)$$

em que $e^{2\alpha x_0}$ garante a interação adiabática já que $\sum_1^{\bar{}} \rightarrow 0$ se $e \rightarrow 0$. Agora, substituímos a expressão acima na eq. (5.93)

⁵Esse tratamento produz a mesma função de Green renormalizada $(\gamma \cdot \partial + m_{pole})S_R(x) = -\delta^3(x)$ que exibe um propagador com pólo $p = im_{plo}$ e resíduo -1 .

$$\begin{aligned} \langle 0|\psi^{(r)}(x)|q\rangle &= \left\{ 1 + i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^x d^3x' e^{ip(x-x')} \delta^3(p^2 + m^2) \epsilon(p)(i\gamma \cdot p - m) e^{2\alpha x_o} \int_0^\infty ds \right. \\ &\quad \left. \times \left[\frac{\sum_1(-s)}{(s - m^2)} \frac{(2iq_o\alpha - \alpha^2)}{(s + \mathbf{q}^2 - (q_o + i\alpha)^2)} - \frac{(i\gamma_4\alpha) \sum_2(-s)}{s + \mathbf{q}^2 - (q_o + i\alpha)^2} \right] \right\} \langle 0|\psi^{(0)}(x)|q\rangle. \end{aligned} \quad (5.104)$$

A integração da componente espinorial acima é

$$\begin{aligned} &= \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3p \int_{-\infty}^x d^3x' e^{ip(x-x')} \delta^3(p^2 + m^2) \epsilon(p)(i\gamma p - m) e^{2\alpha x'_o} e^{iqx'} \\ &= \frac{i}{(2\pi)^3} \int dp^3 (2\pi)^2 \delta^2(\vec{q} - \vec{p}) e^{i\vec{p}\vec{x}} \frac{e^{i(2\alpha - q_o)x_o}}{2\alpha + i(p_o - q_o)} \frac{1}{2|p_o|} \left(\delta^3(p_o - \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}) \right. \\ &\quad \left. - \delta^3(p_o + \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}) \right) (i\gamma p - m) \quad (5.105) \\ &= i \int dp_o e^{iq\vec{x}} \frac{e^{i(2\alpha - q_o)x'_o}}{2\alpha + i(p_o - q_o)} \frac{1}{2|p_o|} \left(\delta^3(p_o - q_o) - \delta^3(p_o + q_o) \right) (i\gamma p - m) \\ &= \frac{i}{2q_o} e^{2\alpha x_o} \left[\frac{1}{2\alpha} (i\gamma q - m) - \frac{1}{2(\alpha - iq_o)} (i\gamma_k q_k + \gamma_4 q_o - m) \right] e^{iqx} \end{aligned}$$

Inserindo o resultado (5.105) na equação (5.93) e mais algumas manipulações algébricas em conjunto com o limite $\alpha \rightarrow 0$, temos

$$\begin{aligned} \langle 0|\psi^{(r)}(x)|q\rangle &= \left\{ 1 - \frac{1}{2} (i\gamma q - m) \int_0^\infty ds \left[\frac{\sum_1(-s)}{(a - m^2)^2} - \frac{\gamma_4 \sum_2(-s)}{2q_o a - m^2} \right] \right\} \langle 0|\psi^{(0)}(x)|q\rangle \\ &= \left\{ 1 - \frac{1}{2} \int_0^\infty ds \left[\frac{\sum_2(-s)}{(s - m^2)} - 2m \frac{\sum_1(-s)}{(s - m^2)^2} \right] \right\} \langle 0|\psi^{(0)}(x)|q\rangle. \end{aligned} \quad (5.106)$$

Finalmente, obtemos a constante finita

$$Z_2^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} \left[\sum_2(q^2) \Big|_{q^2 \rightarrow -m^2} + 2m \frac{\partial \sum_1(q^2)}{\partial q^2} \Big|_{q^2 \rightarrow -m^2} \right], \quad (5.107)$$

em que definimos o contra-termo $(Z_2 - 1) \equiv \delta_2$ na ordem e^2

$$\delta_2 = -\frac{3e^2}{8\pi m} \left[\left(3 - \frac{m_P^2}{m^2} \right) \ln \left(1 + \sqrt{\frac{4m^2}{m_P^2}} \right) + 3 \lim_{q^2 \rightarrow -m^2} \ln \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{-q^2}{m^2}}}{1 + \sqrt{\frac{-q^2}{m^2}}} \right) + \sqrt{\frac{4m_P^2}{m^2}} \right]. \quad (5.108)$$

Mesmo se a função for bem comportada nas regiões ultravioletas, o propagador do férmion desenvolve a singularidade no pólo $p = im_{polo}$ (*mass-shell*), e, assim, não garante a expansão de Taylor em (5.107). Perto da massa do pólo, a estrutura de singularidade se comporta como uma divergência logarítmica no propagador do pólo. Embora seja bastante intuitivo, a divergência infravermelha desaparece se somarmos todas as contribuições na *quenched rainbow approximation* Bashir and Raya [2005], mas a singularidade *mass-shell* continua Das and Frenkel [2013].

Retornando a eq. (2.52b) e adicionando δm em ambos os lados, consideramos o efeito de *renormalização em massa* na descrição de Heisenberg

$$(\gamma \cdot \partial + \underbrace{m + \delta m}_{m_{pole}})\psi(x) = ie\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x) + \delta^3 m\psi(x), \quad (5.109)$$

em que interpretamos o termo $\delta m\psi(x)$ igual à radiação da massa devido à eq. (5.99). Ao primeiro momento, adicionar δm em ambos os lados pode parecer completamente redundante, contudo, esse termo desempenha um papel físico diferente a depender de qual lado estamos lidando. O lado esquerdo é independente do processo adiabático, enquanto o direito mostra $\delta^3 m \rightarrow 0$ para $e \rightarrow 0$. Usando a eq. (5.100), o contra-termo é igual à

$$\delta m = \sum_1^{\bar{}}(-m^2). \quad (5.110)$$

Adição das correções radiativas

Nesta seção, resumiremos todos os resultados encontrados até o momento. As equações iniciais que levaram a nossa investigação foram dadas pelas eqs. (5.4) e (5.5). Levando em conta o primeiro termo

$$\int d^3 x'' \int d^3 x' S_R(x - x') \langle q | \sum (x' - x'') \psi^{(0)}(x'') | q' \rangle. \quad (5.111)$$

Através da transformação de Fourier na função $S_R(x - x')$, encontramos

$$i \int \frac{d^3 x''}{(2\pi)^2} \int d^3 p \int_{-\infty}^x d^3 x \int d^3 x' e^{ip(x-x')} \delta^3(p^2 + m^2) \epsilon(p) (i\gamma_\mu p^\mu - m) \sum (x - x') \psi^{(0)}(x') \quad (5.112)$$

em que os estados $\langle q |$ e $| q' \rangle$ foram omitidos por questão de praticidade. O cálculo desse termo já foi realizado na seção anterior desde a eq. (5.93) até a eq. (5.107) o que resulta em

$$-\frac{1}{2} \left(\sum_2^{\bar{}}(-m^2) + 2m \sum_1^{\bar{}}(-m^2) \right) \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x), \gamma_\mu \psi^{(0)}(x')] | q' \rangle \quad (5.113)$$

o segundo termo das eqs. (5.4) e (5.5), ou seja, a parte conjugada da eq. (5.111) é

$$\int d^3 x' \int d^3 x'' \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x'') \sum (x'' - x') S_A(x' - x), \gamma_\mu \psi^{(0)}(x)] | q' \rangle \quad (5.114)$$

ao realizar o mesmo procedimento da eq. (5.111), chegamos ao resultado

$$-\frac{1}{2} \left(\sum_2^{\bar{}}(-m^2) + 2m \sum_1^{\bar{}}(-m^2) \right) \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x), \gamma_\mu \psi^{(0)}(x')] | q' \rangle \quad (5.115)$$

Somando as eqs. (5.113) e (5.115), obtemos

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \left(\sum_2 (-m^2) + 2m \sum_1' (-m^2) \right) \frac{ie}{2} \left(\langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x), \gamma_\mu \psi^{(0)}(x')] | q' \rangle + \right. \\
&\left. \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x'), \gamma_\mu \psi^{(0)}(x)] | q' \rangle \right) \quad (5.116) \\
&= -\langle q | j_\mu^{(0)}(x) | q' \rangle \left(\sum_2 (-m^2) + 2m \sum_1' (-m^2) \right)
\end{aligned}$$

A seguir, reescreveremos o terceiro termo da eq. (6.4) ao levar em conta os resultados encontrados previamente, porém a interpretação física será evidenciada de forma mais clara na conclusão.

$$= \frac{ie}{2} \int d^3x' d^3x'' \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x'), \Gamma_\mu(x' - x, x - x'') \psi^{(0)}(x'')] | q' \rangle \quad (5.117)$$

Ao conduzir o vetor Γ_μ para o espaço do momento por meio de uma transformada de Fourier (6.8), encontramos

$$= \frac{ie}{2} \int \frac{d^3x'}{(2\pi)^6} d^3x'' d^3q d^3q' e^{iq(x-x')} e^{iq'(x-x'')} \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x'), \Gamma_\mu(q, q') \psi^{(0)}(x'')] | q' \rangle \quad (5.118)$$

Lembrando das observações feitas sob a estrutura da função de vértice, ao substituir a eq. (5.61), temos

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{d^3x'}{(2\pi)^6} d^3x'' d^3q d^3q' e^{iq(x-x')} e^{iq'(x-x'')} \frac{ie}{2} \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x'), \left(\Gamma_\mu^{(1)}(Q^2) + i\pi\epsilon(Q)\Gamma_\mu^{(2)}(Q^2) \right) \\
&\times \psi^{(0)}(x'')] | q' \rangle \quad (5.119)
\end{aligned}$$

substituindo as funções $\Gamma_\mu^{(1)}$ e $\Gamma_\mu^{(2)}$ encontrados nas eqs. (5.67) e (5.70), obtemos

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{d^3x'}{(2\pi)^6} d^3x'' d^3q d^3q' e^{iq(x-x')} e^{iq'(x-x'')} \frac{ie}{2} \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x'), \gamma_\mu \left(\bar{F}_{1P}(Q^2) + i\epsilon(Q)\pi F_{1P}(Q^2) \right) \\
&+ \frac{i}{2m}(q_\mu + q'_\mu)(\bar{F}_{2P}(Q^2) + i\epsilon(Q)\pi F_{2P}(Q^2)) \psi^{(0)}(x'')] | q' \rangle \\
&= \int \frac{d^3x'}{(2\pi)^6} d^3x'' d^3q d^3q' e^{iq(x-x')} e^{iq'(x-x'')} \left\{ (\bar{F}_{1P}(Q^2) + i\epsilon(Q)\pi F_{1P}(Q^2)) \frac{ie}{2} \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x'), \gamma_\mu \times \right. \\
&\left. \psi^{(0)}(x'')] | q' \rangle - \frac{e(q_\mu + q'_\mu)}{4m} (\bar{F}_{2P}(Q^2) + i\epsilon(Q)\pi F_{2P}(Q^2)) \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x'), \psi^{(0)}(x'')] | q' \rangle \right\} \quad (5.120)
\end{aligned}$$

rearranjaremos o último termo da equação acima ao realizar uma operação básica chamada de produto normal definida abaixo para os dois férmions

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}^{(0)}(x') \psi^{(0)}(x'') &=: \bar{\psi}^{(0)}(x') \psi^{(0)}(x'') : + \langle 0 | \bar{\psi}^{(0)}(x') \psi^{(0)}(x'') | 0 \rangle \\
\psi^{(0)}(x'') \bar{\psi}^{(0)}(x') &=: \psi^{(0)}(x'') \bar{\psi}^{(0)}(x') : + \langle 0 | \psi^{(0)}(x'') \bar{\psi}^{(0)}(x') | 0 \rangle
\end{aligned} \quad (5.121)$$

Desse modo, a comutação entre eles é

$$[\bar{\psi}^{(0)}(x'), \psi^{(0)}(x'')] = \bar{\psi}^{(0)}(x')\psi^{(0)}(x'') - \psi^{(0)}(x'')\bar{\psi}^{(0)}(x') = 2 : \bar{\psi}^{(0)}(x')\psi^{(0)}(x'') : \quad (5.122)$$

Devemos levar em conta que o outro possível termo da equação acima seria (2.44), um c -number mutiplicado por um operador unitário. No entanto, é importante frisar que estamos calculando o valor esperado por dois estados ortogonais $|q\rangle$ e $|q'\rangle$. Logo, $\langle q|S(x'' - x')|q'\rangle = 0$. Prosseguindo com os cálculos

$$= \int \frac{d^3x'}{(2\pi)^6} d^3x'' d^3q d^3q' e^{iq(x-x')} e^{iq'(x-x'')} \left\{ (\bar{F}_{1P}(Q^2) + i\epsilon(Q)\pi F_{1P}(Q^2)) \frac{ie}{2} \langle q|[\bar{\psi}^{(0)}(x'), \gamma_\mu \times \psi^{(0)}(x'')]|q'\rangle - \frac{(q_\mu + q'_\mu)}{2m} (\bar{F}_{2P}(Q^2) + i\epsilon(Q)\pi F_{2P}(Q^2)) \langle q| : \bar{\psi}^{(0)}(x')\psi^{(0)}(x'') : |q'\rangle \right\} \quad (5.123)$$

Usamos também a transformada e a transformada inversa de Fourier do campo fermiônico

$$\bar{\psi}^{(0)}(q) = \int d^3x' \bar{\psi}^{(0)}(x') e^{-ix'q}, \quad \bar{\psi}^{(0)}(x') = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \bar{\psi}^{(0)}(q) e^{ix'q} \quad (5.124)$$

substituindo a eq. (5.124) na eq. (5.123), encontramos

$$= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^6} d^3q' e^{iqx} e^{iq'x} \left\{ (\bar{F}_{1P}(Q^2) + i\epsilon(Q)\pi F_{1P}(Q^2)) \frac{ie}{2} \langle q|[\bar{\psi}^{(0)}(q), \gamma_\mu \psi^{(0)}(q')]|q'\rangle - \frac{(q_\mu + q'_\mu)}{2m} (\bar{F}_{2P}(Q^2) + i\epsilon(Q)\pi F_{2P}(Q^2)) \langle q| : \bar{\psi}^{(0)}(q)\psi^{(0)}(q') : |q'\rangle \right\} \quad (5.125)$$

Realizando a transformada de Fourier, encontramos

$$= \left\{ (\bar{F}_{1P}(Q^2) + i\epsilon(Q)\pi F_{1P}(Q^2)) \frac{ie}{2} \langle q|[\bar{\psi}^{(0)}(x), \gamma_\mu \psi^{(0)}(x)]|q'\rangle - \frac{(q_\mu + q'_\mu)}{2m} (\bar{F}_{2P}(Q^2) + i\epsilon(Q)\pi F_{2P}(Q^2)) \langle q| : \bar{\psi}^{(0)}(x)\psi^{(0)}(x) : |q'\rangle \right\} \quad (5.126)$$

O resultado final é

$$= \langle q|j_\mu^{(0)}(x)|q'\rangle (\bar{F}_{1P}(Q^2) + F_{1P}(Q^2)) - \frac{(q_\mu + q'_\mu)}{2m} (\bar{F}_{2P}(Q^2) + F_{2P}(Q^2)) \langle q| : \psi^{(0)}(x)\psi^{(0)}(x) : |q'\rangle \quad (5.127)$$

Finalmente, trataremos o último termo das eqs. (5.4) e (5.5), responsável pela polarização na correção radiativa

$$\frac{ie}{2} \int d^3x' \int d^3x'' \Pi_{\mu\nu}(x - x') G^R(x' - x'') \langle q|[\bar{\psi}^{(0)}(x''), \gamma^\nu \psi^{(0)}(x'')]|q'\rangle \quad (5.128)$$

Utilizando a transformada de Fourier,

$$\Pi_{\mu\nu}(x-x') = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{ip(x-x')} \Pi_{\mu\nu}(p) \quad (5.129)$$

substituindo na eq. (5.128), temos

$$\begin{aligned} &= \frac{ie}{2} \int d^3x' \int d^3x'' \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ik(x'-x'')} \Pi_{\mu\nu}(p) \left\{ \mathcal{P} \frac{1}{p^2} - \mathcal{P} \frac{1}{p^2 + m_P^2} + i\pi(\delta^3(p^2) \right. \\ &- \delta^3(p^2 + m_P^2)) \epsilon(p) \left. \right\} e^{ip(x-x')} \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x''), \gamma^\nu \psi^{(0)}(x'')] | q' \rangle \\ &= \frac{ie}{2} \int d^3x'' \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{ip(x-x'')} \Pi_{\mu\nu}(p) \left\{ \mathcal{P} \frac{1}{p^2} - \mathcal{P} \frac{1}{p^2 + m_P^2} + i\pi\epsilon(p)(\delta^3(p^2) - \delta^3(p^2 + m_P^2)) \right\} \\ &\times \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x''), \gamma^\nu \psi^{(0)}(x'')] | q' \rangle \end{aligned} \quad (5.130)$$

em que o tensor de polarização pode ser escrito por meio de objetos ortogonais e covariantes de Lorentz $\Pi_{\mu\nu}(p) = \Pi^{(1)}(p)(p_\mu p_\nu - \delta_{\mu\nu} p^2) + im\epsilon^{\mu\nu\alpha} p_\alpha \Pi^{(2)}(p)$

$$\begin{aligned} &= \int d^3x'' \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{ip(x-x'')} \left(\Pi^{(1)}(p)(p_\mu p_\nu - \delta_{\mu\nu} p^2) + im\epsilon^{\mu\nu\alpha} p_\alpha \Pi^{(2)}(p) \right) \left\{ \mathcal{P} \frac{1}{p^2} - \mathcal{P} \frac{1}{p^2 + m_P^2} \right. \\ &+ i\pi\epsilon(p)(\delta^3(p^2) - \delta^3(p^2 + m_P^2)) \left. \right\} \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x''), \gamma^\nu \psi^{(0)}(x'')] | q' \rangle \\ &= \int d^3x'' \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{ip(x-x'')} \left(\Pi^{(1)}(p)(p_\mu p_\nu - \delta_{\mu\nu} p^2) + im\epsilon^{\mu\nu\alpha} p_\alpha \Pi^{(2)}(p) \right) \left\{ \mathcal{P} \frac{1}{p^2} - \mathcal{P} \frac{1}{p^2 + m_P^2} \right. \\ &+ i\pi\epsilon(p)(\delta^3(p^2) - \delta^3(p^2 + m_P^2)) \left. \right\} \langle q | j^{(0)\nu}(x'') | q' \rangle \end{aligned} \quad (5.131)$$

Devido as identidades $p^2\delta(p^2) = 0$ e $p^\mu j_\mu^{(0)}(x'') = \frac{\partial}{\partial_\mu} j_\mu^{(0)}(x'') = 0$ alguns termos da relação acima são nulos. Desse modo

$$\begin{aligned} &= - \int d^3x'' \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{ip(x-x'')} \Pi(p) \delta_{\mu\nu} \langle q | j^{(0)\nu}(x'') | q' \rangle \\ &= - \int d^3x'' \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{ip(x-x'')} (\Pi(p) - \Pi(0)) \delta_{\mu\nu} \langle q | j^{(0)\nu}(x'') | q' \rangle \end{aligned} \quad (5.132)$$

Utilizamos o valor p para o momento por conveniência, contudo a polarização na correção radiativa da corrente está relacionada ao momento transferido das partículas $q' - q = Q$. Como a variável Q é associada a esse comportamento físico, faremos a substituição $p \rightarrow Q$.

$$= - \int d^3x'' \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{ip(x-x'')} \left(G(p) - G(0) \right) \langle q | j_\mu^{(0)}(x'') | q' \rangle \quad (5.133)$$

O fator $G(0)$ corresponde a renormalização da carga do elétron, procedimento usual quando se calcula a polarização do vácuo. Além disso, essa operação de multiplicação, equivalente à de subtração, é feita independente de existir ou não uma corrente externa não quantizada.

$$= \langle q | j_\mu^{(0)}(x) | q' \rangle \left[-\bar{\Pi}^{(0)}(Q^2) + \bar{\Pi}^{(0)}(0) - i\pi\epsilon\Pi^{(0)}(Q^2) \right] \quad (5.134)$$

Somando as equações (5.116), (5.127) e (5.133), encontramos

$$\begin{aligned} \langle q | j_\mu^{(2)}(x) | q' \rangle &= \langle q | j_\mu^{(0)}(x) | q' \rangle \left[-\bar{\Pi}(Q^2) + \bar{\Pi}(0) - i\epsilon(Q)\Pi(Q^2) - 2m \sum_1'(-m^2) - \right. \\ &\left. \sum_2'(-m^2) + \bar{F}_1(Q^2) + i\epsilon(Q)F_1(Q^2) \right] - \frac{e}{2m}(q+q')_\mu \left[\bar{F}_2(Q^2) + i\epsilon(Q)F_2(Q^2) \right] \times \\ &\langle q | : \psi^{(0)}(x)\psi^{(0)}(x) : | q' \rangle \end{aligned} \quad (5.135)$$

Combinando todos os resultados calculados até agora, temos

$$\begin{aligned} &= e^2 \frac{\langle q | j_\mu^{(0)}(x) | q' \rangle}{\sqrt{-Q^2}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \left[\left(1 - \frac{4m^2}{Q^2}\right) \ln \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{-Q^2}{4m^2}}}{1 + \sqrt{\frac{-Q^2}{4m^2}}} \right) - 2\sqrt{\frac{4m^2}{-Q^2}} - \frac{i}{4} \left(1 - \frac{4m^2}{Q^2}\right) \epsilon(Q)\Theta(Q_o) \right. \right. \\ &\times \Theta(Q^2 + 4m^2) \left. \right] - \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{-Q^2}{4m^2}} - \frac{i}{4\pi} \left[\ln \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{-Q^2}{4m^2}}}{1 + \sqrt{\frac{-Q^2}{4m^2}}} \right) + \frac{i}{2} \epsilon(Q)\Theta(Q_o)\Theta(Q^2 + 4m^2) \right] + \frac{1}{4\pi} \\ &\sqrt{\frac{-Q^2}{4m^2}} \left[\left(3 - \frac{m_P^2}{m^2}\right) \ln \left(\frac{m_P}{2m + m_P} \right) + 3 \lim_{q^2 \rightarrow -m^2} \ln \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{-q^2}{m^2}}}{1 + \sqrt{\frac{-q^2}{m^2}}} \right) + \sqrt{\frac{4m_P^2}{m^2}} \right] - \frac{3}{4\pi} \left[\sqrt{\frac{-Q^2}{4m^2}} \right. \\ &\times \frac{8m^2}{(Q^2 + 4m^2)} \frac{m_P^2}{(Q^2 + 4m^2 + m_P^2)} + \ln \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{-Q^2}{4m^2 + m_P^2}}}{1 + \sqrt{\frac{-Q^2}{4m^2 + m_P^2}}} \right) - \ln \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{-Q^2}{4m^2}}}{1 + \sqrt{\frac{-Q^2}{4m^2}}} \right) \left. \right] + i\epsilon(Q)\Theta(Q_o) \\ &\times \Theta(-Q^2 - 4m^2) \left[\frac{1}{\sqrt{\mu^4 + \mu^2 Q^2 (1 + \frac{4m^2}{Q^2})}} - \frac{1}{\sqrt{m_P^4 + m_P^2 Q^2 (1 + \frac{4m^2}{Q^2})}} \right] (Q^2 + 8m^2) \left. \right\} - \\ &e^3 \frac{(q+q')_\mu}{2m} \left\{ \frac{m^2}{3\pi} \sqrt{\frac{m_P^2}{-Q^2}} \left[\frac{1}{(Q^2 + 4m^2)} \frac{\ln \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{-Q^2}{4m^2 + m_P^2}}}{1 + \sqrt{\frac{-Q^2}{4m^2 + m_P^2}}} \right)}{\sqrt{Q^2 + 4m^2 + m_P^2}} + \frac{1 - \sqrt{\frac{4m^2}{4m^2 + m_P^2}}}{(3Q^2 - 4m^2 - m_P^2)m_P^2} \right. \right. \\ &\times \left. \int_{4m^2}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{s}} \frac{1}{(s - 4m^2)} \right] + i \frac{\epsilon(Q)\Theta(Q_o)}{\sqrt{-Q^2}} \frac{m^2}{Q^2} \frac{\Theta(-Q^2 - 4m^2)}{(1 + \frac{4m^2}{Q^2})} \frac{m_P^2}{\sqrt{m_P^4 + m_P^2 Q^2 (1 + \frac{4m^2}{Q^2})}} \left. \right\} \\ &\times \langle q | : \psi^{(0)}(x)\psi^{(0)}(x) : | q' \rangle. \end{aligned} \quad (5.136)$$

Mostramos claramente que $\bar{F}_{2P}(0)$ desaparece mesmo se aumentarmos o espaço de parâmetro com a constante de Podolsky. Uma observação útil na estrutura da teoria de altas derivadas como a $GQED_3$ é o aumento do regime da natureza cinemática do fóton. Além disso, não observamos mudança no momento magnético do elétron, ou seja, a sua dinâmica spinorial na ordem e^2 é nula.

Esperamos que o comportamento em teorias de alta ordem não influencie na função da correlação em distância infravermelhas. Embora possamos avaliar todas as ordens de $j_\mu^{(n)}$ sem nos preocuparmos com as divergências ultravioletas, a região do infravermelho e a singularidade da massa exigem várias peculiaridades que influenciam a série da matriz $-S$ e o espaço de Fock [Boldo et al. \[2002\]](#), [Pimentel and Tomazelli \[1994\]](#), [Boldo et al. \[1997b\]](#), e elas estão além do escopo desta tese.

Comentários finais

Introduzimos o assunto da $GQED_3$ do ponto de vista das derivadas de alta ordem. Discutimos, também, a escolha de um gauge apropriado para eliminar os graus de liberdade desnecessários. A teoria eletrodinâmica deste capítulo apresenta uma solução mais fundamental que a QED_3 , pois explora um espectro da energia nos limites $m^2 \leq p^2 \leq m_P^2$. Seguindo essa ideia, calculamos as flutuações quânticas: a função de vértice Γ^μ e a auto energia do elétron Σ . Esses cálculos mostraram a ausência de divergências ultravioletas ao subtrair duas soluções ortogonais em que o parâmetro de Podolsky emerge como um regulador natural (5.136). Após eliminarmos, primeiramente, a barreira de divergência ultravioleta, a remoção da divergência infravermelha continua um problema em aberto. Nosso cálculo, também, exibiu uma singularidade do tipo *mass-shell* em um loop nos férmions em dimensão $(2+1)$, invalidando assim a expansão de Taylor (5.107).

Uma vez que a descrição da Interação fornece uma interpretação inconsistente na física quântica. A nossa análise teórica na descrição de Heisenberg mostra como evitar essas concepções, mal definidas na TQC . A principal característica da descrição de Heisenberg é definir os operadores em todo o espaço de Hilbert para assim, explorar as correções radiativas em um *loop*. Esta descrição não é apenas para contornar os problemas já apontados pelo Teorema de Haag, mas sim um aparato coerente na definição dos objetos quânticos.

Uma pergunta a ser feita, após todos os resultados desse capítulo, seria a respeito do termo anti-simétrico de Chern-Simons CS . Embora ele seja adicionado explicitamente na Lagrangiana no modelo de Maxwell-Chern-Simons (MCS), o termo CS não possui nenhuma justificativa física para tal procedimento. Tentamos, neste capítulo, argumentar que essa origem fundamental surge do termo anti-simétrico na eq. (5.15) que *gera dinamicamente* uma massa física para o fóton. Em outras palavras, o termo CS é uma manifestação física de polarização do vácuo na ordem de um loop. Tal processo já está confirmado com o método perturbativo em, Pimentel et al. [1994] e não perturbativo em, de Gracia et al. [2019], ambos na descrição de Heisenberg. Outro argumento que sustenta nossa afirmação é que o espaço de Hilbert da $GQED_3$ é equivalente ao da MCS para os estados assintótico do propagador do fóton de Gracia et al. [2019].

A correção radiativa no tratamento do spin bidimensional possuem apenas comportamento cinemático Alexandre et al. [2005] na ordem e^2 (5.73), enquanto uma investigação detalhada do termo $j_\mu^{(4)}$ geraria um comportamento dinâmico. Em outras palavras, essa contribuição geraria um termo antissimétrica (P -odd) em $\Gamma^\mu = \gamma^\mu + i\epsilon^{\mu\nu\sigma}\gamma_\nu q_\sigma$ o qual induziria um momento magnético. Executando um correto tratamento na polarização do vácuo, podemos substituir, grosso modo, o propagador virtual do fóton $1/k^2$ (5.58), pelo massivo $1/(k^2 + \Pi(0))$ de (5.57). Esta contribuição afetaria a dinâmica de anyons como argumentado em Alexandre et al. [2005].

Capítulo 6

Correções Radiativas QED_3

Uma linguagem matemática adequada na descrição do comportamento da natureza é um ponto fundamental antes de superar o nosso desconhecimento sobre os seus processos físicos. Entre essas linguagens, a teoria de campos é o método mais importante na obtenção de informações do mundo físico. Essa descrição pragimática, que determinam a dinâmica do sistema físico a ser estudado, encontra o seu respaldo no conjunto de equações integro-diferenciais acopladas. Contudo, a solução dessas equações é um problema que atrai a atenção de vários métodos matemáticos, pois é quase impossíveis encontrar a solução exata ou a mesma é disponível apenas em poucas ocasiões. Para investigar uma ampla gama de problemas físicos, sugerimos uma abordagem perturbativa como chave adequada na produção de previsões.

A eletrodinâmica quântica (QED_4) é, entre outras teorias de campo, a mais bem-sucedida e melhor testada na descrição da interação férmion-fóton. Essa teoria mostra diferentes comportamentos em baixas dimensões do espaço-tempo. Neste capítulo, abordaremos a eletrodinâmica quântica em $(2+1)$ dimensões QED_3 . Por outro lado, além do ponto de vista estritamente teórico, a QED_3 traz interessantes aplicações experimentais, pois na perspectiva da matéria condensada é uma ferramenta teórica para a explicação do efeito Hall quântico [Jackiw \[1984\]](#), supercondutividade em alta temperatura [Herbut \[2002\]](#), sistema quânticos de spin na temperatura finita [Zohar et al. \[2013\]](#). Além de encontrarmos suporte no confinamento da cromodinâmica quântica (QCD_4) em alta temperatura [Pisarski \[1984\]](#).

Para evitar os problemas já demonstrados pelo Teorema de Haag, construímos uma quantização covariante na descrição de Heisenberg em que a existência de um espaço de Fock para um sistema interagente é garantido. Em particular, exploramos o formalismo perturbativo na avaliação das correções radiativas até a ordem de um loop. Nesse sentido, um aparato interpretativo será ampliado de modo a elucidar o comportamento relativístico quântico na descrição de Heisenberg.

Diferentemente do capítulo anterior em que a teoria de Podolsky é sugerida para lidar com as singularidades, nosso objetivo é discutir as divergências encontradas na QED_3 . Uma vez que a QED_3 é uma teoria super-renormalizável, há um número limitado de amplitudes divergentes. Finalmente, provaremos a ausência de momento magnético anômalo e as singularidades na camada de massa. O capítulo está organizado da seguinte forma: Nas seções [6.1](#) e [6.2](#), delineamos a correção da função de vértice e da auto-energia do elétron, respectivamente. A polarização tanto na QED_3 quanto na $GQED_3$ é a mesma, por isso não será abordada nesse capítulo. No final do capítulo, incluímos a problematização do momento magnético anômalo da QED_3 e concluímos com algumas

perspectivas os futuros projetos. Antes disso, é conveniente introduzir o segmento matemático e físico do operador corrente de segunda ordem para a QED_3 . A sua derivação explícita segue a rigor os mesmos procedimentos utilizados nas equações (3.22) e (3.27). Contudo, omitiremos os passos dessas etapas e colocaremos apenas os resultados finais com o propósito de não deixar a tese redundante.

Operador corrente

As regras de seleção no estudo do operador corrente são os mesmos na $GQED_3$ e $GQED_4$. Começaremos com a expansão do famigerado $j^\mu(x)$ obtido na eq. (3.22)

$$j_\mu(x) = j_\mu^{(0)}(x) + e j_\mu^{(1)}(x) + e^2 j_\mu^{(2)}(x) + \dots \quad (6.1)$$

O mesmo cálculo realizado nos dois capítulos anteriores conduz ao operador de mais baixa ordem, diferente de zero

$$\begin{aligned} j_\mu^{(2)} = & \frac{i}{8} \int d^3 y \int d^3 z [\bar{\psi}^{(0)}(x), \gamma_\mu S_R(x-y) \gamma_\nu \{\psi^{(0)}(y), [\bar{\psi}^{(0)}(z), \gamma^\nu \psi^{(0)}(z)]\}] D^R(y-z) \\ & - \frac{i}{4} \int d^3 y \int d^3 z [\bar{\psi}^{(0)}(x), \gamma_\mu S_R(x-y) \gamma_{\nu_1} S_R(y-z) \gamma_{\nu_2} \psi^{(0)}(z)] \{A_{\nu_1}^{(0)}(y), A_{\nu_2}^{(0)}(z)\} \\ & - \frac{i}{4} \int d^3 y \int d^3 z [\bar{\psi}^{(0)}(y) \gamma^{\mu_1} S_A(y-x), \gamma_\mu S_R(x-z) \gamma^{\mu_2} \psi^{(0)}(z)] \{A_{\nu_1}^{(0)}(y), A_{\nu_2}^{(0)}(z)\} \\ & + \frac{i}{8} \int d^3 y \int d^3 z [\{\bar{\psi}^{(0)}(z), \gamma^\nu \psi^{(0)}(z)\}, \psi^{(0)}(y)] \gamma^\nu S_A(y-x), \gamma_\mu \psi^{(0)}(x)] D^R(y-z) \\ & - \frac{i}{4} \int d^3 y \int d^3 z [\bar{\psi}^{(0)}(z) \gamma^{\nu_2} S_A(z-y) \gamma^{\nu_1} S_A(y-x), \gamma_\mu \psi^{(0)}(x)] \{A_{\nu_1}^{(0)}(y), A_{\nu_2}^{(0)}(z)\} \end{aligned} \quad (6.2)$$

O próximo passo será aplicar as regras do Teorema de Wick [Weinberg et al. \[1995\]](#). Essa decomposição pode ser executada sem qualquer dificuldade a fim de alcançar os efeitos radiativos desejados. Após um longo cálculo, obtemos

$$\begin{aligned} e^3 \langle 0 | j^{(2)\mu} | q, q' \rangle = & \frac{ie}{2} \int d^3 x' \int d^3 x'' \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x), \gamma_\mu S_R(x-x') \sum (x' - x'') \psi^{(0)}(x'')] | q' \rangle + \\ & \frac{ie}{2} \int d^3 x' \int d^3 x'' \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x'') \sum (x'' - x') S_A(x' - x), \gamma_\mu \psi^{(0)}(x)] | q' \rangle + \\ & \frac{ie}{2} \int d^3 x' \int d^3 x'' \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x'), \Gamma_\mu(x' - x, x - x'') \psi^{(0)}(x'')] | q' \rangle + \\ & \frac{ie}{2} \int d^3 x' \int d^3 x'' \Pi_{\mu\nu}(x - x') G^R(x' - x'') \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x''), \gamma^\nu \psi^{(0)}(x'')] | q' \rangle, \end{aligned} \quad (6.3)$$

e

$$\begin{aligned}
e^3 \langle q | j^{(2)\mu} | q' \rangle &= \frac{ie}{2} \int d^3 x' \int d^3 x'' \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x), \gamma_\mu S_R(x-x')] \sum (x'-x'') \psi^{(0)}(x'') | q' \rangle + \\
&\frac{ie}{2} \int d^3 x' \int d^3 x'' \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x'') \sum (x''-x') S_A(x'-x), \gamma_\mu \psi^{(0)}(x)] | q' \rangle + \\
&\frac{ie}{2} \int d^3 x' \int d^3 x'' \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x'), \Gamma_\mu(x'-x, x-x'') \psi^{(0)}(x'')] | q' \rangle + \\
&\frac{ie}{2} \int d^3 x' \int d^3 x'' \Pi_{\mu\nu}(x-x') D^R(x'-x'') \langle q | [\bar{\psi}^{(0)}(x''), \gamma^\nu \psi^{(0)}(x'')] | q' \rangle,
\end{aligned} \tag{6.4}$$

onde $|q\rangle$ e $|q'\rangle$ são os estados assintóticos dos elétrons. Os elementos de matriz são as transições quânticas de primeira ordem dadas pelos elementos $\langle 0 | j^{(2)\mu} | q, q' \rangle$ e $\langle q | j^{(2)\mu} | q' \rangle$. Antes de iniciarmos com a computação das flutuações quânticas, será importante definir alguns objetos matemáticos fundamentais nos futuros cálculos desse capítulo. Se realizarmos o mesmo procedimento na seção (??) sem o termo de Podolsky, as funções de Green retardadas e avançadas corresponderão

$$D_R(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p e^{ipx} \left(\mathcal{P} \frac{1}{p^2} + i\pi \epsilon(p) \delta(p^2) \right), \tag{6.5a}$$

$$D_A(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p e^{ipx} \left(\mathcal{P} \frac{1}{p^2} - i\pi \epsilon(p) \delta(p^2) \right) \tag{6.5b}$$

e a função originada de [\(5.7\)](#) é

$$D^{(1)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p e^{ipx} \delta(p^2) \tag{6.6}$$

Nas próximas seções abordaremos a correção do vértice (Γ^μ) e da auto-energia do elétron (Σ) utilizando as funções singulares acima.

6.1 Vértice Γ_μ

Voltamos a nossa atenção para a investigação do terceiro termo da eq. (6.4), que corresponde às funções de três pontos, definida como

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu(x' - x, x - x'') &= -\frac{e^2}{2} \gamma_\lambda \text{Tr}[S^{(1)}(x' - x) \gamma_\mu S^R(x - x'') D^R(x'' - x')] \\ &+ S^A(x' - x) \gamma_\mu S^{(1)}(x - x'') D^R(x'' - x') + S^A(x' - x) \gamma_\mu S^R(x - x'') D_P^{(1)}(x'' - x') \gamma^\lambda, \end{aligned} \quad (6.7)$$

onde x'' e x' representam a coordenada no espaço de representação da *ingoing* e *outgoing* elétron, respectivamente. O próximo passo será executar a transformada de Fourier do vetor acima

$$\Gamma_\mu(q, q') = \int d^3x' d^3x'' e^{-iq(x'-x)} e^{-iq'(x-x'')} \Gamma_\mu(x' - x, x - x''). \quad (6.8)$$

Utilizando as funções singulares da igualdade das eqs. (6.5a) e (6.6) em conjunto com as eqs. (2.42), (2.43) e (2.45) no espaço do momento aplicadas em (6.8), leva-nos a

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu(q, q') &= \\ &-\frac{e^2}{2} \int \int \frac{d^3x'}{(2\pi)^6} d^3x'' d^3p d^3k e^{-iq(x'-x)} e^{-iq'(x-x'')} \gamma^\lambda (i\gamma p - m) \gamma_\mu (i\gamma p' - m) \gamma_\lambda \times \\ &\left\{ \delta^3(p^2 + m^2) \left[\mathcal{P} \frac{1}{p'^2 + m^2} + i\pi \delta^3(p'^2 + m^2) \epsilon(p') \right] \left[\mathcal{P} \frac{1}{k^2} + i\pi \delta^3(k^2) \epsilon(k) \right] + \delta^3(p'^2 + m^2) \right. \\ &\times \left[\mathcal{P} \frac{1}{k^2} + i\pi \delta^3(k^2) \epsilon(k) \right] \left[\mathcal{P} \frac{1}{p^2 + m^2} - i\pi \delta^3(p^2 + m^2) \epsilon(p) \right] + \delta^3(k^2) \left[\mathcal{P} \frac{1}{p'^2 + m^2} + \right. \\ &\left. \left. i\pi \delta^3(p'^2 + m^2) \epsilon(p') \right] \left[\mathcal{P} \frac{1}{p^2 + m^2} - i\pi \delta^3(p^2 + m^2) \epsilon(p) \right] \right\} e^{ip(x'-x)} e^{ik(x-x'')} e^{ik(x''-x')} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Substituindo as exponenciais pelas deltas de Dirac $\delta^3(p - q + k)$ e $\delta^3(p' + k - q')$ e rearranjando os termos, encontramos

$$\begin{aligned} \Gamma(q, q') &= \\ &-\frac{e^2}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^2} d^3p' d^3k \delta^3(p - q + k) \delta^3(p' + k - q') \gamma^\lambda (i\gamma p - m) \gamma_\mu (i\gamma p' - m) \gamma_\lambda \\ &\times \left\{ \mathcal{P} \frac{\delta^3(k^2)}{[(p^2 + m^2)][(p'^2 + m^2)]} + \mathcal{P} \frac{\delta^3(p'^2 + m^2)}{[(p^2 + m^2)][k^2]} + \mathcal{P} \frac{\delta^3((p^2 + m^2))}{[p'^2 + m^2][k^2]} \right. \\ &+ \delta^3(p^2 + m^2) \left[\mathcal{P} \frac{1}{k^2} i\pi \delta^3(p'^2 + m^2) \epsilon(k) + \mathcal{P} \frac{1}{p'^2 + m^2} i\pi \delta^3(k^2) \epsilon(k) \right] \\ &+ \delta^3(p'^2 + m^2) \left[\mathcal{P} \frac{1}{p^2 + m^2} i\pi \delta^3(k^2) \epsilon(k) - \mathcal{P} \frac{1}{k^2} i\pi \delta^3(p^2 + m^2) \epsilon(p) \right] \\ &- \delta^3(k) \left[\mathcal{P} \frac{1}{p^2 + m^2} i\pi \delta^3(p'^2 + m^2) \epsilon(p') + \mathcal{P} \frac{1}{p'^2 + m^2} i\pi \delta^3(p^2 + m^2) \epsilon(p) \right] \\ &\left. + \delta^3(p'^2) \delta^3(p^2 + m^2) \delta^3(k^2 + m^2) \left(\epsilon(p) \epsilon(k) + \epsilon(p') \epsilon(p) + \epsilon(k) \epsilon(p') \right) \right\} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Desse modo, temos

$$\begin{aligned}
& \Gamma_\mu(q, q') \\
&= \frac{-e^2}{2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \left(\frac{\delta^3(k^2)}{[(q-k)^2 + m^2][(q'-k)^2 + m^2]} + \frac{\delta^3((q'-k)^2 + m^2)}{[(q-k)^2 + m^2][k^2]} \right. \\
&+ \frac{\delta^3((q-k)^2 + m^2)}{[(q'-k)^2 + m^2][k^2]} + i\pi P \frac{1}{k^2} \delta^3((q'-k)^2 + m^2) \delta^3((q-k)^2 + m^2) \times \\
&[1 - \epsilon(q-k)\epsilon(q'-k)]\epsilon(q'-q) + i\pi P \frac{1}{(q-k)^2 + m^2} \delta^3((q'-k)^2 + m^2) \delta^3(k^2) \times \\
&[1 - \epsilon(k)\epsilon(k-q')]\epsilon(q') - i\pi P \frac{1}{(q-k)^2 + m^2} \delta^3((q'-k)^2 + m^2) \delta^3(k^2) \times \\
&[1 - \epsilon(q-k)\epsilon(q-k)]\epsilon(q) + \pi^2 \delta^3(k^2) \delta^3((q'-k)^2 + m^2) \delta^3((q-k)^2 + m^2) \times \\
&[\epsilon(k)\epsilon(q-k) + \epsilon(k)\epsilon(q'-k) + \epsilon(q-k)\epsilon(q'-k)] \left. \right) \gamma_\lambda [(i\gamma(q-k) - m)] \gamma_\mu \times \\
&(i\gamma(q'-k) - m) \gamma_\lambda
\end{aligned} \tag{6.11}$$

É natural esperar que muitos dos termos acima desaparecerão devido ao fato do férmion obedecer à relação *on-shell* $q^2 = q'^2 = -m^2$. O resultado obtido após um longo cálculo é uma função com a forma $\Gamma_\mu(q, q') = \Gamma_\mu^{(1)}(q, q') + i\epsilon(q'-q)\Gamma_\mu^{(2)}(q, q')$. O primeiro termo é

$$\begin{aligned}
\Gamma_\mu^{(1)}(q, q') &= -\frac{e^2}{8\pi^2} \int d^3k \left[\mathcal{P} \frac{\delta^3(k^2)}{((q-k)^2 + m^2)((q'-k)^2 + m^2)} + \mathcal{P} \frac{\delta^3((q-k)^2 + m^2)}{k^2((q'-k)^2 + m^2)} \right. \\
&+ \left. \mathcal{P} \frac{\delta^3((q'-k)^2 + m^2)}{k^2((q-k)^2 + m^2)} \right] \gamma_\lambda (i\gamma(q-k) - m) \gamma_\mu (i\gamma(q'-k) - m) \gamma^\lambda,
\end{aligned} \tag{6.12}$$

É importante notar que a parte real $\Gamma_\mu^{(1)}(q, q')$ representa os propagadores, ou seja, o loop (férmio-fóton-antiférmion). Embora forneça indicações qualitativas bastante interessantes, a análise de $\Gamma_\mu^{(1)}(q, q')$ será postergada. A parte imaginária $\Gamma_\mu^{(2)}(q, q')$ significa todos os estados quânticos acessíveis e não degenerados do fóton. A questão da convergência será deixada para a conclusão do capítulo.

$$\begin{aligned}
\Gamma_\mu^{(2)}(q, q') &= -\frac{e^2}{8\pi} \int d^3k \delta^3((q-k)^2 + m^2) \delta^3((q'-k)^2 + m^2) \mathcal{P} \frac{1}{k^2} [1 - \epsilon(q'-k)\epsilon(q-k)] \\
&\times \gamma_\lambda (i\gamma(q-k) - m) \gamma_\mu (i\gamma(q'-k) - m) \gamma^\lambda.
\end{aligned} \tag{6.13}$$

É claramente adequado começar o nosso estudo pelas informações do espectro de potência contido em $\Gamma_\mu^{(2)}$. Resolveremos primeiro o produto das matrizes de Dirac¹ para em seguida verificarmos o surgimento de três integrais diferentes: tensor, vetor e escalar. A princípio, esse processo é diferente do calculado na seção (4.2), pois a álgebra de Dirac tem forte influência no comportamento radiativo do sistema eletrodinâmico em (2 + 1) dimensões. A integral tensorial é

¹Ver detalhe em Apêndice (C.2).

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \int d^3k \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \delta^3((q-k)^2 + m^2) \delta^3((q'-k)^2 + m^2) [1 - \epsilon(q'-k) - \epsilon(q-k)] = \\ \frac{\pi \Theta(Q_o)}{\sqrt{-Q^2}} \frac{\Theta(-Q^2 - 4m^2)}{Q^2} \left\{ (q'^\mu q'^\nu + q^\mu q^\nu - \frac{Q^2}{2} g^{\mu\nu}) - (q^\mu q'^\nu + q'^\mu q^\nu + \frac{Q^2}{2} g^{\mu\nu}) \right\}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

A vetorial é

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \int \frac{d^3k}{k^2} k_\mu \delta^3((q-k)^2 + m^2) \delta^3((q'-k)^2 + m^2) [1 - \epsilon(q'-k)\epsilon(q-k)] = \\ \frac{\pi \Theta(Q_o)}{2\sqrt{-Q^2}} \Theta(-Q^2 - 4m^2) \frac{(q'^\mu + q^\mu)}{Q^2(1 + \frac{4m^2}{Q^2})}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Embora na correção do vértice não exista divergência ultravioleta, a integral escalar revela uma divergência infravermelha no propagador do fóton. Um requisito necessário, mas não suficiente no tratamento da integral escalar é a substituição analítica de um fóton não massivo por um massivo. Logo, ao adicionarmos uma massa fictícia (μ) ou *t' Hooft mass* ao fóton para evitar as divergências infravermelhas, a invariância de calibre é quebrada [\[Boldo et al. 2002\]](#), [\[Scharf et al. 1994\]](#). Portanto, a solução da integral é dependente de gauge no limite inferior da integração

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \int \frac{d^3k}{k^2 + \mu^2} \delta^3((q-k)^2 + m^2) \delta^3((q'-k)^2 + m^2) [1 - \epsilon(q'-k)\epsilon(q-k)] = \\ \frac{\Theta(Q_o)}{\sqrt{-Q^2}} \frac{\pi \Theta(-Q^2 - 4m^2)}{\sqrt{\mu^4 + \mu^2 Q^2(1 + \frac{4m^2}{Q^2})}} \end{aligned} \quad (6.16)$$

Se desconsiderássemos a massa $\mu = 0$ a integral seria divergeria no limite infravermelho. A equação [\(6.13\)](#) pode ser escrita como

$$\Gamma_\mu^{(2)}(q, q') = \gamma_\mu F_1(Q^2) + i \frac{(q+q')_\mu}{2m} F_2(Q^2). \quad (6.17)$$

essa integral reproduz duas contribuições fisicamente diferentes cujas interpretações correspondem as mesmas dadas pelas eqs. [\(5.68\)](#) e [\(5.69\)](#). Os fatores de forma imaginário são

$$F_1(Q^2) = -\frac{e^2}{4} \frac{\Theta(Q_o)}{\sqrt{-Q^2}} \frac{(Q^2 + 2m^2)\Theta(-Q^2 - 4m^2)}{\sqrt{\mu^4 + \mu^2 Q^2(1 + \frac{4m^2}{Q^2})}}, \quad (6.18a)$$

$$F_2(Q^2) = -\frac{3e^2}{2} \frac{\Theta(Q_o)}{\sqrt{-Q^2}} \frac{m^2 \Theta(-Q^2 - 4m^2)}{Q^2 (1 + \frac{4m^2}{Q^2})}. \quad (6.18b)$$

A integral tensorial [\(6.14\)](#) desaparece por causa da álgebra spinorial. Infelizmente, os resultados obtidos até agora em $\Gamma_\mu^{(2)}$, ainda, não permitiram concluir se a QED_3 é ausente ou não do momento magnético anômalo. Ao invés de calcular $\Gamma_\mu^{(1)}$ explicitamente, usaremos as relações de Kramers-Kronig [\[Weinberg et al. 1995\]](#). Para tal aplicação, deveremos

considerar não apenas as simetrias, mas também a localidade e causalidade como fatores necessários e suficientes. A localidade de $\Gamma_\mu^{(2)}$ é garantida pela forma da sua equação. A causalidade, contudo, requer que Γ_μ esteja no *retarded light-cone history* ou seja estiver na região $x'_o < x_o$ ou $x_o > x''_o$. Aplicando Kramers-Kronig, os fatores de forma reais são

$$\bar{F}_i(Q^2) = \int_0^\infty ds \frac{F_i(-s)}{(s+Q^2)}, \quad (6.19)$$

onde $i = \{1, 2\}$. Com o propósito de obter uma maior clareza nos nossos cálculos, $\Gamma_\mu^{(1)}$ deve assumir a mesma forma de $\Gamma_\mu^{(2)}$, uma vez que ambos são pares de Hilbert

$$\Gamma_\mu^{(1)}(q, q') = \gamma_\mu \bar{F}_1(Q^2) + i \frac{(q+q')_\mu}{2m} \bar{F}_2(Q^2). \quad (6.20)$$

O cálculo de cada fator separado fornece

$$\begin{aligned} \bar{F}_1(Q^2) &= \int_0^{+\infty} \frac{F_1(-a)}{(a+Q^2)} da, \\ &= \frac{e^2}{4\pi} \int_{4m^2}^{+\infty} \frac{2m^2 - a}{\sqrt{\mu^4 + \mu^2(4m^2 - a)}} \frac{da}{\sqrt{a(a+Q^2)}} \\ &= \frac{e^2}{4\pi} \lim_{d \rightarrow \infty} \lim_{\mu \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{-\mu^2 - Q^2}} \left(\ln \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{-\frac{d(\mu^2+Q^2)}{(4m^2+\mu^2-d)4a}}} \right) - \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{-d(\mu^2+Q^2)}{(4m^2+\mu^2-d)4a}}} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{8m^2}{-Q^2 - \mu^2 - 4m^2} \sqrt{\frac{-Q^2}{4m^2}} \right\} \\ &= \frac{e^2 \Theta(Q_o)}{\pi} \left\{ \frac{1}{\sqrt{-Q^2}} \left(\ln \left(-1 + \frac{\sqrt{4m^2}}{\sqrt{Q^2}} \right) - \ln \left(1 + \frac{\sqrt{4m^2}}{\sqrt{Q^2}} \right) \right) + \frac{8m^2}{Q^2 - 4m^2} \sqrt{\frac{-Q^2}{4m^2}} \right\} \\ &= \frac{3e^2 \Theta(Q_o)}{\pi \sqrt{-Q^2}} \left[\ln \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{-Q^2}{4m^2}}}{1 + \sqrt{\frac{-Q^2}{4m^2}}} \right) + \frac{8m^2}{Q^2 - 4m^2} \sqrt{\frac{-Q^2}{4m^2}} \right] \end{aligned} \quad (6.21)$$

que reflete uma dependência da escala na carga elétrica. Outro fator de forma contém a assinatura do momento magnético anômalo

$$\bar{F}_2(Q^2) = \frac{3e^2}{2} \frac{m^2}{Q^2 - 4m^2} \left[\frac{1}{\sqrt{-Q^2}} \ln \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{-Q^2}{4m^2}}}{1 + \sqrt{\frac{-Q^2}{4m^2}}} \right) - \int_{4m^2}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{s}} \frac{1}{s - 4m^2} \right], \quad (6.22)$$

Se fizermos $Q^2 \rightarrow 0$, teremos $\bar{F}_2(0) = 0$. Esse resultado mostra que não existe momento magnético em $(2+1)$ dimensões na ordem e^2 à temperatura zero. Tal comportamento é restrito à dimensionalidade da QED_3 . Ao realizar a mesma operação para \bar{F}_1 , encontramos uma contribuição finita

$$\bar{F}_1(Q^2 = 0) = -\frac{3e^2}{4\pi m} \quad (6.23)$$

no âmbito da eletrodinâmica de baixa dimensão.

6.2 Auto energia do elétron Σ

Finalmente, iremos averiguar a correção do propagador do elétron da QED_3 na descrição de Heisenberg. O cálculo nessa seção será direto, caso o leitor tenha alguma dúvida, sugerimos a leitura da seção (5.3) para maiores detalhes. Primeiro, investigaremos o espectro de potência do operador

$$\Sigma(x-x') = \frac{-e^2}{2} \int dx' \gamma_\lambda [S^{(1)}(x-x')D^A(x'-x) + S^{(R)}(x-x')D^{(1)}(x'-x)] \gamma^\lambda \psi(x') \quad (6.24)$$

Substituindo as funções singulares (6.5a), (6.5b), e (6.6), temos

$$\begin{aligned} \Sigma(x-x') &= \frac{-e^2}{2} \int \frac{d^3x}{(2\pi)^5} d^3p d^3k \gamma_\lambda \left((i\gamma p - m) e^{ip(x-x')} \delta^3(p^2 + m^2) \left[\mathcal{P} \frac{1}{k^2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \mathcal{P} \frac{1}{k^2 + m_p^2} - i\pi\epsilon(k)(\delta^3(k^2) - \delta^3(k^2 + m_p^2)) \right] e^{ik(x'-x)} + (i\gamma p - m) \right. \\ &\quad \times e^{ip(x-x')} \left[\mathcal{P} \frac{1}{(p^2 + m^2)} + i\pi\epsilon(p)\delta^3(p^2 + m^2) \right] e^{ik(x'-x)} (\delta^3(k^2) - \\ &\quad \left. \delta^3(k^2 + m_p^2)) \right) \gamma^\lambda \end{aligned} \quad (6.25)$$

onde $\Sigma(x-x')$ é uma função retardada. Ao realizar uma transformada de Fourier na escalar acima

$$\Sigma(x-x') = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{iq(x-x')} \Sigma(q). \quad (6.26)$$

temos que

$$\begin{aligned} \Sigma(q) &= \frac{-e^2}{2} \int \frac{d^3x'}{(2\pi)^5} d^3p d^3k e^{i(x-x')(q+k-p)} \gamma_\lambda (ip\gamma - m) \gamma^\lambda \left\{ \delta^3(p^2 + m^2) \times \right. \\ &\quad \left. \left(\mathcal{P} \frac{1}{k^2} - i\pi\epsilon(k)\delta^3(k^2) \right) + \delta^3(k^2) \left(\mathcal{P} \frac{1}{(p^2 + m^2)} + i\pi\epsilon(p)\delta^3(p^2 + m^2) \right) \right\} \\ &= \frac{-e^2}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^2} d^3k \delta^3(q-p+k) \gamma_\lambda (i\gamma p - m) \gamma^\lambda \left\{ \delta^3(p^2 + m^2) \times \right. \\ &\quad \left. \left(\mathcal{P} \frac{1}{k^2} - i\pi\epsilon(k)\delta^3(k^2) \right) + \delta^3(k^2) \left(\mathcal{P} \frac{1}{(p^2 + m^2)} + i\pi\epsilon(p)\delta^3(p^2 + m^2) \right) \right\} \end{aligned} \quad (6.27)$$

Separando a parte imaginária e real, obtemos

$$Im \Sigma(q) = \frac{e^2}{8\pi} \int d^3p d^3k \delta^3(q-p+k) \delta^3(p^2 + m^2) \delta^3(k^2) \gamma^\lambda (i\gamma p - m) \gamma_\lambda (\epsilon(k) - \epsilon(p)), \quad (6.28)$$

reescreveremos essa integral mais concisamente como

$$Im \Sigma(q) = \epsilon(q) \left[\sum_1 (q^2) + (i\gamma q + m) \sum_2 (q^2) \right]. \quad (6.29)$$

Para calcular cada componente separadamente, podemos utilizar as identidades de γ -matrizes, $[\gamma_\mu, \gamma_\nu] = -2i\epsilon_{\mu\nu\lambda}\gamma^\lambda$ and $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$. A parti de métodos elementares, obtemos o traço

$$Tr[\gamma_\mu Im \sum_2(q)] = 2iq_\mu \epsilon(q) \sum_2(q^2). \quad (6.30)$$

Assim,

$$\epsilon(q) \sum_2(q^2) = \frac{e^2}{16\pi^2} \int d^3k \left(1 - \frac{m^2}{q^2}\right) \delta^3(k^2) \delta^3(q^2 + 2qk + k^2 + m^2) (\epsilon(q+k) - \epsilon(k)) \quad (6.31)$$

pela covariância de Lorentz, esse resultado será calculado no referencial em repouso $\vec{q} = 0$, logo, $q^2 \rightarrow -q_o^2$. A integral acima fica

$$\begin{aligned} \epsilon(q) \sum_2(q^2) &= \frac{-e^2}{16\pi} \int d^2\mathbf{k} \frac{(1 + \frac{m^2}{q_o^2})}{|2\mathbf{k}|} \left(\delta^3(-q_o^2 - 2q_o\mathbf{k} + m^2) \left[1 - \frac{(q_o + \mathbf{k})}{|q + \mathbf{k}|}\right] \right. \\ &\quad \left. + \delta^3(-q_o^2 + 2q_o\mathbf{k} + m^2) \left[-1 - \frac{(q_o - \mathbf{k})}{|q_o - \mathbf{k}|}\right] \right) \\ &= \frac{e^2}{8} \left(1 + \frac{m^2}{q_o^2}\right) \int_0^{q_o} d\mathbf{k} \left(\frac{1}{|2q_o|} \delta^3(\mathbf{k} - \frac{q_o^2 - m^2}{2q_o}) \epsilon(q) \right) \end{aligned} \quad (6.32)$$

A dependência em \mathbf{k} é eliminada pela delta de Dirac. O resultado final é

$$\sum_2(q^2) = \frac{e^2}{16\pi} \left(1 - \frac{m^2}{q^2}\right) \frac{\Theta(q_o)}{\sqrt{-q^2}} \Theta(-q^2 - m^2) \quad (6.33)$$

De forma bastante análoga a eq. (6.30), não encontramos dificuldade em mostrar que

$$Tr[Im \sum(q)] = 3\epsilon(q) \left(\sum_1(q^2) + m \sum_2(q^2)\right). \quad (6.34)$$

Então,

$$\begin{aligned} \epsilon(q) \left[\sum_1(q^2) + m \sum_2(q^2) \right] &= \frac{me^2}{4\pi} \int d^3k \delta^3((q+k)^2 + m^2) \delta^3(k^2) (\epsilon(q+k) - \epsilon(k)) \\ &= -\frac{me^2}{4} \int d\mathbf{k} \left(\delta(m^2 - q_o^2 - 2q_o k_o) \left(1 - \frac{q_o + \mathbf{k}}{|q_o + \mathbf{k}|}\right) - \right. \\ &\quad \left. \delta^3(m^2 - q_o^2 + 2q_o k_o) \left(1 + \frac{q_o - \mathbf{k}}{|q_o - \mathbf{k}|}\right) \right) \\ &= \frac{2me^2}{8} \epsilon(q) \frac{1}{q_o} \Theta(-q^2 - m^2) \end{aligned} \quad (6.35)$$

onde o $\sum_1(q^2)$ é dado por

$$\sum_1(q^2) = \frac{me^2}{16\pi} \left(3 + \frac{m^2}{q^2}\right) \frac{\Theta(q_o)}{\sqrt{-q^2}} \Theta(-q^2 - m^2) \quad (6.36)$$

Através das transformações de Hilbert nas eqs. (5.89) para as componentes imaginárias \sum_1 e \sum_2 , encontramos as componentes reais sem precisar resolver a integral (6.27) explicitamente. A parte real de \sum_2 é

$$\begin{aligned}\bar{\sum}_2(q^2) &= P \int_0^{+\infty} \frac{\sum_2(-a)}{a+q^2} da \\ &= \frac{e^2}{16\pi} P \int_{m^2}^{+\infty} \frac{1}{a+q^2} \left(1 + \frac{m^2}{a}\right) \frac{1}{\sqrt{a}} da \\ &= \frac{e^2}{8\pi} \frac{1}{\sqrt{-q^2}} \left(-\frac{\sqrt{m^2}}{\sqrt{-q^2}} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{m^2}{q^2}\right) \ln \frac{1 - \frac{\sqrt{-q^2}}{\sqrt{m^2}}}{1 + \frac{\sqrt{-q^2}}{\sqrt{m^2}}} \right)\end{aligned}\quad (6.37)$$

e a parte real de \sum_1 é

$$\begin{aligned}\bar{\sum}_1(q^2) &= P \int_0^{+\infty} \frac{\sum_1(-a)}{a+q^2} da \\ &= \frac{me^2}{16\pi} P \int_{m^2}^{+\infty} \frac{1}{a+q^2} \left(3 - \frac{m^2}{a}\right) \frac{1}{\sqrt{a}} da \\ &= \frac{e^2}{8\pi} \frac{m}{\sqrt{-q^2}} \left(-\frac{\sqrt{m^2}}{\sqrt{-q^2}} + \frac{1}{2} \left(3 + \frac{m^2}{q^2}\right) \ln \frac{1 - \frac{\sqrt{-q^2}}{\sqrt{m^2}}}{1 + \frac{\sqrt{-q^2}}{\sqrt{m^2}}} \right)\end{aligned}\quad (6.38)$$

A função $\sum(q)$ total é

$$\begin{aligned}\sum(q) &= \bar{\sum}_1(q^2) + i\epsilon(q) \sum_1(q^2) + (i\gamma q + m) \left[\bar{\sum}_2(q^2) + i\epsilon(q) \sum_2(q^2) \right] \\ &= \frac{e^2}{8\pi} \frac{m}{\sqrt{-q^2}} \left[-\sqrt{\frac{m^2}{-q^2}} + \frac{1}{2} \left(3 + \frac{m^2}{q^2}\right) \ln \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{-q^2}{m^2}}}{1 + \sqrt{\frac{-q^2}{m^2}}} \right) \right] + i\epsilon(q) \frac{me^2}{16} \times \\ &\quad \left(3 + \frac{m^2}{q^2} \right) \frac{\Theta(q_0)}{\sqrt{-q^2}} \Theta(-q^2 - m^2) + (i\gamma q + m) \left[\frac{e^2}{8\pi} \frac{1}{\sqrt{-q^2}} \left(\sqrt{\frac{m^2}{-q^2}} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{m^2}{q^2}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \ln \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{-q^2}{m^2}}}{1 + \sqrt{\frac{-q^2}{m^2}}} \right) \right) + i\epsilon(q) \frac{e^2}{16} \left(1 - \frac{m^2}{q^2}\right) \frac{\Theta(q_0)}{\sqrt{-q^2}} \Theta(-q^2 - m^2) \right]\end{aligned}\quad (6.39)$$

Agora, o nosso papel é fornecer a orientação necessária na interpretação da auto-energia do elétron por meio do âmbito criado pela descrição de Heisenberg. Assim, começaremos por meio da expansão do operador férmionico da eq. (3.44) no cálculo do elemento de matriz

$$\begin{aligned}\langle 0|\psi(x)|q\rangle &= \langle 0|\psi^{(0)}(x)|q\rangle + e\langle 0|\psi^{(1)}(x)|q\rangle + e^2\langle 0|\psi^{(2)}(x)|q\rangle + \dots, \\ &= \langle 0|\psi^{(0)}(x)|q\rangle + \int d^3x' S_R(x-x') \langle 0|\Phi(x')|q\rangle + \dots\end{aligned}\quad (6.40)$$

Devemos estar cientes que a primeira ordem $\psi^{(1)}(x)$ é nula e $\psi^{(2)}(x)$ contém a correção de mais baixa ordem da auto energia do elétron. Multiplicando essa equação pelo operador

da dinâmica livre de Dirac em ambos os lados, obtemos

$$(\gamma \cdot \partial + m)\langle 0|\psi(x)|q\rangle = -\langle 0|\Phi(x)|q\rangle, \quad (6.41)$$

A descrição de Heisenberg trata os estados intermediários e assintóticos de maneira mais explícita. Embora essa discussão seja frequentemente negligenciada, examinaremos essa operação de maneira mais acurada. A motivação de introduzir a hipótese adiabática é pelo requisito causal da *TQC* [Wightman and Schweber 1955b]. O primeiro passo é permitir o operador depender do parâmetro adiabático α

$$\begin{aligned} & \int d^3x' \langle 0| \sum (x-x', \alpha) \psi^{(0)}(x', \alpha) |q\rangle \\ &= i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^x d^3x' e^{\alpha(x_o+x'_o)+ip(x-x')} u(q) e^{iqx'} \epsilon(p) \left[\sum_1 (p^2) + (i\gamma p + m) \sum_2 (p^2) \right], \end{aligned} \quad (6.42)$$

A integral acima dá a relação de dispersão da energia. Uma outra razão para o termo $e^{\alpha(x_o+x'_o)}$ os pontos x_o e x'_o vem da eq. (6.4). Resolvendo a integral acima

$$\begin{aligned} & \int d^3x' \langle 0| \sum (x-x', \alpha) \psi^{(0)}(x', \alpha) |q\rangle = i e^{2\alpha x_o} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_o}{\alpha + i(p_o - q_o)} u(q) e^{iqx} \epsilon(p) \\ & \times \left[\sum_1 (\mathbf{q}^2 - p_o^2) + (i\gamma_k p_k - \gamma_4 p_o + m) \sum_2 (\mathbf{q}^2 - p_o^2) \right]. \end{aligned} \quad (6.43)$$

É instrutivo substituir a variável de integração $p_o^2 = s + \mathbf{q}^2$, assim a integral acima é reescrita como

$$\begin{aligned} & \int d^3x' \langle 0| \sum (x-x', \alpha) \psi^{(0)}(x', \alpha) |q\rangle = e^{2\alpha x_o} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s + \mathbf{q}^2 - (q_o + i\alpha)^2} \times \\ & \left[\sum_1 (-s) - i\alpha\gamma_4 \sum_2 (-s) \right] \langle 0|\psi^{(0)}(x)|q\rangle. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Tomando o limite $\alpha \rightarrow 0$ na caracterização física do operador, chegaremos à conclusão

$$\int d^3x' \langle 0| \sum (x-x') \psi^{(0)}(x') |q\rangle = \sum_1 (-m^2) \langle 0|\psi^{(0)}(x)|q\rangle. \quad (6.45)$$

Antes de estabelecer a técnica de renormalização em massa, primeiro interpretaremos esse resultado. O desenvolvimento desse aspecto operacional, válido em todo o espaço de Hilbert, fornece uma conexão suave entre os operadores de interação e os assintóticos. Essa simples operação pode parecer irrelevante, mas ela captura o princípio físico na obtenção de estado quântico coerente com os postulados da *TQC* [Streater and Wightman 2000]. Além disso, o resultado acima é, também, reproduzido por uma construção que ignora o limite adiabático. Nesse caso, se substituirmos a relação de dispersão dos férmions $q^2 \rightarrow -m^2$ na eq. (6.41), o elemento da matriz é conduzido diretamente ao estado assintótico [2].

²Uma explicação detalhada está nas eqs. (6.25), (6.26) e (6.39).

$$\begin{aligned}
(\gamma \cdot \partial + m)\langle 0|\psi(x)|q\rangle &= -\left[\sum_1^{\bar{}}(-m^2) + i\epsilon(q)\sum_1(-m^2) + (i\gamma q + m)\times\right. \\
&\quad \left.\left(\sum_2^{\bar{}}(-m^2) + i\epsilon(q)\sum_2(-m^2)\right)\right]\langle 0|\psi^{(0)}(x)|q\rangle, \\
&= -\sum_1^{\bar{}}(-m^2)\langle 0|\psi^{(0)}(x)|q\rangle.
\end{aligned} \tag{6.46}$$

A igualdade desse resultado com a eq. (6.45) mostra a existência do limite adiabático. No nosso formalismo, os operadores interagentes e assintóticos continuam com a mesma representação de Fock Yang and Feldman [1950]. Portanto, o elemento na matriz da eq. (6.46) tem o mesmo suporte espectral correspondente à eq. (6.45) e devemos reescrever seguindo a aproximação de ordem e^2

$$(\gamma\partial + m_P)\langle 0|\psi^{(r)}(x)|q\rangle = 0. \tag{6.47}$$

e estabelecemos o operador férmionico renormalizado com o mesmo comportamento do campo livre ³. Desse modo, estabelecemos

$$\langle 0|\psi^{(r)}(x)|q\rangle = Z_2^{-1/2} \langle 0|\psi^{(0)}(x)|q\rangle, \tag{6.48}$$

em que Z_2 é um número infinito. Antes de avaliar essa quantidade, devemos realizar a subtração da eq. (6.42) pela eq. (6.46)

$$\begin{aligned}
&\int d^3x' \langle 0|\sum(x-x', \alpha)\psi^{(0)}(x', \alpha)|q\rangle - e^{2\alpha x_o} \sum_1^{\bar{}}(-m^2)\langle 0|\psi^{(0)}(x)|q\rangle = \\
&e^{2\alpha x_o} \int_0^\infty ds \left[\frac{(2iq_o\alpha - \alpha^2)\sum_1(-s)}{(s-m^2)(s+\mathbf{q}^2 - (q_o + i\alpha)^2)} - \frac{(i\gamma_4\alpha)\sum_2(-s)}{s+\mathbf{q}^2 - (q_o + i\alpha)^2} \right] \langle 0|\psi^{(0)}(x)|q\rangle,
\end{aligned} \tag{6.49}$$

onde inserimos o termo $e^{2\alpha x_o}$, pois $\sum_1^{\bar{}}$ depende do acoplamento de gauge. A consistência em tal operação, fundamentada na hipótese adiabática, está no fato dos estados assintótico e livre compartilharem a mesma dinâmica e a mesma *RCC* Yang and Feldman [1950]. Substituindo a eq. (6.49) na eq. (6.40), a nova expansão do elemento da matriz renormalizada é

$$\begin{aligned}
\langle 0|\psi^{(r)}(x)|q\rangle &= \left\{ 1 + i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^x d^3x' e^{ip(x-x')} \delta^3(p^2 + m^2) \epsilon(p) (i\gamma \cdot p - m) e^{2\alpha x_o} \right. \\
&\times \int_0^\infty ds \left[\frac{(2iq_o\alpha - \alpha^2)\sum_1(-s)}{(s+\mathbf{q}^2 - (q_o + i\alpha)^2)(s-m^2)} - \frac{(i\gamma_4\alpha)\sum_2(-s)}{s+\mathbf{q}^2 - (q_o + i\alpha)^2} \right] \left. \right\} \langle 0|\psi^{(0)}(x)|q\rangle. \\
&= i \int dp_o \frac{e^{i(2\alpha - q_o)x'_o}}{2\alpha + i(p_o - q_o)} \frac{e^{i\vec{q}\vec{x}}}{2|p_o|} \left(\delta^3(p_o - q_o) - \delta^3(p_o + q_o) \right) (i\gamma p - m) \\
&\times \int_0^\infty ds \left[\frac{(2iq_o\alpha - \alpha^2)\sum_1(-s)}{(s+\mathbf{q}^2 - (q_o + i\alpha)^2)(s-m^2)} - \frac{(i\gamma_4\alpha)\sum_2(-s)}{s+\mathbf{q}^2 - (q_o + i\alpha)^2} \right] \langle 0|\psi^{(0)}(x)|q\rangle.
\end{aligned} \tag{6.50}$$

Depois de integrarmos no espaço e no momento, temos

³Aqui, um estado de spin com um momento definido $\gamma \cdot \partial$ e massa m_P . Assim, a equação (6.47) leva um propagador com um único pólo $\gamma \cdot p = -m_P$ com resíduo unitário.

$$\begin{aligned} \langle 0|\psi^{(r)}(x)|q\rangle &= \left\{ 1 + \frac{e^{2\alpha x_0}}{2q_0} \left[\frac{1}{2\alpha}(i\gamma q - m) - \frac{(i\gamma_k q_k + \gamma_4 q_0 - m)}{2(\alpha - iq_0)} \right] \int_0^{+\infty} ds \right. \\ &\times \left. \frac{(2iq_0\alpha - \alpha^2)}{(s + \mathbf{q}^2 - (q_0 + i\alpha)^2)} \frac{\sum_1(-s)}{(s - m^2)} - \frac{(i\alpha\gamma_4)\sum_2(-s)}{s + \mathbf{q}^2 - (q_0 + i\alpha)^2} \right\} \langle 0|\psi^{(0)}(x)|q\rangle. \end{aligned} \quad (6.51)$$

Finalmente, o limite adiabático $\alpha \rightarrow 0$ produz a condição de renormalização

$$\begin{aligned} \langle 0|\psi^{(r)}(x)|q\rangle &= \left[1 - \frac{1}{2}(i\gamma q - m) \int_0^\infty ds \left(\frac{\sum_1(-s)}{(s - m^2)^2} - \frac{\gamma_4 \sum_2(-s)}{2q_0 (s - m^2)} \right) \right] \langle 0|\psi^{(0)}(x)|q\rangle \\ &= \left[1 - \frac{1}{2} \int_0^\infty ds \left(\frac{\sum_2(-s)}{s - m^2} - 2m \frac{\sum_1(-s)}{(s - m^2)^2} \right) \right] \langle 0|\psi^{(0)}(x)|q\rangle, \end{aligned} \quad (6.52)$$

onde a constante infinita da eq. (6.48) é

$$\begin{aligned} Z_2^{-1/2} &= 1 - \frac{1}{2} \left[2m \sum_1'(-m^2) + \sum_2(-m^2) \right] \\ &= 1 + \frac{e^2}{16\pi m} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{m} \int_{m^2}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{s}(s - m^2)^2} - \lim_{q^2 \rightarrow -m^2} \ln \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{-q^2}{m^2}}}{1 + \sqrt{\frac{-q^2}{m^2}}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.53)$$

O cálculo da ordem de um loop nos permite definir o contra-termo $\delta_2 = (Z_2 - 1)$

$$\begin{aligned} \delta_2 &= -\frac{1}{2} \left[2m \sum_1'(-m^2) + \sum_2(-m^2) \right] \\ &= \frac{e^2}{8\pi m} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{m} \int_{m^2}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{s}(s - m^2)^2} - \lim_{q^2 \rightarrow -m^2} \ln \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{-q^2}{m^2}}}{1 + \sqrt{\frac{-q^2}{m^2}}} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.54)$$

Esse resultado apresenta uma divergência infravermelha, um problema sério na dinâmica de sistemas de baixas dimensões, e uma singularidade do tipo *mass-shell* [Gusynin et al. 1999]. Este último acontece quando $d \leq 2$, em que d é a dimensão espacial. De fato, a singularidade *mass-shell* impede uma expansão de Taylor em $\sum(q^2)$ devido à divergência logarítmica em $q^2 \rightarrow -m^2$ [Gusynin et al. 1999].

Como ocorre normalmente em *TQC*, o elemento comum à realização da renormalização é a adição de um contratermo. Iremos adicionar o contra-termo δ_m em ambos os lados da equação de Dirac (2.52b)

$$(\gamma \cdot \partial + m + \delta_m)\psi(x) = ie\gamma A(x)\psi(x) + \delta_m\psi(x). \quad (6.55)$$

Do ponto de vista matemático, essa equação permanece inalterada. No entanto, essa operação é chamada de renormalização da massa em que o *bare pole* é deslocado pela flutuação quântica até à massa do pólo. O δ_m não é um potencial e depende do acoplamento de gauge, então $e \rightarrow 0$ implica $\delta_m \rightarrow 0$. Assim, ao escolher δ_m proporcional a e^2 e $\psi^{(0)}(x) = Z_2^{1/2}\psi^{(r)}(x)$, temos

$$\delta_m = \sum_1^{\bar{}} (-m^2), \quad (6.56)$$

onde a constante é ajustada na eq. (6.55) com a mesma estrutura da equação livre de Dirac, ou seja, encontramos uma equação diferencial homogênea com a massa do pólo ao invés da *bare mass*

$$(\gamma \cdot \partial + m_P) \langle 0 | \psi^{(r)}(x) | q \rangle = 0. \quad (6.57)$$

Finalmente, é interessante observar que essa nova equação está descrita por quantidades renormalizadas. Essa maneira alternativa da descrição de Heisenberg consiste em relacionar os parâmetros finitos com os estados assintóticos.

Adição das correções radiativas

Após todos os cálculos realizados, devemos considerar uma expressão mais adequada para escrever os elementos de matriz das eqs. (6.3) e (6.4). Os processos necessários para reformular esses elementos são iguais ao do capítulo anterior. Sendo pragmático, temos que os dois primeiros termos das eqs. (6.3) e (6.4) fornecem os resultados iguais à eq. (6.54). O terceiro termo recebe o mesmo tratamento dado à eq. (5.117) e os resultados são (6.17) e (6.20). Finalmente, o último termo das eqs. (6.3) e (6.4) são a polarização que terá o tratamento dado à eq. (5.128) e que conduz ao resultado da eq. (5.133)⁴. O resultado final é

$$\begin{aligned} \langle q | j_\mu^{(2)}(x) | q' \rangle = \langle q | j_\mu^{(0)}(x) | q' \rangle & \left[-\bar{\Pi}(Q^2) + \bar{\Pi}(0) - i\epsilon(Q)\Pi(Q^2) - 2m \sum_1^{\bar{}} (-m^2) - \right. \\ & \left. \sum_2^{\bar{}} (-m^2) + \bar{F}_1(Q^2) + i\epsilon(Q)F_1(Q^2) \right] - \frac{e}{2m} (q + q')_\mu \left[\bar{F}_2(Q^2) + i\epsilon(Q)F_2(Q^2) \right] \times \\ & \langle q | : \psi^{(0)}(x) \psi^{(0)}(x) : | q' \rangle \end{aligned} \quad (6.58)$$

Ao combinar todos os resultados calculados até agora nesse capítulo: (6.18a), (6.21), (6.22), (6.54) e (5.57), encontramos

⁴Relembrando que a polarização do vácuo da $GQED_3$ é igual a da QED_3 .

$$\begin{aligned}
&= e^2 \frac{\langle q | j_\mu^{(0)}(x) | q' \rangle}{\sqrt{-Q^2}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \left[\left(1 - \frac{4m^2}{Q^2}\right) \ln \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{-Q^2}{4m^2}}}{1 + \sqrt{\frac{-Q^2}{4m^2}}} \right) - \sqrt{\frac{4m^2}{Q^2}} - \frac{i}{16} \left(1 - \frac{4m^2}{Q^2}\right) \right. \right. \\
&\left. \left. \epsilon(Q) \Theta(Q_o) \Theta(Q^2 + 4m^2) \right] - \frac{i}{4\pi} \left[\ln \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{-Q^2}{4m^2}}}{1 + \sqrt{\frac{-Q^2}{4m^2}}} \right) + \frac{i}{2} \epsilon(Q) \Theta(Q_o) \Theta(Q^2 + 4m^2) \right] + \right. \\
&\left. \frac{1}{32\pi} \sqrt{\frac{-Q^2}{m^2}} + \frac{3}{4\pi} \left[\ln \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{-Q^2}{4m^2}}}{1 + \sqrt{\frac{-Q^2}{4m^2}}} \right) + \frac{4m^2}{Q^2 - 4m^2} \sqrt{\frac{-Q^2}{4m^2}} \right] - \frac{i}{4} \epsilon(Q) \Theta(Q_o) (Q^2 + 2m^2) \right. \\
&\left. \frac{\Theta(-Q^2 - 4m^2)}{\sqrt{\mu^4 + \mu^2 Q^2 (1 + \frac{4m^2}{Q^2})}} \right\} - e^3 \frac{(q + q')_\mu}{2m} \langle q | : \psi^{(0)}(x) \psi^{(0)}(x) : | q' \rangle \frac{3}{2\sqrt{-Q^2}} \left\{ \frac{m^2}{Q^2 - 4m^2} \times \right. \\
&\left. \left[\ln \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{-Q^2}{4m^2}}}{1 + \sqrt{\frac{-Q^2}{4m^2}}} \right) - \int_{4m^2}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{s}} \frac{1}{s - 4m^2} \right] + i \epsilon(Q) \Theta(Q_o) \frac{m^2}{Q^2} \frac{\Theta(-Q^2 - 4m^2)}{(1 + \frac{4m^2}{Q^2})} \right\}
\end{aligned} \tag{6.59}$$

Comentários gerais

Neste capítulo, analisamos o extenso assunto da física planar. Para evitar os problemas já demonstrados pelo Teorema de Haag, construímos uma quantização covariante na descrição de Heisenberg. Em particular, exploramos um formalismo perturbativo na avaliação das correções radiativas até a ordem de um loop. Finalmente, provamos que a teoria não apresenta o momento magnético anômalo e sofre de divergências infravermelhas e ultravioletas. Nossos resultados concordam precisamente com a interpretação da teoria de Perturbação Causal de Epstein-Glaser em [L. Tomazelli \[1996\]](#).

A eq. [\(6.59\)](#) suscita vários questionamentos. Primeiramente, enfatizamos que esse resultado não produziu nenhuma surpresa quando $j_\mu^{(2)}$ revela a aparição do termo de Chern-Simons CS oriundo da polarização do vácuo. A princípio, podemos colocar explicitamente "à mão" esse termo topológico na Lagrangiana [\(5.20\)](#). No entanto, ao realizar uma análise perturbativa detalhada no observável [\(6.1\)](#), percebemos que a consistência da QED_3 não é suprimida por tal operação [de Gracia et al. \[2019\]](#). O termo $j_\mu^{(4)}$ pode render, naturalmente, todos os efeitos da teoria de CS sem perda de significado físico. Esse fenômeno, conhecido como *geração dinâmica da massa*, é criado no fóton por um efeito de polarização a um loop. Outros autores já estudaram esse cenário na descrição de Heisenberg por uma abordagem perturbativa [Pimentel et al. \[1994\]](#) e não perturbativa [de Gracia et al. \[2019\]](#).

Como foi provado em vários artigos [Paranjape \[1985\]](#), um propagador do fóton massivo pode induzir um fluxo quantizado de momento magnético proporcional ao acoplamento CS . No entanto, a QED_3 contém todas as informações perturbativas necessárias para criar tais fenômenos físicos, uma vez que o cenário P -odd é equivalente ao de Maxwell-Chern-Simons [de Gracia et al. \[2019\]](#). Na seção [\(6.1\)](#), o propagador do fóton, simétrico $Q^2 g^{\mu\nu} - Q^\mu Q^\nu$, elimina a contribuição anti-simétrica da função de três pontos [\(5.61\)](#). Assim, não obtemos um momento magnético anômalo, ou seja,

$F_2(Q^2 = 0) \neq 0$. Contudo, podemos induzir um momento magnético naturalmente pela expansão da quarta ordem da eletrodinâmica planar sem solicitar um mecanismo de Higgs [Nakanishi \[1989\]](#) ou um modelo $CS + ME$. Entre todas as excitações quânticas possíveis de e^4 ordem, escolhemos uma na qual o propagador do fóton [\(5.57\)](#) tenha o termo anti-simétrico [\(5.56\)](#). Esse efeito da polarização do vácuo, responsável pelo momento magnético anômalo $F(Q^2)$, gera uma contribuição P -odd em Γ^μ . Seguindo esse cenário e usando a decomposição de Gordon,

$$\psi(q')\gamma^\mu\psi(q) = \frac{e}{2m}(q' + q)^\mu - i\epsilon^{\mu\nu\alpha}\frac{q_\alpha}{2m}\psi(q')\gamma_\nu\psi(q) \quad (6.60)$$

somos levados ao termo $\Gamma_{odd}^\mu \sim (\epsilon^{\mu\alpha\beta}q'_\alpha q_\beta/m)(M/m)$, onde $M = \Pi(0)$ é a massa topológica do fóton da eq. [\(5.57\)](#).

Capítulo 7

Conclusão

Estudamos a eficiência da teoria de altas derivadas para eliminar os problemas de divergência ultravioleta na eletrodinâmica quântica. A teoria de Podolsky cumpre um excelente papel na eletrodinâmica clássica. O seu efeito na TQC tornou uma teoria promissora para os futuros estudos da interação radiação-matéria. Confirmamos que a $GQED_4$ é favorável a um cenário sem divergências ultravioletas em que as funções Γ^μ e Σ convergem para um valor finito na ordem de um-loop. Tal feito é obtido pelo parâmetro de Podolsky, responsável pela regularização em altas energias. Por outro lado, as excitações infravermelhas são, grosso modo, desconhecidas ou agnósticas para teorias de altas derivadas. Contudo, a polarização $\Pi^{\mu\nu}$ apresenta, mesmo assim, divergências ultravioletas e, por isso a sua carga elétrica deve ser renormalizada.

O que aprendemos com a descrição de Heisenberg ? A análise apresentada nesta tese mostrou que a estrutura dessa descrição é apropriada para realizar os cálculos das flutuações quânticas. Nessa descrição, podemos definir um mapa linear entre os operadores de criação e aniquilação a tempos finitos. Devemos estar cientes que o vácuo da teoria interagente é o estado fundamental do hamiltoniano total, como segue $(H_0 + H_{int})|\Omega\rangle = 0$, mas $(H_0 + H_{int})|0\rangle \neq 0$, pois H_{int} polariza o vácuo. Uma das inconsistências matemáticas apresentadas na descrição de interação está na ausência de uma transformação unitária e global que relaciona os espaços de Hilbert da hamiltoniana livre e interagente. Na prática, o que acontece é que a descrição de interação só pode descrever uma interação trivial.

No capítulo 2 focamos como a teoria de Podolsky lançou uma nova maneira de investigar o acoplamento matéria-fóton. É imprescindível entender que a $GQED_4$ não é meramente uma teoria efetiva de campo, mas sim uma extensão unitária da QED_4 . Além dessa característica, a estabilidade, linearidade e simetria abeliana são outras propriedades que dão suporte à aplicação da teoria de Podolsky no estudo dos fenômenos físicos. Contudo, outra preocupação abordada nesta tese é a respeito da unicidade do modelo de Podolsky. Dentre todas as combinações possíveis de teorias de gauge de segunda ordem, a $GQED_4$ está longe de ser uma teoria redundante, mas sim, é equivalente a todas as outras teorias de gauge de segunda ordem a menos de um termo de superfície. Um outro ponto apresentado é qual seria a teoria de calibre adequada para uma descrição única dos resultados quânticos da $GQED_4$. Se essa operação não fosse realizada corretamente, os cálculos radiativos produzidos nesta tese seriam questionáveis. A $GQED_4$ exigiu, tecnicamente, uma atualização da antiga teoria de calibre de Lorentz $\partial_\mu A_\mu$ para a *non-mixing gauge* $\sqrt{1 - \frac{\square}{M_P^2}} \partial_\mu A_\mu$.

O principal foco do capítulo 3 foi a investigação das correções radiativas pela descri-

ção de Heisenberg. Revisamos o importante papel que a expansão dos operadores em conjunto com as equações de movimento possui na delimitação das flutuações quânticas. A escolha dessa descrição retira as contradições físicas e matemáticas existentes na descrição da interação. Nesse capítulo, fizemos uma breve discussão da matriz S e verificamos como as complicações estabelecidas pela descrição da interação são removidas. Uma das vantagens encontradas é o estabelecimento de um significado concreto para os operadores de entrada e saída, o vácuo da teoria interagente e o espaço de Fock da teoria livre.

Os resultados do capítulo 4 foram bastante promissores tanto do ponto de vista fenomenológico quanto de perspectivas futuras. Concluimos que sem nenhum auxílio de métodos de renormalização, as funções Σ e Γ são livres de divergências ultravioletas. Não conseguimos o mesmo feito na polarização do vácuo, pois todas as partículas virtuais são férmions. No final desse capítulo, abrimos a possibilidade de testar as correções da $GQED_4$ ao investigar o momento magnético anômalo. Restringimos, assim, o parâmetro $m_P \geq 37.595 \text{ GeV}$ que desempenha o papel central para se livrar das divergências ultravioletas. Estendemos a validade da QED_4 para o intervalo de energia $m^2 \leq p^2 \leq m_P^2$. Com isso em mente, esses cortes em diferentes regimes de energia fornecem diferentes laboratórios para detectar as novas extensões para a eletrodinâmica quântica.

No capítulo 5, estudamos a $GQED_3$ com foco nas divergências ultravioletas e infravermelhas. Os resultados demonstraram que a divergência ultravioleta da $GQED_3$ foi eliminada devido ao parâmetro de Podolsky. Contudo, as inconsistências nas regiões infravermelhas, ainda, deixam a teoria com sérios problemas que não podem ser solucionados com um acréscimo de um termo com derivada de alta ordem. Eliminamos, primeiramente, a barreira da divergência ultravioleta enquanto a remoção da infravermelha abre várias questões. Os problemas de divergência infravermelha são mais graves em $(2+1)$ do que $(3+1)$ dimensões. Entre eles, mostramos a singularidade na camada de massa em um loop, que invalida a expansão de Taylor. Uma maneira natural de remover a singularidade da camada de massa foi redefinir a série S -matriz e o espaço Fock.

No capítulo 6, analisamos a eletrodinâmica quântica em $(2+1)$ dimensões. O formalismo perturbativo foi o mesmo dos dois capítulos anteriores. A descrição de Heisenberg também foi utilizada com o propósito de manter a fundamentação dos objetos da TQC . Assim, evitamos os problemas já demonstrados pelo teorema de Haag. O nosso aparato perturbativo na descrição de Heisenberg não foi suficiente para controlar os problemas infravermelhos e ultravioletas induzidos pela auto-interação [Boldo et al. \[1997a\]](#). Do ponto de vista matemático, acreditamos que a descrição de Heisenberg seja promissora em contornar as dificuldades infravermelhas por um estudo não-perturbativo [Thompson and Zhang \[1987\]](#) ou modelo Bloch-Nordsieck [Pimentel and Tomazelli \[1994\]](#). Finalmente, provamos que a teoria não surge com efeito de momento magnético anômalo e sofre com a singularidade da camada de massa.

Perspectivas futuras

É interessante listar algumas direções para trabalhos futuros. Esperamos que os resultados encontrados nesta tese em $T = 0$ possam fornecer novas visões sobre a temperatura

finita $T \neq 0$. Por exemplo, as correções à lei de Stefan-Boltzmann são os pavimentos para avaliar as possíveis quantidades observáveis como a radiação do corpo negro. Em particular, deve-se esperar determinar o parâmetro de Podolsky a partir dos dados cósmicos de fundo de microondas. Outros testes para determinar m_P são a espectroscopia do átomo de hidrogênio [Cuzinatto et al. [2011]] e o espalhamento Bhabha [Bufalo et al. [2014]]. No que diz respeito ao momento magnético anômalo do múon, esforços significativos têm sido feitos para sanar a discrepância entre as previsões experimentais e teóricas. A QED_4 lidera a contribuição, logo depois vem a contribuição da interação eletrofraca e da QCD . Nossa escolha é satisfatória já que o "fóton massivo" luz de $GQED_4$ não pode ser ignorado quando a energia Electrofraca (Bóson Z) e a polarização hadrônica do vácuo são incluídos.

Ressaltando agora a física em $2 + 1$ dimensões, um dos desafios é descobrir a temperatura crítica na qual a flutuação térmica destrói a polarização do vácuo. Pode ser interessante analisar a divergência infravermelha endêmica na equação de Schwinger-Dyson [Lo and Swanson [2014]] e a transição de fase de segunda ordem a partir da quebra de simetria quiral [Fischer et al. [2004]]. Esperamos, também, explorar a rica estrutura da matéria condensada à luz da $GQED_3$ e, com isso, incorporar um novo suporte espectral para a explicação sistemática do estado de ligação elétron-elétron em supercondutividade de alta temperatura T_c [Belich Jr et al. [2003]].

Apêndice A

Teorema de Wick

Devido ao fato de o Teorema de Wick ser um tópico importante nessa tese e a sua necessidade de aplicação residir em motivos físicos. Abordaremos, neste apêndice, de maneira pragmática os seus principais aspectos ao cálculo da matriz-S. Todavia, será encorajado ao leitor por motivos históricos e didáticos, ler os dois artigos básicos que introduziram o conceito de Teorema de Wick e Produto Normal, Wick [1950], Dyson [1951a], respectivamente, na comunidade científica.

Ao fazer previsões teóricas na *TQC* é natural se perguntar qual a formulação adequada para obter os elementos da matriz-S respeitando as suas simetrias e propriedades. Ao contrário do contexto clássico, os operadores quânticos não comutam entre si a tempos diferentes. Seguindo Bogolyubov and Shirkov [1959], verifica-se que a causalidade marca o alicerce do cálculo da matriz-S e é sensato esperar que isso se reflita nos seus elementos de transição. Seguindo essa linha de pensamento, faremos uso do *T-product* que ordena cronologicamente os operadores no espaço de Hilbert.

Começaremos a desenvolver essas idéias a parti de um modelo mais simples que consiste do produto de dois operadores no espaço de Hilbert (\mathcal{H}_1), abreviando a notação de $A_{\nu_i}^{(0)}(x_{(i)})$ para $A_i(x_{(i)})$, a sua redução a forma normal é

$$A_1(x_1)A_2(x_2) = \underbrace{: A_1(x_1)A_2(x_2) :}_{\text{produto normal}} + \mathbb{1} \underbrace{[A_1(x_1), A_2(x_2)]}_{c\text{-number}} \quad (\text{A.1})$$

Onde $\mathbb{1}$ é o operador unitário. Encontramos a soma de dois termos com significados físicos distintos. O primeiro é o produto normal de operadores e sempre é escrito entre os símbolos $: \dots :$. O segundo termo representa um número complexo (*c-number*) dado pela relação de comutação ou anticomutação, a depender do spin da partícula. Como visto acima, o produto normal será dado pelo ordenamento dos operadores de criação (frequência negativa) á direita e aniquilação (frequência positiva) á esquerda. Então, o valor esperado no vácuo do produto normal sempre será zero $\langle 0 | : A(x_1)A(x_2) : | 0 \rangle = 0$. O valor esperado no vácuo da eq. (A.1) também pode ser associado á um *c-number*

$$\langle 0 | A(x_1)A(x_2) | 0 \rangle = [A(x_1), A(x_2)] \quad (\text{A.2})$$

Agora, reescreveremos a igualdade (A.1) por uma decomposição do operador em acordo com a eq. (2.27). O campo vetorial é a soma de duas partes

$$A_\mu(x) = A_\mu^+(x) + A_\mu^-(x) \quad (\text{A.3})$$

O operador $A_\mu^+(x)$ de frequência positiva

$$A_{\mu}^{+}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{k,\lambda} \frac{e^{\lambda} e^{ikx}}{\sqrt{2\omega}} a^{\lambda}(k) \quad (\text{A.4})$$

que contém somente o operador aniquilação e $A_{\mu}^{-}(x)$ de frequência negativa

$$A_{\mu}^{-}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{k,\lambda} \frac{e^{\lambda} e^{-ikx}}{\sqrt{2\omega}} a^{\dagger\lambda}(k) \quad (\text{A.5})$$

que contém somente o operador criação. Reescrevendo a equação (A.1) por meio da eq. (A.3), temos

$$\begin{aligned} & \left(A_1^{+}(x_1) + A_1^{-}(x_1) \right) \left(A_2^{+}(x_2) + A_2^{-}(x_2) \right) = A_1^{+}(x_1) A_2^{+}(x_2) + A_2^{-}(x_2) A_1^{+}(x_1) \\ & + A_1^{-}(x_1) A_2^{+}(x_2) + A_1^{-}(x_1) A_2^{-}(x_2) - iD^{(-)}(x_1 - x_2) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Onde $iD^{(-)}(x_2 - x_1) = \langle 0 | A_1(x_1) A_2(x_2) | 0 \rangle = [A_1^{+}(x_1), A_2^{-}(x_2)]$. Tendo em vista as definições (A.4) e (A.5), as relações de comutação tem a forma

$$\begin{aligned} [A_1^{+}(x_1), A_2^{+}(x_2)] &= [A_1^{-}(x_1), A_2^{-}(x_2)] = 0, \\ [A_1^{+}(x_1), A_2^{-}(x_2)] &= -i\delta_{12} D^{(-)}(x_2 - x_1) = \langle 0 | A_1(x_1) A_2(x_2) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Ao levar em consideração o teorema spin-estatística, uma modificação deve ser feita se estivermos falando de férmions ou bósons. Em vista disso, cada permuta receberá um sinal negativo. Källén et al. [1972], Bogolyubov and Shirkov [1959]. Fazendo a mesma separação na eq. (A.3) nos operadores de Dirac

$$\begin{aligned} \psi^{(0)}(x) &= \psi^{+}(x) + \psi^{-}(x), \\ \bar{\psi}^{(0)}(x) &= \bar{\psi}^{+}(x) + \bar{\psi}^{-}(x) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

onde o sinal (+) e (-) contém operadores de aniquilação (frequência positiva) e operadores de criação (frequência negativa), respectivamente, temos

$$\begin{aligned} \{\bar{\psi}^{(+)}(x_1), \psi^{(-)}(x_2)\} &= -iS^{(-)}(x_2 - x_1) = \langle 0 | \bar{\psi}^{(0)}(x_1) \psi^{(0)}(x_2) | 0 \rangle \\ \{\bar{\psi}^{(-)}(x_1), \psi^{(+)}(x_2)\} &= -iS^{(+)}(x_2 - x_1) = \langle 0 | \psi^{(0)}(x_2) \bar{\psi}^{(0)}(x_1) | 0 \rangle \\ \{\psi^{(+)}(x_1), \psi^{(+)}(x_2)\} &= \{\bar{\psi}^{(+)}(x_1), \bar{\psi}^{(+)}(x_2)\} = \{\psi^{(+)}(x_1), \psi^{(-)}(x_2)\} = \dots = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Em analogia direta ao realizada no caso do bóson (A.6), o produto normal de dois férmions é um pouco mais diverso, pois temos que analisar também o campo conjugado. Logo, é fácil ver que

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x_1) \psi(x_2) &=: \bar{\psi}(x_1) \psi(x_2) : + \langle 0 | \bar{\psi}(x_1) \psi(x_2) | 0 \rangle \\ \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) &=: \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) : + \langle 0 | \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) | 0 \rangle \\ \psi(x_1) \psi(x_2) &=: \psi(x_1) \psi(x_2) : \\ \bar{\psi}(x_1) \bar{\psi}(x_2) &=: \bar{\psi}(x_1) \bar{\psi}(x_2) : \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Um exemplo de aplicação está na determinação do operador corrente $j_{\mu}(x)$, a solução encontrada é

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}[\bar{\psi}(x), \gamma_\mu \psi(x)] &= \frac{1}{2} \left(: \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) : + \langle 0 | \bar{\psi}(x)^{(0)} \gamma_\mu \psi(x)^{(0)} | 0 \rangle \right. \\
&\quad \left. - : \psi(x) \gamma_\mu^T \bar{\psi}(x) : - \langle 0 | \psi(x)^{(0)} \gamma_\mu^T \bar{\psi}(x)^{(0)} | 0 \rangle \right) \\
&=: \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) : + \frac{1}{2} \langle 0 | [\bar{\psi}(x)^{(0)}, \gamma_\mu \psi(x)^{(0)}] | 0 \rangle \\
&=: \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) :
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Assim, o valor esperado no vácuo da corrente é igual á zero. Enfim, dentro do propósito de buscar uma melhor claridade ao tema, a estrutura geral de um conjunto de n operadores quaisquer reordenados no produto normal é

$$: \phi(x_{i1}) \dots \phi(x_{in}) : = (\eta)^p : \phi(x_1) \dots \phi(x_n) : \tag{A.12}$$

Onde p significa o número de permutações realizadas entre férmions e η é igual á 1 (somente bósons) ou -1 (pelo menos um par férmions). Após isso, o próximo plano seria calcular a eq. (A.1) para o caso geral de operadores

$$\begin{aligned}
\phi(x_1) \dots \phi(x_n) &=: \phi(x_1) \dots \phi(x_n) : \\
&\quad + [\phi(x_1), \phi(x_2)] : \phi(x_3) \dots \phi(x_n) : + (\text{permuta}) \\
&\quad + [\phi(x_1), \phi(x_2)][\phi(x_3), \phi(x_4)] : \phi(x_5) \dots \phi(x_n) : + (\text{permuta}) \\
&\quad + \dots \\
&\quad + \begin{cases} [\phi(x_1), \phi(x_2)][\phi(x_3), \phi(x_4)] \dots [\phi(x_{n-1}), \phi(x_n)], & \text{se } n \text{ é par} \\ [\phi(x_1), \phi(x_2)][\phi(x_3), \phi(x_4)] \dots [\phi(x_{n-1}), \phi(x_n)] : \phi(x_{n+1}) :, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}
\end{aligned} \tag{A.13}$$

onde a identidade da eq. (A.12) já foi utilizada. Os valores $x_i^o > x_j^o$ estão temporalmente ordenados se $i > j$ e n pode ser tanto par como ímpar, caso ímpar o produto sempre será zero. O tratamento apresentado aqui constitui uma nova álgebra dos operadores na representação de Heisenberg. Outro exemplo de fundamental importância no estudo perturbativo é o cálculo da interação dos operadores corrente

$$\begin{aligned}
j^\alpha(x_1) j^\beta(x_2) &=: \bar{\psi}_a(x_1) \gamma_{ab}^\alpha \psi_b(x_1) :: \bar{\psi}_c(x_2) \gamma_{cd}^\beta \psi_d(x_2) :=: \bar{\psi}_a(x_1) \gamma_{ab}^\alpha \psi_b(x_1) :: \bar{\psi}_c(x_2) \gamma_{cd}^\beta \psi_d(x_2) : \\
&\quad + \langle 0 | \bar{\psi}_a(x_1) \psi_d(x_2) | 0 \rangle \gamma_{ab}^\alpha \gamma_{cd}^\beta : \psi_b(x_1) \bar{\psi}_c(x_2) : + \langle 0 | \psi_b(x_1) \bar{\psi}_c(x_2) | 0 \rangle \gamma_{ab}^\alpha \gamma_{cd}^\beta : \bar{\psi}_a(x_1) \psi_d(x_2) : \\
&\quad + \gamma_{ab}^\alpha \gamma_{cd}^\beta \langle 0 | \bar{\psi}_a(x_1) \psi_d(x_2) | 0 \rangle \langle 0 | \psi_b(x_1) \bar{\psi}_c(x_2) | 0 \rangle
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Substituindo por (A.9), a equação acima se torna

$$\begin{aligned}
&: \bar{\psi}_a(x_1) \gamma_{ab}^\alpha \psi_b(x_1) :: \bar{\psi}_c(x_2) \gamma_{cd}^\beta \psi_d(x_2) :=: \bar{\psi}_a(x_1) \gamma_{ab}^\alpha \psi_b(x_1) :: \bar{\psi}_c(x_2) \gamma_{cd}^\beta \psi_d(x_2) : \\
&\quad - i : \bar{\psi}_c(x_2) \gamma_{cd}^\beta S_{da}^{(-)}(x_2 - x_1) \gamma_{ab}^\alpha \psi_b(x_1) : - i : \bar{\psi}_a(x_1) \gamma_{ab}^\alpha S_{bc}^{(+)}(x_1 - x_2) \gamma_{cd}^\beta \psi_d(x_2) : \\
&\quad + Sp[\gamma_{cd}^\beta (-i) S_{da}^{(-)}(x_2 - x_1) \gamma_{ab}^\alpha (-i) S_{bc}^{(+)}(x_1 - x_2)]
\end{aligned} \tag{A.15}$$

Somente operadores com tempos diferentes são contraídos. Deixamos os índices espinoriais em evidência para uma maior compreensão do objeto de estudo. Agora, voltaremos ao conceito do T -produto, definido como

$$T(A_1(x_1), \dots, A_n(x_n)) = \eta^p A_{j_1}(x_{j_1}) \dots A_{j_n}(x_{j_n}), \quad (x_{j_1}^0 \geq x_{j_2}^0 \dots \geq x_{j_n}^0) \quad (\text{A.16})$$

Onde p e η tem a mesma definição de [\(A.12\)](#). No caso de dois operadores quaisquer, obtemos

$$\langle 0|T(\phi_1(x_1)\phi_2(x_2))|0\rangle = \begin{cases} \phi_1(x_1)\phi_2(x_2), & \text{se } x_1^0 > x_2^0 \\ \eta\phi_2(x_2)\phi_1(x_1), & \text{se } x_2^0 > x_1^0 \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

Para um campo vetorial, espera-se obter um propagador causal

$$\begin{aligned} \langle 0|T(A_\mu(x_1)A_\nu(x_2))|0\rangle &= \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}(D^{(1)}(x_2 - x_1) - i\epsilon(x_1 - x_2)D(x_2 - x_1)) \\ &= \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}D_F(x_2 - x_1) \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

onde $D^F(x' - x)$ é o propagador de Feynman [\[Källén et al. 1972\]](#). Se $x_1 > x_2 \rightarrow D(x_2 - x_1)$ ou $x_2 > x_1 \rightarrow -D(x_2 - x_1)$, e $D^{(1)}(x) = D^{(1)}(-x)$. Usando a eq. [\(A.18\)](#) para os férmions

$$\begin{aligned} \langle 0|T(\bar{\psi}(x_1)\psi(x_2))|0\rangle &= \langle 0|\bar{\psi}(x_1)\psi(x_2)|0\rangle - \langle 0|\psi(x_2)\bar{\psi}(x_1)|0\rangle \\ &= -iS^{(-)}(x_2 - x_1) + iS^{(+)}(x_2 - x_1) \\ &= \frac{1}{2}\left(iS^{(1)}(x_2 - x_1) + \mathcal{H}(x_2 - x_1)S(x_2 - x_1)\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(-iS^{(1)}(x_2 - x_1) + \mathcal{H}(x_1 - x_2)S(x_2 - x_1)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(S^{(1)}(x_2 - x_1) - i\epsilon(x_1 - x_2)S(x_2 - x_1)\right) \\ &= -\frac{1}{2}S_F(x_2 - x_1) \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Os dois termos da segunda igualdade acima indicam, de forma não muito evidente, o princípio da causalidade. Caso estejamos fora do cone de luz, uma transformação de Lorentz anularia o resultado, mas se assumirmos $(x_1 - x_2)^2 < 0$, o princípio da causalidade é satisfeito. Iremos dar um passo adiante e trabalhar com as amplitudes de transição da matriz de espalhamento em eq. [\(A.23\)](#), pois é o objetivo principal nessa tese. A primeira ordem ($n = 1$)

$$S_1(x) = iT(\mathcal{L}_{int}) = ie : \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x) : A^\mu(x) \quad (\text{A.20})$$

tem seu valor esperado no vácuo igual a zero, onde $e > 0$. A segunda ordem é

$$\begin{aligned} S_2(x, y) &= i^2T(\mathcal{L}(x)\mathcal{L}(y)) = -e^2T(: J^\alpha(x)A_\alpha(x) :: J^\beta(y)A_\beta(y) :) \\ &= -e^2T(J^\alpha(x)J^\beta(y))T(A_\alpha(x)A_\beta(y)) \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Na última passagem usamos a comutação entre o operador de gauge com o de férmion. A matriz $S_2(x, y)$ é calculada por métodos elementares das eqs. [\(A.7\)](#), [\(A.9\)](#) e [\(A.16\)](#) e mais algumas operações, temos

$$\begin{aligned}
A(x_1, x_2) &= e^2 \gamma_\mu^{ab} \gamma_\nu^{cd} : \bar{\psi}(x_1) \psi(x_1) :: \bar{\psi}(x_2) \psi(x_2) : A^\mu(x_1) A^\nu(x_2) \\
&= \left[: \bar{\psi}(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \psi(x_2) : -i : \bar{\psi}_a(x_1) \gamma_\mu^{ab} S_{bc}^{(+)}(x_1 - x_2) \gamma_\nu^{cd} \psi_d(x_1) : \right. \\
&\quad \left. - i : \bar{\psi}_c(x_2) \gamma_\nu^{cd} (-i) S_{da}^{(+)}(x_2 - x_1) \gamma_\mu^{ab} \psi_b(x_1) : - S_{bc}^{(+)}(x_1 - x_2) S_{da}^{(-)}(x_2 - x_1) \right] \times \\
&\quad \left[: A^\mu(x_1) A^\nu(x_2) : + g^{\mu\nu} i D^{(-)}(x_1 - x_2) \right] \tag{A.22}
\end{aligned}$$

Essa expressão consegue proporcionar a polarização do vácuo, auto-energia do elétron, bolhas no vácuo e gráficos á *tree-level*. Na notação usada até agora, isso pode parecer confuso até certo momento, mas com um pouco de atenção, estamos fazendo a mesma operação executada na eq. (A.19).

Um elementos qualquer da matriz- S , agora, é escrito

$$S_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = i^n T(\mathcal{L}(x_1) \mathcal{L}(x_2) \dots \mathcal{L}(x_n)) \tag{A.23}$$

Utilizamos a Lagrangiana de interação ao invés da Hamiltoniana de interação, já que as duas são intercambiáveis. Mesmo que o assunto principal residiu apenas em sistemas interagentes. O teorema de Wick possui uma importante aplicação na regularização de divergência em teoria livres. Um ponto de partida seria a Hamiltonian livre do eletromagnetismo, largamente conhecida nos textos padrões por

$$H = \sum_n (a^\dagger a + \frac{1}{2}) = \sum_n \frac{1}{2} (a^\dagger a + a a^\dagger) \tag{A.24}$$

A divergência infravermelha e ultravioleta são eliminadas através de um ordenamento normal dos operadores criação e aniquilação

$$: H := \frac{1}{2} (a^\dagger a + a a^\dagger) := a^\dagger a \tag{A.25}$$

Podemos entender o ordenamento normal como uma deformação ou redefinição do estado fundamental de tal forma a retirar a divergência ultravioleta

Apêndice B

Green-Kubo

Uma das principais abordagens utilizadas nessa tese para o cálculo das correções radiativas é o teorema de dissipação-flutuação, ou mais conhecido como relação de Green-Kubo. Explicaremos algumas de suas idéias básicas, sem fugir do escopo dessa tese, e para maiores informações ver [Ticciati \[1999\]](#).

Um dos pontos chaves no estudo dos fenômenos físicos é entender como uma teoria se deforma na presença de uma fonte. Essa tarefa árdua, e muitas vezes impossível numericamente, ganha sentido quando admitimos que a perturbação da fonte é pequena. Ou seja, numa linguagem matemática, dizemos que a variação do valor esperado de um operador Hermitiano é proporcional a fonte

$$\delta\langle O(t) \rangle = \int dt' \chi_{ij}(t, t') \phi_j(t') \quad (\text{B.1})$$

Onde $\delta\langle O(t) \rangle$ é o operador hermitiano, $\phi_j(t')$ é a fonte e $\chi_{ij}(t, t')$ é a função resposta ou o kernel. Algumas condições de caráter, unicamente, físico são levadas em conta no estabelecimento do teorema da resposta linear. Dentre elas está a **Invariância Translacional**: O sinal de entrada $\delta\langle O(t) \rangle$ e saída $\phi_j(t')$ possuem uma relação local no espaço de Fourier, ou seja

$$\delta\langle O(t + \Delta t) \rangle = \int \chi_{ij}(t, t') \phi_j(t' + \Delta t') dt' \quad (\text{B.2})$$

logo, o Kernel é invariante quanto a translação. **Causalidade**: Essa hipótese física implica que o kernel deve ser uma função de green retardada

$$\chi_{ij}(\tau) = 0, \quad \text{se } \tau < 0 \quad (\text{B.3})$$

onde $\tau = t - t'$. Se quisermos que a relação acima seja satisfeita e levando em conta o teorema dos resíduos, a parte superior do plano complexo não pode ter pólos, ou seja, $\chi(\omega)$ é analítico para $\omega > 0$. **Linearidade**: O sinal de saída é proporcional a fonte no espaço de Fourier

$$\langle O(\omega) \rangle = \chi_{ij}(\omega) \phi_j(\omega) \quad (\text{B.4})$$

ou é um funcional linear do sinal de entrada no espaço de configuração na eq. [\(B.1\)](#). A transformada de Fourier e a transformada inversa do Kernel são

$$\chi_{ij}(\omega) = \int d\tau e^{i\omega\tau} \chi_{ij}(\tau) \quad \chi_{ij}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{i\omega\tau} \chi_{ij}(\omega) \quad (\text{B.5})$$

Transformação de Hilbert

A fim de calcular as correções quânticas, é interessante introduzir um importante esquema na análise das relações de dispersão. Antes disso, iremos definir a fórmula integral de Cauchy por

$$\chi(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\omega' \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} \quad (\text{B.6})$$

onde $\chi(\omega')$ é uma função analítica dentro e sobre a curva fechada C e a integração realizada no sentido anti-horário. Uma outra identidade útil é

$$\chi'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\omega' \frac{\chi(\omega')}{(\omega' - z)^2} \quad (\text{B.7})$$

e pode ser obtida por uma simples derivação em relação a z na eq. (B.6), por uma dedução mais rigorosa ver Churchill [1948]. É importante manter em mente que a analiticidade é um ponto relevante a ser considerado nas transformações de Hilbert e gera uma relação unívoca (mapa unitário) entre a parte real e imaginária da função complexa considerada. Separando a integração realizada em (B.6) na soma do eixo real mais a curva C , temos

$$\chi(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^{+R} d\omega' \frac{\chi(\omega')}{\omega' - (z + i\epsilon)} + \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\omega' \frac{\chi(\omega')}{\omega' - (z + i\epsilon)} \quad (\text{B.8})$$

É conveniente escrever ($z \rightarrow z + i$) e que tal preocupação estabelece o fato da causalidade implicar um domínio de analiticidade de $\chi(\omega')$. O teorema de Cauchy $R \rightarrow \infty$ mais a identidade (7.23) conduz á

$$\chi_{ij}(\omega) = \frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \int d\omega' \frac{Im\chi_{ij}(\omega')}{\omega' - \omega} \quad (\text{B.9})$$

Devido a analiticidade $f = Re f + Im f$, as transformações de Hilbert

$$Re\chi_{ij}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int d\omega' \frac{Im\chi_{ij}(\omega')}{\omega' - \omega} \quad Im\chi_{ij}(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int d\omega' \frac{Re\chi_{ij}(\omega')}{\omega' - \omega} \quad (\text{B.10})$$

As relações são não-locais no espaço da frequência, em outras palavras, se quisermos reconstruir á $Im\chi$ para uma dada frequência é necessário saber o valor de todas as frequências de $Re\chi$ Menon and Barbosa.

Cauchy Principal Value

Agora e de maneira simplificada, abordaremos um importante teorema utilizado para calcular o valor de integrais impróprias. Embora esteja definido amplamente na literatura, priorizaremos destacar as sutilezas na sua aplicação. O valor principal de Cauchy será definido pelo símbolo \mathcal{P} e a grosso modo representa uma maneira de evitar as singularidades no caminho de integração por uma distância infinitesimal

$$\mathcal{P} \int_a^b dx f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{a+\epsilon}^b dx f(x) + \int_a^{b-\epsilon} dx f(x) \right] \quad (\text{B.11})$$

onde $f(x)$ pode ser uma função complexa. Se a integral é convergente, o seu valor principal também será convergente. Mesmo sendo um poderoso método de integração,

algumas precauções devem ser tomadas. Entre elas, os limites utilizados para contornar a singularidade devem ser o mesmo, caso contrário, teremos

$$\begin{aligned} \int dx \frac{1}{x} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{2\epsilon}^a dx \frac{1}{x} - \int_{-a}^{-\epsilon} dx \frac{1}{x} \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\ln \epsilon - \ln a + \ln a - \ln 2\epsilon \right) \\ &= -\ln 2 \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Se os limites fossem os mesmos, o resultado final da integral seria zero. Logo, o resultado nesse exemplo é atrelado a taxa de convergência dos limites. Como os intervalos tem comprimento diferente, a taxa de aproximação em torno da singularidade $x = 0$ é diferente. Caso, usássemos limites iguais, encontraríamos

$$\int_{-a}^a dx \frac{1}{x} = 0 \quad (\text{B.13})$$

o que realmente está acontecendo pode ser resumido de maneira qualitativa como a subtração das partes infinitas de cada uma das integrais na equação acima. Essa idéia que foi apresentada em integrais no eixo Real, também pode ser estendida ao eixo Complexo.

A conveniência dessa técnica de integração deve ser usada com cuidado, por exemplo, ao olhar a aplicação do teorema

$$\int_{-2}^1 dx \frac{4x + 10}{(5x + x^2)^3} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\epsilon}^1 dx \frac{4x + 10}{(5x + x^2)^3} + \int_{-2}^{-\epsilon} dx \frac{4x + 10}{(5x + x^2)^3} \right] \quad (\text{B.14})$$

onde as singularidades são $x = 0$ e $x = 5$. Pelo teorema fundamental do cálculo, a integral acima fornece um valor infinito. No entanto, se fizermos $u = 5x + x^2$ a integral fica

$$\int_{-6}^6 du \frac{2}{u^3} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\epsilon}^6 du \frac{2}{u^3} + \int_{-6}^{-\epsilon} du \frac{2}{u^3} \right] = 0 \quad (\text{B.15})$$

O espírito de usar o Valor Principal está em considerar intervalos simétricos em torno das singularidades (B.13), por isso deve se tomar uma precaução para não utilizar de maneira leviana os métodos de substituição e obter, assim, um intervalo antisimétrico nas singularidade, a exemplo da eq. (B.12).

Caso a diferença de aproximação em torno da singularidade fosse diferente, ou seja, a taxa de aproximação pelo limite da direita é reduzido pela metade em relação ao do limite da esquerda, teríamos

$$\int_{-2}^1 dx \frac{4x + 10}{(5x + x^2)^3} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\epsilon}^1 dx \frac{4x + 10}{(5x + x^2)^3} + \int_{-2}^{-2\epsilon} dx \frac{4x + 10}{(5x + x^2)^3} \right] = \infty \quad (\text{B.16})$$

Identidade de Dirac

A fim de elucidar o resultado na eq. (7.10), vamos seguir com um caso geral onde uma função, $F(x)$, regular na origem é calculada

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{F(x)}{x \mp i\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x) \frac{x}{x^2 \mp \epsilon^2} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \pm i \int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x) \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} \quad (\text{B.17})$$

O penúltimo termo da equação acima é o valor principal. Pela identidade abaixo

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\epsilon}{(x^2 + \epsilon^2)} = \pi \quad (\text{B.18})$$

A última integral da eq. (B.17) é nula em $\epsilon \rightarrow 0^+$ para todo exceto em $x = 0$. Então a distribuição da delta de Dirac pode ser definida como

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{F(x)\epsilon}{(x^2 + \epsilon^2)} = \pi \int_{-\infty}^{\infty} dx F(x)\delta(x) \quad (\text{B.19})$$

Finalmente, o resultado da eq. (B.17) é

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{F(x)}{x \mp i\epsilon} = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{x^2}{x^2 + \epsilon^2} \pm i \int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x)\delta(x) \quad (\text{B.20})$$

A seguir, algumas das diversas propriedades da função de distribuição. A função de heaviside ou função degrau

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

A função sinal

$$\epsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x > 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

A distribuição de heaviside e a função sinal podem se comunicar pelas seguintes relações

$$\Theta(x) = 1/2(1 + \epsilon(x)), \quad \epsilon(x) = \Theta(x) - \Theta(-x) \quad (\text{B.21})$$

Apêndice C

Matrizes de Dirac

Antes de enunciarmos a álgebra das matrizes de Dirac, é útil termos em mente algumas relações úteis das propriedades dos traços das matrizes (A , B e C) com dimensão n .

$$\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B), \quad (\text{C.1})$$

$$\text{tr}(rA) = r\text{tr}(A), \quad (\text{C.2})$$

$$\text{tr}(ABC) = \text{tr}(CAB) = \text{tr}(BCA) \quad (\text{C.3})$$

Sendo r uma constante complexa.

C.1 Matrizes de Dirac em 3 + 1 dimensões

Dentre as inúmeras definições das matrizes gamma por meio das matrizes de Pauli, utilizaremos aquela correspondente à métrica usada nesta tese. Assim essas matrizes são definidas como

$$\gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_k \\ i\sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.4})$$

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}$$

em que \mathbb{I} é a matriz identidade. As matrizes de Pauli são

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.5})$$

que satisfaz a seguinte relação de comutação

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} \quad (\text{C.6})$$

conhecida como álgebra de Clifford que é independente da representação das matrizes gamma. Como complemento, algumas relações originadas da aplicação contínua da eq. (C.6) conduzem aos resultados

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = 4\mathbb{I}_4, \quad (\text{C.7})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu, \quad (\text{C.8})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4g^{\nu\rho} \mathbb{I}_4 \quad (\text{C.9})$$

As identidades do Traço das matrizes gamma a partir de (C.4) e (C.5) e sucessivas aplicações da eq. (C.6), levam a

$$\text{tr}(\gamma^\mu) = 0, \quad (\text{C.10})$$

$$\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}, \quad (\text{C.11})$$

$$\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \quad (\text{C.12})$$

Com $\text{Tr}[\mathbb{I}] = 4$.

C.2 Matrizes de Dirac em 2 + 1 dimensões

A eletrodinâmica quântica em 3 dimensões discutida no capítulo (5) possui uma álgebra diferente em relação a QED_4 . A representação de $SU(2)$ fornece a estrutura algébrica das matrizes gamma γ^μ em 3 dimensões.

$$\gamma^0 = \sigma^3, \quad \gamma^1 = i\sigma^1, \quad \gamma^2 = i\sigma^2 \quad (\text{C.13})$$

As matrizes de Pauli não sofrem modificações e são as mesmas da eq. (C.5). A álgebra das matrizes de Dirac possuem a forma $[\gamma_\mu, \gamma_\nu] = -2i\epsilon_{\mu\nu\lambda} g^{\lambda\rho} k_\rho$ e $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}$. Como pode-se observa que a soma $[\gamma_\mu, \gamma_\nu] + \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\}$ resulta em

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = \delta^{\mu\nu} - i\epsilon^{\mu\nu\alpha} \gamma_\alpha \quad (\text{C.14})$$

sendo o pseudo-tensor totalmente antissimétrico com $\epsilon^{012} = 1$ e satisfazendo $\epsilon_{\mu\nu\alpha} \epsilon^{\rho\xi\alpha} = \delta_\mu^\rho \delta_\nu^\xi - \delta_\mu^\xi \delta_\nu^\rho$ e $\epsilon^{\mu\nu\alpha} \epsilon_{\mu\nu\alpha} = 3!$. A métrica em (2 + 1) dimensões é definida como

$$g^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.15})$$

em que as seguintes identidades seguem da definição das matrizes gamma de Dirac em (C.14) e valem para qualquer base

$$\begin{aligned} \text{tr}(\gamma^\mu) &= 0, \\ \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) &= 2g^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

usando as duas identidades acima mais a relação fundamental da eq. (C.14) sucessivamente, obtemos

$$\begin{aligned} \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho) &= -i\epsilon^{\mu\nu\alpha} \text{tr}(\gamma_\alpha \gamma^\rho) = -2i\epsilon^{\mu\nu\rho} \\ \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta) &= 2g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - \epsilon_{\mu\nu\sigma} \epsilon^{\mu\nu\rho} \text{tr}(\gamma^\sigma \gamma^\rho) \\ &= 2(g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha}) \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

A mais importante modificação está no traço não nulo para o produto de três diferentes matrizes gamma. Outras identidades por meio das eqs. (C.5) e (C.14)

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = 3I_3, \quad \gamma_\mu p_\alpha \gamma^\alpha \gamma^\mu = -2p^\alpha, \quad Tr[1] = 3, \quad Tr[ip^\alpha \gamma_\alpha] = 0 \quad (C.18)$$

em que p^α é um vetor.

Apêndice D

Escalar

D.1 $GQED_4$

Neste apêndice será realizado o cálculo da integral escalar para a correção do vértice na $GQED_4$. Os métodos adotados na resolução dessas integrais são amplamente conhecido na literatura. Trataremos as etapas de cada cálculo com maior detalhe. Primeiramente, resolveremos a integral escalar (4.39) da $GQED_4$

$$\mathcal{P} \int d^4k \left(\frac{1}{k^2 + \mu^2} - \frac{1}{k^2 + m_P^2} \right) \delta^4((q-k)^2 + m^2) \delta^4((q'-k)^2 + m^2) \times [1 - \epsilon(q'-k)\epsilon(q-k)] \quad (\text{D.1})$$

A inteira discussão das correções radiativas a là Källén do operador corrente gira em torno do fato de calcularmos o valor principal nas integrais. Realizando a substituição usual $Q = q' - q$ e $q - k = k'$, obtemos

$$\begin{aligned} & \mathcal{P} \int d^4k \left(\frac{1}{(q-k')^2 + \mu^2} - \frac{1}{(q-k')^2 + m_P^2} \right) \delta^4(k'^2 + m^2) \delta^4((Q+k')^2 + m^2) \\ & \times [1 - \epsilon(k')\epsilon(Q+k')] \\ & \mathcal{P} \int d^4k \left(\frac{m_P^2 - \mu^2}{((q-k')^2 + \mu^2)((q-k')^2 + m_P^2)} \right) \delta^4(k'^2 + m^2) \delta^4((Q+k')^2 + m^2) \\ & [1 - \epsilon(k')\epsilon(Q+k')] \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

A relação de funções singulares da integral (D.16) pode ser simplificada como

$$\begin{aligned} \delta^4(k^2 + m^2) \delta^4((Q+k)^2 + m^2) [1 - \epsilon(k)\epsilon(Q+k)] &= \frac{1}{|2E_k||2Q_o|} \left(\delta^4(k_o - E_k) \delta^4(Q_o/2 + k_o) \right. \\ & \left. + \delta^4(k_o + E_k) \delta^4(Q_o/2 - k_o) \right) \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

podemos substituir na integral (D.2) o integrando $d^4\mathbf{k}$ decomposto em $\mathbf{k}^2 d\mathbf{k} d\theta$, além de extrair da relação relativística da energia $E_k^2 = \mathbf{k}^2 + m^2$ a equação $E_k dE_k = \mathbf{k} d\mathbf{k}$. Obtemos

$$\frac{(\sqrt{1 - \frac{4m^2}{Q_o^2}} \frac{\pi}{2}) \mathcal{P} \int_{-1}^1 d\cos(\theta) \frac{m_P^2 - \mu^2}{(q^2 + q_o Q_o - \mathbf{q}|Q_o| \sqrt{1 - \frac{4m^2}{Q_o^2}} \cos(\theta) - m^2 + \mu^2)} \times}{1} \times \frac{1}{(q^2 + q_o Q_o - \mathbf{q}|Q_o| \sqrt{1 - \frac{4m^2}{Q_o^2}} \cos(\theta) - m^2 + m_P^2)} \quad (\text{D.4})$$

Antes de prosseguirmos, é importante destacar que estamos escolhendo um referencial particular para a nossa resolução. Por motivos de generalização do resultado e invariância de Lorentz, passaremos a integral acima para um referencial qualquer. Pelas transformações de Lorentz a seguir

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'_{\parallel} &= (\mathbf{P}_{\parallel} - \mathbf{v}P_o)\gamma \\ P'_o &= (P_o - \mathbf{P}_{\parallel} \cdot \mathbf{v})\gamma \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Para o nosso exemplo, $\vec{P} = 0$ e $\mathbf{P}'_{\perp} = \mathbf{P}_{\perp}$. Logo

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'_{\parallel} &= (-\mathbf{v}P_o)\gamma \\ P'_o &= (P_o)\gamma \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

em que $\gamma = (\sqrt{1 - \mathbf{v}^2})^{-1}$ e a velocidade é dada pelo referencial em movimento $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{P}'_{\perp}}{P'_o}$. A situação é claramente simples de se resolver e permite determinar as expressões covariantes do nosso interesse. Começaremos pela transformação inversa de Lorentz

$$\begin{aligned} p_o &= (p'_o + \mathbf{p}' \cdot \mathbf{v})\gamma \\ \mathbf{p}_{\parallel} &= (\mathbf{p}'_{\parallel} + p'_o \mathbf{v})\gamma \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

em que temos $\mathbf{p}_{\perp} = \mathbf{p}'_{\perp}$ e $\mathbf{p}_{\parallel} = \frac{\mathbf{p}' \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v}^2} \mathbf{v}$. Então o problema a ser considerado será transformar a parte espacial do momento do referencial em repouso para um referencial qualquer.

$$\begin{aligned} (\mathbf{p})^2 &= (\mathbf{p}_{\parallel})^2 + (\mathbf{p}_{\perp})^2 \\ &= \left(\frac{\mathbf{p}' \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v}^2} + \mathbf{v}p'_o\right)^2 + (\mathbf{p}' - \frac{\mathbf{p}' \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v}^2} \mathbf{v})^2 \gamma^2 \\ &= \mathbf{p}'^2 + \frac{(\mathbf{p}' \cdot \mathbf{v})^2}{\mathbf{v}^2} - 2 \frac{\mathbf{p}' \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v}^2} \mathbf{p}' \cdot \mathbf{v} + \gamma^2 \left((p'_o)^2 \mathbf{v}^2 + 2p'_o (\mathbf{p}' \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{p}' \cdot \mathbf{v})^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

ao substituir pela velocidade, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^2 &= \mathbf{p}'^2 - \frac{(\mathbf{p}' \cdot \mathbf{P}')^2}{\mathbf{P}'^2} + \left[p_o'^2 \mathbf{P}'^2 - p_o' (\mathbf{p}' \cdot \mathbf{P}') - 2p_o' P_o' (\mathbf{p}' \cdot \mathbf{P}') + \frac{(\mathbf{p}' \cdot \mathbf{P}')}{\mathbf{P}'^2} P_o'^2 \right] \\ \mathbf{p}'^2 P'^2 &= \mathbf{p}'^2 P'^2 + (\mathbf{p}' \cdot \mathbf{P}')^2 + p_o'^2 \mathbf{P}'^2 - 2p_o' P_o' (\mathbf{p}' \cdot \mathbf{P}') - (p_o' P_o')^2 + (p_o' P_o')^2 \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Nesta última expressão adicionamos e subtraímos $(p_o' P_o')^2$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{p}'^2 P'^2 &= (P \cdot p)^2 - (p_o' P_o')^2 + p_o'^2 (\mathbf{P}')^2 - \mathbf{p}^2 P'^2 \\ \mathbf{p}' P' &= \sqrt{(P' \cdot p)^2 - P'^2 p^2} \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

Assim, a integral (D.4) fica igual à

$$\left(\sqrt{1 - \frac{4m^2}{Q_o^2}} \frac{\pi}{2}\right) \mathcal{P} \int_{-1}^1 d\cos(\theta) \frac{m_P^2 - \mu^2}{(q' \cdot q - m^2 - \sqrt{(q' \cdot q)^2 - q^2 q'^2} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{Q^2} \cos(\theta)})} \frac{1}{(q' \cdot q - m^2 + m_P^2 - \sqrt{(q' \cdot q)^2 - q^2 q'^2} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{Q^2} \cos(\theta)})} \quad (\text{D.11})$$

A integração fica facilmente resolvida pela relação

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(a - bx)(a' - bx)} = \frac{1}{b(m_P^2 - \mu^2)} \ln \left(\frac{(a - b + m_P^2)(a + b + \mu^2)}{(a + b + m_P^2)(a - b + \mu^2)} \right) \quad (\text{D.12})$$

com $a = q' \cdot q - m^2 + \mu^2$ e $a' = q' \cdot q - m^2 + m_P^2$. Caso não existisse essa massa extra μ^2 , a integral acima divergiria, pois $a = b$. Neste momento usaremos as identidades

$$\begin{aligned} ((q' \cdot q) - q'^2) &= \frac{Q^2}{2}, \quad ((q' \cdot q) - q^2) = \frac{Q^2}{2} \\ (q' \cdot q)^2 - q^2 q'^2 &= \frac{1}{4} (Q^4 + 4m^2 Q^2) \\ q' \cdot q - m^2 &= \frac{1}{2} \sqrt{Q^4 + 4m^2 Q^2} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{Q^2}} = \frac{Q^2}{2} \left(1 + \frac{4m^2}{Q^2}\right) \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

O resultado final é

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \int d^4 k \left(\frac{1}{k^2 + \mu^2} - \frac{1}{k^2 + m_P^2} \right) \delta^4((q - k)^2 + m^2) \delta^4((q' - k)^2 + m^2) \times \\ [1 - \epsilon(q' - k)\epsilon(q - k)] = \frac{\pi}{-Q^2} \frac{\Theta(-Q^2 - 4m^2)}{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{Q^2}}} \left\{ \ln \left(1 - \frac{Q^2 + 4m^2}{\mu^2} \right) \right. \\ \left. - \ln \left(1 - \frac{Q^2 + 4m^2}{m_P^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

Devemos atentar ao fato que o cálculo desenvolvido nesta seção utiliza a massa extra μ^2 enquanto nas integrações padrões o denominador possui o termo $i0^+$ no propagador $\frac{1}{(q-k)^2+i0^+}$ que dispensa, assim, a inserção de μ^2 .

D.2 $GQED_3$

A integral escalar irá precisar de uma massa μ no denominador de maneira a evitar a divergência infravermelha

$$\mathcal{P} \int d^3k \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 + m_P^2} \right) \delta^3((q-k)^2 + m^2) \delta^3((q'-k)^2 + m^2) [1 - \epsilon(q'-k)\epsilon(q-k)] \quad (\text{D.15})$$

Realizando a substituição usual $Q = q' - q$ e $q - k = k'$.

$$\begin{aligned} & \mathcal{P} \int d^3k \left(\frac{1}{(q-k')^2} - \frac{1}{(q-k')^2 + m_P^2} \right) \delta^3(k'^2 + m^2) \delta^3((Q+k')^2 + m^2) \times \\ & [1 - \epsilon(k')\epsilon(Q+k')] \\ & \mathcal{P} \int d^3k \left(\frac{m_P^2}{(q-k')^2((q-k')^2 + m_P^2)} \right) \delta^3(k'^2 + m^2) \delta^3((Q+k')^2 + m^2) \times \\ & [1 - \epsilon(k')\epsilon(Q+k')] \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

com $E_k = \sqrt{|k|^2 + m^2}$. A relação de funções singulares da integral (D.16) pode ser simplificada como

$$\begin{aligned} \delta^3(k^2 + m^2) \delta^3((Q+k)^2 + m^2) [1 - \epsilon(k)\epsilon(Q+k)] &= \frac{1}{|2E_k||2Q_o|} \left(\delta^3(k_o - E_k) \times \right. \\ & \left. \delta^3(Q_o/2 + k_o) + \delta^3(k_o + E_k) \delta^3(Q_o/2 - k_o) \right) \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

podemos substituir na integral (D.16) e decompor o integrando $d^3\mathbf{k} = \mathbf{k}^2 d\mathbf{k} d\theta$, além de extrair $E_k^2 = \mathbf{k}^2 + m^2 \rightarrow E_k dE_k = \mathbf{k} d\mathbf{k}$. Obtemos

$$\begin{aligned} &= \mathcal{P} \int \frac{E_k dE_k d\theta}{|2E_k||2Q_o|} \left\{ \left(\frac{m_P^2 \delta(Q_o/2 - E_k)}{(q^2 - 2q_o E_k + 2\mathbf{k}\mathbf{q}\cos(\theta) - m^2)} \right. \right. \\ & \times \left. \frac{1}{(q^2 - 2q_o E_k + 2\mathbf{k}\mathbf{q}\cos(\theta) - m^2 + m_P^2)} - \frac{m_P^2 \delta(Q_o/2 + E_k)}{q^2 + 2q_o E_k + 2\mathbf{k}\mathbf{q}\cos(\theta) - m^2 + m_P^2} \right\} \\ &= \Theta(-Q^2 - 4m^2) \mathcal{P} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2|Q_o|} \left\{ \frac{m_P^2}{(q^2 + q_o Q_o - \mathbf{q}|Q_o| \sqrt{1 - \frac{4m^2}{Q_o^2} \cos(\theta)} - m^2)} \times \right. \\ & \left. \frac{1}{(q^2 + q_o Q_o - \mathbf{q}|Q_o| \sqrt{1 - \frac{4m^2}{Q_o^2} \cos(\theta)} - m^2 + m_P^2)} \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

admitindo a transformação para um referencial qualquer $\mathbf{q}|Q_o| \rightarrow \sqrt{(Q \cdot q)^2 - Q^2 q^2}$, obtemos

$$\begin{aligned}
&= \Theta(-Q^2 - 4m^2) \frac{\Theta(Q_o)}{2\sqrt{-Q^2}} \mathcal{P} \int_0^{2\pi} d\theta \left\{ \frac{m_P^2}{(q' \cdot q - m^2 - \sqrt{(q' \cdot q)^2 - q^2 q'^2} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{Q^2} \cos(\theta)})} \right. \\
&\times \left. \frac{1}{(q' \cdot q - m^2 + m_P^2 - \sqrt{(q' \cdot q)^2 - q^2 q'^2} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{Q^2} \cos(\theta)})} \right\}
\end{aligned} \tag{D.19}$$

Usando cálculos elementares de integração é fácil notar que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{a - b \cos \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \tag{D.20}$$

Usando as identidades das equações [\(D.13\)](#), e substituindo na resposta acima, temos

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P} \int d^3k \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 + m_P^2} \right) \delta^3((q - k)^2 + m^2) \delta^3((q' - k)^2 + m^2) [1 - \epsilon(q' - k)\epsilon(q - k)] \\
&= \frac{\pi \Theta(-Q^2 - 4m^2) \Theta(Q_o)}{\sqrt{-Q^2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\mu^4 + \mu^2 Q^2 (1 + \frac{4m^2}{Q^2})}} - \frac{1}{\sqrt{m_P^4 + m_P^2 Q^2 (1 + \frac{4m^2}{Q^2})}} \right\}
\end{aligned} \tag{D.21}$$

Apêndice E

Vetorial

E.1 $GQED_4$

Daremos um outro passo na resolução da integral (5.63). Verificaremos o caso vetorial da integral

$$\int d^4k \left(\mathcal{P} \frac{1}{k^2} - \mathcal{P} \frac{1}{k^2 + m_P^2} \right) k_\mu \delta^4((q-k)^2 + m^2) \delta^4((q'-k)^2 + m^2) [1 - \epsilon(q'-k)\epsilon(q-k)] \quad (\text{E.1})$$

Antes de iniciarmos o tratamento, devemos realizar uma transformação para lidar com a parte vetorial

$$\frac{k_\mu}{k^2} \rightarrow \frac{1}{2} \partial_k \ln(k^2), \quad \frac{k_\mu}{k^2 + m_P^2} \rightarrow \frac{1}{2} \partial_k \ln(k^2 + m_P^2) \quad (\text{E.2})$$

Inserindo a transformação (E.2) na integral (E.16), obtemos

$$\begin{aligned} & \mathcal{P} \int d^4k \frac{1}{2} (\partial_k \ln(k^2) - \partial_k \ln(k^2 + m_P^2)) \delta^4((q-k)^2 + m^2) \delta^4((q'-k)^2 + m^2) \\ & \times [1 - \epsilon(q'-k)\epsilon(q-k)] \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

para estudar esta questão mais sistematicamente, realizamos uma integração por partes e assumimos que a derivada total desaparece no infinito. Além disso, se lembrarmos que $\delta(q-k) \sim e^{ix(q-k)}$, temos a relação $\partial_k f(q-k) = -\partial_q f(q-k)$. Logo, temos

$$\begin{aligned} & \frac{(\partial_q + \partial'_q)}{2} \mathcal{P} \int d^4k \left(\ln(k^2) - \ln(k^2 + m_P^2) \right) \delta^4((q-k)^2 + m^2) \delta^4((q'-k)^2 + m^2) \\ & \times [1 - \epsilon(q'-k)\epsilon(q-k)] \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Como uma simples substituição de $q-k = k'$ e $Q = q' - q$, podemos escrever a integral acima igual à

$$\begin{aligned} & \frac{(\partial_q + \partial'_q)}{2} \mathcal{P} \int d^4k' \left(\ln((q-k')^2) - \ln((q-k')^2 + m_P^2) \right) \delta^4(k'^2 + m^2) \times \\ & \delta^4((Q+k')^2 + m^2) [1 - \epsilon(k')\epsilon(Q+k')] \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Por uma questão de simplificação na notação a variável k' será substituída pela variável k , desta forma

$$\begin{aligned} & \frac{(\partial_q + \partial'_q)}{2} \mathcal{P} \int d^4k \left(\ln((q-k)^2) - \ln((q-k)^2 + m_P^2) \right) \delta^4(k^2 + m^2) \delta^4((Q+k)^2 + m^2) \\ & \times [1 - \epsilon(k')\epsilon(Q+k')] \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Uma particular escolha na redefinições das variáveis de integração, obtemos $E_k^2 = \mathbf{k}^2 + m^2 \rightarrow E_k dE_k = \mathbf{k} d\mathbf{k}$ e o integrando da integral acima é agora $d^4\mathbf{k} = \sqrt{E_k^2 + m^2} E_k dE_k \times d(\cos(\theta)) d\phi = \sqrt{E_k^2 + m^2} E_k dE_k d(\cos(\theta)) 2\pi$ e $\mathbf{k} = \sqrt{\frac{Q_o^2}{4} - m^2}$. Bastando notar que estas substituições ajudarão na resolução da integral

$$\begin{aligned} & = -\frac{(\partial_q + \partial'_q)}{2} \mathcal{P} \int \frac{\sqrt{E_k^2 + m^2} dE_k d(\cos(\theta)) 2\pi}{2|2Q_o|} \left\{ \left(\ln((q^2 - 2q_o E_k - 2\mathbf{k}\mathbf{q}\cos(\theta) - m^2) \right. \right. \\ & \times \delta(Q_o/2 - 2E_k)) + \ln((q^2 + 2q_o E_k - 2\mathbf{k}\mathbf{q}\cos(\theta) - m^2) \delta(Q_o/2 + E_k)) \left. \right) - \\ & \left(\ln(q^2 - 2q_o E_k - 2\mathbf{k}\mathbf{q}\cos(\theta) - m^2 + m_P^2) \delta(Q_o/2 - 2E_k) + \ln(q^2 + 2q_o E_k - \right. \\ & \left. \left. 2\mathbf{k}\mathbf{q}\cos(\theta) - m^2 + m_P^2) \delta(Q_o/2 + E_k) \right) \right\} \\ & = -\pi \frac{(\partial_q + \partial'_q)}{4} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{Q_o^2}} \mathcal{P} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \left\{ \ln(q^2 - q_o Q_o - 2\sqrt{\frac{Q_o^2}{4} - m^2} \mathbf{q}\cos(\theta) - m^2) \right. \\ & \left. - \ln(q^2 - q_o Q_o - 2\sqrt{\frac{Q_o^2}{4} - m^2 + m_P^2} \mathbf{q}\cos(\theta) - m^2 + m_P^2) \right\} \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

para facilitar a resolução da integral, faremos uma simplificação dada por

$$a = q^2 - q_o Q_o - m^2, \quad a' = q^2 - q_o Q_o - m^2 + m_P^2, \quad b = 2\mathbf{q}\sqrt{\frac{Q_o^2}{4} - m^2}. \quad (\text{E.8})$$

O próximo passo é a resolução propriamente dita da integral. Usando os calculos elementares de integração é fácil observar que

$$\begin{aligned} L & = \int_{-1}^1 dx \left(\ln(a - bx) - \ln(a' - bx) \right) = \frac{1}{b} \left[a \left(\ln\left(\frac{a+b}{a-b}\right) - \ln\left(\frac{a'+b}{a'-b}\right) \right) \right. \\ & \left. + b \left(\ln(a^2 - b^2) - \ln(a'^2 - b^2) \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

Realizaremos uma simples derivação na equação (E.9) em que será usado $\partial = \frac{1}{2}(\partial'_q + \partial_q)$, disso decorre

$$\partial L = -\frac{b\partial a}{b^2} \ln\left(\frac{a+b}{a-b}\right) + \frac{a\partial b}{b^2} \ln\left(\frac{a+b}{a-b}\right) - \frac{b\partial a'}{b^2} \ln\left(\frac{a'+b}{a'-b}\right) - \frac{a'\partial b}{b^2} \ln\left(\frac{a'+b}{a'-b}\right) \quad (\text{E.10})$$

Usaremos o mesmo raciocínio pragmático no apêndice [\(D\)](#) em que as transformações de Lorentz levarão a integral [\(E.7\)](#) a um referencial qualquer. Após isso, usaremos as variáveis abaixo

$$a = q' \cdot q - m^2, \quad a' = q' \cdot q - m^2 + m_P^2, \quad b = \sqrt{(q' \cdot q)^2 - q'^2 q^2} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{Q^2}} \quad (\text{E.11})$$

substituindo a equação acima na integral [\(E.7\)](#), obtemos

$$\begin{aligned} &= -\frac{\pi}{4} \frac{q^\mu((q' \cdot q) - q'^2) + q'^\mu((q' \cdot q) - q^2)}{(q' \cdot q)^2 - q'^2 q^2} \frac{\Theta(-Q^2 - 4m^2)}{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{Q^2}}} \left\{ \frac{1}{((q' \cdot q)^2 - q'^2 q^2)^{3/2}} \times \right. \\ &\left. \left[(q' \cdot q - m^2 + m_P^2)(q'^\mu(q' \cdot q - q^2) + q^\mu(q' \cdot q - q'^2)) - ((q' \cdot q)^2 - q'^2 q^2)(q'^\mu + q^\mu) \right] \right. \\ &\left. \ln\left(1 - \frac{Q^2 + 4m^2}{m_P^2}\right) + 2 \frac{q^\mu((q' \cdot q) - q'^2) + q'^\mu((q' \cdot q) - q^2)}{(q' \cdot q)^2 - q'^2 q^2} \right\} \quad (\text{E.12}) \end{aligned}$$

Ao usar as identidades na equação [\(D.13\)](#), obtemos

$$\begin{aligned} &\int d^4 k \left(\mathcal{P} \frac{1}{k^2} - \mathcal{P} \frac{1}{k^2 + m_P^2} \right) k_\mu \delta^4((q - k)^2 + m^2) \delta^4((q' - k)^2 + m^2) \times \\ &[1 - \epsilon(q' - k)\epsilon(q - k)] = \frac{\pi \Theta(-Q^2 - 4m^2)}{-Q^2(1 + \frac{4m^2}{Q^2})^{3/2}} \left[\frac{m_P^2}{Q^2} (q'^\mu + q^\mu) \right] \ln\left(1 - \frac{Q^2 + 4m^2}{m_P^2}\right) \quad (\text{E.13}) \end{aligned}$$

E.2 $GQED_3$

Verificaremos o caso vetorial da integral (5.65). A sua resolução será análoga a integral vetorial da $GQED_4$. Por isso, muitos passos serão omitidos com o propósito de não tornar a seção desnecessariamente longa

$$\int d^3k \left(\mathcal{P} \frac{1}{k^2} - \mathcal{P} \frac{1}{k^2 + m_P^2} \right) k_\mu \delta^3((q-k)^2 + m^2) \delta^3((q'-k)^2 + m^2) \times [1 - \epsilon(q'-k)\epsilon(q-k)] \quad (\text{E.14})$$

Antes de iniciarmos o tratamento na resolução da integral, devemos realizar uma transformação para lidar com a parte vetorial.

$$\frac{k_\mu}{k^2} \rightarrow \frac{1}{2} \partial_k \ln(k^2), \quad \frac{k_\mu}{k^2 + m_P^2} \rightarrow \frac{1}{2} \partial_k \ln(k^2 + m_P^2) \quad (\text{E.15})$$

Inserindo na integral (E.16), leva a uma expressão

$$\mathcal{P} \int d^3k \frac{1}{2} (\partial_k \ln(k^2) - \partial_k \ln(k^2 + m_P^2)) \delta^3((q-k)^2 + m^2) \delta^3((q'-k)^2 + m^2) \times [1 - \epsilon(q'-k)\epsilon(q-k)] \quad (\text{E.16})$$

realizamos uma integração por partes e assumimos que a derivada total desaparece no infinito. Além disso, ao lembrar que $\delta(q-k) \sim e^{ix(q-k)}$, temos a seguinte igualdade $\partial_k f(q-k) = -\partial_q f(q-k)$. Logo, temos

$$\frac{(\partial_q + \partial'_q)}{2} \mathcal{P} \int d^3k \left(\ln(k^2) - \ln(k^2 + m_P^2) \right) \delta^3((q-k)^2 + m^2) \delta^3((q'-k)^2 + m^2) \times [1 - \epsilon(q'-k)\epsilon(q-k)] \quad (\text{E.17})$$

Com uma simples substituição de $q-k = k'$ e $Q = q' - q$, podemos escrever a integral acima como

$$\frac{(\partial_q + \partial'_q)}{2} \mathcal{P} \int d^3k' \left(\ln((q-k')^2) - \ln((q-k')^2 + m_P^2) \right) \delta^3((k')^2 + m^2) \times \delta^3((Q+k')^2 + m^2) [1 - \epsilon(k')\epsilon(Q+k')] \quad (\text{E.18})$$

Por uma questão de simplificação na notação, a variável k' será substituída pela variável k , desta forma

$$\frac{(\partial_q + \partial'_q)}{2} \mathcal{P} \int d^3k \left(\ln((q-k)^2) - \ln((q-k)^2 + m_P^2) \right) \delta^3((k)^2 + m^2) \times \delta^3((Q+k)^2 + m^2) [1 - \epsilon(k)\epsilon(Q+k)] \quad (\text{E.19})$$

em que utilizamos a seguinte igualdade entre as distribuições $\epsilon(k) = \Theta(k) - \Theta(-k)$. Ao reescrever (D.17) em (E.17), temos

$$\frac{(\partial_q + \partial'_q)}{2} \mathcal{P} \int d^2 \mathbf{k} \frac{1}{|2E_k| |2Q_o|} \left(\ln((q^2 - 2q_o E_k - 2\mathbf{kq} \cos(\theta) - m^2) \delta^3(Q_o/2 - E_k) + \right. \\ \left. \ln((q^2 + 2q_o E_k - 2\mathbf{kq} \cos(\theta) - m^2) \delta^3(Q_o/2 + E_k)) \right) \quad (\text{E.20})$$

em que $d^2 \mathbf{k} = \mathbf{k} d\theta d\mathbf{k}$. Uma particular escolha na redefinição das variáveis leva $E_k^2 = \mathbf{k}^2 + m^2 \rightarrow E_k dE_k = \mathbf{k} d\mathbf{k}$. Com estas substituições, a integral acima é igual à

$$\frac{(\partial_q + \partial'_q)}{2} \frac{\Theta(-Q^2 - 4m^2)}{2Q_o} \mathcal{P} \int d\theta \left[\ln\left(q^2 - 2q_o E_k - 2\mathbf{kq} \cos(\theta) - m^2\right) - \right. \\ \left. \ln\left(q^2 - 2q_o E_k - 2\mathbf{kq} \cos(\theta) - m^2 + m_P^2\right) \right] \quad (\text{E.21})$$

transformando a integral do referencial local para um sistema de referencial qualquer

$$\frac{(\partial_q + \partial'_q)}{2} \frac{\Theta(-Q^2 - 4m^2)}{2Q_o} \mathcal{P} \int d\theta \left[\ln\left(q' \cdot q - m^2 - \sqrt{1 + \frac{4m^2}{Q^2}} \sqrt{(q' \cdot q)^2 - q^2 q'^2} \cos(\theta)\right) \right. \\ \left. - \ln\left(q' \cdot q - m^2 + m_P^2 - \sqrt{1 + \frac{4m^2}{Q^2}} \sqrt{(q' \cdot q)^2 - q^2 q'^2} \cos(\theta)\right) \right] \quad (\text{E.22})$$

A integral se resolve por cálculos elementares

$$\int_0^{2\pi} d\theta \ln\left(a - b \cos(x)\right) = \frac{2\pi}{b} \ln\left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2}\right) \quad (\text{E.23})$$

Usando as operações elementares do cálculo diferencial e integral em que a soma das integrais é a integral da soma e a derivada da soma é a soma das derivadas. Após alguns cálculos elementares, obtemos

$$\int d^3 k \left(\mathcal{P} \frac{1}{k^2} - \mathcal{P} \frac{1}{k^2 + m_P^2} \right) k_\mu \delta^3((q - k)^2 + m^2) \delta^3((q' - k)^2 + m^2) \\ \times [1 - \epsilon(q' - k) \epsilon(q - k)] = \frac{\pi \Theta(Q_o)}{\sqrt{-Q^2}} \frac{\Theta(-Q^2 - 4m^2)}{Q^2 (1 + \frac{4m^2}{Q^2})} \left[\frac{(q'^\mu + q^\mu) m_P^2}{\sqrt{m_P^4 + m_P^2 Q^2 (1 + \frac{4m^2}{Q^2})}} \right] \quad (\text{E.24})$$

Alguns detalhes foram omitidos, pois os cálculos são diretos e longos.

Apêndice F

Tensorial

F.1 $GQED_4$

A seguir, calcularemos a integral tensorial da equação

$$\int d^4k k_\mu k_\nu \left(\mathcal{P} \frac{1}{k^2} - \mathcal{P} \frac{1}{k^2 + m_P^2} \right) \delta^4((q - k)^2 + m^2) \delta^4((q' - k)^2 + m^2) \times [1 - \epsilon(q' - k) - \epsilon(q - k)] \quad (\text{F.1})$$

Através de alguns cálculos elementares dos componentes tensoriais da integral acima, temos

$$\begin{aligned} \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} &\rightarrow \frac{1}{4} \left[\partial_k \partial_k (k^2 \ln(k^2) - k^2) \right] - \frac{g^{\mu\nu}}{2} \ln(k^2) \\ \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 + m_P^2} &\rightarrow \frac{1}{4} \left[\partial_k \partial_k \left((k^2 + m_P^2) \ln(k^2 + m_P^2) - (k^2 + m_P^2) \right) \right] - \frac{g^{\mu\nu}}{2} \ln(k^2 + m_P^2) \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

Assim, o passo seguinte consiste em transformar a parte tensorial $k^\mu k^\nu$ num arranjo apropriado de escalares. Através de alguns cálculos elementares temos

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \int d^4k &\left(\frac{1}{4} \left[\partial_k \partial_k (k^2 \ln(k^2) - k^2) \right] - \frac{g^{\mu\nu}}{2} \ln(k^2) - \frac{1}{4} \left[\partial_k \partial_k \left((k^2 + m_P^2) \ln(k^2 + m_P^2) - \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. (k^2 + m_P^2) \right) \right] - \frac{g^{\mu\nu}}{2} \ln(k^2 + m_P^2) \right) \delta^4((q - k)^2 + m^2) \delta^4((q' - k)^2 + m^2) \\ &\times [1 - \epsilon(q' - k) - \epsilon(q - k)] \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

efetuando uma integração por parte pelas derivadas ∂_k , Obtemos

$$G^{\mu\nu} = \frac{1}{4} (\partial'_q + \partial_q) (\partial'_q + \partial_q) J - \frac{g^{\mu\nu}}{2} H_1 \quad (\text{F.4})$$

A segunda parte dessa integral já foi previamente resolvida no Apêndice [\(E\)](#) e somente será retomada no resultado final dessa subseção. Levando em conta apenas o primeiro termo da equação acima e efetuando uma integração por parte através das derivadas ∂_k . Obtemos,

$$\begin{aligned} & \mathcal{P} \int d^4k \left((k^2 \ln(k^2) - k^2) - ((k^2 + m_P^2) \ln(k^2 + m_P^2) - (k^2 + m_P^2)) \right) \partial_k \partial_k \\ & \times \left(\delta^4((q-k)^2 + m^2) \delta^4((q'-k)^2 + m^2) \times [1 - \epsilon(q-k)\epsilon(q-k')] \right) \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

Usando a mesma identidade da subseção vetorial em que $\partial_k f(q-k) = -\partial_q f(q-k)$, temos

$$\begin{aligned} & \frac{(\partial'_q + \partial_q)}{4} (\partial'_q + \partial_q) \mathcal{P} \int d^4k \left((k^2 \ln(k^2) - k^2) - ((k^2 + m_P^2) \ln(k^2 + m_P^2) - (k^2 + m_P^2)) \right) \\ & \times \left(\delta^4((q-k)^2 + m^2) \delta^4((q'-k)^2 + m^2) [1 - \epsilon(q-k)\epsilon(q-k')] \right) \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

Uma simples substituição de $q-k = k'$ e $Q = q' - q$ no referencial $\mathbf{Q} = 0$, conduz à integral

$$\begin{aligned} & = \frac{1}{4} (\partial'_q + \partial_q) (\partial'_q + \partial_q) \mathcal{P} \int d^4k \left((q-k)^2 \ln((q-k)^2) - (q-k)^2 - ((q-k)^2 + m_P^2) \times \right. \\ & \left. \ln((q-k)^2 + m_P^2) - ((q-k)^2 + m_P^2) \right) \delta^4(k^2 + m^2) \delta^4((Q+k)^2 + m^2) \times \\ & [1 - \epsilon(k')\epsilon(Q+k')] \\ & = \Theta(Q_o^2 - 4m^2) \frac{(\partial'_q + \partial_q)}{2|Q_o|} (\partial'_q + \partial_q) \mathcal{P} \int d\theta \left\{ \left((q^2 - q_o Q_o - 2\mathbf{qk} - m^2) \ln(q^2 - q_o Q_o \right. \right. \\ & \left. \left. - 2\mathbf{qk} \cos(\theta) - m^2) - (q^2 - q_o Q_o - 2\mathbf{qk} \cos(\theta) - m^2) - \left((q^2 - q_o Q_o - 2\mathbf{qk} - m^2 \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + m_P^2) \ln(q^2 - q_o Q_o - 2\mathbf{qk} \cos(\theta) - m^2 + m_P^2) - (q^2 - q_o Q_o - 2\mathbf{qk} \cos(\theta) - m^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + m_P^2) \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

Simplificando o cálculo da integral pelas constantes

$$a = q^2 - q_o Q_o - m^2, \quad a' = q^2 - q_o Q_o - m^2 + m_P^2, \quad b = 2\mathbf{q} \sqrt{\frac{Q_o^2}{4} - m^2}. \quad (\text{F.8})$$

Usando a relação abaixo

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 dx \left\{ \left[(a-bx) \ln(a-bx) - (a-bx) \right] - \left[(a'-bx) \ln(a'-bx) - (a'-bx) \right] \right\} = \\ & \frac{1}{b} \left[\frac{1}{2} (a^2 + b^2) \ln\left(\frac{a+b}{a-b}\right) + ab(\ln(a^2 - b^2) - 3) \right] - \frac{1}{b} \left[\frac{1}{2} (a'^2 + b^2) \ln\left(\frac{a'+b}{a'-b}\right) \right. \\ & \left. + a'b(\ln(a'^2 - b^2) - 3) \right] \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

Antes disso, levaremos nosso sistema do referencial em repouso $\mathbf{Q} = 0$ para um referencial qualquer. Desse modo, as variáveis acima serão redefinidas por $a \rightarrow q'q - m^2$ e $b \rightarrow \sqrt{(q' \cdot q)^2 - q'^2 q^2} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{Q^2}}$. A diferenciação será simplificada por $\partial = \frac{\partial'_q + \partial_q}{2}$.

$$\begin{aligned}
&= \left\{ -\frac{\partial^2 b}{b^2} + 2\frac{(\partial b)^2}{b^3} \right\} \left[ab(\ln(a^2 - b^2) - 3) - \frac{1}{2}(a'^2 + b^2)\ln\left(\frac{a' + b}{a' - b}\right) - a'b(\ln(a'^2 - b^2) \right. \\
&- 3) \left. \right] - \frac{2\partial b}{b^2} \left[- (a'\partial a' + b\partial b)\ln\left(\frac{a' + b}{a' - b}\right) + (b\partial a + a\partial b)\left(\ln(a^2 - b^2) - 3\right) + \partial(ab) - \right. \\
&(b\partial a' + a'\partial b)\left(\ln(a'^2 - b^2) - 3\right) - \partial(a'b) \left. \right] + \frac{1}{b} \left[\partial(\partial(ab)) - \partial(\partial(a'b)) - \left((\partial a')^2 + a'\partial^2 a' \right. \right. \\
&+ b\partial^2 b + (\partial b)^2 \left. \right) \ln\left(\frac{a' + b}{a' - b}\right) + 4\partial a\partial b + (2\partial a\partial b + b\partial^2 a + a\partial^2 b)(\ln(a^2 - b^2) - 3) - \\
&4\partial a'\partial b - (2\partial a'\partial b + b\partial^2 a' + a'\partial^2 b)(\ln(a'^2 - b^2) - 3) \left. \right]
\end{aligned} \tag{F.10}$$

Faremos um pequeno dicionário para ajudar na obtenção do resultado final

$$\begin{aligned}
b &= c\sqrt{1 + \frac{4m^2}{Q^2}}, \\
c &= \sqrt{(q' \cdot q)^2 - q'^2 q^2}, \quad \partial b = \left(\sqrt{1 + \frac{4m^2}{Q^2}} \right) \partial c, \quad \partial^2 b = \left(\sqrt{1 + \frac{4m^2}{Q^2}} \right) \partial^2 c \\
\partial a &= \frac{q'^\mu + q^\mu}{2}, \quad \partial^2 a = \frac{g^{\mu\nu}}{2}, \quad \partial c = \frac{q'^\mu(q' \cdot q - q^2) + q^\mu(q' \cdot q - q'^2)}{2\sqrt{(q' \cdot q)^2 - q^2 q'^2}} \\
\partial^2 c &= -\frac{g^{\mu\nu}(q' - q)^2}{2\sqrt{(q' \cdot q)^2 - q^2 q'^2}} - \frac{1}{4((q' \cdot q)^2 - q^2 q'^2)^{3/2}} \left[q'^\mu q'^\nu ((q' \cdot q) - q^2)^2 + \right. \\
&q^\mu q^\nu ((q' \cdot q) - q'^2)^2 + (q'^\mu q'^\nu + q^\mu q^\nu)((q' \cdot q) - q^2)((q' \cdot q) - q'^2) \left. \right] \\
(\partial c)^2 &= \frac{1}{4((q' \cdot q)^2 - q^2 q'^2)} \left[q'^\mu q'^\nu (q'(q' - q))^2 + q^\mu q^\nu (q'(q' - q))^2 + (q'^\mu q'^\nu + q^\mu q^\nu) \times \right. \\
&(q'q(q' - q)^2) \left. \right]
\end{aligned} \tag{F.11}$$

Com o propósito de melhorar a resolução desse problema. Primeiro, trabalharemos com os termos que não são acoplados a nenhum logaritmo e os dividiremos por meio dos seus diferentes tensores

$$\begin{aligned}
&\bullet -\frac{1}{4} \frac{q'^\mu q'^\nu}{(q' \cdot q)^2 - q^2 q'^2} \left\{ m_P^2 - \frac{3m_P^2 ((q' - q)q)^2}{((q' \cdot q)^2 - q^2 q'^2)} \right\} = 2 \frac{q'^\mu q'^\nu}{-Q^2(1 + \frac{4m^2}{Q^2})} \left\{ \frac{m_P^2}{Q^2} \frac{\left(1 - \frac{2m^2}{Q^2}\right)}{1 + \frac{4m^2}{Q^2}} \right\} \\
&\bullet -\frac{1}{4} \frac{q^\mu q^\nu}{(q' \cdot q)^2 - q^2 q'^2} \left\{ m_P^2 - \frac{3m_P^2 (q'(q' - q))^2}{((q' \cdot q)^2 - q^2 q'^2)} \right\} = 2 \frac{q^\mu q^\nu}{-Q^2(1 + \frac{4m^2}{Q^2})} \left\{ \frac{m_P^2}{Q^2} \frac{\left(1 - \frac{2m^2}{Q^2}\right)}{1 + \frac{4m^2}{Q^2}} \right\}
\end{aligned}$$

- $-\frac{1}{4} \frac{(q'^{\mu} q^{\nu} + q^{\mu} q'^{\nu})}{(q' \cdot q)^2 - q'^2 q'^2} \left\{ -m_P^2 - \frac{3m_P^2 (q'(q'-q))((q'-q)q)}{(q' \cdot q)^2 - q'^2 q'^2} \right\} = 2 \frac{(q'^{\mu} q^{\nu} + q^{\mu} q'^{\nu})}{-Q^2 (1 + \frac{4m^2}{Q^2})} \left\{ 2 \frac{m_P^2}{Q^2} \frac{\left(1 + \frac{m^2}{Q^2}\right)}{1 + \frac{4m^2}{Q^2}} \right\}$
- $g^{\mu\nu} \frac{1}{2} \frac{m_P^2}{(q' \cdot q)^2 - q'^2 q'^2} (q' - q)^2 = \frac{m_P^2}{Q^2} \frac{2}{1 + \frac{4m^2}{Q^2}} g^{\mu\nu}$

Rearranjando os termos acima, é fácil verificar que

$$+ \frac{\pi}{Q^2} \frac{\Theta(-Q^2 - 4m^2)}{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{Q^2}}} \frac{m_P^2}{Q^2} \left\{ \frac{\left(1 - \frac{2m^2}{Q^2}\right)}{1 + \frac{4m^2}{Q^2}} (q^{\mu} q^{\nu} + q'^{\mu} q'^{\nu} - \frac{Q^2}{2} g^{\mu\nu}) - 2 \frac{\left(1 + \frac{m^2}{Q^2}\right)}{1 + \frac{4m^2}{Q^2}} \times \right. \quad (\text{F.12})$$

$$\left. (q'^{\mu} q^{\nu} + q^{\mu} q'^{\nu} + \frac{Q^2}{2} g^{\mu\nu}) - \frac{1}{2} m_P^2 \right\}$$

É importante ressaltar que a diferença enraizada no cálculo da integral tensorial da $GQED_4$ está associada às componentes dependentes do logaritmo, pois elas são inexistentes caso tivéssemos calculando essa integral sob a perspectiva da QED_4 . Reorganizando os termos da eq. (F.10) proporcionais ao logaritmo, temos

$$\left\{ \underbrace{\frac{(\partial a')^2}{b}}_{(1)} + \underbrace{\frac{a' \partial^2 a'}{b}}_{(2)} + \underbrace{\frac{\partial^2 b}{2} \left(1 - \frac{a'^2}{b^2}\right)}_{(3)} + \underbrace{(\partial b)^2 \frac{a'^2}{b^3}}_{(4)} - \underbrace{\frac{a'}{b^2} (\partial_{\mu} a' \partial_{\nu} b + \partial_{\nu} a' \partial_{\mu} b)}_{(5)} - \frac{g^{\mu\nu}}{2} \underbrace{\frac{a'}{b}}_{(6)} \right\}$$

$$\times \ln \left(\frac{a' + b}{a' - b} \right) \quad (\text{F.13})$$

utilizando $a' \rightarrow q'q - m^2 + m_P^2$ e $b \rightarrow \sqrt{(q' \cdot q)^2 - q'^2 q'^2} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{Q^2}}$. Os elementos correspondentes dos termos acima estão relacionados, sequencialmente, abaixo com o propósito de se obter melhor clareza

$$\begin{aligned}
(1) & \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{Q^2}}} \frac{q'^{\mu}q'^{\nu} + q'^{\mu}q^{\nu} + q^{\mu}q'^{\nu} + q^{\mu}q^{\nu}}{4\sqrt{(q' \cdot q)^2 - q'^2q^2}} \\
(2) & \frac{(q'q - m^2 + m_P^2) g^{\mu\nu}}{\sqrt{(q' \cdot q)^2 - q'^2q^2} \ 2} \\
(3) & \left(\left(1 + \frac{4m^2}{Q^2} \right) - \frac{(q'q - m^2 + m_P^2)^2}{((q' \cdot q)^2 - q'^2q^2)} \right) \left(\frac{g^{\mu\nu}(q' - q)^2}{4\sqrt{(q' \cdot q)^2 - q'^2q^2}} - \frac{1}{8((q' \cdot q)^2 - q'^2q^2)^{3/2}} \right. \\
& \times \left[q'^{\mu}q'^{\nu}((q' \cdot q) - q^2)^2 + q^{\mu}q^{\nu}((q' \cdot q) - q'^2)^2 + (q'^{\mu}q^{\nu} + q^{\mu}q'^{\nu})((q' \cdot q) - q^2) \right. \\
& \left. \left. \times ((q' \cdot q) - q'^2) \right] \right) \\
(4) & \frac{1}{4((q' \cdot q)^2 - q'^2q^2)} \left[q'^{\mu}q'^{\nu}(q(q' - q))^2 + q^{\mu}q^{\nu}(q'(q' - q))^2 + (q'^{\mu}q^{\nu} + q^{\mu}q'^{\nu}) \times \right. \\
& \left. (q'q(q' - q)^2) \right] \left(\frac{(q'q - m^2 + m_P^2)^2}{((q' \cdot q)^2 - q'^2q^2)^{3/2}} \right) \\
(5) & - \frac{1}{4} \left(\frac{q'q - m^2 + m_P^2}{((q' \cdot q)^2 - q'^2q^2)^{3/2}} \right) \left[2q'^{\mu}q'^{\nu}(q' \cdot q - q^2) + 2q^{\mu}q^{\nu}(q' \cdot q - q'^2) + q'^{\mu}q^{\nu} \times \right. \\
& \left. (q' \cdot q - q'^2 + q' \cdot q - q^2) + q^{\mu}q'^{\nu}(q' \cdot q - q'^2 + q' \cdot q - q^2) \right] \\
(6) & - \frac{(q'q - m^2 + m_P^2) g^{\mu\nu}}{\sqrt{(q' \cdot q)^2 - q'^2q^2} \ 2}
\end{aligned} \tag{F.14}$$

Reorganizando os termos por meio dos seus tensores comuns, obtemos

$$\begin{aligned}
(1^*) & \frac{q'^{\mu}q'^{\nu}}{8((q' \cdot q)^2 - q'^2q^2)^{5/2}} \left[((q' \cdot q) - q^2)^2 \left((q'q - m^2 + m_P^2)^2 - ((q' \cdot q)^2 - q'^2q^2) \right) \right. \\
& \times \left(1 + \frac{4m^2}{Q^2} \right) + 2 \left(((q'q - m^2 + m_P^2)^2 (q(q' - q))^2 - 2(q'q - m^2 + m_P^2) \right. \\
& \left. \left. \times (q(q' - q))((q' \cdot q)^2 - q'^2q^2) + ((q' \cdot q)^2 - q'^2q^2)^2 \right) \right]
\end{aligned} \tag{F.15}$$

$$\begin{aligned}
(2^*) & \frac{q^{\mu}q^{\nu}}{8((q' \cdot q)^2 - q'^2q^2)^{5/2}} \left[((q' \cdot q) - q'^2)^2 \left((q'q - m^2 + m_P^2)^2 - ((q' \cdot q)^2 - q'^2q^2) \right) \right. \\
& \times \left(1 + \frac{4m^2}{Q^2} \right) + 2 \left(((q'q - m^2 + m_P^2)^2 (q'(q' - q))^2 - 2(q'q - m^2 + m_P^2) \right. \\
& \left. \left. \times (q'(q' - q))((q' \cdot q)^2 - q'^2q^2) + ((q' \cdot q)^2 - q'^2q^2)^2 \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3^*) &= \frac{q'^{\mu}q^{\nu} + q^{\mu}q'^{\nu}}{8((q' \cdot q)^2 - q'^2q^2)^{5/2}} \left[(q'(q' - q)^2q) \left((q'q - m^2 + m_P^2)^2 - ((q' \cdot q)^2 - q'^2q^2) \right) \right. \\
&\quad \times \left. \left(1 + \frac{4m^2}{Q^2} \right) \right] - 2(q'q - m^2 + m_P^2)^2 (q'q(q' - q))^2 + 2((q' \cdot q)^2 - q'^2q^2) \\
&\quad \times (q'q - m^2 + m_P^2)(q' - q)^2 - 2 \left((q' \cdot q)^2 - q'^2q^2 \right)^2 \Big] \\
(4^*) &= \frac{g^{\mu\nu}}{4} \frac{(q' - q)^2}{((q' \cdot q)^2 - q'^2q^2)^{3/2}} \left((q'q - m^2 + m_P^2)^2 - ((q' \cdot q)^2 - q'^2q^2) \left(1 + \frac{4m^2}{Q^2} \right) \right)
\end{aligned} \tag{F.16}$$

Os quatro termos acima tiveram uma nova reclassificação com o propósito de facilitar futuras verificações. Neste momento, usaremos as identidades da eq. (D.13) e faremos a operação em cada um dos termo acima separadamente

$$\begin{aligned}
(1^*) &= \frac{q'^{\mu}q'^{\nu}}{Q^6(1 + \frac{4m^2}{Q^2})^{5/2}} \left\{ \left[\left(\frac{Q^2}{2} \left(1 + \frac{4m^2}{Q^2} \right) + m_P^2 \right)^2 - \left(1 + \frac{8m^2}{Q^2} + \frac{16m^4}{Q^4} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + 2 \left[\frac{Q^2}{2} \left(\left(1 + \frac{4m^2}{Q^2} \right) + m_P^2 \right) - \frac{1}{2} \left(Q^2 + 4m^2 \right) \right]^2 \right\} \\
&= \frac{q'^{\mu}q'^{\nu}}{Q^2(1 + \frac{4m^2}{Q^2})^{5/2}} \left\{ \frac{3m_P^4}{Q^4} + \left(1 + \frac{4m^2}{Q^2} \right) \frac{m_P^2}{Q^2} \right\}
\end{aligned} \tag{F.17}$$

como $q^{\mu}q^{\nu}$ possui a mesma estrutura que $q'^{\mu}q'^{\nu}$, apenas colocaremos o resultado final

$$(2^*) = \frac{q^{\mu}q^{\nu}}{Q^2(1 + \frac{4m^2}{Q^2})^{5/2}} \left\{ \frac{3m_P^4}{Q^4} + \left(1 + \frac{4m^2}{Q^2} \right) \frac{m_P^2}{Q^2} \right\} \tag{F.18}$$

o próximo termo

$$\begin{aligned}
(3^*) &= -\frac{q'^{\mu}q^{\nu} + q^{\mu}q'^{\nu}}{Q^6(1 + \frac{4m^2}{Q^2})^{5/2}} \left\{ \left[\left(\frac{Q^2}{2} \left(1 + \frac{4m^2}{Q^2} \right) + m_P^2 \right)^2 - \frac{1}{4} \left(Q^4 + 4m^2Q^2 \right) \left(1 + \frac{4m^2}{Q^2} \right) \right] \right. \\
&\quad - 2 \left(\frac{Q^2}{2} \left(1 + \frac{4m^2}{Q^2} \right) + m_P^2 \right)^2 + 2 \left(Q^2 + 4m^2 \right) \left(\frac{Q^2}{2} \left(1 + \frac{4m^2}{Q^2} \right) + m_P^2 \right) \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \left(Q^2 + 4m^2 \right)^2 \right\} \\
&= -\frac{q'^{\mu}q^{\nu} + q^{\mu}q'^{\nu}}{Q^2(1 + \frac{4m^2}{Q^2})^{5/2}} \left\{ \frac{m_P^2}{Q^2} \left(1 + \frac{4m^2}{Q^2} \right) - \frac{m_P^4}{Q^4} \right\}
\end{aligned} \tag{F.19}$$

o último termo é

$$\begin{aligned}
(4^*) &= \frac{g^{\mu\nu} Q^2}{(Q^4 + 4m^2 Q^2)^{3/2}} \left[\left(Q^2 \left(1 + \frac{4m^2}{Q^2} \right) + 4m_P^2 \right)^2 - (Q^4 + 4m^2 Q^2) \left(1 + \frac{4m^2}{Q^2} \right) \right] \\
&= -\frac{g^{\mu\nu}}{\left(1 + \frac{4m^2}{Q^2} \right)^{3/2}} \left(\frac{m_P^2}{Q^2} \left(1 + \frac{4m^2}{Q^2} \right) + \frac{m_P^4}{Q^4} \right)
\end{aligned} \tag{F.20}$$

Organizando os termos (F.17), (F.18), (F.19) e (F.20) em uma outra forma, obtemos finalmente

$$\begin{aligned}
&\int d^4 k k_\mu k_\nu \left(\mathcal{P} \frac{1}{k^2} - \mathcal{P} \frac{1}{k^2 + m_P^2} \right) \delta^4((q - k)^2 + m^2) \delta^4((q' - k)^2 + m^2) \times \\
[1 - \epsilon(q' - k) - \epsilon(q - k)] &= \frac{\pi}{2} \frac{\Theta(Q_o^2 - 4m^2)}{Q^2 \left(1 + \frac{4m^2}{Q^2} \right)^{5/2}} \frac{m_P^2}{Q^2} \left\{ \left(\frac{3m_P^2}{Q^2} + \left(1 + \frac{4m^2}{Q^2} \right) \right) \times \right. \\
&\left(q'^\mu q'^\nu + q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu} \frac{Q^2}{2} \right) - \left(q'^\mu q^\nu + q^\mu q'^\nu + g^{\mu\nu} \frac{Q^2}{2} \right) \left(\left(1 + \frac{4m^2}{Q^2} \right) - \frac{m_P^2}{Q^2} \right) \\
&\left. - g^{\mu\nu} \frac{4m^2}{Q^2} \left(1 + \frac{4m^2}{Q^2} + \frac{m_P^2}{Q^2} \right) \right\} \ln \left(1 - \frac{Q^2 + 4m^2}{m_P^2} \right)
\end{aligned} \tag{F.21}$$

F.2 $GQED_3$

Realizaremos o mesmo procedimento que na seção anterior para resolver a integral (5.64). Primeiro, enfatizaremos a subtração realizada por Podolsky para a correção das divergências ultravioletas

$$\int d^3k k_\mu k_\nu \left(\mathcal{P} \frac{1}{k^2} - \mathcal{P} \frac{1}{k^2 + m_P^2} \right) \delta^3((q-k)^2 + m^2) \delta^3((q'-k)^2 + m^2) \times [1 - \epsilon(q'-k) - \epsilon(q-k)] \quad (\text{F.22})$$

Através de alguns cálculos elementares, temos

$$\begin{aligned} \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} &\rightarrow \frac{1}{4} \left[\partial_k \partial_k (k^2 \ln(k^2) - k^2) \right] - \frac{g^{\mu\nu}}{2} \ln(k^2) \\ \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 + m_P^2} &\rightarrow \frac{1}{4} \left[\partial_k \partial_k \left((k^2 + m_P^2) \ln(k^2 + m_P^2) - (k^2 + m_P^2) \right) \right] - \frac{g^{\mu\nu}}{2} \ln(k^2 + m_P^2) \end{aligned} \quad (\text{F.23})$$

Assim, substituindo na eq. (F.22), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \int d^3k &\left(\frac{1}{4} \left[\partial_k \partial_k (k^2 \ln(k^2) - k^2) \right] - \frac{g^{\mu\nu}}{2} \ln(k^2) - \frac{1}{4} \left[\partial_k \partial_k \left((k^2 + m_P^2) \ln(k^2 + m_P^2) - (k^2 + m_P^2) \right) \right] \right. \\ &\left. - \frac{g^{\mu\nu}}{2} \ln(k^2 + m_P^2) \right) \delta^3((q-k)^2 + m^2) \delta^3((q'-k)^2 + m^2) [1 - \epsilon(q'-k) - \epsilon(q-k)] \end{aligned} \quad (\text{F.24})$$

efetuando uma integração por parte pelas derivadas ∂_k , Obtemos

$$G^{\mu\nu} = \frac{1}{4} (\partial'_q + \partial_q) (\partial'_q + \partial_q) J - \frac{g^{\mu\nu}}{2} H_1 \quad (\text{F.25})$$

A segunda parte dessa integral foi previamente resolvida na equação (??) e somente será retomada no resultado final desta subseção. Levando em conta apenas o primeiro termo da equação acima

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \int d^3k &\left((k^2 \ln(k^2) - k^2) - ((k^2 + m_P^2) \ln(k^2 + m_P^2) - (k^2 + m_P^2)) \right) \times \\ &\partial_k \partial_k \left(\delta^3((q-k)^2 + m^2) \delta^3((q'-k)^2 + m^2) \times [1 - \epsilon(q-k) \epsilon(q-k')] \right) \end{aligned} \quad (\text{F.26})$$

Usando a mesma identidade da subseção vetorial em que $\partial_k f(q-k) = -\partial_q f(q-k)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} (\partial'_q + \partial_q) (\partial'_q + \partial_q) \mathcal{P} \int d^3k &\left((k^2 \ln(k^2) - k^2) - ((k^2 + m_P^2) \ln(k^2 + m_P^2) - (k^2 + m_P^2)) \right) \times \\ &\left(\delta^3((q-k)^2 + m^2) \delta^3((q'-k)^2 + m^2) [1 - \epsilon(q-k) \epsilon(q-k')] \right) \end{aligned} \quad (\text{F.27})$$

Uma simples substituição de $q - k = k'$ e $Q = q' - q$ no referencial $\mathbf{Q} = 0$, conduz à integral

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}(\partial'_q + \partial_q)(\partial'_q + \partial_q)\mathcal{P} \int d^3k \left((q - k)^2 \ln((q - k)^2) - (q - k)^2 - ((q - k)^2 + m_P^2) \ln((q - k)^2 + m_P^2) \right. \\
&\quad \left. - ((q - k)^2 + m_P^2) \right) \delta^3(k^2 + m^2) \delta^3((Q + k)^2 + m^2) [1 - \epsilon(k')\epsilon(Q + k')] \\
&= \Theta(Q_o^2 - 4m^2) \frac{1}{2|Q_o|} (\partial'_q + \partial_q)(\partial'_q + \partial_q)\mathcal{P} \int d\theta \left\{ \left((q^2 - q_o Q_o - 2\mathbf{qk} - m^2) \ln(q^2 - q_o Q_o - 2\mathbf{qk} \cos(\theta)) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - m^2) - (q^2 - q_o Q_o - 2\mathbf{qk} \cos(\theta) - m^2) - \left((q^2 - q_o Q_o - 2\mathbf{qk} - m^2 + m_P^2) \ln(q^2 - q_o Q_o \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2\mathbf{qk} \cos(\theta) - m^2 + m_P^2) - (q^2 - q_o Q_o - 2\mathbf{qk} \cos(\theta) - m^2 + m_P^2) \right) \right\} \tag{F.28}
\end{aligned}$$

A diferenciação será simplificada por $\partial = \frac{\partial'_q + \partial_q}{2}$ e a integral pode ser resolvida através de cálculos elementares já utilizados exaustivamente nesta tese. Após isso, e através das identidades (D.13), obtemos

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{-Q^2}} \frac{\pi}{2} \frac{\Theta(Q_o)\Theta(-Q^2 - 4m^2)}{\sqrt{m_P^4 + m_P^2 Q^2 (1 + \frac{4m^2}{Q^2})}} \frac{1}{((q' \cdot q)^2 - q^2 q'^2)^2} \left\{ q'^\mu q'^\nu \left((q' \cdot q)^2 (q^2 - m^2 + m_P^2)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + q^4 (q'^2 - m^2 + m_P^2)^2 - 2(q' \cdot q) q^2 (q'^2 - m^2 + m_P^2) (q^2 - m^2 + m_P^2) + \frac{(q' \cdot q)^2 - q^2 q'^2}{4} \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (q^2 - m^2 + m_P^2)^2 \right) + q^\mu q^\nu \left((q' \cdot q)^2 (q'^2 - m^2 + m_P^2)^2 + q^4 (q^2 - m^2 + m_P^2)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2(q' \cdot q) q^2 (q'^2 - m^2 + m_P^2) (q^2 - m^2 + m_P^2) + \frac{1}{4} ((q' \cdot q)^2 - q^2 q'^2) (q^2 - m^2 + m_P^2)^2 \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{(q'^\mu q'^\nu + q^\mu q^\nu)}{4} \left[\frac{2(q' \cdot q)}{(q' \cdot q) - q^2 q'^2} \left(q'^2 (q^2 - m^2 + m_P^2)^2 + q^2 (q'^2 - m^2 + m_P^2)^2 \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2(q' \cdot q) (q'^2 - m^2 + m_P^2) (q^2 - m^2 + m_P^2) \right) + (q^2 - m^2 + m_P^2) (q'^2 - m^2 + m_P^2) \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. ((q' \cdot q)^2 - q^2 q'^2) \right] + g^{\mu\nu} \frac{1}{4} \left(q'^2 (q^2 - m^2 + m_P^2)^2 - 2(q' \cdot q) (q'^2 - m^2 + m_P^2) (q^2 - m^2 + m_P^2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + q^2 (q'^2 - m^2 + m_P^2)^2 \right) \right\} \tag{F.29}
\end{aligned}$$

Na linguagem do Källén através das identidades $((q' \cdot q) - q'^2) = \frac{Q^2}{2}$, $((q' \cdot q) - q^2) = \frac{Q^2}{2}$, $(q' \cdot q)^2 - q^2 q'^2 = \frac{1}{4} (Q^4 + 4m^2 Q^2)$ e $q' \cdot q - m^2 = \frac{1}{2} \sqrt{Q^4 + 4m^2 Q^2} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{Q^2}} = \frac{Q^2}{2} (1 + \frac{4m^2}{Q^2})$, obtemos

$$\begin{aligned}
& \int d^3k k_\mu k_\nu \left(\mathcal{P} \frac{1}{k^2} - \mathcal{P} \frac{1}{k^2 + m_P^2} \right) \delta^3((q-k)^2 + m^2) \delta^3((q'-k)^2 + m^2) \times \\
& [1 - \epsilon(q' - k) - \epsilon(q - k)] = \frac{1}{\sqrt{-Q^2}} \frac{\pi}{2} \frac{\Theta(Q_0) \Theta(-Q^2 - 4m^2)}{\sqrt{m_P^4 + m_P^2 Q^2 (1 + \frac{4m^2}{Q^2})}} \frac{m_P^2}{Q^2 (1 + \frac{4m^2}{Q^2})^2} \times \\
& \left\{ \left(\left(1 + \frac{4m^2}{Q^2} \right) + \frac{2m_P^2}{Q^2} \right) (q'^\mu q'^\nu + q'^\mu q'^\nu - \frac{Q^2}{2} g^{\mu\nu}) - \left(1 + \frac{4m^2}{Q^2} + \frac{m_P^2}{Q^2} \right) (q^\mu q^\nu + q'^\mu q^\nu \right. \\
& \left. + \frac{Q^2}{2} g^{\mu\nu}) + Q^2 \left(1 - \frac{4m^2}{Q^2} \right) \left(1 + \frac{4m^2}{Q^2} + \frac{m_P^2}{Q^2} \right) g^{\mu\nu} + \frac{m_P^2}{2} g^{\mu\nu} \right\}. \tag{F.30}
\end{aligned}$$

Bibliografia

- B. et al Abi. Measurement of the positive muon anomalous magnetic moment to 0.46 ppm. *Phys. Rev. Lett.*, 126:141801, Apr 2021. doi: 10.1103/PhysRevLett.126.141801. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.126.141801>.
- Jean Alexandre, K Farakos, and NE Mavromatos. Anomalous magnetic moment in parity-conserving qed3. *New Journal of Physics*, 7(1):48, 2005.
- A Bashir and A Raya. Dynamical fermion masses and constraints of gauge invariance in quenched qed3. *Nuclear Physics B*, 709(1-2):307–328, 2005.
- Daniel Becker, Chris Ripken, and Frank Saueressig. On avoiding ostrogradski instabilities within asymptotic safety. *Journal of High Energy Physics*, 2017(12):121, 2017.
- H Belich Jr, OM Del Cima, MM Ferreira Jr, and JA Helayël-Neto. Electron–electron bound states in parity-preserving qed3. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 29(7):1431, 2003.
- Nikolai Nikolaevich Bogolubov, AA Logunov, and IT Todorov. Introduction to axiomatic quantum field theory. *Reading, Mass*, 1975.
- N. N. Bogolyubov and D. V. Shirkov. INTRODUCTION TO THE THEORY OF QUANTIZED FIELDS. *Intersci. Monogr. Phys. Astron.*, 3:1–720, 1959.
- J. L. Boldo, B. M. Pimentel, and J. L. Tomazelli. The Causal phase in QED in three-dimensions. *Int. J. Theor. Phys.*, 36:1565–1574, 1997a. doi: 10.1007/BF02435756.
- J. L. Boldo, B. M. Pimentel, and J. L. Tomazelli. Remarks on infrared dynamics in QED(3). *Can. J. Phys.*, 80:1037–1042, 2002. doi: 10.1139/p02-058.
- JL Boldo, BM Pimentel, and JL Tomazelli. Causal phase in qed 3. *International Journal of Theoretical Physics*, 36(7):1565–1574, 1997b.
- EE Boos. Effective field theory for physics beyond the standard model. *Physics of Particles and Nuclei*, 51(4):619–624, 2020.
- R Bufalo, BM Pimentel, and GER Zambrano. Renormalizability of generalized quantum electrodynamics. *Physical Review D*, 86(12):125023, 2012.
- R. Bufalo, B. M. Pimentel, and D. E. Soto. Causal approach for the electron-positron scattering in generalized quantum electrodynamics. *Phys. Rev. D*, 90:085012, Oct 2014. doi: 10.1103/PhysRevD.90.085012. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.90.085012>.

- R.V. Churchill. *Introduction to complex variables and applications*. McGraw-Hill Book Co., 1948. URL <https://books.google.com.br/books?id=z7w-AAAAIAAJ>.
- R. R. Cuzinatto, C. A. M. de Melo, and P. J. Pompeia. Second order gauge theory. *Annals Phys.*, 322:1211–1232, 2007. doi: 10.1016/j.aop.2006.07.006.
- R. R. Cuzinatto, C. A. M. de Melo, L. G. Medeiros, and P. J. Pompeia. How can one probe Podolsky electrodynamics? *Int. J. Mod. Phys.*, A26:3641–3651, 2011. doi: 10.1142/S0217751X11053961.
- Ashok K Das and J Frenkel. The pole of the fermion propagator in a general class of gauges. *Physics Letters B*, 726(1-3):493–496, 2013.
- GB de Gracia, BM Pimentel, and L Rabanal. Dynamical mass generation in qed: A non-perturbative approach. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2019 (7):073B05, 2019.
- A.F.R. De Toledo Piza. *Mecânica Quântica Vol. 51*. EDUSP, 2003. ISBN 9788531407482. URL <https://books.google.com.br/books?id=BARqfZ3Wem8C>.
- F. J. Dyson. The s matrix in quantum electrodynamics. *Phys. Rev.*, 75:1736–1755, Jun 1949. doi: 10.1103/PhysRev.75.1736. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.75.1736>.
- F. J. Dyson. Heisenberg operators in quantum electrodynamics. i. *Phys. Rev.*, 82:428–439, May 1951a. doi: 10.1103/PhysRev.82.428. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.82.428>.
- Freeman John Dyson. The renormalization method in quantum electrodynamics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 207(1090):395–401, 1951b.
- CS Fischer, Reinhard Alkofer, Thomas Dahm, and P Maris. Dynamical chiral symmetry breaking in unquenched q e d 3. *Physical Review D*, 70(7):073007, 2004.
- Carlos A.P. Galvao and B.M. Pimentel Escobar. The Canonical Structure of Podolsky Generalized Electrodynamics. *Can. J. Phys.*, 66:460–466, 1988. doi: 10.1139/p88-075.
- VP Gusynin, VA Miransky, and IA Shovkovy. Theory of the magnetic catalysis of chiral symmetry breaking in qed. *Nuclear Physics B*, 563(1-2):361–389, 1999.
- R. Haag. On quantum field theories. *Kong. Dan. Vid. Sel. Mat. Fys. Med.*, 29N12:1–37, 1955. [Phil. Mag. Ser.746,376(1955)].
- Igor F Herbut. Qed 3 theory of underdoped high-temperature superconductors. *Physical Review B*, 66(9):094504, 2002.
- RS II, M Reed, and B Simon. *Methods of modern mathematical physics ii, fourier analysis, selfadjointness*, 1975.
- Roman Jackiw. Fractional charge and zero modes for planar systems in a magnetic field. *Physical Review D*, 29(10):2375, 1984.

- G. Källén, G. Kallen, C.K. Iddings, and M. Mizushima. *Quantum Electrodynamics*. Springer-Verlag, 1972. ISBN 9780387055749.
- D. S. Kaparulin, S. L. Lyakhovich, and A. A. Sharapov. Classical and quantum stability of higher-derivative dynamics. *Eur. Phys. J.*, C74(10):3072, 2014a. doi: 10.1140/epjc/s10052-014-3072-3.
- Dmitry S Kaparulin, Simon L Lyakhovich, and Alexey A Sharapov. Classical and quantum stability of higher-derivative dynamics. *The European Physical Journal C*, 74(10): 1–19, 2014b.
- Kamila Kowalska, Leszek Roszkowski, Enrico Maria Sessolo, and Andrew J Williams. Gut-inspired susy and the muon $g-2$ anomaly: prospects for lhc 14 tev. *Journal of High Energy Physics*, 2015(6):1–38, 2015.
- J. L. Tomazelli. *The causal perturbation theory to quantum electrodynamics in (2+1) dimensions*. Dover Books on Physics. Unesp, 1996. URL <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/132861>.
- Pok Man Lo and Eric S Swanson. Qed3 at finite temperature and density. *Physical Review D*, 89(2):025015, 2014.
- Claus Lämmerzahl. The pseudodifferential operator square root of the klein–gordon equation. *Journal of Mathematical Physics*, 34(9):3918–3932, 1993. doi: 10.1063/1.530015.
- M. J. Menon and R. P. Barbosa. Condição de causalidade relações de dispersão e o modelo de lorentz. page 38.
- K Nakamura, C Amsler, Particle Data Group, et al. Particle physics booklet. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 37(7A):075021, 2010.
- Noboru Nakanishi. Asymptotic completeness and the three-dimensional gauge theory having the chern-simon term. *International Journal of Modern Physics A*, 4(05): 1055–1064, 1989.
- MB Paranjape. Induced angular momentum in $(2+1)$ -dimensional qed. *Physical review letters*, 55(22):2390, 1985.
- B. M. Pimentel, A. T. Suzuki, and J. L. Tomazelli. QED in three-dimensions radiative corrections in the Heisenberg picture. *Int. J. Theor. Phys.*, 33:2199–2206, 1994. doi: 10.1007/BF00675801.
- BM Pimentel and JL Tomazelli. The green’s function in the bloch-nordsieck model for qed 3. Technical report, Instituto de Fisica Teorica (IFT), 1994.
- Robert D Pisarski. Chiral-symmetry breaking in three-dimensional electrodynamics. *Physical Review D*, 29(10):2423, 1984.
- Boris Podolsky. A generalized electrodynamics part i—non-quantum. *Phys. Rev.*, 62: 68–71, Jul 1942. doi: 10.1103/PhysRev.62.68. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.62.68>.

- Boris Podolsky and Chihiro Kikuchi. A generalized electrodynamics part ii—quantum. *Phys. Rev.*, 65:228–235, Apr 1944. doi: 10.1103/PhysRev.65.228. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.65.228>.
- Boris Podolsky and Philip Schwed. Review of a generalized electrodynamics. *Rev. Mod. Phys.*, 20:40–50, Jan 1948. doi: 10.1103/RevModPhys.20.40. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.20.40>.
- C. Quigg. *Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions: Second Edition*. Princeton University Press, 2013. ISBN 9780691135489. URL <https://books.google.com.br/books?id=kXiWmwEACAAJ>.
- C Marat Reyes. Testing symmetries in effective models of higher derivative field theories. *Physical Review D*, 80(10):105008, 2009.
- J.J. Sakurai and J. Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2017. ISBN 9781108527422. URL <https://books.google.com.br/books?id=v89CDwAAQBAJ>.
- G Scharf, WF Wreszinski, BM Pimentel, and JL Tomazelli. Causal approach to (2+1)-dimensional qed. *Annals of Physics*, 231(1):185–208, 1994.
- Julian Schwinger. Gauge invariance and mass. ii. *Phys. Rev.*, 128:2425–2429, Dec 1962. doi: 10.1103/PhysRev.128.2425. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.128.2425>.
- Tim STEFANIAK, Philip Bechtle, Klaus DESCH, Herbert Karl Dreiner, Matthias Hammer, Michael Kraemer, Ben O’Leary, Werner Porod, Xavier Prudent, Björn Sarrazin, et al. A global analysis of constrained supersymmetric models after the higgs discovery with fittino. In *The European Physical Society Conference on High Energy Physics*, volume 180, page 313. SISSA Medialab, 2014.
- Raymond Frederick Streater and Arthur S Wightman. *PCT, spin and statistics, and all that*, volume 52. Princeton University Press, 2000.
- George Thompson and Ruibin Zhang. Nonperturbative method in field theory: The gauge technique. *Physical Review D*, 35(2):631, 1987.
- Robin Ticciati. *Quantum Field Theory for Mathematicians*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1999. doi: 10.1017/CBO9780511526428.
- S. Weinberg, W. S, and T. de campos. *The Quantum Theory of Fields*. Number v. 1 in Quantum Theory of Fields, Vol. 2: Modern Applications. Cambridge University Press, 1995. ISBN 9780521550017. URL https://books.google.com.br/books?id=doeDB3_WLvWC.
- M. Weitz, A. Huber, F. Schmidt-Kaler, D. Leibfried, W. Vassen, C. Zimmermann, K. Pachucki, T. W. Hänsch, L. Julien, and F. Biraben. Precision measurement of the 1s ground-state lamb shift in atomic hydrogen and deuterium by frequency comparison. *Phys. Rev. A*, 52:2664–2681, Oct 1995. doi: 10.1103/PhysRevA.52.2664. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.52.2664>.

- G. C. Wick. The evaluation of the collision matrix. *Phys. Rev.*, 80:268–272, Oct 1950. doi: 10.1103/PhysRev.80.268. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.80.268>.
- A. S. Wightman and S. S. Schweber. Configuration space methods in relativistic quantum field theory. i. *Phys. Rev.*, 98:812–837, May 1955a. doi: 10.1103/PhysRev.98.812. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.98.812>.
- A. S. Wightman and S. S. Schweber. Configuration space methods in relativistic quantum field theory. i. *Phys. Rev.*, 98:812–837, May 1955b. doi: 10.1103/PhysRev.98.812. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.98.812>.
- C. N. Yang and David Feldman. The s-matrix in the heisenberg representation. *Phys. Rev.*, 79:972–978, Sep 1950. doi: 10.1103/PhysRev.79.972. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.79.972>.
- Erez Zohar, J Ignacio Cirac, and Benni Reznik. Simulating $(2+1)$ -dimensional lattice qed with dynamical matter using ultracold atoms. *Physical review letters*, 110(5): 055302, 2013.