

UMA CARACTERIZAÇÃO DE GRAFOS IMERSÍVEIS

Walter Julio Cortez Morales

Depto. de Ciências de Computação e Estatística / IBILCE

Universidade Estadual Paulista (UNESP)

São José do Rio Preto – SP

walter@ibilce.unesp.br

Recebido em 02/2002; aceito em 12/2004 após 4 revisões

Received February 2002; accepted December 2004 after 4 revisions

Resumo

Este trabalho é motivado pelo resultado de Berge, que é uma generalização do teorema de Tutte o qual expressamos na forma: Dado o grafo G de ordem $|V(G)|$ e $v(G)$ o número de arestas em um emparelhamento máximo, existe um conjunto X de vértices de G tal que $|V(G)| + |X| - \omega(G \setminus X) - 2v(G) = 0$, onde $\omega(G \setminus X)$ é o número de componentes de ordem ímpar de $G \setminus X$. Tal expressão chamamos a equação de Tutte-Berge associada de G , e escrevemos simplesmente $T(G; X) = 0$. Os grafos podem ser classificados a partir das soluções da equação de Tutte-Berge. Um grafo G é chamado imersível se, e somente se, $T(G; X) = 0$ possui pelo menos um conjunto solução não vazio de vértices, e G é denominado não imersível se, e somente se, o conjunto vazio é a única solução de $T(G; X) = 0$. O resultado principal deste artigo é a caracterização de grafos imersíveis pelos conjuntos antifatores completos, além disso, provamos que os grafos fatoráveis estão contidos na classe dos imersíveis.

Palavras-chave: grafos; imersível; antifator completo; fatorável; equação de Tutte-Berge.

Abstract

This paper is motivated by the result of Berge who generalized Tutte's theorem which states that: Given a graph G with $|V(G)|$ vertices and $v(G)$ the number of edges in a maximum matching, then there is a subset $X \subseteq V(G)$ such that $|V(G)| + |X| - \omega(G \setminus X) - 2v(G) = 0$, where $\omega(G \setminus X)$ denotes the number of odd components of $G \setminus X$, such expression is called Tutte-Berge's equation associated to G , denoted by $T(G; X) = 0$. These graphs are then studied from solutions of $T(G; X) = 0$. A graph G is called immersible graph if and only if, its associated equation $T(G; X) = 0$ has at least one non-emptyset for X , and it is non-immersible graph if and only if, the unique solution to $T(G; X) = 0$ is the emptyset. The main result of this work is the characterization of immersible graphs via complete antifactor sets, moreover we prove that factorizable graphs are included in the class of immersible graphs.

Keywords: graphs; immersible; complete antifactor; factorizable; Tutte-Berge's equation.

1. Introdução

O presente trabalho foi motivado pelo resultado de Berge [Ber57], que é uma generalização do teorema de Tutte [Tut47] o qual expressamos na forma: Dado o *grafo* G de *ordem* $|V(G)|$ e $v(G)$ o número de *arestas* em um *emparelhamento* máximo, então existe um conjunto X de *vértices* de G tal que $|V(G)| + |X| - \omega(G \setminus X) - 2v(G) = 0$, onde $\omega(G \setminus X)$ é o número de *componentes* de ordem ímpar de $G \setminus X$. Tal expressão chamamos a *equação de Tutte-Berge* associada de G e escrevemos simplesmente $T(G; X) = 0$. Classificamos os *grafos* a partir do conjunto soluções da equação associada. Um *grafo* G é chamado *imersível* se, e somente se, a equação $T(G; X) = 0$ associada de G possui pelo menos um conjunto solução não vazio de vértices, e G é denominado *não imersível* se, e somente se, \emptyset é a única solução de $T(G; X) = 0$ (denotaremos com o símbolo \emptyset o conjunto vazio). Duas *arestas* são *disjuntas* em G , se elas não compartilham nenhum *vértice* em comum, e um subconjunto $M \subseteq E(G)$ é chamado um *emparelhamento* se as *arestas* de M são mutuamente *disjuntas*. Um *emparelhamento* M em G é *máximo* se não existe outro *emparelhamento* M' tal que $|M'| > |M|$ ($|A|$ denota a cardinalidade de um conjunto A). A cardinalidade de um *emparelhamento* máximo em G , denotado por $v(G)$ (ou simplesmente por v se não precisar especificar o *grafo* G) é o *número emparelhamento* de G . Um subconjunto $S \subseteq V(G)$ é denominado *antifator* de G se $\omega(G \setminus S) > |S|$. Além disso, se o conjunto S verifica a igualdade $\omega(G \setminus S) = |S|$, então S é chamado um *antifator completo* de G .

Neste artigo, descrevemos uma caracterização de *grafos imersíveis* pelos conjuntos *antifatores completos*, e provamos que a classe de *grafos fatoráveis*, definida adiante, forma uma subclasse destes *grafos imersíveis*. Todos os *grafos* considerados são *finitos*, *conexos*, *simples* e *não direcionados*. A seguir serão dados alguns resultados e definições necessários para o bom entendimento deste trabalho. Outras definições usadas no texto mas não mencionadas nesta seção podem ser encontradas em Boaventura Netto [Boa03], Bondy [Bon95], Cornuéjols [Cor88] e Lovász & Plummer [Lov86].

Um *grafo não orientado* ou simplesmente um *grafo* G é um par *ordenado* $(V(G), E(G))$, onde $V(G)$ é um conjunto não vazio de elementos chamados *vértices* e $E(G)$ é o conjunto de *arestas* formado por pares *não ordenados* de *vértices*. As cardinalidades $|V(G)|$ e $|E(G)|$ são denominados *ordem* e o *tamanho*, respectivamente, de G . Para qualquer $x \in V(G)$, seja $E_G(x) = \{xy; xy \in E(G)\}$. O *grau* de x em G será denotado por $d_G(x)$ e é igual a $|E_G(x)|$.

Denotaremos por K_n , C_n e $K_{n,m}$, respectivamente, *grafo completo*, *ciclo* sobre n *vértices* e o *grafo bipartido completo* com partes de *tamanhos* n e m . Em particular, $K_{1,n}$ é uma *n-estrela*, cujo *centro* é o *vértice* de grau n .

Uma *componente conexa* F de um *grafo* G é chamado ímpar (par) se $|V(F)|$ é ímpar (par).

A coleção de todas as *componentes conexas* é denotada por $C = C_0 \cup C_1$ (ou $C(G)$ se for preciso especificar o *grafo* G), onde C_1 e C_0 são, respectivamente, as coleções de *componentes conexas* de ordem ímpar e par, e notamos $\omega(G) = |C_1|$ o número de *componentes de ordem ímpar*. Para um subconjunto $X \subseteq V(G)$, denota $G[X]$ o *subgrafo induzido* de G por X e $G \setminus X = G[V(G) \setminus X]$ é o *grafo* obtido de G pela remoção de todos os *vértices* de X e conjuntamente as *arestas* que incidem em X . Um *t-emparelhamento* é um *emparelhamento* $M = \{x_1y_1, \dots, x_t y_t\}$ com t *arestas*. Um *emparelhamento* M em G é *perfeito* se $|V(G)| = 2|M|$ e dizemos que o *grafo* G é *fatorável*, se G contém *emparelhamento perfeito*.

Um dos resultados mais importantes sobre os *grafos fatoráveis* é sem dúvida o seguinte teorema devido a Tutte [Tut47].

Teorema 1.1. Um grafo $G = (V(G), E(G))$ possui um *emparelhamento perfeito* se, e somente se,

$$\omega(G \setminus X) \leq |X|, \quad \forall X \subseteq V(G).$$

A generalização deste teorema foi dada por Berge [Ber57], conforme o seguinte teorema.

Teorema 1.2. Dado o grafo $G = (V(G), E(G))$, então $2\nu(G) = \min_{X \subseteq V(G)} \{ |V(G)| + |X| - \omega(G \setminus X) \}$.

No que se segue, um *vértice* v de um grafo G (no qual se considera um *emparelhamento* M) é dito *M-saturado* se alguma *aresta* de M é *incidente* com v . Caso contrário, v é chamado *M-não-saturado*.

A *deficiência* de um *emparelhamento* M em G é o número de vértices não-saturados por M , e a *deficiência* de G , $def(G)$ é definida como $def(G) = |V(G)| - 2\nu(G)$. O seguinte corolário (que é equivalente ao teorema 1.2) é conhecido como a fórmula de Berge.

Corolário 1.1. Consideremos o grafo $G = (V(G), E(G))$, então $|V(G)| - 2\nu(G) = \max_{X \subseteq V(G)} \{ \omega(G \setminus X) - |X| \}$.

O artigo está organizado como segue. Na seção 2, introduzimos definições de *n-coleções*, *grafos imersíveis* e da *equação de Tutte-Berge* e provamos dois resultados conhecidos usando a nossa terminologia, que serão usados no presente trabalho, [Bru87] e [Die97, pp.41]. Na seção 3, apresentamos a prova de nosso resultado principal que mostra a caracterização dos *grafos imersíveis*, mas antes definimos o conjunto *antifator completo* de um grafo e provamos a seguinte afirmação: todo conjunto não vazio de *vértices* de um grafo G , que verifica a condição estrita de Tutte, não é uma solução da *equação de Tutte-Berge* associada de G . Na Seção 4 será mostrado que os *grafos imersíveis* contêm a classe dos *fatoráveis*.

2. Equação de Tutte-Berge e Grafos Imersíveis

Em Cortez-Morales [Cor99], para um inteiro dado $n \geq 3$ definimos uma *n-coleção* como sendo uma família de *grafos conexos e simples*, e denotada por $H^n(m, \nu(G))$, com os parâmetros inteiros: m é o número de *arestas* e $\nu(G)$ é o *tamanho* do maior *emparelhamento* do grafo, onde,

$$n-1 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2} \quad e \quad 1 \leq \nu(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

respectivamente, $(\lfloor x \rfloor)$ denota o maior inteiro menor ou igual a x .

A fim de clarear a notação, embora seja um abuso, escrevemos sob a estrutura tipo polinomial nos parâmetros m e $\nu(G)$,

$$H^n(m, \nu(G)) = \sum_{m=n-1, n, \dots, \frac{n(n-1)}{2}} \sum_{1 \leq \nu(G) \leq \frac{n}{2}} \Gamma_{m, \nu(G)}$$

onde, $\Gamma_{m,v(G)}$ é uma família de *grafos conexos* mutuamente *não isomorfos* com o mesmo número de *vértices* n (fixado) e todos eles tendo o mesmo *tamanho* m e o mesmo *número emparelhamento* $v(G)$.

Para $n=5$, onde $4 \leq m \leq 10$ e $1 \leq v(G) \leq 2$ temos $H^5(m, v(G)) = \Gamma_{4,1} + \Gamma_{4,2} + \Gamma_{5,2} + \Gamma_{6,2} + \Gamma_{7,2} + \Gamma_{8,2} + \Gamma_{9,2} + \Gamma_{10,2}$



Figura 1 – Na 5-coleção $H^5(m, v(G))$ tomamos a família $\Gamma_{6,2}$ com $m=6$ e $v(G)=2$ de *grafos conexos* e mutuamente *não isomorfos*.

Nos referiremos a G como sendo um *grafo conexo* e *simples* de *ordem* n , ou de maneira equivalente podemos dizer que G é um membro de $H^n(m, v(G))$ ou $G \in H^n(m, v(G))$.

Definição 2.1. Para $G \in H^n(m, v(G))$ e $X \subseteq V(G)$, a expressão $T(G; X) = |V(G)| + |X| - \omega(G \setminus X) - 2v(G) = 0$, é chamada *equação de Tutte-Berge* associada de G . Um subconjunto S de *vértices* de $V(G)$ é uma *solução* para $T(G; X) = 0$, se a igualdade é verificada quando $X=S$. O *grafo* G é chamado *imersível* se, e somente se, sua equação associada $T(G; X) = 0$ possui pelo menos um conjunto *solução* não vazio de *vértices*, e G é denominado *não imersível* se, e somente se, $T(G; X) = 0$ admite como a única *solução* o conjunto vazio.

Denotando-se por G_{im} e G_{n-im} as classes de *grafos imersíveis* e *não imersíveis*, respectivamente, podemos escrever $H^n(m, v(G)) = G_{im} + G_{n-im}$, se ambas classes de *grafos* não forem vazias.

O nome *imersível* refere-se ao ato de buscar alguma coisa imersa, por exemplo, entre os conjuntos de *vértices* não vazios de um *grafo*. Além disso, há uma certa analogia com a noção de dependência linear de álgebra linear.

Por exemplo: Na Figura 1, os três primeiros desenhos representam *grafos imersíveis* e os outros dois últimos *grafos não imersíveis*. Na Figura 2, o *grafo completo* K_3 é *não imersível*, enquanto para qualquer *aresta* e de K_3 , o *grafo* K_3-e é *imersível*.

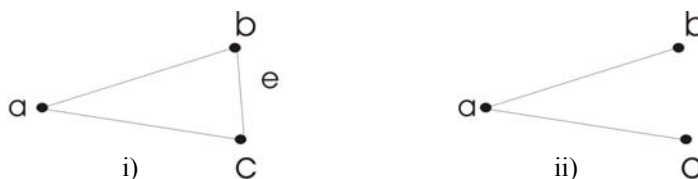


Figura 2 – i) O *grafo completo* K_3 não é *imersível*, pois $T(K_3; X) = 0$ tem como a única *solução* \emptyset ,
ii) O *grafo* K_3-e é *imersível*, pois, além da *solução* \emptyset , o conjunto $X = \{a\}$ é outra *solução* da equação $T(K_3-e; X) = 0$.

A proposição seguinte prova que $|V(G)| + |X| - \omega(G \setminus X)$ é um inteiro par.

Proposição 2.1. [Bru87, p.57] Seja $G=(V(G),E(G))$ um *grafo conexo*, então $|V(G)|+|X|-\omega(G\setminus X)$ é um número inteiro par, para todo subconjunto $X\subseteq V(G)$.

Demonstração. Vamos argumentar por contradição. $|V(G)|-[\omega(G\setminus S)-|S|]$ é um inteiro ímpar se, e somente se, acontecem um dos dois casos:

- (a) $|V(G)|$ é ímpar e $[\omega(G\setminus S)-|S|]$ é par.

Neste caso, temos dois subcasos

- i. $\omega(G\setminus S)$ e $|S|$ são ambos pares.

Nós lembramos que definimos C_0 e C_1 , respectivamente, como as coleções de *componentes conexas de ordens ímpares e pares*.

Dado que $\omega(G\setminus S)=2t$, $|S|=2r$ e $C^1, C^2, C^3, \dots, C^{2t}$ são as $2t$ *componentes conexas* ímpares de $G\setminus S$. Assim, o valor

$$|V(G)|=|S|+\sum_{i=1}^{2t}|C^i|+\sum_{C\in C_0}|C|$$

é um número par, porque $|S|$ é par, a soma de um número par de inteiros ímpares é par e cada *componente conexa* de C_0 possui *tamanho* par.

- ii. $\omega(G\setminus S)$ e $|S|$ são ambos ímpares.

Analogamente este caso também conduz a uma contradição.

- (b) $|V(G)|$ é par e $[\omega(G\setminus S)-|S|]$ é ímpar.

Para provar esta parte da contradição é suficiente mostrar que o fato de $|V(G)|$ ser par, implica em $\omega(G\setminus S)$ e $|S|$ possuírem a mesma paridade. Com efeito, fixada p uma paridade para $\omega(G\setminus S)$, temos como consequência que, o número total de *vértices* na coleção de *componentes* ímpares de $G\setminus S$ possui paridade p . Em adição ao número total de *vértices* na coleção de *componentes* pares ser par, concluímos que $\omega(G\setminus S)$ possui paridade p . Como $|V(G)|$ é par temos que $|S|$ possui paridade p . O que encerra o argumento de contradição. \square

Observação 2.1. [Bru87, p.57, prop.4.1.8] Se S é uma solução para $T(G;X)=0$, isto não implica que $G\setminus S$ não tenha *componentes* pares. Porém, se S for maximal, então $G\setminus S$ tem somente *componentes* ímpares.

Demonstração. Seja S um subconjunto maximal de $V(G)$, com a propriedade de ser uma solução de $T(G;X)=0$. Suponha, por um momento, que $G\setminus S$ possua uma *componente* par C . Seja v um *vértice* de C cuja remoção de C não defina mais que uma *componente conexa* a partir de C .

Como $\omega(G\setminus(S\cup\{v\}))=\omega(G\setminus S)+1$ e S é uma solução de $T(G;X)=0$, temos que $\{S\cup\{v\}\}$ também é uma solução, porque

$$\begin{aligned} 0 &= |V(G)|+|S|-\omega(G\setminus S)-2v(G) \\ &= |V(G)|+|S|-(\omega(G\setminus(S\cup\{v\}))-1)-2v(G) \\ &= |V(G)|+|S|+1-\omega(G\setminus(S\cup\{v\}))-2v(G) \\ &= |V(G)|+|S\cup\{v\}|-\omega(G\setminus(S\cup\{v\}))-2v(G), \end{aligned}$$

que contraria a maximalidade de S . \square

Por exemplo, seja G um *grafo* com $V(G) = \{a, b, c, x, y\}$, onde $d_G(a) = d_G(b) = d_G(c) = 1$, $d_G(x) = 2$ e $d_G(y) = 3$. Os conjuntos $S = \{y\}$ e $T = \{x, y\}$ são soluções para $T(G; X) = 0$. O *grafo* $G \setminus S$ tem *componentes* tanto pares como ímpares, mas o *grafo* $G \setminus T$ tem apenas *componentes* ímpares, pois, T é maximal.

Proposição 2.2. [Die97, p.41, ex.10] Seja $G = (V(G), E(G))$ um *grafo*. Então, G contém um k -*emparelhamento* se, e somente se, $\omega(G \setminus X) \leq |X| + |V(G)| - 2k$, $\forall X \subseteq V(G)$.

Demonstração.

A condição necessária é imediata.

Para provar a condição suficiente, admitamos que para todos os subconjuntos $S \subseteq V(G)$ se verifica $\omega(G \setminus S) \leq |S| + t$, onde, $t = |V(G)| - 2k$.

Seja $H = G \bullet K_t$ o *grafo* com $V(H) = V(G) \cup V(K_t)$ e $E(H) = E(G) \cup E(K_t) \cup \{uv : u \in V(G) \text{ e } v \in V(K_t)\}$, resultando G um *subgrafo* de H .

Em G haverá um *emparelhamento conectando* todos os *vértices* menos os t , se e somente se, H possui um *emparelhamento perfeito*.

Pelo teorema 1.1, H tem *emparelhamento perfeito* se, e somente se, $\omega(H \setminus T) \leq |T|$ para todo $T \subseteq V(H)$.

Provemos que $\omega(H \setminus T) \leq |T|$, $\forall T \subseteq V(H)$

Consideremos dois casos:

$$(i) \quad V(K_t) \subset T$$

$$(ii) \quad V(K_t) \not\subset T.$$

(i) Para $S \subset V(G)$ seja $T = S \cup V(K_t)$, temos $\omega(H \setminus T) = \omega(G \setminus S) \leq |S| + t = |T|$.

(ii) O *grafo* $H \setminus T$ é *conexo*, então $\omega(H \setminus T) \leq 1$ o que implica em $\omega(H \setminus T) \leq |T|$.

Portanto, H tem um *emparelhamento perfeito*.

$\forall X \subseteq V(G)$. Pelo teorema 1.2, $2k \leq 2\nu(G) = \min_{X \subseteq V(G)} |V(G)| + |X| - \omega(G \setminus X)$.

Concluimos assim que G possui um k -*emparelhamento* e a proposição está demonstrada. \square

Sabemos que as expressões $|V(G)| + |X| - \omega(G \setminus X)$ e $2\nu(G)$ são inteiros pares, além disso, para todo subconjunto maximal $X \subseteq V(G)$, o *grafo* $G \setminus X$ não tem *componentes* pares. Porém, formalizamos a seguinte questão: Sob que condição um dado *grafo* possui pelo menos um subconjunto X não vazio de *vértices*, tal que X , seja a solução da *equação de Tutte-Berge*? A seção 3 está constituída pela resposta, ou seja a caracterização dos *grafos imersíveis*, com este propósito estendemos o conceito de conjunto *antifator* de Summer [Sum76], que também é mencionado como o *conjunto de Tutte* por Lovász & Plummer [Lov86].

3. A Caracterização de Grafos Imersíveis

Nesta seção, provamos o Teorema Principal, que fornece uma caracterização dos *grafos imersíveis* pelos conjuntos *antifatores completos*. Primeiramente, introduzimos a noção do conjunto *antifator completo* e logo em seguida, provamos a seguinte afirmação: todo subconjunto de *vértices* de um *grafo* G que verifica a condição estrita de Tutte, não é uma solução para a equação associada de G .

Definição 3.1. Dado o grafo $G=(V(G),E(G))$, $S \subseteq V(G)$ é chamado um *antifator completo* de G (ou *conjunto completo de Tutte*) se $\omega(G \setminus S) \geq |S|$.

Proposição 3.1. Para qualquer membro G de $H^n(m,v)$ seja S um conjunto de *vértices* de G . Se S satisfaz a desigualdade estrita da condição de Tutte, isto é, $\omega(G \setminus S) < |S|$, então S não é uma solução da equação de Tutte-Berge $T(G;X)=0$ associada de G .

Demonstração.

Suponhamos que S seja uma solução de $T(G;X)=0$ satisfazendo a condição estrita de Tutte.

De $\omega(G \setminus S) < |S|$ temos que $|V(G)| < |V(G)| + |S| - \omega(G \setminus S)$. [1]

Como S é uma solução de $T(G;X)=0$, então $|V(G)| + |S| - \omega(G \setminus S) = 2v(G)$. [2]

De [1] e [2], obtemos $|V(G)| < 2v(G)$, o que contradiz o fato de que $2v(G) \leq |V(G)|$ e está concluída a demonstração da proposição. \square

Teorema 3.1. Seja G um membro de $H^n(m,v)$. Então, o grafo G é *imersível* se, e somente se, G possui *antifator completo* não vazio.

Demonstração.

Condição necessária, assumamos que G seja *imersível* e provemos que G possui *antifator completo*.

Pela hipótese existe um subconjunto não vazio S de $V(G)$, tal que, no corolário 1.1 seu máximo é atingido em S . Como o máximo é sempre não negativo ou seja, pelo menos é zero, então $|S| \leq \omega(G \setminus S)$.

Portanto, S é um *antifator completo* para G .

Para a prova de suficiência, admitamos que G possui *antifator completo* e provemos que este conjunto é uma solução da equação de Tutte-Berge $T(G;X)=0$ associada de G .

Suponhamos que G seja *não imersível* e admitamos que existe um subconjunto não vazio $S \subset V(G)$ tal que S verifica $\omega(G \setminus S) \geq |S|$ de onde escrevemos, $0 \leq \omega(G \setminus S) - |S|$.

A equação de Tutte-Berge $T(G;X) = 0$ associada de G possui a única solução \emptyset , isto é,

$$|V(G)| - 2v(G) = \omega(G \setminus \emptyset) - |\emptyset| = \max_{X \subseteq V(G)} \{ \omega(G \setminus X) - |X| \}.$$

Por conseguinte temos que, $0 \leq \omega(G \setminus S) - |S| < \omega(G \setminus \emptyset) - |\emptyset| = \omega(G)$.

Sendo G *conexo*, as desigualdades acima obrigam que $\omega(G)$ seja igual a um, de onde concluímos que $|V(G)| - 2v(G) = 1$ e, portanto, que $|V(G)|$ é ímpar. Por outro lado, isto

implica que $|S| - \omega(G \setminus S)$ seja nulo e, conseqüentemente, par. Mas, desta forma, o número inteiro $|V(G)| + |S| - \omega(G \setminus S)$ será ímpar, contrariando a proposição 2.1. Isto se deve à suposição de que G não é imersível.

Por conseguinte, G é imersível e está completada a demonstração do teorema. \square

Corolário 3.1. Sejam os membros K_n , $K_{1,n}$ e C_n de $H^n(m, \nu(G))$, então eles são imersíveis, para todo inteiro par positivo n .

Demonstração.

Para qualquer vértice x de K_n (C_n) conjunto unitário com o único elemento x , é um conjunto antifator completo. Analogamente, o conjunto unitário gerado pelo elemento centro de $K_{1,n}$ é um conjunto antifator completo de $K_{1,n}$. \square

Seja $G=(V(G), E(G))$ um grafo. Para $v_o, v_t \in V(G)$, um (v_o, v_t) -caminho P de G é uma sequência alternada de vértices e arestas

$$v_o, v_o v_1, v_1, v_1 v_2, v_2, \dots, v_{t-1}, v_{t-1} v_t, v_t,$$

onde, $V(P) = \{v_i \in V(G) / 0 \leq i \leq t\}$, $v_i \neq v_j$ para $i \neq j$, e $E(P) = \{v_i v_{i+1} \in E(G) / 0 \leq i \leq t-1\}$. Os vértices v_o e v_t são os extremos de P .

Uma árvore é um grafo conexo e acíclico, e uma folha (ou vértice pendente) de uma árvore é um vértice de grau um.

Corolário 3.2. Consideremos que G é um membro de $H^n(m, \nu(G))$. Se G é uma árvore, então G é imersível para todo inteiro positivo n .

Demonstração.

Toda árvore com pelo menos dois vértices possui pelo menos duas folhas. Seja v uma folha de uma árvore G com n vértices, então o grafo $G \setminus \{v\}$, é também uma árvore com $n-1$ vértices. Pois, um vértice de grau um não pertence ao caminho que conecta outros dois vértices. Por conseguinte, para $x, y \in V(G \setminus \{v\})$, cada (x, y) -caminho de G é também um caminho de $G \setminus \{v\}$. Logo, $G \setminus \{v\}$ é conexo. Como uma remoção de um vértice não pode criar um ciclo, $G \setminus \{v\}$ também é acíclico. Assim, $G \setminus \{v\}$ é uma árvore com $n-1$ vértices.

Tomando-se o conjunto $S = \{x\}$, onde x é uma folha de G , e S verifica a equação de Tutte-Berge associado de G , está provado o corolário. \square

4. Grafos Fatoráveis Constituem uma Subclasse dos Imersíveis

Nesta última seção, apresentamos o teorema seguinte que prova que os grafos fatoráveis formam uma subclasse dos grafos imersíveis.

Teorema 4.1. Seja G um membro de $H^n(m, \nu(G))$. Se G possui emparelhamento perfeito, então G é imersível.

Demonstração.

Seja $G=(V(G),E(G))$ um *grafo* com um *emparelhamento perfeito*, então o número de *vértices* de G é par.

Como por hipótese G é *conexo*, sempre existe em G um *vértice* u que, ao ser removido de G produz outro *grafo* $G-u$ que é *conexo*. Logo, para $X=\{u\}$, a *equação de Tutte-Berge* reduz-se a:

$$|V(G)| + |X| - \omega(G \setminus X) - 2\nu(G) = |V(G)| + 1 - 1 - 2\frac{|V(G)|}{2} = 0$$

Portanto, G é *imersível* e o teorema está demonstrado. □

Referências Bibliográficas

- [Ber57] Berge, C. (1957). Sur le couplage maximum d'un graphe. *Proc. Nat. Science*, **247**, p.258.
- [Boa03] Boaventura Netto, P.O. (2003). *GRAFOS: Teoria, Modelos e Algoritmos*. 3ª ed., Edgard Blücher, São Paulo.
- [Bon95] Bondy, J.A. (1995). Matchings and Extensions. **In:** *Handbook of Combinatorics* [edited by R.I. Graham, M. Grótschel and L. Lovász], vol. I, 179-232, North-Holland, Amsterdam.
- [Bru87] Brualdi, R.A. (1987). Introduction to Matching Theory. **In:** *Combinatorial Geometries* (Encyclopedia of mathematics and its applications; v.29) [edited by N. White], 53-69, Cambridge University Press, Cambridge.
- [Cor88] Cornuéjols, G. (1988). General Factors of Graphs. *J. Comb. Theory Ser. (B)*, **45**, 449-467.
- [Cor99] Cortez-Morales, W.J. (1999). G-Comportamento dos Matchings, Matróides e Fluxos. Tese de Livre-Docente, Universidade Estadual Paulista, Campus de São José do Rio Preto – SP.
- [Die97] Diestel, R. (1997). *Graph Theory*. Grad. Texts Math. **173**, Springer-Verlag, New York, Inc.
- [Lov86] Lovász, L. & Plummer, M.D. (1986). Matching Theory. *Annals of Discrete Mathematics*, **29**.
- [Sum76] Summer, D.P. (1976). 1-factors and antifactor sets. *J. London Math. Soc.*, **2**(3), 351-359.
- [Tut47] Tutte, W.T. (1947). The factorization of linear graphs. *J. London Math. Soc.*, **22**, 107-111.