

Algumas Considerações sobre Espaços de Eilenberg-MacLane

Évelin Menegusso

Orientadora: Profa. Dra. Ermínia de Lourdes Campello Fanti

Co-orientador: Prof. Dr. João Peres Vieira

Dissertação apresentada ao Departamento de
Matemática - IBILCE - UNESP, como parte dos
requisitos para obtenção do título de Mestre em
Matemática.

São José do Rio Preto - SP
Março - 2007

Meneguesso, Évelin

Algumas considerações sobre Espaços de Eilenberg - MacLane/
Évelin Meneguesso - São José do Rio Preto : [s.n.], 2007. 92 f.:il
; 30cm.

Orientadora: Ermínia de Lourdes Campello Fanti

Co-orientador: João Peres Vieira

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1.Topologia Algébrica. 2.Grupos de Homotopia. 3.Eilenberg-MacLane, Espaços de. I. Fanti, Ermínia de Lourdes Campello. II. Vieira, João Peres. III. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. IV. Título.

CDU – 515.14

COMISSÃO JULGADORA

Titulares

Prof^a. Dra. Ermínia de Lourdes Campello Fanti - Orientadora

Prof. Dr. Tomas Edson Barros

Prof^a. Dra. Maria Gorete Carreira Andrade

Suplentes

Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher

Profa. Dra. Luciana de Fátima Martins Brito

*"O temor do Senhor é o princípio da ciência;
os loucos desprezam a sabedoria e a instrução".
Provérbios, 1:7.*

*Dedico aos meus pais e
meus irmãos.*

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, por me conceder a graça de concluir mais esta etapa, por ter me fortalecido nos momentos difíceis e pelas pessoas que colocou no meu caminho. Em especial agradeço:

Aos meus pais e meus irmãos pelo carinho, pelos conselhos, pela confiança e apoio que deles recebi durante todos os anos de minha vida.

À Prof^a. Dra. Ermínia de Lourdes Campello Fanti por me iniciar nos estudos de Topologia Algébrica, pela amizade, pela orientação, paciência, disponibilidade e tempo dedicado a este projeto.

Ao Prof. Dr. João Peres Vieira pela co-orientação e auxílio nas correções necessárias para a boa apresentação deste trabalho.

À Prof^a. Dra. Maria Gorete Carreira Andrade, pela amizade, colaboração e pela sua alegria sempre presente.

À Prof^a. Dra. Denise de Mattos, pelas sugestões durante o Exame Geral de Qualificação.

À todos os professores que tive desde o colégio, especialmente à Prof^a. Dina que foi quem me ensinou a amar a Matemática. Agradeço também aos professores do Departamento de Matemática do Ibilce, pela formação acadêmica.

Às queridas amigas Marina, Michelle, Cibele e Aline pelo carinho, apoio e agradáveis momentos que passamos juntas.

Ao meu namorado Rodrigo, pelo apoio e compreensão pelo tempo dedicado aos estudos em detrimento à sua atenção.

Não poderia deixar de agradecer à Capes, pelo apoio financeiro sem o qual não seria possível a realização desse projeto.

Que Deus os abençoe.

Sumário

Introdução	10
1 Grupos de Homotopia de Ordem Superior	13
1.1 Definições Equivalentes de $\pi_n(X, x_0)$	14
1.2 Propriedades Básicas e Exemplos	20
1.3 Grupos de Homotopia Relativa e Sequência Exata Longa	31
2 CW-Complexos	37
2.1 CW-Complexos	37
2.2 Grupo Fundamental e Adjunção de 2 - Células	44
2.3 Aproximação Celular e Torre de Postnikov	49
3 Espaços de Eilenberg Mac-Lane	57
3.1 Definição e Propriedades	57
3.2 Existência dos $K(G, n)$ - Espaços	58
3.3 Exemplos	62
3.4 Considerações Finais	64
A Grupo Fundamental	66
A.1 Caminhos Homotópicos e o Grupo Fundamental	66
A.2 O Grupo Fundamental de S^1	76
A.3 Homomorfismo Induzido e Equivalência de Homotopia	80
A.4 Exemplos de Grupos Fundamentais e o Teorema de Van Kampen	87
Referências Bibliográficas	91

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é mostrar a existência dos complexos de Eilenberg-MacLane, ou $K(G, n)$ -espaços (como são comumente chamados), para G um grupo arbitrário se $n = 1$, e G abeliano, se $n \geq 2$. Esses espaços desempenham um papel muito importante na Topologia Algébrica, principalmente na conexão entre homotopia e (co)homologia

Palavras chave: Grupos de Homotopia, CW-Complexos, Aproximação Celular, Espaços de Eilenberg-MacLane.

Abstract

The main purpose of this work is to show the existence of the Eilenberg-MacLane's complexes, or $K(G, n)$ -spaces (as they are usually called), for an arbitrary group G if $n = 1$, and G abelian, if $n \geq 2$. Such spaces play a very important role in Algebraic Topology, mainly in the connection between homotopy and (co)homology.

Key words: Homotopy Groups, CW-Complexes, Cellular Approximation, Eilenberg-MacLane Spaces.

Introdução

Dado um espaço topológico X podemos associar a ele uma família de grupos “ $\pi_j(X)$ ”, $j \geq 1$, denominados *grupos de homotopia*. Se G é um grupo e n é um inteiro, $n \geq 1$, um espaço topológico conexo X é dito um espaço *Eilenberg-MacLane do tipo* (G, n) ou um $K(G, n)$ -*espaço*, ou ainda um espaço *Eilenberg-MacLane* $K(G, n)$, se $\pi_j(X) = 0$, $\forall j \neq n$ e $\pi_n(X) \simeq G$. Tais espaços desempenham um papel muito importante na Topologia Algébrica principalmente na conexão entre homotopia e (co)homologia. O nome é devido a Samuel Eilenberg e Saunders MacLane, mas o caso $n = 1$ foi estudado por Hurewicz. A existência de um espaço $K(G, n)$, $n > 1$, só faz sentido para G abeliano, uma vez que os espaços $K(G, n)$ são definidos em função dos grupos de homotopia “ $\pi_n(X)$ ” e esses são abelianos se $n > 1$. Uma importante propriedade dos espaços $K(G, n)$ é que, para um grupo G e Y um CW-complexo, existe uma bijeção entre $[Y, K(G, n)]$ (o conjunto das classes de homotopia de aplicações de Y em $K(G, n)$, com pontos base) e $H^n(Y, G)$, o grupo de cohomologia de Y com coeficientes em G . Os $K(G, 1)$ - espaços, em particular, são muito úteis na teoria dos grupos. Tais espaços estabelecem uma relação entre a cohomologia de grupos e a de espaços uma vez que, para cada k , o grupo de cohomologia de um grupo G com coeficientes em um $\mathbb{Z}G$ -módulo M , $H^k(G, M)$, é isomorfo a $H^k(X, \mathbf{M})$, onde X é um $K(G, 1)$ e $\mathbf{M}$ é um sistema de coeficientes locais sobre X associado ao $\mathbb{Z}G$ -módulo M .

O objetivo principal deste trabalho é mostrar a existência dos espaços de Eilenberg-MacLane, ou $K(G, n)$ -espaços, para G um grupo arbitrário se $n = 1$, e G abeliano, se $n \geq 2$. Para tanto faz-se necessário o estudo de vários conceitos e resultados. Dentre os conceitos destacamos, por exemplo, os de grupos de homotopia de ordem superior (caso absoluto e relativo), CW-complexos e aplicação celular, e dentre os resultados, o de Aproximação Celular para Pares e a Torre de Postnikov. Ressaltamos que o cálculo do grupo fundamental do

bouquet de círculos, e mais geralmente do n -ésimo grupo de homotopia do bouquet de n -esferas, desempenham um papel importante no desenvolvimento do trabalho.

As principais referências bibliográficas são [5] e [7].

No *Capítulo 1*, apresentamos um estudo sobre grupos de homotopia de ordem superior. Inicialmente apresentamos três definições equivalentes do n -ésimo grupo de homotopia de um espaço X baseado no ponto x_0 , denotado por $\pi_n(X, x_0)$. Em seguida algumas proposições básicas e exemplos. Mostramos que o grupo $\pi_n(X, x_0)$ de qualquer espaço topológico X é abeliano se $n \geq 2$. Uma propriedade útil dos grupos de homotopia de ordem superior é que $\pi_n(B, b_0)$ é isomorfo ao $\pi_n(E, e_0)$ onde (E, p) é um espaço de recobrimento de B e $b_0 = p(e_0)$. Apresentamos também a definição de grupos de homotopia relativa $\pi_n(X, A, x_0)$ para um par (X, A) com ponto base $x_0 \in A$. Uma importante propriedade dos grupos de homotopia relativa $\pi_n(X, A, x_0)$ é que eles se encaixam numa seqüência exata longa.

No *Capítulo 2* apresentamos a definição de CW-complexos e alguns exemplos para ilustrar tal conceito. Em seguida mostramos algumas construções utilizadas no decorrer deste trabalho. Mostramos também a relação entre o grupo fundamental de um espaço conexo por caminhos X e o grupo fundamental de X^* obtido de X por adjunção (colagem) de uma coleção de 2-células abertas. Como consequência disto obtemos um resultado muito útil para a prova da existência de $K(G, 1)$ - espaços, o Corolário 2.2.1:

Dado um grupo G qualquer, existe um CW-complexo 2-dimensional Y , conexo por caminhos, tal que $\pi_1(Y)$ é isomorfo a G . Se G tem uma apresentação com um número finito de geradores e relações então podemos obter Y compacto.

Após esse resultado apresentamos o Teorema 2.2.2, que nos garante que o grupo fundamental de um CW-complexo conexo X só depende do seu 2-esqueleto X^2 , e mais alguns resultados que serão utilizados posteriormente. Por fim são apresentados nesse capítulo os resultados sobre Aproximação Celular para espaços e pares de espaços (Proposição 2.3.2) e a construção da Torre de Postnikov (Proposição 2.3.3), que são de fundamental importância para a construção dos $K(G, n)$ -espaços.

No *Capítulo 3* nos dedicamos essencialmente à prova da existência dos $K(G, n)$ -espaços. Inicialmente definimos o que é um $K(G, n)$ -espaço (ou espaço de Eilenberg Mac-Lane) e apresentamos algumas propriedades. Em especial,

que para um CW-complexo X , ser $K(G, 1)$ é equivalente a dizer que esse espaço X tem $\pi_1(X) \simeq G$ e o espaço de recobrimento universal contrátil. A prova da existência dos $K(G, n)$ - espaços é tratada em dois casos separados: $n = 1$ e $n \geq 2$, devido ao fato que $\pi_n(X, x_0)$ são abelianos para $n \geq 2$. Para o caso $n = 1$ recorreremos ao Corolário 2.2.1 e usamos a Torre de Postnikov. Já para o caso $n \geq 2$, precisamos do resultado seguinte (Proposição 3.2.2), que é similar ao dado no caso $n = 1$, e que para ser obtido usa um resultado que relaciona, sob certas hipóteses, os grupos de homotopia de um par (X, A) e do quociente X/A (Proposição 3.2.1), além de outros, como por exemplo, o cálculo do n -ésimo grupo de homotopia do bouquet de n - esferas.

Para todo grupo abeliano G e $n \geq 2$, existe um CW-complexo $(n - 1)$ -conexo, de dimensão $n + 1$, tal que $\pi_n(X) \simeq G$.

Com esse resultado e o da Torre de Postnikov provamos então a existência dos espaços Eilenberg Mac-Lane “ $K(G, n)$ ” para $n \geq 2$ e G um grupo abeliano qualquer (Teorema 3.2.3). Finalizando o Capítulo apresentamos alguns exemplos, analisando os passos da construção, e fazemos algumas considerações sobre os espaços de Eilenberg-MacLane.

No *Apêndice* são apresentados alguns pré-requisitos, conceitos e resultados sobre grupo fundamental, com destaque para o grupo fundamental do círculo unitário S^1 e o Teorema de Van-Kampen. Esses pré-requisitos são úteis para definirmos grupos de homotopia de ordem superior e para melhor compreensão do texto, porém são dispensáveis para quem tem familiaridade com tais tópicos.

Capítulo 1

Grupos de Homotopia de Ordem Superior

A definição dos grupos de homotopia de ordem superior de um espaço X , usualmente denotados por “ $\pi_n(X, x_0)$ ” $n \geq 2$, foi dada nos anos 1932 - 1935 por Eduard Čech (1893 - 1960) e Witold Hurewicz (1904-1956) e é de certo modo, uma extensão natural do conceito de *grupo fundamental* de X “ $\pi_1(X, x_0)$ ” (vide Apêndice). Foi Hurewicz quem deu a definição mais satisfatória para os grupos de homotopia de ordem superior e provou as propriedades fundamentais. Nós apresentaremos aqui três definições equivalentes para tais grupos (definições 1.1.1, 1.1.2 e 1.1.5).

Se n é um inteiro positivo usamos o símbolo I^n para denotar o cubo unitário n -dimensional

$$I^n = \{t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n; \ 0 \leq t_i \leq 1 \ \forall i\}$$

e ∂I^n , chamado o bordo de I^n , denota só seus pontos do bordo

$$\partial I^n = \{t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in I^n; \ \exists i, \ t_i = 0 \text{ ou } 1\}.$$

(Não devemos confundir aqui o símbolo ∂ com o operador bordo normalmente usado na teoria de homologia.)

1.1 Definições Equivalentes de $\pi_n(X, x_0)$

Definição 1.1.1. (A) *Seja X um espaço e x_0 um ponto de X . Para um dado inteiro positivo n considere o conjunto $F_n(X, x_0)$ de todas as aplicações contínuas α do n -cubo unitário I^n em X para os quais $\alpha(\partial I^n) = x_0$. Defina uma relação de equivalência $\sim_{x_0}$ em $F_n(X, x_0)$, a saber, α é equivalente módulo x_0 a β em $F_n(X, x_0)$, escrito $\alpha \sim_{x_0} \beta$, se existe uma homotopia $H : I^n \times I \longrightarrow X$ tal que*

$$\begin{aligned} H(t_1, \dots, t_n, 0) &= \alpha(t_1, \dots, t_n) \\ H(t_1, \dots, t_n, 1) &= \beta(t_1, \dots, t_n), & (t_1, \dots, t_n) \in I^n, \\ e \\ H(t_1, \dots, t_n, s) &= x_0, & (t_1, \dots, t_n) \in \partial I^n, s \in I. \end{aligned}$$

Sob esta relação de equivalência em $F_n(X, x_0)$, a classe de equivalência determinada por α é denotada $[\alpha]$ e chamada a classe de homotopia de α módulo x_0 ou simplesmente classe de homotopia de α .

Defina uma operação $$ sobre $F_n(X, x_0)$ como segue: para cada α e β em $F_n(X, x_0)$,*

$$(\alpha * \beta)(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} \alpha(2t_1, t_2, \dots, t_n), & 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n), & \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1. \end{cases}$$

Note que a operação $$ é completamente determinada pela primeira coordenada do ponto variável $(t_1, \dots, t_n)$ e que a continuidade de $\alpha * \beta$ segue do Lema da Continuidade (A.1.1). A operação $*$ induz uma operação $\bullet$ sobre o conjunto das classes de homotopia de $F_n(X, x_0)$:*

$$[\alpha] \bullet [\beta] = [\alpha * \beta].$$

Com esta operação, o conjunto das classes de equivalência de $F_n(X, x_0)$ é um grupo. Este grupo é chamado o n -ésimo grupo de homotopia de X com ponto base x_0 e é denotado por $\pi_n(X, x_0)$.

Observação 1.1.1. *Como no caso do grupo fundamental, pode-se verificar que:*

- (1) *A relação $\sim_{x_0}$ é uma relação de equivalência sobre $F_n(X, x_0)$.*

(2) A operação $\bullet$ está bem definida. Em outras palavras, se $\alpha \sim_{x_0} \alpha'$ e $\beta \sim_{x_0} \beta'$ então $\alpha * \beta \sim_{x_0} \alpha' * \beta'$.

(3) Com a operação $\bullet$, $\pi_n(X, x_0)$ é de fato um grupo. Sua identidade é a classe $[c]$ determinada pela aplicação constante $c(I^n) = x_0$. A inversa $[\alpha]^{-1}$ de $[\alpha]$ é a classe $[\alpha^{-1}]$ onde α^{-1} , chamada a inversa de α , é definida por

$$\alpha^{-1}(t_1, \dots, t_n) = \alpha(1 - t_1, \dots, t_n), \quad (t_1, \dots, t_n) \in I^n.$$

Para a próxima definição usamos que o espaço quociente de I^n obtido pela identificação do ∂I^n a um ponto é homeomorfo a n -esfera S^n . Vamos assumir que o ponto de identificação é o ponto $1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ de S^n , que tem a primeira coordenada igual a um e as demais nulas. Então o conjunto (e conseqüentemente o grupo,) $\pi_n(X, x_0)$ pode ser definido em termos de aplicações de $(S^n, 1)$ em (X, x_0) , como segue:

Definição 1.1.2. (*B*) Para um dado inteiro positivo n , considere o conjunto $G_n(X, x_0)$ de todas as aplicações contínuas α , de S^n em X , tal que $\alpha(1) = x_0$. Defina uma relação de equivalência do seguinte modo: Para α e β em $G_n(X, x_0)$, α é equivalente módulo x_0 a β , escrito $\alpha \sim_{x_0} \beta$, se existe uma homotopia $H : S^n \times I \rightarrow X$ tal que $H(\cdot, 0) = \alpha$ e $H(\cdot, 1) = \beta$, $H(1, s) = x_0$ para $s \in I$.

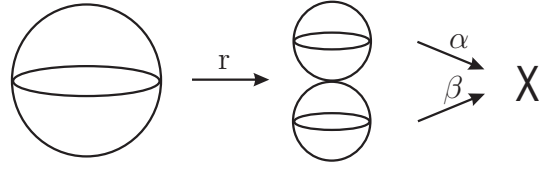
A classe de equivalência determinada por α , a qual denotamos por $[\alpha]$, é chamada a classe de homotopia de α e consideramos o conjunto das classes de homotopia $\pi_n(X, x_0) := G_n(X, x_0) / \sim_{x_0}$.

A operação $\circ$ em $\pi_n(X, x_0)$ é definida em termos da identificação de I^n com S^n . Mais precisamente, sejam $\alpha, \beta \in G_n(X, x_0)$. A aplicação identificação q leva os conjuntos

$$A = \{(t_1, \dots, t_n) \in I^n; t_1 \leq \frac{1}{2}\}, \quad B = \{(t_1, \dots, t_n) \in I^n; t_1 \geq \frac{1}{2}\}$$

nos hemisférios A' e B' , respectivamente, de S^n cuja intersecção $A' \cap B' = q(A \cap B)$ é homeomorfo a S^{n-1} .

Imagine que $A' \cap B'$ é identificado com o ponto base 1 pela aplicação identificação r . O espaço resultante consiste de duas n -esferas tangentes no seus



pontos comuns. O produto $\alpha * \beta : S^n \longrightarrow X$ é agora definido por

$$(\alpha * \beta)(x) = \begin{cases} \alpha(r(x)), & x \in A' \\ \beta(r(x)), & x \in B'. \end{cases}$$

A operação $\circ$ em $\pi_n(X, x_0) := G_n(X, x_0) / \sim$ é então definida por

$$[\alpha] \circ [\beta] = [\alpha * \beta].$$

Com essa operação $\pi_n(X, x_0)$ é um grupo, também chamado o n -ésimo grupo de homotopia de X com ponto base x_0 .

Observação 1.1.2. As definições A(1.1.1) e B(1.1.2) são definições equivalentes dos grupos $\pi_n(X, x_0)$, isto é, os dois grupos obtidos são isomorfos.

De fato, seja $q : I^n \longrightarrow S^n$ a aplicação que identifica ∂I^n ao ponto 1. Para cada $\alpha : S^n \longrightarrow X$, elemento de $G_n(X, x_0)$, associamos a aplicação $\alpha' := \alpha \circ q$.

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{\alpha} & X \\ q \uparrow & \nearrow \alpha \circ q & \\ I^n & & \end{array}$$

Pode-se verificar que a aplicação $\psi : G_n(X, x_0) \longrightarrow F_n(X, x_0)$, que a cada $\alpha \in G_n(X, x_0)$ associa $\alpha' := \alpha \circ q \in F_n(X, x_0)$, é bijetora e ainda considerando as classes de equivalência dos elementos de acordo com as definições A (1.1.1) e B (1.1.2) temos: $[\alpha] = [\beta]$ (em $G_n(X, x_0) / \sim_{x_0}$) se, e somente se, $[\alpha'] = [\beta']$ (em $F_n(X, x_0) / \sim_{x_0}$). Logo ψ induz uma aplicação bijetora nos espaços quocientes $\tilde{\psi} : [\alpha] \mapsto [\alpha']$. Além disso $\tilde{\psi}$ é homomorfismo de grupos pois pode-se verificar que $\tilde{\psi}([\alpha] \circ [\beta]) = \tilde{\psi}([\alpha * \beta]) = [(\alpha * \beta) \circ q] = [(\alpha \circ q) * (\beta \circ q)] = [\alpha'] \bullet [\beta'] = \tilde{\psi}([\alpha]) \bullet \tilde{\psi}([\beta])$. Assim $\tilde{\psi}$ é um isomorfismo.

A terceira descrição do n -ésimo grupo de homotopia requer uma topologia para o conjunto de laços de X baseados em x_0 .

Definição 1.1.3. *Seja F uma coleção de aplicações contínuas de um espaço Y em um espaço Z . Se K é um subconjunto compacto de Y e U é um aberto de Z , seja*

$$W(K, U) = \{\alpha \in F; \alpha(K) \subset U\}.$$

A família de todos esses conjuntos $W(K, U)$ onde K percorre todos os compactos em Y , e U todos os subconjuntos abertos de Z , é uma sub-base para uma topologia em F . Esta topologia é chamada a topologia compacto-aberta para F .

Como aplicaremos a topologia compacto-aberta somente sobre o conjunto de laços num espaço X , repetimos a definição para este caso:

Definição 1.1.4. *Seja X um espaço e x_0 um ponto de X . Considere o conjunto $\Omega(X, x_0)$ de todos os laços em X com ponto base x_0 . Se K é um subconjunto compacto de I e U é aberto em X , seja*

$$W(K, U) = \{\alpha \in \Omega(X, x_0); \alpha(K) \subset U\}.$$

A família de todos os conjuntos $W(K, U)$, onde K é compacto em I e U é aberto em X , é uma sub-base para uma topologia em $\Omega(X, x_0)$. Esta topologia é a topologia compacto-aberta para $\Omega(X, x_0)$.

Note que abertos básicos na topologia compacto-aberta tem a forma

$$\bigcap_{i=1}^r W(K_i, U_i)$$

onde $K_1, K_2, \dots, K_r$ são subconjuntos compactos de I e $U_1, U_2, \dots, U_r$ são abertos de X . Um laço α pertence a este aberto básico se, e somente se, $\alpha(K_i) \subset U_i$, para cada $i = 1, 2, \dots, r$.

Proposição 1.1.1. *Se X é um espaço métrico, a topologia compacto-aberta em $\Omega(X, x_0)$ é equivalente à topologia da convergência uniforme.*

Demonstração: Seja d a métrica sobre X . Recordemos que a topologia da convergência uniforme em $\Omega(X, x_0)$ é determinada pela métrica ρ definida como se segue: Se α e β pertencem a $\Omega(X, x_0)$ então

$$\rho(\alpha, \beta) = \sup\{d(\alpha(t), \beta(t)), t \in I\}.$$

Então a topologia da convergência uniforme tem como uma base o conjunto de todas as vizinhanças esféricas

$$S(\alpha, r) = \{\beta \in \Omega(X, x_0); d(\alpha, \beta) < r\}$$

onde $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ e r é um número positivo.

Denotemos por T e T' , respectivamente, a topologia compacto-aberta e a topologia da convergência uniforme para $\Omega(X, x_0)$. Vejamos que $T \subset T'$. Seja $W(K, U)$ um aberto sub-básico em T , onde K é compacto em I e U é aberto em X . Seja $\alpha \in W(K, U)$. Como o conjunto compacto $\alpha(K)$ está contido em U , existe um número positivo ε tal que qualquer ponto p de X com $d(p, \alpha(K)) < \varepsilon$ temos que $p \in U$. Para obter tal ε , considere $f : \alpha(K) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) := d(x, X - U)$. Então como f é contínua e $\alpha(K)$ é compacto existe o mínimo de f , ou seja, existe $t_0 \in K$ tal que $f(\alpha(t_0)) \leq f(\alpha(t)), \forall t \in K$. Então $d(\alpha(t_0), X - U) \leq d(\alpha(t), X - U), \forall t \in K$. Tome $\varepsilon = d(\alpha(t_0), X - U)$.

Considere o aberto básico $S(\alpha, \varepsilon)$ em T' . Se $\beta \in S(\alpha, \varepsilon)$, então para cada t em K ,

$$d(\beta(t), \alpha(K)) = \inf\{d(\beta(t), u), u \in \alpha(K)\} \leq d(\beta(t), \alpha(t)) < \varepsilon.$$

Assim $\beta(t)$ está em U . Consequentemente $\beta(K) \subset U$, então $\beta \in W(K, U)$. Agora temos que

$$\alpha \in S(\alpha, \varepsilon) \subset W(K, U)$$

e assim $W(K, U)$ é aberto em T' . Então $T \subset T'$ pois T' contém uma sub-base para T .

Vejamos agora que $T' \subset T$. Seja $S(\gamma, r)$, com centro γ e raio $r > 0$ um aberto básico em T' . Para provar que $S(\gamma, r)$ está em T , é suficiente encontrar um elemento de T que contém γ e está contido em $S(\gamma, r)$. Seja $\{U_j\}$ uma cobertura de X por abertos com diâmetros menores que r , e seja η um número de Lebesgue para a cobertura $\{\gamma^{-1}(U_j)\}$ de I . Seja $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ uma subdivisão de I por pontos sucessivos diferindo por, no máximo, η . Então para $i = 1, 2, \dots, n$, γ leva cada um dos conjuntos compactos $K_i = [t_{i-1}, t_i]$ em um dos abertos da cobertura $\{U_j\}$. Para cada i escolha um aberto, que denotaremos por U_i , tal que

$$\gamma(K_i) \subset U_i; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Então

$$\gamma \in \bigcap_{i=1}^n W(K_i, U_i)$$

e este conjunto é aberto em T . Se $\beta \in \bigcap_{i=1}^n W(K_i, U_i)$ então $\rho(\gamma, \beta)$ não pode exceder o máximo dos diâmetros de $U_1, U_2, \dots, U_n$. Assim $\rho(\gamma, \beta) < r$, e portanto $\beta \in S(\gamma, r)$. Então $S(\gamma, r)$ é aberto em T , e T contém T' pois contém uma base de T' . Com isso temos que $T \subset T'$ e $T' \subset T$, logo $T = T'$.

Definição 1.1.5. (*C*) *Seja X um espaço com $x_0 \in X$, e considere o conjunto $\Omega(X, x_0)$ dos laços em X baseados em x_0 com a topologia compacto-aberta. Se $n \geq 2$, o n -ésimo grupo de homotopia de X com ponto base em x_0 é o $(n - 1)$ -ésimo grupo de homotopia de $\Omega(X, x_0)$ em c , onde c é o caminho constante em x_0 . Assim,*

$$\pi_2(X, x_0) = \pi_1(\Omega(X, x_0), c), \dots, \pi_n(X, x_0) = \pi_{n-1}(\Omega(X, x_0), c).$$

As três definições *A* (1.1.1), *B* (1.1.2) e *C* (1.1.5) de grupos de homotopia de ordem superior são equivalentes. Já discutimos a equivalência de *A* e *B* e agora vamos comparar *A* e *C*. Esta discussão será para o caso $n = 2$ uma vez que a extensão para valores superiores de n requer um pouco mais do que escrever coordenadas adicionais.

Suponha então que α é um elemento de $F_2(X, x_0)$, isto é, α é uma aplicação contínua do quadrado unitário I^2 em X que leva ∂I^2 em x_0 . Então α determina um membro $\hat{\alpha}$ de $\Omega(\Omega(X, x_0), c)$ definido por

$$\hat{\alpha}(t_1)(t_2) = \alpha(t_1, t_2); \quad (t_1, t_2) \in I^2.$$

Cada valor $\hat{\alpha}(t_1)$ é uma aplicação contínua de I em X porque α é contínua. Note que $\hat{\alpha}(t_1)(0) = \hat{\alpha}(t_1)(1) = x_0$ pois $(t_1, 0)$ e $(t_1, 1)$ estão em ∂I^2 .

Assim $\hat{\alpha}(t_1) \in \Omega(X, x_0)$ e obviamente $\hat{\alpha}(0) = \hat{\alpha}(1)$ é o laço constante c cujo único valor é x_0 . Mas $\hat{\alpha}$ é contínua como aplicação de I em $\Omega(X, x_0)$. Para ver isto, seja $W(K, U)$ um aberto sub-básico em $\Omega(X, x_0)$. Como usualmente, K é compacto em I e U é aberto em X . Seja $t_1 \in \hat{\alpha}^{-1}(W(K, U))$. Então $\hat{\alpha}(t_1)(K) = \alpha(\{t_1\} \times K) \subset U$. Como K é compacto, existe um aberto O em I tal que $t_1 \in O$ e $\alpha(O \times K) \subset U$.

Assim

$$t_1 \in O \subset \hat{\alpha}^{-1}(W(K, U)),$$

logo $\hat{\alpha}^{-1}(W(K, U))$ é um aberto e $\hat{\alpha}$ é contínua. Portanto cada membro de $F_2(X, x_0)$ determina de maneira natural um membro de $\Omega(\Omega(X, x_0), c)$.

Suponha que invertemos o processo e comecemos com um elemento $\hat{\alpha}$ de $\Omega(\Omega(X, x_0), c)$. Então $\hat{\alpha}$ determina uma aplicação $\alpha : I^2 \longrightarrow X$ definida por

$$\alpha(t_1, t_2) = \hat{\alpha}(t_1)(t_2); \quad (t_1, t_2) \in I^2.$$

Pode-se verificar que $\alpha \in F_2(X, x_0)$. Temos então estabelecido uma correspondência biunívoca entre $F_2(X, x_0)$ e $\Omega(\Omega(X, x_0), c)$, $\alpha \mapsto \hat{\alpha}$. Além disso, temos $[\alpha] = [\beta]$ (em $F_2(X, x_0)/\sim_{x_0}$) se, e somente se, $[\hat{\alpha}] = [\hat{\beta}]$ (em $\pi_1(\Omega(X, x_0), c) = \Omega(\Omega(X, x_0), c)/\sim_{x_0}$) pois se $H : I^2 \times I \longrightarrow X$ é uma homotopia representando a equivalência de α e β como na Definição A (1.1.1), então

$$\hat{H} : I \times I \longrightarrow \Omega(X, x_0); \quad \hat{H}(t_1, s)(t_2) := H(t_1, t_2, s); \quad t_1, t_2, s \in I,$$

é uma homotopia que dá a equivalência dos laços $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$. Invertendo o argumento mostramos que $\hat{\alpha}$ equivalente a $\hat{\beta}$ implica α equivalente a β . Assim existe uma correspondência biunívoca entre classes de homotopias $[\alpha]$ da definição A(1.1.1) e as classes de homotopias $[\hat{\alpha}]$ da definição C (1.1.5). Como a operação $*$ na definição A(1.1.1) é completamente determinada na primeira coordenada, segue que para qualquer $\alpha, \beta \in F_2(X, x_0)$, $[\alpha * \beta]$ corresponde a $[\hat{\alpha} * \hat{\beta}]$, ou seja, $[\widehat{\alpha * \beta}] := [\hat{\alpha} * \hat{\beta}]$, e conseqüentemente que as duas definições de $\pi_2(X, x_0)$ fornecem grupos isomorfos.

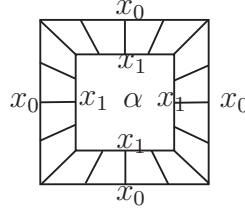
1.2 Propriedades Básicas e Exemplos

A primeira propriedade a ser tratada é relativa a independência do ponto base.

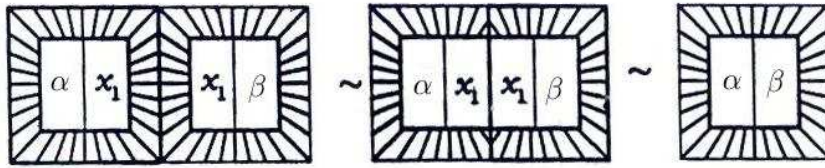
Teorema 1.2.1. *Se o espaço X é conexo por caminhos e x_0 e x_1 são pontos de X , então $\pi_n(X, x_0)$ é isomorfo a $\pi_n(X, x_1)$, para cada $n \geq 1$.*

Demonstração: O caso $n = 1$ está provado na Proposição A.1.3. Verificaremos aqui o caso $n = 2$. Seja $\gamma : I \longrightarrow X$ um caminho com $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$. Podemos associar a cada aplicação $\alpha : (I^2, \partial I^2) \longrightarrow (X, x_1)$, que representa um elemento $[\alpha] \in \pi_2(X, x_1)$, um elemento $\alpha' : (I^2, \partial I^2) \longrightarrow (X, x_0)$

(que vamos denotar por $\gamma \cdot \alpha$) por diminuir o domínio de α a um quadrado menor, concêntrico em I^2 e então inserir o caminho γ em cada segmento radial na “faixa” entre o bordo do quadrado menor e ∂I^2 .



Assim $\gamma \cdot \alpha$ produz claramente um elemento de $\pi_2(X, x_0)$ pois $(\gamma \cdot \alpha)(\partial I^2) = \{x_0\}$. Agora pode-se verificar que se a aplicação γ é homotópica a ρ e α é homotópica a β (por aplicações fixando $\partial I = \{0, 1\}$ e ∂I^2 , respectivamente) então $\gamma \cdot \alpha$ é homotópica a $\rho \cdot \beta$ e portanto $[\gamma \cdot \alpha] = [\rho \cdot \beta]$ em $\pi_2(X, x_0)$. Ainda $\gamma \cdot (\alpha * \beta) \sim \gamma \cdot \alpha * \gamma \cdot \beta$. Para ver isso primeiro deformamos α e α' nas aplicações constantes sobre as metades direitas e esquerdas de I^2 , respectivamente, produzindo aplicações que podemos denotar por $\alpha * 0$ e $0 * \beta$. Daí eliminamos progressivamente o pedaço simétrico do meio de $\gamma \cdot (\alpha * 0)$ e $\gamma \cdot (0 * \beta)$ até obter $\gamma \cdot (\alpha * \beta)$:



Uma fórmula explícita para esta homotopia é

$$H((s_1, s_2), t) = \begin{cases} \gamma \cdot (\alpha * 0)((2-t)s_1, s_2), & 0 \leq s_1 \leq \frac{1}{2} \\ \gamma \cdot (0 * \beta)((2-t)s_1 + t - 1, s_2), & \frac{1}{2} \leq s_1 \leq 1. \end{cases}$$

Assim nós temos $\gamma \cdot (\alpha * \beta) \sim \gamma \cdot (\alpha * 0) * \gamma \cdot (0 * \beta) \sim \gamma \cdot \alpha * \gamma \cdot \beta$. Logo

temos bem definida uma aplicação

$$\begin{aligned}\varphi_\gamma : \pi_2(X, x_1) &\longrightarrow \pi_2(X, x_0) \\ \alpha &\longrightarrow [\gamma \cdot \alpha]\end{aligned}$$

que é um homomorfismo pois $\varphi_\gamma([\alpha] \cdot [\beta]) = [\gamma \cdot (\alpha * \beta)] = [\gamma \cdot \alpha * \gamma \cdot \beta] = [\gamma \cdot \alpha] \cdot [\gamma \cdot \beta] = \varphi_\gamma([\alpha]) \cdot \varphi_\gamma([\beta])$.

Ainda, do fato que $(\gamma \cdot \eta) \cdot \alpha \sim \gamma \cdot (\eta \cdot \alpha)$ e $1 \cdot \alpha \sim \alpha$, onde 1 denota o caminho constante, segue que, considerando o caminho reverso $\bar{\gamma}$, $\gamma \cdot (\bar{\gamma} \cdot \alpha) \sim \alpha$ e $\bar{\gamma} \cdot (\gamma \cdot \alpha) \sim \alpha$. Logo φ_γ é um isomorfismo com inverso dado por $\varphi_{\bar{\gamma}}$.

Note que no caso $n = 1$ a representação anterior se reduz a

$$\begin{array}{ccccccc} & \bullet & & \bullet & & \bullet & \\ & \gamma & & \alpha & & \bar{\gamma} & \\ x_0 & & x_1 & & x_1 & & x_0 \end{array}$$

e a aplicação $\gamma \cdot \alpha$ é o caminho produto $\gamma * \alpha * \bar{\gamma}$ (como usado para provar a independência do ponto base no grupo fundamental). O caso $n > 2$ é similar ao caso $n = 2$, trabalhando com o cubo n -dimensional I^n ao invés do quadrado I^2 . ■

Como no caso do grupo fundamental, é usual omitir a referência ao ponto base, quando conveniente, sempre que X for conexo por caminhos.

Proposição 1.2.1. *Sejam X e Y espaços com pontos x_0 em X e y_0 em Y . Então*

$$\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) \simeq \pi_n(X, x_0) \oplus \pi_n(Y, y_0), \quad n \geq 1.$$

Demonstração: Sejam p_1 e p_2 as projeções do espaço produto $X \times Y$ em X e Y , respectivamente:

$$\begin{array}{lll} p_1 : X \times Y & \rightarrow & X, \\ (x, y) & \mapsto & x \end{array} \qquad \begin{array}{lll} p_2 : X \times Y & \rightarrow & Y \\ (x, y) & \mapsto & y \end{array}$$

Todo elemento $[\alpha]$ de $\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0))$, onde

$$\alpha : I^n \longrightarrow X \times Y, \quad \alpha(\partial I^n) = (x_0, y_0),$$

determina elementos $[\alpha_1]$ e $[\alpha_2]$ em $\pi_n(X, x_0)$ e $\pi_n(Y, y_0)$, respectivamente, onde

$$\alpha_1 = p_1 \circ \alpha : I^n \rightarrow X, \qquad \alpha_2 = p_2 \circ \alpha : I^n \rightarrow Y$$

pois $\alpha_1(\partial I^n) = p_1(\alpha(\partial I^n)) = p_1(x_0, y_0) = x_0$ e $\alpha_2(\partial I^n) = x_1$.

Inversamente, dados $[\alpha_1] \in \pi_n(X, x_0)$ e $[\alpha_2] \in \pi_n(Y, y_0)$, com

$$\alpha_1 : I^n \rightarrow X, \quad \alpha_1(\partial I^n) = x_0 \quad \text{e} \quad \alpha_2 : I^n \rightarrow Y, \quad \alpha_2(\partial I^n) = x_1.$$

Considerando $\alpha : I^n \rightarrow X \times Y$ definida por $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2)$ temos que α determina um elemento $[\alpha] \in \pi_n(X \times Y, (x_0, y_0))$. Então obtemos a aplicação $h : \pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_n(X, x_0) \oplus \pi_n(Y, y_0)$ definida por $h([\alpha]) = ([\alpha_1], [\alpha_2])$, $[\alpha] \in \pi_n(X \times Y, (x_0, y_0))$. Tal aplicação é um isomorfismo entre os grupos.

De fato, h é injetora, pois dados $[\alpha]$ e $[\beta]$ pertencentes à $\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0))$ tais que $h([\alpha]) = h([\beta])$, então $([\alpha_1], [\alpha_2]) = ([\beta_1], [\beta_2])$. Logo $[\alpha_1] = [\beta_1]$ e $[\alpha_2] = [\beta_2]$. Assim, considerando a Definição A (1.1.1) existem homotopias K entre α_1 e β_1 e L entre α_2 e β_2 . Tomando $H : I^n \times I \rightarrow X \times Y$ definida por $H(t_1, \dots, t_n, s) = (K(t_1, \dots, t_n, s), L(t_1, \dots, t_n, s))$ obtemos uma homotopia entre α e β e assim $[\alpha] = [\beta]$.

Claramente h é sobrejetora pois dado $([\alpha_1], [\alpha_2]) \in \pi_n(X, x_0) \oplus \pi_n(Y, y_0)$ existe $[\alpha] = [(\alpha_1, \alpha_2)] \in \pi_n(X \times Y, (x_0, y_0))$ tal que $h([\alpha]) = ([\alpha_1], [\alpha_2])$, além disso h é homomorfismo. ■

Mais geralmente, pode-se mostrar:

Proposição 1.2.2. *Para um produto $\prod_{\alpha} X_{\alpha}$ de uma coleção qualquer de espaços conexos por caminhos X_{α} existem isomorfismos $\pi_n(\prod_{\alpha} X_{\alpha}) \simeq \prod_{\alpha} \pi_n(X_{\alpha})$ para todo n .*

Demonstração: ([5], Proposição 4.2, p. 343).

Definição 1.2.1. (*Homomorfismo Induzido*) *Seja $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ uma aplicação contínua sobre os pares indicados. Se $[\alpha] \in \pi_n(X, x_0)$, $n \geq 1$, então a composição $f \circ \alpha : I^n \rightarrow Y$ é uma aplicação contínua que leva ∂I^n em y_0 , de modo que $f \circ \alpha$ representa um elemento $[f \circ \alpha]$ em $\pi_n(Y, y_0)$. Assim f induz uma aplicação*

$$f_{\#} : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$$

definida por $f_{\#}([\alpha]) = [f \circ \alpha]$, $[\alpha] \in \pi_n(X, x_0)$, que é um homomorfismo. Essa aplicação $f_{\#}$ é chamada homomorfismo induzido por f na dimensão n .

Proposição 1.2.3. a) *Se $f : (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ é a aplicação identidade, isto é, $f = id_X$, então $f_{\#} = id_{\pi_n(X, x_0)}$.*

- b) Se $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ e $g : (Y, y_0) \longrightarrow (Z, z_0)$ são aplicações contínuas sobre os pares indicados, então o homomorfismo induzido $(g \circ f)_\#$ é a aplicação composta $g_\# \circ f_\# : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(Z, z_0)$ em cada dimensão n .
- c) Se $h : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ é um homeomorfismo então o homomorfismo induzido por h é um isomorfismo para cada valor de n .

Demonstração: É similar à dada para o grupo fundamental (Proposição A.3.1). ■

Nesse trabalho os grupos de homotopia do círculo e mais geralmente das esferas, desempenham um papel importante. Assim estudamos a seguir a relação entre os grupos de homotopia de um espaço e de seu recobrimento e como consequência determinamos os grupos de homotopia do círculo. Computamos também, na sequência, os grupos de homotopia “ $\pi_i(S^n)$ ” para $1 \leq i \leq n$. Ressaltamos que os grupos de homotopia “ $\pi_i(S^n)$ ” para $i > n$ não são em geral conhecidos, muitos casos já foram computados e os resultados são surpreendentes. De fato o estudo dos grupos de homotopia das esferas tem levado ao desenvolvimento de muitas ferramentas poderosas usadas em Topologia Algébrica ([5] §4.1, p. 339).

Recordemos que um *recobrimento* do espaço B é um par (E, p) tal que para cada ponto x em B existe um conjunto aberto conexo por caminhos $U \subset B$ tal que $x \in U$ e p aplica cada componente conexa por caminhos de $p^{-1}(U)$ homeomorficamente sobre U . Cada conjunto aberto U é chamado uma *vizinhança admissível* ou *vizinhança elementar*. O espaço B é o *espaço base* e p é a *projeção de recobrimento*. Para maiores detalhes ver [3], capítulo 5.

Teorema 1.2.2. *Seja (E, p) um espaço de recobrimento de B e sejam e_0 em E e b_0 em B pontos tais que $p(e_0) = b_0$. Então o homomorfismo induzido*

$$p_\# : \pi_n(E, e_0) \longrightarrow \pi_n(B, b_0)$$

é um monomorfismo para $n = 1$ e um isomorfismo para $n \geq 2$.

Demonstração: Considere o caso $n = 1$,

$$p_\# : \pi_1(E, e_0) \longrightarrow \pi_1(B, b_0).$$

Como $p_\#$ é um homomorfismo basta provar que essa aplicação é injetora. Sejam $[\tilde{\alpha}]$ e $[\tilde{\beta}]$ classes de caminhos em $\pi_1(E, e_0)$, tais que $p_\#([\tilde{\alpha}]) = p_\#([\tilde{\beta}])$,

isto é, $p \circ \tilde{\alpha} \sim p \circ \tilde{\beta}$ então $\tilde{\alpha} \sim \tilde{\beta}$, ou seja, $[\tilde{\alpha}] = [\tilde{\beta}]$ (por [3], Teorema 5.5, p.89). Logo $p_{\#}$ é injetora e portanto um monomorfismo.

Para o caso $n \geq 2$, temos

$$p_{\#} : \pi_n(E, e_0) \longrightarrow \pi_n(B, b_0), \quad n \geq 2.$$

Primeiro vejamos que $p_{\#}$ é sobrejetora. Seja $[\alpha] \in \pi_n(B, b_0)$ e considere α como uma aplicação contínua de $(S^n, \bar{1})$ em (B, b_0) , (o símbolo $\bar{1}$ é usado aqui como o ponto base de S^n para evitar confusão com o número 1 que exercerá também um papel importante nesta prova). Como $n \geq 2$, o grupo fundamental $\pi_1(S^n, \bar{1})$ é trivial pois S^n é simplesmente conexo se $n \geq 2$ e conseqüentemente

$$\alpha_{\#}(\pi_1(S^n, \bar{1})) = 0 \subset p_{\#}(\pi_1(E, e_0)),$$

onde $\alpha_{\#}$ é o homomorfismo induzido por α no grupo fundamental. Pelo Teorema do Levantamento ([3] Teorema 5.10, p. 95) α tem um levantamento

$$\tilde{\alpha} : (S^n, \bar{1}) \longrightarrow (E, e_0)$$

tal que $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$. Então $\tilde{\alpha}$ determina um elemento $[\tilde{\alpha}]$ em $\pi_n(E, e_0)$ para o qual

$$p_{\#}([\tilde{\alpha}]) = [p \circ \tilde{\alpha}] = [\alpha].$$

Logo, $p_{\#}$ é sobrejetora.

Vejamos agora que $p_{\#}$ é injetora. Suponha que $[\beta]$ seja um elemento do kernel de $p_{\#}$, isto é,

$$p_{\#}([\beta]) = [p \circ \beta] = [c]$$

onde c é a aplicação constante $c(S^n) = b_0$. Como ambas $p \circ \beta$ e c vão de $(S^n, \bar{1})$ em (B, b_0) e são equivalentes, então existe uma homotopia

$H : S^n \times I \longrightarrow B$ satisfazendo

$$H(t, 0) = (p \circ \beta)(t), \quad H(t, 1) = b_0, \quad t \in S^n, \quad H(\bar{1}, s) = b_0, \quad s \in I.$$

Agora o grupo fundamental $\pi_1(S^n \times I, (\bar{1}, 0))$ é trivial visto que $n \geq 2$ e assim o Teorema do Levantamento ([3], Teorema 5.3, p. 88) se aplica novamente para mostrar a existência de um levantamento

$$\tilde{H} : S^n \times I \longrightarrow E$$

tal que $p \circ \tilde{H} = H$ e $\tilde{H}(\bar{1}, 0) = e_0$. A homotopia levantada $\tilde{H}$ é uma homotopia entre β e a aplicação constante $d(S^n) = e_0$. Para isto observe primeiro que, $p \circ \tilde{H}(\cdot, 0) = H(\cdot, 0) = p \circ \beta$, $\tilde{H}(\bar{1}, 0) = \beta(\bar{1})$.

Uma conseqüência do Teorema do Levantamento ([3], Corolário 5.2, p. 87) garante que $\tilde{H}(\cdot, 0) = \beta$ pois S^n é conexo. O mesmo argumento mostra que $\tilde{H}(\cdot, 1) = d$. Resta ver que $\tilde{H}(\bar{1}, s) = e_0$ para cada s em I . O caminho $\tilde{H}(\bar{1}, \cdot) : I \longrightarrow E$ tem ponto inicial e_0 e é um levantamento do caminho cons-

tante $H(\bar{1}, \cdot) = c = b_0$. Como o único levantamento de c que inicia em e_0 é o caminho constante e_0 , então $\tilde{H}(\bar{1}, s) = e_0$, $s \in I$.

Assim $\tilde{H} : S^n \times I \longrightarrow E$ é uma homotopia tal que

$$\tilde{H}(\cdot, 0) = \beta, \quad \tilde{H}(\cdot, 1) = d, \quad \tilde{H}(\bar{1}, s) = e_0, \quad s \in I,$$

e então $[\beta] = [d]$ é o elemento neutro de $\pi_n(E, e_0)$. Logo o kernel de $p_\#$ contém somente o elemento neutro de $\pi_n(E, e_0)$ e portanto $p_\#$ é injetora. ■

Exemplo 1.2.1. *Os grupos de homotopia de ordem superior do círculo unitário S^1 são triviais, isto é, $\pi_i(S^1) = 0$ se $i \geq 2$. De fato, considere o espaço de recobrimento universal $(\mathbb{R}, p)$ do círculo unitário S^1 . Pelo teorema anterior $p_\# : \pi_i(\mathbb{R}) \longrightarrow \pi_i(S^1)$ é um isomorfismo para $i \geq 2$. Mas todos os grupos de homotopia do espaço contráctil $\mathbb{R}$ são triviais, logo $\pi_i(S^1) = 0$ se $i \geq 2$.*

Para esferas S^n com $n > 1$, o que podemos afirmar é:

Exemplo 1.2.2. *Para $i < n$, o i -ésimo grupo de homotopia $\pi_i(S^n)$ é o grupo trivial. De fato isso será provado no capítulo 2 após falarmos de Aproximação Celular.*

Exemplo 1.2.3. *Para $n \geq 1$, o n -ésimo grupo de homotopia $\pi_n(S^n)$ é isomorfo ao grupo $\mathbb{Z}$ dos inteiros. Notemos que o caso $n=1$ foi tratado no Apêndice (Proposição A.2.2). Considere $\pi_n(S^n)$, $n \geq 2$, como o conjunto das classes de homotopia das aplicações $\alpha : (S^n, 1) \longrightarrow (S^n, 1)$ como na Definição B (1.1.2). Dessa forma podemos considerar o grau da aplicação α (isto é, o inteiro r tal que $\alpha_n^*([z_n]) = r[z_n]$, onde $\alpha_n^* : H_n(K) \longrightarrow H_n(K)$, K é uma triangulação de S^n e $[z_n]$ é um gerador (classe fundamental) de $H_n(K) \simeq \mathbb{Z}$ ([3], §3.3)). Defina*

$$\rho : \pi_n(S^n) \longrightarrow \mathbb{Z}; \quad \rho([\alpha]) := \text{grau de } \alpha, \quad [\alpha] \in \pi_n(S^n).$$

Observe que esta aplicação está bem definida, isto é, se $\alpha \sim \beta$, com $\alpha, \beta : S^n \longrightarrow S^n$, então grau de $\alpha =$ grau de β ([3], Teorema 3.9, p.52). Agora pode-se mostrar que ρ é injetora, isto é, grau de $\alpha =$ grau de β implica $\alpha \sim \beta$ ([3], Teorema 3.10, p.53). A aplicação identidade $id : (S^n, 1) \longrightarrow (S^n, 1)$ tem grau 1 e a descrição da operação $*$ na Definição B (1.1.2) mostra que a aplicação

$$id^k = id * id * \dots * id \quad (k \text{ termos})$$

tem grau k . E pode-se verificar que $[id]$ é um gerador de $\pi_n(S^n)$, $\rho([id]^k) = k$ e $\rho([id]^{-k}) = \rho([id^{-k}]) = -k$, para qualquer inteiro positivo k . Concluindo assim que ρ é um isomorfismo.

Como uma consequência do teorema anterior podemos também calcular os

grupos de homotopia $\pi_i(\mathbb{R}P^n)$, para $n \geq 2$ e $2 \leq i \leq n$, onde $\mathbb{R}P^n$ indica o espaço projetivo real n -dimensional:

Exemplo 1.2.4. *O espaço projetivo real n -dimensional $\mathbb{R}P^n$, definido como o espaço quociente de S^n pela relação de equivalência que identifica os pontos antipodais ($v \sim -v$) tem, quando $n \geq 2$, o n -ésimo grupo de homotopia isomorfo ao grupo $\mathbb{Z}$ dos inteiros e $\pi_i(\mathbb{R}P^n) = 0$, se $2 \leq i < n$. Com efeito, considere o recobrimento duplo (S^n, p) sobre o n -espaço projetivo $\mathbb{R}P^n$. O teorema anterior implica que $\pi_i(\mathbb{R}P^n) \simeq \pi_i(S^n)$, $2 \leq i \leq n$. Agora dos exemplos anteriores, obtemos então $\pi_n(\mathbb{R}P^n) \simeq \mathbb{Z}$, $n \geq 2$ e $\pi_i(\mathbb{R}P^n) = 0$, se $2 \leq i < n$, como afirmado. Notemos que $\mathbb{R}P^1$ é homeomorfo a S^1 e assim $\pi_1(\mathbb{R}P^1) \simeq \mathbb{Z}$.*

Nosso objetivo agora é mostrar que os grupos de homotopia $\pi_n(X)$ são abelianos para $n \geq 2$. Para tanto será útil o resultado seguinte.

Teorema 1.2.3. *Seja G um grupo topológico com elemento e . Então $\pi_1(G, e)$ é abeliano.*

Demonstração: Um grupo topológico é um grupo G com uma topologia sob a qual a operação de G é uma aplicação contínua de $G \times G$ em G e a aplicação $g \mapsto g^{-1}$ é um homeomorfismo de G sobre G . A operação em G induz uma operação $\bullet$ sobre $\Omega(G, e)$, o espaço dos laços em G baseados em e , definida por:

$$(\alpha \bullet \beta)(t) = \alpha(t) \cdot \beta(t), \quad \alpha, \beta \in \Omega(G, e), \quad t \in I$$

onde a justaposição de $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ indica seu produto em G . Esta operação também induz uma operação $\diamond$ sobre $\pi_1(G, e)$:

$$[\alpha] \diamond [\beta] = [\alpha \bullet \beta], \quad [\alpha], [\beta] \in \pi_1(G, e).$$

Seja c o laço constante e , e sejam $[\alpha]$ e $[\beta]$ membros de $\pi_1(G, e)$. Observe que

$$\begin{aligned} (\alpha * c) \bullet (c * \beta)(t) &= (\alpha * c)(t) \cdot (c * \beta)(t) = \\ &= \begin{cases} (\alpha * c)(t) \cdot (c * \beta)(t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (\alpha * c)(t) \cdot (c * \beta)(t), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha(2t) \cdot c(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ c(2t - 1) \cdot \beta(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \alpha(2t) \cdot e = \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ e \cdot \beta(2t-1) = \beta(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (c * \alpha) \bullet (\beta * c)(t) &= (c * \alpha)(t) \cdot (\beta * c)(t) = \\ &= \begin{cases} c(2t) \cdot \beta(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2t-1) \cdot c(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} e \cdot \beta(2t) = \beta(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2t-1) \cdot e = \alpha(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Isso nos dá que

$$[(\alpha * c) \bullet (c * \beta)] = [\alpha * \beta],$$

$$[(c * \alpha) \bullet (\beta * c)] = [\beta * \alpha].$$

Então

$$\begin{aligned} [\alpha] \circ [\beta] &= [\alpha * \beta] = [(\alpha * c) \bullet (c * \beta)] = [\alpha * c] \diamond [c * \beta] = \\ &= [c * \alpha] \diamond [\beta * c] = [(c * \alpha) \bullet (\beta * c)] = [\beta * \alpha] = [\beta] \circ [\alpha]. \end{aligned}$$

Logo $\pi_1(G, e)$ é abeliano. Aqui está um fato curioso e adicional, as operações $\circ$ e $\diamond$ são iguais:

$$[\alpha] \circ [\beta] = [\alpha * \beta] = [(\alpha * c) \bullet (c * \beta)] = [\alpha * c] \diamond [c * \beta] = [\alpha] \diamond [\beta]. \quad \blacksquare$$

Definição 1.2.2. *Um H -espaço ou espaço de Hopf é um espaço topológico Y com uma multiplicação contínua (indicada pela justaposição) e um ponto y_0 em Y para o qual a aplicação definida pela multiplicação à esquerda por y_0 e a aplicação definida pela multiplicação à direita por y_0 são ambas homotópicas à aplicação identidade sobre Y por homotopias que deixam y_0 fixado. Em outras palavras, existem homotopias L e R de $Y \times I$ em Y tais que:*

$$\begin{aligned} L(y, 0) &= y_0 y, & L(y, 1) &= y, & L(y_0, t) &= y_0, \\ R(y, 0) &= y y_0, & R(y, 1) &= y, & R(y_0, t) &= y_0 \end{aligned}$$

para todo y em Y e t em I . O ponto y_0 é chamado homotopia unitária de Y .

Exemplo 1.2.5. *Todo grupo topológico G é um H -espaço.*

Basta tomar as homotopias de $G \times I$ em G como $L(g, t) = g$ e $R(g, t) = g$.

Exemplo 1.2.6. *Se X é um espaço e x_0 é um ponto de X , então o espaço de laços $\Omega(X, x_0)$ com a topologia compacto-aberta é um H -espaço.*

De fato, a multiplicação é a operação $*$ (justaposição de caminhos), e a homotopia unitária é a aplicação constante c . As requeridas homotopias L e R são definidas para α em $\Omega(X, x_0)$ e s em I por:

$$L(\alpha, s)(t) = \begin{cases} x_0, & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{(1-s)}{2} \\ \alpha(\frac{2t+s-1}{s+1}), & \text{se } \frac{(1-s)}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$R(\alpha, s)(t) = \begin{cases} \alpha(\frac{2t}{s+1}), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{(s+1)}{2} \\ x_0, & \text{se } \frac{(s+1)}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Teorema 1.2.4. *Se Y é um H -espaço com homotopia unitária y_0 , então $\pi_1(Y, y_0)$ é abeliano.*

Demonstração: A operação multiplicação contínua sobre Y induz uma operação $\bullet$ sobre $\Omega(Y, y_0)$, como no teorema anterior, definida por:

$$(\alpha \bullet \beta)(t) = \alpha(t) \cdot \beta(t), \quad \alpha, \beta \in \Omega(Y, y_0), \quad t \in I.$$

Esta operação também induz uma operação $\diamond$ sobre $\pi_1(Y, y_0)$:

$$[\alpha] \diamond [\beta] = [\alpha \bullet \beta], \quad [\alpha], [\beta] \in \pi_1(Y, y_0).$$

Seja c o laço constante y_0 , então

$$(\alpha * c) \bullet (c * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) \cdot y_0, & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ y_0 \cdot \beta(2t - 1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$(c * \alpha) \bullet (\beta * c)(t) = \begin{cases} y_0 \cdot \beta(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2t - 1) \cdot y_0, & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Como a multiplicação à esquerda por y_0 e a multiplicação à direita por y_0 são ambas homotópicas a aplicação identidade de Y então,

$$[(\alpha * c) \bullet (c * \beta)] = [\alpha * \beta],$$

$$[(c * \alpha) \bullet (\beta * c)] = [\beta * \alpha].$$

Assim, considerando a operação usual $\circ$ em $\pi_1(Y, y_0)$, temos:

$$\begin{aligned} [\alpha] \circ [\beta] &= [\alpha * \beta] = [(\alpha * c) \bullet (c * \beta)] = [\alpha * c] \diamond [c * \beta] = \\ &= [c * \alpha] \diamond [\beta * c] = [(c * \alpha) \bullet (\beta * c)] = [\beta * \alpha] = [\beta] \circ [\alpha]. \end{aligned}$$

Logo $\pi_1(Y, y_0)$ é abeliano. Note que, como na prova do teorema anterior conclui-se que as operações $\circ$ e $\diamond$ são iguais. ■

Teorema 1.2.5. *Os grupos de homotopia de ordem superior $\pi_n(X, x_0)$, $n \geq 2$, de qualquer espaço X , são abelianos.*

Demonstração: Temos que o segundo grupo de homotopia $\pi_2(X, x_0) = \pi_1(\Omega(X, x_0), c)$ e assim é abeliano pois $\Omega(X, x_0)$ é um H -espaço com a constante c como homotopia unitária. Procedendo indutivamente, suponha que o $(n-1)$ -ésimo grupo de homotopia $\pi_{n-1}(Y, y_0)$ é abeliano para todo Y . Então, $\pi_n(X, x_0) = \pi_{n-1}(\Omega(X, x_0), c)$ é abeliano, e a prova está completa. ■

Como no caso do grupo fundamental, se $f : X \longrightarrow Y$ é uma equivalência de homotopia com $f(x_0) = y_0$ então pode-se provar que f induz isomorfismos entre $\pi_n(X, x_0)$ e $\pi_n(Y, y_0)$ para todo n . Apresentaremos aqui a prova no caso particular em que exigimos que os pares (X, x_0) e (Y, y_0) têm o mesmo tipo de homotopia. Isto torna a prova mais simples ([3], teorema 6.14).

Definição 1.2.3. *Sejam X e Y espaços com pontos x_0 em X e y_0 em Y . Dizemos que os pares (X, x_0) e (Y, y_0) são homotopicamente equivalentes ou têm o mesmo tipo de homotopia, se existem aplicações contínuas $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ e $g : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ para as quais as aplicações compostas $g \circ f$ e $f \circ g$ são homotópicas às aplicações identidades sobre X e Y , respectivamente, por homotopias que deixam os pontos bases fixados. Em outras palavras, é exigido que existam homotopias $H : X \times I \longrightarrow X$ e $K : Y \times I \longrightarrow Y$ tais que*

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= (g \circ f)(x), & H(x, 1) &= x, & H(x_0, t) &= x_0, & x \in X, t \in I, \\ K(y, 0) &= (f \circ g)(y), & K(y, 1) &= y, & K(y_0, t) &= y_0, & y \in Y, t \in I. \end{aligned}$$

A aplicação f é chamada uma equivalência de homotopia com inversa homotópica g .

A prova do próximo resultado é similar à prova da proposição A.3.2.

Proposição 1.2.4. *Equivalência de homotopia entre pares é uma relação de equivalência.*

Teorema 1.2.6. *Se uma aplicação $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ é uma equivalência de homotopia entre os pares indicados, então o homomorfismo induzido $f_{\#} : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, y_0)$ é um isomorfismo para cada inteiro n .*

Demonstração: Seja $g : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ uma inversa homotópica para f e H uma homotopia entre $g \circ f$ e a aplicação identidade sobre X que deixa x_0 fixo, então

$$\begin{aligned} H : X \times I &\longrightarrow X \\ H(\cdot, 0) &= g \circ f, \\ H(\cdot, 1) &= id_X, \\ H(x_0, t) &= x_0, \quad t \in I. \end{aligned}$$

Seja $[\alpha] \in \pi_n(X, x_0)$, e considere α como uma aplicação de I^n em X tal que $\alpha(\partial I^n) = x_0$. Defina uma homotopia $K : I^n \times I \longrightarrow X$ por

$$K(t, s) = H(\alpha(t), s), \quad t \in I^n, s \in I.$$

Então,

$$\begin{aligned} K(\cdot, 0) &= (g \circ f) \circ \alpha, \quad K(\cdot, 1) = \alpha, \\ K(\partial I^n \times I) &= H(\{x_0\} \times I) = x_0, \end{aligned}$$

assim

$$[(g \circ f) \circ \alpha] = [\alpha].$$

Isto significa que

$$g_{\#}(f_{\#}[\alpha]) = [\alpha],$$

e portanto $g_{\#}$ é uma inversa à esquerda para $f_{\#}$. Como f é uma inversa homotópica para g , concluímos por simetria que $g_{\#}$ é também uma inversa à direita para $f_{\#}$ e então $f_{\#}$ é um isomorfismo. ■

1.3 Grupos de Homotopia Relativa e Sequência Exata Longa

Generalizações muito úteis dos grupos de homotopias $\pi_n(X, x_0)$ são os grupos de homotopia relativa $\pi_n(X, A, x_0)$ para um par (X, A) com um ponto base $x_0 \in A$.

Definição 1.3.1. *Considere I^{n-1} como a face de I^n com a última coordenada $s_n = 0$ e seja J^{n-1} o fecho de $\partial I^n - I^{n-1}$, a união das faces restantes de I^n . Então $\pi_n(X, A, x_0)$ para $n \geq 1$ é definido como sendo o conjunto das classes*

de homotopia de aplicações

$$\psi : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \longrightarrow (X, A, x_0)$$

(isto é, que satisfazem $\psi(\partial I^n) \subset A$ e $\psi(J^{n-1}) = x_0$) com homotopias por intermédio de aplicações da mesma forma, ou seja $[\psi] = [\varphi]$ se existe uma homotopia $H : I^n \times I \longrightarrow X$ satisfazendo $H(u, 0) = \psi(u)$, $H(u, 1) = \varphi(u)$ e para cada t fixo, $H_t(\partial I^n) \subset A$, $H_t(J^{n-1}) = x_0$, onde $H_t(u) := H(u, t)$.

Observação 1.3.1. (1) Podemos ver os grupos de homotopia absoluta como um caso especial dos grupos de homotopia relativa pois $\pi_n(X, x_0, x_0) = \pi_n(X, x_0)$.

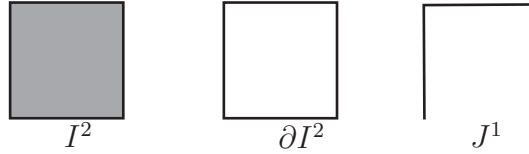
(2) A definição do conjunto das classes de homotopia “ $\pi_n(X, x_0)$ ” pode ser dada de modo a incluir o caso $n = 0$ por tomar I^0 como sendo um ponto, que vamos denotar por p , e ∂I^0 o conjunto vazio. Então dado $x_0 \in X$, $\pi_0(X, x_0)$ é exatamente o conjunto das componentes conexas por caminhos de X pois dado $f : I^0 = \{p\} \longrightarrow X$ então $f(p) = \mathbf{a} \in X$ e $[f] = \{g : I^0 \longrightarrow X \text{ para o qual existe um caminho } \gamma \text{ ligando } \mathbf{a} \text{ ao ponto } g(p)\}$, visto que $H : I^0 \times I \longrightarrow X$ tal que $H(p, t) = \gamma(t)$ é uma homotopia ($H(p, 0) = \gamma(0) = \mathbf{a} = f(p)$, $H(p, 1) = \gamma(1) = g(p)$ e a condição $H(\partial I^0, t) = x_0$ é satisfeita uma vez que $\partial I^0 = \emptyset$). Conseqüentemente, se X é conexo por caminhos então $\pi_0(X, x_0)$ tem um único elemento. Porém não podemos dar à $\pi_0(X, x_0)$ uma estrutura de grupo a não ser quando X é conexo por caminhos que podemos tomar $\pi_0(X, x_0)$ como sendo o grupo trivial.

(3) A definição 1.3.1 não se estende de maneira natural de modo a incluir o caso $n = 0$. Assim nós deixaremos esse caso sem incluir na definição acima. Uma definição possível é considerar $\pi_0(X, A, x_0) = \pi_0(X, x_0)/\pi_0(A, x_0)$ (vide [5], Cap.4, exercício 9).

Operações: Uma operação soma é definida em $\pi_n(X, A, x_0)$ da mesma forma como em $\pi_n(X, x_0)$, exceto que agora a coordenada s_n desempenha um papel especial em função da escolha de J^n (e não tem valor para operação soma). Dados $[\alpha]$ e $[\beta]$ em $\pi_n(X, A, x_0)$, $[\alpha] \cdot [\beta] := [\alpha * \beta]$, onde

$$(\alpha * \beta)(s_1, s_2, \dots, s_n) = \begin{cases} \alpha(2s_1, s_2, \dots, s_n), & 0 \leq s_1 \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n), & \frac{1}{2} \leq s_1 \leq 1. \end{cases}$$

Então $\pi_n(X, A, x_0)$ é um grupo para $n \geq 2$, e este grupo é abeliano para $n \geq 3$. Para $n = 1$ temos $I^1 = [0, 1]$, $I^0 = \{0\}$ e $J^0 = \{1\}$, então $\pi_1(X, A, x_0)$ é o conjunto das classes de homotopias de aplicações $\alpha : ([0, 1], \{0\}, \{1\}) \longrightarrow (X, A, x_0)$, isto é, caminhos em X com ponto inicial em um ponto qualquer (variável) de A e ponto final um ponto base fixo $x_0 \in A$. Em geral este não é um grupo de maneira natural. Para $n = 2$, $I^2 = I \times I$, $I^1 = I \times \{0\}$; $J^1 = \{0, 1\} \times [0, 1] \cup I \times \{1\}$, e $\pi_2(X, A, x_0) = \{[\alpha]; \alpha : (I^2, \partial I^2, J^1) \longrightarrow (X, A, x_0)\}$.



Observação 1.3.2. (1) *Exatamente como elementos de $\pi_n(X, x_0)$ podem ser considerados como classes de homotopias de aplicações $(S^n, s_0) \longrightarrow (X, x_0)$ (onde $S^n = I^n / \partial I^n$ e $s_0 = \partial I^n / \partial I^n$), existe uma definição alternativa de $\pi_n(X, A, x_0)$ como o conjunto das classes de homotopias de aplicações $(D^n, S^{n-1}, s_0) \longrightarrow (X, A, x_0)$, pois deformando J^{n-1} (que é o fecho de $\partial I^n - I^{n-1}$) num ponto que vamos denotar por s_0 convertemos $(I^n, \partial I^n, J^{n-1})$ em (D^n, S^{n-1}, s_0) . Deste ponto de vista, a operação do grupo é feita via a aplicação $c : D^n \longrightarrow D^n \vee D^n$ deformando $D^{n-1} \subset D^n$ em um ponto.*

(2) *Até agora usamos, em geral, as letras gregas, como α e β , para indicar aplicações de $S^n \longrightarrow X$ cujas classes $[\alpha]$, $[\beta]$ representam elementos dos grupos de homotopia, seguindo a notação de [3] e [7]. No entanto, para [5], os elementos dos grupos de homotopia relativa ou mesmo absoluta são indicados por $[f]$, $[g]$ e em muitas ocasiões esta será também a notação usada aqui. Também levando em conta a notação em [5], nos capítulos 2 e 3 é comum o uso das letras α e β para indicar índices, o que não causa confusão (embora entendemos não ser uma notação muito apropriada).*

Uma reformulação útil do que significa para um elemento de $\pi_n(X, A, x_0)$ ser trivial é dada pelo seguinte critério:

Proposição 1.3.1. (Critério da Compressão) *Uma aplicação*

$f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \longrightarrow (X, A, x_0)$ representa o zero em $\pi_n(X, A, x_0)$ se, e somente se, ela é homotópica relativamente a S^{n-1} à uma aplicação com imagem contida em A .

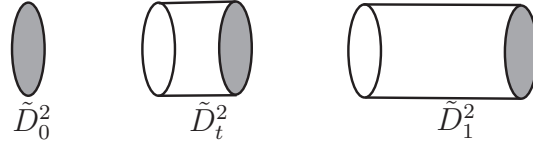
Demonstração: ($\implies$) Suponhamos que $[f] = 0$ em $\pi_n(X, A, x_0)$. Então existe uma homotopia $F : D^n \times I \longrightarrow X$ (entre f e a aplicação constante x_0), satisfazendo $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = x_0$, $\forall x \in D^n$, e para cada $t \in I$, $F(u, t) \in A$, $\forall u \in S^{n-1}$, isto é, $F(S^{n-1} \times I) \subset A$.

Queremos definir uma homotopia $\tilde{F} : D^n \times I \longrightarrow X$, estacionária sobre S^{n-1} , entre f e uma aplicação g , com $Im(g) \subset A$. A idéia é definir a homotopia $\tilde{F}$ através da restrição da F a uma família de n -discos em $D^n \times I$, iniciando em $D^n \times \{0\}$ e terminando em $D^n \times \{1\} \cup S^{n-1} \times I$ (todos os discos dessa família tendo o mesmo bordo).

Para tanto considere os discos $\tilde{D}_t^n$, $t \in I$, dados por

$$\tilde{D}_t^n = S^{n-1} \times [0, t] \cup D^n \times \{t\}.$$

Ilustrando no caso $n = 2$.



Note que $\partial \tilde{D}_t^n = S^{n-1} \times \{0\} \subset D^n \times I$, $\forall t$. Restringindo F a essa família de discos e considerando que, para cada t , $D^n \times \{t\}$ é homeomorfo a $\tilde{D}_t^n$ via um homeomorfismo φ_t , com $\varphi_0 = id$ e $\varphi_t(u, t) = (u, 0)$, $\forall u \in S^{n-1} = \partial D^n$, definimos então uma homotopia

$$\tilde{F} : D^n \times I \longrightarrow X; \quad (x, t) \mapsto F(\varphi_t(x, t))$$

tal que

- $\tilde{F}(x, 0) = F(x, 0) = f(x)$, $\forall x \in D^n$.
- Para cada t fixo, $t \in [0, 1]$ e $u \in S^{n-1} = \partial D^n$, $\tilde{F}(u, t) = F(\varphi_t(u, t)) = F(u, 0) = f(u) \in A$.
- Tomando $g(x) := \tilde{F}(x, 1)$ temos que $Im(g) \subset A$ pois $Im(g) = \tilde{F}(D^n \times \{1\}) = F(\varphi_1(D^n \times \{1\})) = F(\tilde{D}_1^n) = F(D^n \times \{1\} \cup S^{n-1} \times I) \subset A$, porque $F(D^n \times \{1\}) = x_0$ e $F(S^{n-1} \times I) \subset A$.

Assim f é homotópica, por uma homotopia estacionária sobre S^{n-1} , a uma aplicação $g : (D^n, S^{n-1}, s_0) \longrightarrow (X, A, x_0)$ cuja imagem está contida em A , como desejado.

($\Leftarrow$) Suponhamos $f \sim g$ por uma homotopia estacionária sobre S^{n-1} , com $Im(g) \subset A$. Afirmamos que $[g] = 0$ em $\pi_n(X, A, x_0)$. De fato, como D^n é contrátil a s_0 , existe uma homotopia $K : D^n \times I \longrightarrow D^n$ tal que $K(x, 0) = x = id_X(x)$ e $K(x, 1) = s_0$. Tomemos a composta

$$\tilde{K} = g \circ K : D^n \times I \xrightarrow{K} D^n \xrightarrow{g} X.$$

Então $\tilde{K}$ é uma homotopia entre g e a aplicação constante x_0 pois $\tilde{K}(x, 0) = g(K(x, 0)) = g(x)$, $\tilde{K}(x, 1) = g(K(x, 1)) = g(s_0) = x_0$, e para todo $u \in S^{n-1}$, $\tilde{K}(u, t) = g(K(u, t)) \in A$, visto que $Im(g) \subset A$. Assim $[f] = [g] = 0$ em $\pi_n(X, A, x_0)$. ■

Homomorfismo Induzido: Como no caso absoluto uma aplicação $\varphi : (X, A, x_0) \longrightarrow (Y, B, y_0)$ induz uma aplicação

$$\varphi_{\#} : \pi_n(X, A, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, B, y_0)$$

que são homomorfismos para $n \geq 2$ e têm propriedades análogas àquelas no caso absoluto: $(\varphi \circ \psi)_{\#} = \varphi_{\#} \circ \psi_{\#}$, $(id_X)_{\#} = id_{\pi_n(X, A, x_0)}$ e $\varphi_{\#} = \psi_{\#}$ se $\varphi \sim \psi$ através de aplicações $(X, A, x_0) \longrightarrow (Y, B, y_0)$.

Provavelmente a característica mais útil dos grupos de homotopia relativa $\pi_n(X, A, x_0)$ é que eles se encaixam numa sequência exata longa.

Proposição 1.3.2. *Seja (X, A, B) uma tripla de espaços topológicos e $x_0 \in B \subset A \subset X$. Então a seguinte sequência é exata:*

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_n(A, B, x_0) \xrightarrow{i_{\#}} \pi_n(X, B, x_0) \xrightarrow{j_{\#}} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, B, x_0) \rightarrow \cdots \\ \rightarrow \pi_1(X, A, x_0). \end{aligned}$$

Em particular, considerando $B = x_0$, podemos concluir que a sequência para pares (X, A) é exata:

$$\cdots \rightarrow \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_{\#}} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_{\#}} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \rightarrow \cdots \rightarrow \pi_0(X, x_0).$$

Demonstração: ([5], Teorema 4.3, p. 344)

Observação 1.3.1. (1) Nas sequências anteriores $i_{\#}$ e $j_{\#}$ são as aplicações induzidas das inclusões naturais (de pares). **A aplicação ∂ , denominada aplicação bordo, vem das aplicações restrições $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \longrightarrow$**

(X, A, x_0) para I^{n-1} , ou $(D^n, S^{n-1}, s_0) \longrightarrow (X, A, x_0)$ para S^{n-1} . Tal aplicação é um homomorfismo quando $n > 1$.

- (2) Próximo ao fim das seqüências, onde estruturas de grupo não estão definidas, a exatidão também é considerada no seguinte sentido: A imagem de uma aplicação é o “kernel” da próxima, onde o kernel é considerado como o conjunto dos elementos que são levados na classe de homotopia da aplicação constante.

Definição 1.3.2. Um espaço topológico X com ponto base x_0 é chamado n -conexo se $\pi_i(X, x_0) = 0$ para todo $i \leq n$. Assim espaço 0-conexo significa conexo por caminhos e 1-conexo significa espaço simplesmente conexo. Um par (X, A) é n -conexo se $\pi_i(X, A, x_0) = 0$ para todo $i \leq n$.

Observação 1.3.3. (1) Em espaços n -conexos a escolha do ponto base x_0 não é relevante pois n -conexo implica 0-conexo e assim conexo por caminhos.

- (2) Notemos que S^n é $(n-1)$ -conexo, como vimos no exemplo 1.2.2.
- (3) Se $\pi_0(X, A, x_0)$ não foi definido, temos que exigir (na definição de par n -conexo) que $\pi_i(X, A, x_0) = 0$ para $1 \leq i \leq n$ e que cada componente conexa por caminhos de X contenha pontos de A .

Capítulo 2

CW-Complexos

2.1 CW-Complexos

Intuitivamente um CW-complexo é um espaço topológico de Hausdorff que admite uma determinada “decomposição celular”, através de “células e^n ” onde e^n denota uma célula aberta de dimensão n (que é homeomorfa ao disco aberto n -dimensional). Tomamos as zero-células e^0 como pontos (vértices); uma 1-célula e^1 é homeomorfa ao intervalo $] -1, 1[$; uma 2-célula e^2 é homeomorfa ao interior do disco unitário $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ e assim por diante.

Mais precisamente temos ([8], p. 214):

Definição 2.1.1. *Um CW-complexo é um espaço X e uma coleção de células abertas e_α^n cuja união é X tal que:*

- (1) *X é Hausdorff.*
- (2) *Para cada n -célula aberta e_α^n da coleção, existe uma aplicação contínua $\phi_\alpha : D^n \longrightarrow X$ (onde $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq 1\}$) que aplica $\text{int}(D^n)$ homeomorficamente sobre e_α^n e leva $\partial D^n = S^{n-1}$ numa união finita de células abertas, cada uma de dimensão menor do que n .*
- (3) *Um conjunto A é fechado em X se $A \cap \bar{e}_\alpha$ é fechado em $\bar{e}_\alpha$ para cada α .*

A parte finita da condição (2) foi chamada fecho finito (“closure-finiteness”) por J. H. C. Whitehead. A condição (3) expressa o fato que X tem o que ele chamou de topologia fraca (“weak topology”) relativa à coleção $\{\bar{e}_\alpha\}$. Estes termos são a origem das letras C e W na frase “CW-complexo”.

Observamos que as condições (1) e (2) implicam que ϕ_α leva D^n sobre $\bar{e}_\alpha^n$ e $\partial(D^n)$ sobre $\bar{e}_\alpha^n - e_\alpha^n$. De fato, como ϕ_α é contínua, ϕ_α leva D^n , que é o fecho do $\text{int}(D^n)$, no fecho de $\phi_\alpha(\text{int}(D^n))$, que é $\bar{e}_\alpha^n$. Como $\phi_\alpha(D^n)$ é compacto, ele é fechado (pois X é Hausdorff); e porque esse conjunto contém e_α^n , também contém $\bar{e}_\alpha^n$. Assim $\phi_\alpha(D^n) = \bar{e}_\alpha^n$. Finalmente, como $\phi_\alpha(\partial D^n)$ é disjunto de e_α^n então é igual $\bar{e}_\alpha^n - e_\alpha^n$.

Notemos também que a recíproca de (3) é satisfeita trivialmente; se A é fechado em X , então $A \cap \bar{e}_\alpha^n$ é fechado em $\bar{e}_\alpha^n$ para cada α .

Observação 2.1.1. (1) A aplicação $\phi_\alpha : D^n \longrightarrow X$ é chamada uma aplicação característica para cada célula e_α^n . Por um abuso de notação é comum usar o símbolo X para referir ambos, o CW-complexo e o espaço adjacente.

(2) Seja X um CW-complexo, considerando $X^n = \{e^i; 0 \leq i \leq n\}$, podemos ver $X = \bigcup X^n$. O subconjunto X^n de X é chamado de n -esqueleto de X . Os pontos de X^0 são chamados de vértices ou 0-células.

(3) Um CW-complexo X é dito ser finito ou infinito se o número de células em X é finito ou infinito, respectivamente. Se $X = X^n$ para algum n o CW-complexo é dito de dimensão finita e o menor inteiro n para o qual isso ocorre é chamado a dimensão de X .

(4) Observe que uma aplicação característica $\phi_\alpha : D^n \longrightarrow X$ é uma extensão de uma aplicação $\varphi_\alpha : S^{n-1} \longrightarrow X^{n-1}$, chamada aplicação de “colagem”. Esta φ_α é usada para obter X^n de X^{n-1} “colando” células e_α^n , isto significa que X^n é o espaço quociente da união disjunta $X^{n-1} \coprod_\alpha D_\alpha^n$ de X^{n-1} com a coleção de n -discos D_α^n sob as identificações $x \sim \varphi_\alpha(x)$ para $x \in \partial D_\alpha^n = S^{n-1}$. Então como um conjunto, $X^n = (X^{n-1} \coprod_\alpha e_\alpha^n) / \sim$ onde cada e_α^n é um n -disco aberto.

Definição 2.1.2. Um subcomplexo de um complexo X é um subespaço fechado $A \subset X$ que é a união de células de X . Como A é fechado a aplicação característica de cada célula em A tem imagem contida em A , e também a imagem da aplicação colagem de cada célula está contida em A , assim A é um CW-complexo. Em particular, cada esqueleto X^n de um complexo celular é um subcomplexo. Um par (X, A) consistindo de um complexo celular X e um subcomplexo A será chamado um par de CW-complexos ou um par CW.

Exemplo 2.1.1. Um complexo celular 1-dimensional $X = X^1$ é chamado um grafo na topologia algébrica. Ele consiste de vértices (as 0-células) nos quais arestas (as 1-células) são coladas. Note que os extremos de uma aresta podem ser colados num mesmo vértice.

Exemplo 2.1.2. A esfera S^n tem uma estrutura celular (canônica) de um CW-complexo com exatamente duas células, e^0 e e^n , a n -célula é colada pela aplicação constante $S^{n-1} \longrightarrow e^0$. Isto é equivalente a enxergar S^n como o espaço quociente $D^n / \partial D^n$.

Exemplo 2.1.3. O toro T^2 admite uma estrutura celular 2-dimensional, com uma 0-célula, duas 1-células e uma 2-célula:

$$T^2 = e^0 \cup e_1^1 \cup e_2^1 \cup e^2.$$

Exemplo 2.1.4. O espaço projetivo real n -dimensional, denotado por $\mathbb{R}P^n$ é definido como sendo o espaço de todas as retas que passam pela origem em $\mathbb{R}^{n+1}$. Cada tal reta é determinada por um vetor não-nulo em $\mathbb{R}^{n+1}$, único a menos de multiplicação por escalar, e $\mathbb{R}P^n$ é topologizado como o espaço quociente de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ sob a relação de equivalência $v \sim \lambda v$ para escalares $\lambda \neq 0$. Podemos restringir para vetores de tamanho 1, então $\mathbb{R}P^n$ é também visto como o espaço quociente $S^n / (v \sim -v)$, a esfera com pontos antipodais identificados (como mencionado no exemplo 1.2.4). Isto é equivalente a dizer que $\mathbb{R}P^n$ é o espaço quociente de um hemisfério D^n com pontos antipodais de ∂D^n identificados. Como ∂D^n com pontos antipodais identificados é exatamente $\mathbb{R}P^{n-1}$, vemos que $\mathbb{R}P^n$ é obtido de $\mathbb{R}P^{n-1}$ pela colagem de uma n -célula, com a projeção quociente $S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ como as aplicações de colagem. Segue por indução sobre n que $\mathbb{R}P^n$ tem uma estrutura celular com uma célula e^i em cada dimensão $i \leq n$:

$$\mathbb{R}P^n = e^0 \cup e^1 \cup \dots \cup e^n$$

Notemos que $\mathbb{R}P^k$ são subcomplexos de $\mathbb{R}P^n$ para $k \leq n$.

Ainda, como $\mathbb{R}P^n$ é obtido de $\mathbb{R}P^{n-1}$ colando uma n -célula, a união infinita $\mathbb{R}P^\infty = \bigcup_n \mathbb{R}P^n$ se torna um complexo celular com uma célula em cada dimensão. Podemos também ver $\mathbb{R}P^\infty$ como o espaço de retas que passam pela origem em $\mathbb{R}^\infty = \bigcup_n \mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.1.5. O n -espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^n$ é o espaço das retas (complexas) passando pela origem em $\mathbb{C}^{n+1}$, isto é, subespaço de vetores 1-dimensional de $\mathbb{C}^{n+1}$. Como no caso de $\mathbb{R}P^n$, cada reta é determinada por

um vetor não-nulo em $\mathbb{C}^{n+1}$, único a menos de multiplicação por escalar, e $\mathbb{C}P^n$ é topologizado como o espaço quociente de $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ sob a relação de equivalência $v \sim \lambda v$ para $\lambda \neq 0$. Equivalentemente, este é o espaço quociente obtido da esfera unitária $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$, com $v \sim \lambda v$ para $|\lambda| = 1$. É também possível obter $\mathbb{C}P^n$ como o espaço quociente do disco D^{2n} sob as identificações $v \sim \lambda v$ para $v \in \partial D^{2n}$, da seguinte maneira. Os vetores em $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ com a última coordenada real e não negativa são precisamente os vetores da forma $(w, \sqrt{1 - |w|^2}) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ com $|w| \leq 1$. Tais vetores formam o grafo de uma função $w \mapsto \sqrt{1 - |w|^2}$. Este é um disco D_+^{2n} limitado pela esfera $S^{2n-1} \subset S^{2n+1}$ consistindo dos vetores $(w, 0) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ com $|w| = 1$. Cada vetor em S^{2n+1} é equivalente sob identificações $v \sim \lambda v$ a um vetor em D_+^{2n} , e o último vetor é único se sua última coordenada é não-nula. Se a última coordenada é zero, temos exatamente as identificações $v \sim \lambda v$ para $v \in S^{2n-1}$.

Desta descrição de $\mathbb{C}P^n$ como o espaço quociente do disco D_+^{2n} sob as identificações $v \sim \lambda v$ para $v \in S^{2n-1}$ segue que $\mathbb{C}P^n$ é obtido de $\mathbb{C}P^{n-1}$ pela colagem de uma célula e^{2n} via a aplicação quociente $S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$. Então por indução sobre n , obtemos uma estrutura celular $\mathbb{C}P^n = e^0 \cup e^2 \cup \dots \cup e^{2n}$ com células somente nas dimensões pares. Similarmente, $\mathbb{C}P^\infty$ tem uma estrutura celular com uma célula em cada dimensão par.

Observação 2.1.1. Existem inclusões naturais $S^0 \subset S^1 \subset \dots \subset S^n$, mas estas subesferas não são subcomplexos de S^n na sua estrutura celular usual com exatamente duas células. No entanto, podemos dar à S^n uma estrutura celular diferente na qual cada uma das subesferas S^k é um subcomplexo, olhando cada S^k como sendo obtida indutivamente do equador S^{k-1} colando duas k -células, as componentes de $S^k - S^{k-1}$. A esfera de dimensão infinita $S^\infty = \bigcup_n S^n$ então se torna um complexo celular também. Note que a aplicação quociente $S^\infty \rightarrow \mathbb{R}P^\infty$ que identifica pontos antipodais de S^∞ identifica as duas n -células de S^∞ na única n -célula de $\mathbb{R}P^\infty$.

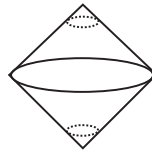
Complexos celulares têm uma boa mistura de rigidez e flexibilidade, com rigidez suficiente para permitir que alguns argumentos procedam numa combinação padrão célula-por-célula e flexibilidade suficiente para permitir que algumas construções naturais sejam executadas sobre eles de modo a obter novos complexos celulares. Aqui estão algumas dessas construções.

Exemplo 2.1.6. 1.Produto. Se X e Y são CW-complexos então $X \times Y$ tem a estrutura de um CW-complexo tendo como células os produtos $e_\alpha^m \times e_\beta^n$ onde e_α^m percorre todas as células de X e e_β^n percorre todas as células de Y . Por exemplo, a estrutura celular do toro $S^1 \times S^1$ (já descrita) é obtida deste modo considerando a estrutura celular padrão de S^1 . No caso geral existe, no entanto, uma pequena complicação: A topologia sobre $X \times Y$ como um CW-complexo é às vezes desprezadamente mais fraca do que a topologia produto, com mais conjuntos abertos do que a topologia produto tem, embora as duas topologias coincidam se X ou Y tem um número finito de células ou ambos X e Y têm uma quantidade enumerável de células.

2.Quocientes. Se (X, A) é um par CW consistindo de um CW-complexo X e um subcomplexo A , então o espaço quociente X/A herda uma estrutura celular natural de X . As células X/A são as células de $X - A$ mais uma nova 0-célula, a imagem de A em X/A . Para cada célula e_α^n de $X - A$ colada por $\varphi_\alpha : S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$, a aplicação colagem para a correspondente célula em X/A é a composição $S^{n-1} \rightarrow X^{n-1} \rightarrow X^{n-1}/A^{n-1}$.

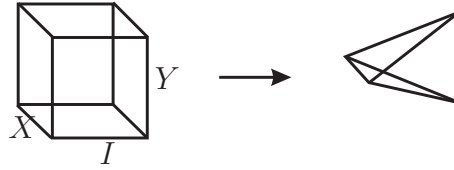
Por exemplo, se damos a S^{n-1} qualquer estrutura celular e construímos D^n de S^{n-1} colando uma n -célula, então o quociente D^n/S^{n-1} é S^n com sua estrutura celular usual. Um outro exemplo, tome X como uma superfície orientável fechada com a estrutura celular tendo uma única 2-célula, e seja A o complementar dessa 2-célula (o 1-esqueleto de X). Então X/A tem uma estrutura celular consistindo de uma 0-célula com uma 2-célula colada, e existe somente uma maneira de colar uma 2-célula à uma 0-célula, pela aplicação constante. Assim X/A é S^2 .

3.Suspensão. Para um espaço X , a suspensão SX é o quociente de $X \times I$ obtido pela deformação de $X \times \{0\}$ a um ponto e $X \times \{1\}$ a outro ponto. O exemplo motivador é $X = S^n$, onde $SX = S^{n+1}$ com os dois “pontos de suspensão” no pólo norte e sul de S^{n+1} , os pontos $(0, 0, \dots, \pm 1)$. Podemos considerar SX como um cone duplo sobre X , a união das duas cópias do cone $CX = (X \times I)/(X \times \{0\})$.



Se X é um CW-complexo, então também são SX e CX visto como quocientes de $X \times I$ com a estrutura celular produto, sendo dado a I a estrutura celular padrão de duas 0-células unidas por uma 1-célula. Uma propriedade especialmente útil de suspensão é que não somente espaços mas também aplicações podem ser suspensas. Isto é, uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ suspende para $Sf : SX \longrightarrow SY$, a aplicação quociente de $f \times id_I : X \times I \longrightarrow Y \times I$.

4.Join (Junção). O cone CX é a união de todos os segmentos de retas ligando pontos de X a um vértice externo, e similarmente a suspensão SX é a união de todos os segmentos de retas ligando pontos de X a dois vértices externos. Mais geralmente, dados X e um segundo espaço Y , pode-se definir o espaço de todos segmentos de retas ligando pontos de X a pontos de Y . Isto é, o join (junção) $X * Y$ é o espaço quociente de $X \times Y \times I$ sob as identificações $(x, y_1, 0) \sim (x, y_2, 0)$ e $(x_1, y, 1) \sim (x_2, y, 1)$. Assim estamos deformando o subespaço $X \times Y \times \{0\}$ em X e $X \times Y \times \{1\}$ em Y . Por exemplo, se X e Y são ambos intervalos fechados, estamos deformando as duas faces opostas de um cubo sobre segmentos de retas de modo que o cubo se torna um tetraedro.



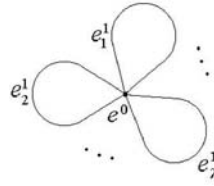
No caso geral, $X * Y$ contém cópias de X e Y e seus dois “extremos”, e todos os outros pontos (x, y, t) em $X * Y$ estão sobre um único segmento de reta colando o ponto $x \in X \subset X * Y$ ao ponto $y \in Y \subset X * Y$, o segmento obtido por fixar x e y e considerar a coordenada t em (x, y, t) variando. Uma boa maneira para escrever as coordenadas de $X * Y$ é como uma combinação linear formal $t_1x + t_2y$ com $0 \leq t_i \leq 1$ e $t_1 + t_2 = 1$, submetendo as regras $0x + 1y = y$ e $1x + 0y = x$ que correspondem exatamente às identificações na definição de $X * Y$. Da mesma forma um join iterado $X_1 * \cdots * X_n$ pode ser considerado como o espaço de combinações lineares formais $t_1x_1 + \cdots + t_nx_n$ com $0 \leq t_i \leq 1$ e $t_1 + \cdots + t_n = 1$ com a convenção que os termos $0 \cdot t_i$ podem ser omitidos. Deste ponto de vista é fácil ver que a operação join é associativa. Um caso especial que desempenha um papel central na topologia algébrica é quando cada X_i é somente um ponto. Por exemplo, o join de dois pontos é um segmento de reta, o join de três pontos é um triângulo, e o join de quatro pontos é um tetraedro. O join de n pontos é um poliedro

convexo de dimensão $n - 1$ chamado um *simplexo*. Concretamente, se os n pontos são os n vetores básicos padrão para $\mathbb{R}^n$, então seus joins é o espaço $\Delta^{n-1} = \{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n; t_1 + \dots + t_n = 1, t_i \geq 0\}$.

Se X e Y são CW-complexos, então existe uma estrutura celular natural sobre $X * Y$ tendo os subespaços X e Y como subcomplexos, com as células restantes sendo o produto celular de $X \times Y \times (0, 1)$.

5.Soma Wedge. Esta é uma operação trivial mas ainda muito útil. Dados espaços X e Y com pontos escolhidos $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$, então a soma wedge $X \vee Y$ é o quociente da união disjunta $X \amalg Y$ obtido pela identificação de x_0 e y_0 em um único ponto. Por exemplo, $S^1 \vee S^1$ é homeomorfo a figura “8”, dois círculos se tocando num ponto. Mais geralmente, podemos formar a soma wedge $\bigvee_{\alpha} X_{\alpha}$ de uma coleção arbitrária de espaços X_{α} começando com a união disjunta $\amalg_{\alpha} X_{\alpha}$ e identificando pontos $x_{\alpha} \in X_{\alpha}$ em um único ponto. No caso dos espaços X_{α} serem CW-complexos e os pontos x_{α} serem 0-células, então $\bigvee_{\alpha} X_{\alpha}$ é um CW-complexo pois ele é obtido do CW-complexo $\amalg_{\alpha} X_{\alpha}$ deformando um subcomplexo num ponto.

Em particular temos o **bouquet de n -esferas**: $X = \bigvee_{\lambda \in A} S_{\lambda}^n$, que tem uma estrutura de CW-complexo n -dimensional, com uma única 0-célula, e^0 , e uma n -célula, e_{λ}^n , para cada elemento λ de A . Em especial, o bouquet de círculos $X = \bigvee_{\lambda \in A} S_{\lambda}^1$ é um CW-complexo 1-dimensional.



Notemos que para qualquer CW-complexo X , o quociente X^n / X^{n-1} é uma soma wedge de n -esferas $\bigvee_{\alpha} X_{\alpha}$ com uma esfera para cada n -célula de X .

6.Produto Smash. Sobre um espaço produto $X \times Y$ existem cópias de X e Y , a saber $X \times \{y_0\}$ e $\{x_0\} \times Y$ para pontos $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$. Estas duas cópias de X e Y em $X \times Y$ se interceptam somente no ponto (x_0, y_0) , assim a união delas pode ser identificada com a soma wedge de $X \vee Y$. O produto smash $X \wedge Y$ é então definido como o quociente $X \times Y / X \vee Y$.

O produto smash $X \wedge Y$ é um CW-complexo se X e Y são CW-complexos com x_0 e y_0 como 0-células, assumindo que atribuímos a $X \times Y$ a topologia

de CW-complexo preferencialmente à topologia produto nos casos onde essas duas topologias diferem. Por exemplo, $S^m \wedge S^n$ tem uma estrutura celular com somente duas células de dimensão 0 e $m + n$, conseqüentemente $S^m \wedge S^n = S^{m+n}$. Em particular, quando $m = n = 1$ vemos que deformando círculos longitudinais e meridionais de um toro em um ponto produzimos uma 2-esfera, isto é, $S^1 \wedge S^1 = T/(S^1 \vee S^1) = S^2$.

É interessante observar que o espaço de recobrimento de um CW-complexo conexo é também um CW-complexo, mais precisamente:

Proposição 2.1.1. *Seja X um espaço topológico conexo com estrutura de CW-complexo. Considere $\tilde{X}$ seu espaço de recobrimento e $p : \tilde{X} \rightarrow X$ a projeção associada. Então $\tilde{X}$ pode ser representado como um CW-complexo de tal maneira que toda célula de $\tilde{X}$ será aplicada pela p topologicamente sobre uma célula de X ([10], §6.9, Teorema 2, p. 251).*

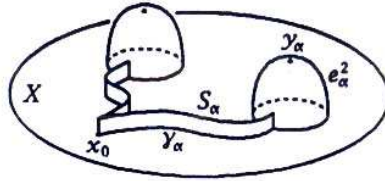
2.2 Grupo Fundamental e Adjunção de 2 - Células

Nesta seção estamos interessados em CW-complexos 2-dimensionais, analisando como o grupo fundamental é afetado por colar 2-células. Seja X^* um espaço de Hausdorff, obtido de um espaço conexo por caminhos X pela adjunção (ou colagem) de uma coleção de 2-células abertas. Nosso principal objetivo é determinar a relação entre o grupo fundamental de X e de X^* . Para este propósito, suponhamos que colamos uma coleção de 2-células e_α^2 , $\alpha \in \Lambda$, a um espaço conexo por caminhos X via aplicações de colagem $\varphi_\alpha : S^1 \rightarrow X$, produzindo um espaço X^* . Se s_0 é um ponto base de S^1 (que podemos supor igual a 1), então φ_α determina um laço baseado em $\varphi_\alpha(s_0)$ (mesmo pensando em laços tecnicamente como aplicações $I \rightarrow X$ mais do que $S^1 \rightarrow X$). Vamos denotar tal laço por φ_α . Para diferentes α 's os pontos bases $\varphi_\alpha(s_0)$ desses laços φ_α podem não coincidir (podemos ter $\varphi_{\alpha_1}(s_0) \neq \varphi_{\alpha_2}(s_0)$, se $\alpha_1 \neq \alpha_2$). Para corrigir isso, escolha um ponto base x_0 em X e um caminho γ_α em X ligando x_0 a $\varphi_\alpha(s_0)$, para cada α . Então o produto de caminhos $\gamma_\alpha * \varphi_\alpha * \bar{\gamma}_\alpha$, onde $\bar{\gamma}_\alpha$ indica o caminho reverso de γ_α , é um laço em x_0 . Este laço pode não ser homotopicamente nulo em X (i.é, homotópico à um laço constante), mas certamente será homotopicamente nulo após a célula e_α^2 ser colada.

Assim o subgrupo normal $N \subset \pi_1(X, x_0)$ gerado pela classe dos laços $\gamma_\alpha * \varphi_\alpha * \bar{\gamma}_\alpha$ com α variando em Λ , está contido no núcleo do homomorfismo $\pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X^*, x_0)$ induzido da inclusão $X \hookrightarrow X^*$.

Proposição 2.2.1. *Seja X^* o espaço obtido de X por adjunção (colagem) de uma coleção de 2-células e_α^2 , $\alpha \in \Lambda$, como acima. Então a inclusão $X \hookrightarrow X^*$ induz um homomorfismo sobrejetor $\pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X^*, x_0)$, cujo núcleo é N . Assim $\pi_1(X^*) \simeq \pi_1(X)/N$.*

Demonstração: Vamos expandir X^* para um espaço Z um pouco mais amplo que se retrai por deformação sobre X^* e é mais conveniente para aplicar o Teorema de Van Kampen. O espaço Z é obtido por colar faixas retangulares $S_\alpha = I \times I$ com a aresta inferior $I \times \{0\}$ colada ao longo de γ_α , a aresta superior $\{1\} \times I$ colada ao longo de um arco em e_α^2 , e todas as arestas da esquerda $\{0\} \times I$ das diferentes faixas são identificadas juntas. As arestas do topo das faixas não são coladas a nada (são deixadas livres), e isso permite-nos retrair Z sobre X^* . Assim $\pi_1(Z)$ é isomorfo a $\pi_1(X^*)$. Em cada célula e_α^2 escolha um ponto y_α (que não pertence ao arco dos quais a faixa S_α foi colada).



Seja $U = Z - \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \{y_\alpha\}$, então U retrai por deformação sobre X . Seja agora $V = Z - X$ (“as faixas unidas com as células”). Note que podemos escolher os caminhos $\gamma_\alpha * \varphi_\alpha * \bar{\gamma}_\alpha$, $\alpha \in \Lambda$ de modo que V seja contrátil (e assim $\pi_1(V) = 0$) pois se os caminhos γ_α ’s são como na figura acima (isto é, não se interceptam) isso ocorre; agora se, por exemplo, dois caminhos γ_α e γ_β têm um ponto x_1 em comum podemos manter o caminho γ_α e substituir γ_β pelo caminho produto $\tilde{\gamma}_\alpha * \tilde{\gamma}_\beta$ onde $\tilde{\gamma}_\alpha$ é a parte do caminho γ_α que vai de x_0 a x_1 e $\tilde{\gamma}_\beta$ é a parte do caminho γ_β que vai de x_1 a $\varphi_\beta(s_0)$ (repetindo esse procedimento para outros pontos em comum, se necessário). Desse modo o Teorema de Van Kampen aplicado à cobertura $\{U, V\}$ de Z diz que a aplicação induzida da inclusão $\pi_1(U) \longrightarrow \pi_1(Z)$ (que é isomorfo a $\pi_1(X^*)$) é um epimorfismo cujo núcleo é o subgrupo normal gerado pela imagem da aplicação $\pi_1(U \cap V) \longrightarrow \pi_1(U)$.

Considerando que $\pi_1(X) \simeq \pi_1(U)$, resta somente ver que $\pi_1(U \cap V)$ é gerado pelas classes dos laços $\gamma_\alpha * \varphi_\alpha * \bar{\gamma}_\alpha$, ou melhor, laços em $U \cap V$ cuja imagem em $\pi_1(U)$ (através da aplicação induzida da inclusão) são homotópicos a esse laços. Isto pode ser obtido como uma outra aplicação do Teorema de Van Kampen. Note que $U \cap V$ tem o mesmo tipo de homotopia que o bouquet de círculos $\bigvee_{\alpha \in \Lambda} S_\alpha^1$. Considere a cobertura $\{U_\alpha; \alpha \in \Lambda\}$ de $U \cap V$, onde cada $U_\alpha = U \cap V - \bigcup_{\beta \neq \alpha} (e_\beta^2 - \{y_\beta\})$. Observe que U_α retrai por deformação sobre um círculo em $e_\alpha^2 - \{y_\alpha\}$. Assim, $\pi_1(U_\alpha) \simeq \mathbb{Z}$ é gerado (desconsiderando ponto base) pela classe de um laço que dá uma volta em torno de y_α e a imagem desse laço em $\pi_1(U \cap V)$ é homotópico a um laço cuja imagem em $\pi_1(U)$ é homotópico ao laço $\gamma_\alpha * \varphi_\alpha * \bar{\gamma}_\alpha$ (que pertence a X), e o resultado segue. ■

Corolário 2.2.1. *Dado um grupo G qualquer, existe um CW-complexo 2-dimensional Y , conexo por caminhos, tal que $\pi_1(Y)$ é isomorfo a G . Se G tem uma apresentação com um número finito de geradores e relações então podemos obter Y compacto.*

Demonstração: Escolha uma apresentação de G , $G = \langle \mathbf{A}; \mathbf{B} \rangle$, ou seja, $G \simeq F/R$, onde F é livre gerado por $\mathbf{A}$ e R é o menor subgrupo normal de F gerado por $\mathbf{B}$ (conjunto de relações). Tome $X^1 = \bigvee_{\alpha \in \mathbf{A}} S_\alpha^1$, o bouquet de círculos. Temos que X^1 é conexo e $\pi_1(X^1) \simeq F \simeq *_{\alpha \in \mathbf{A}} \mathbb{Z}_\alpha$ (Exemplo A.4.9). Para cada $\beta \in \mathbf{B}$, escolhamos uma aplicação $g_\beta : S_\beta^1 \longrightarrow \bigvee_{\alpha \in \mathbf{A}} S_\alpha^1 = X^1$, tal que $[g_\beta] = \beta \in \mathbf{B} \subset F$ e usamos esta aplicação para colar uma 2-célula e_β^2 a X^1 . Mais precisamente, cole a célula e_β^2 de modo que a aplicação característica $\phi_\beta : D_\beta^2 \longrightarrow X$ leve U^2 , o interior do disco D^2 , homeomorficamente sobre e_β^2 e a restrição $\phi|_{\partial D_\beta^2 = S_\beta^1} = g_\beta$. Seja então $X^2 = X^1 \cup (\bigcup_{\beta \in \mathbf{B}} e_\beta^2)$. Temos que $X^* = X^2$ e $X = X^1$ satisfazem as hipóteses da proposição anterior. Então $\pi_1(X^2) \simeq \pi_1(X^1)/R \simeq F/R \simeq G$, como desejado. Agora se G tem uma apresentação $G = \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s \rangle$ então $Y = (\bigvee_{j=1}^n S_{\alpha_j}^1) \cup (\bigcup_{i=1}^s e_{\beta_i}^2) = (\bigvee_{j=1}^n S_{\alpha_j}^1) \cup (\bigcup_{i=1}^s \bar{e}_{\beta_i}^2)$, que é compacto. ■

Observação 2.2.1. *A prova da Proposição anterior está de acordo com [5] mas também pode ser encontrada em [7] (Teorema 2.1, p. 213). Quando*

X^* é obtido de X por colar células de dimensões maiores que 2, obtemos um isomorfismo, como mostra o resultado seguinte:

Teorema 2.2.1. *Se X^* é obtido do espaço X pela adjunção de células de dimensão n , $n > 2$, então a aplicação inclusão de X em X^* induz um isomorfismo de $\pi_1(X)$ sobre $\pi_1(X^*)$.*

Demonstração: ([7], Teorema 3.1, p. 214). ■

Usando esses resultados podemos provar que o grupo fundamental de um CW-complexo só depende do 2-esqueleto. Para tanto apresentamos primeiramente o conceito de limite direto de um grupo ([9] §1.4, p. 22) e um lema.

Definição 2.2.1. (*Limite Direto de Grupos*) Sejam G_α uma família de grupos indexada por algum conjunto de índices parcialmente ordenado $\mathbb{I}$ tendo a propriedade que para cada par $\alpha, \beta \in \mathbb{I}$ existe $\gamma \in \mathbb{I}$ com $\alpha \leq \gamma$ e $\beta \leq \gamma$. Tal $\mathbb{I}$ é chamado um conjunto direto. Suponha que para cada par $\alpha \leq \beta$ tem-se um homomorfismo $f_{\alpha\beta} : G_\alpha \longrightarrow G_\beta$, tal que $f_{\alpha\alpha} = \text{id}_{G_\alpha}$ para cada α , e se $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ então $f_{\alpha\gamma}$ é a composição de $f_{\alpha\beta}$ com $f_{\beta\gamma}$. O conjunto $\{G_\alpha, f_{\alpha\beta}, \alpha \leq \beta, \alpha \text{ e } \beta \text{ em } \mathbb{I}\}$, de grupos e homomorfismos é chamado um sistema direto de grupos. A partir desse sistema de grupos podemos definir um grupo, denominado “limite direto” e denotado por “ $\varinjlim G_\alpha$ ” da seguinte maneira: Defina uma relação de equivalência sobre o conjunto $\coprod_\alpha G_\alpha$ por $a \sim b$ se $f_{\alpha\gamma}(a) = f_{\beta\gamma}(b)$ para algum γ , onde $a \in G_\alpha$ e $b \in G_\beta$. (Aqui estamos supondo que tal conjunto seja formado por grupos disjuntos, visto que podemos substituir G_α por uma cópia isomorfa). Esta relação é claramente reflexiva e simétrica, e a transitiva segue da propriedade de conjunto direto. Tal relação pode também ser descrita como a relação de equivalência gerada pelo conjunto $a \sim f_{\alpha\beta}(a)$. Quaisquer duas classes de equivalência $[a]$ e $[b]$ tem representantes a' e b' pertencentes ao mesmo G_γ , assim define $[a].[b] = [a'.b']$. Pode-se checar que essa operação está bem definida e dá uma estrutura de grupo ao conjunto das classes de equivalência. Tal grupo é que denotamos por $\varinjlim G_\alpha$.

Observação 2.2.2. (1) Se os grupos G_α são todos abelianos então $\varinjlim G_\alpha$ é isomorfo ao grupo quociente da soma direta $\oplus_\alpha G_\alpha$ pelo subgrupo H gerado pelos elementos da forma $a - f_{\alpha\beta}(a)$ para $a \in G_\alpha$, onde vemos cada G_α como um subgrupo de $\oplus_\alpha G_\alpha$. A aplicação que associa cada

classe de equivalência $[a]$ à classe lateral de a , aH , é um homomorfismo de $\varinjlim G_\alpha$ no grupo quociente $\coprod_\alpha G_\alpha/H$, com inversa induzida pela aplicação $\sum_i a_i \mapsto \sum_i [a_i]$, para $a_i \in G_{\alpha_i}$ ([5] Seção 3.3, p. 243).

- (2) Uma situação interessante é quando $\mathbb{I} = \mathbb{N}$ (ou um subconjunto qualquer de $\mathbb{Z}$), os grupos G_n , $n \in \mathbb{N}$ são encaixantes e os homomorfismos $f_{mn} : G_m \longrightarrow G_n$, para $m \leq n$, são as inclusões.

Lema 2.2.1. *Seja X um espaço topológico, e para cada inteiro n seja X_n um subespaço de X , conexo por caminhos, contendo o ponto base x_0 de X . Assuma que os subespaços X_n são encaixantes, isto é, $X_n \subset X_{n+1}$ para todo n , que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, e que para todo subconjunto compacto A de X existe um inteiro n tal que $A \subset X_n$. Sejam $i_n : \pi_1(X_n) \longrightarrow \pi_1(X)$ e $j_{m,n} : \pi_1(X_m) \longrightarrow \pi_1(X_n)$, $m \leq n$, homomorfismos induzidos pela inclusão. Então:*

- a) *Para todo $\alpha \in \pi_1(X)$, existe um inteiro n e um elemento $\alpha' \in \pi_1(X_n)$ tal que $i_n(\alpha') = \alpha$.*
- b) *Se $\beta \in \pi_1(X_m)$ e $i_m(\beta) = 1$, então existe um inteiro $n \geq m$ tal que $j_{m,n}(\beta) = 1$.*
- c) *Se os homomorfismos $j_{n,n+1}$ são monomorfismos, para todo n , então cada i_n é também um monomorfismo e $\pi_1(X)$ é a união dos subgrupos $i_n(\pi_1(X_n))$.*

Demonstração: ([7], Exercício II, 4.11, p. 67). ■

Observação 2.2.3. : *O resultado anterior nos diz que, nas hipóteses acima, $\pi_1(X)$ é o limite direto da sequência de grupos $\pi_1(X_n)$ e homomorfismos $j_{m,n}$.*

Teorema 2.2.2. *Seja X um CW-complexo conexo. A aplicação inclusão do 2-esqueleto X^2 em X induz um isomorfismo de $\pi_1(X^2)$ em $\pi_1(X)$.*

Demonstração: Considere a sequência de subespaços de X : $X_2 = X^2$, o 2-esqueleto de X , $X_3 = X^3$, o 3-esqueleto, e assim por diante, isto é, $X_n = X^n$. Temos que $X_n \subset X_{n+1}$ e $X = \bigcup_{n=2}^{\infty} X_n$. Do Teorema 2.2.1 obtemos que $j_{n,n+1} : \pi_1(X^n) \longrightarrow \pi_1(X^{n+1})$ são isomorfismos para $n \geq 2$. Assim, são monomorfismos, e pelo lema anterior, $i_n : \pi_1(X^n) \longrightarrow \pi_1(X)$ são também

monomorfismos e $\pi_1(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} i_n(\pi_1(X^n))$. Além disso, da sobrejetividade, segue que $j_{n,n+1}(\pi_1(X^n)) = \pi_1(X^{n+1})$, para $n \geq 2$. Como o diagrama seguinte

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X^n) & \xrightarrow{i_n} & \pi_1(X) \\ j_{n,n+1} \downarrow & \nearrow i_{n+1} & \\ \pi_1(X^{n+1}) & & \end{array}$$

é comutativo, temos que $i_{n+1}(j_{n,n+1}(\pi_1(X^n))) = i_n(\pi_1(X^n))$. Logo, da sobrejetividade e, comutatividade do diagrama, obtemos que

$$i_3(\pi_1(X^3)) = i_3(j_{2,3}(\pi_1(X^2))) = i_2(\pi_1(X^2)).$$

Também $i_4(\pi_1(X^4)) = i_4(j_{3,4}(\pi_1(X^3))) = i_3(\pi_1(X^3)) = i_2(\pi_1(X^2))$.

Prosseguindo assim temos:

$i_{n+1}(\pi_1(X^{n+1})) = i_{n+1}(j_{n,n+1}(\pi_1(X^n))) = i_n(\pi_1(X^n)) = i_{n-1}(\pi_1(X^{n-1})) = \dots = i_2(\pi_1(X^2))$. Logo $\pi_1(X) = \bigcup_{n=2}^{\infty} i_n(\pi_1(X^n)) = i_2(\pi_1(X^2))$. Assim i_2 é sobrejetora. Portanto i_2 é isomorfismo de $\pi_1(X^2)$ em $\pi_1(X)$. ■

2.3 Aproximação Celular e Torre de Postnikov

O objetivo principal dessa seção é apresentar alguns importantes resultados relativos a CW complexos, com destaque para *Aproximação Celular para Pares*, o que nos dá como consequência, sob certas hipóteses, uma condição suficiente para um par de CW-complexos (X, A) ser n -conexo. A seguir computamos o grupo de homotopia no nível n , $n \geq 2$, de um bouquet de n -esferas, finalizando com o Teorema da Torre de Postnikov, que é fundamental na prova da existência de $K(G, n)$ -espaços. Outros conceitos e resultados como Propriedade de Extensão de Homotopia e o Teorema de Whitehead são também apresentados.

Propriedade de Extensão de Homotopia: Um fato interessante é que todo par CW, (X, A) , tem a propriedade de extensão de homotopia. Tornaremos isso mais preciso a seguir:

Definição 2.3.1. Um par (X, A) tem a propriedade de extensão de homotopia

se toda aplicação $H : X \times \{0\} \cup A \times I \longrightarrow Y$ pode ser estendida a uma aplicação $\tilde{H} : X \times I \longrightarrow Y$.

Notemos que dizer que (X, A) tem a propriedade de extensão de homotopia é equivalente a dizer que para qualquer aplicação $f_0 : X \longrightarrow Y$ e homotopia $H : A \times I \longrightarrow Y$ de $f_0|_A$ podemos estender H a uma homotopia $\tilde{H} : X \times I \longrightarrow Y$ de forma que $\tilde{H}(x, 0) = f_0 : X \longrightarrow Y$.

Proposição 2.3.1. (1) Se (X, A) é um par CW, então $X \times \{0\} \cup A \times I$ é um retrato por deformação de $X \times I$ e conseqüentemente (X, A) tem a propriedade de extensão de homotopia.

(2) Se o par (X, A) satisfaz a propriedade de extensão de homotopia e A é contráctil, então a aplicação quociente $q : X \longrightarrow X/A$ é uma equivalência de homotopia.

Demonstração: ([5] Proposições 0.16 e 0.17, p.15 e 16). ■

Uma vez que CW complexos são construídos usando aplicações de colagem cujo domínio são esferas, é de se esperar que os grupos de homotopia de CW - complexos carreguem um grande número de informações. O Teorema de Whitehead torna isso explícito:

Teorema 2.3.1. (Teorema de Whitehead)

Se uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ entre CW-complexos conexos induz isomorfismos $f_{\#} : \pi_n(X) \longrightarrow \pi_n(Y)$ para todo n , então f é uma equivalência de homotopia. No caso em que f é a inclusão de um subcomplexo $X \hookrightarrow Y$, a conclusão é mais forte: X é um retrato por deformação de Y .

Demonstração: ([5], Teorema 4.5, p. 346).

Ressaltamos que para a prova do Teorema de Whitehead usa-se o seguinte resultado (técnico) conhecido como Lema da Compressão:

Lema 2.3.1. (Lema da Compressão) Sejam (X, A) um par CW e (Y, B) um par qualquer com $B \neq \emptyset$. Para cada n tal que $X - A$ tem células de dimensão n , assumamos que $\pi_n(Y, B, y_0) = 0$ para todo $y_0 \in B$. Então toda aplicação $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ é homotópica, relativamente a A , a uma aplicação de X em B . Quando $n = 0$, a condição que $\pi_0(Y, B, y_0) = 0$ para todo $y_0 \in B$ é para ser entendida como sendo o par (Y, B) 0-conexo.

Demonstração: ([5] Lema 4.6, p. 346).

Observação 2.3.1. (1) *O Teorema de Whitehead não diz que dois CW-complexos X e Y com grupos de homotopia isomorfos são equivalentes por homotopia, pois há uma grande diferença entre dizer que X e Y têm grupos de homotopia isomorfos e dizer que existe uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ que induz isomorfismos sobre todos os grupos de homotopia. Por exemplo, considerando $X = \mathbb{R}P^2$ e $Y = S^2 \times \mathbb{R}P^\infty$ tem-se que $\pi_1(X) \simeq \mathbb{Z}_2 \simeq \pi_1(Y)$, e usando o fato que o recobrimento universal de X e Y são, respectivamente, S^2 e $S^2 \times S^\infty$, que S^∞ é contráctil e que a projeção de recobrimento induz isomorfismos nos grupos de homotopia, para $j \geq 2$, obtém-se que $\pi_j(\mathbb{R}P^2) \simeq \pi_j(S^2) \simeq \pi_j(S^2 \times S^\infty) \simeq \pi_j(S^2 \times \mathbb{R}P^\infty)$, se $j \geq 2$. Mas $\mathbb{R}P^2$ e $S^2 \times \mathbb{R}P^\infty$ não têm o mesmo tipo de homotopia visto que seus grupos de homologia são diferentes: $S^2 \times \mathbb{R}P^\infty$ tem homologia não nula em um número infinito de dimensões pois ele retrai sobre $\mathbb{R}P^\infty$ ([5], capítulo 4, p. 348).*

(2) *Um caso muito especial em que o tipo de homotopia de um CW-complexo é determinado por seus grupos de homotopia é quando todos os grupos de homotopia são triviais, pois então a aplicação inclusão de uma 0-célula no complexo induz um isomorfismo sobre os grupos de homotopia e assim o complexo se retrai por deformação sobre a 0-célula.*

O Lema seguinte será utilizado quando falarmos em Torre de Postnikov.

Lema 2.3.2. (*Lema da Extensão*) *Dados (X, A) um par CW e $f : A \longrightarrow Y$ uma aplicação com Y conexo por caminhos, então f pode ser estendida a uma aplicação $\varphi : X \longrightarrow Y$ se $\pi_{n-1}(Y) = 0$ para todo n tal que $X - A$ tem células de dimensão n .*

Demonstração: ([5] Lema 4.7, p. 348).

Definição 2.3.2. *Sejam X e Y CW-complexos. Uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ é chamada uma aplicação celular se satisfaz $f(X^n) \subset Y^n$ para todo n .*

Teorema 2.3.2. (**Teorema da Aproximação Celular**) *Toda aplicação $f : X \longrightarrow Y$ de CW-complexos é homotópica à uma aplicação celular. Se f já é celular sobre um subcomplexo $A \subset X$, a homotopia pode ser tomada como sendo estacionária sobre A .*

Demonstração: ([5] Teorema 4.8, p. 349).

Observação 2.3.2. Com o resultado acima podemos justificar que $\pi_i(S^n) = 0$ se $i < n$. De fato, considere $[\alpha] \in \pi_i(S^n)$, então $\alpha : S^i \rightarrow S^n$. Pelo teorema acima existe uma aplicação $\alpha' : S^i \rightarrow S^n$ celular que é homotópica a α . Como α' é celular e $i < n$ então a imagem de α' contém apenas um ponto (a 0-célula $e^0 \in S^n$), ou seja, α' é uma aplicação constante. Logo $[\alpha] = [\alpha'] = 0$ e portanto $\pi_i(S^n) = 0$ se $i < n$.

Proposição 2.3.2. (Aproximação Celular para Pares) Toda aplicação $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ de pares CW pode ser deformada através de aplicações $(X, A) \rightarrow (Y, B)$ a uma aplicação celular. Além disso, se f é celular sobre um subcomplexo L de X então a homotopia de f a uma celular pode ser tomada estacionária sobre L .

Demonstração: Consideremos a restrição $f|_A : A \rightarrow B$. Pelo teorema da aproximação celular podemos deformar $f|_A$ a uma aplicação celular $g_A : A \rightarrow B$ através de uma homotopia $H_A : A \times I \rightarrow B$ tal que $H_A(x, 0) = f|_A(x)$ e $H_A(x, 1) = g_A(x)$.

Agora, como um par (X, A) de CW-complexos tem a propriedade de extensão de homotopia (Proposição 2.3.1), considerando $H : X \times \{0\} \cup A \times I \rightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$, $H(a, t) = H_A(a, t) \in B$ (para $x \in X$ e $(a, t) \in A \times I$), segue que H pode ser estendida a uma aplicação $\tilde{H} : X \times I \rightarrow Y$. Assim considerando $g(x) := \tilde{H}(x, 1)$, temos que $f \sim g$, com $g|_A = g_A$ que é celular sobre $A \subset X$ e $\tilde{H}(a, t) \in B$ para todo $(a, t) \in A \times I$. Novamente pelo teorema da aproximação celular, existe uma homotopia $\tilde{\tilde{H}}$ entre g e uma aplicação celular $g_1 : X \rightarrow Y$, com $\tilde{\tilde{H}}$ estacionária sobre A , assim $\tilde{\tilde{H}}(a, t) = \tilde{\tilde{H}}(a, 0) = g(a) \in B$. Logo obtemos de $f \sim g$ e $g \sim g_1$, que $f \sim g_1$ com g_1 celular (e essa homotopia é dada através de aplicações $(X, A) \rightarrow (Y, B)$). ■

Corolário 2.3.1. Um par de CW-complexos (X, A) é n -conexo se todas as células de $X-A$ tem dimensão maior que n . Em particular o par (X, X^n) é n -conexo, daí a inclusão $X^n \hookrightarrow X$ induz isomorfismos $\pi_i(X^n) \rightarrow \pi_i(X)$ para $1 \leq i < n$ e uma sobrejeção de $\pi_n(X^n) \rightarrow \pi_n(X)$.

Demonstração: Um elemento de $\pi_i(X, A, x_0)$ pode ser visto como uma classe de homotopia de uma aplicação $f : (D^i, S^{i-1}, x_0) \rightarrow (X, A, x_0)$. Aplicando a aproximação celular para pares, temos que f pode ser deformada

através de aplicações $(D^i, S^{i-1}) \longrightarrow (X, A)$ a uma aplicação celular g . Assim $[f] = [g]$, com g celular. Em particular g é celular sobre S^{i-1} e assim novamente pela aproximação celular para pares obtemos que g é homotópica a uma aplicação $g_1 : (D^i, S^{i-1}) \longrightarrow (X, A)$ (que é celular) por uma homotopia estacionária sobre S^{i-1} . Da hipótese que as células em $X - A$ tem dimensão maior que n , segue que $X^i = A^i$ (mesmos i -esqueletos) para $i \leq n$. Como g_1 é celular, $g_1(D^i) \subset X^i = A^i$, ou seja, $Im(g_1) \subset A$. Assim, pelo critério da compressão (Proposição 1.3.1), $[g_1] = 0$, $[f] = [g] = [g_1] = 0$ e portanto $\pi_i(X, A, x_0) = 0$ para $i \leq n$.

Claramente as células em $X - X^n$ (se existir) tem dimensão maior que n e assim (X, X^n) é n -conexo.

Agora para a última afirmação, considere a seguinte parte da seqüência exata longa de homotopia do par (X, X^n) (Proposição 1.3.2)

$$\cdots \longrightarrow \pi_{i+1}(X, X^n, x_0) \longrightarrow \pi_i(X^n, x_0) \longrightarrow \pi_i(X, x_0) \longrightarrow \pi_i(X, X^n, x_0) \longrightarrow \cdots$$

Se $i \leq n - 1$, então $i + 1 \leq n$ e assim $\pi_{i+1}(X, X^n, x_0) = 0 = \pi_i(X, X^n, x_0)$. Logo, para $i < n$, obtemos isomorfismos $\pi_i(X^n, x_0) \longrightarrow \pi_i(X, x_0)$. Quando $i = n$, como $\pi_n(X, X^n, x_0) = 0$, temos a seqüência exata:

$$\cdots \pi_n(X^n, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_0) \longrightarrow 0$$

portanto a sobrejeção afirmada.

O resultado seguinte nos dá o cálculo de $\pi_n(\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n)$ a partir de $\pi_n(S^n)$ e da seqüência exata longa do par.

Proposição 2.3.3. $\pi_n(\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n) \simeq \oplus_{\alpha} \mathbb{Z}_{\alpha}$, para $n \geq 2$, mais precisamente $\pi_n(\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n)$ é abeliano livre tendo como base as classes de homotopias das inclusões $S_{\alpha}^n \hookrightarrow \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n$.

Demonstração: Suponhamos primeiro que há somente um número finito de somandos $S_{\alpha_1}^n, \dots, S_{\alpha_k}^n$. Podemos olhar $\bigvee_{i=1}^k S_{\alpha_i}^n$ como o n -esqueleto do produto $\prod_{i=1}^k S_{\alpha_i}^n$, onde à $S_{\alpha_i}^n$ é dado a estrutura usual de CW e $\prod_{i=1}^k S_{\alpha_i}^n$ tem a CW estrutura do produto. Observe que $\prod_{i=1}^k S_{\alpha_i}^n$ tem células de dimensões

múltiplas de n , mais especificamente, de dimensões $0, n, 2n, \dots, kn$. Assim o par $(\prod_{i=1}^k S_{\alpha_i}^n, \bigvee_{i=1}^k S_{\alpha_i}^n)$ é $(2n-1)$ -conexo pois $\prod_{i=1}^k S_{\alpha_i}^n$ é obtido de $\bigvee_{i=1}^k S_{\alpha_i}^n$ pela adição de células de dimensão maior ou igual a $2n$, e obviamente, $2n-1 < 2n$. (Por exemplo, $S_1^2 \times S_2^2 \times S_3^2 = (e_1^0 \cup e_1^2) \times (e_2^0 \cup e_2^2) \times (e_3^0 \cup e_3^2) \equiv e^0 \cup (e_1^2 \cup e_2^2 \cup e_3^2) \cup (e_{12}^4 \cup e_{13}^4 \cup e_{23}^4) \cup e^6$ tem células de dimensões $0, 2, 2.2 = 4, 3.2 = 6$. Ainda, $\prod_{i=1}^3 S_i^2$ é obtido de $\bigvee_{i=1}^3 S_i^2$ por adjunção das células $e_{12}^4, e_{13}^4, e_{23}^4, e^6$.)

Daí, concluímos, usando o Corolário 2.3.1 (visto que o $(2n-1)$ -esqueleto de $X = \prod_{i=1}^k S_{\alpha_i}^n$ é igual a $\bigvee_{i=1}^k S_{\alpha_i}^n$) que a inclusão $\bigvee_{i=1}^k S_{\alpha_i}^n \hookrightarrow \prod_{i=1}^k S_{\alpha_i}^n$ induz um homomorfismo de $\pi_j(\bigvee_{i=1}^k S_{\alpha_i}^n)$ em $\pi_j(\prod_{i=1}^k S_{\alpha_i}^n)$ que é um isomorfismo para $j < 2n-1$ e uma sobrejeção para $j = 2n-1$. Em particular, temos um isomorfismo no nível $j = n$ visto que $n < 2n-1$ se $n \geq 2$.

Agora, sabemos que $\pi_n(\prod_{i=1}^k S_{\alpha_i}^n) \simeq \oplus_{i=1}^k \pi_n(S_{\alpha_i}^n)$ e cada $\pi_n(S_{\alpha_i}^n)$ é isomorfo ao grupo $\mathbb{Z}$. Assim, $\oplus_{i=1}^k \pi_n(S_{\alpha_i}^n) \simeq \oplus_{i=1}^k \mathbb{Z}_{\alpha_i}$, o grupo abeliano livre tendo como base as inclusões $S_{\alpha_i}^n \hookrightarrow \prod_{i=1}^k S_{\alpha_i}^n$, e portanto obtemos $\pi_n(\bigvee_{i=1}^k S_{\alpha_i}^n) \simeq \pi_n(\prod_{i=1}^k S_{\alpha_i}^n) \simeq \oplus_{i=1}^k \mathbb{Z}_{\alpha_i}$ para todo $n \geq 2$. Isto para o caso de um número finito de somandos S_{α} 's.

Consideremos então o caso geral (com infinitos somandos S_{α} 's). Para reduzir esse caso ao caso finito, considere o homomorfismo $\phi : \oplus_{\alpha} \pi_n(S_{\alpha}^n) \longrightarrow \pi_n(\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n)$ induzido pelas inclusões $S_{\alpha}^n \hookrightarrow \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n$. Então ϕ é sobrejetora pois toda aplicação $f : S^n \hookrightarrow \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n$, representando um elemento de $\pi_n(\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n)$, tem (visto que S^n é compacto) imagem compacta contida na soma wedge de um número finito de S_{α} 's, isto é, existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $Im(f) \subset \bigvee_{i=1}^k S_{\alpha_i}^n$. Logo, pelo caso finito (já provado), concluímos que existe $u \in \oplus_{i=1}^k \pi_n(S_{\alpha_i}^n) \subset \oplus_{\alpha} \pi_n(S_{\alpha}^n)$ tal que $\phi(u) = [f]$, ou seja, $[f] \in Im(\phi)$.

Para concluir que ϕ é injetora observemos que se $[f] = 0$ em $\pi_n(\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n)$, isto é, f é homotópica a uma constante, então a (nulo)homotopia

$H : S^n \times I \longrightarrow \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n$ tem imagem compacta e assim $Im(H) \subset \bigvee_{i=1}^n S_{\alpha_i}^n$ (soma wedge de um número finito de esferas), ou seja, f é homotópica em $\bigvee_{i=1}^n S_{\alpha_i}^n$ a uma aplicação constante. Daí a injetividade também segue do caso finito. ■

Finalizando essa seção mostramos um resultado fundamental para a construção dos $K(G, n)$ -espaços:

Definição 2.3.3. *Uma Torre de Postnikov para um espaço conexo por caminhos X é um diagrama comutativo (como abaixo) tal que:*

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \downarrow \\
 X_3 \\
 \downarrow \\
 X_2 \\
 \downarrow \\
 X \longrightarrow X_1
 \end{array}$$

- (1) cada aplicação $X \hookrightarrow X_n$ induz um isomorfismo $\pi_i(X) \longrightarrow \pi_i(X_n)$ para $i \leq n$,
- (2) $\pi_i(X_n) = 0$, para $i > n$.

Teorema 2.3.3. (Torre de Postnikov) *Para todo CW-complexo conexo X e $n \geq 1$, podemos construir espaços $X_n \supset X$ tais que $\pi_i(X) \simeq \pi_i(X_n)$ para $i \leq n$ e $\pi_i(X_n) = 0$ se $i > n$. Além disso essa seqüência se encaixa num diagrama comutativo como acima. Ou seja, X tem uma Torre de Postnikov.*

Demonstração: Escolha aplicações celulares $\varphi_{\alpha} : S^{n+1} \longrightarrow X$, onde $[\varphi_{\alpha}]$, $\alpha \in \Lambda$ geram $\pi_{n+1}(X)$ (podemos supor φ_{α} celulares pois pelo Teorema da Aproximação Celular, considerando que X e S^{n+1} são CW-complexos, toda aplicação $\psi : S^{n+1} \longrightarrow X$ é homotópica à uma aplicação celular $\varphi : S^{n+1} \longrightarrow X$). Use estas aplicações para colar células e_{α}^{n+2} a X , formando um CW-complexo $Y = X \cup (\bigcup_{\alpha} e_{\alpha}^{n+2})$.

Considere o par (Y, X) . Então, $Y - X$ tem células de dimensão $n+2 > n+1$. Logo pelo Corolário 2.3.1, (Y, X) é $(n+1)$ -conexo. Usando a seqüência exata longa de homotopia para o par (Y, X) obtemos (de maneira similar ao que feito

na demonstração do referido corolário para (X, X^n) que a inclusão $X \hookrightarrow Y$ induz isomorfismos $\pi_i(X) \longrightarrow \pi_i(Y)$ para $i < n + 1$ (ou $i \leq n$).

Para ver que $\pi_{n+1}(Y) = 0$, seja $[\rho] \in \pi_{n+1}(Y)$, $\rho : S^{n+1} \longrightarrow Y$. Como antes, existe pela aproximação celular $h_0 : S^{n+1} \longrightarrow Y$ tal que $\rho \sim h_0$ e $Im(h_0) \subset X$. Assim podemos associar um elemento em $\pi_{n+1}(X)$ dado pela classe de $\tilde{h} : S^{n+1} \longrightarrow X$ onde $\tilde{h}(u) = h_0(u)$ para todo $u \in S^{n+1}$.

Suponha que a aplicação $\tilde{h}$ seja um gerador para $\pi_{n+1}(X)$, então $j_\#([\tilde{h}]) = 0$ em $\pi_n(Y)$, pois pela construção inicial foi colado via $\tilde{h}$ uma célula de dimensão $n + 2$ em $X \subset Y$. Mas $0 = j_\#([\tilde{h}]) = [h_0] = [\rho]$. Logo $\pi_{n+1}(Y) = 0$. Agora, se $\tilde{h}$ não for um gerador para $\pi_{n+1}(X)$, ele é um produto de geradores e da mesma forma temos $[\rho] = j_\#([\tilde{h}]) = 0$.

Obtemos então um espaço Y tal que $\pi_i(X) \simeq \pi_i(Y)$, para $i \leq n$ e $\pi_{n+1}(Y) = 0$. O processo pode ser repetido com Y no lugar de X e n substituído por $n + 1$, de modo a obter um novo espaço $Y_2 = Y \cup (\bigcup_\beta e_\beta^{n+3})$ com $\pi_{n+2}(Y_2) = 0$ (visto que anexamos $(n + 3)$ - células), $\pi_{n+1}(Y_2) \simeq \pi_{n+1}(Y) = 0$ e $\pi_i(Y_2) \simeq \pi_i(Y) \simeq \pi_i(X)$ se $i \leq n$. Depois de infinitas iterações temos estendido X para um CW-complexo X_n obtido de X por anexar células de dimensão maior ou igual a $n + 2$, tal que a inclusão $X \hookrightarrow X_n$ induz isomorfismos $\pi_i(X) \simeq \pi_i(X_n)$ para $i \leq n$ e $\pi_i(X_n) = 0$, para $i > n$.

Finalmente, aplicando o Lema da Extensão (Lema 2.3.2) temos que a inclusão $X \hookrightarrow X_n$ pode ser estendida para uma aplicação $X_{n+1} \longrightarrow X_n$, pois X_{n+1} é obtido de X anexando células de dimensão $n+3$ ou maior, e $\pi_i(X_n) = 0$, para $i > n$, obtendo assim um diagrama comutativo como acima, ou seja uma Torre de Postnikov para X . ■

Observação 2.3.1. (1) *Pode-se olhar os espaços X_n como truncações de X que produzem, sucessivamente, melhores aproximações para X quando n cresce.*

(2) *A Torre de Postnikov para X , dada no resultado anterior, é única a menos de homotopia ([5], Corolário 4.19, p. 355).*

Capítulo 3

Espaços de Eilenberg Mac-Lane

3.1 Definição e Propriedades

Definição 3.1.1. *Seja G um grupo. Um espaço topológico conexo X tal que $\pi_n(X) = G$ e $\pi_i(X) = 0$ se $i \neq n$ ($n \geq 1$), é chamado um **espaço de Eilenberg Mac-Lane do tipo (G, n)** , ou simplesmente, um **$K(G, n)$ - espaço**. E usualmente denotamos tal X por $K(G, n)$.*

Exemplo 3.1.1. *O espaço $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ com a topologia usual é um $K(\mathbb{Z}, 1)$, pois $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ e $\pi_n(S^1) = 0$, para todo $n \geq 2$ (esta última afirmação segue do fato que $\mathbb{R}$ é o recobrimento universal de S^1).*

Proposição 3.1.1. *Sejam G e L grupos. Se X é um $K(G, n)$ e Y é um $K(L, n)$ então $X \times Y$ é um $K(G \oplus L, n)$.*

Demonstração: Segue do fato que $\pi_j(X \times Y) \simeq \pi_j(X) \oplus \pi_j(Y)$, $\forall j \geq 1$. ■

Note que se X é um $K(G, n)$ e Y é um $K(L, m)$, com $n \neq m$ então $X \times Y$ não é um $K(G \oplus L, r)$ para nenhum r , pois $\pi_n(X \times Y) = G$ e $\pi_m(X \times Y) = L$ e se $j \neq n$ e $j \neq m$ então $\pi_j(X \times Y) = 0$.

Para o caso $n = 1$, a condição $\pi_i(X) = 0$ para $i > 1$, pode ser substituída (quando o espaço têm recobrimento universal do mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo) pela condição de que X tem um espaço de recobrimento universal contráctil, como veremos na

Proposição 3.1.2. *Um CW-complexo X é um $K(G, 1)$ - espaço se, e somente se, $\pi_1(X) = G$ e o espaço de recobrimento universal de X é contráctil.*

Demonstração: Suponhamos que X seja um $K(G, 1)$. Então, por definição, $\pi_1(X) \simeq G$ e $\pi_k(X) = 0$, $k \geq 2$. Seja $\tilde{X}$ o recobrimento universal de X e considere $p : \tilde{X} \rightarrow X$ a projeção associada. Essa aplicação induz um isomorfismo $p_{\#} : \pi_k(\tilde{X}) \rightarrow \pi_k(X)$, $\forall k \geq 2$. Logo $\pi_k(\tilde{X}) = 0$, $\forall k \geq 2$. Como $\tilde{X}$ é recobrimento universal de X , então $\pi_1(\tilde{X}) = 0$. Assim temos que $\pi_n(\tilde{X}) = 0, \forall n$. Agora considere $f : \tilde{X} \rightarrow \{x_0\}$ a aplicação constante. Essa aplicação é contínua e induz um isomorfismo $f_{\#} : \pi_n(\tilde{X}) \rightarrow \pi_n(\{x_0\})$. Então, pelo Teorema de Whitehead (Teorema 2.3.1), f é uma equivalência de homotopia, ou seja, $\tilde{X}$ tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto. Portanto $\tilde{X}$ é contrátil. A recíproca é óbvia. ■

3.2 Existência dos $K(G, n)$ - Espaços

Estamos interessados no seguinte problema: Dado um grupo G e $n \geq 1$, sempre existe um CW-complexo que é do tipo $K(G, n)$ (supondo G abeliano se $n \geq 2$)? Conforme veremos, a resposta é afirmativa.

Vejamos inicialmente o caso $n=1$.

Teorema 3.2.1. *Para qualquer grupo G podemos construir um CW-complexo do tipo $K(G, 1)$.*

Demonstração: Dado um grupo G , como já visto anteriormente (Corolário 1.2.1) constrói-se inicialmente, a partir de uma apresentação de $G \simeq F/R$, onde F é livre gerado por $\mathbf{A}$ (conjunto de geradores) e R é o menor subgrupo normal de F gerado por $\mathbf{B}$ (conjunto de relações), um 2-complexo $Y := (\bigvee_{\alpha \in \mathbf{A}} S_{\alpha}^1) \bigcup (\bigcup_{\beta \in \mathbf{B}} e_{\beta}^2)$ tal que $\pi_1(Y) = G$. Usando o Teorema 2.3.3 (Torre de Postnikov) obtivemos a partir de Y , por colar células de dimensão maior ou igual a três, um espaço $X = X_1$ de modo que $\pi_1(X) = \pi_1(Y) = G$ e $\pi_j(X) = 0$ para $j \geq 2$, isto é, obtivemos um $K(G, 1)$ -espaço. ■

Observação 3.2.1. *Note que, de acordo com a demonstração anterior o primeiro espaço X_1 da Torre de Postnikov já nos dá o espaço $K(G, 1)$ desejado. No entanto é interessante observar que para obter X_1 , em alguns casos, temos que colar células infinitamente (vide Exemplo 3.3.4).*

Nosso objetivo agora é a construção de um $K(G,n)$ - espaço com $n \geq 2$. Para tanto necessitamos de alguns resultados.

Teorema 3.2.2. (*Excisão para grupos de homotopia*) *Seja X um CW-complexo que é decomposto como a união de subcomplexos A e B com intersecção não vazia $C = A \cap B$. Se (A, C) é m - conexo e (B, C) é n - conexo, $m, n \geq 0$, então a aplicação $\pi_i(A, C) \longrightarrow \pi_i(X, B)$ induzida pela inclusão é um isomorfismo para $i \leq m + n$ e uma sobrejeção para $i = m + n$.*

Demonstração: ([5], Teorema 4.23, p. 360).

Proposição 3.2.1. *Se um par CW, (X, A) , é r - conexo e A é s - conexo, com $r, s \geq 0$, então a aplicação $\pi_i(X, A) \longrightarrow \pi_i(X/A)$ induzida pela aplicação quociente $X \longrightarrow X/A$ é um isomorfismo para $i \leq r + s$ e uma sobrejeção para $i = r + s + 1$.*

Demonstração: Considere $X \cup CA$, o complexo obtido de X colando um cone CA ao longo de $A \subset X$. O cone CA (Exemplo 2.1.6- Join) é a união de segmentos de reta ligando pontos de A a um vértice externo p . Então CA é homotópico ao conjunto unitário p (por exemplo tome a homotopia linear $H : CA \times I \rightarrow CA$; $(x, t) \mapsto tp + (1 - t)x$). Ou seja, CA é um subcomplexo contrátil de $X \cup CA$. Assim a aplicação quociente $X \cup CA \xrightarrow{q} (X \cup CA)/CA = X/A$ é uma equivalência de homotopia visto que o par $(X \cup CA, CA)$ é um par CW e portanto tem a propriedade de extensão de homotopia (Proposição 2.3.1). Consequentemente q induz um isomorfismo de $\pi_i(X \cup CA)$ em $\pi_i((X \cup CA)/CA) = \pi_i(X/A)$. Assim temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} \pi_i(X, A) & \longrightarrow & \pi_i(X \cup CA, CA) & \longrightarrow & \pi_i(X \cup CA/CA) = \pi_i(X/A) \\ & & \uparrow \simeq & \nearrow \simeq & \\ & & \pi_i(X \cup CA) & & \end{array}$$

onde o isomorfismo vertical vem da sequência exata longa

$$\dots \longrightarrow \pi_i(CA) \longrightarrow \pi_i(X \cup CA) \longrightarrow \pi_i(X \cup CA, CA) \longrightarrow \pi_{i-1}(CA) \longrightarrow \dots$$

e do fato que CA é contrátil. Donde obtém-se da comutatividade, um isomorfismo $\pi_i(X \cup CA, CA) \longrightarrow \pi_i(X/A)$ (*).

Ainda, da sequência exata longa para o par (CA, A) ,

$$\dots \longrightarrow \pi_i(A) \longrightarrow \pi_i(CA) \longrightarrow \pi_i(CA, A) \longrightarrow \pi_{i-1}(A) \longrightarrow \dots,$$

do fato que A é s -conexo (por hipótese) e que CA é contrátil, obtemos que $\pi_i(CA, A) = 0$ para $i \leq s+1$, isto é, (CA, A) é $s+1$ -conexo.

Agora usando o resultado anterior (*Excisão para Grupos de Homotopia* - Teorema 3.2.2) para o espaço $\mathcal{X} = X \cup CA$, $C = X \cap CA = A$ e os pares (X, A) r -conexo e (CA, A) $s+1$ -conexo, concluímos que o homomorfismo $\pi_i(X, A) \longrightarrow \pi_i(X \cup CA, CA)$, induzido pela inclusão, é um isomorfismo para $i < r+s+1$ e uma sobrejeção para $i = r+s+1$.

Logo, considerando o isomorfismo (*) acima, concluímos que $\pi_i(X, A) \longrightarrow \pi_i(X/A)$ é um isomorfismo para $i \leq r+s$ e uma sobrejeção para $i = r+s+1$. ■

Lema 3.2.1. *O espaço $A = \bigvee_{\alpha \in \Lambda} S_\alpha^n$ (bouquet de n -esferas) $n \geq 2$, é $(n-1)$ -conexo.*

Demonstração: Para $j \leq n-1$, seja $[\varphi] \in \pi_j(A)$, com $\varphi : S^j \longrightarrow A$. Pelo Teorema da Aproximação Celular, $\varphi \sim \psi : S^j \longrightarrow A$, com ψ celular. Agora o j -esqueleto de A , A^j , $j \leq n-1$ é um ponto (a única 0-célula) uma vez que A não possui células de dimensão j , para $0 < j \leq n-1$ e portanto, ψ é a aplicação constante. Daí $[\varphi] = [\psi] = 0$. Assim $\pi_j(A) = 0$, para $j \leq n-1$, ou seja, A é $(n-1)$ -conexo. ■

Proposição 3.2.2. *Para todo grupo abeliano G e $n \geq 2$, existe um CW-complexo $(n-1)$ -conexo, de dimensão $n+1$ tal que $\pi_n(X) \simeq G$.*

Demonstração: Como no caso $n = 1$, considere uma apresentação do grupo G , $G = \langle \mathbf{A}; \mathbf{B} \rangle$, ou seja, $G \simeq F/R$ onde F é o grupo livre gerado por $\alpha \in \mathbf{A}$ e R , normal a F , é o subgrupo gerado pelo conjunto de relações $\beta \in \mathbf{B}$. Notemos que nesse caso, como G é abeliano, F é *abeliano* livre.

Para cada gerador α associamos uma n -esfera S_α^n . Então, considerando o espaço $\bigvee_{\alpha \in \mathbf{A}} S_\alpha^n$ temos, do fato que $n \geq 2$ (Proposição 2.3.3), que

$$\pi_n\left(\bigvee_{\alpha \in \mathbf{A}} S_\alpha^n\right) \simeq \bigoplus_{\alpha \in \mathbf{A}} \mathbb{Z}_\alpha \simeq F.$$

Cada relação $\beta \in \mathbf{B} \subset F$ entre os geradores α 's pode ser realizada como uma classe em $\pi_n\left(\bigvee_{\alpha \in \mathbf{A}} S_\alpha^n\right)$, $[\varphi_\beta]$, representada por uma aplicação

$\varphi_\beta : S^n \longrightarrow \bigvee_{\alpha \in \mathbf{A}} S_\alpha^n$. Considere o CW-complexo X obtido de $\bigvee_{\alpha \in \mathbf{A}} S_\alpha^n$ anexando $(n+1)$ -células e_β^{n+1} via φ_β , preservando ponto base,

$$X = \left(\bigvee_{\alpha \in \mathbf{A}} S_\alpha^n \right) \bigcup_{\beta} e_\beta^{n+1}.$$

Note que $X^n = \bigvee_{\alpha \in \mathbf{A}} S_\alpha^n$, que o par (X, X^n) é n -conexo (Corolário 2.3.1) e que X^n é $(n-1)$ -conexo (pelo Lema anterior). Logo, pela Proposição 3.2.1, o homomorfismo $\pi_i(X, X^n) \longrightarrow \pi_i(X/X^n)$, induzido pela aplicação quociente $X \longrightarrow X/X^n$ é um isomorfismo para $i \leq 2n-1$ (e uma sobrejeção para $i = 2n$). Em particular, considerando os casos $n+1$ e n , e o fato que $X/X^n = \bigvee_{\beta \in \mathbf{B}} S_\beta^{n+1}$, obtemos que

- $\pi_{n+1}(X, X^n) \simeq \pi_{n+1}(X/X^n) = \pi_{n+1}\left(\bigvee_{\beta \in \mathbf{B}} S_\beta^{n+1}\right) = \bigoplus_{\beta \in \mathbf{B}} \mathbb{Z}_\beta$, o grupo abeliano livre gerado pelas aplicações características $[\phi_\beta]$ das células e_β^{n+1} , e
- $\pi_n(X, X^n) \simeq \pi_n(X/X^n) = 0$ (visto que $X/X^n = \bigvee_{\beta \in \mathbf{B}} S_\beta^{n+1}$ é n -conexo).

A sequência exata para o par (X, X^n) nos dá:

$$\cdots \rightarrow \pi_{n+1}(X, X^n) = \bigoplus_{\beta \in \mathbf{B}} \mathbb{Z}_\beta \xrightarrow{\partial} \pi_n(X^n) \xrightarrow{i_\#} \pi_n(X) \xrightarrow{j_\#} \pi_n(X, X^n) = 0.$$

Pela exatidão da sequência, $Im(i_\#) = ker(j_\#) = \pi_n(X)$. Então, pelo Teorema do Homomorfismo, $\pi_n(X) = Im(i_\#) \simeq \pi_n(X^n)/ker(i_\#)$. Agora, o operador bordo ∂ leva as aplicações características $[\phi_\beta]$ nas classes $[\varphi_\beta]$, assim $Im(\partial) = \langle [\varphi_\beta], \beta \in \mathbf{B} \rangle = \bigoplus_{\beta \in \mathbf{B}} \mathbb{Z}_\beta = R$. Daí, $ker(i_\#) = Im(\partial) = R$, e então temos

$$\pi_n(X) \simeq \pi_n(X^n)/ker(i_\#) = \pi_n\left(\bigvee_{\alpha \in \mathbf{A}} S_\alpha^n\right)/Im(\partial) = F/R \simeq G.$$

Para ver que X é $n-1$ conexo, raciocinamos como no Lema anterior, isto é, usamos o fato que toda aplicação $\varphi : S^i \longrightarrow X$ é homotópica a uma aplicação celular (teorema da aproximação celular) e que tal aplicação será constante se $i < n$. ■

Teorema 3.2.3. *Seja G um grupo abeliano qualquer e $n \geq 2$ um inteiro. Então existe um CW-complexo do tipo $K(G, n)$.*

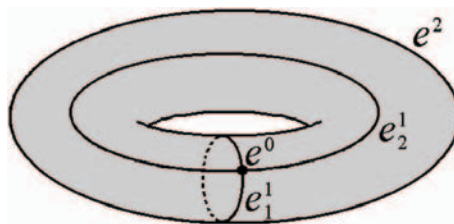
Demonstração: Dado um grupo abeliano G e $n \geq 2$, pela Proposição

anterior, existe um CW-complexo $(n-1)$ -conexo X , de dimensão $n+1$ tal que $\pi_n(X) \simeq G$. Usando o Teorema 2.3.3 (Torre de Postnikov) para X pode-se construir uma sequência de espaços X_m tal que $\pi_i(X_m) \simeq \pi_i(X)$ para $i \leq m$ e $\pi_i(X_m) = 0$ para $i > m$. Em particular, para $m = n$, e considerando $Z = X_n$, temos $\pi_i(Z) \simeq \pi_i(X)$ para $i \leq n$ e $\pi_i(Z) = 0$ para $i > n$. Assim $\pi_i(Z) \simeq \pi_i(X) = 0$, para $1 \leq i \leq n-1$, $\pi_n(Z) \simeq \pi_n(X) = G$ e $\pi_i(Z) = 0$ para $i > n$, ou seja, Z é um $K(G, n)$ - espaço. ■

3.3 Exemplos

Exemplo 3.3.1. Já vimos que o círculo unitário S^1 é um $K(\mathbb{Z}, 1)$ -espaço. Note que uma apresentação para $G = \mathbb{Z}$ é $\langle \alpha, \emptyset \rangle$. Nesse caso, considerando a construção de $K(G, 1)$ - espaços, tomamos inicialmente o “bouquet” com um único círculo $S^1 = S_\alpha^1$ e como não há relações não necessitamos colar 2-células para obter um CW-complexo 2-dimensinonal X com $\pi_1(X) = \mathbb{Z}$. Temos ainda que $\pi_j(S^1) = 0, \forall j \geq 2$ e assim, o X_1 construído na Torre é o S^1 e portanto S^1 é um espaço do tipo $K(\mathbb{Z}, 1)$. Um raciocínio similar nos dá que o bouquet $Y = \bigvee_{\alpha \in A} S_\alpha^1$ é um $K(\mathbf{F}, 1)$, onde $\mathbf{F}$ é o grupo livre gerado por $\mathbf{A}$.

Exemplo 3.3.2. O toro T^2 é um $K(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, 1)$ - espaço. Temos que $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \simeq F/R$, onde F é um grupo livre gerado por $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ e R é o menor subgrupo normal de F contendo a relação $\beta = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_1^{-1} \alpha_2^{-1}$. Considere $X^1 = \bigvee_{i=1}^2 S_i^1$ (figura oito). Então $\pi_1(\bigvee_{i=1}^2 S_i^1) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Colemos uma 2-célula e^2 em X^1 , a partir da relação $\beta = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_1^{-1} \alpha_2^{-1}$, para obtermos o CW-complexo 2-dimensional $X^2 = X^1 \cup e^2$ com $\pi_1(X^2) = (\mathbb{Z} * \mathbb{Z})/R \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Agora $X^2 = T^2 = S^1 \times S^1$ e $\pi_j(T^2) = \pi_j(\mathbb{R}^2) = 0, \forall j \geq 2$. Portanto T^2 é um espaço do tipo $K(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, 1)$. Notemos que esse é um caso em que foi necessário colar uma 2-célula para obter o complexo 2-dimensional com grupo fundamental $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ mas o complexo obtido já é um $K(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, 1)$ e assim não houve necessidade de usar a Torre de Postnikov, uma vez que o espaço $X_1 = T^2$ já tem π_j trivial para $j \geq 2$.



Exemplo 3.3.3. Superfícies fechadas com grupo fundamental infinito, em outras palavras, superfícies fechadas que não sejam S^2 e $\mathbb{R}P^2$, são $K(G, 1)$ -espaços. Isto segue do fato que as únicas superfícies sem bordo que são simplesmente conexas são S^2 e $\mathbb{R}^2$ (resultado da teoria de superfícies), de modo que recobrimento universal de uma superfície fechada com grupo fundamental infinito deve ser $\mathbb{R}^2$ (pois o recobrimento universal nesse caso é não compacto visto que as fibras são subconjuntos discretos que estão em correspondência com o grupo fundamental que é infinito), e $\mathbb{R}^2$ é contrátil. Ainda, superfícies não fechadas são $K(G, 1)$ - espaços com G livre, pois tais superfícies se retraem por deformação sobre grafos, e o grupo fundamental de um grafo é livre ([7], VI Teorema 5.1), além disso possuem grupos de homotopias superiores triviais.

Exemplo 3.3.4. O espaço projetivo real infinito dimensional $\mathbb{R}P^\infty$, é um $K(\mathbb{Z}_2, 1)$ - espaço. Para isso, notemos que o grupo cíclico $G = \mathbb{Z}_2$ tem como apresentação $G = \langle \alpha; \alpha^2 \rangle$. Consideremos o grupo livre $F \simeq \mathbb{Z}$ com um gerador α e $X^1 = S^1$. Colemos uma 2-célula em X^1 a partir da relação α^2 , o espaço $Y = X^2$, assim obtido, satisfaz $\pi_1(X^2) = \mathbb{Z}_2$ e pode ser identificado com o espaço $\mathbb{R}P^2$. Temos então um CW-complexo 2- dimensional que tem grupo fundamental $\mathbb{Z}_2$. Agora $\pi_2(\mathbb{R}P^2) \simeq \pi_2(S^2) \simeq \mathbb{Z} \neq 0$, assim precisamos usar a construção na Torre de Postnikov para obter o espaço “ X_1 ” desejado. Ou seja, temos que adicionar células de dimensões superiores ($n \geq 1 + 2 = 3$). De fato, nesse caso o processo é infinito, isto é, adicionamos uma célula em cada dimensão: $\mathbb{R}P^3 \subset \mathbb{R}P^2 \cup e^3$ e $\pi_1(\mathbb{R}P^3) \simeq \pi_1(\mathbb{R}P^2) \simeq \mathbb{Z}_2$, $\pi_2(\mathbb{R}P^3) = 0$ mas $\pi_3(\mathbb{R}P^3) \simeq \pi_3(S^3) \simeq \mathbb{Z} \neq 0$ (tem um gerador). Anexamos então mais uma célula de modo a obter um espaço (o $\mathbb{R}P^4 = \mathbb{R}P^3 \cup e^4$), que agora satisfaz $\pi_1(\mathbb{R}P^4) \simeq \mathbb{Z}_2$, $\pi_2(\mathbb{R}P^4) = \pi_3(\mathbb{R}P^4) = 0$ mas $\pi_4(\mathbb{R}P^4) \simeq \pi_4(S^4) \simeq \mathbb{Z} \neq 0$, continuando o processo (Torre de Postnikov), obtemos o espaço $X_1 = \mathbb{R}P^\infty$, que é um $K(\mathbb{Z}_2, 1)$ -espaço.

Observação 3.3.1. Podemos concluir que $\mathbb{R}P^\infty$ é um $K(\mathbb{Z}_2, 1)$ por verificar que seu recobrimento universal é S^∞ . Uma homotopia entre a aplicação

identidade de S^∞ e uma aplicação constante pode ser construída como segue: Primeiro definimos $H : \mathbb{R}^\infty \times I \longrightarrow \mathbb{R}^\infty$ por $H((x_1, x_2, \dots), t) = (1-t)(x_1, x_2, \dots) + t(0, x_1, x_2, \dots)$. É claro que $H(., t)$ leva vetor não nulo em vetor não nulo. Então $K : S^\infty \times I \longrightarrow S^\infty$; $K(x, t) := H(x, t)/\|H(x, t)\|$, onde $x = (x_1, x_2, \dots)$, dá uma homotopia entre a aplicação identidade de S^∞ e a aplicação $g : (x_1, x_2, \dots) \longrightarrow (0, x_1, x_2, \dots)$. Agora uma homotopia entre g e a aplicação constante é dada por $L : S^\infty \times I \longrightarrow S^\infty$; $L(x, t) := S(x, t)/\|S(x, t)\|$, onde $S(x, t) = (1-t)(0, x_1, x_2, \dots) + t(1, 0, 0, \dots)$.

Exemplo 3.3.5. Generalizando o exemplo anterior, podemos construir um $K(\mathbb{Z}_m, 1)$ -espaço como um espaço de Lens de dimensão infinita $L_m = S^\infty/\mathbb{Z}_m$, onde $\mathbb{Z}_m$ atua sobre S^∞ (visto como a esfera unitária em $\mathbb{C}^\infty$) pela multiplicação por escalar pela m -ésima raiz da unidade, um gerador desta ação é a aplicação $(z_1, z_2, \dots) \mapsto e^{\frac{2\pi i}{m}}(z_1, z_2, \dots)$. Pode-se verificar que esta é uma ação no espaço de recobrimento e que L_m é um $K(\mathbb{Z}_m, 1)$ -espaço. ([13], Teorema 2.10.10-demonstração, p. 86)

Exemplo 3.3.6. A partir dos exemplos anteriores, e do fato que um produto $K(G_1, 1) \times K(G_2, 1)$ é um $K(G_1 \times G_2, 1)$ podemos obter espaços $K(G, 1)$ para todo grupo abeliano finitamente gerado G . Para tanto basta lembrarmos que um grupo abeliano finitamente gerado é isomorfo a um produto de grupos cíclicos infinitos e finitos. Assim basta tomar o espaço formado por produtos de círculos e espaços de Lens de dimensão infinita.

Exemplo 3.3.7. Exemplos de $K(G, n)$ -espaços, para $n \geq 2$, são raros. Pode-se verificar que o espaço $\mathbb{C}P^\infty$ é um $K(\mathbb{Z}, 2)$ e consequentemente generalizar esse exemplo tomando um produto de $\mathbb{C}P^\infty$'s para obter um $K(G, 2)$ com G um produto de $\mathbb{Z}$'s ([5], p. 365).

3.4 Considerações Finais

- (1) Observemos que $\pi_1(T^2) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ é um grupo sem torção e T^2 é um CW-complexo de dimensão finita. Agora $\pi_1(\mathbb{R}P^\infty) \simeq \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2$ é um grupo de torção e $\mathbb{R}P^\infty$ é um CW-complexo de dimensão infinita. De fato, usando cohomologia de grupos pode-se mostrar que se G tem torção então não existe um CW-complexo finito que seja $K(G, 1)$. ([5], Proposição 2.45, p. 149 ou [2], Corolário 3.2.1)

- (2) Seja Y um CW-complexo. Então existe uma bijeção entre $[Y, K(G, n)]$ e $H^n(Y, G)$, onde $[X, Y]$ representa as classes de homotopia das aplicações de X em Y e G é um grupo abeliano. A prova desse resultado pode ser feita usando teoria de cohomologia ([5], Teorema 4.57, p. 393) ou obtida como uma aplicação da teoria de obstrução ([11], Teorema 8. 10, p. 428).
- (3) Pode-se mostrar a unicidade dos espaços $K(G, n)$'s a menos de homotopia ([5], Teorema 1B.8, p. 90 para o caso $n = 1$; Proposição 4.30, p. 366 para o caso $n \geq 2$).
- (4) Os $K(G, 1)$ - espaços, estabelecem uma relação entre a cohomologia de grupos e a de espaços uma vez que, para cada k , o grupo de (co)homologia, $H^k(G, M)$, de um grupo G com coeficientes em um $\mathbb{Z}G$ -módulo M é isomorfo a $H^k(X, \mathbf{M})$, onde X é um $K(G, 1)$ - espaço e $\mathbf{M}$ é um sistema de coeficientes locais para X associado ao $\mathbb{Z}G$ -módulo M ([1] II. Proposição 4.1; III. § 1, p. 59).

Apêndice A

Grupo Fundamental

A.1 Caminhos Homotópicos e o Grupo Fundamental

Definição A.1.1. Um caminho num espaço topológico X é uma aplicação contínua $\alpha : I = [0, 1] \longrightarrow X$. Os pontos $\alpha(0)$ e $\alpha(1)$ são chamados pontos inicial e final de α , respectivamente. Caminhos α e β com pontos iniciais e finais comuns, $\alpha(0) = \beta(0)$ e $\alpha(1) = \beta(1)$, são ditos equivalentes se existe uma aplicação contínua $H : I \times I \longrightarrow X$ tal que

$$\begin{aligned} H(t, 0) &= \alpha(t), & H(t, 1) &= \beta(t), & t &\in I, \\ H(0, s) &= \alpha(0) = \beta(0), & H(1, s) &= \alpha(1) = \beta(1), & s &\in I, \end{aligned}$$

A aplicação H é chamada uma homotopia entre α e β . Para um dado valor de s , a restrição de H à $I \times \{s\}$ é chamada o nível s de homotopia e é usualmente denotada por $H(\cdot, s)$, $H_s(\cdot)$ ou $h_s(\cdot)$.

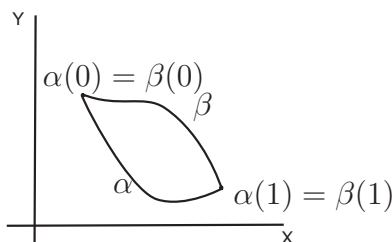
Definição A.1.2. Um laço num espaço topológico X é um caminho α em X com $\alpha(0) = \alpha(1)$. O valor comum do ponto inicial e ponto final é chamado ponto base do laço. Dois laços α e β com mesmo ponto base x_0 são ditos equivalentes, ou homotópicos módulo x_0 , se são equivalentes como caminhos. Em outras palavras, α e β são homotópicos módulo x_0 (denotado por $\alpha \sim_{x_0} \beta$) desde que exista uma homotopia $H : I \times I \longrightarrow X$ tal que

$$\begin{aligned} H(\cdot, 0) &= \alpha, & H(\cdot, 1) &= \beta, \\ H(0, s) &= H(1, s) = x_0, & s &\in I. \end{aligned}$$

Como $H(0, s)$ e $H(1, s)$ têm sempre valor x_0 , independente da escolha de s

em $[0, 1]$, às vezes se diz que o ponto base x_0 “fica fixo do começo ao fim da homotopia”.

Exemplo A.1.1. Os caminhos α e β no plano, representados na figura são equivalentes.



Uma homotopia H que mostra a equivalência entre os caminhos é definida por $H(t, s) = s \cdot \beta(t) + (1 - s) \cdot \alpha(t)$, com $(t, s) \in I \times I$. A homotopia essencialmente “puxa α na direção de β ” sem perturbar os pontos finais. Se o espaço tivesse um buraco entre os traços dos caminhos α e β , então eles não seriam equivalentes.

O seguinte lema será muito útil nesta seção.

Lema A.1.1. (*Lema da Colagem ou Lema da Continuidade*) Seja X um espaço topológico com subconjuntos fechados A e B tais que $X = A \cup B$. Sejam $f : A \rightarrow Y$ e $g : B \rightarrow Y$ aplicações contínuas tais que $f(x) = g(x)$ para cada x em $A \cap B$. Então é contínua a aplicação $h : X \rightarrow Y$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in A \\ g(x), & \text{se } x \in B. \end{cases}$$

Demonstração: Seja $V \subset Y$ um subconjunto fechado. Temos que $h^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cup g^{-1}(V)$ é fechado em X , uma vez que f e g contínuas implicam que $f^{-1}(V)$ e $g^{-1}(V)$ são fechados em A e B , respectivamente, e conseqüentemente em X , pois A e B são fechados em X . Agora, a união finita de fechados é fechado, e então $h^{-1}(V)$ é fechado. Logo h é contínua. ■

Teorema A.1.1. Os resultados seguintes são válidos:

- (a) *Equivalência de caminhos é uma relação de equivalência sobre o conjunto dos caminhos num espaço X .*
- (b) *Equivalência de laços é uma relação de equivalência sobre o conjunto dos laços em X com ponto base x_0 .*

Demonstração: Provemos o item (b). Considere o conjunto dos laços em X tendo como ponto base x_0 . Qualquer laço é equivalente a ele mesmo pela homotopia $F(t, s) = \alpha(t)$, $(t, s) \in I \times I$. Então a relação $\sim_{x_0}$ é reflexiva. Suponhamos $\alpha \sim_{x_0} \beta$. Assim existe uma homotopia $H : I \times I \rightarrow X$ tal que

$$H(\cdot, 0) = \alpha, \quad H(\cdot, 1) = \beta, \quad H(0, s) = H(1, s) = x_0, \quad s \in I.$$

Então a homotopia $\bar{H}(t, s) := H(t, 1 - s)$, $(t, s) \in I \times I$ mostra que $\beta \sim_{x_0} \alpha$. Pois,

$$\begin{aligned} \bar{H}(\cdot, 0) &= H(\cdot, 1) = \beta, \quad \bar{H}(\cdot, 1) = H(\cdot, 0) = \alpha \\ \bar{H}(0, s) &= H(0, 1 - s) = H(1, 1 - s) = \bar{H}(1, s) = x_0, \quad \forall s \in I. \end{aligned}$$

Logo a equivalência de laços é uma relação simétrica.

Admita agora que os laços α, β e γ são tais que $\alpha \sim_{x_0} \beta$ e $\beta \sim_{x_0} \gamma$. Então existem homotopias H e K tais que

$$\begin{aligned} H : I \times I &\rightarrow X; & K : I \times I &\rightarrow X; \\ H(\cdot, 0) &= \alpha, & K(\cdot, 0) &= \beta, \\ H(\cdot, 1) &= \beta, & K(\cdot, 1) &= \gamma, \\ H(0, s) &= H(1, s) = x_0, & K(0, s) &= K(1, s) = x_0. \end{aligned}$$

A homotopia desejada $L : I \times I \rightarrow X$ é então definida por

$$L(t, s) = \begin{cases} H(t, 2s), & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ K(t, 2s - 1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Assim

$$\begin{aligned} L(\cdot, 0) &= H(\cdot, 0) = \alpha, \quad L(\cdot, 1) = K(\cdot, 1) = \gamma. \\ L(0, s) &= \begin{cases} H(0, 2s) = x_0, & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ K(0, 2s - 1) = x_0, & \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases} \\ L(1, s) &= \begin{cases} H(1, 2s) = x_0, & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ K(1, 2s - 1) = x_0, & \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

A continuidade de L segue do Lema da Colagem (A.1.1) com $A = [0, \frac{1}{2}]$ e $B = [\frac{1}{2}, 1]$. Assim $\alpha \sim_{x_0} \gamma$, logo $\sim_{x_0}$ é uma relação de equivalência. ■

Definição A.1.3. Se α e β são caminhos em X com $\alpha(1) = \beta(0)$, então o caminho produto $\alpha * \beta$ é definido por

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Observemos que a continuidade de $\alpha * \beta$ é uma consequência imediata do Lema da Continuidade (A.1.1). Pensando na variável t como tempo, um cami-

inho α em X (ou melhor o seu traço) pode ser pensado como o deslocamento de um ponto começando em $\alpha(0)$ e traçando um caminho contínuo até $\alpha(1)$. Um produto $\alpha * \beta$ é então visualizado como segue: o ponto que se movimenta começa em $\alpha(0)$ e percorre o caminho α com o dobro da velocidade normal e chega em $\alpha(1)$ quando $t = \frac{1}{2}$. O ponto então percorre o caminho β com o dobro da velocidade normal e chega em $\beta(1)$ no tempo $t = 1$. Note que a condição $\alpha(0) = \beta(1)$ é necessária para que o produto de caminhos seja contínuo.

Lema A.1.2. *Suponha que α, α', β e β' são laços num espaço X , todos com ponto base x_0 e satisfazendo as relações $\alpha \sim_{x_0} \alpha'$ e $\beta \sim_{x_0} \beta'$. Então o produto $\alpha * \beta$ e $\alpha' * \beta'$ são homotópicos, módulo x_0 .*

Demonstração: Temos que $\alpha, \alpha', \beta, \beta' : I \longrightarrow X$ com $\alpha \sim_{x_0} \alpha'$ e $\beta \sim_{x_0} \beta'$. Então existem homotopias H e K tais que

$$\begin{aligned} H : I \times I &\rightarrow X; & K : I \times I &\rightarrow X; \\ H(\cdot, 0) &= \alpha, \quad H(\cdot, 1) = \alpha', & K(\cdot, 0) &= \beta, \quad K(\cdot, 1) = \beta', \\ H(0, s) &= H(1, s) = x_0, & K(0, s) &= K(1, s) = x_0. \end{aligned}$$

Agora queremos uma homotopia entre $\alpha * \beta$ e $\alpha' * \beta'$. Tome $L : I \times I \longrightarrow X$ definida por

$$L(t, s) = \begin{cases} H(2t, s), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ K(2t - 1, s), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Temos então que

$$L(t, 0) = \begin{cases} H(2t, 0), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ K(2t - 1, 0), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = (\alpha * \beta)(t),$$

e

$$L(t, 1) = \begin{cases} H(2t, 1), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ K(2t - 1, 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha'(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta'(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = (\alpha' * \beta')(t).$$

■

Definição A.1.4. *Considere a família de laços em X com ponto base x_0 . Homotopia módulo x_0 é uma relação de equivalência nesta família e além disso a particiona em classes de equivalências disjuntas. Denote por $[\alpha]$ a classe de equivalência determinada pelo laço α . A classe $[\alpha]$ é chamada a classe de homotopia de α . O conjunto de tais classes é denotado por $\pi_1(X, x_0)$. Se $[\alpha]$*

e $[\beta]$ pertencem à $\pi_1(X, x_0)$ então o produto $[\alpha] \circ [\beta]$ é definido como segue:

$$[\alpha] \circ [\beta] = [\alpha * \beta],$$

onde $\alpha * \beta$ indica o produto de caminhos. O lema anterior assegura que o produto $\circ$ está bem definido em $\pi_1(X, x_0)$, e o teorema seguinte mostra que $\pi_1(X, x_0)$ é um grupo com a operação $\circ$. Tal grupo é chamado o grupo fundamental de X em x_0 , ou o primeiro grupo de homotopia de X em x_0 , ou ainda o grupo de Poincaré de X em x_0 .

Teorema A.1.2. *O conjunto $\pi_1(X, x_0)$ é um grupo com a operação $\circ$.*

Demonstração: Para mostrar que $\pi_1(X, x_0)$ é um grupo temos que mostrar que: existe um laço c para o qual a sua classe $[c]$ é o elemento neutro para a operação $\circ$, que todo elemento $[\alpha]$ tem um simétrico, a saber $[\tilde{\alpha}] = [\alpha]^{-1}$, e que a multiplicação $\circ$ é associativa. Vamos provar cada uma dessas propriedades separadamente, através dos três lemas seguintes (lemas (A), (B) e (C)).

Lema A.1.3. (A) *$\pi_1(X, x_0)$ tem um elemento neutro $[c]$ onde c é o laço constante cujo único valor é x_0 .*

Demonstração: O laço constante c é definido por $c(t) = x_0$, $t \in I$. Se α é um laço em X baseado em x_0 , então

$$(c * \alpha)(t) = \begin{cases} x_0, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Mostrar que $[c * \alpha] = [\alpha]$, requer uma homotopia $H : I \times I \longrightarrow X$ tal que

$$\begin{aligned} H(\cdot, 0) &= c * \alpha, & H(\cdot, 1) &= \alpha, \\ H(0, s) &= H(1, s) = x_0, & s &\in I. \end{aligned}$$

Definindo

$$H(t, s) = \begin{cases} x_0, & 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2} \\ \alpha\left(\frac{2t+s-1}{s+1}\right), & \frac{1-s}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

Podemos ver que H satisfaz as condições da homotopia desejada pois

$$H(t, 0) = \begin{cases} x_0, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} = (c * \alpha)(t),$$

$$H(t, 1) = \begin{cases} x_0, & t = 0 \\ \alpha(t), & 0 \leq t \leq 1, \end{cases} = \alpha(t),$$

$$\text{e } H(0, s) = x_0, H(1, s) = \alpha(1) = x_0.$$

Ainda, H é contínua pelo Lema da Continuidade (A.1.1) visto que $\frac{2t+s-1}{s+1}$ é uma aplicação contínua de (t, s) e as duas partes da definição de H coincidem quando $t = \frac{1-s}{2}$. Provamos então que se $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, então $[c] \circ [\alpha] = [c * \alpha] = [\alpha]$. Logo $[c]$ é um elemento neutro à esquerda de $\pi_1(X, x_0)$. Observemos que para obter a homotopia H , determinamos a equação da reta que passa pelos pontos $(\frac{1}{2}, 0)$ e $(0, 1)$, obtendo $s = 1 - 2t$ ou $t = \frac{1-s}{2}$ e assim para s fixado, o ponto $(\frac{1-s}{2}, s)$.

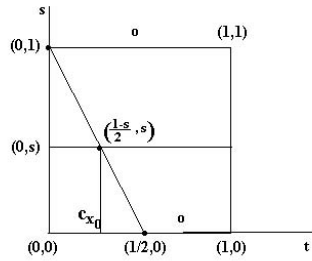
Consideramos então a aplicação

$$\begin{aligned} [0, \frac{1-s}{2}] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto x_0 \end{aligned}$$

e a composta

$$\begin{aligned} [\frac{1-s}{2}, 1] &\longrightarrow [0, 1] \longrightarrow X \\ t &\longmapsto \frac{2t+s-1}{s+1} \longmapsto \alpha(\frac{2t+s-1}{s+1}), \end{aligned}$$

de acordo com o diagrama mostrado na figura seguinte:



Para ver que $[c]$ é também um elemento neutro à direita, isto é, que $[\alpha * c] = [\alpha]$ considere a homotopia definida por

$$H'(t, s) = \begin{cases} \alpha(\frac{2t}{s+1}), & 0 \leq t \leq \frac{s+1}{2} \\ x_0, & \frac{s+1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Para obter H' , consideramos as aplicações

$$\begin{aligned} [0, \frac{s+1}{2}] &\longrightarrow [0, 1] \longrightarrow X \\ t &\longmapsto \frac{2t}{s+1} \longmapsto \alpha(\frac{2t}{s+1}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left[\frac{s+1}{2}, 1\right] &\rightarrow X \\ t &\mapsto x_0. \end{aligned}$$

Das afirmações anteriores concluímos que $[c]$ é o elemento neutro para a operação $\circ$ em $\pi_1(X, x_0)$. ■

Lema A.1.4. (B) *Para cada classe de homotopia $[\alpha]$ em $\pi_1(X, x_0)$, o inverso de $[\alpha]$ com respeito à operação $\circ$ e o elemento neutro $[c]$ é a classe $[\alpha^{-1}]$ onde α^{-1} indica o caminho inverso (ou reverso) de α , $\alpha^{-1}(t) := \alpha(1 - t)$, $t \in I$.*

Demonstração: O caminho $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1 - t)$ (comumente chamado o inverso ou o reverso do caminho α) inicia em $\alpha(1) = x_0$ e percorre a mesma “rota” de α , porém no sentido contrário. Temos que provar que $[\alpha] \circ [\alpha^{-1}] = [c] = [\alpha^{-1}] \circ [\alpha]$, ou seja, $\alpha * \alpha^{-1} \sim c \sim \alpha^{-1} * \alpha$. Vejamos primeiro que $c \sim \alpha * \alpha^{-1}$. Note que

$$(\alpha * \alpha^{-1})(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2 - 2t), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Grosseiramente falando, a homotopia H a ser definida será tal que, fixado $s \in [0, 1]$:

- para $t \in [0, \frac{s}{2}]$, o caminho $H_s(t) := H(t, s)$ parte de $\alpha(0) = x_0$ e vai, via α , até $\alpha(s)$,
- para $t \in [\frac{s}{2}, 1 - \frac{s}{2}]$, o caminho fica “estacionado” em $\alpha(s)$ e,
- para $t \in [1 - \frac{s}{2}, 1]$ o caminho $H_s(t)$ “parte de $\alpha(s) = \alpha^{-1}(1 - s)$ e vai, via α^{-1} , até $\alpha^{-1}(1) = x_0$ ”.

Assim, para $s \in [0, 1]$ temos que considerar as aplicações:

$$\begin{aligned} \begin{array}{ccccc} [0, \frac{s}{2}] & \longrightarrow & [0, s] & \longrightarrow & X \\ t & \mapsto & 2t & \mapsto & \alpha(2t) \end{array} \\ \\ \begin{array}{ccccc} [\frac{s}{2}, 1 - \frac{s}{2}] & \longrightarrow & \{s\} & \longrightarrow & X \\ t & \mapsto & s & \mapsto & \alpha(s) \end{array} \\ \\ \begin{array}{ccccc} [1 - \frac{s}{2}, 1] & \longrightarrow & [1 - s, 1] & \longrightarrow & X \\ t & \mapsto & 2t - 1 & \mapsto & \alpha^{-1}(2t - 1) \end{array} \end{aligned}$$

A homotopia é então definida por

$$H(t, s) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{s}{2} \\ \alpha(s), & \frac{s}{2} \leq t \leq 1 - \frac{s}{2} \\ \alpha^{-1}(2t - 1), & 1 - \frac{s}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

Pelo Lema da Continuidade(A.1.1) H é contínua, e temos

$$H(t, 0) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq 0 \\ \alpha(0) = x_0, & 0 \leq t \leq 1 \\ \alpha^{-1}(2t - 1), & 1 \leq t \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha(0) = x_0, \\ \alpha(0) = x_0, \\ \alpha^{-1}(1) = x_0, \end{cases} = c(t), \quad \forall t,$$

$$H(t, 1) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(1), & t = \frac{1}{2} \\ \alpha^{-1}(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} = (\alpha * \alpha^{-1})(t),$$

$$\text{e } H(0, s) = \alpha(0) = x_0, \quad H(1, s) = \alpha^{-1}(1) = x_0.$$

Logo $c \sim \alpha * \alpha^{-1}$, ou seja, $[c] = [\alpha * \alpha^{-1}] = [\alpha] \circ [\alpha^{-1}]$.

Analogamente, tomando o homotopia $H' : I \times I \longrightarrow X$ definida por

$$H'(t, s) = \begin{cases} \alpha^{-1}(2t), & 0 \leq t \leq \frac{s}{2} \\ \alpha^{-1}(s), & \frac{s}{2} \leq t \leq 1 - \frac{s}{2} \\ \alpha(2t - 1), & 1 - \frac{s}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

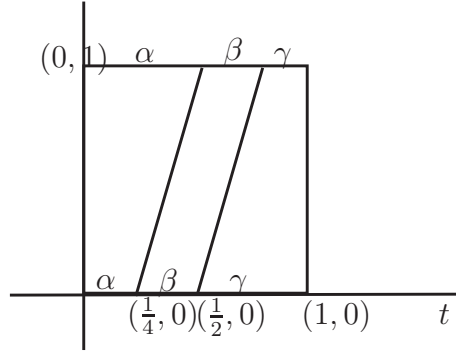
temos que $c \sim \alpha^{-1} * \alpha$, isto é $[c] = [\alpha^{-1} * \alpha] = [\alpha^{-1}] \circ [\alpha]$. Portanto a classe $[\alpha^{-1}]$ é o elemento simétrico de $[\alpha]$ em $\pi_1(X, x_0)$. ■

Lema A.1.5. (C) A operação $\circ$ é associativa.

Demonstração: Sejam $[\alpha]$, $[\beta]$ e $[\gamma]$ membros de $\pi_1(X, x_0)$. Queremos provar que $([\alpha] \circ [\beta]) \circ [\gamma] = [\alpha] \circ ([\beta] \circ [\gamma])$, ou equivalentemente, $[(\alpha * \beta) * \gamma] = [\alpha * (\beta * \gamma)]$.

Sabemos que

$$((\alpha * \beta) * \gamma)(t) = \begin{cases} (\alpha * \beta)(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha(4t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \beta(4t - 1), & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$



$$(\alpha * (\beta * \gamma))(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (\beta * \gamma)(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(4t - 2), & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ \gamma(4t - 3), & \frac{3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Para um s fixo, consideremos as aplicações

$$\begin{aligned} [0, \frac{s+1}{4}] &\longrightarrow [0, 1] \longrightarrow X \\ t &\mapsto \frac{4t}{s+1} \mapsto \alpha(\frac{4t}{s+1}) \\ \\ [\frac{s+1}{4}, \frac{s+2}{4}] &\longrightarrow [0, 1] \longrightarrow X \\ t &\mapsto 4t - (s+1) \mapsto \beta(4t - (s+1)) \\ \\ [\frac{s+2}{4}, 1] &\longrightarrow [0, 1] \longrightarrow X \\ t &\mapsto \frac{4t - (s+2)}{2-s} \mapsto \gamma(\frac{4t - (s+2)}{2-s}) \end{aligned}$$

Defina então $H : I \times I \longrightarrow X$ por

$$H(t, s) = \begin{cases} \alpha(\frac{4t}{s+1}), & 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4} \\ \beta(4t - (s+1)), & \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4} \\ \gamma(\frac{4t - (s+2)}{2-s}), & \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Temos que H é contínua e satisfaz

$$H(t, 0) = \begin{cases} \alpha(4t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \beta(4t + 1), & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} = ((\alpha * \beta) * \gamma)(t),$$

$$H(t, 1) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(4t - 2), & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ \gamma(\frac{4t - 3}{3}), & \frac{3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases} = (\alpha * (\beta * \gamma))(t),$$

$$\text{e } H(0, s) = \alpha(0) = x_0, H(1, s) = \gamma(1) = x_0.$$

Logo $((\alpha * \beta) * \gamma) \sim (\alpha * (\beta * \gamma))$. Isto completa a prova que $\circ$ é associativa e prova finalmente que $(\pi_1(X, x_0), \circ)$ é um grupo, como afirmado. ■

Definição A.1.5. *Um espaço X é conexo por caminhos se cada par de pontos de X pode ser ligado por um caminho. Em outras palavras, se x_0 e x_1 são pontos em X então existe um caminho em X com ponto inicial x_0 e ponto final x_1 .*

O resultado seguinte nos mostra que o grupo fundamental de um espaço conexo por caminhos independe do ponto base.

Teorema A.1.3. *Se um espaço X é conexo por caminhos e x_0 e x_1 são pontos de X , então os grupos $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ são isomorfos.*

Demonstração: Seja $\rho : I \rightarrow X$ um caminho tal que $\rho(0) = x_0$ e $\rho(1) = x_1$. Se α é um laço baseado em x_0 , então $(\rho^{-1} * \alpha) * \rho$ é um laço baseado em x_1 onde ρ^{-1} denota o caminho reverso de ρ :

$$\rho^{-1}(t) = \rho(1 - t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Definimos uma aplicação $P : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$ por $P([\alpha]) = [(\rho^{-1} * \alpha) * \rho]$, $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$. Pode-se verificar que a imagem de uma classe $[\alpha]$ em $\pi_1(X, x_0)$ é independente da escolha do caminho α que representa a classe, e então P está bem definida. Para mostrarmos que P é um isomorfismo algumas observações são necessárias. Primeiro: O Lema (B) mostra que $[\rho * \rho^{-1}]$ e $[\rho^{-1} * \rho]$ são os elementos neutros de $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$, respectivamente. Segundo: O Lema (C) pode ser facilmente modificado para mostrar que quaisquer caminhos (não necessariamente fechados) α, β, γ , para os quais $(\alpha * \beta) * \gamma$ e $\alpha * (\beta * \gamma)$ estão definidos, os produtos triplos indicados são equivalentes. Assim em $[(\rho^{-1} * \alpha) * \rho]$, podemos ignorar o parêntese interior e simplesmente escrever $[\rho^{-1} * \alpha * \rho]$, já que a classe de equivalência é a mesma independente do modo em que os termos do produto são associados. Agora considere $[\alpha]$ e $[\beta]$ em $\pi_1(X, x_0)$, então

$$\begin{aligned} P([\alpha] \circ [\beta]) &= P([\alpha * \beta]) = [\rho^{-1} * \alpha * \beta * \rho] = [\rho^{-1} * \alpha * \rho * \rho^{-1} * \beta * \rho] \\ &= [\rho^{-1} * \alpha * \rho] \circ [\rho^{-1} * \beta * \rho] = P([\alpha]) \circ P([\beta]). \end{aligned}$$

Logo P é homomorfismo. Agora, a aplicação $Q : \pi_1(X, x_1) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ definida por $Q([\sigma]) = [\rho * \sigma * \rho^{-1}]$, $[\sigma] \in \pi_1(X, x_1)$ é a inversa de P . De fato, para $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, $Q(P([\alpha])) = Q([\rho^{-1} * \alpha * \rho]) = [\rho * \rho^{-1} * \alpha * \rho * \rho^{-1}] = [\rho * \rho^{-1}] \circ [\alpha] \circ [\rho * \rho^{-1}] = [\alpha]$. Então a composta $Q \circ P$ é a aplicação identidade sobre $\pi_1(X, x_0)$, e por simetria, observamos que a composta $P \circ Q$ é a identidade sobre $\pi_1(X, x_1)$. Logo os grupos fundamentais indicados são isomorfos. ■

Por causa do teorema anterior, a menção à um ponto base para o grupo fundamental de um espaço conexo por caminhos é, às vezes, omitida. Vamos em geral nos referir ao “grupo fundamental de X ” e escrever $\pi_1(X)$ quando X for conexo por caminhos, já que o mesmo grupo abstrato será obtido independente da escolha do ponto base. O teorema não garante, no entanto, que o isomorfismo entre $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ é único; caminhos diferentes podem conduzir à isomorfismos diferentes. Há situações em que é importante especificar o ponto base. Quando comparamos, por exemplo, grupos fundamentais de dois espaços X e Y através uma aplicação contínua $f : X \longrightarrow Y$, é necessário especificar o ponto base de cada espaço.

A.2 O Grupo Fundamental de S^1

Esta seção é dedicada a determinar o grupo fundamental do círculo unitário. Será conveniente considerar o círculo unitário S^1 como um subconjunto do plano complexo. Vamos considerar $\mathbb{R}^2$ como o conjunto de todos os complexos $x = x_1 + ix_2$, onde $i = \sqrt{-1}$. Assim $S^1 = \{x + yi; \ x^2 + y^2 = 1\}$. Considere a aplicação $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ definida por

$$p(t) = \exp(2\pi it), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Aqui $\exp$ denota a aplicação exponencial no plano complexo. Em particular, se $t \in \mathbb{R}$, então

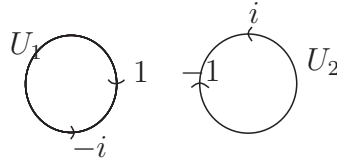
$$\exp(2\pi it) = \cos(2\pi t) + i(\sin(2\pi t)).$$

Note que p leva cada inteiro $n \in \mathbb{R}$ em $1 \in S^1$ e envolve cada intervalo $[n, n+1)$ exatamente uma vez em torno de S^1 no sentido anti-horário.

Definição A.2.1. Se $\sigma : I \longrightarrow S^1$ é um caminho, então um caminho $\tilde{\sigma} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $p \circ \tilde{\sigma} = \sigma$ é chamado um levantamento do caminho σ para a reta real $\mathbb{R}$. Se $F : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma homotopia, então uma homotopia $\tilde{F} : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $p \circ \tilde{F} = F$, é chamada um levantamento de F .

Teorema A.2.1. (*Propriedade do Levantamento de Caminhos*) Se $\sigma : I \rightarrow S^1$ é um caminho em S^1 com ponto inicial 1, então existe um único levantamento $\tilde{\sigma} : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que o ponto inicial é 0.

Demonstração: Seja U_1 o arco aberto em S^1 começando em 1 e caminhando no sentido anti-horário até $-i$, e seja U_2 o arco aberto de -1 até i , no sentido anti-horário, como mostra a figura.



Então U_1 e U_2 são conjuntos abertos em S^1 , $U_1 \cup U_2 = S^1$ e

$$p^{-1}(U_1) = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (n, n + \frac{3}{4}), \quad p^{-1}(U_2) = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{4}).$$

Note que p leva cada intervalo $(n, n + \frac{3}{4})$ homeomorficamente sobre U_1 e cada intervalo $(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{4})$ homeomorficamente sobre U_2 .

Daremos uma idéia intuitiva da prova. Subdivida o domínio do caminho σ em seções tais que cada seção está contida em U_1 ou U_2 . Se uma seção particular está contida em U_1 , escolhamos um dos intervalos $V = (n, n + \frac{3}{4})$ e consideramos a restrição $p|_V$. A composição de $(p|_V)^{-1}$ com esta seção do caminho “levanta” a seção para uma seção de um caminho em $\mathbb{R}$. O mesmo método se aplica para seções que estão em U_2 . Para garantir a continuidade nós precisamos ter cuidado para que o ponto inicial de uma dada seção levantada seja o ponto final da seção levantada anteriormente.

Este método é aplicado indutivamente como segue. Seja ε o número de Lebesgue para uma cobertura aberta $\{\sigma^{-1}(U_1), \sigma^{-1}(U_2)\}$ de I . Escolha uma seqüência $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ de números em I tal que cada par sucessivo difere de pelo menos ε . Então a imagem $\sigma([t_i, t_{i+1}])$ de um subintervalo $[t_i, t_{i+1}]$, $0 \leq i \leq n - 1$, deve estar contido em U_1 ou U_2 .

Agora, $\sigma([t_0, t_1])$ deve estar contido em U_2 pois $\sigma(t_0) = \sigma(0) = 1 \notin U_1$. Seja $V_1 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ e defina $\tilde{\sigma}$ em $[t_0, t_1]$ por

$$\tilde{\sigma}(t) = (p|_{V_1})^{-1}\sigma(t).$$

Procedendo indutivamente, suponha que σ foi definido sobre o intervalo $[t_0, t_k]$. Então $\sigma([t_k, t_{k+1}]) \subset U$ onde U está em U_1 ou U_2 . Seja V_{k+1} a componente de $p^{-1}(U)$ onde $\tilde{\sigma}(t_k)$ pertence. Note que V_{k+1} é um dos intervalos $(n, n + \frac{3}{4})$ ou $(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{4})$. Então $p|_{V_{k+1}}$ é um homeomorfismo, e a extensão de $\tilde{\sigma}$ para $[t_k, t_{k+1}]$ é obtida definindo

$$\tilde{\sigma}(t) = (p|_{V_{k+1}})^{-1}(\sigma(t)), \quad t \in [t_k, t_{k+1}].$$

A continuidade de $\tilde{\sigma}$ é garantida pelo Lema da Continuidade pois as seções levantadas concordam nos pontos finais t_k . Esse passo indutivo estende a definição de $\tilde{\sigma}$ para $[t_0, t_n] = I$.

Para provar que $\tilde{\sigma}$ é um levantamento único suponha que σ' também satisfaz $p \circ \sigma' = \sigma$, e $\sigma'(0) = 0$. Então o caminho $\tilde{\sigma} - \sigma'$ tem ponto inicial 0 e

$$p(\tilde{\sigma}(t) - \sigma'(t)) = p(\tilde{\sigma}(t))/p(\sigma'(t)) = \sigma(t)/\sigma(t) = 1, \quad t \in I,$$

então $\tilde{\sigma} - \sigma'$ é um levantamento do caminho constante cujo único valor é 1. Como p aplica somente inteiros para 1, então $\tilde{\sigma} - \sigma'$ tem somente valores inteiros. Assim, como I é conexo, $\tilde{\sigma} - \sigma'$ pode ter somente um valor inteiro. Este único valor deve ser um valor inicial, 0. Além disso, $\tilde{\sigma} - \sigma' = 0$, assim $\tilde{\sigma} = \sigma'$. O requerido levantamento $\tilde{\sigma}$ é então único. ■

Corolário A.2.1. (*Propriedade do Levantamento de Caminho Generalizada*)
Se σ é um caminho em S^1 e r é um número real tal que $p(r) = \sigma(0)$, então existe um único levantamento $\tilde{\sigma}$ de σ com ponto inicial r .

Demonstração: O caminho $\sigma/\sigma(0)$ é um caminho em S^1 com ponto inicial $\sigma(0)/\sigma(0) = 1$ e além disso tem um único levantamento η com ponto inicial 0. O caminho $\tilde{\sigma} : I \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $\tilde{\sigma}(t) = r + \eta(t)$, $t \in I$, é o requerido levantamento de σ com ponto inicial r . A unicidade de $\tilde{\sigma}$ segue da unicidade de η . ■

Proposição A.2.1. (*Propriedade do Levantamento de Homotopia*)

Se $F : I \times I \rightarrow S^1$ é uma homotopia tal que $F(0, 0) = 1$, então existe um único levantamento de homotopia $\tilde{F} : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{F}(0, 0) = 0$.

Demonstração: A prova é similar à do teorema anterior. ■

Definição A.2.2. Seja α um laço em S^1 com ponto inicial 1. A propriedade do levantamento de caminho garante que existe exatamente um levantamento

$\tilde{\alpha}$ de α com ponto inicial 0. Como,

$$1 = \alpha(1) = p(\tilde{\alpha}(1)) = \exp(2\pi i \tilde{\alpha}(1)),$$

então $\tilde{\alpha}(1)$ é um inteiro. Este inteiro é chamado o grau do laço α .

Proposição A.2.2. *Dois laços α e β em S^1 com pontos bases 1, são equivalentes se, e somente se, eles têm o mesmo grau.*

Demonstração: Sejam $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ os levantamentos de α e β , respectivamente, tendo ponto inicial 0 em $\mathbb{R}$. Suponha primeiro que α e β têm o mesmo grau então $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$. Defina uma homotopia $H : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$H(t, s) = (1 - s)\tilde{\alpha}(t) + s\tilde{\beta}(t), \quad (t, s) \in I \times I.$$

Então H demonstra a equivalência de $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ como caminhos em $\mathbb{R}$. Note, em particular, que $H(1, s)$ é o grau comum de α e β para cada s em I . A homotopia

$$p \circ H : I \times I \longrightarrow S^1$$

mostra a equivalência de α e β como laços em S^1 .

Suponha agora que α e β são laços equivalentes em S^1 e que $K : I \times I \longrightarrow S^1$ é uma homotopia tal que

$$K(\cdot, 0) = \alpha, K(\cdot, 1) = \beta, K(0, s) = K(1, s) = 1, s \in I.$$

Pela propriedade do levantamento de homotopia existe $\tilde{K} : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{K}(0, 0) = 0$ e $p \circ \tilde{K} = K$. Então $(p \circ \tilde{K})(0, s) = K(0, s) = 1, s \in I$. Segue que $\tilde{K}(0, s)$ é um inteiro para cada valor de s . Como I é conexo, $\tilde{K}(0, \cdot)$ tem somente o valor $\tilde{K}(0, 0) = 0$. Um argumento similar mostra que $\tilde{K}(1, \cdot)$ é uma aplicação constante. Como $(p \circ \tilde{K})(\cdot, 0) = K(\cdot, 0) = \alpha$ e $(p \circ \tilde{K})(\cdot, 1) = K(\cdot, 1) = \beta$ então $\tilde{K}(\cdot, 0) = \tilde{\alpha}$ e $\tilde{K}(\cdot, 1) = \tilde{\beta}$ são os únicos levantamentos de α e β , respectivamente, com ponto inicial 0. Assim

$$\text{grau}(\alpha) = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{K}(1, 0) = \tilde{K}(1, 1) = \tilde{\beta}(1) = \text{grau}(\beta),$$

e portanto α e β têm o mesmo grau. ■

Teorema A.2.2. *O grupo fundamental $\pi_1(S^1)$ é isomorfo ao grupo aditivo $\mathbb{Z}$ dos inteiros.*

Demonstração: Considere $\pi_1(S^1, 1)$, e defina a aplicação

$$\deg : \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z}; [\alpha] \rightarrow \deg([\alpha]) := \text{grau}(\alpha).$$

A proposição anterior garante que $\deg$ está bem definida e é injetora. Vejamos que $\deg$ leva $\pi_1(S^1, 1)$ sobre $\mathbb{Z}$. Seja n um inteiro. O laço γ em S^1 definido por $\gamma(t) = \exp(2\pi i n t)$ é coberto pelo caminho $t \mapsto nt, t \in I$, e além disso tem grau n . Então $\deg([\gamma]) = n$. Suponha que $[\alpha]$ e $[\beta]$ estão em $\pi_1(S^1, 1)$.

Mostremos agora que $\deg([\alpha] \circ [\beta]) = \deg([\alpha]) + \deg([\beta])$. Se $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ são os únicos levantamentos de $[\alpha]$ e $[\beta]$ que começam em 0, então o caminho $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$f(t) = \begin{cases} \tilde{\alpha}(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \tilde{\alpha}(1) + \tilde{\beta}(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

é o levantamento de $\alpha * \beta$ com ponto inicial 0. Assim $\text{grau}(\alpha * \beta) = f(1) = \tilde{\alpha}(1) + \tilde{\beta}(1) = \text{grau}(\alpha) + \text{grau}(\beta)$, e portanto,

$$\deg([\alpha] \circ [\beta]) = \text{grau}(\alpha * \beta) = \text{grau}(\alpha) + \text{grau}(\beta) = \deg([\alpha]) + \deg([\beta]). \quad \blacksquare$$

A.3 Homomorfismo Induzido e Equivalência de Homotopia

Nesta seção estudaremos inicialmente o efeito, no grupo fundamental, de uma aplicação contínua entre dois espaços. Veremos também que o grupo fundamental é um invariante topológico. A seguir examinaremos uma relação de equivalência para espaços topológicos que foi introduzida por Hurewicz em 1936. Tal relação é mais fraca do que homeomorfismo, mas forte o suficiente para garantir que espaços equivalentes têm grupos fundamentais isomorfos.

Definição A.3.1. *Dados X e Y espaços, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua tal que $f(x_0) = y_0$. Então f induz uma aplicação bem definida $f_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ dada por $f_{\#}([\alpha]) = [f \circ \alpha]$, que é um homomorfismo. Tal homomorfismo é chamado homomorfismo induzido pela aplicação f em π_1 .*

Para verificar que $f_{\#}$ está bem definida, temos que mostrar que $\alpha \sim \beta$ implica $f \circ \alpha \sim f \circ \beta$. Mas de $\alpha \sim \beta$, segue que existe uma homotopia $H : I \times I \rightarrow X$ entre α e β , relativamente a x_0 . Definimos então a aplicação $K : I \times I \rightarrow Y$ por $K = f \circ H$. Claramente K é uma homotopia entre $f \circ \alpha$ e $f \circ \beta$ relativamente a $f(x_0)$. Logo $f_{\#}$ está bem definida. Além disso $f_{\#}$ é um homomorfismo de grupos. De fato, temos que

$$(f \circ (\alpha * \beta))(t) = \begin{cases} (f \circ \alpha)(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (f \circ \beta)(2t - 1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta)(t).$$

e se $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$ então $f_{\#}([\alpha] \circ [\beta]) = f_{\#}([\alpha * \beta]) = [f \circ (\alpha * \beta)] =$

$[(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)] = [f \circ \alpha] \circ [f \circ \beta] = f_{\#}([\alpha]) \circ f_{\#}([\beta])$, o que prova que $f_{\#}$ é realmente um homomorfismo.

Proposição A.3.1. a) *Se $f : (X, x_0) \longrightarrow (X, x_0)$ é a aplicação identidade, isto é, $f = id_X$, então $f_{\#} = id_{\pi_1(X, x_0)}$.*

b) *Se $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ e $g : (Y, y_0) \longrightarrow (Z, z_0)$ são aplicações contínuas sobre os pares indicados, então o homomorfismo induzido $(g \circ f)_{\#}$ é o homomorfismo composto $g_{\#} \circ f_{\#} : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Z, z_0)$.*

c) *(Invariância Topológica) Se $h : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ é um homeomorfismo então o homomorfismo induzido por h , $h_{\#} : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$ é um isomorfismo.*

Demonstração:

a) Se $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, então $(id_X)_{\#}([\alpha]) = [id_X \circ \alpha] = [\alpha] = id_{\pi_1(X, x_0)}([\alpha])$

b) Seja $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, então $(g \circ f)_{\#}([\alpha]) = [(g \circ f)(\alpha)] = [g \circ (f \circ \alpha)] = g_{\#}([f \circ \alpha]) = g_{\#}(f_{\#}([\alpha])) = (g_{\#} \circ f_{\#})([\alpha])$. Assim, $(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#}$.

c) Suponha que $h : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ seja um homeomorfismo e considere $h^{-1} : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ a inversa de h . Então para $[\alpha]$ em $\pi_1(X, x_0)$ temos,

$$((h^{-1})_{\#} \circ h_{\#})([\alpha]) = ((h^{-1}) \circ h)_{\#}([\alpha]) = (id_X)_{\#}([\alpha]) = id_{\pi_1(X, x_0)}([\alpha]) = [\alpha].$$

Similarmente, para $[\alpha] \in \pi_1(Y, y_0)$ temos $(h_{\#} \circ (h^{-1})_{\#})([\alpha]) = id_{\pi_1(Y, y_0)}([\alpha])$.

Logo, $(h_{\#})^{-1} = (h^{-1})_{\#}$.

Antes de definirmos espaços *homotopicamente equivalentes* ou espaços com mesmo tipo de homotopia, apresentamos o conceito seguinte que é uma extensão natural do conceito de homotopia de caminhos.

Definição A.3.2. *Sejam X e Y espaços topológicos e f e g aplicações contínuas de X em Y , dizemos que f é homotópica a g relativamente a um subconjunto $A \subset X$ se existe uma aplicação contínua $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tal que para todo $x \in X$, temos $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$ e $H(a, t) = f(a) = g(a)$, $\forall a \in A$ e $\forall t \in [0, 1]$. A aplicação H é chamada uma homotopia entre f e g . Denota-se $f \sim g$ para indicar que f é homotópica a g .*

Observação A.3.1. Quando na segunda condição tivermos $A = \emptyset$, dizemos que f e g são livremente homotópicas ou apenas homotópicas.

Definição A.3.3. Sejam X e Y espaços topológicos. Dizemos que X e Y são homotopicamente equivalentes, ou têm o mesmo tipo de homotopia, se existem aplicações contínuas $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow X$ para as quais as compostas $g \circ f$ e $f \circ g$ são homotópicas às aplicações identidades sobre X e Y , respectivamente. A aplicação f é chamada uma equivalência de homotopia, e g é chamada a inversa homotópica para f . Escreve-se $X \equiv Y$ ou $X \sim Y$ para indicar que X e Y são homotopicamente equivalentes.

Exemplo A.3.1. Espaços homeomorfos são claramente homotopicamente equivalentes.

Proposição A.3.2. A relação “ X é homotopicamente equivalente à Y ” é uma relação de equivalência para espaços topológicos.

Demonstração: A relação é reflexiva pois a aplicação identidade sobre qualquer espaço X é uma equivalência de homotopia. A propriedade simétrica está implícita na definição. Note que ambas, f e g , são equivalências de homotopias e que cada uma delas é uma inversa homotópica para a outra. Vejamos que a relação é transitiva: sejam $f : X \longrightarrow Y$ e $h : Y \longrightarrow Z$ equivalências de homotopia com inversas homotópicas $g : Y \longrightarrow X$ e $k : Z \longrightarrow Y$, respectivamente. Queremos mostrar que X e Z têm o mesmo tipo de homotopia. A candidata para uma equivalência de homotopia entre X e Z é a aplicação composta $h \circ f$, tendo $g \circ k$ como inversa homotópica. Seja $L : Y \times I \longrightarrow Y$ uma homotopia tal que $L(\cdot, 0) = k \circ h$ e $L(\cdot, 1) = id_Y$. Então $M : X \times I \longrightarrow X$, definida por $M(x, t) = g(L(f(x), t))$, $(x, t) \in X \times I$, é uma homotopia tal que

$$\begin{aligned} M(\cdot, 0) &= g(L(f(\cdot), 0)) = g((k \circ h)(f)) = g \circ k \circ h \circ f = (g \circ k) \circ (h \circ f), \\ M(\cdot, 1) &= g(L(f(\cdot), 1)) = g(f) = g \circ f. \end{aligned}$$

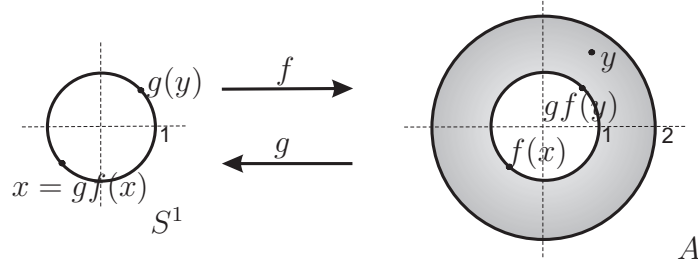
Assim $((g \circ k) \circ (h \circ f))$ é homotópica à $g \circ f$ e conseqüentemente à aplicação identidade sobre X , uma vez que g é uma inversa homotópica de f .

Um argumento completamente análogo mostra que $((h \circ f) \circ (g \circ k))$ é homotópica à $h \circ k$, e portanto à identidade sobre Z e assim X e Z têm o mesmo tipo de homotopia. ■

Exemplo A.3.2. Um círculo e um anel têm o mesmo tipo de homotopia. Para ver isto, considere o círculo unitário S^1 e o anel

$$A = \{y \in \mathbb{R}^2; 1 \leq |y| \leq 2\}$$

como na figura.



Uma equivalência de homotopia $f : S^1 \longrightarrow A$ e uma inversa homotópica $g : A \longrightarrow S^1$ são, respectivamente, definidas por

$$f(x) = x, x \in S^1; \quad g(y) = y/|y|, y \in A.$$

Então $g \circ f$ é a identidade sobre S^1 ,

$$g \circ f : S^1 \rightarrow A \rightarrow S^1; \quad x \mapsto x \mapsto x/|x| = x \quad e,$$

$$f \circ g : A \rightarrow S^1 \rightarrow A; \quad y \mapsto y/|y| \mapsto y/|y|.$$

A homotopia entre $f \circ g$ e a identidade em A é então dada por $H(y, t) = ty + (1 - t)y/|y|$, pois $H(y, 0) = y/|y| = (f \circ g)(y)$ e $H(y, 1) = y = id_A(y)$. Logo $f \circ g \sim id_A$ via a aplicação H e portanto S^1 tem o mesmo tipo de homotopia do anel A .

Definição A.3.4. Um espaço X é contráctil se existe um ponto $x_0 \in X$ e uma homotopia $H : X \times I \longrightarrow X$ entre id_X e a aplicação constante x_0 , isto é, H é tal que

$$H(x, 0) = x, \quad H(x, 1) = x_0, \quad x \in X.$$

A homotopia H é chamada contração do espaço X .

Proposição A.3.3. Um espaço X é contráctil se, e somente se, tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto.

Demonstração: Suponha que X é contráctil, isto é, existe $x_0 \in X$ e uma homotopia $H : X \times I \longrightarrow X$ entre id_X e a aplicação constante x_0 :

$$H(x, 0) = x, \quad H(x, 1) = x_0, \quad x \in X.$$

Então X tem o mesmo tipo de homotopia que o espaço $\{x_0\}$ pela equivalência de homotopia $f : X \longrightarrow \{x_0\}$ e inversa homotópica $g : \{x_0\} \longrightarrow X$ definidas por

$$f(x) = x_0, \quad g(x_0) = x_0, \quad x \in X.$$

Suponha agora que $f' : X \longrightarrow \{a\}$ é uma equivalência de homotopia entre X e o espaço com um ponto $\{a\}$ com inversa homotópica $g' : \{a\} \longrightarrow X$. Então existe uma homotopia $K : X \times I \longrightarrow X$ entre $g' \circ f'$ e a identidade em X , $K(x, 0) = x$, $K(x, 1) = (g' \circ f')(x) = g'(a)$, $x \in X$.

A homotopia K é então uma contração, e X é contrátil. ■

Definição A.3.5. *Seja X um espaço e A um subespaço de X . Dizemos que A é um retrato por deformação de X (ou que X retraindo por deformação sobre A) se existe uma homotopia $H : X \times I \longrightarrow X$ tal que*

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= x, & H(x, 1) &\in A, & x &\in X \\ H(a, t) &= a, & a &\in A, t &\in I. \end{aligned}$$

A homotopia H é chamada deformação retrátil.

Proposição A.3.4. *Se X é um espaço e A é um retrato por deformação de X , então A e X têm o mesmo tipo de homotopia.*

Demonstração: Existe uma homotopia $H : X \times I \longrightarrow X$ tal que

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= x, & H(x, 1) &\in A, & x &\in X, \\ H(a, t) &= a, & a &\in A, & t &\in I. \end{aligned}$$

Seja $f : A \longrightarrow X$ a aplicação inclusão $f(a) = a$, e defina $g : X \longrightarrow A$ por $g(x) = H(x, 1)$, $x \in X$. Então $g \circ f$ é a identidade sobre A , e H é uma homotopia entre $f \circ g$ e a identidade sobre X , assim f é uma equivalência de homotopia com g como inversa homotópica. ■

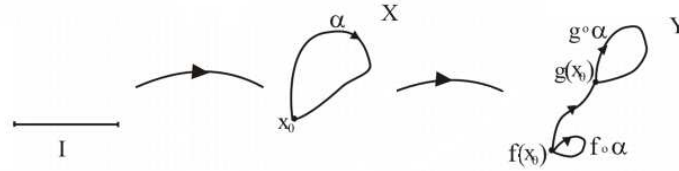
Considere agora X e Y espaços topológicos conexos por caminhos e sejam $f, g : X \rightarrow Y$ aplicações contínuas tais que f é homotópica a g . Seja $H : X \times I \rightarrow Y$ uma homotopia entre f e g . Então $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$, $\forall x \in X$ e, como vimos, f e g induzem homomorfismos $f_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ e $g_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, g(x_0))$. Seja $\gamma : I \rightarrow Y$ definido por $\gamma(t) = H(x_0, t)$. Temos que $\gamma(0) = f(x_0)$ e $\gamma(1) = g(x_0)$. Assim, γ é um caminho em Y ligando $f(x_0)$ a $g(x_0)$. Logo, γ induz um isomorfismo $\gamma_{\#} : \pi_1(Y, f(x_0)) \rightarrow \pi_1(Y, g(x_0))$ tal que $\gamma_{\#}([\beta]) = [\gamma^{-1} * \beta * \gamma]$. Temos então o seguinte resultado:

Lema A.3.1. *Nas hipóteses acima temos que $g_{\#} = \gamma_{\#} \circ f_{\#}$. Isto é, o diagrama*

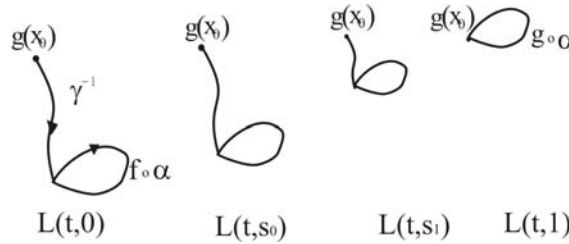
$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f\#} & \pi_1(Y, f(x_0)) \\
& \searrow g\# & \downarrow \gamma\# \\
& & \pi_1(Y, g(x_0))
\end{array}$$

é comutativo.

Demonstração: Seja $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$. Queremos mostrar que $g\#([\alpha]) = (\gamma\# \circ f\#)([\alpha])$, isto é $[(g \circ \alpha)] = [\gamma^{-1} * (f \circ \alpha) * \gamma]$. Para isto temos que exibir uma homotopia $K : I \times I \rightarrow Y$ entre $(g \circ \alpha)$ e $(\gamma^{-1} * (f \circ \alpha) * \gamma)$ relativamente a $g(x_0)$. Definimos $K : I \times I \rightarrow Y$ por $K(t, s) = H(\alpha(t), s)$. Assim, temos que K satisfaz $K(t, 0) = H(\alpha(t), 0) = (f \circ \alpha)(t)$, $K(t, 1) = H(\alpha(t), 1) = (g \circ \alpha)(t)$, $K(0, s) = H(\alpha(0), s) = H(x_0, s) = \gamma(s) = K(1, s)$. Portanto, $K(0, s) = K(1, s)$ mas não é igual a uma constante, para todo s pertencente a I .



“Deformando” K como indicado na figura seguinte poderemos exibir uma homotopia L entre $g \circ \alpha$ e $\gamma^{-1} * (f \circ \alpha) * \gamma$, como desejado:



Temos que

$$(\gamma^{-1} * (f \circ \alpha) * \gamma)(t) = \begin{cases} \gamma^{-1}(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f \circ \alpha(4t - 2), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ \gamma(4t - 3), & \text{se } \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Seja $s \in [0, 1]$. Para $t \in [0, \frac{(1-s)}{2}]$ a homotopia L parte de $\gamma^{-1}(0) = \gamma(1) = g(x_0)$ e vai até $\gamma^{-1}(1-s) = \gamma(s)$. Para $t \in [\frac{(1-s)}{2}, \frac{(s+3)}{4}]$ temos a

composição:

$$\begin{aligned} \left[\frac{(1-s)}{2}, \frac{(s+3)}{4}\right] &\longrightarrow [0, 1] \longrightarrow Y \\ t &\longrightarrow \frac{(4t+2s-2)}{(3s+1)} \longrightarrow K\left(\frac{(4t+2s-2)}{(3s+1)}, s\right) \end{aligned}$$

Para $t \in [\frac{(s+3)}{4}, 1]$ a homotopia L parte de $\gamma(s)$ e vai até $g(x_0)$.

Logo, a homotopia L é dada por

$$L(t, s) = \begin{cases} \gamma^{-1}(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2} \\ K\left(\frac{4t+2s-2}{3s+1}, s\right), & \text{se } \frac{1-s}{2} \leq t \leq \frac{s+3}{4} \\ \gamma(4t-3), & \text{se } \frac{s+3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Note que, para $0 \leq t \leq 1$,

$$L(t, 0) = \begin{cases} \gamma^{-1}(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ K(4t-2, 0), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ \gamma(4t-3), & \text{se } \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases} = (\gamma^{-1} * (f \circ \alpha) * \gamma)(t),$$

$$L(t, 1) = K(t, 1) = (g \circ \alpha)(t), \text{ e } L(0, s) = L(1, s) = g(x_0). \quad \blacksquare$$

Teorema A.3.1. *Sejam X e Y espaços topológicos conexos por caminhos. Se X e Y têm o mesmo tipo de homotopia, então $\pi_1(X)$ é isomorfo a $\pi_1(Y)$, mais precisamente, se $f : X \rightarrow Y$ é uma equivalência de homotopia, então $f_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ é um isomorfismo.*

Demonstração: Considere $f : X \rightarrow Y$ uma equivalência de homotopia. Então existe $g : Y \rightarrow X$ (a inversa homotópica) tal que $f \circ g \sim id_Y$ e $g \circ f \sim id_X$. Sejam $y_0 \in Y$ e $x_0 = g(y_0)$. Vamos mostrar que $f_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ é um isomorfismo. Temos $g_{\#} : \pi_1(Y, f(x_0)) \rightarrow \pi_1(X, g(f(x_0)))$. Além disso, pelo lema, $(f \circ g)_{\#} = \gamma_{\#} \circ (id_Y)_{\#}$ e $(g \circ f)_{\#} = \sigma_{\#} \circ (id_X)_{\#}$, onde γ é um caminho ligando y_0 a $f(x_0)$ e σ é um caminho ligando x_0 a $g(f(x_0))$.

Mas, $(f \circ g)_{\#} = f_{\#} \circ g_{\#}$, $(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#}$, $(id_Y)_{\#} = id_{\pi_1(Y, y_0)}$ e, $(id_X)_{\#} = id_{\pi_1(X, x_0)}$.

$$\begin{array}{ccccc} & & (g \circ f)_{\#} & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_{\#}} & \pi_1(Y, f(x_0)) & \xrightarrow{g_{\#}} & \pi_1(X, g(f(x_0))) \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & (id_X)_{\#} & \pi_1(X, x_0) & \sigma_{\#} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
& & (f \circ g)_\# & & \\
& \swarrow & & \searrow & \\
\pi_1(Y, y_0) & \xrightarrow{g_\#} & \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_\#} & \pi_1(Y, f(x_0)) \\
& \searrow & & \swarrow & \\
& & \pi_1(Y, y_0) & &
\end{array}$$

$(id_Y)_\#$ (from $\pi_1(Y, y_0)$ to $\pi_1(Y, y_0)$) and $\gamma_\#$ (from $\pi_1(Y, y_0)$ to $\pi_1(Y, f(x_0))$)

Assim,

$$g_\# \circ f_\# = \sigma_\# \circ id_{\pi_1(X, x_0)} \quad (1)$$

$$f_\# \circ g_\# = \gamma_\# \circ id_{\pi_1(Y, y_0)} \quad (2)$$

De (1), concluímos que $f_\#$ é injetora e de (2) obtemos que $f_\#$ é sobrejetora. Logo, $f_\#$ é um isomorfismo entre $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(Y, f(x_0))$. Como X e Y são conexos por caminhos, o isomorfismo independe do ponto base. ■

Como uma primeira consequência obtemos a invariância topológica já mencionada.

Corolário A.3.1. *Se X e Y são espaços topológicos conexos por caminhos com X homeomorfo a Y então $\pi_1(X) \simeq \pi_1(Y)$.*

Demonstração: Segue do Exemplo A.3.1. ■

Corolário A.3.2. *Se A é um retrato por deformação de um espaço X e x_0 é um ponto de A então a aplicação de $\pi_1(X, x_0)$ em $\pi_1(A, x_0)$ induzida da inclusão é um isomorfismo.*

Demonstração: Segue do teorema anterior e da Proposição A.3.4. ■

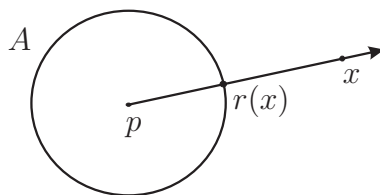
Definição A.3.6. *Um espaço X conexo por caminhos é simplesmente conexo quando $\pi_1(X)$ é o grupo trivial.*

Corolário A.3.3. *Todo espaço contráctil é simplesmente conexo.*

Demonstração: Segue do fato que o espaço contráctil tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto e do teorema anterior. ■

A.4 Exemplos de Grupos Fundamentais e o Teorema de Van Kampen

Exemplo A.4.1. *Considere o plano $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ consistindo de todos os pontos em $\mathbb{R}^2$ exceto um ponto particular p . Seja A um círculo com centro p , como na figura:*



Para $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$, a linha que vai de p até x intersepta o círculo A no ponto $r(x)$. Esta aplicação r é claramente uma retração de $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ em A . Defina uma homotopia $H : (\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}) \times I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ por

$$H(x, t) = t \cdot r(x) + (1 - t) \cdot x, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}, \quad t \in I.$$

É fácil ver que H é uma deformação retrátil e então A é um retrato por deformação de $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$. Assim, $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}) \simeq \pi_1(A) \simeq \mathbb{Z}$.

Exemplo A.4.2. Considere um anel X no plano. Tanto o círculo interior como o círculo exterior de X são retratos por deformação de S^1 , então $\pi_1(X)$ é o grupo dos inteiros.

Exemplo A.4.3. Cada um dos seguintes espaços são contráteis, então cada um deles tem grupo fundamental trivial: um ponto; um intervalo na reta; a reta; o n -espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$; todo conjunto convexo em $\mathbb{R}^n$.

Outros exemplos de grupo fundamental podem ser obtidos a partir do resultado seguinte.

Proposição A.4.1. Sejam X e Y espaços com x_0 em X e y_0 em Y . Então

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \simeq \pi_1(X, x_0) \oplus \pi_1(Y, y_0).$$

Demonstração: É similar à apresentada para grupos de homotopia de ordem superior (ver Proposição 1.2.1).

Exemplo A.4.4. O toro T^2 é homeomorfo ao produto $S^1 \times S^1$. Então $\pi_1(T^2) \simeq \pi_1(S^1 \times S^1) \simeq \pi_1(S^1) \oplus \pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Exemplo A.4.5. Um toro n -dimensional T^n é o espaço obtido como o produto cartesiano de n círculos unitários. Então $\pi_1(T^n)$ é isomorfo à soma direta de n cópias do grupo dos inteiros, $\pi_1(T^n) \simeq \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{n \text{ vezes}}$.

Exemplo A.4.6. Um cilindro fechado C é o produto de um círculo S^1 e um intervalo fechado $[a, b]$. Então $\pi_1(C) \simeq \pi_1(S^1) \oplus \pi_1([a, b]) \simeq \mathbb{Z} \oplus \{0\} \simeq \mathbb{Z}$.

Um resultado muito útil para calcular o grupo fundamental de certos espaços é o Teorema de Van Kampen ([7], IV. Teoremas 2.1 e 2.2, ou [5] Teorema 1.20). Apresentamos aqui a versão segundo Hatcher [5]. A versão dada em [7] envolve propriedades do diagrama universal. Ressaltamos no entanto que pode-se verificar que as duas versões são equivalentes considerando a definição de produto livre via diagramas.

Teorema A.4.1. (Teorema de Van Kampen) Seja X a união de espaços abertos conexos por caminhos A_α , cada um contendo o ponto base $x_0 \in X$, $j_\alpha : \pi_1(A_\alpha) \rightarrow \pi_1(X)$, os homomorfismos induzidos das inclusões A_α em X , e $\Phi : *_\alpha \pi_1(A_\alpha) \rightarrow \pi_1(X)$ o homomorfismo estendido no produto livre. Se cada intersecção $A_\alpha \cap A_\beta$ é conexa por caminhos, então o homomorfismo $\Phi : *_\alpha \pi_1(A_\alpha) \rightarrow \pi_1(X)$ é sobrejetor. Ainda, se cada intersecção $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$ é conexa por caminhos, então o kernel de Φ é o subgrupo normal N gerado pelos elementos da forma $i_{\alpha\beta}(\omega)i_{\beta\alpha}(\omega)^{-1}$ (onde $i_{\alpha\beta} : \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta) \rightarrow \pi_1(A_\alpha)$ é o homomorfismo induzido da inclusão) e assim Φ induz um isomorfismo $\pi_1(X) \simeq *_\alpha \pi_1(A_\alpha)/N$.

Demonstração: ([5], Teorema 1.20, p. 43). ■

Considerando o caso particular em que X é a união de abertos A_1 e A_2 e que A_1 , A_2 e $A_1 \cap A_2$ são conexos por caminhos, então do teorema anterior obtém-se as seguintes consequências:

Corolário A.4.1. Se $A_1 \cap A_2$ é simplesmente conexo, então $\pi_1(X)$ é o produto livre dos grupos $\pi_1(A_1)$ e $\pi_1(A_2)$ com respeito aos homomorfismos induzidos das inclusões $j_1 : \pi_1(A_1) \rightarrow \pi_1(X)$ e $j_2 : \pi_1(A_2) \rightarrow \pi_1(X)$.

Demonstração: ([7], Teorema 3.1, p. 122). ■

Corolário A.4.2. Assuma que A_2 é simplesmente conexo. Então $j_1 : \pi_1(A_1) \rightarrow \pi_1(X)$ é um epimorfismo, e seu kernel é o menor subgrupo normal de $\pi_1(A_1)$ contendo a imagem $k_1(\pi_1(A_1 \cap A_2))$, onde k_1 é o homomorfismo induzido da inclusão $k_1 : \pi_1(A_1 \cap A_2) \rightarrow \pi_1(A_1)$. Assim, $\pi_1(X) \simeq \pi_1(A_1)/N$, onde N é o subgrupo normal de $\pi_1(A_1)$ gerado por $k_1 : \pi_1(A_1 \cap A_2) \rightarrow \pi_1(A_1)$.

Demonstração: ([7], Teorema 4.1, p. 127). ■

Exemplo A.4.7. *Seja X a reunião de dois círculos tangentes num ponto x_0 ($X = S_1^1 \vee S_2^1$). Então $\pi_1(X) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Com efeito, sejam $\alpha_i = [c_i]$ onde $c_i : I \rightarrow X$ é o caminho com ponto base x_0 e que dá uma única volta em torno de S_i^1 , para $i = 1, 2$. Tome dois pontos a e b , distintos, de X com $a \in S_1^1$ e $b \in S_2^1$. Considere $U = X - \{a\}$ e $V = X - \{b\}$. Então U e V são abertos, $U \cap V$ é conexo por caminhos e é simplesmente conexo pois é contráctil. Pelo corolário A.4.1 temos que $\pi_1(X) \simeq \pi_1(U) * \pi_1(V)$. Mas U e V têm o mesmo tipo de homotopia de S^1 , logo $\pi_1(U) \simeq \mathbb{Z}$ e $\pi_1(V) \simeq \mathbb{Z}$. Portanto $\pi_1(X) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \simeq \langle \alpha_1 \rangle * \langle \alpha_2 \rangle$.*

Exemplo A.4.8. *Se X é a reunião de n círculos tangentes num ponto x_0 ($X = \bigvee_{i=1}^n S_i^1$). Então $\pi_1(X) \simeq \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{n \text{ vezes}}$. Para ver isso considere agora $\alpha_i = [c_i]$ onde $c_i : I \rightarrow X$ é o caminho com ponto base x_0 e que dá uma única volta em torno de S_i^1 , para $i = 1, \dots, n$. Mostremos por indução sobre n . Tome pontos $a_i \in S_i^1$ (distintos de x_0) $i = 1, \dots, n$. Considere $U = X - \{a_n\}$ e $V = X - \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$, então U e V são abertos, $U \cap V$ é conexo por caminhos e é simplesmente conexo pois é contráctil. Pelo corolário A.4.1 temos que $\pi_1(X) \simeq \pi_1(U) * \pi_1(V)$. Mas U têm o mesmo tipo de homotopia de $\bigvee_{i=1}^{n-1} S_i^1$ e V têm o mesmo tipo de homotopia de S^1 , logo $\pi_1(U) \simeq \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{n-1 \text{ vezes}}$ (por hipótese de indução) e $\pi_1(V) \simeq \mathbb{Z}$. Portanto $\pi_1(X) \simeq \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{n \text{ vezes}}$.*

Mais geralmente, temos:

Exemplo A.4.9. *O grupo fundamental do bouquet de círculos $\pi_1(\bigvee_{\alpha \in A} S_\alpha^1)$, indexados em um conjunto A , é isomorfo a F onde F é o grupo livre gerado por A . De fato, considere para cada α , um ponto x_α em S_α^1 , diferente de x_0 e a vizinhança aberta $U_\alpha := S_\alpha^1 - \{x_\alpha\}$ de x_0 em S_α^1 . Então x_0 é um retrato por deformação de U_α em S_α^1 , e S_α^1 é um retrato por deformação de $A_\alpha := S_\alpha^1 \bigvee_{\beta \neq \alpha} U_\beta$. A intersecção de dois ou mais A'_α s distintos é $\bigvee_{\alpha} U_\alpha$ que é conexa por caminhos e tem como retrato por deformação o ponto x_0 . O Teorema de Van Kampen implica que $\pi_1(X) \simeq *_\alpha \pi_1(S_\alpha^1)/N$ onde N é o subgrupo normal gerado por $i_{\alpha\beta}(\omega)i_{\beta\alpha}(\omega)^{-1}$. Porém $N = \{0\}$ visto que $A_\alpha \cap A_\beta$ é contráctil para quaisquer $\alpha, \beta \in A$ e $\pi_1(S_\alpha^1) \simeq \mathbb{Z}$. Logo $\pi_1(X) \simeq *_\alpha \mathbb{Z}_\alpha \simeq F$, como afirmado.*

Referências Bibliográficas

- [1] Brown, K. S. *Cohomology of Groups*. G. T. M. 87, New York, Springer Verlag, 1982.
- [2] Castro, F., *Cohomologia de Grupos e Algumas Aplicações*, Dissertação de Mestrado, 2006.
- [3] Croom, F. H., *Basics Concepts of Algebraic Topology*, New York: Springer-Verlag, 1978.
- [4] Garcia, A., Lequain, Y. *Álgebra: um curso de introdução*, IMPA/CNPQ (Projeto Euclides), 1988.
- [5] Hatcher, A., *Algebraic Topology*, Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- [6] Hilton, P.J., Wylie, S., *An Introduction to Algebraic Topology*, Cambridge: Cambridge University Press, 1960.
- [7] Massey, W.S., *Algebraic Topology: An Introduction*, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [8] Munkres, J.R., *Elements of Algebraic Topology*, New York: Addison-Wesley Publishing Company, 1984.
- [9] Robinson, D. J. S. ; *A course in the Theory of Groups*, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [10] Schubert, H., *Topology*, McDonald Technical & Scientific, 1968.
- [11] Spanier, E. H., *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, 1967.
- [12] Whitehead, G.W., *Elements of Homotopy Theory*, New York: Springer-Verlag, 1978.

- [13] Whitehead, G.W., *Homotopy Theory*, The Massachusetts Institute of Technology Press, 1966.
- [14] S. Eilenberg and S. MacLane (1947), Cohomology theory in abstract groups. II Groups extensions with a non-abelian kernel, *Annals of Mathematics* (2) 48 (1947), p. 326-341.
- [15] S. Eilenberg and S. MacLane (1945), Relations between homology and homotopy groups and spaces, *Annals of Mathematics* (2) 46 (1945), p. 480-509.
- [16] J. H. C. Whitehead (1948), On the realizability of homotopy groups, *Annals of Mathematics* (2) 50 (1949), p. 261-263.