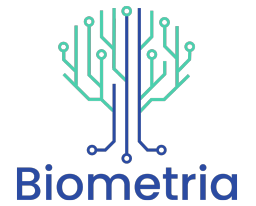




Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”  
Instituto de Biociências – Câmpus de Botucatu  
Programa de Pós-graduação em Biometria



# **Análise de modelos mistos para dados longitudinais na área da medicina veterinária via inferência Bayesiana**

Alberto Frank Lázaro Aguirre

Botucatu  
2024

Alberto Frank Lázaro Aguirre

# **Análise de modelos mistos para dados longitudinais na área da medicina veterinária via inferência Bayesiana**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Biometria da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Biometria.

**Orientador:** Prof(a). Dr(a). Miriam Harumi Tsunemi

Botucatu  
2024

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA SEÇÃO TÉC. AQUIS. TRATAMENTO DA INFORM.  
DIVISÃO TÉCNICA DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO - CÂMPUS DE BOTUCATU - UNESP

BIBLIOTECÁRIA RESPONSÁVEL: MARIA CAROLINA A. CRUZ E SANTOS-CRB 8/10188

Lázaro Aguirre, Alberto Frank.

Análise de modelos mistos para dados longitudinais na área da medicina veterinária via inferência *Bayesiana* / Alberto Frank Lázaro Aguirre. - Botucatu, 2024

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Biociências, Botucatu

Orientador: Miriam Harumi Tsunemi

Capes: 90194000

1. Método longitudinal. 2. Modelos lineares (Estatística). 3. Testes de vibração. 4. Músculo - Temperatura. 5. Ultrassom.

Palavras-chave: Longitudinal; Modelagem estatística; Plataforma vibratória; Temperatura muscular; Ultrassom.

**ATA DA DEFESA PÚBLICA DA TESE DE DOUTORADO DE ALBERTO FRANK LÁZARO AGUIRRE, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA, DO INSTITUTO DE BIOCIÊNCIAS - CÂMPUS DE BOTUCATU.**

Aos 23 dias do mês de fevereiro do ano de 2024, às 08:00 horas, no(a) Sala da Pós-graduação na Central de Aulas 2, realizou-se a defesa de TESE DE DOUTORADO de ALBERTO FRANK LÁZARO AGUIRRE, intitulada **ANALISE DE MODELOS MISTOS PARA DADOS LONGITUDINAIS NA AREA DA MEDICINA VETERINARIA VIA INFERENCIA BAYESIANA**. A Comissão Examinadora foi constituída pelos seguintes membros: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> MIRIAM HARUMI TSUNEMI (Orientador(a) - Participação Presencial) do(a) Departamento de Biodiversidade e Bioestatística / Instituto de Biociências de Botucatu UNESP, Dr. JULIANA PETRINI (Participação Virtual) do(a) Departamento Pesquisa e Desenvolvimento / Clínica do Leite Ltda, Prof. Dr. DENISMAR ALVES NOGUEIRA (Participação Virtual) do(a) Departamento de Estatística / UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS, Profa. Dra. LICIANA VAZ DE ARRUDA SILVEIRA (Participação Presencial) do(a) Departamento de Biodiversidade e Bioestatística / Instituto de Biociências de Botucatu - UNESP, Prof. Dr. ROGERIO ANTONIO DE OLIVEIRA (Participação Presencial) do(a) Departamento de Biodiversidade e Bioestatística / Instituto de Biociências de Botucatu UNESP. Após a exposição pelo doutorando e arguição pelos membros da Comissão Examinadora que participaram do ato, de forma presencial e/ou virtual, o discente recebeu o conceito final: APROVADO. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelo(a) Presidente(a) da Comissão Examinadora.

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> MIRIAM HARUMI TSUNEMI

Miriam H. Tsunemi

*Dedico este tese aos meus pais.*

*A todas as pessoas que lutam diariamente em prol do conhecimento e do avanço científico. Que meu trabalho possa contribuir de alguma forma para a sociedade, inspirando e incentivando novas descobertas e pesquisas.*

# Agradecimentos

Primeiramente, desejo expressar minha gratidão a Deus por Seu amor incondicional. É graças a Ele que cheguei a este ponto da minha jornada e tive a oportunidade de estudar nesta encantadora cidade de Botucatu. Sua capacitação diária me fortalece para superar os desafios que a vida apresenta em meu caminho.

Agradeço aos meus pais, Esteban Lázaro Gomez e Clementina Aguirre Coronel, pelo apoio constante e pelas orações. Sou grato por serem meus exemplos de vida e sacrifício, por me ensinarem a ser uma pessoa de valores significativos, tanto na vida pessoal quanto profissional.

Agradeço aos meus irmãos, Julian, Cinthya, Oscar, Jhoel (em memória) e ao meu sobrinho Brayan Viera Lázaro, pelos seus amores incondicionais. Sou grato pelo constante suporte que me oferecem, pelas longas conversas telefônicas, pelas palavras de apoio nos momentos mais desafiadores, e por sempre me incentivarem e fortalecerem na busca pelos meus sonhos.

Agradeço à Professora Doutora Miriam Harumi Tsunemi por tudo o que fez por mim: sua paciência, orientação, confiança, apoio, incentivo, compreensão, motivação, dedicação, seus ensinamentos e disposição em esclarecer todas as minhas dúvidas.

A todos os professores e professoras que deixaram sua marca em minha formação acadêmica, meu sincero agradecimento. Suas aulas, conselhos e contribuições foram fundamentais para o meu crescimento profissional.

A amizade representa um dos alicerces fundamentais de nossa vida; sem ela, seríamos incompletos. Por essa razão, expresso meu sincero agradecimento a todos os meus amigos, desde os mais próximos até os mais distantes. Aos amigos de Botucatu, agradeço pela calorosa recepção, pelo acolhimento e por todos os momentos vividos. Também estendo minha gratidão aos colegas de turma do curso de Doutorado. Aos amigos no Peru, agradeço por não permitirem que a distância se tornasse uma barreira entre nós. Seria difícil mencionar todos eles, esses amigos com quem compartilhei momentos inesquecíveis: Saditt Rocio Robles, Juliana Gualberto, Mario Lucas, Lara M. pelos seus conselhos de perseverança e pelos preciosos momentos compartilhados.

O presente estudo foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*Não importa o quão ruim a vida pareça ser, sempre há algo que você pode fazer e ter sucesso.*

*Enquanto houver vida, haverá esperança.*

***Stephen Hawking***

*En los momentos de crisis, sólo la imaginación es más importante que el conocimiento.*

***Albert Einstein***

# Resumo

Os estudos de modelos lineares mistos (LMMs) têm-se tornado o foco em análise de experimentos em que as medidas são repetidas (dados longitudinais) em diversas áreas, tais como biomédica, agrícola e afins. Nestes tipos de pesquisas as observações são provenientes da mesma unidade experimental, havendo uma correlação entre elas que deve ser considerada na estimação dos parâmetros. Por sua vez, a inferência Bayesiana para os LMMs é uma ferramenta poderosa para lidar com dados longitudinais, geralmente na modelagem de interceptos e inclinações aleatórias sem enfrentar os requisitos de tamanho de amostra rigorosos que ocorrem em abordagens frequentistas e além disso o conhecimento prévio sobre parâmetros podem ser incorporados ao modelo mediante prioris informativas ou não. O objetivo deste estudo foi aplicar modelos lineares mistos com cinco tipos de estruturas de matrizes de variância e covariância, por meio de uma abordagem Bayesiana, para analisar os dados de um estudo longitudinal na área de medicina veterinária mediante o *software R* e *JAGS*. Os resultados encontrados permitiram concluir que o uso das estruturas de covariância para as medidas repetidas de interceptos e inclinações por cada unidade experimental via inferência Bayesiana com *priori* não informativa foi adequada e que não houve alterações significativas após o exercício de plataforma das temperaturas nas regiões estudadas.

**Palavras-chave:** Modelagem estatística, Longitudinal, Plataforma vibratória, Temperatura muscular, Ultrassom.



# Abstract

Studies of linear mixed models (LMMs) have become the focus on analyzing experiments in which measurements are repeated (longitudinal data) in several areas, such as biomedical, agricultural and similar. In these types of research, the observations come from the same experimental unit, with a correlation between them that must be considered when estimating the parameters. In turn, Bayesian inference for LMMs is a powerful tool for dealing with longitudinal data, generally in modeling random intercepts and slopes without facing the stringent sample size requirements that occur in frequentist approaches and in addition the prior knowledge about parameters they can be incorporated into the model through informative or non-informative priors. The objective of this study was to apply linear mixed models with five types of variance and covariance matrix structures, using a Bayesian approach, to analyze data from a longitudinal study in the area of veterinary medicine using *software R* and *JAGS*. The results found allowed us to conclude that the use of covariance structures for repeated measurements of intercepts and slopes for each experimental unit via Bayesian inference with non-informative *priori* was adequate and that there were no significant changes after the temperature platform exercise in the regions studied.

**Keywords:** Statistical modeling, Longitudinal, Vibrating platform, Muscle temperature, Ultrasound.

# Lista de figuras

Figura 1 – Representação da análise de convergência no gráfico de traço . . . . .	23
Figura 2 – Estrutura do experimento. Figura criada em <biorender.com> e adaptado de Santos <i>et al.</i> (2019) e Santos <i>et al.</i> (2017). . . . .	27
Figura 3 – Valores observados de temperatura de bíceps femoral, vasto lateral e ultrassom por cão para os momentos antes e depois da sessão de WBV, o intervalo azul representa a média $\pm$ desvio padrão . . . . .	39
Figura 4 – Gráficos de normalidades de QQ-Plot de termografia bíceps femoral, vasto lateral e ultrassom por dias e momentos. . . . .	40
Figura 5 – Média ergódica dos desvios padrões do modelo 1 para temperatura de bíceps femoral com a estrutura de matriz de variância e covariância VC. . . . .	45
Figura 6 – Média ergódica dos desvios padrões do modelo 2 para a temperatura de bíceps femoral com a estrutura de matriz de variância e covariância VC. . . . .	45
Figura 7 – Média ergódica do desvio padrão do erro e da correlação do modelo 2 para a temperatura de bíceps femoral com a estrutura de matriz de variância e covariância VC. . . . .	46
Figura 8 – Média ergódica dos parâmetros do modelo 1 ajustado a temperatura de vasto lateral com a estrutura de matriz de variância e covariância autorregressiva de primeira ordem. . . . .	47
Figura 9 – Média ergódica dos parâmetros do modelo 2 ajustado a temperatura de vasto lateral com a estrutura de matriz de variância e covariância autorregressiva de primeira ordem. . . . .	48
Figura 10 – Média ergódica dos parâmetros do modelo 2 ajustado a temperatura de vasto lateral com a estrutura de matriz de variância e covariância autorregressiva de primeira ordem. . . . .	48
Figura 11 – Gráficos de interceptos e inclinações aleatórias por cada cão, resultantes do ajuste do modelo 1 (a) bíceps femoral e (b) vasto lateral com as estruturas de componente de variância e autorregressiva de primeira ordem. . . . .	50
Figura 12 – Gráficos de interceptos e inclinações aleatórias para cada cão, resultantes do ajuste do modelo 2 (a) bíceps femoral e (b) vasto lateral com as estruturas de componente de variância e autorregressiva de primeira ordem. . . . .	51
Figura 13 – Média ergódica dos parâmetros do modelo 4 ajustado à diferença da temperatura de bíceps femoral. . . . .	57
Figura 14 – Média ergódica dos parâmetros do modelo 4 ajustado à diferença da temperatura de vasto lateral. . . . .	58
Figura 15 – Média ergódica dos parâmetros do modelo 5 ajustado à diferença da variável ultrassom. . . . .	58

Figura 16 – Gráficos das diferenças de temperatura de bíceps femoral a partir do ajuste com o modelo 4 considerando como bloco aleatório os dias. . . . .	59
Figura 17 – Gráficos das diferenças de temperatura de bíceps femoral a partir do ajuste com o modelo 5 considerando como bloco aleatório os cães. . . . .	60
Figura 18 – Gráficos das diferenças de temperatura de vasto lateral a partir do ajuste com o modelo 4 considerando como bloco aleatório os dias. . . . .	61
Figura 19 – Gráficos das diferenças de temperatura de vasto lateral a partir do ajuste com o modelo 5 considerando como bloco aleatório os cães. . . . .	61
Figura 20 – Gráficos das diferenças do IR do ultrassom (Índice de resistência) a partir do ajuste com o modelo 5 considerando como bloco aleatório os cães. . . . .	62
Figura 21 – Gráficos de Boxplot de termografia bíceps femoral, vasto lateral e ultrassom por dias. . . . .	78
Figura 22 – Gráficos de normalidades de QQ-Plot de termografia bíceps femoral, vasto lateral e ultrassom por dias. . . . .	79
Figura 23 – Gráficos de Boxplot de termografia bíceps femoral, vasto lateral e ultrassom por cães. . . . .	80
Figura 24 – Gráficos de normalidades de QQ-Plot de termografia bíceps femoral, vasto lateral e ultrassom por cães e momentos. . . . .	81
Figura 25 – Gráfico dos perfis por cada momento e dias para os 10 cães, das três variáveis em estudo, termografia bíceps femoral, termografia vasto lateral e Ultrassom.	82
Figura 26 – Gráfico dos perfis por cada momento e dias para os 10 cães, das três variáveis em estudo, termografia bíceps femoral, termografia vasto lateral e Ultrassom.	83
Figura 27 – Gráficos de perfis de termografia bíceps femoral, vasto lateral e ultrassom verificando a variabilidade tanto entre como dentro dos dias da semana. . . .	84
Figura 28 – Box-plot da diferença de temperatura de bíceps femoral por dias e cães . . . .	90
Figura 29 – Box-plot da diferença de temperatura de vasto lateral por dias e cães . . . .	91
Figura 30 – Box-plot da diferença de ultrassom por dias e cães . . . . .	92
Figura 31 – Gráficos das diferenças de temperatura de bíceps femoral a partir do ajuste com o modelo 3, a média constante. . . . .	93
Figura 32 – Gráficos das diferenças de temperatura de vasto lateral a partir do ajuste com o modelo 3, a média constante. . . . .	94
Figura 33 – Gráficos das diferenças da variável ultrassom a partir do ajuste com o modelo 3, média constante. . . . .	94
Figura 34 – Gráficos das diferenças da variável ultrassom a partir do ajuste com o modelo 4 considerando como bloco aleatório os dias. . . . .	95

# Lista de tabelas

Tabela 1	– Passos do algoritmo Metropolis-Hastings . . . . .	16
Tabela 2	– Passos do algoritmo de amostrador de Gibbs . . . . .	17
Tabela 3	– Estruturas de variância e covariância para os efeitos aleatórios dos interceptos e inclinações para os modelos 1 e 2, descritos nas equações (4.2) e (4.3) . . .	30
Tabela 4	– Evidências e interpretações para o fator Bayes $BF_{12}$ . . . . .	34
Tabela 5	– Estatísticas descritivas da temperaturas de bíceps femoral (TBF), vasto lateral (TVL) em °C e IR do ultrassom (US) por momentos e dias da semana. . . .	38
Tabela 6	– Comparação dos modelos ajustados para a termografia de bíceps femoral e vasto lateral com diferentes estruturas de variância-covariância utilizando os critérios DIC, WAIC e p-WAIC. . . . .	41
Tabela 7	– Estimativas <i>a posteriori</i> dos parâmetros dos modelos selecionados, Intervalos de credibilidade HPD, critérios de convergência e valores de Fator de Bayes para os modelos 1 e 2 das estruturas de covariâncias selecionadas para termografia de bíceps femoral. . . . .	43
Tabela 8	– Estimativas <i>a posteriori</i> dos parâmetros dos modelos selecionados, Intervalos de credibilidade HPD, critérios de convergência e valores de Fator de Bayes para os modelos 1 e 2 das estruturas de covariâncias selecionadas para termografia de vasto lateral. . . . .	44
Tabela 9	– Estatísticas descritivas de diferença da temperatura bíceps femoral (DBF), vasto lateral (DVL) e ultrassom (DUS). . . . .	53
Tabela 10	– Estimativas <i>a posteriori</i> dos parâmetros dos modelos 3, 4 e 5 ajustados à diferença da temperatura de bíceps femoral, intervalos de credibilidade HPD e critérios de convergência das cadeias. . . . .	54
Tabela 11	– Estimativas <i>a posteriori</i> dos parâmetros dos modelos 3, 4 e 5 ajustados à diferença da temperatura de vasto lateral, intervalos de credibilidade HPD e critérios de convergência das cadeias. . . . .	55
Tabela 12	– Estimativas <i>a posteriori</i> dos parâmetros dos modelos 3, 4 e 5 ajustados à diferença de utrassom, intervalos de credibilidade HPD e critérios de convergência das cadeias. . . . .	56
Tabela 13	– Comparação dos modelos ajustados às diferença das temperaturas de bíceps femoral, vasto lateral e a variável ultrassom utilizando os critérios DIC, WAIC, p-WAIC e Fator de Bayes. . . . .	57
Tabela 14	– Estimativas (média <i>a posteriori</i> ) dos parâmetros do modelo 1 (4.2), com as diferentes estruturas de variância-covariância, de temperatura termográfica de bíceps femoral. . . . .	85

Tabela 15 – Estimativas (média <i>a posteriori</i> ) dos parâmetros do modelo 1 (4.2), com as diferentes estruturas de variância-covariância, de temperatura termográfica de vasto lateral. . . . .	86
Tabela 16 – Estimativas (média <i>a posteriori</i> ) dos parâmetros do modelo 2 (4.3), com as diferentes estruturas de variância-covariância, de temperatura termográfica de bíceps femoral. . . . .	87
Tabela 17 – Estimativas (média <i>a posteriori</i> ) dos parâmetros do modelo 2 (4.3), com as diferentes estruturas de variância-covariância, de temperatura termográfica de vasto lateral. . . . .	88
Tabela 18 – Valores de Fator de Bayes (FB) calculadas a partir dos modelos 1 e 2 considerando as combinações entre as diversas estruturas de covariâncias. .	89

# Lista de abreviaturas e siglas

JAGS	<i>Just Another Gibbs Sampler</i>
LMM	<i>linear mixed-effects model</i> (modelo linear de efeitos mistos)
DIC	<i>Deviance information criterion</i> (critério de informação de desvio)
TBF	Temperatura de bíceps femoral
TVL	Temperatura de vasto lateral
US	Ultrassom
IR	Índice de resistência
DBF	Diferença da temperatura de bíceps femoral
DVL	Diferença da temperatura de vasto lateral
DUS	Diferença de ultrassom
RSS	<i>Sum of Squares of Residuals</i> ( Soma de Quadrados de Resíduos)
VC	<i>Variance Components</i> (Componentes de Variância)
UN	<i>Unstructured</i> (Não estruturado )
CSH	<i>Heterogeneous Composite Symmetry</i> (Simetria de Composta Heterogênea)
AR(1)	<i>Autoregressive (1)</i> (Autorregressiva de 1ª ordem)
CS	<i>Compound Symmetry</i> (Simetria Composta)
HPD	<i>Highest Posterior Density</i>

# Sumário

1	INTRODUÇÃO . . . . .	2
1.1	Objetivos . . . . .	4
2	CONCEITOS PRELIMINARES . . . . .	5
2.1	Modelos lineares . . . . .	5
2.2	Modelos lineares mistos . . . . .	6
2.2.1	Estimação de $\beta$ e $b$ . . . . .	8
2.3	Estruturas de variância e covariância . . . . .	10
2.4	Modelos mistos longitudinais . . . . .	12
3	INFERÊNCIA BAYESIANA EM MODELOS MISTOS . . . . .	14
3.1	Distribuição <i>a priori</i> . . . . .	14
3.2	Distribuição <i>a posteriori</i> . . . . .	15
3.3	Métodos de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC) . . . . .	16
3.3.1	Metropolis-Hastings . . . . .	16
3.3.2	Amostrador de Gibbs . . . . .	17
3.4	Distribuição normal multivariada e Wishart invertida . . . . .	18
3.4.1	Distribuição normal multivariada . . . . .	18
3.4.2	Distribuição Wishart e Wishart-invertida . . . . .	19
3.5	Estimação dos parâmetros . . . . .	21
3.6	Diagnóstico de convergência . . . . .	23
4	MATERIAL E MÉTODOS . . . . .	27
4.1	Modelos mistos para temperatura termográfica e a medida de IR do ultrassom . . . . .	28
4.2	Modelos mistos para a diferença da temperatura termográfica entre os momentos antes e depois . . . . .	31
4.3	Obtenção da distribuição <i>a posteriori</i> . . . . .	31
4.4	Critério para seleção de modelo . . . . .	33
4.4.1	Fator de Bayes (FB) . . . . .	33
4.4.2	Critério de informação de desvio (DIC) . . . . .	35
4.4.3	Watanabe – Critério de Informação de Akaike (WAIC) . . . . .	35
5	RESULTADOS E DISCUSSÃO . . . . .	37
5.1	Análise descritiva . . . . .	37
5.2	Ajustes dos modelos 1 e 2 para as variáveis TBF e TVL . . . . .	41

5.3	Análise dos modelos para a diferença entre os momentos para as variáveis DBF, DVL e DUS . . . . .	52
6	CONCLUSÕES . . . . .	64
6.1	Trabalhos futuros . . . . .	65
	REFERÊNCIAS . . . . .	66
	<b>APÊNDICES</b>	<b>76</b>
APÊNDICE A	GRÁFICOS DESCRITIVOS . . . . .	78
APÊNDICE B	TABELAS DOS MODELOS 1 E 2 . . . . .	85
APÊNDICE C	GRÁFICOS DA DIFERENÇA ENTRE OS MOMENTOS	90
APÊNDICE D	CÓDIGOS DE MODELAGEM . . . . .	96



# 1 Introdução

Os modelos mistos são extensivamente empregados em várias áreas, incluindo biologia, medicina, economia, psicologia e outras disciplinas. Eles proporcionam a capacidade de modelar dados com estruturas hierárquicas ou correlações intraclasses, o que implica que os dados podem ser agrupados em diferentes níveis ou unidades, como indivíduos, famílias, empresas ou países.

A modelagem através dos modelos mistos é amplamente utilizada na área de Bioestatística, pois confronta-se com experimentos cuja coleta de dados geralmente é correlacionada. Este termo genérico abrange uma infinidade de estruturas de dados, como observações multivariadas, dados agrupados, medições repetidas, dados longitudinais e dados espacialmente correlacionados. Os estudos de medidas repetidas são frequentemente denominados quando uma mesma unidade experimental é mensurada várias vezes ao longo de uma dimensão (tempo ou espaço). Quando é ao longo do tempo, refere-se como dados longitudinais (DIGGLE; LIANG; ZEGER, 1994; DIGGLE *et al.*, 2002; ARIYO *et al.*, 2020; GÓMEZ-RUBIO, 2020; LIN; WANG, 2020).

Os modelos de efeitos mistos ou aleatórios para dados longitudinais permitem que os coeficientes da regressão variem entre os indivíduos. Esses modelos têm dois componentes: um intra-individual e outro entre indivíduos. Nos modelos mistos, há variação nos parâmetros de regressão entre os indivíduos, cada um apresentando sua própria trajetória média. Dessa forma, um subconjunto dos parâmetros de regressão são tomados como aleatórios, sendo específico por indivíduo e os efeitos fixos são compartilhados por todos os indivíduos (VERBEKE, 1997; PUSPONEGORO *et al.*, 2017).

A consideração das matrizes de variância e covariância desempenha um papel fundamental na modelagem longitudinal. Essas matrizes contêm informações essenciais sobre a dispersão e as interações entre as variáveis em um conjunto de dados, sendo ferramentas indispensáveis na análise de dados em diversos campos, como econometria, ciência de dados e análise multivariada. Portanto, a correta especificação dessas matrizes é crucial para realizar uma análise estatística robusta e obter informações valiosas sobre a distribuição e as relações entre as variáveis no conjunto de dados (DIGGLE; LIANG; ZEGER, 1994; ARIYO *et al.*, 2020; LIN; WANG, 2020).

O interesse em explorar os modelos mistos reside na capacidade não apenas de descrever a tendência temporal através da correlação entre medidas sucessivas, mas também de estimar

a variação na medida inicial e a taxa de mudança ao longo do tempo. No caso dos dados longitudinais, o comportamento da variável resposta é observado ao longo de uma direção específica, sendo o tempo a mais comum. Uma característica dos dados longitudinais é a falta de independência entre as observações. Isso significa que, quando as medidas são tomadas em intervalos temporais diferentes, a correlação pode ser baixa ou até mesmo inexistente, uma vez que as mesmas são realizadas em uma mesma unidade experimental. Outra possível característica é a heterogeneidade de variâncias nas diversas ocasiões observadas, as quais não precisam ser igualmente espaçadas e balanceadas. Além disso, as análises podem ser conduzidas com os dados de indivíduos com perda de seguimento total ou parcial (ausência de informação em algum momento do estudo) (FAUSTO *et al.*, 2008; CABRAL; GONÇALVES, 2011).

Após definida a estrutura do experimento e a família de modelos a ser estudada, o próximo passo é a inferência dos parâmetros. Na abordagem frequentista, os parâmetros são considerados fixos e a análise é baseada exclusivamente nas informações contidas nos dados amostrais. Por outro lado, na abordagem Bayesiana, pode-se atribuir uma distribuição de probabilidade para o comportamento de cada parâmetro, visto que são considerados aleatórios, então todas as incertezas, incluindo aquelas associadas aos efeitos fixos, são quantificadas por meio de distribuições de probabilidade especificado como uma distribuição *a priori*. Neste caso, o conhecimento prévio sobre o comportamento da distribuição do parâmetro é de fundamental importância sendo incorporada na análise através de uma informação *a priori* (CONGDON, 2007; ALBERT, 2009; BOX; TIAO, 2011; PUZA, 2015).

Dessa forma, a abordagem Bayesiana, permite a integração de informações prévias (*a priori*) e amostrais (verossimilhança) na análise. Ao contrário da abordagem frequentista, que se concentra em estimar os valores fixos dos parâmetros, a abordagem Bayesiana permite obter a distribuição *a posteriori* dos parâmetros a partir da combinação de distribuição *a priori* e a verossimilhança (WAKEFIELD, 2013; SEIDE; JENSEN; KIESER, 2020).

Na modelagem Bayesiana de modelos mistos, tanto os efeitos fixos quanto os aleatórios são considerados como variáveis aleatórias com uma distribuição *a priori* especificada. Essa distribuição *a priori* pode ser baseada no conhecimento prévio do pesquisador. A obtenção da distribuição *a posteriori* dos parâmetros deve ser feita utilizando métodos computacionais, como o algoritmo de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC). O MCMC é uma técnica que possibilita amostrar de maneira aproximada a distribuição *a posteriori* sem a necessidade de calcular a função de densidade de probabilidade, especialmente quando a distribuição *a posteriori* não pode ser calculada de forma analítica. Isso permite inferências em situações complexas onde não é viável obter soluções analíticas. Os resultados da análise incluem estimativas dos parâmetros e suas incertezas, assim como medidas da adequação do modelo, como a probabilidade preditiva posterior.

Neste trabalho, utilizaram-se informações experimentais na área de medicina veterinária. O tratamento veterinário utiliza exames laboratoriais, como exames de sangue e temperatura,

para avaliar a saúde dos animais. A plataforma vibratória é uma ferramenta amplamente utilizada em medicina veterinária para diversos tratamentos, trazendo vários benefícios para a saúde dos animais. É importante ressaltar que o uso dessa ferramenta deve ser supervisionado por profissionais qualificados (SILVA, 2016; GOMES *et al.*, 2018; GOMES, 2019; MARTINS, 2020; OLIVEIRA *et al.*, 2020; JUNIOR *et al.*, 2020; WUTZKE *et al.*, 2020).

Neste cenário, foram realizadas avaliações por Santos *et al.* (2017) sobre o impacto da plataforma vibratória de corpo inteiro nos músculos das pernas e no índice de resistência femoral. Neste trabalho, utilizando-se a análise de variância, constataram-se alterações significativas nas temperaturas da pele nas regiões dos músculos bíceps femoral e vasto lateral, além do aumento do índice de resistência (IR) do ultrassom.

## 1.1 Objetivos

Aplicar modelos lineares mistos com cinco tipos de estruturas de matrizes de variância e covariância, por meio de uma abordagem Bayesiana, para analisar os dados de um estudo longitudinal na área de medicina veterinária.

- 1) Avaliar o uso desta abordagem em relação a utilizada por Santos *et al.* (2017), para verificar a influência do exercício de vibração de corpo inteiro na temperatura e IR do ultrassom de cães.
- 2) Verificar as diferentes estruturas de matrizes de variância-covariância nos modelos de efeitos mistos de dados longitudinais.
- 3) Estudar a correlação entre intercepto e inclinação (coeficiente angular) aleatória por cães ao longo do tempo (momentos) baseados nas informações experimentais.

O presente estudo possui a seguinte estrutura: o **Capítulo 2** consiste na apresentação dos conceitos preliminares e na descrição dos modelos mistos e as características dos estudos longitudinais. O **Capítulo 3** aborda em detalhes o processo de estimação por meio da inferência Bayesiana de modelos mistos. No **Capítulo 4** é dedicada aos materiais e métodos utilizados na pesquisa. O **Capítulo 5** apresenta os resultados obtidos e discussões. Por fim, o **Capítulo 6** traz as conclusões e sugere perspectivas para trabalhos futuros.

## 2 Conceitos preliminares

Alguns tipos de dados proporcionam medidas repetidas que resultam ser muito correlacionadas e assim não podem ser consideradas independentes. Nestes casos, os erros correlacionados não se encaixam nos pressupostos de certos modelos usuais de análise de variância (ANOVA) e de covariância (ANCOVA) e regressão. A utilização de um modelo misto seria mais adequada porque permite certa interdependência nas respostas em relação a algum fator adicionando um efeito aleatório ao seu modelo e a estrutura mais apropriada para a matriz de covariâncias. Este efeito permite assumir um valor de resposta diferente para cada fator, atribuindo diferentes interceptos (aleatórios) para cada resposta. Assim, o modelo é chamado de misto porque permite tanto efeitos fixos e aleatórios e o caso longitudinal será detalhado, motivado pela sua aplicabilidade em dados observados ao longo do tempo.

A seguir, será apresentada uma breve fundamentação teórica sobre modelos lineares e, posteriormente, sobre modelos mistos. Essa fundamentação é necessária para o desenvolvimento do presente estudo.

### 2.1 Modelos lineares

Os modelos lineares mais utilizados em análise de dados é definido por:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.1)$$

em que,  $\mathbf{y}$  representa o vetor de dimensão  $n \times 1$ , de dados observados;  $\mathbf{X}$  de dimensões  $n \times p$ , é a matriz de delineamento;  $\boldsymbol{\beta}$ , de dimensões  $p \times 1$ , é um vetor de parâmetros desconhecidos de efeitos fixos e  $\boldsymbol{\epsilon}$  é o vetor de dimensões  $n \times 1$ , de erros aleatórios (SILVA *et al.*, 2020; MONTGOMERY; PECK; VINING, 2021a; MONTGOMERY; PECK; VINING, 2021b).

O modelo linear tem como objetivo modelar a média de  $\mathbf{y}$  usando o vetor de parâmetros fixos  $\boldsymbol{\beta}$ . Além disso, os componentes de efeitos aleatórios  $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  são independentes e identicamente distribuídos, seguindo uma distribuição normal com valor de média zero e variância  $\sigma^2$ ,

$$\boldsymbol{\epsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$$

em que  $\mathbf{0}$  é o vetor de zeros,  $\mathbf{I}$  é a matriz de identidade de dimensão  $n \times n$  e variância  $\sigma^2$ . Dessa forma,

$$\mathbf{Y} \sim N(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I})$$

cuja função de verossimilhança é dada por:

$$L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2|\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \times \exp\left[-\frac{(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'\mathbf{I}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})}{2\sigma^2}\right] \quad (2.2)$$

Os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros são obtidos resolvendo o seguinte sistema de equações normais:  $\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}'\mathbf{y}$  e sua solução é  $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$ . Também tem-se que  $V(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\sigma^2$ , depois de estimar  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ , a variância  $\sigma^2$  é estimada a partir do RSS (PARDOE, 2020; DUNN; SMYTH *et al.*, 2018).

$$s^2 = \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'\mathbf{I}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})}{n - p} = \frac{RSS}{n - p}$$

## 2.2 Modelos lineares mistos

Na estatística aplicada, muitas vezes deparam-se com experimentos cuja coleta de dados podem ser correlacionados, experimentos em blocos ou blocos aleatórios, compreendendo uma infinidade de estruturas de dados, como dados agrupados, medições repetidas, dados longitudinais e dados espacialmente correlacionados. De forma particular, pode-se ter o interesse de modelar uma determinada variável com mais do que uma mensuração nas unidades experimentais. Assim o modelo misto é uma generalização do modelo de regressão que leva em conta:

- (1) a variação que é explicada pelos efeitos fixos da variável independente de interesse,
- (2) a variação que não é explicada pelas variáveis independentes de interesse (efeitos aleatórios).

Como o modelo inclui uma mistura de efeitos fixos e aleatórios, ele é chamado de modelo misto. Esses efeitos aleatórios essencialmente definem a estrutura ao termo de erro  $\epsilon$  e explicam os efeitos individuais das diferentes observações. Assim, contempla a possível existência de observações correlacionadas ou com variabilidade heterogênea. Quando um modelo misto tem intercepto e inclinações aleatórios, significa que cada amostra (unidade experimental) possui variação individual tanto em seu intercepto quanto em sua inclinação em relação ao valor esperado da variável de interesse, proporcionando maior flexibilidade na modelagem.

Um modelo linear misto (LMM) é um modelo linear paramétrico para dados agrupados, longitudinais ou de medidas repetidas que quantificam as relações entre uma variável dependente contínua e várias variáveis preditoras. Um LMM pode incluir parâmetros de efeito fixo associados

a uma ou mais covariáveis contínuas ou categóricas e efeitos aleatórios associados a uma ou mais fatores aleatórios. Enquanto os parâmetros de efeito fixo descrevem as relações das covariáveis com a variável dependente para uma população inteira, os efeitos aleatórios são específicos para grupos ou sujeitos dentro de uma população (WEST; WELCH; GALECKI, 2006; BROWN; PRESCOTT, 2015).

Em modelos mistos, cada unidade experimental possui informações correlacionadas, ou seja os elementos são representados no vetor  $\mathbf{y}$  com as  $n$  respostas para  $j$ -ésima unidade experimental, que é também referido como o perfil individual de respostas em pesquisas longitudinais (VERBEKE, 1997; ARIYO *et al.*, 2020; JI; SHI, 2020).

Formalmente, um modelo misto é expresso a seguir:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{b} + \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.3)$$

em que  $\mathbf{y}$  é o vetor de observações ( $n \times 1$ ) e assume-se que  $\boldsymbol{\beta}$  é o vetor de parâmetros de efeitos fixos desconhecidos com matriz de delineamento conhecida  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{b}$  é o vetor de parâmetros de efeitos aleatórios desconhecidos, com matriz de delineamento conhecida  $\mathbf{Z}$  e  $\boldsymbol{\epsilon}$  um vetor de erros aleatórios desconhecidos. Admitindo-se que  $\mathbf{b} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{G})$  e  $\boldsymbol{\epsilon} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{R})$  não correlacionadas, tem-se que,

$$E(\mathbf{Y}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \quad \text{e} \quad \mathbf{V} = V(\mathbf{Y}) = \mathbf{Z}\mathbf{G}\mathbf{Z}' + \mathbf{R} \quad (2.4)$$

e, matricialmente, tem-se

$$\begin{bmatrix} y_{1j} \\ y_{2j} \\ \vdots \\ y_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1j}^{(1)} & X_{1j}^{(2)} & \cdots & X_{1j}^{(p)} \\ X_{2j}^{(1)} & X_{2j}^{(2)} & \cdots & X_{2j}^{(p)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{nj}^{(1)} & X_{nj}^{(2)} & \cdots & X_{nj}^{(p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{1j}^{(1)} & Z_{1j}^{(2)} & \cdots & Z_{1j}^{(q)} \\ Z_{2j}^{(1)} & Z_{2j}^{(2)} & \cdots & Z_{2j}^{(q)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{nj}^{(1)} & Z_{nj}^{(2)} & \cdots & Z_{nj}^{(q)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{qj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{1j} \\ \epsilon_{2j} \\ \vdots \\ \epsilon_{nj} \end{bmatrix}$$

em que  $\mathbf{Z}$  é uma matriz de dimensão ( $n_j \times q$ ) e sendo  $\mathbf{G}$  a matriz de variâncias e covariâncias dos efeitos aleatórios presentes no vetor  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{R}$  a matriz de variâncias e covariâncias residual. Assim pode-se modelar a variância dos dados, especificando a estrutura (forma) de  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{R}$ .

A matriz  $\mathbf{X}$  (de dimensão  $n \times p$ ) no modelo da equação (2.3) representa os valores conhecidos das  $p$  covariáveis,  $\mathbf{X}_{n1}^{(1)}, \mathbf{X}_{n2}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}_{nj}^{(p)}$  para cada uma das  $n$  observações coletadas na  $j$ -ésima unidade experimental. O vetor  $\boldsymbol{\beta}$  representa o vetor de coeficientes de regressão  $p$ -dimensional associados às covariáveis usadas na construção da matriz  $\mathbf{X}$ . A matriz  $\mathbf{Z}$  de dimensão  $n \times q$  representa os valores conhecidos,  $\mathbf{Z}_{n1}^{(1)}, \mathbf{Z}_{n2}^{(2)}, \dots, \mathbf{Z}_{nj}^{(q)}$  para cada uma das  $n$  observações coletadas na  $j$ -ésima unidade experimental,  $\mathbf{b}$  é um vetor de  $q$ -dimensional de efeitos aleatórios associado à matriz  $\mathbf{Z}$ , o vetor  $\boldsymbol{\epsilon}_i$  é um vetor  $n$ -dimensional de erros, associado a cada resposta observada na  $j$ -ésima unidade experimental.

A partir da suposição do modelos  $\mathbf{b}_j \sim N_q(\mathbf{0}, \mathbf{G}_j)$ , os elementos da diagonal principal da matriz  $\mathbf{G}_j$  representam a variância de cada efeito aleatório  $b_j$  e os elementos fora do diagonal representam as covariâncias entre os efeitos aleatórios. Como cada unidade experimental  $j$  possui  $q$  efeitos aleatórios associados, tem-se que  $\mathbf{G}_j$  é uma matriz de dimensão  $q \times q$  do tipo simétrica e positiva definida e é expresso a seguir:

$$\mathbf{G}_j = \text{Var}(\mathbf{b}_j) = \begin{bmatrix} \text{Var}(b_{1j}) & \text{cov}(b_{1j}, b_{2j}) & \cdots & \text{cov}(b_{1j}, b_{qj}) \\ \text{cov}(b_{1j}, b_{2j}) & \text{Var}(b_{2j}) & \cdots & \text{cov}(b_{2j}, b_{qj}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(b_{1j}, b_{qj}) & \text{cov}(b_{2j}, b_{qj}) & \cdots & \text{Var}(b_{qj}) \end{bmatrix}$$

Outra suposição foi que  $\epsilon_j \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{R}_j)$ , os elementos da diagonal principal da matriz  $\mathbf{R}_j$  representa, a variância de cada erro e elementos fora da diagonal principal representam as covariâncias entre os erros, pode ser expressa como:

$$\mathbf{R}_j = \text{Var}(\epsilon_j) = \begin{bmatrix} \text{Var}(\epsilon_{1j}) & \text{cov}(\epsilon_{1j}, \epsilon_{2j}) & \cdots & \text{cov}(\epsilon_{1j}, \epsilon_{nj}) \\ \text{cov}(\epsilon_{1j}, \epsilon_{2j}) & \text{Var}(\epsilon_{2j}) & \cdots & \text{cov}(\epsilon_{2j}, \epsilon_{nj}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(\epsilon_{1j}, \epsilon_{nj}) & \text{cov}(\epsilon_{2j}, \epsilon_{nj}) & \cdots & \text{Var}(\epsilon_{nj}) \end{bmatrix}$$

Diferentemente da pressuposição  $\mathbf{R} = \sigma^2 \mathbf{I}$  do modelo linear, os erros associados às medidas repetidas realizadas na mesma unidade experimental em um modelo linear misto podem ser correlacionadas o que implica que a matriz  $\mathbf{R}$  pode assumir diferentes estruturas. Note que, quando  $\mathbf{R} = \sigma^2 \mathbf{I}$  e  $\mathbf{Z} = \mathbf{0}$ , o modelo misto reduz-se ao modelo linear padrão, o qual foi definido na equação (2.1).

### 2.2.1 Estimação de $\beta$ e $\mathbf{b}$

Após a definição da estrutura de modelagem de modelos mistos, serão apresentadas as formas de estimação frequentista dos parâmetros do modelo equação (2.3) em diferentes situações (MCCULLOCH; SEARLE, 2004; SEARLE; MCCULLOCH; NEUHAUS, 2011; STROUP, 2012).

**Quando as matrizes  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{R}$  são conhecidas:** então, usando-se o estimador de mínimos quadrados generalizados, o melhor estimador linear não viesado de  $\beta$ , é dado por:

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y} \quad (2.5)$$

com matriz de variância-covariância dada por:

$$V(\hat{\beta}) = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1},$$

sendo  $V$  dada pela equação (2.4). Se  $V$  for singular, utiliza-se uma inversa generalizada

$$V(\hat{\beta}) = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-}.$$

em que sua inversa e variância são dadas por:

$$\mathbf{V}^{-1} = [\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z} + \mathbf{G}^{-1})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}] \quad (2.6)$$

$$\mathbf{V}(\hat{\beta}) = [\mathbf{X}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X} - \mathbf{X}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z} + \mathbf{G}^{-1})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X}]^{-1} \quad (2.7)$$

Sabe-se que o melhor preditor linear não viesado de  $\mathbf{b}$  e sua variância são respectivamente.

$$\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z} + \mathbf{G}^{-1})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\beta}) \quad (2.8)$$

$$\mathbf{V}(\hat{\mathbf{b}}) = \mathbf{G}\mathbf{Z}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{G} - \mathbf{G}\mathbf{Z}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{G} \quad (2.9)$$

Os estimadores destes parâmetros também podem ser obtidos pela função de verossimilhança de dados, supondo que  $\mathbf{b}$  e  $\epsilon$  são normalmente distribuídos e determinando-se as equações de modelos mistos (PATTERSON; THOMPSON, 1971; HENDERSON, 1974; HENDERSON, 1990; MARTINS; LOPES; SILVA, 1993).

$$f(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{|\mathbf{Z}\mathbf{G}\mathbf{Z}' + \mathbf{R}|}} \exp\left\{\frac{1}{2}[(\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)'(\mathbf{Z}\mathbf{G}\mathbf{Z}' + \mathbf{R})^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)]\right\},$$

a função de densidade de probabilidade conjunta,  $f(\mathbf{y}, \mathbf{b}) = f(\mathbf{y}|\mathbf{b})f(\mathbf{b})$ , é dada por:

$$f(\mathbf{y}, \mathbf{b}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{|\mathbf{R}|}} \exp\left\{\frac{1}{2}[(\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta - \mathbf{Z}\mathbf{b})'\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta - \mathbf{Z}\mathbf{b})]\right\} \times \\ \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{|\mathbf{G}|}} \exp\left\{\frac{1}{2}[(\mathbf{b} - \mathbf{0})'\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{0})]\right\}.$$

Portanto o logaritmo da função de verossimilhança é dado por:

$$\ell = n \log(2\pi) - \frac{1}{2}(\log |\mathbf{R}| + \log |\mathbf{G}|) - \\ - \frac{1}{2}(\mathbf{y}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{y} - 2\mathbf{y}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X}\beta - 2\mathbf{y}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{b} + 2\beta'\mathbf{X}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{b} + \\ + \beta'\mathbf{X}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X}\beta + \mathbf{b}'\mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{b} + \mathbf{b}'\mathbf{G}^{-1}\mathbf{b}). \quad (2.10)$$

Derivando  $\ell$  em relação a  $\beta$  e  $\mathbf{b}$  e igualando-se a 0, tem-se o sistema de equações de modelos mistos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X} & \mathbf{X}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X} & \mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z} + \mathbf{G}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{\mathbf{b}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{y} \\ \mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{y} \end{bmatrix},$$



que permitem obter soluções mediante métodos numéricos (algoritmos numéricos) para os efeitos fixos  $\beta$  e predições para os efeitos aleatórios  $b$  dadas nas equações (2.5) e (2.8).

**Quando as matrizes  $G$  e  $R$  são desconhecidas:** a estimação dos componentes destas matrizes pode ser feita usando-se métodos baseados na função de verossimilhança sob a suposição de normalidade multivariada conjunta de  $b$  e  $\epsilon$  (ROBINSON, 1991; DIGGLE *et al.*, 2002; DEMIDENKO, 2013).

Lembrando que  $\hat{G}$  e  $\hat{R}$  são estimadores de  $G$  e  $R$ , respectivamente, o sistema de equações é dado por:

$$\begin{bmatrix} X' \hat{R}^{-1} X & X' \hat{R}^{-1} Z \\ Z' \hat{R}^{-1} X & Z' \hat{R}^{-1} Z + \hat{G}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X' \hat{R}^{-1} y \\ Z' \hat{R}^{-1} y \end{bmatrix}$$

cujos estimadores são:

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= (X' \hat{R}^{-1} X)^{-1} X' \hat{V}^{-1} y \\ \hat{b} &= (Z' \hat{R}^{-1} Z + \hat{G}^{-1})^{-1} Z' \hat{R}^{-1} (y - X \hat{\beta}) \end{aligned}$$

Na prática, assume-se uma estrutura de covariâncias para  $G$  ou  $R$ , ou para ambas. Para valores fixos de  $V$ , obtém-se um estimador de  $\beta$ .

Da mesma forma que para modelos de regressão, esses resultados fornecem o fundamento para inferência estatística para combinações lineares do vetor de parâmetros  $\beta$ , e podem ser usados para testar hipóteses e construir intervalos de confiança para estas combinações (PATTERSON; THOMPSON, 1971; MARTINS; LOPES; SILVA, 1993).

## 2.3 Estruturas de variância e covariância

Matrizes de variância e covariância são frequentemente usadas em modelos lineares mistos para descrever a estrutura de covariância dos efeitos aleatórios. Em particular, a matriz de variância-covariância descreve a variabilidade dos efeitos aleatórios em um modelo misto (SEARLE; CASELLA; MCCULLOCH, 1992; LITTELL; HENRY; AMMERMAN, 1998; MOLENBERGHS; VERBEKE, 2000; PINHEIRO; BATES, 2000; FERRO, 2018).

Na análise de modelos mistos há diferentes estruturas para as matrizes de variâncias e covariâncias  $G$ , as principais são: Não estruturado (por sua sigla em inglês UN), Componentes de variâncias simples (VCS), Simetria composta heterogênea (CSH), Autorregressivo de primeira ordem (AR(1)) e Simetria composta (CS).

- a) **Componentes de Variância (VC - “Variance Components”):** Esta matriz não permite considerar diferentes variações para grupos de efeitos ou observações, ou seja a variação

é homogênea e assume que as covariâncias são nulas, além disso, as medidas tomadas em diferentes tempos são independentes. Na ilustração a seguir tem-se a matriz que as observações ou grupo de efeitos aleatórios é  $\sigma^2 > 0$ .

$$VC = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix} = \mathbf{I}\sigma^2$$

em que  $\mathbf{I}$  é a matriz de identidade.

- b) **Não estruturado (UN - “Unstructured”)**: Para cada elemento da diagonal principal, temos parâmetros de variâncias diferentes. Variâncias heterogêneas e assume um componente de covariância para cada par de grupo de medidas. Tal matriz é caracterizada pelas variâncias e covariâncias desiguais.

$$UN = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1j} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{i1} & \sigma_{i2} & \cdots & \sigma_j^2 \end{bmatrix}$$

em que  $\sigma_i^2$  é a variância dentro do grupo  $i$  e  $\sigma_{ij}$  é a covariância entre os grupos  $i$  e  $j$ .

- c) **Simetria de Composta Heterogênea (CSH - “Heterogeneous Composite Symmetry”)**: Nos elementos fora da diagonal principal, a covariância entre os grupos é representada pelo produto dos respectivos desvios padrões e uma correlação  $\rho$ ,  $|\rho| < 1$ , geral para todos os grupos.

$$CSH = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 & \cdots & \rho\sigma_1\sigma_j \\ \rho\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & \cdots & \rho\sigma_2\sigma_j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho\sigma_i\sigma_1 & \rho\sigma_i\sigma_2 & \cdots & \sigma_j^2 \end{bmatrix}$$

em que  $\sigma_i^2$  é a variância dentro do grupo e  $\rho$  é a correlação geral entre os grupos.

- d) **Autorregressiva de 1ª ordem (AR(1) - “Autoregressive (1)”)**: A estrutura de Autorregressiva de ordem 1 (AR(1)) é comumente utilizada para ajustar modelos a conjuntos de dados longitudinais, em que as observações são igualmente espaçadas ao longo do tempo em cada unidade experimental. Essa estrutura implica que as observações feitas em tempos mais próximos possuem maior correlação do que aquelas feitas em tempos mais distantes. Nesse tipo de modelo, existem dois parâmetros avaliados: a variância  $\sigma^2$  e o parâmetro de correlação  $\rho$ , que deve satisfazer a condição  $|\rho| < 1$ .

$$AR(1) = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho^j \\ \rho & 1 & \cdots & \rho^{j-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^j & \rho^{j-1} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

em que  $\sigma^2$  é a variância geral.

- e) **Simetria Composta (CS - “Compound Symmetry”)**: A simetria composta é utilizada quando se supõe que as variâncias sejam iguais nos grupos e que haja a mesma covariância entre as medidas feitas em grupos distintos, ou seja, covariâncias constantes entre quaisquer observações de uma mesma unidade devido a erros independentes, envolvendo dois parâmetros.

$$CS = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 + \sigma^2 & \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_1^2 \\ \sigma_1^2 & \sigma_1^2 + \sigma^2 & \cdots & \sigma_1^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_1^2 & \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_1^2 + \sigma^2 \end{bmatrix}$$

A estrutura de simetria composta especifica em um mesmo grupo tanto a variância ( $\sigma_1^2 + \sigma^2$ ) quanto a covariância ( $\sigma_1^2$ ) homogêneas.

A seguir serão apresentados os modelos mistos longitudinais que são mais adequados na análise do problema experimental deste estudo.

## 2.4 Modelos mistos longitudinais

Considera-se como dados longitudinais quando as medidas das observações são feitas sobre uma mesma unidade experimental ao longo do tempo. Os dados de medidas repetidas podem envolver medições feitas na mesma unidade ao longo do tempo, ou sob determinadas condições experimentais ou observacionais. As medições feitas na mesma variável para o mesmo sujeito provavelmente serão correlacionadas (por exemplo, as medições do peso corporal de um determinado sujeito tem relação com as medições feitas anteriormente). Permitem dados desbalanceados, uma vez que as medições coletadas nem sempre podem ser totalmente controladas. Por exemplo, os indivíduos podem entrar no estudo a qualquer momento, e/ou se retirar por diferentes motivos, pode ocorrer em estudos experimentais. Modelos ajustados a dados longitudinais ou de medidas repetidas envolvem a estimação de parâmetros de covariância para capturar essa correlação (WEST; WELCH; GALECKI, 2006; FITZMAURICE *et al.*, 2008; BURGHOFF, 2016; DONG; WEDEL, 2020).

Estudos longitudinais de longo prazo são os mais apropriados para a investigação das mudanças individuais ao longo do tempo e de outros fatores que podem influenciar nestas mudanças (FITZMAURICE *et al.*, 2008; VERBEKE; MOLENBERGHS; RIZOPOULOS, 2010).

Diante disso, uma das alternativas frequentemente utilizada é o modelo linear de efeitos mistos, em que as medidas repetidas são consideradas em um modelo de regressão linear com parâmetros que podem variar para cada indivíduo e por isso são chamados de efeitos aleatórios ou coeficientes de regressão específicos do sujeito. Além disso, o modelo linear misto pode incluir parâmetros de efeitos fixos associados a uma ou mais covariáveis que podem ser contínuas ou categóricas (LAIRD; WARE, 1982; VERBEKE, 1997; FITZMAURICE *et al.*, 2008; VERBEKE; MOLENBERGHS; RIZOPOULOS, 2010; SHEN; LIU, 2020).

Para a apresentação dos modelos mistos, considere  $\mathbf{y}$  o vetor de resposta  $n$  dimensional de medidas (longitudinais). Um modelo linear de efeitos mistos pode ser definido como

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{X}_j\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_j\mathbf{b}_j + \boldsymbol{\epsilon}_i \quad (2.11)$$

em que  $\mathbf{X}_j$  e  $\mathbf{Z}_j$  são matrizes de dimensões  $(n \times p)$  e  $(n \times q)$  conhecidas,  $\boldsymbol{\beta}$  é o vetor  $p$ -dimensional de efeitos fixos,  $\mathbf{b}_j$  o vetor de  $q$ -dimensional de efeitos aleatórios e  $\boldsymbol{\epsilon}_i$  é um vetor de componentes residuais de dimensão  $n$ . Então com  $\mathbf{b}_j \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{G})$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}_i \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{R})$  e  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_q, \boldsymbol{\epsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\epsilon}_n$  independentes, finalmente,  $\mathbf{G}$  é uma matriz de covariância geral  $(q \times q)$  e  $\mathbf{R}$  é uma matriz de covariância positiva definida  $(n \times n)$  (VERBEKE, 1997; ARIYO *et al.*, 2020; JI; SHI, 2020; SHEN; LIU, 2020).

Os dados longitudinais geralmente são desbalanceados, no sentido de que não há um número igual de medições para todas as unidades experimentais. Diante disso, a alternativa natural surge da observação de que perfis longitudinais específicos do sujeito podem frequentemente ser bem aproximados por funções de regressão linear. Assim, pode-se reduzir o vetor de medições repetidas de uma unidade experimental por um vetor de um número relativamente pequeno de coeficientes de regressão específicos da unidade experimental. Estes coeficientes podem ser usados para representar a relação com as covariáveis, como tratamento, classificação da doença e assim por diante (VERBEKE, 1997; PINHEIRO; BATES, 2006; VERBEKE; MOLENBERGHS; RIZOPOULOS, 2010).

## 3 Inferência Bayesiana em modelos mistos

A estimação Bayesiana é um processo que é conhecida na inferência como o problema de inferir conhecimento sobre parâmetros não observáveis a partir do resultado de um experimento e de informação de especialista. Além disso, o procedimento de estimação tem como objetivo reunir informações sobre  $\theta$  dado os dados de algum experimento, cuja função de densidade de probabilidade  $\theta$  é  $p(\mathbf{y}|\theta)$ . Em Inferência Bayesiana, o vetor de parâmetros é aleatório, e assume uma função de densidade *a priori*  $p(\theta)$  que deve ser especificada cuidadosamente, e abrange tudo o que é conhecido e desconhecido a respeito aos parâmetros, antes de observar os resultados de um experimento.

Na abordagem Bayesiana, é necessária a especificação de dois fatores importantes: as distribuições *a priori* que denomina-se por ser a distribuição de probabilidades dos parâmetros antes da observação amostral ou experimental, e a função de verossimilhança que fornece a informação dos dados observados. A inferência Bayesiana de modelos mistos deve ser realizada usando métodos computacionais, como o algoritmo de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC), para amostrar a distribuição *posterior* dos parâmetros. Os resultados da análise incluem as estimativas dos parâmetros e suas incertezas, bem como medidas de adequação do modelo, tais como a probabilidade posterior preditiva (KNILL; RICHARDS, 1996; WAKEFIELD, 2013; BASU, 2016; BOLSTAD; CURRAN, 2016; WANG; YUE; FARAWAY, 2018).

### 3.1 Distribuição *a priori*

A distribuição *a priori* muitas vezes é descrito como a “crença” que se tem sobre os parâmetros que se está analisando em qualquer área de investigação. A distribuição *a priori* é uma parte fundamental da inferência bayesiana e representa a informação sobre um parâmetro incerto que é combinado com a distribuição de probabilidade dos dados (verossimilhança), para produzir a distribuição *a posteriori*. (CARLIN; LOUIS, 2008; BOOTH, 2010; LESAFFRE; LAWSON, 2012b; BERRY; STANGL, 2018).

A distribuição *priori* informativa é utilizada quando se têm algum conhecimento a respeito do parâmetro desconhecido  $\theta$ . Portanto esse conhecimento é utilizado para estabelecer a função densidade ou de probabilidade  $p(\theta)$ . Além disso, é especificada com o auxílio de constantes denominados hiperparâmetros da distribuição *a priori*, que geralmente, são considerados como

conhecidos, traduzindo a informação que se tem sobre o parâmetro (BOOTH, 2010; LESAFFRE; LAWSON, 2012b; FALCONER *et al.*, 2022).

Por outro lado, a *priori* não informativa é utilizada quando não se possui ou se tem pouca informação sobre o experimento em estudo, portanto todas as informações vem das observações do experimento e tem-se pouco ou nenhum conhecimento sobre o parâmetro desconhecido  $\theta$ , sendo dominante a informação provinda da verossimilhança (GHOSAL; GHOSH; RAMAMOORTHY, 1997; BOOTH, 2010; LESAFFRE; LAWSON, 2012b; STONE, 2013; SHEMYAKIN, 2014).

Na Inferência Bayesiana é de fundamental importância o conhecimento prévio sobre o comportamento da distribuição do parâmetro  $\theta$ . A partir da especificação da *priori* e a combinação desta distribuição *a priori* ( $p(\theta)$ ) e a função de verossimilhança, a distribuição *a posteriori* ( $p(\theta|\mathbf{y})$ ) é o resultado diretamente da aplicação do Teorema de Bayes ou seja, a distribuição do parâmetro  $\theta$  dadas as observações amostrais  $\mathbf{y}$  (ROUDER; LU, 2005; GHOSH; DELAMPADY; SAMANTA, 2006).

## 3.2 Distribuição *a posteriori*

De forma geral, considere o vetor de observações  $\mathbf{y}$  cuja distribuição de probabilidade  $f_Y(\mathbf{y}|\theta)$  depende dos valores dos parâmetros  $\theta$  e suponha que  $\theta$  tenha uma distribuição de probabilidade  $p(\theta)$ . Dado os dados observados  $\mathbf{y}$ , a distribuição condicional de  $\theta$  é: (BOX; TIAO, 2011; BOLSTAD; CURRAN, 2016; RANGANATHAN; NAKAI; SCHONBACH, 2018)

$$p(\theta|\mathbf{y}) = \frac{L(\theta|\mathbf{y})p(\theta)}{f_Y(\mathbf{y})} \quad (3.1)$$

em que  $L(\theta|\mathbf{y})$  é a função de verossimilhança de  $\theta$  e  $f_Y(\mathbf{y}) = \int_{\Theta} p(\theta)L(\theta|\mathbf{y})d\theta$  é uma expressão constante em relação a  $\theta$ , e na maioria dos casos não é possível obter analiticamente. Um recurso utilizado para determinar a distribuição *a posteriori* a partir da proporcionalidade, desde que  $f_Y(\mathbf{y})$  não dependa de  $\theta$ , é estabelecido da seguinte forma:

$$p(\theta|\mathbf{y}) \propto L(\theta|\mathbf{y})p(\theta) \quad (3.2)$$

Na maioria das situações, visto que calcular a distribuição *a posteriori* não é simples, mesmo quando se recorre à proporcionalidade, torna-se essencial recorrer a abordagens numéricas computacionais. Um desses enfoques é o MCMC, que viabiliza a obtenção de amostras da distribuição *a posteriori* descrito a seguir.

### 3.3 Métodos de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC)

Nesta seção serão detalhados os algoritmos dos Métodos de Monte Carlo via cadeias de Markov (MCMC) e os dois mais utilizados na inferência Bayesiana, que ajudam na obtenção das distribuições *a posteriori*, são: o algoritmo de Metropolis-Hastings e o Amostrador de Gibbs (METROPOLIS *et al.*, 1953a; HASTINGS, 1970a; GEMAN; GEMAN, 1984; GAMERMAN; LOPES, 2006; CARLIN; LOUIS, 2008; ROBERT; CASELLA; CASELLA, 2010).

#### 3.3.1 Metropolis-Hastings

Em inferência Bayesiana é comum utilizar algoritmos para obter observações da distribuição *a posteriori*, e o algoritmo de Metropolis-Hastings baseia-se na ideia dos métodos de rejeição, os quais é gerado um valor de uma distribuição auxiliar e aceito com uma dada probabilidade formando uma cadeia. Este mecanismo de correção garante a convergência da cadeia para a distribuição de equilíbrio, que neste caso é a distribuição *a posteriori*.

Suponha que a cadeia esteja no estado  $\theta$  e um valor  $\theta'$  é gerado de uma distribuição proposta  $g(\cdot|\theta)$ . A distribuição proposta depende do estado atual da cadeia, o processo inicia com um valor inicial arbitrário  $\theta^0$ . As próximas iterações serão obtidas a partir da equação a seguir, o novo valor  $\theta'$  é aceito com probabilidade;

$$\alpha(\theta, \theta') = \min \left( 1, \frac{p(\theta')g(\theta|\theta')}{p(\theta)g(\theta'|\theta)} \right) \quad (3.3)$$

em que  $p$  é a distribuição de interesse. O Metropolis-Hastings é fundamental para os casos onde as funções das distribuições condicionais completas não aparentam forma conhecida e portanto precisa do auxílio de uma distribuição envelope ou proposta (ROBERT *et al.*, 2004; GAMERMAN; LOPES, 2006; ROBERT; CASELLA; CASELLA, 2010; NEAL *et al.*, 2011; YILDIRIM, 2012).

Assim, o algoritmo de Metropolis-Hastings é especificado nos seguintes passos:

Tabela 1 – Passos do algoritmo Metropolis-Hastings

- 
1. Iniciar o contador das iterações  $r = 0$  especificando um valor inicial  $\theta^{(0)}$
  2. Gerar um novo valor  $\theta'$  da distribuição  $g(\cdot|\theta^{(r)})$
  3. Calcular a probabilidade de aceitação  $\alpha(\theta^{(r)}, \theta')$  e gere  $w \sim U(0, 1)$
  4. Se  $w \leq \alpha$  aceitar o novo valor e fazer  $\theta^{(r+1)} = \theta'$ , caso contrário rejeitar e fazer  $\theta^{(r+1)} = \theta^{(r)}$ .
  5. Incrementar o contador de  $r$  para  $r + 1$  e voltar ao passo 2.
- 

Os passos acima devem ser repetidos até obter um número grande de observações da distribuição *a posteriori* ou até garantir a convergência. Uma medida utilizada para avaliar o

desempenho deste algoritmo é a taxa de aceitação que é a proporção de vezes que o algoritmo aceita as amostras candidatas propostas em relação ao número total de vezes que as amostras foram geradas.

### 3.3.2 Amostrador de Gibbs

Outro método para obtenção da distribuição *a posteriori* muito utilizado em Inferência Bayesiana é o amostrador de Gibbs, que da mesma forma que o algoritmo Metropolis-Hastings é caracterizado como um tipo de passeio aleatório por todo o espaço paramétrico. A sequência ou passeio começa em algum ponto arbitrário e, o próximo passo depende apenas da posição atual e de nenhuma posição anterior. Portanto, a amostragem de Gibbs é outro exemplo de um processo Monte Carlo da cadeia de Markov em que cada ponto da cadeia, cada parâmetro é gerado a partir da distribuições condicionais dependentes de outros parâmetros e dos seus valores gerados (GEMAN; GEMAN, 1984; GELFAND; SMITH, 1990; GAMERMAN; LOPES, 2006).

Pode-se considerar que o amostrador de Gibbs, através de ferramentas computacionais, torna um problema multivariado numa sequência de problemas univariados, sendo assim uma vantagem muito importante. A amostragem de Gibbs fornece um esquema de geração alternativo baseado em gerações sucessivas das distribuições condicionais de forma conhecida como descrito na Tabela 2.

Tabela 2 – Passos do algoritmo de amostrador de Gibbs

---

1. Definem-se os valores iniciais $\boldsymbol{\theta}^{(0)} = (\theta_1^{(0)}, \dots, \theta_d^{(0)})'$
2. Iniciar o contador de iteração da cadeia com $r = 1$
3. Obter novo valor $\boldsymbol{\theta}^{(r)} = (\theta_1^{(r)}, \dots, \theta_d^{(r)})'$ de $\boldsymbol{\theta}^{(r-1)}$ através da geração sucessiva de valores
$\theta_1^{(r)} \sim \pi(\theta_1   \theta_2^{(r-1)}, \theta_3^{(r-1)}, \theta_4^{(r-1)}, \dots, \theta_d^{(r-1)})$
$\theta_2^{(r)} \sim \pi(\theta_2   \theta_1^{(r)}, \theta_3^{(r-1)}, \theta_4^{(r-1)}, \dots, \theta_d^{(r-1)})$
$\theta_3^{(r)} \sim \pi(\theta_3   \theta_1^{(r)}, \theta_2^{(r)}, \theta_4^{(r-1)}, \dots, \theta_d^{(r-1)})$
$\vdots$
$\theta_d^{(r)} \sim \pi(\theta_d   \theta_1^{(r)}, \theta_2^{(r)}, \theta_3^{(r)}, \theta_4^{(r)}, \dots, \theta_{d-1}^{(r)})$
4. Incrementar o contador $r$ para $r + 1$ e retorne ao passo 3 até que a convergência seja alcançada.

---

Fonte: Do autor. Nota:  $\theta^{(r)}$ : r-ésima iteração,  $d$ : dimensão dos parâmetros

O conjunto de  $r$  valores amostrais armazenados em  $\boldsymbol{\theta}^{(r)}$  representa a distribuição conjunta *a posteriori*. Conforme aumenta o número de iterações, a cadeia se aproxima de sua condição de equilíbrio (CASELLA; GEORGE, 1992; GAMERMAN; LOPES, 2006).



## 3.4 Distribuição normal multivariada e Wishart invertida

Nesta seção descrevem-se as distribuições consideradas neste estudo para a modelagem de modelos mistos. As distribuições Normal multivariada, Wishart-invertida são utilizadas nas distribuições *a priori* e *a posteriori*, na inferência Bayesiana.

### 3.4.1 Distribuição normal multivariada

Nos estudos realizados em análise multivariada é comum que os pesquisadores assumam que os vetores aleatórios sigam uma distribuição normal multivariada devido à facilidade na inferência dos parâmetros (STEIN, 1981; POURAHMADI, 2000; TONG, 2012; FOUEDJIO *et al.*, 2021).

Primeiramente, define-se a distribuição normal univariada para a variável aleatória  $Y$  com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , com função densidade de probabilidade dada a seguir

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(y - \mu)^2}{\sigma^2}\right\} \quad (3.4)$$

para  $-\infty < y < \infty$ ,  $-\infty < \mu < \infty$ , e  $\sigma^2 > 0$ .

A distribuição normal multivariada pode ser derivada substituindo a fórmula da distância quadrada de Mahalanobis na fórmula univariada e normalizando a distribuição de modo que a probabilidade total da distribuição seja 1. Como segue a densidade normal  $p$  – dimensional para o vetor de variável aleatória  $p$ -dimensional  $\mathbf{y}' = [y_1, y_2, \dots, y_p]$  tem a forma

$$f(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\mathbf{R}|^{1/2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})\right\} \quad (3.5)$$

para  $-\infty < \mathbf{y} < \infty$ ,  $-\infty < \boldsymbol{\mu} < \infty$ , e  $\mathbf{R}$  é uma matriz positiva definida. A  $\mathbf{R}_{p \times p}$  é a matriz de variância-covariância e o termo  $(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})$  é conhecido como distância ao quadrado de Mahalanobis.

Um caso especial é a normal bivariada descrita a seguir (DO, 2008; TONG, 2012). Considera-se que  $Y_1$  e  $Y_2$  sejam duas variáveis com parâmetros  $E(Y_1) = \mu_1$ ,  $E(Y_2) = \mu_2$ ,  $V(Y_1) = \sigma_{11}$ ,  $V(Y_2) = \sigma_{22}$  e  $\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}}} = Corr(Y_1, Y_2)$ . A matriz de covariância é dada

$$\text{por: } \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

$$\text{e sua inversa é, } \mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2} \begin{bmatrix} \sigma_{22} & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{21} & \sigma_{11} \end{bmatrix}$$

Fazendo  $\sigma_{12} = \rho_{12}\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}}$ , obtém-se  $|\mathbf{R}| = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 = \sigma_{11}\sigma_{22}(1 - \rho_{12}^2)$  tem-se que a

expressão dada como a distância generalizada é:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma_{11}\sigma_{22}(1-\rho_{12}^2)} \begin{bmatrix} Y_1 - \mu_1 & Y_2 - \mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{22} & -\rho_{12}\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}} \\ -\rho_{12}\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}} & \sigma_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 - \mu_1 \\ Y_2 - \mu_2 \end{bmatrix} = \\ & = \frac{1}{1-\rho_{12}^2} \left[ \left( \frac{Y_1 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} \right)^2 + \left( \frac{Y_2 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} \right)^2 - 2\rho_{12} \left( \frac{Y_1 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} \right) \left( \frac{Y_2 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} \right) \right] \end{aligned}$$

Desde que,  $|\mathbf{R}| = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 = (1 - \rho_{12}^2)$ , pode-se substituir  $\mathbf{R}^{-1}$  e  $|\mathbf{R}|$  na equação (3.5) para se ter a expressão da densidade normal bivariada,

$$\begin{aligned} f(Y_1, Y_2) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}(1-\rho_{12}^2)}} \times \\ & \exp \left\{ \frac{-1}{1-\rho_{12}^2} \left[ \left( \frac{Y_1 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} \right)^2 + \left( \frac{Y_2 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} \right)^2 - 2\rho_{12} \left( \frac{Y_1 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} \right) \left( \frac{Y_2 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

### 3.4.2 Distribuição Wishart e Wishart-invertida

A distribuição Wishart é uma generalização matricial da distribuição qui-quadrado e pertence à família de distribuições definidas sobre matrizes aleatórias simétricas e positivas definidas. Essas distribuições são de grande importância na estimação de matrizes de covariância na estatística multivariada, pois na inferência Bayesiana é comum a suposição de que os dados seguem uma distribuição normal multivariada (LETAC; MASSAM, 2004; ADHIKARI, 2010; RÁCZ; RICHEY, 2019; OUIMET, 2022).

**Definição 3.1.** *Suponha que  $Y$  é uma matriz de  $v \times p$ , com cada linha vindo independentemente de uma distribuição normal  $p$ -variada com média  $\mathbf{0}$  e variância  $\mathbf{R}$ .*

$$\mathbf{y}_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{ip}) \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{R}), i = 1, \dots, v$$

A distribuição Wishart é a distribuição de probabilidade de uma matriz aleatória  $\mathbf{A} = \mathbf{Y}^T \mathbf{Y}$ , também conhecida como matriz de dispersão

$$\mathbf{A} \sim W_p(\mathbf{R}, v)$$

em que  $\mathbf{R}$  é a matriz de escala,  $\mathbf{R} > 0$  e  $s$  representa os graus de liberdade,  $v > 0$ .

#### Função de densidade de probabilidade

Se  $\mathbf{A}$  uma matriz simétrica  $p \times p$ , aleatória e positiva definida. Seja  $\mathbf{R}$  uma matriz constante também positiva definida de dimensão  $p \times p$ . Quando  $v \geq p$  (corolário 3.1),  $\mathbf{A}$  tem

uma distribuição Wishart com matriz de escala  $\mathbf{R}$  e  $v$  graus de liberdade, dada por (ADHIKARI, 2010; RÁCZ; RICHEY, 2019; OUIMET, 2022).

$$f(\mathbf{A}) = \frac{|\mathbf{A}|^{\frac{k-p-1}{2}} \exp\left[-\frac{\text{tr}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A})}{2}\right]}{2^{\frac{vp}{2}} |\mathbf{R}|^{\frac{v}{2}} \Gamma_p\left(\frac{v}{2}\right)} \quad (3.7)$$

em que  $|\mathbf{A}|$  e  $|\mathbf{R}|$  são os determinantes de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{R}$  respectivamente e  $\Gamma_p(\cdot)$  é a função gama multivariada definida como

$$\Gamma_p\left(\frac{v}{2}\right) = \pi^{p(p-1)/2} \prod_{j=1}^p \Gamma\left[\frac{n}{2} + \frac{(1-j)}{2}\right] \quad (3.8)$$

**Corolário 3.1.** *O posto (rank) de uma matriz  $\phi_{k \times p}$  é o mínimo entre  $v$  e  $p$ , ou seja,  $r(\phi) \leq \min(v, p)$ . Assim, lembre que  $r(\phi^T \mathbf{X}) = \min(r(\phi^t), r(\phi)) \leq \min(v, p)$ . Se  $v < p$ , então  $r(\mathbf{A}) < p$ . Logo, a matriz  $\mathbf{A}$  não terá posto completo e, portanto, será singular (não invertível).*

A esperança e variância da matriz  $\mathbf{A}_{p \times p}$  com distribuição Wishart são

$$E(\mathbf{A}) = E(\phi^T \phi) = \sum_{i=1}^v E(\phi_i \phi_i^T) = v\mathbf{R}$$

$$\text{Var}(\mathbf{A})_{ij} = k(R_{ij}^2 + R_{ii}R_{jj})$$

Com  $i, j = 1, \dots, p$  e  $R_{ij}$  representando o elemento da linha  $i$  e coluna  $j$  da matriz  $\mathbf{R}$ .

A distribuição Wishart-invertida é a generalização multivariada da distribuição Gama-invertida. Se  $\mathbf{A}$  é uma matriz que segue a distribuição Wishart, então sua inversa,  $\mathbf{A}^{-1}$  segue a distribuição Wishart-invertida. Esta distribuição é a *a priori* natural para a matriz de covariância quando os dados seguem uma distribuição multivariada normal (JUNIOR *et al.*, 2019; HOLGERSSON; PIELASZKIEWICZ, 2020).

**Função de densidade de probabilidade** Se  $\mathbf{A} \sim W_p(\mathbf{R}, v)$ , em que  $\mathbf{R} > 0$  e  $v \geq p$ , então  $\mathbf{U} = \mathbf{A}^{-1}$  segue a distribuição Wishart-invertida  $IW_p(\Psi \mathbf{U}^{-1})$ , sendo  $\Psi = \mathbf{R}^{-1}$ , a sua função de densidade é dada por:

$$g(\mathbf{U}) = \frac{|\mathbf{U}|^{-\frac{v+p+1}{2}} \exp\left[-\frac{\text{tr}(\Psi \mathbf{U}^{-1})}{2}\right]}{2^{\frac{vp}{2}} |\Psi|^{-\frac{v}{2}} \Gamma_p\left(\frac{v}{2}\right)} \quad (3.9)$$

Com esperança e variância dadas por

$$E(\mathbf{U}) = \frac{\Psi}{v - p - 1}$$

$$\text{Var}(\sigma_{ii}) = \frac{2\psi_{ii}^2}{(v - p - 1)^2(v - p - 3)}, v - p > 3$$

$$\text{Var}(\sigma_{ij}) = \frac{\psi_{ii}\psi_{jj} + \frac{v-p+1}{v-p-1}\psi_{ij}^2}{(v-p)(v-p-1)(v-p-3)}$$

em que  $\psi_{ij}$  é o elemento  $ij$  da matriz  $\Psi$ .

### 3.5 Estimação dos parâmetros

O modelo linear de efeitos mistos Bayesiano é obtido quando as distribuições *a priori* são especificadas para cada um dos parâmetros do modelo expresso em (3.10):

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{X}_j\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_1\mathbf{b} + \mathbf{Z}_2\boldsymbol{\delta} + \mathbf{e}_j \quad (3.10)$$

em que  $\mathbf{b}$  e  $\boldsymbol{\delta}$  são efeitos aleatórios em cães e dias distribuídos com  $\mathbf{b} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{G}_b)$ ,  $\boldsymbol{\delta} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{G}_\delta)$  e  $\mathbf{e}_j \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{R})$ ,  $\mathbf{R}$  é uma matriz de covariância positiva definida de dimensão  $(n \times n)$  definida como  $\mathbf{R} = \sigma_\epsilon^2 \mathbf{I}_n$ . Finalmente  $\mathbf{b}$  e  $\boldsymbol{\delta}$  e  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  independentes.

O modelo na Equação (3.10) é conhecido como modelo linear misto Bayesiano a qual combina a estrutura de efeitos fixos  $\boldsymbol{\beta}$  com efeitos aleatórios específico  $\mathbf{b}$  e  $\boldsymbol{\delta}$ . Dessa forma a inferência busca estimar os coeficientes de regressão  $\boldsymbol{\beta}$ , os coeficientes específicos das unidades experimentais  $\mathbf{b}$  e nos dias  $\boldsymbol{\delta}$  e os componentes de variância desconhecidos  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{G}$ .

No modelo misto para dados longitudinais, denotam-se as respostas coletadas por  $\mathbf{y}_j$  e os valores das covariáveis obtidas pela matriz  $\mathbf{X}_j$ . A distribuição do vetor  $\mathbf{y}_j$  de respostas condicionados aos coeficientes de regressão específicos do indivíduo  $j$ , é normal multivariada com vetor de médias iguais a  $\mathbf{X}_j\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_1\mathbf{b} + \mathbf{Z}_2\boldsymbol{\delta}$  e matriz de covariância  $\mathbf{R}$ . Além disso, as distribuições marginais de  $\mathbf{b}$  e  $\boldsymbol{\delta}$  são normal multivariada com vetor de médias  $\mathbf{0}$  e matriz de covariância  $\mathbf{G}$ . Na inferência Bayesiana, uma vez que os valores observados para  $\mathbf{y}_j$  tenham sido coletados, a chamada distribuição *a posteriori* de  $\mathbf{b}$  e  $\boldsymbol{\delta}$ , condicionada a  $\mathbf{y}_j$ , pode ser calculada. Se denotarmos a função de densidade de  $\mathbf{y}_j$  condicional em  $\mathbf{b}$  e  $\boldsymbol{\delta}$ , e a função de densidade *a priori* de  $\mathbf{b}$  e  $\boldsymbol{\delta}$  por  $f(\mathbf{y}_j|\mathbf{b}, \boldsymbol{\delta})$  e  $f(\mathbf{b}, \boldsymbol{\delta})$ , respectivamente, temos que a densidade *a posteriori* de  $\mathbf{b}$  e  $\boldsymbol{\delta}$  dada  $\mathbf{y}_j$  é dada por (MOLENBERGHS; VERBEKE, 2000)

$$f(\mathbf{b}_i, \boldsymbol{\delta}_k|\mathbf{y}_j) = \frac{L(\mathbf{b}, \boldsymbol{\delta}|\mathbf{y}_j)f(\mathbf{b}, \boldsymbol{\delta})}{\int f(\mathbf{b}, \boldsymbol{\delta}|\mathbf{y}_j)f(\mathbf{b}, \boldsymbol{\delta})d(\mathbf{b}, \boldsymbol{\delta})} \quad (3.11)$$

Devido à complexidade da obtenção da distribuição *a posteriori* em modelos lineares mistos na maioria dos casos, ela é geralmente aproximada por meio de métodos MCMC. (METROPOLIS *et al.*, 1953b; HASTINGS, 1970b; BESAG, 1994; PLUMMER *et al.*, 2006; ROBERTH, 2007; NTZOUFRAS, 2011; STONE, 2013).

#### Estimação de distribuição Marginal

Nesta etapa, considera-se uma distribuição Normal para cada efeito aleatório de cada participante, sendo considerada uma distribuição marginal. Formalmente, para  $j$ -ésimo indivíduo

tem-se uma distribuição normal com média  $\mathbf{X}_j\boldsymbol{\beta}$  e matriz de variâncias  $\mathbf{V}_j(\boldsymbol{\theta})$ , em que  $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}, \sigma_\epsilon^2, \mathbf{G}_j, \mathbf{G}_k, \mathbf{b}, \boldsymbol{\delta})$  representa o vetor dos parâmetros desconhecidos das matrizes de variâncias e covariâncias  $\mathbf{G}_j$ ,  $\mathbf{G}_k$  e  $\mathbf{R}$  que são os componentes de variância (VERBEKE, 1997; GRAFAREND; AWANGE, 2012).

A função de densidade marginal de  $\mathbf{y}_j$  é dada por:

$$f(\mathbf{y}_j|\boldsymbol{\beta}, \sigma_\epsilon^2, \mathbf{G}_j, \mathbf{G}_k) = \int f(\mathbf{y}_j|\boldsymbol{\beta}, \sigma_\epsilon^2, \mathbf{b}_j, \boldsymbol{\delta})f(\mathbf{b}, \boldsymbol{\delta}|\mathbf{G}_j, \mathbf{G}_k)d(\mathbf{b}, \boldsymbol{\delta}) \quad (3.12)$$

em que  $f(\mathbf{y}_j|\mathbf{b}, \boldsymbol{\delta})$  e  $f(\mathbf{b}, \boldsymbol{\delta})$  são funções de densidade normal de  $\mathbf{y}_j$  e de efeitos aleatórios respectivamente,

A expressão em (3.12) é uma distribuição normal multivariada dada por:

$$\mathbf{y}_j \sim N_{n_j}(\mathbf{X}_j\boldsymbol{\beta}, \mathbf{Z}_j\mathbf{G}\mathbf{Z}_j^T + \mathbf{R}_j), \quad (j = 1, \dots, J) \quad (3.13)$$

em que  $\mathbf{G}$  representa às duas matrizes  $\mathbf{G}_j$  e  $\mathbf{G}_k$ .

Dessa forma, a verossimilhança associada ao modelo é dada por:

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) = \prod_{j=1}^J \left\{ (2\pi)^{-\frac{J}{2}} |\mathbf{V}_j|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{y}_j - \mathbf{X}_j\boldsymbol{\beta})' \mathbf{V}_j^{-1} (\mathbf{y}_j - \mathbf{X}_j\boldsymbol{\beta}) \right] \right\} \quad (3.14)$$

A estimação de  $\boldsymbol{\theta}$  requer a maximização conjunta dada na equação (3.14) com relação aos seus elementos.

Assumindo os componentes de variância em  $\boldsymbol{\theta}$  conhecidos, o estimador de máxima verossimilhança de  $\boldsymbol{\beta}$ , que coincide com o estimador obtido pelo método dos mínimos quadrados generalizados, é dado por (VERBEKE, 1997; MCCULLOCH; SEARLE, 2001)

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left( \sum_{j=1}^J \mathbf{X}_j' \mathbf{V}_j^{-1} \mathbf{X}_j \right)^{-1} \sum_{j=1}^J \mathbf{X}_j' \mathbf{V}_j^{-1} \mathbf{y}_j \quad (3.15)$$

Condicionado a  $\boldsymbol{\theta}$ , tem-se que  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  segue uma distribuição normal multivariada (VERBEKE, 1997; MOLENBERGHS; VERBEKE, 2000).

O LMM Bayesiano é obtido quando as distribuições *a priori* são dadas para todos os parâmetros do modelo. No presente estudo a escolhas para as *prioris* foram  $\boldsymbol{\beta} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\tau})$ ,  $\mathbf{G} \sim IW_p(\Psi, \nu)$  e  $\boldsymbol{\tau} \sim \Gamma(r_0, \delta_0)$ , em que  $\boldsymbol{\tau}$  é a precisão  $\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\sigma^2}$ , ou  $\sigma^2 \sim \text{Gama Inversa}(a, b)$ .

Para a obtenção da distribuição *a posteriori*, além das distribuições *a priori* é necessário a definição da função de verossimilhança dada pela equação (3.14). Assim a distribuição *a posteriori* apresenta uma expressão em que analiticamente não têm uma solução trivial para a obtenção das distribuições marginais dos parâmetros. Portanto para obter distribuição *a posteriori* é necessário

a utilização de métodos MCMC para estimar os parâmetros do modelo, como amostragem de Gibbs ou algoritmo de Metropolis-Hastings (GAMERMAN, 1996; LESAFFRE; LAWSON, 2012a).

O ajuste dos modelos aos dados foram realizados com o *software* JAGS de Plummer (2012), Zhan *et al.* (2019) pela interface do pacote R `jags` e `Rjags` de Su e Yajima (2018), Inglis *et al.* (2018) do *software* estatístico R R CORE TEAM (2022). O JAGS é um software para análise estatística de modelos hierárquicos bayesianos, e usa o amostrador Gibbs, em que permite a construção das cadeias de Markov para estimar os parâmetros do modelo (ZHAN *et al.*, 2019).

### 3.6 Diagnóstico de convergência

Ao verificar a convergência de uma cadeia existem vários métodos formais e informais. Os métodos formais abordados para a verificação da convergência são: Geweke, Heidelberger e Welch, Raftery e Lewis e Gelman-Rubin (HEIDELBERGER; WELCH, 1983; GELMAN; RUBIN, 1992; GEWEKE, 1992; RAFTERY; LEWIS, 1992).

#### 1. Critério de Geweke

É um método proposto com a finalidade de comparar a média dos valores amostrados da distribuição *a posteriori*  $\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(r)}$ . Com esse intuito a cadeia é dividida em duas partes, e compara-se a média das primeiras iterações com a média das últimas iterações. Para garantir que essas duas médias sejam aproximadamente independentes, este método exige um número suficiente de iterações entre as duas amostras de iterações, por padrão são os primeiros 10% e os últimos 50% como ilustrado na Figura 1. Se as amostras forem extraídas de uma distribuição estacionária da cadeia, então as duas médias são iguais e a estatística de Geweke tem uma distribuição assintoticamente normal padrão, veja a ilustração a seguir (GEWEKE, 1992; GELMAN *et al.*, 1995; GAMERMAN, 1996)

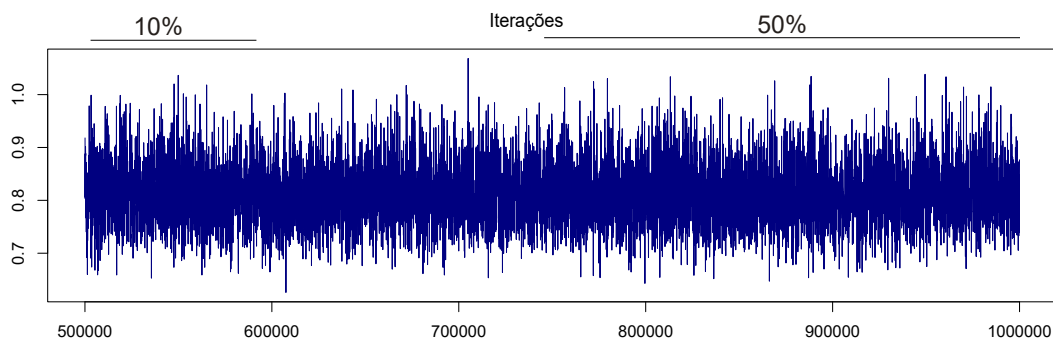


Figura 1 – Representação da análise de convergência no gráfico de traço

D a Figura (1) as duas Cadeias de Markov extraídas  $\{\theta_1^{(r)} : r = 1, 2, 3, \dots, n_1\}$  e  $\{\theta_2^{(r)} : r = n_a, \dots, n\}$  referente à primeira e a última parte das iterações, em que  $1 <$

$n_1 < n_a < n$ . As médias das duas cadeias são:

$$\bar{\theta}_1 = \frac{\sum_{r=1}^{n_1} \theta^{(r)}}{n_1} \quad \text{e} \quad \bar{\theta}_2 = \frac{\sum_{r=n_a}^n \theta^{(r)}}{n_2}$$

em que  $n_2 = n - n_a + 1$  e as variâncias estimadas  $s_1^2$  e  $s_2^2$ . A estatística do teste é dada por:

$$Z = \frac{\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \quad (3.16)$$

O seguinte método produz uma estatística  $Z$  que representa a diferença entre as duas médias dividida pelo erro padrão de sua diferença. À medida que o número de iterações se aproxima ao infinito, a estatística  $Z$  se aproxima de  $N(0, 1)$  obtendo-se a convergência da cadeia. (GELMAN *et al.*, 1995; GAMERMAN, 1996; NOGUEIRA *et al.*, 2003)

## 2. Heidelberger e Welch

O método de Heidelberger e Welch conhecido como o teste de estacionaridade, é baseado na teoria da ponte browniana e usa a estatística Cramer-von-Mises. Se houver evidência de não-estacionaridade, o teste é repetido após descartar os primeiros 10% das iterações. Esse processo continua até que a hipótese nula de estacionaridade não seja rejeitada ou mais de 50% das iterações tenham sido descartadas (HEIDELBERGER; WELCH, 1983; GELMAN *et al.*, 1995; GAMERMAN, 1996).

Caso a hipótese nula é rejeitada é necessária uma execução mais longa do amostrador MCMC para que convergência seja atingida.

## 3. Raftery e Lewis

O critério de Raftery-Lewis avalia a qualidade da cadeia MCMC em termos de três aspectos principais: precisão, acurácia e eficiência e baseia-se num modelo bayesiano. Este método estima a quantidade necessária de iterações até atingir a estacionariedade e o fator de dependência a partir de uma amostra MCMC de entrada. Além disso, é necessário especificar o número de iterações iniciais que devem ser descartadas para assegurar a convergência da cadeia para a distribuição estacionária. (RAFTERY; LEWIS, 1992).

O critério de convergência Raftery-Lewis calcula uma medida denominada de "número efetivo de amostras"(effective sample size - ESS) para cada parâmetro do modelo e representa o número de amostras independentes que seriam necessárias para obter a mesma informação que amostra MCMC gerada. Fatores de dependência próximos a 1,0 indicam a convergência (RAFTERY; LEWIS, 1992; GELMAN *et al.*, 1995; GAMERMAN, 1996).

#### 4. Gelman-Rubin

Este diagnóstico é baseado na análise de múltiplas cadeias comparando os desvios dentro e entre as cadeias. Se os desvios entre as duas cadeias comparadas forem grandes é um indicativo a não convergência. Este critério é usado para avaliar a convergência de cadeias MCMC em métodos de inferência Bayesiana (GELMAN; RUBIN, 1992; GELMAN *et al.*, 1995; GAMERMAN, 1996; BROOKS; GELMAN, 1998).

Considere  $M$  cadeias de tamanho  $n$ , então, existem  $M$  trajetórias  $\{\theta_i^{(1)}, \theta_i^{(2)}, \theta_i^{(3)}, \dots, \theta_i^{(n)}\}$ , para  $i = 1, 2, \dots, M$ . As variâncias entre as cadeias  $B$  e dentro das cadeias  $W$  são dadas por

$$B = \frac{n}{M-1} \sum_{i=1}^M (\bar{\theta}_i - \bar{\theta})^2 \quad \text{e} \quad W = \frac{1}{M(n-1)} \sum_{i=1}^M \sum_{r=1}^n (\theta_i^{(r)} - \bar{\theta}_i)^2 \quad (3.17)$$

em que  $\bar{\theta}_i$  é a média das observações da cadeia  $i$ ,  $i = 1, \dots, M$ , e  $\bar{\theta}$  é a média das médias das cadeias.

Quando as cadeias atingem a convergência, todos esses valores  $Mn$  são extraídos da amostra *a posteriori* e a estimativa da variância *a posteriori* de  $\theta$  é dado por

$$\hat{\sigma}_\theta^2 = \frac{n-1}{n} W + \frac{1}{n} B \quad (3.18)$$

Se as  $M$  cadeias convergem satisfatoriamente, a estimativa  $\hat{\sigma}_\theta^2$  ficará próxima da variância amostral das cadeias  $W$  e a razão  $\frac{\hat{\sigma}_\theta^2}{W}$  será um valor próximo a 1. Se as cadeias ainda não convergiram, então quer dizer que os valores iniciais ainda estarão influenciando as trajetórias.

A variância média dentro das cadeias ( $M$ ) e a variância média entre as cadeias ( $\sigma_\theta^2$ ), pode ser comparadas pelo fator de redução de escala potencial (por suas siglas em ingles PSRF) que é a raiz quadrada da razão dessas duas variâncias dada por  $\hat{R} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_\theta^2}{W}}$ , se as cadeias convergem, então o  $\hat{R}$  deverá estar próximo a 1. Valores maiores que 1 indicam que as cadeias ainda não convergiram e precisam ser executadas um maior número de vezes. O critério de convergência Gelman-Rubin é um dos critérios mais usados para avaliar a convergência de cadeias MCMC em inferência Bayesiana, pois garantem que os resultados sejam confiáveis e precisos (GAMERMAN; LOPES, 2006).

Por fim, o gráfico de Gelman-Rubin é usado para avaliar a convergência de múltiplas cadeias de MCMC em uma análise Bayesiana e plota o fator de escala potencial (PSRF) para cada parâmetro, que é uma estimativa da proporção da variação total na amostra que é devido a variação entre as cadeias (GELMAN; RUBIN, 1992; GELMAN *et al.*, 1995)



### Gráfico de média ergódica

Serão utilizados não apenas métodos formais, mas também métodos informais para verificar a convergência. Entre os métodos informais estão a análise dos gráficos de traço, densidade e média ergódica. A média ergódica representa a média dos valores da cadeia até determinado momento da iteração. Caso essa média ergódica se estabilize após algumas iterações, indica que a convergência foi alcançada. (DUNFORD, 1939; COHEN, 1940; PETERSEN, 1989).

A média ergódica pode ser calculada da seguinte maneira:

$$\bar{f}(y) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r f(\boldsymbol{\theta}^{(i)}y), \quad r = 1, 2, \dots \quad (3.19)$$

À medida que o número de iterações, representado por  $r$ , tende ao infinito, a sequência gerada pelo amostrador de Gibbs converge para uma distribuição estacionária com uma taxa de convergência geométrica.

## 4 Material e Métodos

Neste capítulo apresenta-se a estrutura dos dados referente a um experimento da área de medicina veterinária. Os cães da raça Beagle foram submetidos à aclimação e repouso físico durante 1 hora antes das sessões do exercício de vibração de corpo inteiro (siglas em inglês WBV). As sessões de WBV foram realizadas com o cão em posição quadrupedal em cima de uma plataforma vibratória com aproximadamente 92cm de comprimento, 62cm de largura, 16cm de altura e faixa de frequência de 0-100Hz com duração de 5 minutos, durante 5 dias consecutivos (segunda-feira a sexta-feira) (Figura 2). As temperaturas termográficas das regiões do músculo do bíceps femoral e vasto lateral foram aferidas antes, depois de cada sessão, assim como as informações de ultrassom (SANTOS *et al.*, 2017; SANTOS *et al.*, 2019).



Figura 2 – Estrutura do experimento. Figura criada em <biorender.com> e adaptado de Santos *et al.* (2019) e Santos *et al.* (2017).

**Temperatura Termográfica:** A temperatura é a detecção e visualização da radiação ultravioleta (UV) e da radiação visível próxima ao infravermelho. A radiação infravermelha está no intervalo de onda entre 0,2 e 0,4 micrômetros e compreende a visualização de radiação ultravioleta em faixas de comprimento de onda mais curtas (GAUSSORGUES; CHOMET, 1993; SZENTKUTI; KAVANAGH; GRAZIO, 2011; LAHIRI *et al.*, 2012; IBARRA-CASTANEDO; MALDAGUE, 2013).

**Índice de resistência (IR) do ultrassom** (ondas sonoras- fluxo sanguíneo em uma artéria periférica) É uma técnica de diagnóstico médico que utiliza ondas sonoras de alta frequência gerando imagens bem detalhadas do interior do corpo (humano ou animal), e é amplamente utilizado em diversas áreas da medicina, como radiologia, cardiologia, obstetrícia, etc. O ultrassom funciona emitindo ondas sonoras de alta frequência que penetram nos tecidos do corpo. Além disso, o ultrassom pode ser usado para identificar a presença de tumores, cistos, pedras nos rins, avaliar o fluxo sanguíneo em vasos sanguíneos, guiar procedimentos de biópsia e muito mais. É um exame não invasivo, seguro e geralmente indolor para o paciente (NEWMAN; ROZYCKI, 1998; ESCOFFRE; BOUAKAZ, 2015).

## 4.1 Modelos mistos para temperatura termográfica e a medida de IR do ultrassom

Nesta seção, serão apresentados os modelos lineares mistos destinados à caracterização da temperatura termográfica nos músculos bíceps femoral, vasto lateral e o IR do ultrassom. As variáveis a serem analisadas foram avaliadas nos cães em dois momentos antes e depois da sessão de WBV durante cinco dias da semana (segunda a sexta). No âmbito do modelo 1 tem-se, uma componente aleatória (intercepto aleatório) associada ao cão. Já no modelo 2, tem-se duas componentes aleatórias: uma associada ao cão (intercepto aleatório) e outra dentro dos dias da semana. Além disso, a variável IR do Ultrassom será examinada por meio da diferença entre os momentos (Antes-Depois) devido a sua complexidade nas análises. Assim no modelo 3, a investigação será conduzida sem levar em consideração quaisquer efeitos aleatórios, caracterizando essa análise como uma média geral constante. No modelo 4, os dias serão considerados como um efeito aleatório (bloco aleatório), enquanto os cães serão mantidos como um efeito fixo. Finalmente, no modelo 5, a análise será conduzida considerando os cães como um efeito aleatório, mantendo os dias como um efeito fixo.

A seguir, a formulação matemática de cada modelo utilizado é detalhada a partir do modelo (2.11).

**Modelo 1:** O modelo linear mistos com interceptos aleatórios por cão é obtido adicionando o efeito  $b_{0j}$  referente ao cão  $j$  para o intercepto  $\beta_0$ , que se distribui normalmente com média zero e variância  $\sigma_{b_j}^2$  e os componentes de variação no modelo  $\sigma_e^2$  e  $\sigma_{b_j}^2$ , são considerados independentes e devem ser estimados para  $j = 1, 2, \dots, 10$ . O modelo para a  $i$ -ésima medição da termografia

$Y_{ijm}$  associado ao cão  $j$  no momento  $m$  é expresso a seguir:

$$Y_{ijm} = \beta_0 + b_{0j} + \beta_1 X_{ijm} + e_{ijm} \quad (4.1)$$

em que  $X_{ijm}$  é o momento  $m$  do cão  $j$  na  $i$ -ésima medição, ajustando para a temperatura  $Y_{ijm}$  nas regiões de bíceps femoral e vasto lateral do cão  $j$  para para cada momento  $m$ , em que  $m = 0, 1$  e  $j = 1, \dots, 10$ .

Observe que no modelo na (4.1), a componente  $b_{0j}$  refere-se à adição de variabilidade referente ao cão por meio de  $\sigma_{b_j}^2$ . Como os valores da medição da temperatura variam dependendo no momento  $m$ , acrescentou-se outro efeito aleatório supondo a independência entre os cães. Assim, segue o modelo expresso na equação (4.2).

$$\text{Modelo 1: } Y_{ijm} = \beta_0 + b_{0j} + (\beta_1 + b_{1j})X_{ijm} + e_{ijm}. \quad (4.2)$$

É de grande importância ressaltar que as variações de interceptos e inclinações para cães podem estar correlacionadas e todas essas quantidades aleatórias podem ser consideradas como ajustes para tentar reduzir a magnitude de termo de erro  $e_{ijm}$  (PINHEIRO; BATES, 2000; GELMAN; HILL, 2006).

No modelo na equação (4.2) assumem-se vários componentes de variância, porém não considera-se a correlação entre o intercepto  $b_{0j}$  e a inclinação  $b_{1j}$  do cão  $j$ , ambos aleatórios. Ou seja, as diferentes variações não foram consideradas mutuamente independentes. Este modelo é conhecido como interceptos e inclinações aleatórios, e são valiosos em pesquisas que envolvem experimentos com sujeitos, pois capturam de forma precisa todas as fontes de variação no desenho experimental.

**Modelo 2:** O modelo linear misto com intercepto e inclinação aleatória por dia foi obtido adicionando o seguinte termo  $\delta_{0k}$  juntamente ao termo  $b_{0j}$  no modelo 1 no intercepto  $\beta_0$  para o cão  $j$  e o dia  $k$ , introduzindo a  $\sigma_{b_j}^2$  e  $\sigma_{\delta_k}^2$ , para cão  $j$  e dia  $k$  respectivamente. Além disso considerando a independência de termografia entre os cães, condicionado a um momento, adicionam-se os termos de inclinação aleatória  $b_{1j}$  e  $\delta_{1k}$  ao parâmetro  $\beta_1$ , referente ao cão  $j$  e dia  $k$ .

Esse modelo é expresso a seguir

$$\text{Modelo 2: } Y_{ijmk} = \beta_0 + b_{0j} + \delta_{0k} + (\beta_1 + b_{1j} + \delta_{1k})X_{ijmk} + e_{ijmk} \quad (4.3)$$

em que  $Y_{ijmk}$  é a  $i$ -ésima medição de termografia do cão  $j$  no momento  $m$  e no dia  $k$ ,  $j = 1, 2, \dots, 10$ ,  $m = 0, 1$  e  $k = 1, 2, \dots, 5$ .

Os modelos 1 e 2 serão analisados considerando as diferentes estruturas de variância-covariância apresentadas na seção 2.3.

A partir dos modelos 1 e 2 descritos nas equações (4.2) e (4.3) serão apresentadas as matrizes que representam a covariância entre o intercepto e a inclinação para os efeitos aleatórios  $\mathbf{b}$  e  $\delta$ . Neste caso a diagonal principal da matriz de variância-covariância contém as variâncias dos efeitos aleatórios distintos e as entradas fora da diagonal principal incluem as covariâncias entre os diferentes efeitos aleatórios. A Tabela 3 apresenta as matrizes de variância-covariância analisadas neste estudo (VERBEKE; MOLENBERGHS; VERBEKE, 1997; VERBEKE, 1997; VERBEKE; MOLENBERGHS, 2012).

Tabela 3 – Estruturas de variância e covariância para os efeitos aleatórios dos interceptos e inclinações para os modelos 1 e 2, descritos nas equações (4.2) e (4.3)

Estruturas de variância-covariância	Matriz $\mathbf{G}_b$	Matriz $\mathbf{G}_\delta$
Não estruturado (UN)	$\begin{bmatrix} \sigma_{b_0}^2 & \sigma_{b_0,b_1} \\ \sigma_{b_0,b_1} & \sigma_{b_1}^2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \sigma_{\delta_0}^2 & \sigma_{\delta_0,\delta_1} \\ \sigma_{\delta_0,\delta_1} & \sigma_{\delta_1}^2 \end{bmatrix}$
Componentes de variância (VC)	$\begin{bmatrix} \sigma_{b_0}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{b_1}^2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \sigma_{\delta_0}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\delta_1}^2 \end{bmatrix}$
Simetria composta heterogênea (CSH)	$\begin{bmatrix} \sigma_{b_0}^2 & \rho_b \sigma_{b_0} \sigma_{b_1} \\ \rho_b \sigma_{b_0} \sigma_{b_1} & \sigma_{b_1}^2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \sigma_{\delta_0}^2 & \rho_\delta \sigma_{\delta_0} \sigma_{\delta_1} \\ \rho_\delta \sigma_{\delta_0} \sigma_{\delta_1} & \sigma_{\delta_1}^2 \end{bmatrix}$
Autorregressivo de primeira ordem (AR(1))	$\begin{bmatrix} \sigma^2 & \rho_b \sigma^2 \\ \rho_b \sigma^2 & \sigma^2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \sigma^2 & \rho_\delta \sigma^2 \\ \rho_\delta \sigma^2 & \sigma^2 \end{bmatrix}$
Simetria composta (CS)	$\begin{bmatrix} \sigma_{b_0}^2 + \sigma^2 & \sigma_{b_0} \\ \sigma_{b_0} & \sigma_{b_0}^2 + \sigma^2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \sigma_{\delta_0}^2 + \sigma^2 & \sigma_{\delta_0} \\ \sigma_{\delta_0} & \sigma_{\delta_0}^2 + \sigma^2 \end{bmatrix}$

Dessa forma, assume-se que  $\mathbf{b}_j$  e  $\delta_k$  são normalmente distribuídos com média 0 e com variância e covariância dadas pela matriz  $\mathbf{G}_{b_j}$  com  $b_{0j}$  e  $b_{1j}$  sendo para o caso  $j$  e  $\mathbf{G}_{\delta_k}$  com  $\delta_{0k}$  e  $\delta_{1k}$  para o dia  $k$ , para  $j = 1, 2, \dots, 10$  e  $k = 1, 2, \dots, 5$ . Assim as inclinações e interceptos aleatórios por cães têm uma distribuição normal bivariada:

$$\begin{pmatrix} b_{0j} \\ b_{1j} \end{pmatrix} \sim MVN \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{G}_{b_j} \right]; \begin{pmatrix} \delta_{0k} \\ \delta_{1k} \end{pmatrix} \sim MVN \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{G}_{\delta_k} \right] \quad (4.4)$$

para  $j = 1, 2, \dots, 10$  e  $k = 1, 2, \dots, 5$ , em que  $\mathbf{G}_{b_j}$  e  $\mathbf{G}_{\delta_k}$  são as matrizes de precisão que estão distribuídos com a inversa de Wishart (IW), que é o inverso da matriz de variância-covariância e contém os valores das precisões dos interceptos e inclinações para cada cão e dia, e denotam-se como:  $\tau_{b_{0j}}, \tau_{b_{1j}}$  e  $\tau_{\delta_{0k}}, \tau_{\delta_{1k}}$  respectivamente.

A seguir apresentam-se os modelos mistos para a diferença entre os momentos da termografia e o IR de Ultrassom

## 4.2 Modelos mistos para a diferença da temperatura termográfica entre os momentos antes e depois

Nos modelos mistos a seguir será considerada a diferença das variáveis respostas (termografia e IR do ultrassom) entre os momentos antes e depois do exercício de WBV com o objetivo de avaliar a mudança das variáveis de um momento para outro.

Os modelos propostos para análise deste experimento podem ser:

$$\text{Modelo 3: } = Y_{ijk} = \beta_0 + e_{ijk} \quad (4.5)$$

$$\text{Modelo 4: } = Y_{ijk} = \beta_0 + \beta_j + \delta_k + e_{ijk} \quad (4.6)$$

$$\text{Modelo 5: } = Y_{ijk} = \beta_0 + \beta_k + b_j + e_{ijk} \quad (4.7)$$

No qual,

- $Y_{ijk}$  é o valor de  $i$ -ésima observação da diferença da temperatura termográfica que recebe do cão  $j$  no dia  $k$ ;
- $\beta_0$  é uma constante inerente a todas as observações;
- $\beta_j$  é o efeito do cão  $j$  do fator fixo;
- $\beta_k$  é o efeito do dia  $k$  do fator fixo;
- $\delta_k$  é o efeito aleatório (bloco aleatório) do dia  $k$ ;
- $b_j$  é o efeito aleatório (bloco aleatório) do cão  $j$  e
- $e_{ijk}$  é o erro aleatório associado a observação  $Y_{ijk}$ .

em que  $\delta_k \sim N(0, \sigma_\delta^2)$ ,  $b_j \sim N(0, \sigma_b^2)$  e  $e \sim N(\mathbf{0}, I\sigma^2)$  para  $j = 1, 2, \dots, 10$  e  $k = 1, 2, \dots, 5$

## 4.3 Obtenção da distribuição *a posteriori*

A inferência Bayesiana é o resultado diretamente da aplicação do Teorema de Bayes, a partir da combinação de distribuição *a priori*  $p(\boldsymbol{\theta})$  com a função de verossimilhança dada pela equação (3.14), têm-se a distribuição *a posteriori*:

$$p(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\sigma}^2, \mathbf{G}_j, \mathbf{G}_k, \mathbf{b}_j, \boldsymbol{\delta}_k | \mathbf{y}) \propto p(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\sigma}^2, \mathbf{G}_j, \mathbf{G}_k, \mathbf{b}_j, \boldsymbol{\delta}_k) \times L(\mathbf{y} | \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\sigma}^2, \mathbf{G}_j, \mathbf{G}_k, \mathbf{b}_j, \boldsymbol{\delta}_k) \quad (4.8)$$

Assim os parâmetros dos modelos descritos na seção 4.1 foram estimados através da inferência Bayesiana, cujos hiperparâmetros das *prioris* não informativas são apresentados a

seguir. Nos modelos 1 e 2 têm-se  $\beta = (\beta_0, \beta_1)$  e  $\beta_l \sim N(\mu_0, \tau_0^2)$ ,  $l = 0, 1$ , em que  $\tau_0^2$  é a precisão, sendo igual ao inverso da variância  $\left(\frac{1}{\sigma_0^2}\right)$ , o erro aleatório  $\sigma_e^2 \sim U(0, 00; 10, 00)$ .

Para os modelos 1 e 2 os parâmetros são distribuídos normalmente com média zero e alta variância  $\beta_l \sim N(0, 0000; 1.0 \times 10^{-06})$ , a variância, as precisões  $(\tau_{b_0}, \tau_{b_1})^T \sim \Gamma(1, 50; 5, 00)$ .

A matriz  $G_b$  da Tabela 3 é desconhecida e, portanto, devemos estimá-los através de distribuição *a posteriori* mediante inferência Bayesiana. O parâmetro  $\rho_{b_j}$  indica a correlação entre  $b_{0_j}$  e  $b_{1_j}$  (intercepto e inclinação aleatória por cão); e pode-se prever as diferenças individuais em diferentes momentos de experimento. Os desvios padrões para os interceptos e inclinações aleatórios por cão  $\sigma_{b_{0_j}} = \frac{1}{\sqrt{\tau_{b_{0_j}}}}$ ,  $\sigma_{b_{1_j}} = \frac{1}{\sqrt{\tau_{b_{1_j}}}}$ , em que  $\tau_{b_j}$  é a precisão de interceptos e inclinações aleatórias que são extraídas a partir de uma distribuição gamma  $\tau_{b_j} \sim \Gamma(1, 50; 5, 00)$ , para  $j = 1, \dots, 10$ .

Da mesma forma define-se  $\sigma_{\delta_{0k}}, \sigma_{\delta_{1k}}$  os desvios padrão para os interceptos e inclinações aleatórios por dia  $\sigma_{\delta_{0k}} = \frac{1}{\sqrt{\tau_{\delta_{0k}}}}$ ,  $\sigma_{\delta_{1k}} = \frac{1}{\sqrt{\tau_{\delta_{1k}}}}$ , que também foi extraída a partir de uma distribuição gama  $\tau_{\delta_{0k}} \sim \Gamma(1, 50; 5, 00)$ , em seguida foi definido  $\rho_{\delta_k}$  como a correlação entre  $\delta_{0k}$  e  $\delta_{1k}$ .

Foi utilizado o *software* estatístico R, juntamente com os pacotes R2Jags e Rjags, para realizar o procedimento da estimação por inferência Bayesiana. Foram geradas três cadeias de 500.000 iterações do processo de MCMC, utilizando diferentes estruturas de matrizes de covariância. Para garantir a independência entre as iterações, as primeiras 200.000 iterações foram descartadas como período de *burn-in*. Além disso, um salto de 60 iterações foi aplicado para cada cadeia, resultando em 5.000 valores de amostra na cadeia final.

Os valores para o número de iterações, descarte e saltos foram definidos empiricamente para assegurar a convergência das cadeias. Além disso, a convergência de cada parâmetro foi verificada através de quatro testes formais descritas na seção 3.6 e por meio da inspeção dos comportamentos dos gráficos de densidade e traço dos parâmetros após a fase de descarte (*burn-in*).

Os modelos descritos na seção 4.2 para a diferença da temperatura termografia e o ultrassom, têm-se a distribuição *a posteriori* a seguir:

$$p(\beta, \sigma^2, \mathbf{b}_j, \delta_k | \mathbf{y}) \propto p(\beta, \sigma^2, \mathbf{b}_j, \delta_k) \times L(\mathbf{y} | \beta, \sigma^2, \mathbf{b}_j, \delta_k) \quad (4.9)$$

cujos hiperparâmetros das *prioris* não informativas são apresentadas como segue, no modelo 3: a variável  $Y_{ijk} \sim N(\mu, \tau)$ ,  $\mu \sim N(0, 0; 10 \times 10^{-05})$ ,  $\sigma_e \sim U(0, 00; 100, 00)$  e  $\tau = \frac{1}{\sigma_e^2}$ .

no modelo 4,  $\beta \sim N(\mathbf{d}_0, \mathbf{D}_0)$ ,  $\delta_k \sim N(0, 00; \tau_{\delta_k})$ ,  $\sigma_e \sim U(0, 00; 100, 00)$ ,  $\sigma_{\delta_k} \sim U(0, 00; 100, 00)$ ,  $\tau = \frac{1}{\sigma_e^2}$  e  $\tau_{\delta_k} = \frac{1}{\sigma_{\delta_k}^2}$ , em que  $\mathbf{d}_0 = \mathbf{0}_{10 \times 1}$  e  $\mathbf{D}_0 = \mathbf{I}_{10 \times 10}$ .

e no modelo 5,  $\beta \sim N(\mathbf{d}_0, \mathbf{D}_0)$ ,  $b_j \sim N(0, 00; \tau_{b_j})$ ,  $\sigma_e \sim U(0, 00; 100, 00)$ ,  $\sigma_{b_j} \sim U(0, 00; 100, 00)$ ,  $\tau = \frac{1}{\sigma_e^2}$  e  $\tau_{b_j} = \frac{1}{\sigma_{b_j}^2}$ , em que  $\mathbf{d}_0 = \mathbf{0}_{5 \times 1}$  e  $\mathbf{D}_0 = \mathbf{I}_{5 \times 5}$ .

Foram geradas três cadeias de 250.000 iterações do processo de MCMC. Para garantir a independência entre as iterações, as primeiras 100.000 iterações foram descartadas como período de *burn-in*. Além disso, um salto de 30 iterações foi aplicado para cada cadeia, resultando em 5.000 valores de amostra na cadeia final.

## 4.4 Critério para seleção de modelo

Após estimar os parâmetros, é preciso realizar a seleção do modelo. Quando se trata de descrever dados longitudinais, pode-se estabelecer um conjunto de modelos com diferentes especificações para efeitos fixos, efeitos aleatórios, estrutura de covariância dos efeitos aleatórios. Entretanto, é necessário um ou mais procedimentos de seleção de modelos para encontrar um modelo adequado que explique os dados atuais e futuros por meio de previsão.

Um dos critérios de seleção de modelos Bayesianos é o Fator de Bayes, que pode ser visto como o equivalente Bayesiano do teste da razão de verossimilhança (JEFFREYS, 1961; KASS; RAFTERY, 1995a; CHATTERJEE; BHATTACHARYA, 2020).

Além disso, tem-se o critério de informação de desvio, que é muito utilizado e apresenta-se como uma generalização do Critério de Informação Bayesiano (BIC). Este critério é particularmente usual nos problemas Bayesianos de seleção de modelos para os quais amostras da distribuição *a posteriori* dos parâmetros foram obtidas por simulação de Monte Carlo em Cadeias de Markov (MCMC) (GAMERMAN, 1996; SPIEGELHALTER *et al.*, 2002; CARLO, 2006).

### 4.4.1 Fator de Bayes (FB)

Nesta seção será abordado o teste de hipóteses a partir de uma perspectiva de seleção de modelos, em que as hipóteses nula e alternativa são tratadas como modelos separados. O fator Bayes desempenha um papel essencial na comparação de modelos estatísticos Bayesianos e é a abordagem padrão na inferência bayesiana para testes de hipóteses e escolha de modelos (JEFFREYS, 1961; O'HAGAN; FORSTER, 2004; LEWIS; RAFTERY, 1997; JEFFREYS, 1998).

Considere  $M_1$  e  $M_2$  dois modelos, eles são considerados igualmente prováveis *a priori* quando  $p(M_2) = p(M_1)$ . Usando a definição de probabilidade condicional e sob a suposição de que os modelos são igualmente prováveis, podemos calcular as probabilidades do modelo em relação a outro como (JEFFREYS, 1961; MOREY *et al.*, 2011; TENAN *et al.*, 2014; DOORN *et al.*, 2021; DOORN *et al.*, 2023)



$$\frac{p(M_1|\mathbf{y})}{p(M_2|\mathbf{y})} = \frac{p(\mathbf{y}|M_1) \times p(M_1)}{p(\mathbf{y}|M_2) \times p(M_2)} = \frac{p(\mathbf{y}|M_1)}{p(\mathbf{y}|M_2)} \times \frac{p(M_1)}{p(M_2)} \quad (4.10)$$

tais que  $p(M_m|\mathbf{y})$  é a probabilidade *a posteriori* do modelo  $M_m$  para  $m = 1, 2$ .

O fator Bayes é, portanto, uma medida de evidência relativa, a comparação do desempenho preditivo de um modelo ( $M_1$ ) com outro ( $M_2$ ). Esta comparação ( $BF_{12}$ ) é uma razão de probabilidades marginais:

$$BF_{12} = \frac{p(\mathbf{y}|M_1)}{p(\mathbf{y}|M_2)} \quad (4.11)$$

Pela Equação (4.11) pode-se interpretar o fator Bayes como uma medida do quanto os dados atualizam as probabilidades anteriores de cada modelo. Valores do fator de Bayes menores, indicam que os dados são mais prováveis no modelo  $M_2$  do que no modelo  $M_1$ . Por outro lado o fator Bayes mais alto mostra a maior evidência a favor do modelo  $M_1$  em relação  $M_2$  (JEFFREYS, 1961; JEFFREYS, 1998; MOREY *et al.*, 2011; TENAN *et al.*, 2014; DOORN *et al.*, 2021; DOORN *et al.*, 2023).

A interpretação do fator de Bayes, é apresentado na Tabela 4 a seguir (KASS; RAFTERY, 1995b; JEFFREYS, 1961; JEFFREYS, 1998).

Tabela 4 – Evidências e interpretações para o fator Bayes  $BF_{12}$

Fator de Bayes $BF_{12}$	Interpretação
maior do que 100	Evidência extrema a favor de $M_1$
30-100	Evidência muito forte a favor de $M_1$
10-30	Forte evidência a favor de $M_1$
3 -10	Evidência moderada a favor de $M_1$
1- 3	Evidência fraca a favor de $M_1$
1	Não existe nenhuma evidência
1/3 — 1	Evidência fraca a favor de $M_2$
1/10 — 1/3	Evidência moderada a favor de $M_2$
1/30 – 1/10	Evidência forte a favor de $M_2$
1/100 – 1/30	Evidência muito forte a favor de $M_2$
menor do que 1/100	Evidência extrema a favor de $M_2$

A comparação de dois modelos usando o Fator Bayes pode ser feita por meio das verossimilhanças marginais para cada modelo pois representa a probabilidade dos dados observados dado um modelo específico e é normalmente usado para seleção de modelos (CHIB, 1995; CHICKERING; HECKERMAN, 1997; FRIEL; PETTITT, 2008; METODIEV *et al.*, 2023).

A fórmula para a verossimilhança marginal logarítmica para um modelo  $M_m$  é:

$$\text{Log} [p(\mathbf{y}|M_m)] = \text{Log} \left[ \int_{\Theta} p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}, M_m) p(\boldsymbol{\theta}|M_m) d\boldsymbol{\theta} \right] \quad (4.12)$$

Portanto, o Fator de Bayes foi calculado a partir da fórmula:

$$FB_{12} = e^{\{\text{Log}[p(\mathbf{y}|M_1)] - \text{Log}[p(\mathbf{y}|M_2)]\}} \quad (4.13)$$

em que  $\text{Log} [p(\mathbf{y}|M_m)]$  é a verossimilhança marginal logarítmica para o modelo  $M_m$ ,  $\mathbf{y}$  representa os dados observados,  $\boldsymbol{\theta}$  representa os parâmetros do modelo,  $p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}, M_m)$  é a verossimilhança dos dados para o modelo  $M_m$  e os parâmetros e  $p(\boldsymbol{\theta}|M_m)$  é a probabilidade *a priori* dos parâmetros do modelo (HAN; CARLIN, 2001; NANDRAM; KIM, 2002; BASU; CHIB, 2003; DAI; LIU, 2022; LOTFI *et al.*, 2022).

#### 4.4.2 Critério de informação de desvio (DIC)

O critério de informação de desvio (DIC) foi proposto por Spiegelhalter *et al.* (2002) para avaliar e comparar modelos. Este método de avaliação está disponível em diferentes variações e configurações de modelos generalizados (CELEUX *et al.*, 2006).

Além disso, o critério que foi estudado recentemente por Ariyo *et al.* (2020), é um estimador totalmente Bayesiano que calcula a média sobre a distribuição *a posteriori* de  $\boldsymbol{\theta}$  em vez de condicionar em um estimador de ponto  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(y)$  como feito para DIC.

Portanto, o DIC expressa a precisão preditiva que pode ser utilizado na comparação de modelos Bayesianos em que a média frequentista é substituída pela média *a posteriori* do parâmetro do modelo ( $\bar{\boldsymbol{\theta}} = E(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ ) (SPIEGELHALTER *et al.*, 2002).

$$DIC = -2\text{Log}(p(\mathbf{y}|\bar{\boldsymbol{\theta}})) + 2pD \quad (4.14)$$

em que  $pD$  refere-se ao número de parâmetros e quantifica o número de parâmetros a serem estimados após a incorporação da informação *a priori* ao modelo, dado pela expressão a seguir

$$pD = -2E_{\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}} [\text{Log}p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})] + 2\text{Log} [p(\mathbf{y}|\bar{\boldsymbol{\theta}})]$$

#### 4.4.3 Watanabe – Critério de Informação de Akaike (WAIC)

O critério de informação Watanabe-Akaike (WAIC) é uma medida de ajuste que avalia o equilíbrio entre a capacidade de um modelo para se ajustar aos dados e sua complexidade que pode ser interpretado de maneira semelhante ao AIC, BIC e DIC e permite comparar modelos ajustados em uma estrutura Bayesiana por meio de amostragem de MCMC (WATANABE; OPPER, 2010; VEHTARI; GELMAN; GABRY, 2017; WATANABE, 2018).

$$WAIC = -2 * (lppd - p_{WAIC}) \quad (4.15)$$

em que  $lppd$  é log da densidade preditiva pontual (*log pointwise predictive density*) que é definido como (GELMAN; HWANG; VEHTARI, 2014; WATANABE, 2021; DU *et al.*, 2023):

$$lppd = \sum_{i=1}^n \text{Log} \left( \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S p(\mathbf{y}|\bar{\boldsymbol{\theta}}_s) \right)$$

em que  $S$  indica número de iterações.

O  $p_{WAIC}$  (ou WAIC penalizado por ponto) é uma medida de ajuste que é utilizado frequentemente na seleção de modelos bayesianos. O valor do  $p_{WAIC}$  pode ser calculado de duas maneiras:

$$p_{WAIC1} = 2 \sum_{i=1}^n \left[ \text{Log} \left( \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S p(\mathbf{y}|\bar{\boldsymbol{\theta}}_s) \right) - \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \text{Log} p(\mathbf{y}|\bar{\boldsymbol{\theta}}_s) \right] \quad (4.16)$$

$$p_{WAIC2} = 2 \sum_{i=1}^n \mathbf{V}_{s=1}^S (\text{Log} p(\mathbf{y}|\bar{\boldsymbol{\theta}}_s)) \quad (4.17)$$

em que  $\mathbf{V}_{s=1}^S$  é a variância da amostra *a posteriori* de  $\boldsymbol{\theta}$ .

Na seleção de modelos o  $p_{WAIC}$  desempenha um papel importante pois quanto menor for o seu valor, melhor será o modelo em relação aos outros modelos avaliados. Sendo assim ter uma maior capacidade de explicar os dados observados e fazer boas previsões das observações futuras (WATANABE, 2021; DU *et al.*, 2023).

## 5 Resultados e discussão

Nesta seção será apresentada a análise de dados longitudinais com abordagem dos modelos lineares mistos via inferência Bayesiana, utilizando diferentes estruturas de covariância e análises de resíduos. Assim deve-se realizar uma análise exploratória dos dados com gráficos de perfis individuais dos cães ao longo dos dias e momentos.

### 5.1 Análise descritiva

Inicialmente, é feita uma análise exploratória da temperatura nas regiões de bíceps femoral e vasto lateral do índice de resistibilidade (IR) do ultrassom pelo cálculo dos valores médios, desvios padrão, quartis e coeficiente de variação para os 10 cães avaliados antes e depois de sessão de WBV em cinco dias da semana.

Na [Tabela 5](#) observa-se que temperatura média na região do músculo bíceps femoral (TBF) diminui depois da sessão em todos os dias. Além disso, a maior variabilidade foi observada no momento antes da sessão da quarta, e na quarta e quinta após a sessão de WBV. Também observa-se que as temperaturas na região do músculo vasto lateral tem diminuído em média depois da sessão de WBV em todos os dias e, observa-se alta variabilidade na quarta antes da sessão. Depois da sessão de WBV, observa-se uma alta variabilidade na terça, quarta e quinta. Finalmente, as medidas médias de IR do ultrassom aumentaram após a sessão em todos os dias, com baixa variabilidade em todas as medições.

Tabela 5 – Estatísticas descritivas da temperaturas de bíceps femoral (TBF), vasto lateral (TVL) em °C e IR do ultrassom (US) por momentos e dias da semana.

Variáveis	Momentos	Dia	Média	DP	1° Quartil	Mediana	3° Quartil
TBF	Antes	Seg.	31,770	1,237	31,100	31,550	32,300
		Terç.	31,609	2,937	30,147	31,600	33,675
		Qua.	32,486	3,444	31,250	33,300	33,974
		Qui.	33,575	3,139	32,350	34,400	35,194
		Sex.	32,650	1,725	32,092	32,400	34,015
	Depois	Seg.	31,350	1,478	30,500	31,050	31,700
		Terç.	31,012	2,934	29,475	31,095	31,875
		Qua.	31,969	3,389	30,834	32,200	33,552
		Qui.	32,760	3,366	31,550	33,381	34,993
		Sex.	32,009	2,097	30,813	32,741	33,482
TVL	Antes	Seg.	33,000	1,449	32,175	32,700	33,500
		Terç.	32,986	2,423	31,525	32,806	35,025
		Qua.	34,577	2,929	33,025	35,650	36,170
		Qui.	35,079	2,571	33,775	36,200	36,536
		Sex.	34,408	1,717	34,350	34,894	35,343
	Depois	Seg.	32,910	1,290	31,850	32,700	33,475
		Terç.	33,050	3,243	31,700	33,608	34,800
		Qua.	33,831	3,355	32,425	33,850	35,863
		Qui.	34,499	3,182	33,825	35,256	36,350
		Sex.	34,079	2,277	33,250	34,500	35,296
US	Antes	Seg.	0,884	0,030	0,880	0,890	0,900
		Terç.	0,900	0,035	0,875	0,895	0,900
		Qua.	0,910	0,031	0,895	0,920	0,930
		Qui.	0,904	0,035	0,885	0,905	0,928
		Sex.	0,920	0,022	0,903	0,920	0,928
	Depois	Seg.	0,918	0,031	0,913	0,920	0,930
		Terç.	0,937	0,027	0,920	0,935	0,955
		Qua.	0,926	0,030	0,923	0,930	0,940
		Qui.	0,924	0,030	0,905	0,930	0,948
		Sex.	0,938	0,023	0,930	0,935	0,955

Fonte: Do autor.

Nota: DP - Desvio padrão, 1° Quartil - Primeiro quartil (25%), 3° Quartil - Terceiro quartil (75%)

TBF - Temperatura de bíceps femoral, TVL - Temperatura, de vasto lateral, US - Ultrassom.

A variabilidade das medidas tanto entre como dentro das repetições em cada unidade experimental pode ser visualizada a partir da Tabela 5 e da Figura 3. Ainda na Figura 3, pode-se observar que a temperatura de bíceps femoral do cão 7 foi a menor em comparação aos outros cães, que se repetem na temperatura de vasto lateral. Já o IR do ultrassom dos cães 1, 4 e 7 foram os menores em comparação aos outros cães. Da mesma forma poderia ser observada a variabilidade das medidas termográficas tanto entre como dentro dos dias da semana a partir da Figura 27 (APÊNDICE A).

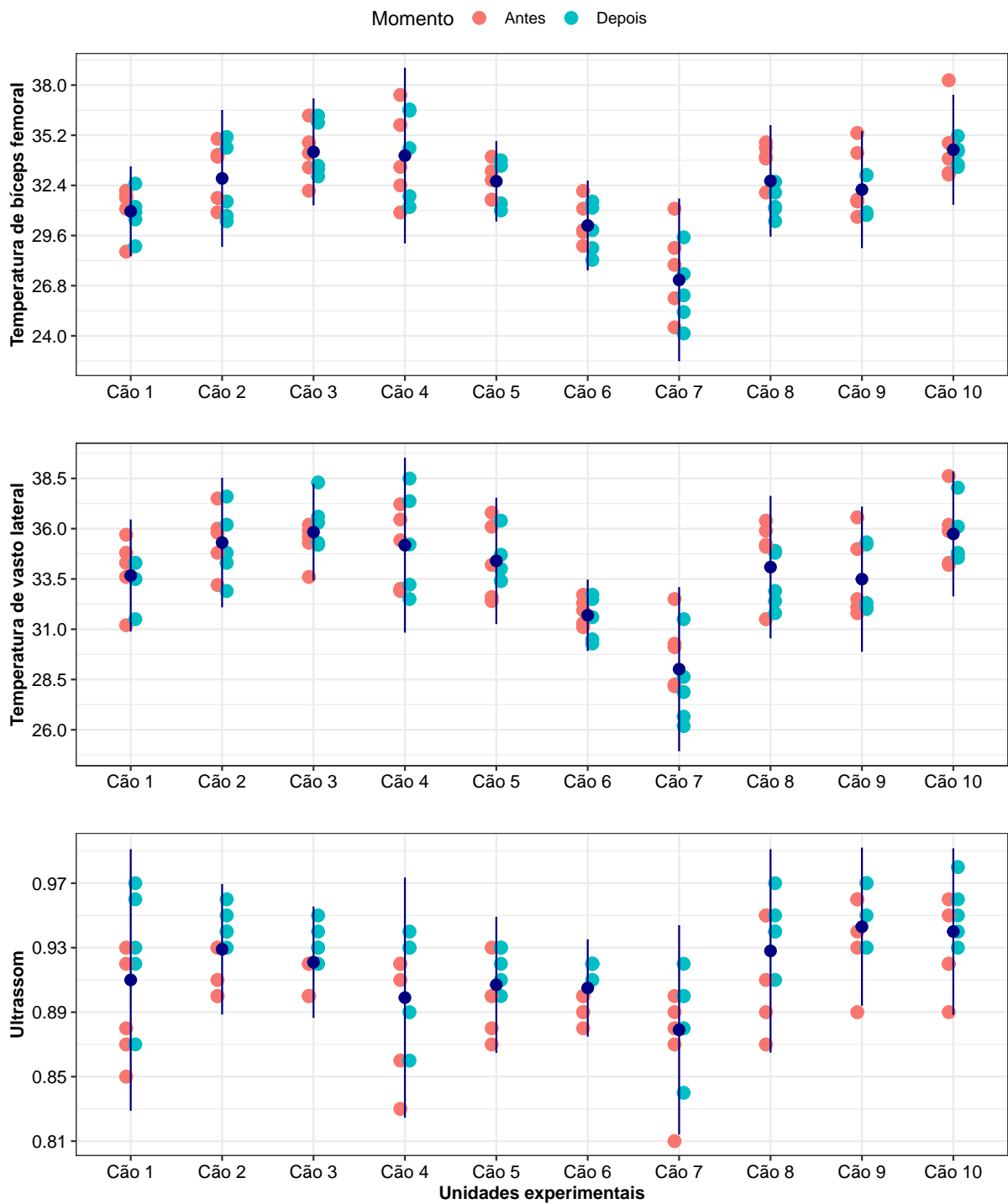


Figura 3 – Valores observados de temperatura de bíceps femoral, vasto lateral e ultrassom por cão para os momentos antes e depois da sessão de WBV, o intervalo azul representa a média  $\pm$  desvio padrão

A Figura 4 apresenta os gráficos de normalidade das três variáveis para cada momento de dia da semana. Percebe-se que não existem indícios contrários à hipótese de normalidade na distribuição dessas variáveis. Além disso as Figuras 22 e 24 (APÊNDICE A) também indicaram

a mesma conclusão.

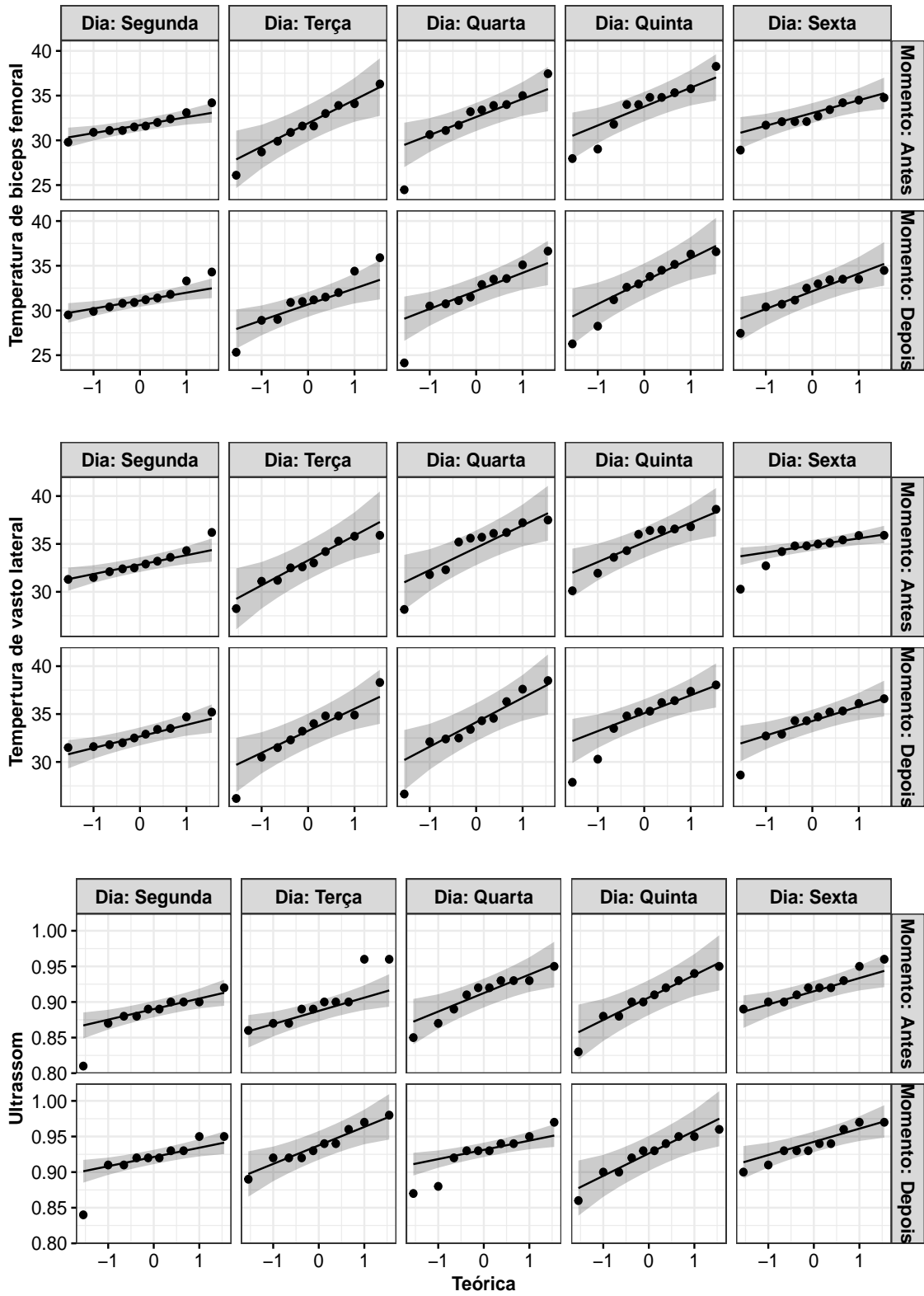


Figura 4 – Gráficos de normalidades de QQ-Plot de termografia bíceps femoral, vasto lateral e ultrassom por dias e momentos.

## 5.2 Ajustes dos modelos 1 e 2 para as variáveis TBF e TVL

Nesta seção serão apresentados os ajustes dos modelos mistos Bayesianos utilizando as prioris, assim como a avaliação de convergência e comparação entre os modelos ajustados com as diferentes estruturas de matriz de variância e covariância.

Após ajustar os modelos propostos usando inferência Bayesiana mediante *software* estatístico R, juntamente com os pacotes R2Jags e Rjags, e que foram utilizados para calcular os critérios de informação de desvio (DIC) e Watanabe – Critério de Informação de Akaike (WAIC) os quais são apresentados na Tabela 6. Para a temperatura de bíceps femoral, as estruturas de matriz de variância covariância que apresentou o melhor ajuste foram, CS para o modelo 1 (DIC=408,021 e WAIC=403,500); AR(1) e CS para o modelo 2 (DIC=409,152 e WAIC=405,100 respectivamente).

Por sua vez, para temperatura termográfica de vasto lateral nos modelos 1 e 2, utilizando o DIC a estrutura de matriz de covariância AR(1) apresentou o melhor ajuste (400,653 e 401,920 respectivamente). Por outro lado, pelo critério WAIC a estrutura escolhida foi CSH (396,400 e 398,700 respectivamente).

Tabela 6 – Comparação dos modelos ajustados para a termografia de bíceps femoral e vasto lateral com diferentes estruturas de variância-covariância utilizando os critérios DIC, WAIC e p-WAIC.

Variável	Estruturas	Modelo 1			Modelo 2		
		DIC	WAIC	p-WAIC	DIC	WAIC	p-WAIC
TBF	UN	408,310	403,800	13,800	410,434	405,200	14,900
	VC	<b>408,021</b>	<b>403,500</b>	13,700	410,006	<b>405,100</b>	14,800
	CSH	408,721	403,600	13,600	410,470	405,200	14,800
	AR(1)	408,762	404,300	14,100	<b>409,152</b>	405,800	15,600
	CS	408,778	404,600	14,600	410,268	406,600	16,100
TVL	UN	401,774	397,200	13,400	404,550	399,000	14,600
	VC	401,837	397,200	13,400	403,985	399,100	14,700
	CSH	401,064	<b>396,400</b>	12,900	403,166	<b>398,700</b>	14,400
	AR(1)	<b>400,653</b>	396,900	13,300	<b>401,920</b>	399,100	15,100
	CS	401,142	397,900	14,200	403,652	400,300	15,800

O Fator de Bayes foi calculado para os modelos que foram selecionados a partir da Tabela 6. Para a variável termografia de bíceps femoral no modelo 1, as matrizes de variância e covariância selecionadas foram a de componente de variância (VC) e UN, pois apresentaram os mesmos valores de DIC e WAIC.

Para o modelo 2, a estrutura que se ajustou melhor para a termografia de bíceps femoral foi AR(1) pelo DIC e VC pelo WAIC. Por fim, para a escolha do melhor ajuste para a termografia de vasto lateral, em ambos os modelos, foram as matrizes CSH e AR(1).



Nas Tabelas 7 e 8 encontram-se as estimativas *a posteriori* dos parâmetros e os respectivos intervalos HPD. Para os parâmetros referente às matrizes de variância e covariância  $G_b$  e  $G_\delta$  apresentam-se os valores a partir dos modelos selecionados.

Na Tabela 7, observa-se o Fator de Bayes do  $FB_{UN,VC} = 0,948$  que significa que a estrutura de matriz de variância e covariância que melhor se ajusta aos dados de termografia ultravermelha de bíceps femoral é a Componente de variância no modelo 1 e 2,  $FB_{VC,AR(1)} = 1,136$ .

A partir Tabela 8, observa-se que, nos modelos 1 e 2, os valores Fator de Bayes  $FB_{CSH,AR(1)} = 0,331$  e  $FB_{CSH,AR(1)} = 0,062$  indicam que a estrutura de matriz de variância-covariância que melhor se ajusta aos dados de termografia ultravermelha de vasto lateral é a autorregressiva de primeira ordem AR(1). Na Tabela 18 (APÊNDICE B) apresenta o cálculo de Fator de Bayes para todas as combinações das estruturas de matriz de variância e covariância.

A partir das Tabelas 7 e 8 observa-se que não há evidências de não convergência da cadeia *a posteriori* para todos os parâmetros, segundo o critério de Geweke (valor absoluto da estatística (|GW|) é menor que 1,96 em todas as cadeias). Ao avaliar o fator de dependência de Raftery e Lewis (RL), observa-se que os valores estão próximos de 1, sugerindo independência entre as iterações do processo de amostragem MCMC e, portanto, possível convergência. O critério de Heidelberger-Welch (HW) demonstrou que a série é estacionária, já que os valores-p foram superiores ao nível de significância de 5%. Por fim, o critério de Gelman-Rubin foi utilizado como uma medida de redução de escala potencial, e a convergência das cadeias foi analisada por meio do estatístico (GR), que apresentou valor maior ou igual a 1, indicando a convergência das cadeias. Também pode-se observar, nas Tabelas 14, 15, 16 e 17 (APÊNDICE B), que não há evidências de não convergência da cadeia *a posteriori* para todos os parâmetros com as demais estruturas de variância e covariância.

Tabela 7 – Estimativas *a posteriori* dos parâmetros dos modelos selecionados, Intervalos de credibilidade HPD, critérios de convergência e valores de Fator de Bayes para os modelos 1 e 2 das estruturas de covariâncias selecionadas para termografia de bíceps femoral.

Estruturas	Parâmetros	Estimativas	HPD <sub>95%</sub>		Critérios de convergência			
			LI	LS	GW	RL	HW	GR
Modelo 1								
UN	$\beta_0$	32,410	30,821	33,938	1,487	1,100	0,165	1,000
	$\beta_1$	-0,591	-1,517	0,315	0,329	0,999	0,465	1,000
	$\sigma_e$	1,712	1,451	1,966	1,244	1,020	0,303	1,000
	$\sigma_{b_{0j}}$	2,512	1,026	4,523	1,072	0,999	0,061	1,000
	$\sigma_{b_{1j}}$	1,579	0,820	2,599	0,991	0,999	0,955	1,000
	$\rho_{b_j}$	-0,296	-3,100	2,553	1,281	1,030	0,395	1,000
	<i>deviance</i>	389,979	379,256	402,186	0,790	0,951	0,714	1,000
VC	$\beta_0$	32,417	30,854	34,007	0,579	0,999	0,618	1,001
	$\beta_1$	-0,595	-1,477	0,323	1,032	0,959	0,931	1,000
	$\sigma_e$	1,713	1,456	1,966	0,150	1,030	0,465	1,000
	$\sigma_{b_{0j}}$	2,326	0,900	4,138	0,398	0,999	0,241	1,000
	$\sigma_{b_{1j}}$	1,524	0,790	2,432	0,417	0,982	0,794	1,001
	$\rho_{b_j}$	0,009	-3,170	3,158	0,185	0,999	0,887	1,000
	<i>deviance</i>	389,802	379,525	402,165	0,644	0,999	0,188	1,000
Modelo 2								
VC	$\beta_0$	32,428	30,205	34,563	0,713	0,999	0,527	1,000
	$\beta_1$	-0,602	-2,098	1,059	0,440	0,999	0,130	1,000
	$\sigma_e$	1,715	1,465	1,965	0,860	1,030	0,354	1,000
	$\sigma_{b_{0j}}$	2,266	0,921	4,034	0,678	0,999	0,637	1,000
	$\sigma_{b_{1j}}$	1,523	0,777	2,452	0,460	0,975	0,917	1,000
	$\sigma_{\delta_{0k}}$	1,913	0,849	3,423	0,363	0,982	0,128	1,000
	$\sigma_{\delta_{1k}}$	1,729	0,825	2,951	1,538	1,070	0,674	1,000
	$\rho_{b_j}$	0,001	-3,185	3,134	0,989	0,951	0,417	1,000
	$\rho_{\delta_k}$	0,022	-3,168	3,032	1,228	0,951	0,890	1,000
	<i>deviance</i>	390,191	378,588	402,808	1,495	1,020	0,513	1,000
AR(1)	$\beta_0$	32,423	30,350	34,383	0,802	0,999	0,753	1,000
	$\beta_1$	-0,592	-2,080	0,943	0,630	0,951	0,546	1,000
	$\sigma_e$	1,680	1,442	1,926	0,892	0,966	0,763	1,000
	$\sigma_{b_{0j}}$	2,523	0,758	5,330	1,490	1,050	0,094	1,000
	$\sigma_{b_{1j}}$	2,517	0,704	5,378	0,117	0,999	0,851	1,010
	$\sigma_{\delta_{0k}}$	2,541	0,850	5,784	0,509	1,050	0,929	1,000
	$\sigma_{\delta_{1k}}$	2,522	0,837	5,330	0,132	0,999	0,608	1,010
	$\rho_{b_j}$	0,043	-0,830	0,887	0,894	1,020	0,306	1,000
	$\rho_{\delta_k}$	0,145	-0,843	0,999	0,249	0,982	0,642	1,000
	<i>deviance</i>	390,134	379,335	402,594	0,590	1,020	0,973	1,000
Modelo 1	Fator de Bayes	$FB_{UN,VCs} = 0,948$						
Modelo 2	Fator de Bayes	$FB_{VCs,AR(1)} = 1,136$						

Tabela 8 – Estimativas *a posteriori* dos parâmetros dos modelos selecionados, Intervalos de credibilidade HPD, critérios de convergência e valores de Fator de Bayes para os modelos 1 e 2 das estruturas de covariâncias selecionadas para termografia de vasto lateral.

Estruturas	Parâmetros	Estimativas	HPD <sub>98%</sub>		Critérios de convergência			
			LI	LS	GW	RL	HW	GR
Modelo 1								
CS	$\beta_0$	34,007	32,613	35,337	0,875	1,020	0,691	1,000
	$\beta_1$	-0,337	-1,266	0,596	1,698	1,030	0,707	1,000
	$\sigma_e$	1,658	1,405	1,906	1,041	0,982	0,965	1,000
	$\sigma_{b_{0j}}$	2,265	0,989	4,045	0,334	0,999	0,336	1,000
	$\sigma_{b_{1j}}$	1,543	0,761	2,436	0,788	0,999	0,181	1,000
	$\rho_{b_j}$	0,400	-0,519	1,000	1,491	0,951	0,864	1,000
	<i>deviance</i>	383,518	372,585	394,854	1,124	0,982	0,079	1,000
AR(1)	$\beta_0$	34,010	32,703	35,305	0,042	0,966	0,615	1,000
	$\beta_1$	-0,333	-1,262	0,693	0,328	1,020	0,336	1,000
	$\sigma_e$	1,647	1,407	1,897	0,408	0,999	0,406	1,000
	$\sigma_{b_{0j}}$	2,516	0,809	5,209	0,019	1,050	0,209	1,000
	$\sigma_{b_{1j}}$	2,491	0,848	5,377	0,636	0,999	0,809	1,000
	$\rho_{b_j}$	0,349	-0,558	1,000	0,729	0,999	0,395	1,000
	<i>deviance</i>	383,608	373,493	395,841	0,160	0,966	0,084	1,000
Modelo 2								
CSH	$\beta_0$	34,015	31,978	36,205	1,426	1,020	0,763	1,000
	$\beta_1$	-0,329	-1,850	1,455	0,475	0,982	0,704	1,000
	$\sigma_e$	1,666	1,421	1,923	1,154	1,050	0,611	1,000
	$\sigma_{b_{0j}}$	2,251	0,956	3,986	0,137	0,975	0,499	1,000
	$\sigma_{b_{1j}}$	1,537	0,738	2,441	1,564	0,999	0,577	1,000
	$\sigma_{\delta_{0k}}$	1,900	0,816	3,464	0,591	0,999	0,054	1,000
	$\sigma_{\delta_{1k}}$	1,748	0,807	2,973	0,685	0,951	0,517	1,000
	$\rho_{b_j}$	0,247	-0,692	0,999	1,232	0,966	0,549	1,000
	$\rho_{\delta_k}$	0,190	-0,836	1,000	0,365	0,999	0,700	1,000
<i>deviance</i>	384,313	373,065	396,031	1,447	0,999	0,368	1,000	
AR(1)	$\beta_0$	34,014	32,213	35,777	0,649	1,100	0,505	1,000
	$\beta_1$	-0,334	-1,911	1,204	0,786	1,020	0,060	1,000
	$\sigma_e$	1,629	1,390	1,876	0,628	0,999	0,715	1,000
	$\sigma_{b_{0j}}$	2,513	0,833	5,618	0,255	0,951	0,376	1,010
	$\sigma_{b_{1j}}$	2,531	0,864	5,641	0,871	0,999	0,059	1,000
	$\sigma_{\delta_{0k}}$	2,496	0,815	5,136	1,011	0,951	0,209	1,000
	$\sigma_{\delta_{1k}}$	2,526	0,738	5,184	0,775	0,966	0,920	1,040
	$\rho_{b_j}$	0,238	-0,651	0,998	0,007	0,982	0,255	1,000
	$\rho_{\delta_k}$	0,214	-0,818	1,000	0,528	1,010	0,162	1,000
<i>deviance</i>	384,024	373,198	395,741	1,244	1,020	0,516	1,000	
Modelo 1	Fator de Bayes	$FB_{CSH,AR(1)} = 0,331$						
Modelo 2	Fator de Bayes	$FB_{CSH,AR(1)} = 0,062$						

A partir dos gráficos de média ergódica do desvio padrão de intercepto  $\sigma_{b_{0j}}$  e inclinação  $\sigma_{b_{1j}}$  por cada cão e o coeficiente de correlação entre intercepto e inclinação  $\rho_{b_j}$  apresentados na Figura 5 do modelo 1 com matriz de variância e covariância VC, observa-se que as cadeias convergiram.

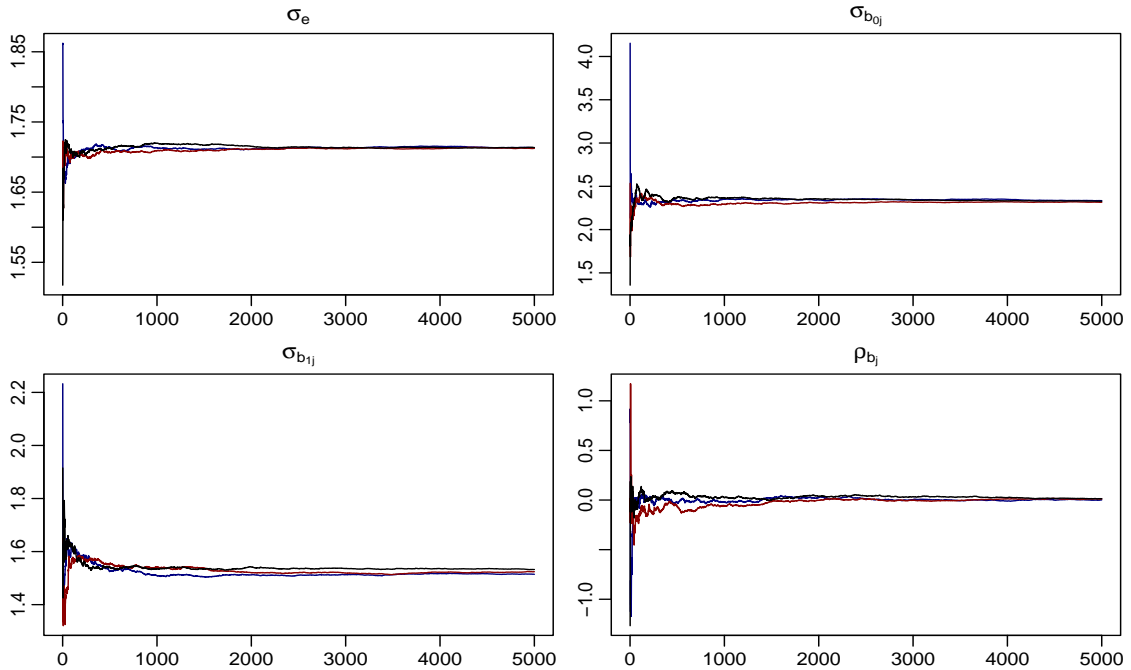


Figura 5 – Média ergódica dos desvios padrões do modelo 1 para temperatura de bíceps femoral com a estrutura de matriz de variância e covariância VC.

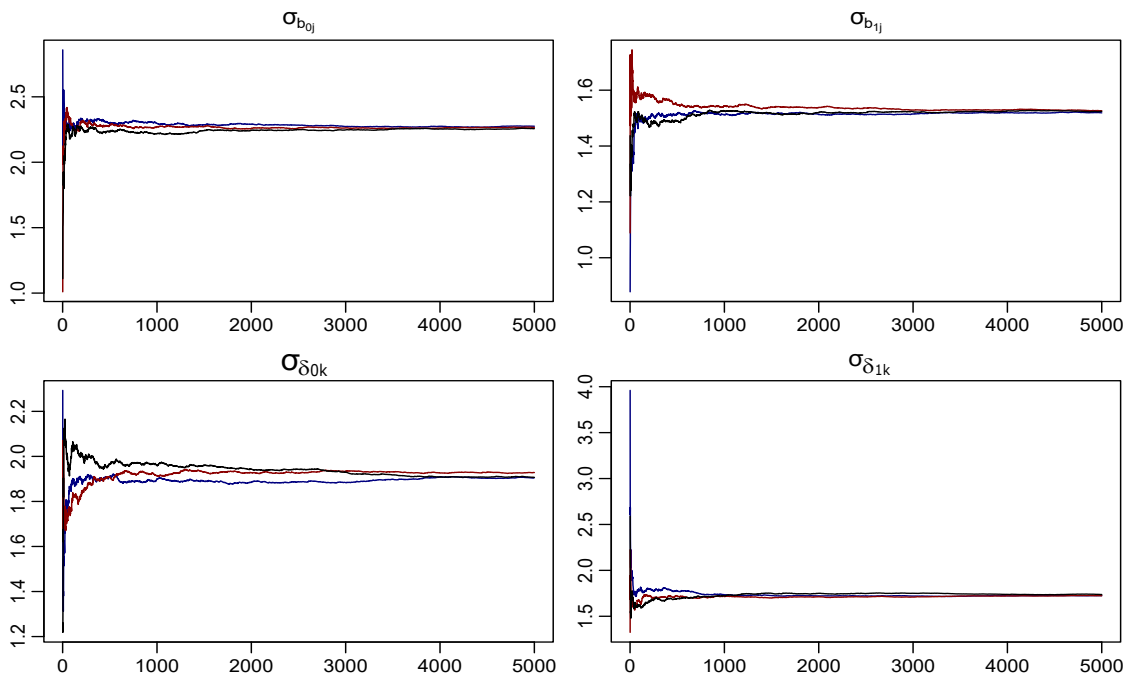


Figura 6 – Média ergódica dos desvios padrões do modelo 2 para a temperatura de bíceps femoral com a estrutura de matriz de variância e covariância VC.

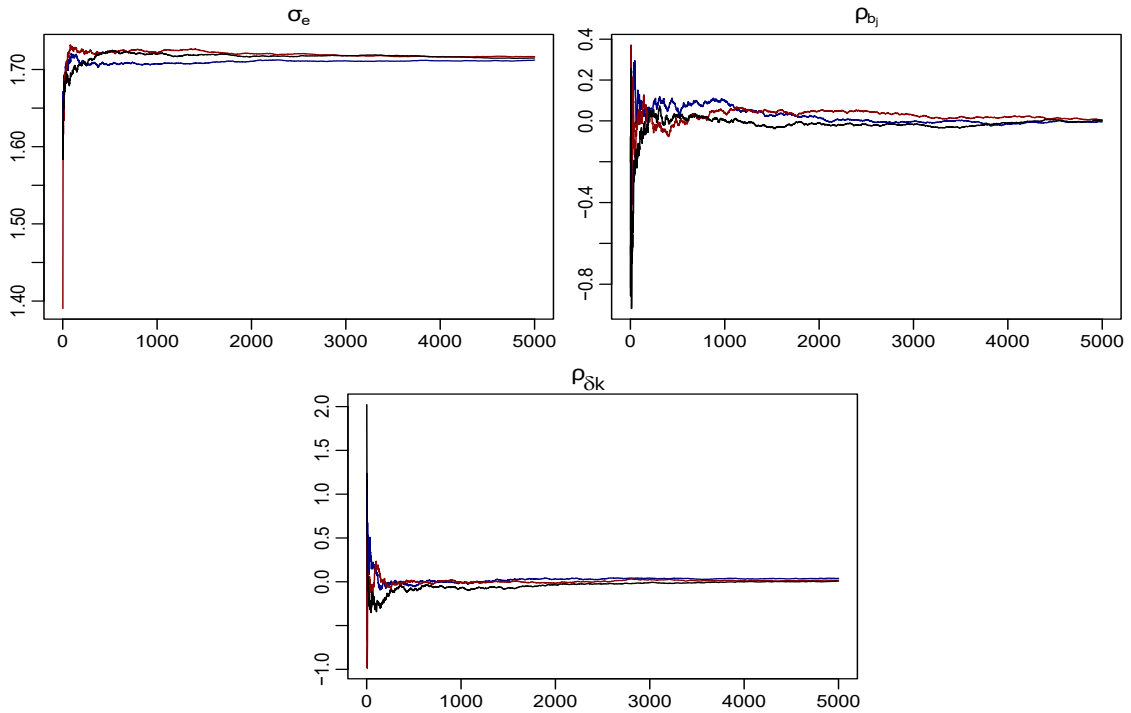


Figura 7 – Média ergódica do desvio padrão do erro e da correlação do modelo 2 para a temperatura de bíceps femoral com a estrutura de matriz de variância e covariância VC.

Já nos gráficos de média ergódica apresentados nas Figura 6 e 7 do modelo 2 para estrutura de matriz de variância e covariância VC observa-se o comportamento das médias dos parâmetros do desvio padrão de intercepto  $\sigma_{b_{0j}}$  e inclinação  $\sigma_{b_{1j}}$  por cada cão e o coeficiente de correlação entre intercepto e inclinação  $\rho_{b_j}$ . Além disso neste modelo foram acrescentados os interceptos e inclinações aleatórios por dias,  $\sigma_{\delta_{0k}}$  e  $\sigma_{\delta_{1k}}$  respectivamente. Estes gráficos indicam a convergência das cadeias.

A seguir, serão fornecidas as estimativas de variância-covariância das estruturas de matrizes dos efeitos aleatórios escolhidos para cada modelo. Observa-se que em ambos os modelos ajustados para a temperatura do bíceps femoral, a matriz de variância-covariância selecionada é a componente de variância. Para o modelo 1, a estimativa da matriz de variância e covariância é dado por,

$$G_b = \begin{bmatrix} 5,467 & 0,368 \\ 0,368 & 0,989 \end{bmatrix}$$

e para o modelo 2,

$$G_b = \begin{bmatrix} 5,001 & -0,064 \\ -0,064 & 0,995 \end{bmatrix}; \quad G_\delta = \begin{bmatrix} 3,525 & 0,274 \\ 0,274 & 2,115 \end{bmatrix}$$

Ainda da Tabela 8 foi observada que a estrutura de matriz de variância-covariância que melhor se ajusta aos dados de temperatura de vasto lateral é a autorregressiva de primeira ordem AR(1) para os dois modelos.

Na Figura 8 são apresentados os gráficos de média ergódica dos parâmetros do modelo 1 com a matriz de variância e covariância AR(1) os quais indicaram a convergência das cadeias.

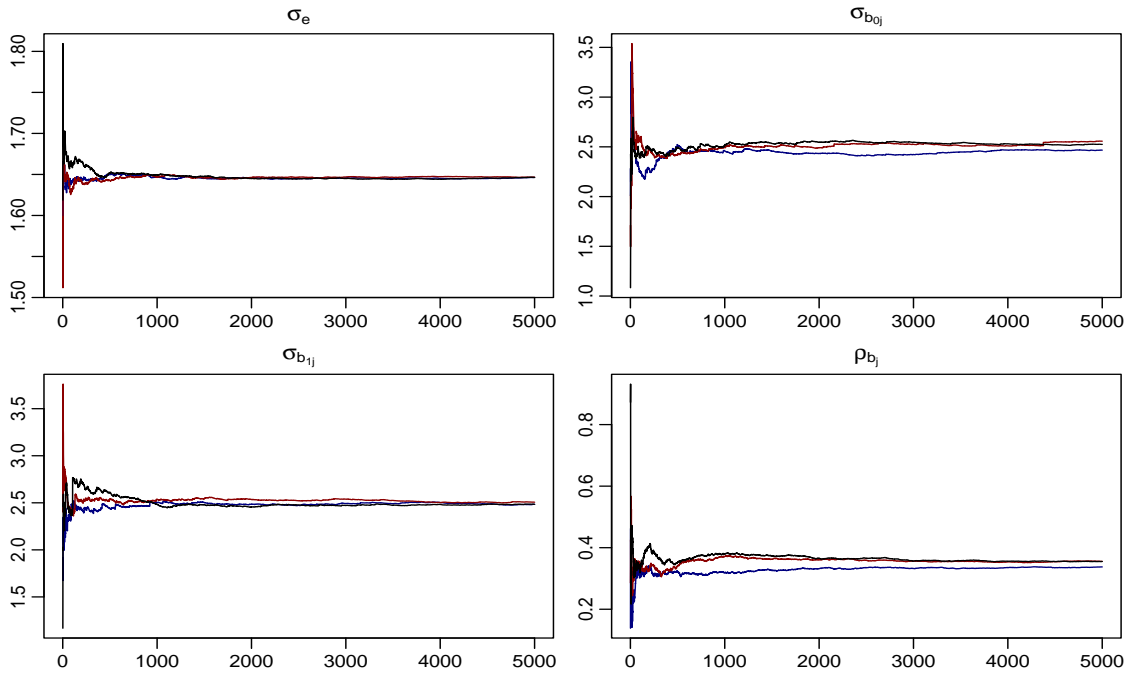


Figura 8 – Média ergódica dos parâmetros do modelo 1 ajustado a temperatura de vasto lateral com a estrutura de matriz de variância e covariância autorregressiva de primeira ordem.

A mesma conclusão é obtida a partir das Figura 9 e 10 sobre a convergência dos parâmetros do modelo 2 para a temperatura de vasto lateral com a estrutura de matriz de variância e covariância AR(1).

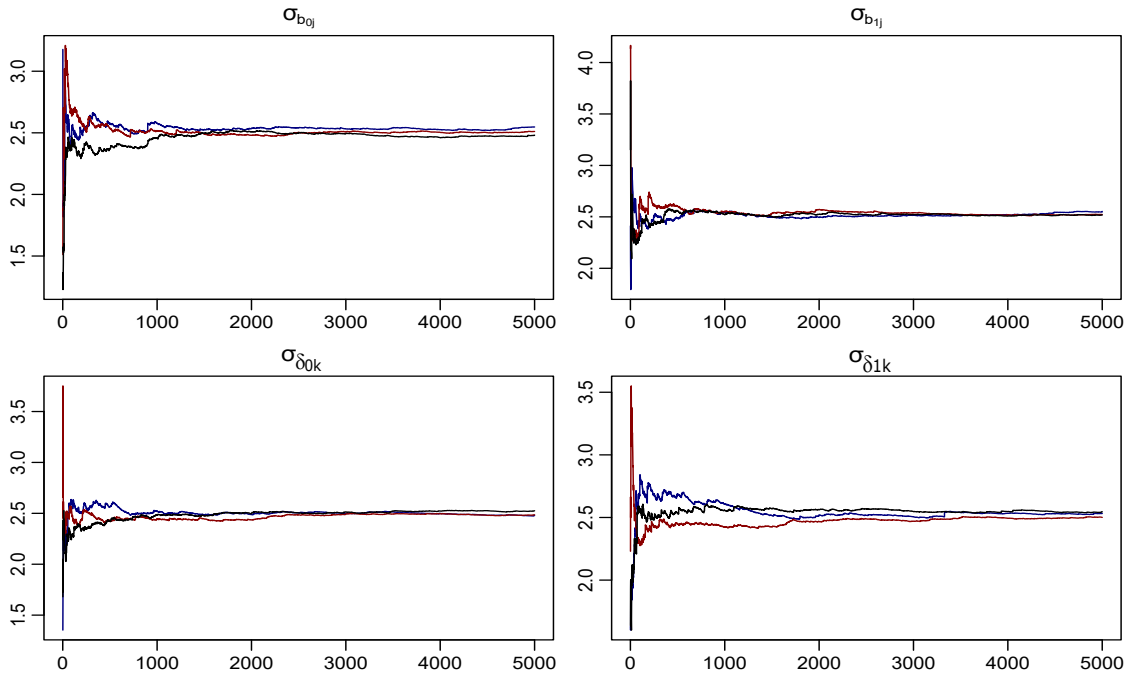


Figura 9 – Média ergódica dos parâmetros do modelo 2 ajustado a temperatura de vasto lateral com a estrutura de matriz de variância e covariância autorregressiva de primeira ordem.

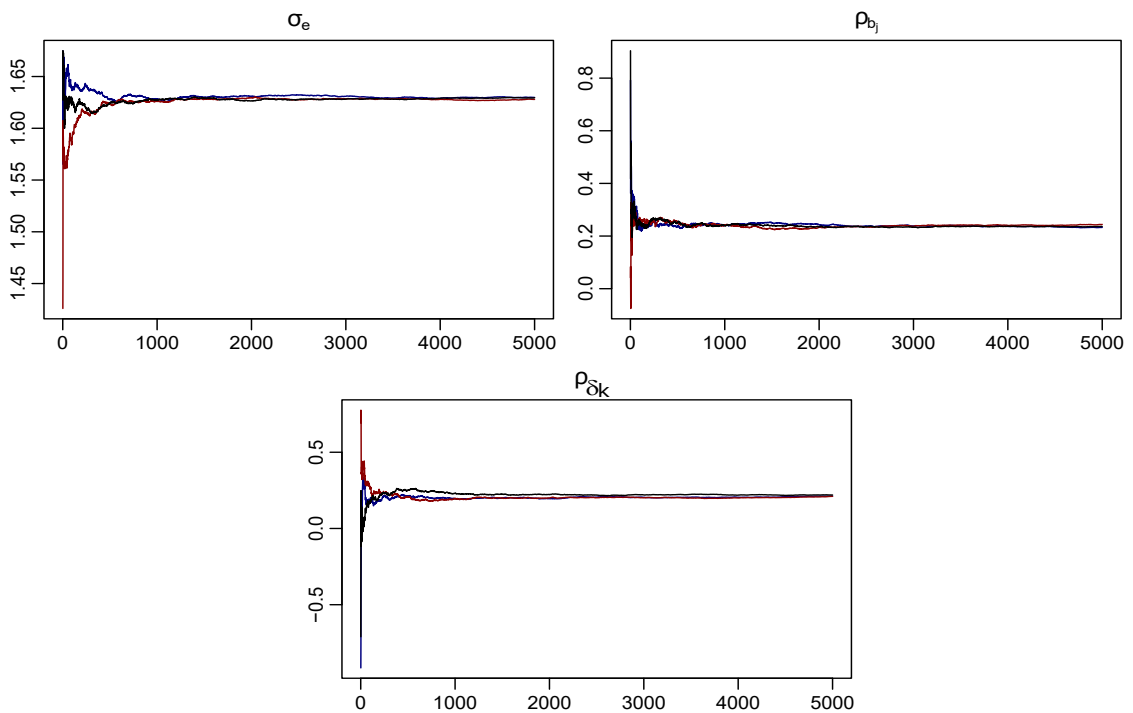


Figura 10 – Média ergódica dos parâmetros do modelo 2 ajustado a temperatura de vasto lateral com a estrutura de matriz de variância e covariância autorregressiva de primeira ordem.

A partir dos resultados mostrados acima observa-se que em ambos os modelos

ajustados para a temperatura de vasto lateral, a matriz de variância-covariância selecionada é a autorregressivo de primeira ordem. Portanto, as estimativas de variância-covariância das estruturas de matrizes dos efeitos aleatórios escolhidos para o modelo 1,

$$G_b = \begin{bmatrix} 3,614 & 1,208 \\ 1,208 & 1,357 \end{bmatrix}$$

e para o modelo 2,

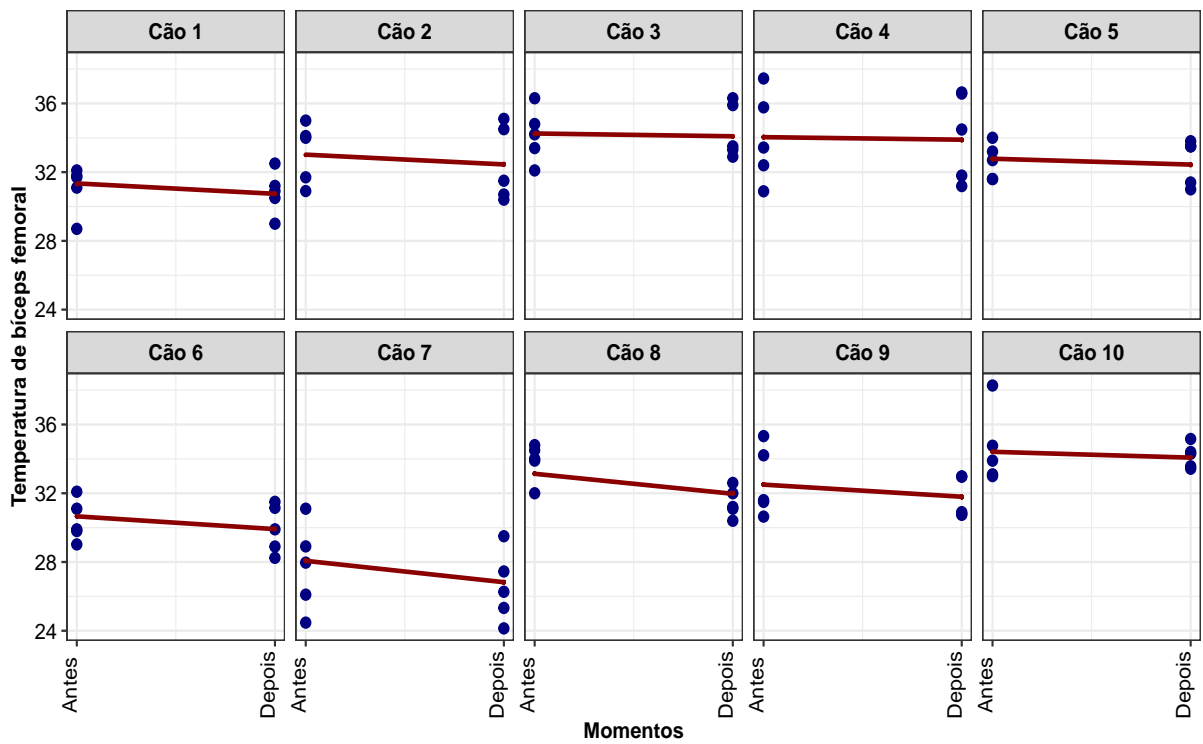
$$G_b = \begin{bmatrix} 3,328 & 0,709 \\ 0,709 & 1,194 \end{bmatrix}; \quad G_\delta = \begin{bmatrix} 2,278 & 0,710 \\ 0,710 & 1,923 \end{bmatrix}.$$

A partir das Tabelas 7 e 8 e da análise de convergência por meio dos gráficos de média ergódica, pode-se observar que em ambos os modelos ajustados para temperatura bíceps femoral, foi selecionada a matriz de variância-covariância componente de variância (VC) e para a temperatura de vasto lateral foi a matriz de variância-covariância autorregressiva de primeira ordem AR(1). Portanto, foi possível notar a existência de uma relação entre os interceptos e as inclinações aleatórias para os cães e os dias. A matriz AR(1) é utilizada em situações em que se deseja modelar a dependência entre as observações. De acordo com os estudos de Simpson *et al.* (2010), Simpson *et al.* (2014), Barboza *et al.* (2019) que estudaram sobre dados de medidas repetidas, a estrutura de correlação autorregressiva de primeira ordem no tempo AR(1), é a mais utilizada.

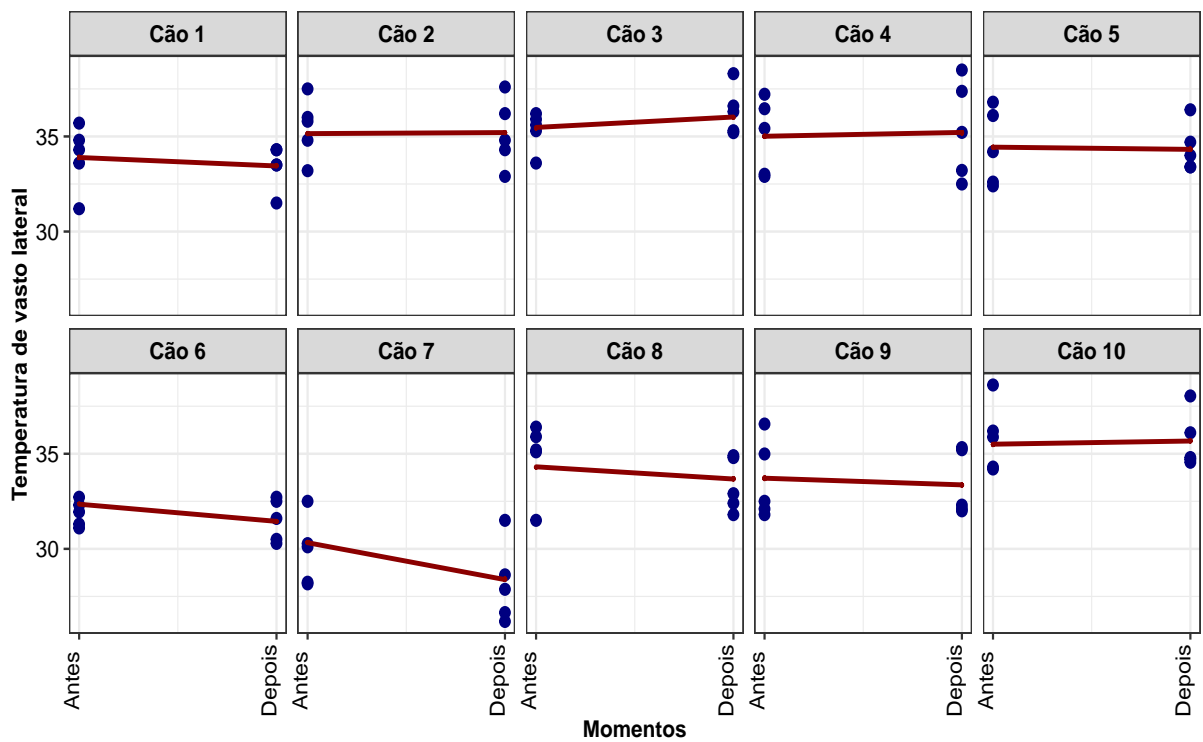
Pela Figura 11 percebe-se que a média geral da temperatura difere entre os cães. Também pode-se observar que a inclinação difere entre os cães sendo positiva, ou seja a temperatura média teve um aumento após a sessão vibratória. Da mesma forma, observa-se a variação da média geral da temperatura de bíceps femoral para todos os cães. Nos cães 2, 3, 4 e 5, a inclinação é próxima a zero, no entanto nos cães 6, 7, 8, 9 a inclinação é negativa.

Ainda a Figura 11 apresenta as estimativas médias *a posteriori* da temperatura de bíceps femoral e vasto lateral para cão e momento a partir do modelo selecionado com efeito aleatório para o cão (modelo 1).



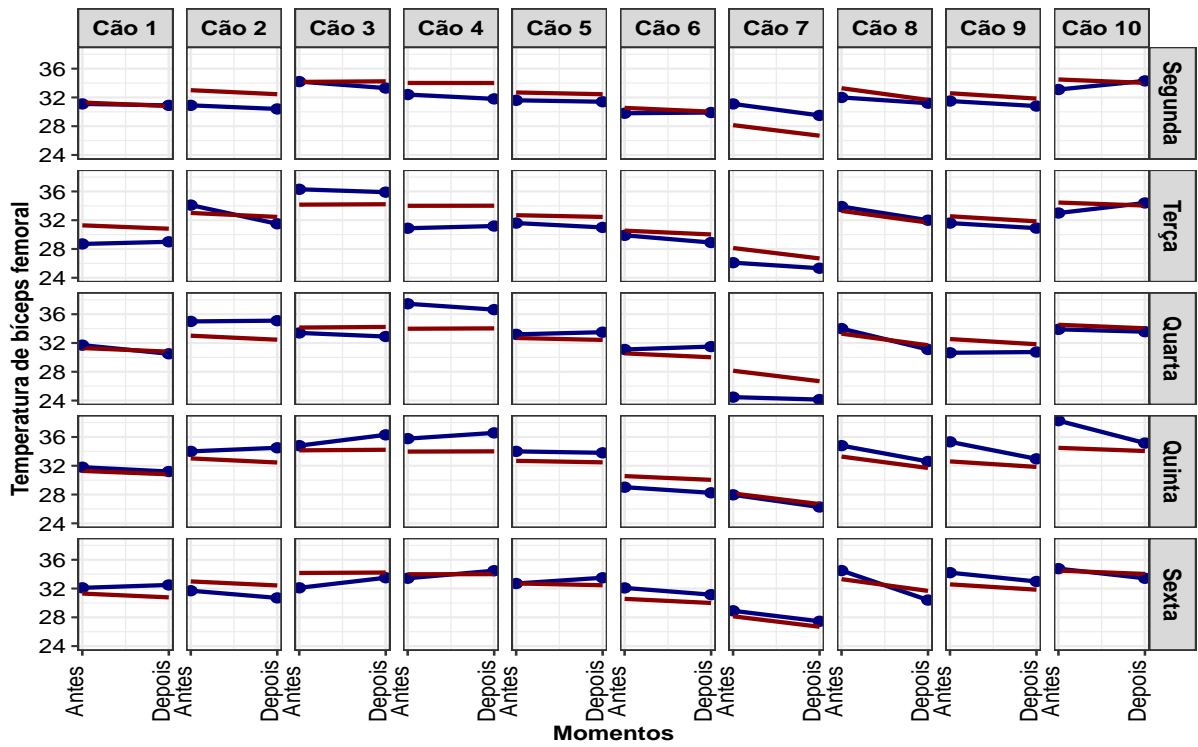


(a)

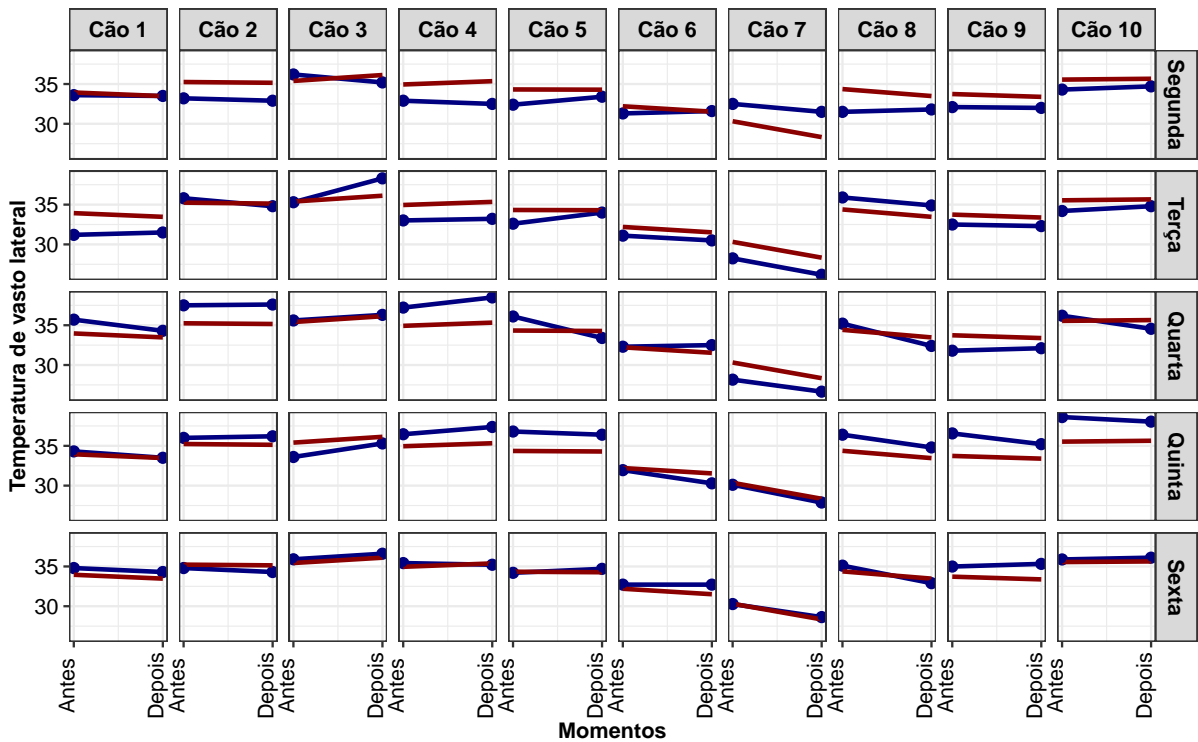


(b)

Figura 11 – Gráficos de interceptos e inclinações aleatórias por cada cão, resultantes do ajuste do modelo 1 (a) bíceps femoral e (b) vasto lateral com as estruturas de componente de variância e autorregressiva de primeira ordem.



(a)



(b)

Figura 12 – Gráficos de interceptos e inclinações aleatórias para cada cão, resultantes do ajuste do modelo 2 (a) bíceps femoral e (b) vasto lateral com as estruturas de componente de variância e autorregressiva de primeira ordem.

Portanto, considera-se que as características de cada cão influenciam nas temperaturas de forma diferente em cada momento contribuindo com uma fonte de variabilidade aleatória, que não é controlada pelo experimentador, mas deve ser considerada no modelo. Assim, ao desenvolver um modelo estatístico para analisar em diferentes momentos, é importante incorporar a variabilidade individual de cada cão.

Em experimentos envolvendo cães ao longo de vários dias e momentos diferentes, além das fontes de variabilidade não controladas pelo experimentador, também foram realizadas medições de temperatura em diferentes dias. Assim, na [Figura 12](#), são apresentadas as variabilidades por dia para cada cão em momentos diferentes. Ao introduzir uma fonte adicional de variabilidade (dias), nota-se que não há inclinações negativas, indicando que a temperatura não diminui de um momento para o outro em relação ao dia. No entanto, os interceptos variam entre os dias e os cães. Ao analisar os dados, é possível observar que os cães 2, 6, 9 e 10 exibem inclinações próximas a zero de forma aleatória e os cães 3, 4, 5 e 9 apresentaram um aumento nas temperaturas ao longo da semana.

Da mesma maneira, constata-se que, para todos os cães, as temperaturas apresentaram aumento ao longo de todos os dias da semana, exceto nos casos dos cães 7 e 8, os quais indicaram inclinações negativas. Contudo, é relevante destacar que os interceptos variam entre os dias para cada cão (modelos 1 e 2). Observou-se que as medições das temperaturas aumentaram significativamente de um momento para outro durante a semana, promovendo o fortalecimento dos músculos, conforme evidenciado no estudo de [Gomes \*et al.\* \(2023\)](#). Neste estudo, foi realizada uma avaliação dos músculos dos membros posteriores em cães coxos com displasia, concluindo que houve alterações significativas. Resultados semelhantes foram encontrados no estudo de [Silva \*et al.\* \(2020\)](#) e [Gille \*et al.\* \(2023\)](#). Portanto, a aplicação da Terapia de Vibração de Corpo Inteiro (WBV) na prática veterinária proporciona benefícios importantes.

### **5.3 Análise dos modelos para a diferença entre os momentos para as variáveis DBF, DVL e DUS**

Na [Tabela 9](#), observa-se que as temperaturas na região do músculo bíceps femoral tem diminuído em média de antes para depois em todos os dias. Também observa-se que as temperaturas na região do músculo vasto lateral tem diminuído em média de antes para depois nos dias segunda, quarta, quinta e sexta, no dia terça a temperatura teve um aumento significativo. Finalmente, o IR do Ultrassom tem aumentado em média de antes para depois em todos os dias.

Tabela 9 – Estatísticas descritivas de diferença da temperatura bíceps femoral (DBF), vasto lateral (DVL) e ultrassom (DUS).

Variáveis	Dia	Média	DP	1° Quartil	Mediana	3° Quartil
DBF	Segunda	0,420	0,736	0,200	0,550	0,775
	Terça	0,597	1,130	-0,125	0,650	0,943
	Quarta	0,517	0,976	-0,104	0,332	0,734
	Quinta	0,815	1,510	-0,325	0,690	2,070
	Sexta	0,641	1,630	-0,700	0,969	1,310
DVL	Segunda	0,090	0,626	-0,300	0,100	0,375
	Terça	-0,064	1,420	-0,525	-0,001	0,900
	Quarta	0,746	1,440	-0,282	0,650	1,610
	Quinta	0,580	1,230	-0,050	0,688	1,540
	Sexta	0,329	0,937	-0,306	0,105	0,500
DUS	Segunda	-0,034	0,017	-0,040	-0,040	-0,023
	Terça	-0,037	0,018	-0,050	-0,035	-0,023
	Quarta	-0,016	0,012	-0,028	-0,015	-0,010
	Quinta	-0,020	0,009	-0,028	-0,020	-0,020
	Sexta	-0,018	0,014	-0,025	-0,010	-0,010

Fonte: Do autor.

Nota: DP - Desvio padrão, 1° Quartil - Primeiro quartil (25%), 3° Quartil - Terceiro quartil (75%)  
 DBF - Diferença de Temperatura de bíceps femoral, DVL - Diferença de Temperatura de vasto lateral, DUS - Diferença de Ultrassom.

A seguir, são apresentados os ajustes dos modelos 3, 4 e 5 que foram descritos na [seção 4.2](#) utilizando a inferência Bayesiana.

Ao analisar os dados com a diferença da temperatura (Antes-Depois), verificou-se a partir das [Tabelas 10, 11 e 12](#) que não há evidências de não convergência da cadeia *a posteriori* para todos os parâmetros, segundo o critério de Geweke, onde o valor absoluto da estatística (IGW) é menor que 1,96 em todas as cadeias.

Ao avaliar o fator de dependência de Raftery e Lewis (RL), observa-se que os valores estão próximos de 1, sugerindo independência entre as iterações do processo de amostragem MCMC e, portanto, possível convergência.

O critério de Heidelberger-Welch (HW) demonstrou que a série é estacionária, já que os valores-p foram superiores ao nível de significância de 5%, por fim, o critério de Gelman-Rubin foi utilizado como uma medida de redução de escala potencial, e a convergência das cadeias foi analisada por meio do estatístico (GR), que apresentou valor maior ou igual a 1, indicando a convergência das cadeias.

Tabela 10 – Estimativas *a posteriori* dos parâmetros dos modelos 3, 4 e 5 ajustados à diferença da temperatura de bíceps femoral, intervalos de credibilidade HPD e critérios de convergência das cadeias.

Modelos	Parâmetros	Estimativas	HPD <sub>95%</sub>		Critérios de convergência			
			LI	LS	GW	RL	HW	GR
Modelo 3	$\mu$	0,598	0,262	0,953	0,649	0,999	0,881	1,000
	$\sigma_e$	1,226	1,012	1,488	1,590	0,999	0,814	1,000
	<i>deviance</i>	160,948	158,881	165,001	1,675	0,982	0,365	1,000
Modelo 4	$\beta_1$	0,433	-0,382	1,255	0,853	1,020	0,345	1,000
	$\beta_2$	-0,076	-1,212	1,121	0,805	1,020	0,591	1,000
	$\beta_3$	0,247	-0,818	1,268	1,125	0,982	0,969	1,000
	$\beta_4$	-0,375	-1,592	0,796	0,148	1,050	0,582	1,000
	$\beta_5$	-0,310	-1,479	0,887	1,471	0,999	0,058	1,000
	$\beta_6$	-0,316	-1,491	0,899	0,845	0,999	0,155	1,000
	$\beta_7$	0,067	-1,095	1,245	0,781	1,080	0,200	1,000
	$\beta_8$	0,228	-1,132	1,450	0,516	0,999	0,478	1,000
	$\beta_9$	1,217	-0,191	2,414	0,320	0,982	0,089	1,000
	$\beta_{10}$	0,362	-0,817	1,505	0,985	0,966	0,996	1,000
	$\sigma_e$	1,054	0,842	1,288	1,575	0,966	0,090	1,000
$\sigma_\delta$	0,646	0,000	1,791	0,084	1,570	0,101	1,000	
<i>deviance</i>	145,609	137,170	154,579	1,751	0,999	0,140	1,000	
Modelo 5	$\beta_1$	0,481	-0,205	1,217	0,473	1,020	0,415	1,000
	$\beta_2$	0,275	-0,548	1,105	0,429	0,999	0,528	1,000
	$\beta_3$	-0,077	-0,871	0,748	0,988	1,020	0,468	1,000
	$\beta_4$	0,121	-0,733	0,910	0,184	0,982	0,900	1,000
	$\beta_5$	0,079	-0,747	0,876	0,752	0,982	0,546	1,000
	$\sigma_e$	1,122	0,871	1,389	0,109	1,030	0,646	1,000
	$\sigma_b$	0,687	0,013	1,250	0,273	1,900	0,451	1,000
	<i>deviance</i>	151,633	139,968	163,970	1,464	1,070	0,542	1,000

Tabela 11 – Estimativas *a posteriori* dos parâmetros dos modelos 3, 4 e 5 ajustados à diferença da temperatura de vasto lateral, intervalos de credibilidade HPD e critérios de convergência das cadeias.

Modelos	Parâmetros	Estimativas	HPD <sub>95%</sub>		Critérios de convergência			
			LI	LS	GW	RL	HW	GR
Modelo 3	$\mu$	0,337	0,005	0,673	1,003	1,020	0,577	1,000
	$\sigma_e$	1,196	0,968	1,454	1,394	0,951	0,080	1,000
	<i>deviance</i>	158,145	156,047	162,594	1,677	0,982	0,964	1,000
Modelo 4	$\beta_1$	0,310	-0,531	1,196	0,795	1,010	0,305	1,000
	$\beta_2$	-0,072	-1,334	1,086	0,312	0,999	0,940	1,000
	$\beta_3$	-0,092	-1,104	0,866	0,470	1,020	0,573	1,000
	$\beta_4$	-0,821	-1,941	0,599	0,680	0,982	0,386	1,000
	$\beta_5$	-0,261	-1,509	1,047	0,414	1,030	0,839	1,000
	$\beta_6$	-0,201	-1,379	0,970	0,468	1,020	0,397	1,000
	$\beta_7$	0,060	-1,080	1,226	0,182	1,030	0,380	1,000
	$\beta_8$	0,753	-0,541	1,982	1,560	1,020	0,887	1,000
	$\beta_9$	0,566	-0,848	1,780	1,202	0,982	0,641	1,000
	$\beta_{10}$	-0,072	-1,234	1,136	1,590	0,999	0,603	1,000
	$\sigma_e$	0,997	0,789	1,221	0,023	1,050	0,957	1,000
	$\sigma_\delta$	0,706	0,000	1,966	0,225	1,650	0,630	1,000
	<i>deviance</i>	140,109	131,611	149,299	0,161	0,999	0,600	1,000
Modelo 5	$\beta_1$	0,531	-0,135	1,213	0,146	0,975	0,896	1,000
	$\beta_2$	0,012	-0,760	0,748	0,180	0,999	0,674	1,000
	$\beta_3$	-0,432	-1,179	0,347	1,620	1,020	0,769	1,000
	$\beta_4$	-0,223	-1,009	0,530	0,933	1,020	0,791	1,000
	$\beta_5$	-0,574	-1,364	0,170	0,783	0,951	0,956	1,000
	$\sigma_e$	1,014	0,790	1,262	0,174	0,999	0,977	1,000
	$\sigma_b$	0,747	0,177	1,395	1,109	1,910	0,857	1,000
	<i>deviance</i>	141,405	129,796	155,861	1,266	0,999	0,964	1,000

Tabela 12 – Estimativas *a posteriori* dos parâmetros dos modelos 3, 4 e 5 ajustados à diferença de ultrassom, intervalos de credibilidade HPD e critérios de convergência das cadeias.

Modelos	Parâmetros	Estimativas	HPD <sub>95%</sub>		Critérios de convergência			
			LI	LS	GW	RL	HW	GR
Modelo 3	$\mu$	-0,025	-0,029	-0,020	0,551	0,951	0,350	1,000
	$\sigma_e$	0,017	0,013	0,020	1,232	0,966	0,398	1,000
	<i>deviance</i>	-269,320	-271,428	-265,264	0,966	0,951	0,522	1,000
Modelo 4	$\beta_1$	-0,032	-0,505	0,534	0,894	1,030	0,194	1,000
	$\beta_2$	0,011	-0,665	0,829	0,066	1,050	0,371	1,000
	$\beta_3$	0,010	-0,011	0,031	0,573	1,020	0,470	1,000
	$\beta_4$	0,005	-0,751	0,682	0,115	0,983	0,580	1,000
	$\beta_5$	0,009	-0,762	0,669	0,065	0,983	0,612	1,000
	$\beta_6$	0,009	-0,764	0,675	1,163	1,080	0,188	1,000
	$\beta_7$	0,005	-0,767	0,675	1,172	1,080	0,179	1,000
	$\beta_8$	0,015	-0,702	0,769	0,513	1,080	0,613	1,000
	$\beta_9$	0,005	-0,737	0,734	0,481	1,080	0,635	1,000
	$\beta_{10}$	0,021	-0,648	0,845	0,041	1,050	0,390	1,000
	$\sigma_e$	0,017	0,013	0,021	0,968	0,999	0,822	1,000
$\sigma_\delta$	0,339	0,000	0,972	0,797	1,460	0,264	1,000	
<i>deviance</i>	-268,268	-277,534	-257,585	1,107	0,999	0,174	1,000	
Modelo 5	$\beta_1$	-0,016	-0,025	-0,007	0,120	1,030	0,678	1,000
	$\beta_2$	-0,004	-0,017	0,008	0,453	0,966	0,528	1,000
	$\beta_3$	-0,018	-0,031	-0,006	0,237	1,020	0,718	1,000
	$\beta_4$	-0,002	-0,015	0,011	0,574	0,982	0,956	1,000
	$\beta_5$	-0,021	-0,033	-0,009	1,494	0,999	0,674	1,000
	$\sigma_e$	0,014	0,011	0,017	1,449	1,050	0,176	1,000
	$\sigma_b$	0,005	0,000	0,010	0,062	1,250	0,799	1,000
	<i>deviance</i>	-285,578	-296,093	-275,620	1,172	1,020	0,401	1,000

Na Tabela 13, são apresentados os valores de DIC, WAIC, p-WAIC e Fator de Bayes. Pode-se observar que, para a diferença da temperatura do bíceps femoral, o modelo 4 demonstrou melhor ajuste, considerando os dias como componentes aleatórios e os cães como efeitos fixos, escolhido com base no DIC e WAIC.

No caso da diferença da temperatura do vasto lateral, os modelos 4 e 5 foram selecionados, e pelo Fator de Bayes, o modelo 4 foi preferido. Quanto à diferença no IR do Ultrassom, o modelo que apresentou melhor ajuste foi o modelo 5, considerando os cães como efeitos aleatórios e mantendo os dias como efeitos fixos.

Tabela 13 – Comparação dos modelos ajustados às diferença das temperaturas de bíceps femoral, vasto lateral e a variável ultrassom utilizando os critérios DIC, WAIC, p-WAIC e Fator de Bayes.

Variáveis	Modelos	DIC	WAIC	p-WAIC	Fator de Bayes
Bíceps femoral	3	163,028	163,100	2,200	$FB_{3,4}=75240,882$
	4	<b>156,715</b>	<b>154,200</b>	8,500	$FB_{3,5}=9562,075$
	5	173,582	161,800	10,200	$FB_{4,5}=0,127$
Vasto lateral	3	160,426	160,200	2,100	$FB_{3,4}=392452,190$
	4	<b>151,426</b>	160,200	8,900	$FB_{3,5}=675129,633$
	5	165,849	<b>152,200</b>	10,800	$FB_{4,5}=1,720$
Ultrassom	3	-267,124	-267,600	1,700	$FB_{3,4}=49,849$
	4	-253,406	-258,900	9,500	$FB_{3,5}=114039,482$
	5	<b>-271,546</b>	<b>-277,300</b>	8,200	$FB_{4,5}=2287,695$

A seguir, serão apresentados os gráficos de média ergódica dos parâmetros dos modelos selecionados para cada variável a partir da Tabela 13. Pelos gráficos da Figura 13 de média ergódica do desvio padrão  $\sigma_e$  do modelo 4 e o desvio padrão do efeito aleatório  $\sigma_b$  (considerado os dias como blocos aleatórios ) observa-se a convergência das cadeias.

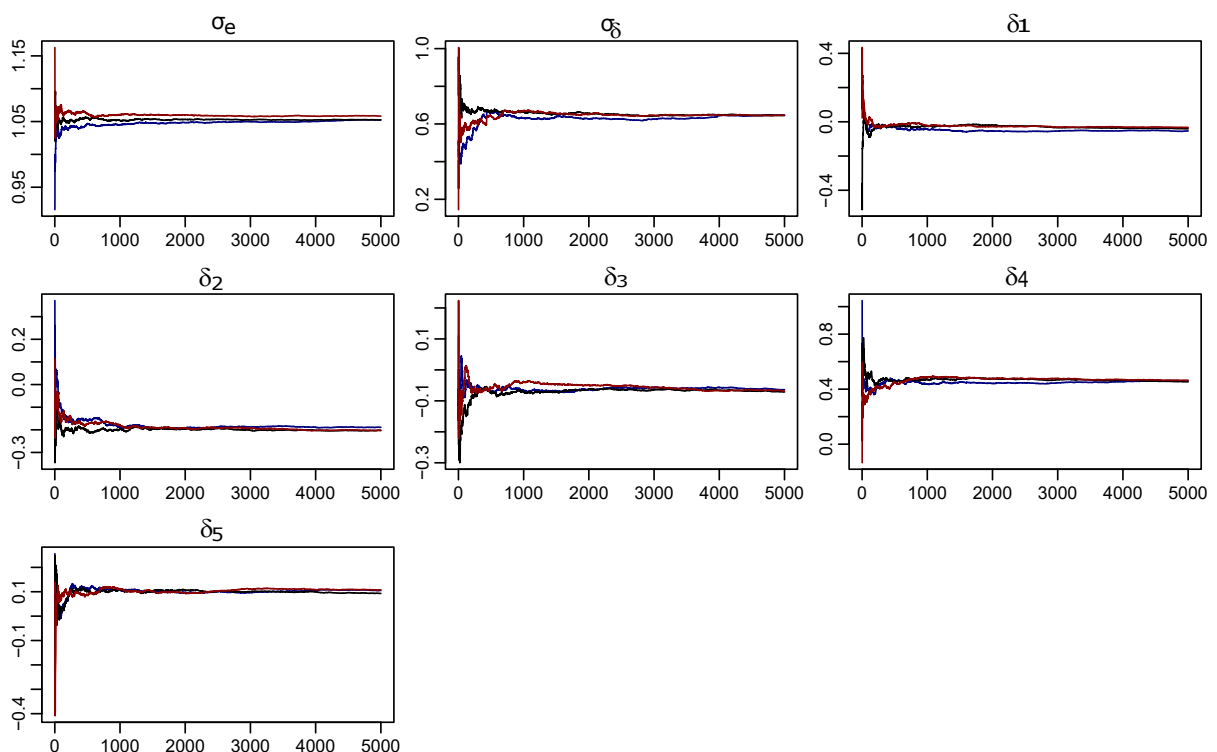


Figura 13 – Média ergódica dos parâmetros do modelo 4 ajustado à diferença da temperatura de bíceps femoral.



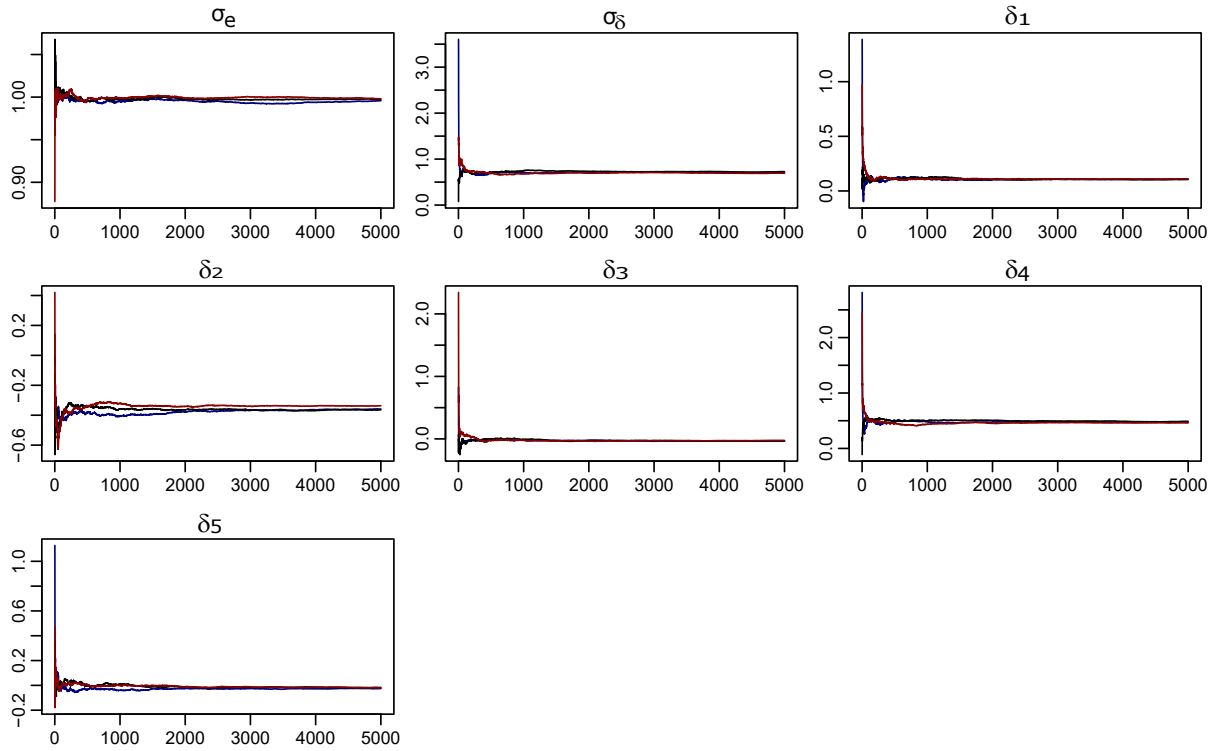


Figura 14 – Média ergódica dos parâmetros do modelo 4 ajustado à diferença da temperatura de vasto lateral.

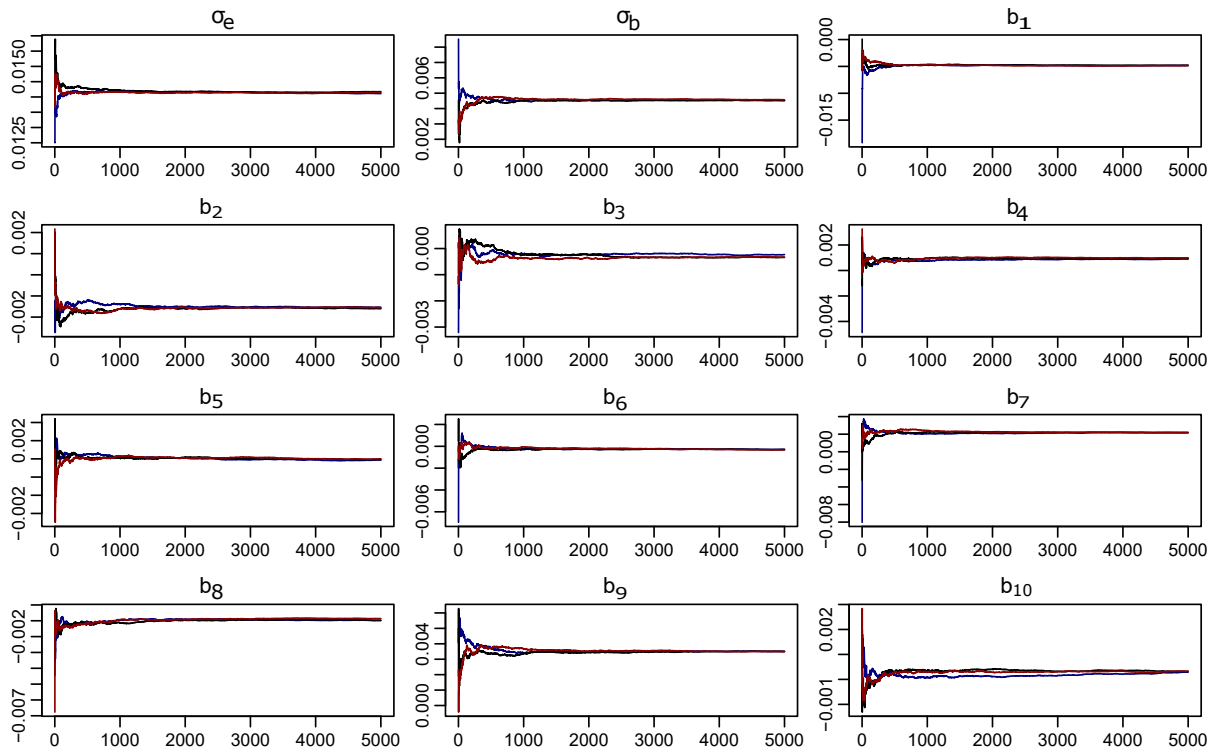


Figura 15 – Média ergódica dos parâmetros do modelo 5 ajustado à diferença da variável ultrassom.

A partir dos gráficos de média ergódica apresentado na Figura 14 dos parâmetros do modelo 4, observa-se o comportamento das médias dos parâmetros do desvio padrão  $\sigma_e$  e desvio padrão dos efeitos aleatórios  $\sigma_b$ , e na Figura 15 dos parâmetros do modelo 5, indicam a convergência das cadeias.

Nas Figuras 16, 18 e 20 são apresentadas as estimativas *a posteriori* da diferença de temperatura, os pontos de cor azul representam os dados observados, os pontos de cor vermelha representando as estimativas *a posterior* e a cor cinza representando o intervalo  $HPD_{95\%}$ .

Assim, o melhor modelo para a diferença da temperatura de bíceps femoral foi o modelo que foi considerado como efeitos aleatório os dias (blocos aleatórios) e mantendo como efeito fixo os cães. Na Figura 16, observa-se que na segunda, terça e quarta a temperatura dos cães tiveram poucas oscilações, já na quinta e sexta diminuíram significativamente, assim conclui-se que os dias influenciaram na medição das temperaturas.

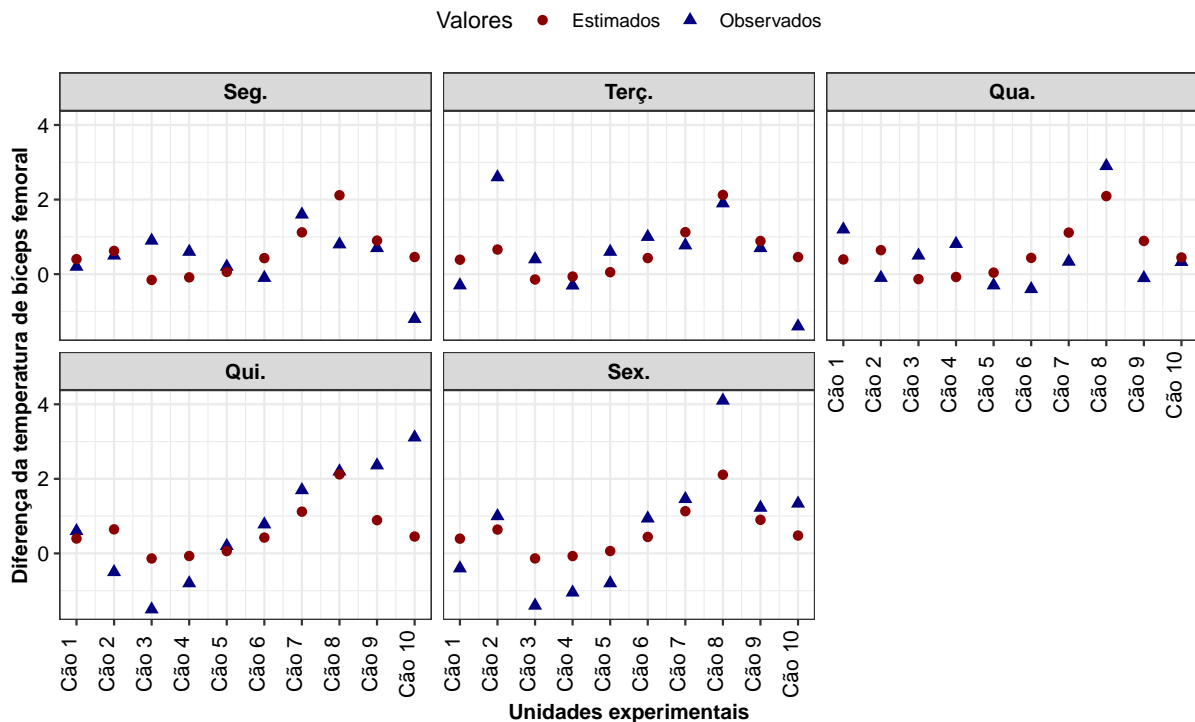


Figura 16 – Gráficos das diferenças de temperatura de bíceps femoral a partir do ajuste com o modelo 4 considerando como bloco aleatório os dias.

Analisou-se diferença de temperatura termográfica de bíceps femoral com o modelo 5, que foi considerado como efeitos aleatório os cães (blocos aleatórios) e mantendo como efeito fixo os dias. Na Figura 17, nota-se nos cães 3, 4 e 5 que as temperaturas tiveram aumentos significativos, e nos cães 6 a 10 tiveram uma diminuição.

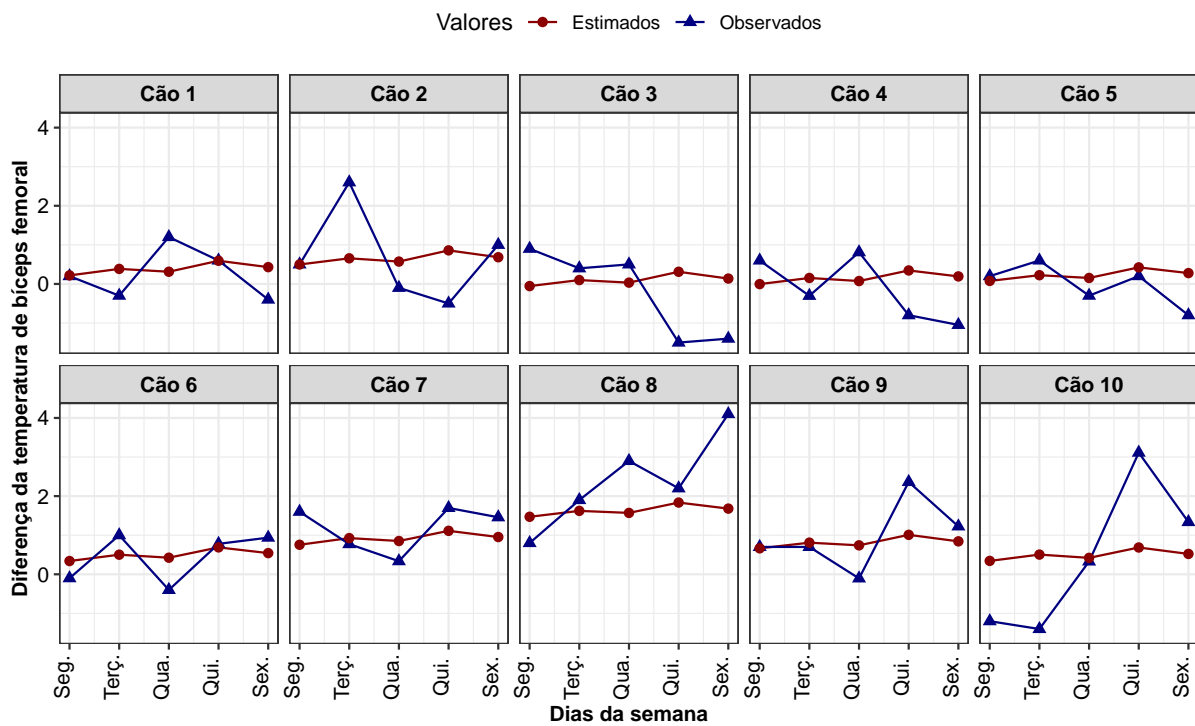


Figura 17 – Gráficos das diferenças de temperatura de bíceps femoral a partir do ajuste com o modelo 5 considerando como bloco aleatório os cães.

No entanto, para a diferença da temperatura de vasto lateral o modelo 4 ajustou-se melhor, Figura 18. A partir desta figura, percebe-se que a temperatura dos cães variam entre os dias. No modelo 5, em que os dias foram consideradas como fixo e os cães aleatórios, na Figura 19 observa-se que nos cães 1, 2, 4, 6, 7 e 8 as temperaturas não tiveram aumentos significativos, e nos outros cães tiveram uma diminuição.

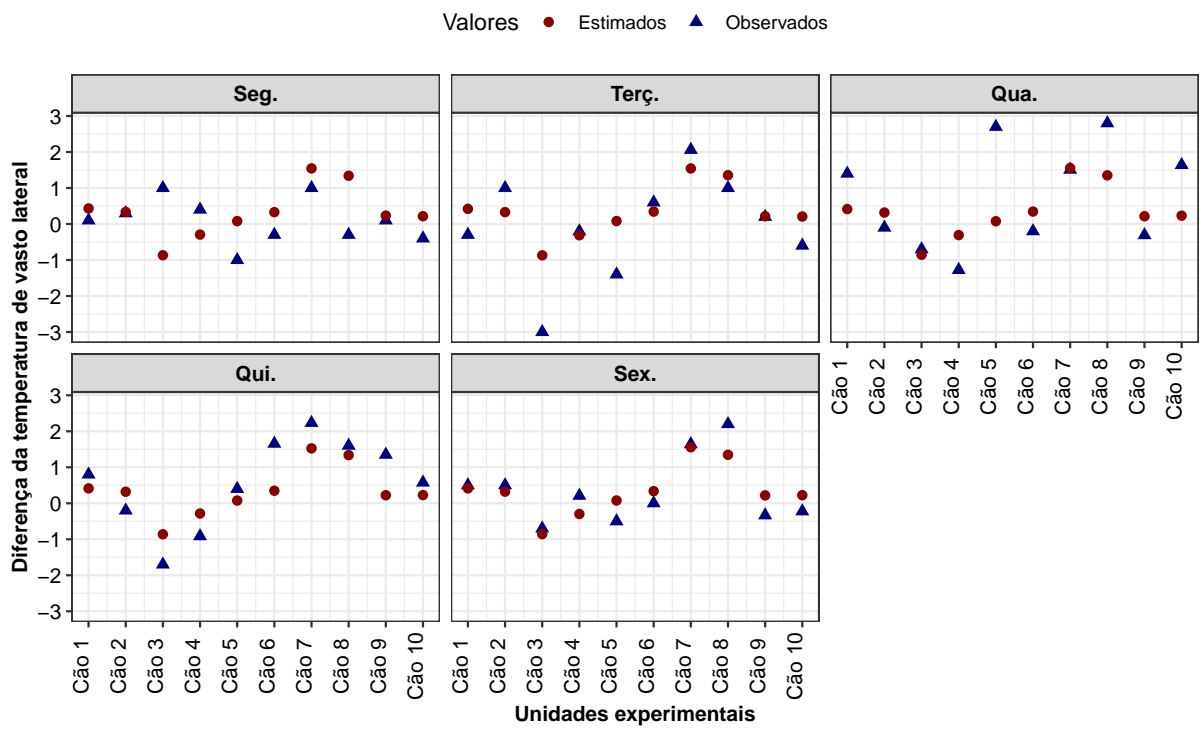


Figura 18 – Gráficos das diferenças de temperatura de vasto lateral a partir do ajuste com o modelo 4 considerando como bloco aleatório os dias.

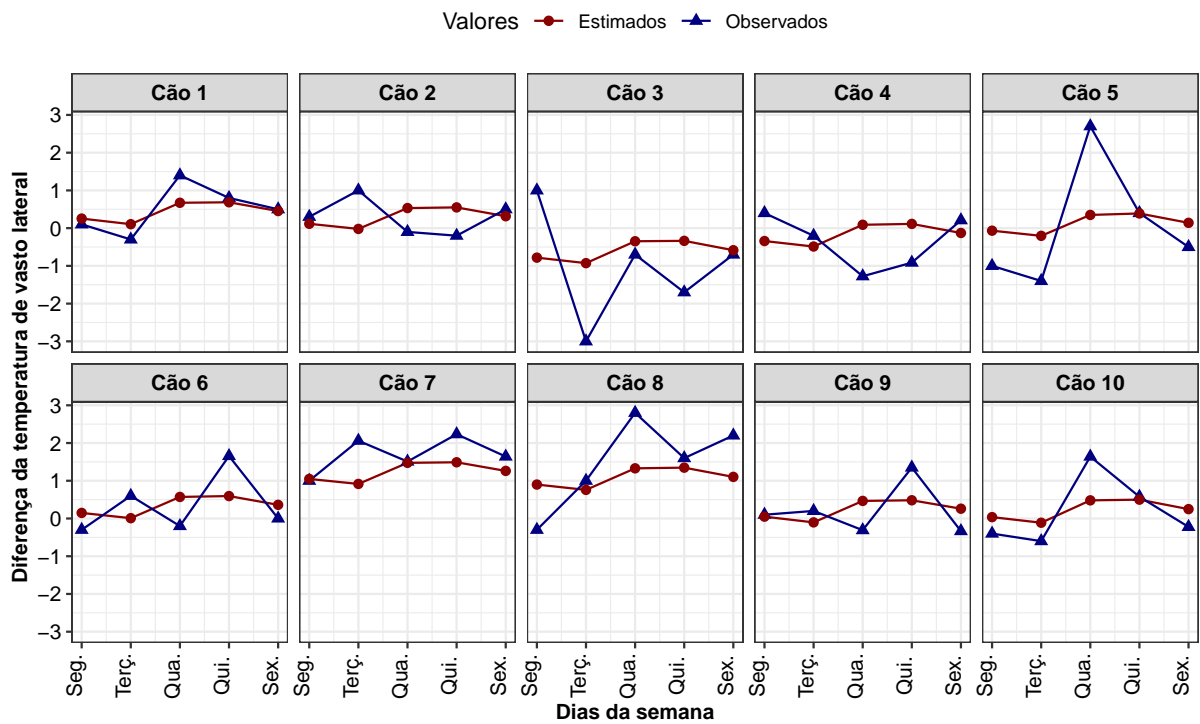


Figura 19 – Gráficos das diferenças de temperatura de vasto lateral a partir do ajuste com o modelo 5 considerando como bloco aleatório os cães.

O modelo que ajustou-se melhor para a diferença de IR do ultrassom foi o modelo 5 que considera como efeitos aleatório os cães (blocos aleatórios) e mantendo como efeito fixo os os dias, [Figura 20](#). Nesta figura observa-se que o de índice de resistência nos cães 1 e 5, aumentaram significativamente e nos outros cães diminuíram durante a semana.

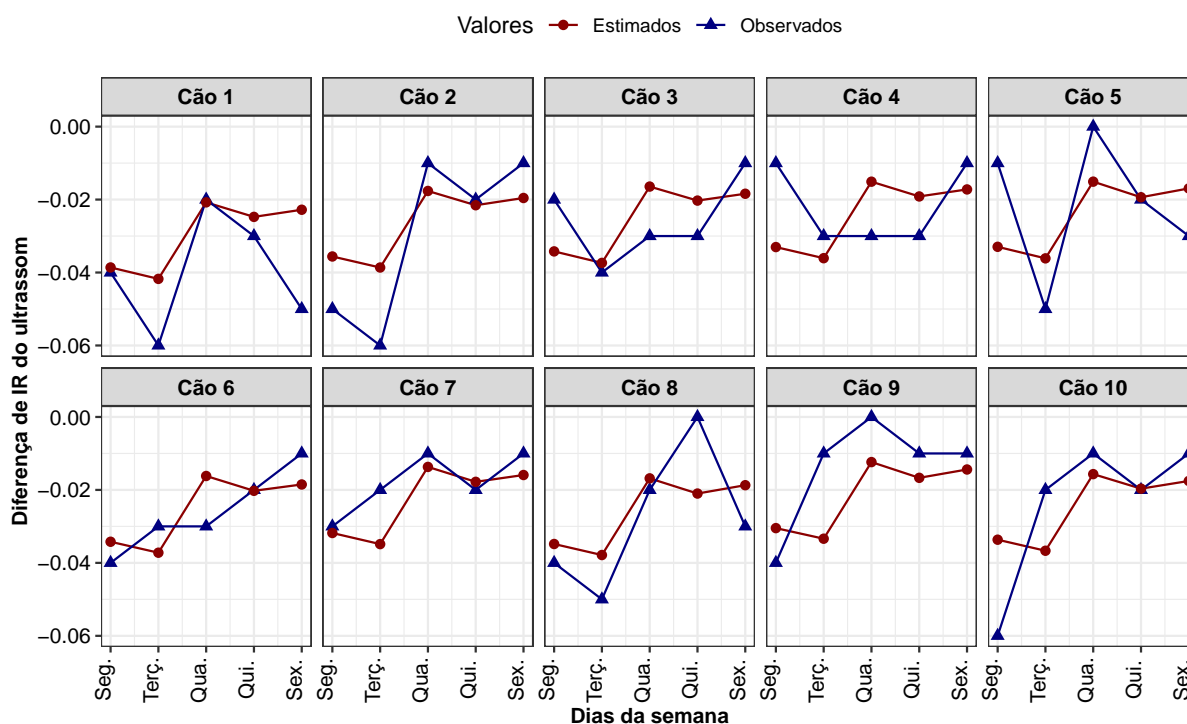


Figura 20 – Gráficos das diferenças do IR do ultrassom (Índice de resistência) a partir do ajuste com o modelo 5 considerando como bloco aleatório os cães.

A medições da temperatura de bíceps femoral, vasto lateral e ultrassom foram ajustados com os três modelos descritos na [seção 4.2](#), e os resultados são mostrados nas [Figuras 31, 32, 33 e 34](#) (APÊNDICE C).

A plataforma de vibração de corpo inteiro tem sido utilizada para diferentes benefícios, [Gomes et al. \(2018\)](#) verificou o aumento da força muscular, melhora do desempenho nos exercícios e melhora do equilíbrio e da mobilidade. Da mesma forma resultados obtidos por [Gomes \(2019\)](#) cujo estudo foi avaliar os efeitos da Vibração de Corpo Inteiro em cães diagnosticados com displasia coxofemoral observaram um aumento significativo ao longo do tratamento.

Os resultados encontrados neste estudo permite concluir que a utilização adequada desta ferramenta (Plataforma vibratória de corpo inteiro) é de vital importância, na investigação de [Silva \(2016\)](#) para a caracterização dos parâmetros de vibração imposta em uma plataforma vibratória de corpo inteiro utilizada em reabilitação e treinamento, na qual a ferramenta teve 6 níveis, e foi avaliado em diferentes momentos (ântero-posterior) e encontraram que os parâmetros de aceleração de vibração aumentam conforme o nível de vibração administrado aumenta.

A investigação dos autores [Junior \*et al.\* \(2020\)](#) avaliaram dois protocolos de exercícios de plataforma vibratória nas temperaturas do joelho e retal e concluíram que estes exercícios podem ser utilizados como terapia complementar para atividade muscular de baixo impacto em cães e podem ser adequado para um consumo energético eficiente.

## 6 Conclusões

A partir dos resultados verificou-se que os modelos ajustados com as diferentes estruturas de matrizes de variância-covariância obtiveram um bom desempenho, reforçando a importância de testar vários tipos de estruturas das matrizes. Assim, as matrizes autorregressivo de primeira ordem e componentes de variância que adequaram-se aos dados de temperatura termográfica.

A análise da correlação entre o intercepto e a inclinação aleatória em modelos mistos é importante porque ela reflete a relação entre o nível inicial da temperatura e sua taxa de mudança ao longo do tempo. Desta forma, observou-se que o coeficiente de correlação entre intercepto e inclinação aleatórios por cães ( $\rho_b$ ) foi próximo de zero para o modelo 1. Logo os cães que começam com um nível mais alto da temperatura tendem a ter uma taxa de mudança significativa ao longo do tempo. Pelos resultados obtidos a partir do ajuste do modelo 2, os coeficientes de correlação entre inclinação e intercepto aleatórios por cães e dias ( $\rho_{b_j}$  e  $\rho_{\delta_k}$ ), foram positivos e próximos a zero.

O estudo da correlação entre o intercepto e a inclinação aleatória é importante pois se a correlação entre o intercepto e a inclinação aleatória é positiva, então os efeitos das variáveis explicativas nas taxas de mudança ao longo do tempo podem ser afetados pela distribuição inicial da temperatura. Nesse caso, pode ser necessário considerar modelos que levem em conta essa correlação para obter estimativas confiáveis dos efeitos das variáveis explicativas.

Portanto o estudo da variabilidade das temperaturas entre os momentos em cães pode ser importante para monitorar a saúde, detectar problemas precocemente, compreender a resposta ao estresse e garantir o controle adequado da temperatura corporal dos cães, pois a observação de mudanças significativas ao longo do tempo pode indicar a presença de doenças ou distúrbios, como infecções, inflamações, desequilíbrios hormonais ou doenças metabólicas.

Na análise das diferenças nas medições das temperaturas termográficas nas regiões de bíceps femoral, vasto lateral e ultrassom, observa-se que os modelos 4 e 5 foram os mais adequados. Isso se deve ao fato de que nesses modelos foram considerados como bloco aleatório os dias e os cães, respectivamente. Com base na análise de DIC, conclui-se que o modelo mais adequado para as medições nas regiões de bíceps femoral e vasto lateral é o modelo 4. No entanto, pela natureza do experimento realizado e pela visualização dos gráficos, percebe-se que o modelo adequado é o modelo 5.

Desta forma percebe-se a importância dos análises adequada aos dados obtidos em

experimentos com esta ferramenta, assim a modelagem utilizando a inferência Bayesiana com as diferentes estruturas de matrizes de variância e covariância obtiveram resultados importantes. Além disso, a análise com a diferença das temperaturas de bíceps femoral, vasto lateral e IR do ultrassom reafirma a importância de modelar considerando diferentes efeitos aleatórios.

Finalmente, este estudo introduz uma abordagem inovadora na área de medicina veterinária, explorando os exames de vibração de corpo inteiro em cães e propondo uma modelagem alternativa à análise conduzida por Santos *et al.* (2017).

## 6.1 Trabalhos futuros

Com base nos resultados alcançados neste estudo, são propostas algumas direções para orientar futuros desenvolvimentos de pesquisas:

- Sugere-se realizar uma exploração mais abrangente considerando uma variedade maior de momentos, e matrizes de variância e covariância em relação ao tempo (momentos).
- Recomenda-se realizar uma busca cuidadosa das *prioris* informativas e não informativas para melhorar o ajuste dos modelos Bayesianos.
- Realizar uma análise de modelos mistos longitudinais para as informações de exames de sangue dos estudo de Santos *et al.* (2017) e desse modo, verificar de uma forma mais abrangente a eficiência da terapia WBV em cães.



# REFERÊNCIAS

- ADHIKARI, S. Generalized wishart distribution for probabilistic structural dynamics. **Computational Mechanics**, Springer, v. 45, p. 495–511, 2010. 19, 20
- ALBERT, J. **Bayesian computation with R**. [S.l.]: Springer Science and Business Media, 2009. 3
- ARIYO, O. *et al.* Bayesian model selection in linear mixed models for longitudinal data. **Journal of Applied Statistics**, Taylor & Francis, v. 47, n. 5, p. 890–913, 2020. 2, 7, 13, 35
- BARBOZA, R. d. C. O. *et al.* Análise de medidas repetidas em ovinos da raça santa inês por meio de modelos mistos. **Sigmae**, v. 8, n. 2, p. 779–783, 2019. 49
- BASU, S. **Bayesian and Frequentist Regression Methods**. [S.l.]: JSTOR, 2016. 14
- BASU, S.; CHIB, S. Marginal likelihood and bayes factors for dirichlet process mixture models. **Journal of the American Statistical Association**, Taylor & Francis, v. 98, n. 461, p. 224–235, 2003. 35
- BERRY, D. A.; STANGL, D. **Bayesian biostatistics**. [S.l.]: CRC Press, 2018. 14
- BESAG, J. Discussion: Markov chains for exploring posterior distributions. **The Annals of Statistics**, Institute of Mathematical Statistics, v. 22, n. 4, p. 1734–1741, 1994. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2242479>>. Acesso em: 27 Julho. 2019. 21
- BOLSTAD, W. M.; CURRAN, J. M. **Introduction to Bayesian statistics**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2016. 14, 15
- BOOTH, D. Bayesian biostatistics and diagnostic medicine. **Technometrics**, American Society for Quality, v. 52, n. 3, p. 367, 2010. 14, 15
- BOX, G. E.; TIAO, G. C. **Bayesian inference in statistical analysis**. [S.l.]: John Wiley and Sons, 2011. v. 40. 3, 15
- BROOKS, S. P.; GELMAN, A. General methods for monitoring convergence of iterative simulations. **Journal of computational and graphical statistics**, Taylor & Francis, v. 7, n. 4, p. 434–455, 1998. 25
- BROWN, H.; PRESCOTT, R. **Applied mixed models in medicine**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2015. 7
- BURGHOFF, T. **Linear-Mixed Models—A Practical Guide Using Statistical Software**, BT West, KB Welch, and AT Galecki.(2015). Boca Raton, FL: Taylor and Francis/CRC Press. 440 pages, ISBN-10: 1466560991, ISBN-13: 978-1466560994. 2016. 12
- CABRAL, M. S.; GONÇALVES, M. H. Análise de dados longitudinais. **Sociedade Portuguesa de Estatística**, 2011. 3
- CARLIN, B. P.; LOUIS, T. A. **Bayesian methods for data analysis**. [S.l.]: CRC Press, 2008. 14, 16

- CARLO, M. C. M. Stochastic simulation for bayesian inference. **CRC Texts in Statistical Science Series**, 2006. 33
- CASELLA, G.; GEORGE, E. I. Explaining the gibbs sampler. **The American Statistician**, Taylor & Francis, v. 46, n. 3, p. 167–174, 1992. 17
- CELEUX, G. *et al.* Deviance information criteria for missing data models. **Bayesian Analysis**, International Society for Bayesian Analysis, v. 1, n. 4, p. 651 – 673, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1214/06-BA122>>. 35
- CHATTERJEE, D.; BHATTACHARYA, S. Convergence of pseudo-bayes factors in forward and inverse regression problems. **arXiv preprint arXiv:2006.06020**, 2020. 33
- CHIB, S. Marginal likelihood from the gibbs output. **Journal of the american statistical association**, Taylor & Francis, v. 90, n. 432, p. 1313–1321, 1995. Disponível em: <<https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/01621459.1995.10476635>>. 34
- CHICKERING, D. M.; HECKERMAN, D. Efficient approximations for the marginal likelihood of bayesian networks with hidden variables. **Machine learning**, Springer, v. 29, p. 181–212, 1997. 34
- COHEN, L. On the mean ergodic theorem. **Annals of Mathematics**, JSTOR, p. 505–509, 1940. 26
- CONGDON, P. **Bayesian statistical modelling**. 2. ed. [S.l.]: John Wiley and Sons, 2007. 3
- DAI, C.; LIU, J. S. Monte carlo approximation of bayes factors via mixing with surrogate distributions. **Journal of the American Statistical Association**, Taylor & Francis, v. 117, n. 538, p. 765–780, 2022. 35
- DEMIDENKO, E. **Mixed models: theory and applications with R**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013. 10
- DIGGLE, P. *et al.* **Analysis of longitudinal data**. [S.l.]: Oxford university press, 2002. 2, 10
- DIGGLE, P.; LIANG, K.-Y.; ZEGER, S. L. Longitudinal data analysis. **New York: Oxford University Press**, v. 5, p. 13, 1994. 2
- DO, C. B. The multivariate gaussian distribution. **Section Notes, Lecture on Machine Learning, CS**, v. 229, 2008. 18
- DONG, C.; WEDEL, M. Banova: Hierarchical bayesian anova models. 2020. 12
- DOORN, J. van *et al.* Bayes factors for mixed models. **Computational Brain & Behavior**, Springer, p. 1–13, 2021. 33, 34
- \_\_\_\_\_. Bayes factors for mixed models: Perspective on responses. **Computational Brain & Behavior**, Springer, v. 6, n. 1, p. 127–139, 2023. 33, 34
- DU, H. *et al.* Comparing dic and waic for multilevel models with missing data. **Behavior Research Methods**, Springer, p. 1–20, 2023. 36
- DUNFORD, N. A mean ergodic theorem. 1939. 26

- DUNN, P. K.; SMYTH, G. K. *et al.* **Generalized linear models with examples in R**. [S.l.]: Springer, 2018. v. 53. 6
- ESCOFFRE, J.-M.; BOUAKAZ, A. **Therapeutic ultrasound**. [S.l.]: Springer, 2015. v. 880. 28
- FALCONER, J. R. *et al.* Methods for eliciting informative prior distributions: A critical review. **Decision Analysis**, INFORMS, 2022. 15
- FAUSTO, M. A. *et al.* O modelo de regressão linear misto para dados longitudinais: uma aplicação na análise de dados antropométricos desbalanceados. **Cadernos de Saúde Pública**, SciELO Public Health, v. 24, p. 513–524, 2008. 3
- FERRO, M. M. Modelos mistos na experimentação animal. 2018. 10
- FITZMAURICE, G. *et al.* **Longitudinal data analysis**. [S.l.]: CRC press, 2008. 12, 13
- FOUEDJIO, F. *et al.* Conditional simulation of categorical spatial variables using gibbs sampling of a truncated multivariate normal distribution subject to linear inequality constraints. **Stochastic Environmental Research and Risk Assessment**, Springer, v. 35, p. 457–480, 2021. 18
- FRIEL, N.; PETTITT, A. N. Marginal Likelihood Estimation via Power Posteriors. **Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology**, v. 70, n. 3, p. 589–607, 04 2008. ISSN 1369-7412. Disponível em: <<https://doi.org/10.1111/j.1467-9868.2007.00650.x>>. 34
- GAMERMAN, D. **Simulação estocástica via cadeias de Markov**. [S.l.]: ABE, 1996. 23, 24, 25, 33
- GAMERMAN, D.; LOPES, H. F. **Markov chain Monte Carlo: stochastic simulation for Bayesian inference**. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2006. 16, 17, 25
- GAUSSORGUES, G.; CHOMET, S. **Infrared thermography**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1993. v. 5. 28
- GELFAND, A. E.; SMITH, A. F. Sampling-based approaches to calculating marginal densities. **Journal of the American statistical association**, Taylor & Francis, v. 85, n. 410, p. 398–409, 1990. 17
- GELMAN, A. *et al.* **Bayesian data analysis**. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 1995. 23, 24, 25
- GELMAN, A.; HILL, J. **Data analysis using regression and multilevel/hierarchical models**. [S.l.]: Cambridge university press, 2006. 29
- GELMAN, A.; HWANG, J.; VEHTARI, A. Understanding predictive information criteria for bayesian models. **Statistics and computing**, Springer, v. 24, n. 6, p. 997–1016, 2014. 36
- GELMAN, A.; RUBIN, D. B. Inference from iterative simulation using multiple sequences. **Statistical science**, JSTOR, p. 457–472, 1992. 23, 25
- GEMAN, S.; GEMAN, D. Stochastic relaxation, gibbs distributions, and the bayesian restoration of images. **IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence**, IEEE, n. 6, p. 721–741, 1984. 16, 17
- GEWEKE, J. Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to the calculations of posterior moments. **Bayesian statistics**, Oxford University Press, v. 4, p. 641–649, 1992. 23

GHOSAL, S.; GHOSH, J.; RAMAMOORTHY, R. Non-informative priors via sieves and packing numbers. In: **Advances in statistical decision theory and applications**. [S.l.]: Springer, 1997. p. 119–132. 15

GHOSH, J. K.; DELAMPADY, M.; SAMANTA, T. **An introduction to Bayesian analysis: theory and methods**. [S.l.]: Springer, 2006. v. 725. 15

GILLE, S. *et al.* Dog owners' perceptions of canine body composition and effect of standardized education for dog owners on body condition assessment of their own dogs. **Veterinary Sciences**, MDPI, v. 10, n. 7, p. 447, 2023. 52

GOMES, M. V. *et al.* Applicability of whole-body vibration exercises as a new tool in veterinary medicine. **Revista Hospital Universitário Pedro Ernesto (HUPE)**, v. 17, n. 1, 2018. 4, 62

GOMES, M. V. F. Avaliação dos músculos quadriceps femoris de cães diagnosticados com displasia coxofemoral após o uso de plataforma vibratória. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2019. 4, 62

GOMES, M. V. F. *et al.* Long-term effects of whole-body vibration on hind limb muscles, gait and pain in lame dogs with borderline-to-severe hip dysplasia—a pilot study. **Animals**, MDPI, v. 13, n. 22, p. 3456, 2023. 52

GÓMEZ-RUBIO, V. **Bayesian inference with INLA**. [S.l.]: CRC Press, 2020. 2

GRAFAREND, E.; AWANGE, J. **Linear and Nonlinear Models: Fixed effects, random effects, and total least squares**. [S.l.]: Springer, 2012. 22

HAN, C.; CARLIN, B. P. Markov chain monte carlo methods for computing bayes factors: A comparative review. **Journal of the American Statistical Association**, Taylor & Francis, v. 96, n. 455, p. 1122–1132, 2001. 35

HASTINGS, W. K. Monte carlo sampling methods using markov chains and their applications. Oxford University Press, 1970. 16

\_\_\_\_\_. Monte carlo sampling methods using markov chains and their applications. **Biometrika**, v. 57, n. 1, p. 97–109, 1970. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/biomet/57.1.97>>. Acesso em: 20 Dez. 2018. 21

HEIDELBERGER, P.; WELCH, P. D. Simulation run length control in the presence of an initial transient. **Operations Research**, v. 31, p. 97–109, 1983. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287/opre.31.6.1109>>. Acesso em: 02 Mai. 2018. 23, 24

HENDERSON, C. General flexibility of linear model techniques for sire evaluation. **Journal of Dairy Science**, Elsevier, v. 57, n. 8, p. 963–972, 1974. 9

\_\_\_\_\_. Statistical methods in animal improvement: historical overview. **Advances in statistical methods for genetic improvement of livestock**, Springer, p. 2–14, 1990. 9

HOLGERSSON, T.; PIELASZKIEWICZ, J. A collection of moments of the wishart distribution. **Recent Developments in Multivariate and Random Matrix Analysis: Festschrift in Honour of Dietrich von Rosen**, Springer, p. 147–162, 2020. 20

IBARRA-CASTANEDO, C.; MALDAGUE, X. P. Infrared thermography. **Handbook of Technical Diagnostics: Fundamentals and Application to Structures and Systems**, Springer, p. 175–220, 2013. 28

- INGLIS, A. *et al.* Jags: just another gibbs sampler. 2018. 23
- JEFFREYS, H. **Theory of Probability**. 3rd. ed. Oxford: Oxford University, 1961. 33, 34
- \_\_\_\_\_. **The theory of probability**. [S.l.]: OuP Oxford, 1998. 33, 34
- JI, Y.; SHI, H. Bayesian variable selection in linear quantile mixed models for longitudinal data with application to macular degeneration. **Plos one**, Public Library of Science San Francisco, CA USA, v. 15, n. 10, p. e0241197, 2020. 7, 13
- JUNIOR, J. V. *et al.* Exercício em plataforma vibratória aumenta a perfusão sanguínea da articulação do joelho e a temperatura retal de cães saudáveis. **Arquivo Brasileiro de Medicina Veterinária e Zootecnia**, SciELO Brasil, v. 72, p. 305–311, 2020. 4, 63
- JUNIOR, L. L. M. M. *et al.* A inverted-wishart distribution approach for the noise covariance matrix estimation applied to target tracking problems. 2019. 20
- KASS, R. E.; RAFTERY, A. E. Bayes factors. **Journal of the American Statistical Association**, Taylor and Francis, v. 90, n. 430, p. 773–795, 1995. Disponível em: <<https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/01621459.1995.10476572>>. Acesso em: 07 Jun. 2019. 33
- \_\_\_\_\_. Bayes factors. **Journal of the american statistical association**, Taylor & Francis, v. 90, n. 430, p. 773–795, 1995. 34
- KNILL, D. C.; RICHARDS, W. **Perception as Bayesian inference**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996. 14
- LAHIRI, B. B. *et al.* Medical applications of infrared thermography: a review. **Infrared physics & technology**, Elsevier, v. 55, n. 4, p. 221–235, 2012. 28
- LAIRD, N. M.; WARE, J. H. Random-effects models for longitudinal data. **Biometrics**, JSTOR, p. 963–974, 1982. 13
- LESAFFRE, E.; LAWSON, A. Statistics in practice. **Bayesian Biostatistics, Bayesian Methods in Practical Applications: Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd**, p. 375–89, 2012. 23
- LESAFFRE, E.; LAWSON, A. B. **Bayesian biostatistics**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2012. 14, 15
- LETAC, G.; MASSAM, H. A tutorial on non central wishart distributions. **Technical Paper, Toulouse University**, 2004. 19
- LEWIS, S. M.; RAFTERY, A. E. Estimating bayes factors via posterior simulation with the laplace—metropolis estimator. **Journal of the American Statistical Association**, Taylor & Francis, v. 92, n. 438, p. 648–655, 1997. 33
- LIN, T.-I.; WANG, W.-L. Multivariate-t linear mixed models with censored responses, intermittent missing values and heavy tails. **Statistical methods in medical research**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 29, n. 5, p. 1288–1304, 2020. 2
- LITTELL, R. C.; HENRY, P.; AMMERMAN, C. B. Statistical analysis of repeated measures data using sas procedures. **Journal of animal science**, Oxford University Press, v. 76, n. 4, p. 1216–1231, 1998. 10

- LOTFI, S. *et al.* Bayesian model selection, the marginal likelihood, and generalization. In: PMLR. **International Conference on Machine Learning**. [S.l.], 2022. p. 14223–14247. 35
- MARTINS, D. J. d. C. Avaliação do ácido hialurônico reticulado, isolado e associado a vibração de corpo inteiro em cães com osteoartrose secundária à displasia coxofemoral. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2020. 4
- MARTINS, E.; LOPES, P.; SILVA, M. R. Aj modelo linear misto. **Viçosa: Imprensa Universitária**, 46p, 1993. 9, 10
- MCCULLOCH, C. E.; SEARLE, S. R. Generalized, linear, and mixed models, vol. 1. Wiley-Interscience, 2001. 22
- \_\_\_\_\_. **Generalized, linear, and mixed models**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2004. 8
- METODIEV, M. *et al.* Easily computed marginal likelihoods from posterior simulation using the thames estimator. **arXiv preprint arXiv:2305.08952**, 2023. 34
- METROPOLIS, N. *et al.* Equation of state calculations by fast computing machines. **The journal of chemical physics**, American Institute of Physics, v. 21, n. 6, p. 1087–1092, 1953. 16
- \_\_\_\_\_. Equation of state calculations by fast computing machines. **The journal of chemical physics**, v. 21, n. 6, p. 1087–1092, 1953. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.1699114>>. Acesso em: 16 Ago. 2019. 21
- MOLENBERGHS, G.; VERBEKE, G. **Lineal Mixed Models for longitudinal data**. [S.l.]: Springer Séries in statistics, 2000. 10, 21, 22
- MONTGOMERY, D.; PECK, E.; VINING, G. Simple linear regression model. **Introduction to Linear Regression Analysis. 6th ed. John Wiley & Sons, Inc**, p. 12–69, 2021. 5
- MONTGOMERY, D. C.; PECK, E. A.; VINING, G. G. **Introduction to linear regression analysis**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2021. 5
- MOREY, R. D. *et al.* Using mcmc chain outputs to efficiently estimate bayes factors. **Journal of Mathematical Psychology**, v. 55, n. 5, p. 368–378, 2011. ISSN 0022-2496. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022249611000666>>. 33, 34
- NANDRAM, B.; KIM, H. Marginal likelihood for a class of bayesian generalized linear models. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, Taylor & Francis, v. 72, n. 4, p. 319–340, 2002. 35
- NEAL, R. M. *et al.* Handbook of markov chain monte carlo. **Press C, editor**, v. 22011, 2011. 16
- NEWMAN, P. G.; ROZYCKI, G. S. The history of ultrasound. **Surgical clinics of north America**, Elsevier, v. 78, n. 2, p. 179–195, 1998. 28
- NOGUEIRA, D. A. *et al.* Análises clássica e bayesiana de um modelo misto aplicado ao melhoramento animal: uma ilustração. **Ciência e Agrotecnologia, Lavras**, v. 27, p. 1614–1624, 2003. 24
- NTZOUFRAS, I. **Bayesian modeling using WinBUGS**. [S.l.]: John Wiley and Sons, 2011. 21
- O’HAGAN, A.; FORSTER, J. J. **Kendall’s advanced theory of statistics, volume 2B: Bayesian inference**. [S.l.]: Arnold, 2004. v. 2. 33



- OLIVEIRA, M. d. C. *et al.* Efeito do treinamento com plataforma vibratória na morfologia do músculo diafragma em ratos com obesidade hipotalâmica. Universidade Estadual do Oeste do Paraná, 2020. 4
- OUMET, F. A symmetric matrix-variate normal local approximation for the wishart distribution and some applications. **Journal of Multivariate Analysis**, Elsevier, v. 189, p. 104923, 2022. 19, 20
- PARDOE, I. **Applied regression modeling**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2020. 6
- PATTERSON, H. D.; THOMPSON, R. Recovery of inter-block information when block sizes are unequal. **Biometrika**, Oxford University Press, v. 58, n. 3, p. 545–554, 1971. 9, 10
- PETERSEN, K. E. **Ergodic theory**. [S.l.]: Cambridge university press, 1989. v. 2. 26
- PINHEIRO, J.; BATES, D. **Mixed-effects models in S and S-PLUS**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006. 13
- PINHEIRO, J. C.; BATES, D. M. Linear mixed-effects models: basic concepts and examples. **Mixed-effects models in S and S-Plus**, Springer, p. 3–56, 2000. 10, 29
- PLUMMER, M. **JAGS Version 3.3.0 user manual**. [S.l.]: Lyon, France, 2012. 23
- PLUMMER, M. *et al.* Coda: convergence diagnosis and output analysis for mcmc. **R news**, v. 6, n. 1, p. 7–11, 2006. 21
- POURAHMADI, M. Maximum likelihood estimation of generalised linear models for multivariate normal covariance matrix. **Biometrika**, Oxford University Press, v. 87, n. 2, p. 425–435, 2000. 18
- PUSPONEGORO, N. H. *et al.* Linear mixed model for analyzing longitudinal data: A simulation study of children growth differences. **Procedia computer science**, Elsevier, v. 116, p. 284–291, 2017. 2
- PUZA, B. **Bayesian Methods for Statistical Analysis**. [S.l.]: ANU Press, 2015. 3
- R CORE TEAM. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. Vienna, Austria, 2022. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>. 23
- RÁCZ, M. Z.; RICHEY, J. A smooth transition from wishart to goe. **Journal of Theoretical Probability**, Springer, v. 32, p. 898–906, 2019. 19, 20
- RAFTERY, A. E.; LEWIS, S. **How many iterations in the gibbs sampler?** JM Bernardo, MJ Bayarri, JO Berger, AP Dawid, AFM Smith, eds., **BAYESIAN STATISTICS, vol. 4**. [S.l.]: Oxford University Press, 1992. 23, 24
- RANGANATHAN, S.; NAKAI, K.; SCHONBACH, C. **Encyclopedia of bioinformatics and computational biology: ABC of bioinformatics**. [S.l.]: Elsevier, 2018. 15
- ROBERT, C. P.; CASELLA, G.; CASELLA, G. **Introducing monte carlo methods with r**. [S.l.]: Springer, 2010. v. 18. 16
- ROBERT, C. P. *et al.* The metropolis—hastings algorithm. **Monte Carlo statistical methods**, Springer, p. 267–320, 2004. 16

- ROBERTH, C. **The Bayesian choice: from decision-theoretic foundations to computational implementation**. Paris: Springer Science and Business Media, 2007. 21
- ROBINSON, G. K. That blup is a good thing: the estimation of random effects. **Statistical science**, JSTOR, p. 15–32, 1991. 10
- ROUDER, J. N.; LU, J. An introduction to bayesian hierarchical models with an application in the theory of signal detection. **Psychonomic bulletin & review**, Springer, v. 12, n. 4, p. 573–604, 2005. 15
- SANTOS, I. *et al.* Whole-body vibration on leg muscles thermography and femoral resistive index of in adult healthy dogs. **Research in veterinary science**, Elsevier, v. 122, p. 118–123, 2019. 27
- SANTOS, I. F. C. *et al.* Whole-body vibration exercise on hematology and serum biochemistry in healthy dogs. **Topics in companion animal medicine**, Elsevier, v. 32, n. 2, p. 86–90, 2017. 4, 27, 65
- SEARLE, S.; CASELLA, G.; MCCULLOCH, C. Variance components john wiley and sons. **Inc. New York**, 1992. 10
- SEARLE, S. R.; MCCULLOCH, C. E.; NEUHAUS, J. M. **Generalized, linear, and mixed models**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011. 8
- SEIDE, S. E.; JENSEN, K.; KIESER, M. A comparison of bayesian and frequentist methods in random-effects network meta-analysis of binary data. **Research synthesis methods**, Wiley Online Library, v. 11, n. 3, p. 363–378, 2020. 3
- SHEMYAKIN, A. Hellinger distance and non-informative priors. **Bayesian Analysis**, International Society for Bayesian Analysis, v. 9, n. 4, p. 923–938, 2014. 15
- SHEN, J.; LIU, C. C. Bayesian analysis for random effects models. **Bayesian Inference on Complicated Data**, IntechOpen, 2020. 13
- SILVA, B. M. *et al.* Effects of whole-body vibration in hematobiochemical and hemogasometric parameters in adult and elderly healthy dogs. **Acta Scientiae Veterinariae**, v. 48, 2020. 52
- SILVA, F. L. Parâmetros de vibração imposta em plataformas vibratórias estocásticas de corpo inteiro utilizadas em reabilitação e treinamento. 2016. 4, 62
- SILVA, S. d. S. *et al.* Modelos lineares generalizados. **Bioestatística quantitativa aplicada. Porto Alegre: UFRGS, 2020. Cap. 11, p. 217-231**, 2020. 5
- SIMPSON, S. L. *et al.* A linear exponent ar (1) family of correlation structures. **Statistics in medicine**, Wiley Online Library, v. 29, n. 17, p. 1825–1838, 2010. 49
- \_\_\_\_\_. Kronecker product linear exponent ar (1) correlation structures for multivariate repeated measures. **PloS one**, Public Library of Science San Francisco, USA, v. 9, n. 2, p. e88864, 2014. 49
- SPIEGELHALTER, D. J. *et al.* Bayesian measures of model complexity and fit. **Journal of the royal statistical society: Series b (statistical methodology)**, v. 64, n. 4, p. 583–639, 2002. Disponível em: <<https://doi.org/10.1111/1467-9868.00353>>. Acesso em: 04 Nov. 2022. 33, 35



- STEIN, C. M. Estimation of the mean of a multivariate normal distribution. **The annals of Statistics**, JSTOR, p. 1135–1151, 1981. 18
- STONE, J. V. **Bayes' rule: A tutorial introduction to Bayesian analysis**. [S.l.]: Sebtel Press, 2013. 15, 21
- STROUP, W. W. **Generalized linear mixed models: modern concepts, methods and applications**. [S.l.]: CRC press, 2012. 8
- SU, Y.-S.; YAJIMA, M. R2jags: Using r to run jags; 2015. URL <https://CRAN.R-project.org/package=R2jags>. **R package version 0.5-7**, 2018. 23
- SZENTKUTI, A.; KAVANAGH, H. S.; GRAZIO, S. Infrared thermography and image analysis for biomedical use. **Periodicum biologorum**, Hrvatsko prirodoslovno društvo, v. 113, n. 4, p. 385–392, 2011. 28
- TENAN, S. *et al.* Bayesian model selection: The steepest mountain to climb. **Ecological Modelling**, v. 283, p. 62–69, 2014. ISSN 0304-3800. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304380014001690>>. 33, 34
- TONG, Y. L. **The multivariate normal distribution**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. 18
- VEHTARI, A.; GELMAN, A.; GABRY, J. Practical bayesian model evaluation using leave-one-out cross-validation and waic. **Statistics and computing**, Springer, v. 27, p. 1413–1432, 2017. 35
- VERBEKE, G. Linear mixed models for longitudinal data. In: **Linear mixed models in practice**. [S.l.]: Springer, 1997. p. 63–153. 2, 7, 13, 22, 30
- VERBEKE, G.; MOLENBERGHS, G. **Linear mixed models in practice: a SAS-oriented approach**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 126. 30
- VERBEKE, G.; MOLENBERGHS, G.; RIZOPOULOS, D. Random effects models for longitudinal data. In: **Longitudinal research with latent variables**. [S.l.]: Springer, 2010. p. 37–96. 13
- VERBEKE, G.; MOLENBERGHS, G.; VERBEKE, G. **Linear mixed models for longitudinal data**. [S.l.]: Springer, 1997. 30
- WAKEFIELD, J. **Bayesian and frequentist regression methods**. [S.l.]: Springer, 2013. v. 23. 3, 14
- WANG, X.; YUE, Y.; FARAWAY, J. J. **Bayesian regression modeling with INLA**. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2018. 14
- WATANABE, S. **Mathematical theory of Bayesian statistics**. [S.l.]: CRC Press, 2018. 35
- \_\_\_\_\_. Waic and wbic for mixture models. **Behaviormetrika**, Springer, v. 48, p. 5–21, 2021. 36
- WATANABE, S.; OPPER, M. Asymptotic equivalence of bayes cross validation and widely applicable information criterion in singular learning theory. **Journal of machine learning research**, v. 11, n. 12, 2010. 35

WEST, B. T.; WELCH, K. B.; GALECKI, A. T. **Linear mixed models: a practical guide using statistical software**. 2. ed. [S.l.]: A Chapman & Hall Book, 2006. 7, 12

WUTZKE, M. L. S. *et al.* Efeito da plataforma vibratória na remobilização de ratos wistar. Universidade Estadual do Oeste do Paraná, 2020. 4

YILDIRIM, I. Bayesian inference: Metropolis-hastings sampling. **Dept. of Brain and Cognitive Sciences, Univ. of Rochester, Rochester, NY**, 2012. 16

ZHAN, P. *et al.* Using jags for bayesian cognitive diagnosis modeling: A tutorial. **Journal of Educational and Behavioral Statistics**, SAGE Publications Sage CA: Los Angeles, CA, v. 44, n. 4, p. 473–503, 2019. 23

# APÊNDICES



# A Gráficos descritivos

## Gráficos de de Boxplot e QQ-Plot por unidade experimental e dias

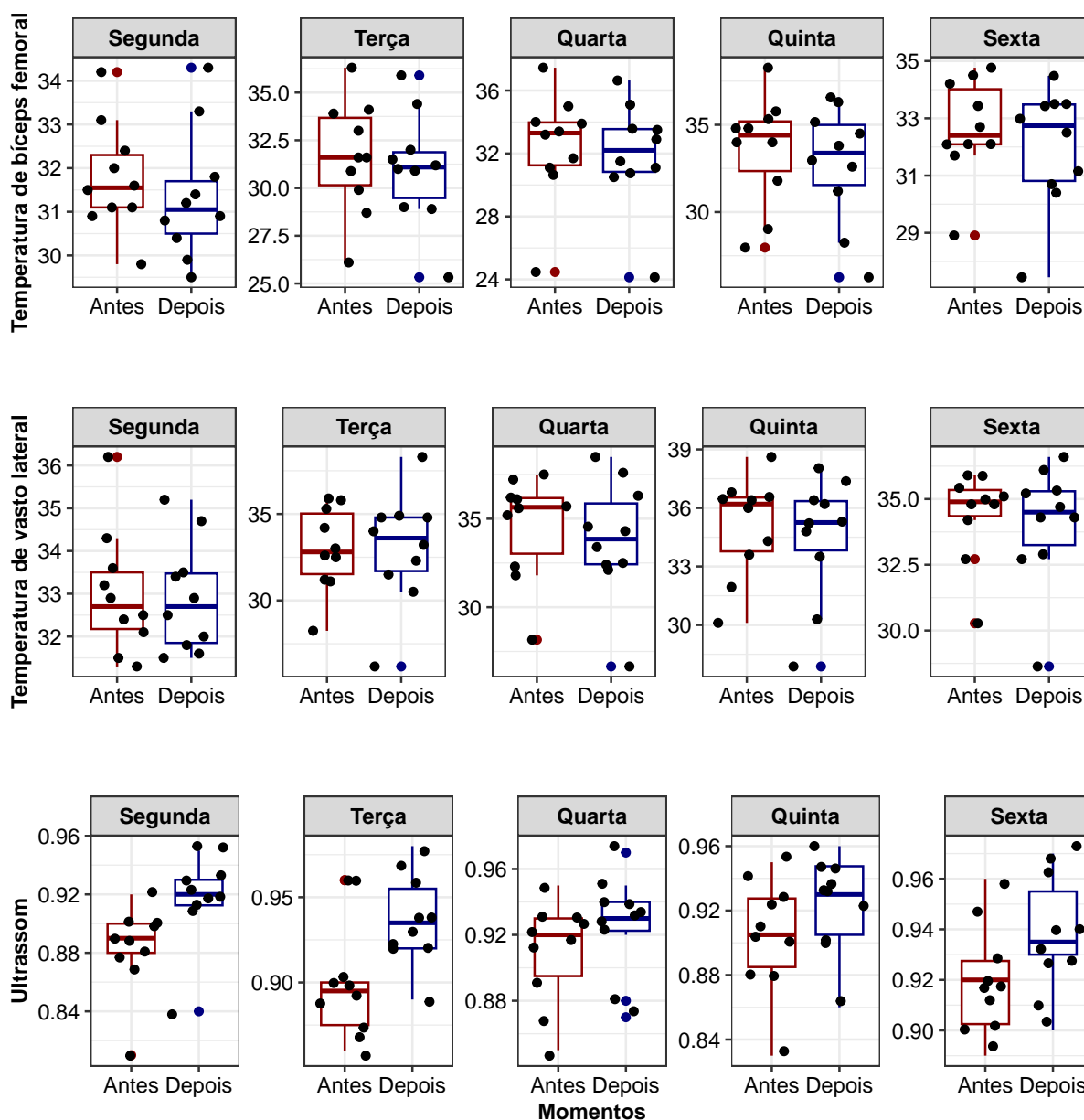


Figura 21 – Gráficos de Boxplot de termografia bíceps femoral, vasto lateral e ultrassom por dias.

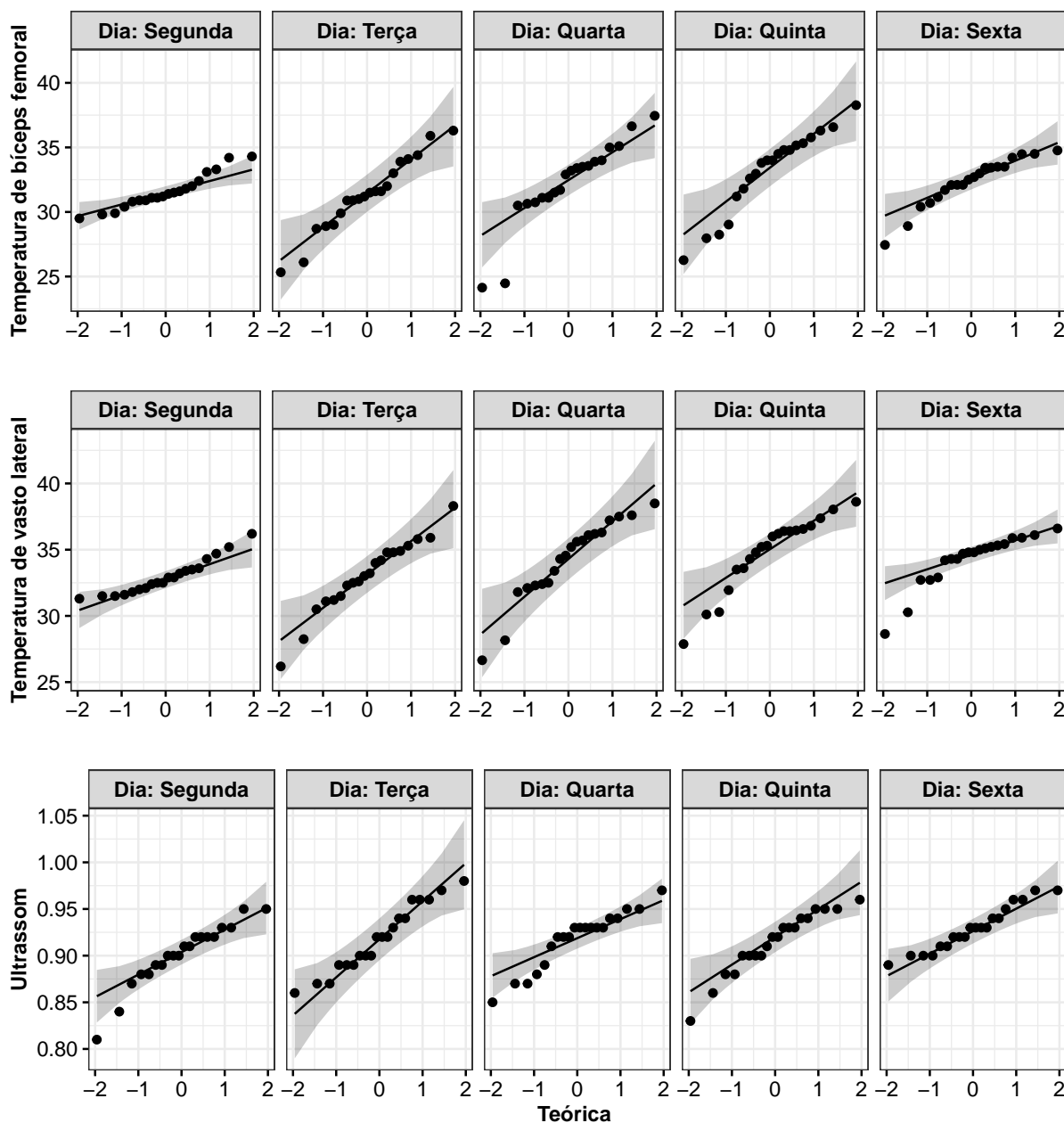


Figura 22 – Gráficos de normalidades de QQ-Plot de termografia bíceps femoral, vasto lateral e ultrassom por dias.

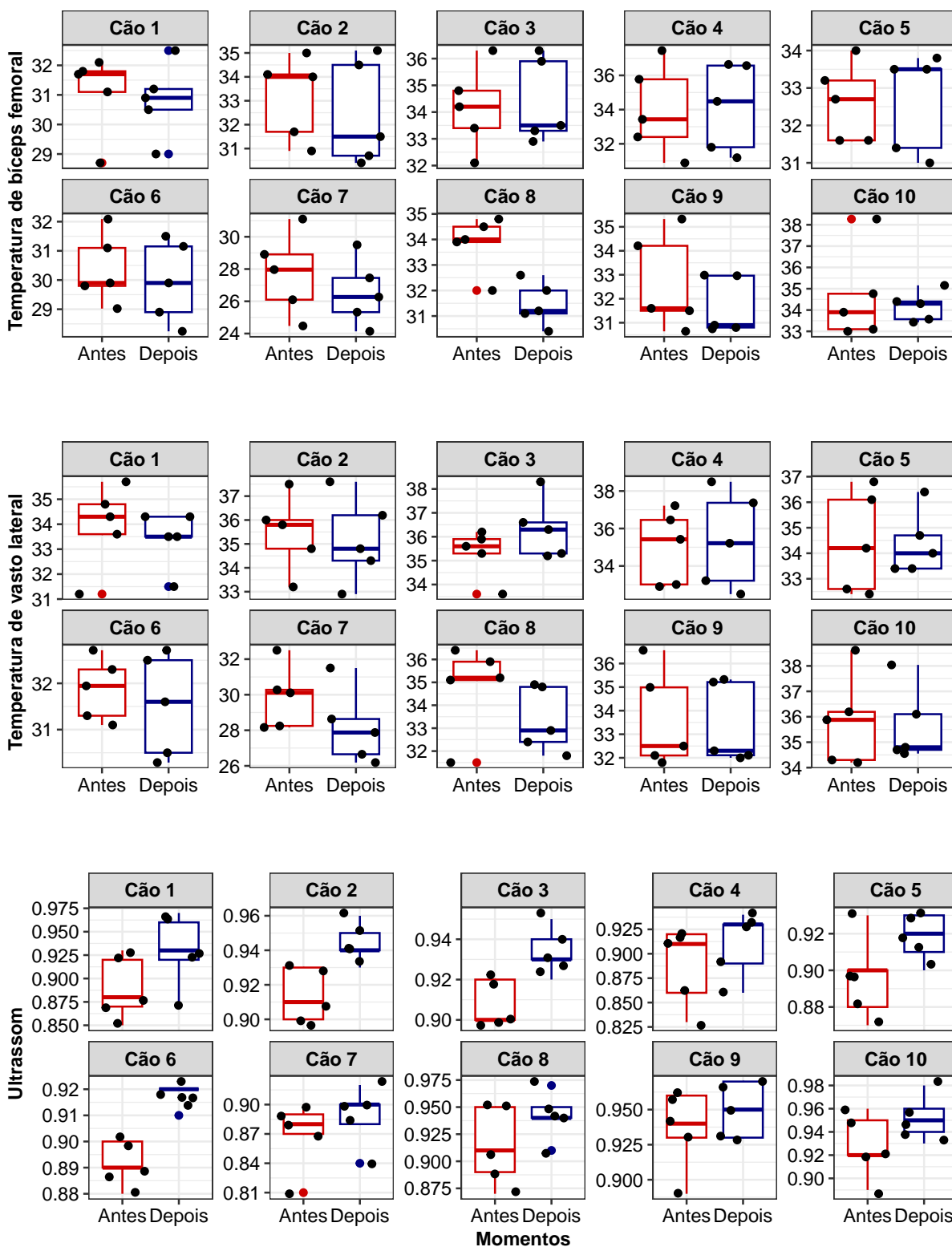


Figura 23 – Gráficos de Boxplot de termografia bíceps femoral, vasto lateral e ultrassom por cães.

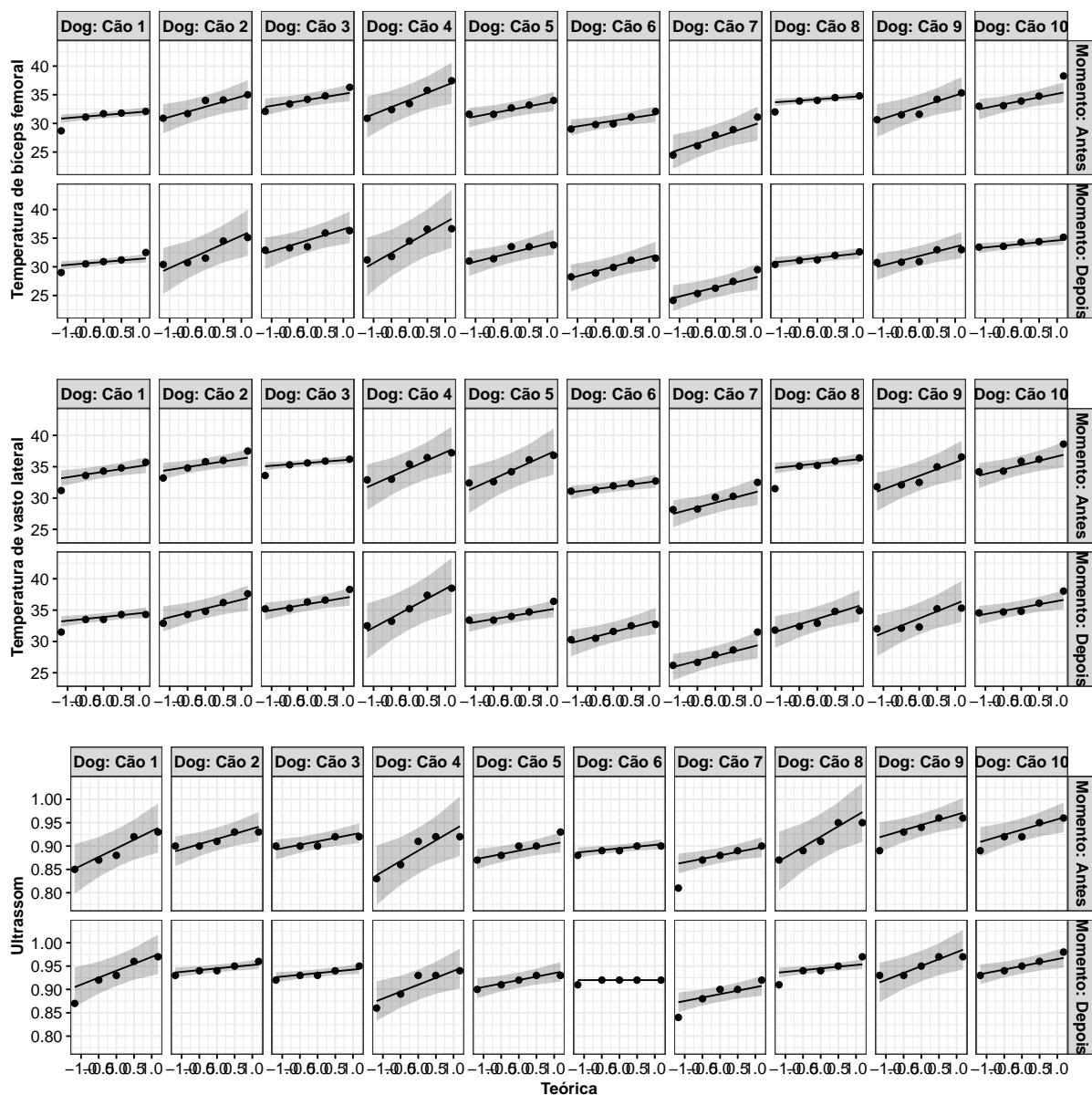


Figura 24 – Gráficos de normalidades de QQ-Plot de termografia bíceps femoral, vasto lateral e ultrassom por cães e momentos.



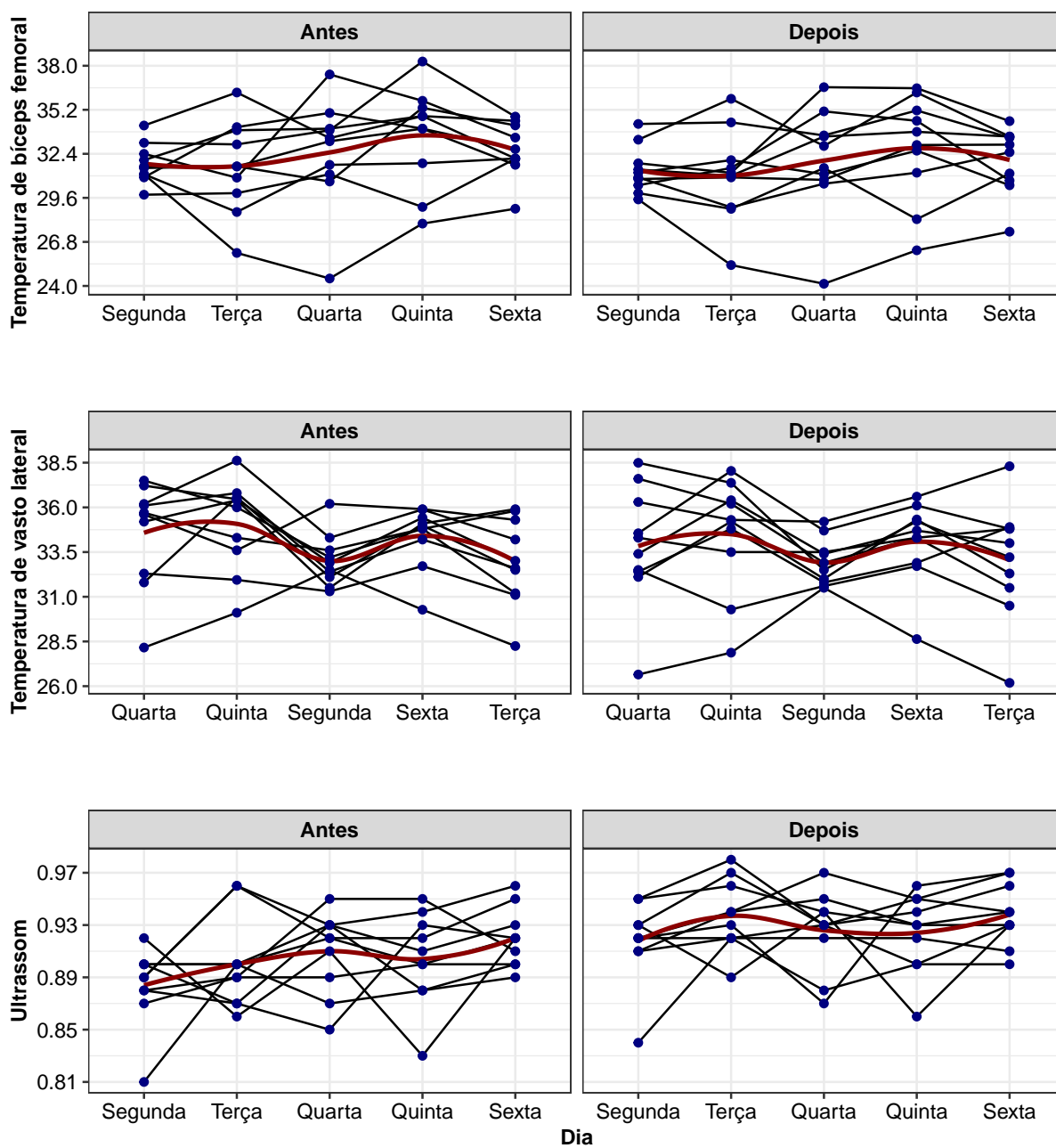


Figura 25 – Gráfico dos perfis por cada momento e dias para os 10 cães, das três variáveis em estudo, termografia bíceps femoral, termografia vasto lateral e Ultrassom.

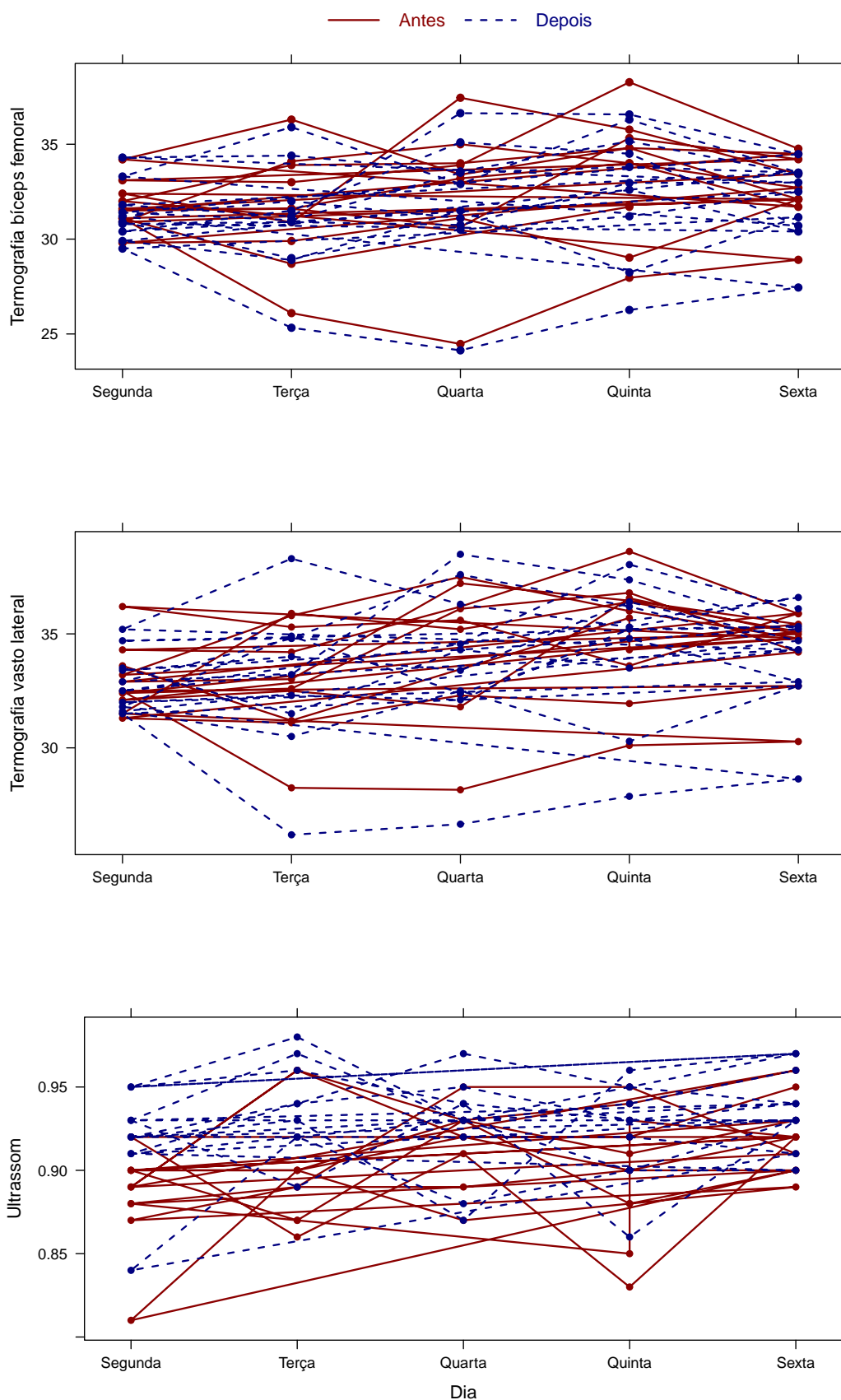


Figura 26 – Gráfico dos perfis por cada momento e dias para os 10 cães, das três variáveis em estudo, termografia bíceps femoral, termografia vasto lateral e Ultrassom.

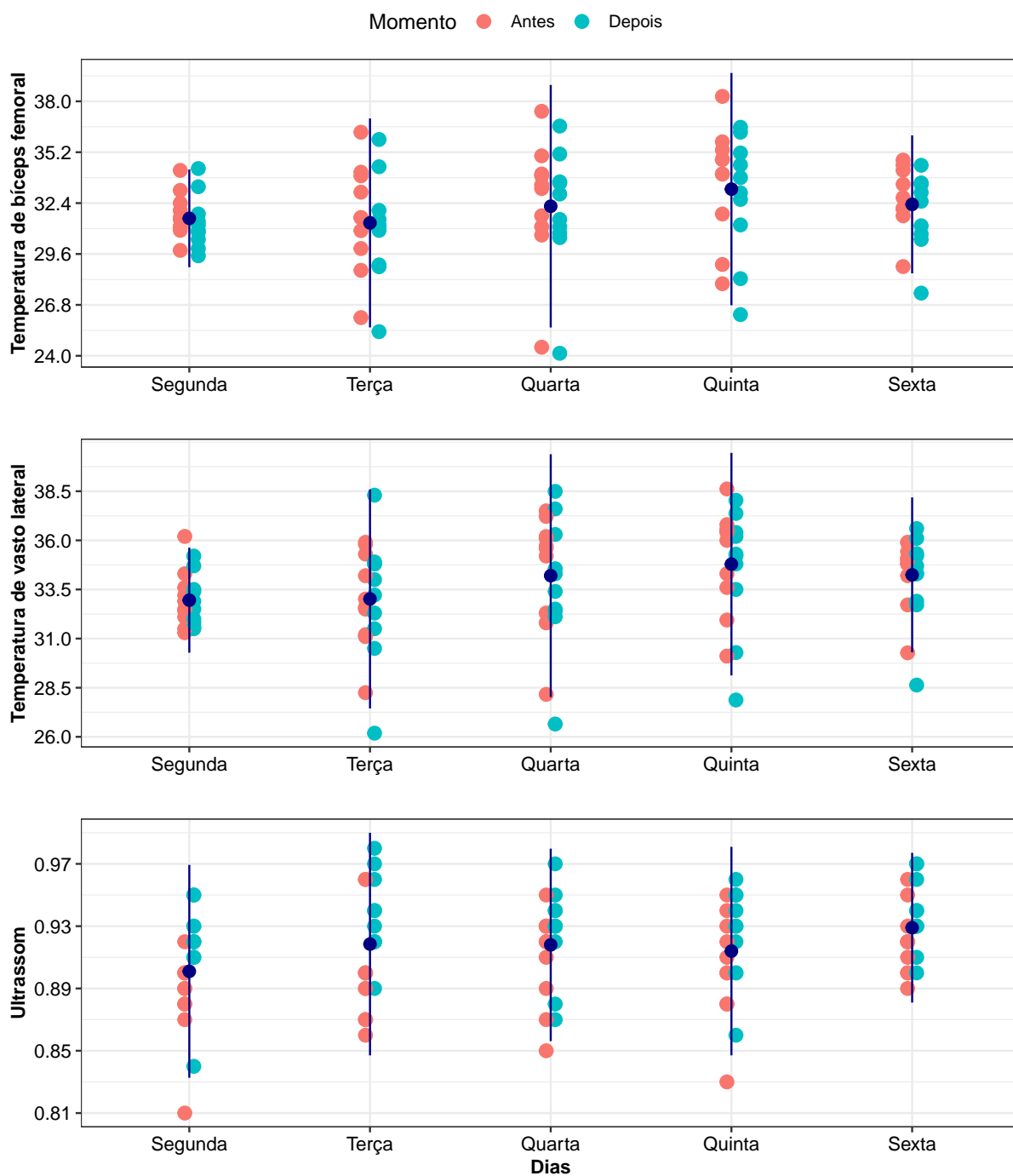


Figura 27 – Gráficos de perfis de termografia bíceps femoral, vasto lateral e ultrassom verificando a variabilidade tanto entre como dentro dos dias da semana.

## B Tabelas dos modelos 1 e 2

### Tabelas das estimativas dos parâmetros do modelos

Tabela 14 – Estimativas (média *a posteriori*) dos parâmetros do modelo 1 (4.2), com as diferentes estruturas de variância-covariância, de temperatura termográfica de bíceps femoral.

Estruturas	Parâmetros	Estimativas	HPD <sub>95%</sub>		Critérios de convergencia			
			LI	LS	GW	RL	HW	GR
UN	$\beta_0$	32,410	30,821	33,938	1,487	1,100	0,165	1,000
	$\beta_1$	-0,591	-1,517	0,315	0,329	0,999	0,465	1,000
	$\sigma_e$	1,712	1,451	1,966	1,244	1,020	0,303	1,000
	$\sigma_{b_{0j}}$	2,512	1,026	4,523	1,072	0,999	0,061	1,000
	$\sigma_{b_{1j}}$	1,579	0,820	2,599	0,991	0,999	0,955	1,000
	$\rho_{b_j}$	-0,296	-3,100	2,553	1,281	1,030	0,395	1,000
	<i>deviance</i>	389,979	379,256	402,186	0,790	0,951	0,714	1,000
VCS	$\beta_0$	32,417	30,854	34,007	0,579	0,999	0,618	1,001
	$\beta_1$	-0,595	-1,477	0,323	1,032	0,959	0,931	1,000
	$\sigma_e$	1,713	1,456	1,966	0,150	1,030	0,465	1,000
	$\sigma_{b_{0j}}$	2,326	0,900	4,138	0,398	0,999	0,241	1,000
	$\sigma_{b_{1j}}$	1,524	0,790	2,432	0,417	0,982	0,794	1,001
	$\rho_{b_j}$	0,009	-3,170	3,158	0,185	0,999	0,887	1,000
	<i>deviance</i>	389,802	379,525	402,165	0,644	0,999	0,188	1,000
CSH	$\beta_0$	32,418	30,939	33,938	0,561	0,966	0,902	1,000
	$\beta_1$	-0,593	-1,528	0,314	0,538	0,983	0,482	1,000
	$\sigma_e$	1,714	1,466	1,984	0,425	1,030	0,948	1,000
	$\sigma_{b_{0j}}$	2,431	0,906	4,409	0,138	0,999	0,151	1,000
	$\sigma_{b_{1j}}$	1,519	0,785	2,485	0,112	1,020	0,466	1,000
	$\rho_{b_j}$	0,197	-0,715	1,000	0,404	1,020	0,250	1,000
	<i>deviance</i>	390,212	379,560	402,930	1,771	0,982	0,208	1,000
AR	$\beta_0$	32,416	30,954	33,847	0,327	0,982	0,453	1,000
	$\beta_1$	-0,598	-1,532	0,376	0,794	1,030	0,280	1,000
	$\sigma_e$	1,701	1,458	1,960	0,862	0,966	0,303	1,000
	$\sigma_{b_{0j}}$	2,524	0,806	5,425	1,727	0,999	0,114	1,022
	$\sigma_{b_{1j}}$	2,515	0,800	5,287	0,170	1,030	0,383	1,001
	$\rho_{b_j}$	0,162	-0,713	0,983	1,178	0,999	0,736	1,000
	<i>deviance</i>	390,107	379,048	402,096	0,351	0,982	0,682	1,000
CS	$\beta_0$	32,428	30,842	33,927	0,586	1,020	0,914	1,000
	$\beta_1$	-0,589	-1,590	0,486	1,586	1,050	0,064	1,000
	$\sigma_e$	1,697	1,458	1,960	1,342	0,999	0,051	1,000
	$\sigma_{b_{0j}}$	2,206	0,887	4,059	1,066	0,982	0,687	1,000
	$\sigma_{b_{1j}}$	1,646	0,871	2,721	0,078	0,999	0,598	1,000
	$\rho_{b_j}$	-0,011	-3,118	3,108	1,259	0,951	0,191	1,000
	<i>deviance</i>	390,057	379,563	402,195	0,662	0,982	0,948	1,000

Tabela 15 – Estimativas (média *a posteriori*) dos parâmetros do modelo 1 (4.2), com as diferentes estruturas de variância-covariância, de temperatura termográfica de vasto lateral.

Estruturas	Parâmetros	Estimativas	HPD <sub>955</sub>		Critérios de convergencia			
			LI	LS	GW	RL	HW	GR
UN	$\beta_0$	34,009	32,533	35,338	1,339	1,070	0,565	1,000
	$\beta_1$	-0,334	-1,250	0,610	0,195	1,050	0,966	1,000
	$\sigma_e$	1,662	1,416	1,928	0,444	1,020	0,161	1,000
	$\sigma_{b_{0j}}$	2,280	1,022	4,027	0,570	1,030	0,557	1,000
	$\sigma_{b_{1j}}$	1,588	0,821	2,557	0,076	0,982	0,399	1,000
	$\rho_{b_j}$	0,126	-2,636	2,952	0,907	0,982	0,404	1,000
	<i>deviance</i>	383,753	373,378	396,112	0,584	1,050	0,833	1,000
VCS	$\beta_0$	34,001	32,589	35,339	0,256	1,050	0,913	1,000
	$\beta_1$	-0,340	-1,252	0,597	0,681	1,020	0,164	1,000
	$\sigma_e$	1,662	1,425	1,925	0,199	1,020	0,439	1,000
	$\sigma_{b_{0j}}$	2,146	0,970	3,759	0,037	1,020	0,400	1,000
	$\sigma_{b_{1j}}$	1,541	0,799	2,475	1,408	0,983	0,707	1,000
	$\rho_{b_j}$	0,011	-3,040	3,139	1,543	0,999	0,609	1,000
	<i>deviance</i>	383,853	373,324	395,751	0,914	0,966	0,461	1,000
CSH	$\beta_0$	34,007	32,613	35,337	0,875	1,020	0,691	1,000
	$\beta_1$	-0,337	-1,266	0,596	1,698	1,030	0,707	1,000
	$\sigma_e$	1,658	1,405	1,906	1,041	0,982	0,965	1,000
	$\sigma_{b_{0j}}$	2,265	0,989	4,045	0,334	0,999	0,336	1,000
	$\sigma_{b_{1j}}$	1,543	0,761	2,436	0,788	0,999	0,181	1,000
	$\rho_{b_j}$	0,400	-0,519	1,000	1,491	0,951	0,864	1,000
	<i>deviance</i>	383,518	372,585	394,854	1,124	0,982	0,079	1,000
AR	$\beta_0$	34,010	32,703	35,305	0,042	0,966	0,615	1,000
	$\beta_1$	-0,333	-1,262	0,693	0,328	1,020	0,336	1,000
	$\sigma_e$	1,647	1,407	1,897	0,408	0,999	0,406	1,000
	$\sigma_{b_{0j}}$	2,516	0,809	5,209	0,019	1,050	0,209	1,000
	$\sigma_{b_{1j}}$	2,491	0,848	5,377	0,636	0,999	0,809	1,000
	$\rho_{b_j}$	0,349	-0,558	1,000	0,729	0,999	0,395	1,000
	<i>deviance</i>	383,608	373,493	395,841	0,160	0,966	0,084	1,000
CS	$\beta_0$	34,016	32,660	35,473	0,361	0,982	0,464	1,000
	$\beta_1$	-0,334	-1,332	0,762	0,602	1,020	0,183	1,000
	$\sigma_e$	1,641	1,406	1,891	0,980	1,020	0,794	1,000
	$\sigma_{b_{0j}}$	2,104	0,919	3,698	1,485	1,030	0,100	1,000
	$\sigma_{b_{1j}}$	1,616	0,788	2,594	1,255	0,999	0,078	1,000
	$\rho_{b_j}$	-0,013	-3,053	3,245	1,227	0,999	0,871	1,000
	<i>deviance</i>	383,622	372,878	394,968	0,732	1,020	0,158	1,000

Tabela 16 – Estimativas (média *a posteriori*) dos parâmetros do modelo 2 (4.3), com as diferentes estruturas de variância-covariância, de temperatura termográfica de bíceps femoral.

Estrutura	Parâmetros	Estimativas	HPD		Critérios de convergencia			
			LI	LS	GW	RL	HW	GR
UN	$\beta_0$	32,422	30,275	34,660	1,847	1,080	0,979	1,000
	$\beta_1$	-0,602	-2,233	0,998	1,170	1,030	0,581	1,000
	$\sigma_e$	1,716	1,470	1,983	0,032	1,020	0,224	1,000
	$\sigma_{b_{0j}}$	2,377	1,040	4,117	1,255	1,030	0,913	1,000
	$\sigma_{b_{1j}}$	1,553	0,794	2,521	0,325	0,966	0,641	1,000
	$\sigma_{\delta_{0k}}$	1,970	0,828	3,391	0,288	0,966	0,860	1,000
	$\sigma_{\delta_{1k}}$	1,781	0,828	3,052	0,853	1,030	0,150	1,000
	$\rho_{b_j}$	0,001	-2,520	2,563	0,751	1,020	0,276	1,000
	$\rho_{\delta_k}$	0,201	-2,475	2,802	0,629	0,966	0,946	1,000
	<i>deviance</i>	390,347	378,761	402,474	1,283	0,982	0,643	1,000
VCS	$\beta_0$	32,428	30,205	34,563	0,713	0,999	0,527	1,000
	$\beta_1$	-0,602	-2,098	1,059	0,440	0,999	0,130	1,000
	$\sigma_e$	1,715	1,465	1,965	0,860	1,030	0,354	1,000
	$\sigma_{b_{0j}}$	2,266	0,921	4,034	0,678	0,999	0,637	1,000
	$\sigma_{b_{1j}}$	1,523	0,777	2,452	0,460	0,975	0,917	1,000
	$\sigma_{\delta_{0k}}$	1,913	0,849	3,423	0,363	0,982	0,128	1,000
	$\sigma_{\delta_{1k}}$	1,729	0,825	2,951	1,538	1,070	0,674	1,000
	$\rho_{b_j}$	0,001	-3,185	3,134	0,989	0,951	0,417	1,000
	$\rho_{\delta_k}$	0,022	-3,168	3,032	1,228	0,951	0,890	1,000
	<i>deviance</i>	390,191	378,588	402,808	1,495	1,020	0,513	1,000
CSH	$\beta_0$	32,404	30,368	34,663	0,434	0,982	0,125	1,000
	$\beta_1$	-0,593	-2,132	0,989	0,745	0,999	0,201	1,000
	$\sigma_e$	1,718	1,461	1,983	0,210	1,020	0,723	1,000
	$\sigma_{b_{0j}}$	2,386	0,998	4,295	1,569	1,020	0,311	1,000
	$\sigma_{b_{1j}}$	1,519	0,802	2,479	1,371	0,951	0,466	1,000
	$\sigma_{\delta_{0k}}$	1,962	0,826	3,496	1,091	0,966	0,227	1,000
	$\sigma_{\delta_{1k}}$	1,751	0,799	3,013	0,305	0,999	0,654	1,000
	$\rho_{b_j}$	0,022	-0,869	0,950	1,659	0,999	0,083	1,000
	$\rho_{\delta_k}$	0,134	-0,846	1,000	1,687	0,951	0,125	1,000
	<i>deviance</i>	390,464	379,135	402,786	0,148	1,030	0,819	1,000
AR	$\beta_0$	32,423	30,350	34,383	0,802	0,999	0,753	1,000
	$\beta_1$	-0,592	-2,080	0,943	0,630	0,951	0,546	1,000
	$\sigma_e$	1,680	1,442	1,926	0,892	0,966	0,763	1,000
	$\sigma_{b_{0j}}$	2,523	0,758	5,330	1,490	1,050	0,094	1,000
	$\sigma_{b_{1j}}$	2,517	0,704	5,378	0,117	0,999	0,851	1,010
	$\sigma_{\delta_{0k}}$	2,541	0,850	5,784	0,509	1,050	0,929	1,000
	$\sigma_{\delta_{1k}}$	2,522	0,837	5,330	0,132	0,999	0,608	1,010
	$\rho_{b_j}$	0,043	-0,830	0,887	0,894	1,020	0,306	1,000
	$\rho_{\delta_k}$	0,145	-0,843	0,999	0,249	0,982	0,642	1,000
	<i>deviance</i>	390,134	379,335	402,594	0,590	1,020	0,973	1,000
CS	$\beta_0$	32,431	29,991	35,017	0,527	0,982	0,163	1,000
	$\beta_1$	-0,580	-2,460	1,576	0,378	0,951	0,275	1,000
	$\sigma_e$	1,689	1,453	1,950	1,160	1,020	0,611	1,000
	$\sigma_{b_{0j}}$	2,128	0,858	3,844	0,518	0,982	0,908	1,000
	$\sigma_{b_{1j}}$	1,678	0,845	2,818	0,606	0,966	0,894	1,000
	$\sigma_{\delta_{0k}}$	1,989	0,847	3,537	0,421	0,982	0,070	1,000
	$\sigma_{\delta_{1k}}$	1,824	0,823	3,223	0,541	0,951	0,973	1,000
	$\rho_{b_j}$	0,004	-3,062	3,224	1,031	0,982	0,591	1,000
	$\rho_{\delta_k}$	0,011	-3,207	3,015	0,473	0,959	0,812	1,000
	<i>deviance</i>	390,584	378,874	403,058	1,373	0,951	0,978	1,000

Tabela 17 – Estimativas (média *a posteriori*) dos parâmetros do modelo 2 (4.3), com as diferentes estruturas de variância-covariância, de temperatura termográfica de vasto lateral.

Estrutura	Parâmetros	Estimativas	HPD		Critérios de convergencia			
			LI	LS	GW	RL	HW	GR
UN	$\beta_0$	34,012	32,094	36,204	1,146	0,999	0,172	1,000
	$\beta_1$	-0,334	-1,947	1,313	0,364	0,966	0,427	1,000
	$\sigma_e$	1,669	1,418	1,919	0,608	0,999	0,647	1,000
	$\sigma_{b_{0j}}$	2,244	0,979	3,925	1,652	0,999	0,495	1,000
	$\sigma_{b_{1j}}$	1,565	0,789	2,531	0,546	1,050	0,280	1,000
	$\sigma_{\delta_{0k}}$	1,902	0,806	3,344	0,946	0,966	0,234	1,000
	$\sigma_{\delta_{1k}}$	1,781	0,812	3,080	0,095	0,991	0,598	1,000
	$\rho_{b_j}$	0,375	-2,077	2,917	0,727	1,040	0,464	1,000
	$\rho_{\delta_k}$	0,268	-2,522	2,856	1,242	0,982	0,657	1,000
	<i>deviance</i>	384,536	373,473	396,897	1,850	0,982	0,703	1,000
VCS	$\beta_0$	34,007	31,771	35,977	0,804	0,999	0,651	1,000
	$\beta_1$	-0,346	-1,954	1,227	0,675	1,020	0,537	1,000
	$\sigma_e$	1,666	1,425	1,923	0,343	0,966	0,147	1,000
	$\sigma_{b_{0j}}$	2,136	0,942	3,758	0,595	0,982	0,995	1,000
	$\sigma_{b_{1j}}$	1,537	0,760	2,493	0,081	1,030	0,895	1,000
	$\sigma_{\delta_{0k}}$	1,873	0,813	3,400	0,214	0,999	0,116	1,000
	$\sigma_{\delta_{1k}}$	1,741	0,812	3,037	1,343	0,982	0,226	1,000
	$\rho_{b_j}$	-0,017	-3,183	3,194	0,687	1,020	0,946	1,000
	$\rho_{\delta_k}$	-0,021	-3,286	2,963	0,148	0,999	0,280	1,000
	<i>deviance</i>	384,393	372,388	396,354	1,248	1,020	0,522	1,000
CSH	$\beta_0$	34,015	31,978	36,205	1,426	1,020	0,763	1,000
	$\beta_1$	-0,329	-1,850	1,455	0,475	0,982	0,704	1,000
	$\sigma_e$	1,666	1,421	1,923	1,154	1,050	0,611	1,000
	$\sigma_{b_{0j}}$	2,251	0,956	3,986	0,137	0,975	0,499	1,000
	$\sigma_{b_{1j}}$	1,537	0,738	2,441	1,564	0,999	0,577	1,000
	$\sigma_{\delta_{0k}}$	1,900	0,816	3,464	0,591	0,999	0,054	1,000
	$\sigma_{\delta_{1k}}$	1,748	0,807	2,973	0,685	0,951	0,517	1,000
	$\rho_{b_j}$	0,247	-0,692	0,999	1,232	0,966	0,549	1,000
	$\rho_{\delta_k}$	0,190	-0,836	1,000	0,365	0,999	0,700	1,000
	<i>deviance</i>	384,313	373,065	396,031	1,447	0,999	0,368	1,000
AR	$\beta_0$	34,014	32,213	35,777	0,649	1,100	0,505	1,000
	$\beta_1$	-0,334	-1,911	1,204	0,786	1,020	0,060	1,000
	$\sigma_e$	1,629	1,390	1,876	0,628	0,999	0,715	1,000
	$\sigma_{b_{0j}}$	2,513	0,833	5,618	0,255	0,951	0,376	1,010
	$\sigma_{b_{1j}}$	2,531	0,864	5,641	0,871	0,999	0,059	1,000
	$\sigma_{\delta_{0k}}$	2,496	0,815	5,136	1,011	0,951	0,209	1,000
	$\sigma_{\delta_{1k}}$	2,526	0,738	5,184	0,775	0,966	0,920	1,040
	$\rho_{b_j}$	0,238	-0,651	0,998	0,007	0,982	0,255	1,000
	$\rho_{\delta_k}$	0,214	-0,818	1,000	0,528	1,010	0,162	1,000
	<i>deviance</i>	384,024	373,198	395,741	1,244	1,020	0,516	1,000
CS	$\beta_0$	34,020	31,677	36,353	0,890	0,966	0,277	1,000
	$\beta_1$	-0,341	-2,255	1,734	0,289	0,999	0,120	1,000
	$\sigma_e$	1,637	1,394	1,879	0,817	1,030	0,083	1,000
	$\sigma_{b_{0j}}$	2,086	0,819	3,711	0,286	0,999	0,876	1,000
	$\sigma_{b_{1j}}$	1,657	0,783	2,723	0,067	0,999	0,505	1,000
	$\sigma_{\delta_{0k}}$	1,949	0,803	3,481	0,682	0,999	0,528	1,000
	$\sigma_{\delta_{1k}}$	1,829	0,801	3,176	0,308	1,020	0,208	1,000
	$\rho_{b_j}$	-0,016	-3,046	3,389	0,044	0,982	0,514	1,000
	$\rho_{\delta_k}$	0,003	-3,155	3,219	0,047	0,982	0,796	1,000
	<i>deviance</i>	384,474	373,542	396,879	0,538	1,050	0,807	1,000

Tabela 18 – Valores de Fator de Bayes (FB) calculadas a partir dos modelos 1 e 2 considerando as combinações entre as diversas estruturas de covariâncias.

Modelo 1			Modelo 2		
Comparação das estruturas	BF	VL	Comparação das estruturas	BF	VL
	FB	FB		FB	FB
$FB_{UN,VCS}$	0,948	0,954	$FB_{UN,VCS}$	1,025	0,921
$FB_{UN,CSH}$	0,732	0,442	$FB_{UN,CSH}$	0,805	0,832
$FB_{UN,AR(1)}$	1,058	0,146	$FB_{UN,AR(1)}$	1,165	0,052
$FB_{UN,CS}$	1,383	0,193	$FB_{UN,CS}$	1,300	0,114
$FB_{VCS,CSH}$	0,772	0,463	$FB_{VCS,CSH}$	0,785	0,903
$FB_{VCS,AR(1)}$	1,116	0,153	$FB_{VCS,AR(1)}$	1,136	0,056
$FB_{VCS,CS}$	1,459	0,203	$FB_{VCS,CS}$	1,268	0,124
$FB_{CSH,AR(1)}$	1,446	0,331	$FB_{CSH,AR(1)}$	1,447	0,062
$FB_{CSH,CS}$	1,890	0,437	$FB_{CSH,CS}$	1,615	0,137
$FB_{AR(1),CS}$	1,307	1,320	$FB_{AR(1),CS}$	1,116	2,197



## C Gráficos da diferença entre os momentos

### Gráficos de boxplot da diferença de temperatura

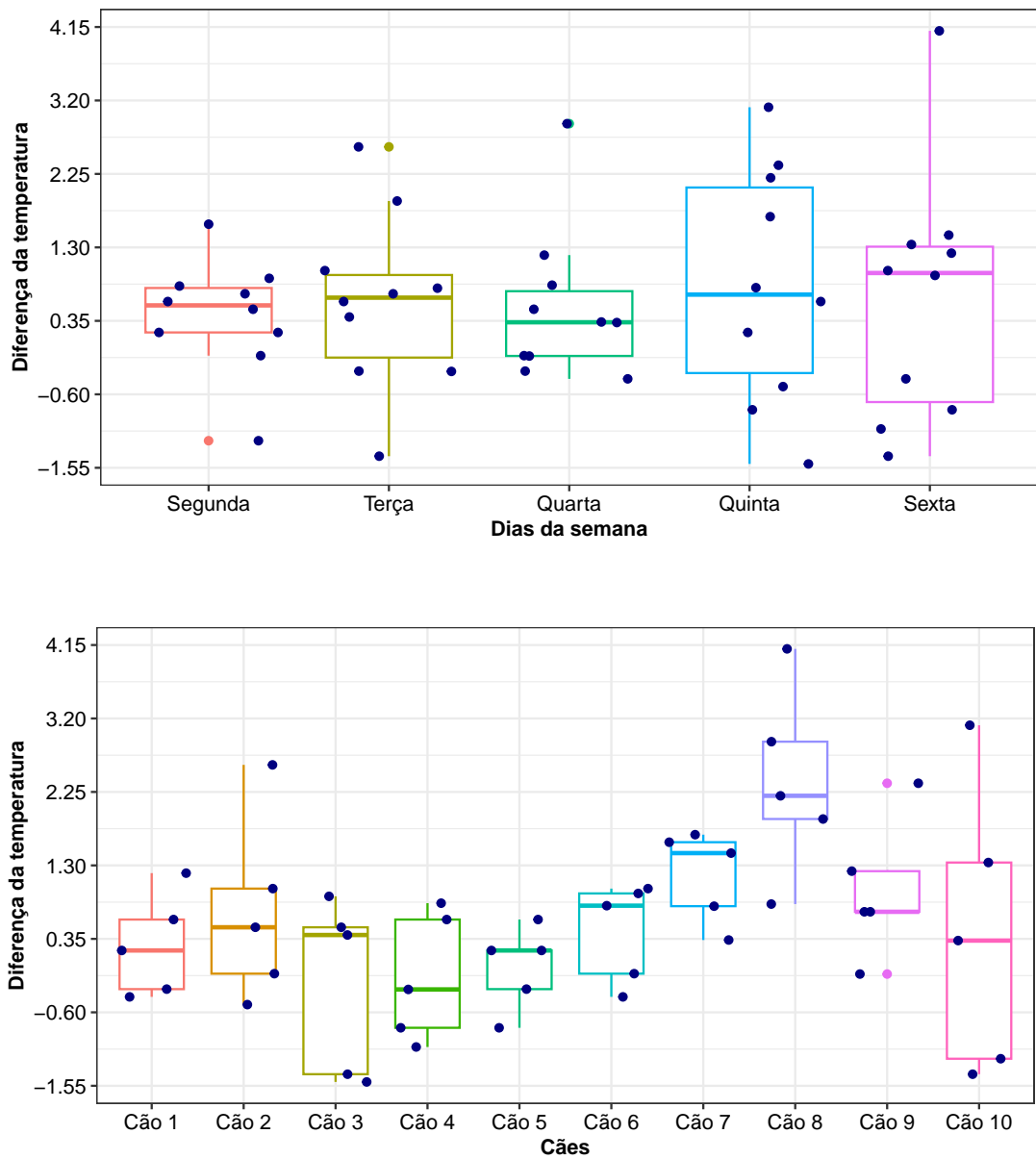


Figura 28 – Box-plot da diferença de temperatura de bíceps femoral por dias e cães .

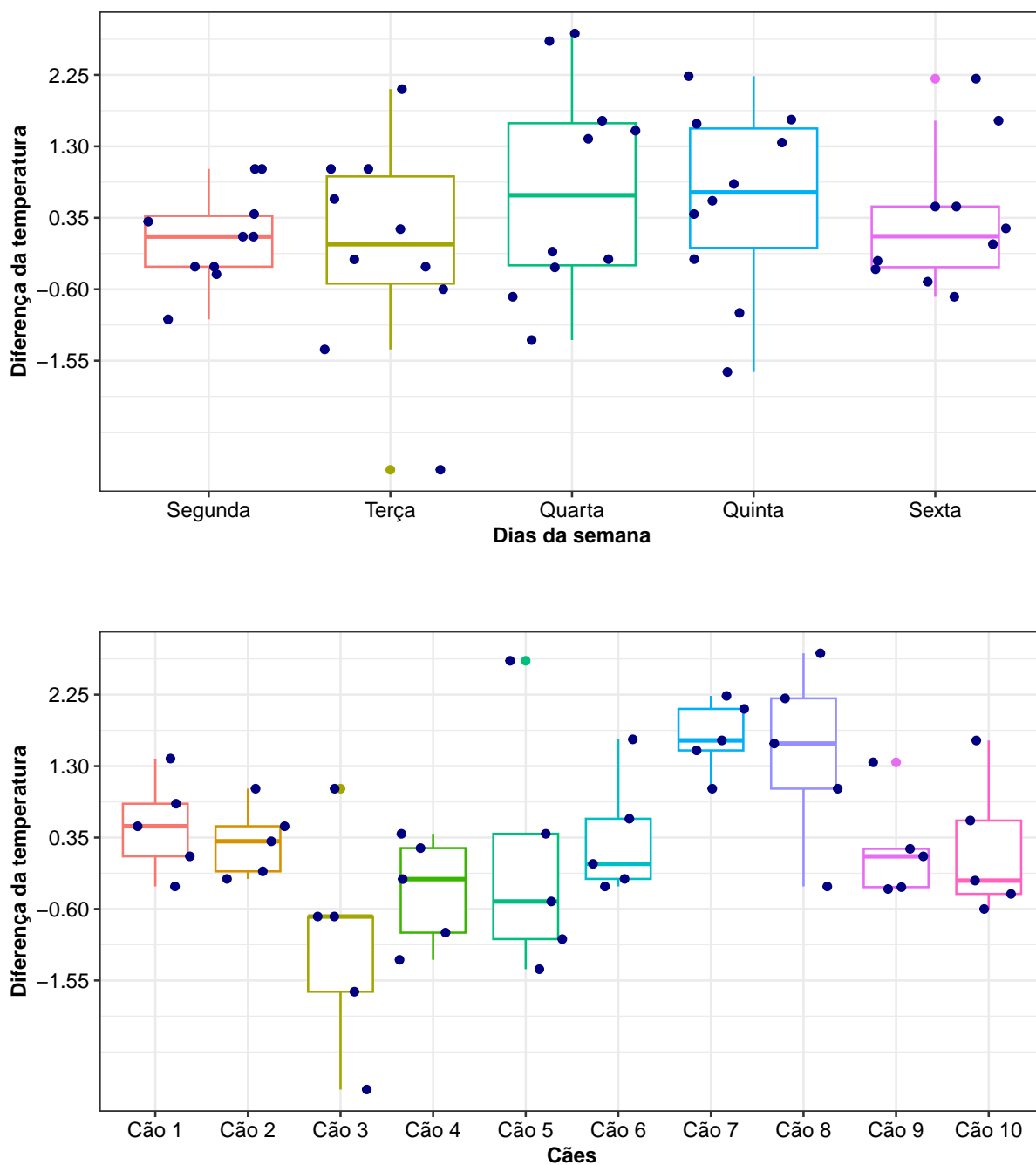


Figura 29 – Box-plot da diferença de temperatura de vasto lateral por dias e cães .

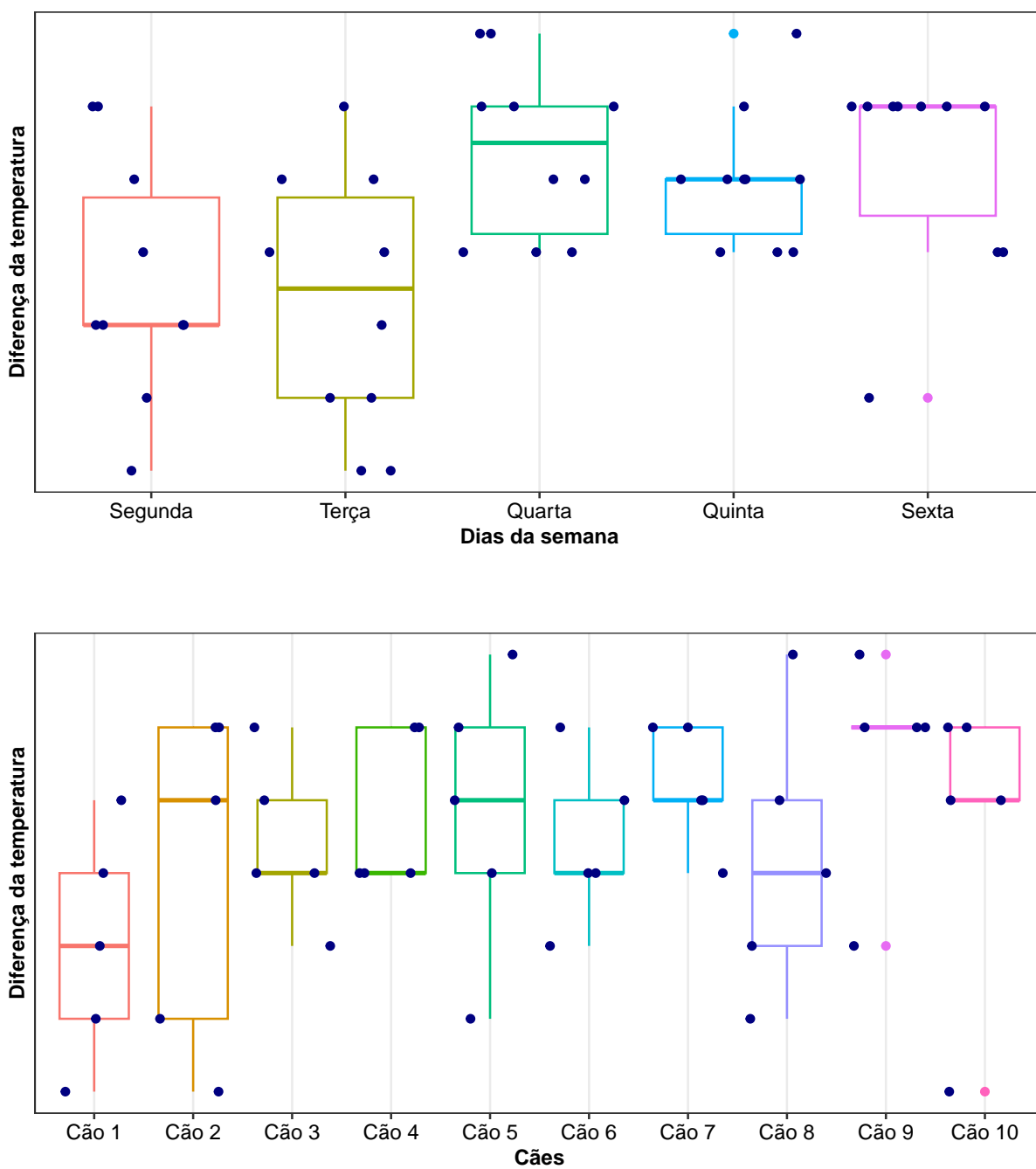


Figura 30 – Box-plot da diferença de ultrassom por dias e cães .

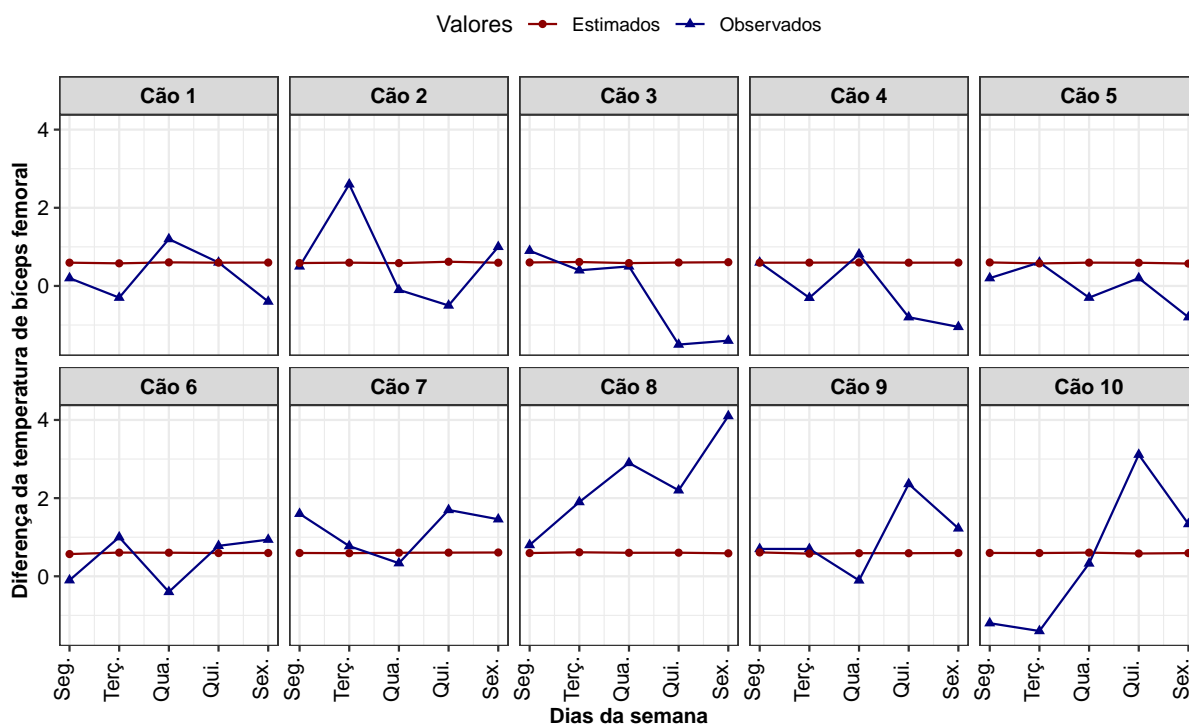


Figura 31 – Gráficos das diferenças de temperatura de bíceps femoral a partir do ajuste com o modelo 3, a média constante.

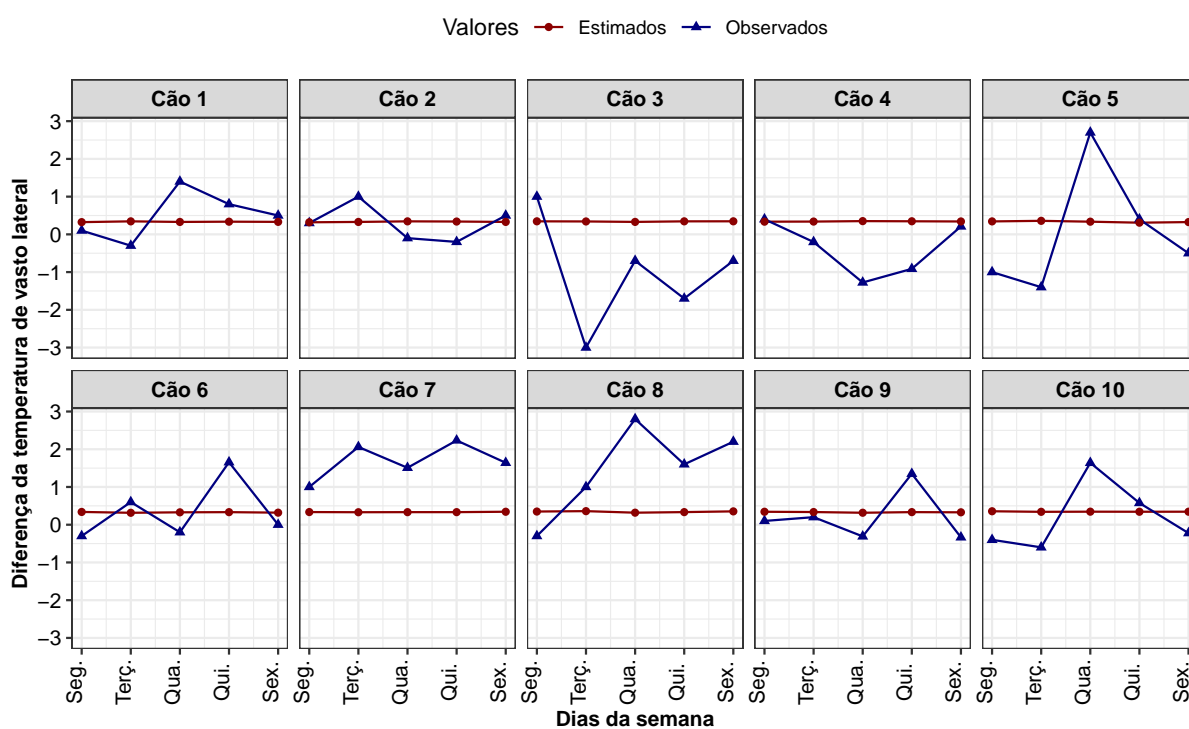


Figura 32 – Gráficos das diferenças de temperatura de vasto lateral a partir do ajuste com o modelo 3, a média constante.

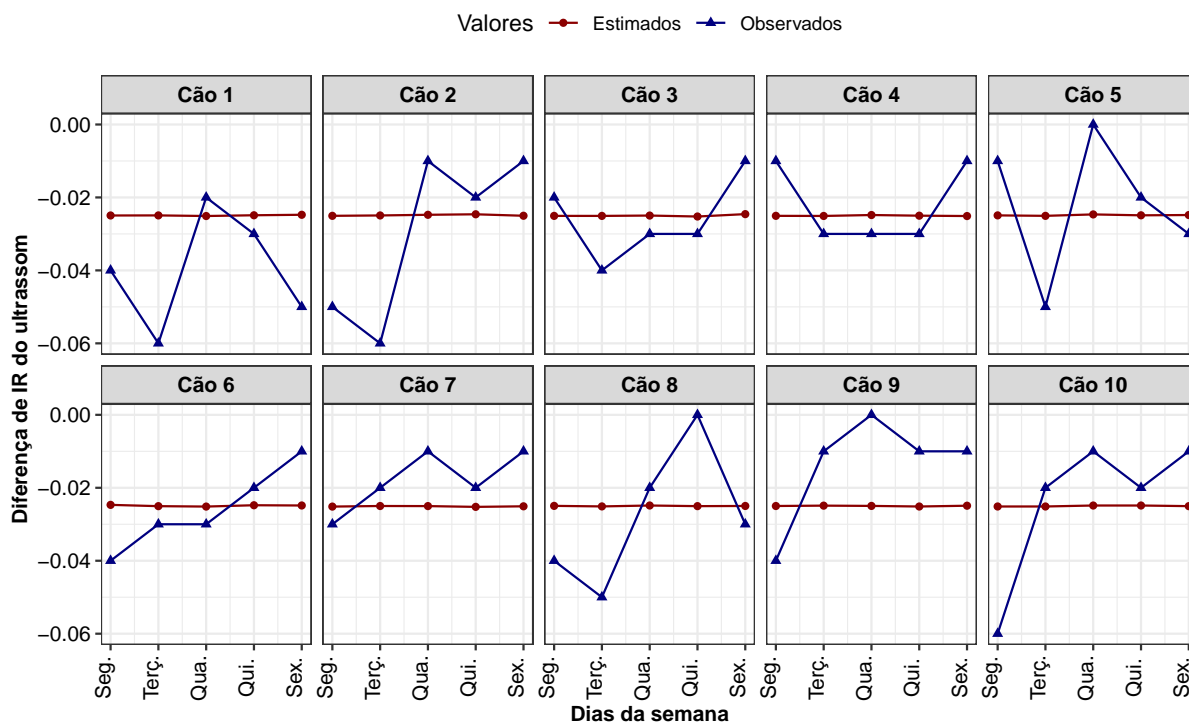


Figura 33 – Gráficos das diferenças da variável ultrassom a partir do ajuste com o modelo 3, média constante.

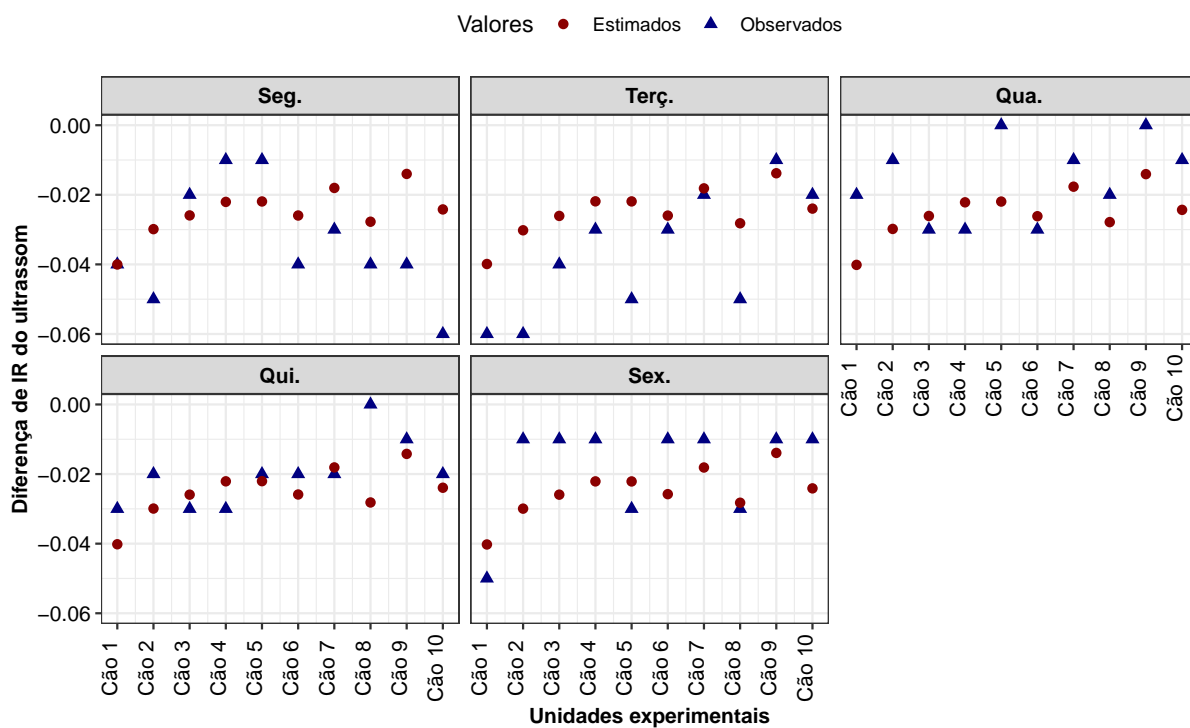


Figura 34 – Gráficos das diferenças da variável ultrassom a partir do ajuste com o modelo 4 considerando como bloco aleatório os dias.

## D Códigos de modelagem

### Modelo 1 com a matriz de variância e covariância não estruturado

```
#####
##### NÃO ESTRUTURADO
#####

analise_UN <-"data
{
  mean.b[1] <- 0
  mean.b[2] <- 0
}
model
{
  # Intercepto e inclinação por cada cão,
  # incluindo efeitos aleatórios
  for( j in 1:J )
  {
    b[j,1:2] ~ dnorm(mean.b,invSigma.b)
    pred_b[j,1:2] ~ dnorm(mean.b,invSigma.b)
  }

  # Definir modelo para cada unidade observacional
  for( i in 1:N )
  {
    mu[i] <- (beta[1]+b[dog[i],1])+(beta[2]+b[dog[i],2])*(x[i])
    ti[i] ~ dnorm( mu[i],tau.e )

    ##previsões para Ti
    pred[i] ~ dnorm(mu[i], tau.e )
  }
}
```

```
minimum <- min(pred)
maximum <- max(pred)
mean <- mean(pred)

#Interceptos e inclinações fixas (não informativas)
for (l in 1:2){
  beta[l] ~ dnorm(0.0,1.0E-6)
}
# Residual variance
tau.e <- pow(sigma.e,-2)
sigma.e ~ dunif(0,15)

# matriz de variância-covariância de ranefs(efeitos aleatórios)
#de cães
invSigma.b ~ dwish(R.b , 2 )
G.b[1,1] <- pow(sigma.b0,2)
G.b[2,2] <- pow(sigma.b1,2)
G.b[1,2] <- rho.b
G.b[2,1] <- G.b[1,2]
Sigma.b <- inverse(invSigma.b)

# Precisoões de interceptos e inclinações aleatórios por cão
tau.b0 ~ dgamma(1.5,5.0)
tau.b1 ~ dgamma(1.5,5.0)
sigma.b0 <- pow(tau.b0,-1/2)
sigma.b1 <- pow(tau.b1,-1/2)

# correlação entre b_0 e b_1 (cães)
rho.b ~ dnorm(mu_rho.b,tau_rho.b)
mu_rho.b ~ dnorm(-1,1)
tau_rho.b ~ dbeta(5.0,5.0)
}"
```