

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE SÃO JOÃO DA BOA VISTA

MATHEUS FELLIPE MILANI MAGIRI

**INVESTIGAÇÃO DE ALGUMAS PROPRIEDADES DINÂMICAS NO MODELO
FERMI-ULAM**

São João da Boa Vista

2024

Matheus Fellipe Milani Magiri

**INVESTIGAÇÃO DE ALGUMAS PROPRIEDADES DINÂMICAS NO MODELO
FERMI-ULAM**

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de
Curso de Graduação em Engenharia Aeronáutica
do Campus de São João da Boa Vista, Universidade
Estatual Paulista, como parte dos requisitos para
obtenção do diploma de Graduação em Engenharia
Aeronáutica .

Orientador: Profº Dr. Juliano Antonio de Oliveira

São João da Boa Vista

2024

M194i Magiri, Matheus Felliipe Milani
Investigação de algumas propriedades dinâmicas no modelo
Fermi-Ulam / Matheus Felliipe Milani Magiri. -- São João da Boa
Vista, 2024
35 p. : il., tabs.

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado - Engenharia
Aeronáutica) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade
de Engenharia, São João da Boa Vista
Orientador: Juliano Antonio de Oliveira

1. dinamica. 2. mapeamentos (matemática). 3. comportamento
caótico nos sistemas. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Universidade
Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia, São João da Boa Vista. Dados fornecidos
pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE SÃO JOÃO DA BOA VISTA
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA AERONÁUTICA**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**INVESTIGAÇÃO DE ALGUMAS PROPRIEDADES DINÂMICAS NO MODELO
FERMI-ULAM**

Aluno: Matheus Fellipe Milani Magiri
Orientador: Prof. Dr. Juliano Antônio de Oliveira

Banca Examinadora:

- Juliano Antônio de Oliveira (Orientador)
- Edemar Morsch Filho (Examinador)
- Joelson Dayvison Veloso Hermes (Examinador)

A ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no prontuário do aluno (Processo nº 326/2023)
--

São João da Boa Vista, 11 de julho de 2024

AGRADECIMENTOS

Minha profunda gratidão ao professor Dr. Juliano, cuja orientação foi crucial para a realização deste trabalho. Seu conhecimento, paciência e constante apoio foram essenciais para o meu desenvolvimento acadêmico. Agradeço por estar sempre disponível para ajudar e por acreditar no meu potencial.

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), a Pró-Reitoria de Pesquisa da Unesp (PROPe) e ao Programa Institucional de Bolsa de Iniciação Científica (PIBIC/UNESP) pelo suporte financeiro e pelas oportunidades de pesquisa, que foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus colegas de curso, aos professores e técnicos da instituição, que contribuíram com conhecimentos valiosos, discussões enriquecedoras e apoio ao longo do percurso.

Agradeço à minha mãe e ao meu pai, cujo apoio incondicional e incentivo constante me deram a força necessária para seguir em frente. Aos meus avós, cujo amor e suporte foram essenciais em cada passo desta jornada. Sem o carinho, a dedicação e a presença de vocês, este objetivo jamais teria sido alcançado. Minha profunda gratidão à minha família, que sempre confiou em mim e me apoiou de todas as maneiras possíveis.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001

Este trabalho também contou com o apoio da(s) seguinte(s) entidade(s):

PIBIC - Programa Institucional de Bolsa de Iniciação Científica

PROPE - Pró-Reitoria de Pesquisa

CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, processo nº 309649/2021-8

RESUMO

O presente trabalho está fundamentado na teoria de sistemas dinâmicos. Para o estudo apresentado será considerado o modelo Fermi-Ulam, o qual consiste na dinâmica unidimensional de uma partícula clássica de massa m , que por sua vez se encontra confinada no interior de duas paredes rígidas e é passível de sofrer colisões elásticas com as paredes. Essa dinâmica será definida primeiramente pelo modelo completo, descrito por um mapeamento discreto bidimensional nas variáveis velocidade da partícula e fase da parede móvel, uma vez que há movimento oscilatório de uma das paredes. O espaço de fase será construído realizando extensivas simulações numéricas permitindo observar uma estrutura mista composta por um mar de caos em volta de ilhas periódicas e limitado por curvas invariantes spanning. A partir dos resultados, será demonstrada a adequação e verossimilhança do modelo simplificado, que por sua vez também consiste em um mapeamento bidimensional descrito nas variáveis velocidade v da partícula e fase ϕ da parede. A simplificação do modelo tem a finalidade de facilitar a programação e diminuir o esforço computacional sem afetar significativamente a congruência dos resultados. Serão expostos os resultados dos espaços de fase para cada versão do modelo estudado. Em seguida demonstraremos o estudo acerca do escape de partículas no mar de caos, onde as correspondências dos expoentes dinâmicos do sistema serão expostas por diversos gráficos, os expoentes, por sua vez, serão determinados numericamente. Também será realizado um estudo dos expoentes numéricos da probabilidade de sobrevivência e escape de partículas, bem como o expoente de Lyapunov para caracterizar o caos. Com esse trabalho, será possível verificar que o modelo é conservativo, pois seu mapeamento preserva área no espaço de fase, também será provado matematicamente que se trata de um sistema dinâmico não linear, já que o expoente de Lyapunov referente a esse modelo possui valor positivo.

PALAVRAS-CHAVE: dinamica; mapeamentos (matemática); comportamento caótico nos sistemas.

ABSTRACT

The present work is grounded in the theory of dynamic systems. For the study presented, the Fermi-Ulam model will be considered, which consists of the one-dimensional dynamics of a classical particle of mass m , confined between two rigid walls and subject to elastic collisions with them. This dynamics will first be defined by the complete model, described by a two-dimensional discrete mapping of the particle's velocity and the phase of the movable wall, as there is oscillatory motion of one of the walls. The phase space will be constructed by performing extensive numerical simulations, allowing us to observe a mixed structure composed of a sea of chaos surrounding periodic islands and bounded by invariant curves. From the results, the adequacy and plausibility of the simplified model will be demonstrated, which also consists of a two-dimensional mapping described in terms of the particle's velocity v and the phase ϕ of the wall. The simplification of the model aims to facilitate programming and reduce computational effort without significantly affecting the congruence of the results. The results of phase spaces for each version of the studied model will be presented. Then we will demonstrate the study on particle escape in the sea of chaos, where the correspondences of the dynamic exponents of the system will be shown through various graphs, with the exponents being determined numerically. A study of the numerical exponents of particle survival and escape probability, as well as the Lyapunov exponent to characterize chaos, will also be conducted. With this work, it will be possible to verify that the model is conservative, as its mapping preserves area in the phase space. It will also be mathematically proven that it is a nonlinear dynamical system, since the Lyapunov exponent related to this model has a positive value.

KEYWORDS: dynamics; mappings (mathematics); chaotic behavior in systems.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Esquema do modelo de Fermi-Ulam	13
Figura 2	Espaços de fase do modelo completo usando valores diferentes para o parâmetro de controle ϵ conforme mostra legenda na figura	19
Figura 3	Evolução de órbitas usando $\epsilon = 10^{-3}$	24
Figura 4	Espaços de fase modelo simplificado usando em (a) $\epsilon = 10^{-4}$, (b) $\epsilon = 10^{-3}$ e (c) $\epsilon = 10^{-2}$	25
Figura 5	Ajustem em lei de potência - máximo da primeira C.I.	25
Figura 6	Histograma com $\epsilon = 1 \cdot 10^{-5}$	27
Figura 7	Histogramas em função do número de iterações	28
Figura 8	Máximo do histograma ($N_p \times \epsilon$)	29
Figura 9	Máximo do histograma ($N_p \times h$)	29
Figura 10	Probabilidade de sobrevivência em função do número de iterações ($P_s \times n$) . . .	30
Figura 11	$-\nu$ em função de h/ϵ	31
Figura 12	Expoente de Lyapunov	33
Figura 13	Expoente de Lyapunov médio em função de ϵ	33

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Apresentação dos valores.	26
--	----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	DESENVOLVIMENTO	13
2.1	Modelo Fermi-Ulam versão completa	13
2.2	Modelo Fermi-Ulam versão simplificada	21
2.2.1	Primeira Curva Invariante Spanning	25
2.2.2	Estudo de escape de partículas	27
2.2.3	Estudo de sobrevivência de partículas	30
2.2.4	Estudo do Expoente de Lyapunov	32
3	CONCLUSÃO	34
	REFERÊNCIAS	35

1 INTRODUÇÃO

Nascido em Curitiba no ano de 1924, Cesare Mansueto Giulio Lattes foi um brilhante cientista de sua geração, seu nome perpetuou pelas descobertas científicas como a descoberta da partícula subatômica méson-pi, que aclarou os conhecimentos sobre a harmonia atômica dos elementos, sendo também por essas homenageado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) com uma plataforma integrada com seu nome, na qual os responsáveis pelos atuais avanços científicos do país e do mundo compartilham seus estudos e conhecimentos (CANALCIENCIA, 2019). 25 anos após seu nascimento, no ano de 1949, César Lattes assume a direção do centro brasileiro de pesquisas físicas. Nessa mesma data, o físico italiano Enrico Fermi (1901-1954), conhecido por ser o desenvolvedor do primeiro reator nuclear e pela identificação de novos elementos radioativos (FRAZAO, 2023), propôs o denominado modelo de Fermi (FERMI, 1949) na tentativa de explicar a aceleração de raios cósmicos quando em interação com campos elétricos e magnéticos variantes no tempo. Desde então o modelo foi estudado em diferentes contextos e por vários autores (LICHTENBERG; LIEBERMAN, 1992) (LEONEL, 2019). Um protótipo que descreve o modelo de Fermi é conhecido como modelo Fermi-Ulam. O modelo Fermi-Ulam consiste numa partícula em movimento unidimensional que tem um regime de colisões entre duas paredes que podem ser ambas fixas, descrito por uma versão do modelo simplificado, ou uma fixa e outra móvel de maneira periódica no tempo, descrito em uma versão completa. Desse modo, após a partícula colidir com a parede móvel, a mesma pode ganhar ou perder energia cinética. Nesse modelo, as paredes simbolizam o campo eletromagnético, e a partícula, os raios cósmicos que se chocam com esse campo.

O processo de aplicação de leis físicas fundamentais com o propósito de equacionar matematicamente o comportamento físico de sistemas é a definição elementar de modelagem matemática, um método habitualmente aplicado no ramo aqui estudado. Um sistema, por sua vez, é tido como uma associação de elementos que interagem entre si e à vista disso possuem uma lei de causa e efeito, isto é, dada uma situação inicial a ação conjunta dos elementos que compõem esse sistema determina uma resposta ao estímulo a ele aplicado, podendo ser linear e periódica ou opostamente a isso, tendo um comportamento sensível às condições iniciais, demonstrando assim uma resposta caótica e imprevisível. Referindo-se à dinâmica de sistemas, associa-se às variáveis dinâmicas (ou de saída) como sendo dependentes não somente da entrada instantânea do sistema mas também como sendo variáveis ao longo do tempo. Outro método também comumente aplicado ao estudo aqui em execução se dá pela dificuldade e/ou pela incapacidade física de se criar um modelo tangível para a observação física, a simulação matemática é no que lhe concerne "o processo de obtenção da resposta de sistemas dinâmicos por solução numérica das equações que o modelam" (KLUEVER, 2018), sendo essa, a ferramenta de maior participação na solução do sistema modelado Fermi-Ulam. Tendo as ferramentas juntamente com as soluções encontradas por meios matemáticos e numéricos, faz-se então a análise do sistema, com o propósito de se determinar e possibilitar a interpretação de suas respostas. Geralmente para isso se faz a variação de seus parâmetros de entrada e de interação elementar, a fim de compreender o significado quantitativo de cada componente e variável que o constitui.

Neste trabalho de conclusão de curso consideramos o modelo Fermi-Ulam em suas versões completa e simplificada. Uma descrição analítica será apresentada de forma robusta e extensivas simulações numéricas serão realizadas para a construção dos espaços de fase. Nossos resultados mostram nos espaços de fase uma rica estrutura mista composta por um mar de caos em volta de ilhas periódicas e limitado por curvas invariantes spanning. A partir das equações, mostramos a conservação de área no espaço de fase. Também realizamos um estudo sobre o escape de partículas no mar de caos. Obtivemos numericamente os expoentes dinâmicos do sistema e plotamos os gráficos correspondentes a cada expoente. Por último, realizamos um estudo sobre o modelo Fermi-Ulam dissipativo, o qual mostra que a estrutura mista do espaço de fase observado para o modelo conservativo convergiu para atratores pontos fixos ao se inserir a dissipação no sistema.

Para melhor expressar nossas intenções, organizamos esse trabalho de conclusão de curso da seguinte forma: na subseção 2.1 descrevemos analiticamente o modelo completo de forma robusta para determinar o mapeamento discreto. Construímos numericamente os espaços de fase considerando valores diferentes dos parâmetros de controle. Na subseção 2.2 descrevemos o modelo simplificado e construímos numericamente os espaços de fase. Nas demais subseções foram separados os estudos a respeito da altura máxima da curva invariante spanning e as características de expoentes referentes ao escape de partículas, sobrevivência das mesmas e o expoente de Lyapunov. No capítulo 3 apresentamos os comentários finais.

2 DESENVOLVIMENTO

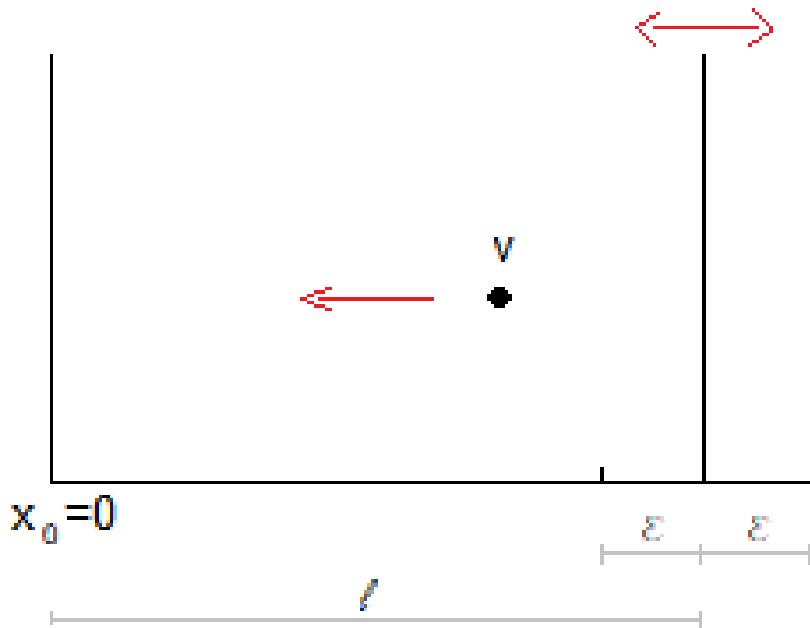
2.1 MODELO FERMI-ULAM VERSÃO COMPLETA

Nessa seção vamos discutir sobre o modelo de Fermi-Ulam em sua versão completa apresentado por Zaslavskii, Pustyl'nikov, Lichtenberg e Leonel (LICHTENBERG; LIEBERMAN, 1992), (LEONEL; SILVA; KAMPHORST, 2004), o qual consiste de uma partícula de massa unitária ($m = 1$) movendo-se ao longo do eixo x . Ela está confinada entre duas paredes rígidas sendo uma delas fixa e a outra que se move periodicamente no tempo. A partícula colide elasticamente com as paredes. A parede fixa está localizada em $x_0 = 0$ e a parede móvel tem a equação da posição dada por:

$$x_W = l + \epsilon \cos(\omega t + \phi_0), \quad (1)$$

em que l é a distância da parede fixa até a posição de equilíbrio, e ϵ é a amplitude do movimento, ω é por sua vez a frequência de oscilação da parede, ϕ_0 é a fase inicial e t é o tempo. $\phi_0 \in [0, 2\pi]$. A Figura 1 ilustra um esquema do modelo de Fermi-Ulam.

Figura 1 – Esquema do modelo de Fermi-Ulam



Fonte: Produção do próprio autor.

A frequência ω é dinamicamente irrelevante já que sua variação é equivalente a uma mudança de escala temporal ($t' = \omega t$). A velocidade da partícula é dada por:

$$v(t') = \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial t}, \quad (2)$$

e é apenas renormalizada por ω . Nestas variáveis t' e v' , a equação da parede móvel é:

$$v'(t') = -\epsilon \sin(t' + \phi_0) \frac{\partial t'}{\partial t}, \quad (3)$$

$$v'_w = \frac{v_w}{\omega} = -\epsilon \sin(t' + \phi_0). \quad (4)$$

Este problema pode ser descrito por um mapeamento discreto não linear nas variáveis (v, ϕ) , em que v e ϕ são respectivamente a velocidade da partícula e a fase da parede móvel imediatamente após a colisão. É importante observar que (v, ϕ) estão relacionadas com o par canônico (E, t) , energia e tempo.

Para construir o mapeamento, é importante classificar as colisões em 2 comportamentos distintos:

- i) A partícula colide apenas uma vez com a parede móvel e é refletida em direção à parede fixa e
- ii) A partícula sofre mais de uma colisão com a parede móvel antes de colidir com a parede fixa.

Vamos iniciar analisando o primeiro comportamento. Suponha que em $t = 0$ a partícula encontra-se em $x_p = x_{w(0)}$, onde x_p é a posição da partícula e $x_{w(0)}$ é a posição da parede móvel, com uma velocidade inicial $v_0 < 0$, isto é, deslocando-se no sentido negativo ao longo do eixo x . A partícula viaja em direção à parede fixa, colide elasticamente e é refletida em direção à parede móvel. Note que a colisão com a parede móvel ocorre somente em $x \in [l - \epsilon, l + \epsilon]$, a qual chamaremos de zona de colisão. Para obter a fase da parede móvel, na primeira colisão, é necessário avaliar o tempo que a partícula gasta para sair de $x_p = x_{w(0)}$ e viajar até $x_0 = 0$, ser refletida e viajar até $x = l - \epsilon$. Então, o tempo que a partícula gasta para fazer o percurso de $x_{w(0)}$ até $x_0 = 0$ é obtido da seguinte forma:

$$x_{w(\phi_n)} = x_p(\phi_n). \quad (5)$$

Igualando a posição da partícula com a da parede, teremos:

$$x_w = x_{op}, \quad (6)$$

$$v_0 = \frac{x_{fp} - x_{op}}{t_e}, \quad (7)$$

$x_{fp} = 0$, então

$$v_0 = \frac{0 - (l + \epsilon \cos \phi_n)}{t_e}, \quad (8)$$

$$t_e = \frac{-(l + \epsilon \cos \phi_n)}{v_0}, \quad (9)$$

onde t_e é o tempo que a partícula gasta ao viajar para a esquerda. Após a colisão com a parede fixa, a partícula inverte sua velocidade onde $v_p = -v_0$, logo o tempo gasto para a partícula sair de $x_0 = 0$ e

chegar até $x = l - \epsilon$ é :

$$v_p = -v_0, \quad (10)$$

$$v_p = \frac{(l - \epsilon) - 0}{t_d}, \quad (11)$$

$$t_d = \frac{l - \epsilon}{v_p}, \quad (12)$$

$$t_d = \frac{l - \epsilon}{-v_0}, \quad (13)$$

$$t_d = \frac{-(l - \epsilon)}{v_0}, \quad (14)$$

onde t_d é o tempo que a partícula gasta ao viajar para a direita e entrar em zona de colisão. Depois que a partícula entra em zona de colisão, $x \in [l - \epsilon, l + \epsilon]$, ela colide se $x_p = x_w$. O instante de tempo t_{c1} em que ocorre a colisão é obtido resolvendo numericamente a equação transcendental:

$$x_w = x_p, \quad (15)$$

$$l + \epsilon \cos(\phi_o + t_{c1} + t_e + t_d) = l - \epsilon - v_0 t_{c1}, \quad (16)$$

$$\epsilon \cos \left\{ \phi_0 + t_{c1} - \frac{[l + \epsilon \cos(\phi_0)]}{v_0} - \frac{(l - \epsilon)}{v_0} \right\} = -\epsilon - v_0 t_{c1}. \quad (17)$$

Então, a fase na próxima colisão é:

$$\phi_1 = \phi_0 + t_{c1} - \frac{[l + \epsilon \cos(\phi_o)]}{v_0} - \frac{(l - \epsilon)}{v_0}. \quad (18)$$

Após a colisão com a parede móvel, a velocidade da partícula é obtida a partir da conservação de energia e momentum no referencial da parede móvel. Deste modo, a velocidade da partícula no referencial da parede móvel é:

$$v = -v_0 - v_w, \quad (19)$$

onde v_0 é a velocidade da partícula e v_w é a velocidade da parede móvel (HALLIDAY R. RESNICK, 1996). Após a colisão, a partícula inverte sua velocidade, de modo que:

$$\tilde{v}_1 = -v, \quad (20)$$

$$\tilde{v}_1 = -(-v_0 - v_w), \quad (21)$$

$$\tilde{v}_1 = v_0 + v_w. \quad (22)$$

Voltando para o referencial fixo, a velocidade da partícula após o choque é

$$v_1 = \tilde{v}_1 + v_w, \quad (23)$$

logo:

$$v_1 = v_0 + v_w + v_w, \quad (24)$$

$$v_1 = v_0 + 2v_w(\phi_1), \quad (25)$$

aqui, $v_w(\phi_1)$ é a velocidade da parede móvel no instante de colisão t_{c1} . Procedimentos análogos podem ser realizados para outras colisões de modo que o mapeamento pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \phi_{n+1} = \phi_n + t_{cn+1} - \frac{(l+\epsilon\cos(\phi_n))}{v_n} - \frac{(l-\epsilon)}{v_n} \mod(2\pi) \\ v_{n+1} = v_n - 2\epsilon\sin(\phi_{n+1}) \end{cases}. \quad (26)$$

A função $\mod 2\pi$ faz com que o valor ϕ_{n+1} fique limitado ao intervalo $[0, 2\pi]$. O tempo $t_{c(n+1)}$ é obtido da solução numérica da equação transcendental,

$$f(t_{c(n+1)}) = x_w = x_p, \quad (27)$$

$$f(t_{c(n+1)}) = l + \epsilon\cos(\phi_n + t_{c(n+1)} + t_e + t_d) = l - \epsilon - v_n t_{c(n+1)}, \quad (28)$$

$$f(t_{c(n+1)}) = \epsilon\cos\left\{\phi_n + t_{c(n+1)} - \frac{[l + \epsilon\cos(\phi_n)]}{v_n} - \frac{(l - \epsilon)}{v_n}\right\} + \epsilon + v_n t_{c(n+1)}. \quad (29)$$

A matriz jacobiana J_a para o mapeamento definido pelas equações de ϕ_{n+1} e v_{n+1} é escrita como:

$$J_a = \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix},$$

onde os coeficientes da matriz J_a têm a forma:

$$j_{11} = \frac{\partial v_{n+1}}{\partial v_n} = 1 - 2w\epsilon\cos(\phi_{n+1})\frac{\partial\phi_{n+1}}{\partial v_n}, \quad (30)$$

$$j_{12} = \frac{\partial v_{n+1}}{\partial \phi_n} = -2w\epsilon\cos(\phi_{n+1})\frac{\partial\phi_{n+1}}{\partial \phi_n}, \quad (31)$$

$$j_{21} = \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial v_n} = \frac{\partial t_{c(n+1)}}{\partial v_n} + \frac{(1 - \epsilon)}{v_n^2} + \frac{[l + \epsilon\cos(\phi_n)]}{v_n^2}, \quad (32)$$

$$j_{22} = \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} = 1 + \frac{\partial t_{c(n+1)}}{\partial \phi_n} + \frac{\epsilon\sin(\phi_{n+1})}{v_n}. \quad (33)$$

O termo $\frac{\partial t_{c(n+1)}}{\partial v_n}$ é obtido fazendo a derivação implícita $f(t_{c(n+1)})$ em relação a v_n . Assim,

$$-\epsilon \text{sen}(\phi_{n+1}) \left(\frac{\partial t_{c(n+1)}}{\partial v_n} + \frac{[l + \epsilon \cos(\phi_n)]}{v_n^2} + \frac{(l - \epsilon)}{v_n^2} \right) + t_{c(n+1)} + v \frac{\partial t_{c(n+1)}}{\partial v_n} = 0, \quad (34)$$

$$\frac{\partial t_{c(n+1)}}{\partial v_n} [v_n - \epsilon \text{sen}(\phi_{n+1})] = -t_{c(n+1)} + \epsilon \text{sen}(\phi_{n+1}) \left[\frac{(l + \epsilon \cos(\phi_n))}{v_n^2} + \frac{(l - \epsilon)}{v_n^2} \right], \quad (35)$$

$$\frac{\partial t_{c(n+1)}}{\partial v_n} = \frac{\epsilon \text{sen}(\phi_{n+1}) \left[\frac{(l + \epsilon \cos(\phi_n)) + (l - \epsilon)}{v_n^2} \right] - t_{c(n+1)}}{v_n - \epsilon \text{sen}(\phi_{n+1})}. \quad (36)$$

O termo $\frac{\partial t_{c(n+1)}}{\partial \phi_n}$ é obtido fazendo a derivação implícita da equação $f(t_{c(n+1)})$ em relação a ϕ_n , logo,

$$-\epsilon \text{sen}(\phi_{n+1}) \left[1 + \frac{\partial t_{c(n+1)}}{\partial \phi_n} + \frac{\epsilon \text{sen} \phi_n}{v_n} \right] + v_n \frac{\partial t_{c(n+1)}}{\partial \phi_n} = 0, \quad (37)$$

$$\frac{\partial t_{c(n+1)}}{\partial \phi_n} [v_n - \epsilon \text{sen}(\phi_{n+1})] = \epsilon \text{sen}(\phi_{n+1}) \left(1 + \frac{\epsilon \text{sen} \phi_n}{v_n} \right), \quad (38)$$

$$\frac{\partial t_{c(n+1)}}{\partial \phi_n} = \frac{\epsilon \text{sen}(\phi_{n+1}) \left(1 + \frac{\epsilon \text{sen}(\phi_n)}{v_n} \right)}{v_n - \epsilon \text{sen}(\phi_{n+1})}. \quad (39)$$

Deste modo, podemos calcular o determinante da matriz jacobiana J_a , que é definido por:

$$\det(J_a) = \frac{v_n + \epsilon \text{sen}(\phi_{n+1})}{v_{n+1} + \epsilon \text{sen}(\phi_{n+1})}. \quad (40)$$

Este resultado mostra que o mapeamento não conserva área no espaço de fase, mas sim a medida $(v_n + \epsilon \text{sen}(\phi_n)) \delta n \delta \phi$ conforme mostra a referência (KAMPHORST; CARVALHO, 1999).

Agora vamos analisar o segundo comportamento. Neste caso, a partícula sofrerá seguidas colisões com a parede móvel antes de ser refletida. Suponha que as condições iniciais v_0 e ϕ_0 e que a partícula sofra uma colisão com a parede móvel. A posição da partícula com a parede móvel é:

$$x_p = x_{x(0)}. \quad (41)$$

Considerando que ela já está na zona de colisão, então a correção de fase para a próxima colisão é dada por

$$\phi_1 + t_{c1}, \quad (42)$$

e a correção na velocidade é dada por

$$v_1 = v_0 + 2v_{w(\phi_1)}. \quad (43)$$

A velocidade v_1 é obtida usando novamente a conservação de energia e momentum no referencial da parede móvel. O instante t_{c1} é obtido da igualdade

$$x_w(t_{c1}) = x_p, \quad (44)$$

$$l + \epsilon \cos(\phi_0 + t_{c1}) = l + \epsilon \cos(\phi_0) + v_0 t_{c1}, \quad (45)$$

$$\epsilon \cos(\phi_0 + t_{c1}) = \epsilon \cos(\phi_0) + v_0 t_{c1}. \quad (46)$$

Se a partícula sofre colisões sucessivas, então a equação admite pelo menos uma solução em $t \in [0, 2\pi]$.

Logo, o mapeamento é escrito como

$$\begin{cases} \phi_{n+1} = \phi_n + t_{c(n+1)} \mod(2\pi) \\ v_{n+1} = -v_n - 2\epsilon \sin(\phi_{n+1}) \end{cases},$$

onde $t_{c(n+1)}$ é obtido resolvendo numericamente a equação

$$g(t_{c(n+1)}) = x_w = x_p, \quad (47)$$

$$g(t_{c(n+1)}) = l + \epsilon \cos(\phi_n + t_{c(n+1)}) = l + \epsilon \cos(\phi_n) + v_n t_{c(n+1)}, \quad (48)$$

$$g(t_{c(n+1)}) = \epsilon \cos(\phi_n + t_{c(n+1)}) - \epsilon \cos(\phi_n) + v_n t_{c(n+1)} = 0. \quad (49)$$

A matriz jacobiana J_b para as equações de fase ϕ_{n+1} e velocidade v_{n+1} tem os seguintes coeficientes:

$$j_{11} = \frac{\partial v_{n+1}}{\partial v_n} = -1 - 2w\epsilon \cos(\phi_{n+1}) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial v_n}, \quad (50)$$

$$j_{12} = \frac{\partial v_{n+1}}{\partial \phi_n} = -2w\epsilon \cos(\phi_{n+1}) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n}, \quad (51)$$

$$j_{21} = \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial v_n} = \frac{\partial t_{c(n+1)}}{\partial v_n}, \quad (52)$$

$$j_{22} = \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} = 1 + \frac{\partial t_{c(n+1)}}{\partial \phi_n}. \quad (53)$$

O termo $\frac{\partial t_{c(n+1)}}{\partial v_n}$ é obtido fazendo a derivação implícita da equação $g(t_{c(n+1)})$ em relação a v_n , deste modo,

$$\frac{\partial t_{c(n+1)}}{\partial v_n} = -\frac{t_{c(n+1)}}{v_n + \epsilon \sin(\phi_{n+1})}. \quad (54)$$

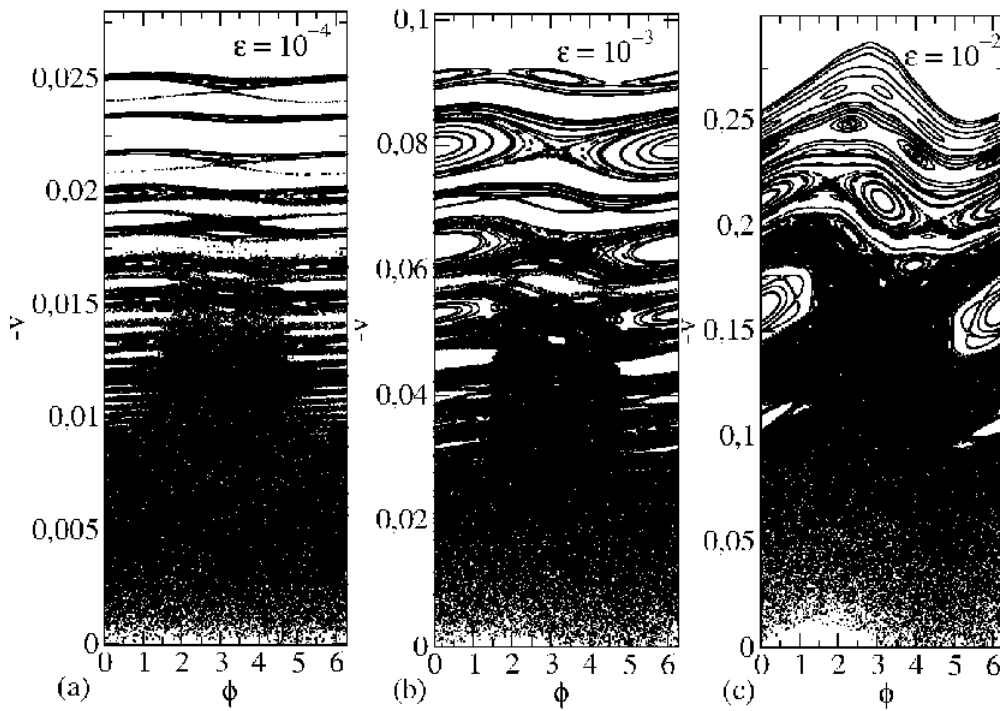
O termo $\frac{\partial t_{c(n+1)}}{\partial \phi_n}$ é obtido fazendo a derivação implícita da equação $g(t_{c(n+1)})$ em relação a ϕ_n , assim:

$$\frac{\partial t_{c(n+1)}}{\partial \phi_n} = \frac{-\epsilon \operatorname{sen}(\phi_n) + \epsilon \operatorname{sen}(\phi_{n+1})}{-v_n - \epsilon \operatorname{sen}(\phi_{n+1})}. \quad (55)$$

O determinante da matriz jacobiana fornece

$$\det(J_b) = \frac{v_n + \epsilon \operatorname{sen}(\phi_n)}{v_{n+1} + \epsilon \operatorname{sen}(\phi_{n+1})}. \quad (56)$$

Figura 2 – Espaços de fase do modelo completo usando valores diferentes para o parâmetro de controle ϵ conforme mostra legenda na figura



Fonte: Produção do próprio autor.

Esse resultado mostra que a área no espaço de fase no instante n não é a mesma que no instante $(n + 1)$. Porém, podemos notar que a quantidade que aparece no denominador é exatamente a mesma que aparece no numerador, apenas os índices sendo diferentes. Essa expressão permite-nos concluir que a medida a ser preservada é escrita como $v_{n+1} + \epsilon \operatorname{sen}(\phi_{n+1}) \delta v_{n+1} \delta \phi_{n+1} = v_n + \epsilon \operatorname{sen}(\phi_n) \delta v \delta \phi$ e essa quantidade é preservada no espaço de fase.

A figura 2 mostra diferentes espaços de fase para o modelo de Fermi-Ulam que é obtido pela interação de condições iniciais diferentes atribuídas para os mapeamentos ϕ_{n+1} e v_{n+1} descritos nas equações (26) e (47). Podemos destacar duas regiões diferentes no espaço de fase, sendo elas: (i) a região de baixas energias, onde ilhas periódicas compostas por pontos fixos elípticos existem

circundadas por um mar caótico e (ii) uma região de alta energia onde existem curvas invariantes que separam o espaço de fase. A região de baixa energia é separada da região de alta energia pela chamada primeira curva invariante spanning. Os parâmetros de controle utilizados na construção da figura (2) foram $l = 1$ e em (a) $\epsilon = 10^{-4}$, (b) $\epsilon = 10^{-3}$ e em (c) $\epsilon = 10^{-2}$.

Esses espaços de fase deixam claro a interação que existe entre o parâmetro de não linearidade ϵ com a altura do mar de caos, já que, ao aumentar o valor de ϵ nota-se que o valor do eixo y também aumenta.

Afim de facilitar a programação e diminuir o esforço computacional, será realizado agora o estudo da versão simplificada do Modelo de Fermi-Ulam.

2.2 MODELO FERMI-ULAM VERSÃO SIMPLIFICADA

Nessa seção vamos apresentar as discussões para o modelo de Fermi-Ulam em sua versão simplificada. Consideramos que as duas paredes rígidas estão fixas, sendo uma em $x = 0$ e a outra em $x = l$ a qual transfere momentum de forma senoidal para a partícula, l é a distância de equilíbrio entre as paredes.

A transferência de momentum para a partícula é da forma:

$$v_m = -\epsilon\omega \sin(\omega t + \phi_0), \quad (57)$$

onde t é o tempo, ϵ é a amplitude do movimento, a frequência angular ω e a fase inicial ϕ_0 são constantes. O comportamento dinâmico desse modelo é descrito por um mapeamento bidimensional descrito nas variáveis v e ϕ . Supondo que a partícula parte de $x = l$ com velocidade inicial v_0 em um instante $t_0 = 0$, onde $\phi_0 \in [0, 2\pi]$. Assim, o tempo que a partícula gasta no percurso de $x = l$ à $x = 0$ é obtido pela equação do deslocamento:

$$x - x_0 = v_0 t_e + \frac{1}{2} a t_e^2, \quad (58)$$

onde $x - x_0 = -l$ pois a partícula desloca-se no sentido negativo ao longo do eixo x , a aceleração $a = 0$ pois durante o percurso a velocidade é constante, v_0 é a velocidade inicial da partícula, t_e é o tempo que a partícula gasta ao viajar para a esquerda, logo:

$$-l = v_0 t_e, \quad (59)$$

$$t_e = -\frac{l}{v_0}. \quad (60)$$

Em $x_0 = 0$ a partícula sofre uma colisão elástica e inverte sua velocidade, assim:

$$v_p = -v_0. \quad (61)$$

Invertida a velocidade, o tempo que a partícula gasta para sair de $x_0 = 0$ e chegar em $x = l$ é:

$$x - x_0 = v_0 t_d + \frac{1}{2} a t_d^2, \quad (62)$$

aqui $x - x_0 = l$ pois a partícula desloca-se no sentido positivo ao longo do eixo x , t_2 é o tempo que a partícula gasta ao viajar para a direita, logo:

$$l = v_0 t_d, \quad (63)$$

$$t_d = \frac{l}{-v_0}. \quad (64)$$

O tempo que a partícula gasta para sair de $x = l$, colidir com a parede em $x_0 = 0$ e voltar até $x = l$ é:

$$\Delta t = t_d + t_e, \quad (65)$$

$$\Delta t = -\frac{l}{v_0} + \left(\frac{-l}{v_0}\right), \quad (66)$$

$$\Delta t = -\frac{l}{v_0} - \frac{l}{v_0}, \quad (67)$$

$$\Delta t = \frac{-2l}{v_0}. \quad (68)$$

Então, a correção na fase para a próxima colisão é escrita como:

$$\phi_1 = -\frac{2l}{v_0} + \phi_0 \mod(2\pi). \quad (69)$$

A velocidade da parede móvel no instante da colisão é:

$$v_{xw} = \frac{\partial x_w}{\partial t}, \quad (70)$$

$$v_{xw} = -\epsilon \sin(wt + \phi_0)w, \quad (71)$$

$$v_{xw} = -\epsilon w \sin(\phi_1). \quad (72)$$

Após a colisão com a parede em $x = l$, a velocidade da partícula é obtida a partir da conservação de energia e momentum no referencial da parede em $x = l$. Deste modo, a velocidade da partícula no referencial da parede em $x = l$ no instante da colisão é:

$$\tilde{v} = -v_0 - v_w, \quad (73)$$

onde v_0 é a velocidade da partícula e v_w é a velocidade da parede. Em $x = l$ a partícula sofre uma colisão com a parede e inverte sua velocidade, assim:

$$\tilde{v}_1 = -v_0, \quad (74)$$

$$\tilde{v}_1 = -(-v_0 - v_w), \quad (75)$$

$$\tilde{v}_1 = v_0 + v_w. \quad (76)$$

Voltando para o referencial da parede em $x = 0$

$$v_1 = \tilde{v}_1 + v_w, \quad (77)$$

$$v_1 = v_0 + 2v_w, \quad (78)$$

$$v_1 = v_0 - 2\epsilon w \sin \phi_1, \quad (79)$$

onde v_1 é a nova velocidade da partícula após colidir com a parede em $x = 0$.

Ao colidir com a parede em $x = l$ pode ser que a partícula tenha $v_0 > 0$, isso implica que a

partícula viajaria em uma região proibida ($x > l$). Para evitar esta situação fisicamente impossível, impomos artificialmente um módulo na velocidade da partícula. Assim, o mapeamento para o modelo de Fermi-Ulam em sua versão simplificada é escrito como:

$$\begin{cases} v_{n+1} = |v_n - 2\epsilon w \sin(\phi_{n+1})| \\ \phi_{n+1} = [\phi_n - \frac{2l}{v_n}] \mod(2\pi) \end{cases} \quad (80)$$

A matriz jacobiana J_c para o mapeamento é escrita como:

$$J_c = \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix}.$$

Os coeficientes da matriz J_c têm a forma:

$$j_{11} = \frac{\partial v_{n+1}}{\partial v_n} = \text{sgn}(v_n - 2\epsilon w \sin(\phi_{n+1}))(1 - 2\epsilon w \cos(\phi_{n+1})) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n}, \quad (81)$$

$$j_{12} = \frac{\partial v_{n+1}}{\partial \phi_n} = \text{sgn}(v_n - 2\epsilon w \sin(\phi_{n+1}))(-2\epsilon w \cos(\phi_{n+1})) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n}, \quad (82)$$

$$j_{21} = \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial v_n} = -2lv_n^{-2} = \frac{2l}{v_n^2}, \quad (83)$$

$$j_{22} = \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} = 1. \quad (84)$$

O determinante da matriz J_c é dado por:

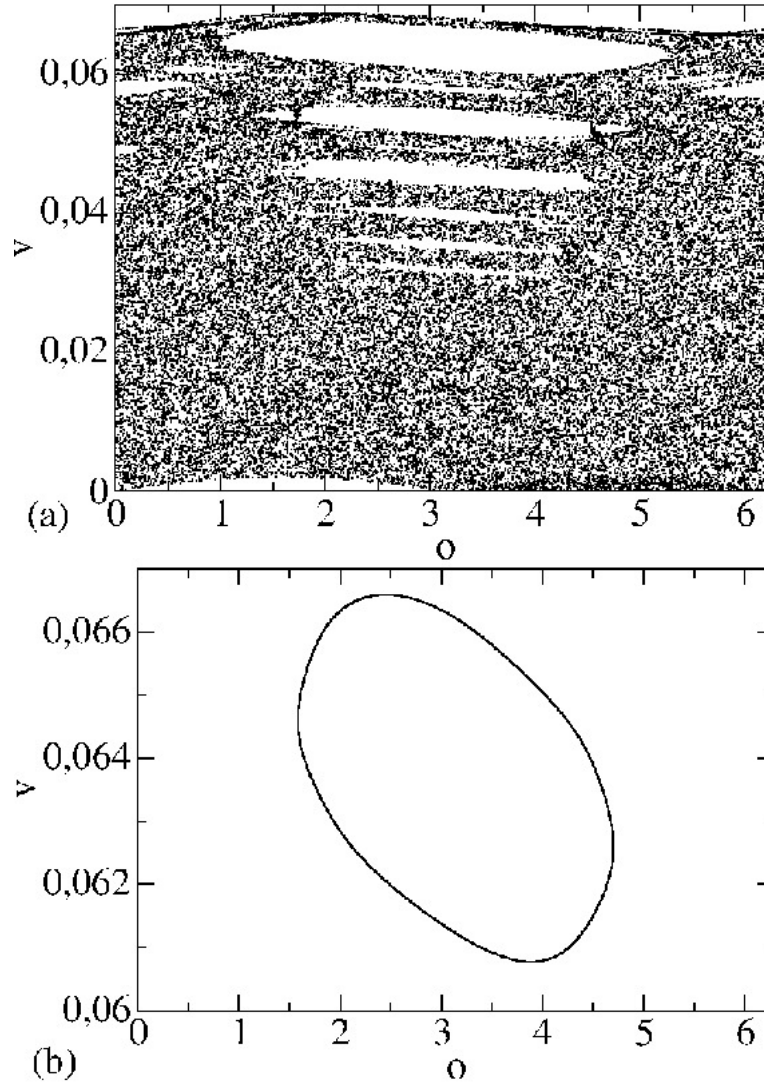
$$\det J_c = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}, \quad (85)$$

$$\det J_c = 1 - 2\epsilon w \cos(\phi_{n+1}) \frac{2l}{v_n^2} - (-2\epsilon w \cos(\phi_{n+1})) \frac{2l}{v_n^2}, \quad (86)$$

$$\det J_c = \pm 1. \quad (87)$$

Esse resultado mostra que o mapeamento para o modelo de Fermi-Ulam em sua versão simplificada preserva a área no espaço de fase, por esse motivo podemos concluir que o sistema é conservativo e portanto o espaço de fase é misto, contendo um mar de caos, ilhas de estabilidade e curvas invariantes spanning.

Figura 3 – Evolução de órbitas usando $\epsilon = 10^{-3}$



Fonte: Produção do próprio autor.

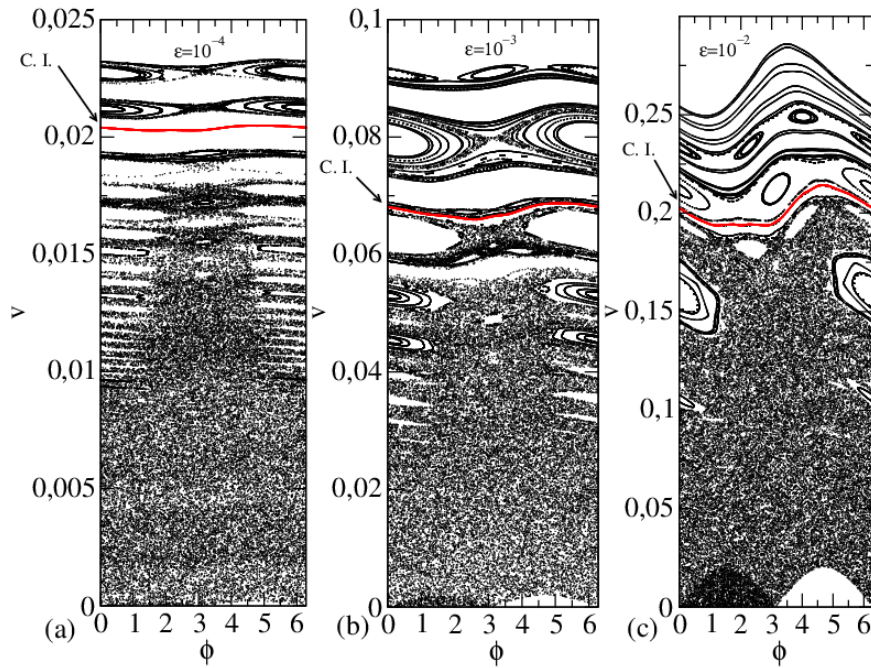
A figura 3 mostra a evolução de órbitas considerando o modelo simplificado descrito na equação (80) e utilizando o conjunto de parâmetros de controle $w = 1$, $\epsilon = 10^{-3}$ e $l = 1$

Vemos que a figura 3(a) mostra o comportamento de uma órbita caótica sendo utilizadas as condições iniciais $(\phi_0, v_0) = (0, 01; 0, 01)$ que estão inseridas no mar de caos, enquanto que na figura 3(b) temos uma órbita periódica usando $(\phi_0, v_0) = (1, 6652; 0, 06390)$ que por sua vez, são condições que estão internas à uma ilha periódica.

A figura 4 mostra os espaços de fase para valores diferentes do parâmetro de controle ϵ , conforme mostra legenda da figura. Podemos ver espaços de fase mistos, composto por ilhas periódicas, curvas invariantes spanning e um mar de caos, o qual é delimitado pela primeira Curva Invariante Spanning, exposta em vermelho. Os parâmetros de controle utilizados foram $w = 1$ e $l = 1$, e o valor de ϵ diferente para cada imagem.

Ao comparar a Figura 4, obtida a partir do modelo simplificado com a Figura 2, encontrada a partir da modelagem matemática da versão completa do modelo Fermi-Ulam, nota-se uma proximidade satisfatória das soluções encontradas, verificando as regiões periódicas e caóticas fica evidente a correlação entre elas, validando portanto a simplificação matemática e operacional do problema.

Figura 4 – Espaços de fase modelo simplificado usando em (a) $\epsilon = 10^{-4}$, (b) $\epsilon = 10^{-3}$ e (c) $\epsilon = 10^{-2}$



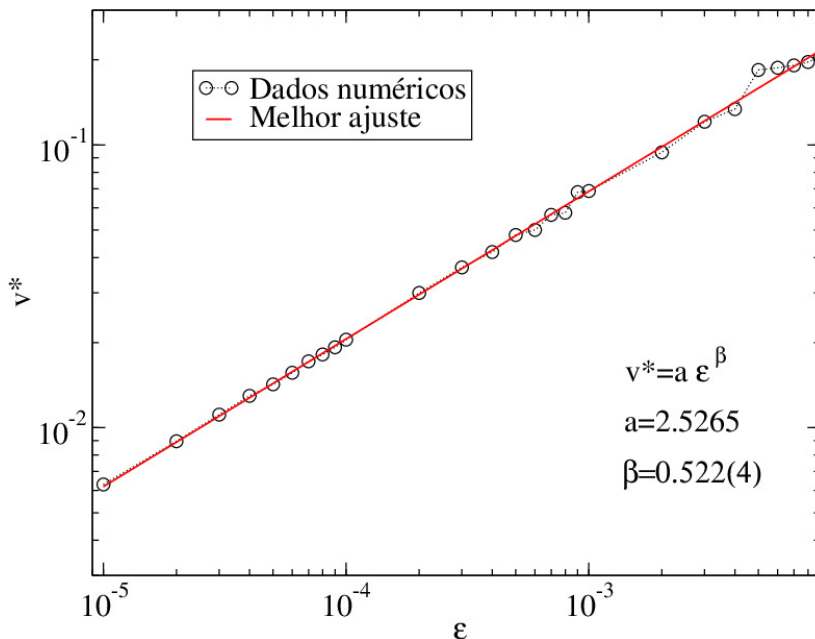
Fonte: Produção do próprio autor.

2.2.1 Primeira Curva Invariante Spanning

Nessa seção será apresentada a investigação numérica da posição da primeira curva invariante Spanning em função do parâmetro ϵ .

A figura 5 mostra o resultado de posição da primeira curva invariante spanning como função do parâmetro de controle ϵ . Podemos ver o comportamento de uma lei de potência do tipo $v^* = a\epsilon^\beta$, onde $a = 2,5265$ e $\beta = 0,522$. A tabela 1 mostra de maneira numérica os valores que foram usados como referência para o parâmetro ϵ e os valores correspondentes ao máximo atingido pela curva invariante spanning (CI) determinada pelo parâmetro.

Figura 5 – Ajustem em lei de potência - máximo da primeira C.I.



Fonte: Produção do próprio autor.

Tabela 1 – Apresentação dos valores.

Parâmetro ϵ	Máximo da primeira C.I.	20% da primeira C.I.
1×10^{-5}	0,00630066	0,001260132
2×10^{-5}	0,00895718	0,001791436
3×10^{-5}	0,01112540	0,002225080
4×10^{-5}	0,01296870	0,002593374
5×10^{-5}	0,01423670	0,002847340
6×10^{-5}	0,01564850	0,003129700
7×10^{-5}	0,01716400	0,003432800
8×10^{-5}	0,01815700	0,003631400
9×10^{-5}	0,01924340	0,003848680
1×10^{-4}	0,02048130	0,004096260
2×10^{-4}	0,02995100	0,005990200
3×10^{-4}	0,03690520	0,007381040
4×10^{-4}	0,04181150	0,008362300
5×10^{-4}	0,04803610	0,009607220
6×10^{-4}	0,05006710	0,010013420
7×10^{-4}	0,05659120	0,011318240
8×10^{-4}	0,05756360	0,011512720
9×10^{-4}	0,06808200	0,013616400
1×10^{-3}	0,06872210	0,013744420
2×10^{-3}	0,09420740	0,018841480
3×10^{-3}	0,12083800	0,024167600
4×10^{-3}	0,13393100	0,026786200
5×10^{-3}	0,18420300	0,036840600
6×10^{-3}	0,18749100	0,037498200
7×10^{-3}	0,19116800	0,038233600
8×10^{-3}	0,19653400	0,039306800
9×10^{-3}	0,20474700	0,040949400

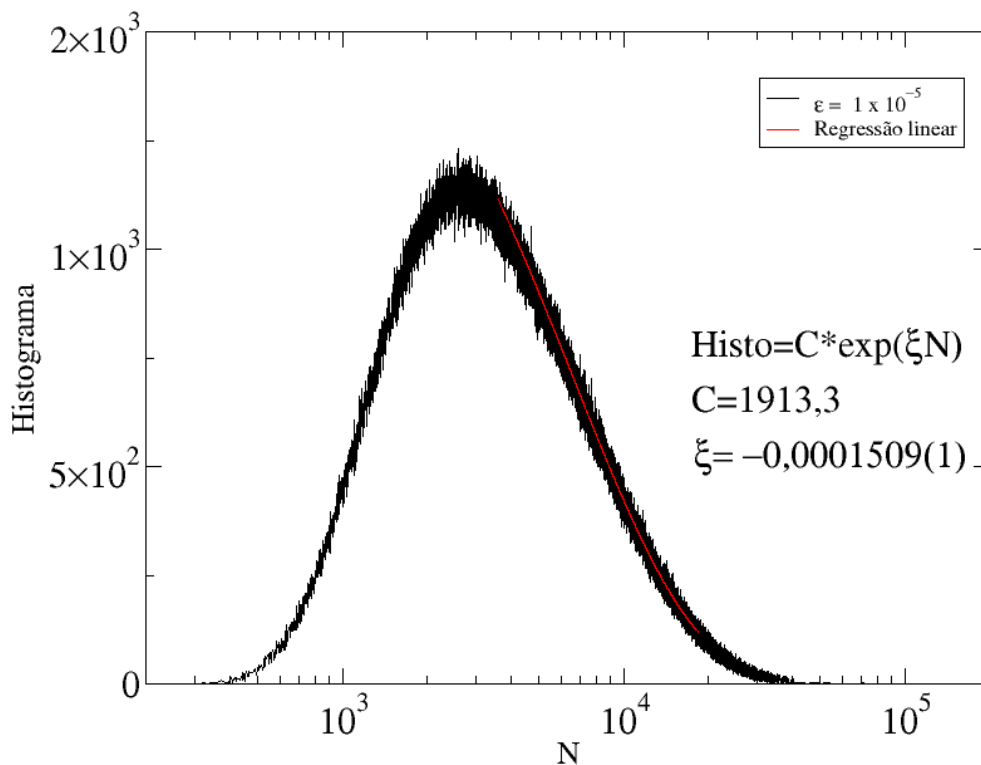
Fonte: Produção do Próprio Autor.

2.2.2 Estudo de escape de partículas

Nessa seção do trabalho estão expostos os resultados obtidos pelo estudo das propriedades de escape de partículas. Após obter numericamente a posição da C.I. mostrada na Tabela 1, calculamos 20% da altura máxima com o intuito de investigar o escape de partículas no mar de caos (ver Tabela 1).

A partir de um espaço de fase gerado, assumimos um conjunto de partículas com valores pequenos dos parâmetros iniciais (ϕ_0, v_0) e um parâmetro ϵ que permanece constante, após isso foi determinado um valor arbitrário de velocidade, a partir do qual caso alguma das partículas partecente à esse conjunto atinja um v que supere ao estipulado, é reconhecido que a mesma atingiu uma área de escape, também denominada de buraco (OLIVEIRA; COSTA; LEONEL, 2016). Motivo pelo qual foi apresentado na tabela (1) os valores referentes à 20 % do máximo da primeira curva invariante, sendo esse, o valor de velocidade utilizado como valor máximo para escape. Ao atingir uma condição de escape, a partícula é então eliminada da simulação. O programa realiza a contagem de iterações necessárias até que alguma das partículas atinja um buraco e então salva a informação. A partir de uma nova condição inicial para o mesmo parâmetro de controle ϵ é realizada novamente a simulação até que se complete o conjunto de condições iniciais para o valor determinado do parâmetro, salvando o valor referente ao número de iterações para cada um dos conjuntos. A Figura 6 mostra um histograma utilizando o valor $\epsilon = 1 \cdot 10^{-5}$. É possível notar que a curva do histograma parte de um valor nulo para N pequeno, crescendo até atingir um ponto de máximo, a partir do qual inicia uma sequência decrescente que pode ser aproximada por uma regressão linear de formulação $Histo = C \cdot \exp(\xi N)$ representada pela linha em vermelho na imagem. Isso ocorre pois, ao iniciar a dinâmica é pouco provável que a partícula consiga superar a velocidade de escape, equanto que aumentando o número de iterações, essa probabilidade cresce. O decaimento da curva pode ser entendido como o esgotamento das condições iniciais, já que diminuindo a quantidade de condições iniciais, diminui-se também a probabilidade de mais partículas escaparem. Nossos resultados mostram que $c = 1913,3$ e $\xi = -0,0001590(1)$

Figura 6 – Histograma com $\epsilon = 1 \cdot 10^{-5}$

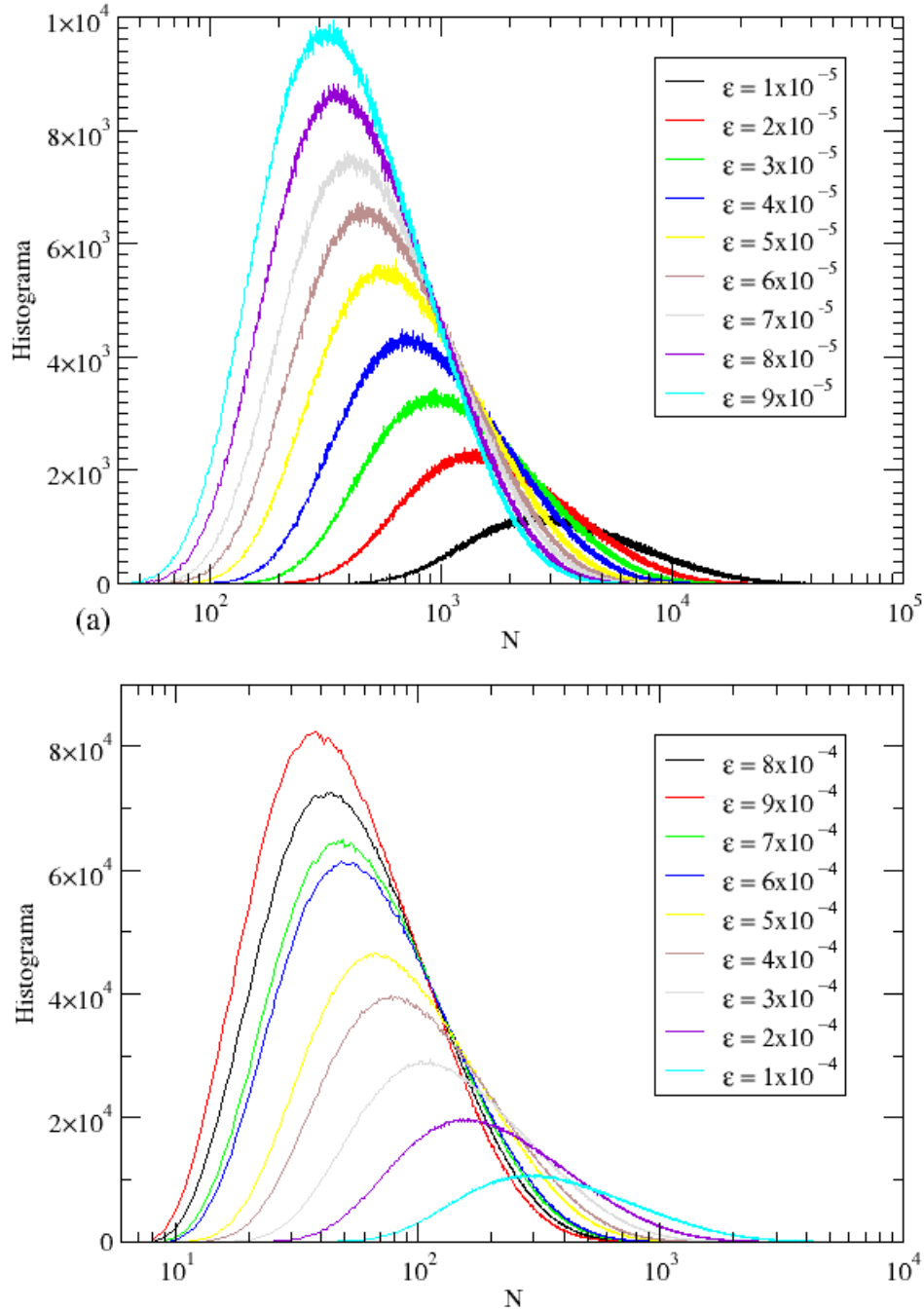


Fonte: Produção do próprio autor.

Afim de possibilitar uma avaliação mais ampla a respeito das características do histograma, realizou-se simulações mais abrangentes, envolvendo valores distintos para o parâmetro de não linearidade.

Observa-se na figura 7 que ao aumentar o valor do parâmetro ϵ temos também um crescimento na curva do histograma, o que respresenta uma frequência de escape maior. Também é notável que houve um deslocamento do máximo da curva para um N menor, representando uma necessidade de menos iterações para alcançar o valor máximo do histograma conforme se aumenta o valor do parâmetro ϵ .

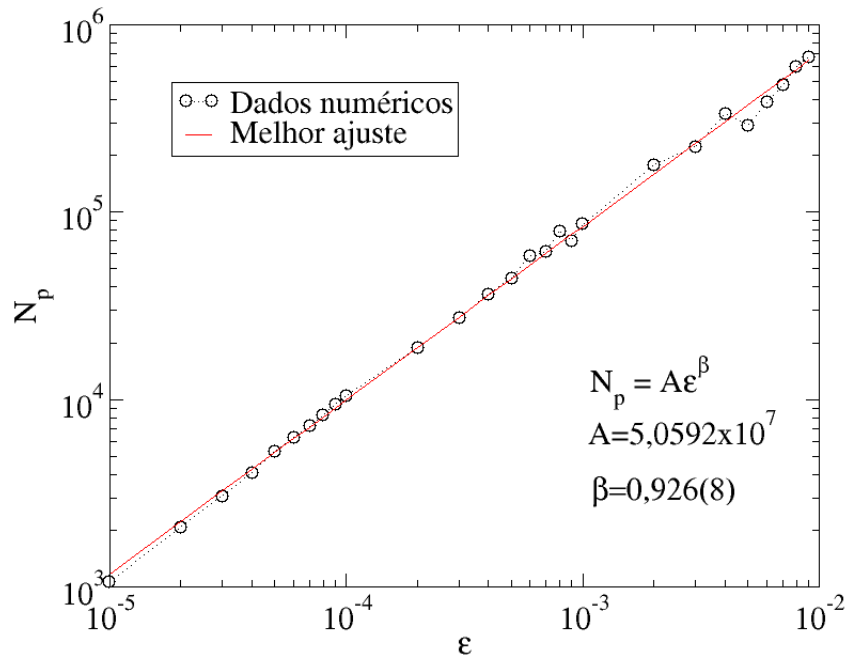
Figura 7 – Histogramas em função do número de iterações



Fonte: Produção do próprio autor.

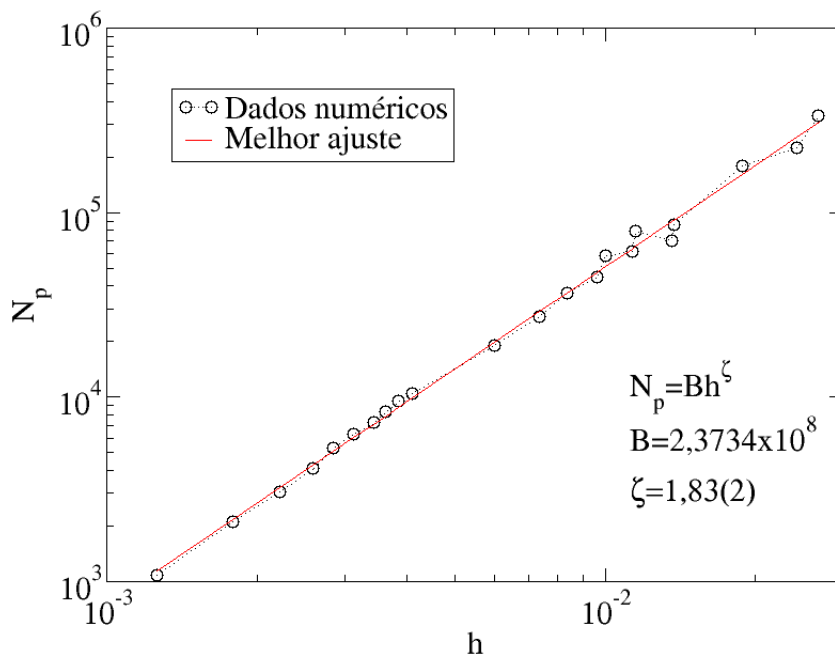
A partir dos valores encontrados nos histogramas, foram então realizados plots específicos para se analisar os coeficientes dinâmicos do sistema. Primeiro foi plotado o valor da estimativa do máximo do histograma N_p em função de ϵ , obtendo a figura 8, demonstrando uma curva representada por uma lei de potência do tipo $N_p = A\epsilon^\beta$, sendo $A = 5,0532 \cdot 10^7$ e $\beta = 0,926(8)$. Também foi plotado o valor de N_p como função da altura de escape (h), e se obteve na figura 9 a lei de potência do tipo $N_p = Bh^\zeta$ sendo $B = 2,3734 \cdot 10^8$ e $\zeta = 1,83(2)$.

Figura 8 – Máximo do histograma ($N_p \times \epsilon$)



Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 9 – Máximo do histograma ($N_p \times h$)



Fonte: Produção do próprio autor.

2.2.3 Estudo de sobrevivência de partículas

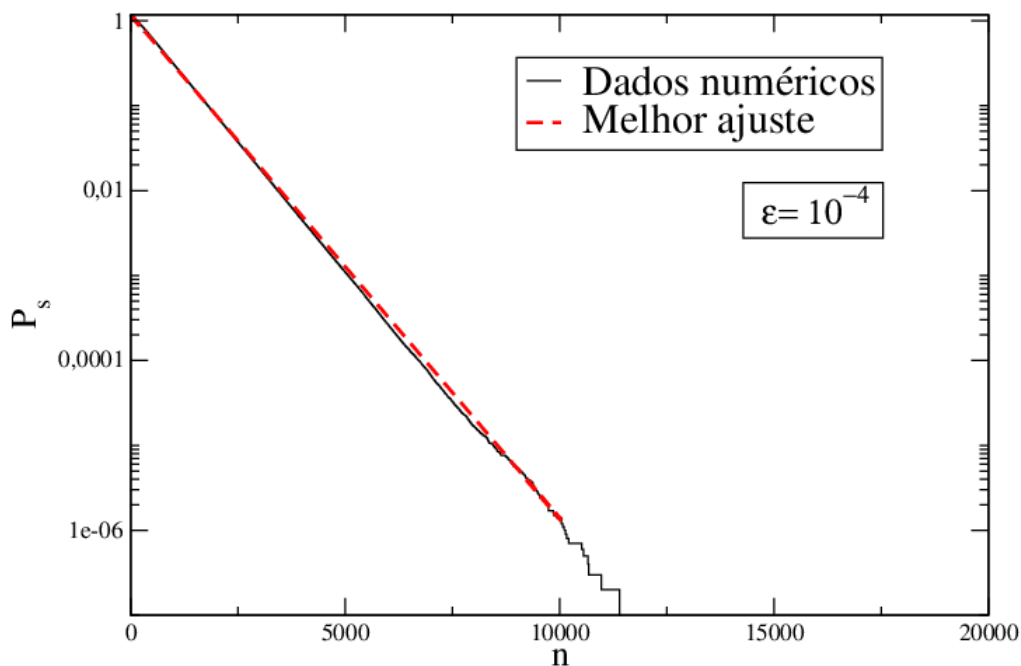
Dando continuidade ao estudo das propriedades de escape de partículas exposto na seção 2.2.2, nesse capítulo do trabalho foi realizado um estudo a respeito da sobrevivência das mesmas.

Ainda considerando o mapeamento bidimensional do modelo simplificado, e um valor arbitrário de escape como sendo 20 % da altura da primeira curva invariante spanning, foram realizadas simulações afim de se determinar a probabilidade de sobrevivência em função do número de iterações.

Partindo de um espaço de fase gerado, também assumimos um conjunto de partículas com valores pequenos dos parâmetros iniciais (ϕ_0, v_0) e um parâmetro ϵ que permanece constante. Foi determinado um valor arbitrário de velocidade, a partir do qual caso alguma das partículas partecente à esse conjunto atinja um v que supere ao estipulado, é reconhecido que a mesma atingiu uma área de escape, também chamada de "buraco". Contrapondo ao estudado na seção anterior, nessa, os resultados procurados foram referentes à probabilidade de sobrevivência das partículas. Utilizando dos mesmos valores encontrados na tabela (1) referentes à 20 % do máximo da primeira curva invariante, sendo esse, o valor de velocidade utilizado como valor máximo para escape. Ao atingir uma condição de escape, a partícula é então eliminada da simulação. O programa realiza a contagem de iterações necessárias até que alguma das partículas atinja um buraco e então salva a informação. A partir de uma nova condição inicial para o mesmo parâmetro de controle ϵ é realizada novamente a simulação até que se complete todas as condições iniciais para o valor determinado do parâmetro, salvando o valor referente ao número de iterações que sobreviveram. A Figura 10 mostra um decaimento de sobrevivência encontrado se utilizando do valor $\epsilon = 1 \cdot 10^{-4}$.

É possível notar que a curva tem um padrão de exponencial com expoente negativo, o que significa que ao aumentar o número de iterações, menor é a probabilidade de sobrevivência. O melhor ajuste exponencial para a curva é demonstrado em vermelho, e seu expoente é dado por: $\nu = -0.01169(6)$

Figura 10 – Probabilidade de sobrevivência em função do número de iterações ($P_s \times n$)

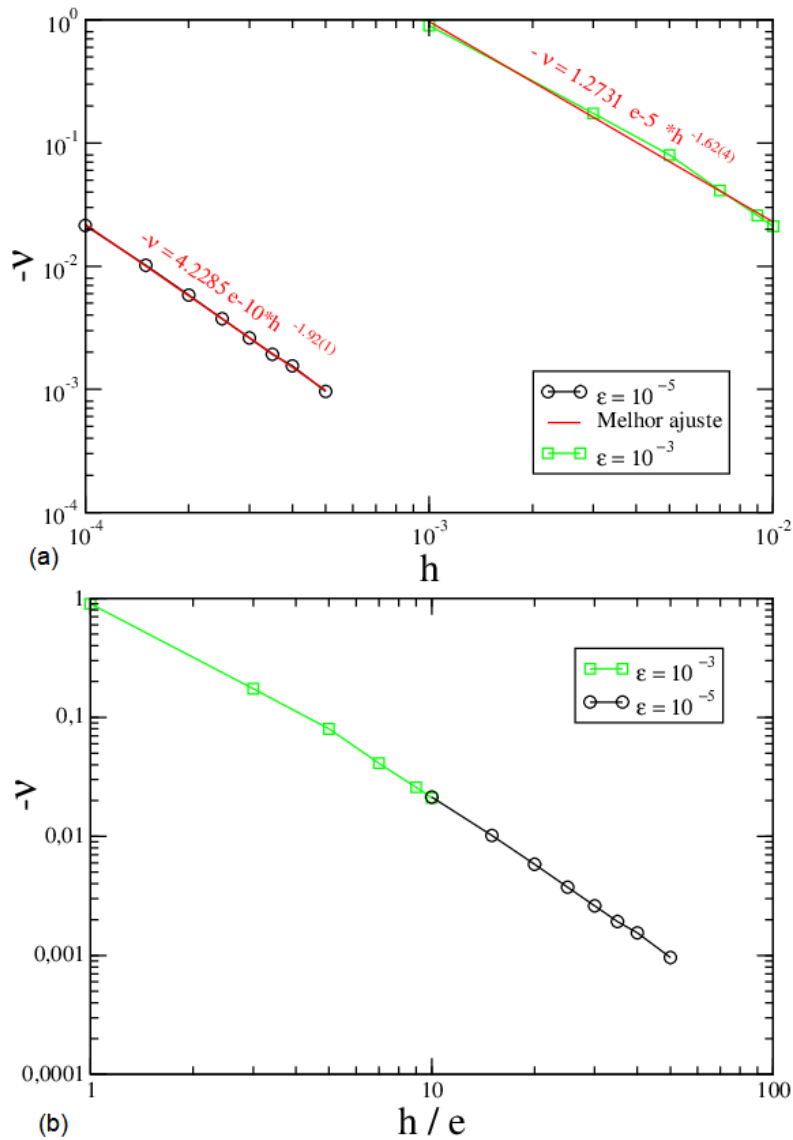


Fonte: Produção do próprio autor.

Afim de possibilitar uma avaliação mais ampla a respeito das características de sobrevivência de partículas, realizou-se simulações mais abrangentes, envolvendo variações dos valores utilizados para a altura limite de escape h . Observa-se na Figura 11(a) que ao aumentar o valor de h diminui-se o valor do expoente ν , também é possível notar que há um ajuste exponencial que liga os valores, demonstrando que há uma regularidade entre as características.

As simulações foram realizadas para dois parâmetros de não linearidade ϵ distintos, como sendo $\epsilon = 10^{-3}$ a curva em verde e $\epsilon = 10^{-5}$ a curva em preto. Em vermelho são demonstrados os melhores ajustes para ambas as curvas.

Figura 11 – $-\nu$ em função de h/ϵ



Fonte: Produção do próprio autor.

Na Figura 11(b) foi realizada uma transformação de variável do eixo x que demonstrou uma reescala.

2.2.4 Estudo do Expoente de Lyapunov

Através da variação dos parâmetros de controle, frequentemente encontra-se regiões do espaço de fase em que trajetórias apresentam comportamento caótico. Embora exista muitas definições de caos, vamos considerar a que se consiste na sensibilidade do sistema às condições iniciais, medidas pelos expoentes de Lyapunov. O princípio básico de obtenção dos expoentes de Lyapunov consiste em verificar se duas trajetórias vizinhas divergem exponencialmente uma da outra com o decorrer do tempo. Se as trajetórias permanecem próximas durante todo o tempo, então elas não são sensíveis às condições iniciais, isto implica que o expoente de Lyapunov $\lambda < 0$, conseqüentemente o sistema é considerado estável. Ao passo que se as trajetórias divergem exponencialmente uma da outra com o tempo, apresentam sensibilidade as condições iniciais e diz-se que o sistema apresenta expoente de Lyapunov $\lambda > 0$ (ECKMANN; RUELLE, 1985). Quando as trajetórias apresentam expoente de Lyapunov $\lambda > 0$, são classificadas como caóticas. Se um sistema dinâmico é caótico, então pelo menos um expoente de Lyapunov é positivo. Os expoentes são definidos como:

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\Lambda_j^{(n)}|, j = 1, 2, \quad (88)$$

Nesta subseção do trabalho, foi realizado o estudo do expoente de Lyapunov para diferentes condições iniciais do sistema para poder caracterizar o caos. A partir da medição da taxa de divergência das trajetórias foi possível observar a dependência das condições iniciais.

Os expoentes de Lyapunov para o caso bidimensional são dados por:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln |\Lambda_j^{(n)}|, j = 1, 2 ; \text{com } n \rightarrow \infty$$

onde Λ indica os autovalores da matriz jacobiana, que no mapeamento estudado é dada por:

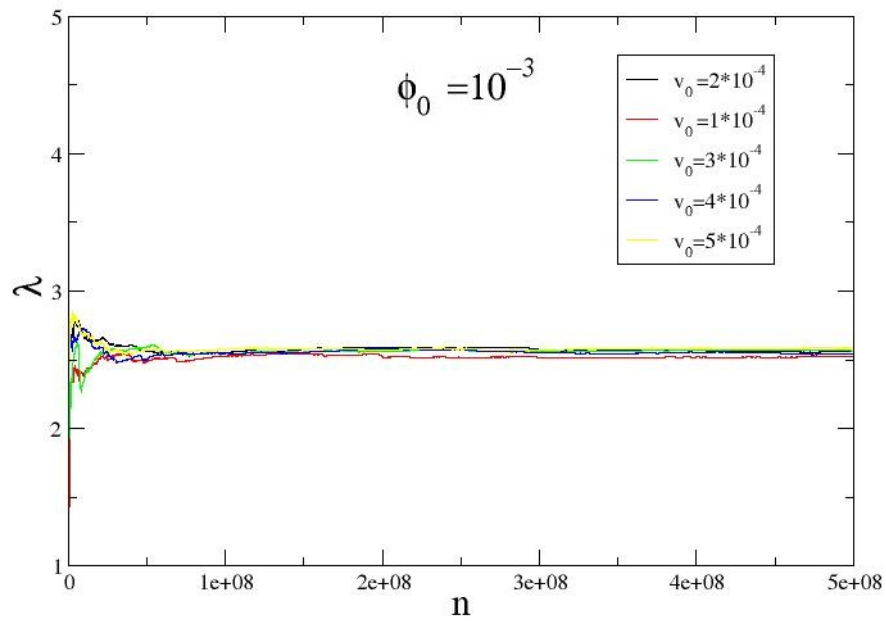
$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_{n+1}}{\partial v_n} & \frac{\partial v_{n+1}}{\partial \phi_n} \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial v_n} & \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} \end{pmatrix}.$$

Os expoentes de Lyapunov foram determinados numericamente para o mapeamento simplificado definido na equação (80) em conjunto com as derivadas parciais obtidas nas equações (81), (82), (83), e (84).

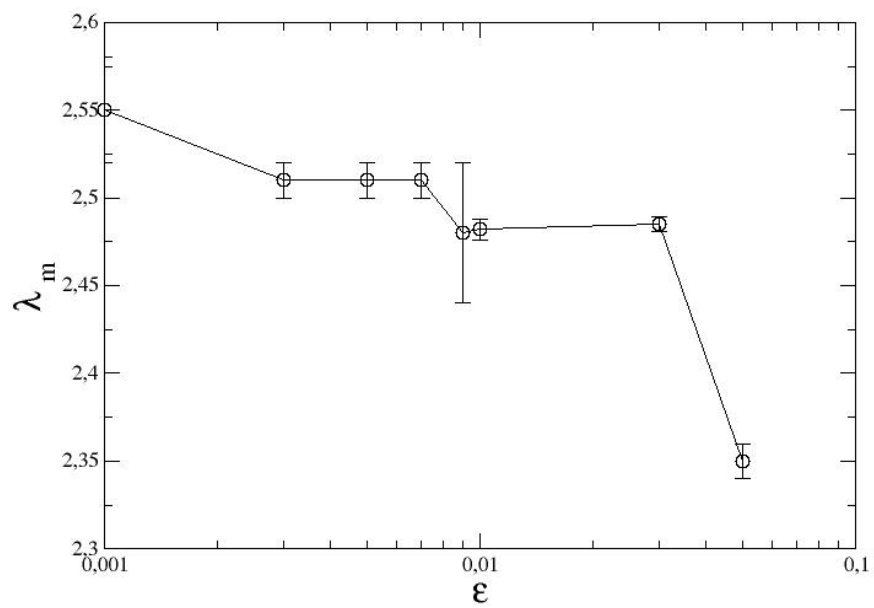
Temos então na figura (12) os valores de λ para distintos valores de v_0 em função do número de iterações. Essa figura nos permite concluir que o sistema estudado se caracteriza matematicamente como caótico, tendo em vista que os valores encontrados foram todos positivos.

A figura(13) demonstra que o valor médio de λ permanece praticamente constante com a variação de ϵ , reafirmando a sensibilidade que o sistema possui às pequenas variações nas condições iniciais.

Figura 12 – Expoente de Lyapunov



Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 13 – Expoente de Lyapunov médio em função de ϵ 

Fonte: Produção do próprio autor.

3 CONCLUSÃO

No atual trabalho, estudamos o modelo Fermi-Ulam, o qual consiste na dinâmica unidimensional de uma partícula confinada entre duas paredes sofrendo colisões elásticas. Neste trabalho definimos o modelo completo nas variáveis velocidade da partícula e fase da parede. Posteriormente foi estabelecido o modelo simplificado de Fermi-Ulam, para que a partir dos resultados pudessemos comparar a equivalência de ambos. Com cada versão do modelo construímos os espaços de fase considerando valores diferentes dos parâmetros de controle ϵ . Por conta de o sistema ser conservativo os espaços de fase mostraram uma rica estrutura mista composta por um mar de caos em volta de ilhas periódicas e limitado por curvas invariantes spanning. Também foi realizado um aprofundamento da teoria envolvendo a primeira Curva Invariante Spanning afim de gerar uma base para o desenvolvimento da investigação de algumas propriedades do escape de partículas. Determinamos numericamente a partir desse ponto os expoentes dinâmicos tanto a respeito da investigação da probabilidade de escape quanto de sobrevivência das partículas, que podem ser utilizados para fins de comparação com expoentes conhecidos na literatura, utilizados para definir a classe de universalidade do sistema. O procedimento é geral e pode ser aplicado para sistemas de naturezas diferentes. Também foi estabelecido o expoente de Lyapunov para diversas condições iniciais e analisado seu comportamento correlacionado com o parâmetro de não linearidade. O expoente de Lyapunov encontrado para o sistema é positivo, confirmando matematicamente que o mesmo se enquadra na definição de sistema dinâmico não linear.

Para aprofundamentos futuros, sugerimos a inserção de uma força dissipativa, como o arrasto viscoso. A introdução de tal elemento pode trazer consequências interessantes para o modelo, proporcionando uma nova perspectiva sobre a dinâmica das partículas e permitindo explorar como a dissipação afeta a estrutura de caos e estabilidade do sistema. Este estudo pode abrir novas possibilidades para a análise de sistemas dinâmicos não lineares, contribuindo para uma compreensão mais abrangente das interações entre forças conservativas e dissipativas com a dinâmica da partícula.

REFERÊNCIAS

- CANALCIENCIA. **CREATIVE COMMONS ATRIBUIÇÃO. César Lattes. In: CREATIVE COMMONS ATRIBUIÇÃO. César Lattes. [S. l.].** 2019. Disponível em: <<http://www.canalciencia.ibict.br/nossas-informacoes/ciencioteca/personalidades/item/318-cesar-lattes-vida-obra-e-descobertas>>.
- ECKMANN, J. P.; RUELLE, D. Ergodic theory of chaos and strange attractors. **Review of modern physics**, v. 57, n. 617, 1985.
- FERMI, E. On the origin of the cosmic radiation. **American Physical Society**, v. 8, n. 1169, 1949.
- FRAZAO, D. **Biografia de Enrico Fermi.** 2023. Disponível em: <https://www.ebiografia.com/enrico_fermi/>.
- HALLIDAY R. RESNICK, J. W. D. **Fundamentos de física 2: Gravitação, ondas e termodinâmica.** Rio de janeiro: LTC, 1996.
- KAMPHORST, S.; CARVALHO, S. Nonlinearity. **IOP Publishing**, IOP Publishing, v. 12, n. 01, 1999.
- KLUEVER, C. A. **Introdução aos sistemas dinâmicos e de modelagem.** Rio de Janeiro: LTC, 2018.
- LEONEL, E. D. **Invariância de escala em sistemas dinâmicos não lineares.** São Paulo: Blucher, 2019.
- LEONEL, E. D.; SILVA, J. K.; KAMPHORST. On the dynamical properties of a fermi accelerator model. **Physica A**, Elsevier B.V., v. 331, n. 435, 2004.
- LICHTENBERG, A. J.; LIEBERMAN, M. A. **Regular and Chaotic Dynamics.** New York: Springer Verlag, LLC, 1992.
- OLIVEIRA, J. A. d.; COSTA, D. R. da; LEONEL, E. D. Survival probability for chaotic particles in a set of area preserving maps. **The European Physical Journal Special Topics**, The European Physical Journal Special Topics, v. 225, n. 2751, 2016.