



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
Câmpus de São José do Rio Preto

Lucas Gimenez Tarantini

## **Classes de Chern de hipersuperfícies complexas**

São José do Rio Preto  
2024

Lucas Gimenez Tarantini

## **Classes de Chern de hipersuperfícies complexas**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Orientador: Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado

São José do Rio Preto  
2024

T176c Tarantini, Lucas Gimenez  
Classes de Chern de hipersuperfícies complexas / Lucas  
Gimenez Tarantini. -- São José do Rio Preto, 2024  
97 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista  
(Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas,  
São José do Rio Preto  
Orientadora: Michelle Ferreira Zanchetta Morgado

1. Classes de Chern. 2. Hipersuperfícies Complexas. 3.  
Grupo de Chow. 4. Variedades. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do  
Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados  
fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Lucas Gimenez Tarantini

## **Classes de Chern de hipersuperfícies complexas**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

### Comissão Examinadora

Prof.<sup>ª</sup>. Dr.<sup>ª</sup>. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado  
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto  
Orientador

Prof.<sup>ª</sup>. Dr.<sup>ª</sup>. Nguyen Thi Bich Thuy  
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto

Prof. Dr. Marcelo José Saia  
UFSCAR – Câmpus de São Carlos

São José do Rio Preto  
27 de fevereiro de 2024

Dedico este trabalho a meus pais, João e Sara.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me conceder a vida.

Agradeço aos meus pais João e Sara que sempre me proporcionaram apoio incondicional em todos os aspectos. Seus estímulos constantes incentivando a seguir o caminho dos estudos e pela presença nos bons e maus momentos são os principais responsáveis que me fizeram chegar até aqui.

Agradeço a todos os professores e servidores do IBILCE. Em especial agradeço à minha orientadora, professora Michelle, por toda a paciência, esforço e pela excepcional orientação não apenas no mestrado, mas também por toda minha formação acadêmica e que foi fundamental para o meu crescimento.

Agradeço também aos meus amigos de apartamento, Felipe, Lesath e Lucas, por todo o companheirismo e por tornarem minha estadia em Rio Preto memorável e mais leve.

Agradeço aos meus amigos de curso Arthur, Gabriel, Junior e Victoria por me acompanharem ao longo da graduação e pós-graduação, pela companhia nos estudos e pela amizade.

Agradeço aos meus amigos da Letras-Tradução Diego, Jade, Letícia e Ubiratã que, mesmo em cursos diferentes, também me acompanharam integralmente por todo percurso acadêmico.

Agradeço ao meu amigo João, que, mesmo em outra cidade fez o possível para estar presente.

Agradeço também a todos aqueles que de forma direta ou indireta fizeram possível a realização deste trabalho.

A todos, meu muito obrigado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, à qual agradeço pelo financiamento que possibilitou a realização deste trabalho.

“Só se vê bem com o coração, o essencial é invisível aos olhos.”  
Antoine de Saint-Exupérie (1943, p.55)

## RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar o conceito de classes de Chern para variedades complexas possivelmente singulares, que pode ser obtido utilizando diferentes ferramentas em várias áreas da Matemática, mas que aqui será explorado através da Geometria Algébrica. Estas classes são elementos de um grupo, chamado grupo de Chow, que tem analogia com os grupos de homologia da Topologia Algébrica e, na Topologia, representam uma obstrução para a extensão de campos de vetores e de  $r$ -referenciais no caso suave e a obstrução da existência de um referencial de vetores radiais no caso singular. Quando a variedade é suave, as classes de Chern estão associadas ao fibrado tangente da variedade, já no caso singular, como não existe este fibrado vetorial, mais ferramentas são necessárias, onde o conceito de classes de Segre é fundamental.

Na finalização são apresentados resultados para hipersuperfícies complexas, relacionando com o conceito de número de Milnor, no caso de singularidades isoladas.

**Palavras-chave:** Variedades. Grupo de Chow. Classes de Chern. Hipersuperfícies Complexas.

## ABSTRACT

The objective of this work is to present the concept of Chern classes for possibly singular complex varieties, which can be obtained using different tools in various areas of Mathematics, but which will be explored here through Algebraic Geometry. These classes are elements of a group, called Chow group, which has an analogy with the homology groups of Algebraic Topology and, in Topology, they represent an obstruction to the extension of vector fields and  $r$ -references in the smooth case and the obstruction of the existence of a frame of radial vectors in the singular case.

When the variety is smooth, the Chern classes are associated with the tangent bundle of the variety. In the singular case, as this vector bundle does not exist, more tools are needed, where the concept of Segre classes is fundamental.

At the end, results are presented for complex hypersurfaces, relating to the concept of Milnor number, in the case of isolated singularities.

**Keywords:** Varieties. Chow group. Chern classes. Complex Hypersurfaces.

# Conteúdo

<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>12</b>
1.1 Módulos . . . . .	12
1.2 Conjuntos algébricos afins . . . . .	19
1.3 Categorias . . . . .	27
<b>2 Generalização do caso afim</b>	<b>29</b>
2.1 Feixes . . . . .	29
2.2 Esquemas . . . . .	36
2.3 Variedades . . . . .	46
2.4 Fibrados vetoriais . . . . .	49
2.5 Produto fibrado . . . . .	52
2.6 Divisores de Cartier . . . . .	58
2.7 Espectro relativo e projetivo . . . . .	61
<b>3 Classes de Chern</b>	<b>65</b>
3.1 Grupo de Chow . . . . .	65
3.2 Ciclos associados a divisores de Cartier . . . . .	74
3.3 Classes de Chern - caso suave . . . . .	76
3.4 Classes de Chern - caso singular . . . . .	85
3.5 Caso de hipersuperfície complexa . . . . .	91
<b>Conclusão</b>	<b>94</b>
<b>Referências</b>	<b>95</b>

# Introdução

As classes Chern de fibrados vetoriais desempenham um papel central na Geometria e na Topologia. No caso de variedades complexas suaves, por definição suas classes de Chern são aquelas de seu fibrado tangente. A generalização deste conceito para o caso singular é através da busca por substitutos para o fibrado tangente. Nesta direção, surgem algumas classes, através de diferentes ferramentas. Uma delas consiste em considerar a união dos fibrados tangentes aos estratos de uma estratificação da variedade e de considerar a obstrução à construção de  $r$ -referenciais adaptados obtida por M.H. Schwartz [30]. Por outro lado, pode-se considerar um fibrado especial, chamado de fibrado de Nash, obtido a partir do fibrado tangente da parte suave da variedade e isso nos leva às classes de Mather. Considerando as classes de Mather com “pesos apropriados” dados pelo obstrução local de Euler chega-se às classes MacPherson, que satisfazem as importantes propriedades de funcionalidade previstas por uma conjectura de Deligne e Grothendieck ([20]). Foi provado em [6] que as definições de M.H. Schwartz e de R. MacPherson são as mesmas, via o isomorfismo de Alexander, e a partir daí tais classes foram chamadas de classes de Schwartz-MacPherson. Outra maneira de substituir o fibrado tangente, no caso de uma variedade singular, é considerar o fibrado virtual. Com este fibrado surgem as classes de Fulton e de Fulton-Johnson, que coincidem no caso de hipersuperfícies complexas ([9], [8]). Mesmo no caso de hipersuperfícies complexas, as classes de Fulton (Fulton-Johnson) não são iguais às de Schwartz-MacPherson. Esta diferença pode ser interpretada no estudo dos seus pontos singulares.

O enfoque deste trabalho é a obtenção destas definições usando ferramentas da Geometria Algébrica, onde muitas das informações anteriores foram somente para contextualizar e dar a importância destes objetos. As classes de Chern são vistas como elementos em um grupo, chamado de grupo de Chow. Destacamos que já é revelante para este trabalho a descrição deste grupo e suas propriedades, onde muitas ferramentas foram necessárias.

Desta forma, o trabalho foi dividido em três capítulos, onde no último concretizamos a descrição das classes, sendo os capítulos anteriores suporte para ele.

O primeiro capítulo tem por objetivo introduzir alguns conceitos algébricos, com intuito de fixar notações e destacar resultados e propriedades necessárias para o desenvolvimento do trabalho. A primeira seção é sobre módulos, destacando módulos especiais como módulo graduado, produto tensorial de módulos, módulo Noetheriano e Artiniano e álgebras como álgebra tensorial e a álgebra simétrica. Na sequência, a seção de conjuntos algébricos afins mostra como objetos algébricos e geométricos estão relacionados. Por fim, a seção de categorias deste capítulo visa apresentar definições a fim de introduzir de forma breve algumas nomenclaturas que podem ser usadas durante o trabalho. Vale notar que, apesar de citarmos conceitos de teoria de categorias em alguns momentos, este trabalho não busca explicar em detalhes tais conceitos.

O segundo capítulo deste trabalho é dedicado ao estudo de esquemas, estruturas matemáticas que expandem as noções de variedades algébricas afins. Esse capítulo foi dividido

em sete seções. Na primeira seção estudamos feixes, objetos que permitem, a partir de informações locais, obter informações globais de espaços topológicos. O próximo passo, na Seção 2, é apresentar o conceito de espectro de um anel e obter um feixe especial. Através dele é definido o conceito de esquemas afins e, a partir disso, o conceito geral de esquemas é apresentado. São destacadas algumas propriedades e tipos específicos de esquemas são apresentados como esquema integral e esquema sobre um corpo. Destacamos o conceito de subesquema fechado, que pode ser interpretado a partir de um subfeixe especial e que é usado por todo o decorrer do texto. Na Seção 3 estudamos variedades, que são esquemas especiais que possuem paralelos com as variedades algébricas afins, e propriedades específicas deste tipo de esquema voltadas ao desenvolvimento do capítulo seguinte. A Seção 4 descreve o conceito de fibrados vetoriais neste contexto, destacando fibrados especiais como fibrado dual, produto tensorial de fibrados, fibrado projetivo, fibrado Grassmanniano, produto fibrado, fibrado tangente, pullback e fibrado tautológico. O conceito de hipersuperfície é apresentado, sendo o conjunto dos zeros de uma seção de um fibrado de linha. Além disso, esta seção informa a correspondência biunívoca entre feixes localmente livres e fibrados vetoriais. Na Seção 5 vemos como obter o esquema produto fibrado, necessário para a construção de um morfismo especial, chamado morfismo diagonal, que nos permite definir um importante tipo de morfismo, chamado de próprio, e a noção de esquemas suaves e singulares. A seção seguinte introduz divisores de Cartier em esquemas integrais. Provamos também que divisores de Cartier efetivos podem ser vistos como subesquemas fechados desses esquemas integrais e ainda mostramos que toda hipersuperfície é um divisor efetivo de Cartier. Por fim, a última seção se dedica a generalizar espectros de anéis vistos na Seção 2 com o objetivo de definir cones normais e projetivos que são utilizados para estender as classes de Chern para esquemas singulares.

O último capítulo é onde estudamos propriamente as classes de Chern, que está dividido em cinco seções. Inicialmente, na Seção 1, definimos e provamos propriedades do grupo no qual essas classes pertencem, o grupo de Chow. Induzidos por morfismos entre esquemas são obtidos homomorfismos entre os grupos de Chow associados: push-forward e morfismo imagem inversa. Em seguida, na segunda seção, vemos como é possível associar divisores de Cartier a elementos do grupo de Chow. A terceira seção tem o objetivo de definir as classes de Chern, inicialmente para fibrados de linha, onde o conceito de Divisor de Cartier é essencial, e depois para fibrados vetoriais quaisquer, vistas como homomorfismos entre grupos de Chow. A extensão para fibrados vetoriais quaisquer é feita através do fibrado projetivo associado e das classes de Segre obtidas através dele. Finalizando esta seção, a classe de Chern de um esquema suave é definida como a classe de Chern associada ao seu fibrado tangente. Na Seção 4, o objetivo é estender a definição de classe de Chern para um esquema singular, onde não temos mais o fibrado tangente associado. Nesta direção, algumas classes surgem. Neste processo uma ferramenta importante é o conceito de classe de Segre de um cone, dando origem as classes de Fulton e as de Fulton-Johnson, que coincidem no caso de hipersuperfícies complexas. Depois é definido o Blow-up de Nash e o fibrado de Nash para a obtenção das classes de Mather, que via obstrução local de Euler, se derivam nas classes de Schwartz-MacPherson. Por fim, na última seção particularizamos nosso estudo a hipersuperfícies complexas, associando as classes estudadas com números que dão informações geométricas do conjunto singular associado, importantes em Teoria de Singularidades.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo recordamos alguns conceitos e resultados básicos para o desenvolvimento do nosso estudo, com o objetivo de fixar notações. Vamos assumir conhecidos muitos conceitos algébricos e topológicos básicos, omitindo a demonstração de alguns resultados.

As principais referências deste capítulo são [34] e [15].

### 1.1 Módulos

Vamos considerar em todo o capítulo  $(A, +, \cdot)$ , ou simplesmente  $A$ , sendo um anel comutativo com unidade  $1_A$ , mesmo que para algumas definições isso não seja necessário.

**Definição 1.1.1.** *Seja  $M$  um conjunto não vazio tal que  $(M, \oplus)$  é um grupo abeliano dotado de uma multiplicação por escalar*

$$A \times M \rightarrow M$$

$$(a, m) \mapsto am$$

Dizemos que  $M$  é um  **$A$ -módulo** se, para todo  $a_1, a_2 \in A$  e  $m, m_1, m_2 \in M$ , satisfaz:

1.  $1_A m = m$ ;
2.  $(a_1 \cdot a_2)m = a_1(a_2 m)$ ;
3.  $(a_1 + a_2)m = a_1 m \oplus a_2 m$ ;
4.  $a_1(m_1 \oplus m_2) = a_1 m_1 \oplus a_1 m_2$ .

Dado  $N \subset M$  é dito um  **$A$ -submódulo** de  $M$  se com as operações que fazem  $M$  um  $A$ -módulo ele é um  $A$ -módulo.

**Definição 1.1.2.** *Dizemos que  $M$  é um  $A$ -módulo **simples** se  $M \neq \{0_M\}$  e seus únicos submódulos são  $\{0_M\}$  e  $M$ .*

**Definição 1.1.3.** *Sejam  $A$  um anel e  $M$  um  $A$ -módulo. Uma sequência  $x_1, \dots, x_n$  de elementos de  $A$  é dita **regular** em  $M$  se  $x_1$  não é um divisor de zero em  $M$  ( $\forall m \neq 0_M$  em  $M$ ,  $x_1 \cdot m \neq 0_M$ ), para todo  $i = 2, \dots, n$ , temos que  $x_i$  não é divisor de zero em  $M / \langle x_1, \dots, x_{i-1} \rangle$ .*

**Exemplo 1.1.4.** *Todo espaço vetorial sobre um corpo  $K$  é um  $K$ -módulo.*

**Exemplo 1.1.5.** Todo grupo abeliano  $(G, +)$  é um  $\mathbb{Z}$ -módulo, onde o produto por escalar pode ser definido da seguinte forma: dados  $n \in \mathbb{Z}, g \in G$ ,  $ng := g + \cdots + g$  ( $n$  vezes) se  $n > 0$ ,  $ng := e$  ( $n = 0$  e  $e$  elemento neutro de  $G$ ) e  $ng := (-g) + \cdots + (-g)$  ( $-n$  vezes) se  $n < 0$ .

**Exemplo 1.1.6.** Se  $(A, +, \cdot)$  é um anel, ele pode ser visto como  $A$ -módulo pois  $(A, +)$  é grupo abeliano e para o produto por escalar usa-se a segunda operação do anel  $\cdot$ . Os submódulos de  $A$  como  $A$ -módulos são os seus ideais.

Dado  $I \subset A$  um ideal, o anel  $A/I = \{a+I, a \in A\}$  é um  $A$ -módulo, onde a soma mantemos a primeira operação como anel e o produto por escalar é dado por  $a(b+I) := (a \cdot b) + I$ .

**Exemplo 1.1.7.** Seja  $N$  um submódulo de um  $A$ -módulo  $M$ . O quociente  $M/N = \{m+N, m \in M\}$  pode ser visto como um  $A$ -módulo, onde as operações são obtidas das operações de  $M$  como  $A$ -módulo,  $(m_1 + N) + (m_2 + N) := (m_1 + m_2) + N$  e  $a(m + N) := (am) + N$ .

**Exemplo 1.1.8.** Dada uma família  $\{N_i\}_{i \in \Lambda}$  de submódulos de um  $A$ -módulo  $M$ , obtemos um submódulo de  $M$  da seguinte maneira:

$$N = \left\{ \sum_{i \in \Lambda} a_i, a_i \in N_i \text{ e } a_i \neq 0_M, \text{ exceto para um número finito} \right\},$$

onde  $\sum_{i \in \Lambda} a_i + \sum_{i \in \Lambda} b_i := \sum_{i \in \Lambda} (a_i + b_i)$  e  $a \sum_{i \in \Lambda} a_i := \sum_{i \in \Lambda} aa_i$ .

Denotamos este  $A$ -módulo por  $N = \bigoplus_{i \in \Lambda} N_i$ , chamado de **soma direta** de submódulos. Como caso particular temos a soma direta para anéis.

**Definição 1.1.9.** Sejam  $M$  e  $N$  dois  $A$ -módulos. Uma aplicação  $f : M \rightarrow N$  é dita um **homomorfismo de  $A$ -módulos** se, para quaisquer  $m_1, m_2 \in M$  e  $a \in A$ , as condições a seguir são satisfeitas:

$$a) \quad f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2);$$

$$b) \quad f(am_1) = af(m_1).$$

Além disso, os conjuntos  $\ker(f) := \{m \in M ; f(m) = 0_N\}$  e  $\text{Im}(f) := \{f(m) ; m \in M\}$  são ditos o **núcleo** e a **imagem** do homomorfismo  $f$ , respectivamente.

**Observação 1.1.10.** É fácil ver que os conjuntos  $\ker(f)$  e  $\text{Im}(f)$  são submódulos de  $M$  e  $N$ , respectivamente. Assim como  $f^{-1}(Q)$  e  $f(P)$  são submódulos de  $M$  e  $N$  respectivamente, para quaisquer submódulos  $P$  e  $Q$  de  $M$  e  $N$ , respectivamente.

**Definição 1.1.11.** Dados  $M$  um  $A$ -módulo e  $S \subseteq A$  um subconjunto multiplicativo fechado ( $S$  é fechado em relação ao produto e  $1 \in S$ ) a **localização de  $M$  por  $S$** , denotado por  $S^{-1}M$  é definido pelo quociente do conjunto  $M \times S$  com a seguinte relação de equivalência:

$$\text{para } (a_1, s_1), (a_2, s_2) \in M \times S, (a_1, s_1) \sim (a_2, s_2) \Leftrightarrow \exists t \in S \mid t(s_2a_1 - s_1a_2) = 0 \text{ em } M.$$

A **localização do anel  $A$  por  $S$**  é a localização de  $A$  por  $S$  visto como  $A$ -módulo, que denotamos por  $S^{-1}A$ .

Denotando a classe de equivalência de  $(a, s)$  por  $\frac{a}{s}$ , definimos as operações de soma e produto de maneira usual

$$\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} = \frac{s_2a_1 + s_1a_2}{s_1s_2} \quad \text{e} \quad \frac{a_1}{s_1} \frac{a_2}{s_2} = \frac{a_1a_2}{s_1s_2}.$$

Deste modo  $S^{-1}M$  é um  $S^{-1}A$ -módulo.

**Notação:** Seja  $\mathfrak{p}$  um ideal primo de  $A$ . Então  $S = A - \mathfrak{p}$  é um subconjunto multiplicativo fechado e denotamos  $S^{-1}A$  por  $A_{\mathfrak{p}}$ .

**Proposição 1.1.12.** *O anel  $A$  é reduzido (não possui elementos nilpotentes não nulos) se, e somente se, toda localização  $A_{\mathfrak{p}}$  é um anel reduzido, com  $\mathfrak{p}$  ideal primo de  $A$ .*

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [17, Lema 1].  $\square$

**Observação 1.1.13.** *Se  $A$  é um domínio e  $S = A - \{0\}$ , então  $S^{-1}A$  é um corpo, chamado de corpo de frações de  $A$ .*

**Proposição 1.1.14.** *Se um anel  $A$  é um domínio então a localização  $S^{-1}A$  é um domínio.*

*Demonstração.* Por [34, Observação 4.1.2], a localização pode ser vista como subanel do corpo de frações de  $A$ . Portanto segue o esperado.  $\square$

**Definição 1.1.15.** *Uma  $A$ -álgebra é um anel  $R$  junto com um homomorfismo de anéis  $f : A \rightarrow R$  que é um  $A$ -módulo onde o produto é dado por*

$$ab := f(a)b.$$

*Note que todo anel  $A$  pode ser visto como uma  $A$ -álgebra tomando simplesmente  $f$  o homomorfismo identidade.*

*Dadas  $R, B$   $A$ -álgebras, dizemos que uma aplicação  $\phi : R \rightarrow B$  é um morfismo de  $A$ -álgebras se, para todo  $a \in A$  e  $x, y \in R$ , as condições a seguir são satisfeitas*

- $\phi(ax) = a\phi(x)$
- $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$
- $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ .

**Definição 1.1.16.** *Sejam  $A$  um anel comutativo,  $B$  e  $M$   $A$ -módulos. Uma  $A$ -derivação de  $B$  em  $M$  é uma aplicação  $d : B \rightarrow M$  que satisfaz, para todo  $x, y \in B$ , as duas seguintes condições:*

- (i)  $d(mx + y) = md(x) + d(y), \forall m \in A$ ;
- (ii)  $d(xy) = yd(x) + xd(y)$ .

*Denotamos por  $Der_A(B, M)$  como sendo o conjunto*

$$Der_A(B, M) := \{d : B \rightarrow M; d \text{ é uma } A\text{-derivação de } B \text{ em } M\}.$$

**Exemplo 1.1.17.** *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação contínua e diferenciável. A diferencial  $f' : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma  $\mathbb{R}$ -derivação. De fato, sejam  $x, y \in \mathbb{R}^n$  e  $m \in \mathbb{R}$ , por propriedades da soma de derivadas temos que  $f'(mx + y) = f'(mx) + f'(y)$ . Agora, pela regra da cadeia, segue que  $f'(mx) + f'(y) = mf'(x) + f'(y)$ .*

*Além disso, a regra do produto garante que  $f'(xy) = yf'(x) + xf'(y)$ . Portanto  $f'$  é uma  $\mathbb{R}$ -derivação.*

*Da mesma forma provamos que a derivada de uma aplicação  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  é uma  $\mathbb{C}$ -derivação.*

*Em geral, esse conceito vale para diferenciais de aplicações  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$  no geral e sua prova pode ser feita de maneira análoga.*

**Definição 1.1.18.** *Seja  $A$  um anel graduado, ou seja,  $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$  com  $A_n A_m \subseteq A_{m+n}$ . Dizemos que  $M$  é um  **$A$ -módulo graduado** se  $M$  tem uma decomposição  $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$  com  $A_i M_j \subseteq M_{i+j}$ .*

Cada  $A$ -módulo  $M_n$  é chamado de  **$n$ -ésima componente homogênea (ou graduada)** de  $M$ , enquanto um elemento  $m \in M_n$  é dito **homogêneo de grau  $n$** .

**Exemplo 1.1.19.** *Seja  $S$  um subconjunto de  $M$ , com  $M$  um  $A$ -módulo. Considere  $N$  o conjunto de todas as somas finitas de elementos de  $S$ . Definindo em  $N$  soma e produto por escalar como no Exemplo 1.1.8,  $N$  é um  $A$ -módulo, que é chamado  **$A$ -módulo gerado por  $S$** .*

**Notação:**  $N = \langle S \rangle$ .

Se  $S$  é um conjunto finito, dizemos que  $N$  é **finitamente gerado**.

**Exemplo 1.1.20.** *Sejam  $M$  e  $N$   $A$ -módulos. Tome*

$$C := \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x_i, y_i) ; a_i \in A, (x_i, y_i) \in M \times N, n \in \mathbb{N} \right\},$$

onde  $\sum_{i=1}^n a_i(x_i, y_i) + \sum_{i=1}^m b_i(x_i, y_i) := \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)(x_i, y_i)$ , com  $b_i = 0_A$  se  $i > n$  (aqui  $n < m$ ,

análogo se  $m < n$ ) e  $a \sum_{i=1}^n a_i(x_i, y_i) := \sum_{i=1}^n (aa_i)(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^n (aa_i x_i, aa_i y_i)$ , que é um  $A$ -módulo.

Agora tome  $D$  o submódulo de  $C$  gerado pelos elementos de  $C$  da forma

$$(x + x', y) - (x, y) - (x', y),$$

$$(x, y + y') - (x, y) - (x, y'),$$

$$(ax, y) - a(x, y),$$

$$(x, ay) - a(x, y).$$

Sendo  $D$  um submódulo de  $C$ , podemos tomar o quociente  $T = C/D$ , que é um  $A$ -módulo. Dado  $(x, y) \in M \times N$ , denotamos sua classe em  $T$  por  $x \otimes y$ .

**Definição 1.1.21.** *O  $A$ -módulo  $T$  construído acima é chamado o **produto tensorial** de  $M$  e  $N$  e o denotamos por  $M \otimes_A N$ , ou simplesmente  $M \times N$ .*

A definição de produto tensorial nos permite associar a um módulo  $M$  uma nova estrutura de álgebra que será importante mais adiante.

**Definição 1.1.22.** *Sejam  $T_n(M) := M \otimes_A \cdots \otimes_A M$  ( $n$ -vezes),  $n \geq 0$ , onde  $T_0(M) = A$  e  $T(M) = \bigoplus_{n \geq 0} T_n(M)$ . Para quaisquer  $x \in T_n(M)$  e  $y \in T_m(M)$ , temos  $x \otimes y \in T_{n+m}(M)$ , o que torna  $T(M)$  um anel graduado, chamado **álgebra tensorial** de  $M$ .*

Tomando  $I$  o ideal de  $T(M)$  gerado pelos elementos  $m \otimes m' - m' \otimes m$ , com  $m, m' \in M$  (que é um ideal bilateral), denotamos por  $\text{Sym}_A(M)$  ou  $\text{Sym}(M)$ , o quociente  $T(M)/I$  e chamamos de **álgebra simétrica** de  $M$ .

Veremos agora as condições de cadeia. Para isso considere  $S$  um conjunto e “ $\leq$ ” uma relação de ordem parcial em  $S$ , ou seja, “ $\leq$ ” é uma relação reflexiva, transitiva e se, para todo  $x, y \in S$  tais que  $x \leq y$  e  $y \leq x$ , temos que  $x = y$ .

**Proposição 1.1.23.** *Nas condições descritas acima são equivalentes as condições a seguir:*

- (a) *toda sequência  $x_1 \leq x_2 \leq \dots$  é estacionária;*
- (b) *todo subconjunto não vazio de  $S$  possui elemento maximal.*

*Demonstração.* Suponha que a condição (a) é verdadeira e que (b) é falsa. Se (b) é falsa, existe um subconjunto  $S'$  de  $S$  que não possui elemento maximal, ou seja, para todo  $x_i \in S'$  existe  $x_{i+1}$  tal que  $x_i < x_{i+1}$ . Logo, podemos formar uma sequência não estacionária, o que contradiz a condição (a).

A recíproca é direta. □

**Exemplo 1.1.24.** *Sejam  $M$  um  $A$ -módulo e  $S$  o conjunto dos submódulos de  $M$ . Sabemos que  $\subseteq$  é uma relação de ordem parcial em  $S$ .*

**Definição 1.1.25.** *Seja  $\{M_i\}_{i \in \Lambda}$  uma família de submódulos do  $A$ -módulo  $M$ . Uma sequência  $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$  é chamada de **cadeia crescente** de submódulos de  $M$ . Da mesma forma  $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots$  é chamada **cadeia decrescente** de submódulos de  $M$ .*

*Chamamos de **tamanho** ou **comprimento** de uma cadeia (crescente ou decrescente) a quantidade de submódulos distintos dela. Se esta quantidade for finita, dizemos que a cadeia é **finita**.*

**Definição 1.1.26.** *Nas condições da definição acima, se toda cadeia crescente de submódulos satisfaz as condições (a) e (b) da Proposição 1.1.23 dizemos que  $M$  é um módulo **Noetheriano**. Nesse caso, a condição (a) é chamada **condição de cadeia ascendente** e (b) é chamada **condição maximal**.*

*Agora, se toda cadeia decrescente de submódulos satisfaz as condições (a) e (b), então dizemos que  $M$  é um módulo **Artiniano**. Nesse caso, a condição (a) é chamada **condição de cadeia descendente** e (b) é a **condição minimal**.*

*Se  $M$  satisfaz a condição de cadeia ascendente e a condição de cadeia descendente dizemos simplesmente que  $M$  satisfaz as **condições de cadeia**.*

**Definição 1.1.27.** *Um anel  $A$  é dito **Noetheriano** (respectivamente **Artiniano**) se  $A$  visto como  $A$ -módulo for Noetheriano (respectivamente Artiniano).*

**Exemplo 1.1.28.** *Um corpo  $K$  é Noetheriano pois os únicos ideais (submódulos como  $K$ -módulo) são os triviais.*

A seguir listamos dois resultados importantes sobre módulo Noetheriano, necessários ao desenvolvimento do trabalho, mas que omitiremos as demonstrações.

**Proposição 1.1.29.** *Se  $M$  é um módulo Noetheriano, então todo submódulo de  $M$  é finitamente gerado.*

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [21, Teorema 6.2.1]. □

Dado um anel  $A$ ,  $A[x_1, \dots, x_n]$  denota o anel dos polinômios nas variáveis  $x_1, \dots, x_n$  com coeficientes em  $A$ .

**Teorema 1.1.30.** *Se  $A$  é um anel Noetheriano, então  $A[x]$  é Noetheriano. Em especial, segue de maneira indutiva que  $A[x_1, \dots, x_n]$  é Noetheriano.*

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [5, Teorema 7.5].  $\square$

**Definição 1.1.31.** *Dado  $M$  um  $A$ -módulo, uma **série de composição** de  $M$  é uma cadeia de submódulos de  $M$*

$$0 = M_0 \subset \dots \subset M_i \subset \dots \subset M_n = M,$$

*que é maximal, ou seja, cada quociente  $M_{i+1}/M_i$  é um módulo simples.*

**Observação 1.1.32.** *Se  $M$  admite uma série de composição*

$$0 = M_0 \subset \dots \subset M_i \subset \dots \subset M_n = M$$

*então, para todo  $i$  não existe submódulo  $M'$  tal que  $M_i \subset M' \subset M_{i+1}$ . De fato, caso existisse, a inclusão trivial de  $M'$  em  $M_{i+1}/M_i$  seria submódulo de  $M_{i+1}/M_i$ , porém  $M_{i+1}/M_i$  é simples, logo  $M' = M_{i+1}$  ou  $M' = M_i$ .*

Nem todo  $A$ -módulo admite uma série de composição (finita). O próximo resultado dá condições para que isso ocorra.

**Proposição 1.1.33.** *Um  $A$ -módulo  $M$  tem uma série de composição finita se, e somente se, satisfaz as condições de cadeia, ou seja,  $M$  é um  $A$ -módulo Noetheriano e Artiniano.*

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [34, Teorema 7.2.4 (1)].  $\square$

Outra propriedade importante é sobre o tamanho de uma série de composição:

**Proposição 1.1.34.** *Se um  $A$ -módulo admite uma série de composição finita então todas as suas séries de composição têm o mesmo tamanho.*

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [34, Teorema 7.2.4 (2)].  $\square$

Deste modo, temos bem definido o seguinte conceito:

**Definição 1.1.35.** *Seja  $M$  um  $A$ -módulo. O **comprimento** de  $M$  sobre  $A$ , denotado por  $l_A(M)$ , é o tamanho de uma série de composição de  $M$ . Quando  $M$  admite uma série de composição finita, dizemos que  $M$  tem **comprimento finito**. O **comprimento de um anel  $A$**  é seu comprimento visto como  $A$ -módulo, denotado por  $l_A(A)$  ou simplesmente  $l(A)$ .*

**Lema 1.1.36.** *Sejam  $M, M'$  e  $M''$   $A$ -módulos de comprimento finito e*

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$$

*uma seqüência exata. Então  $l_A(M) = l_A(M') + l_A(M'')$ .*

*Demonstração.* Como a seqüência é exata temos que  $Im(f) = ker(g)$ , portanto segue que  $M'' \cong M/Im(f)$ . Com isso, podemos sem perda de generalidade supor que  $M' \subseteq M$  e  $M'' = M/M'$ . Por hipótese,  $M'$  possui comprimento finito. Suponha que o comprimento de  $M'$  seja  $m$ , então existe uma série de composição

$$0 = M'_0 \subset \dots \subset M'_m = M'. \quad (1.1)$$

Temos que todo submódulo  $M_i$  de  $M''$  é da forma  $\tilde{M}_i/M'$ , em que  $\tilde{M}_i$  um submódulo de  $M$ . Portanto, uma série de composição de comprimento  $n$  de  $M''$  é da forma

$$0 = \tilde{M}_0/M' \subset \cdots \subset \tilde{M}_i/M' \subset \cdots \subset \tilde{M}_n/M' = M''.$$

Por hipótese,  $g$  é um homomorfismo de módulos, portanto  $g^{-1}(\tilde{M}_i/M') = \overline{M}_i''$  é um submódulo de  $M$ . Note ainda que

$$g^{-1}(\tilde{M}_0/M') = g^{-1}(0) = \ker(g) = \text{Im}(f) \Rightarrow M' = \overline{M}_0''.$$

Como  $\tilde{M}_i \subset \tilde{M}_{i+1}$ , segue que  $\overline{M}_i'' = g^{-1}(\tilde{M}_i/M') \subset g^{-1}(\tilde{M}_{i+1}/M') = \overline{M}_{i+1}''$ . Disso e da cadeia (1.1), podemos construir a cadeia a seguir

$$0 = M'_0 \subset \cdots \subset M'_m = M' = \overline{M}_0'' \subset \cdots \subset \overline{M}_n'' = M. \quad (1.2)$$

Basta mostrar que esta cadeia é uma série de composição de  $M$ , pois ela tem tamanho  $n + m$ . De fato, suponha que exista um submódulo  $\tilde{M} \neq 0$  de  $M$  que pode ser inserido na cadeia (1.2). Existem as seguintes possibilidades:

- $M'_{i-1} \subset \tilde{M} \subset M'_i$ , para algum  $i \in \{1, \dots, m\}$ ;
- $\overline{M}_{i-1}'' \subset \tilde{M} \subset \overline{M}_i''$ , para algum  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Se  $M'_{i-1} \subset \tilde{M} \subset M'_i$ , então  $\tilde{M}$  está na cadeia de  $M'$ , o que resulta em um absurdo, pois esta cadeia é uma série de composição de  $M'$ .

Agora se  $\overline{M}_i'' \subset \tilde{M} \subset \overline{M}_{i+1}''$ , então

$$g(\overline{M}_i'') \subset g(\tilde{M}) \subset g(\overline{M}_{i+1}'') \Rightarrow g(g^{-1}(\tilde{M}_i/M')) \subset g(M') \subset g(g^{-1}(\tilde{M}_{i+1}/M'))$$

e como  $g$  é sobrejetora,  $\tilde{M}_i/M' \subset \tilde{M}/M' \subset \tilde{M}_{i+1}/M'$ , o que é um absurdo, pois  $0 = \tilde{M}_0/M' \subset \cdots \subset \tilde{M}_n/M' = M''$  é uma série de composição de  $M''$ . Logo, segue o esperado.  $\square$

**Teorema 1.1.37.** *Sejam  $A$  um anel de comprimento finito e  $a, b \in A$ , tais que  $a, b$  não dividem zero. Portanto*

$$l\left(\frac{A}{\langle ab \rangle}\right) = l\left(\frac{A}{\langle a \rangle}\right) + l\left(\frac{A}{\langle b \rangle}\right).$$

*Demonstração.* Considere a sequência

$$0 \rightarrow \frac{A}{\langle b \rangle} \xrightarrow{f} \frac{A}{\langle ab \rangle} \xrightarrow{g} \frac{A}{\langle a \rangle} \rightarrow 0,$$

com  $f(x + \langle b \rangle) = ax + \langle ab \rangle$  e  $g(x + \langle ab \rangle) = x + \langle a \rangle$ . Vejamos que  $f$  e  $g$  estão bem definidas.

Note que, se  $x + \langle b \rangle = y + \langle b \rangle$ , então  $x - y \in \langle b \rangle$ , e, portanto, existe  $z$  tal que  $zb = x - y$ . Agora note que  $ax - ay = a(x - y) = a(zb) = z(ab)$ , então  $z(ab) \in \langle ab \rangle$ . Dessa forma, segue  $ax + \langle ab \rangle = ay + \langle ab \rangle$ , ou seja,  $f$  está bem definida.

De forma análoga é possível mostrar que  $g$  também está bem definida.

Além disso, é fácil ver que  $f$  e  $g$  são homomorfismos de  $A$ -módulos. Pelo Lema 1.1.36, basta mostrar que a sequência é exata.

Mostremos primeiramente que  $f$  é injetora. De fato, dados  $x + \langle b \rangle$  e  $y + \langle b \rangle$  tais que  $f(x + \langle b \rangle) = f(y + \langle b \rangle)$  temos

$$ax + \langle ab \rangle = ay + \langle ab \rangle \Rightarrow ax - ay = kab \Rightarrow ax - ay - kab = a(x - y - kb) = 0 \Rightarrow x - y = kb.$$

Portanto, segue que  $x + \langle b \rangle = y + \langle b \rangle$ , ou seja,  $f$  é injetora.

Provemos que  $g$  é sobrejetiva. Para isto, basta notar que, dado  $x + \langle a \rangle \in A/\langle a \rangle$ , com  $x \in A$ , tomando  $x + \langle ab \rangle \in A/\langle ab \rangle$ , temos  $g(x + \langle ab \rangle) = x + \langle a \rangle$ . Com isso  $g$  é sobrejetiva.

Só nos resta mostrar que  $\ker(g) = \text{Im}(f)$ .

Seja  $x + \langle ab \rangle \in \text{Im}(f)$ . Assim, existe  $y + \langle b \rangle \in \frac{A}{\langle b \rangle}$ , tal que  $f(y + \langle b \rangle) = x + \langle ab \rangle$ , ou seja,  $ay + \langle ab \rangle = x + \langle ab \rangle$ . Deste modo,

$$ay + \langle ab \rangle = x + \langle ab \rangle \Rightarrow x - ay \in \langle ab \rangle \Rightarrow x - ay = kab \Rightarrow x = (y + kb)a,$$

para algum  $k \in A$ . Logo,  $g(x + \langle ab \rangle) = (y + kb)a + \langle a \rangle = 0 + \langle a \rangle$ , e isso prova que  $\text{Im}(f) \subseteq \ker(g)$ .

Mostremos agora que  $\ker(g) \subseteq \text{Im}(f)$ .

Tome um elemento  $x + \langle ab \rangle \in \ker(g)$ . Assim,  $g(x + \langle ab \rangle) = 0$ , ou seja,  $x + \langle a \rangle = 0$ . Com isso,  $x \in \langle a \rangle \Rightarrow x = ak$ , para algum  $k \in A$ . Portanto  $f(k + \langle b \rangle) = ak + \langle ab \rangle = x + \langle ab \rangle$ , ou seja,  $\ker(g) \subseteq \text{Im}(f)$ . Dessa forma a sequência é exata e, pelo lema anterior segue o esperado.  $\square$

**Definição 1.1.38.** A **dimensão de Krull** de um anel  $A$ , que denotamos por  $\dim_{\text{Krull}}(A)$ , é o supremo dos comprimentos das cadeias de seus ideais primos ordenados por inclusão estrita.

**Observação 1.1.39.** Vimos que se  $A$  é um anel noetheriano, qualquer cadeia de ideais é estacionária e, portanto finita e o comprimento do anel está bem definido e é finito. Porém a dimensão de Krull pode ser infinita mesmo no caso de anéis noetherianos (ver [24, A1, Exemplo 1]).

**Exemplo 1.1.40.** Um corpo tem dimensão de Krull 0. Um domínio de ideais principais que não é um corpo tem dimensão 1. O anel de polinômios  $K[x_1, \dots, x_n]$  tem dimensão de Krull  $n$ .

## 1.2 Conjuntos algébricos afins

O objetivo agora é mostrar como objetos algébricos e geométricos estão relacionados. Também vemos como tais objetos podem ser usados para a criação de novos ambientes que propiciam corpos interessantes.

Nesta seção denotamos por  $K$  um corpo qualquer.

**Definição 1.2.1.** Defina  $\mathbb{A}_K^n := \{(a_1, \dots, a_n) ; a_i \in K, \forall i\}$ , chamado **espaço algébrico afim  $n$ -dimensional**, ou simplesmente **espaço afim  $n$ -dimensional**.

**Exemplo 1.2.2.** Dois exemplos claros de espaços afins  $n$ -dimensionais são  $\mathbb{R}^n = \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^n$  e  $\mathbb{C}^n = \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$ .

Dados  $a = (a_0, \dots, a_n), b = (b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{A}_K^{n+1}$ , considere a seguinte relação

$$a \sim b \Leftrightarrow \exists \lambda \in K - \{0\} \text{ tal que } b = \lambda a.$$

É fácil ver que  $\sim$  é uma relação de equivalência. De fato, note que se  $a \sim b$ , então existe  $\lambda \in K$ , com  $\lambda \neq 0$ , tal que

$$b = \lambda a \Rightarrow a = \frac{1}{\lambda} b \Rightarrow b \sim a.$$

**Definição 1.2.3.** O conjunto das classes de equivalência da relação anterior é chamado **espaço projetivo  $n$  dimensional sobre o corpo  $K$** , denotado por  $\mathbb{P}_K^n$ , ou seja,

$$\mathbb{P}_K^n := (\mathbb{A}_K^{n+1} - \{0\}) / \sim.$$

**Notação:** Dado  $a = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_K^{n+1}$ , denotamos sua classe em  $\mathbb{P}_K^n$  por  $(a_0 : \dots : a_n)$  e dizemos que essas são as **coordenadas homogêneas** de  $a$ .

Perceba que os elementos de  $\mathbb{P}_K^n$  podem ser interpretados como o conjunto de retas de  $\mathbb{A}_K^{n+1}$  que passam pela origem. Tal interpretação é importante não só pela interpretação geométrica da relação de equivalência como também é a linguagem que será usada em alguns momentos no decorrer do texto.

Nos espaços afins podemos por meio de zeros de polinômios definir novos conjuntos.

**Definição 1.2.4.** Dado  $S \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$  um subconjunto qualquer, defina

$$V(S) := \{p \in \mathbb{A}_K^n ; f(p) = 0, \forall f \in S\} \subseteq \mathbb{A}_K^n.$$

Chamamos  $V(S)$  de **conjunto algébrico afim** sobre  $K$ .

**Exemplo 1.2.5.** Seja  $f = x^2 + y^2 - 1 \in \mathbb{R}[x, y]$ . Tomando  $S = \{f\}$ , temos que  $V(S) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$  é uma circunferência de raio 1 com centro em  $(0, 0)$ .

**Exemplo 1.2.6.** Da mesma forma que o exemplo anterior podemos ver que  $S = \{xy - 1\} \subseteq \mathbb{R}[x, y]$  nos dá  $V(S)$  uma hipérbole,  $S_1 = \{y - x^2\}$  nos dá  $V(S_1)$  uma parábola, etc.

Seguem algumas propriedades deste conceito.

**Proposição 1.2.7.** Sejam  $S \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$  um ideal e  $\langle S \rangle$  o ideal gerado por  $S$ . Então  $V(\langle S \rangle) = V(S)$ .

*Demonstração.* Seja  $p \in V(\langle S \rangle)$ . Então  $f(p) = 0$  para todo  $f$  de  $\langle S \rangle$ . Como  $S \subseteq \langle S \rangle$  então  $f(p) = 0$  para todo  $f \in S$ , ou seja,  $p \in V(S)$ .

Agora, tome  $p \in V(S)$ . Se  $f \in \langle S \rangle$ , então  $f = g_1 f_1 + \dots + g_r f_r$ , com  $g_i \in K[x_1, \dots, x_n]$  e  $f_i \in S$ ,  $\forall i = 1, \dots, r$ . Como  $p \in V(S)$ , para todo  $i$ ,  $f_i(p) = 0$ , então  $(g_i f_i)(p) = g_i(p) f_i(p) = g_i(p) \cdot 0 = 0$  e, portanto,  $f(p) = 0$ . Logo,  $p \in V(\langle S \rangle)$ .  $\square$

Logo, para obter conjuntos algébricos afins consideramos exatamente os ideais do anel de polinômios.

**Proposição 1.2.8.** Sejam  $I, J$  ideais de  $K[x_1, \dots, x_n]$  e  $\{I_i\}$  uma família de ideais de  $K[x_1, \dots, x_n]$ . Temos que

- i)  $I \subseteq J \Rightarrow V(J) \subseteq V(I)$ ;
- ii)  $V(I \cdot J) = V(I) \cup V(J)$ ;
- iii)  $\bigcap_i V(I_i) = V(\sum_i I_i)$ .

*Demonstração.* i) Considere  $p \in V(J)$ , então temos  $f(p) = 0$ , para todo  $f \in J$ , além disso, como  $I \subseteq J$ , temos que  $f(p) = 0$  para todo  $f \in I$ . Portanto  $p \in V(I)$ , o que implica na inclusão  $V(J) \subseteq V(I)$ .

ii) Perceba que  $IJ \subseteq I$  e  $IJ \subseteq J$ . Pelo item i) temos que  $V(I) \subseteq V(IJ)$  e  $V(J) \subseteq V(IJ)$ , logo  $V(I) \cup V(J) \subseteq V(IJ)$ .

Seja  $p \in V(IJ)$ . Então temos duas opções:  $p \in V(I)$  ou  $p \notin V(I)$ . O primeiro caso teríamos diretamente que  $V(IJ) \subseteq V(I) \cup V(J)$ , portanto nos falta verificar o segundo caso.

Se  $p \notin V(I)$ , então existe  $f \in I$  tal que  $f(p) \neq 0$ . Tome  $g \in J$  qualquer. Como  $fg \in IJ$ , devemos ter  $(fg)(p) = 0$ , ou seja,  $g(p) = 0$  implicando  $p \in V(J)$ . Com isso,  $V(IJ) \subseteq V(I) \cup V(J)$ , o que prova a igualdade.

iii) Note que  $\langle \bigcup_i I_i \rangle = \langle \sum_i I_i \rangle$ . Considere  $p \in \bigcap_i V(I_i)$  e tome  $f \in \bigcup_i I_i$  qualquer, então existe um índice  $j$  tal que  $f \in I_j$ , e, como  $p \in V(I_j)$ , segue que  $f(p) = 0$  e  $p \in V(\bigcup_i I_i)$ , ou seja,  $\bigcap_i V(I_i) \subseteq V(\sum_i I_i)$ .

Agora, perceba que  $I_i \subseteq \bigcup_i I_i$ , logo, pelo item i), temos que  $V(\bigcup_i I_i) \subseteq V(I_j)$  para todo índice  $j$ . Portanto  $V(\bigcup_i I_i) \subseteq \bigcap_i V(I_i)$ , o que prova o esperado.  $\square$

Podemos agora fazer algo análogo para um conjunto no espaço afim obtendo um conjunto no anel de polinômios.

**Definição 1.2.9.** *Seja  $X \subseteq \mathbb{A}_K^n$  um subconjunto qualquer. Defina*

$$I(X) := \{f \in K[x_1, \dots, x_n] ; f(p) = 0, \forall p \in X\}.$$

*É fácil ver que  $I(X)$  é um ideal de  $K[x_1, \dots, x_n]$ , que chamamos de **ideal associado** de  $X$ .*

**Observação 1.2.10.** *Da mesma forma que feito para  $V$ , segue que, dados  $X, Y$  dois conjuntos algébricos afins tais que  $X \subseteq Y$  temos que  $I(Y) \subseteq I(X)$ . De fato, tome  $f \in I(Y)$ , então  $f(p) = 0$  para todo  $p \in Y$ . Como  $X \subseteq Y$  segue que  $f(p) = 0$  para todo  $p \in X$ . Logo  $f \in I(X)$ .*

As definições anteriores estabelecem uma relação entre objetos algébricos e geométricos, como segue:

$$V: \begin{array}{ccc} \{S \subseteq K[x_1, \dots, x_n] ; S \text{ ideal}\} & \longrightarrow & \{\text{conjuntos algébricos afins de } \mathbb{A}_K^n\} \\ S & \longmapsto & V(S) \end{array}$$

e

$$I: \begin{array}{ccc} \{\text{conjuntos algébricos afins de } \mathbb{A}_K^n\} & \longrightarrow & \{S \subseteq K[x_1, \dots, x_n] ; S \text{ ideal}\} \\ X & \longmapsto & I(X) \end{array}.$$

Porém não é possível considerar uma como a inversa da outra. Entretanto, Hilbert nos fornece em seu famoso Teorema dos Zeros de Hilbert uma caracterização precisa para os zeros de polinômios sobre um corpo algebricamente fechado. Apresentamos esse resultado a seguir, dando uma ideia da demonstração só referenciando algumas informações.

**Teorema 1.2.11.** (**Teorema dos Zeros de Hilbert**) *Sejam  $K$  um corpo algebricamente fechado e  $S \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$  um ideal. Então  $I(V(S)) = \sqrt{S}$ , em que  $\sqrt{S}$  denota o ideal radical de  $S$ .*

*Demonstração.* Primeiramente, note que  $\sqrt{S} \subseteq I(V(S))$ . Seja  $f \in \sqrt{S}$ . Então existe  $r \in \mathbb{N}$  tal que  $f^r \in S$ . Com isso, dado  $p \in V(S)$

$$f^r(p) = 0 \Rightarrow f(p)^r = 0 \Rightarrow f(p) = 0.$$

Portanto  $f \in I(V(S))$ , ou seja,  $\sqrt{S} \subseteq I(V(S))$ .

Mostremos agora que  $I(V(S)) \subseteq \sqrt{S}$ .

Como  $K$  é Noetheriano (Exemplo 1.1.28), pelo Teorema 1.1.30 segue que  $K[x_1, \dots, x_n]$  é Noetheriano. Além disso, pela Proposição 1.1.29 todo ideal de  $K[x_1, \dots, x_n]$  é finitamente gerado. Então existem  $f_1, \dots, f_r$  tais que  $S = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$ . Considere agora  $g \in I(V(S))$  qualquer e considere o corpo  $L := K(x_1, \dots, x_n)$  (o corpo de frações de  $K[x_1, \dots, x_n]$ ). Além disso, considere  $S_0$  ideal de  $K[x_1, \dots, x_n, x_{n+1}]$  tal que  $S_0 = \langle f_1, \dots, f_r, gx_{n+1} - 1 \rangle$ . Denote  $g_1 := gx_{n+1} - 1$ .

Vamos mostrar que  $V(S_0) = \emptyset$ . Suponha por absurdo que  $V(S_0) \neq \emptyset$ . Tome  $b \in V(S_0)$ . Sabemos que  $b$  é da forma  $b = (b', b_{n+1})$ , com  $b' \in \mathbb{A}_K^n$  e  $b_{n+1} \in K$ . Com isso, por definição segue que

$$f_i(b') = 0 \Rightarrow b' \in V(S), \forall i \in \{1, \dots, r\}.$$

Pelo fato de  $g \in I(V(S))$ , temos que  $g(b') = 0$ , assim  $g_1(b) = g(b')b_{n+1} - 1 = -1 \neq 0$ . Logo, como  $g_1 \in S_0$ , então  $b \notin V(S_0)$ , o que é um absurdo, ou seja,  $V(S_0) = \emptyset$ .

Em [31, Proposição A.9] é provado que, se  $K$  é algebricamente fechado e  $S_0$  é próprio, então  $V(S_0) \neq \emptyset$ . Como vimos que  $V(S_0) = \emptyset$  temos que  $S_0 = K[x_1, \dots, x_{n+1}]$ . Então, existem  $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta \in K[x_1, \dots, x_{n+1}]$  tais que

$$1 = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_r f_r + \beta (gx_{n+1} - 1). \quad (1.3)$$

Para cada  $i \in \{1, \dots, r\}$  considere  $F_i := f_i \alpha_i \in L[x_{n+1}]$ . Existe algum  $d$  suficientemente grande tal que, para cada  $i$ , pode-se escrever

$$\alpha_i = \alpha_{i0} + \alpha_{i1}x_{n+1} + \dots + \alpha_{id}x_{n+1}^d,$$

com  $\alpha_{ij} \in K[x_1, \dots, x_n]$  e  $j \in \{0, \dots, d\}$ .

Caso  $g = 0$ , temos que  $g \in \sqrt{S}$ , o que provaria o resultado, suponha então  $g \neq 0$ . Dessa forma, podemos considerar  $1/g \in L$ .

Note que

$$\begin{aligned} F_i \left( \frac{1}{g} \right) &= (f_i \alpha_{i0} + f_i \alpha_{i1} x_{n+1} + \dots + f_i \alpha_{id} x_{n+1}^d) \left( \frac{1}{g} \right) = \\ &= f_i \alpha_{i0} + f_i \alpha_{i1} \frac{1}{g} + \dots + f_i \alpha_{id} \frac{1}{g^d} = \frac{f_i u_i}{g^d}, \end{aligned}$$

com  $u_i = \alpha_{i0}g^d + \alpha_{i1}g^{d-1} + \dots + \alpha_{id} \in K[x_1, \dots, x_n]$ .

Com isso, pela igualdade (1.3), temos que

$$\begin{aligned} 1 = F_1 + \dots + F_r + \beta \cdot (gx_{n+1} - 1) &\Rightarrow 1 = F_1 \left( \frac{1}{g} \right) + \dots + F_r \left( \frac{1}{g} \right) + \beta \left( \frac{1}{g} \right) \left( g \frac{1}{g} - 1 \right) = \\ &= \frac{f_1 u_1}{g^d} + \dots + \frac{f_r u_r}{g^d} \Rightarrow g^d = f_1 u_1 + \dots + u_r f_r \in S, \end{aligned}$$

pois  $u_i \in K[x_1, \dots, x_n]$ , para todo  $i \in \{1, \dots, r\}$ . Portanto,  $g \in \sqrt{S}$ , o que prova o teorema.  $\square$

Com este resultado, segue de maneira direta o corolário a seguir.

**Corolário 1.2.12.** *Nas condições do Teorema dos Zeros de Hilbert temos que*

$$V: \left\{ \begin{array}{l} S \subseteq K[x_1, \dots, x_n] \\ S \text{ é ideal radical} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longmapsto \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{conjuntos algébricos afins de } \mathbb{A}_K^n \\ V(S) \end{array} \right\}$$

e

$$I: \left\{ \begin{array}{l} \text{conjuntos algébricos afins de } \mathbb{A}_K^n \\ X \end{array} \right\} \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longmapsto \end{array} \left\{ \begin{array}{l} S \subseteq K[x_1, \dots, x_n] \\ S \text{ é ideal radical} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ I(X) \end{array}.$$

são bijeções, com  $V^{-1} = J$  e  $J^{-1} = V$ .

**Proposição 1.2.13.** *Se  $X$  é um conjunto algébrico afim irredutível, então  $I(X)$  é primo.*

*Demonstração.* Primeiramente, note que se  $X \subseteq V(I(X))$ . De fato, tome  $p \in X$ , então, para todo  $f \in I(X)$  temos que  $f(p) = 0$  e, com isso,  $p \in V(I(X))$ . Portanto,  $X \subseteq V(I(X))$ .

Sejam  $f, g$  tais que  $fg \in I(X)$ . Então  $\langle f \rangle \langle g \rangle = \langle fg \rangle \subseteq I(X)$ . Pela Proposição 1.2.8 (item i) temos  $V(I(X)) \subseteq V(\langle f \rangle \langle g \rangle)$ . Como  $X \subseteq V(I(X))$ , segue que

$$X = X \cap V(I(X)) \subseteq X \cap V(\langle f \rangle \langle g \rangle) = (X \cap V(\langle f \rangle)) \cup (X \cap V(\langle g \rangle)) \subseteq X,$$

onde a última igualdade segue da Proposição 1.2.8 (item ii). Com isso, segue que  $X = (X \cap V(\langle f \rangle)) \cup (X \cap V(\langle g \rangle))$ , e, pelo fato de  $X$  ser irredutível, devemos ter  $X = X \cap V(\langle f \rangle)$  ou  $X = X \cap V(\langle g \rangle)$ . Portanto,

$$X \subseteq V(\langle f \rangle) \quad \text{ou} \quad X \subseteq V(\langle g \rangle). \quad (1.4)$$

Sabemos pelo Teorema dos Zeros de Hilbert que  $\sqrt{\langle f \rangle} = I(V(\langle f \rangle))$  e  $\sqrt{\langle g \rangle} = I(V(\langle g \rangle))$ . Logo, pela Observação 1.2.10 e por (1.4) temos que

$$f \in \langle f \rangle \subseteq \sqrt{\langle f \rangle} = I(V(\langle f \rangle)) \subseteq I(X) \quad \text{ou} \quad g \in \langle g \rangle \subseteq \sqrt{\langle g \rangle} = I(V(\langle g \rangle)) \subseteq I(X).$$

O que prova que  $I(X)$  é primo. □

**Definição 1.2.14.** *O anel de coordenadas de  $X$  é definido como o anel quociente*

$$K[X] := \frac{K[x_1, \dots, x_n]}{I(X)}.$$

**Observação 1.2.15.** *O anel de coordenadas  $K[X]$  possui uma estrutura de  $K$ -álgebra via o homomorfismo de anéis*

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & K[X] \\ a & \longmapsto & a + I(X) \end{array},$$

assim como  $K[x_1, \dots, x_n]$  possui uma estrutura de  $K$ -álgebra, considerando a inclusão  $i: K \longrightarrow K[x_1, \dots, x_n]$ .

Vamos agora definir uma topologia em  $\mathbb{A}_K^n$ .

**Proposição 1.2.16.** *O conjunto*

$$\tau := \{U \subseteq \mathbb{A}_K^n; U = \mathbb{A}_K^n - V(I), I \text{ ideal de } K[x_1, \dots, x_n]\}$$

define uma topologia em  $\mathbb{A}_K^n$ .

*Demonstração.* Primeiramente note que  $V(0) = \mathbb{A}_K^n$  e que  $\emptyset = V(1)$ , então

$$\emptyset = \mathbb{A}_K^n - \mathbb{A}_K^n = \mathbb{A}_K^n - V(0) \in \tau \text{ e } \mathbb{A}_K^n = \mathbb{A}_K^n - \emptyset = \mathbb{A}_K^n - V(1) \in \tau.$$

Portanto  $\emptyset, \mathbb{A}_K^n \in \tau$ .

Agora, tome uma família  $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$  tal que  $U_i = \mathbb{A}_K^n - V(I_i)$ . Pelo item (iii) da Proposição 1.2.8 temos

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} (\mathbb{A}_K^n - V(I_i)) = \mathbb{A}_K^n - \bigcap_{i \in I} V(I_i) = \mathbb{A}_K^n - V\left(\sum_{i \in I} I_i\right),$$

em que a segunda igualdade segue pelas leis de Morgan. Agora, pelo item (ii) da mesma proposição segue que

$$\bigcap_{i=1}^m U_i = \bigcap_{i=1}^m (\mathbb{A}_K^n - V(I_i)) = \mathbb{A}_K^n - \bigcup_{i=1}^m V(I_i) = \mathbb{A}_K^n - V(I_1 \cdot \dots \cdot I_m),$$

com a segunda igualdade ocorrendo novamente pelas leis de Morgan.  $\square$

Com isso,  $\tau$  é uma topologia em  $\mathbb{A}_K^n$ , com  $U_i$  sendo os abertos dessa topologia e  $V(U_i)$  os fechados, chamada de **Topologia de Zariski**.

A partir de agora nesta seção vamos considerar  $X$  um conjunto algébrico afim com a topologia de Zariski induzida, ou seja, os abertos de  $X$  serão da forma  $X \cap U_i$ , com  $U_i \in \tau$ .

**Definição 1.2.17.** *Seja  $X$  um espaço topológico. Definimos a **dimensão** de  $X$  como o supremo do conjunto dos inteiros não negativos  $n$  para os quais existe uma cadeia de fechados irredutíveis  $Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \dots \subsetneq Z_n$  de  $X$ . Vamos denotar este supremo como  $\dim X$ .*

A **dimensão** de um conjunto algébrico afim é a sua dimensão como espaço topológico, com a topologia de Zariski.

**Teorema 1.2.18.** *Se  $X \subseteq \mathbb{A}_K^n$  é um conjunto algébrico afim, então  $K[X]$  tem dimensão de Krull finita e  $\dim X = \dim_{Krull} K[X] \leq n$ .*

*Demonstração.* Considere a projeção  $\pi : K[x_1, \dots, x_n] \rightarrow K[X]$  que leva  $F \mapsto F + I(X)$ . Sabendo que a projeção  $\pi$  é sobrejetiva, temos  $\dim_{Krull} K[X] \leq \dim_{Krull} K[x_1, \dots, x_n] = n$ .

Seja  $A$  o conjunto dos inteiros não-negativos tais que  $\dim X = \sup A$  e seja  $B$  o conjunto de inteiros não-negativos tais que  $\dim_{Krull} K[X] = \sup B$ .

1. Afirmamos que  $r \leq \dim_{Krull} K[X], \forall r \in A$ . De fato, seja  $r \in A$ . Então, existe uma cadeia de fechados irredutíveis

$$Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \dots \subsetneq Z_r \subseteq X$$

de  $X$ . Assim, pela Observação 1.2.10, ideal induzido por um conjunto algébrico afim produz uma cadeia

$$I(X) \subseteq I(Z_r) \subsetneq I(Z_{r-1}) \subsetneq \dots \subsetneq I(Z_0)$$

de ideais de  $K[x_1, \dots, x_n]$  que contém  $I(X)$ . Deste modo, no anel quociente  $K[X] = \frac{K[x_1, \dots, x_n]}{I(X)}$ , temos uma cadeia de ideais primos

$$\frac{I(Z_r)}{I(X)} \subsetneq \frac{I(Z_{r-1})}{I(X)} \subsetneq \cdots \subsetneq \frac{I(Z_0)}{I(X)}$$

de  $K[X]$ . Logo,  $r \leq l\left(\frac{I(Z_0)}{I(X)}\right) \leq \dim_{K\text{rull}} K[X]$  e, com isso,  $\dim X \leq \dim_{K\text{rull}} K[X]$ .

2. Afirmamos que  $s \leq \dim X$ ,  $\forall s \in B$ . De fato, seja  $s \in B$ . Então existe uma cadeia de ideais primos

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_s = P$$

de  $K[X]$ . Para cada  $i \in \{0, 1, \dots, s\}$  podemos escrever  $P_i = \frac{Q_i}{I(X)}$ , onde  $Q_i$  é um ideal primo de  $K[x_1, \dots, x_n]$  que contém  $I(X)$ . As inclusões acima e as propriedades clássicas da projeção quociente  $\pi$  implicam que

$$I(X) \subseteq Q_0 \subsetneq Q_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Q_s,$$

pois as inclusões são mantidas ao aplicarmos a imagem inversa da projeção quociente, porém a imagem inversa dessa projeção quociente é o  $Q_i$ .

Pela Proposição [1.2.8](#) temos

$$V(Q_s) \subsetneq \cdots \subsetneq V(Q_0) \subseteq V(I(X)) = X,$$

que é uma cadeia de fechados de  $X$  e como cada  $Q_i$  é primo, então  $V(Q_i)$  é irredutível (Corolário [1.2.12](#)). Portanto, temos uma cadeia de fechados irredutíveis de  $X$ , então temos  $s$  inclusões, e pela definição da dimensão, obtemos que  $s \leq \dim X$  e disso segue que  $\dim_{K\text{rull}} K[X] = \sup B \leq \dim X$ . Portanto,  $\dim X = \dim_{K\text{rull}} K[X]$ . □

**Corolário 1.2.19.** *Se  $\dim X = n - 1$  então  $I(X) = (f)$ .*

**Definição 1.2.20.** *Uma função  $f : X \rightarrow K$  é chamada **polinomial** se existir  $F \in K[x_1, \dots, x_n]$  tal que  $f(p) = F(p)$ ,  $\forall p \in X$ .*

**Observação 1.2.21.** *Com as operações de soma, produto e produto por escalar em  $K$  usuais, claramente  $\tilde{K}[X] := \{f : X \rightarrow K \mid f \text{ é função polinomial}\}$  é uma  $K$ -álgebra.*

**Proposição 1.2.22.**  *$K[X]$  e  $\tilde{K}[X]$  são isomorfos como  $K$ -álgebras.*

*Demonstração.* Considere a aplicação

$$\begin{array}{ccc} \varphi : K[x_1, \dots, x_n] & \longrightarrow & \tilde{K}[X] \\ F & \longmapsto & \tilde{F} : X \longrightarrow K \\ & & p \longmapsto F(p) \end{array}$$

Podemos ver facilmente que  $\varphi$  é um homomorfismo de anéis.

Diretamente da definição de função polinomial temos que  $\varphi$  é sobrejetiva.

Agora, dado  $F \in \ker \varphi$ , então  $\varphi(F) = 0$ , ou seja,  $F(p) = 0$ ,  $\forall p \in X$ , mostrando que  $\ker \varphi \subseteq I(X)$ . Para mostrar que  $I(X) \subseteq \ker \varphi$ , tomamos  $T \in I(X)$ , logo,  $T(p) = 0$ ,  $\forall p \in X$  e então temos que  $T$  é a função nula, concluindo que  $T$  está em  $\ker \varphi$ . Assim  $\ker \varphi = I(X)$ .

Pelo Teorema dos Isomorfismo (de anéis), temos o seguinte isomorfismo de anéis

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}: K[X] = \frac{K[x_1, \dots, x_n]}{I(X)} &\longrightarrow \tilde{K}[X] \\ F + I(X) &\mapsto \tilde{F}: \begin{array}{ccc} X &\longrightarrow & K \\ p &\mapsto & F(p) \end{array} \end{aligned}$$

que podemos ver facilmente que é um isomorfismo  $K$ -álgebras.  $\square$

A partir desse resultado, podemos ver os elementos de  $K[X]$  como elementos de  $\tilde{K}[X]$ .

**Definição 1.2.23.** Um conjunto algébrico afim  $X$  é dito uma **variedade algébrica afim** se  $X$  for irredutível, ou seja,  $X$  não pode ser escrito como a união de dois conjuntos algébricos afins próprios.

No que segue, as variedades algébricas afins são denotadas por  $V$  ao invés de  $X$ .

Primeiramente, lembramos que se estamos com  $V$  um conjunto algébrico afim irredutível, então temos que  $I(V)$  é um ideal primo de  $K[x_1, \dots, x_n]$  (Proposição 1.2.13) e, com isso,  $K[V] = \frac{K[x_1, \dots, x_n]}{I(V)}$  é um domínio e podemos considerar seu corpo de frações, denotado por  $K(V)$  (Observação 1.1.13).

Assim um elemento de  $K(V)$  é da forma  $\frac{f}{g} := \{(h, k) \in K[V] \times (K[V])^* \mid (f, g) \sim (h, k)\}$ , onde  $(f, g) \sim (h, k) \Leftrightarrow f \cdot k = g \cdot h$  em  $K[V]$ .

Agora vamos definir um importante anel associado ao corpo de frações do anel de coordenadas de uma variedade algébrica afim.

Para  $p$  um ponto de uma variedade algébrica afim  $V$ , denotamos

$$\mathcal{O}_{V,p} := \left\{ \frac{g}{h}; g, h \in K[V], h(p) \neq 0 \right\} \subset K(V),$$

que com as operações anteriores é um anel.

É fácil mostrar que seu único ideal maximal é

$$m_{V,p} := \left\{ \frac{g}{h}; g, h \in K[V], g(p) = 0, h(p) \neq 0 \right\}.$$

**Definição 1.2.24.** Chamamos  $\mathcal{O}_{V,p}$  de **anel local** de  $V$  em  $p$ .

**Definição 1.2.25.** Para cada aberto  $U$  de  $V$ , define

$$\mathcal{O}_V(U) := \bigcap_{p \in U} \mathcal{O}_{V,p},$$

que é um anel e recebe o nome de **anel de funções regulares**, onde seus elementos são chamados de **funções regulares em  $U$** .

Vejam agora uma outra definição para funções regulares, que mostramos na sequência ser equivalente a anterior, lembrando que  $K[V]$  e  $\tilde{K}[V]$  são isomorfos como  $K$ -álgebras.

**Definição 1.2.26.** Seja  $U$  um aberto de  $V$ . Uma aplicação  $\phi: U \rightarrow K$  é chamada **regular** em  $p \in U$  se houver uma vizinhança  $W$  de  $p$  em  $U$  tal que haja polinômios  $f, g \in K[x_1, \dots, x_n]$  com  $g(q) \neq 0$  e  $\phi(q) = \frac{f(q)}{g(q)}$  para todos os  $q \in W$ . Dizemos que  $\phi$  é **regular em  $U$** , se for regular em todos os pontos em  $U$ .

**Lema 1.2.27.** As Definições 1.2.25 e 1.2.26 são equivalentes.

*Demonstração.* É claro que um elemento do anel de funções regulares em  $U$  determina uma função regular no sentido da Definição 1.2.26.

Por outro lado, tomemos  $\phi : U \rightarrow A$  uma função regular no sentido da Definição 1.2.26. Seja  $p \in U$  um ponto qualquer, então existem polinômios  $f, g$  tais que  $g(q) \neq 0$  e  $\phi(q) = \frac{f(q)}{g(q)}$  para todos os pontos  $q$  em alguma vizinhança  $W$  de  $p$ . Afirmamos que  $\frac{f}{g} \in K(V)$  é o elemento no anel das funções regulares que buscamos.

Na verdade, tudo o que temos a mostrar é que este elemento não depende das escolhas que nós fizemos. Então seja  $p' \in U$  outro ponto (não necessariamente distinto de  $p$ ), e suponha que existem polinômios  $f', g'$  tal que  $\frac{f}{g} = \frac{f'}{g'}$  para alguma vizinhança  $W'$  de  $p'$ . Então  $fg' = g'f'$  em  $W \cap W'$  é denso em  $V$  (ver [10, Observação 1.3.17]), ou seja,  $fg' - g'f' \in I(V)$ . Portanto  $\frac{f}{g} = \frac{f'}{g'} \in K(V)$ .  $\square$

**Definição 1.2.28.** Sejam  $V_1$  e  $V_2$  variedades algébricas afins. Uma aplicação contínua  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  é dita um **morfismo** se para todo aberto  $U \subset V_2$  e toda função regular  $f \in \mathcal{O}_{V_2}(U)$ , a composta  $\varphi^*(f) := f \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(U)}$  é regular, ou seja,  $\varphi^*(f) \in \mathcal{O}_{V_1}(\varphi^{-1}(U))$ .

**Exemplo 1.2.29.** A aplicação identidade é um morfismo de variedades algébricas afins, pois dada  $id : V \rightarrow V$ ,  $V$  variedade algébrica afim, temos  $id^*(f) = f \circ id|_V = f \circ id = f$ . Se  $f$  é regular, então  $id^*(f)$  é regular.

## 1.3 Categorias

O intuito desta seção é apresentar brevemente o conceito de teoria de categorias com o objetivo de introduzir a linguagem que aparecerá em alguns momentos durante o decorrer do texto.

**Definição 1.3.1.** Uma categoria  $C$  consiste dos seguintes itens:

1. Uma classe de **objetos**, denotada por  $ob(C)$ ;
2. Para cada dois objetos  $X, Y \in ob(C)$  existe um conjunto  $Morf_C(X, Y)$  cujos elementos são chamados de **morfismos** ou  **$C$ -morfismos** de  $X$  em  $Y$ . Um elemento  $f \in Morf_C(X, Y)$  é denotado por  $f : X \rightarrow Y$ ;
3. Dados  $X, Y, Z$  quaisquer de  $ob(C)$  existe uma operação

$$\circ : Morf_C(X, Y) \times Morf_C(Y, Z) \rightarrow Morf_C(X, Z)$$

$$(f, g) \mapsto g \circ f$$

chamada **composição** e tal operação é associativa, e, existe o **morfismo identidade**  $id_X \in Morf_C(X, X)$  tal que, dado  $f \in Morf_C(X, Y)$  e  $g \in Morf_C(Y, X)$ , temos  $id_X \circ g = g$  e  $f \circ id_X = f$ .

**Exemplo 1.3.2.** •  $C$  composto por conjuntos e  $Morf_C(X, Y)$  o conjunto das funções de  $X$  em  $Y$  junto da composição usual de funções é conhecida como **categoria dos conjuntos**;

- Da mesma forma tomando  $\tau$  espaços topológicos e  $Morf_\tau(X, Y)$  funções contínuas;

- Anéis e morfismos de anéis também formam categorias.

**Definição 1.3.3.** *Sejam  $C$  e  $D$  categorias. Um **funtor covariante** (respectivamente **contravariante**)  $\mathcal{F} : C \rightarrow D$  é uma aplicação que:*

- Cada  $X \in \text{ob}(C)$  é associado a um único  $\mathcal{F}(X) \in \text{ob}(D)$ ;
- Cada morfismo  $f : X \rightarrow Y$ , com  $X, Y \in \text{ob}(C)$  é associado a um único morfismo  $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$  (respectivamente  $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(Y) \rightarrow \mathcal{F}(X)$ ).

Ainda, para cada funtor  $\mathcal{F}$  as condições

- $\mathcal{F}(id_X) = id_{\mathcal{F}(X)}$ , para todo objeto  $X$  da categoria  $C$ ;
- Para todo  $X, Y, Z \in \text{ob}(C)$ ,  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$  morfismos, temos  $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$  (respectivamente  $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$ ).

Perceba que nesse caso um funtor pode ser interpretado como uma "função" entre categorias, dessa forma, oferece uma forma de alternar entre as categorias que existem um funtor entre elas.

**Exemplo 1.3.4.**  $(\tau_X^*)$  **Categoria de um espaço topológico  $X$  associado a sua topologia  $\tau_X$ :**

Seja  $X$  um espaço topológico. Considere  $\tau_X$  a topologia em  $X$ . Seja  $\tau_X^*$  tal que os objetos de  $\tau_X^*$  são os elementos de  $\tau_X$  e para cada  $U, V \in \tau_X$ , temos que

$$\text{mor}_{\tau_X^*}(U, V) = \begin{cases} i_{U,V} : U \rightarrow V \text{ (inclusão)}, & \text{se } U \subseteq V \\ 0 & \text{(aplicação nula), se } U \not\subseteq V \end{cases}$$

com a composição usual de funções. Concluindo que  $\tau_X^*$  é uma categoria. Agora, tendo a noção da categoria que definimos acima, podemos definir pré-feixes.

# Capítulo 2

## Generalização do caso afim

Este capítulo visa inicialmente introduzir e desenvolver o conceito de esquemas, que ampliam a noção de variedade algébrica afim. Para isso, o conceito de feixes é fundamental.

Na sequência são apresentadas as variedades algébricas, ou simplesmente variedades, um tipo específico de esquema que permite ambientes com propriedades importantes para o que é desenvolvido no trabalho. Dentre as ferramentas neste contexto estão os fibrados vetoriais, que são variedades munidas de um morfismo especial.

Com todas essas ferramentas podemos então definir divisores de Cartier, objetos definidos por meio de feixes de esquemas e que serão objetos fundamentais na continuidade do trabalho.

Por fim, a última seção se dedica a construir esquemas não somente a partir de anéis, mas também a partir de um feixe qualquer, e, a partir deles, construir o blow-up de um esquema ao longo de um subesquema fechado que garante um ambiente mais adequado de se trabalhar em algumas situações.

Assim como no capítulo anterior, descrevemos somente o necessário para o entendimento do trabalho, fixando notações e algumas demonstrações são omitidas.

Nesse capítulo  $A$  continua sendo um anel comutativo com unidade e  $X$  é um espaço topológico.

As referências para este capítulo são [11], [15] e [32].

### 2.1 Feixes

O objetivo desta seção é definir estruturas que nos permitem, a partir de informações locais de um espaço topológico, obter suas informações globais.

**Definição 2.1.1.** *Seja  $\mathcal{U}$  uma coleção de abertos de  $X$ . Um **pré-feixe**  $\mathcal{F}$  de anéis (respectivamente grupos, módulos,  $A$ -álgebras, ...) em  $X$ , é uma família  $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}(U)\}_{U \in \mathcal{U}}$ , indexados pelos abertos de  $X$ , tal que, para cada par de abertos  $U' \subseteq U$  é dado um homomorfismo de anéis (respectivamente grupos, módulos,  $A$ -álgebras, ...)  $\rho_{U,U'} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U')$  que satisfaz:*

*i)  $\rho_{U,U}$  é a aplicação identidade para todo  $U$ ;*

*ii) Para toda inclusão  $U \subset V \subset W$  de conjuntos abertos, temos que*

$$\rho_{V,U} \circ \rho_{W,V} = \rho_{W,U}.$$

Cada aplicação  $\rho_{V,U} : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$  é chamada **aplicação de restrição** e os elementos de  $\mathcal{F}(U)$  são chamados de **seções** de  $\mathcal{F}$  sobre  $U$ .

**Notação:** Para  $s \in \mathcal{F}(V)$ , usamos  $s_U$  ou  $s|_U$  para denotar  $\rho_{V,U}(s)$ . Chamamos  $\{s_U\}_U$  de **seção** de  $\mathcal{F}$  se  $s_U \in \mathcal{F}(U)$ , para todo  $U$ .

Em alguns momentos podemos denotar  $\mathcal{F}(U)$  por  $\Gamma(U, \mathcal{F})$ .

**Exemplo 2.1.2.** Seja  $X = \mathbb{R}$ . Defina  $\mathcal{F}(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ é limitada}\}$ , com  $U$  aberto de  $\mathbb{R}$ . Com as operações usuais de soma e multiplicação de funções reais, temos que  $\mathcal{F}(U)$  é um anel para todo aberto  $U \subseteq \mathbb{R}$ .

Agora, dado  $V \subseteq U$ , tome  $\rho_{U,V}(f) = f|_V$  a restrição usual de funções, que satisfaz as condições i) e ii) da definição de pré-feixes. Portanto,  $\{\mathcal{F}(U)\}_{U \subseteq \mathbb{R}}$  definem um pré-feixe de anéis em  $\mathbb{R}$ .

**Definição 2.1.3.** Um **feixe**  $\mathcal{F}$  de anéis (respectivamente grupos, módulos,  $A$ -álgebras, ...) em  $X$  é um pré-feixe de anéis (respectivamente grupos, módulos,  $A$ -álgebras, ...) em  $X$  que satisfaz:

- iii) Para todo aberto  $U$  e para toda cobertura aberta  $\{V_i\}$  de  $U$ , com  $V_i \subset U$ , se  $s \in \mathcal{F}(U)$  é tal que  $s_{V_i} = 0$  para todo  $i$ , então  $s = 0$ ;
- iv) Para quaisquer abertos  $U, V$  e seções  $r \in \mathcal{F}(U)$  e  $s \in \mathcal{F}(V)$ , se  $r_{U \cap V} = s_{U \cap V}$ , então existe  $t \in \mathcal{F}(U \cup V)$  tal que  $t_U = r$  e  $t_V = s$ .

A partir de um feixe de anéis podemos definir um feixe de módulos.

**Definição 2.1.4.** Seja  $\mathcal{F}$  um feixe de anéis em  $X$ . Um **feixe de  $\mathcal{F}$ -módulos** é um feixe de módulos  $\mathcal{G}$  em  $X$ , tal que

- i) para cada aberto  $U \subseteq X$ ,  $\mathcal{G}(U)$  é um  $\mathcal{F}(U)$ -módulo;
- ii) para todos  $U' \subseteq U$  abertos de  $X$ ,  $s_1, s_2 \in \mathcal{G}(U)$  e  $\lambda \in \mathcal{F}(U)$  temos

$$\rho_{U,U'}(s_1 + s_2) = \rho_{U,U'}(s_1) + \rho_{U,U'}(s_2) \quad \text{e} \quad \rho_{U,U'}(\lambda s_1) = \rho'_{U,U'}(\lambda) \rho_{U,U'}(s_1),$$

onde  $\rho_{U,U'}$  e  $\rho'_{U,U'}$  são as aplicações de restrição de  $\mathcal{G}$  e  $\mathcal{F}$ , respectivamente.

**Exemplo 2.1.5.** Dado  $\mathcal{F}$  um feixe de anéis (respectivamente grupos, módulos,  $A$ -álgebras, ...) em  $X$ , com aplicações de restrição  $\rho_{U,U'}$  ( $U' \subseteq U$  abertos de  $X$ ), podemos considerar um feixe  $\mathcal{F}^n$  de anéis (respectivamente grupos, módulos,  $A$ -álgebras, ...) em  $X$  dado por

$$\mathcal{F}^n(U) = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{F}_i(U), \quad U \text{ é aberto de } X, \quad \mathcal{F}_i(U) = \mathcal{F}(U), \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

e aplicações de restrição  $\rho'_{U,U'} : \mathcal{F}(U) \oplus \dots \oplus \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U') \oplus \dots \oplus \mathcal{F}(U')$  tal que  $\rho'_{U,U'}(s_1, \dots, s_n) = (\rho_{U,U'}(s_1), \dots, \rho_{U,U'}(s_n))$ .

Podemos também definir feixes por meio de categorias, como veremos na observação a seguir.

**Observação 2.1.6.** De maneira geral, é possível definir feixes e pré-feixes utilizando categorias e funtores. Considere a categoria  $\tau_X^*$  do Exemplo 1.3.4 e seja  $\mathcal{C}$  uma categoria qualquer. Um **pré-feixe** de elementos em  $\mathcal{C}$  sobre  $X$  é um funtor contravariante  $\mathcal{F} : \tau_X^* \rightarrow \mathcal{C}$  tal que para cada par de abertos  $V, U$  em  $X$ , com  $V \subseteq U$ , a imagem do morfismo  $i_{V,U} : V \rightarrow U$  pelo funtor  $\mathcal{F}$  denotada por

$$\rho_{U,V} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$$

cumpra as condições:

- i) Se  $U$  é um aberto de  $X$ , então  $\rho_{U,U} = \text{id}_{\mathcal{F}(U)}$ ;
- ii) Se  $W, V, U$  são abertos de  $X$ , com  $W \subseteq V \subseteq U$ , então  $\rho_{U,W} = \rho_{V,W} \circ \rho_{U,V}$ .

Agora, um **feixe** de elementos em  $\mathcal{C}$  sobre  $X$  é um pré-feixe  $\mathcal{F} : \tau_X^* \rightarrow \mathcal{C}$  tal que, para toda coleção  $\{U_i\}_{i \in I}$  de abertos em  $X$  e  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$  temos que

- 1) (**Injetividade**) Para todos  $f, g \in \mathcal{F}(U)$  tais que  $\rho_{U,U_i}(f) = \rho_{U,U_i}(g)$  para todo  $i \in I$ , tem-se  $f = g$ ;
- 2) (**Colagem**) Para cada elemento  $(f_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i)$  tal que

$$\rho_{U_i, U_i \cap U_j}(f_i) = \rho_{U_j, U_i \cap U_j}(f_j), \forall i, j \in I$$

existe  $f \in \mathcal{F}(U)$  tal que  $\rho_{U,U_i} = f_i$ , para todo  $i \in I$ .

A partir deste momento vamos considerar pré-feixes e feixes de anéis, a não ser que especificado.

Note que, todo feixe é um pré-feixe, porém espera-se que nem todo pré-feixe seja feixe. O exemplo a seguir nos mostrará isto.

**Exemplo 2.1.7.** O pré-feixe do Exemplo 2.1.2 não é feixe. De fato, tome  $f(x) = x$  a função identidade e tome  $U_i = \{x \in \mathbb{R} ; |x| < i\} \subseteq \mathbb{R}$ , com  $i \in \mathbb{N}$ . A função  $f_i = f|_{U_i}$  é limitada em  $U_i$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ .

Se existisse  $s \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  tal que  $s_{U_i} = f_i$ , então  $s(x) = x = \text{Id}(x)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Porém  $f = \text{Id}$  não é limitada em  $\mathbb{R}$ , contrariando o item iv) da definição de feixes.

A seguir alguns exemplos de feixes.

**Exemplo 2.1.8.** Seja  $X = \mathbb{R}^n$ . Para cada aberto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ , tome

$$\mathcal{F}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R}^n ; f \text{ é contínua}\},$$

que com as operações usuais forma um anel. Além disso, se tomarmos  $\rho_{U,V}$  dada por  $\rho_{U,V}(f) = f|_V$  a restrição trivial, vemos claramente que  $\mathcal{F}$  é um pré-feixe em  $\mathbb{R}^n$ . O fato das funções em  $\mathcal{F}(U)$  serem contínuas, implicam na existência das funções que satisfazem as condições iii) e iv) da definição de feixe. Este feixe é chamado **feixe das funções contínuas** em  $X$ .

Da mesma forma, podemos definir o **feixe das funções holomorfas** em  $\mathbb{C}^n$ , que denotamos por  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$  ou  $\mathcal{O}_n$ , e das **funções meromorfas** em  $\mathbb{C}^n$ , que denotamos por  $\mathcal{M}_n$ .

As mesmas definições podem ser aplicadas se  $X$  é uma variedade algébrica afim real ou complexa em vez de apenas  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{C}^n$ .

**Exemplo 2.1.9.** Seja  $X \subset \mathbb{A}_K^n$  uma variedade algébrica afim. Para cada aberto  $U \subseteq X$  considere o anel  $\mathcal{O}_X(U)$  de funções regulares em  $U$  (Definições 1.2.25 ou 1.2.26).

Dados  $U, U'$  com  $U' \subseteq U$  e  $\varphi \in \mathcal{O}_X(U')$ , com  $\varphi : U \rightarrow K$ , podemos tomar  $\rho_{U,U'} : \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(U')$  dada por  $\rho(\varphi) = \varphi|_{U'} \in \mathcal{O}_X(U')$ . Chamamos esse feixe de **feixe das funções regulares** ou **feixe estrutural** de  $X$ .

Denotamos por  $\mathcal{O}_X^*$  tal que  $\mathcal{O}_X^*(U) = \mathcal{O}_X(U)$  - função nula, para todo aberto  $U \subseteq X$ .

**Definição 2.1.10.** Sejam  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$  feixes em  $X$ . Dizemos que  $\mathcal{G}$  é um **subfeixe** de  $\mathcal{F}$  se  $\mathcal{G}(U) \subseteq \mathcal{F}(U)$ , para todo aberto  $U$  de  $X$  e as aplicações de restrição de  $\mathcal{G}$  são restrições das aplicações de restrição de  $\mathcal{F}$ . Um subfeixe  $\mathcal{I}$  de um feixe  $\mathcal{F}$  é chamado **feixe de ideais** se  $\mathcal{I}(U)$  é um ideal de  $\mathcal{F}(U)$ , para todo aberto  $U$  de  $X$ .

A seguir vemos uma forma de relacionar feixes em um espaço topológico em comum.

**Definição 2.1.11.** Sejam  $\mathcal{G}$  e  $\mathcal{F}$  feixes em  $X$ . Um **morfismo de feixes**  $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  é uma coleção de homomorfismos

$$\{f_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U), U \text{ aberto de } X\}$$

tal que, para todo par de abertos  $U, U'$  de  $X$  com  $U' \subseteq U$ , os diagramas

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{f_U} & \mathcal{G}(U) \\ \rho_{U,U'} \downarrow & & \downarrow \gamma_{U,U'} \\ \mathcal{F}(U') & \xrightarrow{f_{U'}} & \mathcal{G}(U') \end{array}$$

comutam, onde  $\rho_{U,U'}$  e  $\gamma_{U,U'}$  são as aplicações de restrição  $\rho_{U,U'} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U')$  e  $\gamma_{U,U'} : \mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U')$ , respectivamente.

Ressaltamos que a definição anterior considera feixes em  $X$  na mesma categoria. Em particular, quando temos um feixe  $\mathcal{G}$  de  $\mathcal{F}$ -módulos em  $X$  e como todo feixe de anéis pode ser visto como um feixe de módulos, podemos considerar um morfismo entre  $\mathcal{G}$  e  $\mathcal{F}$  ou  $\mathcal{F}^n$ .

**Nomenclatura:**

- $f$  é **sobrejetivo** ou **epimorfismo** se  $f_U$  é sobrejetivo para todo  $U \subseteq X$  aberto;
- $f$  é **injetivo** ou **monomorfismo** se  $f_U$  é injetivo para todo  $U \subseteq X$  aberto;
- $f$  é **bijetivo** ou **isomorfismo** se  $f_U$  é bijetivo para todo  $U \subseteq X$  aberto.

**Exemplo 2.1.12.** Seja  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  um morfismo de feixes. Considere coleção

$$\ker(f) := \{\ker(f)(U), U \text{ aberto de } X\}, \text{ onde } \ker(f)(U) = \ker f_U \in \mathcal{E}(U).$$

Para abertos  $U' \subseteq U$ , a aplicação de restrição  $\rho_{U,U'}$  associada a esta coleção é a restrição da aplicação de restrição  $\tilde{\rho}_{U,U'}$  do feixe  $\mathcal{E}$ , ou seja, para  $s \in \ker(f)(U)$ ,  $\rho_{U,U'}(s) := \tilde{\rho}_{U,U'}(s) \in \ker(f)(U')$ , formando um subfeixe de  $\mathcal{E}$ .

Através de aplicações contínuas, podemos obter um feixe a partir de outro.

Nas próximas definições  $\mathcal{F}$  é um feixe em  $X$ .

**Definição 2.1.13.** *Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação contínua de espaços topológicos. Defina o feixe chamado **imagem direta** de  $\mathcal{F}$  por  $f$ , denotado por  $f_*\mathcal{F}$ , o feixe em  $Y$  onde  $f_*\mathcal{F}(U) := \mathcal{F}(f^{-1}(U))$ , em que  $U \subseteq Y$  é um aberto qualquer e as aplicações de restrição  $\rho_{U,U'}$  são as aplicações de restrição  $\tilde{\rho}_{V,V'}$  do feixe  $\mathcal{F}$ , onde  $V = f^{-1}(U)$  e  $V' = f^{-1}(U')$ , que são abertos de  $X$  pois  $f$  é contínua.*

**Definição 2.1.14.** *Seja  $U$  um aberto de  $X$  com a topologia induzida de  $X$ . Considere a aplicação de inclusão  $i : U \rightarrow X$ , denotamos por  $\mathcal{F}|_U$  a imagem direta de  $\mathcal{F}$  por  $i$ , ou seja,  $\mathcal{F}|_U := i_*\mathcal{F}$ . Chamamos  $\mathcal{F}|_U$  de **feixe restrição** de  $\mathcal{F}$  em  $U$ .*

Com o intuito de entender o comportamento de um feixe em torno de um determinado ponto, vamos considerar a seguinte relação, que é uma relação de equivalência.

Seja  $\mathcal{F}$  um feixe em  $X$  e  $p \in X$ . Para  $(U, s)$  e  $(V, t)$  com  $U$  e  $V$  abertos de  $X$  contendo  $p$ ,  $s \in \mathcal{F}(U)$  e  $t \in \mathcal{F}(V)$ ,

$$(U, s) \sim (V, t) \Leftrightarrow \exists \text{ um aberto } W \subseteq U \cap V \text{ com } p \in W, \text{ tal que } s_W = t_W.$$

**Definição 2.1.15.** *O conjunto de todas as classes da relação anterior é chamado **stalk** de  $\mathcal{F}$  em  $p$  e o denotamos por  $\mathcal{F}_p$ . Um elemento  $[U, s]_p$  de  $\mathcal{F}_p$  é chamado **germe** em  $p$ .*

**Definição 2.1.16.** *Chamamos de **suporte** de  $\mathcal{F}$  o conjunto*

$$\text{supp}(\mathcal{F}) := \{x \in X ; \mathcal{F}_x \neq 0\}.$$

**Observação 2.1.17.** *Se  $\mathcal{F}$  é um feixe de grupos abelianos em  $X$  e  $p \in X$ , então podemos munir o stalk  $\mathcal{F}_p$  com uma estrutura de grupos abelianos da seguinte forma:*

*Dados  $[U, s]_p$  e  $[V, t]_p$  dois elementos em  $\mathcal{F}_p$ , definimos a operação*

$$[U, s]_p + [V, t]_p := [U \cap V, \rho_{U, U \cap V}(s) + \rho_{V, U \cap V}(t)]_p.$$

*O elemento neutro é  $[X, 0]_p$ , e o elemento oposto de  $[U, s]_p$  é  $[U, -s]_p$ . Além disso, se  $\mathcal{F}$  for um feixe de anéis, podemos definir a multiplicação de forma análoga*

$$[U, s]_p \cdot [V, t]_p := [U \cap V, \rho_{U, U \cap V}(s) \cdot \rho_{V, U \cap V}(t)]_p,$$

*onde o elemento neutro é  $[X, 1]_p$ , tornando  $\mathcal{F}_p$  um anel.*

Para cada  $x \in X$  e  $U$  aberto contendo  $x$ , temos o seguinte homomorfismo  $\rho_x^U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_x$ , com  $\rho_x^U(s) = [U, s]_x$ .

**Proposição 2.1.18.** *Se  $\mathcal{F}$  é um feixe em  $X$  e  $\rho_x^U(s) = \rho_x^U(t)$  para todo  $x \in U$ , com  $s, t \in \mathcal{F}(U)$ , então  $s = t$ .*

*Demonstração.* Sendo  $\rho_x^U(s) = \rho_x^U(t)$ , então

$$[U, s]_x = [U, t]_x \Rightarrow (U, s) \sim (U, t) \Rightarrow \exists W \subseteq U \text{ aberto, } x \in W \mid s_W = t_W \Rightarrow s_W - t_W = 0.$$

Agora, como  $\mathcal{F}$  é um feixe, segue que  $s - t = 0$ , ou seja,  $s = t$ .  $\square$

A proposição acima nos mostra que os elementos de  $\mathcal{F}(U)$  de um feixe  $\mathcal{F}$  podem ser especificados como uma família de germes  $\{s_x \in \mathcal{F}_x\}_{x \in U}$ .

**Proposição 2.1.19.** *Seja  $\mathcal{F}$  um feixe em  $X$ . Para todo  $U \subseteq X$  aberto, a aplicação*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(U) &\rightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \\ s &\mapsto ([U, s]_x)_{x \in U} \end{aligned}$$

é injetiva.

*Demonstração.* Suponha por absurdo que existam  $s, s' \in \mathcal{F}(U)$  que são levados ao mesmo elemento em cada stalk  $\mathcal{F}_x$ , para todo  $x$ . Portanto, para todo  $x \in U$  existe uma vizinhança  $V_x \subseteq U$  de  $x$  tal que  $s|_{V_x} = s'|_{V_x}$ . Com isso, como isso ocorre para todo  $x \in U$ , existe uma cobertura aberta  $\{V_x\}_{x \in U}$  de  $U$ . Logo, pela condição (iv) da definição de feixes, segue que  $s = s'$ .  $\square$

**Observação 2.1.20.** *Sejam  $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  um morfismo de feixes em  $X$  e  $p \in X$  um ponto. Podemos induzir uma aplicação  $f_p$  entre os stalks, chamada **morfismo nos stalks**, dada por*

$$\begin{aligned} f_p : \mathcal{F}_p &\rightarrow \mathcal{G}_p \\ f_p([U, s]_p) &:= [U, f_U(s)]_p, \end{aligned}$$

com  $s \in \mathcal{F}(U)$  e  $[U, s]_p \in \mathcal{F}_p$  uma classe. É fácil ver que  $f_p$  está bem definida e que é um homomorfismo de anéis.

**Notação:** Sabendo que  $s \in \mathcal{F}(U)$ , podemos simplesmente denotar a classe  $[U, s]_p$  por  $[s]$ .

**Proposição 2.1.21.** *Seja  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  um morfismo de feixes em  $X$ . Então*

1.  *$f$  é injetivo se, e somente se, a aplicação induzida  $f_p : \mathcal{E}_p \rightarrow \mathcal{F}_p$  é injetiva para os stalks em todos os pontos  $p$ .*
2.  *$f$  é sobrejetivo se, e somente se, a aplicação induzida  $f_p : \mathcal{E}_p \rightarrow \mathcal{F}_p$  é sobrejetiva para os stalks em todos os pontos  $p$ .*
3.  *$f$  é um isomorfismo se, e somente se, a aplicação induzida  $f_p : \mathcal{E}_p \rightarrow \mathcal{F}_p$  é um isomorfismo para os stalks em todos os pontos  $p$ .*

*Demonstração.* 1. Suponhamos que  $f$  é injetora.

Seja  $s \in \mathcal{E}(U)$ . Se  $[s] \in \ker(f_p)$ , então  $f_p([s]) = [0] \in \mathcal{F}_p$ . Como  $f_p([s]) = [f_p(s)]$ , temos  $[f_p(s)] = [0]$  e, com isso, existe  $V \subset U$ ,  $f_p(s)|_V = 0$ . Portanto,  $f_V(s) = 0$  e  $f_V$  é injetora, pois  $f$  é injetora. Disso segue que  $s_V = 0$ , implicando que  $[s] = [0]$ . Portanto  $f_p$  é injetora.

Reciprocamente, suponhamos que  $f_p$  é injetiva para todo ponto  $p$ . Tomemos uma seção  $s \in \mathcal{E}(U)$ . Se  $s \in \ker(f)$ , então  $f(s) = 0 \in \mathcal{F}(U)$  e, para cada ponto  $p \in U$ ,  $[f(s)] = [0] \in \mathcal{F}_p$ .

Uma vez que  $f_p$  é injetiva, isso implica que  $[s] = [0] \in \mathcal{E}_p$ , ou seja, existe um subconjunto aberto  $U_p$  com  $p \in U_p$ , tal que  $s|_{U_p} = 0 \in \mathcal{E}(U_p)$ . Aplicando a propriedade de colagem à cobertura aberta  $\{U_p\}$  de  $U$ , concluímos que  $s = 0 \in \mathcal{E}(U)$ .

2. Suponhamos que  $f$  é sobrejetora, mostremos que  $f_p$  também é sobrejetora.

Seja  $[s] \in \mathcal{F}_p$ . Então significa que  $s \in \mathcal{F}(U)$  onde  $U$  é um aberto de  $X$  contendo  $p$ . Sendo  $f$  é sobrejetora, então  $f_U : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$  é sobrejetora. Portanto como  $s \in \mathcal{F}(U)$  então existe  $r \in \mathcal{E}(U)$  tal que  $f_U(r) = s$ .

Deste modo,  $f_p([r]) = [f_U(r)] = [s]$ , como queríamos.

Agora seja  $U$  um aberto de  $X$ . Mostremos que  $f_U : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$  é sobrejetora. Tome  $s \in \mathcal{F}(U)$ , então  $[s] \in \mathcal{F}_p$  para algum  $p$ . Como  $f_p$  é sobrejetora, existe  $[r] \in \mathcal{E}_p$  tal que  $f_p([r]) = [s]$ , ou seja,  $[f_U(r)] = [s]$ . Logo, existe uma vizinhança  $U_p$  de  $p$ , com  $U_p \subset U$  tal que  $f_U(r)U_p = s_{U_p}$ . Aplicando a propriedade de colagem à cobertura aberta  $\{U_p\}$  de  $U$ , concluímos que  $f_U(r) = s$ .

3. É combinação dos itens 1 e 2.  $\square$

Agora vamos relacionar o stalk do feixe das funções regulares  $\mathcal{O}_X$  em um ponto  $p$ ,  $(\mathcal{O}_X)_p$ , com o anel local  $\mathcal{O}_{X,p}$  (Definição 1.2.24).

**Proposição 2.1.22.**  $(\mathcal{O}_X)_p$  e  $\mathcal{O}_{X,p}$  são isomorfos.

*Demonstração.* Lembre que, por definição,  $\mathcal{O}_X(U) \subset \mathcal{O}_{X,p} \subset K(X)$  para todo  $p \in U$  ( $U \subseteq X$  é um aberto).

Mostremos que a aplicação

$$\mu : \begin{array}{ccc} (\mathcal{O}_X)_p & \rightarrow & \mathcal{O}_{X,p} \\ [s] & \mapsto & s \end{array}$$

está bem definida, e é bijetora, pois da maneira que tomamos, é fácil ver que é homomorfismo. Dado um par  $(U, s)$ , com  $p \in U$  e  $s \in \mathcal{O}_X(U)$ , vemos que  $s \in \mathcal{O}_{X,p}$  determina um elemento do anel local. Se tivermos outro par  $(U', s')$  equivalente, então  $s$  e  $s'$  coincidem em algum  $V$  com  $p \in V \subset U \cap U'$  por definição, então elas determinam o mesmo elemento em  $\mathcal{O}_X(V)$  e, portanto, em  $\mathcal{O}_{X,p}$ . Com isso, mostramos que está bem definida e é injetora.

Por outro lado, se  $s \in \mathcal{O}_{X,p}$  é um elemento do anel local, nós podemos escrevê-la como  $s = \frac{f}{g}$ , onde  $f, g$  são polinômios tais que  $g(p) \neq 0$ . Então deve existir uma vizinhança  $U$  de  $p$  onde  $g$  é diferente de 0, e, portanto,  $(U, s)$  definem um elemento no stalk de  $\mathcal{O}_X$  em  $p$ . E assim, é sobrejetora, portanto, um isomorfismo.  $\square$

A partir de agora vamos denotar por  $\mathcal{O}_{X,p}$  o stalk de  $\mathcal{O}_X$  em  $p$ . Em geral, dado um feixe  $\mathcal{F}_X$  em  $X$  denotamos seu stalk em  $p$  por  $\mathcal{F}_{X,p}$ .

**Definição 2.1.23.** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $Y \subseteq X$  subespaço de  $X$  e  $\mathcal{F}_X$  um feixe de anéis em  $X$ . Defina

$$\mathcal{F}_{X,Y} := \bigcap_{p \in Y} \mathcal{F}_{X,p},$$

que é um anel.

Lembremos pelo Exemplo 2.1.2 que nem todo pré-feixe é um feixe. Porém, dado um pré-feixe qualquer, segue uma forma de construir um feixe a partir dele.

Seja  $\mathcal{F}$  um pré-feixe em  $X$ . Para cada aberto  $U \subseteq X$ , considere

$$\tilde{\mathcal{F}}(U) := \{(s_x) \in \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x, ; \exists W \subseteq U, x \in W, t \in \mathcal{F}(W) \mid \forall w \in W, s_w = t_w\}.$$

Seja  $\pi : \tilde{\mathcal{F}}(U) \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}(V)$ ,  $V \subseteq U$ , dado pela projeção trivial de  $\prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \rightarrow \prod_{x \in V} \mathcal{F}_x$ . Pela estrutura de pré-feixe de  $\mathcal{F}$  e tomando  $\pi$  como aplicação de restrição pode-se verificar que  $\tilde{\mathcal{F}}$  é um feixe.

**Definição 2.1.24.** O feixe  $\tilde{\mathcal{F}}$  construído é chamado **feixe associado** ao pré-feixe  $\mathcal{F}$ .

Com isso, podemos definir o feixe a seguir.

**Definição 2.1.25.** Seja  $\mathcal{F}$  um subfeixe de um feixe  $\mathcal{F}$  em  $X$ . O **feixe quociente**  $\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}}$  é o feixe associado ao pré-feixe dado pela coleção  $\left\{ \frac{\mathcal{F}(U)}{\mathcal{F}(U)}, U \subseteq X \text{ aberto} \right\}$  e com aplicações de restrição induzidas ao quociente,  $\rho'_{U,U'}$ , que fazem o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\pi_U} & \frac{\mathcal{F}(U)}{\mathcal{F}(U)} \\ \rho_{U,U'} \downarrow & & \downarrow \rho'_{U,U'} \\ \mathcal{F}(U') & \xrightarrow{\pi_{U'}} & \frac{\mathcal{F}(U')}{\mathcal{F}(U')} \end{array}$$

comutar, onde  $\rho_{U,U'}$  são as aplicações de restrição de  $\mathcal{F}$  e  $\pi_U, \pi_{U'}$  as projeções quociente de  $\mathcal{F}(U)$  e  $\mathcal{F}(U')$  nos quocientes  $\frac{\mathcal{F}(U)}{\mathcal{F}(U)}$  e  $\frac{\mathcal{F}(U')}{\mathcal{F}(U')}$ , respectivamente.

Seja  $\mathcal{G}$  um feixe de  $\mathcal{F}$ -módulos em  $X$ . Como para todo aberto  $U$ ,  $\mathcal{G}(U)$  é um  $\mathcal{F}(U)$ -módulo, então podemos considerar  $\text{Sym}_{\mathcal{F}(U)}(\mathcal{G}(U))$  (Definição 1.1.22). Denote por  $\text{Sym}_{\mathcal{F}}\mathcal{G}(U) := \text{Sym}_{\mathcal{F}(U)}\mathcal{G}(U)$ , que definem um pré-feixe  $\text{Sym}_{\mathcal{F}}\mathcal{G}$  em  $X$ .

**Definição 2.1.26.** Chamamos de **feixe das álgebras simétricas** de  $X$  com relação a  $\mathcal{G}$  o feixe associado ao pré-feixe  $\text{Sym}_{\mathcal{F}}\mathcal{G}$ .

**Definição 2.1.27.** Sejam  $\mathcal{F}$  um feixe de anéis em  $X$  e  $\mathcal{G}$  um feixe de  $\mathcal{F}$ -módulos em  $X$ .

- a)  $\mathcal{G}$  é dito **livre** de posto  $r$  se  $\mathcal{G}$  é isomorfo  $\mathcal{F}^r$ .
- b)  $\mathcal{G}$  é dito **localmente livre** de posto  $r$  se  $X$  pode ser coberto por abertos  $U$  tal que  $\mathcal{G}|_U$  é um feixe livre de posto  $r$ .
- c)  $\mathcal{G}$  é **coerente** com  $X$  e  $\mathcal{F}$  se
  - (i) todo  $p \in X$  possui uma vizinhança aberta  $U \subseteq X$  tal que existe um morfismo sobrejetivo  $\mathcal{F}^n|_U \rightarrow \mathcal{G}|_U$  para algum natural  $n$ . Quando isso acontece dizemos que  $\mathcal{G}$  é **do tipo finito** sobre  $\mathcal{F}$ ;
  - (ii) para todo aberto  $U \subseteq X$ , qualquer natural  $n$  e qualquer morfismo  $\varphi : \mathcal{F}^n|_U \rightarrow \mathcal{G}|_U$  de  $\mathcal{F}$ -módulos, o  $\ker \varphi$  é do tipo finito.

**Proposição 2.1.28.** Se  $\mathcal{G}$  é coerente com  $X$  e  $\mathcal{F}$  então  $\text{Supp}(\mathcal{G})$  é um subconjunto fechado de  $X$ .

*Demonstração.* Pode ser vista em [12, A.7 Fato 1] □

## 2.2 Esquemas

Esta seção aborda a noção de esquema, onde entendemos como esquemas estendem os conceitos desenvolvidos anteriormente no caso de conjuntos algébricos afins.

**Definição 2.2.1.** Chamamos de **espectro** de  $A$  e denotamos por  $\text{Spec } A$  o conjunto de todos os ideais primos de  $A$ , ou seja,

$$\text{Spec } A := \{ \mathfrak{p} \subset A ; \mathfrak{p} \text{ ideal primo} \}.$$

Os ideais primos de  $A$  são chamados **pontos** do  $\text{Spec } A$ .

**Observação 2.2.2.** Dado  $f : A \rightarrow B$  um homomorfismo de anéis qualquer é possível induzir um morfismo entre  $f' : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ . De fato, basta tomar  $f'(\mathfrak{p}) = f^{-1}(\mathfrak{p})$ , com  $\mathfrak{p} \subseteq B$  ideal primo. Nesse caso dizemos que  $f'$  é induzido por  $f$ .

A seguir definimos estruturas análogas ao caso afim.

**Definição 2.2.3.** *Seja  $S \subseteq A$  um subconjunto qualquer. Definimos*

$$V(S) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A ; S \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

**Observação 2.2.4.** *Analogamente ao feito no caso de conjuntos algébricos afins, temos que  $V(S) = V(\langle S \rangle)$ .*

Desse modo podemos sempre considerar  $S$  como sendo um ideal de  $A$ .

**Definição 2.2.5.** *Seja  $X \subseteq \text{Spec}(A)$ , definimos*

$$I(X) := \bigcap_{\mathfrak{p} \in X} \mathfrak{p}.$$

Vamos enunciar a seguir algumas propriedades envolvendo esses conceitos omitindo a demonstração, que segue de maneira análoga ao caso afim.

**Proposição 2.2.6.** *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (1) *Se  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$  são ideais, então  $V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$ . Em particular, dados  $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$  ideais de  $A$ , então  $V(\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_1 \dots \mathfrak{a}_n) = V(\mathfrak{a}_0) \cup V(\mathfrak{a}_1) \cup \dots \cup V(\mathfrak{a}_n)$ ;*
- (2) *Se  $\{\mathfrak{a}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  é uma família de ideais de  $A$ , então  $V(\sum_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{a}_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} V(\mathfrak{a}_\lambda)$ ;*
- (3) *Se  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$  são ideais e  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ , então  $V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a})$ ;*
- (4) *Se  $X, Y \subseteq \text{Spec}(A)$  e  $X \subset Y$ , então  $I(Y) \subseteq I(X)$ ;*
- (5) *Se  $X, Y \subseteq \text{Spec}(A)$ , então  $I(X \cup Y) = I(X) \cap I(Y)$ ;*
- (6) *(Teorema dos Zeros de Hilbert) Para todo ideal  $\mathfrak{a}$  de  $A$ , vale  $I(V(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$ ;*
- (7)  *$V(A) = \emptyset$  e  $V(\langle 0 \rangle) = \text{Spec } A$ .*

**Corolário 2.2.7.**  $V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}})$ ,  $\forall \mathfrak{a}$  ideal de  $A$ .

*Demonstração.* De fato, como  $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$ , pelo item (3) da Proposição 2.2.6 temos  $V(\sqrt{\mathfrak{a}}) \subseteq V(\mathfrak{a})$ . Para mostrar que  $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\sqrt{\mathfrak{a}})$  utilizamos duas propriedades de radical de um ideal, que somente indicaremos a referência.

Tome  $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$ . Logo,  $\mathfrak{p}$  é um ideal primo que contém  $\mathfrak{a}$ . Por propriedade (ver [5, Proposição 1.14])  $\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{q}} \mathfrak{q}$ , com  $\mathfrak{q}$  ideal primo. Deste modo,

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{q}} \mathfrak{q} \subseteq \bigcap_{\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}} \mathfrak{q} = \sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p},$$

onde a última igualdade segue de propriedade de radical de um ideal primo (ver [5, Proposição 1.13]). Assim,  $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq V(\sqrt{\mathfrak{a}})$ , o que prova o resultado.  $\square$

**Observação 2.2.8.** *Com os itens (1), (2) e (7) anteriores vemos que os conjuntos do tipo  $V(S)$ , com  $S \subseteq A$  ideal, satisfazem os axiomas de conjunto fechado de um espaço topológico. Portanto, podemos munir  $\text{Spec } A$  de uma topologia, declarando que um conjunto  $U \subseteq \text{Spec } A$  é aberto se  $\text{Spec } A - U = V(S)$  para algum  $S \subseteq A$  ideal. Note que essa topologia é parecida com o caso de conjuntos algébricos afins (Proposição 1.2.16) e também a chamaremos de **topologia de Zariski**.*

Com uma topologia definida em  $\text{Spec } A$ , podemos considerar feixes em  $\text{Spec } A$ . Como a topologia de  $\text{Spec } A$  é semelhante à topologia de um espaço algébrico afim, vamos construir um feixe em  $\text{Spec } A$  semelhante ao feixe do Exemplo 2.1.9.

Para  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ , seja  $A_{\mathfrak{p}}$  a localização de  $A$  por  $S = A - \mathfrak{p}$  (Definição 1.1.11) e para cada aberto  $U \subseteq \text{Spec } A$  seja

$$\mathcal{O}_{\text{Spec } A}(U) := \{ \varphi = (\varphi_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in U}, \varphi_{\mathfrak{p}} \in A_{\mathfrak{p}} \mid \text{para cada } \mathfrak{p} \in U, \exists V \subseteq U \text{ vizinhança de } \mathfrak{p} \\ \text{e } f, g \in A, \text{ com } g \notin \mathfrak{q} \text{ e } \varphi_{\mathfrak{q}} = f/g \in A_{\mathfrak{q}}, \forall \mathfrak{q} \in V \},$$

que é um anel. Para abertos  $U, U'$  de  $\text{Spec } A$  com  $U' \subseteq U$ , seja  $\rho_{U, U'}((\varphi_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in U}) := (\varphi_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in U'}$ , que satisfazem as condições de feixe, tornando  $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}$  um feixe.

**Definição 2.2.9.** O feixe  $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}$  é chamado de **feixe estrutural** ou **feixe estrutura** de  $\text{Spec } A$ .

A partir de agora todos os espectros de anéis estarão munidos de seu feixe estrutural.

As observações a seguir mostram uma forma de interpretar um elemento de  $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}(U)$  e a caracterização de sua localização.

**Observação 2.2.10.** Note que podemos considerar um elemento  $(\varphi_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in U} \in \mathcal{O}_{\text{Spec } A}$  como uma função. De fato, basta notar que o conjunto  $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}(U)$  pode ser visto como o conjunto de todas as funções  $\varphi : U \rightarrow \bigcup_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}}$  tal que  $\varphi(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$  para todo  $\mathfrak{p}$ , e, além disso, para todo  $\mathfrak{p}$  existe uma vizinhança  $V$  de  $\mathfrak{p}$ , com  $V \subseteq U$ , e elementos  $f, g \in A$  tais que, para todo  $\mathfrak{q} \in V$  temos  $f \notin \mathfrak{q}$  e  $\varphi(\mathfrak{q}) = f/g$  em  $A_{\mathfrak{p}}$ .

**Observação 2.2.11.** Além disso, dado  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$  um ponto qualquer, temos que o stalk  $\mathcal{O}_{\text{Spec } A, \mathfrak{p}} \cong A_{\mathfrak{p}}$ . A demonstração dessa afirmação pode ser vista em [15, Proposição 2.2 (a)].

Antes de propriamente definirmos os esquemas, vejamos a definição.

**Definição 2.2.12.** Um **espaço anelado** é um par  $(X, \mathcal{F})$  consistindo de espaço topológico  $X$  e um feixe  $\mathcal{F}$  em  $X$ . Além disso, dizemos que o espaço anelado  $(X, \mathcal{F})$  é um espaço **localmente anelado** se, para cada  $p \in X$ , o stalk  $\mathcal{F}_p$  é um anel local.

**Exemplo 2.2.13.**  $(\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A})$  é um espaço anelado.

**Definição 2.2.14.** Sejam  $(X, \mathcal{F})$  e  $(Y, \mathcal{G})$  dois espaços anelados. Um **morfismo de espaços anelados** de  $(X, \mathcal{F})$  em  $(Y, \mathcal{G})$  é um par  $(f, f^{\#})$  no qual  $f : X \rightarrow Y$  é uma função contínua entre espaços topológicos e  $f^{\#} : \mathcal{G} \rightarrow f_*\mathcal{F}$  é um morfismo de feixes. Um **isomorfismo de espaços anelados** é um morfismo de espaços anelados que possui inversa que também é morfismo de espaços anelados.

Podemos definir um morfismo especial para o caso do espectro de um anel, como segue.

**Definição 2.2.15.** Sejam  $A$  e  $B$  anéis e  $(f, f^{\#}) : (\text{Spec } B, \mathcal{O}_{\text{Spec } B}) \rightarrow (\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A})$  um morfismo de espaços anelados. Chamamos  $(f, f^{\#})$  de **morfismo local** se para quaisquer  $U \subseteq \text{Spec } A$  e  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } B$ , com  $f(\mathfrak{p}) \in U$ , e qualquer  $\varphi \in \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(U)$  temos

$$\varphi(f(\mathfrak{p})) = 0 \Rightarrow (f_U^{\#}(\varphi))(\mathfrak{p}) = 0.$$

Agora vamos considerar um tipo especial de espaço anelado.

**Definição 2.2.16.** Um **esquema afim** é um espaço anelado  $(X, \mathcal{F}_X)$  tal que  $(X, \mathcal{F}_X)$  é isomorfo a  $(\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A})$ , para algum anel  $A$ . Um **esquema** é um espaço anelado  $(X, \mathcal{F}_X)$  tal que, para todo  $P \in X$ , existe uma vizinhança  $U$  de  $P$  de tal forma que  $(U, \mathcal{F}_X|_U)$  é um esquema afim, onde  $\mathcal{F}_X|_U$  é o feixe restrição visto na Definição 2.1.14. Chamamos um esquema afim  $(U, \mathcal{F}_X|_U) \cong (\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A})$  de **aberto afim** do esquema  $(X, \mathcal{F}_X)$ . Por simplicidade escrevemos  $U \cong \text{Spec } A$ .

Por definição, sabemos que todo esquema pode ter seu espaço topológico base coberto por abertos  $U_i$  tais que  $(U_i, \mathcal{F}_X|_{U_i})$  é um esquema afim. Porém esse fato pode ser visto de forma mais geral.

**Proposição 2.2.17.** Seja  $(X, \mathcal{F}_X)$  um esquema e  $U \subseteq X$  um aberto de  $X$ . Então o espaço anelado  $(U, \mathcal{F}_X|_U)$  é um esquema.

*Demonstração.* Para a demonstração veja [III, Proposição 3.2] □

**Definição 2.2.18.** O esquema  $(U, \mathcal{F}_X|_U)$  da proposição acima é chamado **subesquema aberto** do esquema  $(X, \mathcal{F}_X)$ .

Pelo fato de esquemas possuírem propriedades locais, é possível se utilizar desse fato a fim de construir novos esquemas a partir de esquemas já existentes.

**Definição 2.2.19.** Sejam  $\{(U_i, \mathcal{F}_{U_i})\}_{i \in I}$  e  $\{(U_{ij}, \mathcal{F}_{U_{ij}})\}_{i,j \in I}$ , coleções de esquemas quaisquer, com  $U_{ij} \subseteq U_i$  para todo  $j$ , e  $\{(\varphi_{ij}, \varphi_{ij}^\#)\}_{i \in I}$  uma coleção de morfismos entre  $(U_{ij}, \mathcal{F}_{U_{ij}})$  e  $(U_{ji}, \mathcal{F}_{U_{ji}})$ . Se a tripla  $(\{(U_i, \mathcal{F}_{U_i})\}_{i \in I}, \{(U_{ij}, \mathcal{F}_{U_{ij}})\}_{i,j \in I}, \{(\varphi_{ij}, \varphi_{ij}^\#)\}_{i \in I})$ , satisfaz:

- para todo  $i, j \in I$  temos que  $(U_{ij}, \mathcal{F}_{U_{ij}})$  é um subesquema aberto de  $(U_i, \mathcal{F}_{U_i})$ ,
- para todo  $i, j \in I$  a restrição  $(\varphi_{ij}, \varphi_{ij}^\#) : (U_{ij}, \mathcal{F}_{U_i|_{U_{ij}}}) \rightarrow (U_{ji}, \mathcal{F}_{U_i|_{U_{ji}}})$  é um isomorfismo de esquemas tal que
  - a)  $(U_{ii}, \mathcal{F}_{U_{ii}}) = (U_i, \mathcal{F}_{U_i})$  para todo  $i \in I$ ,
  - b)  $(\varphi_{kj}, \varphi_{kj}^\#) \circ (\varphi_{ji}, \varphi_{ji}^\#) = (\varphi_{ki}, \varphi_{ki}^\#)$  em  $U_{ij} \cap U_{ki}$ , para todos  $i, j, k \in I$ .

então dizemos que essa tripla satisfaz as **condições de colagem** e é chamada de **informação de colagem**,

**Proposição 2.2.20.** Seja  $(\{(U_i, \mathcal{F}_{U_i})\}_{i \in I}, \{(U_{ij}, \mathcal{F}_{U_{ij}})\}_{i,j \in I}, \{(\varphi_{ij}, \varphi_{ij}^\#)\}_{i \in I})$  uma informação de colagem. Então existe um esquema  $(X, \mathcal{F}_X)$  junto de uma coleção de morfismos  $\{(\psi_i, \psi_i^\#) : (U_i, \mathcal{F}_{U_i}) \rightarrow (X, \mathcal{F}_X)\}$  tal que

- $\varphi_i$  é um isomorfismo de  $U_i$  em um subesquema aberto de  $(X, \mathcal{F}_X)$ , para todo  $i$ ,
- $(\psi_j, \psi_j^\#) \circ (\varphi_{ji}, \varphi_{ji}^\#) = (\psi_i, \psi_i^\#)$  em  $(U_{ij}, \mathcal{F}_{U_{ij}})$  para todo  $i, j \in I$ ,
- $X = \bigcup_i \psi_i(U_i)$ ,
- $(\psi_j(U_i) \cap \psi_j(U_j), \mathcal{F}_X|_{\psi_i(U_i) \cap \psi_j(U_j)}) = (\psi_i, \psi_i^\#)((U_{ij}, \mathcal{F}_{U_{ij}})) = (\psi_j, \psi_j^\#)((U_{ji}, \mathcal{F}_{U_{ji}}))$  para todo  $i, j \in I$ .

*Demonstração.* Para a demonstração veja [III, Proposição 3.10]. □

**Definição 2.2.21.** O esquema  $(X, \mathcal{F}_X)$  da proposição acima é dito a **colagem** da informação de colagem  $(\{(U_i, \mathcal{F}_{U_i})\}_{i \in I}, \{(U_{ij}, \mathcal{F}_{U_{ij}})\}_{i,j \in I}, \{(\varphi_{ij}, \varphi_{ij}^\#)\}_{i \in I})$ .

Como o esquema  $(X, \mathcal{F}_X)$  é um espaço anelado podemos nos utilizar dos morfismos de espaços anelados para definir aplicações entre esquemas.

**Definição 2.2.22.** Um **morfismo de esquemas**  $(f, f^\#) : (X, \mathcal{F}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{F}_Y)$  é um morfismo como espaços anelados tal que para todo ponto  $x \in X$ , todo aberto afim  $U \subseteq X$  ( $U \cong \text{Spec } A$ ) de  $x$ , e todo aberto afim  $V \subseteq Y$  ( $V \cong \text{Spec } B$ ) com  $f(U) \subseteq V$ , devemos ter que o morfismo  $(f, f^\#) : (U, \mathcal{F}_X|_U) \rightarrow (V, \mathcal{F}_Y|_V)$  é local. E dizemos simplesmente que são **isomorfos** se existir um morfismo que possui inversa que também é morfismo.

A definição a seguir tem como propósito introduzir a nomenclatura de alguns esquemas específicos.

**Definição 2.2.23.** Dizemos que

- Um esquema  $(X, \mathcal{F}_X)$  é dito **irredutível** se  $X$  é irredutível como espaço topológico;
- Um esquema  $(X, \mathcal{F}_X)$  é dito **reduzido** se os anéis  $\mathcal{F}_X(U)$  são reduzidos, ou seja, não possuem elementos nilpotentes não nulos, para todo  $U \subseteq X$ .
- Um esquema  $(X, \mathcal{F}_X)$  é dito **integral** se para todo aberto afim  $U \cong \text{Spec } A \subseteq X$  o anel  $A$  é um domínio.
- Seja  $(Y, \mathcal{F}_Y)$  um esquema. Um **esquema sobre  $Y$**  é um esquema  $(X, \mathcal{F}_X)$  tal que existe um morfismo de esquemas  $(X, \mathcal{F}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{F}_Y)$ . Dizemos que  $(X, \mathcal{F}_X)$  é um **esquema sobre um corpo  $K$**  se  $(X, \mathcal{F}_X)$  for um esquema sobre  $\text{Spec } K$ .

Vamos agora ver algumas propriedades desses esquemas e, em especial, ver a relação entre um esquema integral e um esquema que é reduzido e irredutível.

**Lema 2.2.24.** Um esquema  $(X, \mathcal{F}_X)$  é reduzido se, e somente se,  $\mathcal{F}_{X,x}$  é um anel reduzido, para todo  $x \in X$ .

*Demonstração.* Seja  $[U, f]_x \in \mathcal{F}_{X,x}$  não nulo, com  $f$  um representante. Logo  $f \neq 0$ .

Como  $(X, \mathcal{F}_X)$  é reduzido, então  $\mathcal{F}_X(U)$  é um anel reduzido e  $f^n \neq 0$  para todo  $n$ . Como  $[U, f]_x^n = [U, f^n]_x$ , que segue direto da definição, temos  $[U, f]_x^n \neq 0$  para todo  $n$ . Portanto  $\mathcal{F}_{X,x}$  é reduzido.

Considere agora  $\mathcal{F}_{X,x}$  reduzido e suponha por absurdo que  $(X, \mathcal{F}_X)$  não é reduzido. Então existe  $f \in \mathcal{F}_X(U)$  tal que  $f^n = 0$  para algum  $n$ . Dessa forma, para cada  $x \in U$  temos  $[U, f]_x^n = [U, f^n]_x = 0$ , o que é absurdo, pois  $\mathcal{F}_{X,x}$  é reduzido.  $\square$

**Observação 2.2.25.** Um esquema afim  $(\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A})$  é reduzido se, e somente se,  $A$  é um anel reduzido. De fato, sabemos da Proposição [1.1.12](#) que se  $A$  é um anel reduzido então qualquer localização  $A_{\mathfrak{p}}$  é reduzida. Como

$$\mathcal{O}_{\text{Spec } A}(U) := \{\varphi = (\varphi_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in U}, \varphi_{\mathfrak{p}} \in A_{\mathfrak{p}} \mid \text{para cada } \mathfrak{p} \in U, \exists V \subseteq U \text{ vizinhança de } \mathfrak{p}$$

$$\text{e } f, g \in A, \text{ com } g \notin \mathfrak{q} \text{ e } \varphi_{\mathfrak{q}} = f/g \in A_{\mathfrak{q}}, \forall \mathfrak{q} \in V\},$$

temos que  $\varphi_{\mathfrak{p}}$  não é nilpotente para todo  $\mathfrak{p}$ , logo  $\varphi$  não é nilpotente. Com isso, temos que  $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}(U)$  é reduzido para todo  $U$  e, por consequência temos que  $(\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A})$  é um esquema reduzido.

A recíproca segue de forma análoga também pela Proposição [1.1.12](#).

Com isso, juntando as informações discutidas acima podemos enunciar a proposição a seguir.

**Proposição 2.2.26.** *Dado  $(X, \mathcal{F}_X)$  um esquema, as afirmações a seguir são equivalentes.*

- a)  $(X, \mathcal{F}_X)$  é um esquema reduzido.
- b) Existe uma coleção  $\{U_i \cong \text{Spec } A_i\}_{i \in I}$  de abertos afins de  $(X, \mathcal{F}_X)$ , em que  $\{U_i\}_{i \in I}$  é uma cobertura de  $X$  e  $\mathcal{F}_X(U_i)$  é reduzido para todo  $i \in I$ .

*Demonstração.* Suponha inicialmente que  $(X, \mathcal{F}_X)$  é reduzido. Como  $(X, \mathcal{F}_X)$  é esquema segue que para todo  $x \in X$  existe um aberto afim  $U_i \subseteq X$  tal que  $x \in U_i \cong \text{Spec } A_i$ , ou seja, o conjunto dos abertos afins  $U_i$  forma uma cobertura de  $X$  e, por definição,  $\mathcal{F}_X(U_i)$  é reduzido.

Reciprocamente considere  $\{U_i \cong \text{Spec } A_i\}_{i \in I}$  uma cobertura de abertos afins de  $(X, \mathcal{F}_X)$  como em b). Para cada  $x \in X$  existe  $U_i \cong \text{Spec } A_i$ , com  $\mathcal{F}_X(U_i)$  reduzido. Com isso,  $\mathcal{F}_{X,x}$  é reduzido para todo  $x \in X$ . De fato, tome  $[U, s] \in \mathcal{F}_{X,x}$  qualquer. Pela definição de germe temos que

$$x \in U \Rightarrow x \in U \cap U_i \neq \emptyset$$

como  $\mathcal{F}_X(U_i)$  é reduzido segue que  $s|_{U_i}^n \neq 0$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , ou seja,  $s^n \neq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Portanto

$$[U, s^n] = [U, s]^n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo,  $\mathcal{F}_{X,x}$  é reduzido para todo  $x \in X$  e pelo Lema 2.2.24 segue que  $(X, \mathcal{F}_X)$  é reduzido.  $\square$

**Proposição 2.2.27.** *Seja  $(X, \mathcal{F}_X)$  um esquema e  $Y$  um subconjunto não vazio, fechado e irredutível de  $X$ . Então  $Y$  possui um único ponto  $g$  tal que  $\overline{\{g\}} = Y$ , chamado **ponto genérico** de  $Y$ .*

*Demonstração.* Como  $Y \neq \emptyset$ , seja  $y \in Y$ . Como  $(X, \mathcal{F}_X)$  é um esquema e  $y \in Y \subseteq X$ , existe um aberto afim  $U \cong \text{Spec } A$  de  $X$  tal que  $y \in U$ . Logo  $Y \cap U \neq \emptyset$ .

Vamos inicialmente mostrar que  $Y \cap U$  possui um único ponto genérico. Como  $Y \cap U \neq \emptyset$  temos que  $Y \cap U$  é um fechado de  $U$  (com a topologia de  $U$  sendo a topologia induzida de  $X$ ). Logo,  $Y \cap U = V(\mathfrak{a})$  para algum ideal  $\mathfrak{a} \in A$  (os fechados de  $U \cong \text{Spec } A$  são da forma  $V(\mathfrak{a})$ ). Note que ainda que  $\sqrt{\mathfrak{a}}$  é um ideal primo de  $A$  e, pela Proposição 2.2.6,  $\sqrt{\mathfrak{a}} \in V(\mathfrak{a}) = Y \cap U$ .

Vejam que  $\sqrt{\mathfrak{a}}$  é o ponto genérico de  $Y \cap U$ . De fato, como  $V(\mathfrak{a})$  é fechado em  $Y \cap U$  segue que  $\overline{\{\sqrt{\mathfrak{a}}\}} \subseteq Y \cap U$ . Tome  $\mathfrak{p} \in Y \cap U$  e seja  $U'$  um aberto de  $Y \cap U$ , com  $\mathfrak{p} \in U'$ , então  $U' = (Y \cap U) \cap U''$  para algum aberto  $U'' \subseteq U$ . Portanto  $U'' \cong \text{Spec } A - V(\mathfrak{b})$ , para algum  $\mathfrak{b}$  ideal de  $A$ . Como  $\mathfrak{p} \in U''$ , então  $\mathfrak{b} \not\subseteq \mathfrak{p}$ . Além disso, pela demonstração do Corolário 2.2.7 temos  $\sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq \mathfrak{p}$ , então  $\mathfrak{b} \not\subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$ . Logo  $\sqrt{\mathfrak{a}} \in U''$ , e, portanto,  $\sqrt{\mathfrak{a}} \in U'' \cap (Y \cap U) = U'$ , ou seja,  $U' \cap \{\sqrt{\mathfrak{a}}\} \neq \emptyset$ . Assim  $\mathfrak{p}$  está em  $\overline{\{\sqrt{\mathfrak{a}}\}}$  em  $Y \cap U$ , o que mostra que  $g = \sqrt{\mathfrak{a}}$  é ponto genérico de  $Y \cap U$ .

Vamos mostrar agora que  $g$  é único. De fato, suponha que exista  $h \in Y \cap U$  ponto genérico de  $Y \cap U$ . Então, pelo Corolário 2.2.7,

$$h \in Y \cap U = V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}}) = V(g)$$

e, com isso,  $g \subseteq h$ . Logo, devemos mostrar que  $h \subseteq g$ . Suponha por absurdo que  $h \not\subseteq g$ . Então  $g \in (Y \cap U) \cap (\text{Spec } A - V(h)) \subseteq Y \cap U$  e, deste modo,  $(Y \cap U) \cap (\text{Spec } A - V(h))$

é um aberto de  $Y \cap U$  não vazio. Como  $h$  é ponto genérico de  $Y \cap U$  segue que  $[(Y \cap U) \cap (\text{Spec } A - V(h))] \cap \{h\} \neq \emptyset$ , ou seja,  $h \notin V(h)$ , o que é absurdo. Logo  $g = h$ .

O objetivo agora é mostrar que  $Y$  possui um único ponto genérico. Vejamos antes que os pontos genéricos de cada  $Y \cap U$  são os mesmos. De fato, sejam  $U$  e  $U'$  dois abertos afins de  $X$  com  $U \cap Y$  e  $U' \cap Y$  não vazios e  $g, h$  seus pontos genéricos, respectivamente. Note que  $(Y \cap U) \cap (Y \cap U') \neq \emptyset$ . De fato, suponha que não ocorra, então

$$\begin{aligned} Y &= Y - \emptyset = Y - ((Y \cap U) \cap (Y \cap U')) = (Y - (Y \cap U)) \cup (Y - (Y \cap U')) = \\ &= (Y - U) \cup (Y - U') = (Y \cap (X - U)) \cup (Y \cap (X - U')). \end{aligned}$$

Como  $Y \cap (X - U)$  e  $Y \cap (X - U')$  são disjuntos segue que  $Y$  é redutível, o que é absurdo. Logo,  $(Y \cap U) \cap (Y \cap U') \neq \emptyset$ . Portanto, tomando  $\mathfrak{p} \in (Y \cap U) \cap (Y \cap U')$ , então  $\mathfrak{p} \in U \cap U'$  e por isso, existe um aberto afim  $W$  de  $X$  tal que  $\mathfrak{p} \in W \subseteq U \cap U'$ . Como  $W$  é um aberto de  $X$  e  $\mathfrak{p} \in W$  segue que  $g, h \in Y \cap W$  e  $\mathfrak{p} \in (Y \cap U') \cap W$ . Vimos que  $Y \cap U'$  é  $\overline{\{h\}}$ , então  $h \in Y \cap W$ . Além disso, também temos que  $g, h$  são dois pontos genéricos de  $Y \cap W$ . De fato, note que

$$Y \cap W = (Y \cap W) \cap (Y \cap U) = (Y \cap W) \cap \overline{\{g\}}$$

e de forma análoga  $Y \cap W = (Y \cap W) \cap \overline{\{h\}}$ . Portanto, como  $g$  e  $h$  são pontos genéricos de  $Y \cap W$ , segue pelo provado anteriormente que  $g = h$ .

Devemos agora mostrar que  $Y$  possui ponto genérico que será  $g$ . De fato,  $\overline{\{g\}} \subseteq Y$ . Sejam  $\mathfrak{p} \in Y$  e  $U$  um aberto de  $Y$  tal que  $\mathfrak{p} \in U$ . Como  $U$  é aberto, existe  $U'$  aberto de  $X$  tal que  $U = Y \cap U'$ , e, portanto,  $\mathfrak{p} \in U'$ . Por [III, Proposição 3.2] existe um aberto afim  $U'' \subseteq U$  tal que  $\mathfrak{p} \in U''$ , então  $\mathfrak{p} \in Y \cap U'' \subseteq Y \cap U' = U$ . Com isso,  $U \cap \{g\} \neq \emptyset \Rightarrow \mathfrak{p} \in \overline{\{g\}}$ , ou seja,  $Y = \overline{\{g\}}$  em  $Y$ . Portanto  $g$  é ponto genérico de  $Y$ .

Por fim, basta mostrar que  $g$  é único em  $Y$ . De fato, suponha que existam  $g, h$  pontos genéricos de  $Y$ . Pelo fato de  $X$  ser esquema, existem abertos afins  $U$  e  $U'$  tais que  $g \in U$  e  $h \in U'$ . Note que  $h \in U$ , pois como  $g \in Y \cap U$  que é fecho de  $\{h\}$  em  $Y$ , então  $(Y \cap U) \cap \{h\} \neq \emptyset$ , ou seja,  $h \in Y \cap U$ . Com isso teríamos que  $g, h$  seriam dois pontos genéricos de  $Y \cap U$ , pois

$$Y \cap U = (Y \cap U) \cap Y = (Y \cap U) \overline{\{g\}}$$

e da mesma forma para  $h$ , assim teríamos  $g, h$  pontos genéricos de  $Y \cap U$ , ou seja, pelo visto acima segue que  $g = h$ .  $\square$

**Proposição 2.2.28.** *Seja  $(X, \mathcal{F}_X)$  um esquema. As afirmações a seguir são equivalentes.*

- $(X, \mathcal{F}_X)$  é esquema irredutível.
- Existe uma coleção  $\{U_i \cong \text{Spec } A_i\}_{i \in I}$  de abertos afins de  $(X, \mathcal{F}_X)$ , com  $\{U_i\}_{i \in I}$  cobertura de  $X$ , tal que  $U_i \cong \text{Spec } A_i$  é irredutível para todo  $i \in I$ , e, para todos  $i, j \in I$ , temos  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ .
- $X \neq \emptyset$  e todo aberto afim  $U \cong \text{Spec } A$  de  $(X, \mathcal{F}_X)$  não vazio é irredutível.

*Demonstração.* Suponha a). Sabemos que se  $(X, \mathcal{F}_X)$  é irredutível, pela Proposição 2.2.27 anterior existe  $g \in X$  tal que  $g$  é um ponto genérico, ou seja,  $\{g\} \cap U \neq \emptyset$  para todo aberto  $U$  de  $X$ . Dessa forma, para quaisquer  $U$  e  $U'$  abertos de  $X$  temos  $U \cap U' \neq \emptyset$  e, em especial, segue que todo  $U \cong \text{Spec } A$  é irredutível. De fato, suponha que existam  $V, V'$  abertos de  $U$  tais que  $V \cap V' = \emptyset$  e  $U = V \cup V'$ . Sabemos que  $V = U \cap W$  e  $V' = U \cap W'$ , onde  $W$

e  $W'$  são abertos de  $X$ . Como  $g$  é genérico temos que  $g \in W$  e  $g \in W'$ , ou seja,  $g \in V$  e  $g \in V'$  e  $V \cap V' \neq \emptyset$ , o que é absurdo. Com isso, provamos b) e c).

Suponha agora que ocorre b). Suponha por absurdo que  $X = Z_1 \cup Z_2$  é a união disjunta de dois conjuntos fechados de  $X$ . Por hipótese  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ . Com isso, como para cada  $i \in I$  temos  $g \in U_i$ , com  $g$  sendo o ponto genérico de  $U_i$ , temos que  $U_i \subseteq Z_k$  ( $k = 1, 2$ ). Note que podemos supor sem perda de generalidade que  $k = 1$ , dessa forma, como cada  $U_i$  é irredutível segue que  $U_i \subseteq Z_1$  para todo  $i \in I$ . Portanto  $Z_1 = X$  e  $Z_2 = \emptyset$ , provando a).

Por fim, é fácil ver que c) implica em b). Com isso, provamos o resultado.  $\square$

**Teorema 2.2.29.** *Um esquema  $(X, \mathcal{F}_X)$  é integral se, e somente se, é reduzido e irredutível.*

*Demonstração.* Suponha inicialmente que  $(X, \mathcal{F}_X)$  seja reduzido e irredutível. Seja  $U \cong \text{Spec } A$  um aberto afim de  $X$ . Pelo Lema 2.2.28, para todo aberto afim  $U \cong \text{Spec } A$  de  $X$  é irredutível e, por [19, Proposição 1.2], segue que o conjunto dos elementos nilpotentes de  $A$  é um ideal primo. Agora, pela Observação 2.2.25, se  $(X, \mathcal{F}_X)$  for reduzido, então  $A$  também é reduzido. Portanto, segue que o conjunto dos elementos nilpotentes de  $A$  é  $\langle 0 \rangle$  e é um ideal primo de  $A$ . Dessa forma, segue que  $A$  é um domínio. Como isso vale para todo aberto afim  $U \cong \text{Spec } A$  de  $X$ , temos que  $(X, \mathcal{F}_X)$  é integral.

Suponha agora  $(X, \mathcal{F}_X)$  integral. Seja  $U \cong \text{Spec } A$  um aberto afim qualquer de  $X$ . Com isso,  $A$  é domínio, ou seja, também é um anel reduzido, logo, novamente pela Observação 2.2.25,  $U \cong \text{Spec } A$  é reduzido. Note ainda, que pelo item c) da Proposição 2.2.26 temos que  $(X, \mathcal{F}_X)$  é reduzido. Além disso, como  $A$  é domínio segue que o conjunto dos elementos nilpotentes de  $A$  é gerado por 0 e que  $\langle 0 \rangle$  é primo. Portanto, por [19, Proposição 1.2] segue que  $U \cong \text{Spec } A$  é irredutível.  $\square$

**Definição 2.2.30.** *Um morfismo de esquemas  $(f, f^\#) : (Z, \mathcal{F}_Z) \rightarrow (X, \mathcal{F}_X)$  é dito **imersão fechada** se  $f$  é um homeomorfismo entre  $Z$  e um conjunto fechado de  $X$  e o homomorfismo de feixes  $f^\# : \mathcal{F}_X \rightarrow f_*\mathcal{F}_Z$  é sobrejetivo. Nesse caso, dizemos que  $(Z, \mathcal{F}_Z)$  é um **subesquema fechado** de  $(X, \mathcal{F}_X)$ .*

Podemos definir o conceito de dimensão de um esquema como segue.

**Definição 2.2.31.** *A **dimensão** de um esquema  $(X, \mathcal{F}_X)$  denotada por  $\dim(X, \mathcal{F}_X)$ , é a dimensão de  $X$  como espaço topológico (Definição 1.2.17). Se  $(V, \mathcal{F}_V)$  é um subesquema fechado de um esquema  $(X, \mathcal{F}_X)$ , a **codimensão** de  $(V, \mathcal{F}_V)$  em  $(X, \mathcal{F}_X)$  é o supremo dos inteiros  $d$  da cadeia crescente*

$$V = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_d \subset X,$$

em que  $(V_i, \mathcal{F}_{V|_{V_i}})$  é subesquema fechado de  $(X, \mathcal{F}_X)$  para todo  $i$ .

**Observação 2.2.32.** *Dado um esquema  $(Z, \mathcal{F}_Z)$ , onde  $Z$  é subconjunto fechado de  $X$  não faz com que ele seja um subesquema fechado de  $(X, \mathcal{F}_X)$ . Agora, dado  $Z \subseteq X$  conjunto fechado do espaço topológico  $X$  o esquema  $(Z, \mathcal{F}_{X|_Z})$  é subesquema fechado de  $(X, \mathcal{F}_X)$ , pois  $\mathcal{F}_{X|_Z} = i_*(\mathcal{F}_X)$ , em que  $i : Z \rightarrow X$  é a inclusão (Definições 2.1.13 e 2.1.14). Em geral, caso não especificado, um subesquema fechado  $Z$  de  $X$  será da forma  $(Z, \mathcal{F}_{X|_Z})$ .*

**Observação 2.2.33.** *Sejam  $(X, \mathcal{F}_X) \cong (\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A})$  um esquema afim e  $\mathfrak{a}$  um ideal de  $A$ . Como  $\mathfrak{a}$  é ideal de  $A$ , então o quociente  $A/\mathfrak{a}$  é um anel, portanto podemos considerar  $\text{Spec}(A/\mathfrak{a})$ . Dado  $\mathfrak{p} \subseteq V(\mathfrak{a})$  ideal primo temos que  $\mathfrak{p}/\mathfrak{a}$  será um ideal primo de  $A/\mathfrak{a}$ , portanto podemos construir a aplicação*

$$i : V(\mathfrak{a}) \rightarrow \text{Spec}(A/\mathfrak{a})$$

$$\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}/\mathfrak{a}.$$

É fácil ver que  $\ker i = 0$ . Além disso, também é direto que  $i$  é sobrejetiva. Com isso, temos que  $V(\mathfrak{a}) \cong \text{Spec}(A/\mathfrak{a})$ . Considere  $\mathcal{F}_{V(\mathfrak{a})}$  o feixe em  $V(\mathfrak{a})$  tal que  $(V(\mathfrak{a}), \mathcal{F}_{V(\mathfrak{a})}) \cong (\text{Spec}(A/\mathfrak{a}), \mathcal{O}_{\text{Spec}(A/\mathfrak{a})})$ .

Considere o homomorfismo de inclusão trivial  $A \rightarrow A/\mathfrak{a}$  e o morfismo induzido  $i : \text{Spec } A/\mathfrak{a} \rightarrow \text{Spec } A$  como visto na Observação 2.2.2. Tome  $i^\# : \mathcal{O}_{\text{Spec } A} \rightarrow i_* \mathcal{O}_{\text{Spec}(A/\mathfrak{a})}$  dado pelas aplicações sobrejetivas  $i_U^\# : (\varphi_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in U} \mapsto (\varphi_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{a})_{\mathfrak{p} \in U}$ , ou seja,  $i^\#$  é sobrejetiva.

Como  $i$  é a inclusão de um subconjunto fechado em um esquema afim e  $i^\#$  sobrejetiva, segue que o morfismo de esquemas  $(i, i^\#)$  é uma imersão fechada e, portanto, temos que  $(V(\mathfrak{a}), \mathcal{F}_{V(\mathfrak{a})})$  é um subesquema fechado de  $(X, \mathcal{F}_X)$ .

A observação anterior dá como exemplo de subesquema fechado de um esquema afim um esquema que também é afim. Tal fato não é coincidência, o próximo resultado mostra que todo subesquema fechado de um esquema afim é um esquema afim.

No teorema que virá seguir utilizaremos o abuso de notação  $V(\mathfrak{a})$  para denotar os subesquemas fechados  $\text{Spec}(A/\mathfrak{a})$  para um ideal  $\mathfrak{a}$  qualquer.

**Teorema 2.2.34.** *Seja  $(X, \mathcal{F}_X) \cong (\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A})$  um esquema afim. Para todo ideal  $\mathfrak{a} \subseteq A$  a aplicação  $\mathfrak{a} \mapsto V(\mathfrak{a})$  entre os ideais de  $A$  e o conjunto de subesquemas fechados de  $X$  é bijetiva.*

*Demonstração.* Para a demonstração desse resultado veja [11, Teorema 3.42] □

Apresentadas as propriedades acima o objetivo agora é associar a um esquema integral a noção de corpo de funções como feito no caso afim, para isso provamos duas proposições que possibilitam tal definição.

**Proposição 2.2.35.** *Se  $(X, \mathcal{F}_X)$  é integral então  $\mathcal{F}_{X,g}$  é um corpo, com  $g$  o ponto genérico de  $X$ .*

*Demonstração.* Como  $(X, \mathcal{F}_X)$  é irredutível, pela Proposição 2.2.27 existe  $g$  e é único. Seja  $U \cong \text{Spec } A$  aberto afim de  $X$ , então, como  $\{g\}$  é denso segue que  $g \in U$ . Agora, dado um aberto  $U' \subseteq X$ , com  $g \in U'$  é fácil ver que  $[U', s]_g = [U \cap U', \rho_{U', U \cap U'}(s)]_g$ , em que  $\rho$  é a função restrição do feixe  $\mathcal{F}_X$ . De fato, para isso basta notar que para qualquer  $W$  aberto de  $X$  tal que  $W \subseteq U \cap U'$  temos que  $W \subseteq U'$  e  $s|_W = \rho_{U', U \cap U'}(s)|_W$ . Com isso, podemos calcular o stalk  $\mathcal{F}_{X,g}$  olhando apenas para o aberto afim  $U \cong \text{Spec } A$ , ou seja,  $\mathcal{F}_{X,g} = \mathcal{F}_{U,g}$ . Como feito na demonstração da Proposição 2.2.27, temos que o ponto genérico  $g$  é dado por

$$I(X \cap U) = I(U) = I(\text{Spec } A) = I(V(\langle 0 \rangle)) = \sqrt{\langle 0 \rangle}.$$

Pela Observação 2.2.11, temos que  $\mathcal{F}_{U,g} \cong A_{\sqrt{\langle 0 \rangle}}$ . Agora, como  $(X, \mathcal{F}_X)$  também é reduzido segue por definição que  $A$  não tem elementos nilpotentes, então  $g \cong \langle 0 \rangle = \{0\}$ . Portanto,

$$\mathcal{F}_{X,g} = \mathcal{F}_{U,g} \cong A_{\{0\}}.$$

Como  $A$  é domínio, pela Observação 1.1.13,  $A_{\{0\}}$  é o corpo de frações de  $A$ , ou seja,  $\mathcal{F}_{X,g}$  é corpo. □

**Definição 2.2.36.** *Sejam  $(X, \mathcal{F}_X)$  um esquema integral e  $g$  o ponto genérico de  $X$ . Chamamos o corpo  $\mathcal{F}_{X,g}$  de **corpo de funções racionais** ou, simplesmente **corpo de funções**, de  $(X, \mathcal{F}_X)$  e o denotamos por  $R(X)$ .*

**Observação 2.2.37.** Perceba que a definição de subesquema fechado exige que o morfismo  $i^\#$  seja sobrejetivo, portanto, aplicando o teorema do isomorfismo para todo aberto do esquema, tomando  $\ker i^\#$ , temos que  $i^\# : \mathcal{F}_X / (\ker i^\#) \rightarrow i_* \mathcal{F}_Z$  é isomorfismo. Portanto note que, dado um subesquema fechado  $Z$  de  $X$ , da Definição 2.1.10 temos que  $\mathcal{I} = \ker i^\#$  é um feixe de ideais de  $\mathcal{F}_X$ . Pela unicidade do  $\ker i^\#$  de um homomorfismo, temos que  $\mathcal{I}$  é único.

A observação acima garante que a definição a seguir faça sentido.

**Definição 2.2.38.** Seja  $(Y, \mathcal{F}_Y)$  um subesquema fechado de um esquema  $(X, \mathcal{F}_X)$  e  $(i, i^\#) : (Y, \mathcal{F}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{F}_X)$  o morfismo de inclusão ( $i$  é a inclusão de espaços topológicos e  $i^\#$  inclusão de feixes). Definimos o **feixe ideal** de  $(Y, \mathcal{F}_Y)$  em  $(X, \mathcal{F}_X)$  como sendo  $\mathcal{I}_Y = \ker i^\#$  do morfismo  $i^\# : \mathcal{F}_X \rightarrow i_* \mathcal{F}_Y$ .

Com isso, vimos que existe uma forma de associar feixes e subesquemas fechados. Em geral, é possível fazer uma relação biunívoca entre feixes específicos e subesquemas fechados.

**Proposição 2.2.39.** Um feixe  $\mathcal{I}$  será um feixe ideal de um subesquema fechado  $(Z, \mathcal{F}_Z)$  de  $(X, \mathcal{F}_X)$  se, e somente se,  $\mathcal{I}$  é coerente.

*Demonstração.* A demonstração da proposição acima é trabalhosa, porém pode ser vista com detalhes em [11, Proposição 7.32].  $\square$

Por fim, vamos agora a algumas propriedades e definições que surgem de morfismos de esquemas, em especial para subesquemas fechados.

**Observação 2.2.40.** Sejam  $(X, \mathcal{F}_X) \cong (\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A})$  e  $(Y, \mathcal{F}_Y) \cong (\text{Spec } B, \mathcal{O}_{\text{Spec } B})$  dois esquemas afins e  $(f, f^\#) : (X, \mathcal{F}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{F}_Y)$  uma aplicação de esquemas induzida pelo homomorfismo  $\varphi : B \rightarrow A$ , ou seja,  $f(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ . Se  $Z \subseteq Y$  for um subesquema fechado, então  $(f, f^\#)^{-1}((Z, \mathcal{F}_Z))$  é subesquema fechado de  $(X, \mathcal{F}_X)$  e  $Z \cong V(\varphi(\mathfrak{b})A)$ , para algum  $\mathfrak{b}$ .

De fato, pelo Teorema 2.2.34 temos que  $Z \cong V(\mathfrak{b})$  para algum ideal  $\mathfrak{b} \subseteq B$ . Agora note que

$$f^{-1}(Z) = \{I \in X ; f(I) \in Z\} = \{I \in \text{Spec } A ; \subseteq \varphi^{-1}(I)\}.$$

Porém  $\varphi(\mathfrak{b}) \subseteq I$ , e portanto segue

$$\{I \in \text{Spec } A ; \subseteq \varphi^{-1}(I)\} = \{I \in \text{Spec } A ; \varphi(\mathfrak{b})A \subseteq I\} = V(\varphi(\mathfrak{b})A).$$

Portanto,  $f^{-1}(Z) = V(\varphi(\mathfrak{b})A)$  e, pelo Teorema 2.2.34, segue que  $(f^{-1}(Z), \mathcal{F}_X|_{f^{-1}(Z)})$  é subesquema fechado de  $X$ .

**Definição 2.2.41.** Chamamos o esquema  $(f^{-1}(Z), \mathcal{F}_X|_{f^{-1}(Z)})$  de **pullback** de  $(Z, \mathcal{F}_Z)$  sobre o esquema  $(X, \mathcal{F}_X)$  em relação ao morfismo  $f$ .

Vamos agora, a partir da noção de pullback de esquemas afins, estender o conceito de pullback para esquemas quaisquer.

**Observação 2.2.42.** Sejam  $(X, \mathcal{F}_X)$  e  $(Y, \mathcal{F}_Y)$  esquemas quaisquer,  $(Z, \mathcal{F}_Z)$  um subesquema fechado de  $(Y, \mathcal{F}_Y)$  e  $(f, f^\#) : (X, \mathcal{F}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{F}_Y)$  uma aplicação de esquemas. Tome  $\{W_\alpha\}$  uma cobertura de abertos afins (como espaços topológicos) de  $(Y, \mathcal{F}_Y)$  e  $\{U_{\alpha\beta}\}$  uma cobertura aberta de abertos afins (como espaços topológicos) de  $(X, \mathcal{F}_X)$  tais que  $f(\{U_{\alpha\beta}\}) \subseteq W_\alpha$ .

Denote por  $f_{\alpha\beta} \cong f|_{U_{\alpha\beta}}$ , com  $f_{\alpha\beta} : \text{Spec } A_{\alpha\beta} \rightarrow \text{Spec } B_{\alpha}$ . Para cada  $\alpha$  tome  $Z_{\alpha} = Z \cap W_{\alpha}$ , que será um fechado de  $\text{Spec } B_{\alpha}$ . Portanto  $f_{\alpha\beta}$  será um morfismo de esquemas afins e  $Z_{\alpha}$  um fechado de  $\text{Spec } B_{\alpha}$ , podendo assim fazer o pullback de  $Z_{\alpha}$  sobre  $U_{\alpha\beta}$ .

Por fim, podemos definir o pullback para um esquema qualquer.

**Definição 2.2.43.** O *pullback* ou *imagem inversa* de  $(Z, \mathcal{F}_Z)$  sobre  $(X, \mathcal{F}_X)$  em relação ao morfismo  $(f, f^{\#})$  será a colagem dos esquemas afins  $(f^{-1}(Z_{\alpha}), \mathcal{F}_X|_{f^{-1}(Z_{\alpha})})$ .

## 2.3 Variedades

Veremos nesta seção a noção de variedades algébricas, ou simplesmente variedades, um novo tipo de esquema e que possui paralelos com as variedades algébricas afins.

Antes de definir propriamente este conceito, vejamos a definição a seguir.

**Definição 2.3.1.** Um esquema  $(X, \mathcal{F}_X)$  sobre  $(Y, \mathcal{F}_Y)$  é dito **do tipo finito** sobre  $(Y, \mathcal{F}_Y)$  se existe uma coleção de abertos afins  $V_i \cong \text{Spec } B_i$  de  $(Y, \mathcal{F}_Y)$  tal que existe uma coleção  $\{U_{i,j}\}_{i \in I}$  que o espaço topológico do esquema  $(f, f^{\#})^{-1}((V_i, \mathcal{F}_Y|_{V_i}))$  pode ser coberto por  $\{U_{i,j}\}_{i \in I}$  e  $(U_{i,j}, \mathcal{F}_{U_{i,j}}) \cong (\text{Spec } A_{i,j}, \mathcal{F}_{\text{Spec } A_{i,j}})$  é esquema afim, com cada  $A_{i,j}$  sendo uma  $B_i$ -álgebra finitamente gerada.

**Definição 2.3.2.** Dizemos que um esquema  $(X, \mathcal{F}_X)$  é um **esquema algébrico** se  $X$  é esquema sobre um corpo e do tipo finito sobre esse corpo. Se um esquema é algébrico, reduzido e irredutível dizemos que esse esquema é uma **variedade algébrica** ou simplesmente **variedade**.

**Observação 2.3.3.** Sabemos que se um esquema  $(V, \mathcal{F}_V)$  é uma variedade algébrica então  $V$  possui um único ponto genérico  $g$ , já que é, por definição, um esquema integral e, portanto, podemos considerar o corpo de funções  $R(V)$ . Logo variedades algébricas também possuem um corpo de funções racionais como no caso afim.

**Exemplo 2.3.4.** Seja  $(X, \mathcal{F}_X)$  um esquema, com  $X$  Hausdorff e  $\mathcal{F}_X$  um feixe de  $\mathbb{C}$ -Álgebras, que é subfeixe do feixe das funções contínuas de  $X$ . Dizemos que  $(X, \mathcal{F}_X)$  é uma **variedade complexa**, se, para todo  $x \in X$ , existe uma vizinhança  $U$  de  $X$  tal que  $(U, \mathcal{O}_x|_U) \cong (W, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}|_W)$ , em que  $W$  é um domínio em  $\mathbb{C}^n$  e  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}|_W$  é o feixe de funções holomorfas de  $W$  (Exemplo 2.1.8).

Neste caso temos que  $(X, \mathcal{F}_X)$  é uma variedade. Pela definição, segue que  $(X, \mathcal{F}_X)$  é um esquema algébrico. Além disso, um domínio de  $\mathbb{C}^n$  é um espaço conexo e, portanto, irredutível. Assim, pela Proposição 2.2.28,  $(X, \mathcal{F}_X)$  é irredutível. Por fim, dada uma função holomorfa de  $W$   $f \neq 0$  qualquer temos que  $f^n \neq 0$ , fazendo com que  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}|_W$  seja um anel reduzido e, pela Proposição 2.2.26,  $(X, \mathcal{F}_X)$  seja reduzido.

O teorema a seguir mostra que variedades algébricas afins vistas no Capítulo 1 de fato são generalizadas por esquemas. Dessa forma, vemos que variedades e variedades algébricas afins estão relacionadas por ambas serem tipos específicos de esquemas.

**Teorema 2.3.5.** Seja  $K$  um corpo algebricamente fechado. Existe um funtor  $t : \text{Var}(K) \rightarrow \text{Sch}(K)$  da categoria das variedades algébricas afins sobre  $K$  e os esquemas sobre  $K$ , onde  $\text{Sch}(K)$  denota a categoria dos esquemas sobre  $K$ .

*Demonstração.* Veja [15, Proposição 2.6]. □

**Definição 2.3.6.** Dizemos que  $(V, \mathcal{F}_V)$  é uma **subvariedade algébrica** (ou simplesmente **subvariedade**) de um esquema algébrico  $(X, \mathcal{F}_X)$  se  $(V, \mathcal{F}_V)$  é um subsquema fechado, reduzido e irredutível de  $(X, \mathcal{F}_X)$ .

**Observação 2.3.7.** Sejam  $(X, \mathcal{F}_X)$  um esquema algébrico e  $(V, \mathcal{F}_V)$  uma subvariedade de  $(X, \mathcal{F}_X)$ . Como  $(V, \mathcal{F}_V)$  é variedade, então é irredutível e, com isso existe  $g \in V$  tal que  $g$  é ponto genérico de  $V$ . É fácil ver que  $\mathcal{F}_{X,V} = \mathcal{F}_{X,g}$ . De fato, lembre da Definição 2.1.23 que  $\mathcal{F}_{X,V} = \bigcap_{p \in V} \mathcal{F}_{X,p}$ . Se mostrarmos que  $\mathcal{F}_{X,p} \subseteq \mathcal{F}_{X,g}$  para todo  $p \in V$  provamos o esperado.

Seja  $[U, s]_p \in \mathcal{F}_{X,p}$ , com  $p \in V$  qualquer e  $U \subseteq X$  um aberto que contém  $p$ . Como  $g$  é genérico, segue que  $g \in U \cap V$ , ou seja,  $g \in U$ . Portanto, pela definição de germe (Definição 2.1.15) temos  $[U, s]_p = [U, s]_g \in \mathcal{F}_{X,g}$ , provando o esperado.

Como  $V$  é variedade faz sentido considerar  $R(V)$ , já que  $V$  é integral. Note ainda que é fácil ver que  $\mathcal{F}_{V,g} \cong \frac{\mathcal{F}_{X,g}}{\mathcal{I}_{X,g}}$ , em que  $\mathcal{I}_X$  é o ideal associado de  $X$ . Como  $R(V) = \mathcal{F}_{V,g} \cong \frac{\mathcal{F}_{X,g}}{\mathcal{I}_{X,g}}$ , segue que  $\mathcal{I}_{X,g} = \mathcal{M}_{X,g}$  é o ideal maximal de  $\mathcal{F}_{X,g}$ . Além disso, pelo observado acima temos que  $\mathcal{F}_{X,g} = \mathcal{F}_{X,V}$  e que  $\mathcal{M}_{X,g} \subseteq \mathcal{F}_{X,g} = \mathcal{F}_{X,V}$ , ou seja, dada  $\varphi \in R(V)$  podemos representar  $\varphi = a/b$ , com  $a, b \in \mathcal{F}_{X,V}$ .

Em geral morfismos de variedades são simplesmente morfismos entre esquemas, porém, pelo fato de variedades serem um tipo especial de esquema, podemos estudar tipos específicos de morfismos que ocorrem entre variedades.

**Definição 2.3.8.** Sejam  $(X, \mathcal{F}_X), (Y, \mathcal{F}_Y)$  esquemas algébricos e  $(f, f^\#) : (X, \mathcal{F}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{F}_Y)$  um morfismo de esquemas. Dizemos que  $(f, f^\#)$  é **flat** se para toda subvariedade  $(V, \mathcal{F}_V)$  de  $(X, \mathcal{F}_X)$ , com  $W = f(V)$  subvariedade de  $Y$ , temos que, para todo homomorfismo linear injetivo  $\varphi : M \rightarrow L$  de  $\mathcal{F}_{W,Y}$ -módulos (Definições 2.1.23 e 2.1.4), temos que o homomorfismo (Definição 1.1.21)

$$\varphi \otimes_{\mathcal{F}_{W,Y}} \mathcal{F}_{V,X} : M \otimes_{\mathcal{F}_{W,Y}} \mathcal{F}_{V,X} \rightarrow L \otimes_{\mathcal{F}_{W,Y}} \mathcal{F}_{V,X}$$

$$m \otimes f \mapsto \varphi(m) \otimes f$$

é um homomorfismo injetivo (nesse caso dizemos que  $\mathcal{F}_{V,X}$  é um  $\mathcal{F}_{W,Y}$ -módulo **flat**). Em geral, um morfismo flat  $f : X \rightarrow Y$  possui **dimensão relativa**  $n$  se para toda subvariedade  $V$  de  $Y$  e toda componente irredutível  $V'$  de  $f^{-1}(V)$ , vale  $\dim V' = n + \dim V$ .

**Definição 2.3.9.** Seja  $(f, f^\#) : (V, \mathcal{F}_V) \rightarrow (M, \mathcal{F}_M)$  um morfismo de variedades. Chamamos  $(f, f^\#)$  de **morfismo dominante** se  $\text{Im}f$  é denso em  $M$ .

**Proposição 2.3.10.** Seja  $f : (V, \mathcal{F}_V) \rightarrow (M, \mathcal{F}_M)$  um morfismo dominante de variedades. Sejam  $v \in V$  e  $w \in M$  seus pontos genéricos. Então  $f(v) = w$ .

*Demonstração.* Sabe-se que o ponto genérico é único, portanto, se provarmos que  $f(v)$  é denso em  $M$  segue o esperado.

Lembre que é suficiente mostrar que  $\{f(v)\} \cap U \neq \emptyset$ , para todo  $U$  aberto de  $M$ . Seja  $U \subseteq M$  um aberto qualquer. Temos que  $f(V) \cap U \neq \emptyset$ , já que  $f$  é dominante. Logo, existe  $x \in V$  tal que  $f(x) \in U$ . Como  $v$  é ponto genérico, então  $f^{-1}(U) \cap \{v\} \neq \emptyset$ . Portanto  $U \cap \{f(v)\} \neq \emptyset$ .  $\square$

**Observação 2.3.11.** Se tomarmos  $(V, \mathcal{F}_V)$  uma variedade de  $(X, \mathcal{F}_X)$  e  $M = f(V)$ , teremos que  $f|_V : (V, \mathcal{F}_V) \rightarrow M$  é um morfismo dominante de variedades. Portanto, dados  $v \in V$  e  $m \in M$  os pontos genéricos, pela Proposição 2.3.10 temos que  $f(v) = m$ .

Agora, seja  $\text{Spec}(B)$  um aberto afim de  $M$  tal que  $m \in \text{Spec}(B)$  e tome  $f^{-1}(\text{Spec}(B))$ . Pelo fato de  $f$  ser contínua segue que  $f^{-1}(\text{Spec}(B))$  é um aberto de  $V$ , além disso, como  $v$  é ponto genérico,  $v \in f^{-1}(\text{Spec}(B))$ . Podemos tomar um aberto afim  $\text{Spec}(A)$ , com  $v \in \text{Spec}(A)$  e  $f(\text{Spec}(A)) \subseteq f^{-1}(\text{Spec}(B))$ , logo, podemos restringir  $f|_{\text{Spec}(A)} : \text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(B)$ .

De forma análoga à feita na demonstração da Proposição 2.2.26 é possível provar que  $\mathcal{O}_{\text{Spec}(B),m} \cong \mathcal{F}_{M,m}$ . Agora, se  $M$  é variedade, por definição temos que  $M$  é um esquema reduzido e pelo Lema 2.2.24  $\mathcal{F}_{M,m}$  é reduzido, então  $\mathcal{O}_{\text{Spec}(B),m}$  é reduzido.

Como  $f|_{\text{Spec}(A)}$  é dominante segue por [11, Corolário 2.11] que  $f_v^\# : \mathcal{F}_{M,m} \rightarrow \mathcal{F}_{V,v}$  é injetora. Pela definição temos  $\mathcal{F}_{M,m} = R(M)$  e  $\mathcal{F}_{V,v} = R(V)$ , ou seja,  $f$  induziu uma inclusão entre os corpos de funções de  $V$  e  $M$  e portanto  $\dim(M) < \dim(V)$ .

**Definição 2.3.12.** Sejam  $(X, \mathcal{F}_X)$  uma variedade e  $(V, \mathcal{F}_V)$  uma subvariedade de  $(X, \mathcal{F}_X)$  de codimensão 1. Dada  $\varphi \in R(X)^*$  (Definição 2.2.36), que pela Observação 2.3.7 pode ser escrita como  $\varphi = a/b$ , com  $a, b \in \mathcal{F}_{X,V}$ , definimos a **ordem de  $\varphi$  ao longo de  $V$**  como sendo

$$\text{ord}_V(\varphi) = l\left(\frac{\mathcal{F}_{X,V}}{\langle a \rangle}\right) - l\left(\frac{\mathcal{F}_{X,V}}{\langle b \rangle}\right).$$

Nesta definição é exigido que  $(V, \mathcal{F}_V)$  seja de codimensão 1 para que  $\mathcal{F}_{X,V}$  seja de comprimento finito (ver [8, Lema A.3]).

A fim de facilitar a notação denote  $\mathcal{F}_{X,V} = A$ .

Ao dizer que o conceito acima está bem definido queremos dizer que, se a função  $\varphi$  possuir duas representações, sendo tais representações  $a/b$  e  $c/d$ , então o valor  $\text{ord}_V(\varphi)$  não se altera.

De fato, escolhidas as representações, temos que  $a/b = c/d$ , então, pela construção do corpo de funções, segue que  $ad = cb$ . Portanto  $l\left(\frac{A}{\langle ad \rangle}\right) = l\left(\frac{A}{\langle cb \rangle}\right)$ . Aplicando o Lema 1.1.37, temos então

$$l\left(\frac{A}{\langle a \rangle}\right) + l\left(\frac{A}{\langle d \rangle}\right) = l\left(\frac{A}{\langle c \rangle}\right) + l\left(\frac{A}{\langle b \rangle}\right) \Rightarrow l\left(\frac{A}{\langle a \rangle}\right) - l\left(\frac{A}{\langle b \rangle}\right) = l\left(\frac{A}{\langle c \rangle}\right) - l\left(\frac{A}{\langle d \rangle}\right).$$

O que garante que a Definição 2.3.12 está bem definida.

**Proposição 2.3.13.** Sejam  $(X, \mathcal{F}_X)$  uma variedade,  $(V, \mathcal{F}_V)$  uma subvariedade de  $(X, \mathcal{F}_X)$ ,  $\varphi = a/b \in R(X)^*$  e  $\varphi' = c/d \in R(X)^*$ . Então valem as propriedades a seguir

- (i)  $\text{ord}_V(\varphi\varphi') = \text{ord}_V(\varphi) + \text{ord}_V(\varphi')$ ;
- (ii)  $\text{ord}_V(\varphi^{-1}) = -\text{ord}_V(\varphi)$ .

*Demonstração.* Note que  $\text{ord}_V(\varphi\varphi') = \text{ord}_V\left(\frac{ac}{bd}\right)$ . Pela definição, temos que

$$\text{ord}_V\left(\frac{ac}{bd}\right) = l\left(\frac{A}{\langle ac \rangle}\right) - l\left(\frac{A}{\langle bd \rangle}\right).$$

Agora, pelo Teorema 1.1.37, temos

$$l\left(\frac{A}{\langle ac \rangle}\right) - l\left(\frac{A}{\langle bd \rangle}\right) = l\left(\frac{A}{\langle a \rangle}\right) + l\left(\frac{A}{\langle c \rangle}\right) - l\left(\frac{A}{\langle b \rangle}\right) - l\left(\frac{A}{\langle d \rangle}\right) =$$

$$= l\left(\frac{A}{\langle a \rangle}\right) - l\left(\frac{A}{\langle b \rangle}\right) + l\left(\frac{A}{\langle c \rangle}\right) - l\left(\frac{A}{\langle d \rangle}\right) = \text{ord}_V(\varphi) + \text{ord}_V(\varphi').$$

(ii) Sabemos que  $\varphi^{-1} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$ . Logo,

$$\text{ord}_V(\varphi^{-1}) = \text{ord}_V\left(\frac{b}{a}\right) = l\left(\frac{A}{\langle b \rangle}\right) - l\left(\frac{A}{\langle a \rangle}\right) = -\text{ord}_V(\varphi).$$

□

## 2.4 Fibrados vetoriais

A partir dessa seção denotamos um esquema ou variedade simplesmente por seu espaço topológico, ou seja, se  $(X, \mathcal{F}_X)$  é um esquema ou variedade, denotamos apenas por  $X$ . Da mesma forma os morfismos  $(f, f^\#)$  são denotados simplesmente por  $f$ .

Veremos nesta seção que fibrados vetoriais são estruturas associadas a variedades e possuem localmente propriedades de espaços vetoriais.

**Definição 2.4.1.** *Um **fibrado vetorial**  $E$  de posto  $r$  em um esquema  $X$  (ou **fibrado vetorial de posto  $r$  de base  $X$** ) é uma variedade  $E$  (e portanto um esquema sobre um corpo  $K$ ) junto com um morfismo  $p : E \rightarrow X$  (chamado **morfismo estrutural**) que satisfaz as condições a seguir:*

- a) *Existe uma cobertura aberta  $\{U_i\}_{i \in I}$  de  $X$  e isomorfismos  $\varphi_i$  de  $E_{U_i} = p^{-1}(U_i)$  em  $U_i \times V$ , com  $V$  espaço vetorial sobre  $K$  de dimensão  $r$ ;*
- b) *Para cada  $i, j$  a composição*

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : U_i \cap U_j \times V \rightarrow U_i \cap U_j \times V$$

*é um isomorfismo dado por*

$$(x, v) \mapsto (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(x, v) = (x, g_{ij}(x)v),$$

*onde  $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL(r, K)$ , chamada **função de transição**, com  $GL(r, K)$  o conjunto das matrizes  $r \times r$  invertíveis com coeficientes em  $K$ , que estão relacionados com os operadores invertíveis em  $V$ .*

*Se  $E$  for um fibrado vetorial de posto 1 então  $E$  é chamado **fibrado linha**.*

Os morfismos  $\varphi_i$  da definição acima são ditos a **trivialização** do fibrado vetorial, ou que **trivializam** o fibrado vetorial. Além disso, dado  $x \in X$  chamamos  $p^{-1}(\{x\}) = E_x$  de **fibra** de  $E$ .

**Observação 2.4.2.** *Sendo um fibrado vetorial  $E$  uma variedade, e portanto um esquema algébrico, ele é um esquema sobre um corpo  $K$ . Assim, na definição, para cada índice  $i$ ,  $E_{U_i} \cong U_i \times V$ , com  $V$  espaço vetorial sobre esse corpo  $K$ .*

**Observação 2.4.3.** *Lembre que um espaço vetorial  $V$  de dimensão  $r$  sobre um corpo  $K$  é isomorfo ao produto cartesiano de  $r$  cópias de  $K$ , ou seja,  $V \cong K^r$ . Além disso, na Definição [1.2.1](#) adotamos a notação  $\mathbb{A}_K^r$  para denotar  $K^r$ .*

Tome  $E$  um fibrado vetorial de posto  $r$  em um esquema  $X$  e  $U_i \subseteq X$  um aberto afim tal que  $E_{U_i} \cong U_i \times V$ . Dessa forma, podemos considerar  $E_{U_i} \cong U_i \times \mathbb{A}_K^r$ .

Assim, a depender da situação, usamos  $V$  ou  $\mathbb{A}_K^r$ .

**Observação 2.4.4.** Em [32, Pg. 54] vemos é possível definir um fibrado vetorial  $E$  em  $X$  a partir da união de fibras  $E_x$ , com  $x \in X$ . Tome  $E = \bigcup_{x \in X} E_x$ , se existe uma cobertura aberta  $\{U_i\}$  de  $X$  tal que  $E_{U_i} \cong U_i \times V$ , para algum espaço vetorial  $V$ , então  $E$  é um fibrado vetorial.

**Exemplo 2.4.5.** Seja  $E$  um fibrado vetorial em  $X$  e  $\{U_i\}$  uma cobertura aberta de  $X$  como no item a) da Definição 2.4.1. Para cada  $E_{U_i}$  considere  $E_{U_i}^* := U_i \times V^*$ , onde  $V^*$  é o espaço dual de  $V$ . Além disso, considere a informação de colagem  $(\{E_{U_i}^* = U_i \times V^*\}, \{E_{U_i \cap U_j}^* = (U_i \cap U_j) \times V^*\}, \{i_{ij} : E_{U_i \cap U_j}^* \rightarrow E_{U_j \cap U_i}^*\})$ , onde  $i_{ij}$  são os morfismos de inclusões. Com isso, podemos considerar a colagem  $E^*$  das coleções da informação de colagem.

Sejam  $E$  e  $F$  fibrados vetoriais sobre  $X$ . Para cada  $x \in X$  temos que  $E_x \cong \{x\} \times V \cong V$  e  $F_x \cong x \times V' \cong V'$ , com  $V$  e  $V'$  espaços vetoriais. Com isso, podemos considerar o produto tensorial  $E_x \otimes F_x \cong \{x\} \times (V \otimes V')$ , para todo  $x \in X$ . Pela Observação 2.4.4,  $E \otimes F := \bigcup_{x \in X} E_x \otimes F_x$  é um fibrado vetorial.

**Definição 2.4.6.** Os fibrados vetoriais  $E^*$  e  $E \otimes F$  construídos no exemplo acima são chamados **fibrado dual** de  $E$  e **produto tensorial** entre  $E$  e  $F$ , respectivamente.

**Teorema 2.4.7.** Existe uma correspondência biunívoca entre os feixes localmente livres de posto  $r$  e fibrados vetoriais de posto  $r$ .

*Demonstração.* Seja  $p : E \rightarrow X$  um fibrado vetorial de posto  $r$ . Defina o feixe  $\mathcal{G}$  de  $X$  dado pelos abertos

$$\mathcal{G}(U) = \{s : U \rightarrow E ; p \circ s = id_U\}.$$

É fácil ver que esse é um feixe de  $\mathcal{F}_X$ -módulos. Localmente, em algum aberto  $U$  de  $X$  tal que  $p$  é da forma  $p : U \times \mathbb{A}_K^r \rightarrow U$ , temos que

$$\mathcal{G}(U) = \{s : U \rightarrow \mathbb{A}_K^r\}.$$

Portanto, um elemento do feixe  $\mathcal{G}$  é visto localmente como  $r$  funções independentes. Em outras palavras,  $\mathcal{G}|_U$  é isomorfo a  $\mathcal{F}_X|_U^r$ , o que, por definição, faz de  $\mathcal{G}$  um feixe localmente livre.

Provemos a recíproca. Seja  $\mathcal{G}$  um feixe localmente livre. Considere  $\{U_i\}$  uma cobertura aberta de  $X$  tal que existem isomorfismos  $\varphi_i : \mathcal{G}|_{U_i} \rightarrow \mathcal{F}_X|_{U_i}^r$ . Considere as coleções de esquemas  $\{U_i \times \mathbb{A}_K^r\}$  e  $\{U_i \cap U_j \times \mathbb{A}_K^r\}$  junto dos morfismos de inclusão trivial, que nos dão uma informação de colagem, obtendo um esquema pela colagem. Além disso, vemos que  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$  é um isomorfismo de feixes de  $\mathcal{F}_X$ -módulos e são lineares em  $\mathbb{A}_K^r$ . Portanto, a cobertura aberta  $\{U_i\}$  junto dos morfismos  $\varphi_i$  são uma trivialização de um fibrado vetorial, provando o resultado.  $\square$

**Definição 2.4.8.** Uma **seção** de um fibrado vetorial  $p : E \rightarrow X$  é um morfismo  $s : X \rightarrow E$  tal que  $p \circ s = Id_X$ . Em particular, se uma seção  $s$  é dada por  $s(x) = 0_x$ , onde  $0_x$  é o vetor nulo de  $E_x$ , chamamos de **seção nula** de  $E$ . Denotamos o conjunto de seções do fibrado vetorial por  $\mathcal{L}(E)$ .

Dadas  $s_1$  e  $s_2$  seções, definimos uma seção  $s_1 + s_2$  dada por  $(s_1 + s_2)(x) = s_1(x) + s_2(x)$  para todo  $x \in X$ .

**Observação 2.4.9.** Note que  $\mathcal{L}(E)$  com a operação  $+$  forma um grupo abeliano. A verificação é feita de forma análoga ao que pode ser feito para o caso de funções, como comentado no Exemplo [2.1.2](#).

O objetivo agora é analisar como as seções de fibrados vetoriais podem ser expressas por expressões locais.

Seja  $s$  uma seção de um fibrado vetorial  $p : E \rightarrow X$  de posto  $r$ . Tome  $\{U_i\}$  uma cobertura afim de  $X$  de forma que  $\varphi_i : p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times V$  sejam a trivialização do fibrado vetorial  $E$  que, pela definição, temos que  $\varphi_i(p^{-1}(U_i)) \cong U_i \times \mathbb{A}_K^r$ .

Também pela definição, denotando  $U_{ij} = U_i \cap U_j$ , temos que

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : U_{ij} \times \mathbb{A}_K^r \rightarrow U_{ij} \times \mathbb{A}_K^r,$$

onde  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x, v) \mapsto (x, g_{ij}(x)v)$ , com  $g_{ij}$  como na definição de fibrado vetorial.

Considerando  $s : X \rightarrow E$  e  $\varphi_i : p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{A}_K^r$ , faz sentido considerar a composição  $\varphi_i \circ s|_{U_i} : U_i \rightarrow U_i \times \mathbb{A}_K^r$ . O [\[32\]](#), Exemplo 6.1] garante que existe  $s_i \in \mathcal{F}_X(U_i)^r$  tal que

$$\varphi_i \circ s|_{U_i}(x) = (x, s_i(x)),$$

e ainda, para todo  $x \in U_{ij}$ , temos a igualdade

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x, s_j(x)) = \varphi_i \circ s|_{U_j}(x) = \varphi_i \circ s|_{U_i}(x).$$

Portanto, segue que  $g_{ij} \circ s_j = s_i$  em  $\mathcal{F}_X(U_{ij})^r$  para quaisquer  $i, j$ .

Da mesma forma, dadas  $s_i$  como definido acima, existirá apenas uma seção  $s$  tal que  $s$  terá tais  $s_i$  como informações locais.

**Definição 2.4.10.** Os elementos  $s_i$  apresentados na construção acima são ditos **expressões locais** da seção  $s$ .

Podemos, a partir dessa descrição de seções, definir uma estrutura importante no esquema  $X$  que vemos no exemplo a seguir.

**Exemplo 2.4.11.** Seja  $p : E \rightarrow X$  um fibrado vetorial e  $s$  uma seção. O **zero-esquema** de  $s$ , denotado por  $Z(s)$ , é o subesquema fechado dado por

$$Z(s) := \{x \in X ; s(x) = 0_x\}.$$

Se  $E$  é um fibrado linha, chamamos esse zero-esquema de **hipersuperfície**.

Note que  $Z(s)$  é de fato um subesquema fechado de  $X$ . Sabemos que o conjunto de zeros de um morfismo de espaços topológicos é fechado, além disso, o feixe de  $Z(s)$  é dado simplesmente por  $\mathcal{F}_X|_{Z(s)}$ . Com isso,  $Z(s)$  é subesquema fechado.

**Exemplo 2.4.12.** Seja  $E$  um fibrado de linha em  $X$  tal que  $E$  e  $X$  sejam variedades complexas. Se uma hipersuperfície  $Z$  de  $X$  é dada por uma função holomorfa  $s : X \rightarrow E$ , ou seja,  $Z = Z(s)$ , dizemos que  $Z$  é uma **hipersuperfície complexa**.

**Observação 2.4.13.** Sejam  $E$  um fibrado vetorial de posto  $r$  em  $X$  e  $x \in E$  um ponto qualquer. Como  $E$  é localmente isomorfo a um espaço vetorial de posto  $r$  podemos associar a  $x$  coordenadas  $x_1, \dots, x_r$  e representá-lo por  $x = (x_1, \dots, x_r)$ , nesse caso dizemos que  $x_1, \dots, x_r$  são as **coordenadas locais** de  $x$ .

**Exemplo 2.4.14.** *Seja  $E$  um fibrado vetorial de posto  $r$  em  $X$  e  $\{U_i\}$  uma cobertura aberta de  $X$  como no item a) da Definição 2.4.1. Sabemos que para cada  $U_i$  temos  $E_{U_i} \cong U_i \times V$ . Além disso, pela Observação 2.4.3 temos que  $V \cong \mathbb{A}_K^r$ , dessa forma faz sentido considerar  $\mathbb{P}(V) := \mathbb{P}(\mathbb{A}_K^r)$ , chamado **espaço projetivo** de  $V$  (Definição 1.2.3).*

*Agora, para cada  $E_{U_i}$  seja  $\mathbb{P}(E_{U_i}) := U_i \times \mathbb{P}(V)$ . Considere a informação de colagem  $(\{\mathbb{P}(E_{U_i})\}, \{\mathbb{P}(E_{U_i \cap U_j})\}, \{i_{ij} : \mathbb{P}(E_{U_i \cap U_j}) \rightarrow \mathbb{P}(E_{U_j \cap U_i})\})$ , com  $i_{ij}$  os morfismos identidade. Com isso, podemos considerar a colagem  $\mathbb{P}(E)$  desta informação de colagem.*

**Definição 2.4.15.** *O esquema construído acima é chamado **fibrado projetivo** de  $E$ .*

**Observação 2.4.16.** *Pela Observação 2.4.4 o fibrado projetivo de  $E$  pode ser escrito como  $\mathbb{P}(E) = \bigcup_{x \in X} \mathbb{P}(E_x)$ .*

Em geral, dado um espaço vetorial de dimensão  $r$ , podemos considerar os subespaços vetoriais de dimensão  $m < r$ , para  $m \neq 1$  se  $r \geq 3$ , obtendo um fibrado vetorial de maneira análoga ao fibrado projetivo. Dessa forma, é natural o caso geral que vemos a seguir, começando por espaços vetoriais.

**Definição 2.4.17.** *Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão  $r$ . A **Grassmanniana**  $Gr(m, V)$  é o conjunto de todos os subespaços vetoriais de dimensão  $m$  de  $V$ , com  $m < r$ .*

*De forma totalmente análoga ao fibrado projetivo, dado  $E$  um fibrado vetorial de posto  $r$  em  $X$  e  $m \in \mathbb{N}$ , com  $m < r$ , definimos o **fibrado Grassmanniano**  $Gr(m, E)$  dado pela colagem de  $(\{U_i \times Gr(m, E_{U_i})\}, \{U_i \cap U_j \times Gr(m, E_{U_i \cap U_j})\}, \{i_{ij} : Gr(m, E_{U_i \cap U_j}) \rightarrow Gr(m, E_{U_j \cap U_i})\})$ , sendo  $i_{ij}$  os morfismos identidade.*

**Observação 2.4.18.** *Seja  $V$  um espaço vetorial qualquer. Tome a Grassmanniana  $Gr(1, V)$ . Note que,  $Gr(1, V)$  é o conjunto de todos os subespaços vetoriais  $l_i$  de dimensão 1 de  $V$ . Perceba que pelo fato de  $l_i$  ser subespaço vetorial para todo  $i$  devemos ter  $\{0\} \subset l_i$ . Além disso, como  $l_i$  possui dimensão 1 então  $l_i$  é uma reta. Portanto  $Gr(1, V)$  é o conjunto de todas as retas de  $V$  passando pela origem, o que coincide com a definição de  $\mathbb{P}(V)$ . Portanto o fibrado Grassmanniano  $Gr(1, E)$  coincide com o fibrado projetivo  $\mathbb{P}(E)$ .*

**Definição 2.4.19.** *Seja  $p : E \rightarrow X$  um fibrado vetorial. Dizemos que uma subvariedade fechada  $F$  de  $E$  é um **subfibrado vetorial** se  $F_x = F \cap E_x$  são subespaços vetoriais de  $E_x$ , para todo  $x \in X$ , tal que  $F$ , junto da aplicação  $p|_F : F \rightarrow X$ , e as estruturas induzidas de espaços vetoriais formam um fibrado vetorial.*

**Exemplo 2.4.20.** *Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão  $n+1$  e  $\mathbb{P}(V)$  seu espaço projetivo. É fácil ver que, tomando  $\pi : \mathbb{P}(V) \times V \rightarrow \mathbb{P}(V)$  a projeção da primeira coordenada  $\pi(l, v) = l$ ,  $\mathbb{P}(V) \times V$  é um fibrado vetorial de posto  $n+1$  em  $\mathbb{P}(V)$ . De fato, basta notar que  $\mathbb{P}(V) \times V = \bigcup_{l \in \mathbb{P}(V)} \{l\} \times V$ , e, como  $V$  tem dimensão  $n+1$ , o resultado segue pela Observação 2.4.4. Agora, considere o conjunto  $E'$  de pares  $(l, v)$  tais que  $l \in \mathbb{P}(V)$  e  $v \in l \subseteq V$ . Note que  $E' \subseteq \mathbb{P}(V) \times V$ , portanto podemos considerar o morfismo  $p : E' \rightarrow \mathbb{P}(V)$ , com  $p = \pi|_{E'}$ . É fácil ver que  $E'$  é um fibrado vetorial em  $\mathbb{P}(V)$  de posto 1 cujo morfismo estrutural é dado por  $\pi_{E'} : E' \rightarrow \mathbb{P}(V)$ . O fibrado vetorial  $E'$  é chamado **fibrado tautológico** de  $V$ , que é um subfibrado vetorial de  $\mathbb{P}(V) \times V$ .*

## 2.5 Produto fibrado

Nesta seção vemos uma maneira de obter um esquema, necessário para a construção de um morfismo especial, chamado morfismo diagonal, que nos permite definir um importante

tipo de morfismo, chamado de próprio, e a noção de esquemas singulares. Também por meio de produto fibrado é possível estender os fibrados tautológicos de espaços vetoriais, visto no Exemplo 2.4.20, para fibrados vetoriais em geral.

**Definição 2.5.1.** *Sejam  $X$  e  $Y$  dois esquemas sobre um esquema  $S$  (Definição 2.2.23). Um **produto fibrado de  $X$  e  $Y$  sobre  $S$**  é um esquema  $X \times_S Y$  junto de dois morfismos  $\pi_X : X \times_S Y \rightarrow X$  e  $\pi_Y : X \times_S Y \rightarrow Y$ , chamados **morfismos projeção**, tais que o diagrama a seguir comuta*

$$\begin{array}{ccc} X \times_S Y & \xrightarrow{\pi_Y} & Y \\ \pi_X \downarrow & & \downarrow y \\ X & \xrightarrow{x} & S \end{array}$$

e, para todo esquema  $Z$  e morfismos  $f : Z \rightarrow X$  e  $g : Z \rightarrow Y$  tais que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{g} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow y \\ X & \xrightarrow{x} & S \end{array}$$

comuta existe um único  $\theta : Z \rightarrow X \times_S Y$  tal que  $f = \pi_X \circ \theta$  e  $g = \pi_Y \circ \theta$ .

**Proposição 2.5.2.** *Todo produto fibrado é único a menos de isomorfismos.*

*Demonstração.* Ver [15, Teorema 3.3]. □

O exemplo a seguir, além de mostrar que a partir de um morfismo de esquemas qualquer sempre é possível obter um produto fibrado, apresenta um morfismo importante ao desenvolvimento do trabalho.

**Exemplo 2.5.3.** *Seja  $f : X \rightarrow Y$  morfismo de esquemas, ou seja, pela Definição 2.2.23  $X$  é um esquema sobre  $Y$ . Além disso, como a identidade  $i : Y \rightarrow Y$  é um morfismo de esquemas é possível tomar o produto fibrado  $X \times_Y X$ , pois  $X$  e  $Y$  são esquemas sobre  $Y$ . Tomando o morfismo identidade  $id_X : X \rightarrow X$ , considere o morfismo  $\Delta : X \rightarrow X \times_Y X$ , tal que  $id_X = \pi_X \circ \Delta$ . Em diagrama*

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & X \\ & \searrow \Delta & & \xrightarrow{\pi_X} & \\ & & X \times_Y X & & X \\ & & \downarrow \pi_X & & \downarrow f \\ X & & X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \swarrow Id_X & & & \end{array}$$

Chamamos o morfismo  $\Delta$  de **morfismo diagonal**.

**Proposição 2.5.4.**  $\Delta : X \rightarrow \Delta(X)$  é um homeomorfismo de espaços topológicos.

*Demonstração.* Primeiramente, note que, pelo fato de  $id_X = \pi_X \circ \Delta$ , segue que  $\Delta$  é injetora, pois

$$\Delta(x) = \Delta(y) \Rightarrow \pi_X(\Delta(x)) = \pi_X(\Delta(y)) \Rightarrow x = y.$$

Além disso, sabemos que  $\Delta : X \rightarrow \Delta(X)$  é sobrejetiva, já que o contradomínio coincide com a imagem. Portanto temos que  $\Delta : X \rightarrow \Delta(X)$  é bijetora. Nos resta mostrar que  $\Delta$  e sua inversa são contínuas.

Sabemos que  $\Delta$  é uma aplicação contínua entre espaços topológicos (Definição 2.2.22). Como  $\pi_X \circ \Delta$  é a identidade de  $X$ , temos que a restrição  $\pi_X|_{\Delta(X)}$  será a inversa de  $\Delta$ , que é contínua. Logo,  $\Delta : X \rightarrow \Delta(X)$  é homeomorfismo.  $\square$

Com o morfismo diagonal podemos definir os seguintes morfismos.

**Definição 2.5.5.** *Sejam  $X$  e  $Y$  esquemas.*

- Um morfismo de esquemas  $f : X \rightarrow Y$  é dito **separado** se  $\Delta(X)$  é um subesquema fechado de  $X \times_Y X$ , com  $\Delta$  sendo o morfismo diagonal.
- Seja  $f : X \rightarrow Y$  um morfismo de esquemas. Dizemos que  $f$  é **universalmente fechado** se para todo esquema  $Z$  sobre  $Y$  a projeção  $\pi_Z : X \times_Y Z \rightarrow Z$  é uma aplicação fechada. Se  $f$  for separado, do tipo finito e universalmente fechado chamamos  $f$  de **próprio**.

Se  $Y = \{p\}$  e o morfismo trivial  $f : X \rightarrow Y$ , dado por  $f(x) = p$  para todo  $x \in X$ , é próprio então dizemos que  $X$  é **completo**.

**Observação 2.5.6.** *Sejam  $X$  e  $Y$  esquemas e  $f : X \rightarrow Y$  um morfismo separado. Pela definição temos que  $\Delta(X)$  é um subesquema fechado de  $X$ , com  $\Delta : X \rightarrow X \times_Y X$ . Lembre que, pela Definição 2.2.30 temos que  $\Delta(X)$  é um subesquema fechado se, e somente se,  $\Delta$  é uma imersão fechada. Portanto, temos que  $f$  é separado se  $\Delta : X \rightarrow X \times_Y X$  é uma imersão fechada.*

**Observação 2.5.7.** *Note que a noção de separabilidade em esquemas é análoga a um dos axiomas de separação de topologia. Primeiramente lembre que um dos axiomas de separabilidade em espaços topológicos ocorre se  $X$  é Hausdorff. Além disso, temos que  $X$  é Hausdorff se, e somente se,  $\Delta' = \{(x, x); x \in X\} \subseteq X \times X$ , também chamado diagonal, é um conjunto fechado. Dessa forma, vemos que  $\Delta(X) \subseteq X \times_Y X$  expande o conceito da diagonal  $\Delta' = \{(x, x); x \in X\} \subseteq X \times X$  de espaços topológicos.*

Vamos agora apresentar algumas propriedades de morfismos próprios.

**Proposição 2.5.8.** *Todo morfismo próprio é fechado como aplicação entre espaços topológicos.*

*Demonstração.* Seja  $f : X \rightarrow Y$  um morfismo próprio. Considere  $Y$  como um esquema sobre  $Y$  por meio do morfismo identidade  $\text{id}_Y$ . Além disso, como  $f : X \rightarrow Y$  é um morfismo de esquemas, temos que  $X$  é um esquema sobre  $Y$ . Portanto, temos o produto fibrado  $X \times_Y Y$  e o diagrama a seguir comuta

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y Y & \xrightarrow{\pi_Y} & Y \\ \pi_X \downarrow & & \downarrow \text{id}_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Seja  $F$  um fechado de  $X$ , como  $\pi_X$  é contínua, segue que  $\pi_X^{-1}(F)$  é um fechado de  $X \times_Y Y$ . Como  $f$  é própria, então  $f$  é universalmente fechada, logo temos que  $\pi_Y$  é uma aplicação fechada, e, portanto,  $\pi_Y(\pi_X^{-1}(F))$  é fechado de  $Y$ .

Perceba que  $\pi_X$  é sobrejetora. De fato, tome  $x \in X$  e  $f(x) \in Y$ , com isso  $x$  e  $f(x)$  são levados aos mesmos pontos pelos morfismos  $f$  e  $\text{id}_Y$ . Portanto deve existir  $z \in X \times_Y Y$  tal que  $\pi_X(z) = x$  e  $\pi_Y(z) = f(x)$ .

Agora note, como  $\text{id}_Y \circ \pi_Y = f \circ \pi_X$ , temos

$$\pi_Y(\pi_X^{-1}(F)) = \text{id}_Y(\pi_Y(\pi_X^{-1}(F))) = f(\pi_X(\pi_X^{-1}(F))) = f(F)$$

Portanto  $f$  é fechada.  $\square$

**Observação 2.5.9.** *Seja  $(f, f^\#) : (X, \mathcal{F}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{F}_Y)$  um morfismo próprio de esquemas e  $(Z, \mathcal{F}_Z)$  um subesquema fechado de  $(X, \mathcal{F}_X)$  então, utilizando a Proposição 2.5.8 acima temos que  $(f(Z), \mathcal{F}_Y|_{f(Z)})$  será um subesquema fechado de  $(Y, \mathcal{F}_Y)$ . Além disso, se  $(Z, \mathcal{F}_Z)$  é um subesquema fechado e irredutível, então  $(f(Z), \mathcal{F}_Y|_{f(Z)})$  é um subesquema fechado e irredutível. De fato, pela afirmação acima  $(f(Z), \mathcal{F}_Y|_{f(Z)})$  é um subesquema fechado de  $(Y, \mathcal{F}_Y)$ , portanto nos resta mostrar que é irredutível.*

Agora, se  $f(Z) = U_1 \cup U_2$  é uma união disjunta de fechados e tomando a restrição  $f|_Z : Z \rightarrow f(Z)$ , que é sobrejetiva, então  $f|_Z^{-1}(U_1 \cup U_2) = f|_Z^{-1}(U_1) \cup f|_Z^{-1}(U_2) = Z$  serão dois fechados disjuntos de  $Z$ . Pelo fato de  $Z$  ser irredutível, temos que  $Z = f|_Z^{-1}(U_i)$  para algum  $i \in \{1, 2\}$ .

Novamente utilizando a sobrejetividade de  $f|_Z^{-1}$ , segue  $f|_Z(f|_Z^{-1}(U_i)) = U_i$ , ou seja,  $f(Z)$  é irredutível.

**Proposição 2.5.10.** *Seja  $f : X \rightarrow Y$  um morfismo qualquer de esquemas e  $Z \subseteq Y$  um subesquema fechado de  $Y$ . O pullback  $f^{-1}(Z)$  (Definição 2.2.43) é isomorfo ao produto  $Z \times_Y X$ .*

*Demonstração.* A explicação desse resultado é desenvolvida em [32], Capítulo 4, Seção 4.1].  $\square$

**Observação 2.5.11.** *Seja  $Z \subseteq Y$  um subesquema fechado de  $Y$ . Com isso, existe uma imersão fechada  $i : Z \rightarrow Y$  (Definição 2.2.30). Tome agora  $f : X \rightarrow Z$  um morfismo de esquemas qualquer. Note ainda que  $X$  é um esquema sobre  $Y$ . De fato, basta tomar  $f' = f \circ i : X \rightarrow Y$ . Portanto, como  $Z$  e  $X$  são esquemas sobre  $Y$ , podemos considerar o produto fibrado  $Z \times_Y X$ .*

Em [32], p. 41] é mostrado que existe um morfismo  $j : Z \times_Y X \rightarrow X$  que é uma imersão fechada, ou seja,  $Z \times_Y X$  é um subesquema fechado de  $X$ . Agora, pela Proposição 2.5.10 acima, temos que  $Z \times_Y X \cong f^{-1}(Z)$  e, portanto, segue que existe uma imersão fechada de  $f^{-1}(Z)$  em  $X$ . Logo,  $f^{-1}(Z)$  é subesquema fechado de  $X$ .

Agora, apresentadas as propriedades de morfismos próprios, utilizamos o morfismo diagonal para definir a noção de esquemas singulares e suaves. Para isso, antes é necessário o exemplo a seguir em que apresentamos um novo feixe especial.

**Exemplo 2.5.12.** *A aplicação  $\Delta$  define uma aplicação entre  $X$  e  $\Delta(X)$ . Note que se  $\Delta$  for um morfismo separado, temos que  $\Delta(X)$  é um subesquema fechado e, portanto, possui seu feixe ideal  $\mathcal{I}_{\Delta(X)}$  (Definição 2.2.38). Caso  $\Delta$  não seja um morfismo separado, então, pelo feito na demonstração de [15, Corolário 4.2], existe um subesquema aberto  $W \subseteq X \times_Y X$  tal que  $\Delta(X)$  é subesquema fechado de  $W$ . Com isso, podemos considerar  $\mathcal{I}_{\Delta(X)}$  o feixe ideal de  $\Delta(X)$  em  $W$ .*

Chamamos de **feixe relativo de diferenciais** de  $X$  sobre  $Y$  o feixe

$$\Omega_{X/Y} = \Delta^*(\mathcal{I}_{\Delta(X)}/\mathcal{I}_{\Delta(X)}^2).$$

**Notação:** Se  $Y = \text{Spec}(K)$ , para  $K$  corpo, então denotamos  $\Omega_{X/Y}$  simplesmente por  $\Omega_X$ . Com as definições e exemplos acima podemos definir quando esquemas são singulares.

**Definição 2.5.13.** *Seja  $f : X \rightarrow Y$  um morfismo de esquemas algébricos sobre  $K$ . Dizemos que  $f$  é **suave** se  $f$  for um morfismo flat (Definição 2.3.8) e  $\Omega_{X/Y}$  for um feixe localmente livre (Definição 2.1.27). Neste caso dizemos que  $X$  é **suave sobre  $Y$** .*

*Dizemos que  $X$  é um **esquema suave** se  $X$  for suave sobre  $\text{Spec}(K)$ . Se  $X$  não for suave chamamos  $X$  de **singular**.*

Agora vamos associar um fibrado vetorial especial a um esquema suave. Vemos que a proposição a seguir garante que tal fibrado vetorial existe.

**Teorema 2.5.14.** *Seja  $X$  uma variedade suave sobre um corpo  $K$  de dimensão  $n$ . Então  $\Omega_X$  é um feixe localmente livre de dimensão  $n$ .*

*Demonstração.* Para a demonstração desse resultado veja [15, Teorema 8.17]. □

**Observação 2.5.15.** *Seja  $X$  uma variedade suave sobre um corpo  $K$ . Pelo Teorema 2.5.14 acima temos que  $\Omega_X$  é um feixe localmente livre. Agora, pelo Teorema 2.4.7 existe um fibrado vetorial isomorfo ao feixe relativo de diferenciais  $\Omega_X$  que, abusando de notação, denotamos também por  $\Omega_X$ .*

*Portanto, como  $\Omega_X$  é um fibrado vetorial de posto  $n$  em  $X$ , existe um morfismo de esquemas  $p : \Omega_X \rightarrow X$ , onde  $p^{-1}(x)$  é isomorfo a um fibrado vetorial de posto  $n$ .*

**Definição 2.5.16.** *Seja  $X$  uma variedade suave. Definimos o **fibrado tangente** de  $X$ , denotado por  $TX$ , como sendo o fibrado dual  $\Omega_X^*$  (Definição 2.4.6).*

As expressões locais de uma seção podem ser utilizadas para definirmos um subesquema fechado específico de uma hipersuperfície.

**Exemplo 2.5.17.** *Sejam  $X$  uma variedade suave de dimensão  $n$  e  $Z$  uma hipersuperfície irredutível de  $X$  dada por uma seção  $s$  de um fibrado linha  $\mathcal{L}$ . Pelo Teorema 2.5.14 temos que  $\Omega_X$  é um feixe localmente livre, então, pelo Teorema 2.4.7 segue que  $\Omega_X$  é um feixe localmente livre de posto  $n$ . Com isso, faz sentido considerar o produto tensorial  $\Omega_X \otimes \mathcal{L}$  que é um fibrado vetorial em  $X$ . Por [15, Observação 8.9.2] existe um morfismo  $d$ , chamado **derivada**, das seções de  $\mathcal{L}$  em  $\Omega_X \otimes \mathcal{L}$  tal que, dadas seções  $s_1$  e  $s_2$  de  $\mathcal{L}$ , temos  $d(s_1 + s_2) = ds_1 + ds_2$  e  $d(s_1 s_2) = s_1 d(s_2) + s_2 d(s_1)$ . Como  $ds$  é uma seção de  $\Omega_X \otimes \mathcal{L}$  podemos considerar seu zero-esquema  $Z(ds)$  chamado **subesquema singular** de  $Z$ , que denotamos por  $JZ$ .*

*Lembre que a seção  $s$  possui expressões locais  $s_i \in \mathcal{F}_X(U_i)^n$  que são dadas por  $s_i = (s_{i1}, \dots, s_{in})$ , com  $n$  sendo a dimensão de  $\Omega_X$ , e  $s_{ij} \in \mathcal{F}_X(U_i)$ . Com isso, denotamos  $ds|_{U_i} = ds_i = d(s_{i1}, \dots, s_{in}) = (\partial s_{i1}, \dots, \partial s_{in})$ , onde  $\partial s_{ij}$  são ditas **derivadas parciais** de  $s$ .*

*Suponha agora que  $X$  seja uma variedade complexa e  $Z \subseteq X$  uma hipersuperfície complexa definida por uma seção holomorfa  $s$ . Pelo [15, Exemplo 8.12.1] temos que o subesquema singular de  $Z$  é definido localmente pelos zeros das derivadas parciais das expressões locais de  $s$ .*

**Definição 2.5.18.** *Seja  $Z \subseteq X$  uma hipersuperfície complexa definida por uma seção holomorfa  $s$ . Dizemos que  $p \in Z$  é uma **singularidade** de  $Z$  se  $p$  corresponde a um ponto que anula as derivadas parciais das expressões locais de  $s$ , como descrito anteriormente. E dizemos que essa singularidade é **isolada**, se existe uma vizinhança deste ponto, tal que nesta vizinhança não tem mais nenhuma singularidade exceto este ponto.*

Pela descrição anterior e Proposições 2.2.39 e 2.1.28, pode-se mostrar o resultado.

**Proposição 2.5.19.** *Se  $p$  é um ponto singular de  $Z$  então  $p$  é o suporte de uma componente irredutível de  $JZ$ .*

*Demonstração.* A afirmação pode ser vista em [4, p. 446].  $\square$

Por fim, com produtos fibrados temos a possibilidade de criar um novo fibrado vetorial análogo ao fibrado tautológico visto no Exemplo 2.4.20 para fibrados vetoriais quaisquer. Para isso, considere  $E$  um fibrado vetorial em  $X$  e  $f : X' \rightarrow X$  um morfismo. Com isso podemos considerar o produto fibrado sobre  $X$ ,  $E' = E \times_X X'$ . Além disso, pela definição de produto fibrado existe um morfismo de projeção  $\pi : E' \rightarrow X'$ .

O resultado a seguir mostra que  $E'$  é um fibrado vetorial e que  $\pi$  é seu morfismo estrutural.

**Proposição 2.5.20.**  *$E' = E \times_X X'$  é um fibrado vetorial.*

*Demonstração.* De fato, como  $E$  é um fibrado vetorial em  $X$ , existe uma cobertura aberta  $\{U_i\}$  de  $X$  tal que  $E_{U_i} \cong U_i \times V$ , com  $V$  um espaço vetorial. Considere agora  $U'_i = f^{-1}(U_i)$ . Então, por [32, Exemplo 6.2] temos que  $E'_{U'_i} = E \times_U U' \cong U' \times V$ . Dessa forma, dado  $x \in X$ , temos que  $E'_x \cong \{x\} \times V$  e, pela Observação 2.4.4, segue que  $E' = \bigcup_{x \in X} E'_x$  é um fibrado vetorial.  $\square$

**Definição 2.5.21.** *O fibrado vetorial  $E'$  construído acima é chamado **pullback** do fibrado vetorial  $E$  por  $f$ , denotado por  $f^*E$ .*

Com o pullback de fibrado vetorial definido, vemos no exemplo a seguir que podemos construir o fibrado tautológico para um fibrado vetorial  $E$  qualquer.

**Exemplo 2.5.22.** *Sejam  $E$  um fibrado vetorial de posto  $r$  em  $X$ ,  $\mathbb{P}(E)$  seu fibrado projetivo e  $p : \mathbb{P}(E) \rightarrow X$  seu morfismo estrutural. Como  $p$  é uma aplicação de espaços topológicos podemos considerar o fibrado vetorial  $p^*E$  que está contido no fibrado  $\mathbb{P}(E)$ , dessa forma, existe um morfismo estrutural  $p' : p^*E \rightarrow X$  e uma cobertura aberta  $\{U_i\}_{i \in I}$  de  $X$  com tal que  $p'^{-1}(U_i) \cong U_i \times V$ , onde  $V$  é um espaço vetorial de dimensão  $r$ .*

*Note que localmente em  $U_i \cap U_j$  temos que  $p^*E \subseteq (U_i \cap U_j) \times \mathbb{P}(E_x) \times V$ , com  $x \in U_i \cap U_j$ . Podemos considerar o subfibrado vetorial de posto 1 de  $p^*E$  dado definido localmente pelos elementos  $a = (a_1 : \dots : a_r) \in \mathbb{P}(E_x)$  e  $y = (y_1, \dots, y_r) \in V$  tais que  $a_k y_l = a_l y_k$  para todo  $k, l \in \{1, \dots, r\}$  e  $(U_i \cap U_j) \times a \times y \subseteq p^*E$ . Se  $E$  for um espaço vetorial essa construção coincide com o fibrado tautológico visto no Exemplo 2.4.20, com isso, estendendo o conceito para fibrados vetoriais quaisquer.*

**Definição 2.5.23.** *O fibrado de linha construído acima é denotado por  $\mathcal{F}_E(-1)$  e dito o **fibrado tautológico** de  $E$ .*

**Observação 2.5.24.** *Como  $\mathcal{F}_E(-1)$  possui posto 1, podemos considerar seu fibrado dual, que também será um fibrado linha, que denotamos por  $\mathcal{F}_E(1)$  e é chamado **fibrado tautológico quociente**.*

## 2.6 Divisores de Cartier

A partir desta seção até o final do trabalho todo esquema será algébrico sobre um corpo  $K$  algebricamente fechado de característica 0. Além disso, nesta seção em especial por esquema estamos nos referindo a um esquema integral (Definição 2.2.23).

Sendo  $(X, \mathcal{F}_X)$  um esquema integral, pela Proposição 2.2.29, sabemos que ele é um esquema reduzido e irredutível, portanto todo anel  $\mathcal{F}_X(U)$ , com  $U \subseteq X$  conjunto aberto, é um domínio. Com isso, para todo conjunto aberto  $U$  de  $X$  podemos considerar o corpo de frações  $\mathcal{K}'_X(U)$  de  $\mathcal{F}_X(U)$ .

Considere  $\pi_U$  as inclusões  $\pi_U : \mathcal{F}_X(U) \rightarrow \mathcal{K}'_X(U)$  (ou seja,  $\pi_U(x) \mapsto x/1 \in \mathcal{K}'_X(U)$ ) para todo  $U$  e tome as aplicações de restrição  $\rho'_{U,U'}$  tais que, para todo  $U, U'$  abertos de  $X$  com  $U' \subseteq U$ , o diagrama a seguir comuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_X(U) & \xrightarrow{\pi_U} & \mathcal{K}'_X(U) \\ \rho_{U,U'} \downarrow & & \downarrow \rho'_{U,U'} \\ \mathcal{F}_X(U') & \xrightarrow{\pi_{U'}} & \mathcal{K}'_X(U') \end{array} ,$$

em que  $\rho_{U,U'}$  são as aplicações de restrição do feixe  $\mathcal{F}_X$ .

É fácil ver que os anéis  $\mathcal{K}'_X(U)$  junto das aplicações  $\rho'_{U,U'}$  definem um pré-feixe de anéis. Dessa forma, podemos considerar seu feixe associado, que denotamos por  $\mathcal{K}_X$ .

Em [III, Observação 9.29] mostra-se que  $\mathcal{K}_X(U) \cong R(U)$  (Definição 2.2.36). Portanto, no decorrer do trabalho podemos utilizar propriedades de  $R(U)$  para trabalhar com os elementos de  $\mathcal{K}_X$ . Além disso, ainda por [III, Observação 9.29], temos que  $\mathcal{F}_X(U)$  pode ser visto como um ideal de  $\mathcal{K}_X(U)$  para todo  $U$  aberto de  $X$ . Dessa forma, podemos considerar o feixe quociente  $\mathcal{K}_X^*/\mathcal{F}_X^*$  (Definição 2.1.25). Em especial, temos que  $\mathcal{K}_X^*/\mathcal{F}_X^*$  também é um feixe de grupos abelianos cuja operação é a multiplicação. Nesta seção, trabalhamos com  $\mathcal{K}_X^*/\mathcal{F}_X^*$  sendo um feixe de grupos abelianos com a operação sendo a multiplicação.

Como  $X$  é um aberto de  $X$  podemos fazer a definição a seguir.

**Definição 2.6.1.** Um *divisor de Cartier* em um esquema  $X$  é um elemento  $D$  de  $\text{Div}(X) := (\mathcal{K}_X^*/\mathcal{F}_X^*)(X)$ .

A observação a seguir mostra que, dado um divisor  $D$ , podemos representá-lo por meio de uma cobertura aberta  $\{U_i\}$  de  $X$  associando a cada aberto  $U_i$  um elemento de  $\mathcal{K}_X(U_i)$ .

**Observação 2.6.2.** Sendo  $D$  um divisor de Cartier, pela Definição 2.1.25,  $D = (s_x) \in \prod_{x \in X} (\mathcal{K}_X^*/\mathcal{F}_X^*)_x$  tal que, para cada  $x \in X$ , existe um aberto  $W_x$  que contém  $x$  e  $t \in (\mathcal{K}_X^*/\mathcal{F}_X^*)(W_x)$  com  $s_w = t_w, \forall w \in W_x$ . Deste modo,  $\{W_x\}_{x \in X}$  é uma cobertura aberta de  $X$  e localmente a representatividade de  $D$  é única.

Para facilitar a notação, vamos denotar esta cobertura aberta por  $\{U_i\}_{i \in I}$ ,  $f'_i = f_i + \mathcal{F}_X^*(U_i) \in (\mathcal{K}_X^*/\mathcal{F}_X^*)(U_i)$  e  $D = (\{U_i\}_{i \in I}, \{f'_i\}_{i \in I})$  uma representação de  $D$ .

Logo,  $(\{U_i\}_{i \in I}, \{f'_i\}_{i \in I})$  e  $(\{V_j\}_{j \in J}, \{g'_j\}_{j \in J})$  são representações de um mesmo divisor de Cartier se, e somente se,  $f_i|_{U_i \cap V_j} g'_j|_{U_i \cap V_j}^{-1} \in \mathcal{F}_X^*(U_i \cap V_j)$ , para todo  $i, j$ . De fato, suponha que  $f_i|_{U_i \cap V_j} g'_j|_{U_i \cap V_j}^{-1} \in \mathcal{F}_X^*(U_i \cap V_j)$  para todo  $i, j$ . Dessa forma, temos que  $f_i|_{U_i \cap V_j} + \mathcal{F}_X^*(U_i \cap V_j) = g'_j|_{U_i \cap V_j} + \mathcal{F}_X^*(U_i \cap V_j)$  são o mesmo elemento  $h_{i,j}$  em  $(\mathcal{K}_X^*/\mathcal{F}_X^*)(U_i \cap V_j)$ . Portanto, pelo item (iv) da Observação 2.1.6 existe uma seção  $h \in (\mathcal{K}_X^*/\mathcal{F}_X^*)(X)$  tal que  $h|_{U_i \cap V_j} = h_{i,j}$ , ou seja, a partir das representações chegamos a uma mesma seção  $h$  de  $(\mathcal{K}_X^*/\mathcal{F}_X^*)(X)$  provando a ida. A recíproca segue de forma direta.

Dessa forma, associamos um divisor de Cartier  $D$  a uma dupla  $(\{U_i\}_{i \in I}, \{f_i\}_{i \in I})$  tal que  $f_i|_{U_i \cap V_j} g_j|_{U_i \cap V_j}^{-1} \in \mathcal{F}_X^*(U_i \cap V_j)$ .

**Definição 2.6.3.** Os elementos  $f_i$  são chamados **equações locais** de  $D$  em  $U_i$ .

**Observação 2.6.4.** Sejam  $D$  e  $E$  dois divisores de Cartier em  $X$ . Com isso,  $D$  e  $E$  são dados por duas seções  $f$  e  $g$  de  $\mathcal{K}_X^*/\mathcal{F}_X^*$ , respectivamente. Vimos na Observação 2.6.2 que existem coberturas abertas  $\{U_i\}$  e  $\{V_j\}$  tais que  $f|_{U_i} = f'_i$  e  $g|_{V_j} = g'_j$ , com  $f'_i = f_i + \mathcal{F}_X^*(U_i)$  e  $g'_j = g_j + \mathcal{F}_X^*(V_j)$ . Dessa forma temos que  $fg|_{U_i \cap V_j} = f_i|_{U_i \cap V_j} g_j|_{U_i \cap V_j} + \mathcal{F}_X^*(U_i \cap V_j)$ .

Dessa forma, se  $D = (\{U_i\}_{i \in I}, \{f_i\}_{i \in I})$  e  $E = (\{V_j\}_{j \in J}, \{g_j\}_{j \in J})$  temos que o divisor dado por  $fg$  é representado por  $(\{U_i \cap V_j\}_{i,j \in I \cup J}, \{f_i g_j\}_{i,j \in I \cup J})$ , que é chamado de **soma** dos divisores  $D$  e  $E$  e denotado por  $D + E$ .

**Exemplo 2.6.5.** Sejam  $X = X_1 \cup X_2 \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{A}_K^3)$  a união de duas retas distintas  $X_1$  e  $X_2$   $p \in X_1 \cap X_2$  é a interseção dessas retas. Como  $X_1$  e  $X_2$  são retas de  $\mathbb{P}(\mathbb{A}_K^3)$  temos que  $X_1 \cong \mathbb{P}(\mathbb{A}_K^2)$  e que  $X_2 = \mathbb{P}(\mathbb{A}_K^2)$ . Sabemos que  $\mathbb{P}(\mathbb{A}_K^3)$  é isomorfo a um espaço vetorial de dimensão 2. Com isso,  $X_1$  e  $X_2$  são duas retas concorrentes em um espaço vetorial de dimensão 2. Portanto, existe um polinômio  $P \in K[x, y]$  tal que  $X_1 \cup X_2 = V(P)$ . Logo,  $X$  é uma variedade algébrica afim (Definição 1.2.23). Além disso, pelo Teorema 2.3.5 temos que  $X$  é uma variedade e, portanto,  $X$  é um esquema integral. Considere agora  $q \in (X_1 - X_2)$ , ou seja,  $q \in X_1$  tal que  $q \neq p$  e tome os conjuntos  $U = X - \{q\}$  e  $V = X_1 - \{p\}$ .

Perceba que  $U$  e  $V$  são abertos de  $X$  e que  $\{U, V\}$  forma uma cobertura aberta de  $X$ . Como esquemas generalizam o conceito de variedades algébricas afins, temos que  $\mathcal{K}_X(U) = R(U)$  para todo aberto  $U$  de  $X$ . Considere  $f(x) = 1$  e  $g(x) = x - q$  para todo  $x \in X$ . Note que  $f \neq 0$  em  $X$ , portanto podemos tomar o quociente  $g/f \in K[X]$  (Definição 1.2.14). Logo  $D = (\{U, V\}, \{g_U/f_U, g_V/f_V\})$  é um divisor de Cartier de  $X$ .

**Observação 2.6.6.** Sejam  $D = (\{U_i\}_{i \in I}, \{f_i\}_{i \in I})$  e  $E = (\{V_j\}_{j \in J}, \{g_j\}_{j \in J})$  dois divisores de Cartier em  $X$ . Pela Observação 2.6.2 é fácil ver que os divisores de Cartier em  $X$  dados por  $D' = (\{U_i \cap V_j\}_{i,j \in I \cup J}, \{f_{ij}\}_{i,j \in I \cup J} = \{f_i|_{V_j}\}_{i,j \in I \cup J})$  e  $E' = (\{U_i \cap V_j\}_{i,j \in I \cup J}, \{g_{ij}\}_{i,j \in I \cup J} = \{g_j|_{U_i}\}_{i,j \in I \cup J})$  são iguais aos divisores de Cartier  $D$  e  $E$ , respectivamente. Portanto, sempre podemos considerar sem perda de generalidade que os divisores de Cartier  $D$  e  $E$  são da forma  $D = (\{U_i\}_{i \in I}, \{f_i\}_{i \in I})$  e  $E = (\{U_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I})$ .

A partir de agora, durante o decorrer do trabalho, utilizamos o abuso de notação  $(U_i, f_i)$  para se referir ao divisor  $(\{U_i\}_{i \in I}, \{f_i\}_{i \in I})$ . Também denotamos simplesmente por  $f_i f_j$  a multiplicação  $f_i|_{U_i \cap U_j} f_j|_{U_i \cap U_j}$ .

**Definição 2.6.7.** Dada  $f \in \mathcal{K}^*(X)$  invertível e uma cobertura aberta  $\{U_i\}_{i \in I}$  de  $X$ , temos que  $f|_{U_i} \in \mathcal{K}_X(U_i)$  portanto  $(U_i, f_i = f|_{U_i})$  é um divisor de Cartier chamado **divisor principal de Cartier** e denotamos o conjunto dos divisores principais de Cartier em  $X$  por  $P\text{Div}(X)$ .

**Observação 2.6.8.** É fácil ver que  $P\text{Div}(X)$  forma um subgrupo de  $\text{Div}(X)$ . De fato, sejam  $D = (U_i, f_i)$ ,  $D' = (U_i, g_i)$ . Note que  $-D' = (U_i, g_i^{-1})$ , então temos que  $D - D' = (U_i, f_i g_i^{-1})$ . Como  $D$  e  $D'$  são principais, segue que existem  $f, g \in \mathcal{K}_X(X)$  tais que  $f_i = f|_{U_i}$  e  $g_i = g|_{U_i}$ . Portanto, como  $f g^{-1} \in R(X)$ , segue que  $f_i g_i^{-1} = f g^{-1}|_{U_i}$ , ou seja,  $D - D'$  é divisor principal. Logo,  $P\text{Div}(X)$  é subgrupo de  $\text{Div}(X)$ .

**Proposição 2.6.9.** Seja  $D = (U_i, f_i)$  um divisor. Então  $D$  é um divisor de Cartier principal se, e somente se,  $f_i = f_j$  em  $U_{ij} = U_i \cap U_j$ , para todo  $i, j \in I$ .

*Demonstração.* Suponha  $D$  principal. Então existe  $f \in \mathcal{K}_X^*(X)$  tal que  $f_i = f|_{U_i}$  para todo  $i$ . Portanto

$$f_i|_{U_i \cap U_j} = f|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}.$$

Agora suponha que  $f_i = f_j$  em  $U_{ij}$  para todo  $i, j$ . Note que as  $f_i$  satisfazem o item (iv) da Definição 2.1.3, então existe  $f \in \mathcal{K}_X^*(X)$  invertível tal que  $f|_{U_i} = f_i$  em  $U_i$ ,  $\forall i$ .  $\square$

**Definição 2.6.10.** Um divisor de Cartier  $D = (U_i, f_i)$  é dito **efetivo** se  $f_i \in \mathcal{F}_X^*(U_i)$  para todo  $i$ .

Podemos fazer uma importante associação entre divisores efetivos e subesquemas fechados, mencionada na observação a seguir.

**Observação 2.6.11.** Seja  $D = (U_i, f_i)$  um divisor de Cartier efetivo em  $X$ . Sabemos que  $f_i \in \mathcal{F}_X^*(U_i)$  para todo  $i$ . Em [11, Observação 11.25] mostra-se que existe um subesquema fechado  $Y \subseteq X$  tal que  $Y \cap U_i \cong V(f_i)$ , em que  $V(f_i) = \{x \in U_i ; f_i(x) = 0\}$ , para todo  $i$ . Dessa forma, utilizamos as equações locais de  $D$  para construir um subesquema fechado  $Y$  de  $X$ . De forma análoga segue a recíproca. Para mais detalhes veja [11, Observação 11.25].

Com a observação acima concluímos que é possível associar a um divisor de Cartier efetivo um subesquema fechado. Chamamos esse esquema especial de **esquema associado** ao divisor  $D$  e, abusando de notação, denotamos tal esquema simplesmente por  $D$ .

Lembre pela Observação 2.2.10 que uma seção  $f_i$  do feixe  $\mathcal{K}_X^*(U_i)$  pode ser vista com uma função que vai de  $U_i$  em um corpo. Temos ainda pelo explicado em [32, p. 56] que um fibrado vetorial pode ser obtido a partir de suas funções de transição, dessa forma podemos fazer a definição a seguir.

**Definição 2.6.12.** Seja  $D = (U_i, f_i)$  um divisor de Cartier em  $X$ . Defina  $\mathcal{F}_X(D)$  o fibrado linha definido pelas funções de transição  $f_{ij} = f_i f_j^{-1}$  em  $U_{ij} = U_i \cap U_j$  chamado **fibrado linha associado a  $D$** .

**Proposição 2.6.13.** Seja  $\mathcal{L}$  um fibrado linha de  $X$ . Então existe um divisor de Cartier  $D$  em  $X$  tal que  $\mathcal{F}_X(D)$  coincide com  $\mathcal{L}$ .

*Demonstração.* Seja  $\{U_i\}_{i \in I}$  uma cobertura aberta de  $X$ . Como  $\mathcal{L}$  é fibrado linha, existem  $f_{ij}$  funções de transição que definem  $\mathcal{L}$ .

Fixe um índice  $i_0$  e defina  $f_i = f_{i i_0}$ . Podemos então formar o divisor de Cartier  $D = (U_i, f_i)$ . Agora note que,  $\mathcal{F}_X(D)$  é dado por  $f_i f_j^{-1} = f_{i i_0} f_{j j_0}$ . Como são funções de transição de  $\mathcal{L}$ , satisfazem a condição  $f_{i i_0} f_{j j_0} = f_{ij}$ , ou seja,  $\mathcal{F}_X(D)$  e  $\mathcal{L}$  possuem as mesmas funções de transição e, portanto, definem o mesmo fibrado linha.  $\square$

**Proposição 2.6.14.** Seja  $\mathcal{L}$  um fibrado linha em  $X$  e  $s$  uma seção de  $\mathcal{L}$ . O zero-esquema  $Z(s)$  é um divisor de Cartier efetivo em  $X$ .

*Demonstração.* Segue direto da Observação 2.6.11.  $\square$

**Proposição 2.6.15.** Nas condições da Proposição 2.6.14 anterior temos que o fibrado vetorial  $\mathcal{F}_X(Z(s))$  é isomorfo ao fibrado  $\mathcal{L}$ .

*Demonstração.* Sabemos que as funções de transição de  $\mathcal{F}(Z(s))$  são  $s_i s_j^{-1}$  (Definição 2.6.13). Sejam  $(f_{ij})$  as funções que definem fibrado  $\mathcal{L}$ . Pelo fato discutido das expressões locais temos que

$$s_i = f_{ij} s_j \in \mathcal{F}_V(U_i),$$

portanto, podemos reescrever  $f_{ij} = s_i s_j^{-1}$ . Com isso, vemos que as funções que definem ambos os fibrados vetoriais coincidem, logo são isomorfos.  $\square$

**Observação 2.6.16.** *Sejam  $X$  uma variedade e  $Z$  uma hipersuperfície de  $X$  dada por uma seção  $s$  de um fibrado linha  $\mathcal{L}$ . Pela Proposição 2.6.15 acima temos que o subesquema singular de  $Z$  (Exemplo 2.5.17) é dado pelo zero-esquema de uma seção de  $\Omega_X \otimes \mathcal{F}_X(Z(s))$ .*

## 2.7 Espectro relativo e projetivo

O objetivo desta seção é estender o conceito de espectro de anéis para feixes quaisquer. Dessa forma, o objetivo é obter um esquema a partir de um tipo específico de feixe de anéis. Começamos com a proposição a seguir que garante a existência de um esquema específico.

**Proposição 2.7.1.** *Sejam  $(X, \mathcal{F}_X)$  um esquema e  $\mathcal{G}$  um feixe coerente com  $X$  e  $\mathcal{F}_X$  (Definição 2.1.27) tal que  $\mathcal{G}$  também é um feixe de  $\mathcal{F}_X$ -álgebras (Definição 2.1.4). Existe um único esquema, que denotamos por  $\text{Spec}_X \mathcal{G}$ , e morfismo  $f : \text{Spec}_X \mathcal{G} \rightarrow X$  tal que, para todo aberto afim  $U \subseteq X$ ,  $f^{-1}(U) \cong \text{Spec } \mathcal{G}(U)$  e para toda inclusão de abertos afins  $V \subseteq U$ , o morfismo  $f^{-1}(V) \rightarrow f^{-1}(U)$  é induzido pela aplicação de restrição  $\mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{G}(V)$  como feito na Observação 2.2.2.*

*Demonstração.* Para a demonstração veja [II, p. 370].  $\square$

**Definição 2.7.2.** *O esquema  $\text{Spec}_X \mathcal{G}$  apresentado na proposição acima é chamado **espectro relativo** do feixe  $\mathcal{F}_X$  por  $\mathcal{G}$ .*

O objetivo agora é construir um esquema de forma análoga feito acima, porém, a ideia agora é considerar apenas ideais primos específicos de anéis especiais.

**Definição 2.7.3.** *Sejam  $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$  um anel graduado (Definição 1.1.18) e  $A_+ := \bigoplus_{d \geq 1} A_d$ . Defina*

$\text{Proj} A := \{ \mathfrak{p} \subseteq A ; A_+ \not\subseteq \mathfrak{p} \text{ e } \mathfrak{p} \text{ é ideal homogêneo primo, ou seja, um ideal primo gerado por homogêneos (Definição 1.1.18)} \}$ .

**Observação 2.7.4.** *Note que se  $\mathfrak{p}$  é um ideal homogêneo primo então também é ideal primo, portanto  $\text{Proj} A \subseteq \text{Spec} A$ .*

Da mesma forma que fizemos em  $\text{Spec} A$  construiremos uma topologia em  $\text{Proj} A$  e mais tarde veremos que a topologia construída é induzida pela topologia do espectro do anel.

**Definição 2.7.5.** *Seja  $A$  anel graduado como anteriormente e  $I \subseteq A_+$  um ideal homogêneo. Defina*

$$V_+(I) := \{ \mathfrak{p} \in \text{Proj} A ; I \subseteq \mathfrak{p} \}$$

**Proposição 2.7.6.** *Dado  $A$  anel graduado. Então*

- a)  $\bigcap_i V_+(I_i) = V_+(\sum_i I_i)$ , com  $\{I_i\}$  uma coleção de ideais homogêneos;
- b)  $V_+(0) = \text{Proj} A$ ;
- c)  $V_+(A_+) = \emptyset$ ;
- d)  $V_+(I) \cup V_+(J) = V_+(I \cap J)$ , com  $I, J$  ideais homogêneos.

*Demonstração.* Pelo fato de  $\text{Proj}A$  ser subconjunto de  $\text{Spec}A$  a demonstração segue de forma exatamente análoga nesse caso.  $\square$

**Observação 2.7.7.** *Seja  $I \subseteq A$  um ideal qualquer. Pela construção vemos que  $V(I) \cap \text{Proj}A = V_+(I_h)$ , com  $I_h$  sendo o ideal homogêneo gerado pelos homogêneos de  $I$ . De fato, mostremos primeiramente que  $V(I_h) \cap \text{Proj}A = V_+(I_h)$ . Temos*

$$\begin{aligned} V(I_h) \cap \text{Proj}A &= \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}A ; I_h \subseteq \mathfrak{p}\} \cap \{\mathfrak{p} \in \text{Proj}A ; I_h \subseteq \mathfrak{p}\} = \\ &= \{\mathfrak{p} \in \text{Proj}A ; I_h \subseteq \mathfrak{p}\} = V_+(I_h). \end{aligned}$$

*Sabemos que  $I_h \subseteq I$ , então pela Proposição 2.2.6 segue que*

$$V(I) \subseteq V(I_h) \Rightarrow V(I) \cap \text{Proj}A \subseteq V(I_h) \cap \text{Proj}A = V_+(I_h) \Rightarrow V(I) \cap \text{Proj}A \subseteq V_+(I_h).$$

*Além disso, é fácil ver que  $V_+(I_h) \subseteq V(I) \cap \text{Proj}A$ , provando a igualdade  $V(I) \cap \text{Proj}A = V_+(I_h)$ .*

*Com isso, tomando  $V(I_h)$  como fechados de uma topologia, segue que  $\text{Proj}A$  carrega a topologia de Zariski induzida de  $A$ .*

O objetivo agora é nos utilizar das semelhanças entre  $\text{Proj}A$  e  $\text{Spec}A$  e, de forma semelhante, associar a  $\text{Proj}A$  um feixe de anéis análogo ao feixe estrutural de  $\text{Spec}A$  (Definição 2.2.9). Para isso fazemos a construção a seguir.

Vamos agora associar um feixe ao  $\text{Proj}A$  que também é chamado de **feixe estrutural**. Seja  $A$  um anel graduado e tome o espaço topológico  $\text{Proj}A$ . Para cada aberto  $U \subseteq \text{Proj}A$  defina  $\mathcal{F}_{\text{Proj}A}(U)$  o conjunto de todas as funções da forma

$$f : U \rightarrow \bigcup_{p \in U} A_{(p)},$$

com  $A_{(p)}$  sendo o subanel dos elementos homogêneos de mesmo grau de  $A_p$ , tal que

- 1)  $f(\mathfrak{p}) \in A_{(p)}$ ;
- 2) Existe um aberto  $V \subseteq U$ , com  $p \in V$  e elementos homogêneos  $s, t$  de mesmo grau tal que, para todo  $\mathfrak{q}$  ideal primo,  $t \notin \mathfrak{q}$  e  $f(\mathfrak{q}) = s/t$ .

Perceba que a construção é análoga à feita para o caso de  $\text{Spec}A$ , onde, nesse caso, são levados em consideração os elementos homogêneos. Portanto, a demonstração de que os anéis  $\mathcal{F}_{\text{Proj}A}(U)$  formam um feixe também será análoga.

Dessa forma, tomando  $\text{Proj}A$  temos que  $(\text{Proj}A, \mathcal{F}_{\text{Proj}A})$  forma um espaço anelado que denotamos também simplesmente por  $\text{Proj}A$ .

Seja  $(X, \mathcal{F}_X)$  um esquema e  $\mathcal{A}$  um feixe coerente tal que para cada aberto afim  $U$  de  $X$  o anel  $\mathcal{A}(U)$  é uma  $\mathcal{F}_X(U)$ -álgebra graduada, ou seja,  $\mathcal{A}(U)$  pode ser decomposto da forma  $\mathcal{A}(U) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{A}_n(U)$ . Com isso, podemos enunciar a proposição a seguir.

**Proposição 2.7.8.** *Seja  $X$  um esquema e  $\mathcal{A}$  um feixe coerente como acima. Então existe um esquema, denotado  $\text{Proj}\mathcal{A}$  e chamado **espectro projetivo**, e um morfismo  $\pi : \text{Proj}\mathcal{A} \rightarrow X$  tal que, para todo  $U \subseteq X$  aberto afim, existe um isomorfismo  $\pi'_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow \text{Proj}\mathcal{A}(U)$ .*

*Demonstração.* Para a demonstração veja [11, Proposição 13.5].  $\square$

A seguir trabalhamos um novo tipo de esquema e mostramos que esse esquema pode ser construído a partir do espectro projetivo de um feixe específico.

**Definição 2.7.9.** *Sejam  $X$  um esquema e  $Y$  um subesquema fechado. O **blow-up** de  $X$  ao longo de  $Y$  é um esquema, denotado por  $Bl_Y X$ , e um morfismo  $\pi : Bl_Y X \rightarrow X$  tal que o pullback  $\pi^{-1}(Y)$  (Definição 2.2.43) é um subesquema fechado tal que existe uma cobertura aberta  $\{U_i\}$  e  $\pi^{-1}(Y) \cap U_i \cong V(f_i)$  para alguma seção  $f_i$ , e, se  $\pi' : X' \rightarrow X$  é um morfismo tal que  $\pi'^{-1}(Y)$  é um divisor de Cartier efetivo, então existe um único morfismo  $g : X' \rightarrow Bl_Y X$  tal que  $\pi' = \pi \circ g$ .*

A seguir mostramos alguns exemplos de blow-up.

**Exemplo 2.7.10.** *Sejam  $X \subseteq \mathbb{A}_K^n$  uma variedade algébrica afim e  $f_1, \dots, f_r \in K[x_1, \dots, x_n]$  polinômios que não se anulam todos simultaneamente em  $X$ . Sabemos que  $U = X - V(f_1, \dots, f_r) = X - V(\langle f_1, \dots, f_r \rangle)$  é um subconjunto aberto de  $X$ . Além disso, note que existe um morfismo*

$$\begin{aligned} f : U &\rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{A}_K^r) \\ p &\mapsto (f_1(p) : \dots : f_r(p)). \end{aligned}$$

Considere o gráfico de  $f$

$$G(f) = \{(p, f(p)) ; p \in U\} \subseteq X \times \mathbb{P}(\mathbb{A}_K^r).$$

O blow-up de  $X$  em  $(f_1, \dots, f_r)$  é o fecho de  $G(f)$  em  $X \times \mathbb{P}(\mathbb{A}_K^r)$  (ver [10, Construção 4.3.2]).

**Exemplo 2.7.11.** *Suponha que  $U \subset \mathbb{C}^n$  é um subconjunto aberto, que claramente será uma variedade complexa de dimensão  $n$ , e  $Z \subset U$  é uma hipersuperfície dos zeros de uma função holomorfa  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ . Seja  $\mathcal{J}_f$  o ideal jacobiano  $\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}\right)$  de  $f$ , onde  $(z_1, \dots, z_n)$  são as coordenadas padrão de  $\mathbb{C}^n$ . Além disso,  $\mathcal{J}_f$  é um fechado de  $\mathbb{C}^n$ . Considere o blow-up  $\pi : Bl_{\mathcal{J}_f} U \rightarrow U$  de  $\mathcal{J}_f$ . Como estamos em  $\mathbb{C}$  podemos descrevê-lo da seguinte forma:*

Pelo exemplo anterior o blow-up de  $\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}\right)$  em  $Z$  é o fecho de

$$\left\{ \left( p, \left( \frac{\partial f}{\partial z_1}(p) : \dots : \frac{\partial f}{\partial z_n}(p) \right) \right) ; p \in Z \text{ e } \frac{\partial f}{\partial z_i}(p) \neq 0, i \in \{1, \dots, n\} \right\} \subseteq Z \times \mathbb{P}(\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n).$$

Note que, por propriedades de espaço vetorial, temos que  $\mathbb{P}(\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n) \cong \check{\mathbb{P}}(\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n)$ , com  $\check{\mathbb{P}}(\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n)$  sendo o dual de  $\mathbb{P}(\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n)$ . Além disso, sabemos que se, dado  $x \in U$ , tal que  $\frac{\partial f}{\partial z_i}(x) \neq 0$  para algum  $i \in \{1, \dots, n\}$ , então  $x$  é um ponto não-singular. Portanto, se  $\Sigma(Z)$  é o conjunto dos pontos singulares de  $Z$ , temos que  $x \notin Z$ . Com isso, podemos reescrever  $Bl_{\mathcal{J}_f} U$  como

$$Bl_{\mathcal{J}_f} U = \overline{\left\{ (x, \eta) \in U \times \check{\mathbb{P}}(\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n) \mid x \notin \Sigma(Z), \eta = \left[ \frac{\partial f}{\partial z_1}(x) : \dots : \frac{\partial f}{\partial z_n}(x) \right] \right\}}.$$

O resultado a seguir nos dá a forma de construir o blow-up de um esquema  $X$  ao longo de um subesquema fechado  $Y$  de  $X$ .

**Teorema 2.7.12.** *Seja  $X$  um esquema,  $Y \subseteq X$  um subesquema fechado e  $\mathcal{I}_Y \subseteq \mathcal{F}_X$  o feixe ideal associado a  $Y$ . Então  $\text{Proj} \left( \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{I}_Y^d \right)$  é o blow-up de  $X$  ao longo de  $Y$ .*

*Demonstração.* Veja [11, Proposição 13.92]. □

A partir dos espectros relativos e projetivos podemos construir o exemplo a seguir.

**Exemplo 2.7.13.** *Seja  $X$  um esquema. Considere um esquema  $C$  tal que  $C = \text{Spec}(S^*)$ , com  $S^* = S^0 \oplus S^1 \oplus \dots$  é um feixe de  $\mathcal{F}_X$ -álgebras graduadas,  $\mathcal{F}_X \rightarrow S^0$  é sobrejetiva,  $S^1$  é coerente e  $S^*$  é gerado por  $S^1$ . Chamamos  $C$  de **cone** sobre  $X$ .*

*Agora, se  $Y$  é um subsesquema fechado de um esquema  $X$  e  $\mathcal{I}_Y$  o feixe ideal de  $Y$  em  $X$ , podemos construir o **cone normal**  $C_Y X$  de  $Y$  em  $X$  como sendo o cone definido pelo feixe de  $\mathcal{F}_X$ -álgebras  $\bigoplus \frac{\mathcal{I}_Y^n}{\mathcal{I}_Y^{n+1}}$ , ou seja,*

$$C_Y X = \text{Spec} \left( \bigoplus_{n \geq 0} \frac{\mathcal{I}_Y^n}{\mathcal{I}_Y^{n+1}} \right).$$

*Note que se  $Y = X$ , então  $\mathcal{I}_Y = 0$  e, com isso,  $C_Y X = C_X X = 0$ .*

*Em particular, considere o feixe quociente*

$$\mathcal{N}_Y X := \mathcal{I}_Y / \mathcal{I}_Y^2.$$

*Como  $\mathcal{N}_Y X$  é um feixe de  $\mathcal{F}_X$ -álgebras, faz sentido considerar  $\text{Sym}_{\mathcal{F}_X}(\mathcal{N}_Y X)$  e o cone  $C = \text{Spec}(\text{Sym}_{\mathcal{F}_X}(\mathcal{N}_Y X))$ .*

*Da mesma forma podemos fazer os processos acima para o esquema projetivo.*

*Chamamos de **cone projetivo** de  $S^*$  o esquema  $C = \text{Proj}(S^*)$  que também pode ser denotado como  $\mathbb{P}(C)$ . Considere agora  $z$  uma variável e tome o feixe  $S^*[z]$  dado pelos anéis  $S^*[z](U) = S_0^*[z](U) \oplus S_1^*[z](U) \oplus \dots$ , onde cada  $S_i^*[z](U) = S^i(U) \oplus S^{i-1}[z](U) \oplus \dots \oplus S^1[z^{i-1}](U) \oplus S^0[z^i](U)$  e cada  $S^j[z^k](U)$  é o anel de polinômios na variável  $z^k$  de  $S^i(U)$ . Com isso, pela construção segue que  $S^*[z]$  é um feixe de  $\mathcal{F}_X$ -álgebras graduadas, então podemos considerar os cones  $C \oplus 1 := \text{Spec}(S^*[z])$  e o cone projetivo  $\mathbb{P}(C \oplus 1) := \text{Proj}(S^*[z])$ , chamado **complemento projetivo** de  $C$ .*

Para finalizar, vamos caracterizar o cone normal  $C_Y X$ , para um caso particular.

**Definição 2.7.14.** *Sejam  $X$  e  $Y$  esquemas e  $i : Y \rightarrow X$  uma imersão fechada. Dizemos que  $i$  é uma **imersão regular** de dimensão  $r$  se, para todo  $y \in Y$  existe um aberto  $U$  de  $X$  tal que  $i(y) \in U$  e o feixe ideal  $\mathcal{I}_{i(Y) \cap U}$  é gerado por uma sequência regular de comprimento  $r$ .*

**Exemplo 2.7.15.** *Se  $Z$  é uma hipersuperfície de  $M$  uma variedade suave, então  $i : Z \rightarrow M$  é uma imersão regular (ver [8, Seção B.7.6]).*

**Proposição 2.7.16.** *Seja  $X$  um esquema e  $i : Y \rightarrow X$  uma imersão fechada. Se  $i$  for uma imersão regular e  $\mathcal{I}_Y$  o feixe ideal de  $Y$  em  $X$ , então  $\mathcal{N}_Y X$  é um fibrado vetorial e seu dual  $N_Y X$  (chamado **fibrado normal**) é isomorfo a  $C_Y X$ .*

*Demonstração.* Veja [8, Seção B.6.2]. □

# Capítulo 3

## Classes de Chern

O objetivo deste trabalho é estudar o conceito de classes características para variedades possivelmente singulares. Este conceito pode ser apresentado utilizando ferramentas de Topologia Algébrica, Geometria Diferencial ou, como é feito neste trabalho, Geometria Algébrica. Estas classes são elementos de um grupo, chamado grupo de Chow, que descrevemos neste capítulo.

Quando a variedade é não singular, tais elementos estão associados ao fibrado tangente da variedade, já no caso singular, como não existe este fibrado vetorial, mais ferramentas serão necessárias, onde o conceito de classes de Segre é fundamental.

Finalizamos apresentando resultados para o caso de hipersuperfícies complexas.

Lembrando que desde o capítulo anterior quando aparecer esquema estamos considerando esquema algébrico e uma variedade é um esquema (algébrico) reduzido e irredutível.

As principais referências deste capítulo são [8] e [36].

### 3.1 Grupo de Chow

Para cada  $k \geq 0$ ,  $Z_k(X)$  denota o conjunto das somas formais  $\sum_V n_V V$ , onde  $V$  é uma subvariedade de  $X$  de dimensão  $k$  e os coeficientes  $n_V \in \mathbb{Z}$ .

Em  $Z_k(X)$  é definido uma operação soma, somando os coeficientes inteiros associados à mesma subvariedade. Claramente  $Z_k(X)$  com esta operação é um grupo abeliano.

**Definição 3.1.1.** Chamamos cada elemento de  $Z_k(X)$  de  **$k$ -ciclo** de  $X$  e  $Z_k(X)$  **grupo de ciclos de dimensão  $k$**  ou, simplesmente, **grupo dos  $k$ -ciclos** de  $X$ .

Denote por

$$Z_*(X) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} Z_k(X).$$

Dado  $\alpha = \sum_V n_V V \in Z_k(X)$ , definimos seu **suporte**, denotado por  $|\alpha|$  ou  $\text{Supp } \alpha$ , por  $|\alpha| := \bigcup_V V$ , onde  $n_V \neq 0$ .

**Proposição 3.1.2.**  $Z_*(X)$  é um conjunto enumerável.

*Demonstração.* Perceba que se provarmos que  $Z_k(X)$  é enumerável então segue  $Z_*(X)$  é enumerável, pois  $Z_*(X)$  será a soma enumerável de conjuntos enumeráveis.

Seja  $C_m$  o subconjunto de  $Z_k(X)$  formado pelos  $k$ -ciclos  $\sum_V n_V V$  onde a quantidade de  $n_V \neq 0$  é igual a  $m$ . Deste modo, podemos escrever  $Z_k(X) = \sum^m C_m$ .

Como, para todo  $m$ ,  $C_m \cong A \subset \{(n_1, \dots, n_m) ; n_i \in \mathbb{Z}, \forall i \in \{1, \dots, m\}\} = \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$ , que é enumerável, portanto, segue o resultado.  $\square$

No que segue, lembremos que dada uma subvariedade  $W \subseteq X$ ,  $R(W)$  é o corpo de funções visto na Definição 2.2.36.

**Definição 3.1.3.** *Sejam  $\{X_i\}_i$  componentes irredutíveis de  $X$  (com estrutura reduzida). O **ciclo fundamental de  $X$**  é  $[X] := \sum m_i X_i \in Z_*(X)$ , onde  $m_i = l(\mathcal{F}_{X, X_i})$ . Chamamos o valor  $m_i$  de **multiplicidade geométrica** de  $X_i$  em  $X$ .*

O objetivo agora é definir um  $k$ -ciclo especial, utilizando o conceito de ordem visto no capítulo anterior (Definição 2.3.12).

**Definição 3.1.4.** *Sejam  $W$  uma subvariedade de dimensão  $k + 1$  de  $X$  e  $\varphi \in R(W)^*$ . Chamamos de **ciclo associado** à  $\varphi$  o  $k$ -ciclo dado por:*

$$\text{div}(\varphi) := \sum_V \text{ord}_V(\varphi) V,$$

com  $V$  variando no conjunto de todas as subvariedades de  $W$  de codimensão 1.

Denotamos por  $B_k(X)$  o conjunto de  $Z_k(X)$  formado por todos os ciclos  $\alpha \in Z_k(X)$  tal que,

$$\alpha = \sum_i \text{div}(\varphi_i)$$

para um número finito de subvariedades  $W_i$  de  $X$ , com  $\varphi_i \in R(W_i)^*$ .

**Proposição 3.1.5.** *O conjunto  $B_k(X)$  é um subgrupo de  $Z_k(X)$ .*

*Demonstração.* Sejam  $\alpha, \beta$  dois elementos de  $B_k(X)$ , se mostrarmos que  $\alpha - \beta \in B_k(X)$  provamos que  $B_k(X)$  é subgrupo de  $Z_k(X)$ .

Pela definição os elementos  $\alpha$  e  $\beta$  são da forma

$$\alpha = \sum_{i \in I} \text{div}(\varphi_i) \quad \text{e} \quad \beta = \sum_{j \in J} \text{div}(\gamma_j),$$

respectivamente. Podemos tomar um mesmo conjunto de índices  $T$  ( $T = I \cup J$ ) para  $\alpha$  e  $\beta$ . De fato, tome  $\alpha = \sum_{t \in T} \text{div}(\varphi_t)$  e  $\beta = \sum_{t \in T} \text{div}(\gamma_t)$  de forma que

$$\varphi_t = \begin{cases} \varphi_t, & \text{se } t \in I \\ 1, & \text{se } t \notin I \end{cases} \quad \text{e} \quad \gamma_t = \begin{cases} \gamma_t, & \text{se } t \in J \\ 1, & \text{se } t \notin J \end{cases}$$

Dessa forma, como  $\text{div}(1) = 0$  realmente podemos tomar  $\alpha$  e  $\beta$  como descritos acima. Note agora que,

$$\alpha - \beta = \sum_t \text{div}(\varphi_t) - \sum_t \text{div}(\gamma_t) = \sum_t (\text{div}(\varphi_t) - \text{div}(\gamma_t)) =$$

$$\sum_t \left( \sum_{V \subset W_t} \text{ord}_V(\varphi_t)V - \sum_{V \subset W_t} \text{ord}_V(\gamma_t)V \right) = \sum_t \left( \sum_{V \subset W_t} (\text{ord}_V(\varphi_t) - \text{ord}_V(\gamma_t))V \right).$$

Pela Proposição [2.3.13](#) temos

$$\alpha - \beta = \sum_t \left( \sum_{V \subset W_t} (\text{ord}_V(\varphi_t \gamma_t^{-1})V) \right) = \sum_t \text{div}(\varphi_t \gamma_t^{-1}),$$

e, pelo fato de  $R(W)^*$  ser um corpo e  $\gamma_t \neq 0$ , temos que  $\varphi_t \gamma_t^{-1} \in R(W_t)^*$ . Portanto  $\alpha - \beta \in B_k(X)$ .  $\square$

Com relação a este subgrupo, construímos uma relação entre os elementos de  $Z_k(X)$ .

**Definição 3.1.6.** *Dois  $k$ -ciclos de  $X$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ , são ditos **racionalmente equivalentes** se  $\alpha - \beta \in B_k(X)$ .*

**Notação:**  $\alpha \sim_R \beta$  ou, simplesmente,  $\alpha \sim \beta$ .

**Proposição 3.1.7.** *A relação  $\sim_R$  é de equivalência.*

*Demonstração.* Note primeiramente que, utilizando a Proposição [2.3.13](#), temos

$$\alpha - \alpha = \sum_i (\text{div}(\varphi_i) - \text{div}(\varphi_i)) = \sum_i \text{div}(\varphi_i \varphi_i^{-1}) = \sum_i \text{ord}(1),$$

e como  $1 \in R(W)$ , temos que  $\alpha \sim \alpha$ .

Se  $\alpha \sim \beta$ , então

$$\alpha - \beta \in B_k(X) \Rightarrow \alpha - \beta = \sum_i \text{div}(\varphi_i)$$

para uma quantidade finita  $\varphi_i \in R(W_i)$ .

Agora,

$$\begin{aligned} \beta - \alpha &= -(\alpha - \beta) = \sum_i -\text{div}(\varphi_i) = \sum_i \sum_{V \subset W_i} -\text{ord}_V(\varphi_i)V \\ &= \sum_i \sum_{V \subset W_i} \text{ord}_V(\varphi_i^{-1})V = \sum_i \text{div}(\varphi_i^{-1}) \in B_k(X), \end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade segue da Proposição [2.3.13](#).

Nos falta mostrar que se  $\alpha \sim \beta$  e  $\beta \sim \gamma$  então  $\alpha \sim \gamma$ .

Se  $\alpha \sim \beta$ , então  $\alpha - \beta = \sum_i \text{div}(\varphi_i)$  e, se  $\beta \sim \gamma$ , então  $\beta - \gamma = \sum_j \text{div}(\psi_j)$ .

Tome um conjunto de índices  $T$  de forma a podermos escrever  $\alpha - \beta = \sum_t \text{div}(\varphi_t)$  e  $\beta - \gamma = \sum_t \text{div}(\psi_t)$ , da mesma forma como feito na Proposição [3.1.5](#), com  $t \in T$ .

Note que

$$\begin{aligned} \alpha - \gamma &= \alpha - \beta + \beta - \gamma = \sum_t (\text{div}(\varphi_t) + \text{div}(\psi_t)) = \sum_t \sum_{V \subset W_t} (\text{ord}_V(\varphi_t) + \text{ord}_V(\psi_t))V \\ &= \sum_t \sum_{V \subset W_t} (\text{ord}_V(\varphi_t \psi_t)V) = \sum_t \text{div}(\varphi_t \psi_t) \in B_k(X), \end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade segue da Proposição [2.3.13](#) novamente.  $\square$

Usualmente dizemos que um elemento  $\alpha \in B_k(X)$  é **racionalmente equivalente a zero** e denotamos por  $\alpha \sim 0$ .

**Observação 3.1.8.** Pelo fato de  $B_k(X)$  ser subgrupo de  $Z_k(X)$  (que é abeliano), podemos tomar o grupo quociente  $\frac{Z_k(X)}{B_k(X)}$ . Além disso note que

$$\alpha \sim \beta \Rightarrow \alpha - \beta \in B_k(X) \Rightarrow \alpha + B_k(X) = \beta + B_k(X),$$

onde  $\alpha + B_k(X)$  e  $\beta + B_k(X)$  são as classes de  $\alpha$  e  $\beta$  em  $\frac{Z_k(X)}{B_k(X)}$  respectivamente. Portanto dois elementos  $\alpha$  e  $\beta$  são racionalmente equivalentes se definirem o mesmo elemento em  $\frac{Z_k(X)}{B_k(X)}$ . Assim

$$\frac{Z_k(X)}{B_k(X)} = \frac{Z_k(X)}{\sim_R}.$$

**Definição 3.1.9.** Chamamos de **grupo das classes de  $k$ -ciclos**, que denotamos por  $A_k(X)$ , o grupo quociente  $\frac{Z_k(X)}{B_k(X)}$ .

**Notação:** Dado  $u \in A_k(X)$ , podemos denotar  $u = \alpha + B_k(X)$  com  $\alpha \in Z_k(X)$ .

**Observação 3.1.10.** Caso necessário, convencionamos que para  $k$  negativo,  $A_k(X) = 0$ .

**Definição 3.1.11.** Chamamos de **grupo de Chow** de  $X$  o grupo graduado

$$A_*(X) := \bigoplus_{k \geq 0} A_k(X).$$

**Exemplo 3.1.12.** Se  $X$  é um esquema de dimensão  $n$ , então  $B_n(X) = 0$  pois se  $\alpha \in B_n(X)$ , temos  $\alpha = \sum_i \text{div}(\varphi_i)$ , onde  $\varphi_i \in R(W_i)^*$ , com  $W_i$  subvariedade de  $X$  com dimensão  $n+1$ , que não existe pois  $\dim W_i \leq \dim X = n$ . Portanto,  $A_n(X) = Z_n(X)$ .

Lembre pela Proposição 3.1.2 que  $Z_n(X)$  é enumerável, portanto temos que  $A_n(X) = Z_n(X) \cong \mathbb{Z}$ .

**Exemplo 3.1.13.** Se  $X$  é um esquema de dimensão  $n$  e  $k > n$ ,  $Z_k(X) = 0$  e  $A_k(X) = 0$ .

De fato, pela definição temos que  $Z_k(X)$  é o conjunto dos ciclos  $\sum_V n_V V$ , com  $V$  sendo uma subvariedade de dimensão  $k$  de  $X$ . Como  $X$  possui dimensão  $n < k$ , não temos subvariedade de dimensão maior que o esquema em que está contida. Portanto temos que  $Z_k(X) = 0$  e, conseqüentemente,  $A_k(X) = \frac{Z_k(X)}{B_k(X)} = 0$ .

Segue da construção dos objetos anteriores o seguinte resultado:

**Proposição 3.1.14.** Seja  $X$  um esquema tal que  $X$  é uma união disjunta de esquemas  $X_1, \dots, X_t$ , então

$$Z_k(X) = \bigoplus_{i=1}^t Z_k(X_i) \quad \text{e} \quad A_k(X) = \bigoplus_{i=1}^t A_k(X_i).$$

O objetivo agora é apresentar formas de relacionar ciclos entre esquemas distintos. Naturalmente, tal relação surge a partir de morfismos de esquemas, que poderá ser estendida a elementos do grupo de Chow.

**Definição 3.1.15.** *Sejam  $f : X \rightarrow Y$  um morfismo próprio de esquemas,  $V$  uma subvariedade de  $X$  e  $W = f(V)$ . Defina*

$$f_*(V) := \deg(V/W)W,$$

onde  $\deg(V/W)$  é o grau da extensão  $[R(V) : R(W)]$  (ou seja, é a dimensão do corpo  $R(V)$  visto como espaço vetorial sobre o corpo  $R(W)$ ) se  $\dim(W) = \dim(V)$  e 0 se  $\dim(W) < \dim(V)$ .

**Observação 3.1.16.** *Note que a definição faz sentido. De fato, primeiramente note que pela Observação 2.5.9  $W = f(V)$  é uma subvariedade de  $Y$  com  $\dim(W) \leq \dim(V)$ . Além disso, também pela Observação 2.5.9, o morfismo  $f$  induz uma inclusão de  $R(W)$  em  $R(V)$  e  $[R(V) : R(W)] < \infty$ .*

Como podemos tomar  $f_*(V)$  para qualquer subvariedade  $V$  de  $X$ , então é possível estender por linearidade, obtendo a aplicação

$$\begin{aligned} f_* : Z_k(X) &\rightarrow Z_k(Y) \\ \sum_V n_V \cdot V &\mapsto \sum_V n_V \cdot f_*(V). \end{aligned}$$

**Observação 3.1.17.** *Se  $\alpha = \sum_V n_V V \in Z_k(X)$ ,*

$$f_*(\alpha) = \sum_V n_V f_*(V) = \sum_V n_V \deg(V/f(V))f(V).$$

*Note que se  $\dim(V) > \dim(f(V))$ , então  $\deg(V/f(V)) = 0$ . Logo, as parcelas que não são iguais a zero são quando  $\dim f(V) = \dim(V) = k$  e, portanto,  $f_*(\alpha) \in Z_k(Y)$ .*

**Observação 3.1.18.** *Claramente  $f_*$  é um homomorfismo de grupos pois dado  $\alpha = \sum_V n_V V$  e  $\beta = \sum_V m_V V$  em  $Z_k(X)$ ,*

$$\begin{aligned} f_*(\alpha + \beta) &= f_* \left( \sum_V (n_V + m_V) V \right) = \sum_V (n_V + m_V) f_*(V) \\ &= \sum_V n_V f_*(V) + \sum_V m_V f_*(V) = f_*(\alpha) + f_*(\beta). \end{aligned}$$

**Proposição 3.1.19.** *Sejam  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$  morfismos próprios de esquemas, então  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$*

*Demonstração.* Pela definição, basta mostrar que dada uma subvariedade  $V$  de dimensão  $k$  de  $X$ ,  $(g \circ f)_*(V) = (g_* \circ f_*)(V)$ .

Como os morfismos são próprios,  $\dim(g \circ f)(V) \leq \dim f(V) \leq \dim V$ . Assim, temos 4 possibilidades:

i)  $\dim(g \circ f)(V) < \dim f(V) < \dim V$ ;

Neste caso,

$$\deg(V/(g \circ f)(V)) = 0 = 0.0 = \deg(V/f(V)).\deg(f(V)/(g \circ f)(V)).$$

ii)  $\dim(g \circ f)(V) < \dim f(V) = \dim V$ ;

Neste caso,

$$\deg(V/(g \circ f)(V)) = 0 = [R(V) : R(f(V))].0 = \deg(V/f(V)).\deg(f(V)/(g \circ f)(V)).$$

iii)  $\dim(g \circ f)(V) = \dim f(V) < \dim V$ ;

Neste caso,

$$\deg(V/(g \circ f)(V)) = 0 = 0.[R(f(V)) : R((g \circ f)(V))] = \deg(V/f(V)).\deg(f(V)/(g \circ f)(V)).$$

iv)  $\dim(g \circ f)(V) = \dim f(V) = \dim V$ .

Por propriedades de extensões de corpos temos

$$[R(V) : R((g \circ f)(V))] = [R(V) : R(f(V))].[R(f(V)) : R((g \circ f)(V))].$$

Deste modo,

$$\deg(V/(g \circ f)(V)) = \deg(V/f(V)).\deg(f(V)/(g \circ f)(V)),$$

como nos itens anteriores.

Portanto,

$$(g \circ f)_*(V) = \deg(V/(g \circ f)(V)) (g \circ f)(V) = (\deg(V/f(V)).\deg(f(V)/(g \circ f)(V))) (g \circ f)(V)$$

$$\deg(V/f(V)).g_*(f(V)) = g_*(\deg(V/f(V)) f(V)) = g_*(f_*(V)) = (g_* \circ f_*)(V).$$

□

Para estender a aplicação  $f_*$  para os grupos de Chow correspondentes, precisamos do seguinte resultado, que omitiremos parte da demonstração.

**Proposição 3.1.20.** *Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação própria, então  $f_*(B_k(X)) \subseteq B_k(Y)$*

*Demonstração.* Seja  $\alpha \in B_k(X)$ . Deste modo

$$f_*(\alpha) = f_* \left( \sum_i \text{div}(\varphi_i) \right) = \sum_i f_*(\text{div}(\varphi_i)).$$

Seja  $\alpha_i = \text{div}(\varphi_i)$ , onde  $\varphi_i \in R(W_i)$  com  $W_i$  uma subvariedade de  $X$ . Assim, podemos pensar em  $\alpha_i \in B_k(W_i)$ . Se  $W_i$  é uma variedade, então  $f(W_i)$  é uma variedade pois  $f$  é um morfismo próprio. Por [3] Proposição 1.4],  $f_*(\text{div}(\varphi_i)) = 0$  se  $\dim f(W_i) < \dim W_i$  e  $f_*(\text{div}(\varphi_i)) = \text{div}(N(\varphi_i))$  se  $\dim f(W_i) = \dim W_i$ , onde  $N(\varphi_i)$  é um ciclo especial, chamado de ciclo norma de  $\varphi_i$ , que aparece na demonstração do resultado citado. □

**Definição 3.1.21.** *Dado  $f : X \rightarrow Y$  um morfismo próprio, chamamos de **push-forward** de  $f$  a aplicação*

$$\tilde{f}_* : A_k(X) \rightarrow A_k(Y),$$

*induzida pela aplicação  $f_*$ , ou seja,  $\tilde{f}_*(\alpha + B_k(X)) = f_*(\alpha) + B_k(Y)$ .*

**Observação 3.1.22.** *Perceba que  $\tilde{f}_*$  está bem definida. De fato, dado  $\alpha + B_k(X) = \beta + B_k(X)$  temos  $\alpha - \beta \in B_k(X)$ . Pela Proposição 3.1.20  $f_*(\alpha - \beta) \in B_k(Y)$ . Por outro lado, pela Observação 3.1.18,  $f_*$  é homomorfismo, então  $f_*(\alpha) - f_*(\beta) = f_*(\alpha - \beta) \in B_k(Y)$ .*

*Assim  $f_*(\alpha) + B_k(Y) = f_*(\beta) + B_k(Y)$  e, portanto,  $\tilde{f}_*(\alpha + B_k(X)) = \tilde{f}_*(\beta + B_k(X))$ .*

*Além disso,  $\tilde{f}_*$  é um homomorfismo de grupos pois  $f_*$  é um homomorfismo de grupos.*

A fim de facilitar a notação faremos o abuso de denotar  $\tilde{f}_*$  simplesmente por  $f_*$  quando não houver risco de confusão.

O objetivo agora é, dado um morfismo de esquemas  $f : X \rightarrow Y$ , definir uma outra forma de relacionar os grupos  $A_*(X)$  com  $A_*(Y)$ .

**Definição 3.1.23.** *Sejam  $f : X \rightarrow Y$  um morfismo de esquemas e  $V$  uma subvariedade de  $Y$ . Defina*

$$f^*V = [f^{-1}(V)],$$

onde  $f^{-1}(V)$  é o subesquema imagem inversa de  $V$  (Definição 2.2.43).

**Observação 3.1.24.** *Podemos estender por linearidade e obtemos um homomorfismo*

$$f^* : Z_*(Y) \rightarrow Z_*(X),$$

$$\sum_i n_i V_i \mapsto \sum_i n_i f^* V_i$$

que chamamos de **morfismo imagem inversa** de  $f$  (para ciclos).

Lembre que, no caso de morfismos push-forward (para ciclos) a Proposição 3.1.19 mostra que  $(g \circ f)_* = f_* \circ g_*$ , porém é possível mostrar que no caso do morfismo imagem inversa nem sempre isso ocorre (ver [36], Exemplo 4.2). Isso ocorrerá para morfismos especiais, os morfismos flats (Definição 2.3.9), que são os que vamos utilizar. Neste caso, se  $f : X \rightarrow Y$  um morfismo flat de dimensão relativa  $n$ ,

$$f^* : Z_k(Y) \rightarrow Z_{k+n}(X), \forall k.$$

Antes disso, precisamos do seguinte resultado, que somente daremos a ideia da demonstração, omitindo algumas justificativas algébricas.

**Proposição 3.1.25.** *Seja  $f : X \rightarrow Y$  um morfismo flat de dimensão relativa  $n$ . Então, para todo subesquema fechado  $Z$  de  $Y$*

$$f^*[Z] = [f^{-1}(Z)].$$

*Demonstração.* Como um esquema pode ser visto como um subesquema fechado dele mesmo, podemos considerar  $f : f^{-1}(Z) \rightarrow Z$ , que ainda é flat.

Sejam  $V$  uma componente irredutível de  $f^{-1}(Z)$  e  $W = \overline{f(V)}$ . Considere  $A = \mathcal{F}_{V,W}$  e  $B = \mathcal{F}_{f^{-1}(Z),V}$ . Pode-se mostrar (ver [36], Proposição 4.4]) que

$$l_B(B) = l_A(A) \cdot l_B(K_r(A) \otimes_A B),$$

onde  $K_r(A)$  é o corpo residual de  $A$ .

Por definição, temos que o coeficiente de  $V$  em  $[X]$  é  $l_B(B)$  e, pelo provado acima, temos que  $l_B(B)$  é  $l_A(A)$  vezes o coeficiente  $l_B(K_r(A) \otimes_A B)$  de  $V$  em  $[f^{-1}W]$ , provando o esperado.  $\square$

Portanto, podemos agora ver um caso em que  $(g \circ f)^* = g^* \circ f^*$ .

**Corolário 3.1.26.** *Sejam  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$  morfismos flat de dimensão relativa  $m$  e  $n$ , respectivamente. Então*

$$(g \circ f)^*(V) = (f^* \circ g^*)(V),$$

para toda subvariedade  $V$  de  $Z$ .

*Demonstração.* Tome  $V$  uma subvariedade qualquer de  $Z$  (que é um subesquema fechado de  $Z$ ), então

$$(g \circ f)^*(V) = [(g \circ f)^{-1}(V)] = [f^{-1}((g^{-1})(V))].$$

Lembre da Observação 2.2.40 que  $g^{-1}(V)$  é um subesquema fechado, logo, aplicando a proposição acima temos

$$[f^{-1}((g^{-1})(V))] = f^*[g^{-1}(V)] = (f^* \circ g^*)(V).$$

□

Também podemos estender a aplicação  $f^*$  aos grupos de Chow, a aplicação é análoga à aplicação  $f_*$ , porém o processo não é simples e pode ser visto em [8, Teorema 1.7].

**Proposição 3.1.27.** *No diagrama comutativo a seguir  $f$  é flat e de dimensão relativa  $n$  e  $g$  é próprio.*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Então  $g'_* \circ f'^* = f_* \circ g_*$

A demonstração da proposição acima pode ser vista em [36, Proposição 4.6].

**Teorema 3.1.28.** *Sejam  $Y$  um subesquema fechado de  $(X, \mathcal{F}_X)$  e  $U = X - Y$  o subesquema aberto de  $X$  dado por  $(U, \mathcal{F}_X|_U)$ . Tomando as inclusões  $i : Y \rightarrow X$  e  $j : U \rightarrow X$ , temos que a sequência*

$$A_k(Y) \xrightarrow{i_*} A_k(X) \xrightarrow{j^*} A_k(U) \rightarrow 0$$

é exata.

*Demonstração.* Precisamos mostrar que  $j^*$  é sobrejetiva e  $Im i_* = ker j^*$ .

Inicialmente mostremos que  $j^*$  é sobrejetiva. De fato, seja  $\alpha = \sum_n a_n V_n \in Z_k(U)$  e para cada  $n$  considere o fecho  $\overline{V_n}$  de  $V_n$  em  $X$ , que é uma subvariedade de  $X$ . Portanto, tomando  $\beta = \sum_n a_n \overline{V_n}$ , temos que

$$j^*(\beta) = \sum_n a_n j^* \overline{V_n} = \sum_n a_n [j^{-1}(\overline{V_n})] = \sum_n a_n [\overline{V_n} \cap U] = \sum_n a_n V_n = \alpha.$$

Então  $j^*(\beta + B_k(X)) = j^*(\beta) + B_k(U) = \alpha + B_k(U)$ , provando que  $j^*$  é sobrejetiva.

Mostremos que  $Im i_* \subseteq ker j^*$ . Note que, dada uma subvariedade  $V$  de  $X$  tal que  $j^*(V) = 0$ , temos que  $V \cap U = \emptyset$ . Dessa forma, dado  $\alpha = \sum_i a_i V_i \in A_k(X)$  temos que  $j^*(\alpha) = 0$  se  $V_i \cap U = \emptyset$  para todo  $V_i$ , ou seja,  $V_i \in Y$ . Portanto, dado  $\beta = \sum_i b_i V_i \in A_k(Y)$  temos que  $i_*(\beta) = \sum_i c_i i_*(V_i) = \sum_i c_i V_i$ , então, como  $V_i \in Y$  segue  $j^*(i_*(\beta)) = 0$ .

Reciprocamente considere agora um ciclo  $\sum_n a_n V_n + B_k(X) \in A_k(X)$  em  $ker j^*$ , ou seja,  $\sum_n a_n j^*(V_n) = \sum_n a_n (V_n \cap U) \in B_k(U)$ . Logo  $\sum_n a_n V_n \cap U = \sum_s \text{div}(\varphi_s)$ , com  $\varphi_s \in R(W_s)$  e  $W_s$  sendo uma subvariedade de  $U$ .

Para cada subvariedade  $W_s$  de  $U$ , considere o fecho  $\overline{W_s}$  de  $W_s$  em  $X$ . Além disso é fácil ver diretamente da Definição 2.1.15 que  $\mathcal{F}_{X,p} = \mathcal{F}_{U,p}$  para um  $p \in U$ , em especial vale para  $g$  o ponto genérico de  $W_s$ , que também é ponto genérico de  $\overline{W_s}$ . Com isso, temos que

$\mathcal{F}_{X,g} = \mathcal{F}_{U,g}$ , ou seja,  $R(\overline{W}_s) = R(W_s)$ . Pelo feito na demonstração da Proposição 3.1.5 podemos considerar  $\sum_n a_n V_n$  e  $\sum_s \text{div}(\varphi_s)$  com o mesmo conjunto de índices  $n$ . Como  $R(\overline{W}_n) = R(W_n)$  temos que

$$\begin{aligned} j^*\left(\sum_n a_n V_n\right) &= \sum_n \text{div}(\varphi_n) \Rightarrow j^*\left(\sum_n a_n V_n\right) - \sum_n \text{div}(\varphi_n) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow j^*\left(\sum_n a_n V_n - \sum_n \text{div}(\varphi_n)\right) = 0, \end{aligned}$$

portanto, pelo discutido anteriormente, temos que  $\sum_n a_n V_n - \sum_n \text{div}(\varphi_n) = i_*\beta$  para algum  $\beta \in A_k(Y)$ .  $\square$

**Observação 3.1.29.** *Sejam  $X_1$  e  $X_2$  subesquemas fechados de  $X$ . Considere a aplicação  $\phi : A_k(X_1) \oplus A_k(X_2) \rightarrow A_k(X_1 \cup X_2)$  tal que  $\phi(u \oplus v) = (i_1)_*(u) - (i_2)_*(v)$ , onde  $i_j : X_j \rightarrow X_1 \cup X_2$ ,  $j = 1, 2$  são as inclusões. Pode-se mostrar que a aplicação está bem definida e é sobrejetora. Além disso,  $\text{Ker } \phi \cong A_k(X_1 \cap X_2)$ . Deste modo,*

$$A_k(X_1 \cup X_2) \cong \frac{A_k(X_1) \oplus A_k(X_2)}{A_k(X_1 \cap X_2)}.$$

**Exemplo 3.1.30.** *Como  $\mathbb{A}_K^n$  possui dimensão  $n$ , pelo Exemplo 3.1.12 que  $A_n(\mathbb{A}_K^n) \cong \mathbb{Z}$ . Além disso, pelo Exemplo 3.1.13 temos que  $A_i(\mathbb{A}_K^n) = 0$  se  $i < n$ . Agora, em [10, Proposição 9.1.14] temos que o homomorfismo  $p^* : A_0(\mathbb{A}_K^{n-k}) \rightarrow A_k(\mathbb{A}_K^n)$  é sobrejetivo para todo  $k$ , em que  $p : \mathbb{A}_K^n \rightarrow \mathbb{A}_K^{n-k}$  é o morfismo projeção. Como por [10, Exemplo 9.1.8]  $A_0(\mathbb{A}_K^{n-k}) \cong 0$  e com as informações discutidas acima, temos*

$$A_k(\mathbb{A}_K^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } k = n; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

**Exemplo 3.1.31.** *Seja  $X = \{x_1 x_2 = 0\} \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{A}_K^3)$  a união de duas retas projetivas  $X = X_1 \cup X_2$  que se encontram na origem.*

*Como  $X_1 \cap X_2$  é a origem, então  $A_1(X_1 \cap X_2) = 0$  e usando a Observação 3.1.29 no índice 1 temos*

$$A_1(X) = A_1(X_1 \cup X_2) \cong A_1(X_1) \oplus A_1(X_2)$$

*Pelo Exemplo 3.1.12 temos  $A_1(X_1) = \mathbb{Z}_1(X_1)$  e  $A_2(X_2) = \mathbb{Z}_2(X_2)$ .*

*Agora, note que, por propriedades de espaço projetivo temos que qualquer ponto de  $X_1$  é racionalmente equivalente, e, da mesma forma temos que isto ocorre para  $X_2$ . Porém,  $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ , já que possuem a origem em comum, portanto todos os pontos de  $X$  são racionalmente equivalentes. Então temos  $A_0(X) \cong B_0(X)$ .*

*Pelo fato de  $B_0(X) \subseteq Z_0(X)$ , e, como provado na Proposição 3.1.2,  $Z_0(X)$  é enumerável, temos então que  $B_0(X)$  também o será, ou seja,  $B_0(X) \cong \mathbb{Z}$ .*

*Deste modo  $A_1(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  e  $A_0(X) \cong \mathbb{Z}$ .*

**Exemplo 3.1.32.** *Sejam  $\mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{n+1})$  e  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Temos que  $A_i(\mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{n+1})) \cong \mathbb{Z}\mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{i+1})$ , ou seja,  $A_i(\mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{n+1}))$  é gerado por um espaço projetivo de dimensão  $i$ . De fato, vamos provar por indução sobre  $n$ .*

*Se  $k = n$  temos por [10, Exemplo 9.1.5] que, dado um esquema  $X$  de dimensão  $n$ , o grupo  $A_k(X) \cong \mathbb{Z}$  é localmente livre e gerado por  $X$ , ou seja,  $A_k(X) \cong \mathbb{Z}X$ . Isso implica que  $A_n(\mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{n+1})) \cong \mathbb{Z}\mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{n+1})$ . Em especial, temos que vale para o caso  $n = 1$ .*

*Suponha por indução que  $A_i(\mathbb{P}(\mathbb{A}_K^n)) \cong \mathbb{Z}\mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{i+1})$ , com  $i \leq n$ .*

Vamos agora provar para  $n$ .

Note que  $\mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{n+1}) - \mathbb{P}(\mathbb{A}_K^n) \cong \mathbb{A}_K^n$ . Considere agora  $i : \mathbb{P}(\mathbb{A}_K^n) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{n+1})$  e  $j : \mathbb{A}_K^n \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{n+1})$  as inclusões triviais. Com isso, pelo Teorema 3.1.28 temos que a sequência abaixo é exata

$$A_i(\mathbb{P}(\mathbb{A}_K^n)) \xrightarrow{i_*} A_i(\mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{n+1})) \xrightarrow{j^*} A_i(\mathbb{A}_K^n) \rightarrow 0.$$

Sabemos ainda pelo Exemplo 3.1.30 que  $A_i(\mathbb{A}_K^n) = 0$  para todo  $i \neq n$ , então temos que  $i_*$  é sobrejetiva para todo  $i \neq n$  pelo fato da sequência ser exata. Com isso, dado  $\beta = \sum_m b_m V \in A_i(\mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{n+1}))$  existe  $\alpha \in A_i(\mathbb{P}(\mathbb{A}_K^n))$  tal que  $i_*(\alpha) = \beta$ . Lembre da hipótese de indução que  $A_i(\mathbb{P}(\mathbb{A}_K^n)) \cong \mathbb{Z}\mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{i+1})$ , então  $\alpha = \sum_m a_m \mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{i+1})$ . Note que  $i_*(\alpha) = \sum_m a_m i_* \mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{i+1}) = \sum_m b_m i(\mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{i+1}))$ , como  $i : \mathbb{P}(\mathbb{A}_K^n) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{n+1})$  é a inclusão trivial, segue que  $i(\mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{i+1})) \cong \mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{i+1})$  em  $\mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{n+1})$ . Portanto  $\beta = \sum_m b_m \mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{i+1})$  provando que  $\mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{n+1}) \cong \mathbb{Z}\mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{i+1})$ .

## 3.2 Ciclos associados a divisores de Cartier

Agora vamos estudar uma forma de associar ciclos a divisores de Cartier em um esquema  $X$ , mostrando como seus grupos se comportam um em relação ao outro. Tendo tal associação podemos utilizá-la para criar uma relação de equivalência entre divisores de Cartier e ver como tal relação se comporta em relação aos grupos de ciclos vistos anteriormente.

Inicialmente vamos querer associar um número a um divisor de Cartier em  $X$  para cada subvariedade  $V \subseteq X$ . Antes, para que esteja bem definido, precisamos do seguinte resultado.

**Proposição 3.2.1.** *Sejam  $D = (U_i, f_i)$  um divisor de Cartier em  $X$  e  $V$  uma subvariedade  $X$ . Então, para todo  $i, j$  tais que  $V \cap U_i \neq \emptyset$  e  $V \cap U_j \neq \emptyset$ , temos  $\text{ord}_V(f_i) = \text{ord}_V(f_j)$ .*

*Demonstração.* Pela Proposição 2.6.2, temos que  $f_i/f_j \in R(X)$  é invertível em  $U_i \cap U_j$ , então temos

$$\text{ord}_V(f_i/f_j) = l\left(\frac{\mathcal{F}_{X,V}}{\langle f_i/f_j \rangle}\right) = l\left(\frac{\mathcal{F}_{X,V}}{\langle 1 \rangle}\right) = 0.$$

Então, com a igualdade  $\text{ord}_V(f_i/f_j) = 0$  e a Proposição 2.3.13 temos que

$$0 = \text{ord}_V(f_i/f_j) = \text{ord}_V(f_i) - \text{ord}_V(f_j) \Rightarrow \text{ord}_V(f_i) = \text{ord}_V(f_j).$$

□

**Definição 3.2.2.** *Dado  $D = (U_i, f_i)$  um divisor de Cartier em  $X$ , para cada subvariedade  $V$  de  $X$ , é definida a **ordem** de  $D$  em  $V$ , denotada por  $\text{ord}_V(D)$ , como sendo*

$$\text{ord}_V(D) := \text{ord}_V(f_i) \text{ para algum } i \text{ tal que } U_i \cap V \neq \emptyset.$$

Isso é necessário para fazer uma associação direta entre divisores de Cartier e ciclos de  $Z_*(X)$  como veremos a seguir.

**Definição 3.2.3.** *Seja  $D = (U_i, f_i)$  um divisor de Cartier em  $X$ . Chamamos de **ciclo associado** a  $D$  o seguinte ciclo:*

$$[D] := \sum_V \text{ord}_V(D) V,$$

onde  $V$  são subvariedades de  $X$  de codimensão 1.

Dessa forma, se  $X$  possui dimensão  $n$ , é possível construir uma aplicação entre o grupo dos divisores de Cartier de  $X$ ,  $\text{Div}(X)$ , e  $Z_{n-1}(X)$  levando um divisor de Cartier  $D$  ao seu ciclo associado.

**Observação 3.2.4.** Se  $D$  é um divisor de Cartier principal em  $X$ , então  $D = (U_i, f)$ , com  $f_i = f|_{U_i}$  para alguma  $f \in R(X)$ . Com isso,

$$[D] = \sum_V \text{ord}_V(f) V = \text{div}(f) \in B_{n-1}(X).$$

**Proposição 3.2.5.** A aplicação  $\varphi : \text{Div}(X) \rightarrow Z_{n-1}(X)$ , dada por  $\varphi(D) = [D]$  é um homomorfismo.

*Demonstração.* De fato, sejam  $D$  e  $E$  divisores de Cartier em  $X$ .

Pela Observação 2.6.6, podemos considerar sem perda de generalidade  $D = (U_i, f_i)$  e  $E = (U_i, g_i)$ . Assim,  $D + E = (U_i, f_i g_i)$  (Observação 2.6.4). Deste modo,

$$\begin{aligned} \varphi(D + E) &= [D + E] = \sum_V \text{ord}_V(D + E) V = \sum_V \text{ord}_V(f_i g_i) V \\ &= \sum_V \text{ord}_V(f_i) V + \sum_V \text{ord}_V(g_i) V = \varphi(D) + \varphi(E), \end{aligned}$$

onde a quarta igualdade é garantida pela Proposição 2.3.13. Portanto  $\varphi$  é um homomorfismo.  $\square$

Tendo agora uma ligação entre ciclos e divisores de Cartier podemos estender o conceito de equivalência racional de ciclos, como visto na Definição 3.1.6, para divisores de Cartier simplesmente olhando para seus ciclos associados.

**Definição 3.2.6.** Sejam  $D$  e  $D'$  divisores de Cartier em  $X$ . Diremos que  $D$  e  $D'$  são **racionalmente equivalentes** se  $[D]$  e  $[D']$  são racionalmente equivalentes.

**Proposição 3.2.7.** Sejam  $D$  e  $D'$  divisores de Cartier em  $X$ . Se  $D - D'$  é um divisor de Cartier principal em  $X$ , então  $D$  e  $D'$  são racionalmente equivalentes.

*Demonstração.* Se  $D - D'$  é um divisor de Cartier principal em  $X$ , pela Observação 3.2.4  $[D - D'] \in B_{n-1}(X)$ .

Lembre pela Proposição 3.2.5 que  $[D - D'] = [D] - [D']$ , portanto  $[D] - [D'] \in B_{n-1}(X)$ , o que prova que  $D$  e  $D'$  são racionalmente equivalentes.  $\square$

**Observação 3.2.8.** Podemos estender a aplicação da Proposição 3.2.5 para o grupo de Chow. Lembrando que  $\text{Div}(X)$  e  $P\text{Div}(X)$  são os grupos dos divisores de Cartier e dos divisores de Cartier principais em  $X$ , respectivamente, e  $\text{Pic}(X) := \frac{\text{Div}(X)}{P\text{Div}(X)}$  o grupo de Picard de  $X$ , considere a aplicação  $\tilde{\varphi} : \text{Pic}(X) \rightarrow A_{n-1}(X)$ , dada por  $\tilde{\varphi}(D + P\text{Div}(X)) := \varphi(D) + B_{n-1}(X)$ .

Vejamus que  $\tilde{\varphi}$  está bem definida. Tome  $D + P\text{Div}(X) = E + P\text{Div}(X)$ . Logo  $D - E \in P\text{Div}(X)$ , ou seja,  $D - E$  é um divisor de Cartier principal em  $X$ . Pela Proposição 3.2.7  $D$  e  $E$  são racionalmente equivalentes, ou seja, existe  $k$  tal que  $[D] - [E] = [D - E] \in B_{n-1}(X)$ . Assim

$$0 = [D - E] + B_{n-1}(X) = \varphi(D - E) + B_{n-1}(X) = (\varphi(D) + \varphi(E)) + B_{n-1}(X) =$$

$$= (\varphi(D) + B_{n-1}(X)) + (\varphi(E) + B_{n-1}(X)),$$

onde a terceira igualdade vem do fato de  $\varphi$  ser homomorfismo de anéis (Proposição 3.2.5).

Portanto  $\varphi(D) + B_{n-1}(X) = \varphi(E) + B_{n-1}(X)$ , ou seja,  $\tilde{\varphi}(D + PDiv(X)) = \tilde{\varphi}(E + PDiv(X))$ .

**Exemplo 3.2.9.** Se  $X$  for uma curva projetiva suave. Pelo fato de  $X$  ser uma curva temos que a dimensão do esquema  $X$  é 1. Além disso, toda curva projetiva é definida por uma seção  $\gamma : X \rightarrow K$ , com  $K$  um corpo, dessa forma temos que  $X$  é um esquema algébrico e uma variedade.

Então, por [30, p. 50],  $Z_0(X) \cong Div(X)$  e também  $B_0(X) \cong PDiv(X)$ . Com isso, pela observação feita acima, teremos  $A_0(X) \cong Pic(X)$ .

### 3.3 Classes de Chern - caso suave

As classes características apresentadas estão associadas a variedades complexas. Inicialmente vamos considerar o caso sem singularidades, com isso, temos o fibrado tangente bem definido. Porém estes objetos são mais gerais, podendo ser definidos para qualquer fibrado vetorial. A obtenção do conceito inicia-se com fibrados de linha, para depois considerar fibrados vetoriais de posto qualquer e, por último, particularizamos para um fibrado específico, o fibrado tangente.

Dado um fibrado de linha  $\mathcal{L}$  sobre  $X$  e  $V$  um subvariedade de  $X$  de dimensão  $k$ , existe  $C$  um divisor de Cartier em  $V$  tal que  $\mathcal{F}_V(C) \cong \mathcal{L}|_V$  (Proposição 2.6.13). Pela Definição 3.2.3,  $[C] \in Z_{k-1}(V)$ . Pela Observação 3.2.8 podemos associar a  $C$  um elemento de  $A_{k-1}(V)$ , que por simplicidade também vamos denotar por  $[C]$ , ou seja,

$$[C] := \tilde{\varphi}(C + PDiv(V)).$$

Vamos considerar a inclusão  $i : V \rightarrow X$ . Assim  $i^*([C]) \in A_{k-1}(X)$ .

**Definição 3.3.1.** Sejam  $\mathcal{L} \rightarrow X$  um fibrado linha,  $V$  uma subvariedade de  $X$  e  $C$  o divisor de Cartier em  $V$  descrito anteriormente. O elemento  $i^*[C]$  é chamado a **1ª classe de Chern** de  $\mathcal{L}$  com respeito a  $V$  e denotada por

$$c_1(\mathcal{L}) \cap V := i^*([C]).$$

**Observação 3.3.2.** Note que a primeira classe de Chern está bem definida. De fato, sejam  $C, C'$  dois divisores de Cartier em  $V$  tais que  $\mathcal{F}_V(C)$  e  $\mathcal{F}_V(C')$  sejam isomorfos a  $\mathcal{L}|_V$ . Com isso segue que  $C$  e  $C'$  são racionalmente equivalentes, e, portanto, definem o mesmo elemento em  $A_{k-1}(V)$ .

**Observação 3.3.3.** Podemos então estender por linearidade o conceito de classes de Chern como feito para classes de interseção para um morfismo  $c_1(\mathcal{L}) \cap : Z_*(X) \rightarrow A_*(X)$ . De fato, seja  $\alpha \in Z_*(X)$  com  $\alpha = \sum_V n_V V$ , então  $c_1(\mathcal{L}) \cap \alpha := \sum_V n_V c_1(\mathcal{L}) \cap V$ , que claramente é um homomorfismo de grupos. Em especial, isso implica que, dados  $\alpha, \beta \in Z_*(X)$ , temos  $c_1(\mathcal{L}) \cap (\alpha + \beta) = c_1(\mathcal{L}) \cap \alpha + c_1(\mathcal{L}) \cap \beta$ .

**Proposição 3.3.4.** O homomorfismo definido acima satisfaz as seguintes propriedades:

- (a) Seja  $f : X' \rightarrow X$  um morfismo flat, então para todo  $\alpha \in Z_*(X)$  e todo fibrado linha  $\mathcal{L}$  de  $X$  temos

$$f^*(c_1(\mathcal{L}) \cap \alpha) = c_1(f^*\mathcal{L}) \cap f^*\alpha \in A_*(X');$$

(b) Seja  $p : X \rightarrow Y$  um morfismo próprio, então para todo  $\alpha \in Z_*(Y)$  e todo fibrado linha  $\mathcal{L}$  de  $X$  temos

$$p_*(c_1(p^*\mathcal{L}) \cap \alpha) = c_1(\mathcal{L}) \cap p_*(\alpha).$$

*Demonstração.* (a) Perceba que podemos supor sem perda de generalidade que  $\alpha = V$  para alguma subvariedade de  $X$  pois  $c_1 \cap$  e  $f^*$  são homomorfismos de grupos (Observação 3.3.3 e Observação 3.1.24).

Também podemos supor sem perda de generalidade que  $V = X$  pois  $f^*(c_1(\mathcal{L}) \cap V) = f^*(i^*([C])) = i^*(f^*([D])) = i^*(f^*(c_1(\mathcal{L}) \cap X))$ , onde  $i : V \rightarrow X$  é a inclusão,  $C$  é o divisor de Cartier em  $V$  tal que  $\mathcal{F}_V(C) \cong \mathcal{L}|_V$  e  $D$  é o divisor de Cartier em  $X$  tal que  $\mathcal{F}_X(D) = \mathcal{L}$ .

Sendo  $D$  tal que  $\mathcal{F}_X(D) = \mathcal{L}$ , então  $\mathcal{F}_{X'}(f^{-1}D) = f^*\mathcal{L}$ . Suponha que  $D$  é um divisor efetivo de Cartier, então  $D$  é um subesquema fechado de  $X$ , com isso, pela Proposição 3.1.25 temos que  $f^*[D] = [f^{-1}(D)]$ . Note agora que, por definição temos

$$c_1(\mathcal{L}) \cap V = [D] \Rightarrow f^*(c_1(\mathcal{L}) \cap V) = f^*[D]$$

e

$$[f^{-1}(D)] = c_1(\mathcal{F}_{X'}(f^{-1}(D))) \cap [f^{-1}V] = c_1(\mathcal{F}_{X'}(f^*\mathcal{L})) \cap f^*V.$$

Portanto,

$$f^*[D] = [f^{-1}(D)] \Rightarrow f^*(c_1(\mathcal{L}) \cap V) = c_1(\mathcal{F}_{X'}(f^*\mathcal{L})) \cap f^*V.$$

Vamos mostrar agora o caso em que  $D$  é um divisor de Cartier qualquer. Considere  $W' \subseteq X'$  uma subvariedade de  $X'$  que aparece em  $f^*[D]$  e em  $[f^*D]$ . Sabemos que

$$[D] = \sum_n a_n W_n \Rightarrow f^*[D] = \sum_n a_n f^*W_n = \sum_n a_n f^{-1}W_n,$$

portanto  $W' = f^{-1}W$  para alguma subvariedade  $W = W_n$  de  $X$ . Como  $W$  é subvariedade, então  $W$  é um subesquema fechado e irredutível de  $X$  e, pela Proposição 2.2.27 segue que existe um único ponto genérico  $g$  de  $W$ . Considere um aberto  $U'_i$  de  $X$  tal que  $U_i = U'_i \cap W \neq \emptyset$ , então  $U_i$  é um aberto de  $W$  e  $g \in U_i$ . É fácil ver que, diretamente da Definição 2.1.15,  $\mathcal{F}_{X,g} = \mathcal{F}_{U'_i,g}$ , além disso, pela Observação 2.3.7,  $\mathcal{F}_{X,V} = \mathcal{F}_{X,g}$ , ou seja,  $\mathcal{F}_{X,g} = \mathcal{F}_{U'_i,g} = \mathcal{F}_{U'_i,U'_i \cap W}$ .

Como  $a_n$  é o coeficiente de  $W'$  temos por definição que

$$a_n = \text{ord}_W(D) = l \left( \frac{\mathcal{F}_{X,V}}{\langle f_i \rangle} \right) = l \left( \frac{\mathcal{F}_{U'_i,U'_i \cap W}}{\langle f_i|_{U'_i} \rangle} \right) = \text{ord}_{U'_i \cap W}(D|_{U'_i})$$

para algum  $i$  tal que  $U'_i \cap W \neq \emptyset$ , com  $D|_{U'_i} = (\tilde{U}'_j, f_j = f_i|_{\tilde{U}'_j})$ , em que  $\{\tilde{U}'_j\}$  é uma cobertura aberta de  $U'_i$ . Dessa forma, podemos calcular o coeficiente de  $W$  restringindo  $X$  a  $U_i$  sem perda de informações. Como isso vale para toda subvariedade  $W$  concluímos em geral que  $f^*[D] = [f^{-1}(D)]$ . Logo, segue da mesma forma que

$$f^*(c_1(\mathcal{L}) \cap V) = c_1(\mathcal{F}_{X'}(f^*\mathcal{L})) \cap f^*V,$$

provando o resultado.

(b) No caso em que  $p$  é a inclusão de uma subvariedade  $X \subseteq Y$  a igualdade segue das

definições feitas. Para o caso geral veja [36, Proposição 7.1 (4)].  $\square$

**Proposição 3.3.5.** *Se  $\alpha \in Z_k(X)$  é racionalmente equivalente a zero, então  $c_1(\mathcal{L}) \cap \alpha = 0$ . Logo, o homomorfismo  $c_1(\mathcal{L}) \cap$  pode ser estendido a  $A_*(X)$ .*

*Demonstração.* Se  $\alpha$  é racionalmente equivalente a zero temos que  $\alpha = \sum_i \text{div}(\varphi_i)$ , com  $\varphi_i \in R(V_i)^*$  e  $V_i$  subvariedade de  $X$ . Note que, pelo fato de  $c_1(\mathcal{L}) \cap$  ser um homomorfismo, podemos supor sem perda de generalidade que  $\alpha = \text{div}(\varphi)$  para algum  $\varphi \in R(V)$ , com  $V$  subvariedade e  $X$ .

Tome  $D$  o divisor de Cartier tal que  $\mathcal{F}_V(D) \cong \mathcal{L}|_V$  e  $D'$  o divisor de Cartier principal dado por  $\varphi$ . Perceba que

$$c_1(\mathcal{L}) \cap \alpha = c_1(\mathcal{L}) \cap [D'] = c_1(\mathcal{F}_V(D)) \cap [D'].$$

Seja  $\mathcal{F}_V(D')$  o fibrado associado ao divisor de Cartier  $D'$ . Pelo Teorema [3.3.7] podemos trocar  $D$  por  $D'$  na igualdade acima, ou seja,

$$c_1(\mathcal{F}_V(D)) \cap [D'] = c_1(\mathcal{F}_V(D')) \cap [D].$$

Note que, da mesma forma que a feita para  $\alpha$ , podemos considerar sem perda de generalidade que  $[D] = V'$  e, com isso, temos  $c_1(\mathcal{F}_V(D')) \cap [D] = c_1(\mathcal{F}_V(D')) \cap V'$ .

Por definição, temos que  $c_1(\mathcal{F}_V(D')) \cap V' = [D_1]$ , com  $D_1$  um divisor de Cartier tal que  $\mathcal{F}_{V'}(D_1) = \mathcal{F}_V(D')|_{V'}$ . Dessa forma, pela construção de  $\mathcal{F}_V(D')$  (Definição [2.6.12]), devemos ter que  $D_1$  é um divisor de Cartier principal. De fato, sabemos pela definição de fibrado associado que as funções de restrição de  $\mathcal{F}_V(D')$  são dadas pela restrição de  $\varphi$  a subconjuntos abertos, portanto,  $D_1$  é definido por  $\varphi|_{V'}$ , ou seja,  $D_1$  é um divisor de Cartier principal.

Portanto, pela Observação [3.2.4], segue que  $[D_1] = 0$  em  $A_*(X)$  provando o esperado.  $\square$

Com isso, podemos estender  $c_1(\mathcal{L}) \cap$  ao grupo de Chow  $A_*(X)$ .

**Observação 3.3.6.** *Como o homomorfismo  $c_1(\mathcal{L}) \cap$  pode ser estendido a  $A_*(X)$ , também vale que dados  $\alpha, \beta \in A_*(X)$ ,  $c_1(\mathcal{L}) \cap (\alpha + \beta) = c_1(\mathcal{L}) \cap \alpha + c_1(\mathcal{L}) \cap \beta$ .*

**Teorema 3.3.7.** *Sejam  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{L}'$  dois fibrados linha em  $X$ . Então, para todo  $\alpha \in A_*(X)$  temos*

$$c_1(\mathcal{L}) \cap (c_1(\mathcal{L}') \cap \alpha) = c_1(\mathcal{L}') \cap (c_1(\mathcal{L}) \cap \alpha).$$

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [8, Proposição 2.5].  $\square$

**Notação:** Indutivamente definimos o seguinte elemento

$$c_1(\mathcal{L})^d \cap \alpha := c_1(\mathcal{L}) \cap (c_1(\mathcal{L})^{d-1} \cap \alpha).$$

**Proposição 3.3.8.** *Para todos  $\alpha, \beta \in A_*(X)$  temos*

$$c_1(\mathcal{L})^d \cap (\alpha + \beta) = c_1(\mathcal{L})^d \cap \alpha + c_1(\mathcal{L})^d \cap \beta.$$

*Demonstração.* Provemos por indução sobre  $d$ .

Note que o caso  $d = 1$  segue da Observação [3.3.6].

Suponha que  $c_1(\mathcal{L})^{d-1} \cap (\alpha + \beta) = c_1(\mathcal{L})^{d-1} \cap \alpha + c_1(\mathcal{L})^{d-1} \cap \beta$ .

Por fim, provemos para  $d$ . Note

$$c_1(\mathcal{L})^d \cap (\alpha + \beta) = c_1(\mathcal{L}) \cap (c_1(\mathcal{L})^{d-1} \cap (\alpha + \beta)),$$

que pela hipótese de indução temos

$$\begin{aligned} c_1(\mathcal{L})^d \cap (\alpha + \beta) &= c_1(\mathcal{L}) \cap (c_1(\mathcal{L})^{d-1} \cap \alpha + c_1(\mathcal{L})^{d-1} \cap \beta) = \\ &= c_1(\mathcal{L}) \cap (c_1(\mathcal{L})^{d-1} \cap \alpha) + c_1(\mathcal{L}) \cap (c_1(\mathcal{L})^{d-1} \cap \beta) = c_1(\mathcal{L})^d \cap \alpha + c_1(\mathcal{L})^d \cap \beta, \end{aligned}$$

como esperado.  $\square$

O próximo passo é a definição de outra classe, que é necessária para definir as classes de Chern para fibrados vetoriais de posto qualquer.

Seja  $p : E \rightarrow X$  um fibrado vetorial de posto  $e + 1$ . Então podemos considerar o fibrado projetivo associado  $p : \mathbb{P}(E) \rightarrow X$  de posto  $e$  (Definição 2.4.15). Seja  $\mathcal{F}_E(1)$  o fibrado tautológico quociente de  $E$  (Definição 2.5.24).

Em [8, B.2.5] afirma-se que o morfismo  $p : \mathbb{P}(E) \rightarrow X$  é um morfismo flat se, e somente se, para toda subvariedade  $V$  de  $\mathbb{P}(E)$ , com  $p(V) = W$ , temos que  $\mathcal{F}_{\mathbb{P}(E),V}$  é um  $\mathcal{F}_{E,W}$ -módulo flat. Com isso, é possível ver que  $p$  é flat, então podemos considerar  $p_*$  e  $p^*$ .

**Definição 3.3.9.** Dado  $\alpha \in A_k(X)$ , define

$$s_i(E) \cap \alpha := p_*(c_1(\mathcal{F}_E(1))^{e+i} \cap p^*\alpha) \in A_{k-i}(X),$$

chamada  *$i$ -ésima classe de Segre do fibrado  $E$*  e com isso, podemos definir a *classe total de Segre* como

$$s(E) = s_0(E) + s_1(E) + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} s_i(E).$$

**Notação:**  $s(E) \cap \alpha = \left( \sum_{i=0}^{\infty} s_i(E) \right) \cap \alpha = \sum_{i=0}^{\infty} (s_i(E) \cap \alpha)$ .

**Observação 3.3.10.** Sabemos que, pela Proposição 3.3.8  $c_1(\mathcal{F}_E(1))^{e+i} \cap$  é homomorfismo, pela Observação 3.1.18  $p_*$  é homomorfismo e pela Observação 3.1.24  $p^*$  é homomorfismo. Portanto,  $s_i(E) \cap$  é homomorfismo para todo  $i$ . Consequentemente  $s(E) \cap$  é homomorfismo.

**Proposição 3.3.11.** Valem as seguintes propriedades:

(a)  $s_0(E) = 1$ .

(b)  $s_i(E) = 0$  se  $i < 0$  ou  $i > \dim X$ .

(c) (naturalidade) Se  $g : X' \rightarrow X$  é um morfismo flat,  $\alpha \in A_*(X)$  e  $E' = g^*E$ , então

$$s_i(g^*E) \cap g^*\alpha = g^*(s_i(E) \cap \alpha).$$

(d) (fórmula de projeção) Se  $g : X' \rightarrow X$  é um morfismo próprio e  $\beta \in A_*(X')$  então,

$$g_*(s_i(g^*E) \cap \beta) = s_i(E) \cap g_*\beta.$$

(e) (comutatividade) Se  $E$  e  $F$  são fibrados vetoriais sobre  $X$  e  $\alpha \in A_*(X)$  então,

$$s_i(E) \cap (s_j(F) \cap \alpha) = s_j(F) \cap (s_i(E) \cap \alpha).$$

(f) Se  $\mathcal{L}$  é um fibrado linha, então  $s_1(\mathcal{L}) = -c_1(\mathcal{L})$ .

*Demonstração.* Provemos inicialmente (c).

(c) Dado o morfismo  $g$ , considere o fibrado  $E' = g^*E$  pullback de  $\pi$  por  $g$  (Definição 2.5.21). Dessa forma, podemos também considerar o fibrado projetivo associado  $p' : \mathbb{P}(E') \rightarrow X'$  e temos que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(E') & \xrightarrow{g'} & \mathbb{P}(E) \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ X' & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

Note que pela definição

$$s_i(g^*E) \cap g^*\alpha = p'_*(c_1(\mathcal{F}_{E'}(1))^{\epsilon+i} \cap p'^*g^*\alpha).$$

Pelo fato do diagrama acima ser comutativo temos que  $p \circ g' = g \circ p'$ , e, com isso, segue  $(p \circ g')^* = (g \circ p')^*$ . Além disso, pelo Corolário 3.1.26 temos que  $(p \circ g')^* = g'^* \circ p^*$  e  $(g \circ p')^* = p'^* \circ g^*$ , então  $p'^* \circ g^* = g'^* \circ p^*$  e, com isso, segue

$$p'_*(c_1(\mathcal{F}_{E'}(1))^{\epsilon+i} \cap p'^*g^*\alpha) = p'_*(c_1(g'^*\mathcal{F}_E(1))^{\epsilon+i} \cap g'^*p^*\alpha).$$

Aplicando o primeiro item da Proposição 3.3.4 na igualdade acima segue

$$s_i(g^*E) \cap g^*\alpha = p'_*g'^*(c_1(\mathcal{F}_{E'}(1))^{\epsilon+i} \cap p^*\alpha).$$

Por fim, a Proposição 3.1.27 garante que

$$s_i(g^*E) \cap g^*\alpha = g^*p_*(c_1(\mathcal{F}_E(1))^{\epsilon+i} \cap p^*\alpha) = g^*(s_i(E) \cap \alpha),$$

com a última igualdade dada pela definição das classes de Segre. De forma análoga é possível provar (d).

Vamos agora mostrar (e). Seja  $B = \mathbb{P}(E) \times_X \mathbb{P}(F)$  e considere o diagrama

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{p'} & \mathbb{P}(F) \\ q' \downarrow & & \downarrow q \\ \mathbb{P}(E) & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

onde,  $F$  é um fibrado vetorial com  $b = \text{posto}(F)$ ,  $q'$  é a projeção de  $\mathbb{P}(E) \times_X \mathbb{P}(F)$  em  $\mathbb{P}(E)$  e  $p'$  é a projeção de  $\mathbb{P}(E) \times_X \mathbb{P}(F)$  em  $\mathbb{P}(F)$ . Pela Definição 3.3.9

$$s_i(E) \cap s_j(F) \cap \alpha = p_*(c_1(\mathcal{F}_E(1))^{\epsilon+i} \cap p^*q_*(c_1(\mathcal{F}_F(1))^{b+j} \cap q^*\alpha)).$$

Agora, aplicando a Proposição 3.1.27 a expressão acima é igual a

$$p_*(c_1(\mathcal{F}_E(1))^{\epsilon+i} \cap q'_*p'^*(c_1(\mathcal{F}_F(1))^{b+j} \cap q^*\alpha)).$$

Aplicando o item (a) da Proposição 3.3.4, temos que a expressão acima é igual a

$$p_*(c_1(\mathcal{F}_E(1))^{\epsilon+i} \cap q'_*(c_1(p'^*\mathcal{F}_E(1))^{b+j} \cap p'^*q^*\alpha).$$

Além disso, Proposição 3.3.4(a) também garante que a expressão acima é igual a

$$p_*q'_*(c_1(q'^*\mathcal{F}_E(1))^{\epsilon+1} \cap (c_1(p'^*\mathcal{F}_E(1))^{b+j} \cap p'^*q^*\alpha).$$

Agora, pelo Teorema 3.3.7 garante a comutatividade das classes de Chern, ou seja,  $c_1(\mathcal{L}) \cap (c_1(\mathcal{L}' \cap \alpha)) = c_1(\mathcal{L}') \cap (c_1(\mathcal{L}) \cap \alpha)$ . Em especial, podemos reescrever a última expressão como

$$q_*p'_*(c_1(p'^*\mathcal{F}_F(1))^{b+j} \cap (c_1(q'^*\mathcal{F}_E(1))^{\epsilon+i} \cap q'^*p^*\alpha)).$$

Por fim, novamente pela Proposição 3.3.4(a), segue que

$$= q_*(c_1(\mathcal{F}_E(1))^{b+j} \cap p'_*q'^*(c_1(\mathcal{F}_F(1))^{\epsilon+i} \cap p^*\alpha)).$$

Por definição, a igualdade acima é  $s_j(F) \cap s_i(E) \cap \alpha$ , o que prova o item (e).

Provemos (b). Queremos mostrar que  $s_i(E) \cap \alpha = 0$  se  $i < 0$  ou  $i > \dim X$ . Note que, analogamente à demonstração da Proposição 3.3.4 podemos supor sem perda de generalidade que  $\alpha = V$ , com  $V$  sendo uma subvariedade de dimensão  $k$  de  $X$ . Considere  $i : V \rightarrow X$  a inclusão trivial. Pela fórmula de projeção (item (d)) podemos assumir  $X = V$ , com isso, temos que  $s_i(E) \cap X \in A_{k-i}(X)$ . Agora, se  $i < 0$  segue que  $k - i > k$ , ou seja,  $k - i$  é maior que a dimensão de  $X$ . Portanto, pelo Exemplo 3.1.13 segue que  $A_{k-i}(X) \cong 0$ , ou seja,  $s_i(E) \cap X = 0$ . Agora se  $i > \dim X = k$ , então  $k - i < i - i = 0$ . Pela Observação 3.1.10, segue também que  $A_{k-i}(X) \cong 0$ .

Provemos agora (a). Note que  $s_0(E) = 1$  é equivalente a mostrar que  $s_0(E) \cap \alpha = \alpha$ . Agora, analogamente à prova do item (b), podemos supor sem perda de generalidade que  $\alpha = V$  e  $V = X$ , com  $V$  subvariedade de dimensão  $k$  de  $X$ . Note que, por definição,

$$s_0(E) \cap X = p_*(c_1(\mathcal{F}_E(1))^e \cap p^*X).$$

Vimos no meio do Exemplo 3.1.32 que  $A_k(X) \cong \mathbb{Z}X$ , então, como  $s_0(E) \cap X \in A_k(X)$ , temos  $s_0(E) \cap X = mX$  para algum  $m \in \mathbb{Z}$ .

Como  $E$  é fibrado vetorial em  $X$ , existe  $U$  aberto de  $X$  tal que  $E \cong U \times B$ , tal que  $B$  é um espaço vetorial de dimensão  $e$ . Sabemos que  $\mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{e+1})$  é um espaço vetorial de dimensão  $e$ , portanto podemos substituir  $B$  por  $\mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{e+1})$  e temos que  $E \cong U \times \mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{e+1})$ .

Considere agora  $j : U \rightarrow X$  a inclusão de  $U$  em  $X$ , que é um morfismo flat. Pelo item (c) temos que

$$j^*(s_0(E) \cap X) = s_0(j^*E) \cap j^*X = s_0(E|_U) \cap U \Rightarrow mj^*X = s_0(E|_U) \cap j^*X.$$

Perceba agora que existem seções de  $\mathcal{F}_{E|_U}(1)$  tal que o zero-esquema delas é  $X \times \mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{e+1})$ , ou seja,  $X \times \mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{e+1})$  é um divisor de Cartier e, além disso, por [8, Proposição 3.1] temos que  $c_1(\mathcal{F}_{E|_U}(1)) \cap \mathbb{P}(\mathbb{A}_K^e) \times X = \mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{e-1}) \times X$ . Dessa forma, temos que  $c_1(\mathcal{F}_{E|_U}(1))^{e-1} \cap \mathbb{P}(\mathbb{A}_K^e) \times X \cong \mathbb{P}(\mathbb{A}_K^1) \times X$ . Além disso, temos que

$$s_0(E|_U) \cap j^*X = p_*(c_1(\mathcal{F}_E(1))^{e-1} \cap \mathbb{P}(\mathbb{A}_K^e) \times X) = j^*(\mathbb{P}(\mathbb{A}_K^1) \times X) = j^*(\text{pto} \times X) \cong j^*X.$$

Logo,  $mj^*X = j^*X \Rightarrow m = 1$ , provando o resultado.

Por fim, provemos o item (f). Primeiramente, por [8, B.5.5]  $p^*\mathcal{L}^* \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{L}}(1)$  é um isomorfismo, onde  $\mathcal{L}^*$  é o fibrado dual de  $\mathcal{L}$ . Além disso, temos que  $\mathcal{L}$  é um fibrado linha e, portanto, possui posto igual a 1. Dessa forma, por definição temos que

$$s_1(E) \cap \alpha = p_*(c_1(\mathcal{F}_{\mathcal{L}}(1)) \cap p^*\alpha).$$

Agora, como  $p^*\mathcal{L}^* \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{L}}(1)$  é isomorfismo e pelo item (a) da Proposição 3.3.4 temos que

$$s_1(E) \cap \alpha = p_*(c_1(p^*\mathcal{L}^*) \cap p^*\alpha) = p_*p^*(c_1(\mathcal{L}^*) \cap \alpha).$$

Temos ainda que  $X \cong \mathbb{P}(\mathcal{L})$  e por [8, Proposição 2.5 (e)], temos que  $c_1(\mathcal{L}^*) \cap \alpha = -c_1(\mathcal{L}) \cap \alpha$ , então

$$s_1(E) \cap \alpha = c_1(\mathcal{L}^*) \cap \alpha = -c_1(\mathcal{L}) \cap \alpha$$

o que prova o resultado.  $\square$

Vamos agora estender o conceito de classes de Chern para fibrados vetoriais quaisquer. Seja  $E$  um fibrado vetorial em um esquema  $X$ . Considere a série de potências formal

$$s_t(E) = \sum_{i=0}^{\infty} s_i(E)t^i = 1 + s_1(E)t + s_2(E)t^2 + \dots$$

**Definição 3.3.12.** O *polinômio de Chern* de  $E$ , denotado por

$$c_t(E) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(E)t^i = 1 + c_1(E)t + c_2(E)t^2 + \dots,$$

é a série de potências onde  $c_0(E) = 1$ ,  $c_1(E) = -s_1(E)$ ,  $c_2(E) = s_1(E)^2 - s_2(E)$ ,  $\dots$ ,  $c_n(E) = -s_1(E)c_{n-1}(E) - s_2(E)c_{n-2}(E) - \dots - s_n(E)$ . Aqui  $s_i(E)$  são vistos como endomorfismos de  $A_*(X)$ , com produtos denotando a composição.

**Observação 3.3.13.** Note que da definição acima temos que, para todo  $i \geq 2$ ,  $c_i(E) = (-1)^i \det(S)$ , onde  $S$  é a matriz

$$S = \begin{bmatrix} s_1(E) & s_2(E) & s_3(E) & \dots & s_{i-1}(E) & s_i(E) \\ 1 & s_1(E) & s_2(E) & \dots & s_{i-2}(E) & s_{i-1}(E) \\ 0 & 1 & s_1(E) & \dots & s_{i-3}(E) & s_{i-2}(E) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & s_1(E) \end{bmatrix}$$

**Proposição 3.3.14.** Sejam  $\mathcal{L}$  e um fibrado linha em  $X$  e  $E$  um fibrado vetorial em  $X$ . Então

(a)  $c_n(\mathcal{L}) = 0$  para todo  $n \geq 1$ .

(b) (naturalidade) Se  $g : X' \rightarrow X$  é um morfismo flat e  $\alpha \in A_*(X)$  então,

$$c_i(g^*E) \cap g^*\alpha = g^*(c_i(E) \cap \alpha).$$

(c) (fórmula de projeção) Se  $g : X' \rightarrow X$  é um morfismo próprio e  $\beta \in A_*(X')$  então,

$$g_*(c_i(g^*E) \cap \beta) = c_i(E) \cap g_*\beta.$$

(d) (comutatividade) Se  $E$  e  $F$  são fibrados vetoriais sobre  $X$  e  $\alpha \in A_*(X)$  então,

$$c_i(E) \cap (c_j(F) \cap \alpha) = c_j(F) \cap (c_i(E) \cap \alpha).$$

*Demonstração.* Os itens (b), (c), (d) seguem dos itens (c), (d) e (e) da Proposição 3.3.11, respectivamente, pois as classes totais de Chern são polinômios nas classes de Segre. Provejamos (a). Lembre que  $c_n(\mathcal{L}) = -s_1(\mathcal{L})c_{n-1}(\mathcal{L}) - \dots - s_n(\mathcal{L})$ , além disso, pela Proposição 3.3.11 item (b) temos que  $s_n(\mathcal{L}) = 0$  para todo  $n \geq r$ , onde  $r$  é o posto de  $\mathcal{L}$ . Como  $\mathcal{L}$  é um fibrado linha, temos que  $r = 1$ . Dessa forma, segue também que  $c_n(\mathcal{L}) = 0$  se  $n \geq 1$ .  $\square$

O item (a) da proposição acima também é válido para fibrados vetoriais em geral, entretanto sua demonstração é complexa e depende de artifícios e resultados não abordados neste trabalho. Porém, tal demonstração pode ser vista em [8, Proposição 3.2 (a)]

**Definição 3.3.15.** A *classe total de Chern* de  $E$  é definida por

$$c(E) := c_0(E) + c_1(E) + c_2(E) + \dots + c_r(E),$$

onde  $r$  é o posto de  $E$ .

**Notação:**  $c(E) \cap \alpha = \left( \sum_{i=0}^r c_i(E) \right) \cap \alpha = \sum_{i=0}^r (c_i(E) \cap \alpha)$ , onde  $r$  é o posto de  $E$ .

**Proposição 3.3.16.** A *classe total de Chern* de  $E$  é um homomorfismo.

*Demonstração.* Pela Observação 3.3.10,  $s_i(E) \cap$  é homomorfismo para todo  $i$ , portanto, como cada  $c_i(E) \cap$  está em função de classes de Segre, segue de maneira direta o esperado.  $\square$

**Observação 3.3.17.** Se  $\mathcal{L}$  é um fibrado linha em  $X$ , então  $c_t(\mathcal{L}) = 1 + c_1(\mathcal{L})t$ . De convergência de série de potências temos que

$$c_t(\mathcal{L})^{-1} = \frac{1}{c_t(\mathcal{L})} = \frac{1}{1 + c_1(\mathcal{L})t} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i c_1(\mathcal{L})^i t^i.$$

Em geral, da análise temos que qualquer polinômio possui série de potências inversa, em especial, dado um fibrado vetorial  $E$  de posto  $r$  em  $X$ , o polinômio  $c_t(E) = c_0(E)t + c_1(E)t + c_2(E)t^2 + \dots + c_r(E)t^r$  possui série de potências inversa

$$c_t(E)^{-1} = C_0(E) + C_1(E)t + C_2(E)t^2 + \dots$$

Pode-se mostrar que os coeficientes  $C_i(E) = s_i(E)$ ,  $\forall i \in \mathbb{N}$ . Por isso, podemos dizer que  $c_t(E)$  é a série de potências inversa de  $s_t(E)$  (ou vice-versa). Além disso,  $C_i(E) = 0$  para todo  $i > r$ , onde  $r$  é o posto de  $E$ .

**Definição 3.3.18.** Chamamos  $c^{-1}(E) = 1 + C_1(E) + C_2(E) + \dots + C_r(E)$  de *classe total de Chern inversa* de  $E$ .

**Proposição 3.3.19.** Seja  $E$  um fibrado vetorial de posto  $e + 1$  em  $X$  e  $p : E \rightarrow X$  seu morfismo estrutural. Então

$$c^{-1}(E) \cap \alpha = p_* \left( \sum_{i=0}^{e+1} (c_1(\mathcal{F}_E(1))^{e+i} \cap p^* \alpha) \right).$$

*Demonstração.* Da observação anterior

$$c^{-1}(E) \cap \alpha = 1 + C_1(E) \cap \alpha + \cdots + C_{e+1}(E) \cap \alpha = 1 + s_1(E) \cap \alpha + \cdots + s_{e+1}(E) \cap \alpha = 1 + p_* \left( c_1(\mathcal{F}_E(1))^{e+1} \cap p^* \alpha \right) + \cdots + p_* \left( c_1(\mathcal{F}_E(1))^{e+(e+1)} \cap p^* \alpha \right) = p_* \left( \sum_{i=0}^{e+1} (c_1(\mathcal{F}_E(1))^{e+i} \cap p^* \alpha) \right),$$

onde a última igualdade segue do fato de  $p_*$  ser um homomorfismo.  $\square$

**Observação 3.3.20.** De maneira análoga a Observação 3.3.10,  $c^{-1}(E) \cap$  é um homomorfismo.

Como podemos ver  $s_i(E)$  como endomorfismos de  $A_*(X)$ , com produto denotando a composição,  $c_i(E) \cdot c_j(E')$  (ou simplesmente  $c_i(E)c_j(E')$ ) é um endomorfismo em  $A_*(X)$ , onde  $(c_i(E) \cdot c_j(E'))(\alpha) = c_i(E) \cap (c_j(E') \cap \alpha)$ , onde  $E$  e  $E'$  são fibrados vetoriais sobre  $X$ .

**Observação 3.3.21.** Com a notação anterior, temos duas propriedades importantes:

- 1)  $c^{-1}(E) \cdot c(E)$  é o operador identidade.
- 2) Para qualquer sequência exata de fibrados vetoriais em  $X$ ,

$$0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0,$$

temos  $c_t(E) = c_t(E')c_t(E'')$ , ou seja,  $c_k(E) = \sum_{k=i+j} c_i(E') \cdot c_j(E'')$ .

A demonstração pode ser vista em [8, Teorema 3.2 d].

**Proposição 3.3.22.** Se  $c(\mathcal{L}) \cap \alpha = \beta$ , então  $\alpha = c(\mathcal{L})^{-1} \cap \beta$ .

*Demonstração.*  $c(\mathcal{L}) \cap \alpha = \beta \Rightarrow c^{-1}(\mathcal{L}) \cap (c(\mathcal{L}) \cap \alpha) = c^{-1}(\mathcal{L}) \cap \beta \Rightarrow (c^{-1}(\mathcal{L}) \cdot (c(\mathcal{L}))) (\alpha) = c^{-1}(\mathcal{L}) \cap \beta \Rightarrow \alpha = Id(\alpha) = c^{-1}(\mathcal{L}) \cap \beta. \square$

Na próxima definição vamos definir o conceito de classe de Chern para um esquema suave  $X$ . Para isso vamos considerar o seu fibrado tangente  $TX$  (Definição 2.5.16) e, por abuso de notação vamos considerar  $[X]$  em  $A_*(X)$ , (ou seja,  $[X] + B_*(X) \in A_*(X)$ ).

**Definição 3.3.23.** Seja  $X$  um esquema suave. A classe de Chern de  $X$ , denotada por  $c(X)$ , é dada por

$$c(X) := c(TX) \cap [X].$$

**Exemplo 3.3.24.** Considere o espaço projetivo  $\mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{n+1})$  e seu fibrado tautológico associado  $\mathcal{F}_{\mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{n+1})}(1)$ . Sabemos que  $\mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{n+1})$  é um esquema suave, portanto faz sentido considerar seu fibrado tangente  $T\mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{n+1})$ . Por [8, Apêndice B.5.8], existe uma sequência exata

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{n+1})} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{n+1})}(1)^{\oplus(n+1)} \rightarrow T\mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{n+1}) \rightarrow 0.$$

A partir dessa sequência temos por [8, Exemplo 3.2.11] que

$$c(T\mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{n+1})) = (1 + c_1(\mathcal{F}_{\mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{n+1})}(1)))^{n+1}.$$

Utilizando  $H = c_1(\mathcal{F}_{\mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{n+1})}(1))$ , que pode ser identificado com hiperplano em  $\mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{n+1})$ , podemos reescrever

$$c(T\mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{n+1})) = (1 + H)^{n+1}.$$

### 3.4 Classes de Chern - caso singular

O próximo passo é estender a definição de classe de Chern para um esquema que não seja suave. Note que no caso de esquema suave, temos o fibrado tangente associado, que não existe em esquemas singulares.

Nesta direção, algumas classes surgem. Vamos apresentar algumas e compará-las.

Seja  $X$  um esquema e  $C$  um cone sobre  $X$  (Exemplo 2.7.13). Então  $C = \text{Spec } S^*$  com  $S^* = S^0 \oplus S^1 \oplus \dots$  é um feixe de  $\mathcal{F}_X$ -álgebras graduadas,  $\mathcal{F}_X \rightarrow S^0$  é sobrejetiva,  $S^1$  é coerente e  $S^*$  é gerado por  $S^1$ . Podemos então considerar o cone  $\mathbb{P}(C \oplus 1) = S^*[z]$  e  $q : \mathbb{P}(C \oplus 1) \rightarrow X$  a projeção em  $X$ . Lembre ainda que, como  $C \oplus 1$  é um esquema, podemos considerar o fibrado  $\mathcal{F}_{C \oplus 1}(1)$ , que por simplicidade denotamos por  $\mathcal{F}(1)$ .

**Definição 3.4.1.** Definimos a *classe de Segre do cone*  $C$  como sendo

$$s(C) := q_* \left( \sum_{i \geq 0} c_1(\mathcal{F}(1))^i \cap [\mathbb{P}(C \oplus 1)] \right),$$

em que  $[\mathbb{P}(C \oplus 1)]$  é o ciclo associado ao esquema  $\mathbb{P}(C \oplus 1)$ .

Seja  $Y$  um subesquema fechado de  $X$ . Pelo Exemplo 2.7.13 é possível considerar o cone  $C_Y X$ , portanto podemos fazer a definição a seguir.

**Definição 3.4.2.** A *classe de Segre de  $Y$  em  $X$* , denotada por  $s(Y, X)$  é dada por

$$s(Y, X) := s(C_Y X).$$

**Proposição 3.4.3.** Suponha que o cone  $C$  seja isomorfo a um fibrado vetorial em  $X$ , então

$$s(C) = c(C)^{-1} \cap [X].$$

*Demonstração.* Seja  $q : \mathbb{P}(C \oplus 1) \rightarrow X$  a aplicação de projeção como mostrada no início da seção. Lembre que  $q^*[X] = [q^{-1}(X)]$  e que  $q$  é sobrejetiva, então  $q^*[X] = [\mathbb{P}(C \oplus 1)]$ . Além disso, como  $C$  é um fibrado vetorial em  $X$ , segue que  $C \oplus 1$  também é um fibrado vetorial em  $X$ . Com isso, é possível considerar  $c^{-1}(C \oplus 1) \cap [X]$ .

Pela Proposição 3.3.19,

$$c^{-1}(C \oplus 1) \cap [X] = q_* \left( \sum_{i \geq 0} (c_1(\mathcal{F}_X(1)))^i \cap q^*[X] \right) = q_* \left( \sum_{i \geq 0} (c_1(\mathcal{F}(1)))^i \cap [\mathbb{P}(C \oplus 1)] \right) = s(C).$$

Considere a sequência exata natural

$$0 \rightarrow C \rightarrow C \oplus 1 \rightarrow 1 \rightarrow 0.$$

Pela Observação 3.3.21 temos  $c^{-1}(C \oplus 1) = c^{-1}(C)c^{-1}(1) = c^{-1}(C)$ . Dessa forma,

$$c^{-1}(C) \cap [X] = c^{-1}(C \oplus 1) \cap [X] = s(C).$$

□

**Corolário 3.4.4.** Se  $i : Y \rightarrow X$  é uma imersão regular (ver Definição 2.7.14), então

$$s(Y, X) = c^{-1}(N_Y X) \cap [X].$$

*Demonstração.* Por definição temos  $s(Y, X) = s(C_Y X)$  e pela Proposição 2.7.16 temos que  $C_Y X$  é isomorfo ao fibrado normal  $N_Y X$ , que é um fibrado vetorial. Portanto, pela Proposição 3.4.3 acima, segue que

$$s(Y, X) = c^{-1}(N_Y X) \cap [X].$$

□

**Proposição 3.4.5.** *Sejam  $C_1, \dots, C_r$  as componentes irredutíveis do cone  $C$ ,  $m_j$  a multiplicidade geométrica de  $C_j$  em  $C$  (Definição 3.1.3). Então*

$$s(C) = \sum_{j=1}^r m_j s(C_j).$$

*Demonstração.* Em [13, Corolário 8.3.2] mostra-se que existe uma correspondência biunívoca entre as componentes irredutíveis de  $C$  e as componentes irredutíveis de  $\mathbb{P}(C \oplus 1)$ , ou seja, possuem a mesma quantidade de componentes irredutíveis e as mesmas multiplicidades geométricas. Do fato de  $\mathbb{P}(C_i \oplus 1)$  serem as componentes irredutíveis de  $\mathbb{P}(C \oplus 1)$ , o ciclo fundamental de  $\mathbb{P}(C \oplus 1)$  é dado por

$$[\mathbb{P}(C \oplus 1)] = \sum_{j=1}^r m_j [\mathbb{P}(C_j \oplus 1)].$$

Então

$$s(C) = q_* \left( \sum_{i \geq 0} c_1(\mathcal{F}(1))^i \cap \left( \sum_{j=1}^r m_j [\mathbb{P}(C_j \oplus 1)] \right) \right).$$

Como pela Observação 3.3.3  $c_1(\mathcal{F}(1)) \cap$  é um homomorfismo vemos que

$$s(C) = q_* \left( \sum_{j=1}^r m_j \left( \sum_{i \geq 0} c_1(\mathcal{F}(1))^i \cap [\mathbb{P}(C_j \oplus 1)] \right) \right).$$

Por fim, como pela Observação 3.1.22  $q_*$  também é um homomorfismo temos

$$\sum_{j=1}^r m_j q_* \left( \sum_{i \geq 0} c_1(\mathcal{F}(1))^i \cap [\mathbb{P}(C_j \oplus 1)] \right) = \sum_{j=1}^r m_j s(C_j),$$

o que prova o esperado. □

**Corolário 3.4.6.** *Seja  $X$  um esquema de dimensão pura  $d$ ,  $X_1, \dots, X_r$  suas componentes irredutíveis e  $m_i$  a multiplicidade geométrica de  $X_i$  em  $X$ . Se  $Y$  é um subesquema fechado de  $X$  e  $Y_i = Y \cap X_i$ , então*

$$s(Y, X) = \sum m_i s(Y_i, X_i)$$

*Demonstração.* É possível mostrar que as componentes irredutíveis de  $C_Y X$  são os cones  $C_{Y_i} X_i$ . Com isso, o resultado segue da proposição anterior. □

Para apresentar um exemplo do conceito de classes de Segre é utilizado o software Macaulay 2, que pode ser encontrado em [7], onde a biblioteca usada é [14].

**Observação 3.4.7.** Lembre pelo Exemplo 3.1.32 que para o caso dos espaços projetivos, seus grupos de Chow são gerados por subespaços lineares de dimensão menor ou igual à dimensão do espaço projetivo base, ou seja, tomando  $X = \mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{n+1})$  e  $k \leq n$ , temos que  $A_k(X) = \mathbb{Z}[H]$  com  $H$  um subespaço linear de dimensão  $k$  de  $\mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{n+1})$ . Dessa forma, sabemos que um elemento  $\alpha \in A_*(X)$  será da forma  $\alpha = \sum_H n_H H$ , com  $n_H \in \mathbb{Z}$ .

Assim para subesquemas fechados  $Y \subset X = \mathbb{P}(\mathbb{A}_K^{n+1})$ , temos que

$$s(Y, X) = \sum_H n_H H, \quad n_H \in \mathbb{Z}.$$

Lembre que para todo subesquema fechado  $Y$  de  $X$  existe  $\mathcal{I}_Y$  um feixe ideal associado. Em geral pode ser comum a notação  $s(\mathcal{I}_Y, X)$  para denotar  $s(Y, X)$ .

**Exemplo 3.4.8.** Seja  $X = \mathbb{P}^3$  (onde  $\mathbb{P}^k = \mathbb{P}(\mathbb{A}_\mathbb{C}^{k+1})$ ). Considere em  $X$  os ideais  $Q_1 = (x_1x_2)$ ,  $Q_2 = (x_1x_3)$ ,  $Q_3 = (x_2x_3)$ , tome  $I = Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3$  e  $i : I \rightarrow X$  a inclusão.

Como  $I$  é a união de três retas (identificadas com  $\mathbb{P}^1$ , subespaço linear de dimensão 1 ou codimensão 2, denotadas por  $H_1^2$ ) através de um ponto (identificado com  $\mathbb{P}^0$ , subespaço linear de dimensão 0 ou codimensão 3, denotadas por  $H_1^3$ ), temos que

$$i_*s(I, \mathbb{P}^3) = n\mathbb{P}^0 + m\mathbb{P}^1 = nH_1^3 + mH_1^2.$$

Vamos agora utilizar o Pacote [14] para determinar os inteiros  $n$  e  $m$ . Primeiramente devemos carregar o pacote no programa da forma

```
i1 : load("SegreClasses.m2")
```

Agora, para definir o espaço projetivo  $X = \mathbb{P}^3$  devemos escreve-lo como feito a seguir.

```
i2 : X=QQ[x0,x1,x2,x3]
o2 = X
o2 : PolynomialRing
```

O ideal  $I$  deve ser escrito como

```
i3 : I=ideal(x1*x2,x1*x3,x2*x3)
o3 = ideal(x1x2, x1x3, x2x3)
o3 : Ideal of X
```

Com isso, tendo os objetos definidos, temos os objetos necessários para utilizar a função de calcular as classes de Segre que o pacote oferece. Para isso, basta seguir as informações a seguir.

```
i4 : segre(I,ideal(0_X))
o4 = -10 H1^3 + 3 H1^2
```

Dessa forma vemos que  $i_*s(I, \mathbb{P}^3) = 3H_1^3 - 10H_1^2$ , ou seja,  $n = 3$  e  $m = -10$ .

Seja  $X$  um subesquema fechado de uma variedade suave  $M$ . Como  $M$  é suave, temos que é possível considerar seu espaço tangente  $TM$  (Definição 2.5.16) e, em especial, podemos considerar sua restrição  $TM|_X$ . Com isso, podemos fazer a definição a seguir.

**Definição 3.4.9.** A classe de **Fulton** de  $X$  é definida por

$$c_F(X) := c(TM|_X) \cap s(X, M) \in A_*(X)$$

Como  $X$  é subesquema fechado de  $M$  existe  $\mathcal{I}_X$  o feixe ideal de  $X$  em  $M$ . Considere o feixe quociente  $\mathcal{N}_X M = \mathcal{I}_X / \mathcal{I}_X^2$  (Exemplo 2.7.13) e o cone  $C = \text{Spec}(\text{Sym}_{\mathcal{O}_M}(\mathcal{N}_X M))$ . Denotando  $s(C)$  por  $s(\mathcal{N}_X M)$  podemos fazer a definição a seguir.

**Definição 3.4.10.** A classe de **Fulton-Johnson** de  $X$  é definida por

$$c_{FJ}(X) := c(TM|_X) \cap s(\mathcal{N}_X M) \in A_*(X)$$

**Observação 3.4.11.** Se  $i : Y \rightarrow X$  é uma imersão regular então, pela Proposição 2.7.16,  $c(\mathcal{N}_Y X) = c(N_Y X) = c(C_Y X)$ . Pela Proposição 3.4.3,  $s(\mathcal{N}_Y X) = s(C_Y X) = s(Y, X)$ . Então neste caso as classes de Fulton-Johnson e de Fulton coincidem. Em particular, coincidem para hipersuperfícies (Exemplo 2.7.15)

**Proposição 3.4.12.** As classes  $c_F(X)$  e  $c_{FJ}(X)$  independem da escolha da variedade  $M$  (da imersão).

*Demonstração.* Para a demonstração veja [9]. □

**Proposição 3.4.13.** Seja  $X$  uma variedade suave. Então

$$c_F(X) = c_{FJ}(X) = c(TX) \cap [X].$$

*Demonstração.* Como  $X$  é uma variedade suave, podemos supor  $X$  imerso nele mesmo e esta imersão é regular, então podemos considerar  $X = M$ . Pela observação anterior,  $c_{FJ}(X) = c_F(X)$ . Inicialmente mostremos que  $s(X, X) = [X]$ .

Vimos no Exemplo 2.7.13 que  $C_X X = 0$ . Pela Proposição 2.7.16,  $N_X X \cong C_X X = 0$ . Logo  $N_X X$  é um fibrado vetorial de dimensão 0. Portanto,  $c(N_X X) = c_0(N_X X) = 1$  e, com isso,  $c(N_X X)^{-1} = 1$ . Usando o Corolário 3.4.4 temos

$$s(X, X) = c^{-1}(N_X X) \cap X = 1 \cap [X] = [X].$$

Deste modo,  $c_{FJ}(X) = c_F(X) = c(TX) \cap s(X, X) = c(TX) \cap [X]$ . □

**Observação 3.4.14.** A proposição anterior mostra que as classes de Fulton e Fulton-Johnson coincidem com a classe total de Chern vista na seção anterior no caso de variedade suave. Dessa forma, elas são uma generalização para o caso singular.

Para a próxima generalização de classe de Chern é necessário a construção de um fibrado vetorial especial.

Seja  $M$  uma variedade suave de dimensão  $m$ , então temos o fibrado tangente  $TM$ . Para  $n < m$ , denote por  $G = Gr(n, TM)$  o fibrado grasmaniano associado a  $TM$  (Definição 2.4.17). A fibra  $G_x$  sobre  $x \in M$  é o conjunto dos  $n$ -planos de  $T_x M$ . Um elemento de  $G$  pode ser considerado da forma  $(x, P)$  onde  $x \in M$  e  $P \in G_x$ .

Seja  $X \subseteq M$  uma subvariedade de dimensão  $n < m$ .

Denote por  $X_{\text{reg}}$  o conjunto dos pontos regulares de  $X$ . Como  $X_{\text{reg}} \subseteq X \subseteq M$ , seja  $i : X_{\text{reg}} \rightarrow M$  a inclusão e considere  $\phi : X_{\text{reg}} \rightarrow G$ , com  $\phi(x) = (x, T_x X_{\text{reg}})$ .

**Definição 3.4.15.** O fecho da imagem  $\phi(X_{\text{reg}})$  em  $G$  é dito o **blow-up de Nash** de  $X$ , que vamos denotar por  $\tilde{X}$ .

Seja  $\nu : \tilde{X} \rightarrow X$  a projeção natural. Os elementos descritos anteriormente configuram o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \hookrightarrow & G \\ \nu \downarrow & \nearrow \phi & \downarrow \\ X_{reg} & \hookrightarrow & M \end{array}$$

Seja  $T$  o fibrado tautológico de  $G$  (Definição 2.5.23)

**Definição 3.4.16.** O fibrado de Nash de  $X$ , denotado por  $\tilde{T}$ , é a restrição do fibrado  $T$  à  $\tilde{X}$ .

$$\begin{array}{ccc} \tilde{T} & \hookrightarrow & T \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{X} & \hookrightarrow & G \\ \nu \downarrow & & \downarrow \\ X & \hookrightarrow & M \end{array}$$

**Definição 3.4.17.** A classe de Mather de  $X$  é definida por

$$c_{Ma}(X) := \nu_*(c(\tilde{T}) \cap [\tilde{X}]).$$

**Observação 3.4.18.** Quando  $X$  é suave, o blow-up de Nash de  $X$  é isomorfo a  $X$  e o seu fibrado de Nash é o seu fibrado tangente. Portanto, a classe de Mather também generaliza a classe de Chern para o caso singular.

Através desta definição podemos considerar um homomorfismo de grupos, como segue:

$$\begin{aligned} c_{Ma} : Z_*(X) &\rightarrow A_*(X) \\ \sum m_i Y_i &\mapsto \sum m_i c_{Ma}(Y_i). \end{aligned}$$

Pode-se estender ao grupo de Chow,  $c_{Ma} : A_*(X) \rightarrow A_*(X)$ .

O próximo passo é alterar os coeficientes da classe de Mather, gerando uma nova classe. Para isso precisamos de alguns conceitos preliminares.

**Definição 3.4.19.** Seja  $X$  um esquema (sobre um corpo  $K$ ). Definimos o **grau** de um ciclo  $\sum_V n_V V \in Z_*(X)$  como

$$\int_X \sum_V n_V V := \sum_V n_V [R(V) : K],$$

onde  $[R(V) : K]$  é o grau da extensão de corpos.

Pode-se estender  $\int_X$  a um morfismo  $\int_X : A_*(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ . Utilizamos este morfismo para a próxima definição.

**Definição 3.4.20.** A *obstrução de Euler* de  $X$  em  $p$  é definida por

$$Eu_p X := \int_{\nu^{-1}(p)} c(\tilde{T}|_{\nu^{-1}(p)}) \cap s(\nu^{-1}(p), \tilde{X}).$$

O objetivo agora é apresentar o conceito de função construtível e como a obstrução de Euler se relaciona com tais objetos.

**Definição 3.4.21.** Uma *função construtível* em  $X$  é uma função  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{Z}$  que pode ser escrita como

$$\varphi = \sum_W n_W \mathbb{1}_W,$$

com  $W$  variando por todas as subvariedades de  $X$ ,  $\mathbb{1}_W(p) = 0$  se  $p \notin W$  e  $\mathbb{1}_W(p) = 1$  se  $p \in W$ ,  $n_W \in \mathbb{Z}$  e  $n_W \neq 0$  apenas para um número finito de subvariedades. Denotamos o conjunto das funções construtíveis por  $F(X)$ .

**Observação 3.4.22.** Defina a operação  $+$  dada por

$$+ : F(X) \times F(X) \rightarrow F(X)$$

$$(\varphi_1, \varphi_2) \mapsto \varphi_1 + \varphi_2,$$

onde  $(\varphi_1 + \varphi_2)(p) := \varphi_1(p) + \varphi_2(p)$  é a soma usual de  $\mathbb{Z}$ . Com a operação  $+$  é fácil ver que  $F(X)$  forma um grupo abeliano.

Para cada ponto  $p \in X$  defina o morfismo

$$Eu_p : Z_*(X) \rightarrow F(X)$$

$$\sum m_i Y_i \mapsto \sum m_i Eu_p Y_i$$

Pode-se estender  $Eu_p$  a um morfismo  $Eu_p : A_*(X) \rightarrow F(X)$ , que é um isomorfismo (ver [20, Lema 2]). Com isso, temos o resultado a seguir.

**Corolário 3.4.23.** Toda função construtível pode ser escrita como uma combinação linear de obstruções de Euler.

Considere  $c_* : F(X) \rightarrow A_*(X)$  dada por  $c_* := c_{Ma} \circ Eu_p^{-1}$ .

**Definição 3.4.24.** A classe de *Schwartz-MacPherson* de  $X$ , denotada por  $c_{SM}(X)$ , é definida como sendo  $c_{SM}(X) := c_*(\mathbb{1}_X)$ .

Com isso, podemos definir de forma direta a classe a seguir.

**Definição 3.4.25.** A *classe de Milnor* de  $X$ , denotada por  $\mathcal{M}(X)$ , é definida por

$$\mathcal{M}(X) := (-1)^n (c_F(X) - c_{SM}(X)),$$

onde  $n$  é a dimensão de  $X$ .

Note que as classes de Chern no caso de  $X$  singular definidas são as classes totais (em  $A_*(X)$ ). Podemos considerar em cada nível ( $A_i(X)$ ).

Assim, a  $i$ -ésima classe de Milnor é  $\mathcal{M}_i(X) := (-1)^n ((c_F)_i(X) - (c_{SM})_i(X))$ .

**Observação 3.4.26.** Seja  $Z$  uma hipersuperfície complexa em uma variedade  $M$  suave. Se  $r = \dim JZ$ , então  $\mathcal{M}_i(Z) = 0$  se  $i \neq 1, \dots, r$  (ver [33])

## 3.5 Caso de hipersuperfície complexa

Nesta seção particularizamos nosso estudo a hipersuperfícies complexas.

A Fibrção de Milnor de funções holomorfas introduzida em [22] é um objeto fundamental para o estudo da topologia local de hipersuperfícies complexas. Quando a função holomorfa  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  possui um ponto singular isolado, a hipersuperfície  $V(f) = f^{-1}(0)$  numa vizinhança desta singularidade tem um número associado, o chamado número de Milnor de  $f$  nesta singularidade, que é o invariante numérico mais importante associado a uma hipersuperfície complexa com singularidade isolada. A literatura sobre o número de Milnor é vasta e nos referimos, por exemplo, ao [18] para um relato recente sobre o assunto. É um invariante topológico, facilmente computável e determina o tipo de homeomorfismo da fibra Milnor.

Quando  $Z$  é uma hipersuperfície complexa, dada por uma seção  $s$  de um fibrado linha  $\mathcal{L}$ ,  $Z$  é definido localmente pelos zeros das expressões locais de  $s$ , que são funções holomorfas. Se  $Z$  tem singularidades isoladas, ou seja, as expressões locais têm singularidades isoladas, temos números de Milnor associados;

O objetivo é ver que as classes Segre de uma hipersuperfície com singularidades isoladas fornecem uma estrutura algébrica natural para tratar seus números de Milnor. Além de observar que as classes de Milnor, definidas anteriormente, têm esse nome pois no caso de uma hipersuperfície com singularidade isolada, temos somente uma classe não nula e ela é a soma dos seus números de Milnor.

Vamos inicialmente apresentar algumas definições usando funções holomorfas.

**Definição 3.5.1.** *Seja  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  uma função holomorfa. Dizemos que  $f$  é **singular** em  $p \in \mathbb{C}^n$  ( $p$  é um **ponto singular** ou **singularidade** de  $f$ ) se  $\nabla f(p) = (\frac{\partial f}{\partial z_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}(p)) = (0, \dots, 0)$ . Em especial, dizemos que  $p$  é uma **singularidade isolada** de  $f$  se  $p$  for a única singularidade em alguma vizinhança de  $p$ .*

Quando o intuito é estudar o comportamento da função perto da sua singularidade, consideramos o germe associado.

Considere o feixe  $\mathcal{O}_n$  das funções holomorfas em  $\mathbb{C}^n$  (Exemplo 2.1.8). Denote por  $f : (\mathbb{C}^n, p) \rightarrow \mathbb{C}$  o germe de  $f$  em  $p$ ,  $(\mathcal{O}_n)_p$  o stalk de  $\mathcal{O}_n$  em  $p$  (Definição 2.1.15) e  $Jf$  o ideal jacobiano do germe  $f$ , ou seja, o ideal gerado pelas derivadas parciais deste germe.

Vamos definir um número neste contexto, mas que originalmente aparece no Teorema da Fibrção de Milnor, por isso o nome.

**Definição 3.5.2.** *O **número de Milnor** do germe  $f$  (ou o número de Milnor de  $f$  em  $p$ ), denotador por  $\mu(f)$  (ou  $\mu(f)(p)$ ), é*

$$\mu(f)(p) := \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_n)_p / Jf.$$

**Proposição 3.5.3.** *Se  $p$  é uma singularidade isolada de  $f$  então  $\mu(f)(p) < \infty$ .*

*Demonstração.* Ver [12, Lema 2.3]. □

Seja  $Z$  uma hipersuperfície em uma variedade complexa suave  $M$  ( $Z$  é o zero de uma seção holomorfa de um fibrado de linha  $\mathcal{L}$  em  $M$ ) e  $p$  uma singularidade isolada de  $Z$ , ou seja, dado  $JZ$  o subesquema singular de  $Z$ ,  $p$  é o suporte de uma componente irredutível de  $JZ$  (Proposição 2.5.19).

Como  $M$  é uma variedade complexa suave, localmente temos que  $M$  é isomorfo a um domínio de  $\mathbb{C}^n$  (Exemplo 2.3.4), com isso, existem parâmetros locais  $z_1, \dots, z_n$  para  $M$  em

$p$ . Pelo Exemplo 2.5.17, localmente  $JZ = \left\langle \frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n} \right\rangle$ , onde  $f$  é a função holomorfa que localmente define  $Z$  e  $p'$  é o ponto em  $\mathbb{C}^n$  associado a  $p$ , que é uma singularidade isolada de  $f$ .

**Definição 3.5.4.** Nas condições e notações anteriores, o **número de Milnor** de  $Z$  em  $p$ , denotado por  $\mu(Z, p)$ , é

$$\mu(Z, p) := \mu(f)(p').$$

Pela definição de fibrado vetorial, é possível mostrar que o número definido independe da expressão local da seção.

**Exemplo 3.5.5.** Considere  $X = \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2 = \mathbb{C}^2$  e  $Z$  é a variedade associada ao ideal gerado por  $x_1(x_1^2 + x_2^3)$  no plano  $X$ . Assim  $Z = Z(s)$ , onde  $s(x_1, x_2) = x_1(x_1^2 + x_2^3)$ . Note que  $\nabla(s) = (3x_1^2 + x_2^3, x_1x_2^2)$ . Note que a origem  $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$  é o único ponto que anula  $\nabla(s)$ , então  $(0, 0)$  é uma singularidade isolada de  $s$  (e de  $Z$ ). Como estamos em  $\mathbb{C}^2$  podemos interpretar  $\mathcal{O}_2$  como sendo o conjunto de séries de potência convergentes  $\mathbb{C}\{x_1, x_2\}$ . Como

$$\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\} / \nabla(s) \cong \mathbb{C}\{1, x_1, x_1^2, x_2, x_1x_2, x_1^2x_2, x_2^2\},$$

então  $\mu(Z, (0, 0)) = \mu(s)((0, 0)) = 7$ .

Seja  $X$  um esquema de dimensão pura.

Dado  $V$  uma subvariedade de  $X$ , é possível escrever

$$s(V, X) = m_V^X[V] + \text{termos de dimensão inferior (ver [4] (6.29) p. 441)}$$

O inteiro  $m_V^X$  é chamado de **multiplicidade** de  $X$  ao longo de  $V$ .

Definimos isso em geral para quando  $W$  é um subsquema fechado de  $X$ .

**Definição 3.5.6.** A **multiplicidade** de  $X$  ao longo de  $W$  em uma componente irredutível  $V$  (de  $W$ ) é o coeficiente de  $[V]$  em  $s(W, X)$ .

Essa definição faz sentido pelo Corolário 3.4.6.

**Proposição 3.5.7.** Seja  $Z$  uma hipersuperfície em uma variedade complexa suave  $M$ . Seja  $p$  um ponto singular isolado de  $Z$  e  $\hat{p}$  o subsquema fechado de  $JZ$  tal que o seu suporte é  $p$ . Então

$$s(\hat{p}, M) = \mu(Z, p)[p].$$

*Demonstração.* Veja [4] Proposição 6.3.9. □

No caso de hipersuperfície complexa compacta, Parusiński em [25] apresenta um número, que generaliza o número de Milnor do caso de singularidade isolada.

Este número pode ser descrito usando a classe de Segre do subsquema singular associado. Essa descrição pode ser vista em [4] Proposição 6.3.10] e usamos aqui como definição.

No que segue  $Z$  é uma hipersuperfície de  $M = \mathbb{P}^n$ , mas destacando que o contexto poderia ser uma pouco mais geral.

**Definição 3.5.8.** O **número de Milnor-Parusiński** da hipersuperfície  $Z$ , denotado por  $\mu_P(Z)$ , é dado por

$$\mu_P(Z) := \int c(T^\vee M \otimes \mathcal{L}) \cap s(JZ, M).$$

Para finalizar vamos somente citar dois resultados a respeito deste número, fazendo associação com a teoria vista. Como referências para as demonstrações damos as que seguem as definições originais dos conceitos envolvidos, mas em consonância a linguagem apresentada a referência é [4, Seção 6.4.6].

**Proposição 3.5.9.** *Se  $Z$  tem somente singularidades isoladas  $p_1, \dots, p_r$  então*

$$\mu_P(Z) = \sum_{i=1}^r \mu(Z, p_i).$$

*Demonstração.* Este resultado segue de [25, Proposição 1.4]. □

**Proposição 3.5.10.**  $\mu_P(Z) = \int \mathcal{M}(Z)$ , onde  $\mathcal{M}(Z)$  é a classe de Milnor de  $Z$  (Definição 3.4.25)

*Demonstração.* Este resultado pode ser visto pelas caracterizações dadas por [26, Teorema 4] e [27, Teorema 0.2]. □

**Observação 3.5.11.** *No caso em que  $Z$  tem somente singularidades isoladas  $p_1, \dots, p_r$ ,  $\mathcal{M}(Z) = \mathcal{M}_0(Z)$  (Observação 3.4.26) e pelos resultados anteriores*

$$\mathcal{M}_0(Z) \cong \mu_P(Z) = \sum_{i=1}^r \mu(Z, p_i).$$

*Esta foi a motivação para o nome classe de Milnor de  $Z$  para  $\mathcal{M}(Z)$ .*

# Conclusão

Este trabalho contribui para o estudo do conceito de classes de Chern oferecendo de forma clara e objetiva as ferramentas algébricas necessárias para sua definição, desde o caso clássico de fibrados vetoriais, o caso de variedades suaves através do fibrado tangente, até o caso de variedades singulares.

No caso singular, mostramos que todas as classes obtidas são generalizações das classes de Chern clássica, coincidindo no caso suave.

Como aplicação desta teoria ao estudo global das singularidades de uma variedade, particularizamos o estudo a hipersuperfícies complexas, associando as classes estudadas com números que dão informações geométricas do conjunto singular associado, importantes em Teoria de Singularidades.

# Referências

- [1] Aluffi, P., *Computing Characteristic Classes of Projective Schemes*, Journal of Symbolic Computation, v. 35, n. 1, p. 3-19, 2003.
- [2] Aluffi, P., *Characteristic Classes of Singular Varieties*. In: Pragacz, P. (eds) *Topics in Cohomological Studies of Algebraic Varieties*. Trends in Mathematics. p. 1-32, 2005.
- [3] Aluffi, P., *Chern classes for singular hypersurfaces*. Transactions of the American Mathematical Society v. 351, no. 10, p. 3989-4026, 1999.
- [4] Aluffi, P., *Segre Classes and Invariants of Singular Varieties*. In “Handbook of Geometry and Topology of Singularities III”, Springer Verlag, 2023.
- [5] Atiyah, M. F.; MacDonald I. G., *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley Publishing Company, 1969.
- [6] Brasselet, J.-P.; Schwartz, M.-H., *Sur les classes de Chern d'un ensemble analytique complexe*. In Caractéristique d'Euler-Poincaré - Séminaire E.N.S. 1978-1979 Astérisque n. 82-83, p. 93-147, 1981.
- [7] Eisenbud, D.; Grayson, D. R.; Stillman, M. E., *A Software System for Research in Algebraic Geometry*. Commutative Algebra, and their Applications. Disponível em: <https://macaulay2.com>.
- [8] Fulton, W., *Intersection Theory*. Springer-Verlag, 1984.
- [9] Fulton, W.; Johnson, K., *Canonical classes on singular varieties*. Manuscripta Math., v. 32, n. 3-4, p. 381–389, 1980.
- [10] Gathmann, A., *Algebraic Geometry*. Notes for a class, 2002-2003. Disponível em <https://agag-gathmann.math.rptu.de/class/alggeom-2002/alggeom-2002.pdf>.
- [11] Görtz, U.; Wedhorn, T., *Algebraic Geometry I*. Springer-Verlag, 2010.
- [12] Greuel, G. M.; Lossen, C.; Shustin, E., *Introduction to singularities and deformations*. Springer Monographs in Mathematics, 2007.
- [13] Grothendieck, A., *Éléments de géométrie algébrique : II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes*. Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1961.
- [14] Harris, C.; Helmer M., *SegreClasses: A Macaulay2 package. Version 1.03*. Disponível em <https://github.com/Macaulay2/M2/tree/master/M2/Macaulay2/packages>.
- [15] Hartshorne, R., *Algebraic Geometry*. Springer, 1997.

- [16] Kennedy, G., *MacPherson's Chern classes of singular algebraic varieties*, Communications in Algebra. v. 18, p. 2821-2839, 1990.
- [17] Klingler, L.; McGovern W. W., *Local Types of Classical Rings*. Disponível em [https://home.fau.edu/wmcgove1/web/Papers/mc\\_final\\_revised.pdf](https://home.fau.edu/wmcgove1/web/Papers/mc_final_revised.pdf).
- [18] Lê, D. T.; Nuño-Ballesteros, J. J.; Seade, J., *The topology of the Milnor fibration*. In "Handbook of Geometry and Topology of Singularities I". Springer Verlag, 2020.
- [19] Liou, J., *Irreducible Scheme*. Disponível em: <https://www.math.ncku.edu.tw/~fjm-liou/alg/irreducible.pdf>.
- [20] MacPherson R., *Chern classes for singular algebraic varieties*. Annals of Mathematics. v. 100, n. 2, p. 423-432, 1974.
- [21] Milies, C. P., *Anéis e Módulos* 2ed. Editora Livraria da Física, 2018.
- [22] Milnor, J., *Singular points of complex hypersurfaces*. Ann. of Math. Studies 61, Princeton, 1968.
- [23] Munkres, J. R., *Elements of Algebraic Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, 1984.
- [24] Nagata, M., *Local Rings*. Interscience Publishers, 1962.
- [25] Parusiński, A., *A generalization of the Milnor number*, Mathematische Annalen. v. 281, n. 2, p. 247-254, 1988.
- [26] Parusiński, A.; Pragacz P., *A formula for the Euler characteristic of singular hypersurfaces*, J. Alg. Geom. 4 , p. 337-351, 1995.
- [27] Parusiński, A.; Pragacz P., *Characteristic classes of hypersurfaces and characteristic cycles*. J. Alg. Geo. v. 10, p. 63-79, 2001.
- [28] Pissolato, J., *Singularidades de aplicações, classes características e polinômios de Thom*. Dissertação USP, 2001.
- [29] Saint-Exupéry, A., *O pequeno príncipe*. PAULUS, 2016.
- [30] Schwartz, M. H., *Classes caractéristiques définies par une stratification d'une variété analytique complexe*. Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris, v. 260 , p.3262-3264 e p.3535-3537, 1965.
- [31] Shafarevich, I., *Basic Algebraic Geometry 1. Varieties in Projective Space*. Springer Berlin, Heidelberg, 2013.
- [32] Shafarevich, I., *Basic Algebraic Geometry 2. Schemes and Complex Manifolds*. Springer Berlin, Heidelberg, 2013.
- [33] Suwa, T., *Classes de Chern des intersections complètes locales*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics, v. 324, n.1, p. 67-70, 1997.
- [34] Tengan, E.; Borges, H., *Álgebra comutativa em quatro movimentos*, 2.ed. Projeto Euclides, 2020.

- [35] The Stacks Project: 28.3, *Integral, irreducible, and reduced schemes*. Disponível em <https://stacks.math.columbia.edu/tag/01OJ>.
- [36] Vainsencher, I., *Classes Características em Geometria Algébrica*. 15º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1985.