IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

137

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT–D.003/99

OK

EQUIVALENTE TELEPARALELO DE KALUZA-KLEIN

Luis Carlos Torres Guillen

Orientador

José Geraldo Pereira

Julho de 1999

Agradecimentos

À minha família por ter me criado tão bem, e por ter me dado a possibilidade de estudar e o apoio necessário para continuar estudando durante todos estes anos

A todos os meus demais parentes

Ao meu orientador por ter me aceitado como seu aluno e pela aprendizagem que estou tendo

À Vanessa pela troca de informações que tivemos

Ao Prof. Luis Agostinho pela ajuda a mim dada

À Rosa pelos momentos que passamos juntos

Aos grandes amigos Caverna (Fabiano), Medalha (Alexandre), Thales, Abel e André

Aos colegas Leonardo, Cristiano, Claudio, Maurizio, Daniel, Marcos Rodriguez e Marcos Calçada

Aos colegas peruanos do IFT, em especial ao Harold e ao José

A todos os demais colegas do IFT

Ao Café Aurora pela farra, bebedeira e pelos bons momentos que passei lá

Ao Manifesto Bar, Iron Horse, Alcatraz e Opção

Aos funcionários do IFT

À CAPES

A todas as pessoas que conheci em São Paulo. VALEU!!!

Resumo

Como é bem conhecido, o eletromagnetismo é descrito por uma teoria de gauge para o grupo $U(1)$. Considerando a gravitação como uma teoria de gauge para o grupo das translações, desenvolveremos neste trabalho uma versão teleparalela da teoria de Kaluza-Klein. Neste modelo, o espaço-tempo permanece com quatro dimensões, enquanto o espaço interno (fibra) passa a ter cinco dimensões. Obtemos dessa forma uma teoria de gauge translacional em cinco dimensões que unifica, no sentido de Kaluza-Klein, as interações gravitacional e eletromagnética.

Palavras Chaves: Teorias de Gauge, Teleparalelismo, Relatividade Geral, Kaluza-Klein

Áreas do conhecimento: 1.05.03.01-3 : Teoria Geral de Partículas e Campos

1.05.01.03-7 : Relatividade e Gravitação

Abstract

As is well known, the electromagnetic theory is described by a gauge theory for the Group $U(1)$. By considering gravitation as a gauge theory for the translation group, we develop a teleparallel version of the Kaluza-Klein theory. According to this model, spacetime is always four-dimensional, but the internal space (fiber) turns out to be five-dimensional. We obtain in this way a translational five-dimensional gauge theory which unifies, in the sense of Kaluza-Klein, the gravitational and electromagnetic interactions.

Índice

Capítulo 1

Introdução

1.1 Introdução Histórica

No século passado, duas forças da natureza, a força elétrica e a força magnética, começaram a ser unificadas nos trabalhos de Ampère e Faraday, e depois culminou na eletrodinâmica de Maxwell. Posteriormente, quando se notou que a relatividade especial deixa invariante as equações de Maxwell, tornou-se claro, através do trabalho de Minkowski, que o espaço tridimensional e o tempo "unem-se" para formar um contínuo espaço-tempo quadri-dimensional. Ou seja, assim como as coordenadas espaciais e o tempo descrevem uma variedade de quatro dimensões, as componentes do vetor campo elétrico $\vec{E}$ e do vetor campo magnético $\vec{B}$ tornam-se as componentes de um tensor anti-simétrico que representa o campo eletromagnético. Analogamente, o potencial escalar ϕ e o potencial vetor $\vec{A}$ formam o quadrivetor potencial. Esse foi o primeiro exemplo de unificação de duas interações da Natureza.

Por volta de 1913, antes da relatividade geral de Einstein, portanto, Nordström propôs uma teoria relativística na qual a gravitação seria descrita por um campo escalar [1]. Em 1914, ele desenvolveu uma espécie de "unificação" da sua teoria da gravitação escalar com a teoria de Maxwell [2]. Nordström introduziu um penta-vetor potencial num espaço plano penta-dimensional, e identificou a quinta componente desse penta-potencial como sendo o campo gravitacional escalar, enquanto as outras quatro componentes seriam o quadri-potencial de Maxwell. Ele notou, então, que no caso cilíndrico (quando todas as variáveis dinâmicas são independentes da quinta coordenada), as equações da sua "teoria de Maxwell" penta-dimensional se reduziam àquelas da teoria eletromagnética-gravitacional quadri-dimensional de Maxwell-Nordström. Em 1918, Weyl também tentou unificar a gravitação com o eletromagnetismo. Ele generalizou a geometria riemanniana e nesta nova geometria tentou unificar as duas interações [3].

O passo seguinte foi dado por Kaluza em 1919, o qual baseou-se no trabalho de

Weyl [3] e na teoria da relatividade geral de Einstein [4]. Kaluza propôs uma teoria do tipo da relatividade geral de Einstein, porém em cinco dimensões, de onde a teoria de Einstein quadri-dimensional e o eletromagnetismo de Maxwell podiam ser obtidos depois da imposição de um vínculo cilíndrico. Em 1926, Klein [5] e Mandel [6] redescobriram independentemente a teoria de Kaluza, e desenvolveram diversos aspectos do modelo, o qual passou a ser conhecido com o nome de teoria de Kaluza-Klein. Posteriormente, outros modelos semelhantes foram desenvolvidos durante o período "clássico" das teorias de campo unificados [7-13]. Com o desenvolvimento das teorias de gauge não abelianas, as teorias de Kaluza-Klein foram generalizadas para "abrigar" esses campos através da adição de mais dimensões ao espaço-tempo [14-20]. Para um resumo histórico de tais teorias, ver as referências [21-23].

De acordo com os modelos de Kaluza-Klein, tanto a gravitação como o eletromagnetismo são descritos por uma lagrangeana do tipo de Einstein-Hilbert num espaço com dimensão maior do que quatro. Em outras palavras, a descrição geométrica da relatividade geral é usada como paradigma para descrever outras interações da Natureza. Por outro lado, no início da década de 70, Hayashi e Shirafuji [24] mostraram que a relatividade geral é equivalente a uma teoria de gauge para o grupo das translações. Essa teoria, conhecida na literatura com o nome de *equivalente teleparalelo da relatividade geral*, tem como campo fundamental a conexão de Cartan, uma conexão com curvatura nula e torção diferente de zero. Essa equivalência abre uma nova perspectiva para o estudo de teorias unificadas. De fato, em vez de se usar a descrição geométrica da relatividade geral, podemos utilizar a descrição de gauge como paradigma, e dessa forma construir o que chamamos de equivalente teleparalelo das teorias de Kaluza-Klein.

Esse será o objetivo principal deste trabalho, onde utilizaremos uma teoria de gauge para o grupo das translações [25] para descrever a gravitação. Esse tipo de teoria caracteriza-se pela presença de um campo de tetradas não trivial. Dentro desse contexto o eletromagnetismo de Maxwell será então introduzido, e uma descrição unificada dessas duas interações será obtida, no espírito das teorias de Kaluza-Klein. Existe na literatura diversos modelos de Kaluza-Klein em espaços com torção, bem como em espaços com curvatura e torção não nulas, os chamados espaços de Riemann-Cartan [26]. No entanto, todos esses modelos, bem como os modelos usuais de Kaluza-Klein em espaços curvos diferem substancialmente em relação ao modelo proposto neste trabalho. A principal diferença é que no nosso caso o espaço-tempo permanece sempre quadri-dimensional, sendo que apenas o espaço interno (tangente) adquire uma dimensão maior. No caso específico da unificação do campo eletromagnético com o campo gravitacional, o espaço tangente vai ser penta-dimensional.

1.2 Notações e Convenções

Como vamos trabalhar com dois tipos de espaços, o espaço-tempo e o espaço tangente que existe em cada ponto do espaço-tempo, utilizaremos o alfabeto grego ($\mu, \nu, \rho, ... = 0, 1, 2, 3$) para denotar índices relacionados ao espaço-tempo, e a primeira parte do alfabeto latino minúsculo ($a, b, c, ... = 0, 1, 2, 3$) para denotar índices relacionados ao espaço tangente. Assumiremos o espaço tangente como sendo um espaço de Minkowski. No caso da teoria de gauge para o grupo das translações, o espaço tangente será também o espaço interno. Os índices ($i, j, k, ... = 1, 2, 3$) serão usados para denotar as componentes espaciais no espaço tangente tridimensional. Para denotar índices de cinco dimensões, utilizaremos o alfabeto latino maiúsculo ($A, B, C, ... = 0, 1, 2, 3, 5$). Para o espaço interno (tangente) de quatro dimensões, utilizaremos a métrica

$$\eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1). \tag{1.1}$$

Nesse caso, o intervalo invariante será

$$d\sigma^2 = \eta_{ab} dx^a dx^b = c^2 dt^2 - (d\vec{x})^2. \tag{1.2}$$

Esse intervalo será positivo (isto é, tipo tempo) se $v < c$, negativo (isto é, tipo espaço) se $v > c$ e igual a zero (isto é, tipo luz) se $v = c$. No caso de um referencial onde a partícula esteja parada, teremos

$$d\sigma = c d\tau, \tag{1.3}$$

onde $d\tau$ é o tempo próprio da partícula. Substituindo (1.3) em (1.2) obtemos

$$dt = \gamma d\tau, \tag{1.4}$$

com

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{1.5}$$

Da Eq.(1.2) vemos que para partículas massivas, o quadrado da quadri-velocidade é

$$u_a u^a = 1, \tag{1.6}$$

onde definimos a quadri-velocidade u^a como:

$$u^a = \frac{dx^a}{d\sigma}. \tag{1.7}$$

Derivando a equação (1.6) obtemos

$$u_a w^a = 0. \tag{1.8}$$

Sendo o quadri-vetor velocidade um vetor do tipo tempo, a Eq.(1.9) nos diz que o quadri-vetor aceleração será um vetor do tipo espaço, ou seja,

$$w_a w^a < 0. \tag{1.9}$$

O quadrivetor momentum é definido como

$$p^a = mcu^a. \tag{1.10}$$

Utilizando a Eq.(1.6), vemos que o quadrado do momento é

$$p_a p^a = m^2 c^2 u_a u^a = m^2 c^2. \tag{1.11}$$

Como

$$p^a = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right), \tag{1.12}$$

vemos da Eq.(1.12) que

$$E^2 = (\vec{p})^2 c^2 + m^2 c^4. \tag{1.13}$$

A definição do tensor momento angular é

$$M^{ab} = x^a p^b - x^b p^a. \tag{1.14}$$

As componentes espaciais desse tensor são as componentes do tensor momento angular tridimensional:

$$M^{ij} = x^i p^j - x^j p^i. \tag{1.15}$$

As componentes M^{0j} são

$$M^{0j} = x^0 p^j - x^j p^0 = ctp^j - x^j \frac{E}{c}. \tag{1.16}$$

Capítulo 2

Equivalente Teleparalelo da Relatividade Geral

2.1 Teoria de Gauge para o Grupo das Translações

Assumiremos inicialmente que tanto o espaço-tempo quanto o espaço tangente são espaços de Minkowski. Denotaremos as coordenadas relacionadas ao espaço-tempo por x^μ, e as relacionadas ao espaço tangente por x^a. As derivadas holônomas nesses dois espaços são relacionadas por:

$$\partial_\mu = (\partial_\mu x^a)\partial_a \quad ; \quad \partial_a = (\partial_a x^\mu)\partial_\mu, \tag{2.1}$$

onde $\partial_\mu x^a$ é uma tetrada holônoma trivial, sendo $\partial_a x^\mu$ a sua inversa. No caso do grupo das translações, temos que o gerador do grupo é

$$P_a = \partial_a, \tag{2.2}$$

que é o gerador das translações infinitesimais. Este gerador satisfaz a regra de comutação

$$[P_a, P_b] = 0, \tag{2.3}$$

sendo portanto um grupo abeliano. Para o grupo das translações, definiremos a transformação de gauge como sendo uma translação local das coordenadas na fibra (espaço tangente), ou seja,

$$x^a \to x'^a = x^a + \alpha^a(x^\mu), \tag{2.4}$$

onde α^a são os parâmetros da transformação. Esta equação pode ser escrita na forma

$$x'^a = U x^a, \tag{2.5}$$

com U um elemento do grupo das translações. Para uma transformação infinitesimal, temos

$$U = 1 + \delta\alpha^a P_a, \tag{2.6}$$

onde $\delta\alpha^a$ são os parâmetros infinitesimais da transformação. Com isto, a versão infinitesimal da Eq.(2.4) toma a forma

$$\delta x^a = \delta\alpha^b P_b x^a. \tag{2.7}$$

Consideremos agora um campo fonte qualquer $\Phi(x^\mu)$. Sua transformação de gauge é independente de seu spin, e é dada por

$$\Phi'(x^\mu) = U\,\Phi(x^\mu)\;. \tag{2.8}$$

A versão infinitesimal dessa transformação é

$$\delta\Phi = \delta\alpha^a P_a \Phi\;. \tag{2.9}$$

Notemos que os geradores de translação são capazes de agir em qualquer campo devido à identificação (2.1).

Para definirmos a derivada covariante, necessitamos primeiro introduzir os potenciais de gauge, os quais serão denotados por

$$A_\mu = A^a{}_\mu P_a. \tag{2.10}$$

Dessa maneira, a definição geral de derivada covariante será

$$D_\mu = \partial_\mu + c^{-2} A^a{}_\mu \frac{\delta}{\delta\alpha^a}, \tag{2.11}$$

onde a velocidade da luz c foi introduzida por razões dimensionais. Atuando num campo $\Phi(x^\mu)$, portanto, obtemos

$$D_\mu\,\Phi = \partial_\mu\,\Phi + c^{-2} A^a{}_\mu\;P_a\,\Phi\;. \tag{2.12}$$

Através da imposição da covariancia de D_μ, podemos obter a transformação de gauge dos potenciais:

$$A'_\mu = U A_\mu U^{-1} + c^2 U \partial_\mu U^{-1}. \tag{2.13}$$

A transformação infinitesimal correspondente será

$$A'^a{}_\mu = A^a{}_\mu - c^2 \partial_\mu \delta\alpha^a. \tag{2.14}$$

Como é usual nas teorias de gauge, os campos são definidos como

$$c^{-2} F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu]. \tag{2.15}$$

Portanto, podemos ver que

$$F^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a{}_\nu - \partial_\nu A^a{}_\mu. \tag{2.16}$$

Notemos que, como esperado para uma teoria abeliana, $F^a{}_{\mu\nu}$ é invariante sob transformações de gauge.

Até agora assumimos o espaço-tempo como sendo um espaço de Minkowski. No entanto, veremos que a presença de uma tetrada não trivial induz estruturas adicionais ao espaço-tempo, as quais estão relacionadas com a presença de campo gravitacional. Utilizando as Eqs.(2.1) e (2.2), podemos escrever (2.12) como

$$D_\mu \Phi = h^a{}_\mu \, \partial_a \Phi \ , \tag{2.17}$$

onde

$$h^a{}_\mu = \partial_\mu x^a + c^{-2} A^a{}_\mu \equiv D_\mu x^a \tag{2.18}$$

é uma tetrada não trivial. Da Eq.(2.18) podemos ver que o potencial gravitacional aparece como sendo a parte não trivial da tetrada, ou seja, na ausência da gravitação $h^a{}_\mu$ torna-se trivial. Usando as Eqs.(2.4) e (2.14), pode-se ver que a tetrada (2.18) é invariante de gauge, ou seja,

$$h'^a{}_\mu = h^a{}_\mu. \tag{2.19}$$

O operador derivada covariante

$$D_\mu = h^a{}_\mu \, \partial_a \tag{2.20}$$

é na verdade a definição de uma base não holônoma. Esta base, como já vimos, satisfaz a relação de comutação:

$$[D_\mu, D_\nu] = c^{-2} F^a{}_{\mu\nu} P_a. \tag{2.21}$$

Dada uma tetrada não trivial, existe sempre uma conexão de Cartan definida por

$$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = h_a{}^\rho \partial_\nu h^a{}_\mu, \tag{2.22}$$

que é uma conexão que apresenta torção, mas não curvatura. Usando (2.16) e (2.18), o campo gravitacional $F^a{}_{\mu\nu}$ pode ser escrito como

$$F^a{}_{\mu\nu} = c^2 h^a{}_\rho T^\rho{}_{\mu\nu}, \tag{2.23}$$

onde

$$T^\rho{}_{\mu\nu} = \Gamma^\rho{}_{\nu\mu} - \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} \tag{2.24}$$

é a torção induzida no espaço-tempo devido à presença de gravitação. Dessa maneira, a relação de comutação (2.21) pode ser reescrita na forma

$$[D_\mu, D_\nu] = T^\rho{}_{\mu\nu} D_\rho, \tag{2.25}$$

indicando que a torção faz também o papel de não holonomia da base definida pela derivada covariante. As tetradas satisfazem as relações

$$h^a{}_\mu h_a{}^\nu = \delta^\nu{}_\mu \quad ; \quad h^a{}_\mu h_b{}^\mu = \delta^a{}_b, \tag{2.26}$$

onde os índices do espaço tangente são levantados e abaixados com a métrica η_{ab}, e os índices do espaço-tempo são levantados e abaixados com a métrica

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} h^a{}_\mu \, h^b{}_\nu. \tag{2.27}$$

A presença de uma conexão de Cartan permite introduzir uma derivada covariante que, atuando num vetor covariante V_μ, é dada por

$$\nabla_\nu V_\mu = \partial_\nu V_\mu - \Gamma^\theta{}_{\mu\nu} V_\theta. \tag{2.28}$$

Com esta definição, podemos ver que

$$\nabla_\nu h^a{}_\mu = \partial_\nu h^a{}_\mu - h^a{}_\theta \Gamma^\theta{}_{\mu\nu} \equiv 0, \tag{2.29}$$

onde utilizamos as equações (2.22) e (2.26). Esta é a condição de paralelismo absoluto, o que implica que o espaço-tempo da teoria de gauge para as translações é naturalmente dotado de uma estrutura teleparalela. Notemos que a curvatura da conexão de Cartan se anula identicamente:

$$R^\theta{}_{\rho\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\theta{}_{\rho\nu} + \Gamma^\theta{}_{\sigma\mu} \, \Gamma^\sigma{}_{\rho\nu} - (\mu \leftrightarrow \nu) \equiv 0. \tag{2.30}$$

A Lagrangeana de uma teoria de gauge para o grupo das translações é [25]

$$\mathcal{L} = \frac{h}{16\pi G} \left(\frac{1}{4} F^a{}_{\mu\nu} F^b{}_{\theta\rho} g^{\mu\theta} N_{ab}{}^{\nu\rho} \right), \tag{2.31}$$

onde $h = \det(h^a{}_\mu)$ é o Jacobiano da transformação (2.20). Devido à presença das tetradas, índices do espaço-tempo e do espaço tangente podem ser intercambiados, e consequentemente aparecer misturados na Lagrangeana. Isso significa que

$$N_{ab}{}^{\nu\rho} = \eta_{ab} g^{\nu\rho} = \eta_{ab} h_c{}^\nu h^{c\rho} \tag{2.32}$$

deve incluir todas as permutações cíclicas de a, b e c. Portanto, devemos ter

$$N_{ab}{}^{\nu\rho} = \eta_{ab} \, h_c{}^\nu \, h^{c\rho} + 2 \, h_a{}^\rho \, h_b{}^\nu - 4 \, h_a{}^\nu \, h_b{}^\rho. \tag{2.33}$$

Substituindo (2.33) em (2.31), e utilizando (2.23), obtemos

$$\mathcal{L} = \frac{hc^4}{16\pi G} \left[\frac{1}{4} \, T^\rho{}_{\mu\nu} \, T_\rho{}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \, T^\rho{}_{\mu\nu} \, T^{\nu\mu}{}_\rho - T^\rho{}_{\mu\rho} \, T^{\nu\mu}{}_\nu \right]. \tag{2.34}$$

Essa Lagrangeana pode ser reescrita na forma

$$\mathcal{L} = hL = \frac{hc^4}{16\pi G} S^{\rho\mu\nu} T_{\rho\mu\nu}, \tag{2.35}$$

onde

$$S^{\rho\mu\nu} = \frac{1}{4} \left(T^{\rho\mu\nu} + T^{\mu\rho\nu} - T^{\nu\rho\mu}\right) - \frac{1}{2} \left(g^{\rho\nu} T^{\theta\mu}{}_{\theta} - g^{\rho\mu} T^{\theta\nu}{}_{\theta}\right). \tag{2.36}$$

Consideremos agora a variação de $\mathcal{L}$ com relação a $A^a{}_\mu$. Usando as identidades

$$\frac{\partial}{\partial A^a{}_\tau} = c^{-2} \frac{\partial}{\partial h^a{}_\tau} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma A^a{}_\tau)} = c^{-2} \frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\tau)},$$

bem como a expressão

$$\frac{\partial h}{\partial h^a{}_\tau} = h\, h_a{}^\tau, \tag{2.37}$$

obtemos a equação

$$\partial_\sigma(h S_a{}^{\sigma\tau}) - \frac{4\pi G}{c^4} (h t_a{}^\tau) = 0, \tag{2.38}$$

onde, em analogia com as teorias de Yang-Mills [27],

$$t_a{}^\tau \equiv \frac{1}{h} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h^a{}_\tau} = -\frac{c^4}{4\pi G} h_a{}^\mu S^{\nu\sigma\tau} T_{\nu\sigma\mu} + h_a{}^\tau L \tag{2.39}$$

representa a corrente do campo de gauge, que neste caso é o (pseudo) tensor energia-momento do campo gravitacional, e

$$S_a{}^{\sigma\tau} = h_{a\rho} S^{\rho\sigma\tau}. \tag{2.40}$$

Derivando (2.38) com relação a x^τ, e levando-se em conta que $S_a{}^{\sigma\tau} = -S_a{}^{\tau\sigma}$, obtemos a lei de conservação de $t_a{}^\tau$:

$$\partial_\tau(h t_a{}^\tau) = 0. \tag{2.41}$$

É importante observar que o caráter pseudo-tensorial de $t_a{}^\tau$ deve-se ao fato da derivada funcional que o define ser uma derivada funcional parcial e não total.

Por outro lado, multiplicando (2.38) por $h^{a\lambda}$, obtemos

$$\partial_\sigma(h S^{\lambda\sigma\tau}) - \frac{4\pi G}{c^4} (h t^{\lambda\tau}) = 0, \tag{2.42}$$

onde

$$t^{\lambda\tau} = h^{a\lambda} t_a{}^\tau + \frac{c^4}{4\pi G} \Gamma_\nu{}^\lambda{}_\sigma S^{\nu\sigma\tau} = \frac{c^4}{4\pi G} \Gamma_{\nu\sigma}{}^\lambda S^{\nu\sigma\tau} + g^{\lambda\tau} L \tag{2.43}$$

o que mostra que $t_a{}^\tau$ é, de fato, um pseudo tensor. Da mesma forma que $t_a{}^\tau$, o pseudo tensor $t^{\lambda\tau}$ obedece uma lei de conservação da forma

$$\partial_\tau(h t^{\lambda\tau}) = 0. \tag{2.44}$$

Agora, tendo em vista que

$$\partial_\sigma(hS_a{}^{\sigma\tau}) \equiv hD_\sigma S_a{}^{\sigma\tau}, \tag{2.45}$$

onde [28]

$$D_\sigma = \partial_\sigma + \Gamma_\sigma - K_\sigma, \tag{2.46}$$

é a versão teleparalela da derivada covariante, a qual age apenas nos índices de espaço-tempo de $S_a{}^{\sigma\tau}$, e K_σ a ser definido em (2.54), podemos reescrever a Eq.(2.38) como:

$$D_\sigma S_a{}^{\sigma\tau} - \frac{4\pi G}{c^4} t_a{}^\tau = 0. \tag{2.47}$$

Nesse caso, a lei de conservação (2.41) assume a forma equivalente

$$D_\tau t_a{}^\tau = 0. \tag{2.48}$$

2.2 Equivalência entre a Teoria de Gauge para o Grupo das Translações e a Relatividade Geral

Como vimos, a presença de uma tetrada não trivial induz uma estrutura teleparalela no espaço-tempo. Agora, veremos que esta tetrada induz também uma estrutura riemanniana no espaço-tempo. Usando a métrica (2.27), podemos introduzir a conexão

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^\theta{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\theta\rho}(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}), \tag{2.49}$$

que é a conexão de Levi-Civita. Esta conexão possui curvatura, mas não torção. Sua curvatura

$$\overset{\circ}{R}{}^\theta{}_{\rho\mu\nu} = \partial_\mu \overset{\circ}{\Gamma}{}^\theta{}_{\rho\nu} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^\theta{}_{\sigma\mu}\, \overset{\circ}{\Gamma}{}^\sigma{}_{\rho\nu} - (\mu \leftrightarrow \nu), \tag{2.50}$$

representa a curvatura induzida no espaço-tempo pela presença do campo gravitacional. A conexão $\overset{\circ}{\Gamma}{}^\theta{}_{\mu\nu}$ permite introduzir uma outra derivada covariante que, atuando num vetor covariante V_μ, nos leva a:

$$\overset{\circ}{\nabla}_\nu V_\mu = \partial_\nu V_\mu - \overset{\circ}{\Gamma}{}^\theta{}_{\mu\nu} V_\theta \tag{2.51}$$

Podemos verificar que ambas as conexões $\Gamma^\theta{}_{\mu\nu}$ e $\overset{\circ}{\Gamma}{}^\theta{}_{\mu\nu}$ preservam a métrica:

$$\overset{\circ}{\nabla}_\nu g_{\rho\mu} = \nabla_\nu g_{\rho\mu} = 0. \tag{2.52}$$

Se substituirmos a Eq.(2.27) em (2.49), obtemos

$$\Gamma^\theta{}_{\mu\nu} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^\theta{}_{\mu\nu} + K^\theta{}_{\mu\nu}, \tag{2.53}$$

onde

$$K^{\theta}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[T_{\mu}{}^{\theta}{}_{\nu} + T_{\nu}{}^{\theta}{}_{\mu} - T^{\theta}{}_{\mu\nu}\right] \tag{2.54}$$

é o tensor de contorsão. Substituindo a Eq.(2.53) em (2.30), obtemos

$$R^{\theta}{}_{\rho\mu\nu} = \overset{\circ}{R}{}^{\theta}{}_{\rho\mu\nu} + D_{\mu}K^{\theta}{}_{\rho\nu} - D_{\nu}K^{\theta}{}_{\rho\mu} + K^{\sigma}{}_{\rho\nu}K^{\theta}{}_{\sigma\mu} - K^{\sigma}{}_{\rho\mu}K^{\theta}{}_{\sigma\nu} \equiv 0 \tag{2.55}$$

com D_{μ} a derivada covariante teleparalela definida em (2.46), a qual age nos três índices de $K^{\theta}{}_{\rho\nu}$. Portanto, a presença de uma tetrada não trivial na teoria de gauge das translações induz tanto uma estrutura teleparalela como uma estrutura riemanniana no espaço-tempo.

Tomemos, agora, a Lagrangeana de Einstein-Hilbert da relatividade geral:

$$\mathcal{L} = -\frac{c^4\sqrt{-g}}{16\pi G}\,\overset{\circ}{R}\,, \tag{2.56}$$

com $g = \det(g_{\mu\nu})$. Substituindo a curvatura escalar $\overset{\circ}{R}$ como obtida da Eq.(2.55), e tendo em vista que $h = \sqrt{-g}$, a menos de uma divergencia total, obtemos

$$\mathcal{L} = \frac{hc^4}{16\pi G}\left[\frac{1}{4}\,T^{\rho}{}_{\mu\nu}\,T_{\rho}{}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\,T^{\rho}{}_{\mu\nu}\,T^{\nu\mu}{}_{\rho} - T^{\rho}{}_{\mu\rho}\,T^{\nu\mu}{}_{\nu}\right]. \tag{2.57}$$

Esta é exatamente a Lagrangeana (2.34) da teoria de gauge para o grupo das translações. Tendo em vista esta equivalencia entre as Lagrangeanas, devemos esperar que as equações de campo (2.42) se reduzam às equações de Einstein. De fato, é possível mostrar que a Eq.(2.42) pode ser reescrita na forma

$$h\left(\overset{\circ}{R}_{\rho\theta} - \frac{1}{2}\,g_{\rho\theta}\,\overset{\circ}{R}\right) = 0\,. \tag{2.58}$$

2.3 Intervalos Invariantes

O espaço tangente é um espaço de Minkowski, com coordenadas denotadas por x^a. Nesse espaço, o intervalo invariante $d\sigma$ é dado por

$$d\sigma^2 = \eta_{ab}\,dx^a dx^b\,. \tag{2.59}$$

Consequentemente, o quadri-vetor velocidade, denotado por u^a, assume a forma

$$u^a = \frac{dx^a}{d\sigma}\,, \tag{2.60}$$

enquanto o quadri-vetor aceleração é

$$\omega^a = \frac{du^a}{d\sigma}\,, \tag{2.61}$$

Por outro lado, no espaço–tempo, cujas coordenadas são denotadas por x^μ, o intervalo invariante ds é dado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \ , \tag{2.62}$$

onde

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} h^a{}_\mu h^b{}_\nu \tag{2.63}$$

é a métrica usada para abaixar e levantar índices nesse espaço, e

$$h^a{}_\mu \equiv D_\mu x^a \tag{2.64}$$

é uma tetrada não trivial. O quadri-vetor velocidade nesse espaço é

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \ , \tag{2.65}$$

A tetrada relaciona grandezas no espaço–tempo com grandezas equivalentes no espaço tangente. Usando essa propriedade, vamos então reescrever o intervalo ds^2 em termos de grandezas do espaço tangente. Substituindo-se (2.63) em (2.62), obtemos

$$ds^2 = \eta_{ab} \, Dx^a Dx^b \ . \tag{2.66}$$

com

$$Dx^a = h^a{}_\mu \, dx^\mu \tag{2.67}$$

uma diferencial não–holônoma. Da mesma forma, podemos usar a tetrada para relacionar as quadri-velocidades nos dois espaços:

$$u^a = h^a{}_\mu \, u^\mu \ . \tag{2.68}$$

Usando (2.64), vemos que

$$u^a = u^\mu \, D_\mu x^a = \frac{Dx^a}{ds} \ . \tag{2.69}$$

Portanto, vemos que

$$u^a = \frac{dx^a}{d\sigma} = \frac{Dx^a}{ds} \ . \tag{2.70}$$

Analogamente, a quadri-aceleração será

$$\omega^a = \frac{du^a}{d\sigma} = \frac{Du^a}{ds} \ . \tag{2.71}$$

É interessante observar que, com essas definições, tanto de (2.59) como de (2.66) podemos obter

$$\eta_{ab} \, u^a \, u^b = 1 \ .$$

2.4 Equação de Movimento de uma Partícula sem Spin na Presença de um Campo Gravitacional

Vamos considerar o movimento de uma partícula sem spin num campo gravitacional. Por analogia com o eletromagnetismo [29], assumiremos que a interação da partícula com o campo gravitacional é descrito pela ação

$$c^{-2} \int_a^b A^a{}_\mu \, p_a \, dx^\mu, \tag{2.72}$$

onde

$$p_a = m \, c \, u_a$$

é o quadri-momentum da partícula. Portanto, a ação de uma partícula de massa m na presença de um campo gravitacional é

$$S = \int_a^b \mathcal{L} ds = \int_a^b \left[-mc\sqrt{u^2} - \frac{m}{c} A^a{}_\mu u_a u^\mu \right] ds. \tag{2.73}$$

Utilizando a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\mu} \right) = 0 \, , \tag{2.74}$$

obtemos a seguinte equação de movimento:

$$mc \left[\frac{du_\mu}{ds} + c^{-2} A^a{}_\mu \frac{du_a}{ds} \right] = \frac{m}{c} F^a{}_{\mu\nu} u_a u^\nu. \tag{2.75}$$

Fazendo uso da relação

$$\frac{du_\mu}{ds} = \left(\frac{\partial x^a}{\partial x^\mu} \right) \frac{du_a}{ds},$$

chegamos a

$$h^a{}_\mu \frac{du_a}{ds} = c^{-2} F^a{}_{\mu\nu} u_a u^\nu. \tag{2.76}$$

Existem duas maneiras de interpretar esta equação. A primeira é interpretá-la em termos de magnitudes relacionadas ao espaço-tempo de Weitzenböck, de acordo com a descrição teleparalela da gravitação. A outra alternativa é interpretá-la em termos de magnitudes relacionadas ao espaço-tempo de Riemann, de acordo com a descrição riemanniana da gravitação.

Comecemos com a primeira alternativa. Usando a Eq.(2.23) e as seguintes relações

$$h^a{}_\mu \frac{du_a}{ds} = \omega_\mu \equiv \frac{du_\mu}{ds} - \Gamma_{\theta\mu\nu} u^\theta \, u^\nu \quad ; \quad u_a = h_{a\theta} \, u^\theta \, , \tag{2.77}$$

onde ω_μ é a quadri-aceleração da partícula, podemos reescrever (2.76) na forma

$$\frac{du_\mu}{ds} - \Gamma_{\theta\mu\nu} \, u^\theta \, u^\nu = T_{\theta\mu\nu} \, u^\theta \, u^\nu \, . \tag{2.78}$$

Tendo em vista a simetria de $u^\theta\ u^\nu$ sob a troca $(\theta \leftrightarrow \nu)$, essa equação pode ser reescrita na forma

$$\frac{du_\mu}{ds} - \Gamma_{\theta\mu\nu}\ u^\theta\ u^\nu = K_{\mu\theta\nu}\ u^\theta\ u^\nu\ . \tag{2.79}$$

Como o lado esquerdo é a derivada covariante de Cartan da quadri-velocidade ao longo da trajetória, concluimos que a contorção desempenha o papel de *força gravitacional* nesse formalismo. Por outro lado, fazendo uso de (2.24), a equação (2.78) pode ser colocada na forma

$$\frac{du_\mu}{ds} - \Gamma_{\theta\nu\mu}\ u^\theta\ u^\nu = 0\ . \tag{2.80}$$

Como $\Gamma_{\theta\nu\mu}$ não é simétrica nos dois últimos índices, esta equação não é a equação de uma geodésica. Na verdade, como já dito, ela é uma equação de força que descreve a interação de partículas sem spin com o campo gravitacional. Portanto, uma partícula sem spin não segue uma geodésica no espaço-tempo de Weitzenböck, sendo sua trajetória descrita por uma equação de força do tipo da força de Lorentz, reforçando dessa forma a analogia da descrição teleparalela da gravitação com o eletromagnetismo.

Agora, vamos à segunda interpretação. Usando (2.53) e o fato da contorção $K_{\mu\theta\nu}$ ser anti-simétrica nos dois primeiros índices, podemos reescrever a Eq.(2.79) como

$$\frac{du_\mu}{ds} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\theta\mu\nu}\ u^\theta\ u^\nu = 0\ . \tag{2.81}$$

Essa é exatamente a equação da geodésica da Relatividade Geral, o que significa que uma partícula sem spin se movimenta ao longo de uma geodésica do espaço-tempo de Riemann.

Capítulo 3

O Espaço Interno de Cinco Dimensões

3.1 Equação de Movimento de uma Partícula sem Spin na Presença de Campos Gravitacional e Eletromagnético

No contexto da descrição teleparalela da gravitação, a ação que descreve uma partícula de massa m e carga e na presença de campos eletromagnético e gravitacional é dada por [25]

$$S = \int_a^b \left[-m\, c\, ds - \frac{m}{c}\, A^a{}_\mu\, u_a\, dx^\mu - \frac{e}{c}\, A_\mu\, dx^\mu \right], \tag{3.1}$$

onde $A^a{}_\mu$ é o potencial de gauge da gravitação, e A_μ é o potencial de gauge do eletromagnetismo. A equação de movimento correspondente é

$$c^2 h^a{}_\rho \frac{du_a}{ds} = F^a{}_{\rho\mu} u_a u^\mu + \frac{e}{m}\, F_{\rho\mu} u^\mu, \tag{3.2}$$

onde

$$F^a{}_{\rho\mu} = \partial_\rho A^a{}_\mu - \partial_\mu A^a{}_\rho \tag{3.3}$$

é o tensor intensidade do campo gravitacional, que nada mais é do que a torção, e

$$F_{\rho\mu} = \partial_\rho A_\mu - \partial_\mu A_\rho \tag{3.4}$$

é o tensor intensidade do campo eletromagnético. A ausência de coeficiente multiplicando o termo gravitacional no lado direito de (3.2) é uma manifestação da universalidade da gravitação, enquanto que o coeficiente do termo eletromagnético indica a dependência desse tipo de interação da relação carga-sobre-massa da partícula teste.

A semelhança entre as interações gravitacional e eletromagnética neste formalismo permite uma *unificação* de suas descrições. Nesta unificação, associamos ao tensor intensidade do campo eletromagnético um índice de gauge, que escolhemos como sendo 5. Este índice vem do fato do eletromagnetismo ser uma teoria de gauge para o grupo $U(1)$, que é um grupo a 1 parâmetro. Dessa forma, podemos definir um penta-potencial de gauge através de

$$\mathcal{A}^A{}_\mu = \left(A^a{}_\mu, A^5{}_\mu\right) , \tag{3.5}$$

onde

$$A^5{}_\mu = \kappa^{-1} \frac{e}{m} A_\mu , \tag{3.6}$$

com κ um parâmetro proporcional à intensidade relativa entre as interações eletromagnéticas e gravitacionais. Podemos então definir um novo tensor intensidade dos campos,

$$\mathcal{F}^A{}_{\mu\nu} = \left(F^a{}_{\mu\nu}, F^5{}_{\mu\nu}\right) , \tag{3.7}$$

com

$$F^5{}_{\mu\nu} = \kappa^{-1} \frac{e}{m} F_{\mu\nu} . \tag{3.8}$$

Em termos do penta-potencial $\mathcal{A}^A{}_\mu$, portanto, o tensor intensidade dos campos de gauge é

$$\mathcal{F}^A{}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}^A{}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}^A{}_\mu . \tag{3.9}$$

Implícito nas definições está a introdução de um espaço "tangente" penta-dimensional, dado pelo produto entre o espaço de Minkowski M^4 e o círculo S^1:

$$T^5 = M^4 \times S^1 .$$

Um ponto nesse espaço é determinado pelas coordenadas

$$x^A = (x^a, x^5) ,$$

onde x^a são as coordenadas de M^4, e

$$x^5 = \kappa^{-1} \frac{e}{m} x$$

a coordenada de S^1. Podemos assim introduzir uma penta-velocidade $u^A = (u^a, u^5)$ através da expressão

$$u^A = \frac{dx^A}{d\sigma} = \frac{Dx^A}{ds} , \tag{3.10}$$

de tal forma que

$$u^a = \frac{dx^a}{d\sigma} \quad \text{e} \quad u^5 = \frac{dx^5}{d\sigma} = \kappa^{-1} \frac{e}{m} \frac{dx}{d\sigma} \equiv \kappa^{-1} \frac{e}{m} u . \tag{3.11}$$

Podemos também introduzir o penta-momentum $p^A = (p^a, p^5)$ através da expressão

$$p^A = m\, c\, u^A , \tag{3.12}$$

de tal forma que

$$p^a = mcu^a \quad \text{e} \quad p^5 = mcu^5 \; . \tag{3.13}$$

Usando (3.11), podemos definir

$$p^5 = \kappa^{-1} ecu \equiv \kappa^{-1} p \; . \tag{3.14}$$

Com essas definições, e denotando por η_{55} a quinta componente da métrica do espaço T^5, se as condições suplementares*

$$u^5 = \kappa \quad \text{e} \quad \eta_{55} = 1 \tag{3.15}$$

forem satisfeitas, a ação (3.1) pode ser reescrita na forma

$$S = \int_a^b \left[-m \; c \; ds - c^{-2} \mathcal{A}^A{}_\mu \, p^B \, \eta_{AB} \, dx^\mu \right] \; . \tag{3.16}$$

Nesse caso, a equação de movimento (3.2) torna-se

$$c^2 h^a{}_\rho \frac{du_a}{ds} = F^a{}_{\rho\mu} \; u^b \; u^\mu \; \eta_{ab} + F^5{}_{\rho\mu} \; u^5 \; u^\mu \; \eta_{55} \; , \tag{3.17}$$

ou seja,

$$c^2 h^a{}_\rho \frac{du_a}{ds} = \mathcal{F}^A{}_{\rho\mu} \; u^B \; u^\mu \, \eta_{AB} \; . \tag{3.18}$$

Como um comentário final dessa seção, notemos que, de (3.15), temos que

$$u^5 \equiv \frac{dx^5}{d\sigma} = \frac{Dx^5}{ds} = u^\rho D_\rho x^5 \equiv \kappa \; . \tag{3.19}$$

Uma solução para essa equação é tomar $D_\rho x^5$ como sendo proporcional à quadri-velocidade,

$$D_\rho x^5 = \kappa \, u_\rho \; , \tag{3.20}$$

já que, na convenção de métrica adotada, $u_\rho u^\rho = 1$. Escolher essa solução corresponde a impor uma condição de gauge, da mesma forma como a escolha usual [30]

$$D_\rho x^0 \equiv h^0{}_\rho = u_\rho \tag{3.21}$$

da teoria de tetradas, corresponde a uma escolha de referencial, nesse caso o referencial fixo à partícula teste, cuja quadri-velocidade é u_ρ. De forma análoga ao caso da teoria de gauge para o grupo das translações, poderíamos tentar interpretar $D_\rho x^5$ como sendo uma espécie de quinta componente de uma "tetrada" $h^5{}_\rho$. No entanto, $h^5{}_\rho \equiv D_\rho x^5 = \kappa \, u_\rho$ não é uma tetrada pois ela não satisfaz relações de ortogonalidade.

---

*Analogamente, poderíamos impor as condições

$$u^5 = -\kappa \quad \text{e} \quad \eta_{55} = -1$$

que resultaria na mesma integral de ação, e consequentemente na mesma equação de movimento. Como veremos mais tarde, essa escolha corresponde a uma outra convenção de métrica para o espaço tangente.

3.2 A Métrica em Cinco Dimensões

As quatro primeiras dimensões do espaço interno referem-se ao espaço tangente de Minkowski, enquanto que a quinta dimensão está relacionada com o espaço S^1, a variedade do grupo de estrutura $U(1)$ do eletromagnetismo.

Nas teorias de gauge, a métrica do espaço interno é a métrica de Killing, definida por

$$\gamma_{ab} = \mathrm{tr}(J_a J_b), \tag{3.22}$$

onde J_a e J_b são os geradores do grupo de estrutura na representação adjunta. No caso do eletromagnetismo, cujo grupo de gauge é o grupo unitário $U(1)$, seus elementos são escritos na forma

$$g_e = \exp(\alpha J) \ ,$$

onde α é o parâmetro, e J é o gerador das transformações. Como o grupo $U(1)$ é abeliano, isto é $[J, J] = 0$, então na representação adjunta teríamos

$$\mathrm{tr}(J^2) = 0 \ .$$

No entanto, para outras representações, $\mathrm{tr}(J^2)$ não necessita ser igual a zero, sendo sempre possível encontrar uma representação na qual [31]

$$\gamma = \mathrm{tr}(J^2) = \pm 1. \tag{3.23}$$

Vemos assim que existem duas possibilidades para a métrica sobre o grupo $U(1)$, sendo a escolha de uma delas, até este momento, uma questão de convenção.

O mesmo tipo de problema ocorre com o grupo das translações, que também é abeliano, e que portanto também possui uma métrica de Killing degenerada. De forma análoga ao caso eletromagnético, uma outra métrica pode ser utilizada no lugar da métrica de Killing, que no caso do grupo das translações é a própria métrica de Lorentz do espaço de Minkowski. E mais, assim como no caso eletromagnético, a métrica de Lorentz também se apresenta com duas possibilidades de sinais, sendo a escolha de uma delas uma questão de convenção. No presente trabalho, estamos usando

$$\eta_{ab} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1) \tag{3.24}$$

para a métrica do espaço de Minkowski. Além disso, por razões de coerência quando a quinta dimensão do espaço tangente foi introduzida, isto é, para se obter a ação e a equação de movimento desejadas, tivemos que tomar

$$u^5 = \kappa \quad \mathrm{e} \quad \eta_{55} = 1 \ . \tag{3.25}$$

Com isso, a métrica resultante para o espaço interno de 5 dimensões é

$$\eta^{(1)}_{AB} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1, 1) \; , \tag{3.26}$$

que é uma métrica com signatura do tipo $(3, 2)$. Alternativamente, poderíamos ter escolhido

$$u^5 = -\kappa \quad \mathrm{e} \quad \eta_{55} = -1 \; . \tag{3.27}$$

Nesse caso, a métrica resultante para o espaço interno de 5 dimensões seria

$$\eta^{(2)}_{AB} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1, -1) \; , \tag{3.28}$$

que é uma métrica com signatura do tipo $(4, 1)$.

Consideremos, agora, a seguinte questão. Se, ao invés de (3.24) tivéssemos escolhido [32]

$$\tilde{\eta}_{ab} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1) \tag{3.29}$$

para a métrica do espaço de Minkowski, a escolha $u^5 = \kappa$ e $\eta_{55} = 1$ resultaria na seguinte métrica para o espaço interno de cinco dimensões:

$$\tilde{\eta}^{(1)}_{AB} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1, 1) \; . \tag{3.30}$$

Nesse caso, teríamos uma métrica com signatura do tipo $(4, 1)$. Por outro lado, a escolha $u^5 = -1$ e $\eta_{55} = -1$ resultaria na métrica

$$\tilde{\eta}^{(2)}_{AB} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1, -1) \; , \tag{3.31}$$

a qual apresenta uma signatura do tipo $(3, 2)$. Vemos dessa forma que a quinta dimensão do espaço interno pode, a princípio, ter tanto característica espacial como temporal. No próximo capítulo, entretanto, veremos que a unificação dos campos gravitacional e eletromagnético eliminará a possibilidade da quinta dimensão ter característica temporal.

3.3 O Intervalo Invariante em Cinco Dimensões

O intervalo invariante no espaço tangente de 4 dimensões é dado por (1.2). No espaço interno de 5 dimensões, o intervalo invariante é

$$d\Sigma^2 = \eta_{AB}\, dx^A\, dx^B. \tag{3.32}$$

Adotando-se a métrica $\eta^{(1)}_{AB}$, dada por (3.26), o intervalo invariante em 5 dimensões fica:

$$d\Sigma^2_{(1)} = d\sigma^2 + \eta_{55}\kappa^2 d\sigma^2 \; . \tag{3.33}$$

Como $\eta_{55} = 1$, então

$$d\Sigma^2_{(1)} = d\sigma^2 + \kappa^2 d\sigma^2 = \left(1 + \kappa^2\right) d\sigma^2 \, . \tag{3.34}$$

Uma outra possibilidade para o espaço interno de 5 dimensões é adotar a métrica $\eta^{(2)}_{AB}$, dada por (3.28). Nesse caso, $\eta_{55} = -1$, e o intervalo invariante

$$d\Sigma^2_{(2)} = d\sigma^2 + \eta_{55}\kappa^2 d\sigma^2 \tag{3.35}$$

assume a forma

$$d\Sigma^2_{(2)} = \left(1 - \kappa^2\right) d\sigma^2 \, . \tag{3.36}$$

Resultados semelhantes são obtidos quando se assume a métrica $\tilde{\eta}_{ab}$ para o espaço de Minkowski.

3.4 A Cinemática Relativística no Espaço Interno

3.4.1 Utilizando a Métrica $\eta^{(1)}_{AB}$

Partículas Massivas

Como já vimos, a penta-velocidade de uma partícula com massa não nula é

$$u^A = (u^a, \kappa) \, . \tag{3.37}$$

Derivando em relação a σ, obtemos a penta-aceleração

$$\omega^A = (\omega^a, 0) \, , \tag{3.38}$$

com

$$\omega^a = \frac{du^a}{d\sigma} \, . \tag{3.39}$$

O penta-momentum, de acordo com (3.12) e (3.13), é definido por

$$p^A = mcu^A = (p^a, mc\kappa) \, . \tag{3.40}$$

O quadrado da penta-velocidade será

$$u_A u^A = u_a u^a + u_5 u^5 = 1 + \kappa^2 \, , \tag{3.41}$$

uma vez que $u_a u^a = 1$. É interessante notar que, se definirmos a penta-velocidade no espaço interno U^A como

$$U^A = \frac{dx^A}{d\Sigma} \, , \tag{3.42}$$

então, usando (3.32) podemos ver que

$$U_A U^A = 1. \tag{3.43}$$

Como o movimento ocorre no espaço-tempo, entretanto, a penta-velocidade física é u^A e não U^A. Além disso, usando (3.34), podemos obter (3.41) de (3.43), e vice-versa.

O quadrado da penta-aceleração é

$$\omega_A \omega^A = \omega_a \omega^a + \omega_5 \omega^5 = \omega_a \omega^a \ . \tag{3.44}$$

Daqui, podemos concluir que, se $\omega_a \omega^a$ é do tipo espaço em quatro dimensões, em cinco também o será. Derivando a Eq.(3.41) em relação ao intervalo invariante σ, chegamos à conclusão que a penta-velocidade e a penta-aceleração são ortogonais:

$$u_A \omega^A = u_a \omega^a + u_5 \omega^5 = 0 \ . \tag{3.45}$$

O quadrado do penta-momentum é

$$p_A p^A = m^2 c^2 u_A u^A = m^2 c^2 (1 + \kappa^2) \ . \tag{3.46}$$

Abrindo a soma no lado esquerdo dessa equação, vemos que

$$p_A p^A = p_a p^a + p_5 p^5 = \frac{E^2}{c^2} - (\vec{p})^2 + m^2 c^2 \kappa^2 \ . \tag{3.47}$$

Substituindo-se em (3.46), obtemos

$$E^2 = (\vec{p})^2 c^2 + m^2 c^4 \ . \tag{3.48}$$

Portanto, a definição de energia é a mesma que em quatro dimensões!

O momento angular penta-dimensional é definido como

$$M^{AB} = x^A p^B - x^B p^A. \tag{3.49}$$

Assim, as componentes com AB=ab formam o momento angular usual em quatro dimensões:

$$M^{ab} = x^a p^b - x^b p^a \ . \tag{3.50}$$

As outras componentes são

$$M^{5b} = \left(x^5 p^b - x^b p^5 \right) = \kappa \left(c\tau p^b - x^b mc \right) \ , \tag{3.51}$$

onde usamos que $dx^5 = \kappa c d\tau$, e também a equação (3.40). No caso em que $b = 0$, teremos

$$M^{50} = \kappa \left(\tau E - t m c^2 \right) \ . \tag{3.52}$$

Se a velocidade for constante, podemos integrar a equação (1.4), de onde obtemos $t = \gamma\tau$. Substituindo esta relação em (3.52), e lembrando que $E = \gamma mc^2$, então

$$M^{50} = \kappa\left(\tau\gamma mc^2 - \gamma\tau mc^2\right) = 0\ . \tag{3.53}$$

As componentes $5i$, com $i = 1,2,3$, são

$$M^{5i} = \kappa\left[c\tau p^i - x^i mc\right] = \kappa\left[c\frac{t}{\gamma}p^i - x^i\frac{E}{c\gamma}\right] = \kappa\left[\frac{c}{\gamma}(tp^i - \frac{E}{c^2}x^i)\right] = \frac{\kappa}{\gamma}M^{0i}\ , \tag{3.54}$$

onde usamos a definição de M^{0i} dada em (1.17).

Partículas de Massa Nula

Analisemos agora a cinemática de partículas com massa nula. Como partículas sem massa andam no "cone de luz", temos que

$$p_A p^A = 0\ , \tag{3.55}$$

ou seja,

$$p_a p^a + p_5 p^5 = 0\ . \tag{3.56}$$

Como sabemos que em quatro dimensões $p_a p^a = 0$, então para partículas com massa nula devemos ter

$$p_5 = 0\ . \tag{3.57}$$

Portanto, o penta-momentum de partículas com massa nula será

$$p_A = (p_a, 0). \tag{3.58}$$

Da equação (3.56) para o quadrado do penta-momentum, obtemos a definição da energia como sendo

$$p_a p^a + p_5 p^5 = \frac{E^2}{c^2} - (\vec{p})^2 = 0\ , \tag{3.59}$$

ou seja, como é usual no espaço de quatro dimensões,

$$E^2 = (\vec{p})^2 c^2\ . \tag{3.60}$$

3.4.2 Utilizando a Métrica $\eta^{(2)}_{AB}$

Utilizando a métrica $\eta^{(2)}_{AB}$ para os mesmos cálculos, obtemos

$$u_A u^A = u_a u^a + u_5 u^5 = 1 - \kappa^2\ . \tag{3.61}$$

Daqui também tiramos que a penta-velocidade e a penta-aceleração são perpendiculares. O quadrado do penta-momentum será

$$p_A p^A = m^2 c^2 u_A u^A = m^2 c^2 \left(1 - \kappa^2\right) . \tag{3.62}$$

Abrindo a somatória do lado esquerdo, temos

$$p_A p^A = p_a p^a + p_5 p^5 = \frac{E^2}{c^2} - (\vec{p})^2 - m^2 c^2 \kappa^2 . \tag{3.63}$$

Substituindo-se em (3.62), obtemos

$$E^2 = (\vec{p})^2 c^2 + m^2 c^4 . \tag{3.64}$$

Ou seja, esta métrica também nos dá a definição correta para a energia.

Utilizando a definição (3.49) do momento angular penta-dimensional, a componente M^{50} continua sendo nula:

$$M^{50} = (-\kappa c \tau)\frac{E}{c} - ct(-mc\kappa) = -\tau mc^2 \gamma + \tau \gamma mc^2 = 0 . \tag{3.65}$$

A componente M^{5i} será

$$M^{5i} = -\frac{\kappa}{\gamma} M^{0i} . \tag{3.66}$$

A cinemática das partículas sem massa segue da mesma forma que para a métrica $\eta^{(1)}_{AB}$.

3.5 As Transformações de Lorentz

Assim como em quatro dimensões, procuraremos transformações que preservem o intervalo invariante em cinco dimensões. Consequentemente, procuraremos transformações que satisfaçam a seguinte relação:

$$\eta_{AB}\, dx^A\, dx^B = \eta_{AB}\, dx'^A\, dx'^B . \tag{3.67}$$

Sendo a transformação de um referencial para outro dada por

$$dx'^A = \Lambda^A{}_B\, dx^B , \tag{3.68}$$

as transformações de Lorentz que procuramos devem satisfazer a equação

$$\eta_{AB}\, \Lambda^A{}_C\, \Lambda^B{}_D = \eta_{CD} , \tag{3.69}$$

ou ainda,

$$\Lambda_B{}^C \Lambda^B{}_D = \delta^C{}_D. \tag{3.70}$$

Estas relações são semelhantes às satisfeitas em quatro dimensões. Determinaremos, agora, as componentes da matriz de transformação $\Lambda^A{}_B$. Para isto, tomaremos primeiramente $A = 5$ na Eq.(3.68), ou seja,

$$dx'^5 = \Lambda^5{}_B\, dx^B = \Lambda^5{}_b\, dx^b + \Lambda^5{}_5\, dx^5 \,. \tag{3.71}$$

Como $dx^5 = \pm\kappa\, cd\tau$, e sendo $d\tau$ um invariante de Lorentz, devemos esperar que

$$dx'^5 = dx^5. \tag{3.72}$$

Portanto, devemos ter

$$dx^5 = \Lambda^5{}_b\, dx^b + \Lambda^5{}_5\, dx^5 \,. \tag{3.73}$$

Desta relação, concluimos que

$$\Lambda^5{}_b = 0 \,, \tag{3.74}$$

e

$$\Lambda^5{}_5 = 1 \,. \tag{3.75}$$

No caso em que $A = a$, que corresponde a considerar as componentes espaço-temporais usuais, teremos

$$dx'^a = \Lambda^a{}_B dx^B = \Lambda^a{}_b dx^b + \Lambda^a{}_5\, dx^5 \,. \tag{3.76}$$

Como não pode haver interferência da quinta componente sobre as outras componentes, pois pela equação acima isto implicaria numa nova redefinição da contração do comprimento e da dilatação do tempo, devemos ter

$$\Lambda^a{}_5 = 0 \,. \tag{3.77}$$

Com isto, $\Lambda^a{}_b$ são as transformações de Lorentz usuais no espaço tangente quadri-dimensional. Desta forma, a forma geral da nossa matriz de transformação é:

$$\Lambda^A{}_B = \left(\begin{array}{c|c} \Lambda^a{}_b & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \tag{3.78}$$

Tomando o determinante da Eq.(3.69) obtemos

$$\det \Lambda = \pm 1 \,. \tag{3.79}$$

Nesta mesma equação, se fizermos $C = D = 0$, obtemos

$$\eta_{00} = 1 = \eta_{AB}\Lambda^A{}_0\Lambda^B{}_0 = (\Lambda^0{}_0)^2 - (\Lambda^i{}_0)^2 + \eta_{55}(\Lambda^5{}_0)^2 \,. \tag{3.80}$$

Como $\Lambda^5{}_0 = 0$, concluimos que

$$(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + (\Lambda^i{}_0)^2 \, . \tag{3.81}$$

Este resultado é semelhante ao satisfeito em quatro dimensões. Fazendo $C = D = 5$, teremos

$$\eta_{55} = \eta_{AB}\Lambda^A{}_5\Lambda^B{}_5 = (\Lambda^0{}_5)^2 - (\Lambda^i{}_5)^2 + \eta_{55}(\Lambda^5{}_5)^2 \, . \tag{3.82}$$

Como $\Lambda^0{}_5 = \Lambda^i{}_5 = 0$, concluimos que

$$\eta_{55} = \eta_{55}(\Lambda^5{}_5)^2 \, , \tag{3.83}$$

ou seja,

$$\Lambda^5{}_5 = \pm 1 \, , \tag{3.84}$$

independente da convenção adotada, isto é, se $\eta_{55} = 1$ ou $\eta_{55} = -1$. Como já vimos, $\Lambda^5{}_5 = 1$, pois $d\tau$ é um invariante de Lorentz. Como, além disso, queremos excluir a possibilidade de existir um referencial no qual o tempo próprio da partícula "volte no tempo", excluiremos a possibilidade $\Lambda^5{}_5 = -1$.

Faremos agora, como exemplo, a transformação de Lorentz do penta-potencial. Temos que

$$\mathcal{A}'^A{}_\mu = \Lambda^A{}_B \, \mathcal{A}^B{}_\mu \, . \tag{3.85}$$

Considerando primeiramente o caso com $A = a$, obtemos

$$A'^a{}_\mu = \Lambda^a{}_B \, \mathcal{A}^B{}_\mu = \Lambda^a{}_b \, A^b{}_\mu + \Lambda^a{}_5 \, A^5{}_\mu \, . \tag{3.86}$$

Como $\Lambda^a{}_5 = 0$, então

$$A'^a{}_\mu = \Lambda^a{}_b \, A^a{}_\mu \, . \tag{3.87}$$

No caso em que $A = 5$, teremos

$$A'^5{}_\mu = \Lambda^5{}_B \, \mathcal{A}^B{}_\mu = \Lambda^5{}_b \, A^b{}_\mu + \Lambda^5{}_5 \, A^5{}_\mu \, . \tag{3.88}$$

Como $\Lambda^5{}_b = 0$, $\Lambda^5{}_5 = 1$, e $A^5{}_\mu = \kappa^{-1} \, \frac{e}{m} \, A_\mu$, então

$$A'_\mu = A_\mu \, . \tag{3.89}$$

Podemos notar que a quinta componente de qualquer tensor sob uma mudança de referencial não mudará, enquanto que as quatro primeiras componentes sofrerão uma transformação de Lorentz usual.

Capítulo 4

O Equivalente Teleparalelo de Kaluza-Klein

4.1 A Derivada Covariante e o Acoplamento Minimal

Uma transformação de gauge é representada por uma translação das coordenadas x^A do espaço interno penta-dimensional,

$$x^A \to x'^A = x^A + \alpha^A(x^\mu) \;, \tag{4.1}$$

onde

$$\alpha^A(x^\mu) \equiv \alpha^A = \left(\alpha^a, \alpha^5\right) \tag{4.2}$$

são os parâmetros da transformação. Da mesma forma como fizemos para os potenciais de gauge, tomaremos

$$\alpha^5 = \kappa^{-1} \frac{e}{m} \alpha \;. \tag{4.3}$$

Para uma translação infinitesimal,

$$\delta x^A = \delta \alpha^A \;, \tag{4.4}$$

com $\delta\alpha^A$ denotando os parâmetros infinitesimais correspondentes. Definindo os geradores do grupo $G = T^4 \times U(1)$ por

$$J_A \equiv P_A = \frac{\partial}{\partial x^A} \;, \tag{4.5}$$

a translação (4.1) pode ser escrita como

$$x'^A = U x^A, \tag{4.6}$$

com U sendo um elemento do grupo G que, para translações infinitesimais é dado por

$$U = 1 + \delta\alpha^A P_A. \tag{4.7}$$

Assim, a translação infinitesimal (4.4) pode ser reescrita como

$$\delta x^A = \delta\alpha^B \, P_B \, x^A \;. \tag{4.8}$$

As coordenadas do espaço interno penta-dimensional são $x^A = (x^a, x^5)$, com

$$x^5 = \kappa^{-1} \frac{e}{m} x \, .$$

Consequentemente, os geradores das transformações infinitesimais de G são dados por $P_A = (P_a, P_5)$, com

$$P_a = \frac{\partial}{\partial x^a} \quad e \quad P_5 = \frac{\partial}{\partial x^5} = \kappa \frac{m}{e} \frac{\partial}{\partial x} \equiv \kappa \frac{m}{e} P \, . \tag{4.9}$$

Portanto, para o caso das coordenadas de M^4, temos

$$\delta x^a = \delta \alpha^b \, P_b \, x^a + \delta \alpha^5 \, P_5 \, x^a = \delta \alpha^a \, .$$

Para o caso da coordenada de S^1,

$$\delta x^5 = \delta \alpha^b \, P_b \, x^5 + \delta \alpha^5 \; ,$$

ou seja

$$\delta x = \delta \alpha \, .$$

A derivada covariante sob as transformações infinitesimais de G pode ser obtida a partir da expressão

$$D_\mu = \partial_\mu + c^{-2} \mathcal{A}^A{}_\mu \frac{\delta}{\delta \alpha^A} \, . \tag{4.10}$$

Consideremos como ilustração o caso do penta-potencial de gauge $\mathcal{A}^B{}_\rho$. Sua derivada covariante será

$$D_\mu \mathcal{A}^B{}_\rho = \partial_\mu \mathcal{A}^B{}_\rho + c^{-2} \mathcal{A}^A{}_\mu \frac{\delta \mathcal{A}^B{}_\rho}{\delta \alpha^A} \, . \tag{4.11}$$

Sob uma translação de gauge, temos que

$$\mathcal{A}'_\rho = U \mathcal{A}_\rho U^{-1} + c^2 U \partial_\rho U^{-1} \, . \tag{4.12}$$

A transformação infinitesimal correspondente é

$$\mathcal{A}'^B{}_\rho = \mathcal{A}^B{}_\rho - c^2 \partial_\rho \delta \alpha^B \; , \tag{4.13}$$

ou seja,

$$\delta \mathcal{A}^B{}_\rho = -c^2 \partial_\rho \delta \alpha^B \, . \tag{4.14}$$

Substituindo-se em (4.11), obtemos

$$D_\mu \mathcal{A}^B{}_\rho = \partial_\mu \mathcal{A}^B{}_\rho - \partial_\rho \mathcal{A}^B{}_\mu \equiv \mathcal{F}^B{}_{\mu\rho} \, . \tag{4.15}$$

Neste ponto, é importante ressaltar que, como é usual nas teorias de Kaluza-Klein, supõe-se que os potenciais de gauge $\mathcal{A}^A{}_\mu$, e consequentemente a tetrada e o tensor métrico, não dependem da coordenada x^5. Por outro lado, campos de matéria, isto é, campos não pertencentes à representação adjunta do grupo de gauge, dependem da coordenada x^5.

A estrutura geométrica por trás de qualquer teoria de gauge é aquela dada pela geometria dos espaços fibrados [33]. No presente caso, o grupo de gauge é o produto direto entre o grupo das translações T^4 e o grupo $U(1)$. A variedade correspondente a esse grupo, a qual define o espaço interno do modelo, é dada pelo produto direto entre o espaço de Minkowski M^4 e a circunferência S^1. O espaço interno, portanto, possui uma parte com características de espaço-tempo, e outra genuinamente interna. A parte com características de espaço-tempo possui uma tetrada que relaciona grandezas definidas no espaço tangente (Minkowski) com grandezas equivalentes definidas no espaço-tempo; a parte genuinamente interna não possui uma tetrada. Portanto, apenas o grupo $G_{\text{int}}= U(1)$ é, de fato, um grupo de gauge autêntico.

Chamando de V um intervalo aberto no espaço-tempo, um campo fonte é representado por uma *seção local* Ψ_V do fibrado, que nada mais é do que uma aplicação diferenciável

$$\Psi_V : V \to \Pi^{-1}(V) ,$$

onde Π é uma projeção da fibra no espaço-tempo [33]. Um fibrado é sempre localmente trivial, isto é, $\Pi^{-1}(V)$ é difeomorfo a $V \times G_{\text{int}}$:

$$\Pi^{-1}(V) \sim V \times G_{\text{int}} .$$

Esse difeomorfismo, chamado de trivialização local, é dado por

$$f_V : \Pi^{-1}(V) \to V \times G_{\text{int}} .$$

Assim, podemos ver que a seção local Ψ_V é uma aplicação que leva

$$x^\mu \to f_V^{-1}(x^\mu, x^5) ,$$

onde x^μ designa o ponto no espaço-tempo (espaço base) e x^5 designa o ponto na variedade interna S^1. Portanto, um campo fonte Ψ, definido como uma seção do fibrado, deve depender simultâneamente das coordenadas x^μ e x^5:

$$\Psi = \Psi(x^\mu, x^5) .$$

Consideremos agora uma translação generalizada de gauge, sob a qual um campo fonte responde como

$$\delta\Psi = \delta\alpha^A \, P_A \, \Psi . \tag{4.16}$$

Note-se que os geradores $P_a (a = 0, ..., 3)$ agem no argumento x^μ através das relações (2.1). Assim, a derivada covariante assume a forma

$$D_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi + c^{-2} \mathcal{A}_\mu \, \Psi, \tag{4.17}$$

com

$$\mathcal{A}_\mu = \mathcal{A}^A{}_\mu \, P_A \, .$$

Separando as componentes gravitacional e eletromagnética, obtemos

$$D_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi + c^{-2} A^a{}_\mu \partial_a \Psi + c^{-2} A_\mu \, P \, \Psi \, . \tag{4.18}$$

Sendo x^5 a coordenada do círculo S^1, podemos então assumir a seguinte dependência de Ψ nas coordenadas x^μ e x^5:

$$\Psi(x^\mu, x^5) = \exp \left[i \, \kappa \, \frac{2\pi}{\lambda_C} \, x^5 \right] \, \psi(x^\mu) \, , \tag{4.19}$$

com

$$\lambda_C = \frac{h}{mc}$$

o comprimento de onda Compton da partícula sob consideração. Com isso, temos que

$$P_a \Psi \equiv \frac{\partial}{\partial x^a} \Psi = \exp \left[i \, \kappa \, \frac{2\pi}{\lambda_C} \, x^5 \right] \, \partial_a \psi \tag{4.20}$$

e

$$P_5 \Psi \equiv \frac{\partial}{\partial x^5} \Psi = i \, \kappa \, \frac{2\pi}{\lambda_C} \, \Psi = i \, \kappa \, \frac{mc}{\hbar} \, \Psi \, . \tag{4.21}$$

Equivalentemente, (4.21) pode ser escrita na forma

$$P \Psi = \left(\frac{iec}{\hbar} \right) \, \Psi \, . \tag{4.22}$$

Para uma translação apenas nas coordenadas x^5, temos de (4.16) que

$$\delta \Psi = \delta \alpha^5 \, P_5 \Psi = \delta \alpha \, \left(\frac{iec}{\hbar} \right) \, \Psi \, , \tag{4.23}$$

que é a forma infinitesimal de

$$\Psi' = \exp \left(\frac{iec\alpha}{\hbar} \right) \, \Psi \, . \tag{4.24}$$

Vemos assim que uma translação na coordenada x^5 implica numa mudança de fase em Ψ. Como, além disso, vemos de (4.14) que

$$\delta A^b{}_\rho = 0 \quad \text{e} \quad \delta A_\rho = -c^2 \, \partial_\rho \delta \alpha \, ,$$

concluímos que uma translação na coordenada x^5 é equivalente a uma transformação de gauge do grupo $U(1)$. Nesse caso, o acoplamento minimal correspondente é dado pela derivada covariante

$$D_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \Psi \ . \tag{4.25}$$

Para uma translação apenas nas coordenadas x^a, temos de (4.16) que

$$\delta\Psi = \delta\alpha^a \, \partial_a \Psi.$$

Como, além disso, vemos de (4.14) que

$$\delta A^b{}_\rho = -c^2 \partial_\rho(\delta\alpha^b) \quad \text{e} \quad \delta A_\rho = 0 \ ,$$

concluimos que uma translação nas coordenadas x^a é equivalente a uma transformação de gauge relacionada ao grupo T_4. Nesse caso, o acoplamento minimal correspondente é dado pela derivada covariante

$$D_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi + c^{-2} A^a{}_\mu \partial_a \Psi \ , \tag{4.26}$$

ou seja,

$$D_\mu \Psi = h^a{}_\mu \, \partial_a \Psi \ , \tag{4.27}$$

com

$$h^a{}_\mu = \partial_\mu x^a + c^{-2} A^a{}_\mu$$

uma tetrada não trivial. Note-se que apenas o acoplamento gravitacional dá origem a uma tetrada.

Para uma translação simultânea nas cinco componentes da coordenada x^A, temos que

$$\delta\Psi = \delta\alpha^a \, \partial_a \Psi + \delta\alpha \left(\frac{iec}{\hbar}\right) \Psi \ . \tag{4.28}$$

Nesse caso, o acoplamento minimal correspondente é dado pela derivada covariante

$$D_\mu \Psi = h^a{}_\mu \, \partial_a \Psi + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \Psi \ . \tag{4.29}$$

Definindo $A_a = h_a{}^\mu \, A_\mu$, podemos reescrever (4.29) na forma

$$D_\mu \Psi = h^a{}_\mu \, D_a \Psi \ , \tag{4.30}$$

com

$$D_a \Psi = \partial_a \Psi + \frac{ie}{\hbar c} A_a \Psi \tag{4.31}$$

a derivada covariante usual do eletromagnetismo no espaço de Minkowski. Na ausência de campo eletromagnético ($A_\mu = 0$), obtemos a derivada covariante de gauge para o grupo das translações. Por outro lado, na ausência de campo gravitacional ($A^a{}_\mu = 0$), obtemos a derivada covariante do eletromagnetismo.

Os campos gravitacional e eletromagnético, como é usual, podem sêr obtidos pelo comutador da derivada covariante (4.29):

$$[D_\mu, D_\nu]\Psi = c^{-2}\mathcal{F}^A{}_{\mu\nu}P_A\Psi \ . \tag{4.32}$$

Separando as componentes com $A = a$ e $A = 5$, obtemos

$$[D_\mu, D_\nu]\Psi = c^{-2}F^a{}_{\mu\nu}P_a\Psi + c^{-2}F^5{}_{\mu\nu}P_5\Psi. \tag{4.33}$$

Ou ainda, usando as equações (3.8), (4.9) e (4.21),

$$[D_\mu, D_\nu]\Psi = c^{-2}F^a{}_{\mu\nu}P_a\Psi + \frac{ie}{\hbar c}F_{\mu\nu}\Psi \ . \tag{4.34}$$

4.2 Densidade Lagrangeana e Equações de Campo

A Lagrangeana unificada dos campos gravitacional e eletromagnético pode ser escrita na forma

$$\mathcal{L} = \frac{h}{16\pi G}\left(\frac{1}{4}F^A{}_{\mu\nu}F^B{}_{\theta\rho}g^{\mu\theta}N_{AB}{}^{\nu\rho}\right) \ . \tag{4.35}$$

Como só existem tetradas na parte quadri-dimensional do espaço interno, isto é, na parte com $AB = ab$, e como as tetradas misturam índices de espaço-tempo com índices de espaço tangente, devemos incluir permutações cíclicas de a, b e c nessa parte. Isso significa que

$$N_{ab}{}^{\nu\rho} = \eta_{ab}\, h_c{}^\nu\, h^{c\rho} + 2\, h_a{}^\rho\, h_b{}^\nu - 4\, h_a{}^\nu\, h_b{}^\rho, \tag{4.36}$$

enquanto que, pelo fato de não existir uma tetrada relativa à quinta dimensão do espaço interno,

$$N_{55}{}^{\nu\rho} = \eta_{55}h_c{}^\nu\, h^{c\rho} \ . \tag{4.37}$$

Consequentemente, usando as equações (2.23) e (3.8), a Lagrangeana (4.35) assume a forma

$$\mathcal{L} = \frac{hc^4}{16\pi G}\Big[\frac{1}{4}\, T^\rho{}_{\mu\nu}\, T_\rho{}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\, T^\rho{}_{\mu\nu}\, T^{\nu\mu}{}_\rho - T^\rho{}_{\mu\rho}\, T^{\nu\mu}{}_\nu\Big] + \eta_{55}\,\frac{\kappa^{-2}e^2}{16\pi G m^2}\Big[\frac{h}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\Big]. \tag{4.38}$$

Para que o segundo termo seja a Lagrangeana do campo eletromagnético, duas condições devem ser satisfeitas. Primeiramente, é necessário que

$$\frac{\kappa^{-2}e^2}{16\pi G m^2} = 1 \ , \tag{4.39}$$

ou seja,

$$\kappa^2 = \frac{e^2}{16\pi G m^2}. \tag{4.40}$$

Isso determina o parâmetro κ. Notemos que, como já havíamos dito, κ^2 é proporcional à razão entre a força elétrica e a força gravitacional:

$$\kappa^2 \propto \frac{F_e}{F_G} = \frac{e^2}{G m^2}. \tag{4.41}$$

Além disso, para garantir que a energia seja sempre positiva, e para que as partes gravitacional e eletromagnética da Lagrangeana tenham o sinal relativo apropriado, é necessário que

$$\eta_{55} = -1 \ . \tag{4.42}$$

Assim, usando a definição de $S^{\rho\mu\nu}$ dada em (2.36), a Lagrangeana (4.38) fica

$$\mathcal{L} = \frac{hc^4}{16\pi G} \, S^{\rho\mu\nu} \, T_{\rho\mu\nu} - \frac{h}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \equiv \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_{EM} = h \left(L_G + L_{EM} \right) \ . \tag{4.43}$$

Um ponto importante a ser observado é que, adotando-se a convenção (3.24) para a métrica do espaço de Minkowski, isto é,

$$\eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \ ,$$

a métrica do espaço interno penta-dimensional deve ser

$$\eta_{AB} = \text{diag}(1, -1, -1, -1, -1) \ .$$

Isso significa que a quinta dimensão deve necessariamente ter característica *espacial*, e que a métrica com signatura $(3, 2)$ está excluida. Por outro lado, é fácil de ser verificado que, se adotarmos a métrica (3.29) para o espaço de Minkowski, isto é,

$$\tilde{\eta}_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \ ,$$

para que as partes gravitacional e eletromagnética da Lagrangeana tenham o sinal adequado, é necessário que

$$\eta_{55} = 1 \ .$$

Ou seja, a métrica do espaço interno penta-dimensional deve necessariamente ser

$$\tilde{\eta}_{AB} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1, 1) \ .$$

Vemos assim que, também nessa convenção, a mesma conclusão é obtida: a quinta dimensão do espaço interno possui característica *espacial*, e a métrica com signatura $(3, 2)$ está excluida.

Como mostrado na Seção 2.2, a menos de uma divergência total, o primeiro termo de (4.43) coincide com a Lagrangeana de Einstein-Hilbert. Que a Lagrangeana de Maxwell em quatro dimensões surja de uma Lagrangeana de Einstein-Hilbert em cinco dimensões, é considerado como um milagre das teorias de Kaluza-Klein [37]. Que a Lagrangeana de Einstein-Hilbert em quatro dimensões surja de uma Lagrangeana do tipo de Maxwell para uma teoria de gauge translacional em cinco dimensões, pode ser considerado como a outra face do mesmo milagre.

Fazendo a variação de $\mathcal{L}$ em relação a $A^a{}_\mu$, obtemos

$$\partial_\sigma(hS_a{}^{\sigma\tau}) - \frac{4\pi G}{c^4}(ht_a{}^\tau) = \frac{4\pi G}{c^4}h\theta_a{}^\tau, \tag{4.44}$$

onde

$$t_a{}^\tau \equiv \frac{1}{h}\frac{\partial\mathcal{L}_G}{\partial h^a{}_\tau} = -\frac{c^4}{4\pi G}h_a{}^\mu S^{\nu\sigma\tau}T_{\nu\sigma\mu} + h_a{}^\tau L_G \tag{4.45}$$

é a corrente dos campos de gauge, que nesse caso é o (pseudo) tensor energia-momento do campo gravitacional, e

$$\theta_a{}^\tau \equiv \frac{1}{h}\frac{\delta\mathcal{L}_{EM}}{\delta h^a{}_\tau} = h_a{}^\mu F_{\mu\nu}F^{\tau\nu} + h_a{}^\tau L_{EM} \tag{4.46}$$

é o tensor energia-momento do campo eletromagnético. A Eq.(4.44) pode ser reescrita na forma

$$\partial_\sigma(hS_a{}^{\sigma\tau}) = \frac{4\pi G}{c^4}h\tau_a{}^\tau\ , \tag{4.47}$$

com

$$\tau_a{}^\tau = t_a{}^\tau + \theta_a{}^\tau \tag{4.48}$$

a soma dos tensores energia-momento da gravitação e do eletromagnetismo. Derivando (4.47) em relação a x^τ, e lembrando que $S_a{}^{\sigma\tau}$ é anti-simétrico nos dois últimos índices, obtemos

$$\partial_\tau(h\tau_a{}^\tau) = 0, \tag{4.49}$$

que é a lei de conservação do tensor energia-momento total.

Notemos agora o seguinte fato. Multiplicando (4.44) por $h^{a\lambda}$, obtemos

$$\partial_\sigma(hS^{\lambda\sigma\tau}) - \frac{4\pi G}{c^4}ht^{\lambda\tau} = +\frac{4\pi G}{c^4}h\theta^{\lambda\tau}, \tag{4.50}$$

onde

$$t^{\lambda\tau} = h^{a\lambda}t_a{}^\tau + \frac{c^4}{4\pi G}\Gamma_\nu{}^\lambda{}_\sigma S^{\nu\sigma\tau} \tag{4.51}$$

e

$$\theta^{\lambda\tau} = h^{a\lambda}\theta_a{}^\tau\ . \tag{4.52}$$

são respectivamente os tensores energia-momento da gravitação e do eletromagnetismo. Essas expressões mostram que a densidade de energia-momento do campo gravitacional é, de fato, representada por um pseudo-tensor, enquanto que a densidade correspondente do campo eletromagnético é representada por um tensor verdadeiro. Finalmente, é interessante notar que, usando (2.40) e (2.45), podemos ainda reescrever a equação (4.44) na forma

$$D_\sigma S_a{}^{\sigma\tau} = \frac{4\pi G}{c^4} \tau_a{}^\tau , \tag{4.53}$$

com D_σ a versão teleparalela da derivada covariante, conforme definido pela equação (2.46), a qual leva em conta apenas os índices de espaço-tempo de $S_a{}^{\sigma\tau}$.

Por outro lado, fazendo a variação de $\mathcal{L}$ em relação a A_μ, obtemos

$$D_\sigma F^{\tau\sigma} = 0 , \tag{4.54}$$

que é a versão teleparalela do primeiro par das equações de Maxwell. A versão teleparalela do segundo par das equações de Maxwell, dado pela identidade de Bianchi, é

$$\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0 , \tag{4.55}$$

a qual possui a mesma forma que no espaço de Minkowski. É importante observar que, usando a identidade

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^\lambda{}_{\mu\nu} + K^\lambda{}_{\mu\nu} ,$$

o primeiro par das equações de Maxwell pode ser reescrito em termos da conexão de Levi-Civita apenas, resultando assim na versão riemanniana dessas equações [28]:

$$\overset{\circ}{\nabla}_\sigma F^{\tau\sigma} = 0 . \tag{4.56}$$

Como a identidade de Bianchi não depende da conexão, sua versão riemanniana coincide com a versão teleparalela (4.55). Em outras palavras, a identidade de Bianchi não é alterada pela presença de gravitação.

Capítulo 5

Conclusões

5.1 A Teoria de Kaluza-Klein Revisitada

Neste capítulo estaremos usando unidades com $\hbar = c = 1$. Em seu trabalho original, Kaluza estendeu a Relatividade Geral de Einstein a um espaço-tempo de cinco dimensões, ou seja, ele assumiu uma variedade (pseudo) riemanniana penta-dimensional R^5, dada pelo produto entre o espaço-tempo quadri-dimensional R^4 e o círculo S^1:

$$R^5 = R^4 \times S^1 \,.$$

A métrica γ_{AB} de R^5 é, em princípio, uma função das coordenadas x^μ de R^4, e da coordenada x^5 de S^1: $\gamma_{AB} = \gamma_{AB}(x^\mu, x^5)$. Como x^5 é uma coordenada periódica, então podemos escrever

$$x^5 = r\theta \,,$$

onde θ é a coordenada angular e r o raio de S^1. Portanto, cada componente da métrica γ_{AB} admite a seguinte expansão de Fourier:

$$\gamma_{AB} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_{AB}^{(n)}(x^\mu) \exp\left[inx^5/r\right] . \tag{5.1}$$

Tendo uma métrica em cinco dimensões, definimos uma conexão de Levi-Civita e um tensor de Riemann da mesma forma que em quatro dimensões [22]:

$$\Gamma^C{}_{AB} = \frac{1}{2}\gamma^{CD}(\partial_A\gamma_{DB} + \partial_B\gamma_{DA} - \partial_D\gamma_{AB}), \tag{5.2}$$

e

$$R^A{}_{BCD} = \partial_C\Gamma^A{}_{BD} + \Gamma^A{}_{EC}\Gamma^E{}_{BD} - (C \leftrightarrow D). \tag{5.3}$$

Kaluza assumiu então uma ação em cinco dimensões semelhante à ação de Einstein-Hilbert,

$$S_5 = -\frac{1}{16\pi G_5}\int d^5x\sqrt{-\gamma}\, R, \tag{5.4}$$

onde $\gamma = \det(\gamma_{AB})$, R é a curvatura escalar em cinco dimensões, e G_5 é a versão penta-dimensional da constante gravitacional de Newton. Dessa forma, obteve equações semelhantes às de Einstein,

$$R_{AB} - \frac{1}{2}\gamma_{AB}R = 0, \tag{5.5}$$

com R_{AB} o tensor de Ricci em cinco dimensões.

Uma forma conveniente de escrever a métrica γ_{AB} é

$$\gamma_{AB} = \left(\begin{array}{c|c} g_{\mu\nu} + k^2\phi^2 A_\mu A_\nu & k\phi^2 A_\mu \\ \hline k\phi^2 A_\nu & \phi^2 \end{array}\right), \tag{5.6}$$

onde $g_{\mu\nu}$ é a métrica em quatro dimensões, A_μ é o potencial eletromagnético e ϕ é um campo escalar.

Para obter as equações do campo gravitacional e eletromagnético, Kaluza impôs a condição cilíndrica

$$\frac{\partial \gamma_{AB}}{\partial x^5} = 0, \tag{5.7}$$

que corresponde a tomar apenas o termo com $n = 0$ na expansão (5.1). A condição (5.7) implica que o quinto eixo é preferencial. Substituindo (5.6) em (5.5), obtemos respectivamente para $AB = \mu\nu$, $AB = \mu 5$ e $AB = 55$

$$\overset{\circ}{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\overset{\circ}{R} = \frac{k^2\phi^2}{2}\theta_{\mu\nu} - \frac{1}{\phi}\left[\overset{\circ}{\nabla}_\mu(\partial_\nu\phi) - g_{\mu\nu}\Box\phi\right], \tag{5.8}$$

$$\overset{\circ}{\nabla}_\nu F_\mu{}^\nu = -3\frac{\partial^\nu\phi}{\phi}F_{\mu\nu} \tag{5.9}$$

e

$$\Box\phi = \frac{k^2\phi^3}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{5.10}$$

com $\overset{\circ}{R}_{\mu\nu}$ e $\overset{\circ}{R}$ respectivamente o tensor de Ricci e a curvatura escalar em quatro dimensões, $k = \sqrt{16\pi G}$, e $\theta_{\mu\nu}$ o tensor energia-momento do campo eletromagnético. Em seu trabalho original, Kaluza tomou $\phi = 1$, e dessa forma obteve as equações de Einstein-Maxwell

$$\overset{\circ}{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\overset{\circ}{R} = 8\pi G\theta_{\mu\nu}, \tag{5.11}$$

e

$$\overset{\circ}{\nabla}_\nu F_\mu{}^\nu = 0, \tag{5.12}$$

É importante mencionar que a condição $\phi = cte.$ leva a dificuldades já que vemos de (5.10) que ela implica em

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 0, \tag{5.13}$$

como foi primeiramente notado por Jordan [34, 35] e Thiry [36]. Esse problema, no entanto, é resolvido quando se leva em conta todos os harmônicos da expansão de Fourier.

Fazendo a integração da quinta dimensão na ação (5.4), e usando a condição (5.7), obtemos

$$S = -\int d^4x\sqrt{-g}\,\phi\left(\frac{1}{16\pi G}\overset{\circ}{R} + \frac{1}{4}\phi^2 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{2}{3k^2}\frac{\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi}{\phi^2}\right), \tag{5.14}$$

onde $g = \det(g_{\mu\nu})$ e G é a constante gravitacional de Newton, definida como

$$G = \frac{G_5}{\int dx^5}. \tag{5.15}$$

Tomando $\phi = 1$ em (5.14), obtemos a ação de Einstein-Maxwell:

$$S = -\int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{16\pi G}\overset{\circ}{R} + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right). \tag{5.16}$$

É interessante notar como a ação (5.4), invariante por transformações gerais de coordenadas em cinco dimensões, se reduz à ação (5.14), invariante por transformações gerais de coordenadas em quatro dimensões e por transformações de gauge abelianas. Outro fato importante é como as equações de campo sem fonte (5.5) fornecem equações de campo com fonte para a gravitação. Ou seja, matéria em quatro dimensões (radiação eletromagnética) surge da geometria de um espaço-tempo vazio em cinco dimensões.

Outra característica importante das teorias de Kaluza-Klein é que elas sempre dão origem a um campo escalar ϕ. Inicialmente, tentava-se eliminar esse campo. Hoje em dia isso parece menos urgente devido ao importante papel que campos escalares têm na quebra espontânea de simetrias de gauge. Além do mais, correções quânticas dariam massa ao campo ϕ, da ordem de 10^{-4}eV, que o tornaria indetectável e anularia seus efeitos gravitacionais de longo alcance [37, 38]. Um outro problema é explicar por que não percebemos a quinta dimensão. A explicação usual é que a quinta dimensão tem um comprimento da ordem do comprimento de Planck, isto é, 10^{-35}m, e por essa razão indetectável.

5.2 Comentários Finais

Diferentemente das teorias de Kaluza-Klein usuais, onde a unificação das interações gravitacional e de gauge é feita através da introdução de um Lagrangeano do tipo Einstein-Hilbert num espaço-tempo de dimensão (4+N), neste trabalho a gravitação é que passa a ser descrita como uma teoria de gauge. Ou seja, ao invés de obtermos as interações de gauge a partir de um Lagrangeano gravitacional em dimensão mais elevada, a interação gravitacional é que passa a ser descrita por uma teoria de gauge, e dessa forma colocada no mesmo pé de igualdade da interação eletromagnética.

Primeiramente, é importante observar que a unificação das Lagrangeanas eletromagnética e gravitacional restringe a métrica do espaço-tempo interno penta-dimensional a apenas duas formas. Se a convenção adotada para o espaço de Minkowski for $\eta_{ab} = \text{diag}(1,-1,-1,-1)$, então

$$\eta_{AB} = \text{diag}(1,-1,-1,-1,-1) ,$$

que é uma métrica com signatura $(4,1)$, e com a quinta dimensão apresentando característica espacial. Por outro lado, se a convenção adotada para o espaço de Minkowski for $\eta_{ab} = \text{diag}(-1,1,1,1)$, então

$$\tilde{\eta}_{AB} = \text{diag}(-1,1,1,1,1) ,$$

e o mesmo resultado é obtido: a métrica apresenta signatura $(4,1)$, e a quinta dimensão possui característica espacial. Vemos assim que as métricas com signatura $(3,2)$, nas quais a quinta dimensão teria característica temporal, estão excluidas. Um outro ponto importante a ser observado é que, a convenção adotada para a métrica de Killing do grupo $U(1)$, isto é, se $\eta_{55} = +1$ ou se $\eta_{55} = -1$, depende da convenção adotada para a métrica do espaço de Minkowski. Em outras palavras, a unificação dos campos eletromagnético e gravitacional introduz um vínculo entre as duas convenções de métrica existentes para o grupo $U(1)$ e para o espaço de Minkowski.

Assim como nas teorias de Kaluza-Klein, partindo da Lagrangeana "unificada" dos campos eletromagnético e gravitacional, pode-se obter a Lagrangeana da gravitação mais a Lagrangeana de Maxwell. No entanto, para se obter o sinal relativo apropriado entre elas, devemos escolher corretamente a métrica do espaço interno. Além disso, é necessário impor também uma condição sobre o parâmetro livre κ, cujo quadrado resulta ser da ordem da relação entre as forças elétrica e gravitacional [39]:

$$\kappa^2 \propto \frac{e^2}{Gm^2} \approx 10^{40} . \tag{5.17}$$

Portanto, da Eq.(3.15), temos que

$$u^5 \approx \mp 10^{20} , \tag{5.18}$$

ou seja

$$u_A u^A = \pm 1 \mp 10^{40} \approx \mp 10^{40} ,$$

com o sinal $-$ $(+)$ válido para a métrica η_{AB} $(\tilde{\eta}_{AB})$.

Este valor tão alto vem do fato da força elétrica ser muito mais forte do que a força gravitacional. É importante mencionar que, como não existe uma tetrada relacionada ao setor eletromagnético da teoria, u^5 não pode ser projetada no espaço-tempo, não sendo portanto uma velocidade física.

Recentemente, diversos modelos de Kaluza-Klein em espaços-tempos de Weitzenböck têm sido propostos [40, 41]. Esses modelos se baseiam na teoria gravitacional formulada por Hayashi e Shirafuji [24], a qual atribui gravitação à torção. No entanto, assim como em Kaluza-Klein, esses modelos também assumem um espaço-tempo de cinco dimensões para fazer a unificação. Consequentemente, eles apresentam um conjunto de cinco vetores ortonormais linearmente independentes que são transportados paralelamente, com os quatro primeiros vetores sendo as tetradas usuais da gravitação, e o quinto vetor sendo o potencial eletromagnético A_μ. Esses modelos, entretanto, diferem substancialmente do modelo aqui proposto. Uma diferença importante é o fato do nosso modelo não dar origem a um campo escalar ϕ. Uma outra diferença importante é que a introdução de uma quinta dimensão se dá no espaço "tangente" (espaço interno) apenas, e não no espaço-tempo, o qual continua tendo quatro dimensões. Este fato está de acordo com a não existência de tetradas relacionadas com o setor eletromagnético. De fato, caso existisse uma tetrada relacionada à esse setor, o espaço-tempo teria também que adquirir uma dimensão extra. A introdução desta quinta dimensão ao espaço interno leva naturalmente a um modelo de gauge translacional em cinco dimensões, com o tensor intensidade do campo eletromagnético aparecendo como a quinta componente da torção. De acordo com esse formalismo, a trajetória de uma partícula carregada sob a ação de campos eletromagnético e gravitacional é descrita por uma equação de força análoga à força de Lorentz, reforçando assim a idéia de que, ao contrário da curvatura, a torção age sobre uma partícula da mesma forma como o campo eletromagnético age sobre uma carga, isto é, como uma força.

Referências

[1] G. Nordström, Phys. Zeitsch. **13**, 1126 (1912); Ann. d. Physik **40**, 872 (1913); **42**, 533 (1913).

[2] G. Nordström, Phys. Zeitsch. **15**, 504 (1914).

[3] H. Weyl, *Gravitation und Elektrizität.* Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin, 465-480 (1918).

[4] Th. Kaluza, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Klasse 966 (1921).

[5] O. Klein, Z.F. Physik **37**, 895 (1926).

[6] H. Mandel, Z.F. Physik **39**, 136 (1926).

[7] A. Einstein and W. Mayer, Preuss. Akad., 541 (1931), 130 (1932).

[8] A. Einstein and P. Bergmann, Ann. Math. **39**, 683 (1938).

[9] A. Einstein, V. Bargmann and P. Bergmann, Theodore von Kármán Anniversary Volume, 212 (Pasadena, 1941).

[10] A. Einstein and W. Pauli, Ann. Math. **44**, 131 (1943).

[11] Y. Thiry, J. Math. Pure Appl. **30**, 275 (1951).

[12] J. M. Souriau, Nuovo Cimento **30**, 565 (1963).

[13] W. Thirring, Acta Phys. Austriaca Suppl. **IX**, 256 (1972).

[14] B. DeWitt, *Dynamical Theory of Groups and Fields*, (Gordon and Breach, 1965).

[15] R. Kerner, Ann. Inst. Henri Poincaré **9**, 143 (1968).

[16] A. Trautman, Rep. Math. Phys. **1**, 29 (1970).

[17] Y. M. Cho, J. Math. Phys. **16**, 2029 (1975).

[18] Y. M. Cho and P. G. O. Freund, Phys. Rev. D **12**, 1711 (1975).

[19] Y. M. Cho and P. S. Jang, Phys. Rev. D **12**, 3789 (1975).

[20] L. N. Chang, K. I. Macral and F. Mansouri, Phys. Rev. D **13**, 235 (1976).

[21] T. Appelquist, A. Chodos and P. G. O. Freund, *Modern Kaluza-Klein Theories*, (Addison-Wesley, Reading, 1987).

[22] J. M. Overduin and P. S. Wesson, Phys. Rep. **283**, 303 (1997).

[23] L. O'Raifeartaigh and N. Straumann, *Early History of Gauge Theories and Kaluza-Klein Theories* (hep-ph/9810524).

[24] K. Hayashi and T. Shirafuji, Phys. Rev. D **19**, 3524 (1979).

[25] V. C. de Andrade and J. G. Pereira, Phys. Rev D **56**, 4689 (1998).

[26] C. Kohler, *Einstein-Cartan-Maxwell Theory with Scalar Field through a Five Dimensional Unification* (gr-qc/9808004).

[27] Ver, por exemplo: P. Ramond, *Field Theory: a Modern Primer* (Benjamin & Cummings, Reading, 1981).

[28] V. C. de Andrade and J. G. Pereira, Int. J. Mod. Phys. D **8**, 141 (1999).

[29] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields* (Pergamon Press, Oxford, 1975).

[30] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation*, (Freeman, New York, 1973).

[31] D. I. Olive, *Lectures on Gauge Theories and Lie Algebras*, University of Virginia, 1982 (notes taken by G. Bhattacharya and N. Turok).

[32] Ver, por exemplo: S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972).

[33] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, *An Introduction to Geometrical Physics* (World, Singapore, 1995).

[34] P. Jordan, Ann. Phys. (Leipzig) **1**, 219 (1947).

[35] P. Bergmann, Ann. Math. **49**, 255 (1948).

[36] Y. Thiry, Comptes Rendus Acad. Sci. (Paris) **226**, 216 (1948).

[37] A. Chodos, Comments Nucl. Part. Phys. **13**, 171 (1984).

[38] E. Witten, Nucl. Phys. B **186**, 412 (1981).

[39] J. V. Narlikar, *Introduction to Cosmology* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995).

[40] D. Schütze, J. Math. Phys. **26**, 2596 (1985).

[41] X. J. Lee and Y. L. Wu, Phys. Lett. A **165**, 303 (1992).