UNESP - Universidade Estadual Paulista

FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

Departamento de Engenharia Elétrica

MODELAGEM E CONTROLE DE SISTEMAS FUZZY TAKAGI-SUGENO

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista - UNESP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

por

Erica Regina Marani Daruichi Machado

Mestre em Engenharia Elétrica — FEIS/UNESP

Orientador:	**Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira**	FEIS/UNESP
Co-Orientador:	**Prof. Dr. Edvaldo Assunção**	FEIS/UNESP

Banca Examinadora

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira	FEIS/UNESP
Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres	FEEC/UNICAMP
Prof. Dr. Wagner Caradori do Amaral	FEEC/UNICAMP
Prof. Dr. José Paulo Fernandes Garcia	FEIS/UNESP
Prof. Dr. Aparecido Augusto Carvalho	FEIS/UNESP

Novembro de 2003.

Ao meu esposo Eduardo,
aos meus sobrinhos Kauana e Luis
e à memória de minha mãe, Maria.

“ O mais nobre emprego da mente humana é o estudo das obras de seu Criador.”
Do livro “A vós confio”, (atribuído a Akhenaton).

Agradecimentos

Agradeço a Deus, fonte de tudo.

Ao meu marido, amigo e companheiro, Eduardo, pelo apoio em todos os momentos. Aos meus sobrinhos Kauana e Luis, que ao longo desta jornada tornaram-se nossos "filhos" e pela fonte de alegria que são e aos meus pais e irmãs por tudo que eles representam e representaram para mim.

Ao Prof. Marcelo, pela orientação e pelos ensinamentos humanos e científicos, e sua esposa, Vera, pela paciência e compreensão desprendida durante todos estes anos. E a ambos pela atenção e conselhos pessoais dados nos momentos difíceis.

Sou grata também ao Prof. Edvaldo Assunção pela co-orientação, apoio e pelos conselhos muito valiosos.

À Prof. Neusa, pela amizade e apoio.

Ao técnico Deoclécio, por sua invariável disposição e boa vontade em auxiliar-me, às pessoas que durante esses anos trabalharam comigo e aos demais colegas, professores e funcionários, cujos nomes não citarei, pelo motivo já consagrado do possível esquecimento de alguns, e todos que direta ou indiretamente, consciente ou inconscientemente, contribuíram para a concretização deste trabalho, sintam-se contemplados pelos meus sinceros agradecimentos impregnados com a mais pura honestidade.

Finalmente, à CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Este trabalho aborda o problema de modelagem e controle de uma classe de sistemas não-lineares através dos modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno (TS).

Primeiramente são apresentados dois métodos de modelagem existentes na literatura. O primeiro é um método de modelagem exata e o segundo, baseado em modelos locais ótimos, é utilizado em todos os desenvolvimentos desta tese.

A seguir é proposto um novo método para se obter os modelos locais, baseado em Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs-Linear Matrix Inequalities), utilizando os modelos locais ótimos com novos graus de liberdade e que permitem uma melhor aproximação local do sistema.

Novas funções de pertinência, que servem para combinar os modelos locais, são obtidas a partir da solução de um problema de otimização (um dos métodos para obter a solução é baseado em LMIs), que tem como objetivo minimizar a norma Euclidiana do erro entre o modelo Takagi-Sugeno e a planta.

Um algoritmo para determinar quantos e quais modelos locais devem ser utilizados na aproximação, considerando o máximo erro de modelagem permitido, é desenvolvido. Este algoritmo tem como parâmetro o erro de modelagem. Um exemplo ilustrativo deste algoritmo é apresentado.

Utilizando a modelagem proposta foram desenvolvidos dois novos métodos de projetos de reguladores fuzzy, baseados em LMIs, que consideram o erro de modelagem. No primeiro projeto é utilizado um conjunto de pontos na região de operação considerando somente as componentes do vetor de estado que fazem parte das não-linearidades do sistema e os erros de aproximação das funções nestes pontos. No segundo projeto é utilizada a máxima norma Euclidiana do erro obtido no ponto onde a aproximação é mais deficiente. Estes métodos permitem a construção de modelos fuzzy Takagi-Sugeno, em termos do número de modelos locais, quando comparados com os métodos descritos na literatura.

As técnicas de projeto propostas também permitem a especificação do transitório através da taxa de decaimento e a especificação de restrições nos sinais de controle e nas saídas.

O projeto e a simulação do controle de um pêndulo invertido ilustram os métodos estudados. É apresentada uma comparação entre os métodos de modelagem e controle propostos e o método de aproximação exata, nos quais os métodos desenvolvidos apresentaram controladores mais simples e, em geral, com melhores desempenhos.

Abstract

This work considers the problem of modeling and designing of a class of nonlinear systems represented by Takagi-Sugeno (TS) fuzzy models.

Initially, two methods of modeling described in the literature are presented. The first one, is a method of exact modeling and the second one, based on optimal local models, is utilized in all development in this thesis.

A new method, based on LMIs (Linear Matrix Inequalities), to obtain better local models using new degrees of freedom is proposed.

New membership functions, that combine the local models, are obtained starting from an optimization problem (one method is based on LMIs), that has as the end to minimize the Euclidian norm of the error between the Takagi-Sugeno fuzzy models and the plant model.

An algorithm to find the number of local models, their operation points and matrices, considering the maximum modeling erros allowed, is presented. This algorithm has as parameter the modeling error and it is illustrated by an example.

Taking into account the proposed modeling methods, two new methods of fuzzy regulator designs based on LMIs were proposed, considering the modeling errors.

In the first design a set of points in the region of operation is used considering only the components of the state vector that compound the non-linearities of the system and the modeling error in these points.

The second design method used the largest value of the Euclidian norm of the modeling error. These methods allow the construction of reduced TS fuzzy models, in terms of the number of local models, when compared with the methods described in the literature. The specification of the decay rate, constraints on control input and output are also described by LMIs.

The design and simulations of the new control laws for an inverted pendulum illustrate the studied methods. A comparison between the new design methods and the method of exact modeling showed that the proposed methods allowed simpler controllers and, in general, better performance.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Siglas e Abreviações

- **BMIs:** Bilinear Matrix Inequalities (Desigualdades Matriciais Bilineares).
- **CDP:** Parallel Distributed Compensation (Compensação Paralela Distrubída).
- **EMF:** Electromotive Force (Força Eletromotriz).
- **IØ:** Input-Output (Entrada-Saída).
- **LMI:** Linear Matrix Inequalities (Desigualdades Matriciais Lineares).
- **MISO:** Multi Input and Single Output (Múltiplas entradas e Uma Saída).
- **TS:** Takagi e Sugeno.
- **TSK:** Takagi, Sugeno e Kang.
- **PID:** Proportional, Integral and Derivative Controller (Controlador Proporcional, Integral e Derivativo).

Capítulo 1

Introdução

Nos últimos anos, houve um crescente interesse em pesquisas de teoria e aplicações de sistemas nebulosos, mais conhecidos como sistemas *fuzzy*. Este interesse se deve à similaridade destes sistemas com o comportamento humano na solução de problemas complexos. Assim, os sistemas *fuzzy* permitem que o projetista utilize o seu conhecimento experimental para elaborar o projeto de controle do seu sistema.

Se observarmos nossas atitudes do cotidiano, verificaremos facilmente que somos constantemente conduzidos a tomar várias decisões para resolver os mais variados tipos de problemas. Em geral, as decisões são feitas em função de algum aprendizado adquirido com experiências anteriores, muitas vezes, similares. Entretanto, podemos ser submetidos a situações inusitadas ou pouco convencionais, que podem nos deixar com dúvidas, incertos sobre qual atitude devemos tomar. Então, embora não tenhamos absoluta certeza, temos que tomar decisões que são elaboradas a partir de uma interação de aprendizados que foram adquiridos anteriormente, em situações diferentes, mas que sejam as mais próximas da situação em questão.

Os sistemas reais, em geral, são complexos e esta complexidade surge de incertezas na forma de ambigüidades. Problemas característicos de complexidade e ambigüidade são tratados de forma subconsciente pelos humanos na solução de vários problemas sociais, técnicos, biológicos e emocionais. Multidimensionalidade, estruturas hierárquicas, interações mútuas, mecanismos de realimentação e dinâmicas imprevisíveis são apenas parte das características de tais sistemas complexos.

Analisando o comportamento humano diante de problemas, no início dos anos 60, pesquisadores começaram a questionar se o conceito de incertezas, ambigüidades e o conhecimento humano poderiam ser utilizados para completar a descrição e compreensão de sistemas reais complexos.

Baseado nestes princípios, em 1965, Lotfi A. Zadeh introduziu a teoria *fuzzy* (cuja tradução em português é nebulosa ou difusa). Em seu artigo "*Fuzzy Sets*", (Zadeh, 1965) ele formalizou suas idéias sobre uma nova ferramenta matemática que utiliza conhecimento e incertezas sem descrevê-las em termos de probabilidade. A proposta de Zadeh era modelar o mecanismo do pensamento humano, com valores lingüísticos em lugar de números, levando estes valores para a teoria de sistemas e desenvolver uma nova classe de sistemas denominada *sistemas fuzzy*.

Duas razões principais motivam o estudo da teoria *fuzzy*. A primeira é que esses sistemas conjugam a capacidade de processar informação de natureza incerta ou qualitativa com a capacidade de aproximação universal (Campello (2002); Kosko (1997)). A precisão com que os sistemas *fuzzy* podem aproximar sistemas reais pode ser, em geral, estipulada pelo projetista.

A segunda razão está relacionada com a existência de vários modelos existentes, adequados a diferentes tipos de aplicação, indo dos modelos lingüísticos na modelagem de um determinado sistema, aos modelos Takagi-Sugeno (TS), com estruturas adequadas para aplicações em controle. As contribuições desta tese concentram-se nos modelos *fuzzy* TS e estão relacionadas à aproximação e controle de sistemas não-lineares.

O primeiro tema abordado é a interpretação e representação dos modelos TS e suas principais aplicações. Neste contexto procurou-se estudar o modelo TS e algumas de suas características intrínsecas.

Uma outra ferramenta matemática, as LMIs (*Linear Matrix Inequalities*, cuja tradução para o português é Desigualdades Matriciais Lineares) (Boyd et al., 1994), tem sido amplamente difundida em sistemas de controle. Muitos problemas de controle como as análises de estabilidade e o projeto, especificando, por exemplo, restrições nas entradas e saídas, taxa de decaimento e robustez, podem ser reduzidos a problemas descritos por LMIs. Numericamente, os problemas de LMIs podem ser resolvidos eficientemente por meio de algumas ferramentas poderosas disponíveis na literatura de programação matemática (Boyd et al., 1994). Desta forma, encontrar a solução para problemas descritos por LMIs é equivalente a encontrar a solução para o problema original. Esta ferramenta será utilizada na solução de todos os tópicos abordados neste trabalho.

A habilidade para controlar um sistema em um ambiente incerto ou impreciso é uma das características mais importantes de qualquer sistema de controle inteligente. Mas, normalmente, para que um sistema seja controlado, é necessária a sua descrição por um modelo matemático, denominado "modelo de simulação". O modelo de simulação será utilizado nas simulações para verificar o desempenho do controlador projetado, no nosso caso um regulador, e deve incluir todas as características relevantes do processo. Normalmente o modelo de simulação é complexo para o projeto de sistemas de controle. Assim, necessita-se de um modelo simplificado, denominado “modelo de simulação” (Friedland (1996), Pietrobom (1999)). O modelo de projeto deve capturar as características essenciais do processo. Quando a planta do sistema é desconhecida, é necessário utilizar um processo de identificação dos parâmetros (Teixeira et al. (1996); Teixeira et al. (1998); Teixeira, Daruichi e Assunção (2000); Ioannou e Sun (1996)). Nesta tese serão estudados apenas sistemas com plantas não-lineares cujos modelos matemáticos são disponíveis.

A técnica mais comum para a obtenção de um modelo de projeto para plantas não-lineares é sem dúvida a linearização da planta em um ponto de operação de interesse. Com este método o modelo de projeto é em geral um sistema linear invariante no tempo, o projeto de reguladores é relativamente simples em muitos casos e a teoria é bastante desenvolvida, como, por exemplo, as técnicas baseadas no *root locus*, diagramas de Bode e Nyquist e na descrição através de variáveis de estado (Ogata (1997); Teixeira, Assunção e Daruichi (2003); Chen (1999), Teixeira, Assunção e Avellar (2003)) . Entretanto, este modelo de projeto descreve bem a dinâmica do sistema somente em uma certa vizinhança em torno do ponto de operação no qual o sistema foi linearizado. Assim, nos casos onde o sistema pode operar em regiões distantes do ponto de operação, este modelo de projeto não é, em geral, adequado. Neste caso deve-se adotar um modelo de projeto mais sofisticado, que considere adicionalmente a dinâmica da planta em regiões distantes do ponto de operação mencionado. Os modelos *fuzzy* TS (Takagi e Sugeno (1985), Sugeno e Kang (1988)) podem facilmente solucionar este problema. A idéia destes modelos consiste da descrição aproximada de um sistema não-linear como a combinação de um certo número de modelos lineares (ou afins) invariantes no tempo locais, que descrevem aproximadamente o comportamento deste sistema em diferentes pontos do seu espaço de estados. Desta forma, pode-se interpretar a técnica tradicional de linearização em apenas um ponto de operação como um caso particular dos modelos *fuzzy* TS, consistindo apenas de um modelo local. Neste trabalho o modelo de projeto será obtido através do modelo *fuzzy* TS com modelos locais lineares.

Uma fórmula para a obtenção dos modelos locais foi desenvolvida em Teixeira e Żak (1999). Com esta fórmula é possível obter resultados mais atraentes que a técnica de linearização, pois apresenta uma melhor aproximação do modelo *fuzzy* com respeito ao modelo de simulação. Alguns pesquisadores têm utilizado esta fórmula para obter as aproximações *fuzzy* de sistemas como, por exemplo, Zheng, no projeto de um controlador PI robusto para uma turbina termoelétrica (Zheng et al., 2001), Bergsten, no projeto de observadores *fuzzy*

(Bergsten et al., 2002), Cao e Frank, no controle de um processo químico com atraso de transporte (Cao e Frank, 2000) e Kim, no controle de um pêndulo invertido, utilizando sistemas *fuzzy Singleton* (Kim, 2001). A fórmula também tem sido empregada em sistemas não-lineares que não utilizam modelos *fuzzy* como em Guo et al. (2000), para rastreamento de órbitas de sistemas caóticos.

Esta tese propõe um novo método para determinar os modelos locais baseado na técnica de Teixeira e Żak (1999). Estes modelos possuem novos graus de liberdade e são obtidos a partir da solução de um problema de otimização baseado em LMIs.

Uma das principais contribuições deste trabalho refere-se às funções de pertinência *fuzzy*. Estas funções, utilizadas para combinar os modelos locais, têm papel fundamental no desenvolvimento do projeto de controle, pois são elas que determinam, dados os modelos locais, a forma de aproximação do modelo *fuzzy* com relação ao modelo de simulação. As principais funções de pertinência utilizadas são as triangulares, trapezoidais e em forma de sino (gaussiana) (veja Wang (1997), Yager e Filev (1994), Ross (1995)). Os parâmetros destas funções dependem do conhecimento do projetista sobre o comportamento do sistema ou podem ser obtidas por um processo de identificação. Entretanto, muitas vezes, determinar as funções e os parâmetros que melhor se ajustam ao sistema, nem sempre é uma tarefa trivial. Uma forma sistemática para determinar as funções de pertinência *fuzzy* é proposta. Estas funções são obtidas a partir de um problema de otimização que tem por objetivo minimizar o erro entre a aproximação *fuzzy* e o modelo de simulação (Teixeira et al. (2002a), Teixeira et al. (2002b)). A única informação necessária a *priori* são os modelos locais.

Outro tema importante abordado no trabalho refere-se à questão do erro de modelagem, que ocorre nas aproximações. Neste desenvolvimento, o erro de modelagem é um fator determinante, pois ele define o número de modelos locais utilizados e suas localizações. Uma aproximação suficiente ou desejada para efetuar o projeto de um sistema de controle está relacionada com o erro de modelagem, pois quanto maior o número de modelos locais, melhor a aderência do modelo *fuzzy* ao modelo de simulação e menor se torna o erro. O número de regras ou de modelos locais necessários para representar um sistema com determinada precisão pode se tornar excessivamente grande em função do aumento do número de entradas deste sistema. Esse problema é um dos principais obstáculos à aplicação desses modelos em sistemas de grande porte. A importância de se obter modelos *fuzzy* TS com poucos modelos locais é a facilidade de implementação no projeto de controladores. Logo, a principal motivação deste trabalho foi obter uma modelagem que propicie uma aproximação cujo erro seja suficientemente pequeno para satisfazer as condições exigidas no projeto e/ou implementação de sistemas de controle (nesta tese serão considerados reguladores).

Taniguchi e seus colaboradores apresentaram um método de representação exata de sistemas *fuzzy* com LMIs em Taniguchi et al. (2001). O método proporciona uma aproximação exata do sistema dentro de uma região de operação, utilizando 2^s regras, sendo que "s" é o número de funções não-lineares presentes no sistema. Os modelos locais são obtidos a partir dos valores máximos e mínimos das funções. As funções de pertinência são obtidas utilizando os modelos locais e as funções não-lineares. Um método de redução de regras é proposto para tentar minimizar o problema de dimensionamento. O erro de modelagem gerado nesta redução é tratado como incertezas na planta e é considerado no projeto do controlador. Mesmo com a redução proposta pelos autores, o número de regras pode ser excessivamente grande em alguns casos. Este método será utilizado para comparar o desempenho da metodologia proposta nesta tese.

A área de controle de sistemas *fuzzy* é um dos ramos mais ativos e que tem gerado diversas linhas de pesquisa. Durante a última década o controle *fuzzy* tem atraído grande atenção e muitas aplicações têm sido feitas, por exemplo, na análise de novos sistemas de controle para automóveis (Will et al., 1997), no controle de elevadores de alta velocidade (Tanaka, Nishimura e Wang, 1998), na detecção e isolamento de falhas (Ichtev et al., 2001) e no controle de helicópteros (Kadmiry e Driankov (2001), Tanaka et al. (2001). É uma das mais úteis aproximações para se utilizar o conhecimento qualitativo de um sistema e projetar um regulador, mas muitas questões permanecem para discussões adicionais. A análise da estabilidade é um dos conceitos mais importantes em sistemas de controle *fuzzy*. É possível projetar teoricamente um regulador *fuzzy* se for disponível um bom critério para a análise da estabilidade, adequado a estes sistemas. Recentemente muitos esforços têm sido feitos nesta área (Tanaka e Sugeno, 1992), (Tanaka e Sano, 1994a), (Cao et al., 1997a), (Cao et al., 1997b), (Tanaka, Ikeda e Wang, 1998a), (Kim e Lee, 2000), (Teixeira, Assunção e Pietrobom, 2001), (Teixeira, Assunção e Avellar, 2001) . Esta tese trata das questões de estabilidade e projeto de reguladores *fuzzy* e propõe dois novos métodos de projeto. São apresentados estudos e condições suficientes para a estabilidade de sistemas e projeto de reguladores *fuzzy* utilizando o método direto de Lyapunov. O erro de modelagem obtido nas aproximações é considerado nos projetos e nas análises de estabilidade. Desta forma, os métodos propostos oferecem alternativas atraentes e rigorosas para o projeto metódico de reguladores para uma classe de sistemas não-lineares.

Os métodos de projetos baseados em LMIs para reguladores *fuzzy* são construídos usando a Compensação Paralela Distribuída (CDP) (Tanaka e Sugeno, 1992), (Wang et al., 1996).

Um sistema não-linear, conhecido como pêndulo invertido, é o exemplo base utilizado para ilustrar todos os tópicos desenvolvidos.

1.1 Sistemas Fuzzy: Breve Histórico

Inicialmente, a teoria *fuzzy* foi tema de muitas discussões entre pesquisadores, pois matemáticos com especialização em estatística e probabilidade afirmavam que os problemas que poderiam ser resolvidos com a teoria *fuzzy* seriam igualmente resolvidos utilizando a teoria da probabilidade. Com isto, nenhuma aplicação prática real foi iniciada e ficou difícil defender a nova teoria de um ponto de vista puramente filosófico.

Embora a teoria não tenha se tornado popular, no final dos anos 60 muitos pesquisadores começaram a se dedicar a este novo campo de forma independente e novos métodos *fuzzy* foram propostos.

Depois de seu trabalho introdutório de conjuntos *fuzzy* em 1965, Zadeh propôs os conceitos dos algoritmos *fuzzy* em 1968 (Zadeh, 1968), a elaboração de decisões *fuzzy* em 1970 (Bellman e Zadeh, 1970) e o ordenamento *fuzzy* em 1971 (Zadeh, 1971).

Em 1973, Zadeh estabeleceu a base para a teoria de controle *fuzzy* (Zadeh, 1973) introduzindo o conceito de variáveis lingüísticas e propondo o uso de regras *fuzzy* Se-Então para formular o conhecimento humano.

Dez anos após a introdução da teoria *fuzzy*, Mamdani e Assilian estabeleceram a estrutura básica de controladores *fuzzy* e controlaram uma máquina a vapor com um controlador *fuzzy* (Mamdani e Assilian, 1975). Depois, em 1978, os controladores *fuzzy* foram utilizados pela primeira vez em um processo industrial completo, o controle *fuzzy* de um forno de cimento. Estas aplicações mostraram que o campo era promissor.

Entretanto, ao contrário do esperado, na década de 70 e 80 o progresso neste campo foi muito lento. Poucos conceitos novos e abordagens foram propostos neste período, porque poucos pesquisadores se dedicaram à pesquisa deste assunto.

Foram as aplicações de controle *fuzzy* feitas principalmente pelos engenheiros japoneses que mantiveram a pesquisa na área. Eles descobriram que os controladores *fuzzy* são muito fáceis de serem projetados e são úteis na solução de diversos problemas industriais.

Em 1980, Sugeno começou a criar a primeira aplicação *fuzzy* no Japão: o controle de um purificador de água. Em 1983, iniciou o trabalho pioneiro de um robô com controle *fuzzy* para o estacionamento de carros (Sugeno e Nishida, 1985). No início dos anos 80 Yasunobu e Miyamoto começaram um projeto do controle *fuzzy* do metrô de Sandai (Yasunobu e

Miyamoto, 1985). Este projeto foi concluído em 1987 e se tornou o mais avançado sistema de metrô da Terra (Yasunobu et al., 1987). Logo após a conclusão deste trabalho, foi realizada a segunda conferência internacional de sistemas *fuzzy* em Tókio. Hirota e seus colaboradores (Hirota et al., 1989) apresentaram, em uma conferência, o controle *fuzzy* de um braço de um robô que jogava Ping-Pong em tempo real e Yamakawa demonstrou um sistema de controle *fuzzy* de um pêndulo invertido (Yamakawa, 1989).

Depois deste evento, o interesse por sistemas *fuzzy* aumentou e, no início dos anos 90, vários produtos baseados em sistemas *fuzzy* apareceram no mercado. Inicialmente as aplicações de controle *fuzzy* foram em processos industriais, chuveiros, máquinas de lavar, limpadores a vácuo, filmadoras, máquinas fotográficas e condicionadores de ar. Estes e outros produtos deram à teoria de lógica *fuzzy* uma maior projeção na área de controle e estimulou a exploração de suas aplicações em muitas outras áreas.

O sucesso de sistemas *fuzzy* no Japão surpreendeu a comunidade científica dos Estados Unidos e da Europa. Alguns cientistas ainda criticaram a teoria *fuzzy*, mas muitos outros mudaram sua forma de pensar e passaram a analisar a teoria *fuzzy* com mais seriedade. Em 1992, a primeira conferência de sistemas *fuzzy* internacional do IEEE aconteceu em San Diego, simbolizando a aceitação da teoria *fuzzy* pela maioria dos engenheiros do IEEE. Em 1993, o periódico IEEE Transactions on Fuzzy Systems foi inaugurado.

Muitos trabalhos foram publicados a partir de 1990. A partir de 1996 foram publicados os primeiros trabalhos de projeto de sistemas *fuzzy* com LMIs. Eles têm permitido um sólido progresso de alguns problemas fundamentais em sistemas *fuzzy* e controle. Por exemplo, para a determinação das funções de pertinência e rigorosas análises de estabilidade de sistemas de controle *fuzzy*. Apesar dos grandes avanços obtidos, muita pesquisa permanece para ser feita.

1.2 Organização e Contribuições

A organização dos capítulos subseqüentes junto às suas principais contribuições é descrita abaixo:

- Capítulo 2: **Sistemas Fuzzy e Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno:** apresenta uma compilação bibliográfica sobre os sistemas *fuzzy* Takagi-Sugeno, nos quais se baseia o presente trabalho. São discutidas as características destes sistemas e é apresentada uma análise gráfica. A principal contribuição do capítulo é a descrição bibliográfica abrangente do modelo *fuzzy* em questão.

- Capítulo 3: **Modelos Locais Fuzzy:** refere-se ao problema de modelagem de sistemas complexos através dos modelos *fuzzy* TS. São apresentadas duas técnicas para a determinação dos modelos locais existentes na literatura e é proposta uma nova forma para a obtenção dos modelos locais com um novo grau de liberdade. Principal contribuição:

  1. Desenvolvimento de um novo método para determinar os modelos locais com um novo grau de liberdade. Exemplos ilustram a melhoria na modelagem local que este método pode proporcionar.

- Capítulo 4: **Funções de Pertinência e Modelagem:** Aborda a questão das funções de pertinência. Apresenta-se uma metodologia para determinar um novo conjunto de funções. Define-se o erro de modelagem obtido com aproximação do modelo de projeto com o modelo de simulação. Um algoritmo é elaborado para determinar os modelos locais e as regras *fuzzy* a partir do erro de modelagem. Principais contribuições:

  1. Desenvolvimento de uma nova metodologia para determinar as funções de pertinência *fuzzy* através de problemas de otimização cujas soluções podem ser obtidas de forma analítica ou baseadas em LMIs;
  2. Definição de dois tipos de erro de modelagem, obtidos com as aproximações. O primeiro erro, obtido com as aproximações das funções, é utilizado nos projetos dos controladores. O segundo erro é obtido a partir de um problema de otimização que visa minimizar a norma do erro das funções. Ele é utilizado como critério para determinar a localização dos modelos locais.
  3. Comparação com técnicas existentes na literatura. Exemplos mostram que o método proposto pode modelar sistemas dinâmicos com um número reduzido de modelos locais, quando comparados com métodos descritos na literatura.

- Capítulo 5: **Projeto de Controle:** trata da estabilidade, taxa de decaimento, e restrições na entrada e na saída de sistemas e projeto de reguladores com sistemas *fuzzy* TS. São propostos dois métodos de projeto baseados nas funções de Lyapunov. O erro de modelagem é inserido no projeto dos reguladores. Principais contribuições:

  1. Desenvolvimento de novos métodos de projeto de reguladores utilizando modelos *fuzzy* TS. No primeiro método, os reguladores são projetados considerando um conjunto de pontos no espaço de estados e os erros de aproximação para cada

ponto deste conjunto. No segundo método, o projeto considera a norma do erro máximo obtido nas aproximações.

2. Comparações com um método de modelagem exata, existente na literatura.

- Capítulo 6: **Conclusões e Perspectivas:** apresenta as conclusões e perspectivas para trabalhos futuros.

Esta introdução foi inspirada em Campello (2002), Wang (1997), Ross (1995), Yager e Filev (1994) e Pietrobom (1999).

Capítulo 2

Sistemas Fuzzy e Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno

2.1 Introdução

A principal característica de um sistema *fuzzy* é o conhecimento condicionado por regras *fuzzy* Se-Então. Uma regra *fuzzy* Se-Então é uma declaração na qual algumas palavras são descritas por funções contínuas, conhecidas como funções de pertinência. O *Modelo Lingüístico* é um modelo *fuzzy* proposto por Tong e é constituído por um conjunto de regras Se-Então (Tong, 1978). Este modelo é utilizado para identificar sistemas a partir de um conjunto de dados de suas entradas e saídas. O formato de uma regra do Modelo Lingüístico possui uma parte premissa e uma parte conseqüente do tipo:

$$\begin{array}{llll} \text{Se} & x & \text{é} & A \quad \text{(premissa)}, \\ \text{Então} & y & \text{é} & B \quad \text{(conseqüente)}, \end{array} \tag{2.1}$$

sendo x e y as variáveis de entrada e saída, respectivamente, e A e B são termos lingüísticos associados aos conjuntos *fuzzy* que descrevem lingüisticamente essas variáveis. Para um dado valor de entrada, a saída correspondente é calculada a partir do conjunto de regras através de um método de inferência.

2.1.1 Sistemas Fuzzy

Em geral há três tipos de sistemas *fuzzy* encontrados na literatura (Wang, 1997): sistemas *fuzzy* puro, sistema *fuzzy* com fuzzificador e defuzzificador e sistemas *fuzzy* TS. Estes sistemas serão rapidamente descritos a seguir.

Sistemas fuzzy puros

A Figura 2.1 ilustra a configuração básica do sistema *fuzzy* puro:

As regras *fuzzy* representam um conjunto de regras Se-Então. A inferência *fuzzy* combina

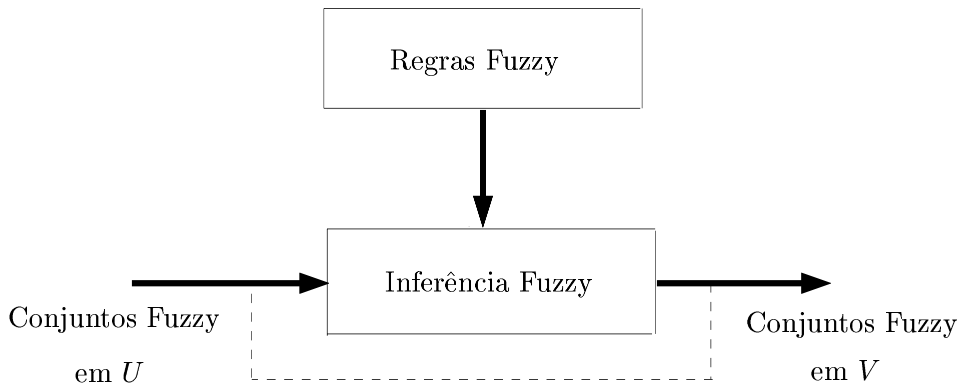

Figura 2.1: Configuração básica dos sistemas *fuzzy* puros.

estas regras *fuzzy* Se-Então em um mapeamento dos conjuntos *fuzzy* no espaço de entrada $U \subset R^n$ para conjuntos *fuzzy* no espaço de saída $V \subset R$ baseado nos princípios de lógica *fuzzy*. Se a linha tracejada na Figura 2.1 existir, o sistema passa a ser denominado sistema *fuzzy* dinâmico.

O principal característica do sistema *fuzzy* puro é que suas entradas e saídas são conjuntos *fuzzy*, isto é, palavras em linguagem natural.

Sistemas com fuzzificador e defuzzificador

A Figura 2.2 ilustra a configuração básica do sistema *fuzzy* de sistemas com fuzzificador e defuzzificador:

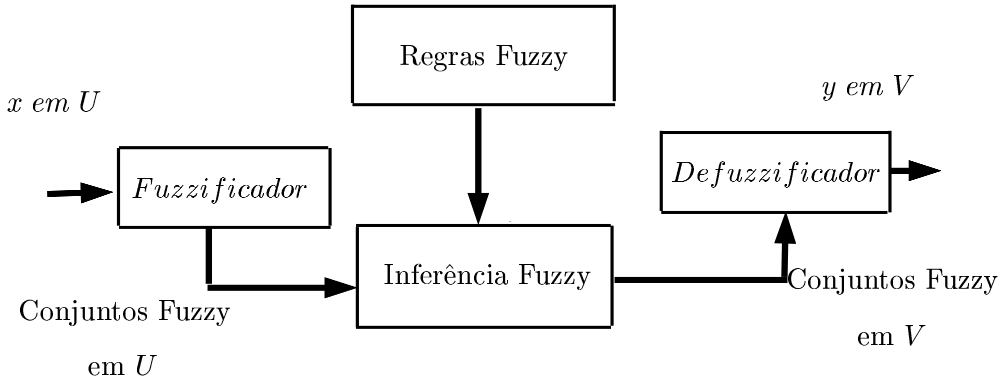

Figura 2.2: Configuração básica dos sistemas *fuzzy* com fuzzificador e defuzzificador.

Nestes sistemas, um fuzzificador transforma uma variável de valor real em um conjunto *fuzzy*, para a entrada, e um defuzzificador transforma um conjunto *fuzzy* em uma variável real, para a saída.

O principal característica do sistema *fuzzy* com fuzzificador e defuzzificador é permitir que o usuário entre com valores reais e obtenha na saída valores reais, mas todo o processamento da informação é feito em termos lingüísticos.

Sistema Fuzzy Takagi-Sugeno

Um sistema *fuzzy* alternativo, com estrutura apropriada para engenharia foi proposto por Takagi-Sugeno (Takagi e Sugeno, 1985). Nestes sistemas, as entradas e saídas são variáveis reais, como nos sistemas com fuzzificador e defuzzificador. Entretanto, ao invés de considerar as regras *fuzzy* Se-Então na forma (2.1), estes sistemas usam as regras na seguinte forma:

$$\begin{array}{lll} \text{Se} & x & \text{é } A \text{ (premissa)}, \\ \text{Então} & y = cx & \text{(conseqüente)}. \end{array} \tag{2.2}$$

Comparando (2.1) e (2.2), verifica-se que a parte conseqüente, "Então", muda de uma descrição que usa termos lingüísticos para uma simples fórmula matemática. Esta mudança torna mais fácil combinar as regras. Assim, no sistema *fuzzy* TS é obtido um peso médio dos valores nas partes "Então" das regras.

A Figura 2.3 mostra a configuração básica de uma sistema *fuzzy* TS.

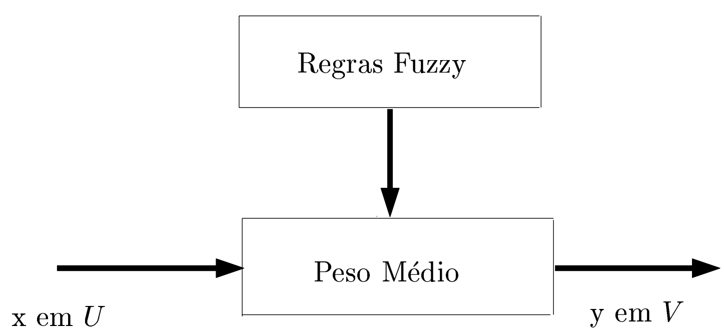

Figura 2.3: Configuração básica dos sistemas *fuzzy* TS.

2.1.2 Funções de Pertinência Tradicionais

Um conjunto *fuzzy* A em um universo do discurso U é caracterizado por uma função de pertinência μ_A que tem valores compreendidos no intervalo $[0, 1]$. O conjunto *fuzzy* é uma generalização do conjunto clássico que pode ter apenas dois valores, "0" e "1". Portanto, as funções de pertinência *fuzzy* em um conjunto *fuzzy* são funções contínuas e são limitadas por "0" e por "1".

As principais funções de pertinência encontradas na literatura são as triangulares, trapezoidais e em forma de sino (gaussianas). Estas funções estão representadas nas Figuras 2.4, 2.5 e 2.6, respectivamente.

Os parâmetros da função de pertinência triangular são definidos por v_1, v_2 e v_3.

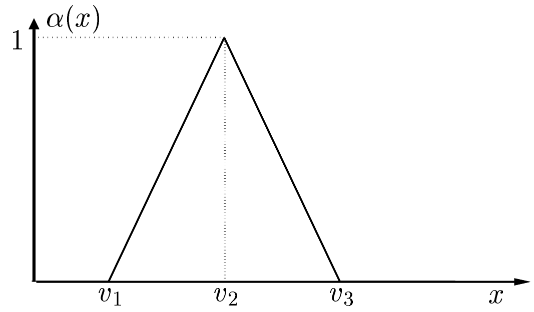

Figura 2.4: Função de pertinência triangular.

Matematicamente, a função de pertinência triangular é definida por:

$$\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{x - v_1}{v_2 - v_1}, & v_1 \leq x \leq v_2, \\ \\ \dfrac{v_3 - x}{v_3 - v_2}, & v_2 \leq x \leq v_3, \\ \\ 0, & \text{nos demais intervalos.} \end{cases} \tag{2.3}$$

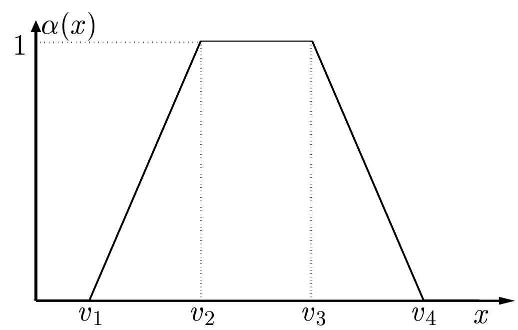

Figura 2.5: Função de pertinência trapezoidal.

Os parâmetros da função de pertinência trapezoidal são definidos por v_1, v_2, v_3 e v_4. Matematicamente, a função de pertinência trapezoidal é definida por:

$$\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{x - v_1}{v_2 - v_1}, & v_1 \leq x \leq v_2, \\ \\ 1, & v_2 \leq x \leq v_3, \\ \\ \dfrac{v_4 - x}{v_4 - v_3}, & v_3 \leq x \leq v_4, \\ \\ 0, & \text{nos demais intervalos.} \end{cases} \tag{2.4}$$

As funções de pertinência em forma de sino são definidas pelos parâmetros x_p, w_p e m_p

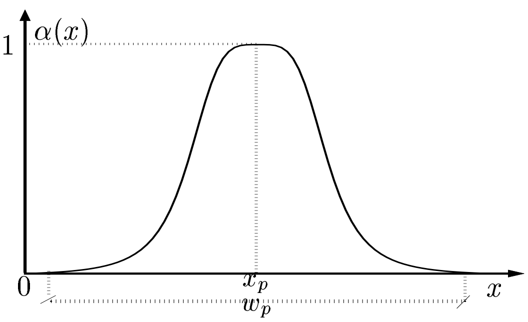

Figura 2.6: Função de pertinência em forma de sino.

como descrito a seguir:

$$\alpha(x) = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{|x - x_p|^{2m_p}}{w_p}\right)\right)} \tag{2.5}$$

sendo x_p o ponto médio, w_p a largura da função sino e $m_p \geq 1$, descreve a convexidade da função sino.

2.1.3 Métodos de Inferência

Na inferência *fuzzy*, os princípios de lógica *fuzzy* são usados para combinar as regras *fuzzy* Se-Então em um mapeamento de um conjunto *fuzzy* A em U, para um conjunto B em V. A seguir serão citados os métodos mais comuns da literatura.

- Inferência "Produto";
- Inferência "Mínimo" ;
- Inferência "Lukasiewicz";
- Inferência "Zadeh";
- Inferência "Dienes-Rescher" ;
- Inferência "Takagi-Sugeno".

Maiores detalhes podem ser encontrados em Wang (1997) e Ross (1995).

2.1.4 Fuzzificadores

O fuzzificador é definido como um mapeamento de um valor real $x^* \in U \subset R^n$ para um conjunto *fuzzy* A' em U. Os fuzzificadores mais utilizados são:

- Fuzzificador Singleton;

- Fuzzificador Gaussiano;
- Fuzzificador Triangular;

2.1.5 Defuzzificadores

O defuzzificador é definido como um mapeamento de um valor real $B' \in U \subset R$ para um ponto $y^* \in V$. Os métodos de defuzzificação são:

- Defuzzificação Centro da Área (também conhecido como Centro de Gravidade);
- Defuzzificação Centro do Máximo;
- Defuzzificação Média do Máximo.

2.1.6 Modelos Lingüísticos

A principal característica dos modelos lingüísticos é a de serem qualitativamente interpretáveis desde que os respectivos conjuntos de regras sejam claros e bem definidos. No entanto, a obtenção de um conjunto adequado de regras a partir de dados de um sistema não é uma tarefa simples, especialmente porque as regras envolvem termos de natureza lingüística.

Tong propôs um método *off-line* de tentativa e erro associado com heurísticas e dados estatísticos para tratar esse problema (Tong, 1978). Posteriormente, Graham e Newell generalizaram esta metodologia através de um algoritmo com capacidade de geração automática de regras e um gerenciamento heurístico de regras conflitantes (Graham e Newell, 1989). Embora limitadas, essas contribuições expuseram a complexidade do problema e motivaram a busca por estratégias eficientes para abordá-lo.

Uma das abordagens mais conhecidas e eficientes para esse problema é o uso de técnicas de *clustering* (Sugeno e Yasukawa (1993); Setnes et al. (1998); Pedrycz e Vasilakos (1999)). Essas técnicas, baseadas em otimização, foram capazes de gerar automaticamente conjunto de regras *fuzzy* que podem descrever precisamente o comportamento de entrada e saída de sistemas complexos. Contudo, os conjuntos *fuzzy* de regras resultantes são usualmente obtidos a *posteriori* pelo algoritmo, e não definidos pelo usuário. Conseqüentemente, os conjuntos e as respectivas regras podem não possuir um significado lingüístico claro (Guillaume, 2001).

Outras abordagens são encontradas na literatura, destacando-se os Modelos Relacionais Fuzzy. Esses modelos consistem de uma representação dos modelos lingüísticos em que os conjuntos de regras são escritos como uma relação *fuzzy* em uma equação relacional (Yager e Filev, 1994). A vantagem dessa representação é que nos modelos lingüísticos tem-se um conjunto de regras que devem ser determinadas, enquanto nos modelos relacionais tem-se apenas uma matriz relacional que descreve a relação *fuzzy* a ser estimada. Este modelo apresenta características importantes tanto sob aspectos numéricos quanto lingüísticos.

Outros modelos com propósitos específicos têm sido propostos, como por exemplo, os *Celibate Fuzzy Models* (Filev e Yager, 1997), desenvolvidos para a modelagem de problemas que requerem soluções exclusivas (não combináveis), tais como diagnósticos e algumas aplicações de tomada de decisão; os *Fuzzy Multimodels* (Pedrycz, 1996), desenvolvidos para a modelagem de problemas que admitem múltiplas soluções tendo em vista a sua natureza mais relacional do que funcional; os *Modelos Hierárquicos* (Wang (1998); Campello e Amaral (2002a); Wang (1999); Chen e Wang (2000)), desenvolvidos para tratar do problema de dimensionalidade em sistemas *fuzzy*, *Modelos com Funções de Base Ortonormal* (FBO) (Campello e Amaral, 2002b) para a modelagem *fuzzy* de sistemas dinâmicos sem realimentação dos erros de previsão.

O modelo *fuzzy* TS (Takagi e Sugeno, 1985) é uma abordagem alternativa para a modelagem *fuzzy*. Este modelo também possui uma estrutura baseada em regras. Contudo, os conseqüentes das regras não são conjuntos *fuzzy* como nos modelos lingüísticos. Esses conseqüentes são formados por funções *crisp* (não *fuzzy*) que mapeiam as entradas do modelo em sua saída. Essas funções, também denominadas modelos locais, possuem usualmente uma forma afim em seus argumentos. Nesse caso o modelo TS é linear nos parâmetros das referidas funções que por sua vez podem ser estimados utilizando algoritmos clássicos como os algoritmos dos Mínimos Quadrados (*Least Squares*) e o filtro de Kalmam (Söderström e Stoica (1989), Ljung (1999)). Embora o modelo TS original seja afim, a versão linear é a que tem sido mais utilizada.

Estes modelos podem ser considerados como uma versão *fuzzy* do método de aproximação linear por partes, que proporciona uma relação linear (ou afim) da entrada-saída para cada subespaço pré-determinado do espaço de entrada, possuindo a vantagem de serem capazes de combinar as diferentes relações correspondentes a cada uma de suas regras. Essa habilidade de interpolação permite a geração de um mapeamento final mais suave, reduzindo o número de relações individuais e parâmetros de projeto necessários para representar um sistema com precisão arbitrária.

Embora os modelos TS não sejam interpretáveis no sentido qualitativo, ou seja, não podem proporcionar conhecimento lingüístico devido ao formato funcional (*crisp*) dos conseqüentes de suas regras, sua estrutura é intrinsecamente adequada para o controle de sistemas dinâmicos (Filev (1991); Johansen, Shorten e Smith (1998)), o que será explorado no Capítulo 5.

Os modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno (TS) também são referenciados na literatura como modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno-Kang (TSK). A razão para isto é que este tipo de modelo foi originalmente proposto por Takagi e Sugeno (Takagi e Sugeno, 1985), mas Kang e Sugeno (Sugeno e Kang (1986b), Sugeno (1988)) desenvolveram importantes trabalhos em identificação de modelos *fuzzy* e por isso muitos pesquisadores têm citado o modelo *fuzzy* original de Takagi-Sugeno como TSK. Neste trabalho, como em Tanaka e Wang (2001), ele será denotado como TS.

2.2 Modelo Fuzzy Takagi-Sugeno

O modelo *fuzzy* Takagi-Sugeno pode representar uma classe genérica de sistemas não-lineares dinâmicos ou estáticos (Kim et al., 1997). Ele é baseado na partição *fuzzy* do espaço de entrada e pode ser visto como uma expansão da partição linear por partes (*piecewise*). Os modelos são construídos por "r" implicações *fuzzy* (regras) do seguinte formato:

$$\begin{array}{rl} \mathrm{R}^i \ : & \text{SE } z_1(t) \text{ é } \mathcal{M}_1^i \text{ E } \dots \text{ E } z_p(t) \text{ é } \mathcal{M}_p^i, \\ & \text{ENTÃO } y^i = f_i(z_1, \dots, z_p) \end{array} \tag{2.6}$$

$$y' = \frac{\sum\limits_{i=1}^{r} \omega^i y^i}{\sum_{i=1}^{r} w^i} \tag{2.7}$$

sendo

- R^i $(i = 1, 2, \dots, r)$ denota a regra *fuzzy* i. São relações fuzzy que descrevem implicações que são calculadas através de uma função de implicação;
- $z_j(t)$ $(j = 1, 2, \dots, p)$ é a entrada. São as variáveis das premissas;
- y^i é a saída da implicação i. Por simplicidade, um sistema com múltiplas entradas e saída simples é assumido (MISO). No caso de um sistema com múltiplas saídas, diversas variáveis de saída tais como y_1^i e y_2^i são usadas.
- f_i $(i = 1, 2, \dots, r)$ são funções que relacionam as entradas do modelo com a saída;
- $\mathcal{M}_1^i$, $\mathcal{M}_2^i, \dots,$ $\mathcal{M}_p^i$ são as variáveis *fuzzy* sendo que cada função de pertinência, $\mu_j^i(z_j(t))$ pode ser trapezoidal, triangular, tipo sino, ou outras funções que representem um subespaço *fuzzy* no qual a implicação R^i pode ser aplicada por argumentação (*reasoning*).

Nos modelos TS a inferência de um valor de saída $y = y'$ a partir de um dado conjunto de valores de entrada $z_1 = z'_1, \ldots, z_p = z'_p$ é calculada como a média ponderada das saídas individuais de cada implicação, sendo que $y_i = f_i(z'_1, \ldots, z'_p)$ e ω_i é o nível de ativação da enésima implicação, isto é

$$\omega_i = \prod_{j=1}^{p} \mu_j^i(z'_j). \tag{2.8}$$

Sugeno e seus colaboradores (Takagi e Sugeno (1985); Sugeno e Kang (1986b); Sugeno e Kang (1988); Sugeno e Tanaka (1991)) propuseram a utilização de funções afins nas partes conseqüentes das implicações, ou seja:

$$f_i(z_1, \ldots, z_n) = q_0^i + \sum_{j=1}^{p} q_j^i x_j. \tag{2.9}$$

Esta escolha (2.9) permite uma interpretação matemática simples do modelo com uma interpolação de diferentes modelos afins e implica que a saída em (2.7) é linear nos parâmetros $q_0^i, \ldots, q_n^i$. Logo, esses parâmetros podem ser estimados utilizando qualquer algoritmo de estimação (Söderström e Stoica (1989); Ljung (1999); Teixeira et al. (1996); Teixeira et al. (1998); Teixeira, Daruichi e Assunção (2000)).

Assim, o modelo *fuzzy* TS é capaz de aproximar um sistema não-linear com uma combinação de vários sistemas lineares afins pela decomposição de todo o espaço de entrada em vários espaços parciais e representar cada espaço entrada/saída (I/O) com uma equação linear.

No caso em que apenas os termos constantes são considerados em (2.9), o modelo (2.7) coincide com o modelo lingüístico do tipo *singleton* (Kim, Kang e Park (1999), Kim (2001)).

A estrutura do sistema *fuzzy* TS, equivale uma estrutura composta por uma inferência do tipo produto, fuzzificador *singleton* e defuzzificador com centro médio (Wang, 1997)

O algoritmo original de identificação sugerido por Sugeno e seus colaboradores têm os seguintes passos (Takagi e Sugeno, 1985):

1. Escolha a estrutura da premissa e a estrutura da parte conseqüente;

2. Estime os parâmetros da estrutura determinada no passo 1;

3. Avalie o modelo;

4. Repita o passo 1 até que o resultado seja satisfatório.

Maiores detalhes podem ser encontrados em Sugeno e Kang (1986b).

Entretanto, a implementação de tal algoritmo não é trivial (Wang e Langari, 1995b), porque para determinar as variáveis das funções de pertinência ótimas é necessário resolver um problema de programação não-linear. Embora o algoritmo TS possa expressar uma relação funcional altamente não-linear usando um pequeno número de regras *fuzzy* e seu potencial de aplicação seja grande, a complexidade do procedimento de identificação proposto em Takagi e Sugeno (1985) pode dificultar o seu uso em aplicações práticas (Kim et al., 1997). Para resolver estes problemas vários algoritmos têm sido propostos (Kim, Park, Lee, Ji e Park (1996); Kim et al. (1997); Wang e Langari (1995); Kim et al. (1998)).

2.3 Modelos Homogêneos x Modelos Afins

O modelo *fuzzy* original proposto em Takagi e Sugeno (1985) descrito em (2.6) é um modelo afim. Entretanto a maioria dos trabalhos que adotam os sistemas *fuzzy* TS utilizam o modelo "homogêneo".

O *sistema fuzzy TS homogêneo* possui a parte conseqüente linear e não tem um termo *bias* constante. Enquanto que o *sistema fuzzy afim* possui a parte conseqüente afim e o termo *bias* não nulo.

Embora os sistemas afins sejam mais naturais e atraentes para os seres humanos do que sistemas homogêneos, são estes últimos que têm despertado maior interesse da comunidade científica devido à sua facilidade de análise.

O motivo deste fato é que, com este tipo de modelo local, o projeto de controladores (por exemplo de reguladores) pode ser feito com LMIs. Com o uso de modelos locais afins, em geral, o problema só pode ser descrito por Desigualdades Bilineares Matriciais (em inglês, BMIs) cuja solução computacional é muito mais complexa.

Entretanto alguns pesquisadores têm dedicado atenção à análise de estabilidade de sistemas afins (Johansen, Hunt e Gawathrop (1998); Marin e Titli (1995); Johansson e Rantzer (1998)).

Geralmente, o modelo *fuzzy* de um sistema físico pode ser construído por:

1. conversão direta da equação não-linear do modelo físico;

2. identificação usando o observador de dados I/O (entrada/saída).

Se o sistema *fuzzy* é diretamente convertido da equação não-linear como, por exemplo, em Wang et al. (1996); Tanaka et al. (1996b) e Teixeira e Żak (1999), o resultado pode ser homogêneo ou afim.

A Figura 2.7 mostra uma aproximação de um sistema por um modelo TS afim e por um modelo homogêneo.

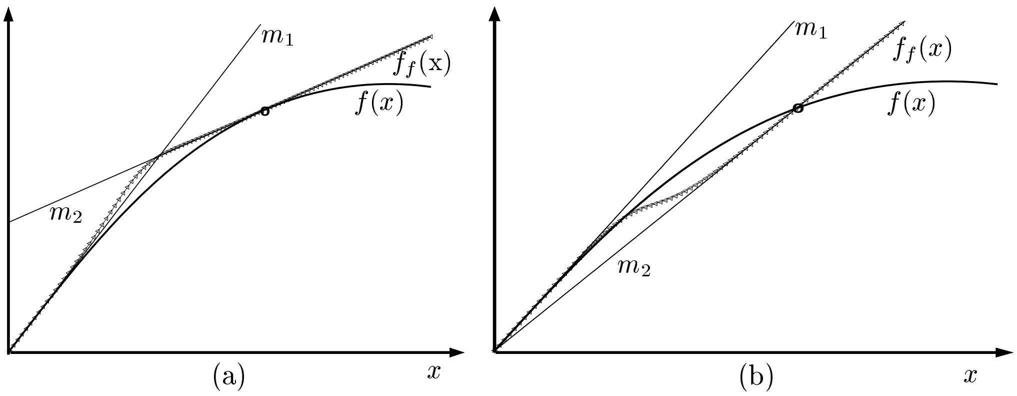

Figura 2.7: Exemplos de aproximação com modelo TS (a) afim e (b) homogêneo: $f(x)$ é a função do sistema de simulação; $f_f(x)$ é a função de aproximação obtida com modelos *fuzzy* e m_1 e m_2 são aproximações lineares em (b). Em (a) m_2 é a aproximação afim.

2.4 Representação de Sistemas Fuzzy Takagi-Sugeno

No método de modelagem e projeto propostos nesta tese, uma dada planta não-linear é representada pelo modelo fuzzy TS (Takagi e Sugeno, 1985) homogêneo (o termo *bias* em (2.9) é nulo, $q_0^i = 0,\ i = 1, \ldots, p$) através da conversão direta da equação não-linear do modelo físico. O sistema fuzzy TS é descrito pelas regras fuzzy Se-Então, que representam localmente relações lineares entre a entrada e a saída de um sistema.

A descrição local da planta dinâmica a ser controlada está disponível em termos dos modelos lineares locais:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_i\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_i\mathbf{x}(t), \end{aligned}$$

sendo $i = 1, 2, \ldots, r$, o vetor de estado $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, o vetor de entrada $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, o vetor de saída $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^q$, $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^{n\times m}$ e $\mathbf{C}_i \in \mathbb{R}^{q\times n}$. A informação acima é então fundida com as regras Se-Então disponíveis, onde a enésima regra pode ter a forma:

$$\begin{aligned} \text{Regra } i \ :& \ \text{Se } z_1(t) \text{ é } \mathcal{M}_1^i \text{ E } \ldots \text{ E } z_p(t) \text{ é } \mathcal{M}_p^i, \\ & \ \text{Então} \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_i\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_i\mathbf{x}(t). \end{cases} \end{aligned} \tag{2.10}$$

$\mathcal{M}_j^i$, $j = 1, 2, \ldots, p$ é o conjunto fuzzy j da regra i e $z_1(t), \ldots, z_p(t)$ são as variáveis premissas. Seja $\mu_j^i(z_j(t))$ a função de pertinência do conjunto fuzzy $\mathcal{M}_j^i$, $w^i(\mathbf{z}(t))$ definido em (2.8) e $\mathbf{z}(t) = [z_1(t)\ z_2(t)\ \ldots\ z_p(t)]$.

Como $\mu_j^i(z_j(t)) \geq 0$ tem-se, para $i = 1, 2, \ldots, r$,

$$w^i(\mathbf{z}(t)) \geq 0 \;\; e \;\; \sum_{i=1}^{r} w^i(\mathbf{z}(t)) > 0.$$

Uma escolha natural para a obtenção de um modelo fuzzy TS para sistemas não-lineares é adotar $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t)$, sendo $\mathbf{x}(t)$ o vetor estado do sistema não-linear. Esta escolha é feita em todos os desenvolvimentos teóricos deste trabalho.

Desta forma, dado um par $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$, o sistema fuzzy resultante é obtido como a média ponderada dos modelos locais, e para $i = 1, 2, \ldots, r$, tem a forma:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^{r} w^i(\mathbf{x}(t))(\mathbf{A}_i\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i\mathbf{u}(t))}{\sum_{i=1}^{r} w^i(\mathbf{x}(t))} \\ &= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(\mathbf{x}(t))(\mathbf{A}_i\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i\mathbf{u}(t)) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i(\mathbf{x}(t))\mathbf{A}_i\right)\mathbf{x}(t) + \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i(\mathbf{x}(t))\mathbf{B}_i\right)\mathbf{u}(t) \\ &= \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\alpha)\mathbf{u}(t). \end{aligned} \tag{2.11}$$

A saída é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^{r} w^i(\mathbf{x}(t))\mathbf{C}_i\mathbf{x}(t)}{\sum_{i=1}^{r} w^i(\mathbf{x}(t))} \\ &= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(\mathbf{x}(t))\mathbf{C}_i\mathbf{x}(t) \\ &= \mathbf{C}(\alpha)\mathbf{x}(t). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Para $i = 1, 2, \ldots, r$,

$$\alpha_i(\mathbf{x}(t)) = \frac{w^i(\mathbf{x}(t))}{\sum_{i=1}^{r} w^i(\mathbf{x}(t))} \geq 0, \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(\mathbf{x}(t)) = 1. \tag{2.13}$$

Observação 1 *Em algumas passagens desta dissertação,* $\mathbf{x}(t)$ *será representado apenas por* $\mathbf{x}$*, para facilitar a notação. Mas em todos os casos citados,* $\mathbf{x}$ *é uma função de* t*.*

2.5 Interpretação de Sistemas Fuzzy Takagi-Sugeno

A principal característica do modelo *fuzzy* TS em relação aos modelos *fuzzy* lingüísticos é que sua parte conseqüente é um modelo dinâmico afim ou linear (homogêneo), no lugar de um conjunto *fuzzy* ou valor constante. Esta propriedade apresenta várias vantagens (Johansen, Shorten e Smith, 1998):

- Da perspectiva de engenharia de controle, o uso de modelos locais lineares (ou local linear) preenche a lacuna entre o controle *fuzzy* e o controle convencional. Existem muitas ferramentas na teoria de sistemas lineares que podem ser parcialmente aplicadas para modelos TS *fuzzy* e controladores;

- As partes conseqüentes, relativamente complexas, permitem que o número de regras *fuzzy* (modelos locais) seja muito pequeno em muitas aplicações. Conseqüentemente, o modelo *fuzzy* TS é menos propenso ao problema de dimensionamento do que outros modelos *fuzzy*. Isto ocorre porque nas regiões onde as não-linearidades são mais acentuadas, as partes conseqüentes podem ser funções mais elaboradas para representarem estas não-linearidades e, conforme a necessidade, mais regras podem ser incluídas nestas regiões. Por outro lado, nas regiões onde as não-linearidades não são tão fortes, pode-se utilizar funções de pertinência mais simples e o número de regras pode ser reduzido. Esta distribuição das regras leva a uma melhor representação do sistema com um número mínimo de modelos locais;

- estrutura do modelo (partição do espaço de estados e estrutura do modelo local) e propriedades do modelo local podem, em algumas aplicações, serem facilmente relacionadas com o sistema físico. Isto simplifica o desenvolvimento do modelo e validação.

Para muitas aplicações, é importante que o comportamento global do modelo não-linear *fuzzy* seja similar ao comportamento global do sistema não-linear que representa o sistema físico. Por exemplo, quando o modelo global é usado para predição não-linear ou quando o modelo global é usado em um modelo interno de um controlador (Johansen, 1994).

Por outro lado, algumas vezes é necessário e freqüentemente desejável que os modelos lineares locais *fuzzy* sejam aproximações precisas das linearizações locais do sistema real. Este é o caso quando o modelo *fuzzy* dinâmico TS é usado como uma base para um controlador *fuzzy* de ganho programado, já que os modelos lineares locais são usados para projetar controladores lineares locais.

Entretanto, identificar modelos dinâmicos que sejam boas aproximações para linearizações de sistemas não-lineares nem sempre é trivial (Yen et al. (1998); Shorten et al. (1999)).

Este problema é uma conseqüência do excessivo grau de liberdade na estrutura do modelo local afim quando ele é aplicado nos regimes de operação transientes.

Outra importante razão é que a escolha do algoritmo (o algoritmo dos mínimos quadrados, por exemplo) geralmente é feita com o objetivo explícito de selecionar os parâmetros dos modelos locais para otimizar o desempenho global.

Isto é freqüentemente obtido com modelos locais que são significativamente diferentes das linearizações locais. Os problemas são, na maioria das aplicações práticas, ampliados por restrições sobre o projeto experimental, que restringe a quantidade de informações nos dados transientes. Uma conseqüência é que se pode determinar facilmente um modelo *fuzzy* TS, que fornece um bom modelo não-linear global do sistema não-linear, mas com modelos locais que têm pouco em comum com as linearizações locais.

Em Shorten et al. (1999) é mostrado que o modelo *fuzzy* dinâmico TS afim contém excessivos graus de liberdade e deve ser interpretado cuidadosamente. O problema da interpretação também é discutido em Leith e Leithead (1999).

Muitos dos problemas mencionados acima ocorrem somente para a modelagem dinâmica na identificação. Logo, estes problemas não ocorrem quando é feita a conversão direta do modelo físico (mapeamentos estáticos), como será feito nesta tese.

2.5.1 Aproximações Locais Afins

O modelo *fuzzy* TS dinâmico é composto de múltiplos modelos dinâmicos locais afins (ou homogêneos). É necessário para o propósito de análise e aplicação que estes modelos locais possam ser relacionados com as linearizações do sistema não-linear.

Em Leith e Leithead (1999) é apresentado o *Teorema da Aproximação* que mostra que o modelo *fuzzy* dinâmico TS, considerando que os modelos dinâmicos locais afins conduzem a uma aproximação arbitrária do sistema dinâmico, quando o número de regras $r \to \infty$.

2.5.2 Variáveis Premissas

Um objetivo comum do modelamento é obter uma parametrização mínima dos sistemas dinâmicos. Neste contexto de modelos de estruturas locais, representações econômicas do sistema são algumas vezes difíceis de obter devido aos problemas de dimensionamento. Assim, para reduzir a complexidade do modelo *fuzzy* TS, é comum (quando possível) restringir as funções de pertinência para dependerem de um subconjunto de variáveis $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$.

Nos casos em que as não-linearidades não são muito fortes, a tendência é minimizar o número de variáveis premissas para minimizar a complexidade do modelo.

Em qualquer caso, considerações práticas geralmente necessitam manter o número de variáveis premissas tão pequeno quanto possível para reduzir os efeitos do dimensionamento.

Em alguns casos o número de variáveis premissas pode ser reduzido sem reduzir a precisão, mas este procedimento sacrifica a interpretabilidade do modelo local como linearizações locais.

2.5.3 Função de Pertinência para Sistemas Fuzzy Takagi-Sugeno

O modelo *fuzzy* global TS pode fornecer uma aproximação satisfatória do sistema não-linear até mesmo quando os modelos locais afins constituintes não são convencionalmente linearizados. Na prática, os modelos TS são construídos interpolando os parâmetros dos modelos locais constituintes usando inferência *fuzzy*. A escolha da função de pertinência é de importância crucial neste procedimento (Leith e Leithead, 1999). Esta escolha deve ser feita para fornecer tanta precisão do sistema dinâmico quanto possível. Entretanto, em algumas aplicações, funções de pertinência escolhidas para aproximar as dinâmicas globais podem ser inadequadas quando o modelo é linearizado. No entanto, para aplicações de controle que requerem a linearização do modelo da planta, a fidelidade do modelo na vizinhança do ponto de equilíbrio da planta é de primordial importância.

A Figura 2.8 apresenta uma ilustração simplificada do modelo TS. Uma aproximação de uma função $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é feita com dois modelos locais lineares definidas pelas constantes a_1 e a_2 combinados com as funções de pertinência $\alpha_1(\mathbf{x})$ e $\alpha_2(\mathbf{x})$.

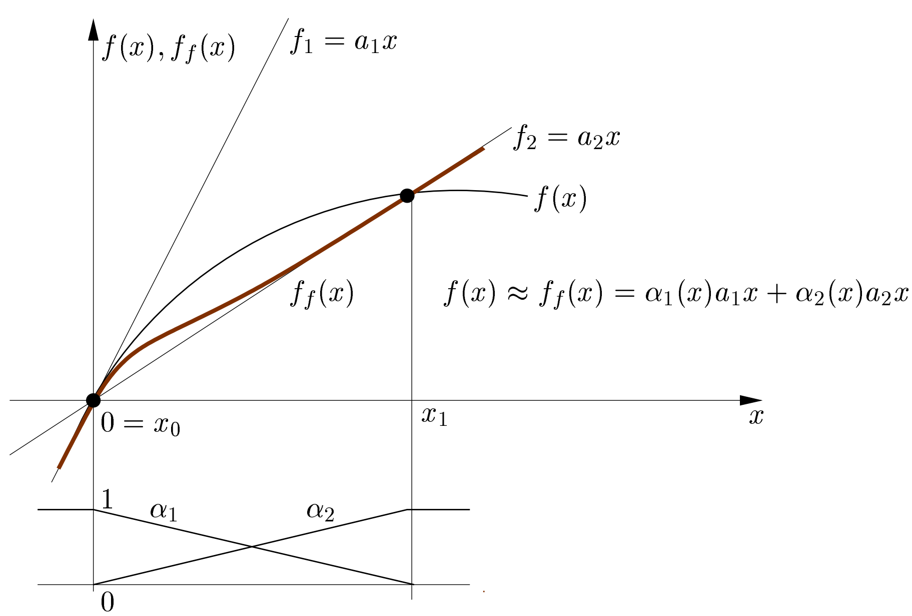

Figura 2.8: Ilustração da aproximação da função do modelo de simulação pela função obtida por modelos *fuzzy* TS.

Considere a função não-linear $f(x)$ descrita na Figura 2.8. Note que esta função pode ser aproximada, para $x \approx x_0 = 0$, por $f_1(x) = a_1 x$, que é a reta tangente desta curva em $x = 0$.

Uma aproximação linear para esta função, para $x \approx x_1$, é $f_2(x) = a_2 x$; observe que esta segunda aproximação linear não é tão boa quanto a primeira aproximação linear, pois ela não coincide com a reta tangente de $f(x)$ em $x = x_1$. Adotando-se $f_1(x)$ e $f_2(x)$ como modelos locais, e as funções $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ definidas na Figura 2.8 (observe que $\alpha_1(x) + \alpha_2(x) = 1$), um modelo *fuzzy* TS para $f(x)$ seria $f_f(x) = \alpha_1(x)f_1(x) + \alpha_2(x)f_2(x)$, como ilustrado na Figura 2.8. Pode-se observar que para $x \approx x_0$, então $\alpha_1 \approx 1$, $\alpha_2 \approx 0$ e $f_f(x) \approx f_1(x)$ e para $x \approx x_1$, então $\alpha_2 \approx 1$, $\alpha_1 \approx 0$ e $f_f(x) \approx f_2(x)$. Finalmente, verifique que $f_f(x)$ proporciona uma aproximação da função $f(x)$ muito melhor do que as funções $f_1(x)$ (linearização em torno de um ponto de operação) ou $f_2(x)$, por exemplo, para $x_0 \leq x \leq x_1$. Obviamente, se aumentarmos o número de modelos locais, a aproximação torna-se melhor. Esse exemplo simples mostra o potencial dos modelos *fuzzy* TS, no tratamento de funções e/ou de sistemas não-lineares.

Os modelos *fuzzy* TS têm sido úteis na descrição aproximada de sistemas não-lineares. É bem conhecido que sistemas *fuzzy* aditivos $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, como o modelo *fuzzy* TS, podem aproximar uniformemente qualquer função contínua $\mathbf{f} : \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ em um domínio compacto (fechado limitado) $\mathbf{U}$ (Kosko, 1997). No caso do modelo *fuzzy* TS, quanto maior o número de modelos locais, melhor será a aderência do modelo à equação diferencial não-linear da planta. Entretanto, quanto maior o número de modelos locais, mais difícil pode se tornar o controle. Assim, neste trabalho, o objetivo é obter uma representação *fuzzy* que aproxime, com a precisão desejada, o modelo à equação diferencial não-linear, com o menor número de modelos locais.

2.6 Compilação Bibliográfica

A seguir, será apresentada uma compilação bibliográfica sobre modelos *fuzzy* TS. Serão citados alguns dos principais pesquisadores e suas contribuições teóricas, bem como algumas aplicações nas quais têm-se utilizado estes modelos. Pesquisadores ou contribuições que deixaram de ser mencionados podem ser encontrados nas referências dos trabalhos citados.

Após a introdução dos modelos *fuzzy* TS em 1985 por Takagi e Sugeno (Takagi e Sugeno, 1985), muitos pesquisadores dedicaram-se à busca de condições de estabilidade para estes sistemas. Durante os anos 90 vários trabalhos foram publicados destacando-se as pesquisas de Tanaka e seus colaboradores, com a utilização de LMIs.

Tanaka e Sugeno apresentaram condições de estabilidade básicas para sistemas *fuzzy* TS, utilizando o método direto de Lyapunov com função do tipo $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t)$ (Tanaka e Sugeno (1990); Tanaka e Sugeno (1992); Tanaka e Sano (1993a)). O projeto de controle de sistemas *fuzzy* se reduz ao problema de encontrar uma matriz **P** comum definida positiva, que solucione simultaneamente várias equações de Lyapunov, sendo que cada equação está relacionada com um modelo local do modelo TS. Este procedimento nem sempre era trivial. As primeiras análises de estabilidade e métodos para determinar **P** foram feitas utilizando um procedimento de tentativa e erro. Kawamoto e seus colaboradores apresentaram um procedimento para construir uma matriz **P** comum para um sistema de segunda ordem (Kawamoto, 1992). Outros pesquisadores também apresentaram propostas de estabilidade para sistemas *fuzzy* como, por exemplo, Langari e Tomizuka (1990), Kitamura e Kurozumi (1991); Farinwata (1993); Singh (1992); Katoh (1993); Cheng (1993); Hara e Ishibe (1992); Teixeira e Żak (1999). A partir de 1995, Tanaka e seus colaboradores introduziram as LMIs para projetar os controladores *fuzzy* e determinar a matriz **P** comum (Wang et al. (1995a); Wang et al. (1995b); Wang et al. (1996); Thathachar e Viswanath (1997)). Esta técnica permite realizar um projeto total e sistemático satisfazendo não apenas a estabilidade, mas também a taxa de decaimento, restrições sobre a entrada e saída de controle, e outros índices de desempenho. Veja Boyd et al. (1994).

O problema de determinar uma matriz **P** comum está relacionado com o número de regras Se-Então. Se o número de regras é grande, pode ser difícil encontrar uma **P** comum que satisfaça as condições de estabilidade.

Condições de estabilidade relaxadas foram apresentadas em Tanaka et al. (1996a), Tanaka, Ikeda e Wang (1998a); Tanaka, Taniguchi e Wang (1998a). Estas condições foram flexibilizadas em Kim e Lee (2000); Teixeira, Pietrobom e Assunção (2000); Teixeira, Assunção e Pietrobom (2001); Teixeira, Assunção e Avellar (2001); Teixeira, Assunção e Avellar (2003).

A matriz **P** usada na função de Lyapunov, quando fixa, pode fornecer um projeto conservativo do controlador . Algumas propostas foram apresentadas para serem aplicadas nos casos onde uma matriz **P** comum não pode ser encontrada. Cao e seus colaboradores optaram por construir a função de Lyapunov utilizando um conjunto de matrizes **P** (Cao et al. (1996) e Cao et al. (1997a)). Outra proposta foi feita por Chang (Chang (1999) e Chang (2000a)), onde os valores de **P** devem ser atribuídos diretamente pelo projetista. No projeto com LMIs é impossível para o projetista escolher diretamente a matriz **P**. Lee e seus colaboradores propuseram determinar a matriz **P** de forma analítica (Lee, Chen e Chuang, 1998). Narendra e Balakrishan (Narendra e Balakrishnan, 1994) sugeriram uma forma sistemática de encontrar uma matriz P comum de "n" sistemas contínuos simultâneos e em Jadbabaie

(1999) estes resultados são estendidos para sistemas discretos. Outras análises de estabilidade podem ser encontradas na literatura, com o emprego de funções de Lyapunov quadráticas por partes (Johansson e Rantzer, 1997). Outras condições de estabilidade quadrática foram propostas em Cao et al. (1996); Cao et al. (1997b); Feng e Ma (2001) e Kiriakidis et al. (1998). Análise de estabilidade para sistemas de grande porte foi proposta em Hsiao e Hwang (2001).

Em geral, existe um número infinito de controladores que estabilizam uma planta, se ela é estabilizável (Tanaka e Wang, 2001). A seleção de um controlador particular é decidida em função de especificações de desempenho de controle como robustez, controle ótimo, restrições de entrada, restrições de saída, taxa de decaimento, etc.

Robustez é um dos principais índices de desempenho de controle. Controladores robustos são projetados para sistemas que contém incertezas. Estas incertezas podem ser representadas na parte premissa (Tanaka e Sano (1994a); Tanaka e Sugeno (1993b)), na parte conseqüente (Kim, Kim e Park (1996); Kim, Cho e Park (1996); Tanaka et al. (1996b); Lee, Chen e Chuang (1998)) ou em ambas as partes (Zhao et al. (1995); Farinwata (1999)) e Chen et al. (1999)). Outras análises de estabilidade com robustez e projetos de controladores robustos são encontrados em Johansen (1994); Johansen (1996); Cao e Lin (2003); Lee et al. (1999); Kiriakidis (1999a) e Joh et al. (1998).

O controle ótimo está relacionado a controladores que, sob condições ótimas, satisfaçam determinados critérios de desempenho como restrições e estabilidade. Em geral, é difícil obter controladores ótimos para sistemas não-lineares e são poucos os resultados que fornecem uma forma eficiente de projeto. Tanaka e seus colaboradores apresentaram uma metodologia para um controle sub-ótimo (Tanaka, Nishimura e Wang (1998); Tanaka, Taniguchi e Wang (1998a); Tanaka, Taniguchi e Wang (1998b) e Tanaka et al. (1999a)) baseada na função de desempenho quadrático e utilizando condições de estabilidade relaxadas e LMIs. Tuan (Tuan et al., 2001) propôs um método de projeto e análise de estabilidade de controle ótimo utilizando desigualdades matriciais lineares parametrizadas (PLMI).

O projeto de controle misto H_2/H_∞ é atraente em engenharia de controle, já que combina os méritos de ambos os controles ótimos H_2 e robusto H_∞. Problemas de controle misto para sistemas lineares têm sido extensivamente estudados e apenas recentemente análises para o problema de controle misto H_2/H_∞ para sistemas não-lineares têm sido propostas. Análises sobre o problema de controle misto que podem ser eficientemente resolvidos por meio de LMIs são apresentadas em Tanaka et al. (1999a); Tanaka, Nishimura e Wang (1998), Tanaka, Taniguchi e Wang (1998a). Outras propostas de controle misto são apresentadas em Wang (1997); Chen (1997) e Chen et al. (2000).

Projeto de controladores baseados simultaneamente em controladores H_∞, H_2 e L_2 são abordados em Jadbabaie (1999); Hong e Langari (2000) e Lee et al. (1999).

Tempo de atraso ocorre freqüentemente em muitos sistemas dinâmicos tais como em sistemas biológicos, sistemas químicos, sistemas de processamento metalúrgico e sistemas de redes. Em Gu et al. (2001) é proposta uma análise de estabilidade para uma classe particular de sistemas não-lineares com tempo de atraso. Estes sistemas não-lineares são representados por um conjunto de sistemas lineares com tempo de atraso, denominados por Gu e seus colaboradores por modelo TS com tempo de atraso (T-SMTD). Cao e Frank também abordam o problema da análise de estabilidade com tempo de atraso (Cao e Frank, 2000) e em Lee et al. (1999) é apresentado um projeto de controlador H_∞ para sistemas com atraso utilizando observadores *fuzzy*. Outra proposta de controle de sistemas com atraso é feita em Yi e Heng (2002).

O projeto de controladores com modos deslizante foi abordado em Choi et al. (1993); Kim e Han (1997); Bentalba et al. (1998) e Lee, Kang e Park (1998). Controladores *fuzzy* com estrutura variável são propostos em Feng et al. (1997).

Em Huaguang e Bien (1998) é proposta uma aproximação de controle de predição generalizado utilizando-se um algoritmo rápido de identificação dos parâmetros da premissa. Matko et al. (2000) apresentaram um projeto para controlar um sistema térmico. Outro projeto para troca de calor com controle de predição funcional também foi proposto em Skrjanc e Matko (1999). Uma aproximação com controle de predição generalizado multivariável é descrita em Zhang et al. (1999). Mas o tempo requerido para a operação é grande e inadequado para ser usado em sistemas dinâmicos rápidos. Em Hadjili et al. (1998) um projeto de controle de predição é feito para sistemas onde as partes conseqüentes são modelos ARX. Em Sousa et al. (1997) e Roubos et al. (1999) são apresentados projetos de controle de predição utilizando uma técnica de otimização discreta, branch-and-bound. Outras propostas são apresentadas em Biasizzo et al. (1997) e Mollov et al. (2002).

Controle Adaptativo é um importante tema na engenharia de controle, pois ele é capaz de lidar com incertezas e perturbações. Controladores não adaptativos, na presença de distúrbios, nem sempre satisfazem as condições de estabilidade. Um controlador adaptativo foi construído com uma combinação paralela de controladores robustos em Kim, Cho e Park (1996) e Kim, Kim e Park (1996). Controle adaptativo com ajuste de regras foi apresentado em Gazi e Passino (2000). Este ajuste é feito adicionando o número de regras dependendo de onde a trajetória do sistema atravessa o espaço de estados. Controle Adaptativo para sistemas discretos é apresentado em Renders et al. (1997). Outros controladores adaptativos foram propostos em Ordónez et al. (1996); Spooner e Passino (1995); Fink et al. (2000) e Barada e Singh (1998).

O comportamento caótico de um sistema é caracterizado pela dependência sensível das condições iniciais. Alguns métodos de projeto de sistemas caóticos com modelos *fuzzy* são apresentados em Wang et al. (1996a); Wang e Tanaka (1996); Tanaka et al. (1997a); Tanaka, Ikeda e Wang (1998b), e Tanaka et al. (1998c).

Uma nova proposta de Compensação Distribuída Paralela foi introduzida em Li et al. (1998); Niemann et al. (1999); Li et al. (1999) e Li et al. (2000) denominada pelos autores por DPDC, Compensação Distribuída Paralela Dinâmica. A DPDC fornece um conjunto de LMIs suficientes para a existência de compensadores dinâmicos de estabilização quadrática.

Controle *multi-objetivos* consiste em um projeto de controle que tem que satisfazer diversos objetivos simultaneamente. Um grupo de LMIs pode ser formulado para representar estes objetivos e encontrar soluções factíveis para o projeto Li et al. (1998); Niemann et al. (1999); Li et al. (1999); Li et al. (2000) e Scherer et al. (1997).

Estruturas de controladores universais são apresentadas em Castro (1995); Cao et al. (2001); Ying (1998e).

O projeto de controladores que utilizam decomposições sobrepostas é proposto em Akar e Özgüner (1999) e em Zhang et al. (1999). Este método emprega um modelo de sistema *fuzzy* TS para uma planta não-linear e um controlador descentralizado usando a aproximação CDP. No processo de modelamento é assumido que o sistema *fuzzy* é composto de subsistemas com algumas partes fortemente conectadas, enquanto que outras são fracamente conectadas. Nestes trabalhos verifica-se que as decomposições deslocadas podem falhar na produção de resultados úteis, enquanto que a técnica de decomposições sobrepostas pode beneficiar sistemas contínuos.

Controladores com ganho programado são abordados em Castro (1995); Korba e Frank (2000) e Marullo et al. (2001).

Em Chen e Xiao (1999) é apresentado um algoritmo de controle baseado no Modelo Takagi-Sugeno-Kang Estendido (ETSK). A expressão analítica deste modelo é obtida de um algoritmo de identificação e um modelo TSK de pesos variáveis.

Em Rizk et al. (2001) é proposta a análise de estabilidade usando o segundo método de Lyapunov e algoritmos genéticos.

Projetos de observadores *fuzzy* são encontrados em Tanaka e Sano (1994a); Feng et al. (1997); Ying (2000); Fayaz (1999); Jadbabaie et al. (1997); Patton et al. (1998); Lee et al.

(1999); Toribio et al. (1999); Yoneyama et al. (2000). Em Ma et al. (1998) e Kim, Joogseon, Langari e Kwon (1999) foram propostos projetos de controladores usando estimadores.

Johansen e seus colaboradores mostraram a necessidade do sistema *fuzzy* afim na estrutura do controle de ganho programado (Johansen, Hunt e Gawathrop, 1998). Condições de estabilidade para sistemas afins foram discutidas em Marin e Titli (1995); Marin e Titli (1997); Johansson e Malmborg (1997); Johansson e Rantzer (1998); Kim e Kim (2001).

A seguir, serão destacadas algumas das principais aplicações de modelos *fuzzy* encontrados na literatura.

O sistema "*trailer-trunck*" (um veículo com um trailer que tem sido utilizado para testar vários métodos de projeto de controle incluindo controle neural, controle *fuzzy* e controle híbrido neuro-*fuzzy*): Tanaka e Kosaki (1997), Tanaka, Kosaki e Wang (1998), Tanaka et al. (1999); Tanaka et al. (1999c); Kong e Kosko (1992), Inoue et al. (1995); Tokunaga e Ichihashi (1992); Tanaka e Sano (1994a) e Tanaka et al. (1996).

Aproximação *fuzzy* para detecção e isolamento de falhas: Dexter (1995); Frank e Kiupel (1993); Isermann e Ulieru (1993), Spreitzer e Ballé (2000), Diao e Passino (2000) e Patton et al. (1998).

Controle de temperatura: Lin et al. (2000); Matko et al. (2000); Fischer et al. (1998), Skrjanc e Matko (1999). Controle de processos com pH altamente não-lineares: Biasizzo et al. (1997). Condicionadores de ar: (Sousa et al., 1997). Detecção de bordas: Bezdec et al. (1998). Controle de míssil: Lee, Chen e Chuang (1998). Controle da concentração de ozônio: Mourot et al. (1999).

Controle de pêndulo invertido: Cao et al. (1996); Cao et al. (1997b); Kawamoto (1997); Ma et al. (1998); Chen et al. (1999); Teixeira e Żak (1999); Chen et al. (2000); Guo et al. (2000); Yi e Yubazaki (2000); Kim (2001); Zheng et al. (2001) e Rizk et al. (2001).

2.7 Discussões Complementares

Os modelos *fuzzy* TS, devido à sua estrutura apropriada para controle, têm sido muito difundidos na última década. Desenvolvimento de novas condições de estabilidade e projeto têm sido explorados por muitos pesquisadores e gerado muitos artigos.

Controladores *fuzzy* com modelos TS têm sido utilizados em diversas aplicações. Dentre estas aplicações destaca-se o controle de um pêndulo invertido, que têm sido utilizado por diversos pesquisadores para validar os desenvolvimentos teóricos obtidos e também será utilizado nesta tese com este propósito.

Pela descrição bibliográfica verifica-se que a teoria *fuzzy* tem recebido cada vez mais aceitação da comunidade científica e, algumas vezes, é referenciada como uma das linhas de pesquisa mais promissoras na área de controle.

2.8 Contribuições

A principal contribuição deste capítulo refere-se a descrição bibliográfica abrangente do modelo *fuzzy* TS.

No próximo capítulo será abordada a construção de modelos locais. Serão estudados dois métodos descritos na literatura e será proposto um novo método de construção que permitirá uma melhor aproximação local do sistema.

Capítulo 3

Modelos Locais Fuzzy

3.1 Introdução

O primeiro passo no projeto de um sistema de controle é a construção de um "modelo de simulação" do sistema dinâmico a ser controlado. Este modelo deve representar o comportamento do sistema por meio de equações diferenciais lineares ou não-lineares e representar todas as características que possam ser obtidas do sistema físico.

Neste trabalho, o sistema dinâmico não-linear escolhido para ilustrar a teoria desenvolvida é o pêndulo invertido. O pêndulo invertido é um sistema amplamente utilizado na literatura (veja no Capítulo 2) para análises de estabilidade e projetos de controladores fuzzy. No Apêndice A apresenta-se uma descrição matemática detalhada deste sistema.

Após obter o modelo de simulação do sistema dinâmico, o passo seguinte é obter o "modelo de projeto". Este modelo deve ser mais simples que o modelo de simulação e deve considerar apenas as características essenciais do projeto. No Apêndice B é apresentada uma forma de se obter o modelo de projeto por meio da técnica de linearizações por Taylor. O Apêndice B mostra ainda que esta técnica não é adequada para linearizar pontos distantes da origem (que não são pontos de equilíbrio) e que nestes pontos se faz necessário obter outras formas de linearização.

Neste capítulo, são apresentados dois métodos utilizados para a construção dos modelos locais lineares, descritos na literatura.

O primeiro foi elaborado em Taniguchi et al. (2001). A combinação destes modelos locais com as funções de pertinência (que serão apresentadas com maiores detalhes no Capítulo 4) permite obter uma representação exata do sistema. O método completo constitui-se de modelagem, redução de regras e projeto de reguladores. Por ser um método de modelagem exata, foi escolhido para comparar os resultados obtidos neste trabalho.

O segundo método de construção foi proposto em Teixeira e Żak (1999). Os modelos obtidos com este método permitem uma melhor aproximação local do sistema do que o método de linearização por Taylor. Devido à sua versatilidade, o método tem sido utilizado por diversos autores para construir modelos locais lineares até mesmo para sistemas que utilizam modelos *fuzzy* (veja no Capítulo 2).

Baseado no método de construção de Teixeira e Żak (1999) será proposto um novo método para determinar os modelos locais. A idéia deste novo método é obter uma melhor aproximação local do sistema. Para isto serão acrescentados novos graus de liberdade ao sistema, em forma de pré-compensação.

Neste capítulo serão descritos apenas os modelos locais. Nos próximos capítulos serão abordados as funções de pertinência e o projeto de reguladores.

3.2 Forma Generalizada do Sistema Fuzzy Takagi-Sugeno

Neste método de construção, os modelos locais são obtidos em função da região de operação. Os modelos correspondem aos valores máximos e mínimos das funções não-lineares do sistema. Desta forma o número de modelos está diretamente relacionado ao número de funções não-lineares. Esta técnica de construção permite modelar uma grande variedade de sistemas que estejam no intervalo de operação. Portanto, na construção dos modelos não são consideradas particularidades do comportamento das funções não-lineares, mas apenas seus valores extremos. Por esta razão o método de representação exata é conhecido com Forma Generalizada.

No método proposto em Taniguchi et al. (2001) para determinar os modelos locais foi considerada a seguinte classe de sistemas não-lineares:

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t))x_j(t) + \sum_{k=1}^{m} g_{ik}(\mathbf{x}(t))u_k(t) \tag{3.1}$$

sendo que $i = 1, 2, \ldots, r$, r é o número de regras, n e m denotam, respectivamente, o número de estados e entradas e $\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t))$ e $g_{ik}(\mathbf{x}(t))$ são funções de $\mathbf{x}(t)$, sendo $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ldots x_n(t)]^T$.

Para obter a forma generalizada deste método, considere as seguintes variáveis:

$$\begin{aligned} a_{ij1} &\equiv \underset{\mathbf{x}(t)}{max}\{\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t))\}, & a_{ij2} &\equiv \underset{\mathbf{x}(t)}{min}\{\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t))\}, \\ b_{ik1} &\equiv \underset{\mathbf{x}(t)}{max}\{g_{ik}(\mathbf{x}(t))\}, & b_{ik2} &\equiv \underset{\mathbf{x}(t)}{min}\{g_{ik}(\mathbf{x}(t))\}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Logo, para representar o sistema de simulação com a forma generalizada são necessários 2^s modelos locais, sendo s o número de não-linearidades existentes no sistema (Taniguchi et al., 2001). O exemplo a seguir apresenta detalhes sobre este fato.

Exemplo 1

Considere por exemplo a função $\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t)) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, sendo que, de (3.2), $\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t)) \in [a_{ij2}, a_{ij1}]$ e que $a_{ij2} \neq a_{ij1}$ (isto é, $a_{ij1} > \ a_{ij2}$).

Neste exemplo será mostrado que $\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t))$ pode ser representada, de forma exata, por um modelo *fuzzy* TS, considerando apenas dois modelos locais: a_{ij1} e a_{ij2}. Ou seja, será provado que existem $\sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t))$ e $\sigma_{ij2}(\mathbf{x}(t))$ tais que

$$\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t)) = \sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t))a_{ij1} + \sigma_{ij2}(\mathbf{x}(t))a_{ij2}, \tag{3.3}$$

$$\sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t)) + \sigma_{ij2}(\mathbf{x}(t)) = 1, \quad \text{com} \tag{3.4}$$

$$\sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t)) \geq 0 \quad \text{e} \quad \sigma_{ij2}(\mathbf{x}(t)) \geq 0. \tag{3.5}$$

Efetuando a substituição de (3.4) em (3.3), então,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t)) &= \sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t))a_{ij1} + (1 - \sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t)))a_{ij2} \\ &= (a_{ij1} - a_{ij2})\sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t)) + a_{ij2}. \end{aligned}$$

Logo, considerando que $a_{ij1} > a_{ij2}$, segue que

$$\sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t)) = \frac{\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t)) - a_{ij2}}{a_{ij1} - a_{ij2}}. \tag{3.6}$$

Como $\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t)) \in [a_{ij2}, a_{ij1}]$ e $a_{ij1} - a_{ij2} > 0$, então note que de (3.6), $\sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t)) = 0$ para $\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t)) = a_{ij2}$, $\sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t)) = 1$ para $\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t)) = a_{ij1}$, e $\sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t)) \in (0,1)$ para $\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t)) \in (a_{ij2}, a_{ij1})$. Desta forma $0 \leq \sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t)) \leq 1$ e assim, note que

$$\sigma_{ij2}(\mathbf{x}(t)) = 1 - \sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t)) \tag{3.7}$$

também satisfaz a relação $0 \leq \sigma_{ij2}(\mathbf{x}(t)) \leq 1$. Desta forma, $\sigma_{ij2}(\mathbf{x}(t))$ e $\sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t))$ satisfazem as equações (3.3) e (3.5), que correspondem à representação exata de $\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t))$ através dos modelos *fuzzy* TS.

Considere agora, sem perda de generalidade, por exemplo, que em (3.1):

$$\dot{x}_i(t) = \tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t))x_j(t) + g_{ij}(\mathbf{x}(t))u(t). \tag{3.8}$$

Tendo em vista que de (3.2), $\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t)) \in [a_{ij2}, a_{ij1}]$ e $g_{ij}(\mathbf{x}(t)) \in [b_{ij2}, b_{ij1}]$, então, usando os passos descritos acima para a função $\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t))$, é possível obter $\sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t))$, $\sigma_{ij2}(\mathbf{x}(t))$, $\xi_{ij1}(\mathbf{x}(t))$ e $\xi_{ij2}(\mathbf{x}(t))$ tais que:

$$\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t)) = \sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t))a_{ij1} + \sigma_{ij2}(\mathbf{x}(t))a_{ij2}, \tag{3.9}$$

$$g_{ij}(\mathbf{x}(t)) = \xi_{ij1}(\mathbf{x}(t))b_{ij1} + \xi_{ij2}(\mathbf{x}(t))b_{ij2}, \quad \text{com} \tag{3.10}$$

$$\sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t)) + \sigma_{ij2}(\mathbf{x}(t)) = 1, \quad \xi_{ij1}(\mathbf{x}(t)) + \xi_{ij2}(\mathbf{x}(t)) = 1 \quad \text{e} \tag{3.11}$$

$$\sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t)) \geq 0, \quad \sigma_{ij2}(\mathbf{x}(t)) \geq 0, \quad \xi_{ij1}(\mathbf{x}(t)) \geq 0, \quad \text{e} \quad \xi_{ij2}(\mathbf{x}(t)) \geq 0. \tag{3.12}$$

Substituindo (3.9) e (3.10) em (3.8) e considerando (3.11) e (3.12), note que:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= (\sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t))a_{ij1} + \sigma_{ij2}(\mathbf{x}(t))a_{ij2})x_j(t) + (\xi_{ij1}(\mathbf{x}(t))b_{ij1} + \xi_{ij2}(\mathbf{x}(t))b_{ij2})u(t) \\ &= (\xi_{ij1}(\mathbf{x}(t)) + \xi_{ij2}(\mathbf{x}(t)))(\sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t))a_{ij1} + \sigma_{ij2}(\mathbf{x}(t))a_{ij2})x_1(t) \\ &\quad +(\sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t)) + \sigma_{ij2}(\mathbf{x}(t)))(\xi_{ij1}(\mathbf{x}(t))b_{ij1} + \xi_{ij2}(\mathbf{x}(t))b_{ij2})u(t).\end{aligned} \tag{3.13}$$

Agora, defina

$$\begin{aligned}\alpha_1(\mathbf{x}(t)) &= \xi_{ij1}(\mathbf{x}(t))\sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t)), \quad \alpha_2(\mathbf{x}(t)) = \xi_{ij1}(\mathbf{x}(t))\sigma_{ij2}(\mathbf{x}(t)), \\ \alpha_3(\mathbf{x}(t)) &= \xi_{ij2}(\mathbf{x}(t))\sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t)), \quad \alpha_4(\mathbf{x}(t)) = \xi_{ij2}(\mathbf{x}(t))\sigma_{ij2}(\mathbf{x}(t)).\end{aligned} \tag{3.14}$$

Então, note que, de (3.11), (3.12) e (3.14),

$$\sum_{i=1}^{4} \alpha_i(\mathbf{x}(t)) = (\xi_{ij1}(\mathbf{x}(t)) + \xi_{ij2}(\mathbf{x}(t)))(\sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t)) + \sigma_{ij2}(\mathbf{x}(t))) = 1, \tag{3.15}$$

$$\alpha_i(\mathbf{x}(t)) \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{3.16}$$

e de (3.13) e (3.14)

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) = &\left[\alpha_1(\mathbf{x}(t))a_{ij1} + \alpha_2(\mathbf{x}(t))a_{ij2} + \alpha_3(\mathbf{x}(t))a_{ij1} + \alpha_4(\mathbf{x}(t))a_{ij2}\right] x_1(t) \\ &+ \left[\alpha_1(\mathbf{x}(t))b_{ij1} + \alpha_2(\mathbf{x}(t))b_{ij2} + \alpha_3(\mathbf{x}(t))b_{ij1} + \alpha_4(\mathbf{x}(t))b_{ij2}\right] u(t).\end{aligned} \tag{3.17}$$

Finalmente, observe que (3.15), (3.16) e (3.17) permitem um descrição exata de (3.8) através dos modelos TS. Note que em (3.17), os quatro modelos locais relacionados com $\alpha_1(\mathbf{x}(t))$, $\alpha_2(\mathbf{x}(t))$, $\alpha_3(\mathbf{x}(t))$ e $\alpha_4(\mathbf{x}(t))$, correspondem a todas combinações possíveis de (a_{ij1}, a_{ij2}) e (b_{ij1}, b_{ij2}), que são os vértices do politopo.

No primeiro caso estudado neste exemplo, note que foi possível modelar exatamente o sistema não-linear com uma função não-linear utilizando dois modelos locais. Já no segundo caso, a modelagem exata do sistema não-linear com duas não-linearidades, foi possível empregando quatro modelos locais. Segundo este método, se o sistema apresentar s funções não-lineares, serão necessários 2^s modelos locais para a sua representação exata através de modelos TS.

O método ilustrado neste exemplo, descrito em Taniguchi et al. (2001), valoriza os modelos *fuzzy* TS, pois ele mostra que é possível modelar exatamente uma grande classe de sistemas não-lineares com modelos *fuzzy* TS, com um número finito de modelos locais.

Entretanto, uma crítica a este método é o elevado número de modelos locais necessários, à medida que o número de não-linearidades cresce, o que pode dificultar o projeto e/ou a implementação prática de sistemas de controle.

Uma das contribuições desta tese é a apresentação de um novo método para a modelagem *fuzzy* TS, com um número reduzido de modelos locais.

Exemplo 2

Considere o sistema que descreve as equações dinâmicas de um pêndulo invertido, descrito no Apêndice A. O sistema *fuzzy* TS generalizado pode ser construído a partir da equação (A.18).

Deseja-se obter a aproximação do sistema utilizando o modelo *fuzzy* TS na região de operação de $0 \leq x_1 \leq \pi/3$, considerando-se que u_p é o sinal de controle e é arbitrário.

O primeiro passo é colocar (A.18) na forma (3.1):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{g\sin(x_1)}{x_1(4l/3 - mla\cos^2(x_1))} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-mag\sin(2x_1)/2}{2x_1(4/3 - ma\cos^2(x_1))} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-a\cos(x_1)}{(4l/3 - mla\cos^2(x_1))} \\ 0 \\ \frac{4a/3}{(4/3 - ma\cos^2(x_1))} \end{bmatrix} u_p, \tag{3.18}$$

sendo g=9,8 m/s^2, M=8kg, m=2kg, l=0.5 m. Em seguida, de (3.1) e (3.18) obtenha as funções $\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t))$ e $g_{ij}(\mathbf{x}(t))$:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{21}(\mathbf{x}(\mathbf{t})) &= \frac{g\sin(x_1)}{x_1(4l/3 - mla\cos^2(x_1))}, \\ \tilde{f}_{41}(\mathbf{x}(\mathbf{t})) &= \frac{-mag\sin(2x_1)}{2x_1(4l/3 - ma\cos^2(x_1))}, \\ g_{21}(\mathbf{x}(\mathbf{t})) &= \frac{-a\cos(x_1)}{(4l/3 - ma\cos^2(x_1))}, \\ g_{41}(\mathbf{x}(\mathbf{t})) &= \frac{4a/3}{(4/3 - ma\cos^2(x_1))}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Então (A.18) é reescrita como

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2, \\ \dot{x_2} &= \tilde{f}_{21}(\mathbf{x}(t))x_1 + g_{21}(\mathbf{x}(t))u_p, \\ \dot{x_3} &= x_4, \\ \dot{x_4} &= \tilde{f}_{41}(\mathbf{x}(t))x_1 + g_{41}(\mathbf{x}(t))u_p. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Utilizando (3.2) e (3.20) obtêm-se os valores de a_{ij1}, a_{ij2}, b_{ik1} e b_{ik2}:

$$\begin{aligned} a_{211} &= 17.2923, & a_{212} &= 12.6304, \\ a_{411} &= -0.6315, & a_{412} &= -1.7289, \\ b_{211} &= -0.0779, & b_{212} &= -0.1765, \\ b_{411} &= 0.1176, & b_{412} &= 0.1039. \end{aligned} \tag{3.21}$$

O sistema possui quatro não-linearidades. Portanto, para obter uma aproximação exata do sistema (3.18) com os modelos fuzzy TS são necessários dezesseis (2^4) modelos locais do tipo:

$$\mathbf{A}_g = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41q} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_g = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{21q} \\ 0 \\ b_{41q} \end{bmatrix}, \tag{3.22}$$

sendo $g = 1, \ldots, 16$ e $q = 1, 2$.

Portanto, os modelos locais são obtidos realizando as seguintes combinações:

$$
\begin{array}{ll}
a_{211}a_{411}b_{211}b_{411}, & a_{211}a_{411}b_{211}b_{412}, \\
a_{212}a_{411}b_{211}b_{411}, & a_{212}a_{411}b_{211}b_{412}, \\
a_{211}a_{412}b_{211}b_{411}, & a_{211}a_{412}b_{211}b_{412}, \\
a_{212}a_{412}b_{211}b_{411}, & a_{212}a_{412}b_{211}b_{412}, \\
a_{211}a_{411}b_{212}b_{411}, & a_{211}a_{411}b_{212}b_{412}, \\
a_{212}a_{411}b_{212}b_{411}, & a_{212}a_{411}b_{212}b_{412}, \\
a_{211}a_{412}b_{212}b_{411}, & a_{211}a_{412}b_{212}b_{412}, \\
a_{212}a_{412}b_{212}b_{411}, & a_{212}a_{412}b_{212}b_{412},
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_5 = \mathbf{A}_9 = \mathbf{A}_{13}, & \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_6 = \mathbf{A}_{10} = \mathbf{A}_{14}, \\
\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_7 = \mathbf{A}_{11} = \mathbf{A}_{15}, & \mathbf{A}_4 = \mathbf{A}_8 = \mathbf{A}_{12} = \mathbf{A}_{16},
\end{array}
\tag{3.23}
$$

$$
\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 17.2923 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.6315 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12.6304 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.6315 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
$$

$$
\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 17.2923 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.7289 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12.6304 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.7289 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.24}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_3 = \mathbf{B}_4, & \mathbf{B}_5 = \mathbf{B}_6 = \mathbf{B}_7 = \mathbf{B}_8, \\
\mathbf{B}_9 = \mathbf{B}_{10} = \mathbf{B}_{11} = \mathbf{B}_{12}, & \mathbf{B}_{13} = \mathbf{B}_{14} = \mathbf{B}_{15} = \mathbf{B}_{16},
\end{array}
\tag{3.25}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -0.0779 & 0 & 0.1176 \end{bmatrix}, & \mathbf{B}_5 = \begin{bmatrix} 0 & -0.1765 & 0 & 0.1176 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{B}_9 = \begin{bmatrix} 0 & -0.0779 & 0 & 0.1039 \end{bmatrix}, & \mathbf{B}_{13} = \begin{bmatrix} 0 & -0.1765 & 0 & 0.1039 \end{bmatrix}.
\end{array}
\tag{3.26}
$$

Observação 2 *Pode-se verificar que, devido às características simétricas das funções não-lineares, os mesmos modelos locais obtidos acima também representam de forma exata o sistema no intervalo $-\pi/3 \leq x_1 \leq \pi/3$ rad, uma vez que na construção dos modelos são considerados os valores máximos e mínimos das funções.*

3.3 Modelos Locais Lineares Ótimos

A idéia central deste método de construção é obter os modelos locais de forma que, no ponto de definição deste modelo, os valores do modelo de simulação e do modelo *fuzzy* sejam coincidentes e sejam os mais próximos possíveis na vizinhança deste ponto. Desta forma é possível obter representação exata do sistema no ponto de definição e uma boa representação nas suas proximidades. Para isto são consideradas as características do sistema nos pontos de definição dos modelos como os valores das funções não-lineares e dos gradientes destas funções.

Em Teixeira e Żak (1999) os modelos locais são construídos para sistemas não-lineares da forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \tag{3.27}$$

sendo que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é um ponto de equilíbrio, ou seja, $f(0) = 0$.

Considere um estado de operação $\mathbf{x}_{0j}$, $j = 1, \ldots, r$, que não coincida com um estado de equilíbrio de (3.27), isto é, $f(\mathbf{x}_{0j}) \neq 0$. O objetivo é construir um modelo linear em $\mathbf{x}$ e $\mathbf{u}$ que aproxime o comportamento de (3.27) na vizinhança do estado de operação $\mathbf{x}_{0j}$. Então se deseja encontrar matrizes constantes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ tais que para uma entrada $\mathbf{u}$ arbitrária, na vizinhança de $\mathbf{x}_{0j}$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} \approx \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u} \tag{3.28}$$

e

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_{0j}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}_{0j})\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{0j} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u}. \tag{3.29}$$

Como $\mathbf{u}$ é arbitrária, tem-se que:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}_{0j}) = \mathbf{B}, \tag{3.30}$$

e na vizinhança de $\mathbf{x}_{0j}$:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{3.31}$$

e

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_{0j}) = \mathbf{A}\mathbf{x}_{0j}. \tag{3.32}$$

Sejam $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}) \ldots f_n(\mathbf{x})]^T$ e $\mathbf{a}_i^T$ a linha i da matriz $\mathbf{A}$. Então, as condições (3.31) e (3.32) são equivalentes às seguintes condições:

$$f_i(\mathbf{x}) \approx \mathbf{a}_i^T\mathbf{x}, \quad i = 1, \ldots, n \tag{3.33}$$

e

$$f_i(\mathbf{x}_{0j}) = \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}_{0j}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, r. \tag{3.34}$$

Expandindo o lado esquerdo de (3.34) em $\mathbf{x}_{0j}$ e desprezando os termos de ordem maior ou igual a dois, então:

$$f_i(\mathbf{x}_{0j}) + \nabla^T f_i(\mathbf{x}_{0j})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{0j}) \approx \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \tag{3.35}$$

sendo que $\nabla f_i(\mathbf{x}) = [\partial f_i(\mathbf{x})/\partial x_1 \ldots \partial f_n(\mathbf{x})/\partial x_n]^T$ é o vetor gradiente de $f_i(\mathbf{x})$.

Agora, usando (3.34), pode-se representar (3.35) como

$$\nabla^T f_i(\mathbf{x}_{0j})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{0j}) \approx \mathbf{a}_i^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{0j}) \tag{3.36}$$

para $\mathbf{x}$ arbitrário, mas próximo de $\mathbf{x}_{0j}$.

Resta agora determinar um vetor constante $\mathbf{a}_i$, que seja tão próximo quanto possível de $\nabla f_i(\mathbf{x}_{0j})$ e satisfaça a restrição $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x}_{0j} = f_i(\mathbf{x}_{0j})$.

Considere a seguinte função energia:

$$E = \tfrac{1}{2} \|\nabla f_i(\mathbf{x}_{0j}) - \mathbf{a}_i\|_2^2$$

sendo que para $\mathbf{w} \in R^p$, então $\|\mathbf{w}\|_2^2 = \mathbf{w}^T \mathbf{w}$.

Então pode-se formular o problema de determinar $\mathbf{a}_i$ como um problema de otimização com restrição da forma

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\mathbf{a}_i}{min}\ E \\ \text{sujeito a} \quad \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}_{0j} = f_i(\mathbf{x}_{0j}). \end{array}\right\} \tag{3.37}$$

Note que (3.37) é um problema de otimização convexo com restrição. Isto significa que a condição de primeira ordem necessária para o mínimo global de E é também suficiente (veja Chong e Żak (1996)). As condições de primeira ordem são

$$\nabla_{\mathbf{a}_i} E + \lambda \nabla_{\mathbf{a_i}} \left(\mathbf{a}_i^T \mathbf{x}_{0j} - f_i(\mathbf{x}_{0j}) \right) = \mathbf{0}, \tag{3.38}$$

$$\mathbf{a}_i^T \mathbf{x}_{0j} = f_i(\mathbf{x}_{0j}), \tag{3.39}$$

sendo λ o multiplicador de Lagrange e o subscrito $\mathbf{a_i}$ em $\nabla_{\mathbf{a_i}}$ indica que o gradiente ∇ é calculado com relação ao vetor $\mathbf{a_i}$.

Desenvolvendo a diferenciação requerida em (3.38) tem-se

$$\mathbf{a}_i - \nabla f_i(\mathbf{x}_{0j}) + \lambda \mathbf{x}_{0j} = \mathbf{0}, \tag{3.40}$$

$$\mathbf{a}_i^T \mathbf{x}_{0j} = f_i(\mathbf{x}_{0j}). \tag{3.41}$$

Considerando $\mathbf{x}_{0j} \neq \mathbf{0}$, pré-multiplicando (3.40) por $\mathbf{x}_{0j}^T$ e substituindo (3.41) na equação resultante obtém-se

$$\lambda = \frac{\mathbf{x}_{0j}^T \nabla f_i(\mathbf{x}_{0j}) - f_i(\mathbf{x}_{0j})}{\|\mathbf{x}_{0j}\|^2}. \tag{3.42}$$

Substituindo λ dada por (3.42) em (3.40),obtém-se

$$\mathbf{a}_i = \nabla f_i(\mathbf{x}_{0j}) + \frac{f_i(\mathbf{x}_{0j}) - \mathbf{x}_{0j}^T \nabla f_i(\mathbf{x}_{0j})}{\|\mathbf{x}_{0j}\|^2}\mathbf{x}_{0j}, \quad \mathbf{x}_{0j} \neq \mathbf{0}. \tag{3.43}$$

De (3.40), verifica-se que quando $\mathbf{x}_{0j}$ é o ponto de equilíbrio, isto é, $\mathbf{x}_{0j} = 0$, então

$$\mathbf{a}_i = \nabla f_i(\mathbf{x}_{0j}), \tag{3.44}$$

que é um caso especial de (3.43). Portanto,

$$\mathbf{a}_i = \begin{cases} \nabla f_i(\mathbf{x}_{0j}) + \dfrac{f_i(\mathbf{x}_{0j}) - \mathbf{x}_{0j}^T \nabla f_i(\mathbf{x}_{0j})}{\|\mathbf{x}_{0j}\|^2}\mathbf{x}_{0j}, & \text{se} \quad \mathbf{x}_{0j} \neq \mathbf{0}, \\ \\ \nabla f_i(\mathbf{x}_{0j}), & \text{se} \quad \mathbf{x}_{0j} = \mathbf{0}. \end{cases} \tag{3.45}$$

Assim, $\mathbf{a_p} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n]^T$, $\mathbf{a}_i$, $i = 1, \ldots, n$ obtida pela equação (3.45), e de (3.30) $\mathbf{G}(\mathbf{x}_{0j}) = \mathbf{B}$, definem o modelo local para $\mathbf{x} \approx \mathbf{x}_{0j}$. Este procedimento pode ser repetido para cada estado de operação.

Note que a linearização por séries de Taylor é um caso particular de (3.45).

Exemplo 3

Considere o sistema (A.18) do problema do equilíbrio e balanço de um pêndulo invertido sobre um carro descrito no Apêndice A (também descritos em Teixeira e Żak (1999)), que tem a forma

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_2 \\ \dfrac{g\sin(x_1)}{4l/3 - mla\cos^2(x_1)} \\ x_4 \\ \dfrac{-mag\sin(2x_1)/2}{4/3 - ma\cos^2(x_1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{-a\cos(x_1)}{4l/3 - mla\cos^2(x_1)} \\ 0 \\ \dfrac{4a/3}{4/3 - ma\cos^2(x_1)} \end{bmatrix} u_p \\ &= \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ f_3(\mathbf{x}) \\ f_4(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ g_2(\mathbf{x}) \\ g_3(\mathbf{x}) \\ g_4(\mathbf{x}) \end{bmatrix} u_p, \end{aligned} \tag{3.46}$$

sendo g=9,8 m/s^2, M=8kg, m=2kg, l=0.5 m.

Deseja-se obter os modelos locais lineares em dois pontos de sistema: o primeiro em torno de $x_1 = 0\ rad$, $(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1)$, e o outro modelo em torno de $x_1 = \pi/3\ rad$, $(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2)$. Em ambos os modelos, assumem-se que u_p é arbitrária.

Note que o modelo não-linear (3.46) está na forma (3.27).

As funções $f_2(\mathbf{x})$ e $f_4(\mathbf{x})$ contém as não-linearidades do sistema. Portanto, para obter os modelos locais $(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1)$ e $(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2)$ é necessário calcular as linhas a_2^T, a_4^T e as linhas b_2 e b_4 de cada modelo. Considere o elemento a_{ikj} (ou b_{ikj}) como o elemento da linha i, coluna k e modelo local j.

O primeiro modelo local será construído em torno do estado de operação $\mathbf{x} = 0$, (então $\mathbf{x}_{01} = \mathbf{0}$ e $x_1 = 0$) utilizando (3.45).

$$f_2(\mathbf{x}_{01}) = \frac{g\sin(0)}{4l/3 - mla\cos^2(0)}, \qquad f_4(\mathbf{x}_{01}) = \frac{-mag\sin(0)/2}{4/3 - ma\cos^2(0)}.$$

Então, de (3.45)

$$a_{211} = \frac{\partial f_2(x_1)}{\partial x_1} = 17.2941, \qquad a_{411} = \frac{\partial f_4(x_1)}{\partial x_1} = -1.7294,$$

e

$$b_{211} = \frac{-a\cos(0)}{4l/3 - mla\cos^2(0)} = -0.1765, \quad b_{411} = \frac{4a/3}{4/3 - ma\cos^2(0)} = 0.1176.$$

Portanto, o primeiro modelo local, utilizando a fórmula (3.45) e (3.30), é dado por:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 17.2941 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.7294 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.47}$$

e

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1765 \\ 0 \\ 0.1176 \end{bmatrix}. \tag{3.48}$$

O segundo modelo local é obtido usando (3.45) e (3.30) com $x_1 = \pi/3\ rad$ e $\mathbf{x}_{02} = [\pi/3\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^T$.

Primeiro é calculada $\mathbf{a}_2^T$, segunda linha de $\mathbf{A}_2$. Note que

$$f_2(\mathbf{x}_{02}) = \frac{g\sin(\pi/3)}{4l/3 - mla\cos^2(\pi/3)} = 13.2266,$$

$$\nabla f_2(\mathbf{x}_{02}) = [5.8512 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T.$$

então, de (3.45),

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_2 &= \nabla f_2(\mathbf{x}_{02}) + \frac{f_2(\mathbf{x}_{02}) - \mathbf{x}_{02}^T \nabla f_2(\mathbf{x}_0)}{||\mathbf{x}_{02}||^2}\mathbf{x}_{02} = [12.6304 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, \\
\mathbf{a}_2^T &= [12.6304 \quad 0 \quad 0 \quad 0], \\
a_{212} &= 12.6304.
\end{aligned}$$

Da mesma forma calcula-se $\mathbf{a}_4^T$, a quarta linha da matriz $\mathbf{A}_2$, do segundo modelo local:

$$f_4(\mathbf{x}_{02}) = \frac{g\sin(\pi/3)}{4l/3 - mla\cos^2(\pi/3)} = -0.6613,$$

$$\nabla f_4(\mathbf{x}_{02}) = [0.8529 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T,$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_4 &= \nabla f_4(\mathbf{x}_{02}) + \frac{f_4(\mathbf{x}_{02}) - \mathbf{x}_{02}^T \nabla f_4(\mathbf{x}_{02})}{||\mathbf{x}_{02}||^2}\mathbf{x}_{02} = [-0.6315 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, \\
\mathbf{a}_4^T &= [-0.6315 \quad 0 \quad 0 \quad 0], \\
a_{412} &= -0.6315.
\end{aligned}$$

E os valores de b_{212} e b_{412} são dados por

$$\begin{aligned}
b_{212} &= \frac{-a\cos(\pi/3)}{4l/3 - mla\cos^2(\pi/3)} = -0.0779, \\
b_{412} &= \frac{4a/3}{4/3 - ma\cos^2(\pi/3)} = 0.1038.
\end{aligned}$$

Portanto, o segundo modelo em torno do ponto $x_1 = \pi/3\ rad$ é dado por

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12.6304 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.6315 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.49}$$

e

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0779 \\ 0 \\ 0.1038 \end{bmatrix}. \tag{3.50}$$

Utilizando a notação dos sistemas *fuzzy* TS, os dois modelos locais $(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1)$ e $(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2)$ podem descrever o sistema (3.46) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\text{Regra 1} \quad : \quad & \text{SE } x_1(t) \text{ está em torno de } 0\ rad, \\
& \text{ENTÃO} \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{u}(t).
\end{aligned} \tag{3.51}$$

$$\begin{array}{lll} \text{Regra 2} & : & \text{SE } x_1(t) \text{ está em torno de } \ \pm\pi/3\ rad, \\ & & \text{ENTÃO} \ \ \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_2\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t). \end{array} \tag{3.52}$$

Assim, um modelo *fuzzy* TS pode ser obtido da seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = (\alpha_1(x_1)\mathbf{A}_1 + \alpha_2(x_1)\mathbf{A}_2)x(t) + (\alpha_1(x_1)\mathbf{B}_1 + \alpha_2(x_1)\mathbf{B}_2)u(t),$$
$$\alpha_1(x_1) + \alpha_2(x_1) = 1, \quad \alpha_1(x_1) \geq 0 \quad \text{e} \quad \alpha_2(x_1) \geq 0.$$

Considerando que os modelos locais $(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1)$ e $(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2)$ obtidos pela fórmula (3.45) são ótimos, normalmente adota-se adicionalmente no estado de operação $\mathbf{x}_{0i}$, que o $\alpha_i(\mathbf{x})$ associado a esse ponto é $\alpha_i(\mathbf{x}_{0i}) = 1$ e $\alpha_j(\mathbf{x}_{0i}) = 0$, $j \neq i$, $j = 1, 2, \ldots, r$. Por exemplo, para o sistema (3.51), (3.52), então $\alpha_1(0) = 1$, $\alpha_2(0) = 0$, $\alpha_1(\pi/3) = 0$ e $\alpha_2(\pi/3) = 1$. Nesta situação, note que para $x_1 \approx 0$, $\alpha_1(x_1) \approx 1$, $\alpha_2(x_1) \approx 0$ e $\dot{\mathbf{x}} \approx \mathbf{A}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{B}_1 u_p$ e para $x_1 \approx \pi/3$, $\alpha_1(x_1) \approx 0$, $\alpha_2(x_1) \approx 1$ e $\dot{\mathbf{x}} \approx \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) + \mathbf{B}_2 u_p$.

Uma implementação também viável consiste em adotar $\alpha_i(\mathbf{x}_{0i}) \approx 1$ e $\alpha_j(\mathbf{x}_{0i}) \approx 0$ $j \neq i$, $j = 1, 2, \ldots, r$ no lugar de $\alpha_i(\mathbf{x}_{0i}) = 1$ e $\alpha_j(\mathbf{x}_{0i}) = 0$, $j \neq i$, $j = 1, 2, \ldots, r$, como descrito anteriormente.

Exemplos de funções de pertinência típicas representadas pelos $\alpha_{is}(\mathbf{x})$ foram apresentadas no Capítulo 2. Um método para a escolha ótima dos $\alpha_{is}(\mathbf{x})$, utilizando a fórmula (3.45), será proposto no Capítulo 4.

3.4 Obtenção de Modelos Locais Quando o Ponto de Equilíbrio Não é a Origem

Considere o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} \tag{3.53}$$

e suponha que ele apresente um único ponto de equilíbrio, $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$.

Logo,

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_0)\mathbf{u}_0. \tag{3.54}$$

Note que, de (3.53),

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}_0 + \mathbf{g}(\mathbf{x})(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0). \tag{3.55}$$

Assim, definindo

$$\Delta\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}_0, \quad \Delta\mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0 \ \text{ e } \ \Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \tag{3.56}$$

a equação (3.53) pode ser descrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \Delta\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\Delta\mathbf{u} \quad \text{ou} \\ \Delta\dot{\mathbf{x}} &= \Delta\mathbf{f}(\Delta\mathbf{x} + \mathbf{x}_0) + \mathbf{g}(\Delta\mathbf{x} + \mathbf{x}_0)\Delta\mathbf{u}. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Observe que, no ponto $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = (\mathbf{x_0}, \mathbf{u_0})$, $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\Delta\mathbf{u} = \mathbf{0}$ e de (3.54) e (3.57),

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \Delta\mathbf{f}(\Delta\mathbf{x} + \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}. \tag{3.58}$$

Desta forma, o ponto de equilíbrio $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ de (3.53) foi deslocado em (3.57). Este fato permite a aplicação da fórmula (3.45) no sistema (3.57), pois originalmente a fórmula supõe que o ponto de equilíbrio coincide com a origem.

Exemplo 4

Considere o projeto de controladores de excitação para um gerador síncrono de uma turbina térmica. Este projeto foi proposto em Zheng et al. (2001) e utiliza (3.45) para obter os modelos locais. É realizado o deslocamento do ponto de equilíbrio para origem utilizando (3.57).

O modelo dinâmico simplificado de um sistema de potência de barramento infinito de uma máquina com um retificador é descrito como a seguir:

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= 2\pi f_0(\omega - \varpi_0), \\ \dot{\omega} &= -\tfrac{D}{H}(\omega - \varpi_0) + \tfrac{\omega_0}{H}(P_m - P_e), \\ \dot{E}'_q &= (E_f - E_q)\tfrac{1}{T_{DO}} \end{aligned} \tag{3.59}$$

sendo que

$$\begin{aligned} E_q &= \tfrac{x_{d\sum}}{x_{d\sum}} E'_q - \tfrac{x_d - x'_d}{x'_{d\sum}} cos\delta . V_s \\ P_2 &= \tfrac{V_s E_q}{x_{d\sum}} sin\delta . \\ E_f &= k_A \tfrac{x_{ad}}{R_F}(u + d_d(t))) \end{aligned} \tag{3.60}$$

sendo δ a posição angular do rotor do gerador (G_q) com respeito a uma rotação síncrona de referência, que é selecionada aqui para ser o barramento infinito; ω é a velocidade angular do rotor; P_e e P_m são a potência ativa e potência mecânica de G_q, respectivamente, E_q é força eletromotriz (EMF) no eixo q de G_q; E'_q é EMF transiente no eixo q de G_q; E_f é a EMF equivalente na excitação do rolamento de G_q; x_d é a reatância do eixo d de G_q; x'_d é a reatância transiente do eixo d de G_q; x_T e x_L são as reatâncias do transformador e da linha de transmissão, respectivamente, $x_{d\sum} = x_d + x_T + x_L$, $x'_{d\sum} = x'_d + x_T + x_L$, x_{ad} é a reatância mútua entre os rolamentos de excitação e do estator; R_f é a resistência do enrolamento de excitação; k_A é o ganho do amplificador, V_s é a tensão da barra; u é a entrada de controle; e $d_d(t)$ denota o distúrbio externo.

Redefina

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta \\ \omega \\ E'_q \end{pmatrix}. \tag{3.61}$$

Suponha que x_{10} é o valor de x_1 na condição do estado de operação.

Agora defina as novas variáveis de estado e entrada de controle como

$$\begin{array}{rcl} \Delta x_1 & = & x_1 - x_{10}, \\ \Delta x_2 & = & x_2 - x_{20}, \\ \Delta x_3 & = & x_3 - x_{30}. \end{array} \tag{3.62}$$

O modelo dinâmico do sistema de potência pode ser reescrito como:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Delta\dot{x}_1 & = & 2\pi f_0 \Delta x_2 =: f_1(\Delta x) \\ \Delta\dot{x}_2 & = & \frac{D}{H}\Delta x_2 + \frac{x_{20}}{H}\Bigg[P_m - \frac{V_s}{x'_{d\sum}}(\Delta x_3 + x_{30}) sin(\Delta x_1 + x_{10}) \\ & & \qquad + \frac{(x_d - x'_d)V_s^2}{x_{d\sum} x'_{d\sum}} sin(\Delta x_1 + x_{10}) cos(\Delta x_1 + x_{10}) =: f_2(\Delta x)\Bigg] \\ \Delta\dot{x}_3 & = & -\frac{x_{d\sum}}{T_{Do} x'_{d\sum}}(\Delta x_3 + x_{30}) + \frac{x_d - x'_d}{T_{D0}} V_s cos(\Delta x_1 + x_{10}) + \frac{k_A x_{ad}}{T_{D0} R_f}(u_0 + \Delta_u + d_d(t)) \\ & =: & f_3(\Delta x) + \frac{k_A x_{ad}}{T_{D0}} R_f (u_0 + \Delta_u + d_d(t)). \end{array} \right. \tag{3.63}$$

Sejam os seguintes parâmetros do sistema: $f_0 = 50$Hz, $x_{20} = 1$p.u., $x_{10} = 60^o$, $H = 8.0$s; $D = 0.8$; $P_m = 0.79$ p.u.; $V_s = 1.0$ p.u.; $x_d = 1.5$ p.u.; $x'_d = 0.3$ p.u.; $x_{ad} = 1.3$ p.u.; $x_L = (0.8 + \Delta x_L)$ p.u.; $\Delta x_L = 0.0008$ p.u.; $x_T = 0.01$ p.u.; $k_A = 10$; $T_{D0} = 3.0$s $R_f = 0.0045$p.u. Estes parâmetros produzem $x_{30} = 1.2723$ p.u. e $u_0 = 7.2942 \times 10^{-4}$ p.u. Note que todos os parâmetros, exceto x_L, são supostamente conhecidos. O parâmetro x_L é suposto ter alguma perturbação.

Geralmente, a variável de estado x_1 é difícil de ser medida. Portanto, a equação de saída do sistema é dada como a seguir:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} \quad \text{com} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.64}$$

O limite físico da tensão de excitação conduz à restrição sobre a entrada de controle Δu:

$$\frac{k_A x_{ad}}{R_f} \leq |u_0 + \Delta u| \leq 3.0\text{p.u.}. \tag{3.65}$$

ou equivalentemente

$$-0.0018p.u. \leq \Delta_u \leq 0.00031p.u.. \tag{3.66}$$

Os modelo locais *fuzzy* do sistema são obtidos através da linearização do sistema (3.63) em torno dos pontos $\Delta x^1 = [-30,\ 0,\ 0]^T$, $\Delta x^2 = [0,\ 0,\ 0]^T$, e $\Delta x^1 = [+30,\ 0,\ 0]^T$, respectivamente.

Em termos de regras Se-Então, os modelos fuzzy admitem a seguinte forma:

Regra 1 : Se Δx_1 é pequeno (isto é, Δx_1 está em torno de -30^0, $x_1 \approx 30^0$,
Então
$$\dot{x}(t) = (\mathbf{A}_1 + \Delta\mathbf{A}_1)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1(u_0 + \Delta u + d_d(t)).$$

Regra 2 : Se Δx_1 é médio (isto é, Δx_1 está em torno de 0^0, $x_1 \approx 60^0$,
Então
$$\dot{x}(t) = (\mathbf{A}_2 + \Delta\mathbf{A}_2)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2(u_0 + \Delta u + d_d(t)).$$

Regra 3 : Se Δx_1 é grande (isto é, Δx_1 está em torno de $+30^0$, $x_1 \approx 90^0$,
Então
$$\dot{x}(t) = (\mathbf{A}_3 + \Delta\mathbf{A}_3)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_3(u_0 + \Delta u + d_d(t))$$

sendo que $\Delta\mathbf{A}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ considera os parâmetros de perturbação em x_L.

Usando (3.45) as matrizes $\mathbf{A}_i$ e $\mathbf{B}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ são obtidas como a seguir (note que $\Delta x_L = 0$ no cálculo de $\mathbf{A}_i$ e $\mathbf{B}_i$):

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 314.1600 & 0 \\ -0.1002 & -0.1000 & -0.0563 \\ -0.2519 & 0 & -0.6937 \end{bmatrix}, \tag{3.67}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 314.1600 & 0 \\ -0.1009 & -0.1000 & -0.0975 \\ -0.3121 & 0 & -0.6937 \end{bmatrix}, \tag{3.68}$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 314.1600 & 0 \\ -0.0850 & -0.1000 & -0.1126 \\ -0.3441 & 0 & -0.6937 \end{bmatrix}, \tag{3.69}$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 962.9630 \end{bmatrix}. \tag{3.70}$$

3.4.1 Simetria dos Pontos de Operação

O pêndulo invertido, cuja modelagem matemática é descrita em (A.18), no Apêndice A, possui funções com as seguintes características:

$$\begin{aligned} f(-\mathbf{x}) &= -f(\mathbf{x}); \\ \nabla f(-\mathbf{x}) &= \nabla f(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{3.71}$$

Para o pêndulo invertido, note também que, de (3.30): $g(\mathbf{x}) = g(-\mathbf{x})$.

Considere os sistemas cujos pontos de operação são simétricos em relação à origem e possuem as características descritas em (3.71), por exemplo, para um intervalo $-p_2 \leq x_f \leq p_2$. Veja a Figura 3.1.

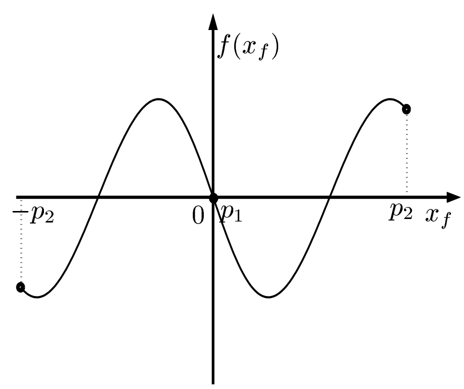

Figura 3.1: Conjunto de pontos simétricos em relação à origem.

Para obter a aproximação *fuzzy* com modelos locais obtidos com (3.45) devem ser considerados apenas os pontos na origem $x_f = p_1$ e em um dos pontos simétricos, por exemplo, $x_f = p_2$, pois os modelos locais para pontos simétricos são iguais. Para constatação, considere a equação (3.45) para determinar o modelo local no ponto de operação $-\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_0 \neq 0$.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i &= \nabla f_i(-\mathbf{x}_0) + \frac{f_i(-\mathbf{x}_0) - (-\mathbf{x}_0^T)\nabla f_i(-\mathbf{x}_0)}{\|-\mathbf{x}_0\|^2}(-\mathbf{x}_0) \\ &= \nabla f_i(-\mathbf{x}_0) + \frac{f_i(-\mathbf{x}_0) + \mathbf{x}_0^T\nabla f_i(-\mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x}_0\|^2}(-\mathbf{x}_0) \\ &= \nabla f_i(-\mathbf{x}_0) + \frac{-f_i(-\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0^T\nabla f_i(-\mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x}_0\|^2}\mathbf{x}_0. \end{aligned} \tag{3.72}$$

De (3.71), para o ponto de operação $-\mathbf{x}_0$, o modelo local é definido por:

$$\mathbf{a}_i = \nabla f_i(\mathbf{x}_0) + \frac{f_i(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0^T\nabla f_i(\mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x}_0\|^2}\mathbf{x}_0. \tag{3.73}$$

Logo, o modelo local para $-\mathbf{x}_0$ em (3.73) é igual ao modelo local obtido com $\mathbf{x}_0$ em (3.45). A propriedade da simetria também será válida para as funções de pertinência construídas a partir dos modelos locais obtidos com (3.45), como será visto no Capítulo 4.

3.5 Construção de Modelos Locais com Novo Grau de Liberdade

Nesta seção será proposto um novo método para construir os modelos locais acrescentando um novo grau de liberdade ao sistema (3.27), antes da aplicação da mesma análise que gerou a fórmula (3.45), para a determinação dos novos modelos locais ótimos.

O novo sistema resultante da inserção dos novos graus de liberdade será composto por funções não-lineares diferentes das funções originais. Os modelos locais serão construídos de forma a obter uma melhor aproximação do sistema *fuzzy* a este novo modelo pré-compensado, nas vizinhanças dos pontos onde são definidos os modelos.

Considere o sistema de pré-compensação de controle descrito na Figura 3.2.

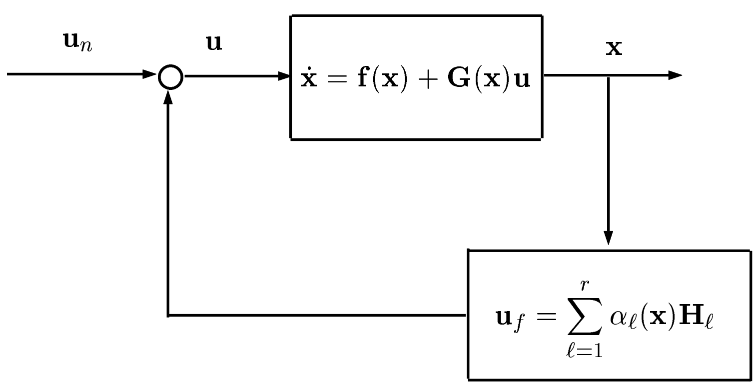

Figura 3.2: Sistema não-linear com novo grau de liberdade.

O termo

$$\sum_{\ell=1}^{r} \alpha_\ell(\mathbf{x})\mathbf{H}_\ell,$$

representa o novo grau de liberdade, sendo que as constantes $\mathbf{H}_\ell \in \mathbb{R}^{m\times 1}$, $\ell = 1, 2, \ldots, r$ e $\mathbf{x} = [x_1 \ldots x_n]^T$.

O sistema considerado, descrito na Figura 3.2, tem o seguinte modelo matemático:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}) \left[\mathbf{u}_n + \sum_{\ell=1}^{r} \alpha_\ell(\mathbf{x})\mathbf{H}_\ell \right]. \tag{3.74}$$

Nesta análise serão feitas as seguintes hipóteses:

1) $\sum_{\ell=1}^{r} \alpha_\ell(\mathbf{x}) = 1, \qquad \alpha_\ell(\mathbf{x}) \in [0, 1];$

2) $\dfrac{\partial \alpha_\ell(\mathbf{x})}{\partial x_j} = 0$, $\ell \in 1, \ldots, r$, $j \in 1, \ldots, n$ e

3) $\alpha_\ell(\mathbf{x}_{0\ell}) = 1$, $\ell = 1, \ldots, r$, sendo que $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{01}, \mathbf{x}_{02}, \ldots, \mathbf{x}_{0r}$, são os pontos onde são definidos os modelos locais.

Deseja-se que para $\mathbf{x} \approx \mathbf{x}_{0j}$, $j = 1, \ldots, r$, o sistema (3.74) satisfaça a condição (3.75)

$$\dot{\mathbf{x}} \approx \mathbf{A}_j \mathbf{x} + \mathbf{B}_j \mathbf{u}_n. \tag{3.75}$$

A entrada total para o sistema da Figura 3.2 é composta por

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_n + \sum_{\ell=1}^{r} \alpha_\ell(\mathbf{x}) \mathbf{H}_\ell. \tag{3.76}$$

O objetivo é construir modelos lineares locais em $\mathbf{x}$ e $\mathbf{u}_n$ que aproximem o comportamento do modelo de simulação modificado (3.74) na vizinhança de um estado de operação $\mathbf{x}_{0j}$ (um ponto de definição dos modelos locais), isto é, deseja-se encontrar matrizes constantes $\mathbf{A}_j$ e $\mathbf{B}_j$, tais que, na vizinhança de um ponto de operação $\mathbf{x}_{0j}$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} \approx \mathbf{A}_j \mathbf{x} + \mathbf{B}_j \mathbf{u}_n, \;\; \forall \mathbf{u}_n \tag{3.77}$$

e

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_{0j}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}_{0j})\mathbf{u} = \mathbf{A}_j \mathbf{x}_{0j} + \mathbf{B}_j \mathbf{u}_n, \;\; \forall \mathbf{u}_n. \tag{3.78}$$

Substituindo (3.76) em (3.77) e (3.78), obtém-se respectivamente, para $\mathbf{x} \approx \mathbf{x}_{0j}$:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}) \left[\mathbf{u}_n + \sum_{\ell=1}^{r} \alpha_\ell(\mathbf{x}) \mathbf{H}_\ell \right] \approx \mathbf{A}_j \mathbf{x} + \mathbf{B}_j \mathbf{u}_n, \;\; \forall \mathbf{u}_n, \tag{3.79}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_{0j}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}_{0j}) \left[\mathbf{u}_n + \sum_{\ell=1}^{r} \alpha_\ell(\mathbf{x}_{0j}) \mathbf{H}_\ell \right] = \mathbf{A}_j \mathbf{x}_{0j} + \mathbf{B}_j \mathbf{u}_n, \;\; \forall \mathbf{u}_n. \tag{3.80}$$

Considerando $\mathbf{u_n}$ como uma entrada arbitrária, tem-se que

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}_{0j}) = \mathbf{B}_j. \tag{3.81}$$

Então, deve-se encontrar uma matriz constante $\mathbf{A}_j$ tal que na vizinhança de $\mathbf{x}_{0j}$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}) \sum_{\ell=1}^{r} \alpha_\ell(\mathbf{x}) \mathbf{H}_\ell \approx \mathbf{A}_j \mathbf{x} \tag{3.82}$$

e

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_{0j}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}_{0j}) \sum_{\ell=1}^{r} \alpha_\ell(\mathbf{x}_{0j}) \mathbf{H}_\ell = \mathbf{A}_j \mathbf{x}_{0j}. \tag{3.83}$$

Defina $\mathbf{a}_{ij}^T$ como sendo a enésima linha da matriz $\mathbf{A}_j$. Então a condição (3.82) pode ser representada por

$$f_i(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \sum_{\ell=1}^{r} \alpha_\ell(\mathbf{x}) \mathbf{H}_\ell \approx \mathbf{a}_{ij}^T \mathbf{x}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.84}$$

e a condição (3.83) por

$$f_i(\mathbf{x}_{0j}) + \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_{0j}) \sum_{\ell=1}^{r} \alpha_\ell(\mathbf{x}_{0j}) \mathbf{H}_\ell = \mathbf{a}_{ij}^T \mathbf{x}_{0j}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.85}$$

sendo que a enésima componente de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ é $f_i(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e de $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ é $\mathbf{g}_i(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{1\times m}$.

Lema 1 *As equações (3.84) e (3.85) podem ser descritas, respectivamente, da seguinte forma:*

$$f_i(\mathbf{x}) + \sum_{q=1}^{r} \alpha_q(\mathbf{x}) \sum_{k=1}^{m} g_{ik}(\mathbf{x}) H_{kq} \approx \mathbf{a}_{ij}^T \mathbf{x}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.86}$$

$$f_i(\mathbf{x}_{0j}) + \sum_{q=1}^{r} \alpha_q(\mathbf{x}_{0j}) \sum_{k=1}^{m} g_{ik}(\mathbf{x}_{0j}) H_{kq} = \mathbf{a}_{ij}^T \mathbf{x}_{0j}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.87}$$

Prova : Considere a equação (3.86) na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{11}(\mathbf{x}) & \ldots & g_{1m}(\mathbf{x}) \\ g_{21}(\mathbf{x}) & \ldots & g_{2m}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{n1}(\mathbf{x}) & \ldots & g_{nm}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \left[\alpha_1(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} H_{11} \\ H_{21} \\ \vdots \\ H_{m1} \end{bmatrix} + \alpha_2(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} H_{12} \\ H_{22} \\ \vdots \\ H_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + \alpha_r(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} H_{1r} \\ H_{2r} \\ \vdots \\ H_{mr} \end{bmatrix} \right]$$

$$\approx \mathbf{A}_j \mathbf{x},$$

$$\begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{11}(\mathbf{x})[\alpha_1(\mathbf{x})H_{11} + \ldots + \alpha_r(\mathbf{x})H_{1r}] + \ldots + g_{1m}(\mathbf{x})[\alpha_1(\mathbf{x})H_{m1} + \ldots + \alpha_r(\mathbf{x})H_{mr}] \\ g_{21}(\mathbf{x})[\alpha_1(\mathbf{x})H_{11} + \ldots + \alpha_r(\mathbf{x})H_{1r}] + \ldots + g_{2m}(\mathbf{x})[\alpha_1(\mathbf{x})H_{m1} + \ldots + \alpha_r(\mathbf{x})H_{mr}] \\ \vdots \\ g_{n1}(\mathbf{x})[\alpha_1(\mathbf{x})H_{11} + \ldots + \alpha_r(\mathbf{x})H_{1r}] + \ldots + g_{nm}(\mathbf{x})[\alpha_1(\mathbf{x})H_{m1} + \ldots + \alpha_r(\mathbf{x})H_{mr}] \end{bmatrix}$$

$$\approx \mathbf{A}_j \mathbf{x},$$

$$\begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1(\mathbf{x})[g_{11}(\mathbf{x})H_{11} + \ldots + g_{1m}(\mathbf{x})H_{m1}] + \ldots + \alpha_r(\mathbf{x})[g_{11}(\mathbf{x})H_{1r} + \ldots + g_{1m}(\mathbf{x})H_{mr}] \\ \alpha_1(\mathbf{x})[g_{21}(\mathbf{x})H_{11} + \ldots + g_{2m}(\mathbf{x})H_{m1}] + \ldots + \alpha_r(\mathbf{x})[g_{21}(\mathbf{x})H_{1r} + \ldots + g_{2m}(\mathbf{x})H_{mr}] \\ \vdots \\ \alpha_1(\mathbf{x})[g_{n1}(\mathbf{x})H_{11} + \ldots + g_{nm}(\mathbf{x})H_{m1}] + \ldots + \alpha_r(\mathbf{x})[g_{n1}(\mathbf{x})H_{1r} + \ldots + g_{nm}(\mathbf{x})H_{mr}] \end{bmatrix}$$

$$\approx \mathbf{A}_j \mathbf{x}.$$

Logo,

$$f_i(\mathbf{x}) + \sum_{q=1}^{r} \alpha_q(\mathbf{x}) \sum_{k=1}^{m} g_{ik}(\mathbf{x}) H_{kq} \approx \mathbf{a}_{ij}^T \mathbf{x}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

$\triangleright$

A equação (3.87) é obtida pelo mesmo procedimento.

Tendo em vista que, por hipótese, $\nabla \alpha_j(\mathbf{x}) = 0$, em $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{0j}$, $j = 1, 2, \ldots, r$, então aplicando a série de Taylor em torno de $\mathbf{x}_{0j}$ e desprezando os termos de segunda e outras ordens superiores, a equação (3.86) pode ser representada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{x}_{0j}) &+ \sum_{q=1}^{r} \alpha_q(\mathbf{x}_{0j}) \sum_{k=1}^{m} g_{ik}(\mathbf{x}_{0j}) H_{kq} + \nabla^T f_i(\mathbf{x}_{0j})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{0j}) \\ &+ \sum_{q=1}^{r} \alpha_q(\mathbf{x}_{0j}) \sum_{k=1}^{m} \nabla^T g_{ik}(\mathbf{x}_{0j}) H_{kq}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{0j}) \approx \mathbf{a}_{ij}^T \mathbf{x} \end{aligned} \tag{3.88}$$

sendo que $\nabla f_i(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é o gradiente de f_i com relação à $\mathbf{x}$ e $\nabla g_{ij}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é o gradiente de g_{ij} com respeito a $\mathbf{x}$.

Usando (3.87), a equação (3.88) torna-se

$$\mathbf{a}_{ij}^T\mathbf{x}_{0j} + \nabla^T f_i(\mathbf{x}_{0j})(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{0j}) + \sum_{q=1}^{r}\alpha_q(\mathbf{x}_{0j})\sum_{k=1}^{m}\nabla^T g_{ik}(\mathbf{x}_{0j})H_{kq}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{0j}) \approx \mathbf{a}_{ij}^T\mathbf{x}. \tag{3.89}$$

Portanto,

$$\nabla^T f_i(\mathbf{x}_{0j})(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{0j}) + \sum_{q=1}^{r}\alpha_q(\mathbf{x}_{0j})\sum_{k=1}^{m}\nabla^T g_{ik}(\mathbf{x}_{0j})H_{kq}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{0j}) \approx \mathbf{a}_{ij}^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{0j}) \tag{3.90}$$

sendo $\mathbf{x}$ arbitrário, mas próximo de $\mathbf{x}_{0j}$.

A equação (3.90) pode ser simplificada para

$$\nabla^T f_i(\mathbf{x}_{0j}) + \sum_{k=1}^{m}\nabla^T g_{ik}(\mathbf{x}_{0j})H_{kj} \approx \mathbf{a}_{ij}^T \tag{3.91}$$

uma vez que $\alpha_j(\mathbf{x}_{0j}) = 1$ e $\alpha_l(\mathbf{x}_{0j}) = 0 \;\; \forall \; l \neq j$ e $\forall \; l$ e $j = 1, 2, \ldots, r$. O índice j do termo H_{kj} e $\mathbf{x}_{0j}$ representa o modelo local que está sendo considerado.

O problema agora é determinar vetores constantes $\mathbf{a}_{ij}^T$ e $\mathbf{H}_j$ de modo que

$$\nabla^T f_i(\mathbf{x}_{0j}) + \sum_{k=1}^{m}\nabla^T g_{ik}(\mathbf{x}_{0j})H_{kj} \approx \mathbf{a}_{ij}^T$$

e satisfaça a restrição

$$\mathbf{a}_{ij}^T\mathbf{x}_{0j} = f_i(\mathbf{x}_{0j}) + \sum_{k=1}^{m} g_{ik}(\mathbf{x}_{0j})H_{kj}.$$

Considere a seguinte função energia:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left\|\nabla f_i(\mathbf{x}_{0j}) + \sum_{k=1}^{m}\nabla g_{ik}(\mathbf{x}_{0j})H_{kj} - \mathbf{a}_{ij}\right\|_2^2. \tag{3.92}$$

Denomine

$$\begin{array}{rcl}
\mathbf{M}_{1j} & = & \nabla f_1(\mathbf{x}_{0j}) + \nabla g_{11}(\mathbf{x}_{0j})H_{1j} + \ldots + \nabla g_{1m}(\mathbf{x}_{0j})H_{mj} - \mathbf{a}_{1j}; \\
\mathbf{M}_{2j} & = & \nabla f_2(\mathbf{x}_{0j}) + \nabla g_{21}(\mathbf{x}_{0j})H_{1j} + \ldots + \nabla g_{2m}(\mathbf{x}_{0j})H_{mj} - \mathbf{a}_{2j}; \\
 & \vdots & \\
\mathbf{M}_{nj} & = & \nabla f_n(\mathbf{x}_{0j}) + \nabla g_{n1}(\mathbf{x}_{0j})H_{1j} + \ldots + \nabla g_{nm}(\mathbf{x}_{0j})H_{mj} - \mathbf{a}_{nj}.
\end{array} \tag{3.93}$$

A função energia total é dada por

$$E_j = \sum_{i=1}^{n} E_{ij} = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1j}^T & \mathbf{M}_{2j}^T & \ldots & \mathbf{M}_{nj}^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1j} \\ \mathbf{M}_{2j} \\ \vdots \\ \mathbf{M}_{nj} \end{bmatrix}. \tag{3.94}$$

Agrupando $\mathbf{M}_{1j}, \mathbf{M}_{2j} \ldots \mathbf{M}_{nj}$ de (3.93) como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{M}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f_1(\mathbf{x}_{0j}) \\ \nabla f_2(\mathbf{x}_{0j}) \\ \vdots \\ \nabla f_n(\mathbf{x}_{0j}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nabla g_{11}(\mathbf{x}_{0j}) \ldots \nabla g_{1m}(\mathbf{x}_{0j}) \\ \nabla g_{21}(\mathbf{x}_{0j}) \ldots \nabla g_{2m}(\mathbf{x}_{0j}) \\ \vdots \\ \nabla g_{n1}(\mathbf{x}_{0j}) \ldots \nabla g_{nm}(\mathbf{x}_{0j}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{1j} \\ H_{2j} \\ \vdots \\ H_{mj} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1j} \\ \mathbf{a}_{2j} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{nj} \end{bmatrix} \tag{3.95}$$

$$\mathbf{M}_{Rj} = \mathbf{M}_{Fj} + \mathbf{M}_{Gj}\mathbf{H}_j - \mathbf{A}_{ej}$$

sendo que $\mathbf{M}_{Fj} \in \mathbb{R}^{(n\times n)\times 1}$, $\mathbf{M}_{Gj} \in \mathbb{R}^{(n\times n)\times m}$, $\mathbf{H}_j \in \mathbb{R}^{m\times 1}$, $\mathbf{A}_{ej} = [\mathbf{a}_{1j}^T \;\; \mathbf{a}_{2j}^T \;\; \ldots \;\; \mathbf{a}_{nj}^T]^T$, então a função energia (3.94) pode ser reescrita por

$$E_j = \frac{1}{2}\,||\mathbf{M}_{Fj} + \mathbf{M}_{Gj}\mathbf{H}_j - \mathbf{A}_{ej}||_2^2\,. \tag{3.96}$$

O problema de otimização resultante, considerando E_j definida em (3.94) é redefinido da seguinte forma:

$$\left.\begin{array}{l} \min\limits_{\mathbf{a}_{1j},\ldots,\mathbf{a}_{nj},\mathbf{H}_j} E_j \\ \text{sujeito a} \\ \qquad \begin{array}{rcl} \mathbf{a}_{1j}^T\mathbf{x}_{0j} & = & f_1(\mathbf{x}_{0j}) + \sum\limits_{k=1}^{m} g_{1k}(\mathbf{x}_{0j})H_{kj} \\ \mathbf{a}_{2j}^T\mathbf{x}_{0j} & = & f_2(\mathbf{x}_{0j}) + \sum\limits_{k=1}^{m} g_{2k}(\mathbf{x}_{0j})H_{kj} \\ & \vdots & \\ \mathbf{a}_{nj}^T\mathbf{x}_{0j} & = & f_n(\mathbf{x}_{0j}) + \sum\limits_{k=1}^{m} g_{nk}(\mathbf{x}_{0j})H_{kj}. \end{array} \end{array}\right\} \tag{3.97}$$

O problema de otimização (3.97) pode ser resolvido por meio de LMIs.

3.5.1 Solução por LMIs

Utilizando LMIs, $\mathbf{a}_{ij}$ e $\mathbf{H}_j$ são obtidos simultaneamente.

Defina a_{ikj} como o elemento "ik" da matriz $\mathbf{A}_j$ e

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_j &= \begin{bmatrix} H_{1j} & H_{2j} & \ldots & H_{mj} & a_{11j} & \ldots & a_{1nj} & \ldots & a_{n1j} & \ldots & a_{nnj} \end{bmatrix}^T, \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_j^T & a_{11j} & \ldots & a_{1nj} & \ldots & a_{n1j} & \ldots & a_{nnj} \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

$$
\mathbf{A}_{tj} = \begin{bmatrix}
\frac{\partial g_{11}(\mathbf{x}_{0j})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_{1m}(\mathbf{x}_{0j})}{\partial x_1} & -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{\partial g_{11}(\mathbf{x}_{0j})}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial g_{1m}(\mathbf{x}_{0j})}{\partial x_n} & 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\frac{\partial g_{21}(\mathbf{x}_{0j})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_{2m}(\mathbf{x}_{0j})}{\partial x_1} & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\frac{\partial g_{21}(\mathbf{x}_{0j})}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial g_{2m}(\mathbf{x}_{0j})}{\partial x_n} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{\partial g_{n1}(\mathbf{x}_{0j})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_{nm}(\mathbf{x}_{0j})}{\partial x_1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & -1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{\partial g_{n1}(\mathbf{x}_{0j})}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial g_{nm}(\mathbf{x}_{0j})}{\partial x_n} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & -1
\end{bmatrix},
$$

$$
\mathbf{A}_{tj} = \begin{bmatrix}
\nabla \mathbf{g}_{11}(\mathbf{x}_{0j}) & \dots & \nabla \mathbf{g}_{1m}(\mathbf{x}_{0j}) & -I & 0 & \dots & 0 \\
\nabla \mathbf{g}_{21}(\mathbf{x}_{0j}) & \dots & \nabla \mathbf{g}_{2m}(\mathbf{x}_{0j}) & 0 & -I & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\nabla \mathbf{g}_{n1}(\mathbf{x}_{0j}) & \dots & \nabla \mathbf{g}_{nm}(\mathbf{x}_{0j}) & 0 & 0 & \dots & -I
\end{bmatrix},
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{b}_{pj} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_{0j})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_{0j})}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}_{0j})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}_{0j})}{\partial x_n} \end{bmatrix}^T, \\
&= \begin{bmatrix} \nabla f_1^T(\mathbf{x}_{0j}) & \nabla f_2^T(\mathbf{x}_{0j}) & \dots & \nabla f_n^T(\mathbf{x}_{0j}) \end{bmatrix}^T.
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{C}_{pj} = \begin{bmatrix}
g_{11}(\mathbf{x}_{0j}) & \dots & g_{1m}(\mathbf{x}_{0j}) & \mathbf{x}_{01} & \dots & \mathbf{x}_{0n} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
g_{21}(\mathbf{x}_{0j}) & \dots & g_{2m}(\mathbf{x}_{0j}) & 0 & \dots & 0 & \mathbf{x}_{01} & \dots & \mathbf{x}_{0n} & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
g_{n1}(\mathbf{x}_{0j}) & \dots & g_{nm}(\mathbf{x}_{0j}) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \mathbf{x}_{01} & \dots & \mathbf{x}_{0n}
\end{bmatrix},
$$

$$
= \begin{bmatrix}
g_{11}(\mathbf{x}_{0j}) & \dots & g_{1m}(\mathbf{x}_{0j}) & \mathbf{x}_{0j}^T & 0 & \dots & 0 \\
g_{21}(\mathbf{x}_{0j}) & \dots & g_{2m}(\mathbf{x}_{0j}) & 0 & \mathbf{x}_{0j}^T & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
g_{n1}(\mathbf{x}_{0j}) & \dots & g_{nm}(\mathbf{x}_{0j}) & 0 & 0 & \dots & \mathbf{x}_{0j}^T
\end{bmatrix}.
$$

$$
\mathbf{d}_{pj} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}_{0j}) & \dots & f_n(\mathbf{x}_{0j}) \end{bmatrix}^T.
$$

sendo que $\mathbf{w}_j \in \mathbb{R}^{(m+n^2)\times 1}$, $\mathbf{A}_{tj} \in \mathbb{R}^{(n^2)\times(m+n^2)}$, $\mathbf{b}_{pj} \in \mathbb{R}^{(n^2)\times 1}$, $\mathbf{C}_{pj} \in \mathbb{R}^{n\times(m+n^2)}$ e $\mathbf{d}_{pj} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

A função energia (3.96) é redefinida para

$$
E_j = \frac{1}{2}\,||\mathbf{A}_{tj}\mathbf{w}_j + \mathbf{b}_{pj}||_2^2 \tag{3.98}
$$

e o problema de otimização (3.97) reescrito para

$$
\left.
\begin{array}{ll}
\min\limits_{\mathbf{w}_j} \delta_j & \\
\text{sujeito a} & \\
& (\mathbf{A}_{tj}\mathbf{w}_j + \mathbf{b}_{pj})^T \mathbf{I} (\mathbf{A}_{tj}\mathbf{w}_j + \mathbf{b}_{pj}) \leq 2\delta_j, \\
& \delta_j > 0, \\
& \mathbf{C}_{pj}\mathbf{w} = \mathbf{d}_{pj}.
\end{array}
\right\} \tag{3.99}
$$

Aplicando o complemento de Schur (Boyd et al., 1994) (veja Apêndice D) em (3.99), chega-se ao seguinte problema:

$$\begin{array}{l} \min\limits_{\mathbf{w}_j} \delta_j \\ \text{sujeito a} \\ \qquad \begin{bmatrix} 2\delta_j & (\mathbf{A}_{tj}\mathbf{w}_j + \mathbf{b}_{pj})^T \\ (\mathbf{A}_{tj}\mathbf{w}_j + \mathbf{b}_{pj}) & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0, \\ \qquad \delta_j > 0, \\ \qquad \mathbf{C}_{pj}\mathbf{w}_j = \mathbf{d}_{pj}. \end{array} \tag{3.100}$$

Portanto, as matrizes $\mathbf{A}_j$, $j = 1, \ldots, r$ dos modelos locais são obtidas por meio de LMIs resolvendo o problema de otimização (3.100). As matrizes $\mathbf{B}_j$ dos modelos locais $j = 1, \ldots, r$ são descritas em (3.81).

Exemplo 5

Considere o problema do equilíbrio e balanço de um pêndulo invertido, conforme ilustrado na Figura A.1 e as equações de movimento descritas em (3.46).

Deseja-se obter os modelos locais lineares em dois pontos de sistema: o primeiro em torno de $x_1 = 0\ rad$, $(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1)$, e o outro modelo em torno de $x_1 = \pi/3\ rad$, $(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2)$. Em ambos os modelos, assume-se que u_p é arbitrária. Como as não-linearidades dependem apenas de x_1 é necessário obter apenas o primeiro elemento das linhas 2 e 4 dos modelos locais (a_{21j} e a_{41j}, sendo que $j = 1, 2$ representa o modelo local que está sendo calculado).

Os modelos locais são obtidos resolvendo as LMIs de (3.100).

Solução por LMIs

Considere o problema (3.100), $(m = 1)$ e defina:

$$\mathbf{w}_j = \begin{bmatrix} H_{1j} & a_{21j} & a_{41j} \end{bmatrix}^T, \tag{3.101}$$

$$\mathbf{A}_{tj} = \left. \begin{bmatrix} \partial g_2(\mathbf{x}_{0j})/\partial x_1 & -1 & 0 \\ \partial g_4(\mathbf{x}_{0j})/\partial x_1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right|_{\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_{0j}}, \tag{3.102}$$

$$\mathbf{b}_{pj} = \left. \begin{bmatrix} \partial f_2(\mathbf{x}_{0j})/\partial x_1 \\ \partial f_4(\mathbf{x}_{0j})/\partial x_1 \end{bmatrix} \right|_{\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_{0j}}, \tag{3.103}$$

$$\mathbf{C}_{pj} = \left. \begin{bmatrix} g_2(\mathbf{x}_0) & -x_1 & 0 \\ g_4(\mathbf{x}_0) & 0 & -x_1 \end{bmatrix} \right|_{\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_{0j}}, \tag{3.104}$$

$$\mathbf{d}_{pj} = \left[\begin{array}{c} f_2(\mathbf{x}_{0j}) \\ f_4(\mathbf{x}_{0j}) \end{array} \right] \Bigg|_{\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_{0j}} . \tag{3.105}$$

O problema de otimização (3.100) com $\mathbf{w}_j$, $\mathbf{A}_{tj}$, $\mathbf{b}_{pj}$, $\mathbf{C}_{pj}$ e $\mathbf{d}_{pj}$ definidos respectivamente em (3.101), (3.102), (3.103), (3.104) e (3.105) foi resolvido utilizando o software LMIsol (Oliveira et al., 1997) .

Para o primeiro modelo local $j = 1$, $\mathbf{x}_{01} = \mathbf{0}$ (assim, $x_1 = 0$) os resultados para H_{11}, a_{211} a_{411} são dados por:

$$\begin{array}{rcl} H_{11} & = & 0, \\ a_{111} & = & 17.2941, \\ a_{211} & = & -1.1765. \end{array} \tag{3.106}$$

Portanto, o primeiro modelo local é definido por

$$\begin{array}{rcl} H_{11} & = & 0, \\ \mathbf{A}_1 & = & \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 17.2941 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.1765 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{array} \tag{3.107}$$

$\mathbf{B}_1$ é dado em (3.48).

Uma observação interessante foi o resultado obtido: $H_{11} = 0$. Ele está de acordo com a linearização por Taylor no ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_{01} = 0$.

Para o segundo modelo em torno de $x_1 = \pi/3\ rad$, $j = 2$, H_{12}, a_{212} a_{412} são dados por

$$\begin{array}{rcl} H_{12} & = & 27.117, \\ a_{111} & = & 10.6132, \\ a_{211} & = & 2.0590. \end{array} \tag{3.108}$$

Portanto, o segundo modelo local é definido por

$$\begin{array}{rcl} H_{12} & = & 27.1176, \\ \mathbf{A}_2 & = & \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 10.6132 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2.0590 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{array} \tag{3.109}$$

e $\mathbf{B}_2$ é dado em (3.50).

A Figura 3.3 mostra a aproximação da curva $f_2(x_1)$ do sistema em (3.46) com os modelos obtidos em (3.109) e (3.50), sendo que $f_{h2}(x_1) = f_2(x_1) + g_2(x_1)(\alpha_1(x_1)H_1 + \alpha_2(x_1)H_2)$.

Observe na Figura 3.3 que com os modelos obtidos com (3.109) a região de aproximação é maior na vizinhança do ponto de operação $x_1 = \pi/3\ rad$ do que a aproximação obtida com (3.45), sem o novo grau de liberdade.

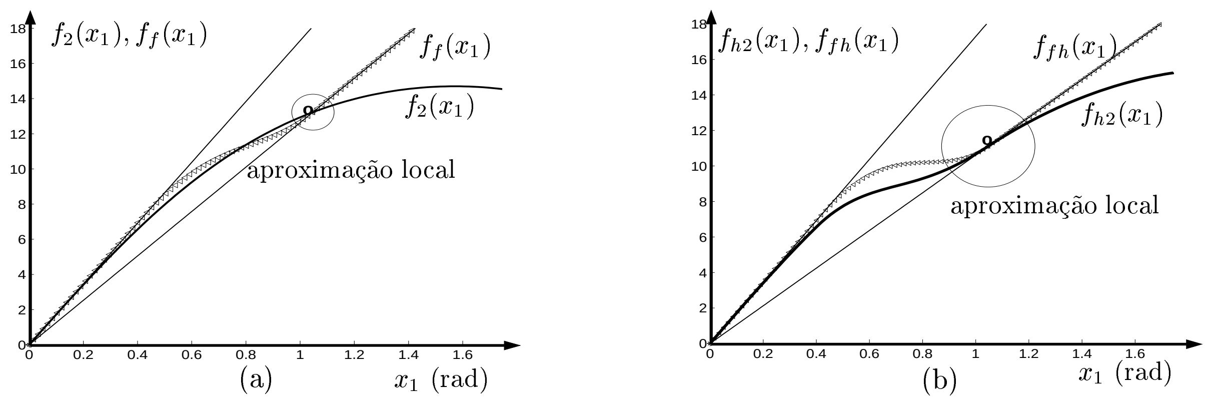

Figura 3.3: Exemplo de aproximação com modelo TS com: (a) modelo local ótimo obtido com (3.45), dado por (3.49); (b) modelo com novo grau de liberdade dado por (3.109). $f_2(x_1)$ representa a função do sistema; $f_f(x_1)$ é a aproximação *fuzzy* desta função; $f_{h2}(x_1)$ é a função não-linear com novo grau de liberdade; $f_{fh}(x_1)$ é a aproximação *fuzzy* desta função.

Para ilustrar este exemplo foram utilizadas as seguintes funções de pertinência:

$$\begin{aligned} \alpha_1(x_1) &= \begin{cases} 1, & 0 \leq x_1 \leq 0.4 \\ 0.5(1 + cos(\frac{\pi}{\pi/3 - 0.4}(x_1 - 0.4))), & 0.4 \leq x_1 \leq \pi/3, \\ 0, & x_1 > \pi/3. \end{cases} \\ \alpha_2(x_1) &= 1 - \alpha_1(x_1). \end{aligned} \tag{3.110}$$

Estas funções atende às três hipóteses feitas no início desta seção e estão representadas na Figura 3.4.

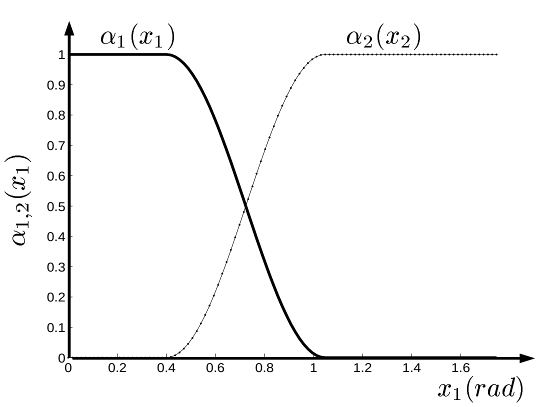

Figura 3.4: Funções de pertinência adequadas para a aproximação.

Agora, considere as funções de pertinência definidas em (3.111) e ilustradas na Figura 3.5.

$$\begin{aligned} \alpha_1(x_1) &= \begin{cases} 0.5(1 + cos(3x_1)), & 0 \leq x_1 \leq \pi/3, \\ 0, & x_1 > \pi/3. \end{cases} \\ \alpha_2(x_1) &= 1 - \alpha_1(x_1) \end{aligned} \tag{3.111}$$

A Figura 3.6 mostra a aproximação do sistema (3.46) com os modelos obtidos em (3.109), (3.50) e funções de pertinência dada por (3.111).

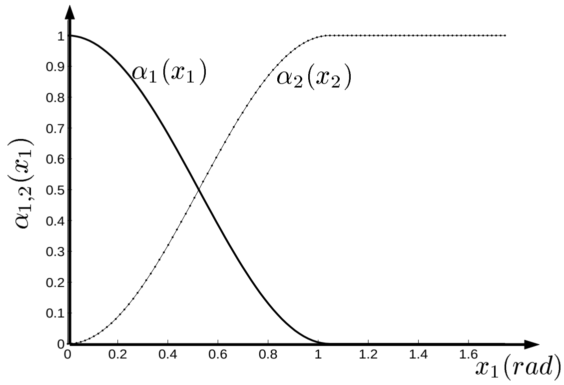

Figura 3.5: Funções de pertinência inadequadas para a aproximação.

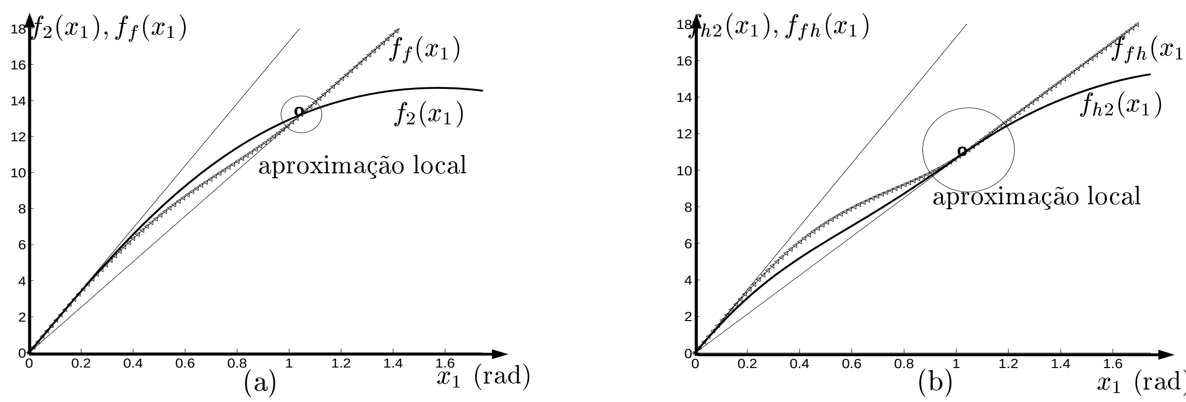

Figura 3.6: Exemplo de aproximação com modelo TS com: (a) modelo local ótimo obtido com (3.45), dado por (3.49); (b) modelo com novo grau de liberdade dado por (3.109) e funções de pertinência dadas em (3.111). $f_2(x_1)$ representa a função do sistema; $f_f(x_1)$ é a aproximação fuzzy desta função; $f_{h2}(x_1)$ é a função não-linear com novo grau de liberdade; $f_{fh}(x_1)$ é a aproximação *fuzzy* desta função.

Como ilustra a Figura 3.6, a aproximação *fuzzy* com modelos obtidos utilizando (3.100) apresenta uma maior aproximação local do que os modelos obtidos com (3.45). Entretanto, a aproximação em torno do primeiro modelo local, $x_1 = 0$ é inferior ao obtido com (3.45).

Na Figura 3.3 "(b)" verifica-se uma melhor aproximação em torno do ponto $x_1 = 0$ do que a aproximação obtida na Figura 3.6 "(b)". As aproximações apresentadas nas Figuras 3.3 e 3.6 mostram a importância de se escolher adequadamente as funções de pertinência. Com elas é possível verificar que uma escolha inadequada destas funções pode prejudicar a aproximação nas vizinhanças dos modelos locais. No Capítulo 4 é apresentada uma metodologia para obter as funções de pertinência a partir dos modelos locais dados em (3.45).

Em Guo et al. (2000), Guo e seus colaboradores utilizaram a fórmula (3.45) para obter os modelos locais de um sistema não-linear e então foi projetado um controlador PI robusto utilizado no rastreamento de órbitas caóticas. O método proposto não utiliza aproximações *fuzzy*. Neste caso, ao invés de usar (3.45), pode-se utilizar (3.100) e obter uma melhor aproximação local do sistema. Embora o sistema obtido com estes modelos locais sejam diferentes do modelo original, espera-se que a aproximação local em uma região mais abrangente na vizinhança do ponto de operação proporcione um melhor desempenho do rastreador (que deve ser reprojetado para o novo sistema).

3.6 Discussões Complementares

Neste capítulo foram apresentados dois métodos para determinar os modelos locais e proposto um método para determinar os modelos com um novo grau de liberdade.

O primeiro método, extraído de Taniguchi et al. (2001), estabelece que, independentemente da região de operação, necessita-se de 2^s modelos locais (sendo "s" o número de não linearidades do sistema) para se obter uma aproximação exata do sistema (as funções de pertinência que possibilitam esta aproximação exata serão apresentadas no Capítulo 4). Assim, o número de modelos locais e as suas localizações são definidos *a priori* sem intervenção do projetista. A única informação fornecida é a região de operação desejada.

Entretanto, o número de modelos locais pode ser excessivamente grande se o sistema possuir muitas não-linearidades (se "s" for grande). Este fato pode dificultar o projeto de controladores com LMIs, pois torna mais complexas as leis de controle, o que pode ser inconveniente nas implementações práticas. O método de Taniguchi et al. (2001) também apresenta um método de redução de regras e um método de projeto que serão abordados com detalhes no Capítulo 5. Este método de redução de regras produz um erro de modelagem que é considerado no projeto do controlador como um distúrbio. A redução é feita de forma sistemática utilizando valores médios dos componentes dos modelos locais que possuem não-linearidades. Os valores que serão reduzidos são obtidos em função do projeto do controlador. Maiores detalhes deste método são apresentados nos próximos capítulos.

O segundo método para obter o modelo local, proposto por Teixeira e Żak (1999), é determinado em função de um ponto específico da região de operação, que pode ou não ser a origem. O método se reduz a uma fórmula compacta e simples de ser utilizada (equação (3.45)). Assim, o projetista determina o ponto no qual deseja que o sistema seja aproximado localmente. Este método determina apenas os modelos locais e qualquer tipo de função de pertinência pode ser utilizada para combiná-los para obter a aproximação em relação ao modelo verdadeiro. Esta fórmula tem sido aplicada para modelar diversos sistemas como, por exemplo, no projeto de um controlador PI robusto para uma turbina termoelétrica (Zheng et al., 2001), onde foi aplicado um deslocamento do ponto de equilíbrio como mostrado no

Exemplo 4 da Seção 3.4. Para rastreamento de órbitas de sistemas caóticos (Guo et al., 2000), citado na seção anterior; no projeto de observadores *fuzzy* (Bergsten et al., 2002), no controle de um processo químico com atraso de transporte (Cao e Frank, 2000) e no controle de um pêndulo invertido, utilizando sistemas *fuzzy Singleton* (Kim, 2001).

O modelo proposto na Seção 3.5 é uma extensão do modelo apresentado em Teixeira e Żak (1999). A idéia deste método é melhorar a aproximação local dos modelos obtidos com (3.45), com o acréscimo de um novo grau de liberdade ao sistema. A principal motivação deste método é reduzir o número de modelos locais para representar o sistema com um erro de modelagem adequado na região de operação.

3.7 Contribuições e Perspectivas

As contribuições deste capítulo referem-se à proposta e desenvolvimento de um novo método para obtenção dos modelos locais.

As principais perspectivas a partir dos resultados obtidos e apresentados no presente capítulo são:

1. Obter uma solução analítica do problema (3.100) para determinar os modelos locais com novos graus de liberdade apresentados na Seção 3.5;

2. Aplicar os modelos locais obtidos na Seção 3.5 na modelagem e controle de sistemas não-lineares descritos na literatura, por exemplo, aqueles que utilizaram a fórmula (3.45) e verificar os benefícios destes novos modelos locais;

3. Utilizar os modelos locais obtidos na Seção 3.5 como modelos lineares para sistemas que não utilizam aproximação *fuzzy*;

No próximo capítulo serão abordadas as funções de pertinência e o erro de modelagem. Uma nova metodologia é proposta para determinar as funções de pertinência. A partir destas funções e do erro de modelagem (este erro será obtido entre o modelo de simulação e o modelo *fuzzy*, utilizando as novas funções de pertinência obtidas), será elaborado um algoritmo para determinar a localização dos modelos locais.

Capítulo 4

Modelagem e Funções de Pertinência

4.1 Introdução

Funções de pertinência são funções utilizadas para relacionar (ou combinar) os modelos locais, na descrição de sistemas dinâmicos através de modelos *fuzzy* TS.

Estas funções possuem duas características principais. A primeira é que seus valores devem ser sempre positivos e menores ou iguais a 1. A segunda é que a soma dos valores de várias funções em um determinado ponto deve ser sempre igual a 1.

No Capítulo 2 foram apresentadas as funções mais utilizadas na literatura que são as triangulares, as trapezoidais e as gaussianas.

A escolha de uma determinada função de pertinência depende do conhecimento do projetista sobre o sistema. Um sistema de identificação pode ser utilizado para obter os parâmetros destas funções de pertinência, quando o sistema é modelado a partir de dados de entrada e saída.

As funções de pertinência determinam o grau de aderência das funções obtidas com modelos *fuzzy* às funções do modelo de simulação e têm influência direta na estabilização do sistema, uma vez que elas também interpolam os ganhos obtidos no projeto de controladores *fuzzy*, como será visto no Capítulo 5.

Para uma modelagem completa, além das funções de pertinência, é necessário determinar o número de modelos locais e a localização destes modelos na região de operação. Esta tarefa nem sempre é trivial. A técnica mais simples consiste em determinar os modelos locais em intervalos igualmente espaçados na região de operação. Se a aproximação obtida não for satisfatória, diminuem-se os espaçamentos e acrescentam-se mais modelos locais. Esta técnica pode produzir um número excessivo de modelos locais o que pode dificultar a implementação. Outra técnica, um pouco mais elaborada, consiste em acrescentar modelos locais nas regiões onde as não-linearidades são mais fortes e reduzí-los nas regiões com poucas não-linearidades. Este processo pode reduzir consideravelmente o número de modelos locais.

No método de modelagem exata proposto em Taniguchi et al. (2001) os modelos locais são obtidos a partir dos limites máximos e mínimos das funções não-lineares. Portanto, o número de modelos locais e suas localizações dependem do número de funções não-lineares e dos limites destas funções. As funções de pertinência também são obtidas a partir das funções não-lineares e podem produzir uma modelagem exata para um determinado número de regras *fuzzy*, ou uma modelagem aproximada gerada por um método de redução de regras. Na próxima seção estas funções serão descritas com mais detalhes, uma vez que elas já foram introduzidas no Capítulo 3, quando foram determinados os modelos locais para este método de projeto. O método de redução de regras e sua relação com as funções de pertinência também será explorado. Dependendo do número de não-linearidades do sistema, o número de modelos locais pode ser excessivamente grande.

Um novo método para determinar as funções de pertinência de forma ótima é proposto. Neste método as funções serão obtidas por meio de um problema de otimização que tem por objetivo diminuir o erro de modelagem em cada ponto da região de operação, uma vez que sejam definidos os modelos locais. Serão apresentadas uma solução analítica para o problema e uma solução por meio de LMIs. Para completar a modelagem foi elaborado um algoritmo para determinar o número de modelos locais. Neste algoritmo, o erro de modelagem definirá o ponto onde serão acrescentados novos modelos locais. O algoritmo se inicia com dois modelos locais calculados nas extremidades da região de operação e acrescenta novos modelos nos pontos onde ocorrer o maior erro de aproximação. O número de modelos locais dependerá da precisão requerida pelo projetista (ou dos índices de desempenho no projeto dos ganhos dos reguladores, como será ilustrado no Capítulo 5).

4.2 Forma Generalizada do Sistema Fuzzy Takagi-Sugeno

Considere a classe de sistemas do sistema generealizado (3.1) proposta em Taniguchi et al. (2001):

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t))x_j(t) + \sum_{k=1}^{m} g_{ik}(\mathbf{x}(t))u_k(t),$$
$$i = 1, \ldots, n.$$

A forma generalizada é obtida expressando as variáveis $\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t))$ e $g_{ij}(\mathbf{x}(t))$ na representação de modelos *fuzzy*.

Utilizando as variáveis definidas em (3.2), $\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t))$ e $g_{ij}(\mathbf{x}(t))$ podem ser representadas como

$$\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t)) = \sum_{\ell^a_{(i,j)}=1}^{2} \sigma_{ij\ell^a_{(i,j)}}(\mathbf{x}(t)) a_{ij\ell^a_{(i,j)}},$$
$$g_{ik}(\mathbf{x}(t)) = \sum_{\ell^b_{(i,k)}=1}^{2} \xi_{ik\ell^b_{(i,k)}}(\mathbf{x}(t)) b_{ik\ell^b_{(i,k)}},$$

sendo que $\sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t))$, $\sigma_{ij2}(\mathbf{x}(t))$, $\xi_{ik1}(\mathbf{x}(t))$ e $\xi_{ik2}(\mathbf{x}(t))$ foram previamente definidas no Exemplo 1 da Seção 3.2 e possuem as seguintes características:

$$\sum_{\ell^a_{(i,j)}=1}^{2} \sigma_{ij\ell^a_{(i,j)}}(\mathbf{x}(t)) = 1, \qquad \sum_{\ell^b_{(i,k)}=1}^{2} \xi_{ik\ell^b_{(i,k)}}(\mathbf{x}(t)) = 1,$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij1}(\mathbf{x}(t)) &= \frac{\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t)) - a_{ij2}}{a_{ij1} - a_{ij2}}, \\ \sigma_{ij2}(\mathbf{x}(t)) &= \frac{a_{ij1} - \tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t))}{a_{ij1} - a_{ij2}}, \\ \xi_{ik1}(\mathbf{x}(t)) &= \frac{g_{ik}(\mathbf{x}(t)) - b_{ik2}}{b_{ik1} - b_{ik2}}, \\ \xi_{ik2}(\mathbf{x}(t)) &= \frac{b_{ik1} - g_{ik}(\mathbf{x}(t))}{b_{ik1} - b_{ik2}}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Os elementos $\ell^a_{(i,j)}$ e $\ell^b_{(i,k)}$ estão relacionados com os limites de máximo e mínimo das funções $\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t))$ e $g_{ik}(\mathbf{x}(t))$. Sempre assumirão valores 1, relacionado ao máximo, ou 2, relacionado ao mínimo.

Usando a representação com modelos *fuzzy*, (3.1) é reescrita como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= \sum_{j=1}^{n} \tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t)) x_j(t) + \sum_{k=1}^{m} g_{ik}(\mathbf{x}(t)) u_k(t) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{\ell^a_{(i,j)}=1}^{2} \sigma_{ij\ell^a_{(i,j)}}(\mathbf{x}(t)) a_{ij\ell^a_{(i,j)}} x_j(t) \\ &+ \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell^b_{(i,k)}=1}^{2} \xi_{ik\ell^b_{(i,k)}}(\mathbf{x}(t)) b_{ik\ell^b_{(i,k)}} u_k(t). \end{aligned}$$

A forma generalizada do sistema *fuzzy* TS na forma matricial é dada por

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\ell^a_{(i,j)}=1}^{2} \sigma_{ij\ell^a_{(i,j)}}(\mathbf{x}(t)) a_{ij\ell^a_{(i,j)}} \mathbf{U}^A_{ij} \mathbf{x}(t) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell^b_{(i,k)}=1}^{2} \xi_{ik\ell^b_{(i,k)}}(\mathbf{x}(t)) b_{ik\ell^b_{(i,k)}} \mathbf{U}^B_{ik} \mathbf{u}(t) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\ell^a_{(i,j)}=1}^{2} \sigma_{ij\ell^a_{(i,j)}}(\mathbf{x}(t)) \mathbf{A}_{ij\ell^a_{(i,j)}} \mathbf{x}(t) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell^b_{(i,k)}=1}^{2} \xi_{ik\ell^b_{(i,k)}}(\mathbf{x}(t)) \mathbf{B}_{ik\ell^b_{(i,k)}} \mathbf{u}(t) \end{aligned} \tag{4.2}$$

sendo

$$\mathbf{U}^A_{ij} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} \\ i & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{e} \quad \mathbf{U}^B_{ik} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & k & & \end{array} \\ i & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

$$\mathbf{A}^a_{ij} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} \\ i & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij\ell^a_{(i,j)}} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{e} \quad \mathbf{B}^b_{ik} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & k & & \end{array} \\ i & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & b_{ik\ell^b_{(i,k)}} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

para $\ell^a_{(i,j)=1} = 1,2$ e $\ell^b_{(i,k)=1} = 1,2$ sendo que $U^A_{ij} \in \mathbb{R}^{(n \times n)}$ e $U^B_{ik} \in \mathbb{R}^{(n \times m)}$. Os elementos $a^a_{ij\ell_{(i,j)}}$ e $b^b_{ik\ell_{(i,k)}}$ desempenham um importante papel na redução de regras. A forma generalizada (4.2) é uma estrutura conveniente para a redução do número de regras. Veja Taniguchi et al. (2001).

Exemplo 6

Considere o Exemplo 2 da Seção 3.2. A forma generalizada (4.3) pode ser construída para o sistema não-linear (3.20):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} \sum_{\ell^a_{(i,j)}=1}^{2} \sigma_{ij\ell^a_{(i,j)}}(\mathbf{x}(t)) a_{ij\ell^a_{(i,j)}} \mathbf{U}^A_{ij} \mathbf{x}(t) \\ &+ \sum_{i=1}^{4} \sum_{k=1}^{1} \sum_{\ell^b_{(i,k)}=1}^{2} \xi_{ik\ell^b_{(i,k)}}(\mathbf{x}(t)) b_{ik\ell^a_{(i,k)}} \mathbf{U}^B_{ik} \mathbf{u}(t) \end{aligned} \tag{4.3}$$

sendo que em (4.3), as variáveis a_{211}, a_{411}, b_{211}, b_{411} são dadas em (3.21).

A forma generalizada (4.3) pode ser convertida no modelo *fuzzy* (4.4):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{p=1}^{16} h_p(\mathbf{x}(t))(\mathbf{A}_p \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_p \mathbf{u}(t)), \tag{4.4}$$

sendo $\mathbf{A}_p$ e $\mathbf{B}_p$, $p = 1, \ldots, 16$ definidos em (3.24) e (3.26), respectivamente.

As funções de pertinência $h_p(\mathbf{x}(t))$ em (4.4) são definidas a partir da expressão:

$$\sigma_{21\ell^a_{(2,1)}}(\mathbf{x}(t))\ \sigma_{41\ell^a_{(4,1)}}(\mathbf{x}(t))\ \xi_{21\ell^b_{(2,1)}}(\mathbf{x}(t))\ \xi_{41\ell^b_{(4,1)}}(\mathbf{x}(t)), \tag{4.5}$$

sendo $\ell^a_{(i,j)=1} = 1,2$ e $\ell^b_{(i,k)=1} = 1,2$ e

$$
\begin{aligned}
\sigma_{211}(\mathbf{x}) &= \frac{\tilde{f}_{21}(\mathbf{x}) - a_{212}}{a_{211} - a_{212}}, & \sigma_{212}(\mathbf{x}) = \frac{a_{211} - \tilde{f}_{21}(\mathbf{x})}{a_{211} - a_{212}}, \\
\sigma_{411}(\mathbf{x}) &= \frac{\tilde{f}_{41}(\mathbf{x}) - a_{412}}{a_{411} - a_{412}}, & \sigma_{412}(\mathbf{x}) = \frac{a_{411} - \tilde{f}_{41}(\mathbf{x})}{a_{411} - a_{412}}, \\
\xi_{211}(\mathbf{x}) &= \frac{g_{21}(\mathbf{x}) - b_{212}}{b_{211} - b_{212}}, & \xi_{212}(\mathbf{x}) = \frac{b_{211} - g_{21}(\mathbf{x})}{b_{211} - b_{212}}, \\
\xi_{411}(\mathbf{x}) &= \frac{g_{41}(\mathbf{x}) - b_{412}}{b_{411} - b_{412}}, & \xi_{412}(\mathbf{x}) = \frac{b_{411} - g_{41}(\mathbf{x})}{b_{411} - b_{412}}.
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Note que o sistema (3.18) tem termos não-lineares em $A(2,1)$, $A(4,1)$, $B(2,1)$ e $B(4,1)$, sendo que $A(2,1)$ denota o elemento $(2,1)$ da matriz $\mathbf{A}$.

As funções $\tilde{f}_{21}(\mathbf{x})$, $\tilde{f}_{41}(\mathbf{x})$, $g_{21}(\mathbf{x})$ e $g_{41}(\mathbf{x})$ definidas em (3.20) são dependentes apenas da variável de estado x_1. Logo pode-se definir $h_p(\mathbf{x}(t))$ utilizando (4.5), da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
h_1(x_1(t)) &= \sigma_{211}(x_1(t))\,\sigma_{411}(x_1(t))\,\xi_{211}(x_1(t))\,\xi_{411}(x_1(t)), \\
h_2(x_1(t)) &= \sigma_{212}(x_1(t))\,\sigma_{411}(x_1(t))\,\xi_{211}(x_1(t))\,\xi_{411}(x_1(t)), \\
h_3(x_1(t)) &= \sigma_{211}(x_1(t))\,\sigma_{412}(x_1(t))\,\xi_{211}(x_1(t))\,\xi_{411}(x_1(t)), \\
h_4(x_1(t)) &= \sigma_{212}(x_1(t))\,\sigma_{412}(x_1(t))\,\xi_{211}(x_1(t))\,\xi_{411}(x_1(t)), \\
h_5(x_1(t)) &= \sigma_{211}(x_1(t))\,\sigma_{411}(x_1(t))\,\xi_{212}(x_1(t))\,\xi_{411}(x_1(t)), \\
h_6(x_1(t)) &= \sigma_{212}(x_1(t))\,\sigma_{411}(x_1(t))\,\xi_{212}(x_1(t))\,\xi_{411}(x_1(t)), \\
h_7(x_1(t)) &= \sigma_{211}(x_1(t))\,\sigma_{412}(x_1(t))\,\xi_{212}(x_1(t))\,\xi_{411}(x_1(t)), \\
h_8(x_1(t)) &= \sigma_{212}(x_1(t))\,\sigma_{412}(x_1(t))\,\xi_{212}(x_1(t))\,\xi_{411}(x_1(t)), \\
h_9(x_1(t)) &= \sigma_{211}(x_1(t))\,\sigma_{411}(x_1(t))\,\xi_{211}(x_1(t))\,\xi_{412}(x_1(t)), \\
h_{10}(x_1(t)) &= \sigma_{212}(x_1(t))\,\sigma_{411}(x_1(t))\,\xi_{211}(x_1(t))\,\xi_{412}(x_1(t)), \\
h_{11}(x_1(t)) &= \sigma_{211}(x_1(t))\,\sigma_{412}(x_1(t))\,\xi_{211}(x_1(t))\,\xi_{412}(x_1(t)), \\
h_{12}(x_1(t)) &= \sigma_{212}(x_1(t))\,\sigma_{412}(x_1(t))\,\xi_{211}(x_1(t))\,\xi_{412}(x_1(t)), \\
h_{13}(x_1(t)) &= \sigma_{211}(x_1(t))\,\sigma_{411}(x_1(t))\,\xi_{212}(x_1(t))\,\xi_{412}(x_1(t)), \\
h_{14}(x_1(t)) &= \sigma_{212}(x_1(t))\,\sigma_{411}(x_1(t))\,\xi_{212}(x_1(t))\,\xi_{412}(x_1(t)), \\
h_{15}(x_1(t)) &= \sigma_{211}(x_1(t))\,\sigma_{412}(x_1(t))\,\xi_{212}(x_1(t))\,\xi_{412}(x_1(t)), \\
h_{16}(x_1(t)) &= \sigma_{212}(x_1(t))\,\sigma_{412}(x_1(t))\,\xi_{212}(x_1(t))\,\xi_{412}(x_1(t)).
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

A Figura 4.1 ilustra as funções de pertinência $h_j(x_1(t))$, $j = 1, \ldots, 16$.

A Figura 4.2 apresenta as funções $\tilde{f}_{21}(x_1)$, $\tilde{f}_{41}(x_1)$, $g_{21}(x_1)$ e $g_{41}(x_1)$ e suas respectivas aproximações exatas $\tilde{f}_{f21}(x_1)x_1$, $\tilde{f}_{f41}(x_1)x_1$, $g_{g21}(x_1)$ e $g_{g41}(x_1)$.

O elemento "•", que aparece em destaque na Figura 4.2, e nas próximas figuras desta seção, tem efeito ilustrativo e serve apenas ressaltar a origem e os extremos da região de operação. O período de amostragem utilizado foi $\Delta_x = \pi/180$.

4.2.1 Redução de Regras

O método de redução de regras Taniguchi et al. (2001) consiste em reduzir dois modelos locais em um único modelo local. Isto é feito substituindo-se os termos não-lineares $\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t))$, que

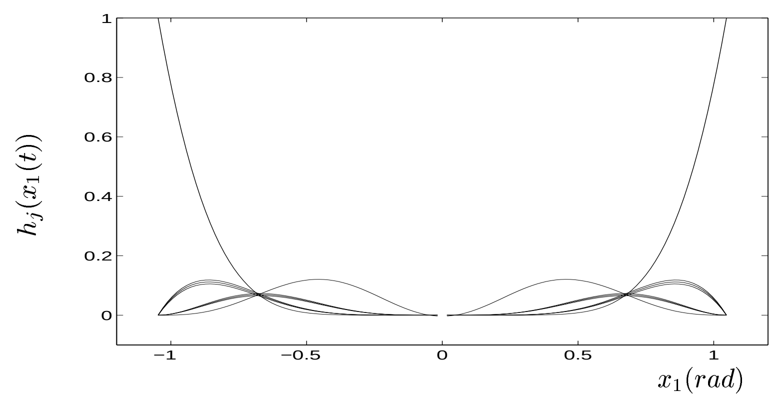

Figura 4.1: Funções de pertinência do método de representação exata com dezesseis modelos locais para o intervalo $-60\pi/180 \leq x_1 \leq 60\pi/180$ *rad*.

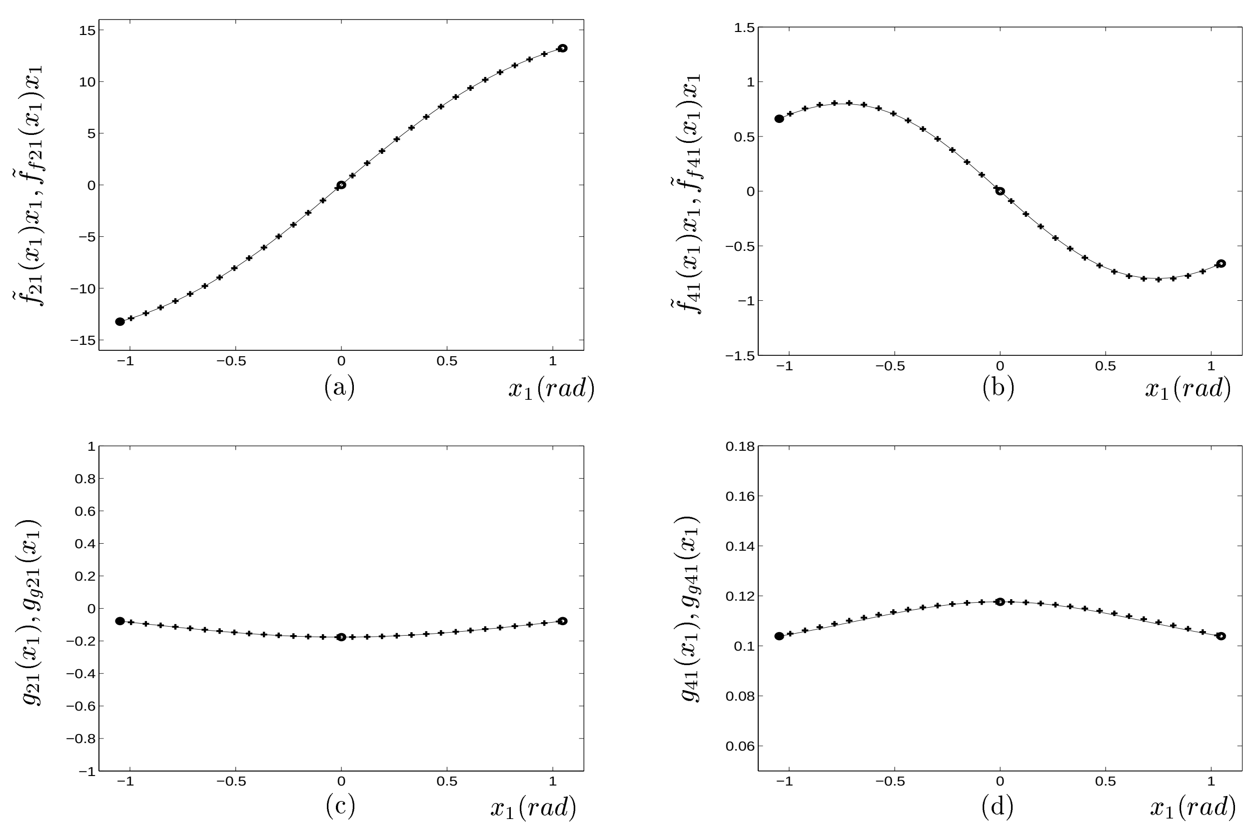

Figura 4.2: Aproximação fuzzy: aproximação exata com dezesseis modelos locais para o intervalo $-60\pi/180 \leq x_1 \leq 60\pi/180 \leq$ *rad*; (-) curvas do modelo de simulação, (+) aproximações com modelos *fuzzy*.

serão reduzidos, pelos termos constantes $a_{i_0j_0}$ e os termos não-lineares constantes $g_{ik}(\mathbf{x}(t))$, que serão reduzidos, pelos termos constantes $b_{i_0j_0}$, sendo

$$\begin{aligned} a_{i_0j_0} &= \frac{(a_{ij1} + a_{ij2})}{2}, \\ b_{i_0k_0} &= \frac{(b_{ik1} + b_{ik2})}{2}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Para a redução com relação à $\tilde{f}_{i_0j_0}(\mathbf{x}(t))$ o modelo reduzido é descrito como a seguir:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ (i,j)\neq(i_0,j_0)}}^{n} \sum_{\ell^a_{(i,j)}=1}^{2} \sigma_{ij\ell^a_{(i,j)}}(\mathbf{x}(t)) a_{ij\ell^a_{(i,j)}} \mathbf{U}^A_{ij}\mathbf{x}(t) + a_{i_0j_0}\mathbf{U}^A_{i0j0}\mathbf{x}(t) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell^b_{(i,k)}=1}^{2} \xi_{ik\ell^b_{(i,k)}}(\mathbf{x}(t)) b_{ik\ell^b_{(i,k)}} \mathbf{U}^B_{ik} u(t). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Para a redução com respeito à $g_{i_0k_0}(\mathbf{x}(t))$ o modelo reduzido é descrito como a seguir:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\ell^a_{(i,j)}=1}^{2} \sigma_{ij\ell^a_{(i,j)}}(\mathbf{x}(t)) a_{ij\ell^a_{(i,j)}} \mathbf{U}^A_{ij}\mathbf{x}(t) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ (i,k)\neq(i_0,k_0)}}^{m} \sum_{\ell^b_{(i,k)}=1}^{2} \xi_{ik\ell^b_{(i,k)}}(\mathbf{x}(t)) b_{ik\ell^b_{(i,k)}} \mathbf{U}^B_{ik}\mathbf{u}(t) + b_{i_0k_0}\mathbf{U}^B_{i0k0}\mathbf{u}(t). \end{aligned} \tag{4.10}$$

As reduções de regras em (4.9) e (4.10) consistem em substituir os termos não-lineares por termos constantes. Cada termo não-linear substituído reduz o número de regras pela metade e apenas as aproximações das funções correspondentes são afetadas. O exemplo a seguir ilustra esta idéia.

Exemplo 7

Considere o Exemplo 6 e a redução com respeito à $A(2,1)$, $A(4,1)$, $B(2,1)$ e $B(4,1)$.

a) Redução com respeito à $A(2,1)$

O modelo fuzzy reduzido é representado como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \sum_{i=1}^{4} \sum_{\substack{j=1 \\ (i,j)\neq(2,1)}}^{4} \sum_{\ell^a_{(i,j)}=1}^{2} \sigma_{ij\ell^a_{(i,j)}}(\mathbf{x}(t)) a_{ij\ell^a_{(i,j)}} \mathbf{U}^A_{ij}\mathbf{x}(t) + a_{i_0j_0}\mathbf{U}^A_{i0j0}\mathbf{x}(t) \\ &+ \sum_{i=1}^{4} \sum_{k=1}^{1} \sum_{\ell^b_{(i,k)}=1}^{2} \xi_{ik\ell^b_{(i,k)}}(\mathbf{x}(t)) b_{ik\ell^b_{(i,k)}} \mathbf{U}^B_{ik}\mathbf{u}(t). \end{aligned} \tag{4.11}$$

De (3.2), verifica-se que os elementos a_{111}, a_{131}, a_{141}, a_{112}, a_{132}, a_{142}, a_{221}, a_{231}, a_{241}, a_{222}, a_{232}, a_{242}, a_{311}, a_{321}, a_{331}, a_{312}, a_{322}, a_{332}, a_{421}, a_{431}, a_{441}, a_{422}, a_{432}, a_{442}, b_{111}, b_{112}, b_{131}, b_{132}, são nulos e $a_{411} = -0.6315$, $a_{412} = -1.7289$, $b_{211} = -0.0779$, $b_{212} = -0.1765$, $b_{411} = 0.1176$, $b_{412} = 0.1039$.

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \sigma_{411}(\mathbf{x}(t))a_{411}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \sigma_{412}(\mathbf{x}(t))a_{412}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&+ a_{i_0j_0}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&+ \xi_{211}(\mathbf{x}(t))b_{211}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \xi_{212}(\mathbf{x}(t))b_{212}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&+ \xi_{411}(\mathbf{x}(t))b_{421}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \xi_{412}(\mathbf{x}(t))b_{412}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

De (4.1), têm-se que

$$\begin{aligned}
\sigma_{411}(\mathbf{x}(t)) &= \frac{\tilde{f}_{41}(\mathbf{x}(t)) - a_{412}}{a_{411} - a_{412}}, \\
\sigma_{412}(\mathbf{x}(t)) &= \frac{a_{411} - \tilde{f}_{411}(\mathbf{x}(t))}{a_{411} - a_{412}}, \\
\xi_{211}(\mathbf{x}(t)) &= \frac{g_{21}(\mathbf{x}(t)) - b_{212}}{b_{211} - b_{212}}, \\
\xi_{212}(\mathbf{x}(t)) &= \frac{b_{211} - g_{21}(\mathbf{x}(t))}{b_{211} - b_{212}},
\end{aligned} \tag{4.12}$$

e de (4.8),

$$a_{i_0j_0} = \frac{(a_{211} + a_{212})}{2} = 14.9614. \tag{4.13}$$

O modelo reduzido pode ser representado de forma simplificada por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{p=1}^{8} m_p(\mathbf{x}(t))(\mathbf{A}_p\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_p\mathbf{u}(t)), \tag{4.14}$$

sendo

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_5 = \mathbf{A}_7,$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_4 = \mathbf{A}_6 = \mathbf{A}_8,$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 14.9614 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.6315 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 14.9614 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.7289 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2, \quad \mathbf{B}_3 = \mathbf{B}_4,$$
$$\mathbf{B}_5 = \mathbf{B}_6, \quad \mathbf{B}_7 = \mathbf{B}_8,$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -0.0779 & 0 & 0.1176 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -0.1765 & 0 & 0.1176 \end{bmatrix}^T,$$
$$\mathbf{B}_5 = \begin{bmatrix} 0 & -0.0779 & 0 & 0.1039 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{B}_7 = \begin{bmatrix} 0 & -0.1765 & 0 & 0.1039 \end{bmatrix}^T.$$

As funções $m_p(\mathbf{x}(t))$ em (4.14) são dadas como a seguir

$$m_p(\mathbf{x}(t)) = \sigma_{41\ell^a_{(4,1)}}(\mathbf{x}(t))\xi_{21\ell^b_{(2,1)}}(\mathbf{x}(t))\xi_{41\ell^b_{(4,1)}}(\mathbf{x}(t)),$$

$$\begin{aligned}
m_1(x_1(t)) &= \sigma_{411}(x_1(t))\ \xi_{211}(x_1(t))\ \xi_{411}(x_1(t)),\\
m_2(x_1(t)) &= \sigma_{412}(x_1(t))\ \xi_{211}(x_1(t))\ \xi_{411}(x_1(t)),\\
m_3(x_1(t)) &= \sigma_{411}(x_1(t))\ \xi_{212}(x_1(t))\ \xi_{411}(x_1(t)),\\
m_4(x_1(t)) &= \sigma_{412}(x_1(t))\ \xi_{212}(x_1(t))\ \xi_{411}(x_1(t)),\\
m_5(x_1(t)) &= \sigma_{411}(x_1(t))\ \xi_{211}(x_1(t))\ \xi_{412}(x_1(t)),\\
m_6(x_1(t)) &= \sigma_{412}(x_1(t))\ \xi_{211}(x_1(t))\ \xi_{412}(x_1(t)),\\
m_7(x_1(t)) &= \sigma_{411}(x_1(t))\ \xi_{212}(x_1(t))\ \xi_{412}(x_1(t)),\\
m_8(x_1(t)) &= \sigma_{412}(x_1(t))\ \xi_{212}(x_1(t))\ \xi_{412}(x_1(t)).
\end{aligned} \tag{4.15}$$

São utilizadas oito regras e o elemento $A(2,1)$ é substituído pelo termo $a_{21} = 14.9614$.

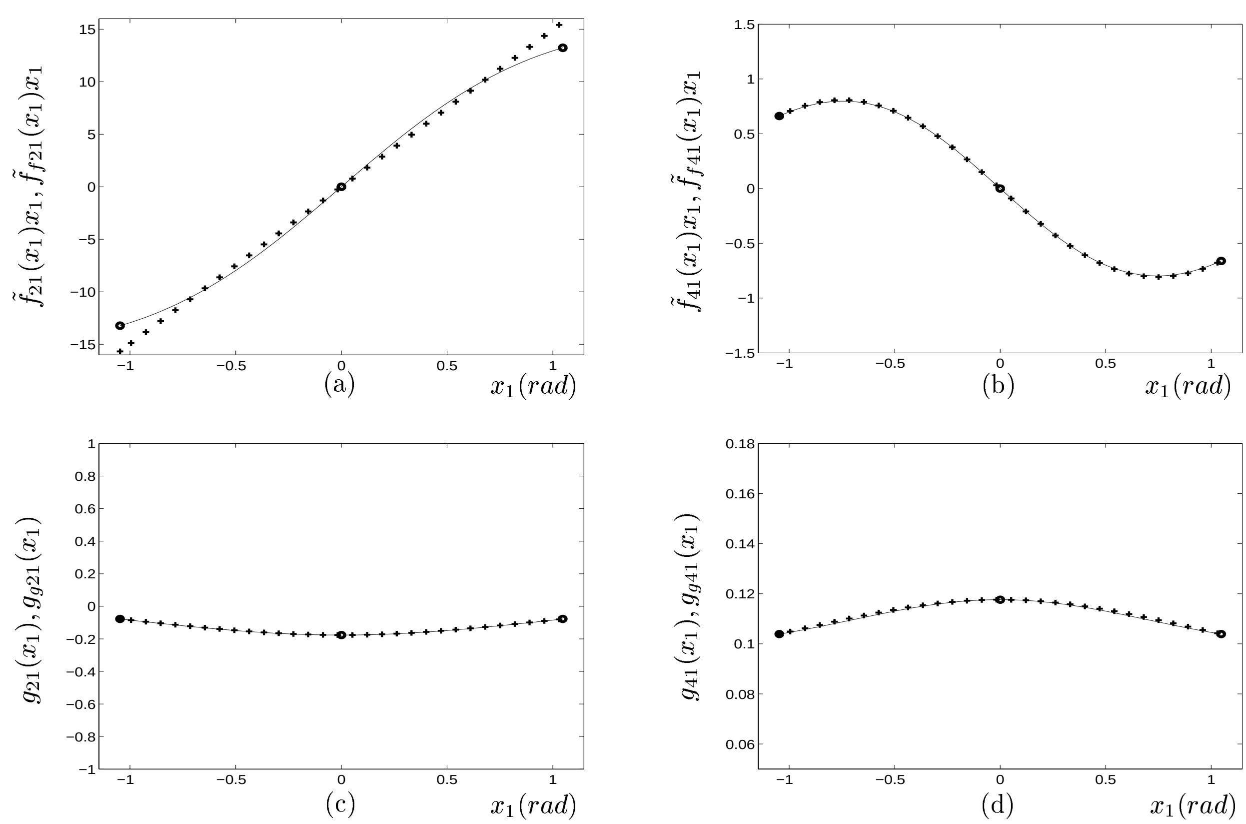

Figura 4.3: Aproximação *fuzzy*: aproximação com redução do termo $A(2,1)$ para o intervalo $-60\pi/180 \leq x_1 \leq 60\pi/180 \leq$ rad; (-) curvas do modelo de simulação, (+) aproximações com modelos *fuzzy*.

A Figura 4.3 (a) apresenta a aproximação da curva $\tilde{f}_{21}(x_1)x_1$ quando é feita a redução de regras com termo não linear $A(2,1)$. As aproximações das funções $\tilde{f}_{41}(x_1)x_1$, $g_{21}(x_1)$ e $g_{41}(x_1)$ não são afetadas pela redução e são as mesmas apresentadas na Figura 4.2.

b) Redução com respeito à $A(4,1)$

Seguindo o mesmo procedimento da redução anterior, obtém-se o seguinte modelo fuzzy reduzido:

$$\dot{x}(t) = \sum_{p=1}^{8} m_p(\boldsymbol{x}(t))(\mathbf{A}_p x(t) + \mathbf{B}_p u(t)), \tag{4.16}$$

sendo

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_5 = \mathbf{A}_7,$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_4 = \mathbf{A}_6 = \mathbf{A}_8,$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 17.2923 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.1802 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12.6304 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.1802 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2, \quad \mathbf{B}_3 = \mathbf{B}_4,$$

$$\mathbf{B}_5 = \mathbf{B}_6, \quad \mathbf{B}_7 = \mathbf{B}_8,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & -0.0779 & 0 & 0.1176 \end{bmatrix}^T, & \mathbf{B}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & -0.1765 & 0 & 0.1176 \end{bmatrix}^T, \\ \mathbf{B}_5 &= \begin{bmatrix} 0 & -0.0779 & 0 & 0.1039 \end{bmatrix}^T, & \mathbf{B}_7 &= \begin{bmatrix} 0 & -0.1765 & 0 & 0.1039 \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

As funções m_p em (4.16) são dadas como a seguir

$$m_p(\mathbf{x}(t)) = \sigma_{21\ell^b_{(2,1)}}(\mathbf{x}(t))\xi_{21\ell^b_{(2,1)}}(\mathbf{x}(t))\xi_{41\ell^b_{(4,1)}}(\mathbf{x}(t)),$$

$$\begin{aligned} m_1(x_1(t)) &= \sigma_{211}(x_1(t))\ \xi_{211}(x_1(t))\ \xi_{411}(x_1(t)), \\ m_2(x_1(t)) &= \sigma_{212}(x_1(t))\ \xi_{211}(x_1(t))\ \xi_{411}(x_1(t)), \\ m_3(x_1(t)) &= \sigma_{211}(x_1(t))\ \xi_{212}(x_1(t))\ \xi_{411}(x_1(t)), \\ m_4(x_1(t)) &= \sigma_{212}(x_1(t))\ \xi_{212}(x_1(t))\ \xi_{411}(x_1(t)), \\ m_5(x_1(t)) &= \sigma_{211}(x_1(t))\ \xi_{211}(x_1(t))\ \xi_{412}(x_1(t)), \\ m_6(x_1(t)) &= \sigma_{212}(x_1(t))\ \xi_{211}(x_1(t))\ \xi_{412}(x_1(t)), \\ m_7(x_1(t)) &= \sigma_{211}(x_1(t))\ \xi_{212}(x_1(t))\ \xi_{412}(x_1(t)), \\ m_8(x_1(t)) &= \sigma_{212}(x_1(t))\ \xi_{212}(x_1(t))\ \xi_{412}(x_1(t)). \end{aligned} \tag{4.17}$$

São utilizadas oito regras e o elemento $A(4,1)$ é substituído pelo termo $a_{41} = -1.1802$.

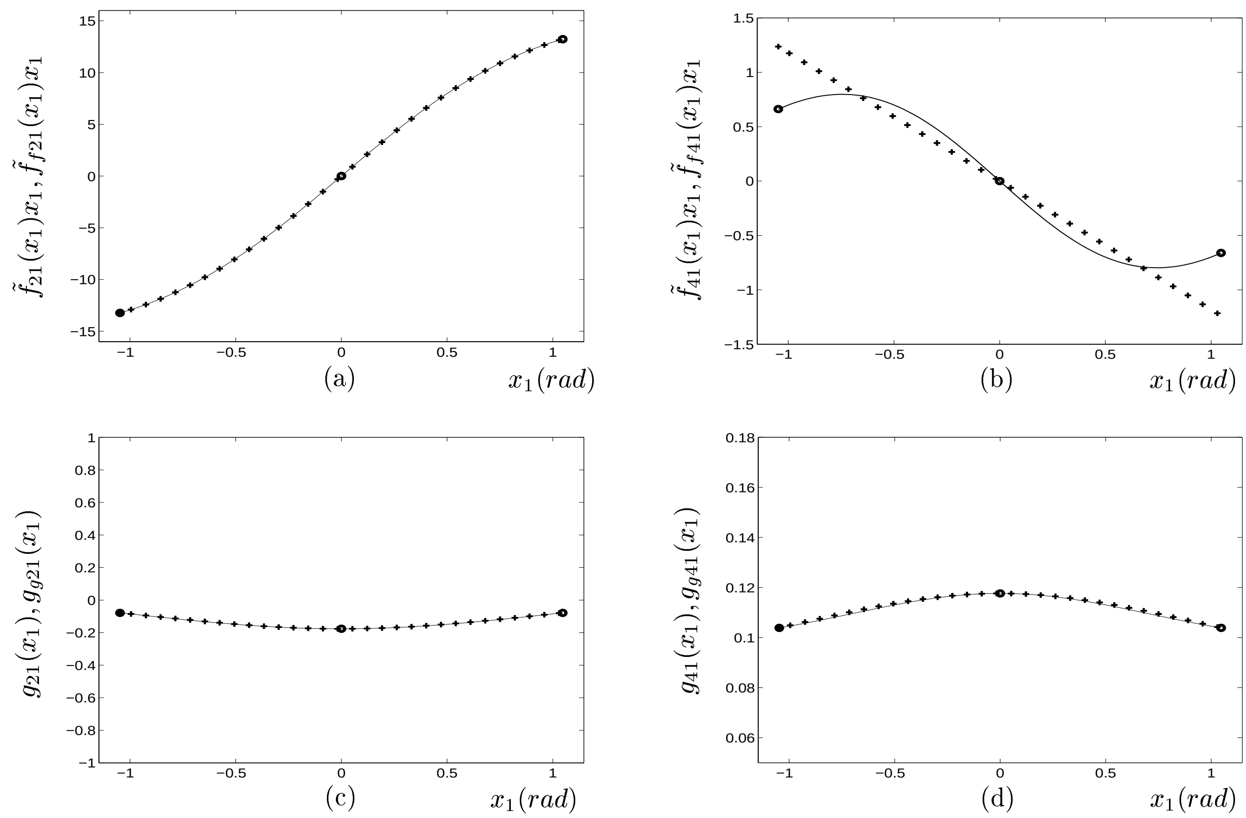

Figura 4.4: Aproximação fuzzy: aproximação com redução do termo $A(4,1)$ para o intervalo $-60\pi/180 \leq x_1 \leq 60\pi/180 \leq \ rad$; (-) curvas do modelo de simulação, (+) aproximações com modelos *fuzzy*.

A aproximação da curva $\tilde{f}_{41}(x_1)x_1$ é apresentada na Figura 4.4 (b) e as aproximações das curvas $\tilde{f}_{21}(x_1)x_1$, $g_{21}(x_1)$ e $g_{41}(x_1)$ não são alteradas pela redução e continuam sendo as mesmas da Figura 4.2.

c) Redução com respeito à $B(2,1)$

Para a redução com relação à $B(2,1)$, o modelo fuzzy reduzido é representado por:

$$\dot{x}(t) = \sum_{p=1}^{8} m_p(\boldsymbol{x}(t))(\mathbf{A}_p x(t) + \mathbf{B}_p u(t)), \tag{4.18}$$

sendo

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_5, \quad \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_6,$$

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_7, \quad \mathbf{A}_4 = \mathbf{A}_8,$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 17.2923 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.6315 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12.6304 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.6315 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 17.2923 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.7289 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12.6304 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.7289 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_3 = \mathbf{B}_4,$$

$$\mathbf{B}_5 = \mathbf{B}_6 = \mathbf{B}_7 = \mathbf{B}_8,$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -0.1272 & 0 & 0.1176 \end{bmatrix}^T, \qquad \mathbf{B}_5 = \begin{bmatrix} 0 & -0.1272 & 0 & 0.1039 \end{bmatrix}^T.$$

As funções m_p em (4.18) são dadas como a seguir

$$m_p(\boldsymbol{x}(t)) = \sigma_{21\ell^b_{(2,1)}}(\boldsymbol{x}(t))\sigma_{41\ell^b_{(4,1)}}(\boldsymbol{x}(t))\xi_{41\ell^b_{(4,1)}}(\boldsymbol{x}(t)),$$

$$\begin{aligned}
h_1(x_1(t)) &= \sigma_{211}(x_1(t))\ \sigma_{411}(x_1(t))\ \xi_{411}(x_1(t)),\\
h_2(x_1(t)) &= \sigma_{212}(x_1(t))\ \sigma_{411}(x_1(t))\ \xi_{411}(x_1(t)),\\
h_3(x_1(t)) &= \sigma_{211}(x_1(t))\ \sigma_{412}(x_1(t))\ \xi_{411}(x_1(t)),\\
h_4(x_1(t)) &= \sigma_{212}(x_1(t))\ \sigma_{412}(x_1(t))\ \xi_{411}(x_1(t)),\\
h_5(x_1(t)) &= \sigma_{211}(x_1(t))\ \sigma_{411}(x_1(t))\ \xi_{412}(x_1(t)),\\
h_6(x_1(t)) &= \sigma_{212}(x_1(t))\ \sigma_{411}(x_1(t))\ \xi_{412}(x_1(t)),\\
h_7(x_1(t)) &= \sigma_{211}(x_1(t))\ \sigma_{412}(x_1(t))\ \xi_{412}(x_1(t)),\\
h_8(x_1(t)) &= \sigma_{212}(x_1(t))\ \sigma_{412}(x_1(t))\ \xi_{412}(x_1(t)).
\end{aligned}$$

São utilizadas oito regras e o elemento $B(2,1)$ é substituído pelo termo $b_{21} = -0.1272$.

A aproximação da curva $g_{21}(x_1)$ é apresentada na Figura 4.5 (c) e as aproximações das curvas $\tilde{f}_{21}(x_1)x_1$, $\tilde{f}_{41}(x_1)x_1$ e $g_{41}(x_1)$ não são alteradas pela redução e continuam sendo as mesmas da Figura 4.2.

c) Redução com respeito à $B(4,1)$

Para a redução com relação à $B(4,1)$, o modelo fuzzy reduzido é representado por (4.19):

$$\dot{x}(t) = \sum_{p=1}^{8} m_p(\boldsymbol{x}(t))(\mathbf{A}_p x(t) + \mathbf{B}_p u(t)), \tag{4.19}$$

sendo

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_5, \quad \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_6,$$

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_7, \quad \mathbf{A}_4 = \mathbf{A}_8,$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 17.2923 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.6315 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12.6304 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.6315 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 17.2923 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.7289 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12.6304 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.7289 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

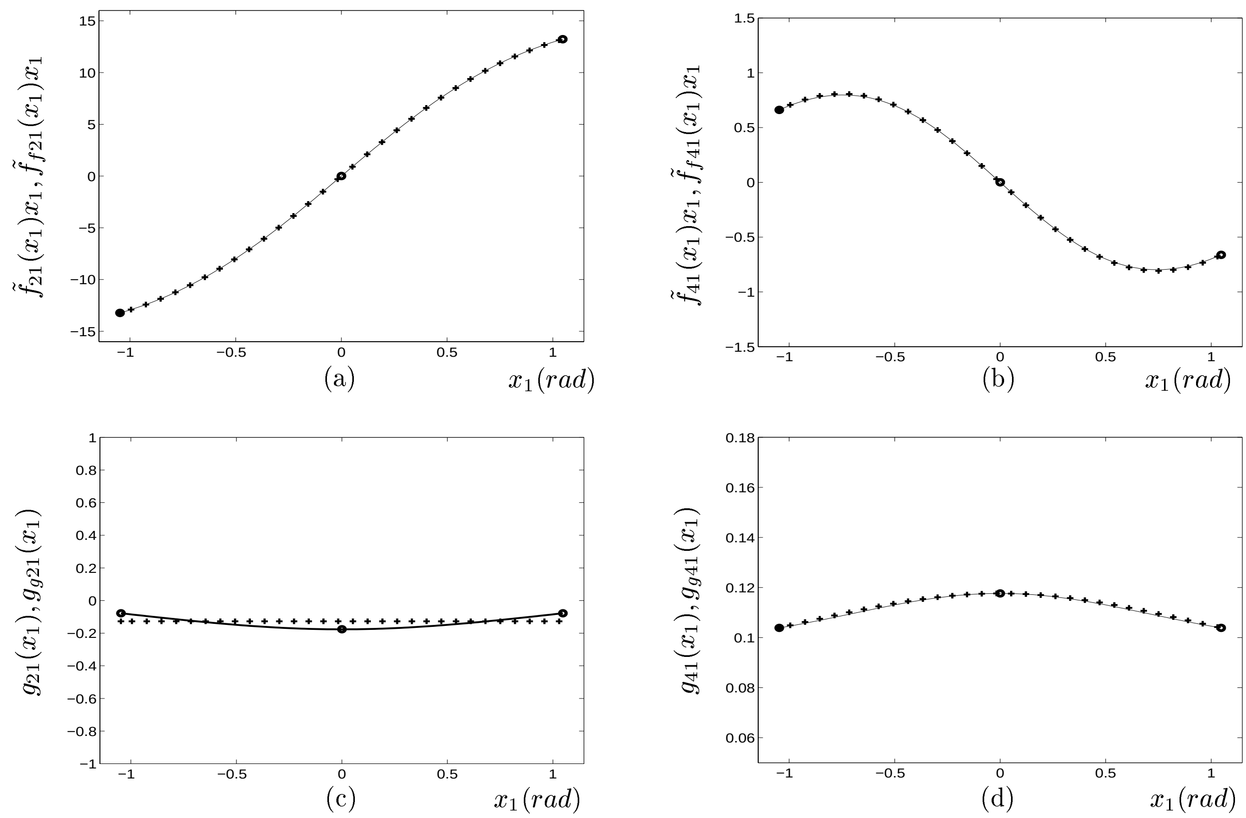

Figura 4.5: Aproximação fuzzy: aproximação com redução do termo $B(2,1)$ para o intervalo $-60\pi/180 \leq x_1 \leq 60\pi/180 \leq$ rad; (-) curvas do modelo de simulação, (+) aproximações com modelos *fuzzy*.

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_3 = \mathbf{B}_4,$$

$$\mathbf{B}_5 = \mathbf{B}_6 = \mathbf{A}_7 = \mathbf{B}_8,$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -0.0779 & 0 & 0.1108 \end{bmatrix}^T, \qquad \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -0.1765 & 0 & 0.1108 \end{bmatrix}^T.$$

As funções m_p em (4.19) são dadas como a seguir

$$m_p(\boldsymbol{x}(t)) = \sigma_{21\ell^b_{(2,1)}}(\boldsymbol{x}(t))\sigma_{41\ell^b_{(4,1)}}(\boldsymbol{x}(t))\xi_{21\ell^b_{(2,1)}}(\boldsymbol{x}(t)),$$

$$\begin{aligned}
m_1(x_1(t)) &= \sigma_{211}(x_1(t))\ \sigma_{411}(x_1(t))\ \xi_{211}(x_1(t)),\\
m_2(x_1(t)) &= \sigma_{212}(x_1(t))\ \sigma_{411}(x_1(t))\ \xi_{211}(x_1(t)),\\
m_3(x_1(t)) &= \sigma_{211}(x_1(t))\ \sigma_{412}(x_1(t))\ \xi_{211}(x_1(t)),\\
m_4(x_1(t)) &= \sigma_{212}(x_1(t))\ \sigma_{412}(x_1(t))\ \xi_{211}(x_1(t)),\\
m_5(x_1(t)) &= \sigma_{211}(x_1(t))\ \sigma_{411}(x_1(t))\ \xi_{212}(x_1(t)),\\
m_6(x_1(t)) &= \sigma_{212}(x_1(t))\ \sigma_{411}(x_1(t))\ \xi_{212}(x_1(t)),\\
m_7(x_1(t)) &= \sigma_{211}(x_1(t))\ \sigma_{412}(x_1(t))\ \xi_{212}(x_1(t)),\\
m_8(x_1(t)) &= \sigma_{212}(x_1(t))\ \sigma_{412}(x_1(t))\ \xi_{212}(x_1(t)).
\end{aligned}$$

São utilizadas oito regras e o elemento $B(4,1)$ é substituído pelo termo $b_{41} = 0.1108$. A aproximação da curva $g_4(x_1)$ é apresentada na Figura 4.6 (d) e as aproximações das curvas

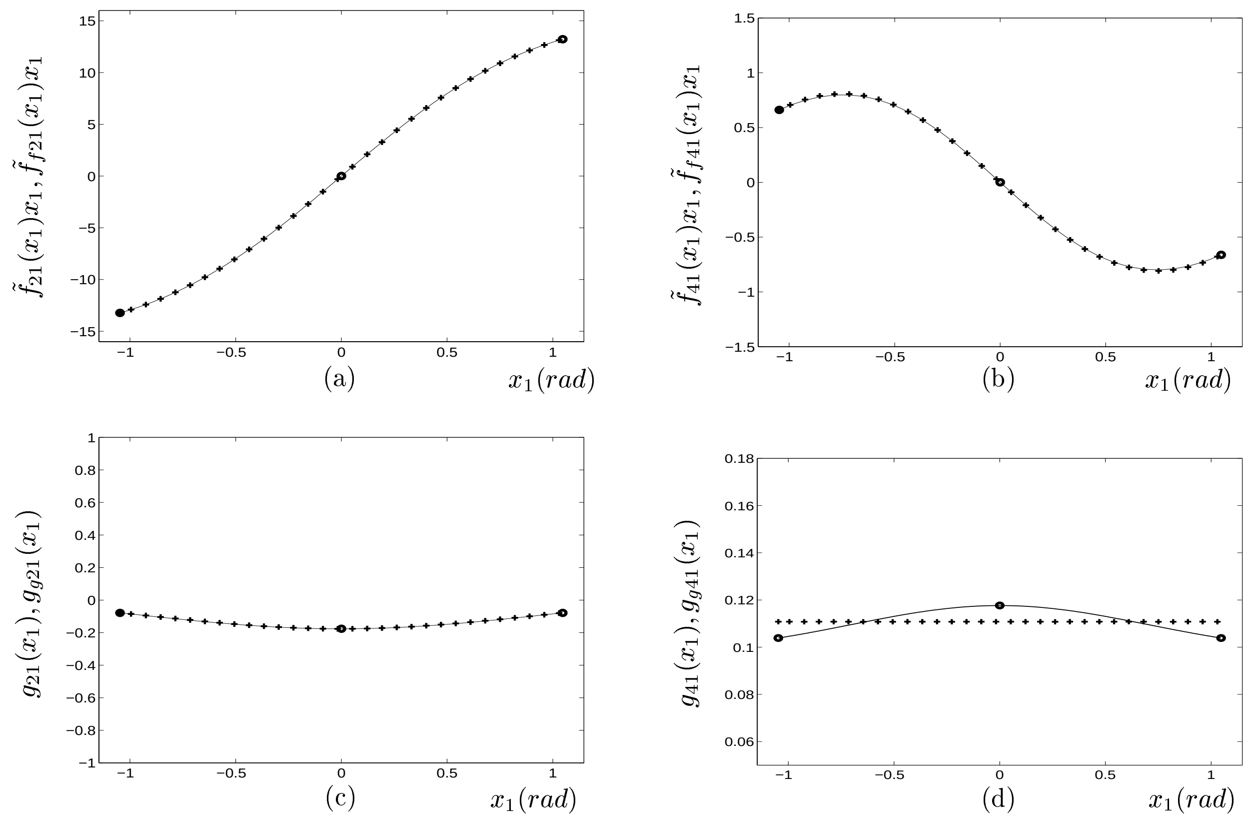

Figura 4.6: Aproximação fuzzy: aproximação com redução do termo $B(4,1)$ para o intervalo $-60\pi/180 \leq x_1 \leq 60\pi/180 \leq \ rad$; (-) curvas do modelo de simulação, (+) aproximações com modelos *fuzzy*.

$\tilde{f}_{21}(x_1)x_1$, $\tilde{f}_{41}(x_1)x_1$ e $g_{21}(x_1)$ não são alteradas pela redução e continuam sendo as mesmas da Figura 4.2.

Nesta primeira etapa foram realizados quatro tipos de reduções com oito modelos locais em cada uma delas. A fase seguinte do processo de redução consiste em se escolher um termo, diferente do reduzido, e realizar a redução utilizando quatro modelos locais. A escolha do novo termo a ser reduzido é determinada pela taxa de decaimento no projeto do regulador. Veja Taniguchi et al. (2001).

Ao realizar alguma das reduções, o método proposto em Taniguchi et al. (2001) deixa de ser um método de representação exata e passa a ser um método de representação aproximada.

4.3 Funções de Pertinência Otimizadas

Para obter uma representação exata do sistema com o método proposto em Taniguchi et al. (2001) são necessários 2^s modelos locais, sendo “s” o número de não-linearidades do sistema. O número de modelos locais pode crescer consideravelmente se o sistema for composto por muitas funções não-lineares. Como foi ilustrado no exemplo anterior, a redução produz erros de modelagem. Embora estes erros sejam considerados no projeto do regulador, em alguns casos, eles podem ser muito grandes e inviabilizar o projeto.

Nesta seção é proposta uma nova forma de representação aproximada do modelo de simulação (3.27) pelo modelo *fuzzy* TS (2.11). O objetivo é obter uma boa representação do sistema com um número menor de modelos do que o método de representação proposto em Taniguchi et al. (2001).

Esta representação aproximada pode ser obtida se as funções de pertinência $\alpha_j(\mathbf{x}(t))$, $j = 1, \ldots, r$ forem determinadas de modo a minimizar o erro de modelagem, dados os modelos locais.

Considere que os modelos locais $(\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j)$, $j = 1, \ldots, r$, de (2.11) são obtidos nos pontos de operação $\mathbf{x}_{01}, \ldots, \mathbf{x}_{0r}$, respectivamente, utilizando-se o método apresentado na Seção 3.3.

Defina no sistema (3.27):

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{G}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} g_{11}(\mathbf{x}) & \ldots & g_{1m}(\mathbf{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n1}(\mathbf{x}) & \ldots & g_{nm}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

Nos exemplos estudados nesta tese com o pêndulo invertido, tem-se $m = 1$.

Então, dado um ponto $\mathbf{x}_f \in \chi$, sendo χ um subconjunto fechado do R^n que corresponde à região de operação, objetiva-se a especificação dos pesos $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \ldots \alpha_r]^T$, de modo que o erro máximo, em termos da norma euclidiana, entre o modelo *fuzzy* (2.11) e a planta (3.27) seja mínimo:

Considere dados $\mathbf{x}_f \in \chi$, $r \geq 1$, $f_i(\mathbf{x}_f)$, $g_i(\mathbf{x}_f)$, $\mathbf{a}_{ij}$, $\mathbf{x}_{0j}$, (3.30) e

$$E = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \left\| \sum_{j=1}^{r} \alpha_j(\mathbf{x}_f)\mathbf{a}_{ij}^T\mathbf{x}_f - f_i(\mathbf{x}_f) \right\|_2^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \left\| \sum_{j=1}^{r} \alpha_j(\mathbf{x}_f) g_i(\mathbf{x}_{0j}) - g_i(\mathbf{x}_f) \right\|_2^2, \quad (4.20)$$

sendo que o vetor $\mathbf{a}_{ij}^T$ representa a linha i do modelo local j.

Então, o problema de otimização pode ser formulado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\underset{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}}{\text{minimize}} \; E(\boldsymbol{\alpha}) \\ &\text{sujeito a} \\ &\qquad \alpha_j(\mathbf{x}_f) \geq 0, \;\; j = 1, \ldots, r-1, \\ &\qquad 1 - \sum_{j=1}^{r-1} \alpha_j(\mathbf{x}_f) \geq 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

A solução do problema (4.21) fornece os valores de $\alpha_j(\mathbf{x}_f)$ para $j = 1, \ldots, r-1$. O valor de $\alpha_r(\mathbf{x}_f)$ é obtido a partir de (4.21) e dado por:

$$\alpha_r(\mathbf{x}_f) = 1 - \sum_{j=1}^{r-1} \alpha_j(\mathbf{x}_f). \quad (4.22)$$

As restrições em (4.21) e (4.22) especificam que $\alpha_j(\mathbf{x}_f) \in [0,1]$, $j = 1,\dots,r$ (note que $\alpha_r(\mathbf{x}_f)$ pode ser substituído por $\alpha_1(\mathbf{x}_f)$, $\alpha_2(\mathbf{x}_f)$ $\dots$ $\alpha_{r-1}(\mathbf{x}_f)$).

Assim, para cada $\mathbf{x}_f \in \chi$, serão obtidos $\alpha_j(\mathbf{x}_f)$, $j = 1,\dots,r$ que minimizam o erro entre o sistema de simulação e a aproximação *fuzzy*.

A solução para o problema (4.21) pode ser obtida analiticamente, onde será apresentada apenas uma solução parcial, ou de forma completa, como descrito acima, por meio de LMIs.

Antes de apresentar a solução para o problema (4.21), será enfocada a propriedade de simetria das funções de pertinência, que será utilizada nos próximos exemplos.

4.3.1 Simetria das Funções de Pertinência

Na Seção 3.4.1 foi mostrado que, para sistemas com características descritas em (3.71), os modelos locais são simétricos em relação à origem. Portanto, para $\mathbf{x}_f = \mathbf{x}_0$ ou $\mathbf{x}_f = -\mathbf{x}_0$, os modelos locais são dados por

$$\mathbf{a}_i \;=\; \nabla f_i(\mathbf{x}_0) + \frac{f_i(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0^T \nabla f_i(\mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x}_0\|^2}\mathbf{x}_0.$$

Para os sistemas que possuem estas características, as funções de pertinência obtidas com a resolução do problema (4.21) também são simétricas em relação à origem. Veja a Figura 4.7 . Estas funções dependem dos modelos locais. Como os modelos locais são iguais quando definidos em pontos simétricos em relação à origem, as funções de pertinência também possuem a propriedade de simetria.

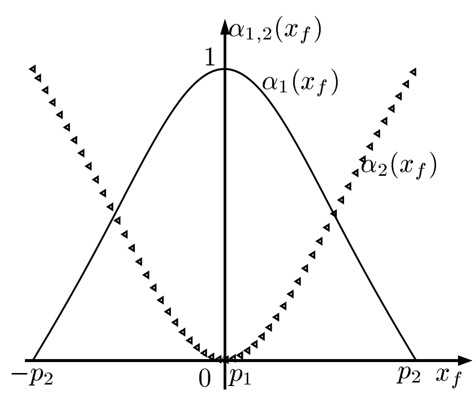

Figura 4.7: Funções de pertinência simétricas em relação à origem.

4.3.2 Solução Analítica

Uma tentativa para solucionar o problema definido em (4.21) consiste em desprezar inicialmente as restrições de desigualdade em (4.21) e obter uma solução parcial para o problema:

$$\underset{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}}{\text{minimizar}}\ \mathrm{E}(\boldsymbol{\alpha}) \tag{4.23}$$

com

$$\alpha_r(\mathbf{x}_f) = 1 - \sum_{j=1}^{r-1} \alpha_j(\mathbf{x}_f). \tag{4.24}$$

A solução deste novo problema pode ser facilmente obtida pela equação:

$$\nabla E(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}) = \left[\frac{\partial E}{\partial \alpha_1} \ \cdots \ \frac{\partial E}{\partial \alpha_{r-1}} \right]^T = 0. \tag{4.25}$$

Observe o esquema

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \\ \alpha_2 \\ \\ \vdots \\ \\ \alpha_{r-1} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \underset{\alpha_1}{\text{minimizar E}(\boldsymbol{\alpha})} \\ \\ \underset{\alpha_2}{\text{minimizar E}(\boldsymbol{\alpha})} \\ \\ \vdots \\ \\ \underset{\alpha_{r-1}}{\text{minimizar E}(\boldsymbol{\alpha})} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{\partial E}{\partial \alpha_1} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial E}{\partial \alpha_2} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial E}{\partial \alpha_{r-1}} = 0 \end{pmatrix}.$$

Seja $\boldsymbol{\alpha}_p = [\alpha_1, \ldots, \alpha_r]^T$ a solução de (4.23). Logo, se

$$\alpha_j(\mathbf{x}_f) \geq 0, \quad j = 1, \ldots, r \quad e \tag{4.26}$$

$$\alpha_1(\mathbf{x}_f) + \ldots + \alpha_r(\mathbf{x}_f) = 1, \tag{4.27}$$

então $\boldsymbol{\alpha}_p$ é a solução do problema definido em (4.21).

O Lema 2 apresenta o resultado da resolução de (4.23) para $\alpha_j(\mathbf{x}_f)$, $j = 1, \ldots, r$.

Lema 2 *A solução analítica de (4.25) é obtida pela solução do sistema linear descrito pela equação (4.28):*

$$\begin{aligned} \alpha_k(\mathbf{x}_f) &= \frac{L_{ka} + L_{kg}}{L_{kag}}, \qquad k = 1, \ldots, r-1, \\ \alpha_r(\mathbf{x}_f) &= 1 - \alpha_1(\mathbf{x}_f) - \alpha_2(\mathbf{x}_f) \ldots - \alpha_{r-1}(\mathbf{x}_f), \end{aligned} \tag{4.28}$$

sendo

$$\begin{aligned} L_{ka} &= \sum_i \left[\left(\sum_{j=1, j\neq k}^{r-1} \left(-\alpha_j(\mathbf{x}_f) \left(\mathbf{a}_{ij} - \mathbf{a}_{ir} \right)^T \mathbf{x}_f \right) \right) - \mathbf{a}_{ir}^T \mathbf{x}_f + f_i(\mathbf{x}_f) \right] \left(\mathbf{a}_{ik} - \mathbf{a}_{ir} \right)^T \mathbf{x}_f, \\ L_{kg} &= \sum_i \left[\left(\sum_{j=1, j\neq k}^{r-1} \left(-\alpha_j(\mathbf{x}_f)(g_i(\mathbf{x}_{0j}) - g_i(\mathbf{x}_{0r})) \right) \right) - g_i(\mathbf{x}_{0r}) + g_i(\mathbf{x}_f) \right] \\ &\quad \times \left(g_i(\mathbf{x}_{0k}) - g_i(\mathbf{x}_{0r}) \right), \\ L_{kag} &= \sum_i \left[\left((\mathbf{a}_{ik}^T - \mathbf{a}_{ir}^T)\mathbf{x}_f \right)^2 + \left(g_i(\mathbf{x}_{0k}) - g_i(\mathbf{x}_{0r}) \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Se

$$\alpha_k(\mathbf{x}_f) \geq 0 \quad k = 1, 2, \ldots, r$$

então $\alpha_k(\mathbf{x}_f)$, $k = 1, 2, \ldots, r$ *são uma solução para o problema.*

Observação 3 *O índice i corresponde às funções com não-linearidades de um sistema de ordem n. Por exemplo, para a modelagem do pêndulo invertido descrito no Apêndice A pela equação (A.18), as funções não-lineares são $f_2(x)$, $f_4(x)$, $g_2(x)$ e $g_4(x)$. Portanto, em (4.28), $i = 2, 4$ para L_{ka} e L_{kg}.*

Prova Considere a função energia (4.20):

$$E \;=\; E_{a1} + \ldots + E_{an} + E_{g1} + \ldots + E_{gn},$$

sendo

$$\begin{array}{rcllcccl}
E_{a1} & = & \frac{1}{2}(\alpha_1(\mathbf{x}_f)\mathbf{a}_{11}^T\mathbf{x}_f & +\alpha_2(\mathbf{x}_f)\mathbf{a}_{12}^T\mathbf{x}_f & + & \ldots & + & \alpha_r(\mathbf{x}_f)\mathbf{a}_{1r}^T\mathbf{x}_f - f_1(\mathbf{x}_f))^2, \\
 & & & & & \vdots & & \\
E_{an} & = & \frac{1}{2}(\alpha_1(\mathbf{x}_f)\mathbf{a}_{n1}^T\mathbf{x}_f & +\alpha_2(\mathbf{x}_f)\mathbf{a}_{n2}^T\mathbf{x}_f & + & \ldots & + & \alpha_r(\mathbf{x}_f)\mathbf{a}_{nr}^T\mathbf{x}_f - f_n(\mathbf{x}_f))^2, \\
E_{g1} & = & \frac{1}{2}(\alpha_1(\mathbf{x}_f)g_1(\mathbf{x}_{01}) & +\alpha_2(\mathbf{x}_f)g_1(\mathbf{x}_{02}) & + & \ldots & + & \alpha_r(\mathbf{x}_f)g_1(\mathbf{x}_{0r}) - g_1(\mathbf{x}_f))^2, \\
 & & & & & \vdots & & \\
E_{gn} & = & \frac{1}{2}(\alpha_1(\mathbf{x}_f)g_n(\mathbf{x}_{01}) & +\alpha_2(\mathbf{x}_f)g_n(\mathbf{x}_{02}) & + & \ldots & + & \alpha_r(\mathbf{x}_f)g_n(\mathbf{x}_{0r}) - g_n(\mathbf{x}_f))^2.
\end{array}$$

Substituindo $\alpha_r(\mathbf{x}_f) = 1 - \alpha_1(\mathbf{x}_f) - \alpha_2(\mathbf{x}_f) - \ldots - \alpha_{r-1}(\mathbf{x}_f)$ nas equações anteriores, tem-se que

$$\begin{array}{rcl}
E_{a1} & = & \frac{1}{2}(\alpha_1(\mathbf{x}_f)\mathbf{a}_{11}^T\mathbf{x}_f + \alpha_2(\mathbf{x}_f)\mathbf{a}_{12}^T\mathbf{x}_f + \ldots + (1 - \alpha_1(\mathbf{x}_f) - \ldots - \alpha_{r-1}(\mathbf{x}_f))\mathbf{a}_{1r}^T\mathbf{x}_f \\
 & & -f_1(\mathbf{x}_f))^2, \\
 & & \vdots \\
E_{an} & = & \frac{1}{2}(\alpha_1(\mathbf{x}_f)\mathbf{a}_{n1}^T\mathbf{x}_f + \alpha_2(\mathbf{x}_f)\mathbf{a}_{n2}^T\mathbf{x}_f + \ldots + (1 - \alpha_1(\mathbf{x}_f) - \ldots - \alpha_{r-1}(\mathbf{x}_f))\mathbf{a}_{nr}^T\mathbf{x}_f \\
 & & -f_n(\mathbf{x}_f))^2, \\
E_{g1} & = & \frac{1}{2}(\alpha_1(\mathbf{x}_f)g_1(\mathbf{x}_{01}) + \alpha_2(\mathbf{x}_f)g_1(\mathbf{x}_{02}) + \ldots + (1 - \alpha_1(\mathbf{x}_f) - \ldots - \alpha_{r-1}(\mathbf{x}_f))g_1(\mathbf{x}_{0r}) \\
 & & -g_1(\mathbf{x}_f))^2, \\
 & & \vdots \\
E_{gn} & = & \frac{1}{2}(\alpha_1(\mathbf{x}_f)g_n(\mathbf{x}_{01}) + \alpha_2(\mathbf{x}_f)g_n(\mathbf{x}_{02}) + \ldots + (1 - \alpha_1(\mathbf{x}_f) - \ldots - \alpha_{r-1}(\mathbf{x}_f))g_n(\mathbf{x}_{0r}) \\
 & & -g_n(\mathbf{x}_f))^2.
\end{array}$$

Seja ∇E_{α_1} o gradiente de E em relação à $\alpha_1(\mathbf{x}_f)$:

$$\nabla E_{\alpha_1} = \frac{\partial E_{a1}}{\partial \alpha_1} + \ldots + \frac{\partial E_{an}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial E_{g1}}{\partial \alpha_1} + \ldots + \frac{\partial E_{gn}}{\partial \alpha_1} = 0,$$

sendo

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E_{a1}}{\partial \alpha_1} &= \Big[\alpha_1(\mathbf{x}_f)(\mathbf{a}_{11}-\mathbf{a}_{1r})^T\mathbf{x}_f + \ldots + (1-\alpha_2(\mathbf{x}_f) - \ldots - \alpha_{r-1}(\mathbf{x}_f))\mathbf{a}_{1r}^T\mathbf{x}_f - f_1(\mathbf{x}_f)\Big] \\
&\quad \times(\mathbf{a}_{11}-\mathbf{a}_{1r})^T\mathbf{x}_f, \\
&\vdots \\
\frac{\partial E_{an}}{\partial \alpha_1} &= \Big[\alpha_1(\mathbf{x}_f)(\mathbf{a}_{n1}-\mathbf{a}_{nr})^T\mathbf{x}_f + \ldots + (1-\alpha_2(\mathbf{x}_f) - \ldots - \alpha_{r-1}(\mathbf{x}_f))\mathbf{a}_{nr}^T\mathbf{x}_f - f_n(\mathbf{x}_f)\Big] \\
&\quad \times(\mathbf{a}_{n1}-\mathbf{a}_{nr})^T\mathbf{x}_f, \\
\frac{\partial E_{g1}}{\partial \alpha_1} &= [\alpha_1(\mathbf{x}_f)(g_1(\mathbf{x}_{01}) - g_1(\mathbf{x}_{0r})) + \ldots + (1-\alpha_2(\mathbf{x}_f) - \ldots - \alpha_{r-1}(\mathbf{x}_f))g_1(\mathbf{x}_{0r}) \\
&\quad -g_1(\mathbf{x}_f)]\,(g_1(\mathbf{x}_{01}) - g_1(\mathbf{x}_{0r})), \\
&\vdots \\
\frac{\partial E_{gn}}{\partial \alpha_1} &= [\alpha_1(\mathbf{x}_f)(g_n(\mathbf{x}_{01}) - g_n(\mathbf{x}_{0r})) + \ldots + (1-\alpha_2(\mathbf{x}_f) - \ldots - \alpha_{r-1}(\mathbf{x}_f))g_n(\mathbf{x}_{0r}) \\
&\quad -g_n(\mathbf{x}_f)]\,(g_n(\mathbf{x}_{01}) - g_n(\mathbf{x}_{0r})).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E_{a1}}{\partial \alpha_1} &= \Big[\alpha_1(\mathbf{x}_f)(\mathbf{a}_{11}-\mathbf{a}_{1r})^T\mathbf{x}_f + \alpha_2(\mathbf{a}_{12}-\mathbf{a}_{1r})^T\mathbf{x}_f + \ldots + \alpha_{r-1}(\mathbf{a}_{1(r-1)}-\mathbf{a}_{1r})^T\mathbf{x}_f \\
&\quad +\mathbf{a}_{1r}^T\mathbf{x}_f - f_1(\mathbf{x}_f)\Big]\,(\mathbf{a}_{11}-\mathbf{a}_{1r})^T\mathbf{x}_f, \\
&\vdots \\
\frac{\partial E_{an}}{\partial \alpha_1} &= \Big[\alpha_1(\mathbf{x}_f)(\mathbf{a}_{n1}-\mathbf{a}_{nr})^T\mathbf{x}_f + \alpha_2(\mathbf{a}_{n2}-\mathbf{a}_{nr})^T\mathbf{x}_f + \ldots + \alpha_{r-1}(\mathbf{a}_{n(r-1)}-\mathbf{a}_{nr})^T\mathbf{x}_f \\
&\quad +\mathbf{a}_{nr}^T\mathbf{x}_f - f_n(\mathbf{x}_f)\Big]\,(\mathbf{a}_{n1}-\mathbf{a}_{nr})^T\mathbf{x}_f, \\
\frac{\partial E_{g1}}{\partial \alpha_1} &= \Big[\alpha_1(\mathbf{x}_f)(g_1(\mathbf{x}_{01}) - g_1(\mathbf{x}_{0r})) + \alpha_2(g_1(\mathbf{x}_{02}) - g_1(\mathbf{x}_{0r})) + \ldots + \alpha_{r-1}(g_1(\mathbf{x}_{0(r-1)}) \\
&\quad -g_1(\mathbf{x}_{0r})) + g_1(\mathbf{x}_{0r}) - g_1(\mathbf{x}_f)]\,(g_1(\mathbf{x}_{01}) - g_1(\mathbf{x}_{0r})), \\
&\vdots \\
\frac{\partial E_{gn}}{\partial \alpha_1} &= \Big[\alpha_1(\mathbf{x}_f)(g_n(\mathbf{x}_{01}) - g_n(\mathbf{x}_{0r})) + \alpha_2(g_n(\mathbf{x}_{02}) - g_n(\mathbf{x}_{0r})) + \ldots + \alpha_{r-1}(g_n(\mathbf{x}_{0(r-1)}) \\
&\quad -g_n(\mathbf{x}_{0r})) + g_n(\mathbf{x}_{0r}) - g_n(\mathbf{x}_f)]\,(g_n(\mathbf{x}_{01}) - g_n(\mathbf{x}_{0r})).
\end{aligned}
$$

Portanto $\alpha_1(\mathbf{x}_f)$ é dada pela expressão:

$$
\alpha_1(\mathbf{x}_f) = \frac{L_{a11} + \ldots + L_{a1n} + L_{g11} + \ldots + \text{Ł}_{g1n}}{L_{ag1}},
$$

sendo

$$
\begin{aligned}
L_{a11} &= \Big[-\alpha_2(\mathbf{x}_f)(\mathbf{a}_{12}-\mathbf{a}_{1r})^T\mathbf{x}_f - \ldots - \alpha_{r-1}(\mathbf{x}_f)(\mathbf{a}_{1(r-1)}-\mathbf{a}_{1r})^T\mathbf{x}_f - \mathbf{a}_{1r}^T\mathbf{x}_f \\
&\quad +f_1(\mathbf{x}_f)]\,(\mathbf{a}_{11}-\mathbf{a}_{1r})^T\mathbf{x}_f,
\end{aligned}
$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}
L_{a1n} &= \Big[-\alpha_2(\mathbf{x}_f)(\mathbf{x}_f)(\mathbf{a}_{n2}-\mathbf{a}_{nr})^T\mathbf{x}_f - \ldots - \alpha_{r-1}(\mathbf{x}_f)(\mathbf{a}_{n(r-1)}-\mathbf{a}_{nr})^T\mathbf{x}_f - \mathbf{a}_{nr}^T\mathbf{x}_f \\
&\quad + f_n(\mathbf{x}_f)\Big](\mathbf{a}_{n1}-\mathbf{a}_{nr})^T\mathbf{x}_f, \\
L_{g11} &= \Big[-\alpha_2(\mathbf{x}_f)(g_1(\mathbf{x}_{02})-g_1(\mathbf{x}_{0r})) - \ldots - \alpha_{r-1}(\mathbf{x}_f)(g_1(\mathbf{x}_{0(r-1)})-g_1(\mathbf{x}_{0r})) \\
&\quad - g_1(\mathbf{x}_{0r}) + g_1(\mathbf{x}_f)\Big](g_1(\mathbf{x}_{01})-g_1(\mathbf{x}_{0r})), \\
&\;\;\vdots \\
L_{g1n} &= \Big[-\alpha_2(\mathbf{x}_f)(g_n(\mathbf{x}_{02})-g_n(\mathbf{x}_{0r})) - \ldots - \alpha_{r-1}(\mathbf{x}_f)(g_n(\mathbf{x}_{0(r-1)})-g_n(\mathbf{x}_{0r})) \\
&\quad - g_n(\mathbf{x}_{0r}) + g_n(\mathbf{x}_f)\Big](g_n(\mathbf{x}_{01})-g_n(\mathbf{x}_{0r})); \\
L_{ag1} &= ((\mathbf{a}_{11}-\mathbf{a}_{1r})^T\mathbf{x}_f)^2 + ((\mathbf{a}_{n1}-\mathbf{a}_{nr})^T\mathbf{x}_f)^2 + (g_1(\mathbf{x}_{01})-g_1(\mathbf{x}_{0r}))^2 \\
&\quad + (g_n(\mathbf{x}_{01})-g_n(\mathbf{x}_{0r}))^2.
\end{aligned}$$

Da mesma forma obtêm-se $\alpha_2(\mathbf{x}_f)\ldots\alpha_{r-1}(\mathbf{x}_f)$.

Para $\alpha_2(\mathbf{x}_f)$

$$\alpha_2(\mathbf{x}_f) = \frac{L_{a21}+\ldots+L_{a2n}+L_{g21}+\ldots+L_{g2n}}{L_{ag2}},$$

sendo

$$\begin{aligned}
L_{a21} &= \Big[-\alpha_1(\mathbf{x}_f)(\mathbf{a}_{11}-\mathbf{a}_{1r})^T\mathbf{x}_f - \ldots - \alpha_{r-1}(\mathbf{x}_f)(\mathbf{a}_{1(r-1)}-\mathbf{a}_{1r})^T\mathbf{x}_f - \mathbf{a}_{1r}^T\mathbf{x}_f \\
&\quad + f_1(\mathbf{x}_f)\Big](\mathbf{a}_{12}-\mathbf{a}_{1r})^T\mathbf{x}_f, \\
&\;\;\vdots \\
L_{a2n} &= \Big[-\alpha_1(\mathbf{x}_f)(\mathbf{x}_f)(\mathbf{a}_{n1}-\mathbf{a}_{nr})^T\mathbf{x}_f - \ldots - \alpha_{r-1}(\mathbf{x}_f)(\mathbf{a}_{n(r-1)}-\mathbf{a}_{nr})^T\mathbf{x}_f \\
&\quad - \mathbf{a}_{nr}^T\mathbf{x}_f + f_n(\mathbf{x}_f)\Big](\mathbf{a}_{n2}-\mathbf{a}_{nr})^T\mathbf{x}_f, \\
L_{g21} &= \Big[-\alpha_1(\mathbf{x}_f)(g_1(\mathbf{x}_{01})-g_1(\mathbf{x}_{0r})) - \ldots - \alpha_{r-1}(\mathbf{x}_f)(g_1(\mathbf{x}_{0(r-1)})-g_1(\mathbf{x}_{0r})) \\
&\quad - g_1(\mathbf{x}_{0r}) + g_1(\mathbf{x}_f)\Big](g_1(\mathbf{x}_{02})-g_1(\mathbf{x}_{0r})); \\
&\;\;\vdots \\
L_{g2n} &= \Big[-\alpha_1(\mathbf{x}_f)(g_n(\mathbf{x}_{01})-g_n(\mathbf{x}_{0r})) - \ldots - \alpha_{r-1}(\mathbf{x}_f)(g_n(\mathbf{x}_{0(r-1)})-g_n(\mathbf{x}_{0r})) \\
&\quad - g_n(\mathbf{x}_{0r}) + g_n(\mathbf{x}_f)\Big](g_n(\mathbf{x}_{02})-g_n(\mathbf{x}_{0r})); \\
L_{ag2} &= ((\mathbf{a}_{12}-\mathbf{a}_{1r})^T\mathbf{x}_f)^2 + ((\mathbf{a}_{n2}-\mathbf{a}_{nr})^T\mathbf{x}_f)^2 + (g_1(\mathbf{x}_{02})-g_1(\mathbf{x}_{0r}))^2 \\
&\quad + (g_n(\mathbf{x}_{02})-g_n(\mathbf{x}_{0r}))^2.
\end{aligned}$$

Para α_{r-1}:

$$\alpha_{(r-1)}(\mathbf{x}_f) = \frac{L_{a(r-1)1}+\ldots+L_{a(r-1)n}+L_{g(r-1)1}+\ldots+L_{g(r-1)n}}{L_{ag(r-1)}},$$

$$
\begin{aligned}
L_{a(r-1)1} &= \Big[-\alpha_1(\mathbf{x}_f)(\mathbf{a}_{11}-\mathbf{a}_{1r})^T\mathbf{x}_f - \ldots - \alpha_{r-2}(\mathbf{x}_f)(\mathbf{a}_{1(r-2)}-\mathbf{a}_{1r})^T\mathbf{x}_f - \mathbf{a}_{1r}^T\mathbf{x}_f \\
&\quad + f_1(\mathbf{x}_f)\big]\,(\mathbf{a}_{1(r-1)}-\mathbf{a}_{1r})^T\mathbf{x}_f, \\
&\vdots \\
L_{a(r-1)n} &= \Big[-\alpha_1(\mathbf{x}_f)(\mathbf{x}_f)(\mathbf{a}_{n1}-\mathbf{a}_{nr})^T\mathbf{x}_f - \ldots - \alpha_{r-2}(\mathbf{x}_f)(\mathbf{a}_{n(r-2)}-\mathbf{a}_{nr})^T\mathbf{x}_f \\
&\quad - \mathbf{a}_{nr}^T\mathbf{x}_f - f_n(\mathbf{x}_f)\Big]\,(\mathbf{a}_{n(r-1)}-\mathbf{a}_{nr})^T\mathbf{x}_f, \\
L_{g(r-1)1} &= \Big[-\alpha_1(\mathbf{x}_f)(g_1(\mathbf{x}_{01})-g_1(\mathbf{x}_{0r})) - \ldots - \alpha_{r-2}(\mathbf{x}_f)(g_1(\mathbf{x}_{0(r-2)})-g_1(\mathbf{x}_{0r})) \\
&\quad - g_1(\mathbf{x}_{0r}) + g_1(\mathbf{x}_f)\big]\,(g_1(\mathbf{x}_{0(r-1)})-g_1(\mathbf{x}_{0r})), \\
&\vdots \\
L_{g(r-1)n} &= \Big[-\alpha_1(\mathbf{x}_f)(g_n(\mathbf{x}_{01})-g_n(\mathbf{x}_{0r})) - \ldots - \alpha_{r-2}(\mathbf{x}_f)(g_n(\mathbf{x}_{0(r-2)})-g_n(\mathbf{x}_{0r})) \\
&\quad - g_n(\mathbf{x}_{0r}) + g_n(\mathbf{x}_f)\big]\,(g_n(\mathbf{x}_{0(r-1)})-g_n(\mathbf{x}_{0r})), \\
L_{ag(r-1)} &= ((\mathbf{a}_{12}-\mathbf{a}_{1r})^T\mathbf{x}_f)^2 + ((\mathbf{a}_{n2}-\mathbf{a}_{nr})^T\mathbf{x}_f)^2 + (g_1(\mathbf{x}_{02})-g_1(\mathbf{x}_{0r}))^2 \\
&\quad + (g_n(\mathbf{x}_{0(r-1)})-g_n(\mathbf{x}_{0r}))^2.
\end{aligned}
$$

Portanto $\alpha_j(\mathbf{x}_f)$, $j = 1, 2, \ldots, r$ pode ser expressa por

$$
\begin{aligned}
\alpha_k(\mathbf{x}_f) &= \frac{L_{ka}+L_{kg}}{L_{kag}}, \qquad k = 1, \ldots, r-1, \\
\alpha_r(\mathbf{x}_f) &= 1 - \alpha_1(\mathbf{x}_f) - \alpha_2(\mathbf{x}_f) \ldots - \alpha_{r-1}(\mathbf{x}_f),
\end{aligned}
$$

sendo

$$
\begin{aligned}
L_{ka} &= \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{j=1, j\neq k}^{r-1}\left(-\alpha_j(\mathbf{x}_f)\,(\mathbf{a}_{ij}-\mathbf{a}_{ir})^T\,\mathbf{x}_f\right)\right) - \mathbf{a}_{ir}^T\mathbf{x}_f + f_i(\mathbf{x}_f)\right](\mathbf{a}_{ik}-\mathbf{a}_{ir})^T\,\mathbf{x}_f, \\
L_{kg} &= \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{j=1, j\neq k}^{r-1}(-\alpha_j(\mathbf{x}_f)(g_i(\mathbf{x}_{0j})-g_i(\mathbf{x}_{0r}))\right) - g_i(\mathbf{x}_{0r}) + g_i(\mathbf{x}_f)\right] \\
&\quad (g_i(\mathbf{x}_{0k})-g_i(\mathbf{x}_{0r}))\,, \\
L_{kag} &= \sum_{i=1}^{n}\left[\left((\mathbf{a}_{ik}^T-\mathbf{a}_{ir}^T)\mathbf{x}_f\right)^2 + (g_i(\mathbf{x}_{0k})-g_i(\mathbf{x}_{0r}))^2\right].
\end{aligned}
$$

$\triangleright$

A solução do problema (4.23) não garante que os $\alpha_j(\mathbf{x}_f)$, $j = 1, \ldots, r$ fiquem limitados no intervalo $[0, 1]$.

Considere, por exemplo, um sistema não-linear com funções não-lineares do tipo $f_i(x_f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e $g_i(x_f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (o índice i indica a função que possui não-linearidades). Deseja-se obter a aproximação *fuzzy* com três modelos locais obtidos a partir de (3.45) nos pontos $x_f = p_1$, $x_f = p_2$ e $x_f = p_3$.

Inicialmente será definido um conjunto de pontos no intervalo desejado $p_1 \leq x_f \leq p_3$ (estes pontos podem ou não ser igualmente espaçados) e a partir de (4.28) serão obtidos os valores de $\alpha_k(x_f),\ k = 1, 2, 3$ para cada ponto deste conjunto. Em seguida é realizada uma interpolação polinomial com estes valores para obter as funções de pertinência.

Considere ainda que os $\alpha_j(x_f)$, $j = 1, 2, 3$ obtidos pela interpolação são os representados pela Figura 4.8, ou seja, que eles estejam fora do intervalo $[0, 1]$ não satisfazendo as restrições das funções de pertinência.

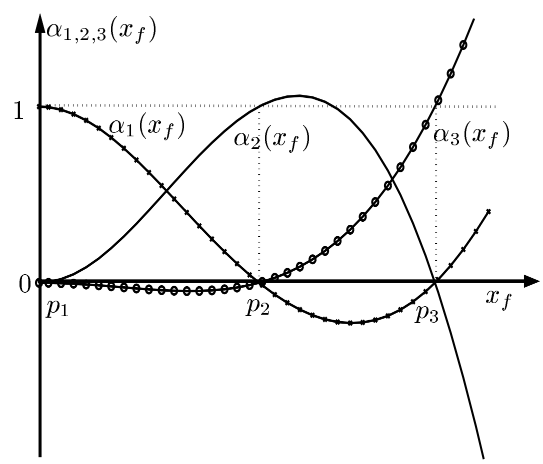

Figura 4.8: Funções de pertinência: solução analítica direta para três modelos locais.

Uma tentativa para contornar este problema é determinar dois conjuntos de funções de pertinência entre dois modelos locais consecutivos, com duas funções em cada conjunto.

O primeiro conjunto é obtido entre $x_f = p_1$ e $x_f = p_2$. As funções de pertinência $\alpha_1(x_f)$ e $\alpha_2(x_f) = 1 - \alpha_1(x_f)$, são obtidas de (4.28):

$$\alpha_1(x_f) = \frac{L_{1a} + L_{1g}}{L_{1ag}},$$

$$\begin{aligned} L_{1a} &= \textstyle\sum_i (-a_{i2}^T x_f + f_i(x_f))(a_{i1} - a_{i2})^T x_f, \\ L_{1g} &= \textstyle\sum_i (-g_i(x_{02}) + g_i(x_f))(g(x_{01}) - g_i(x_{02})), \\ L_{1ag} &= ((a_{i1} - a_{i2})^T x_f)^2 + (g_i(x_{01}) - g_i(x_{02}))^2, \\ \alpha_2(x_f) &= 1 - \alpha_1(x_f). \end{aligned} \tag{4.29}$$

(4.30)

A Figura 4.9 ilustra as funções $\alpha_1(x_f)$ e $\alpha_2(x_f)$ para o intervalo $p_1 \leq x_f \leq p_2$.

O segundo conjunto deve ser obtido entre $x_f = p_2$ e $x_f = p_3$. Estes pontos não correspondem ao primeiro e segundo modelos locais. Logo, a solução do problema (4.21) na forma

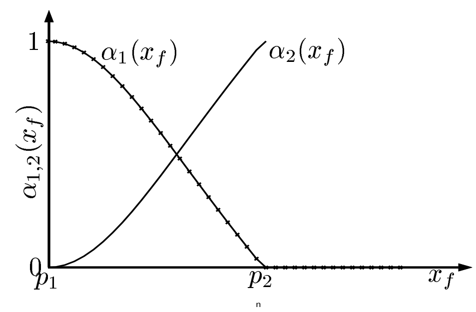

Figura 4.9: Funções de pertinência: solução analítica parcial para o intervalo $0 \leq x_f \leq p_2$ com dois modelos locais.

(4.28) não pode ser utilizada diretamente para obter as funções de pertinência entre estes pontos. Portanto a equação (4.28) deve ser redefinida para este caso.

A solução analítica de (4.23) para dois modelos locais quaisquer e consecutivos, modelos j e $j+1$ é dada por

$$\begin{aligned} \alpha_j(\mathbf{x}_f) &= \frac{L_{ja}+L_{jg}}{L_{jag}}, \\ \alpha_{j+1}(\mathbf{x}_f) &= 1-\alpha_j(\mathbf{x}_f). \end{aligned} \tag{4.31}$$

sendo

$$\begin{aligned} L_{ja} &= \sum_{i=1}\left[-\mathbf{a}_{i(j+1)}^T\mathbf{x}_f+f_i(\mathbf{x}_f)\right]\left(\mathbf{a}_{ij}-\mathbf{a}_{i(j+1)}\right)^T\mathbf{x}_f, \\ L_{jg} &= \sum_{i=1}\left[-g_i(\mathbf{x}_{0(j+1)})+g_i(\mathbf{x}_f)\right]\left(g_i(\mathbf{x}_{0j})-g_i(\mathbf{x}_{0(j+1)})\right), \\ L_{jag} &= \sum_{i=1}\left[\left((\mathbf{a}_{ij}^T-\mathbf{a}_{i(j+1)}^T)\mathbf{x}_f\right)^2+\left(g_i(\mathbf{x}_{0j})-g_i(\mathbf{x}_{0(j+1)})\right)^2\right]. \end{aligned}$$

No exemplo, as funções de pertinência entre os pontos $x_f = p_2$, no qual foi definido o segundo modelo local ($x_{02} = p_2$) e $x_f = p_3$, no qual foi definido o terceiro modelo local ($x_{03} = p_3$), são dadas por:

$$\begin{aligned} \alpha_2(x_f) &= \frac{L_{2a}+L_{2g}}{L_{2ag}}, \\ \alpha_3(x_f) &= 1-\alpha_2(x_f). \end{aligned} \tag{4.32}$$

sendo

$$\begin{aligned} L_{2a} &= \sum_{i=1}\left[-a_{i3}^Tx_f+f_i(x_f)\right](a_{i2}-a_{i3})^T x_f, \\ L_{2g} &= \sum_{i=1}\left[-g_i(x_{03})+g_i(x_f)\right](g_i(x_{02})-g_i(x_{03})), \\ L_{2ag} &= \sum_{i=1}\left[\left((a_{i2}^T-a_{i3}^T)x_f\right)^2+(g_i(x_{02})-g_i(x_{03}))^2\right]. \end{aligned}$$

A Figura 4.10 ilustra as funções $\alpha_2(x_f)$ e $\alpha_3(x_f)$ para o intervalo $p_2 \leq x_f \leq p_3$.

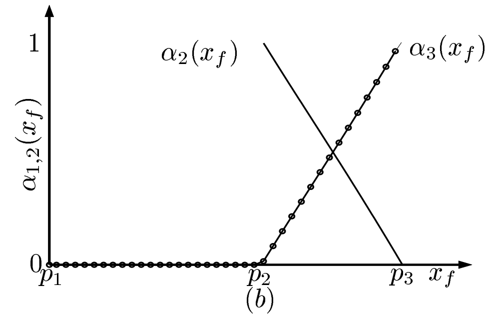

Figura 4.10: Funções de pertinência: solução analítica parcial para o intervalo $p_2 \leq x_f \leq p_3$, com dois modelos locais.

A função, $\alpha_2(x_f)$, faz parte do primeiro e do segundo conjuntos de funções de pertinência como mostrado nas Figuras 4.9 e 4.10. Isto ocorre porque o mesmo modelo local obtido com p_2 é utilizado para gerar $\alpha_2(x_f)$ no intervalo $p_1 \leq x_f \leq p_2$ e no intervalo $p_2 \leq x_f \leq p_3$. A Figura 4.11 ilustra as funções de pertinência resultantes da união dos dois conjuntos de funções de pertinência.

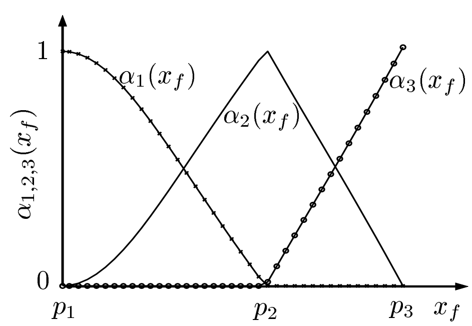

Figura 4.11: Funções de pertinência resultantes de soluções parciais para três modelos locais.

Assim, pode-se concluir que o número total de funções de pertinência obtidas com (4.28) e com a divisão destas funções em conjuntos de duas funções para cada dois modelos locais consecutivos será igual ao número de modelos locais utilizados para obter as funções de aproximação.

Estas funções serão uma solução do problema (4.21) se os valores de $\alpha_k(x_f)$, $k = 1, 2, 3$ pertencerem ao intervalo $[0, 1]$.

A equação (4.28) pode ser representada na forma de sistema linear do tipo:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{B} \tag{4.33}$$

e ser facilmente resolvida utilizando o *software* Matlab.

Exemplo 8

Considere o Exemplo 3 da Seção 3.3. Este sistema possui não-linearidades em $f_2(\mathbf{x}_f)$, $f_4(\mathbf{x}_f)$, $g_2(\mathbf{x}_f)$ e $g_4(\mathbf{x}_f)$ e todas dependem apenas de x_1.

Deseja-se obter a aproximação de $f_2(x_1)$, $f_4(x_1)$, $g_2(x_1)$ e $g_4(x_1)$ no intervalo $-60\pi/180 \leq x_1 \leq 60\pi/180$ *rad* utilizando dois modelos locais. Como os pontos extremos da região de operação são simétricos em relação à origem, deve-se obter os modelos locais na origem, $x_1 = 0$ *rad* e em $x_1 = 60\pi/180$ *rad*. Veja a Seção 3.4.1.

Para o primeiro modelo local, em $x_1 = 0$ *rad*, A_1 é dado em (3.47) e B_1 em (3.48) e para o segundo modelo local, em $x_1 = 60\pi/180$ *rad*, A_2 é dado em (3.49) e B_2 em (3.50)

As funções de pertinência *fuzzy* são obtidas por (4.28), com $i = 2, 4$, $r = 2$ e $\mathbf{x}_f = [x_1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0]$:

$$\begin{aligned} \alpha_1(\mathbf{x}_f) &= \frac{L_{1a} + L_{1g}}{L_{1ag}}, \\ \alpha_2(\mathbf{x}_f) &= 1 - \alpha_1(\mathbf{x}_f). \end{aligned} \tag{4.34}$$

sendo

$$\begin{aligned} L_{1a} &= (f_2(\mathbf{x}_f) - \mathbf{a}_{22}^T\mathbf{x}_f)(\mathbf{a}_{21} - \mathbf{a}_{22})^T\mathbf{x}_f + (f_4(\mathbf{x}_f) - \mathbf{a}_{42}^T\mathbf{x}_f)(\mathbf{a}_{41} - \mathbf{a}_{42})^T\mathbf{x}_f, \\ L_{1g} &= +(g_2(\boldsymbol{x}_f) - g_2(\mathbf{x}_{02}))(g_2(\mathbf{x}_{01}) - g_2(\mathbf{x}_{02})) + (g_4(\boldsymbol{x}_f) - g_4(\mathbf{x}_{02}))(g_4(\mathbf{x}_{01}) - g_4(\mathbf{x}_{02})), \\ L_{1ag} &= ((\mathbf{a}_{21} - \mathbf{a}_{22})\mathbf{x}_f)^2 + ((\mathbf{a}_{41} - \mathbf{a}_{42})\mathbf{x}_f)^2 + (g_2(\mathbf{x}_{01}) - g_2(\mathbf{x}_{02}))^2 \\ &\quad +(g_4(\mathbf{x}_{01}) - g_4(\mathbf{x}_{02}))^2, \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{21}^T &= [\;\; 17.2931 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;], \\ \mathbf{a}_{22}^T &= [\; -1.7295 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;], \\ \mathbf{a}_{41}^T &= [\;\; 12.6304 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;], \\ \mathbf{a}_{42}^T &= [\; -0.6315 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;]. \end{aligned} \tag{4.35}$$

obtidos com (3.45) (relembrando que o vetor $\mathbf{a}_{ij}^T$ representa a linha i do modelo local j). Desta forma, $\mathbf{a}_{21}^T$ representa a segunda linha do primeiro modelo local, $\mathbf{a}_{22}^T$ representa a segunda linha do segundo modelo local.

Como todas as não-linearidades dependem apenas de x_1 as funções podem ser simplificadas para

$$\begin{aligned} \alpha_1(x_1) &= \frac{L_{1a} + L_{1g}}{L_{1ag}}, \\ \alpha_2(x_1) &= 1 - \alpha_1(x_1), \end{aligned} \tag{4.36}$$

sendo que

$$\begin{aligned} L_{1a} &= (f_2(x_1) - a_{212}x_1)(a_{211} - a_{212})x_1 + (f_4(x_1) - a_{412}x_1)(a_{411} - a_{412})x_1, \\ L_{1g} &= +(g_2(x_1) - g_2(x_{02}))(g_2(x_{01}) - g_2(x_{02})), +(g_4(x_1) - g_4(x_{02}))(g_4(x_{01}) - g_4(x_{02})), \\ L_{1ag} &= ((a_{211} - a_{212})x_1)^2 + ((a_{411} - a_{412})x_1)^2 + (g_2(x_{01}) - g_2(x_{02}))^2 \\ &\quad +(g_4(x_{01}) - g_4(x_{02}))^2, \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rclrcl} a_{211} & = & 17.2931, & a_{212} & = & 12.6304, \\ a_{411} & = & -1.7295, & a_{412} & = & -0.6315, \\ b_{211} & = & -0.1765, & b_{212} & = & -0.0779, \\ b_{411} & = & 0.1176, & b_{412} & = & 0.1038, \end{array} \tag{4.37}$$

onde a_{ikj} representa o elemento da linha i, $i = 2, 4$, da coluna k, do modelo local j, $j = 1, 2$ e são obtidos de (3.47) e (3.48). Os elementos b_{ikj}, $i = 2, 4$, $k = 1$ e $j = 1, 2$, são obtidos a partir de (3.30):

$$\mathbf{G}(\mathbf{x_0}) = \mathbf{B},$$

logo, em (4.34)

$$\begin{array}{rcl} g_2(\mathbf{x}_{01}) & = & b_{211}, \\ g_2(\mathbf{x}_{02}) & = & b_{212}, \\ g_4(\mathbf{x}_{01}) & = & b_{411}, \\ g_4(\mathbf{x}_{02}) & = & b_{412}. \end{array} \tag{4.38}$$

Para a especificação dos pontos $x_1 \in [-60\pi/180, 60\pi/180]$ rad para os quais serão calculadas as funções de pertinência $\alpha_1(x_1)$ e $\alpha_2(x_1)$, será utilizado o intervalo de amostragem $\Delta_x = \pi/180$ rad.

A Figura 4.12 apresenta os valores de $\alpha_1(x_1)$ e $\alpha_2(x_1)$ para a região em questão.

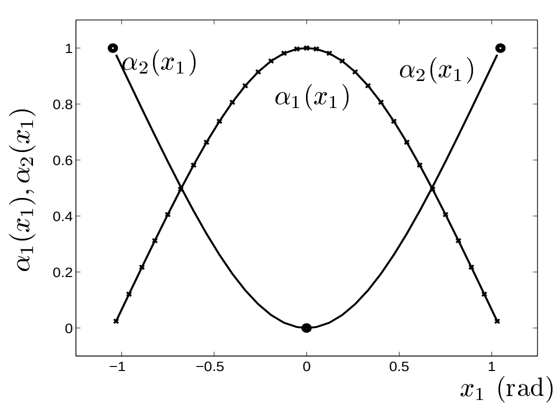

Figura 4.12: Funções de pertinência: solução analítica para o intervalo $-60\pi/180 \leq x_1 \leq 60\pi/180$ rad, com dois modelos locais.

O elemento "•", que aparece em destaque na Figura 4.12, tem efeito ilustrativo e serve para orientar o leitor sobre o posicionamento dos modelos locais. Embora apareçam três marcadores de modelos locais, foram utilizados apenas dois modelos em razão da propriedade de simetria exposta na Seção 3.4.1.

Pela Figura 4.12 verifica-se que para o primeiro modelo local, $x_1 = 0$ rad:

$$\alpha_1(x_1) = 1;$$

$$\alpha_2(x_1) = 0.$$

Para o segundo modelo local $x_1 = 60\pi/180\ rad$, ($x_1 = -60\pi/180\ rad$):

$$\alpha_1(x_1) = 0;$$
$$\alpha_2(x_1) = 1.$$

Para qualquer valor de x_1 no intervalo $0 \leq x_1 \leq 60\pi/180\ rad$ (ou $-60\pi/180 \leq x_1 \leq 0\ rad$):

$$\alpha_1(x_1) + \alpha_2(x_1) = 1.$$

Portanto, todas as restrições do problema (4.21) foram satisfeitas.

As curvas aproximadas de $f_2(x_1)$, $f_4(x_1)$, $g_2(x_1)$ e $g_4(x_1)$ denominadas respectivamente por $f_{f2}(x_1)$, $f_{f4}(x_1)$, $g_{g2}(x_1)$, $g_{g4}(x_1)$, são obtidas a partir das equações:

$$\begin{aligned} f_{f2}(x_1) &= \alpha_1(x_1)a_{211}x_1 + \alpha_2(x_1)a_{212}x_1; \\ f_{f4}(x_1) &= \alpha_1(x_1)a_{411}x_1 + \alpha_2(x_1)a_{412}x_1; \\ g_{g2}(x_1) &= \alpha_1(x_1)b_{211} + \alpha_2(x_1)b_{212}; \\ g_{g4}(x_1) &= \alpha_1(x_1)b_{411} + \alpha_2(x_1)b_{412} \end{aligned} \tag{4.39}$$

e são apresentadas na Figura 4.13.

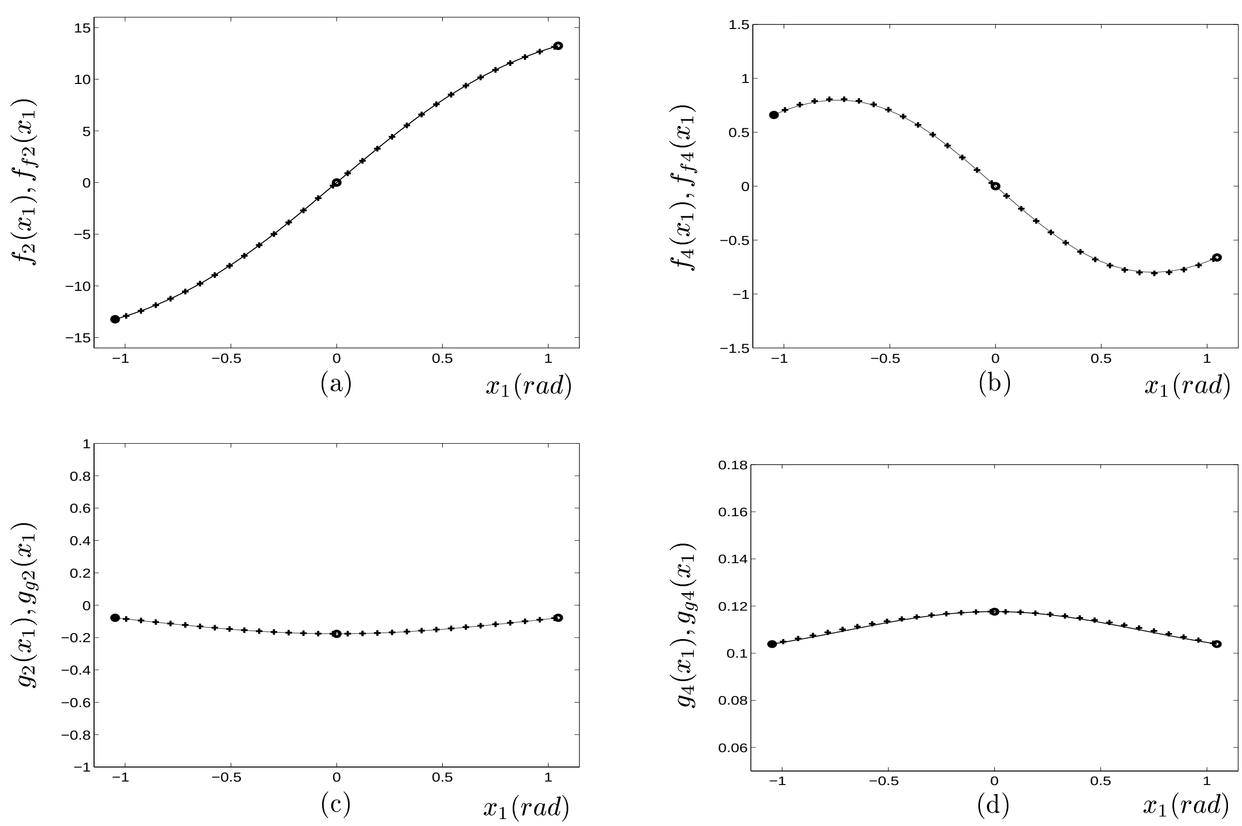

Figura 4.13: Aproximação fuzzy: solução analítica com dois modelos locais para o intervalo $-60\pi/180 \leq x_1 \leq 60\pi/180\ rad$. (-) curvas do modelo de simulação; (+) aproximações com modelos *fuzzy*, (●) representa os modelos locais .

Exemplo 9

Considere agora, apenas como exemplo de modelagem, uma região de operação com intervalo maior, $-106\pi/180 \leq x_1 \leq 106\pi/180\ rad$.

Como os extremos são simétricos em relação à origem, os modelos locais serão calculados na origem e no ponto $x_1 = 106\pi/180\ rad$.

O primeiro modelo local, em $x_1 = 0$, A_1, é dado em (3.47) e B_1 em (3.48) e para o segundo modelo local, em $x_1 = 106\pi/180\ rad$, A_2 é obtido utilizando (3.45), com $\mathbf{x}_{02} = [106\pi/180 \quad 0 \quad 0 \quad 0\ ]$. Para obter o segundo modelo local, calcula-se a linha $\mathbf{a}_2^T$, a segunda linha da matriz $\mathbf{A}_2$

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_2 &= \nabla f_2(\mathbf{x}_{02}) + \frac{f_2(\mathbf{x}_{02}) - \mathbf{x}_{02}^T \nabla f_2(\mathbf{x}_{02})}{||\mathbf{x}_{02}||^2}\mathbf{x}_{02} = [7.7260 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, && (4.40)\\
\mathbf{a}_2^T &= [7.7260 \quad 0 \quad 0 \quad 0], && (4.41)\\
a_{212} &= 7.7260. && (4.42)
\end{aligned}$$

e $\mathbf{a}_4^T$, a quarta linha da matriz $\mathbf{A}_2$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_4 &= \nabla f_4(\mathbf{x}_{02}) + \frac{f_4(\mathbf{x}_{02}) - \mathbf{x}_{02}^T \nabla f_4(\mathbf{x}_{02})}{||\mathbf{x}_{02}||^2}\mathbf{x}_{02} = [0.2130 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, && (4.43)\\
\mathbf{a}_4^T &= [0.2130 \quad 0 \quad 0 \quad 0], && (4.44)\\
a_{412} &= 0.2130. && (4.45)
\end{aligned}$$

B_2 é obtido utilizando (3.30):

$$b_{212} = \frac{-a\cos(x_1)}{4l/3 - mla\cos^2(x_1)} = 0.0418, \quad b_{412} = \frac{4a/3}{4/3 - ma\cos^2(x_1)} = 0.1012. \tag{4.46}$$

Portanto, o modelo local para $x_1 = 106\pi/180\ rad$ é dado por

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7.7260 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.2130 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0418 \\ 0 \\ 0.1012 \end{bmatrix}. \tag{4.47}$$

Para a especificação dos pontos $x_1 \in [-106\pi/180, 106\pi/180]$ para os quais serão calculadas as funções de pertinência $\alpha_1(x_1)$ e $\alpha_2(x_1)$, será utilizado o intervalo de amostragem $\Delta_x = \pi/180\ rad$.

A Figura 4.14 apresenta os valores de $\alpha_1(x_1)$ e $\alpha_2(x_1)$ obtidas resolvendo (4.28), com $i = 2, 4$ para a região $-106\pi/180 \leq x_1 \leq 106\pi/180 rad$.

Pela Figura 4.14 verifica-se que as restrições do problema (4.21) foram satisfeitas.

As curvas aproximadas de $f_2(x_1)$, $f_4(x_1)$, $g_2(x_1)$ e $g_4(x_1)$ denominadas respectivamente por $f_{f2}(x_1)$, $f_{f4}(x_1)$, $g_{g2}(x_1)$ e $g_{g4}(x_1)$ são obtidas a partir das equações (4.39).

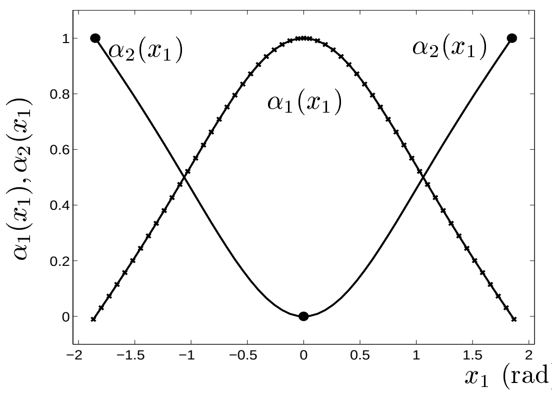

Figura 4.14: Funções de pertinência: solução analítica para o intervalo $-106\pi/180 \leq x_1 \leq 106\pi/180$ rad, com dois modelos locais.

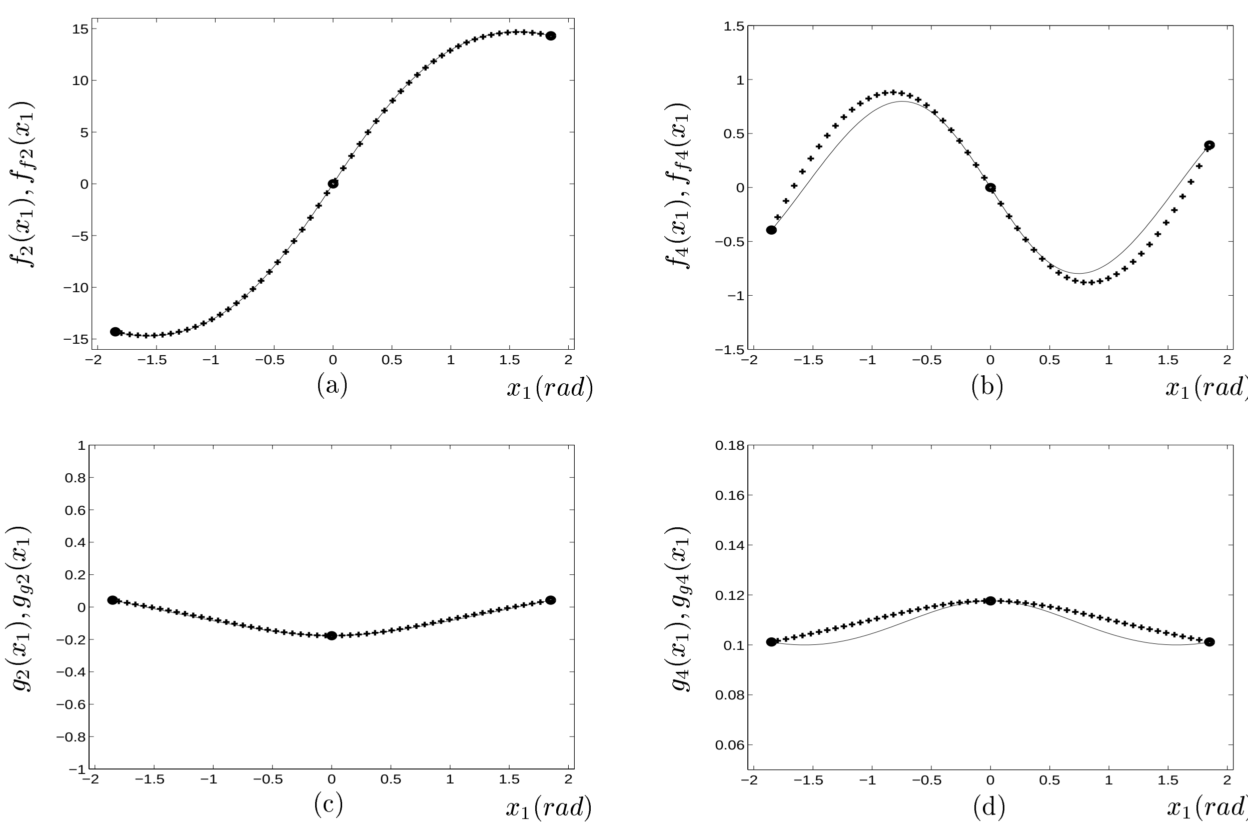

Figura 4.15: Aproximação fuzzy: solução analítica com dois modelos locais para o intervalo $-106\pi/180 \leq x_1 \leq 106\pi/180$ rad; (-) curvas do modelo de simulação, (+) aproximações com modelos *fuzzy*, ($\bullet$) representa os modelos locais .

A curvas $f_2(x_1)$, $f_4(x_1)$, $g_2(x_1)$ e $g_4(x_1)$, do modelo de simulação e suas respectivas aproximações com modelos *fuzzy* $f_{f2}(x_1)$, $f_{f4}(x_1)$, $g_{g2}(x_1)$ e $g_{g4}(x_1)$, para $-106\pi/180 \leq x_1 \leq 106\pi/180$ *rad* são apresentadas na Figura 4.15. Pela Figura 4.15 pode-se verificar os erros de aproximações são mais acentuados nas aproximações com $f_{f4}(x_1)$ e $g_{g4}(x_1)$. Um novo modelo local será incluído para melhorar modelagem e diminuir os erros de aproximação.

Considere o ponto $x_1 = 70\pi/180 = 1.22$ *rad*, que é visualmente o ponto onde ocorreu o maior erro. Neste ponto será construído o novo modelo local e, pela ordem em que aparece (consecutiva), será considerado o segundo modelo local.

Utilizando (3.45), calcula-se a linha $\mathbf{a}_2^T$, a segunda linha da matriz $\mathbf{A}_2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_2 &= \nabla f_2(\mathbf{x}_{02}) + \frac{f_2(\mathbf{x}_{02}) - \mathbf{x}_{02}^T \nabla f_2(\mathbf{x}_{02})}{||\mathbf{x}_{02}||^2}\mathbf{x}_{02} = [11.5084 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, \\ \mathbf{a}_2^T &= [11.5084 \quad 0 \quad 0 \quad 0], \\ a_{212} &= 11.5084, \end{aligned}$$

e $\mathbf{a}_4^T$, a quarta linha da matriz $\mathbf{A}_2$, do segundo modelo local:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_4 &= \nabla f_4(\mathbf{x}_{02}) + \frac{f_4(\mathbf{x}_{02}) - \mathbf{x}_{02}^T \nabla f_4(\mathbf{x}_{02})}{||\mathbf{x}_{02}||^2}\mathbf{x}_{02} = [-0.3936 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, \\ \mathbf{a}_4^T &= [-0.3936 \quad 0 \quad 0 \quad 0], \\ a_{412} &= -0.3936. \end{aligned}$$

B_2 é obtido por (3.30)

$$b_{212} = \frac{-a\cos(x_1)}{4l/3 - mla\cos^2(x_1)} = -0.0522, \quad b_{412} = \frac{4a/3}{4/3 - ma\cos^2(x_1)} = 0.1018 \tag{4.48}$$

Portanto, o segundo modelo local é dado por:

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 11.5084 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.3936 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0522 \\ 0 \\ 0.1018 \end{bmatrix}. \tag{4.49}$$

O ponto $x_1 = 106\pi/180$ *rad* deixa de ser o segundo modelo local e passa a ser considerado como o terceiro modelo. Os modelos são denominados em ordem crescente e consecutiva. A cada novo modelo local inserido, deve-se renomeá-los de acordo com este critério.

Logo, o terceiro modelo local é obtido redefinindo (4.47) de $\mathbf{A}_2$ para $\mathbf{A}_3$ e de $\mathbf{B}_2$ para $\mathbf{B}_3$:

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7.7260 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.2130 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0418 \\ 0 \\ 0.1012 \end{bmatrix}. \tag{4.50}$$

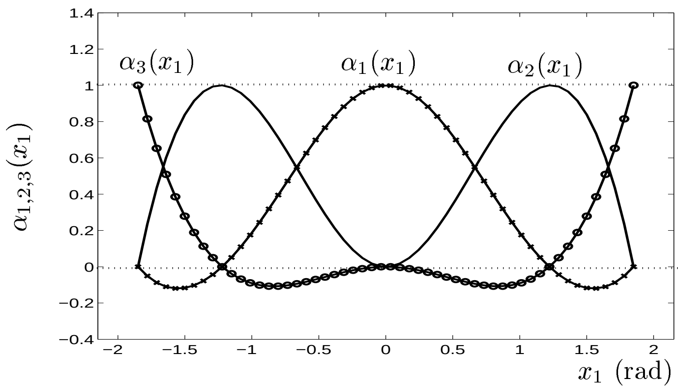

Figura 4.16: Funções de pertinência: solução analítica para o intervalo $-106\pi/180 \leq x_1 \leq 106\pi/180\ rad$, com três modelos locais.

As funções de pertinência são obtidas resolvendo (4.28), com $i = 2, 4$ e $r = 3$. Os valores de $\alpha_1(x_1)$, $\alpha_2(x_1)$ e $\alpha_3(x_1)$ obtidos são representados pela Figura 4.16. O período de amostragem utilizado foi $\Delta_x = \pi/180\ rad$.

Pela Figura 4.16 verifica-se que as condições de que os α_j, $j = 1, 2, 3$ estejam limitados no intervalo $[0, 1]$ não foram obedecidas.

Para contornar este problema, pode-se dividir a região de operação em duas sub-regiões: a primeira entre os pontos $x_1 = 0\ rad$ e $x_1 = 70\pi/180\ rad$ ($x_1 = -70\pi/180\ rad$ e $x_1 = 0\ rad$) e a segunda entre os pontos $x_1 = 70\pi/180\ rad$ e $x_1 = 106\pi/180\ rad$ ($x_1 = -106\pi/180\ rad$ e $x_1 = -70\pi/180\ rad$).

Na primeira sub-região, os modelo local ($\mathbf{A}_1$,$\mathbf{B}_1$) é dado em (3.47) e (3.48), para $x_1 = 0\ rad$, e o segundo modelo local, ($\mathbf{A}_2$,$\mathbf{B}_2$) é dado em (4.49), para $x_1 = 70\pi/180\ rad$. As funções de pertinência $\alpha_1(x_1)$ e $\alpha_2(x_1)$, são obtidas resolvendo (4.28) com $r = 2$, $i = 2, 4$ e $\alpha_2(x_1) = 1 - \alpha_1(x_1)$. A Figura 4.17 apresenta estas duas funções para o intervalo $-70\pi/180 \leq x_1 \leq 70\pi/180\ rad$.

Na segunda sub-região, os modelo local ($\mathbf{A}_2$,$\mathbf{B}_2$) é dado em (4.49), para $x_2 = 70\pi/180\ rad$, e o terceiro modelo local, ($\mathbf{A}_3$,$\mathbf{B}_3$) é dado em (4.50), para $x_1 = 106\pi/180\ rad$. As funções de pertinência $\alpha_2(x_1)$ e $\alpha_3(x_1)$, são obtidas resolvendo (4.31) com $j = 2$. O ponto $x_1 = 70\pi/180\ rad$ participa da formação dos dois conjuntos de funções de pertinência. A Figura 4.18 apresenta estas duas funções.

As funções de pertinência resultantes das duas sub-regiões são apresentadas na Figura 4.19.

As curvas $f_2(x_1)$, $f_4(x_1)$, $g_2(x_1)$ e $g_4(x_1)$, do modelo de simulação e suas respectivas aproximações com modelos *fuzzy* $f_{f2}(x_1)$, $f_{f4}(x_1)$, $g_{g2}(x_1)$ e $g_{g4}(x_1)$, para o intervalo $-106\pi/180 \leq x_1 \leq 106\pi/180\ rad$, período de amostragem $\Delta_x = \pi/180\ rad$ e que utilizam

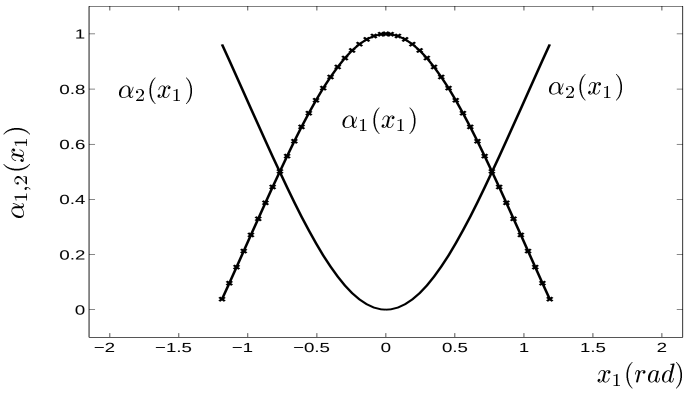

Figura 4.17: Funções de pertinência para o intervalo $-70\pi/180 \leq x_1 \leq 70\pi/180$ rad com dois modelos locais.

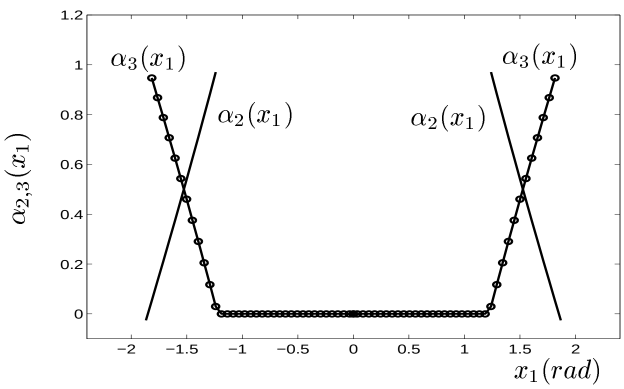

Figura 4.18: Funções de pertinência: solução analítica para os intervalos $-106\pi/180 \leq x_1 \leq -70\pi/180$ rad e $70\pi/180 \leq x_1 \leq 106\pi/180$ rad com dois modelos locais.

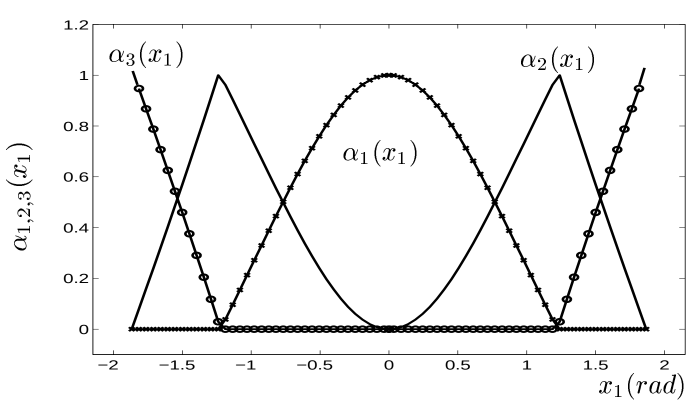

Figura 4.19: Funções de pertinência para o intervalo $-106\pi/180 \leq x_1 \leq 106\pi/180$ rad com três modelos locais: $x_1 = 0$ rad, $x_1 = 70\pi/180$ rad e $x_1 = 106\pi/180$ rad.

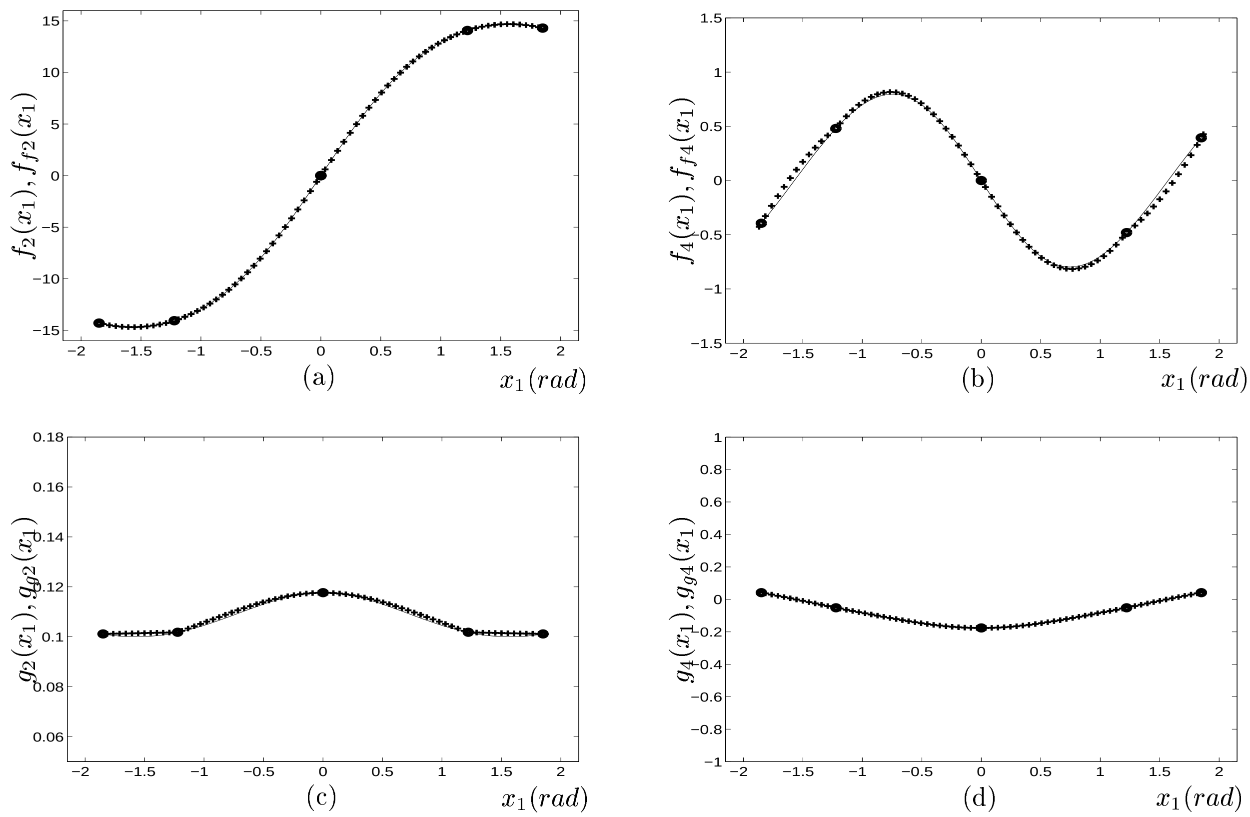

Figura 4.20: Aproximação fuzzy: solução analítica parcial com três modelos locais para o intervalo $-106\pi/180 \leq x_1 \leq 106\pi/180$ rad. (-) curvas do modelo de simulação, (+) aproximações com modelos *fuzzy*, ($\bullet$) representa os modelos locais.

as funções de pertinência apresentadas na Figura 4.19 são ilustradas na Figura 4.20, sendo

$$\begin{array}{rcl} f_{f2}(x_1) & = & \alpha_1(x_1)a_{211}x_1 + \alpha_2(x_1)a_{212}x_1 + \alpha_3(x_1)a_{213}x_1, \\ f_{f4}(x_1) & = & \alpha_1(x_1)a_{411}x_1 + \alpha_2(x_1)a_{412}x_1 + \alpha_3(x_1)a_{413}x_1, \\ g_{g2}(x_1) & = & \alpha_1(x_1)b_{211}x_1 + \alpha_2(x_1)b_{212}x_1 + \alpha_3(x_1)b_{213}x_1, \\ g_{f4}(x_1) & = & \alpha_1(x_1)b_{411}x_1 + \alpha_2(x_1)b_{412}x_1 + \alpha_3(x_1)b_{413}x_1. \end{array} \tag{4.51}$$

4.3.3 Solução por LMIs

É proposta agora a solução do problema (4.21) por meio de LMIs.

Dado um vetor $\boldsymbol{x}_f \in \chi$, a solução de (4.21) pode ser descrita como a solução de LMIs (Boyd et al., 1994), como será mostrado a seguir.

Note que a função energia (4.20) pode ser reescrita como

$$E = \frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}^T(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_f))\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_f)), \tag{4.52}$$

com

$$\boldsymbol{\phi}^T(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_f)) = \left[\begin{array}{ccc} \boldsymbol{\phi}_1^T(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_f)) & \ldots & \boldsymbol{\phi}_n^T(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_f)) \end{array} \right] \tag{4.53}$$

e

$$\boldsymbol{\phi}_i^T(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_f)) = \left[\begin{array}{cc} \sum_{j=1}^{r} \left(\alpha_j(\mathbf{x}_f)\mathbf{a}_{ij}^T\mathbf{x}_f - f_i(\mathbf{x}_f)\right) & \sum_{j=1}^{r} (\alpha_j(\mathbf{x}_f)g_i(\mathbf{x}_{0j}) - g_i(\mathbf{x}_f)) \end{array} \right], \quad \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_f)) \in R^{2n}, i = 1, \ldots, n. \tag{4.54}$$

O índice "i" corresponde às funções que possuem não-linearidades.

Desta forma, minimizar E de (4.20) com respeito à $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_f)$ equivale a resolver o seguinte problema de otimização:

$$\begin{array}{l} min\ \gamma \\ \text{sujeito a} \\ \qquad \frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}^T(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_f))\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_f)) < \gamma, \\ \qquad \gamma > 0. \end{array} \tag{4.55}$$

com $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_f))$ definido em (4.54).

Aplicando-se o complemento de Schur (Boyd et al., 1994) o problema (4.55) é equivalente a

$$\begin{array}{l} min\ \gamma \\ \text{sujeito a} \\ \qquad \begin{bmatrix} 2\gamma & \boldsymbol{\phi}^T(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_f)) \\ \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_f)) & I_{2n} \end{bmatrix} > 0, \\ \qquad \gamma > 0. \end{array}$$

sendo I_{2n} a matriz identidade de ordem 2n.

Assim, o problema de otimização (4.21) é equivalente a

$$\begin{array}{l} min\ \gamma \\ \text{sujeito a} \\ \qquad \begin{bmatrix} 2\gamma & \boldsymbol{\phi}^T(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_f)) \\ \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_f)) & \mathbf{I}_{2n} \end{bmatrix} > 0, \\ \qquad \gamma > 0, \\ \qquad \alpha_j(\mathbf{x}_f) \geq 0,\ j = 1, \ldots, r-1, \\ \qquad 1 - \sum_{j=1}^{r} \alpha_j(\mathbf{x}_f) \geq 0. \end{array} \tag{4.56}$$

e, utilizando a solução $\alpha_j(\mathbf{x}_f)$, $j = 1, 2, \ldots, r-1$ de (4.56), $\alpha_r(\mathbf{x}_f)$ é calculada pela expressão:

$$\alpha_r(\mathbf{x}_f) = 1 - \sum_{j=1}^{r-1} \alpha_j(\mathbf{x}_f).$$

A solução das LMIs acima pode ser facilmente obtida (Boyd et al., 1994) utilizando-se *softwares* disponíveis, por exemplo, o LMISol (Oliveira et al., 1997) e o LMI Control Toolbox do Matlab, para cada $x_f \in \chi$. Para o cálculo numérico, define-se um conjunto abrangente de pontos $\mathbf{x}_f$ em χ e, em cada um deles, $\alpha_j(\mathbf{x}_f)$ é obtida através da solução do problema descrito em (4.56). Em seguida, realiza-se a interpolação polinomial com a ordem adequada e desta forma obtêm-se as funções que representam os $\alpha_j(\mathbf{x}_f)$, $j = 1, \ldots, r$.

Exemplo 10

Considere o Exemplo 3 da Seção 3.3.

Deseja-se obter a aproximação de $f_2(x_1)$, $f_4(x_1)$, $g_2(x_1)$ e $g_4(x_1)$ no intervalo $-60\pi/180 \leq x_1 \leq 60\pi/180\,rad$ utilizando dois modelos locais nos extremos deste intervalo.

Como os pontos da região de operação são simétricos em relação à origem, os modelos locais serão calculados na origem e no ponto $x_1 = 60\pi/180\,rad$, como descrito na Seção 4.3.2.

O primeiro modelo local, em $x_1 = 0\,rad$, $\mathbf{A}_1$ é dado em (3.47) e $\mathbf{B}_1$ em (3.48) e o segundo modelo local, em $x_1 = 60\pi/180\,rad$, $\mathbf{A}_2$ é dado em (3.49) e $\mathbf{B}_2$ em (3.50).

De (4.54):

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\phi}_2(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_f)) &= \begin{bmatrix} (\alpha_1(\mathbf{x}_f)\mathbf{a}_{21}^T\mathbf{x}_f + \alpha_2(\mathbf{x}_f)\mathbf{a}_{22}^T\mathbf{x}_f - f_2(\mathbf{x}_f)) \\ (\alpha_1(\mathbf{x}_f)g_2(\mathbf{x}_{01}) + \alpha_2(\mathbf{x}_f)g_2(\mathbf{x}_{02}) - g_2(\mathbf{x}_f)) \end{bmatrix}, \\
\boldsymbol{\phi}_4(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_f)) &= \begin{bmatrix} (\alpha_1(\mathbf{x}_f)\mathbf{a}_{41}^T\mathbf{x}_f + \alpha_2(\mathbf{x}_f)\mathbf{a}_{42}^T\mathbf{x}_f - f_4(\mathbf{x}_f)) \\ (\alpha_1(\mathbf{x}_f)g_4(\mathbf{x}_{01}) + \alpha_2(\mathbf{x})g_4(\mathbf{x}_{02}) - g_4(\mathbf{x}_f)) \end{bmatrix}, \\
\boldsymbol{\phi}^T(\boldsymbol{\alpha}) &= [\ \phi_2^T(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_f)) \quad \phi_4^T(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_f))\ ],
\end{aligned} \tag{4.57}$$

com $\mathbf{a}_{21}^T$, $\mathbf{a}_{22}^T$, $\mathbf{a}_{41}^T$ e $\mathbf{a}_{42}^T$, definidos em (4.35) no Exemplo 8. Como todas as funções com não-linearidades dependem apenas de x_1, $\boldsymbol{\phi}_2(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_f))$ e $\boldsymbol{\phi}_4(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_f))$ de (4.57) podem ser simplificados para

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\phi}_2(\boldsymbol{\alpha}(x_1)) &= \begin{bmatrix} (\alpha_1(x_1)a_{211}x_1 + \alpha_2(x_1)a_{212}x_1 - f_2(x_1)) \\ (\alpha_1(x_1)g_2(x_{01}) + \alpha_2(x_1)g_2(x_{02}) - g_2(x_1)) \end{bmatrix}, \\
\boldsymbol{\phi}_4(\boldsymbol{\alpha}(x_1)) &= \begin{bmatrix} (\alpha_1(x_1)a_{411}x_1 + \alpha_2(x_1)a_{412}x_1 - f_4(x_1)) \\ (\alpha_1(x_1)g_4(x_{01}) + \alpha_2(x_1)g_4(x_{02}) - g_4(x_1)) \end{bmatrix}, \\
\boldsymbol{\phi}^T(\boldsymbol{\alpha}) &= [\ \boldsymbol{\phi}_2^T(\boldsymbol{\alpha}(x_1)) \quad \boldsymbol{\phi}_4^T(\boldsymbol{\alpha}(x_1))\ ],
\end{aligned} \tag{4.58}$$

com a_{211}, a_{212}, a_{411} e a_{412} definidos em (4.37).

O problema (4.56) foi resolvido utilizando o *software* Matlab. Para cada valor de x_1 foram obtidos os correspondentes valores de $\boldsymbol{\alpha}(x_1)$. Os valores de x_1 foram obtidos com período de amostragem de $\Delta_x = \pi/180\,rad$.

A Figura 4.21 apresenta os valores de $\alpha_1(x_1)$ e $\alpha_2(x_1)$ para $-60\pi/180 \leq x_1 \leq 60\pi/180\,rad$. Pode ser verificado que os valores de $\alpha_1(x_1)$ e $\alpha_2(x_1)$ obtidos coincidem com os valores obtidos com solução analítica ilustrados na Figura 4.12.

Na Figura 4.22 são ilustradas as funções não-lineares $f_2(x_1)$, $f_4(x_1)$, $g_2(x_1)$ e $g_4(x_1)$ do sistema de simulação e suas respectivas aproximações fuzzy $f_{f2}(x_1)$, $f_{f4}(x_1)$, $g_{g2}(x_1)$ e $g_{g4}(x_1)$ definidas em (4.39).

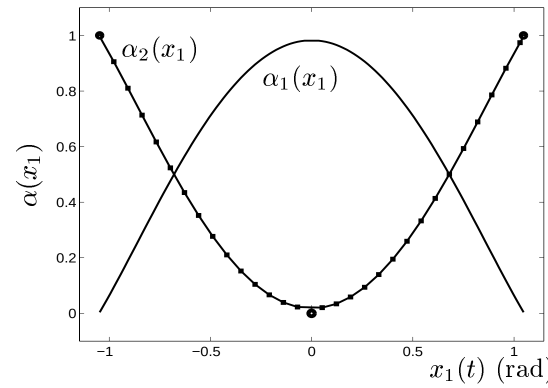

Figura 4.21: Funções de pertinência obtidas por meio da solução de LMIs para os intervalos $-60\pi/180 \leq x_1 \leq 60\pi/180\ rad$, com dois modelos locais.

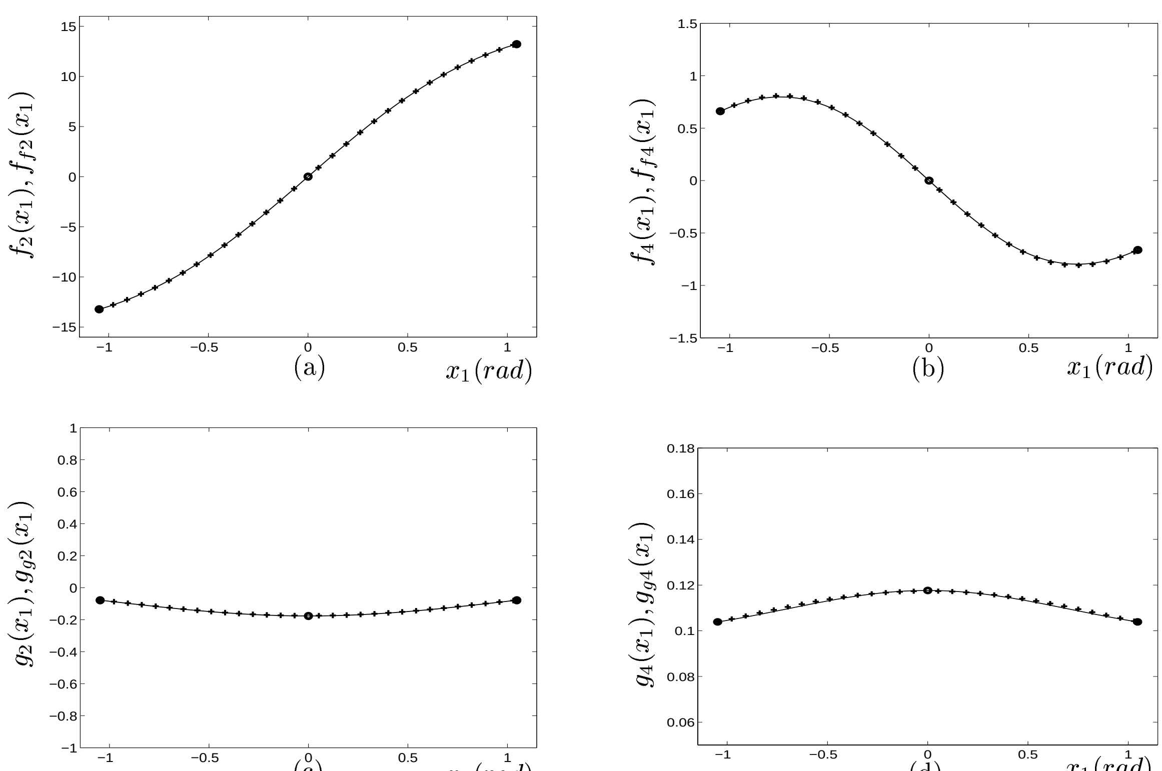

Figura 4.22: Aproximação fuzzy: solução por LMIs com dois modelos locais para o intervalo $-60\pi/180 \leq x_1 \leq 60\pi/180\ rad$. (-) curvas do modelo de simulação, (+) aproximações com modelos *fuzzy*, ($\bullet$) representa os modelos locais.

Exemplo 11

Considere agora uma região de operação com intervalo maior, $-106\pi/180 \leq x_1 \leq 106\pi/180\, rad$.

O primeiro modelo local, em $x_1 = 0$, $\mathbf{A}_1$ é dado em (3.47) e $\mathbf{B}_1$ em (3.48) e o segundo modelo local, em $x_1 = 106\pi/180\, rad$, $\mathbf{A}_2$ é dado em (4.47).

Resolvendo (4.54) e considerando (4.58) com

$$\begin{array}{lllllll} a_{211} & = & 17.2931, & & a_{212} & = & 7.7260, \\ a_{411} & = & -1.7295, & & a_{412} & = & 0.2130, \\ b_{211} & = & -0.1765, & & b_{212} & = & 0.0418, \\ b_{411} & = & 0.1176, & & b_{412} & = & 0.1012, \end{array} \tag{4.59}$$

obtêm-se $\alpha_1(x_1)$ e $\alpha_2(x_1)$.

A Figura 4.23 apresenta os valores de $\alpha_1(x_1)$ e $\alpha_2(x_1)$ para $-106\pi/180 \leq x_1 \leq 106\pi/180\, rad$ com intervalo de amostragem $\Delta_x = \pi/180\, rad$.

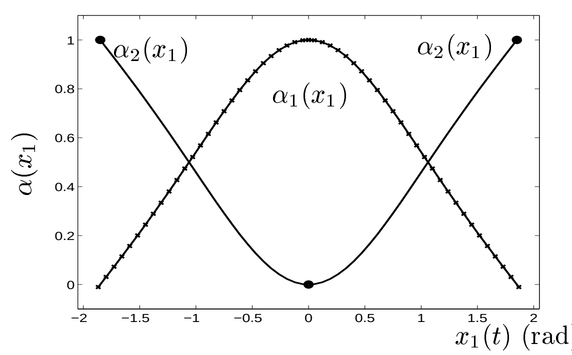

Figura 4.23: Funções de pertinência: solução por LMIs para o intervalo $-106\pi/180 \leq x_1 \leq 106\pi/180\, rad$, com dois modelos locais.

Na Figura 4.24 são ilustradas as funções não-lineares $f_2(\mathbf{x}_f)$, $f_4(\mathbf{x}_f)$, $g_2(\mathbf{x}_f)$ e $g_4(\mathbf{x}_f)$ do sistema de simulação e suas respectivas aproximações fuzzy $f_{f2}(x_1)$, $f_{f4}(x_1)$, $g_{g2}(x_1)$ e $g_{g4}(x_1)$ definidas em (4.39), considerando as funções de pertinência apresentadas na Figura 4.23.

Como no Exemplo 9, a Figura 4.24 mostra que há um erro considerável nas aproximações obtidas principalmente com $f_{f4}(x_1)$ e $g_{g4}(x_1)$.

Novamente será considerado um novo modelo local em $x_1 = 70\pi/180\, rad$, que é visualmente o ponto onde ocorreu o maior erro de aproximação. Na Seção 4.4 será proposto um algoritmo para determinar o ponto exato onde ocorreu o maior erro de aproximação.

O processo de redefinição dos modelos locais é semelhante ao apresentado para o Exemplo 9. Portanto, para o primeiro modelo local em $x_1 = 0$, $\mathbf{A}_1$, é definido em (3.47) e $\mathbf{B}_1$ em (3.48), para o segundo modelo local em $x_1 = 70\pi/180\, rad$, $\mathbf{A}_2$ é definido em (4.49) e para o terceiro modelo local em $x_1 = 106\pi/180\, rad$, $\mathbf{A}_3$ é definido em (4.50).

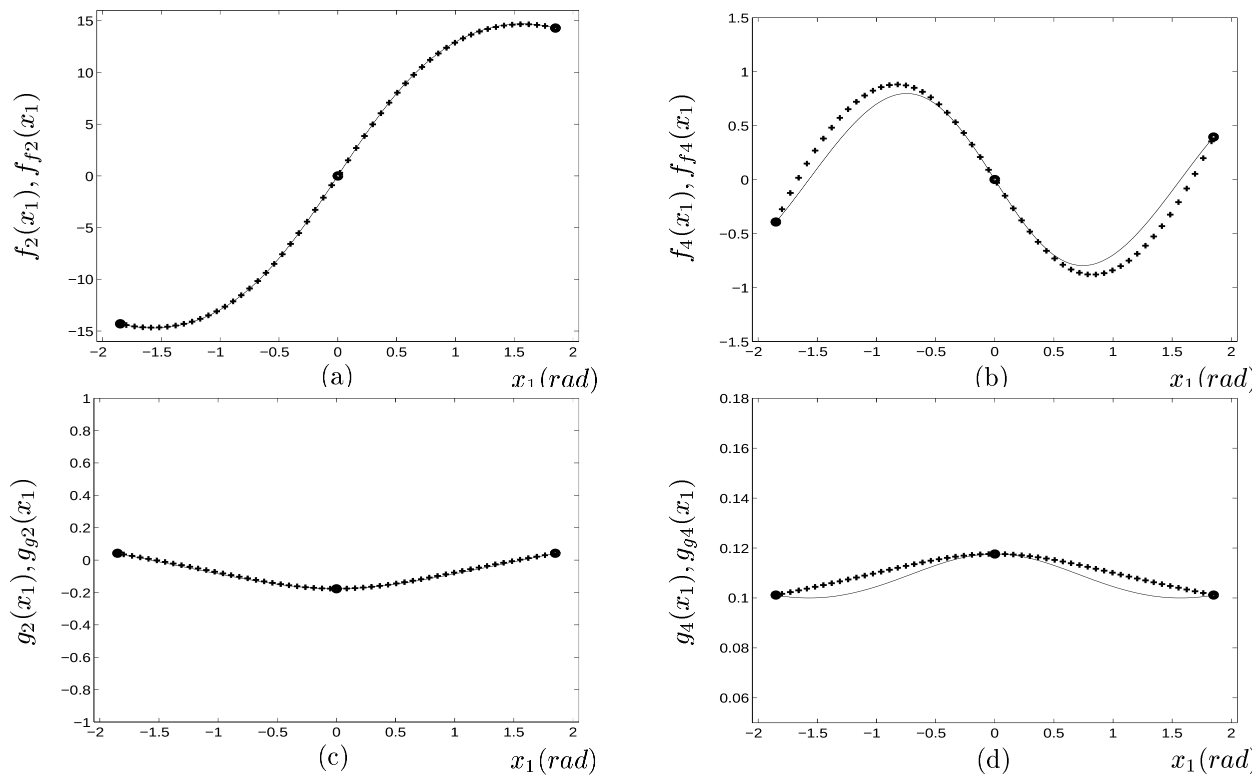

Figura 4.24: Aproximação fuzzy: solução por LMIs com dois modelos locais para o intervalo $-106\pi/180 \leq x_1 \leq 106\pi/180$ rad. (-) curvas do modelo de simulação, (+) aproximações com modelos *fuzzy*, (•) representa os modelos locais .

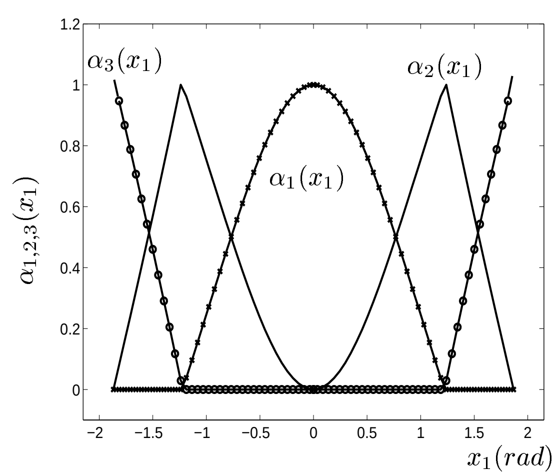

Figura 4.25: Funções de pertinência: solução por LMIs para o intervalo $-106\pi/180 \leq x_1 \leq 106\pi/180$ rad, com três modelos locais.

De (4.54) e (4.58)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\phi}_2(\boldsymbol{\alpha}(x_1)) &= \begin{bmatrix} (\alpha_1(x_1)a_{211}x_1 + \alpha_2(x_1)a_{212}x_1 + \alpha_3(x_1)a_{213}x_1 - f_2(x_1)) \\ (\alpha_1(x_1)g_2(x_{01}) + \alpha_2(x_1)g_2(x_{02}) + \alpha_3(x_1)g_2(x_{03}) - g_2(x_1)) \end{bmatrix}, \\
\boldsymbol{\phi}_4(\boldsymbol{\alpha}(x_1)) &= \begin{bmatrix} (\alpha_1(x_1)a_{411}x_1 + \alpha_2(x_1)a_{412}x_1 + \alpha_3(x_1)a_{413}x_1 - f_4(x_1)) \\ (\alpha_1(x_1)g_4(x_{01}) + \alpha_2(x_1)g_4(x_{02}) + \alpha_3(x_1)g_4(x_{03}) - g_4(x_1)) \end{bmatrix}, \\
\boldsymbol{\phi}^T(\boldsymbol{\alpha}) &= [\ \phi_2^T(\boldsymbol{\alpha}(x_1)) \quad \phi_4^T(\boldsymbol{\alpha}(x_1))\ ].
\end{aligned}
\tag{4.60}
$$

A Figura 4.25 apresenta os valores de $\alpha_1(x_1)$, $\alpha_2(x_1)$ e $\alpha_3(x_1)$ para $-106\pi/180 \leq x_1 \leq 106\pi/180$ obtidas com a solução de (4.56) considerando (4.60) com intervalo de amostragem $\Delta_x = \pi/180$. Neste caso, todas as restrições foram satisfeitas e os valores de $\alpha_j(x_1)$, $j = 1, 2, 3$ permaneceram no intervalo $[0, 1]$, não sendo necessário particionar a região de operação. Portanto, a solução do problema (4.56) fornece os valores de $\alpha_j(x_f)$, $j = 1, 2, 3$ para qualquer valor de x_f no intervalo $-106\pi/180 \leq x_1 \leq -106\pi/180\ rad$.

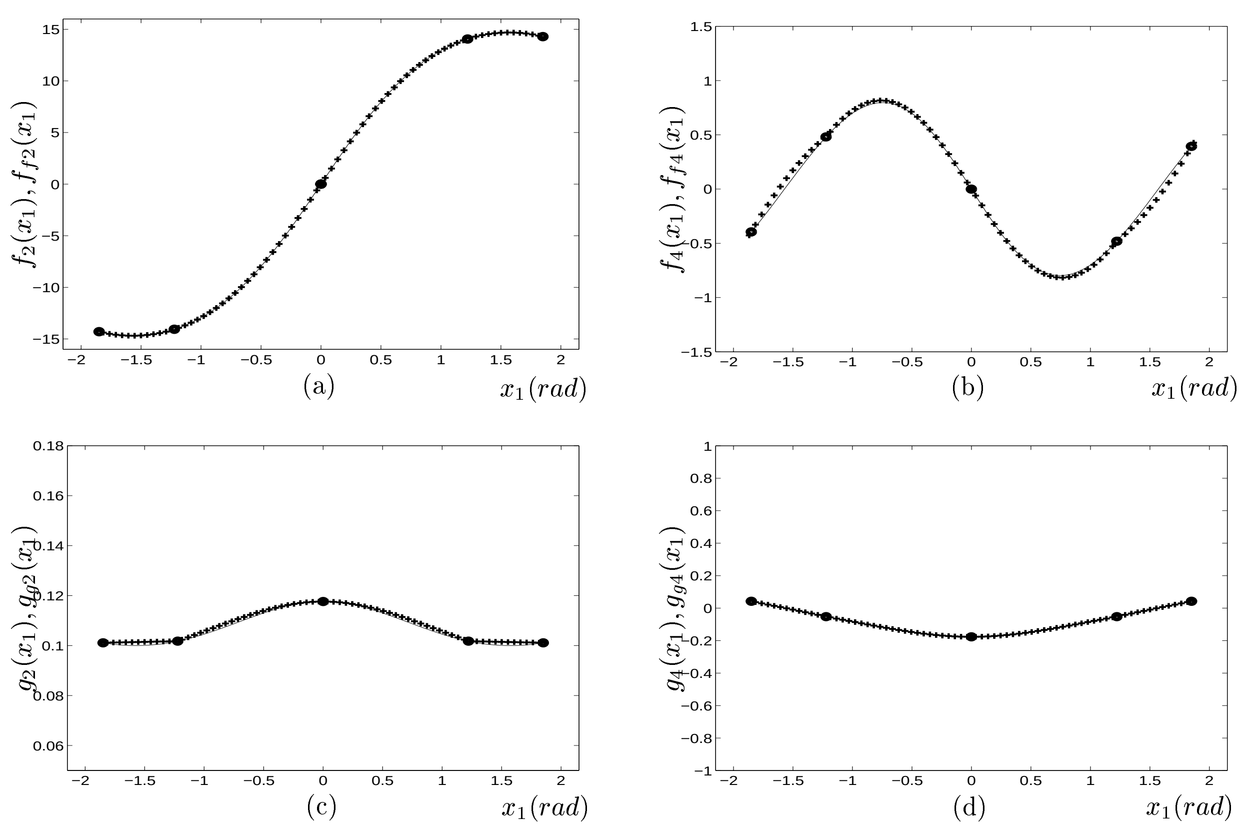

Figura 4.26: Aproximação fuzzy: solução por LMIs com três modelos locais para o intervalo $-106\pi/180 \leq x_1 \leq 106\pi/180\ rad$; (-) curvas do modelo de simulação, (+) aproximações com modelos *fuzzy*, ($\bullet$) representa os modelos locais.

Na Figura 4.26 são ilustradas as funções não-lineares $f_2(x_1)$, $f_4(x_1)$, $g_2(x_1)$ e $g_4(x_1)$ do sistema de simulação e suas respectivas aproximações fuzzy $f_{f2}(x_1)$, $f_{f4}(x_1)$, $g_{g2}(x_1)$ e $g_{g4}(x_1)$ definidas em (4.39).

4.4 Erro de Modelagem

O erro de modelagem é um índice que permite avaliar o quanto às funções de aproximação obtidas a partir dos modelos *fuzzy* TS estão próximas das funções que representam o modelo de simulação.

4.4.1 Erro de Modelagem para a Aproximação Otimizada

Considere um conjunto de pontos $\mathbf{x}_f \in \chi$, sendo χ um subconjunto fechado do $\mathbb{R}^n$ que representa a região de operação do sistema não-linear.

O erro de modelagem, definido aqui por $\delta_v(x_f)$, pode ser obtido pela norma euclidiana do erro das aproximações entre o modelo de simulação e o modelo TS, através do problema de otimização:

$$\begin{array}{ll} \min \delta_v(\mathbf{x}_f) & \\ \text{sujeito a} & \delta_v(\mathbf{x}_f) > 0, \\ & ||\Delta\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_f)||_2^2 < \delta_v(\mathbf{x}_f)\mathbf{I}, \\ & ||\Delta\mathbf{g}(\mathbf{x}_f)||_2^2 < \delta_v(\mathbf{x}_f)\mathbf{I}, \end{array} \tag{4.61}$$

sendo que

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}_f) &= \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_f)\mathbf{x}_f, \\ \Delta\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_f) &= \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_f) - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(\mathbf{x}_f)\mathbf{A}_i, \\ \Delta\mathbf{g}(\mathbf{x}_f) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}_f) - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(\mathbf{x}_f)\mathbf{B}_i. \end{aligned} \tag{4.62}$$

Observação 4 *Por simplicidade de notação, os termos $\Delta\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_f)$ e $\Delta\mathbf{g}(\mathbf{x}_f)$ serão denotados apenas por $\Delta\tilde{\mathbf{f}}$ e $\Delta\mathbf{g}$.*

A solução das LMIs da (4.61) fornece o erro de aproximação para um conjunto abrangente de valores de $\mathbf{x}_f \in \chi$, sendo χ a região de operação. Assim o erro é obtido para cada elemento deste conjunto de pontos.

Os erros calculados em (4.61) consideram o maior erro entre as aproximações de $f(\mathbf{x}_f)$ e $g(\mathbf{x}_f)$, para cada valor de $\mathbf{x}_f$. Ele pode ser determinado a partir das aproximações realizadas com $\alpha_j(\mathbf{x}_f)$ obtidos de forma analítica, resolvendo o problema (4.23) ou por meio de LMIs, resolvendo (4.56).

A definição do erro na forma (4.61) é apropriada para averiguar o ponto em que ocorreu o maior erro de aproximação de todas as funções não-lineares do sistema. Este erro será utilizado na determinação dos pontos em que serão inseridos novos modelos locais.

4.5 Número de Modelos Locais

Um dois principais aspectos do projeto de controle com sistemas *fuzzy* é determinar quantos e quais modelos locais devem ser usados para representar o sistema. Em geral, os modelos locais são determinados baseados em conhecimentos prévios do projetista sobre o comportamento do sistema.

Em Taniguchi et al. (2001) o número de modelos locais é fixo 2^s , sendo s o número de funções não-lineares do sistema e são obtidos em função dos valores máximos e mínimos destas funções. Este tipo de projeto não permite ao projetista a escolha dos modelos locais. O número pode ser reduzido em detrimento da qualidade de aproximação das funções obtidas com modelos *fuzzy* com relação às funções que representam o modelo de simulação. A técnica de redução e localização dos modelos locais para o sistema reduzido foi apresentada na Seção 4.2.1.

A seguir será apresentado um algoritmo para determinar o número de modelos locais e suas localizações para sistemas da classe (3.27). O critério utilizado para determinar quantos e quais os modelos locais serão utilizados na aproximação será o erro de modelagem obtido em (4.61).

Este algoritmo consiste em obter os modelos locais nos extremos da região de operação considerada e depois obter modelos locais onde houver maior erro de aproximação.

4.6 Algoritmo de Aproximação

Algoritmo:

1. Região de operação:

   Defina a região de operação χ, sendo χ um subconjunto fechado do $\mathbb{R}^n$.

2. Erro de modelagem:

   Estabeleça o erro de modelagem máximo δ_{vmax} desejado para a aproximação, de acordo com (4.21), (4.61) e (4.62).

3. Modelos locais nos extremos da região:

   Utilize (3.30) e (3.45) para obter os modelos locais na origem, este ponto será denominado p_1, e no extremo desta região, denominado p_2. Considere $(r = 2)$ e $d = 2$. Se necessário, realize o deslocamento de coordenadas descrito na Seção 3.4.

4. Funções de pertinência:

   Com os modelos locais obtidos , determine os valores de $\alpha_j(\mathbf{x}_f)$ $j = 1, \ldots, r$, para um conjunto valores de x_f entre p_1 e p_d. Resolva o problema (4.56), para obter os valores de $\alpha_j(\mathbf{x}_f)$, $j = 1, \ldots, r$ por meio de LMIs, ou resolva o problema (4.28), para obter a solução analítica.

5. Aproximações *fuzzy*.

   Realize a aproximação das funções do modelo de simulação, $f_i(\mathbf{x}_f)$ e $g_i(\mathbf{x}_f)$ pelas funções obtidas a partir do modelo fuzzy, $f_{fi}(\mathbf{x}_f)$ e $g_{gi}(\mathbf{x}_f)$, utilizando as funções de pertinência obtidas no Passo 4, considerando:

$$f_{fi}(\mathbf{x}_f) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j(\mathbf{x}_f)\mathbf{a}_{ij}^T x_f,$$
$$g_{gi}(\mathbf{x}_f) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j(\mathbf{x}_f) g_i(\mathbf{x}_{0j})$$

   sendo $\mathbf{a}_{ij}$ representa linha i do modelo local j, $j = 1, \ldots, r$, $(r = 2)$ e $\mathbf{x}_{0j}$ é o ponto de definição do modelo local j.

6. Erro de modelagem:

   Obtenha o erro de modelagem, $\delta_v(\mathbf{x}_f)$, a partir de (4.61) e (4.62) para todos os valores de $\mathbf{x}_f \in \chi$ no intervalo $\mathbf{x}_f \in [0, p_2]$. Verifique se para cada elemento deste conjunto é satisfeita a condição:

$$\delta_v(\mathbf{x}_f) \leq \delta_{vmax}.$$

   Se a condição for satisfeita não é necessário obter outros modelos locais e o processo de aproximação se encerra. Caso contrário, considere $r = r + 1$, $d = d + 1$.

7. Definição do novo modelo local:

   Se a condição não for satisfeita para algum ponto $\mathbf{x}_f$ no intervalo, determine qual o valor de $\mathbf{x}_f$ em que se obteve o maior $\delta_v(\mathbf{x}_f)$. Este ponto será denominado de p_d. Construa um novo modelo local no ponto $\mathbf{x}_f = p_d$ utilizando (3.30) e (3.45).

8. Renomeie os modelos locais de forma a ordená-los em ordem crescente.

   Para o ponto p_1 o modelo local permanece o mesmo, $(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1)$. Para o ponto p_d, $d = 3$ que está entre p_1 e p_2 o modelo local será renomeado para $(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2)$. O ponto p_2 que fora nomeado como modelo $(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2)$ será renomeado para modelo local $(\mathbf{A}_3, \mathbf{B}_3)$. Apenas os índices são alterados para efeito de organização e melhor compreensão do método.

9. Volte ao passo 4.

Uma justificativa para o Passo 7 é que, quando é inserido um novo modelo local em um novo ponto de operação utilizando (3.30) e (3.45), o erro de modelagem neste ponto torna-se nulo e, na sua vizinhança, é reduzido.

A seguir será apresentado um exemplo ilustrativo de aplicação do método.

Considere um função hipotética $f(x_f)$, $x_f \in \mathbb{R}$. Deseja-se obter a aproximação *fuzzy* desta função no intervalo $0 \leq x_f \leq t_f$.

1. Região de operação: $0 \leq x_f \leq x_p$
2. Erro de modelagem: δ_{vmax}.
3. Modelos locais nos extremos da região:Utilize (3.45) para obter os modelos locais na origem, este ponto será denominado p_1, e no extremo desta região, $x_f = x_p$, denominado p_2 $(x_p = p_2)$. Considere $(r = 2)$ e $d = 2$.

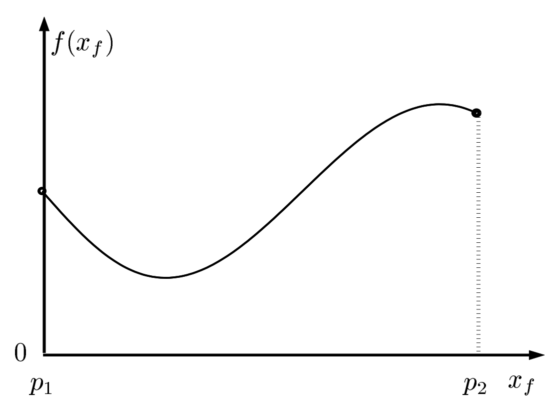

Figura 4.27: Algoritmo de aproximação: modelos locais nos extremos da região de operação.

4. Funções de pertinência: Com os modelos locais obtidos , determine os valores de $\alpha_j(x_f)$ $j = 1, \ldots, r$, para um conjunto valores de x_f entre p_1 e p_2, resolvendo o problema (4.56), se a solução for por LMIs, ou (4.28), se a solução for analítica.

   A Figura 4.28 ilustra as funções $\alpha_1(x_f)$ e $\alpha_2(x_f)$ entre os pontos p_1 e p_2.

5. Aproximações *fuzzy*: Realize a aproximação das funções do modelo de simulação, $f_i(x_f)$ pelas funções obtidas a partir do modelo fuzzy, $f_{fi}(x_f)$, utilizando as funções de per-

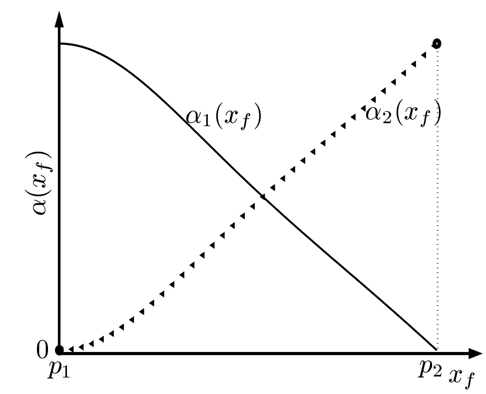

Figura 4.28: Algoritmo: exemplo de funções de pertinência $\alpha_1(x_f)$ e $\alpha_2(x_f)$ obtidos entre os dois pontos extremos p_1 e p_2 com dois modelos locais.

tinência obtidas no Passo 4, considerando:

$$f_{fi}(x_f) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j(x_f) a_{ij}^T x_f,$$
$$g_{gi}(x_f) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j(x_f) g_i(x_{0j})$$

sendo a_{ij} o elemento da linha i e modelo local j, $j = 1, \ldots, r$, $(r = 2)$.

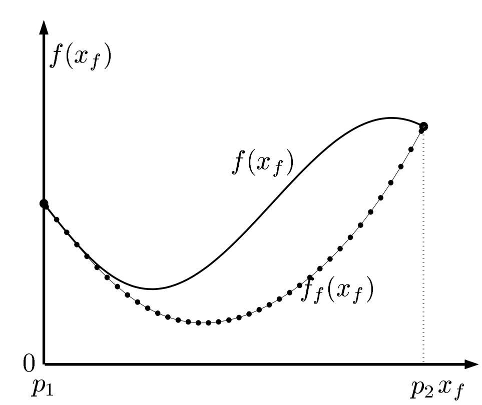

Figura 4.29: Algoritmo: aproximação *fuzzy* para modelos locais nos extremos da região de operação.

6. Erro de modelagem: Obtenha o erro de modelagem, $\delta_v(x_f)$ a partir de (4.61) e de (4.62) para todos os valores de $x_f \in \chi$ no intervalo $x_f \in [0, p_2]$.

   A condição $\delta_v(x_f) \leq \delta_{vmax}$ não é satisfeita para o ponto $x_f = x_d$, como ilustrado na Figura 4.30. Considere $r = 3$, $d = 3$.

7. Definição do novo modelo local: Construa um novo modelo local no ponto $x_f = p_d$ utilizando (3.45). Veja a Figura 4.31.

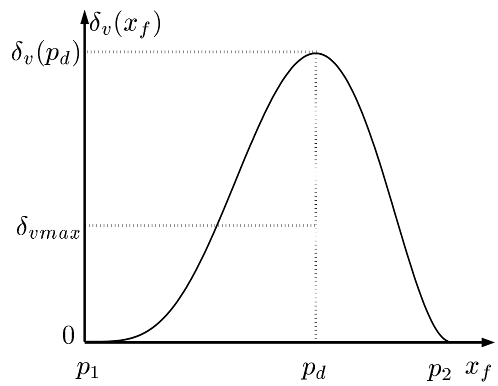

Figura 4.30: Algoritmo: erro de modelagem para dois modelos locais.

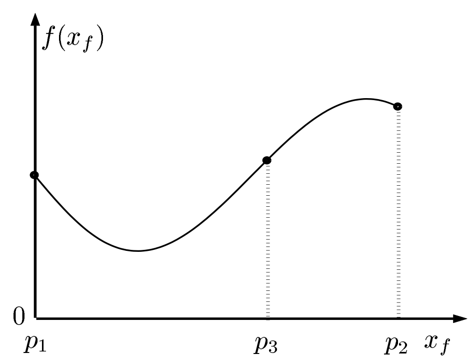

Figura 4.31: Algoritmo: modelo local no ponto p_3 onde ocorreu o maior erro de aproximação com dois modelos locais.

8. Renomeie os modelos locais de forma a ordená-los em ordem crescente.

   Para o ponto p_1 o modelo local permanece o mesmo, $(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1)$. Para o ponto p_3 que está entre p_1 e p_2 o modelo local será renomeado para $(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2)$. O ponto p_2 que fora nomeado como modelo $(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2)$ será renomeado para modelo local $(\mathbf{A}_3, \mathbf{B}_3)$, como ilustra a Figura 4.32.

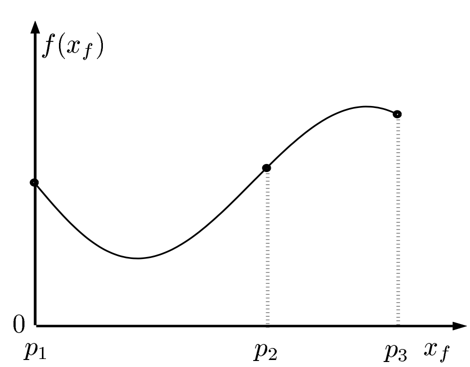

Figura 4.32: Algoritmo: redefinindo três modelos locais.

9. Volte ao passo 4.

10. Novas funções de pertinência.

    Solução por LMIs:

    Determine as funções de pertinência $\alpha_i(x_f)$ para $i = 1, \ldots, r$, $(r = 3)$ resolvendo o problema (4.56). A Figura 4.33 ilustra $\alpha_1(x_f)$, $\alpha_2(x_f)$ e $\alpha_3(x_f)$ obtidos entre os ponto p_1 e p_2. Na solução por LMIs, os valores de $\alpha_i(x_f)$ para $i = 1, \ldots, r$ são obtidos de forma direta. Não é necessário dividir a região de operação.

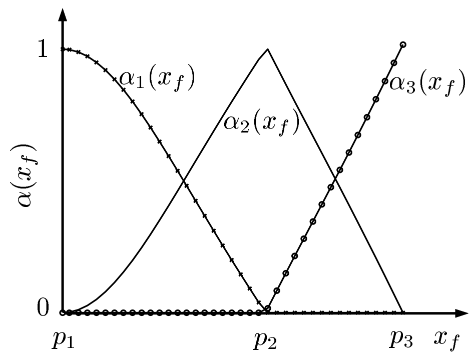

Figura 4.33: Algoritmo: funções de pertinência obtidas por meio de LMIs para três modelos locais.

Solução analítica

Determine as funções de pertinência $\alpha_j(x_f)$ para $j = 1, 2, 3$ utilizando (4.28). Verifique se os valores destas funções satisfazem a restrição $\alpha_j(x_f) \in [0, 1]$, $j = 1, 2, 3$ para todos os valores de x_f. Se a restrição for satisfeita, passe para o passo seguinte.

Caso contrário, estabeleça duas novas funções de pertinência entre p_1 e p_2 utilizando (4.28), com $r = 2$ e $\alpha_2(x_f) = 1 - \alpha_1(x_f)$, como mostra a Figura 4.34,

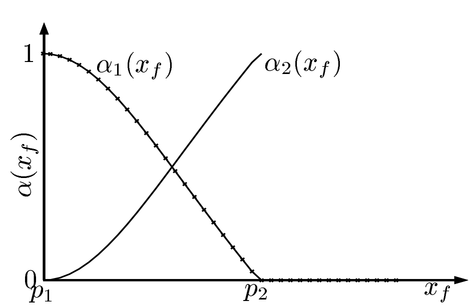

Figura 4.34: Algoritmo: funções de pertinência obtidas de forma analítica entre a origem e o ponto p_2 onde ocorreu o maior erro de aproximação.

Em seguida, pela equação (4.31) obtenha a outra parcela da função de pertinência $\alpha_2(x_f)$ e a função de pertinência $\alpha_3(x_f)$, entre p_2 e p_3, como mostra a Figura 4.35.

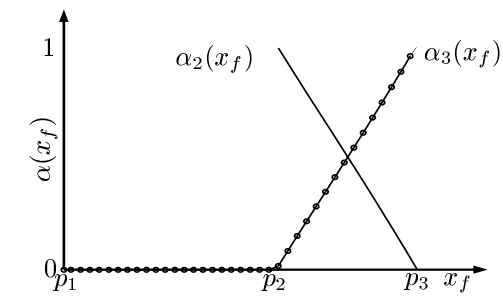

Figura 4.35: Algoritmo: funções de pertinência obtida de forma analítica entre o ponto p_2, onde ocorreu o maior erro de aproximação e o ponto p_3, extremo da região de operação.

11. Aproximação fuzzy utilizando os novos modelos locais. Com as novas funções de pertinência obtidas no Passo 10, obtenha a aproximação do modelo de simulação $f_i(x_f)$ pelas funções obtidas com modelos fuzzy, com

$$f_{fi}(x_f) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j(x_f) a_{ij}^T x_f,$$
$$g_{gi}(x_f) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j(x_f) g_i(x_{0j})$$

com a_{ij}^T, $j = 1, \ldots, r$, $(r = 3)$ obtidos com (3.45).

A aproximação do sistema fuzzy ao sistema de simulação com três modelos locais é apresentado na Figura 4.36.

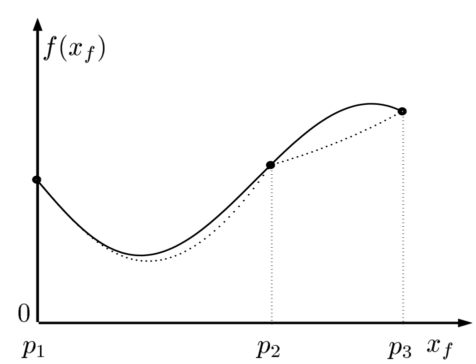

Figura 4.36: Algoritmo: aproximação fuzzy com três modelos locais.

Verifique se as condições do Passo 6 são satisfeitas. Se as condições não forem satisfeitas complete os Passos 6, 7 e 8. O modelo local p_d, será determinado entre um dos intervalos estabelecidos pelos modelos locais anteriores. No caso da Figura 4.36 $(d = 4)$, $p_d = p_4$ será determinado entre p_2 e p_3, como ilustra a Figura 4.37

A Figura 4.38 ilustra os modelos locais renomeados e as funções de pertinência $\alpha_j(x_f)$, $j = 1, \ldots, r$ (com $r = 4$) resultantes.

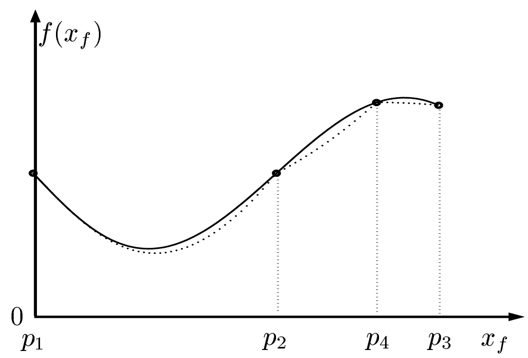

Figura 4.37: Algoritmo: definição do quarto modelo local.

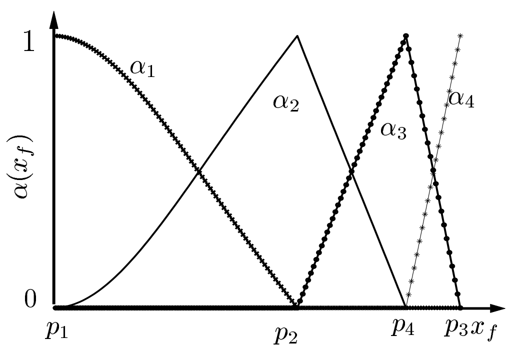

Figura 4.38: Algoritmo: funções de pertinência para quatro modelos locais.

Exemplo 12

Deseja-se obter a aproximação com modelos *fuzzy* TS do sistema (A.18) utilizando na região de operação entre $-\pi \leq x_1 \leq \pi \; rad$ e funções de pertinência obtidas por meio de LMIs com intervalo de amostragem $\Delta_x = \pi/180 \; rad$.

1. Região de operação: $\mathbf{x}_f = [x_1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0]$ com $x_1 \in [-\pi, \pi] \; rad$, $\Delta_x = \pi/180 \; rad$.

2. Erro de modelagem máximo: $\delta_{vmax} = 0.001$.

3. Modelos locais nos extremos da região: O primeiro modelo local é dado em (3.47) e (3.48). Com (3.45) calcula-se o segundo modelo local em $x_1 = \pi \; rad$.

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1765 \\ 0 \\ 0.1176 \end{bmatrix}, \tag{4.63}$$

4. Funções de pertinência nos extremos da região de operação:

   Os valores de $\alpha_j(x_1)$ $j = 1, 2$ para qualquer x_f no intervalo $x_f \in \chi$, ou seja, $-\pi \leq x_1 \leq \pi \; rad$, são obtidos resolvendo o problema (4.56), com $r = 2$. A Figura 4.39 ilustra $\alpha_1(x_1)$ e $\alpha_2(x_1)$ no intervalo $-\pi \leq x_1 \leq \pi \; rad$.

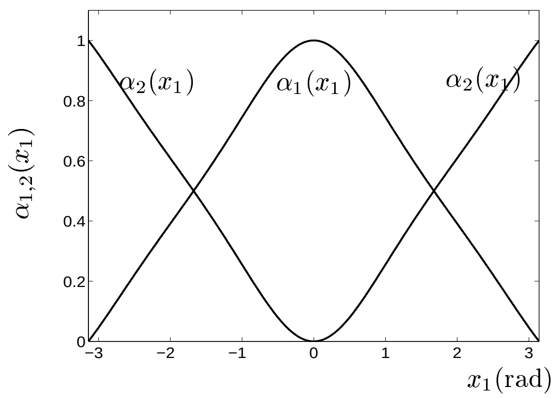

Figura 4.39: Funções de pertinência: solução por LMIs para o intervalo $-\pi \leq x_1 \leq \pi$ rad, com dois modelos locais.

5. Aproximações *fuzzy* para pontos nos extremos da região de operação:

   A Figura 4.40 apresenta as funções de aproximação do modelo de simulação, $f_i(x_1)$ pelas funções obtidas a partir do modelo *fuzzy*, $f_{fi}(x_1)$, com

$$\begin{aligned} f_{f2}(x_1) &= \alpha_1(x_1)a_{211}x_1 + \alpha_2(x_1)a_{212}x_1, \\ f_{f4}(x_1) &= \alpha_1(x_1)a_{411}x_1 + \alpha_2(x_1)a_{412}x_1, \\ g_{g2}(x_1) &= \alpha_1(x_1)b_{211}x_1 + \alpha_2(x_1)b_{212}x_1, \\ g_{g4}(x_1) &= \alpha_1(x_1)b_{411}x_1 + \alpha_2(x_1)b_{412}x_1, \end{aligned}$$

   sendo

$$\begin{array}{lllllll} a_{211} & = & 17.2941 & a_{212} & = & 0.0000, \\ a_{411} & = & -1.7294 & a_{412} & = & 0.0000, \\ b_{211} & = & -0.1765 & b_{212} & = & 0.1765, \\ b_{411} & = & 0.1176 & b_{412} & = & 0.1176. \end{array} \tag{4.64}$$

6. Erro de modelagem:

   O erro de modelagem, $\delta_v(x_1)$ foi obtido a partir de (4.61) para $x_f \in [-\pi, \pi]$ rad. O erro obtido é ilustrado na Figura 4.41.

   Pela Figura 4.41 verifica-se que a condição

$$\delta_v(x_1) \leq \delta_{vmax}. \tag{4.65}$$

   não foi satisfeita para todos os valores de $x_1 \in [-\pi, \pi]$ rad e que o maior erro de modelagem ocorreu para $x_1 = 106\pi/180 = 1.85$ rad com

$$\delta_v = 0.9618 \geq \delta_{vmax}.$$

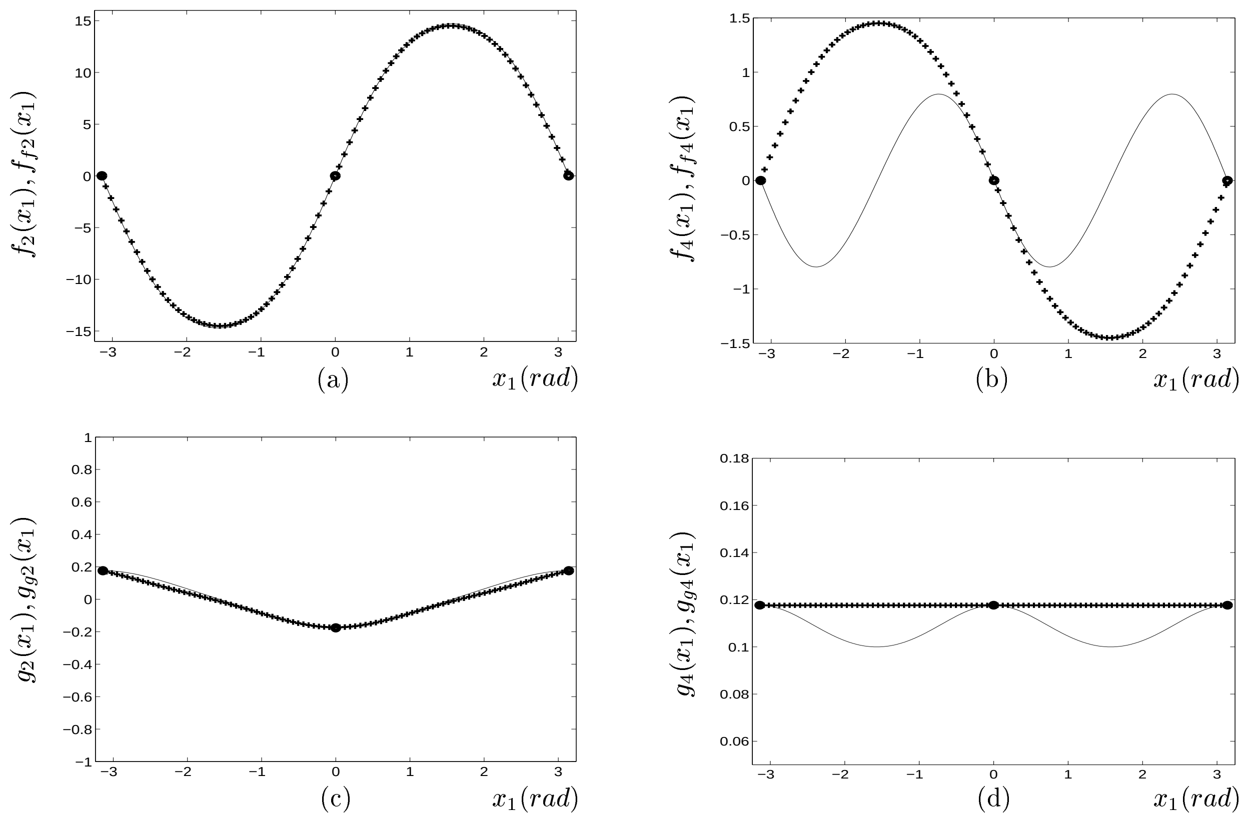

Figura 4.40: Aproximação *fuzzy*: solução por LMIs com dois modelos locais para o intervalo $-\pi \leq x_1 \leq \pi\ rad$; (-) curvas do modelo de simulação, (+) aproximações com modelos *fuzzy*, ($\bullet$) representa os modelos locais .

7. Definição do novo modelo local

   Como a condição do item anterior não foi satisfeita, um novo modelo local será construído utilizando (3.45) no ponto onde ocorreu o maior erro de aproximação, ou seja, em $x_1 = 106\pi/180\, rad$:

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7.7259 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.2129 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0418 \\ 0 \\ 0.1012 \end{bmatrix}.$$

8. Renomeie os modelos locais de forma a ordená-los em ordem crescente.

   Para o ponto $x_1 = 0\ rad$ o modelo local $(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1)$ é definido em (3.47) e (3.48). O segundo modelo local será o modelo obtido no ponto $x_1 = 106\pi/180\, rad$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7.7259 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.2129 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0418 \\ 0 \\ 0.1012 \end{bmatrix}.$$

   O ponto $x_1 = \pi\ rad$ que foi nomeado como modelo $(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2)$ em (4.63) será renomeado

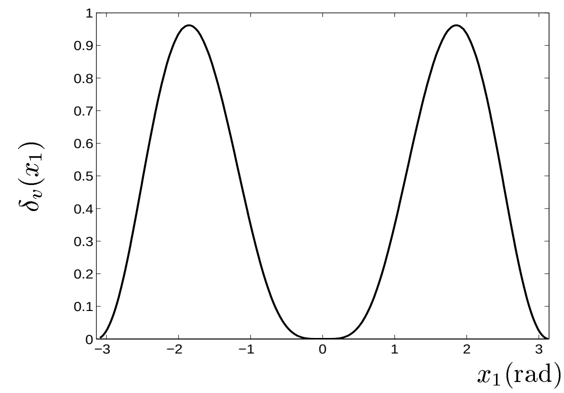

Figura 4.41: Erro de modelagem: solução por LMIs para o intervalo $-\pi \leq x_1 \leq \pi\ rad$, com dois modelos locais.

para $(\mathbf{A}_3, \mathbf{B}_3)$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1765 \\ 0 \\ 0.1176 \end{bmatrix}.$$

9. Novas funções de pertinência.

   As novas funções de pertinência $\alpha_1(x_f)$, $\alpha_2(x_f)$ e $\alpha_3(x_f)$ foram obtidas resolvendo o problema (4.56) para $r = 3$. A Figura 4.42 apresenta as funções obtidas $-\pi \leq x_1 \leq \pi\ rad$.

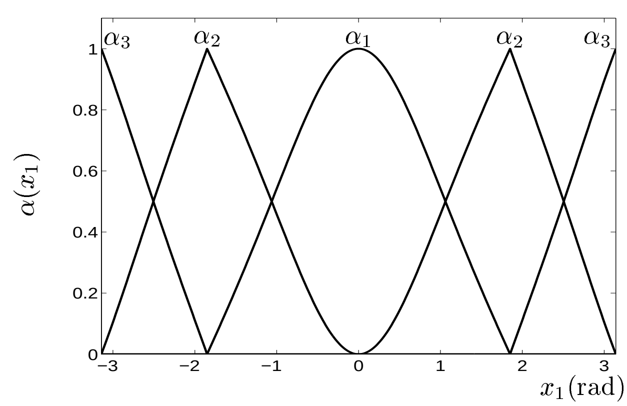

Figura 4.42: Funções de pertinência: solução por LMIs para o intervalo $-\pi \leq x_1 \leq \pi\ rad$, com três modelos locais.

10. Aproximação fuzzy utilizando os novos modelos locais.

    Com as novas funções de pertinência foram obtidas as aproximações das funções do modelo de simulação $f_i(x_f)$ e $g_i(x_f)$ pelas funções obtidas com modelos fuzzy $f_{fi}(x_f)$

e $g_{gi}(x_f)$, $i = 2, 4$, sendo

$$\begin{array}{rcl} f_{f2}(x_1) & = & \alpha_1(x_1)a_{211}x_1 + \alpha_2(x_1)a_{212}x_1 + \alpha_3(x_1)a_{213}x_1, \\ f_{f4}(x_1) & = & \alpha_1(x_1)a_{411}x_1 + \alpha_2(x_1)a_{412}x_1 + \alpha_3(x_1)a_{413}x_1, \\ g_{g2}(x_1) & = & \alpha_1(x_1)b_{211}x_1 + \alpha_2(x_1)b_{212}x_1 + \alpha_3(x_1)a_{213}x_1, \\ g_{g4}(x_1) & = & \alpha_1(x_1)b_{411}x_1 + \alpha_2(x_1)b_{412}x_1 + \alpha_3(x_1)a_{413}x_1, \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rclrcl} a_{211} & = & 17.2941 & a_{411} & = & -1.7294 \\ a_{212} & = & 7.7259 & a_{412} & = & 0.2129 \\ a_{213} & = & 0.0000 & a_{413} & = & 0.0000 \\ b_{211} & = & -0.1765 & b_{412} & = & 0.1176 \\ b_{212} & = & 0.0418 & b_{412} & = & 0.1012 \\ b_{213} & = & 0.1765 & b_{413} & = & 0.1176. \end{array} \qquad (4.66)$$

A aproximação do sistema fuzzy ao sistema de simulação com três modelos locais é apresentado na Figura 4.43.

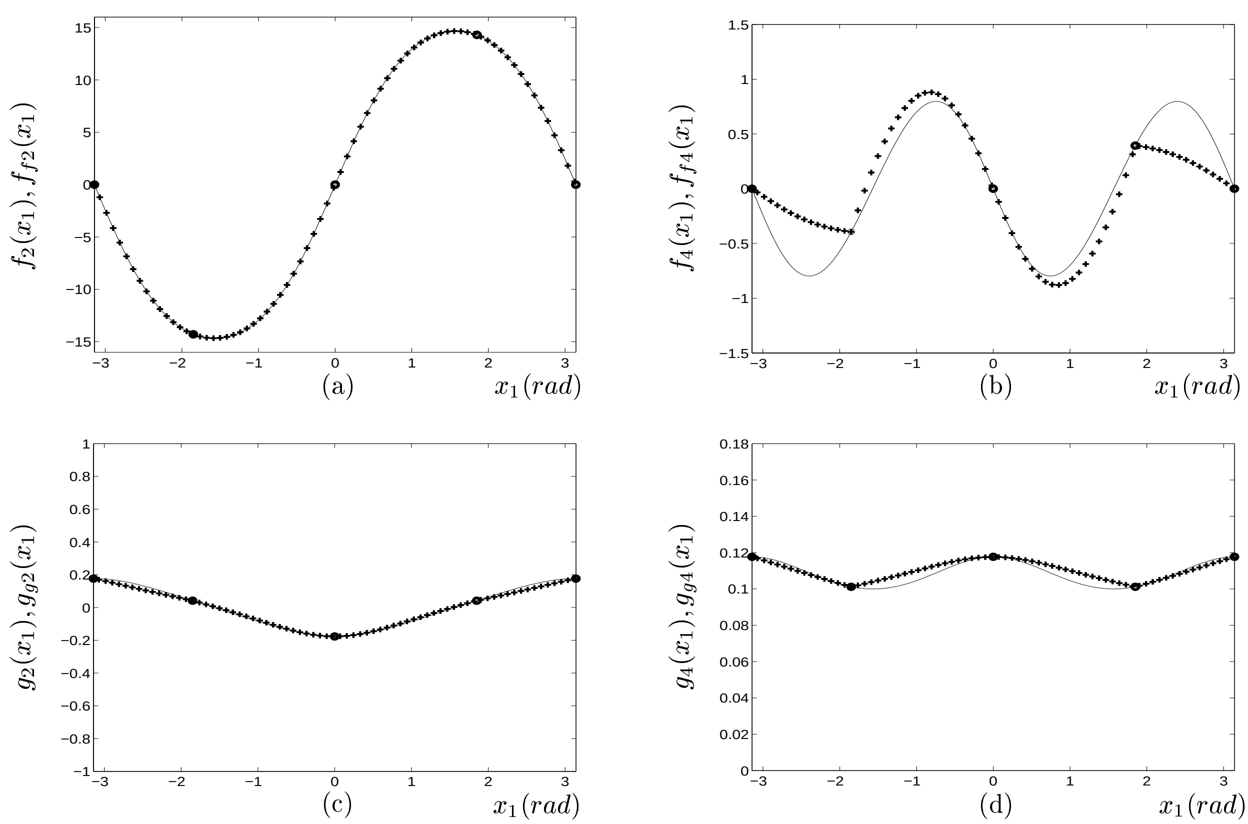

Figura 4.43: Aproximação *fuzzy*: solução por LMIs com três modelos locais para o intervalo $-\pi \leq x_1 \leq \pi\ rad$. (-) curvas do modelo de simulação, (+) aproximações com modelos *fuzzy*, ($\bullet$) representa os modelos locais .

O algoritmo será reinicializado a partir do Passo 6. A seguir serão apresentadas as evoluções das aproximações das funções não-lineares, dos erros de modelagem e das funções de pertinência. Para efeito de ilustração será apresentado o processo de aproximação a partir de dois modelos locais.

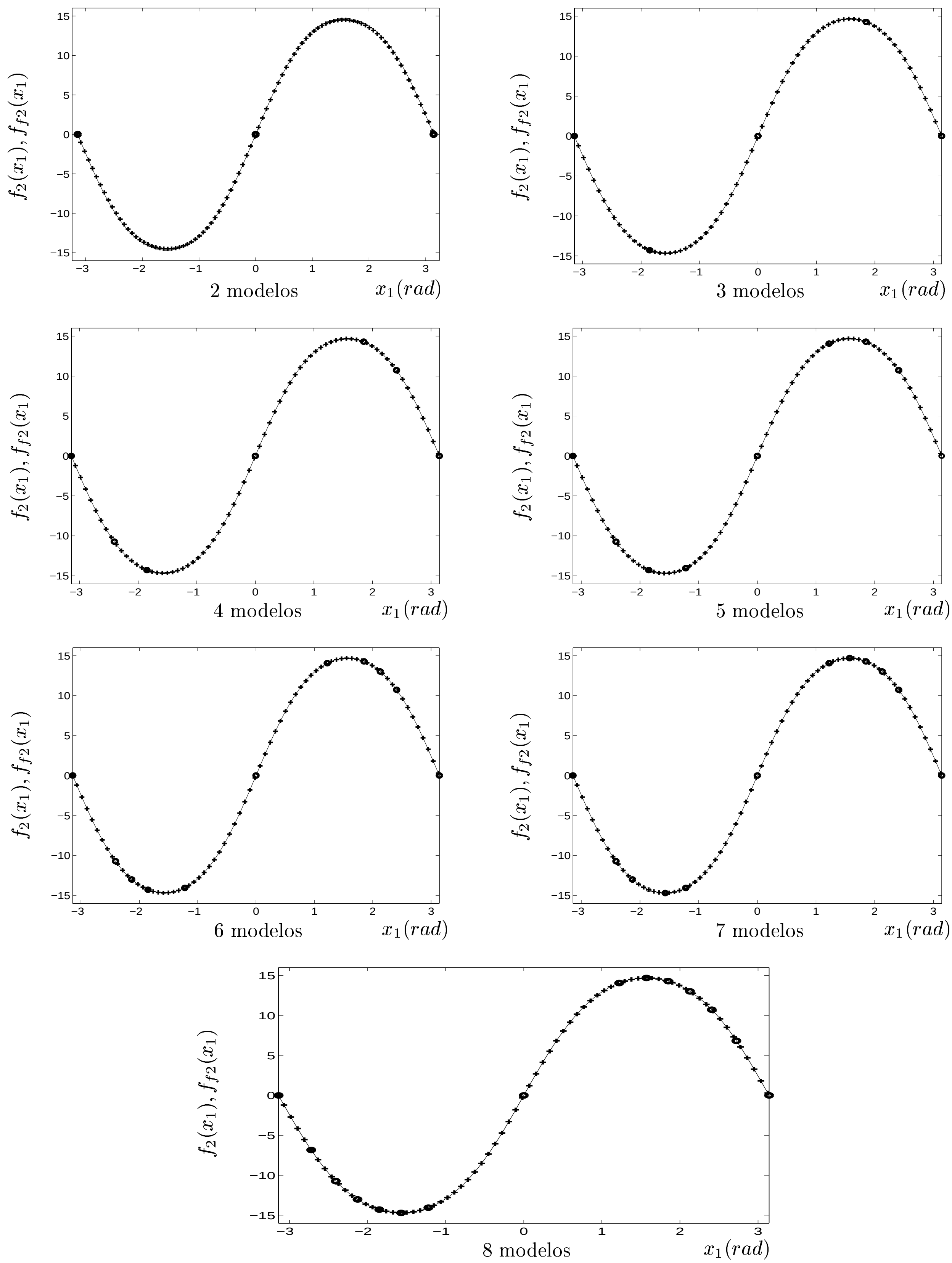

Figura 4.44: Aproximação *fuzzy* da curva $f_2(x_1)$: solução por LMIs para o intervalo $-\pi \leq x_1 \leq \pi$ *rad*. (-) curvas do modelo de simulação, (+) aproximações com modelos *fuzzy*, ($\bullet$) representa os modelos locais.

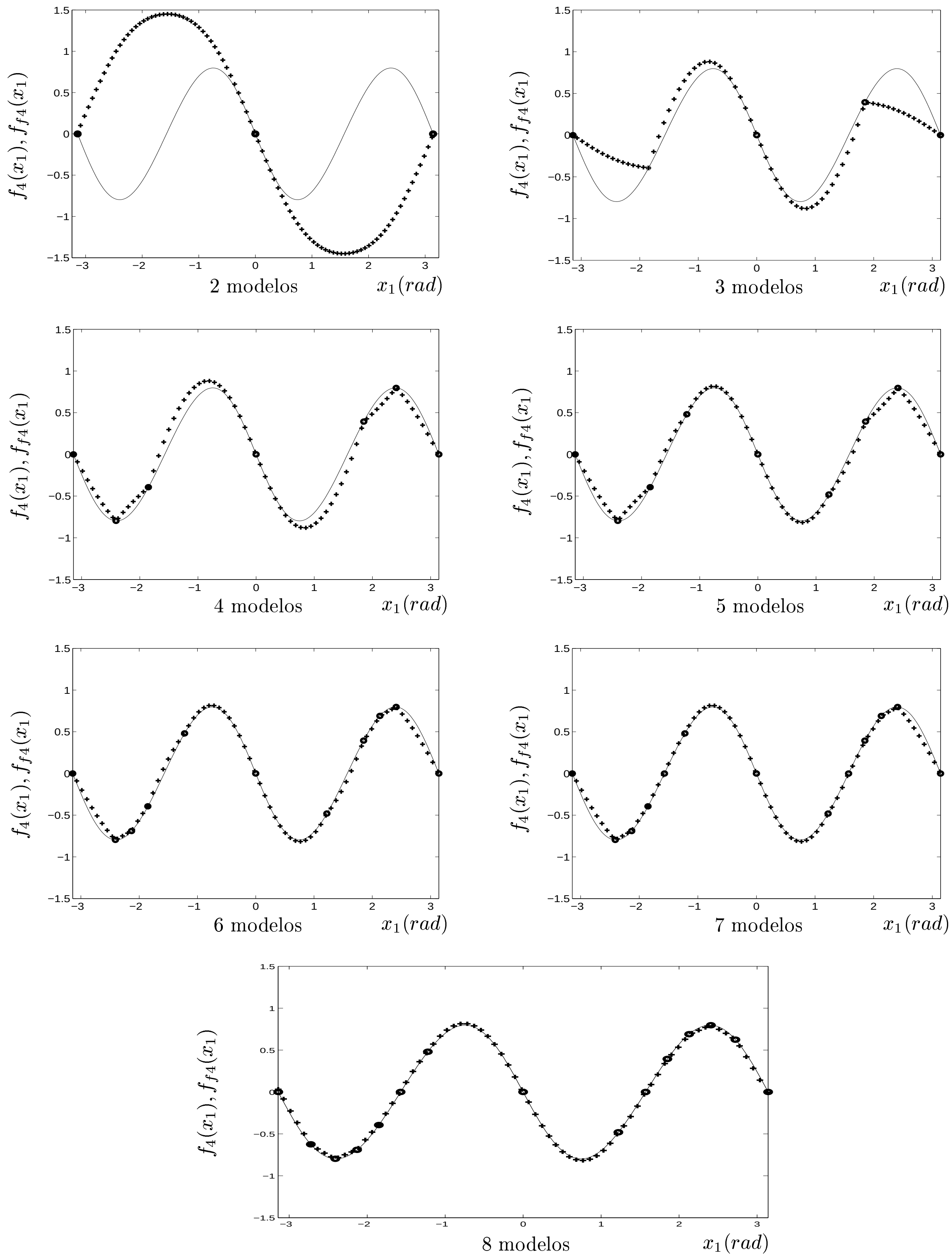

Figura 4.45: Aproximação *fuzzy* da curva $f_4(x_1)$: solução por LMIs para o intervalo $-\pi \leq x_1 \leq \pi$ *rad*. (-) curvas do modelo de simulação, (+) aproximações com modelos *fuzzy*, ($\bullet$) representa os modelos locais.

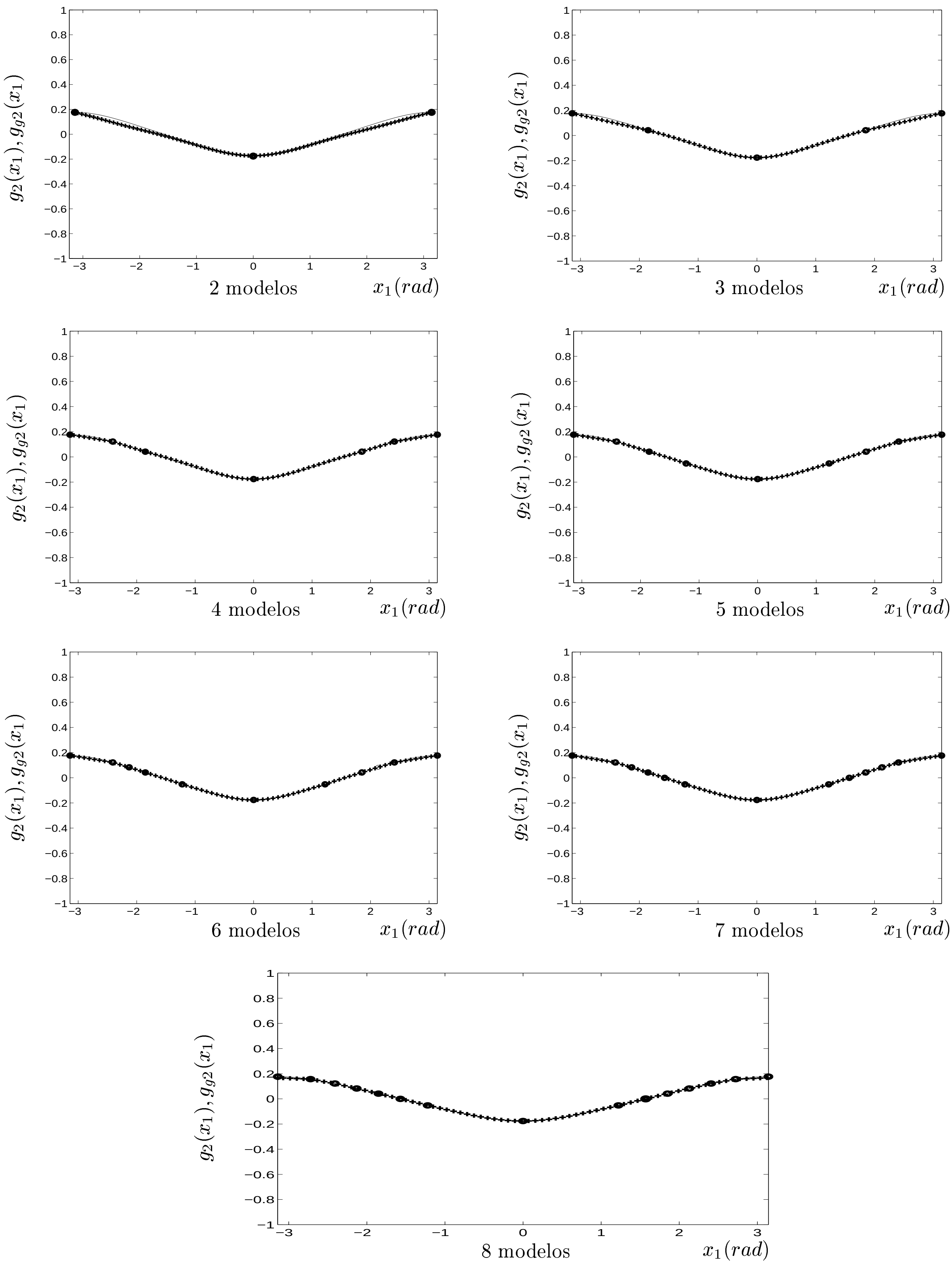

Figura 4.46: Aproximação *fuzzy* da curva $g_2(x_1)$: solução por LMIs para o intervalo $-\pi \leq x_1 \leq \pi$ *rad*. (-) curvas do modelo de simulação, (+) aproximações com modelos *fuzzy*, (•) representa os modelos locais.

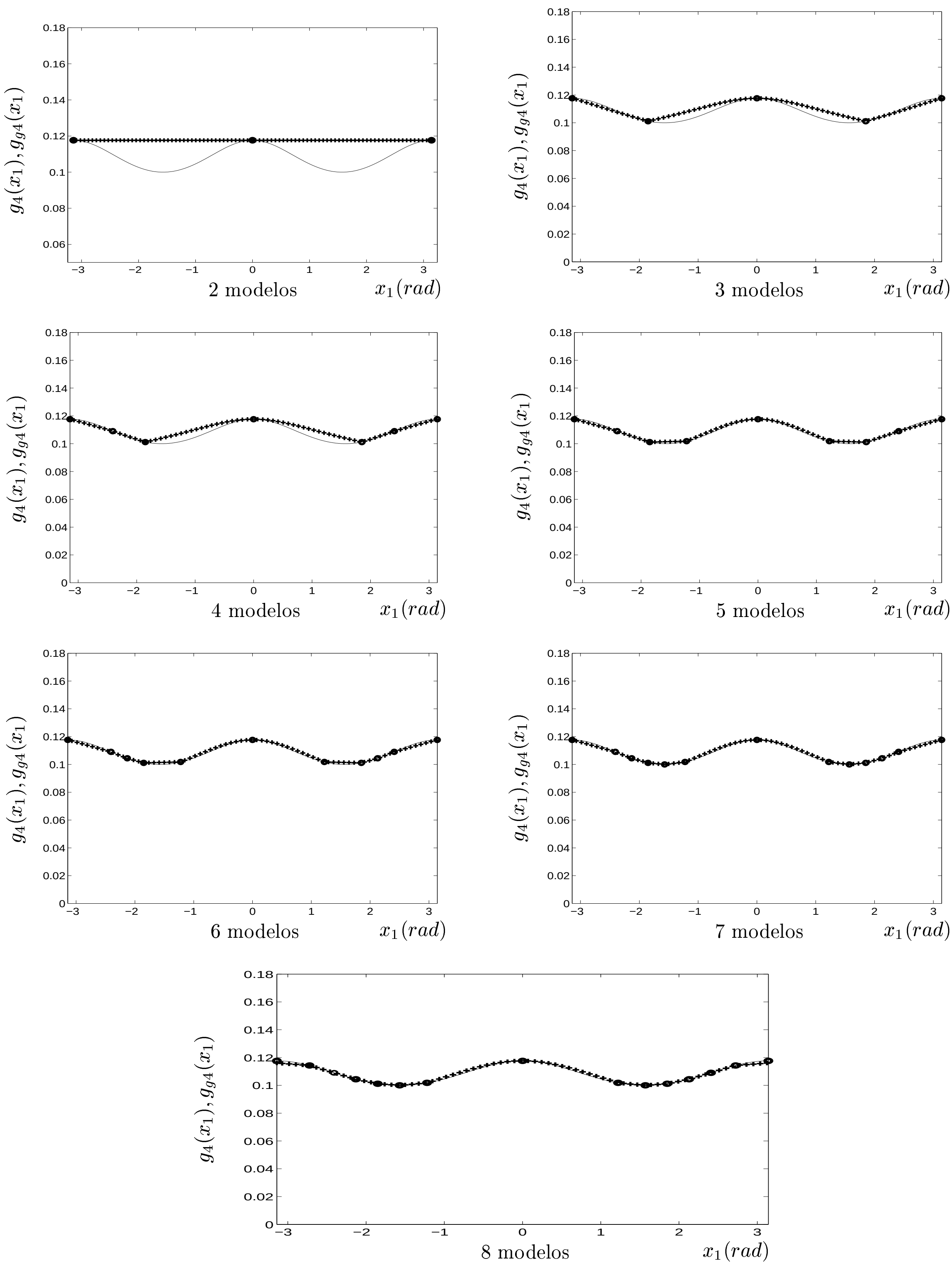

Figura 4.47: Aproximação *fuzzy* da curva $g_4(x_1)$: solução por LMIs para o intervalo $-\pi \leq x_1 \leq \pi$ *rad*. (-) curvas do modelo de simulação, (+) aproximações com modelos *fuzzy*, (•) representa os modelos locais.

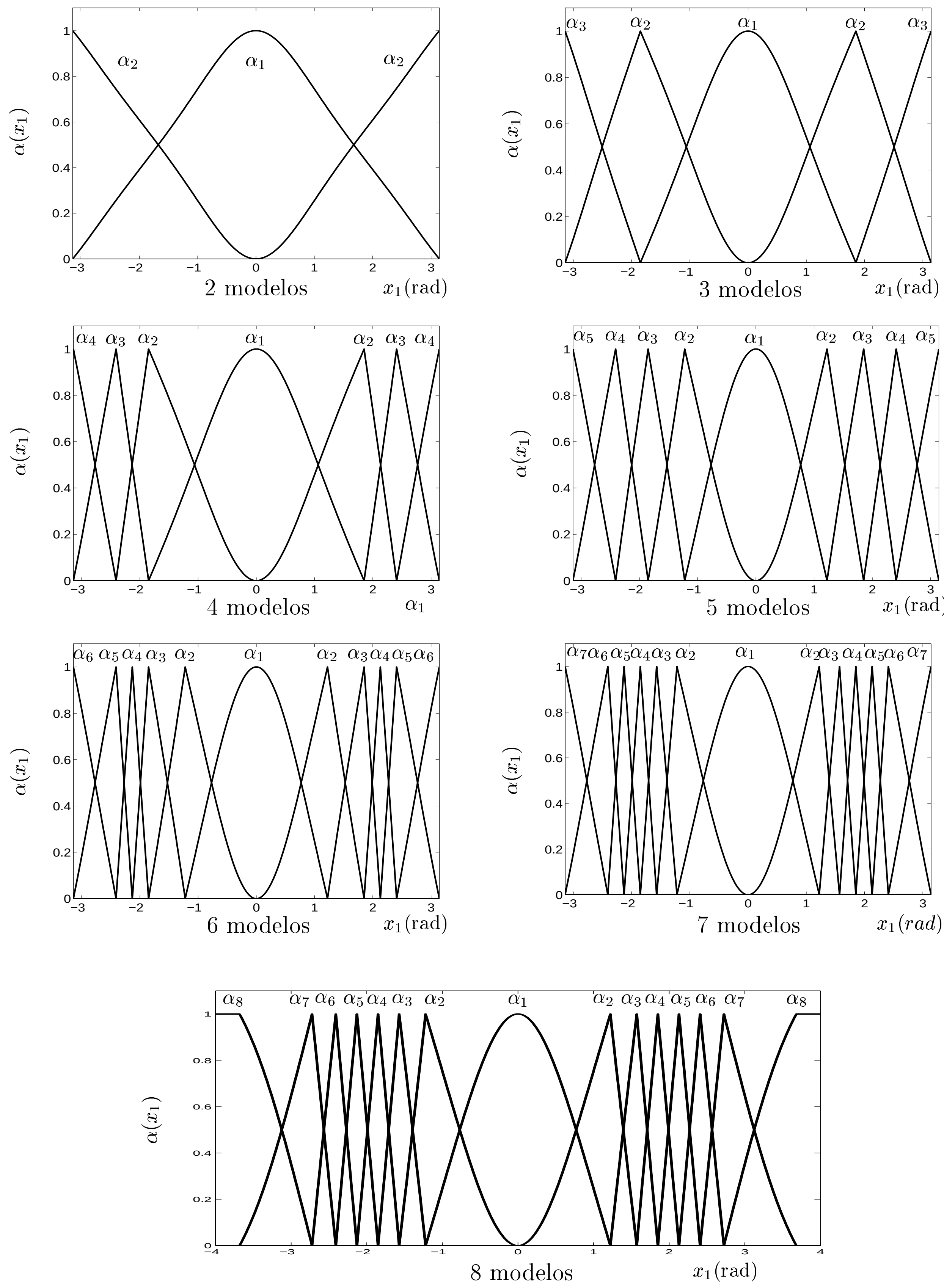

Figura 4.48: Funções de pertinência: solução por LMIs para o intervalo $-\pi \leq x_1 \leq \pi\ rad$.

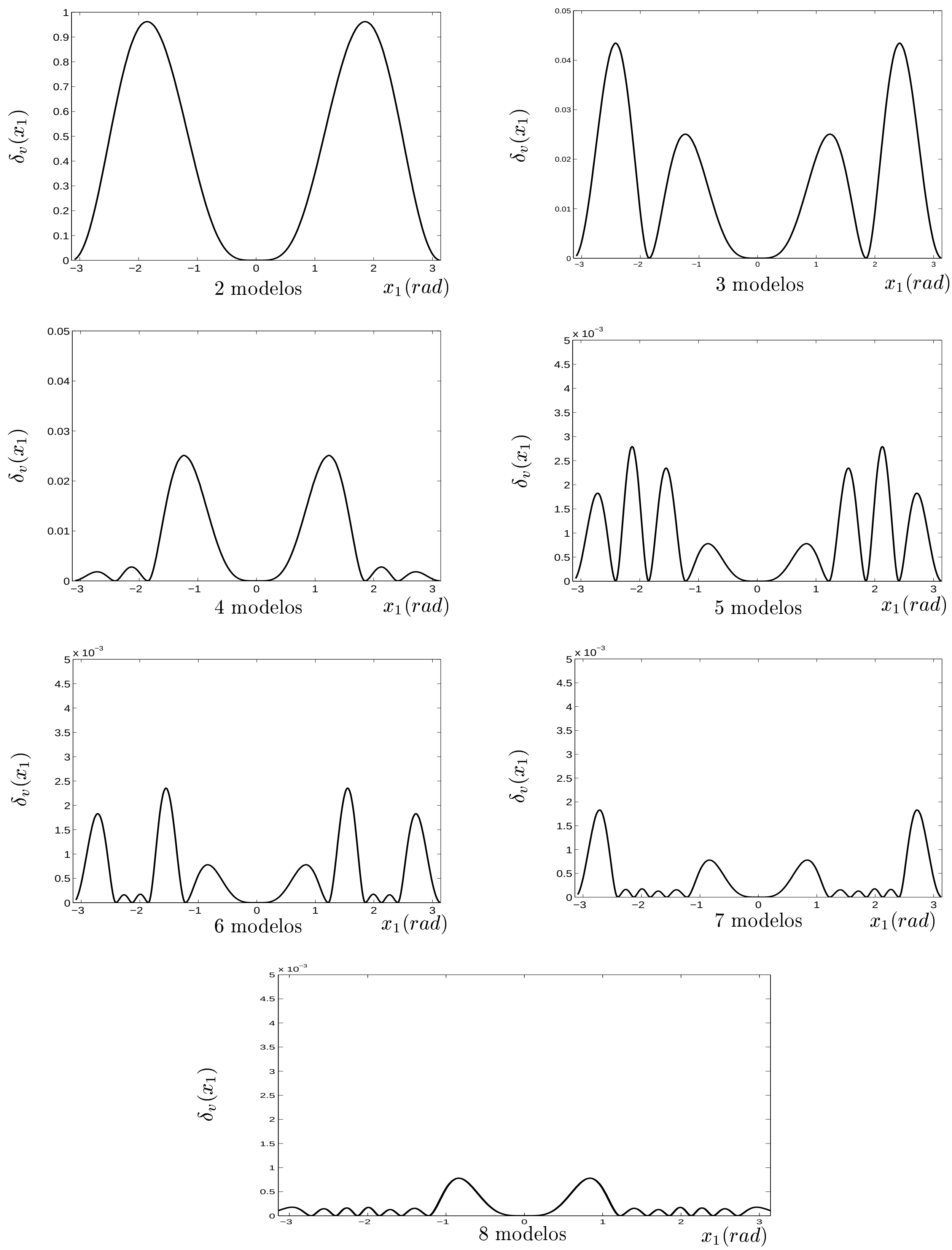

Figura 4.49: Erro de Modelagem para o intervalo $-\pi \leq x_1 \leq \pi$ rad. Erro máximo: $\delta_{vmax} = 0.001$.

Modelos Locais e Erros de Modelagem				
j	Pontos onde se localizam os modelos locais x_1 (rad)	$\mathbf{A}_j$	$\mathbf{B}_j$	Erro de modelagem δ_v com "j" modelos locais
1	0	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.00 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.00 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.1765 \\ 0 \\ 0.1176 \end{bmatrix}$	—
2	$\pi = 3.1416$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.00 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.00 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.1765 \\ 0 \\ 0.1176 \end{bmatrix}$	0.9618
3	$106\pi/180 = 1.8500$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7.7259 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.2129 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.0418 \\ 0 \\ 0.1012 \end{bmatrix}$	0.0433
4	$138\pi/180 = 2.0485$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4.4527 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.3309 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.1215 \\ 0 \\ 0.1090 \end{bmatrix}$	0.0250
5	$70\pi/180 = 1.2217$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 11.5084 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.3936 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.0522 \\ 0 \\ 0.1018 \end{bmatrix}$	0.0028
6	$122\pi/180 = 2.1293$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6.1121 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.3239 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.0829 \\ 0 \\ 0.1044 \end{bmatrix}$	0.0023
7	$90\pi/180 = 1.5708$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7.7259 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.2129 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.0418 \\ 0 \\ 0.1012 \end{bmatrix}$	0.0018
8	$156\pi/180 = 2.7227$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2.5102 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.2293 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.1566 \\ 0 \\ 0.1143 \end{bmatrix}$	0.0008

Tabela 4.1: Modelos Locais e Erros de Modelagem para o intervalo $-\pi \leq x_1 \leq \pi\ rad$.

A Figura 4.44 apresenta a evolução das aproximações $f_{f2}(x_1)$ da função não-linear $f_2(x_1)$ iniciando com dois modelos locais completando a aproximação com oito modelos locais.

A Figura 4.45 apresenta a evolução das aproximações $f_{f4}(x_1)$, da função não-linear $f_4(x_1)$.

A Figura 4.46 apresenta a evolução das aproximações $g_{g2}(x_1)$, da função não-linear $g_2(x_1)$.

A Figura 4.47 apresenta a evolução das aproximações $g_{g4}(x_1)$, da função não-linear $g_4(x_1)$.

A Figura 4.48 apresenta as funções de pertinência e a Figura 4.49 ilustra a evolução do erro de modelagem.

A Tabela 4.1 apresenta os modelos locais e os valores dos erros de modelagem máximos obtidos.

4.7 Discussões Complementares

Um método completo de modelagem de sistemas não-lineares a partir de aproximações com modelos *fuzzy* foi apresentado.

Primeiramente, um nova técnica para se obter as funções de pertinência foi definida. As funções são obtidas a partir de um problema de otimização que, a partir dos modelos locais, visa diminuir o erro de modelagem entre as funções não-lineares que representam o modelo de simulação e as funções de aproximação *fuzzy*. As duas soluções propostas para o problema de otimização apresentaram resultados satisfatórios na aproximação de um sistema de quarta ordem, com quatro funções não lineares.

A solução obtida por meio de LMIs é completa, simples e direta. Todas as funções de pertinência são calculadas ponto a ponto por meio do Matlab.

A solução analítica é parcial, pois não atende as restrições de desigualdade do problema de otimização. Entretanto, esta deficiência pode, muitas vezes, ser resolvida quando a aproximação é feita entre dois modelos locais apenas. Para modelagem de sistemas com mais de dois modelos locais, a solução encontrada foi dividir a região de operação em algumas sub-regiões e obter a solução para duas funções de pertinência em cada sub-região. Este artifício apresentou-se muito eficiente uma vez que os resultados obtidos no exemplo de aproximação das funções que representam a dinâmica de um pêndulo invertido foram semelhantes aos resultados obtidos com as LMIs.

O erro de modelagem foi definido e utilizado em um algoritmo para determinar a localização dos modelos. Determinar quantos e quais modelos locais utilizar na aproximação é sem dúvida uma das principais questões a serem resolvidas na modelagem com sistemas *fuzzy*. O algoritmo proposto indica apenas uma solução, que pode não ser a solução ótima, mas mostrou-se muito eficiente quando comparado com um método de aproximação exato proposto em Taniguchi et al. (2001). Para obter uma aproximação do pêndulo em uma pequena região de operação ($[-\pi/3, \pi/3]$ rad), no método proposto foram utilizados dois modelos locais. Para uma região de operação mais abrangente ($[-\pi, \pi]$ rad) foram utilizados oito modelos locais. Para o método de aproximação exata para qualquer uma das regiões são utilizados dezesseis modelos locais.

Embora o algoritmo tenha sido ilustrado para funções não-lineares dependentes de uma única variável ($x_f = x_1$), o método também se aplica para $\mathbf{x}_f \in \mathbb{R}^q$, $q > 1$.

4.8 Contribuições e Perspectivas

As principais contribuições deste capítulo são:

1. Desenvolvimento de uma nova técnica para se determinar as funções de pertinência.

2. Desenvolvimento de um algoritmo para determinar o número de modelos locais e suas localizações.

As principais perspectivas a partir dos resultados obtidos são:

1. Encontrar uma solução analítica completa para as funções propostas;

2. Desenvolver uma nova técnica para obter as funções de pertinência utilizando os novos modelos locais com novo grau de liberdade propostos no Capítulo 3.

3. Aplicar a técnica proposta para obter funções de pertinência quando os pontos $x_f \in \mathbb{R}^q$, $q > 1$.

No próximo capítulo serão propostos dois métodos de projeto de reguladores *fuzzy* que utilizam as funções de pertinência e o erro de modelagem obtidos neste Capítulo.

Capítulo 5

Projeto de Reguladores com Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno

5.1 Introdução

Definidos os modelos locais e as funções de pertinência, o próximo passo para o controle de sistemas não-lineares com modelos *fuzzy* consiste no projeto dos ganhos dos reguladores.

Em geral, os projetos dos reguladores são obtidos a partir de condições de estabilidade utilizando funções de Lyapunov e complementados por índices de desempenho como taxa de decaimento, restrição na entrada de controle e restrição na saída de controle dispostos em forma de LMIs.

Para abordar o projeto de reguladores, inicialmente será apresentado o método de projeto que utiliza a representação exata proposto em Taniguchi et al. (2001).

Em seguida serão propostos dois métodos para o projeto dos ganhos. O primeiro método considera um conjunto de pontos da região de operação. Para cada ponto deste conjunto são determinados os valores das funções de pertinência e das normas do erro de aproximação. Este método, embora pouco convencional, permite que se utilize todas as informações a respeito do sistema. Nenhuma informação é desprezada nos pontos considerados.

No segundo método as funções de pertinência participam de forma indireta do projeto dos ganhos do regulador. Como no primeiro método, defini-se um conjunto de pontos da região de operação e determinam-se as funções de pertinência e as normas dos erros de aproximação destes pontos. Em seguida especifica-se o ponto onde ocorreram os maiores erros de aproximação. Apenas as normas destes erros são consideradas no projeto do regulador. A análise deste projeto é mais próxima das análises encontradas na literatura.

Comparações de desempenho destes três métodos de projeto são feitas utilizando, como exemplo, o pêndulo invertido.

Utilizou-se o conceito de Compensação Distribuída Paralela (CPD) para projetar os reguladores *fuzzy* para estabilizar sistemas não-lineares descritos por modelos *fuzzy*. A idéia é projetar um compensador para cada regra do modelo *fuzzy*. Para cada regra, são utilizadas técnicas de projeto de controle linear. O regulador *fuzzy* global resultante, que é não-linear em geral, é uma combinação *fuzzy* de cada regulador linear individual. O regulador *fuzzy* projetado compartilha os mesmos conjuntos de regras com o modelo *fuzzy* nas partes premissas.

Para os modelos *fuzzy* (2.10), sendo $i = 1, 2, \ldots, r$, os reguladores *fuzzy* via CDP possuem a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} Regra\ i \quad : \quad & \text{SE } x_1(t) \text{ é } \mathcal{M}_1^i \text{ E } \ldots \text{ E } x_p(t) \text{ é } \mathcal{M}_p^i, \\ & \text{ENTÃO } \mathbf{u}(t) = -\mathbf{F}_i\mathbf{x}(t). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Portanto, de forma análoga à efetuada na obtenção de (2.11), o regulador *fuzzy* é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= -\frac{\sum_{i=1}^{r} w^i(\mathbf{x}(t))\mathbf{F}_i\mathbf{x}(t)}{\sum_{i=1}^{r} w^i(\mathbf{x}(t))} \\ &= -\sum_{i=1}^{r} \alpha_i(\mathbf{x}(t))\mathbf{F}_i\mathbf{x}(t) \\ &= -\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{x}(t). \end{aligned} \tag{5.2}$$

sendo $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \ldots, \alpha_r]^T$.

O objetivo do projeto do regulador *fuzzy* é determinar os ganhos de realimentação locais $\mathbf{F}_i$ nas partes conseqüentes. Para a lei de controle (5.2), a equação (2.11) é dada por (5.3) (Tanaka, Ikeda e Wang, 1998a), tendo em vista (2.13):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \alpha_i(\mathbf{x}(t))\alpha_j(\mathbf{x}(t))\{\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i\mathbf{F}_j\}\mathbf{x}(t) \\ &= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^2(\mathbf{x}(t))\mathbf{G}_{ii}\mathbf{x}(t) + 2\sum_{i<j}^{r} \alpha_i(\mathbf{x}(t))\alpha_j(\mathbf{x}(t)) \left\{ \frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right\} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \tag{5.3}$$

sendo que

$$\sum_{i<j}^{r} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{\substack{j=1 \\ (i<j)}}^{r} .$$

5.2 Índices de Desempenho para Reguladores Fuzzy

5.2.1 Condições para a Estabilidade

As condições suficientes para a estabilidade de sistemas *fuzzy* contínuos no tempo são obtidas usando funções de Lyapunov quadráticas do tipo $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t)$ (Tanaka e Sugeno, 1992), (Pietrobom, 1999), (Teixeira, Pietrobom e Assunção, 2000), (Kim e Lee, 2000), (Teixeira, Assunção e Avellar, 2003). Os resultados básicos estão descritos abaixo.

Lema 3 *O ponto de equilíbrio* $\mathbf{x} = 0$ *do sistema fuzzy contínuo descrito por (2.11) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum* $\mathbf{P}$ *tal que*

$$\mathbf{A}_i^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}_i < \mathbf{0}$$

para $i = 1, 2, \ldots, r$*; isto é, para todos os subsistemas.*

Prova: Segue diretamente da aplicação da função de Lyapunov $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t)$.

Para a apresentação dos resultados para a estabilidade do sistema forçado será utilizada a definição do número de regras ativas: o sistema *fuzzy* (5.3) possui "r" regras e para um certo $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$ o número de regras ativas é igual ao número de termos $\alpha_1(\mathbf{x}_0), \ldots, \alpha_r(\mathbf{x}_0)$ não nulos. Por exemplo, na Figura 5.1 as regras ativas para $x_1(t) \leq a$, $x_1(t) \in (a, b)$, $x_1(t) = b$, $x_1(t) \in (b, c)$, $x_1(t) = c$, $x_1(t) \in (c, d)$, $x_1(t) \geq d$ são respectivamente as regras 1, 1 e 2, 2, 2 e 3, 3, 3 e 4, 4. Assim o número de regras ativas é menor ou igual a dois.

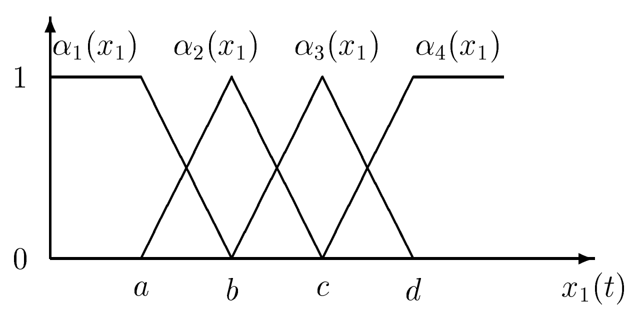

Figura 5.1: Exemplo de um conjunto de 4 regras *fuzzy*: $\alpha_1(x_1(t))$, $\alpha_2(x_1(t))$, $\alpha_3(x_1(t))$, $\alpha_4(x_1(t)) \in [0, 1]$ e $\alpha_1(x_1(t)) + \alpha_2(x_1(t)) + \alpha_3(x_1(t)) + \alpha_4(x_1(t)) = 1$.

Observe que na Figura 5.1, $\alpha_1(x_1(t))\alpha_3(x_1(t)) = \alpha_1(x_1(t))\alpha_4(x_1(t)) = \alpha_2(x_1(t))\alpha_4(x_1(t)) = 0, \ \forall \ x_1(t) \in \mathbb{R}$. A existência deste fato também foi explorada no estudo da estabilidade, como será visto nos Lemas 4 e 5.

Lema 4 *O ponto de equilíbrio* $\mathbf{x} = 0$ *do sistema de controle fuzzy contínuo descrito por (5.3) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum* $\mathbf{P}$ *tal que*

$$\mathbf{G}_{ii}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{G}_{ii} < \mathbf{0}$$

para todo $i = 1, \ldots, r$ *e*

$$\left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2}\right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2}\right) \leq \mathbf{0},$$

para todo $i, j = 1, \ldots, r$, $i < j$, *excetuando-se os pares* (i, j) *tais que* $\alpha_i(\mathbf{x}(t))\alpha_j(\mathbf{x}(t)) = 0$, $\forall\, \mathbf{x}(t)$.

Prova: Segue diretamente do Lema 3.

Essas condições para estabilidade, em geral, são conservadoras. Foram propostas em (Tanaka, Ikeda e Wang, 1998a) condições mais relaxadas que as condições descritas anteriormente.

Lema 5 *Assuma que o número de regras que estão ativas para todo* t *é menor ou igual a* s, *sendo* $1 < s \leq r$. *O ponto de equilíbrio* $\mathbf{x} = 0$ *do sistema de controle fuzzy contínuo descrito por (5.3) é assintoticamente estável globalmente se existe uma matriz simétrica positiva definida comum* $\mathbf{P}$ *e uma matriz simétrica semipositiva definida comum* $\mathbf{Q}$ *tais que*

$$\mathbf{G}_{ii}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{G}_{ii} + (s-1)\mathbf{Q} < \mathbf{0} \tag{5.4}$$

para todo $i = 1, \ldots, r$ *e*

$$\left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2}\right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2}\right) - \mathbf{Q} \leq \mathbf{0}, \tag{5.5}$$

para todo $i, j = 1, \ldots, r$, $i < j$, *excetuando-se os pares* (i, j) *tais que* $\alpha_i(\mathbf{x}(t))\alpha_j(\mathbf{x}(t)) = 0$, $\forall\, \mathbf{x}(t)$.

Prova: Veja (Tanaka, Ikeda e Wang, 1998a).

Observe que as condições do Lema 5 são iguais às condições do Lema 4, adicionando-se a matriz $\mathbf{Q} \geq 0$. Note que (5.5) foi relaxada com relação à respectiva condição no Lema 4.

As condições para a estabilidade descritas nos Lemas 4 e 5 foram flexibilizadas em (Pietrobom, 1999), (Teixeira, Pietrobom e Assunção, 2000), (Kim e Lee, 2000), (Teixeira, Assunção e Avellar, 2003).

5.2.2 Taxa de Decaimento

É importante considerar não apenas a estabilidade, mas também outros índices de desempenho do sistema controlado tais como a velocidade de resposta e restrições de entrada e saída. A velocidade de resposta está relacionada com a taxa de decaimento β, isto é, o maior expoente de Lyapunov.

Considere uma candidata da função de Lyapunov $\mathrm{V}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}\mathbf{x}$ e que $\dot{\mathrm{V}}(\mathbf{x}(t)) < 0$, para todo $\mathbf{x} \neq 0$. A taxa de decaimento β, $\beta > 0$, é obtida se a condição $\dot{\mathrm{V}}(\mathbf{x}(t)) \leq -2\beta\mathrm{V}(\mathbf{x}(\mathbf{t}))$ (Tanaka, Ikeda e Wang, 1998a) é satisfeita para toda a trajetória.

5.2.3 Restrição na Entrada

Assuma que a condição inicial $\mathbf{x}(0)$ é conhecida e $\mathbf{u}(t)$ descrito em (5.2).

A restrição $\| \mathbf{u}(t) \|_2 \leq \mu$ é imposta para todo tempo $t \geq 0$ se as LMIs

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}(0)^T \\ \mathbf{x}(0) & \mathbf{X} \end{bmatrix} \geq 0 \tag{5.6}$$

e

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{M}_i^T \\ \mathbf{M}_i & \mu^2\mathbf{I} \end{bmatrix} \geq 0 \tag{5.7}$$

são satisfeitas (veja (Boyd et al., 1994) e (Tanaka, Ikeda e Wang, 1998a)), sendo $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$ e $\mathbf{M}_i = \mathbf{F}_i\mathbf{X}$.

5.2.4 Restrição na Saída

Assuma que a condição inicial $\mathbf{x}(0)$ é conhecida e defina $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_i\mathbf{x}(t)$.

A restrição $\| \mathbf{y}(t) \|_2 \leq \lambda$ é imposta para todo tempo $t \geq 0$ se as LMIs

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}(0)^T \\ \mathbf{x}(0) & \mathbf{X} \end{bmatrix} \geq 0 \tag{5.8}$$

e

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X}\mathbf{C}_i^T \\ \mathbf{C}_i\mathbf{X} & \lambda^2\mathbf{I} \end{bmatrix} \geq 0 \tag{5.9}$$

são satisfeitas (veja (Boyd et al., 1994) e (Tanaka, Ikeda e Wang, 1998a)), sendo $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$.

5.3 Projeto de Reguladores com a Forma Generalizada

Nesta seção será apresentado o método de projeto do controlador robusto *fuzzy* proposto em Taniguchi et al. (2001). Este controlador *fuzzy* foi projetado de forma a compensar a incerteza do modelo obtido com o erro de modelagem gerado na redução de regras, veja a Seção 4.2.1.

A equação (5.10) introduz o modelo reduzido com incertezas de modelo $\delta^A_{i_0 j_0}(t)$ e $\delta^B_{i_0 k_0}(t)$:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ (i,j)\neq(i_0,j_0)}}^{n} \sum_{\ell^a_{(i,j)}=1}^{2} \sigma_{ij\ell^a_{(i,j)}}(\mathbf{x}(t)) a_{ij\ell^a_{(i,j)}} \mathbf{U}^A_{ij}\mathbf{x}(t) \\ &\quad +(a_{i_0 j_0} + \delta^A_{i0j0})\mathbf{U}^A_{i0j0}\mathbf{x}(t) \\ &\quad +\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ (i,k)\neq(i_0,k_0)}}^{m} \sum_{\ell^b_{(i,k)}=1}^{2} \xi_{ik\ell^b_{(i,k)}}(\mathbf{x}(t)) b_{ik\ell^b_{(i,k)}} \mathbf{U}^B_{ik}\mathbf{u}(t) \\ &\quad +(b_{i_0 k_0} + \delta^B_{i0k0})\mathbf{U}^B_{i0k0}\mathbf{u}(t).\end{aligned} \tag{5.10}$$

$$||\delta^A_{i0j0}(t)|| \leq \frac{a_{ij1} - a_{ij2}}{2}, \tag{5.11}$$

$$||\delta^B_{i0k0}(t)|| \leq \frac{b_{ik1} - b_{ik2}}{2}. \tag{5.12}$$

Portanto, o modelo *fuzzy* para a forma generalizada (5.10) pode ser escrito como

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(x(t))(\mathbf{A}_i + \mathbf{D}_{ai}(t)\Delta_{ai}(t)\mathbf{E}_{ai})\mathbf{x}(t) + (\mathbf{B}_i + \mathbf{D}_{bi}(t)\Delta_{bi}(t)\mathbf{E}_{bi})\mathbf{u}(t), \tag{5.13}$$

sendo $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{nxn}$, $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^{nxm}$, $\mathbf{D}_{ai} \in \mathbb{R}^{nx1}$, $\mathbf{D}_{bi} \in \mathbb{R}^{nx1}$, $\mathbf{E}_{ai} \in \mathbb{R}^{1xn}$ e $\mathbf{E}_{bi} \in \mathbb{R}^{1xm}$.

Em (5.13), $\Delta_{ai}(t)$ e $\Delta_{bi}(t)$ são elementos que representam as incertezas, sendo

$$\begin{aligned}\Delta_{ai}(t) &= \delta^A_{i0j0}(t), \\ \Delta_{bi}(t) &= \delta^B_{i0k0}(t).\end{aligned}$$

$\mathbf{D}_{ap}$, $\mathbf{D}_{bp}$, $\mathbf{E}_{ap}$ e $\mathbf{E}_{bp}$ são matrizes conhecidas dadas por:

$$\mathbf{D}_{ai} = i_0 \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D}_{bi} = i_0 \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{E}^T_{ai} = j_0 \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{E}^T_{bi} = k_0 \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Taxa de Decaimento e Condições de Estabilidade Robusta

A taxa de decaimento β_t será utilizada como critério para selecionar uma das candidatas à redução do modelo *fuzzy*. As reduções são feitas com todos os elementos não-lineares do sistema.

A redução que proporcionar a maior taxa de decaimento no controle será efetivamente utilizada.

Considere o sistema *fuzzy* com elementos de incertezas $\Delta_{ai}(t)$ e $\Delta_{bi}(t)$ definidos em (5.13) sendo

$$||\Delta_{ai}(t)|| \leq \frac{1}{\rho_{ai}}, \tag{5.14}$$

$$||\Delta_{bi}(t)|| \leq \frac{1}{\rho_{bi}}. \tag{5.15}$$

Os termos ρ_{ai} e ρ_{bi} são os limites superiores de $||\Delta_{ai}(t)||$ e $||\Delta_{bi}(t)||$ e são selecionados considerando o limite superior de (5.11) e (5.12).

Para estabilizar o sistema *fuzzy* foi empregado o controlador CDP

$$\mathbf{u}(t) = -\sum_{i=1}^{r} h_i(\mathbf{x}(t))\mathbf{F}_i\mathbf{x}(t) = -\mathbf{F}(\boldsymbol{h})\mathbf{x}. \tag{5.16}$$

A partir da função candidata à função de Lyapunov $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T\mathbf{P}(\mathbf{x}(t))$ obtêm-se o método de projeto. O Teorema 1 fornece as condições de estabilidade para o projeto do controlador com taxa de decaimento para (5.13).

Teorema 1 *O controlador CDP que considera simultaneamente a taxa de decaimento e projeto do controlador robusto pode ser projetado resolvendo as seguintes LMIs:*

$$\begin{aligned} & \underset{X, M_1, \ldots, M_r, Y_0}{\textit{maximizar}} \ \beta_t \\ & \textit{sujeito a} \\ & \qquad X > 0, \quad Y_0 \geq 0, \\ & \qquad \hat{\mathbf{S}}_{ii} + (s-1)\mathbf{Y}_1 < 0, \\ & \qquad \hat{\mathbf{T}}_{ij} - 2\mathbf{Y}_2 < 0, \qquad i < j \quad \textit{tal que } h_i \cap h_j \neq \emptyset \end{aligned} \tag{5.17}$$

sendo $s > 1$ e

$$\pounds(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, X, \mathbf{M}_j) = \mathbf{X}\mathbf{A}_i^T + \mathbf{A}_i\mathbf{X} - \mathbf{B}_i\mathbf{M}_j - \mathbf{M}_j^T\mathbf{B}_i^T,$$

$$\pounds(\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j, X, \mathbf{M}_i) = \mathbf{X}\mathbf{A}_j^T + \mathbf{A}_j\mathbf{X} - \mathbf{B}_j\mathbf{M}_i - \mathbf{M}_i^T\mathbf{B}_j^T,$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{ii} = \begin{bmatrix} \pounds(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{X}, \mathbf{M}_i) + 2\beta_t\mathbf{X} & * & * & * & * \\ \mathbf{D}_{ai}^T & -\mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{D}_{bi}^T & 0 & -\mathbf{I} & 0 & 0 \\ \mathbf{E}_{ai}\mathbf{X} & 0 & 0 & -\rho_{ai}^2\mathbf{I} & 0 \\ -\mathbf{E}_{bi}\mathbf{M}_i & 0 & 0 & 0 & -\rho_{bi}^2\mathbf{I} \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{T}}_{ij} = \begin{bmatrix} \begin{array}{c}(\pounds(\mathbf{A}_i,\mathbf{B}_i,\mathbf{X},\mathbf{M}_j)\\ +\pounds(\mathbf{A}_j,\mathbf{B}_j,\mathbf{X},\mathbf{M}_i)+4\beta_t\mathbf{X})\end{array} & * & * & * & * & * & * & * & * \\ \mathbf{D}_{ai}^T & -\mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{D}_{bi}^T & 0 & -\mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{D}_{aj}^T & 0 & 0 & -\mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{D}_{bj}^T & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{E}_{ai}\mathbf{X} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho_{ai}^2\mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{E}_{bi}\mathbf{M}_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho_{bi}^2\mathbf{I} & 0 & 0 \\ \mathbf{E}_{aj}\mathbf{X} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho_{aj}^2\mathbf{I} & 0 \\ -\mathbf{E}_{bj}\mathbf{M}_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho_{bj}^2\mathbf{I} \end{bmatrix},$$

$$\begin{array}{l} \mathbf{Y}_1 = bloco - diag(\ \mathbf{Y}_0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\ ), \\ \mathbf{Y}_2 = bloco - diag(\ \mathbf{Y}_0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\ ). \end{array}$$

sendo $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$, $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{XQX}$ e $\mathbf{M}_i = \mathbf{F}_i\mathbf{X}$ e

$$\left(\frac{\mathbf{G}_{ij}+\mathbf{G}_{ji}}{2}\right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{G}_{ij}+\mathbf{G}_{ji}}{2}\right) + 2\alpha\mathbf{P} \leq \mathbf{Q}. \tag{5.18}$$

Prova: Veja Taniguchi et al. (2001).

Exemplo 13

Considere o problema do equilíbrio e balanço de um pêndulo invertido sobre um carro. As equações dinâmicas são descritas em (3.18).

Deseja-se projetar os ganhos do regulador *fuzzy* para a região de operação $-60\pi/180 \leq x_1 \leq 60\pi/180\ rad$.

Para a representação exata do sistema com modelos *fuzzy* TS do sistema descrito em (3.18) são necessários dezesseis modelos locais que são determinados utilizando (3.2), (3.21) e (3.22) e são definidos por (3.23), (3.24) (3.25) e (3.26).

As funções de pertinência são ilustradas na Figura 4.1, na qual verifica-se que $h_i \cap h_j \neq \emptyset$, para $i = 1, 2, ...16$ e $j = 1, 2, ...16$.

Para o caso de controle sem redução de regras, as equações do Teorema 1 podem se simplificadas para:

$$\begin{array}{l} \underset{X, M_1, \ldots, M_r, Y_0}{maximizar\ \ \beta_t} \\ \text{sujeito a} \\ \qquad X > 0, \quad Y_0 \leq 0, \\ \qquad \hat{\mathbf{S}}_{ii} + (s-1)\mathbf{Y}_1 < 0, \\ \qquad \hat{\mathbf{T}}_{ij} - 2\mathbf{Y}_2 < 0, \qquad i < j \quad tal\ que\ \ h_i \cap h_j \neq \emptyset \end{array} \tag{5.19}$$

sendo $s > 1$ e

$$\begin{array}{l}
\pounds(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, X, \mathbf{M}_j) = \mathbf{X}\mathbf{A}_i^T + \mathbf{A}_i\mathbf{X} - \mathbf{B}_i\mathbf{M}_j - \mathbf{M}_j^T\mathbf{B}_i^T,\\
\pounds(\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j, X, \mathbf{M}_i) = \mathbf{X}\mathbf{A}_j^T + \mathbf{A}_j\mathbf{X} - \mathbf{B}_j\mathbf{M}_i - \mathbf{M}_i^T\mathbf{B}_j^T,\\
\hat{\mathbf{S}}_{ii} = \pounds(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{X}, \mathbf{M}_i) + 2\beta_t\mathbf{X},\\
\hat{\mathbf{T}}_{ij} = \pounds(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{X}, \mathbf{M}_j) + \pounds(\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j, \mathbf{X}, \mathbf{M}_i) + 4\beta_t\mathbf{X},\\
\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_0,\\
\mathbf{Y}_2 = \mathbf{Y}_0.
\end{array}$$

Os problemas de estabilidade com taxa de decaimento, restrição na entrada e na saída de controle são definidos a seguir.

a) Estabilidade + Taxa de Decaimento

Maximize β_t *e encontre as matrizes simétricas* $\mathbf{X}$*,* $\mathbf{Y}_0$ *e matrizes* $\mathbf{M}_j$*,* $j = 1, \ldots, 16$ *sujeito a (5.19) e* $\mathbf{x}(0) = [0.96\ 0\ 0\ 0]^T$.

Quando $\beta_t = 0.5 = \beta_{tmax}$, obtêm-se pelo MATLAB as matrizes $\mathbf{X}$ e $\mathbf{M}_j$, $j = 1, \ldots, 16$ que solucionam as LMIs acima. Foram obtidos os seguintes resultados:

$$\begin{array}{lcl}
\mathbf{F}_1 & = & \mathbf{M}_1\mathbf{X}^{-1} = 10^5 * [\ -1.6454\ \ -0.4331\ \ -0.1317\ \ -0.2704\ ],\\
\mathbf{F}_2 & = & \mathbf{M}_2\mathbf{X}^{-1} = 10^5 * [\ -2.1277\ \ -0.5602\ \ -0.1704\ \ -0.3498\ ],\\
\mathbf{F}_3 & = & \mathbf{M}_3\mathbf{X}^{-1} = 10^5 * [\ -1.7529\ \ -0.4614\ \ -0.1404\ \ -0.2881\ ],\\
\mathbf{F}_4 & = & \mathbf{M}_4\mathbf{X}^{-1} = 10^5 * [\ -2.2070\ \ -0.5811\ \ -0.1768\ \ -0.3628\ ],\\
\mathbf{F}_5 & = & \mathbf{M}_5\mathbf{X}^{-1} = 10^5 * [\ -1.2371\ \ -0.3256\ \ -0.0990\ \ -0.2033\ ],\\
\mathbf{F}_6 & = & \mathbf{M}_6\mathbf{X}^{-1} = 10^5 * [\ -1.5538\ \ -0.4091\ \ -0.1245\ \ -0.2555\ ],\\
\mathbf{F}_7 & = & \mathbf{M}_7\mathbf{X}^{-1} = 10^5 * [\ -1.3308\ \ -0.3503\ \ -0.1066\ \ -0.2187\ ],\\
\mathbf{F}_8 & = & \mathbf{M}_8\mathbf{X}^{-1} = 10^5 * [\ -1.6411\ \ -0.4321\ \ -0.1315\ \ -0.2698\ ],\\
\mathbf{F}_9 & = & \mathbf{M}_9\mathbf{X}^{-1} = 10^5 * [\ -1.8721\ \ -0.4928\ \ -0.1499\ \ -0.3077\ ],\\
\mathbf{F}_{10} & = & \mathbf{M}_{10}\mathbf{X}^{-1} = 10^5 * [\ -2.2911\ \ -0.6032\ \ -0.1835\ \ -0.3767\ ],\\
\mathbf{F}_{11} & = & \mathbf{M}_{11}\mathbf{X}^{-1} = 10^5 * [\ -1.9657\ \ -0.5174\ \ -0.1574\ \ -0.3231\ ],\\
\mathbf{F}_{12} & = & \mathbf{M}_{12}\mathbf{X}^{-1} = 10^5 * [\ -2.3724\ \ -0.6246\ \ -0.1900\ \ -0.3900\ ],\\
\mathbf{F}_{13} & = & \mathbf{M}_{13}\mathbf{X}^{-1} = 10^5 * [\ -1.3485\ \ -0.3549\ \ -0.1080\ \ -0.2216\ ],\\
\mathbf{F}_{14} & = & \mathbf{M}_{14}\mathbf{X}^{-1} = 10^5 * [\ -1.6569\ \ -0.4363\ \ -0.1327\ \ -0.2724\ ],\\
\mathbf{F}_{15} & = & \mathbf{M}_{15}\mathbf{X}^{-1} = 10^5 * [\ -1.4415\ \ -0.3794\ \ -0.1154\ \ -0.2369\ ],\\
\mathbf{F}_{16} & = & \mathbf{M}_{16}\mathbf{X}^{-1} = 10^5 * [\ -1.7337\ \ -0.4565\ \ -0.1389\ \ -0.2851\ ].
\end{array}$$

$$\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{P} = 10^7 \begin{bmatrix} 1.4668 & 0.3863 & 0.1176 & 0.2414 \\ 0.3863 & 0.1018 & 0.0310 & 0.0636 \\ 0.1176 & 0.0310 & 0.0095 & 0.0194 \\ 0.2414 & 0.0636 & 0.0194 & 0.0398 \end{bmatrix} \geq 0.$$

Para ilustrar a validade da lei de controle projetada, que visou à estabilidade e à taxa de decaimento, foi feita a simulação do sistema original (3.18) com a lei de controle (5.2), para

$r = 16$, empregando $\mathbf{F}_j$, $j = 1, \ldots, 16$. A Figura 5.2 mostra as respostas de $x_1(t)$, $x_3(t)$ e $u(t)$. Pode ser verificado que $max||u(t)||_2 = 206897$ (N).

Na prática existe uma limitação da entrada da entrada de controle e na saída de controle. Portanto, no projeto, é importante considerar não somente a taxa de decaimento, mas também a restrição na entrada e na saída de controle.

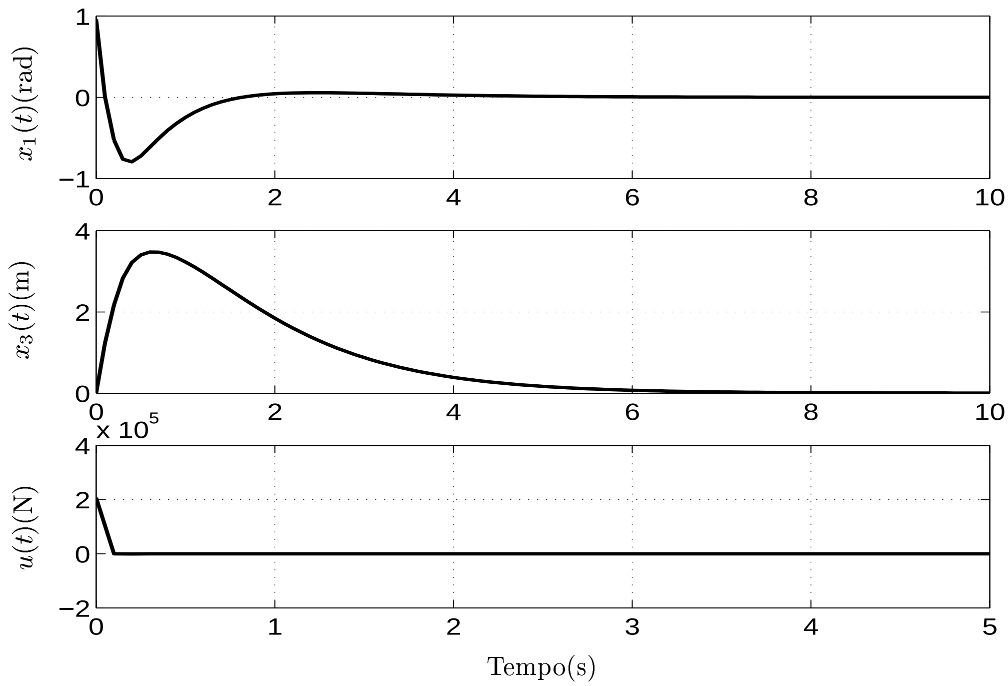

Figura 5.2: Forma Generalizada. Respostas de $x_1(t)$, $x_3(t)$, e $u(t)$ com dezesseis modelos locais para condição inicial $\mathbf{x}(0) = [0.96\ 0\ 0\ 0]^T$, intervalo $-60\pi/180 \leq x_1 \leq 60\pi/180$ rad e considerando-se a taxa de decaimento máxima.

b) Estabilidade + Taxa de Decaimento + Restrição na Entrada de Controle + Restrição na saída de Controle

Maximize β_t *e encontre as matrizes simétricas* $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}_0$ *e matrizes* $\mathbf{M}_j$, $j = 1, \ldots, 16$, *sujeito a (5.19), (5.6), (5.7), (5.8), (5.9), com* $\mu = 380$, $\lambda = 20$, $\mathbf{C}_j = [0\ 0\ 1\ 0]$, $j = 1, \ldots, 16$ *e* $\mathbf{x}(0) = [0.96\ 0\ 0\ 0]^T$.

Note que 0.96 rad corresponde a 55^0. Este valor para condição inicial foi escolhido porque o método de representação exata opera dentro de um intervalo específico onde são definidos os modelos locais.

Quando $\beta_t = 0.02 = \beta_{tmax}$, obtém-se pelo MATLAB as matrizes $\mathbf{X}$ e $\mathbf{M}_j$, $j = 1, \ldots, 16$ que solucionam as LMIs acima. Foram obtidos os seguintes resultados:

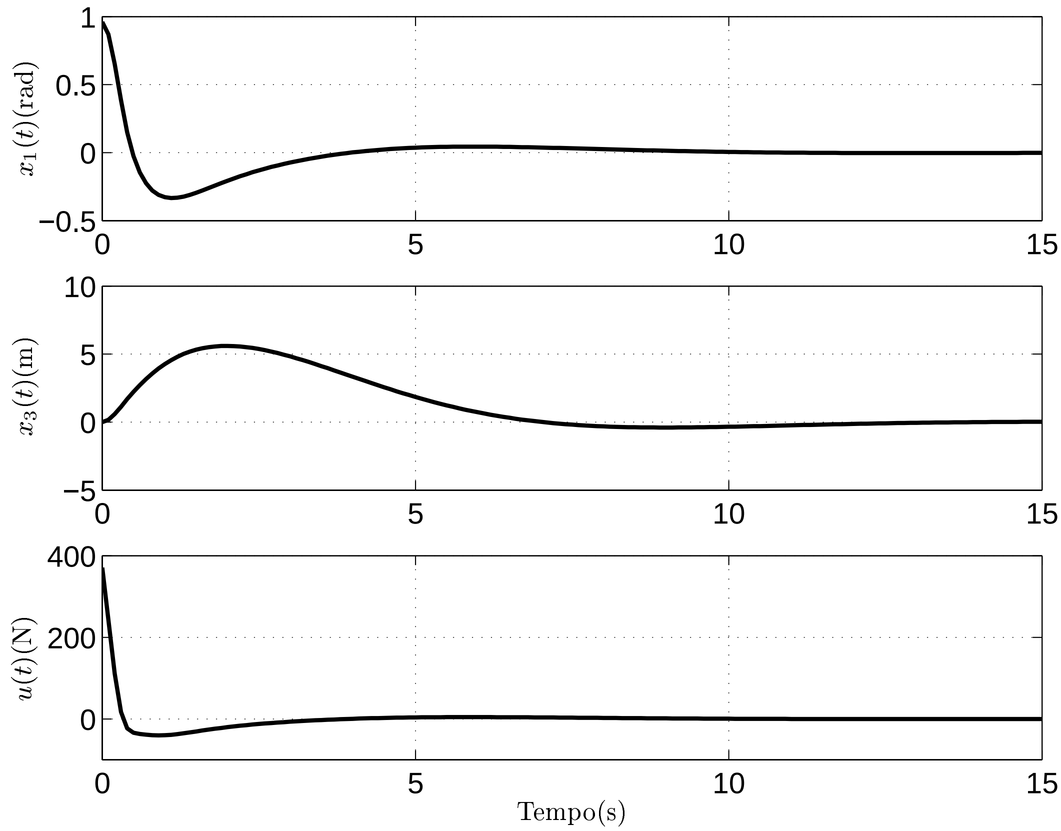

Figura 5.3: Forma Generalizada. Respostas de $x_1(t)$, $x_3(t)$, e $u(t)$ com dezesseis modelos locais para condição inicial $\mathbf{x}(0) = [0.96\ 0\ 0\ 0]^T$; intervalo $-60\pi/180 \leq x_1 \leq 60\pi/180\ rad$ e considerando-se $\mu = 380$ e $\lambda = 20$.

$$
\begin{array}{lclllll}
\mathbf{F}_1 & = & \mathbf{M}_1\mathbf{X}^{-1} = & [\ -424.3823 & -106.4767 & -8.2149 & -29.7576\ ], \\
\mathbf{F}_2 & = & \mathbf{M}_2\mathbf{X}^{-1} = & [\ -395.1769 & -107.3829 & -8.7107 & -28.4545\ ], \\
\mathbf{F}_3 & = & \mathbf{M}_3\mathbf{X}^{-1} = & [\ -424.1494 & -106.3069 & -8.1895 & -29.7638\ ], \\
\mathbf{F}_4 & = & \mathbf{M}_4\mathbf{X}^{-1} = & [\ -394.7480 & -107.5006 & -8.8062 & -28.7502\ ], \\
\mathbf{F}_5 & = & \mathbf{M}_5\mathbf{X}^{-1} = & [\ -372.5314 & -94.3146 & -7.3175 & -18.8560\ ], \\
\mathbf{F}_6 & = & \mathbf{M}_6\mathbf{X}^{-1} = & [\ -359.0581 & -94.9313 & -7.6579 & -19.2621\ ], \\
\mathbf{F}_7 & = & \mathbf{M}_7\mathbf{X}^{-1} = & [\ -371.3648 & -94.2558 & -7.2847 & -18.7165\ ], \\
\mathbf{F}_8 & = & \mathbf{M}_8\mathbf{X}^{-1} = & [\ -359.7995 & -95.6333 & -7.9893 & -20.0828\ ], \\
\mathbf{F}_9 & = & \mathbf{M}_9\mathbf{X}^{-1} = & [\ -411.5427 & -103.2861 & -7.2269 & -24.8619\ ], \\
\mathbf{F}_{10} & = & \mathbf{M}_{10}\mathbf{X}^{-1} = & [\ -386.2394 & -103.2822 & -7.5454 & -23.4822\ ], \\
\mathbf{F}_{11} & = & \mathbf{M}_{11}\mathbf{X}^{-1} = & [\ -407.5548 & -102.6961 & -7.0570 & -23.7410\ ], \\
\mathbf{F}_{12} & = & \mathbf{M}_{12}\mathbf{X}^{-1} = & [\ -386.2097 & -103.9039 & -7.7681 & -24.3024\ ], \\
\mathbf{F}_{13} & = & \mathbf{M}_{13}\mathbf{X}^{-1} = & [\ -373.3998 & -94.4489 & -7.3542 & -18.9887\ ], \\
\mathbf{F}_{14} & = & \mathbf{M}_{14}\mathbf{X}^{-1} = & [\ -360.1106 & -95.3325 & -7.7806 & -19.6403\ ], \\
\mathbf{F}_{15} & = & \mathbf{M}_{15}\mathbf{X}^{-1} = & [\ -372.1238 & -94.4157 & -7.3195 & -18.8460\ ], \\
\mathbf{F}_{16} & = & \mathbf{M}_{16}\mathbf{X}^{-1} = & [\ -360.1832 & -96.1656 & -8.2586 & -20.8099\ ].
\end{array}
$$

$$
\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1.2391 & 0.3170 & 0.0388 & 0.1002 \\ 0.3170 & 0.0840 & 0.0103 & 0.0275 \\ 0.0388 & 0.0103 & 0.0043 & 0.0050 \\ 0.1002 & 0.0275 & 0.0050 & 0.0150 \end{bmatrix} \geq 0.
$$

A Figura 5.3 mostra as respostas de $x_1(t)$, $x_3(t)$ e $u(t)$. Pode ser verificado que $max||u(t)||_2 = 372 < \mu\ (N)$, $max||x_3(t)||_2 = 5.58 < \lambda(m)$.

Exemplo 14

Deseja-se projetar os ganhos do regulador *fuzzy* para a região $-70\pi/180 \leq x_1 \leq 70\pi/180\ rad$.

Os modelos locais que são determinados utilizando (3.2), (3.22), (3.23) e (3.25) com

$$\begin{array}{ll} a_{211} = 17.2923, & a_{212} = 11.5084, \\ a_{411} = -0.3936, & a_{412} = -1.7289, \\ b_{211} = -0.0522, & b_{212} = -0.1764, \\ b_{411} = 0.1176, & b_{412} = 0.1018. \end{array}$$

As funções de pertinência são definidas em (4.5), (4.6) e (4.7). A Figura 5.4 ilustra os valores de $h_j(x(t))$, $j = 1, \ldots, 16$.

Como pode ser verificado na Figura 5.4, não existem h_i, h_j, $i, j = 1, 2, \ldots, 16$ tal que $h_i \cap h_j = 0$.

Na Figura 5.5 são ilustradas as funções não-lineares $\tilde{f}_{21}(x_1)x_1$, $\tilde{f}_{41}(x_1)x_1$, $g_{21}(x_1)$ e $g_{41}(x_1)$ do sistema de simulação e suas respectivas aproximações *fuzzy* $\tilde{f}_{f21}(x_1)x_1$, $\tilde{f}_{f41}(x_1)x_1$, $g_{g21}(x_1)$ e $g_{g41}(x_1)$, obtidas a partir da forma generalizada (4.4).

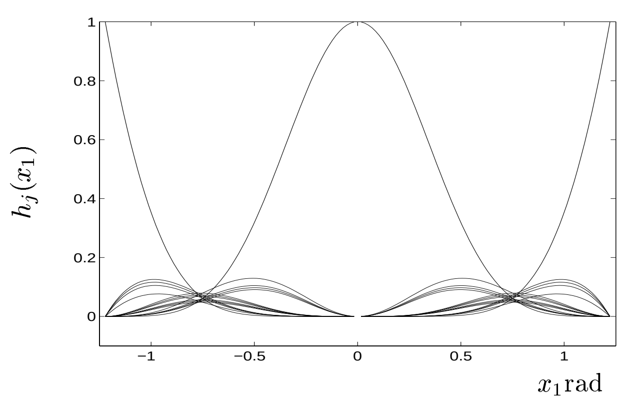

Figura 5.4: Funções de pertinência $h_j(x_1)$, $j = 1, \ldots, 16$ para a forma generalizada com dezesseis modelos locais e intervalo $-70\pi/180 \leq x_1 \leq 70\pi/180\ rad$.

a) Taxa de Decaimento

O problema de projeto que considera a taxa de decaimento é definido como segue:

Maximize β_t *e encontre as matrizes simétricas* $\mathbf{X}$*,* $\mathbf{Y}_0$ *e matrizes* $\mathbf{M}_j$*,* $j = 1, \ldots, 16$*, sujeito a (5.19).*

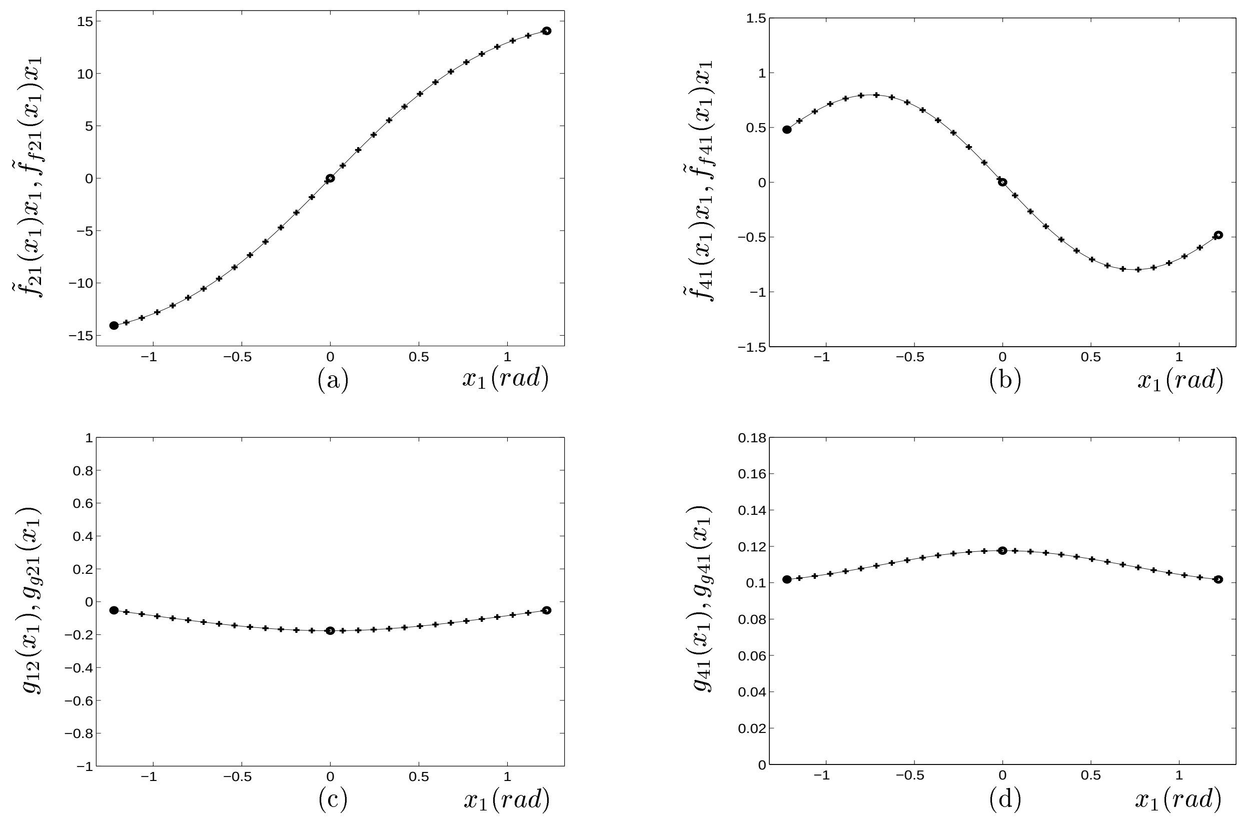

Figura 5.5: Aproximação *fuzzy* com a forma generalizada com dezesseis modelos locais para o intervalo $-70\pi/180 \leq x_1 \leq 70\pi/180$ rad; (-) curvas do modelo de simulação, (+) aproximações com modelos *fuzzy*, ($\bullet$) representa a origem e os extremos da região de operação.

Quando $\beta_t = 0.25 = \beta_{tmax}$, obtém-se pelo MATLAB as matrizes $\mathbf{X}$ e $\mathbf{M}_j$, $j = 1, \ldots, 16$ que solucionam as LMIs acima. Foram obtidos os seguintes resultados:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}_1 &= \mathbf{M}_1\mathbf{X}^{-1} = 10^5 * [\ -1.5731\ \ -0.4133\ \ -0.0427\ \ -0.1664\ ],\\
\mathbf{F}_2 &= \mathbf{M}_2\mathbf{X}^{-1} = 10^5 * [\ -1.7170\ \ -0.4512\ \ -0.0466\ \ -0.1817\ ],\\
\mathbf{F}_3 &= \mathbf{M}_3\mathbf{X}^{-1} = 10^5 * [\ -1.6062\ \ -0.4220\ \ -0.0436\ \ -0.1699\ ],\\
\mathbf{F}_4 &= \mathbf{M}_4\mathbf{X}^{-1} = 10^5 * [\ -1.7338\ \ -0.4557\ \ -0.0471\ \ -0.1835\ ],\\
\mathbf{F}_5 &= \mathbf{M}_5\mathbf{X}^{-1} = 10^5 * [\ -0.8696\ \ -0.2284\ \ -0.0236\ \ -0.0920\ ],\\
\mathbf{F}_6 &= \mathbf{M}_6\mathbf{X}^{-1} = 10^5 * [\ -0.9537\ \ -0.2506\ \ -0.0259\ \ -0.1009\ ],\\
\mathbf{F}_7 &= \mathbf{M}_7\mathbf{X}^{-1} = 10^5 * [\ -0.9009\ \ -0.2367\ \ -0.0245\ \ -0.0953\ ],\\
\mathbf{F}_8 &= \mathbf{M}_8\mathbf{X}^{-1} = 10^5 * [\ -0.9817\ \ -0.2580\ \ -0.0267\ \ -0.1039\ ],\\
\mathbf{F}_9 &= \mathbf{M}_9\mathbf{X}^{-1} = 10^5 * [\ -1.7444\ \ -0.4583\ \ -0.0474\ \ -0.1845\ ],\\
\mathbf{F}_{10} &= \mathbf{M}_{10}\mathbf{X}^{-1} = 10^5 * [\ -1.8579\ \ -0.4883\ \ -0.0505\ \ -0.1966\ ],\\
\mathbf{F}_{11} &= \mathbf{M}_{11}\mathbf{X}^{-1} = 10^5 * [\ -1.7721\ \ -0.4656\ \ -0.0481\ \ -0.1875\ ],\\
\mathbf{F}_{12} &= \mathbf{M}_{12}\mathbf{X}^{-1} = 10^5 * [\ -1.8763\ \ -0.4931\ \ -0.0510\ \ -0.1985\ ],\\
\mathbf{F}_{13} &= \mathbf{M}_{13}\mathbf{X}^{-1} = 10^5 * [\ -0.9382\ \ -0.2465\ \ -0.0255\ \ -0.0992\ ],\\
\mathbf{F}_{14} &= \mathbf{M}_{14}\mathbf{X}^{-1} = 10^5 * [\ -1.0193\ \ -0.2679\ \ -0.0277\ \ -0.1078\ ],\\
\mathbf{F}_{15} &= \mathbf{M}_{15}\mathbf{X}^{-1} = 10^5 * [\ -0.9708\ \ -0.2550\ \ -0.0264\ \ -0.1027\ ],\\
\mathbf{F}_{16} &= \mathbf{M}_{16}\mathbf{X}^{-1} = 10^5 * [\ -1.0457\ \ -0.2748\ \ -0.0284\ \ -0.1106\ ].
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{P} = 1.0e + 04 * \begin{bmatrix} 2.6949 & 0.7085 & 0.0733 & 0.2854 \\ 0.7085 & 0.1864 & 0.0193 & 0.0751 \\ 0.0733 & 0.0193 & 0.0020 & 0.0078 \\ 0.2854 & 0.0751 & 0.0078 & 0.0303 \end{bmatrix} \geq 0.$$

Para ilustrar a validade da lei de controle projetada, que visou à estabilidade e à taxa de decaimento foi feita a simulação do sistema original (3.18) com a lei de controle (5.2), para $r = 16$, empregando $\mathbf{F}_j$, $j = 1, \ldots, 16$.

A Figura 5.6 mostra as respostas de $x_1(t)$, $x_3(t)$ e $u(t)$. Pode ser verificado que $max||u(t)||_2 = 148720$ (N). Novamente a entrada de controle possui valores muito elevados, visto que a restrição na entrada não é considerada no projeto de regulador *fuzzy*.

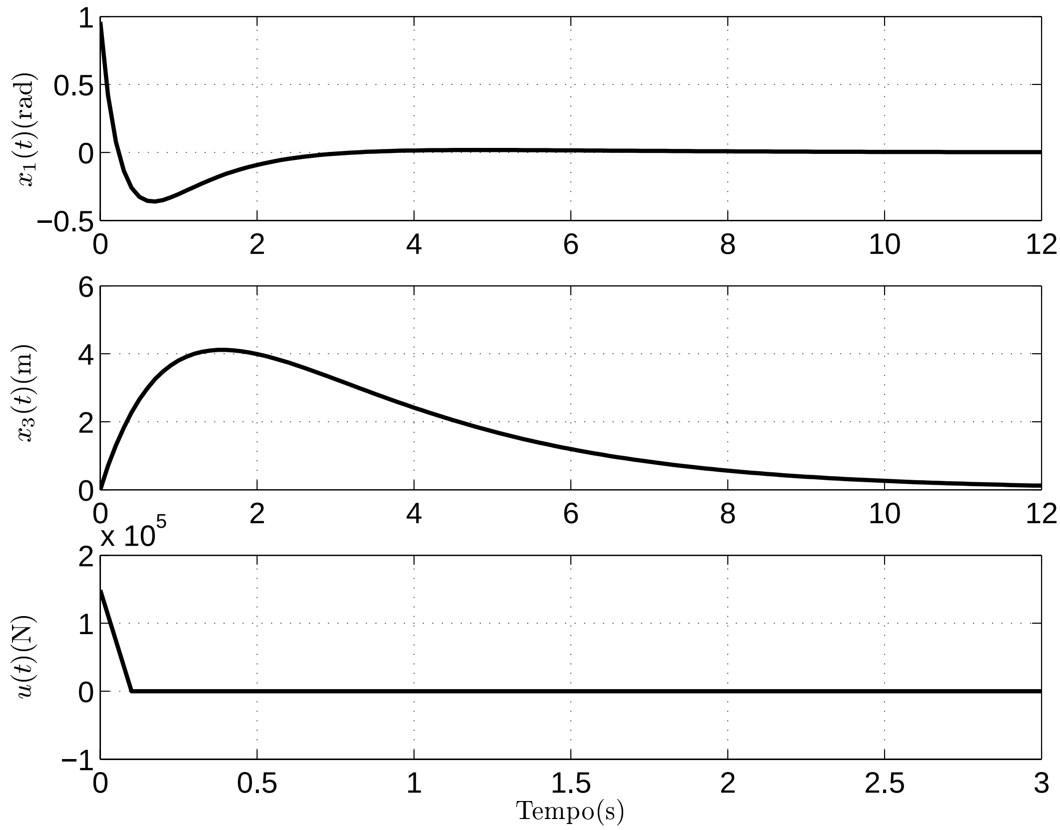

Figura 5.6: Forma Generalizada. Respostas de $x_1(t)$, $x_3(t)$, e $u(t)$ com dezesseis modelos locais para condição inicial $\mathbf{x}(0) = [0.96\ 0\ 0\ 0]^T$, intervalo $-70\pi/180 \leq x_1 \leq 70\pi/180$ rad e considerando-se a taxa de decaimento máxima.

b) Estabilidade + Taxa de Decaimento + Restrição na Entrada de Controle + Restrição na Saída de Controle

Maximize β_t *e encontre as matrizes simétricas* $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}_0$ *e matrizes* $\mathbf{M}_j$, $j = 1, \ldots, 16$, *sujeito a (5.19), (5.6), (5.7), (5.8) e (5.9), com* $\mu = 450$, $\lambda = 35$, $\mathbf{C}_j = [0\ \ 0\ \ 1\ \ 0]$, $j = 1, \ldots, 16$ *e* $\mathbf{x}(0) = [0.96\ 0\ 0\ 0]^T$.

Para as restrições de entrada $\mu = 450$ e de saída $\lambda = 35$ não foi possível obter uma solução factível. A factibilidade das LMIs para uma entrada $\mu = 450$ foi possível somente para $\lambda = 90$. Portanto, para estas restrições não foi possível projetar os ganhos do regulador.

c) Redução de Regras

Não foi possível realizar a redução de regras para nenhum elemento não-linear.

5.4 Projeto de Reguladores para Modelos Locais Ótimos

Serão apresentados dois métodos de projeto de reguladores que utilizam os modelos locais ótimos definidos em Teixeira e Żak (1999) e dados pela fórmula (3.45).

Estes métodos de projeto serão denominados: "Projeto 1" e "Projeto 2" e em ambos os métodos serão utilizadas as funções de pertinência definidas nas Seções 4.3.2 ou 4.3.3.

As condições suficientes para a estabilidade de sistemas fuzzy contínuos no tempo são obtidas usando funções de Lyapunov quadráticas do tipo $\mathrm{V}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t)$, como efetuado em (Tanaka e Sugeno, 1992).

Para a lei de controle (5.1), a equação (2.11) é dada por (5.20)

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} \\
&= \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x})\mathbf{x} - \mathbf{g}(\mathbf{x})\sum_{j=1}^{r}\alpha_j(\mathbf{x})\mathbf{F}_j\mathbf{x} \\
&= \sum_{i=1}^{r}\alpha_i(\mathbf{x})(\mathbf{A}_i\mathbf{x} - \mathbf{B}_i(\sum_{j=1}^{r}\alpha_j(\mathbf{x})\mathbf{F}_j\mathbf{x})) \\
&\quad +(\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{r}\alpha_i(\mathbf{x})\mathbf{A}_i)\mathbf{x} \\
&\quad -(\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{r}\alpha_i(\mathbf{x})\mathbf{B}_i)(\sum_{j=1}^{r}\alpha_j(\mathbf{x})\mathbf{F}_j\mathbf{x}) \\
&= \left[\sum_{i=1}^{r}\alpha_i(\mathbf{x})(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i\sum_{j=1}^{r}\alpha_j(\mathbf{x})\mathbf{F}_j) \right. \\
&\qquad \left. +\Delta\tilde{\mathbf{f}} - \Delta\mathbf{g}\sum_{j=1}^{r}\alpha_j(\mathbf{x})\mathbf{F}_j\right]\mathbf{x},
\end{aligned} \tag{5.20}$$

sendo $\Delta\tilde{\mathbf{f}}$ e $\Delta\mathbf{g}$ definidos em (4.62).

5.4.1 Projeto 1

A idéia principal deste método é obter condições de estabilidade para projetar os ganhos do regulador considerando a maior quantidade de informações possíveis do sistema. Para isto, será considerado um conjunto de pontos da região de operação ($\mathbf{x} \in \chi$) e para cada ponto deste conjunto serão determinados os valores das funções de pertinência (obtidas com a solução do problema (4.23), solução analítica, ou do problema (4.56), solução por LMIs) e dos erros de aproximação (definidos em (4.62)) (Daruichi et al., 2003).

Os pontos deste conjunto podem ser escolhidos em intervalos igualmente espaçados ou espaçados em intervalos diferentes, isto é, podem ser considerados mais pontos nas regiões onde as não-linearidades são mais fortes e um número reduzido de pontos nas região mais linearizadas. Um característica fundamental deste conjunto de pontos é que ele possibilite uma boa representação das funções não-lineares na região de operação.

O teorema a seguir apresenta as condições de estabilidade para este método de projeto.

Teorema 2 *O ponto de equilíbrio* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *do sistema de controle fuzzy contínuo descrito por (5.20) é globalmente e assintoticamente estável se existirem uma matriz simétrica positiva definida comum* $\mathbf{P}$ *e matrizes* $\mathbf{F}_j$, $j = 1, 2, \ldots, r$, *tais que, para todo* $\alpha_i(\mathbf{x})$ *admissível,* $i = 1, 2, \ldots, r$*:*

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_{e1}(\boldsymbol{\alpha}) \;=\;& [(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i(\mathbf{x})(\mathbf{A}_i^T - (\sum_{j=1}^{r}\alpha_j(\mathbf{x})\mathbf{F}_j)^T\mathbf{B}_i^T))\mathbf{P} + \Delta\tilde{\mathbf{f}}^T\mathbf{P} \\ &+\mathbf{P}(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i(\mathbf{x})(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i(\sum_{j=1}^{r}\alpha_j(\mathbf{x})\mathbf{F}_j))) + \mathbf{P}\Delta\tilde{\mathbf{f}} \\ &-(\sum_{j=1}^{r}\alpha_j(\mathbf{x})\mathbf{F}_j^T)\Delta\mathbf{g}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\Delta\mathbf{g}(\sum_{j=1}^{r}\alpha_j(\mathbf{x})\mathbf{F}_j)] < 0.\end{aligned} \tag{5.21}$$

Prova Considere a seguinte candidata à função de Lyapunov $\mathrm{V}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$ sendo que $\mathbf{P} = \mathbf{P^T} > \mathbf{0}$. De (5.20) tem-se

$$\begin{aligned}\dot{\mathrm{V}} &= \dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{x}^T[(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i(\mathbf{x})(\mathbf{A}_i^T - (\sum_{j=1}^{r}\alpha_j(\mathbf{x})\mathbf{F}_j)^T\mathbf{B}_i^T))\mathbf{P} + \Delta\tilde{\mathbf{f}}^T\mathbf{P} \\ &\quad +\mathbf{P}(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i(\mathbf{x})(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i(\sum_{j=1}^{r}\alpha_j(\mathbf{x})\mathbf{F}_j))) + \mathbf{P}\Delta\tilde{\mathbf{f}} \\ &\quad -(\sum_{j=1}^{r}\alpha_j(\mathbf{x})\mathbf{F}_j^T)\Delta\mathbf{g}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\Delta\mathbf{g}(\sum_{j=1}^{r}\alpha_j(\mathbf{x})\mathbf{F}_j)]\mathbf{x} = \mathbf{x^T}\mathbf{Q_{e1}}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Portanto, se $\mathbf{Q}_{e1}(\boldsymbol{\alpha}) < 0$, $\dot{\mathrm{V}}(\mathbf{x}(t)) = \dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} < 0$ para $\mathbf{x}(t) \neq 0$ e a prova está concluída.

Taxa de Decaimento

Do Teorema 2, para uma candidata da função Lyapunov $\mathrm{V}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x^T}\mathbf{P}\mathbf{x}$ então $\dot{\mathrm{V}}(\mathbf{x}(t)) < 0$ se $\mathbf{Q}_{e1}(\boldsymbol{\alpha}) < 0$, sendo $\mathbf{Q}_{e1}(\boldsymbol{\alpha})$ dada em (5.21). Logo, a condição $\dot{\mathrm{V}}(\mathbf{x}(t)) \leq -2\beta_{p1}\mathrm{V}(\mathbf{x}(t))$

(Tanaka, Ikeda e Wang, 1998a) para toda trajetória é satisfeita para

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_{p1}(\alpha) \;=\; & \sum_{i=1}^{r}\alpha_i(\mathbf{x})(\mathbf{A}_i^T - (\sum_{j=1}^{r}\alpha_j(\mathbf{x})\mathbf{F}_j)^T\mathbf{B}_i^T))\mathbf{P} + \Delta\tilde{\mathbf{f}}^T\mathbf{P} \\ & +\mathbf{P}(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i(\mathbf{x})(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i(\sum_{j=1}^{r}\alpha_j(\mathbf{x})\mathbf{F}_j))) + \mathbf{P}\Delta\tilde{\mathbf{f}} \\ & -(\sum_{j=1}^{r}\alpha_j(\mathbf{x})\mathbf{F}_j^T)\Delta\mathbf{g}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\Delta\mathbf{g}(\sum_{j=1}^{r}\alpha_j(\mathbf{x})\mathbf{F}_j + 2\beta_{p1}\mathbf{P} < 0,\end{aligned} \tag{5.22}$$

sendo $\beta_{p1} > 0$.

Portanto, a taxa de decaimento que pode ser encontrada usando uma função de Lyapunov quadrática é obtida multiplicando-se $\mathbf{Q}_{p1}$ por $\mathbf{X}$ pelo lado direito e esquerdo, sendo $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$, e resolvendo-se o seguinte problema de otimização em $\mathbf{X}$ e β_{p1}:

Maximize β_{p1} e encontre uma matriz simétrica $\mathbf{X}$ e matrizes $\mathbf{M}_j$, $j = 1, \ldots, r$ sujeito a

$$\begin{aligned}& \mathbf{X} > 0, \\ & \mathbf{X}(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i(\mathbf{x})\mathbf{A}_i^T) - (\sum_{j=1}^{r}\alpha_j(\mathbf{x})\mathbf{M}_j^T)(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i(\mathbf{x})\mathbf{B}_i^T) + \mathbf{X}\Delta\tilde{\mathbf{f}}^T \\ & +(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i(\mathbf{x})\mathbf{A}_i)\mathbf{X} - (\sum_{i=1}^{r}\alpha_i(\mathbf{x})\mathbf{B}_i)(\sum_{j=1}^{r}\alpha_j(\mathbf{x})\mathbf{M}_j) + \Delta\tilde{\mathbf{f}}\mathbf{X} \\ & -(\sum_{j=1}^{r}\alpha_j(\mathbf{x})\mathbf{M}_j^T)\Delta\mathbf{g}^T - \Delta\mathbf{g}(\sum_{j=1}^{r}\alpha_j(\mathbf{x})\mathbf{M}_j) + 2\beta_{p1}\mathbf{X} < 0.\end{aligned} \tag{5.23}$$

Os ganhos de realimentação $\mathbf{F}_j$, $j = 1, \ldots, r$ e a matriz $\mathbf{P}$ comum podem ser obtidos da seguinte forma:

$$\mathbf{P} = \mathbf{X}^{-1}, \quad \mathbf{F}_i = \mathbf{M}_i\mathbf{X}^{-1},$$

a partir das soluções $\mathbf{X}$ e $\mathbf{M}_j$.

O número de LMIs corresponde ao número de pontos escolhidos na região de operação $\mathbf{x} \in \chi$.

Exemplo 15

Considere o problema do equilíbrio e balanço de um pêndulo invertido sobre um carro. As equações do sistema são dadas em (3.46). Deseja-se obter o controle do sistema (3.46) utilizando dois modelos locais lineares: o primeiro em torno de $x_1 = 0$ *rad*, $(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1)$, dado por (3.47) e (3.48) e o outro modelo em torno de $x_1 = 60\pi/180$ *rad*, $(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2)$, dado em (3.49) e (3.50).

As funções de pertinência são as definidas na Seção 4.3.2, onde os $\alpha_j(\mathbf{x}(t))$, $j = 1, \ldots, r$, são obtidos analiticamente, e na Seção 4.3.3, onde os $\alpha_j(\mathbf{x}(t))$, $j = 1, \ldots, r$ são obtidos por meio de LMIs, com $r = 2$. Estas funções são representadas pela Figura 4.12 ou pela Figura 4.21.

As aproximações *fuzzy* para o sistema são ilustras pela Figura 4.13 (ou pela Figura 4.22).

Na Figura 5.7 são apresentados os valores de $||\Delta_f(x_1)||_2$ e $||\Delta_g(x_1)||_2$, definidos em (4.62) para $x_1 \in [-60\pi/180, 60\pi/180]$ rad. O conjunto de pontos foi definido em intervalos igualmente espaçados de $\Delta_x = \pi/180$ rad. A Figura também apresenta os erros de modelagem obtidos para os estes pontos.

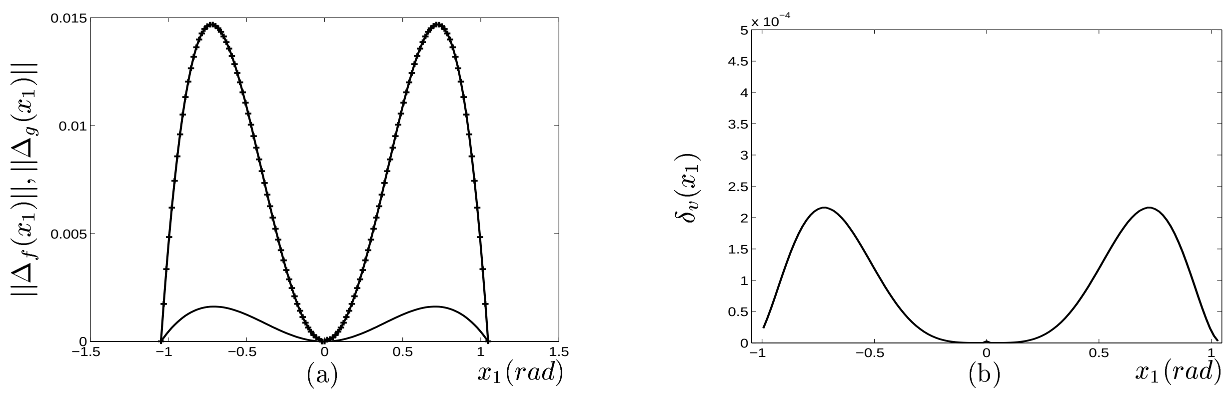

Figura 5.7: (a) Erros de aproximação: (+) $||\Delta_f(x_1)||_2$ e (-) $||\Delta_g(x_1)||_2$. (b) Erro de modelagem $\delta_v(x_1)$ para o intervalo $-60\pi/180 \leq x_1 \leq 60\pi/180$ rad, com dois modelos locais.

Para projetar o controlador *fuzzy* deve-se ter um modelo *fuzzy* que represente as dinâmicas da planta não-linear. Portanto, primeiro representa-se o sistema pelo modelo *fuzzy*. Aqui aproximou-se o sistema através das regras 1 e 2 e utilizou-se o controlador *fuzzy* correspondente:

$$
\begin{array}{rl}
Regra\,1: & \text{SE } x_1(t) \text{ está em torno de } \pm 0 rad,\\
& \text{ENTÃO} \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1 u_p(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_1\mathbf{x}(t) \end{array} \right.\\
& \qquad u_p(t) = -\mathbf{F}_1\mathbf{x}(t).\\
Regra\,2: & \text{SE } x_1(t) \text{ está em torno de } \pm 60\pi/180 rad,\\
& \text{ENTÃO} \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_2\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2 u_p(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_2\mathbf{x}(t) \end{array} \right.\\
& \qquad u_p(t) = -\mathbf{F}_2\mathbf{x}(t).
\end{array}
$$

a) Taxa de Decaimento

O problema de projeto que considera a taxa de decaimento é definido como segue:

Maximize β_{p1} *e encontre* $\mathbf{X}$, $\mathbf{M}_1$ *e* $\mathbf{M}_2$ *sujeito a* $\mathbf{X} > 0$ *e (5.23) com* $\mathbf{x}_0 = [0.96\ 0\ 0\ 0]^T$.

Quando $\beta_{p1} = 1.4 = \beta_{1max}$, obtêm-se pelo MATLAB as matrizes $\mathbf{X}$, $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{M}_2$ que solucionam as LMIs acima. Os ganhos obtidos foram:

$$\mathbf{F}_1 = 10^5 \begin{bmatrix} -0.6281 & -0.1721 & -0.1293 & -0.1271 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{F}_2 = 10^5 \begin{bmatrix} -1.4365 & -0.3939 & -0.2960 & -0.2911 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{P} = 10^6 * \begin{bmatrix} 4.1371 & 1.1350 & 0.8544 & 0.8398 \\ 1.1350 & 0.3114 & 0.2344 & 0.2304 \\ 0.8544 & 0.2344 & 0.1769 & 0.1736 \\ 0.8398 & 0.2304 & 0.1736 & 0.1706 \end{bmatrix} \geq 0.$$

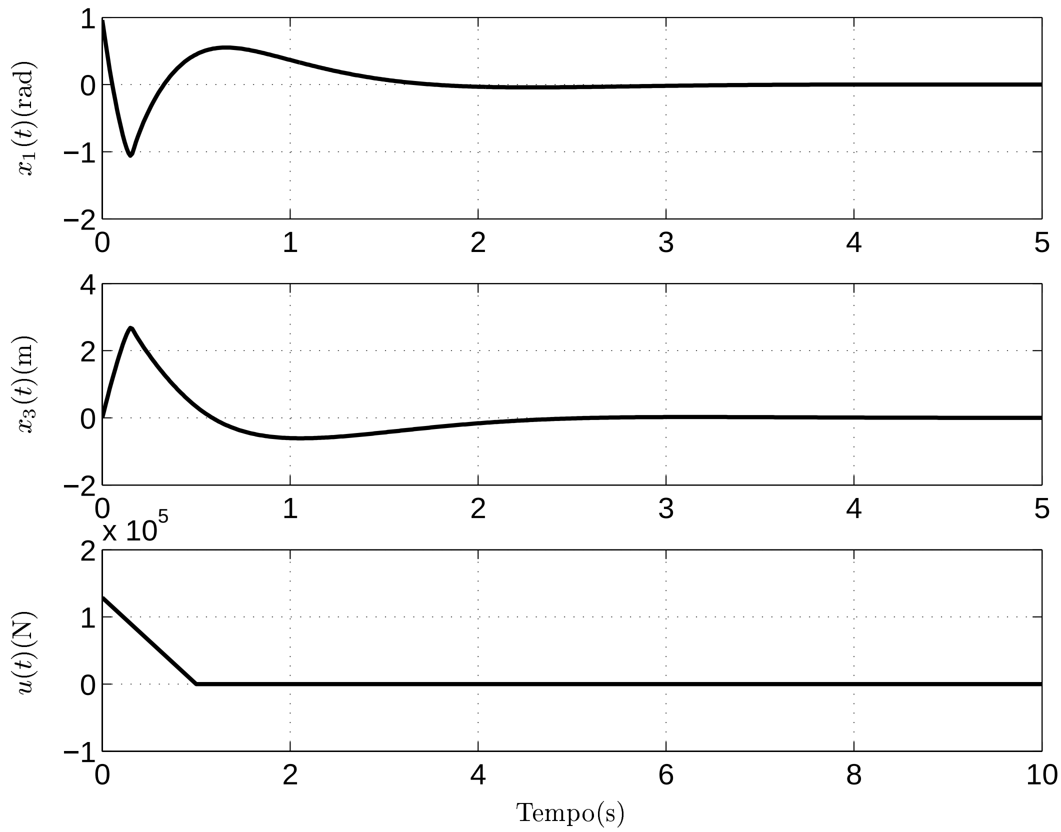

Figura 5.8: Projeto 1. Respostas de $x_1(t)$, $x_3(t)$, e $u(t)$ com dois modelos locais para condição inicial $\mathbf{x}(0) = [0.96\ 0\ 0\ 0]^T$, intervalo $-60\pi/180 \leq x_1 \leq 60\pi/180\ rad$, e considerando-se a taxa de decaimento máxima.

A Figura 5.8 mostra as respostas de $x_1(t)$, $x_3(t)$ e $u(t)$, sendo $max||u(t)||_2 = 128650\ (N)$. A entrada de controle possui valor muito elevado, visto que a restrição na entrada não é considerada no projeto de regulador *fuzzy*.

b) Estabilidade + Taxa de Decaimento + Restrição na Entrada de Controle + Restrição na Saída de Controle:

Maximize β_{p1} *e encontre a matriz simétrica* $\mathbf{X}$ *e matrizes* $\mathbf{M}_1$ *e* $\mathbf{M}_2$ *sujeito a* $\mathbf{X} > 0$, *(5.23), (5.6), (5.7) (5.8) e (5.9), com* $\mu = 380$*,* $\lambda = 20$*,* $\mathbf{C}_j = [0\ \ 0\ \ 1\ \ 0]$*,* $j = 1,2$ *e* $\mathbf{x}_0 = [0.96\ 0\ 0\ 0]^T$.

A solução é obtida quando $\beta_{p1} = 0.31$:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{F}_1 & = & \mathbf{M}_1\mathbf{X}^{-1} = 10^2 * [\ -3.4178 \quad -0.9016 \quad -0.1269 \quad -0.2492\ ], \\ \mathbf{F}_2 & = & \mathbf{M}_1\mathbf{X}^{-1} = 10^2 * [\ -3.9947 \quad -1.1084 \quad -0.1428 \quad -0.2971\ ], \end{array}$$

$$\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1.3793 & 0.3791 & 0.08410.1511 \\ 0.3791 & 0.1047 & 0.02290.0413 \\ 0.0841 & 0.0229 & 0.00930.0119 \\ 0.1511 & 0.0413 & 0.01190.0212 \end{bmatrix} \geq 0.$$

A Figura 5.9 mostra a resposta de $x_1(t)$, $x_3(t)$ e $u(t)$. A resposta do sistema satisfaz as restrições $max||u(t)||_2 = 376.8 < \mu\ (N)$ e $max||x_3(t)||_2 = 4.45 < \lambda\ (m)$.

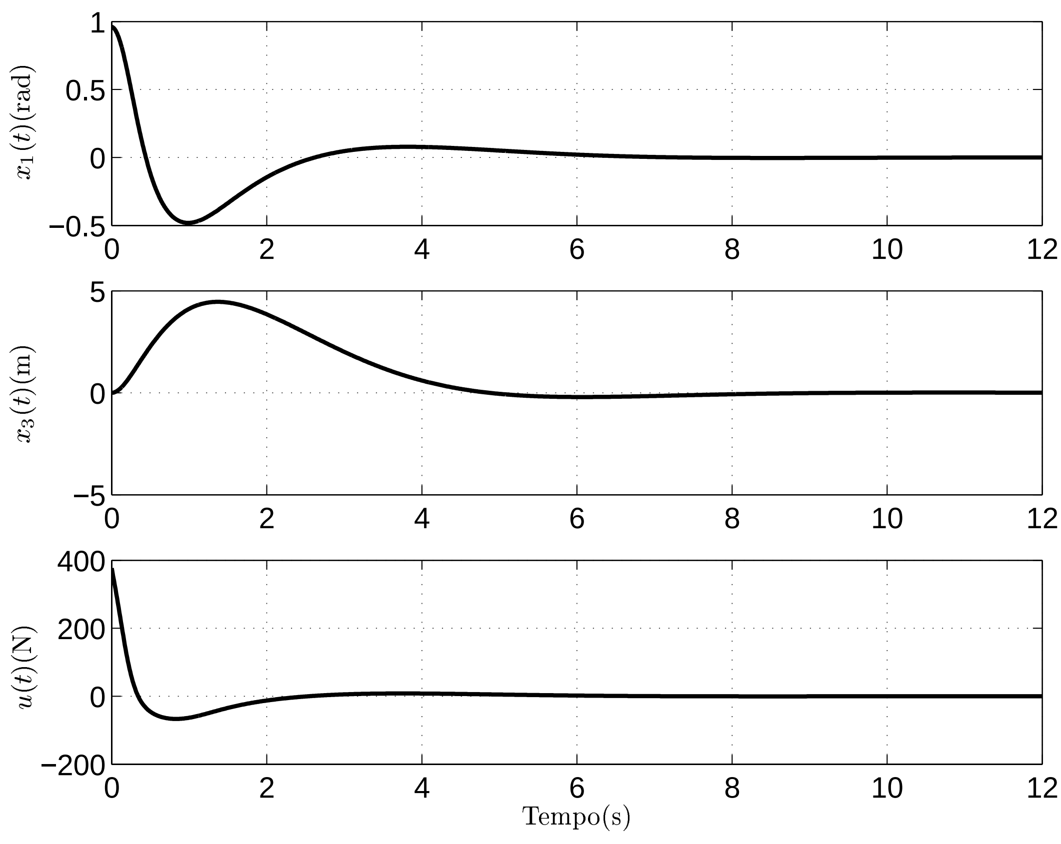

Figura 5.9: Projeto 1. Respostas de $x_1(t)$, $x_3(t)$, e $u(t)$ com dois modelos locais para condição inicial $\mathbf{x}(0) = [0.96\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^T$, intervalo $-60\pi/180 \leq x_1 \leq 60\pi/180\ rad$ e considerando-se $\mu = 380$ e $\lambda = 20$.

Exemplo 16

Considere o projeto de reguladores para os modelos locais definidos em torno de de $x_1 = 0\ rad$, $(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1)$, dados em (3.47) e (3.48), e em torno de $x_1 = 70\pi/180\ rad$, $(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2)$, dados em (4.49).

As funções de pertinência $\alpha_j(\mathbf{x}(t))$, $j = 1, \ldots, r$ podem ser obtidas analiticamente, como na Seção 4.3.2, ou por meio de LMIs, como na Seção 4.3.3. Para as duas soluções, $\alpha_j(x_1)$, $j = 1, 2$, são idênticos para o intervalo desejado e são representados na Figura 5.10. Foi realizada uma interpolação polinomial de quarta ordem para representar as funções de pertinência.

A Figura 5.11 apresenta as aproximações obtidas com as funções de pertinência da Figura 5.10. No projeto os pontos estão espaçados por $\Delta_x = \pi/180\ rad$.

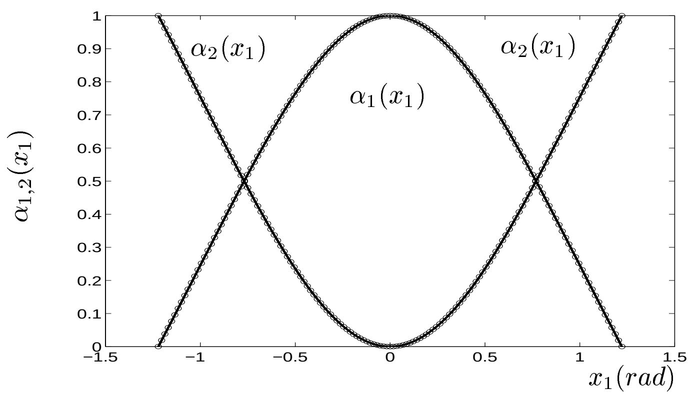

Figura 5.10: Funções de pertinência para o intervalo $-70\pi/180 \leq x_1 \leq 70\pi/180\ rad$, com dois modelos locais; (-) solução analítica, ($\bullet$) solução por LMIs .

As linhas contínuas representam o sistema de simulação $f_i(x_1)$ e $g_i(x_1)$, com $i = 2, 4$, e as linhas descontínuas são as respectivas aproximações *fuzzy* $f_{fi}(x_1)$ e $g_{gi}(x_1)$, $i = 2, 4$ dadas em (4.39).

Na Figura 5.12 são apresetados os valores de $||\Delta_f(x_1)||_2$ e $||\Delta_g(x_1)||_2$, definidos em (4.62) e o erro de modelagem $\delta_v(x_1)$, definido em (4.61) para $x_1 \in [-70\pi/180, 70\pi/180]rad$.

a) Taxa de Decaimento

O problema de projeto que considera a taxa de decaimento é definido como segue:

Maximize β_{p1} *e encontre* $\mathbf{X}$, $\mathbf{M}_1$ *e* $\mathbf{M}_2$ *sujeito a* $\mathbf{X} > 0$ *e (5.23) com* $\mathbf{x}_0 = [0.96\ 0\ 0\ 0]^T$.

Quando $\beta_{p1} = 0.7 = \beta_{1max}$, obtêm-se pelo MATLAB as matrizes $\mathbf{X}$, $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{M}_2$ que solucionam as LMIs acima. Os ganhos obtidos foram:

$$\mathbf{F}_1 = 10^4 * \begin{bmatrix} -8.7267 & -2.4483 & -0.7643 & -1.2032 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{F}_2 = 10^5 * \begin{bmatrix} -3.1527 & -0.8851 & -0.2764 & -0.4351 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{P} = 10^4 * \begin{bmatrix} 1.3855 & 0.3891 & 0.1215 & 0.1913 \\ 0.3891 & 0.1093 & 0.0341 & 0.0537 \\ 0.1215 & 0.0341 & 0.0107 & 0.0168 \\ 0.1913 & 0.0537 & 0.0168 & 0.0264 \end{bmatrix} \geq 0.$$

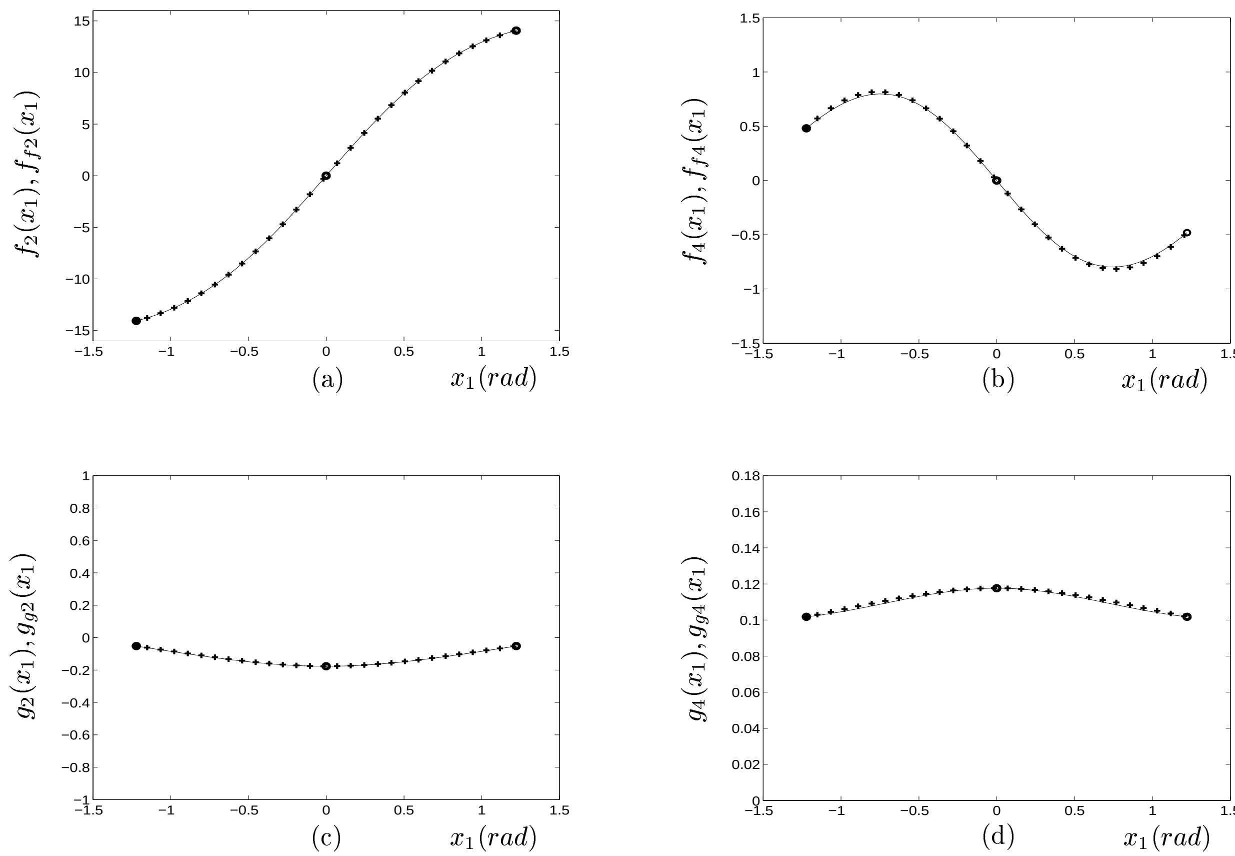

Figura 5.11: Aproximação Fuzzy com dois modelos locais para o intervalo $-70\pi/180 \leq x_1 \leq 70\pi/180$ *rad*. (-) curvas do modelo de simulação, (+) aproximações com modelos *fuzzy*, (●) representa os modelos locais .

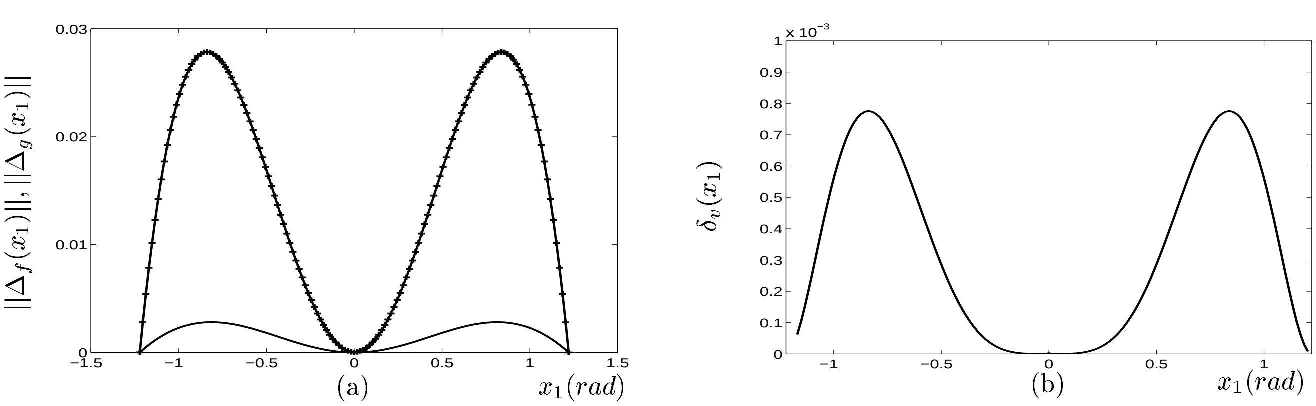

Figura 5.12: (a) Erros de aproximação: (+) $||\Delta_f(x_1)||_2$ e (-) $||\Delta_g(x_1)||_2$. (b) Erro de modelagem $\delta_v(x_1)$ para o intervalo $-70\pi/180 \leq x_1 \leq 70\pi/180$ *rad* com dois modelos locais.

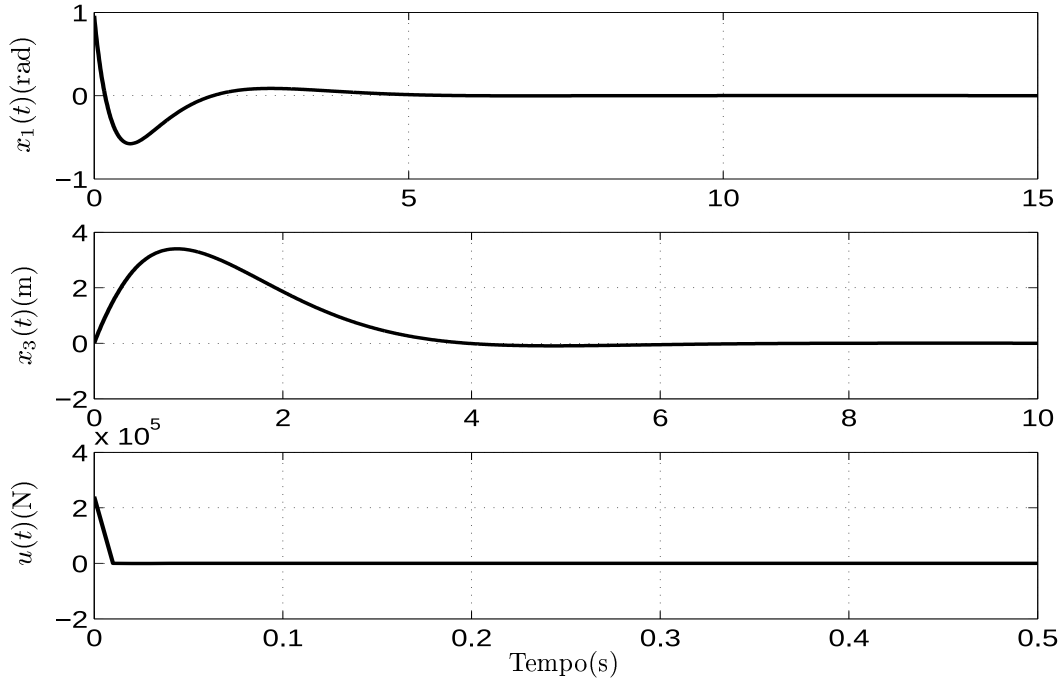

Figura 5.13: Projeto 1. Respostas de $x_1(t)$, $x_3(t)$, e $u(t)$ com dois modelos locais para condição inicial $\mathbf{x}(0) = [0.96\ 0\ 0\ 0]^T$, intervalo $-70\pi/180 \leq x_1 \leq 70\pi/180$ rad e considerando-se a taxa de decaimento máxima.

A Figura 5.13 mostra as respostas de $x_1(t)$, $x_3(t)$ e $u(t)$, sendo $max||u(t)||_2 = 24{*}10^4$ (N).

b) Estabilidade + Taxa de Decaimento + Restrição na Entrada de Controle + Restrição na Saída de Controle:

Maximize β_{p2} *e encontre a matriz simétrica* $\mathbf{X}$ *e matrizes* $\mathbf{M}_1$ *e* $\mathbf{M}_2$ *sujeito a* $\mathbf{X} > 0$, *(5.23), (5.6), (5.7) (5.8) e (5.9), com* $\mu = 450$, $\lambda = 35$ $\mathbf{C}_j = [0\ \ 0\ \ 1\ \ 0]$, $j = 1,2$ *e* $\mathbf{x}_0 = [0.96\ 0\ 0\ 0]^T$.

A solução é obtida quando $\beta_{p2} = 0.19$:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{F}_1 & = & \mathbf{M}_1\mathbf{X}^{-1} = [\quad -395.9675 \quad -108.0937 \quad -8.2426 \quad -20.8732\ ], \\ \mathbf{F}_2 & = & \mathbf{M}_1\mathbf{X}^{-1} = [\quad -488.4703 \quad -141.4212 \quad -9.0598 \quad -25.0734\ ], \end{array} \tag{5.24}$$

$$\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1.3591 & 0.3899 & 0.0421 & 0.1022 \\ 0.3899 & 0.1125 & 0.0119 & 0.0289 \\ 0.0421 & 0.0119 & 0.0026 & 0.0044 \\ 0.1022 & 0.0289 & 0.0044 & 0.0106 \end{bmatrix} \geq 0. \tag{5.25}$$

A Figura 5.14 mostra a resposta de $x_1(t)$, $x_3(t)$ e $u(t)$. A resposta do sistema satisfaz as restrições $max||u(t)||_2 = 443.6 < \mu$ (N) e $max||x_3(t)||_2 = 5.71 < \lambda$ (m).

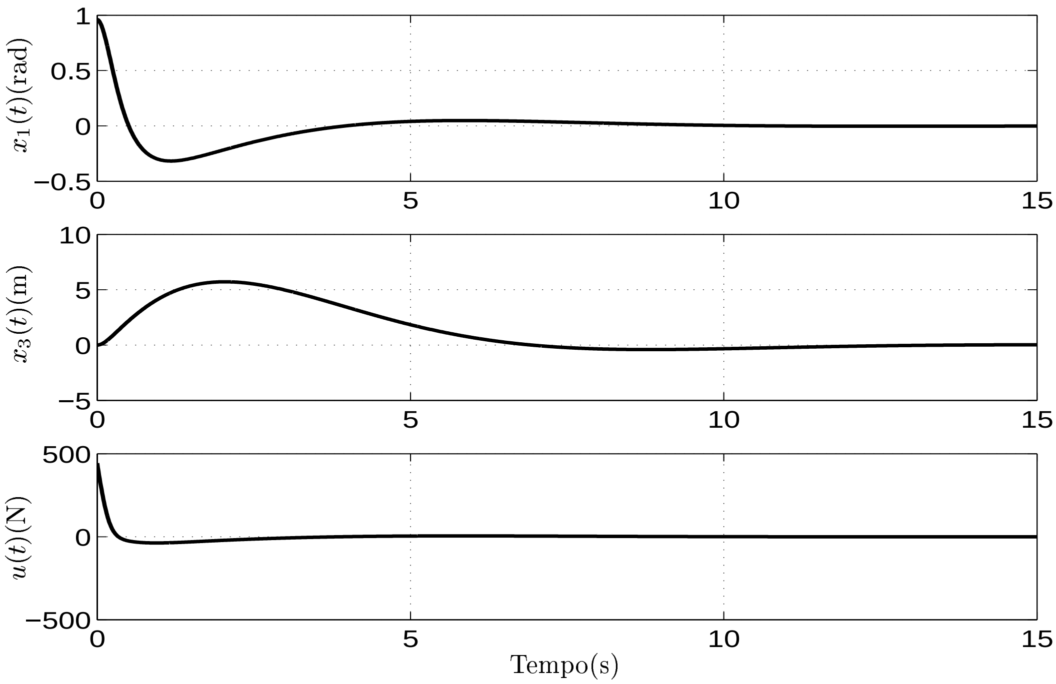

Figura 5.14: Projeto 1. Respostas de $x_1(t)$, $x_3(t)$, e $u(t)$ com dois modelos locais para condição inicial $\mathbf{x}(0) = [0.96\ 0\ 0\ 0]^T$, intervalo $-70\pi/180 \leq x_1 \leq 70\pi/180\ rad$ e considerando-se $\mu = 450$ e $\lambda = 35$.

5.4.2 Projeto 2

A idéia central deste método projeto é utilizar apenas os erros máximos de aproximação obtido na região de operação.

Novamente, como no método de projeto anterior, será considerado um conjunto de pontos da região de operação e para cada ponto deste conjunto serão determinados os valores das funções de pertinência (obtidas com a solução do problema (4.23), solução analítica, ou do problema (4.56), solução por LMIs) e dos erros de aproximação (definidos em (4.62)).

Entretanto, ao invés de utilizar todas as informações referentes a todos os pontos do conjunto será considerado no projeto dos ganhos do regulador apenas o valores das normas dos maiores erros de aproximação obtidos.

Para obter as condições de estabilidade serão realizadas algumas manipulações matemáticas e majorações de forma que o projeto dos ganhos dependa apenas dos valores máximos dos erros. Formas semelhantes desta análise matemática são encontras na literatura (Chen et al., 1999) e o mesmo tipo de manipulação foi aplicado em Taniguchi et al. (2001). A diferença fundamental entre o método “Projeto 2” e o método proposto em Taniguchi et al. (2001) é o tratamento dado ao erro de modelagem.

O teorema a seguir apresenta as condições de estabilidade para este método de projeto.

Condições de Estabilidade Robusta

As condições suficientes para a estabilidade são derivadas usando funções de Lyapunov quadráticas do tipo $\mathrm{V}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t)$, como no Projeto 1 da Seção 5.4.1.

Assuma que o número de regras que estão ativas para todo t é menor ou igual a s, sendo $1 < s \leq r$.

Teorema 3 *O ponto de equilíbrio* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *do sistema de controle fuzzy contínuo descrito por (5.20) é globalmente estável assintoticamente se existirem uma matriz simétrica positiva definida comum* $\mathbf{P}$ *e matrizes* $\mathbf{F}_j$*,* $j = 1, 2, \ldots, r$*, tais que:*

$$\begin{array}{c} \mathbf{A}_i^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}_i - \mathbf{F}_i^T\mathbf{B}_i^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}_i\mathbf{F}_i + (s-1)\mathbf{Q} + ||\Delta\tilde{\mathbf{f}}||^2_{2max} + 2\mathbf{P}\mathbf{P} \\ +\mathbf{F}_i^T||\Delta\mathbf{g}||^2_{2max}\mathbf{F}_i < 0 \end{array} \tag{5.26}$$

e

$$\begin{array}{c} \mathbf{A}_i^T\mathbf{P} + \mathbf{A}_j^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}_i + \mathbf{P}\mathbf{A}_j - \mathbf{F}_j^T\mathbf{B}_i^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}_i\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_i^T\mathbf{B}_j^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}_j\mathbf{F}_i - 2\mathbf{Q} \\ +2||\Delta\tilde{\mathbf{f}}||^2_{2max} + 4\mathbf{P}\mathbf{P} + \mathbf{F}_i^T||\Delta\mathbf{g}||^2_{2max}\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_j^T||\Delta\mathbf{g}||^2_{2max}\mathbf{F}_j < 0, \\ i < j \;\; tal\ que \;\; h_i \cap h_j \neq \emptyset. \end{array} \tag{5.27}$$

Prova Para o desenvolvimento da prova do Teorema 3 foram utilizadas as as propriedades do Apêndice C. Esta prova segue os passos da prova do Lema 5, considerando adicionalmente os erros de modelagem.

De (5.20) e (5.3) tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ &= \left[\sum_{i=1}^{r}\alpha_i(\mathbf{x})(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i\sum_{j=1}^{r}\alpha_j(\mathbf{x})\mathbf{F}_j) + \Delta\tilde{\mathbf{f}} - \Delta\mathbf{g}\sum_{j=1}^{r}\alpha_j(\mathbf{x})\mathbf{F}_j\right]\mathbf{x} \\ &= \sum_{i=1}^{r}\alpha_i(\mathbf{x})\sum_{j=1}^{r}\alpha_j(\mathbf{x})\left[\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i\mathbf{F}_j + \Delta\tilde{\mathbf{f}} - \Delta\mathbf{g}\mathbf{F}_j\right]\mathbf{x} \\ &= \sum_{i=1}^{r}\alpha_i(\mathbf{x})\sum_{j=1}^{r}\alpha_j(\mathbf{x})\mathbf{Z}_{ij}\mathbf{x} \\ &= \sum_{i=1}^{r}\alpha_i(\mathbf{x})^2\mathbf{Z}_{ii}\mathbf{x} + 2\sum_{i<j}^{r}\alpha_i(\mathbf{x})\alpha_j(\mathbf{x})\left\{\frac{\mathbf{Z}_{ij} + \mathbf{Z}_{ji}}{2}\right\}\mathbf{x} \end{aligned}$$

sendo

$$\mathbf{Z}_{ii} = \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i\mathbf{F}_i + \Delta\tilde{\mathbf{f}} - \Delta\mathbf{g}\mathbf{F}_i,$$

$$\mathbf{Z}_{ij} = \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i\mathbf{F}_j + \Delta\tilde{\mathbf{f}} - \Delta\mathbf{g}\mathbf{F}_j$$

e $\Delta\tilde{\mathbf{f}}$ e $\Delta\mathbf{g}$ definidos em (4.61).

Considere a seguinte candidata à função de Lyapunov $\mathrm{V}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x} > 0$ sendo que $\mathbf{P} = \mathbf{P^T} > \mathbf{0}$.

$$\begin{aligned}\dot{\mathrm{V}} &= \dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} \\ &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\alpha_i(\mathbf{x})\alpha_j(\mathbf{x})\mathbf{x}^T[\mathbf{Z}_{ij}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{Z}_{ij}]\mathbf{x} \\ &= \sum_{i=1}^{r}\alpha_i(\mathbf{x})^2\mathbf{x}^T[\mathbf{Z}_{ii}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{Z}_{ii}]\mathbf{x} \\ &\qquad + 2\sum_{i=1}^{r}\sum_{i<j}^{r}\alpha_i(\mathbf{x})\alpha_j(\mathbf{x})\mathbf{x}^T\left\{\frac{(\mathbf{Z}_{ij}+\mathbf{Z}_{ji})^T}{2}\mathbf{P} + \mathbf{P}\frac{(\mathbf{Z}_{ij}+\mathbf{Z}_{ji})}{2}\right\}\mathbf{x}.\end{aligned} \tag{5.28}$$

Considere a matriz semidefinida positiva $\mathbf{Q}$ tal que a seguinte condição seja satisfeita:

$$\begin{gathered}\left(\frac{(\mathbf{Z}_{ij}+\mathbf{Z}_{ji})^T}{2}\mathbf{P} + \mathbf{P}\frac{(\mathbf{Z}_{ij}+\mathbf{Z}_{ji})}{2}\right) \leq \mathbf{Q} \\ i<j \quad tal\ que\ \ h_i \cap h_j \neq \emptyset.\end{gathered} \tag{5.29}$$

Do Apêndice D de Taniguchi et al. (2001), tem-se a seguinte relação:

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i^2(\mathbf{x}) - \frac{1}{s-1}\sum_{i<j}^{r}2\alpha_1(\mathbf{x})\alpha_j(\mathbf{x}) \geq 0. \tag{5.30}$$

Então, considerando (5.28), (5.29), (5.30):

$$\begin{aligned}\dot{\mathrm{V}} &\leq \sum_{i=1}^{r}\alpha_i(\mathbf{x})^2\mathbf{x}^T(\mathbf{Z}_{ii}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{Z}_{ii})\mathbf{x} + 2\sum_{i<j}^{r}\alpha_i(\mathbf{x})\alpha_j(\mathbf{x})\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} \\ &\leq \sum_{i=1}^{r}\alpha_i(\mathbf{x})^2\mathbf{x}^T(\mathbf{Z}_{ii}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{Z}_{ii})\mathbf{x} + (s-1)\sum_{i=1}^{r}\alpha_i(\mathbf{x})^2\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} \\ &= \sum_{i=1}^{r}\alpha_i(\mathbf{x})^2\mathbf{x}^T(\mathbf{Z}_{ii}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{Z}_{ii} + (s-1)\mathbf{Q})\mathbf{x} \\ &= \sum_{i=1}^{r}\alpha_i(\mathbf{x})^2\mathbf{x}^T\mathbf{Q}_{e2}\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Portanto, se existe $\mathbf{Q} \geq 0$ que satisfaz (5.29), (5.31) e

$$\mathbf{Q}_{e2} = \mathbf{Z}_{ii}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{Z}_{ii} + (s-1)\mathbf{Q} \leq 0 \ \ \forall i, \tag{5.31}$$

então $\dot{\mathrm{V}}(\mathbf{x}(t)) = \dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} < 0$ para $\mathbf{x} \neq 0$.

Substituindo

$$\mathbf{Z}_{ij} = \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i\mathbf{F}_j + \Delta\tilde{\mathbf{f}} - \Delta\mathbf{g}\mathbf{F}_j$$

em (5.31), tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{e2} &= \mathbf{A}_i^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}_i - \mathbf{F}_i^T\mathbf{B}_i^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}_i\mathbf{F}_i + \Delta\tilde{\mathbf{f}}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\Delta\tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{F}_i^T\Delta\mathbf{g}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\Delta\mathbf{g}\mathbf{F}_i + (s-1)\mathbf{Q} \\
&= \mathbf{A}_i^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}_i - \mathbf{F}_i^T\mathbf{B}_i^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}_i\mathbf{F}_i + (s-1)\mathbf{Q} - (\mathbf{P} - \Delta\tilde{\mathbf{f}})^T(\mathbf{P} - \Delta\tilde{\mathbf{f}}) \\
&\quad + \Delta\tilde{\mathbf{f}}^T\Delta\tilde{\mathbf{f}} + 2\mathbf{P}\mathbf{P} + \mathbf{F}_i^T\Delta\mathbf{g}^T\Delta\mathbf{g}\mathbf{F}_i - (\Delta\mathbf{g}\mathbf{F}_i + \mathbf{P})^T(\Delta\mathbf{g}\mathbf{F}_i + \mathbf{P}) \\
&\leq \mathbf{A}_i^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}_i - \mathbf{F}_i^T\mathbf{B}_i^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}_i\mathbf{F}_i + (s-1)\mathbf{Q} + \Delta\tilde{\mathbf{f}}^T\Delta\tilde{\mathbf{f}} + 2\mathbf{P}\mathbf{P} + \mathbf{F}_i^T\Delta\mathbf{g}^T\Delta\mathbf{g}\mathbf{F}_i \\
&= \mathbf{A}_i^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}_i - \mathbf{F}_i^T\mathbf{B}_i^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}_i\mathbf{F}_i + (s-1)\mathbf{Q} + ||\Delta\tilde{\mathbf{f}}||_2^2 + 2\mathbf{P}\mathbf{P} + \mathbf{F}_i^T||\Delta\mathbf{g}||_2^2\mathbf{F}_i \\
&\leq \mathbf{A}_i^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}_i - \mathbf{F}_i^T\mathbf{B}_i^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}_i\mathbf{F}_i + (s-1)\mathbf{Q} + ||\Delta\tilde{\mathbf{f}}||_{2max}^2 + 2\mathbf{P}\mathbf{P} + \mathbf{F}_i^T||\Delta\mathbf{g}||_{2max}^2\mathbf{F}_i.
\end{aligned}$$

Logo, se

$$\begin{gathered}
\mathbf{A}_i^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}_i - \mathbf{F}_i^T\mathbf{B}_i^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}_i\mathbf{F}_i + (s-1)\mathbf{Q} + ||\Delta\tilde{\mathbf{f}}||_{2max}^2 + 2\mathbf{P}\mathbf{P} \\
+\mathbf{F}_i^T||\Delta\mathbf{g}||_{2max}^2\mathbf{F}_i < 0
\end{gathered} \tag{5.32}$$

então $\dot{\mathrm{V}}(\mathbf{x}(t)) < 0$ para $\mathbf{x} \neq 0$.

A desigualdade (5.27) pode ser obtida de (5.29) de forma semelhante. A prova está concluída.

Taxa de Decaimento

Do Teorema 3, para uma candidata da função Lyapunov $\mathrm{V}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x^T P x}$ então $\dot{\mathrm{V}}(\mathbf{x}(t)) < 0$ se (5.26) e (5.27) são satisfeitas.

Logo, a condição $\dot{\mathrm{V}}(\mathbf{x}(t)) \leq -2\beta_{p2}\mathrm{V}(\mathbf{x}(\mathbf{t}))$ (Tanaka, Ikeda e Wang, 1998a) para toda trajetória é satisfeita para

$$\begin{gathered}
\mathbf{A}_i^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}_i - \mathbf{F}_i^T\mathbf{B}_i^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}_i\mathbf{F}_i + (s-1)\mathbf{Q} + ||\Delta\tilde{\mathbf{f}}||_{2max}^2 + 2\mathbf{P}\mathbf{P} \\
+\mathbf{F}_i^T||\Delta\mathbf{g}||_{2max}^2\mathbf{F}_i + 2\beta_{p2}\mathbf{P} < 0
\end{gathered} \tag{5.33}$$

e

$$\begin{gathered}
\mathbf{A}_i^T\mathbf{P} + \mathbf{A}_j^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}_i + \mathbf{P}\mathbf{A}_j - \mathbf{F}_j^T\mathbf{B}_i^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}_i\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_i^T\mathbf{B}_j^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}_j\mathbf{F}_i - 2\mathbf{Q} \\
+2||\Delta\tilde{\mathbf{f}}||_{2max}^2 + 4\mathbf{P}\mathbf{P} + \mathbf{F}_i^T||\Delta\mathbf{g}||_{2max}^2\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_j^T||\Delta\mathbf{g}||_{2max}^2\mathbf{F}_j + 4\beta_{p2}\mathbf{P} < 0
\end{gathered} \tag{5.34}$$

sendo $\beta_{p2} > 0$.

Multiplicando (5.33) e (5.34) do lado esquerdo e direito por $\mathbf{P}^{-1}$ e definindo $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$, tem-se:

$$\begin{gathered}
\mathbf{X}\mathbf{A}_i^T + \mathbf{A}_i\mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{F}_i^T\mathbf{B}_i^T - \mathbf{B}_i\mathbf{F}_i\mathbf{X} + (s-1)\mathbf{Y}_0 + \mathbf{X}||\Delta\tilde{\mathbf{f}}||_{2max}^2\mathbf{X} + 2\mathbf{I} \\
+\mathbf{X}\mathbf{F}_i^T||\Delta\mathbf{g}||_{2max}^2\mathbf{F}_i\mathbf{X} + 2\beta_{p2}\mathbf{X} < 0
\end{gathered} \tag{5.35}$$

e

$$\begin{gathered}
\mathbf{X}\mathbf{A}_i^T + \mathbf{X}\mathbf{A}_j^T + \mathbf{A}_i\mathbf{X} + \mathbf{A}_j\mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{F}_j^T\mathbf{B}_i^T - \mathbf{B}_i\mathbf{F}_j\mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{F}_i^T\mathbf{B}_j^T - \mathbf{B}_j\mathbf{F}_i\mathbf{X} - 2\mathbf{Y}_0 \\
+2\mathbf{X}||\Delta\tilde{\mathbf{f}}||_{2max}^2\mathbf{X} + 4\mathbf{I} + \mathbf{X}\mathbf{F}_i^T||\Delta\mathbf{g}||_{2max}^2\mathbf{F}_i\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{F}_j^T||\Delta\mathbf{g}||_{2max}^2\mathbf{F}_j\mathbf{X} + 4\beta_{p2}\mathbf{X} < 0
\end{gathered} \tag{5.36}$$

para $i, j = 1, 2, \ldots, r$, $i < j$ tal que $h_i \cap h_j \neq \emptyset$, sendo $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{XQX}$.

Portanto, o maior limite inferior para a taxa de decaimento que pode ser encontrado usando uma função de Lyapunov quadrática é obtido aplicando-se o complemento de Schur (Veja o Apêndice D) e resolvendo-se o seguinte problema de otimização em $\mathbf{X}$, $\mathbf{M}_j$, $j = 1, 2, \ldots, r$ e β_{p2}:

Maximize β_{p2} e encontre uma matriz simétrica $\mathbf{X}$ e matrizes $\mathbf{M}_j$, $j = 1, \ldots, r$, sujeito a

$$\begin{array}{l} \mathbf{X} > 0, \\ \mathbf{Y}_0 \geq 0, \\ \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{ii} & \mathbf{X} & \mathbf{M}_i^T \\ \mathbf{X} & {\rho_f}^2\mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{M}_i & 0 & {\rho_g}^2\mathbf{I} \end{bmatrix} > 0, \\ \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{ij} & \mathbf{X} & \mathbf{M}_i^T & \mathbf{M}_j^T \\ \mathbf{X} & 0.5{\rho_f}^2\mathbf{I} & 0 & 0 \\ \mathbf{M}_i & 0 & {\rho_g}^2\mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{M}_j & 0 & 0 & {\rho_g}^2\mathbf{I} \end{bmatrix} > 0, \end{array} \tag{5.37}$$

sendo

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{ii} &= -\pounds(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{X}, \mathbf{M}_i) - 2\beta_{p2}\mathbf{X} - (s-1)\mathbf{Y}_0 - 2\mathbf{I}, \\ \mathbf{W}_{ij} &= -\pounds(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{X}, \mathbf{M}_j) - \pounds(\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j, X, \mathbf{M}_i) - 4\beta_{p2}\mathbf{X} + 2\mathbf{Y}_0 - 4\mathbf{I}, \\ \rho_f &= \tfrac{1}{||\Delta_{fmax}||_2}, \\ \rho_g &= \tfrac{1}{||\Delta_{gmax}||_2}, \\ \pounds(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{X}, \mathbf{M}_i) &= \mathbf{X}\mathbf{A}_i^T + \mathbf{A}_i\mathbf{X} - \mathbf{M}_i^T\mathbf{B}_i^T - \mathbf{B}_i\mathbf{M}_i, \\ \pounds(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{X}, \mathbf{M}_j) &= \mathbf{X}\mathbf{A}_i^T + \mathbf{A}_i\mathbf{X} - \mathbf{M}_j^T\mathbf{B}_i^T - \mathbf{B}_i\mathbf{M}_j, \\ \pounds(\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j, \mathbf{X}, \mathbf{M}_i) &= \mathbf{X}\mathbf{A}_j^T + \mathbf{A}_j\mathbf{X} - \mathbf{M}_i^T\mathbf{B}_j^T - \mathbf{B}_j\mathbf{M}_i \end{aligned}$$

e $\Delta\tilde{\mathbf{f}}$ e $\Delta\mathbf{g}$ definidos em (4.61).

Os ganhos de realimentação $\mathbf{F}_j$, $j = 1, \ldots, r$ e uma $\mathbf{P}$ comum podem ser obtidos da seguinte forma:

$$\mathbf{P} = \mathbf{X}^{-1}, \quad \mathbf{F}_j = \mathbf{M}_j\mathbf{X}^{-1},$$

a partir das soluções $\mathbf{X}$ e $\mathbf{M}_j$, $j = 1, \ldots, r$,.

Exemplo 17

Considere o Exemplo 15.

Deseja-se obter o controle do sistema (3.46) utilizando o projeto de reguladores proposto nesta seção.

Os modelos locais $(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1)$ e $(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2)$ e as funções de pertinência são os mesmos definidos no Exemplo 15. As normas dos erros de aproximação para cada ponto da região de operação são apresentados na Figura 5.12.

Pela Figura 5.12, verifica-se que o maior erro de modelagem ocorre no ponto $x_1 = 41\pi/180\ rad$, e as normas dos erros são:

$$\begin{array}{rcl} ||\Delta_f||_{2max} & = & 0.0147, \\ ||\Delta_g||_{2max} & = & 0.0016. \end{array} \tag{5.38}$$

a) Taxa de Decaimento

O problema de projeto que considera a taxa de decaimento é definido por:

Maximize β_{p2} *e encontre* $\mathbf{X}$, $\mathbf{M}_1$ *e* $\mathbf{M}_2$ *sujeito a* $\mathbf{X} > 0$ *e (5.37) com* $\mathbf{x}_0 = [0.96\ 0\ 0\ 0]^T$.

Quando $\beta_{p2} = 1.1 = \beta_{1max}$, obtêm-se pelo MATLAB as matrizes $\mathbf{X}$, $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{M}_2$ que solucionam as LMIs acima. Os ganhos obtidos foram:

$$\begin{array}{l} \mathbf{F}_1 = 10^5 \begin{bmatrix} -2.1668 & -0.5977 & -0.3403 & -0.3948 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{F}_2 = 10^5 \begin{bmatrix} -1.4476 & -0.3993 & -0.2272 & -0.2636 \end{bmatrix}, \end{array}$$

$$\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 162.8126 & 44.9079 & 25.6122 & 29.7045 \\ 44.9079 & 12.3871 & 7.0641 & 8.1927 \\ 25.6122 & 7.0641 & 4.0414 & 4.6783 \\ 29.7045 & 8.1927 & 4.6783 & 5.4240 \end{bmatrix} \geq 0.$$

A Figura 5.15 mostra as respostas de $x_1(t)$, $x_3(t)$ e $u(t)$, sendo $max||u(t)||_2 = 147 * 10^3 (N)$.

b) Estabilidade + Taxa de Decaimento + Restrição na Entrada de Controle + Restrição na Saída de Controle:

Maximize β_{p2} *e encontre a matriz simétrica* $\mathbf{X}$ *e matrizes* $\mathbf{M}_1$ *e* $\mathbf{M}_2$ *sujeito a* $\mathbf{X} > 0$ *, (5.37), (5.8) e (5.9), com* $\mu = 380$, $\lambda = 20$, $\mathbf{C}_j = [0\ 0\ 1\ 0]$, $j = 1, 2$ *e* $\mathbf{x}_0 = [0.96\ 0\ 0\ 0]^T$.

A solução é obtida quando $\beta_{p2} = 0.26$:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{F}_1 & = & \mathbf{M}_1\mathbf{X}^{-1} = [\ \ -309.9447 \quad -81.6357 \quad -8.8509 \quad -20.4161\ ], \\ \mathbf{F}_2 & = & \mathbf{M}_1\mathbf{X}^{-1} = [\ \ -448.3915 \quad -125.7059 \quad -13.9225 \quad -33.9719\ ], \end{array}$$

$$\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1.4013 & 0.3923 & 0.0669 & 0.1341 \\ 0.3923 & 0.1106 & 0.0184 & 0.0372 \\ 0.0669 & 0.0184 & 0.0068 & 0.0087 \\ 0.1341 & 0.0372 & 0.0087 & 0.0183 \end{bmatrix} \geq 0.$$

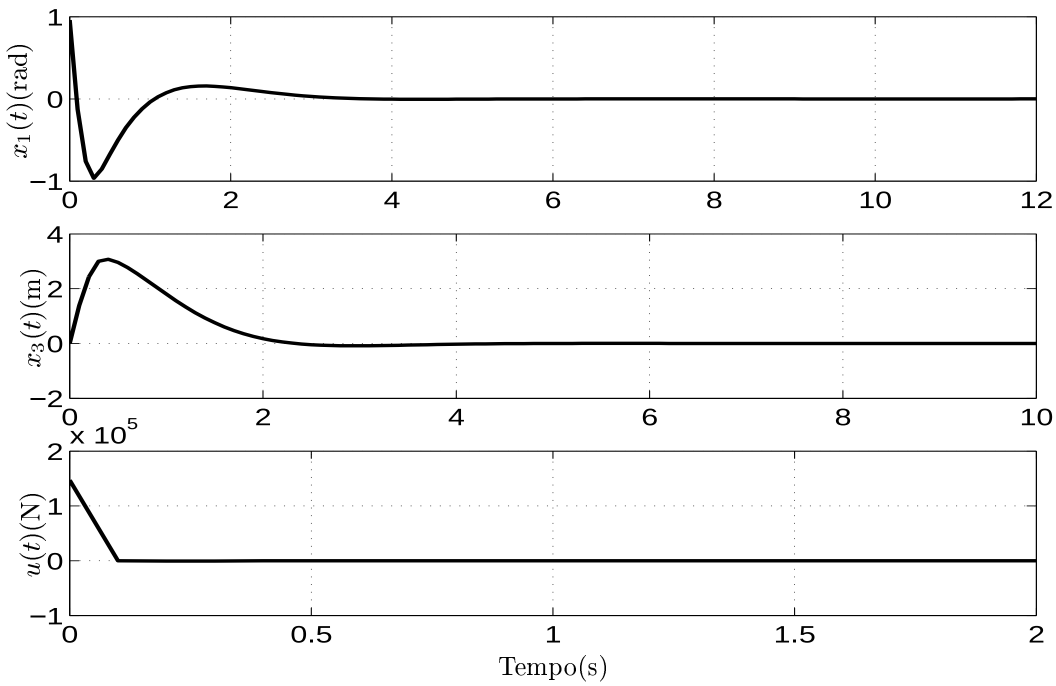

Figura 5.15: Projeto 2. Respostas de $x_1(t)$, $x_3(t)$, e $u(t)$ com dois modelos locais para condição inicial $\mathbf{x}(0) = [0.96\ 0\ 0\ 0]^T$, intervalo $-60\pi/180 \leq x_1 \leq 60\pi/180\ rad$ e considerando-se a taxa de decaimento máxima.

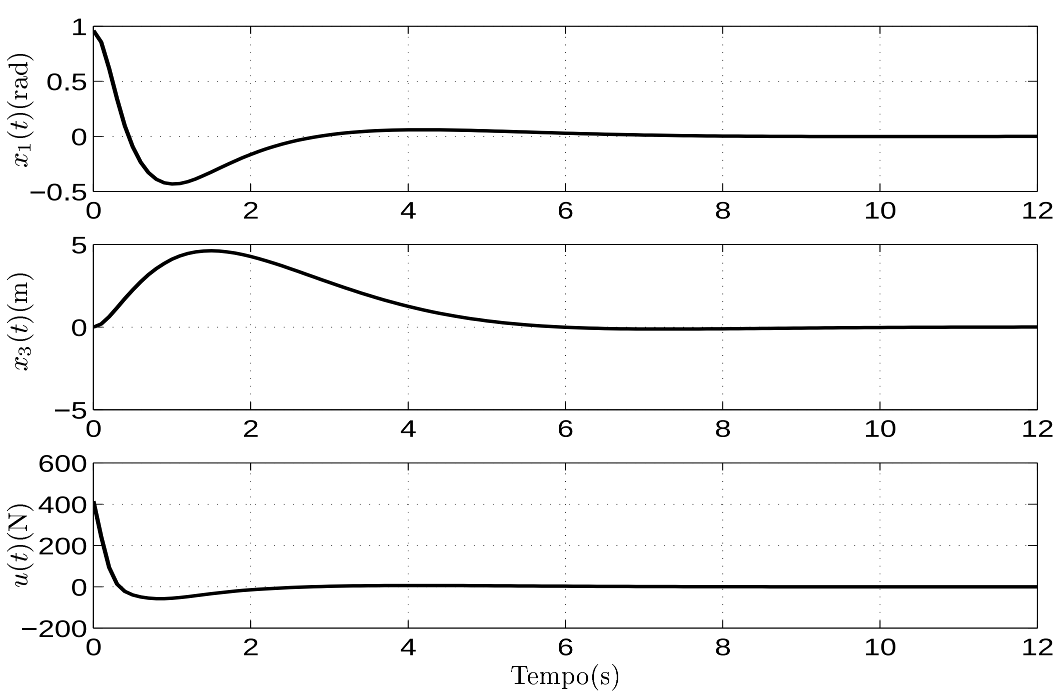

Figura 5.16: Projeto 2. Respostas de $x_1(t)$, $x_3(t)$, e $u(t)$ com dois modelos para condição inicial $\mathbf{x}(0) = [0.96\ 0\ 0\ 0]^T$, intervalo $-60\pi/180 \leq x_1 \leq 60\pi/180\ rad$ e considerando-se $\mu = 380$ e $\lambda = 20$.

A Figura 5.16 mostra a resposta de $x_1(t)$, $x_3(t)$ e $u(t)$. Pode ser verificados que as respostas satisfazem as restrições $max||u(t)||_2 = 414.6 < \mu\ (N)$ e $max||x_3(t)||_2 = 4.62 < \lambda\ (m)$.

Exemplo 18

Considere o Exemplo 16.

Deseja-se obter o controle do sistema (3.46) utilizando o projeto de reguladores proposto nesta seção.

Os modelos locais $(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1)$ e $(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2)$ e as funções de pertinência são os mesmos definidos no Exemplo 16. As aproximações *fuzzy* são apresentadas na Figura 5.11.

As normas dos erros de aproximação para cada ponto da região de operação são apresentados na Figura 5.12.

Pela Figura 5.12, verifica-se que o maior erro de modelagem ocorre no ponto $x_1 = 48\pi/180\ rad$, e as normas dos erros são:

$$\begin{array}{rcl} ||\Delta_f||_{2max} & = & 0.0278, \\ ||\Delta_g||_{2max} & = & 0.0028. \end{array} \tag{5.39}$$

a) Taxa de Decaimento

O problema de projeto que considera a taxa de decaimento é definido por:

Maximize β_{p2} *e encontre* $\mathbf{X}$, $\mathbf{M}_1$ *e* $\mathbf{M}_2$ *sujeito a* $\mathbf{X} > 0$ *e (5.37) com* $\mathbf{x}_0 = [0.96\ 0\ 0\ 0]^T$.

Quando $\beta_{p2} = 0.39 = \beta_{1max}$, obtêm-se pelo MATLAB as matrizes $\mathbf{X}$, $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{M}_2$ que solucionam as LMIs acima. Os ganhos obtidos foram:

$$\mathbf{F}_1 = 10^5 \begin{bmatrix} -1.3713 & -0.3963 & -0.0727 & -0.1442 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_2 = 10^5 \begin{bmatrix} -0.9553 & -0.2761 & -0.0506 & -0.1004 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 227.3665 & 65.7215 & 12.0704 & 23.9437 \\ 65.7215 & 18.9979 & 3.4884 & 6.9199 \\ 12.0704 & 3.4884 & 0.6457 & 1.2748 \\ 23.9437 & 6.9199 & 1.2748 & 2.5276 \end{bmatrix} \geq 0.$$

A Figura 5.17 mostra as respostas de $x_1(t)$, $x_3(t)$ e $u(t)$. Pode ser verificado que $max||u(t)||_2 = 10^5\ (N)$.

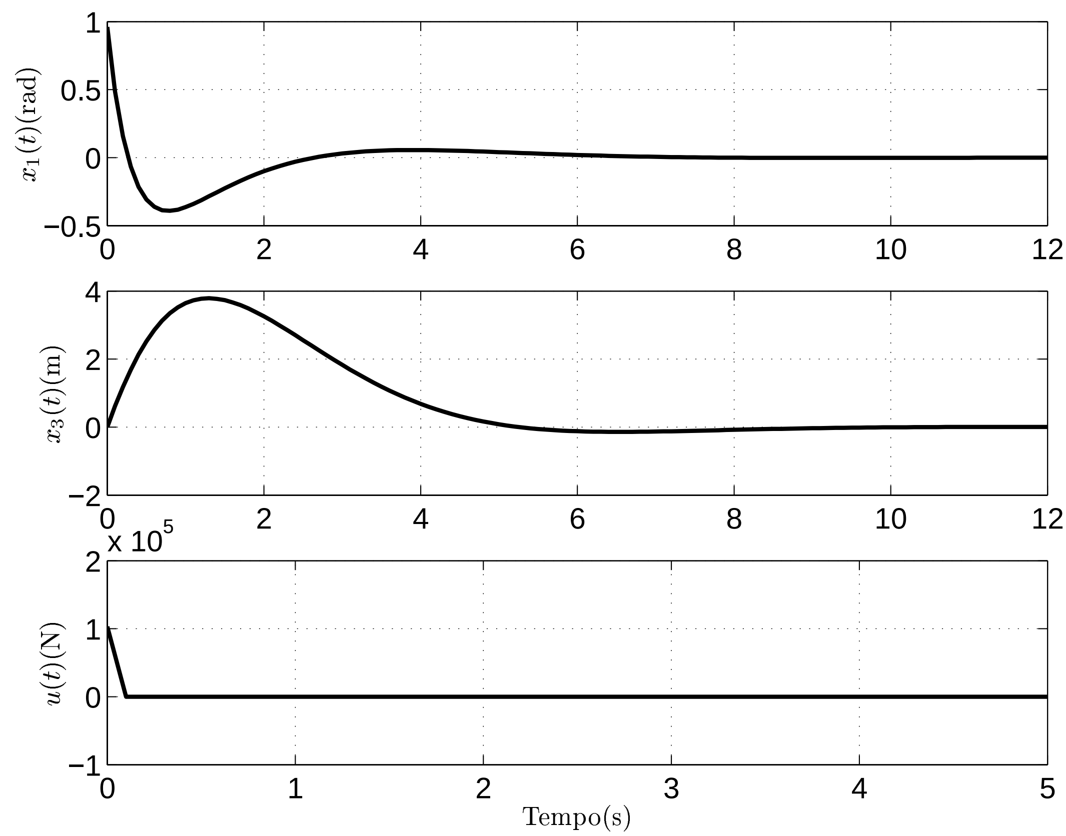

Figura 5.17: Projeto 2. Respostas de $x_1(t)$, $x_3(t)$, e $u(t)$ com dois modelos para condição inicial $\mathbf{x}(0) = [0.96\ 0\ 0\ 0]^T$, intervalo $-70\pi/180 \leq x_1 \leq 70\pi/180$ rad e considerando-se a taxa de decaimento máxima.

b) Estabilidade + Taxa de Decaimento + Restrição na Entrada de Controle + Restrição na Saída de Controle

Maximize β_{p2} *e encontre a matriz simétrica* $\mathbf{X}$ *e matrizes* $\mathbf{M}_1$ *e* $\mathbf{M}_2$ *sujeito a* $\mathbf{X} > 0$ *, (5.37), (5.8) e (5.9), com* $\lambda = 35$, $\mu = 450$, $\mathbf{C}_j = [0\ 0\ 1\ 0]$, $j = 1, 2$ *e* $\mathbf{x}_0 = [0.96\ 0\ 0\ 0]^T$.

Para as restrições de entrada $\mu = 450$ e de saída $\lambda = 35$ não foi possível obter uma solução factível. Portanto, para estas restrições não foi possível projetar os ganhos do regulador.

Uma solução para este problema é inserir um novo modelo local no ponto onde ocorreu o maior erro de modelagem $x_1 = 48\pi/180$ rad O problema de projeto dos ganhos do regulador para três modelos locais é definido a seguir:

Maximize β_{p2} *e encontre a matriz simétrica* $\mathbf{X}$ *e matrizes* $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ *e* $\mathbf{M}_3$ *sujeito a* $\mathbf{X} > 0$, *(5.37),(5.6), (5.7), (5.8) e (5.9), com* $\lambda = 35$, $\mu = 450$, $\mathbf{C}_j = [0\ 0\ 1\ 0]$, $j = 1, 2, 3$ *e* $\mathbf{x}_0 = [0.96\ 0\ 0\ 0]^T$.

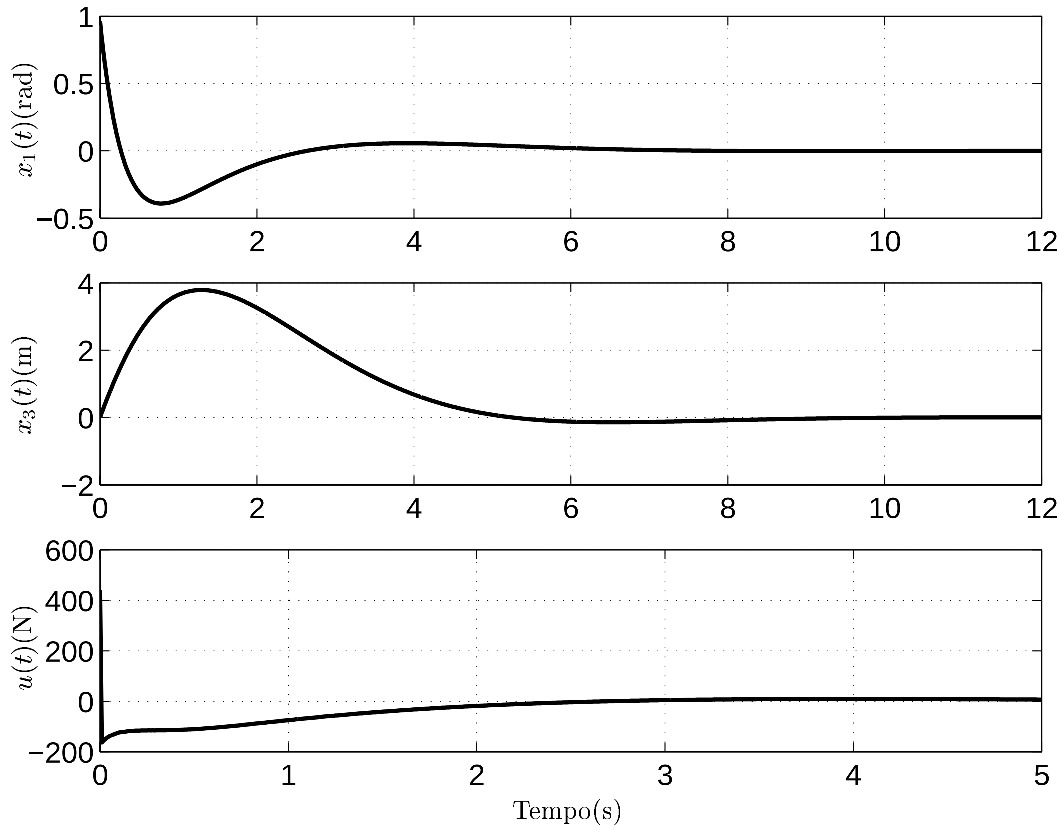

Figura 5.18: Projeto 2. Respostas de $x_1(t)$, $x_3(t)$, e $u(t)$ com três modelos para condição inicial $\mathbf{x}(0) = [0.96 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, intervalo $-70\pi/180 \leq x_1 \leq 70\pi/180$ rad e considerando-se $\mu = 450$ e $\lambda = 35$.

A solução é obtida quando $\beta_{p2} = 0.14$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_1 &= \mathbf{M}_1\mathbf{X}^{-1} = [\quad -354.1352 \quad -96.9399 \quad -5.3548 \quad -16.0512 \ ],\\
\mathbf{F}_2 &= \mathbf{M}_1\mathbf{X}^{-1} = [\quad -418.9455 \quad -117.9631 \quad -6.1981 \quad -18.2869 \ ],\\
\mathbf{F}_3 &= \mathbf{M}_1\mathbf{X}^{-1} = [\quad -559.4880 \quad -163.6720 \quad -8.7526 \quad -28.5556 \ ],
\end{aligned}$$

$$\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1.4537 & 0.4244 & 0.0342 & 0.0908 \\ 0.4244 & 0.1246 & 0.0098 & 0.0261 \\ 0.0342 & 0.0098 & 0.0019 & 0.0031 \\ 0.0908 & 0.0261 & 0.0031 & 0.0089 \end{bmatrix} \geq 0.$$

A Figura 5.18 mostra a resposta de $x_1(t)$ $x_3(t)$ e $u(t)$. A resposta do sistema satisfaz as restrições $max||u(t)||_2 = 439 < \mu$ (N) e $max||x_3(t)||_2 = 3.8 < \lambda(m)$.

A Tabela 5.1 apresenta um resumo dos índices de desempenho obtidos nos Exemplos (13), (15) e (17).

A Tabela 5.2 apresenta um resumo dos índices de desempenho obtidos nos Exemplos (14), (16) e (18). A Tabela 5.2 também apresenta os resultados obtidos para a resposta transitória com três modelos locais para o Exemplo (18).

Índices de Desempenho para $-60\pi/180 \geq x_1 \geq 60\pi/180\ rad$									
Métodos de Projeto	Resposta Transitória		Restrições						
	β	$t_s\ (s)$	$\mu_I(N)$	$\mu_O(N)$	$\lambda_I(m)$	$\lambda_O(m)$	β	$t_s\ (s)$
Exato (16 modelos)	0.5	4	380	372.0	20	5.58	0.02	8
Projeto 1 (2 modelos)	1.4	2	380	376.8	20	4.45	0.31	6
Projeto 2 (2 modelos)	1.1	3	380	414.6	20	4.62	0.26	6

Tabela 5.1: Índices de Desempenho para o intervalo $-60\pi/180 \leq x_1 \leq -60\pi/180\ rad$ e $\mathbf{x}_0 = [0.96\ 0\ 0\ 0]^T$; sendo que μ_I e λ_I são os valores impostos das restrições de entrada e saída e μ_0 e λ_0 são os valores obtidos, respectivamente; t_s é o tempo de estabelecimento; e β é a taxa de decaimento

Índices de Desempenho para $-70\pi/180 \geq x_1 \geq 70\pi/180\ rad$								
Métodos de Projeto	Resposta Transitória		Restrições					
	β	$t_s\ (s)$	$\mu_I(N)$	$\mu_O(N)$	$\lambda_I(m)$	$\lambda_O(m)$	β	$t_s\ (s)$
Exato (16 modelos)	0.25	3.5	450	$---$	35	$---$	$---$	$---$
Projeto 1 (2 modelos)	0.70	4.5	450	443.6	35	5.71	0.19	8
Projeto 2 (2 modelos)	0.39	6.0	450	$---$	35	$---$	$---$	$---$
Projeto 2 (3 modelos)	0.75	5.5	450	439.0	35	3.8	0.14	6

Tabela 5.2: Índices de Desempenho para o intervalo $-70\pi/180 \leq x_1 \leq -70\pi/180\ rad$ e $\mathbf{x}_0 = [0.96\ 0\ 0\ 0]^T$; sendo que μ_I e λ_I são os valores impostos das restrições de entrada e saída e μ_0 e λ_0 são os valores obtidos, respectivamente; t_s é o tempo de estabelecimento; e β é a taxa de decaimento.

As linhas tracejadas na Tabela 5.2 indicam que não foi possível obter resultados com as restrições impostas.

Pela Tabela 5.2, verifica-se que o segundo método, " Projeto 2 ", apresentou resultados infactíveis para o intervalo $-70\pi/180 \geq x_1 \geq -70\pi/180$ rad com dois modelos locais, para as restrições impostas. Isto ocorreu porque o erro de modelagem máximo obtido na aproximação com dois modelos locais, apresentado na Figura 5.12 é muito grande. A inclusão de um novo modelo local no ponto $x_1 = 48\pi/180$ rad reduziu o erro de modelagem e possibilitou o projeto dos ganhos do regulador.

Entretanto, os índices de desempenho do método de aproximação exata, mostram que o intervalo, $-70\pi/180 \geq x_1 \geq -70\pi/180$ rad, também é crítico para este método. Para as restrições impostas, não foi possível obter os ganhos do regulador.

Para o intervalo $-60\pi/180 \geq x_1 \geq -60\pi/180$ rad foi possível obter melhores índices de desempenhos do que o método de representação exata, como mostra a Tabela 5.1

Para o método "Projeto 1" os índices de desempenho para os dois intervalos considerados foram melhores em relação aos outros dois métodos.

5.5 Discussões Complementares

Dois métodos de projeto de reguladores *fuzzy*, denominados "Projeto 1" e "Projeto 2", com LMIs baseado na Função de Lyapunov foram propostos.

Nas condições de estabilidade destes projetos foram considerados os erros de aproximação.

O primeiro método, "Projeto 1", os erros de aproximação e as funções de pertinência são utilizadas nos cálculos dos ganhos. Todos os valores de $\mathbf{x}$ (no exemplo utilizado x_1) amostrados e considerados no conjunto χ (que representa a região de operação dos elementos de $\mathbf{x}$ que fazem parte das não-linearidades do sistema) foram utilizados nos cálculos.

Em geral, na literatura, na manipulação da função de Lyapunov $\mathbf{V}(\mathbf{x}(t))$ são realizadas majorações que resultam na eliminação das funções de pertinência no cálculo dos ganhos, como foi feito no método de projeto proposto em Taniguchi et al. (2001). Esta técnica foi aplicada para compor o segundo método. São obtidas as normas dos erros de aproximação das funções não-lineares nos pontos de χ. A norma máxima é considerada no projeto dos ganhos do regulador.

O controle de um pêndulo invertido foi utilizado para ilustrar a teoria. Foram apresentados dois exemplos.

O primeiro para o intervalo $-60\pi/180 \leq x_1 \leq 60\pi/180$ rad. Neste intervalo foi possível projetar o ganhos dos reguladores satisfazendo as restrições de entrada e saída com os três métodos. Foram utilizados dois modelos locais para os métodos “Projeto 1” e “Projeto 2”. Para o método de representação exata, utilizou-se dezesseis modelos locais. Não foi possível projetar os ganhos com nenhum tipo de redução.

O segundo exemplo foi para o intervalo $-70\pi/180 \leq x_1 \leq 70\pi/180\ rad$. Com dois modelos locais foi possível projetar os ganhos do regulador e impor restrições como taxa de decaimento, restrições no controle da entrada e da saída para o método “Projeto 1”.

Para o segundo método de projeto proposto, “Projeto 2”, que é obtido de forma similar ao proposto em Taniguchi et al. (2001), os resultados foram mais restritivos. Para esta região de trabalho, não foi possível projetar os ganhos atendendo a restrição de entrada imposta, com dois modelos locais. Para superar este problema um novo modelo local foi inserido no ponto onde ocorreu o maior erro de modelagem. A inclusão deste novo modelo local diminuiu os erros de aproximação e viabilizou o projeto dos ganhos do regulador atendendo as restrições de entrada e saída impostas.

Para o método proposto em Taniguchi et al. (2001), não foi possível realizar o projeto com as restrições impostas. Neste exemplo, também não foi possível obter a redução de regras para nenhum elemento não-linear.

Portanto, com os métodos propostos foi possível obter índices de desempenho superiores ao método de aproximação exata proposto Taniguchi et al. (2001), para o exemplo estudado e com as restrições impostas, com um número menor de modelos locais.

Verificou-se que, para os intervalos desejados, as funções de pertinência obtidas de forma analítica ou por meio de LMIs são coincidentes e podem ser armazenadas ou representadas por uma função polinomial utilizando, por exemplo, o *software* Matlab. Nas simulações do sistema foram utilizadas representações polinomiais de quarta ordem.

Com os resultados resta responder a seguinte questão: “Como um método de representação aproximada pode produzir índices de desempenho superiores a um método de representação exata?”.

A resposta a esta pergunta pode ser simples: a modelagem exata utiliza 2^s modelos locais e modela uma classe de sistemas mais ampla do que a considerada. Este fato ocorre porque para este método, os modelos locais são calculados a partir dos valores extremos das funções no intervalo de operação considerado, ou seja, são considerados somente os valores máximos e mínimos das funções não-lineares da planta.

Para os modelos locais apresentados em Teixeira e Żak (1999), e utilizados nos métodos de projeto propostos, são utilizadas mais informações sobre o sistema nos pontos de definição dos modelos locais, como os valores das funções não-lineares e gradientes destas funções (veja a equação (3.45)). Desta forma, os modelos locais são obtidos de forma mais elaborada e permitem projetar os reguladores com melhores índices de desempenho.

Outro resultado a ser observado é desempenho obtido com do método "Projeto 2". No segundo exemplo de projeto com este método foi possível verificar a influência que um novo modelo local posicionado no ponto onde ocorreu o maior erro de modelagem pode acarretar no projeto dos ganhos. Se as restrições de projeto não fossem satisfeitas com três modelos, novos modelos locais deveriam ser incluídos até que fossem obtidos os índices desejados. Então, deve-se atentar ao fato de que o número de novos modelos locais pode, em alguns casos, crescer consideravelmente, podendo se igualar ao número de modelos do método de representação exata.

Nos exemplos estudados, os métodos propostos permitiram projetar os ganhos com um número reduzido de modelos.

5.6 Contribuições e Perspectivas

As principais contribuições deste capítulo são:

1. Obtenção de novas condições de estabilidade para o projeto de reguladores para uma determinada classe de sistemas *fuzzy* Takagi-Sugeno;

2. Desenvolvimento de dois novos métodos de projeto de reguladores *fuzzy*.

   Projeto 1: utiliza um conjunto de pontos e o erro de aproximação para cada um destes pontos;

   Projeto 2: utiliza a norma do erro máximo obtido nas aproximações das funções;

As principais perspectivas a partir dos resultados obtidos são:

1. Analisar quantos e quais os pontos necessários para se projetar os ganhos com o método proposto na Seção 5.4.1;

2. Desenvolver novo métodos, a partir dos métodos propostos, considerando no projeto o erro de modelagem e também incertezas nos parâmetros da planta;

3. Desenvolver métodos similares de projeto a partir de dados relacionando a entrada e saída do sistema, obtidos experimentalmente.

Capítulo 6

Conclusões

O problema de modelagem e controle de sistemas não-lineares representados por modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno foi abordado. Novos métodos para se determinar os modelos locais, funções de pertinência e projeto de reguladores foram apresentados.

A primeira parte do trabalho enfocou a modelagem de sistemas não-lineares. Foram estudados dois métodos de modelagem descritos na literatura. O primeiro foi um método de representação exata proposto em Taniguchi et al. (2001) e o segundo, um método de modelagem utilizando modelos locais ótimos, proposto em Teixeira e Żak (1999).

Vários pesquisadores têm utilizado a fórmula que determina os modelos locais lineares descritos em Teixeira e Żak (1999), o que motivou um estudo mais aprofundado sobre estes modelos. Algumas propriedades da fórmula que determina os modelos locais foram exploradas e um novo método para se determinar os modelos locais foi proposto. O procedimento para se obter os novos modelos consiste em se acrescentar novos graus de liberdade ao sistema, uma espécie de pré-compensação. Os resultados e simulações apresentados mostram que aproximação obtida nas vizinhanças do ponto de operação com o novo método, é melhor do a obtida com os modelos locais originais, utilizando o método apresentado em Teixeira e Żak (1999). Estes resultados preliminares nos levam à seguinte conjetura: se a aproximação dos modelos locais abrange uma região maior do sistema então um número menor de modelos locais é necessário para representar este sistema. Estudos sobre os benefícios destes novos modelos estão sendo realizados, inclusive a sua aplicação em sistemas que não sejam representados por modelos *fuzzy*.

Ainda relacionado com a modelagem, foram concebidas novas funções de pertinência. Estas funções combinam os modelos locais e são responsáveis pelo grau de aderência do modelo *fuzzy* ao modelo de simulação. Assim, na determinação destas funções foi elaborado um problema de otimização onde buscou-se minimizar o erro entre as funções do modelo de simulação e sua representação *fuzzy*. Os modelos locais utilizados na determinação destas funções foram os modelos propostos em Teixeira e Żak (1999). A solução para este problema foi obtida de forma analítica e por meio de soluções de LMIs. A solução analítica não considera todas as restrições impostas pelo problema que determina as funções. Logo, o problema não foi resolvido por completo. Estudos mais avançados estão sendo realizados com o intuito de resolver o problema considerando todas restrições. Entretanto, a solução obtida até o momento foi suficiente para resolver o problema proposto para controlar o pêndulo invertido. A solução por LMIs considera todas as restrições do problema e utiliza um conjunto abrangente de pontos na região de operação da planta. Verificou-se ainda que, para as duas soluções, as funções de pertinência obtidas foram idênticas nos exemplos estudados (a modelagem de um pêndulo invertido com dois modelos locais).

Uma vez definido como obter os modelos locais e as funções de pertinência para combiná-los, resta ainda estabelecer em quais pontos do sistema serão extraídos os modelos locais. Este é um dos aspectos mais importantes da modelagem *fuzzy* porque, em geral, depende do conhecimento do projetista sobre a dinâmica do sistema.

Um algoritmo para determinar a localização dos pontos dos quais serão extraídos os modelos locais foi apresentado. O algoritmo consiste basicamente em se determinar os modelos nos pontos em que ocorrer o maior erro de modelagem. Este erro de modelagem é definido a partir de um problema de otimização, descrito por LMIs, que minimiza o erro de aproximação das funções não-lineares do sistema. O algoritmo se inicia com a aproximação da região de operação com os modelos locais definidos nos extremos desta região. Naturalmente este é um algoritmo heurístico, que pode não ser o ótimo, mas está de acordo com os princípios básicos da teoria *fuzzy* com modelos TS, que é o de eliminar os modelos locais das regiões onde as não linearidades são mais fracas e acrescentar modelos onde as não-linearidades são mais fortes. Um exemplo de aproximação utilizando o algoritmo foi ilustrado. Apenas as funções não-lineares do pêndulo invertido foram utilizadas como exemplo. A região proposta na ilustração serviu apenas para demonstrar os passos do algoritmo. Verificou-se que para representar as funções do pêndulo invertido para o intervalo $[-\pi, \pi]$ rad com uma boa precisão (menor que 1e-3), foram necessários oito modelos locais. Nas ilustrações apresentadas, verificou-se que os modelos locais realmente se concentram nas regiões onde as não-linearidades estão mais caracterizadas. Para o método de representação exata, para representar a mesma região são necessários dezesseis modelos locais.

Outro exemplo ilustrado para o intervalo $[-106\pi/180, 106\pi/180]$ rad utiliza três modelos locais para se obter uma boa representação de todas funções não-lineares, enquanto que para o método de representação exata, para se obter uma boa aproximação de todas as funções, são ainda necessários dezesseis modelos locais.

Na segunda parte do trabalho abordou-se o projeto de reguladores *fuzzy*. Utilizando-se o conceito de Compensação Distribuída Paralela e condições de estabilidade usando funções de Lyapunov foram propostos dois métodos de projeto de reguladores.

No primeiro método, obteve-se os modelos locais utilizado (3.45) e definiu-se um conjunto abrangente de pontos da região de operação das componentes do vetor de estado que fazem parte das não-linearidades do sistema (os pontos deste conjunto devem ser escolhidos de forma a representar adequadamente as funções não-lineares do sistema e das funções de pertinência). Então, determinou-se o erro de aproximação para cada ponto deste conjunto. O regulador é projetado considerando todos os pontos definidos e seus respectivos erros de aproximação. Nenhuma informação é desprezada e não é feito nenhum tipo de majoração na manipulação da função de Lyapunov. Desta forma, as funções de pertinência participam diretamente da determinação dos ganhos do regulador.

No segundo método, o projeto do regulador foi desenvolvido considerando-se as regras ativas. Na obtenção dos ganhos do regulador, foi utilizada apenas a norma do erro no ponto onde ocorreu o maior erro de aproximação. Este método é desenvolvido de forma similar ao proposto em Taniguchi et al. (2001). Mas, ele é simplificado e possui um número menor de LMIs, pois, por exemplo, para as funções de pertinência, obtidas por LMIs ou por solução analítica, $\alpha_i(\mathbf{x}).\alpha_j(\mathbf{x}) = 0 \; \forall \; \mathbf{x} \in R^n$, para $j \neq i-1$, i e $i+1$.

Dois exemplos de projeto de reguladores ilustraram o desempenho do método de representação exata e dos métodos propostos. No primeiro exemplo, foi considerada a região $x_1 \in [-60\pi/180, 60\pi/180]\; rad$.

Para esta região os métodos propostos apresentaram, com dois modelos locais e sob as mesmas restrições do controle da entrada e da saída, taxas de decaimento maiores que as obtidas com o método de representação exata proposto em Taniguchi et al. (2001) (com dezesseis modelos locais).

No segundo exemplo, foi considerada a região $x_1 \in [-70\pi/180, 70\pi/180]\; rad$, que é uma região extrema de controle para o sistema estudado, utilizando-se dois modelos locais.

Para o primeiro método proposto, foi possível realizar o projeto dos ganhos do regulador, com dois modelos locais, taxa de decaimento e restrição na entrada e na saída de controle.

Para o segundo método, com dois modelos, não foi possível realizar o projeto com as restrições desejadas. Para resolver o problema foi inserido um novo modelo local no ponto onde ocorreu o maior erro de modelagem. Então, com três modelos locais, foi possível obter os ganhos do regulador atendendo as restrições de entrada e saída de controle.

Os resultados obtidos com o segundo método, "Projeto 2", reforçam a idéia de que a precisão com que é feita a aproximação do sistema com modelos *fuzzy* ao modelo de simulação pode ser tão boa quanto desejada e isto é feito com a inclusão de novos modelos locais. O algoritmo desenvolvido no Capítulo 4 é uma das soluções possíveis para se determinar onde incluir estes novos modelos locais. A inclusão de novos modelos pode, em alguns casos, fazer com que o número de modelos cresça consideravelmente podendo se igualar ao número de modelos do método de representação exata.

Para os exemplos analisados, que utilizam uma representação aproximada do sistema, os métodos de projeto propostos apresentaram melhores índices de desempenho do que o método de representação exata, com um número menor de modelos locais. Isto ocorreu porque os modelos locais, utilizados nos métodos propostos, são obtidos considerando mais informações sobre o sistema nos pontos de definição dos modelos locais (como exemplo, o valor das funções não-lineares e dos gradientes nestes pontos) do que o método de representação exata, que obtém os modelos considerando apenas os extremos das funções e modela uma classe mais ampla de sistemas do que a considerada. Além disso, o número de restrições (e conseqüentemente de LMIs) a serem satisfeitas pelo método de representação exata é consideravelmente maior do que nos métodos propostos.

Por simplicidade, todos os exemplos desenvolvidos consideraram funções não-lineares dependentes de uma única variável. Esta escolha foi proposital e útil para ilustrar, de forma simples, os tópicos abordados. No entanto, os modelos locais e as funções de pertinência podem ser obtidos a partir de funções dependentes de várias variáveis, sem qualquer restrição. O mesmo ocorre para o projeto dos reguladores, desde que os sistemas a serem controlados pertençam à classe de sistemas especificada, ou seja, que possa ser representado na forma (5.20).

6.1 Perspectivas para Trabalhos Futuros

As perspectivas sobre cada tema abordado foram apresentadas ao final de cada capítulo. Em resumo, as principais perspectivas são:

- **Modelos locais**

  1. Obter uma solução analítica para os modelos locais com novos graus de liberdade.
  2. Verificar se há benefícios do uso novos modelos na modelagem e controle de sistemas representados ou não por modelos *fuzzy*, comparando com modelos descritos na literatura.

- **Funções de Pertinência**

  1. Obter uma solução analítica completa para o problema que determina as funções de pertinência.
  2. Desenvolver um novo conjunto de funções de pertinência a partir dos novos modelos locais obtidos com os novos graus de liberdade.

- **Projeto de Reguladores**

  1. Desenvolver novos métodos de projeto que considerem de forma integrada o erro obtido na especificação das funções de pertinência.
  2. Utilizar os novos modelos locais obtidos com novos graus de liberdade no desenvolvimento de um novo método de projeto.
  3. Considerar incertezas nos parâmetros da planta nos métodos de projeto desenvolvidos.
  4. Estudo sobre métodos similares de projeto que utilizem dados de entrada e saída do sistema, obtidos experimentalmente.

Apêndice A

Construindo o Modelo de Simulação

Nesta seção, é apresentado um modelo de simulação de um sistema não-linear conhecido como pêndulo invertido. Esta modelagem foi extraída do artigo Teixeira e Żak (1999). Na obtenção deste modelo verdadeiro foram utilizadas as leis de Newton, de uma forma similar ao modelo obtido em Kwakernaak e Sivan (Kwakernnak e Sivan, 1972), e Ogata (Ogata, 1997), onde os modelos linearizados do pêndulo invertido foram desenvolvidos. Uma forma alternativa, usando o método de D'Alembert, pode ser encontrado em Cannon (1967, Seção 22.4). Então este modelo é usado para construir o modelo de projeto fuzzy. Um diagrama de um pêndulo invertido sobre um carro, é mostrado na Figura A.1:

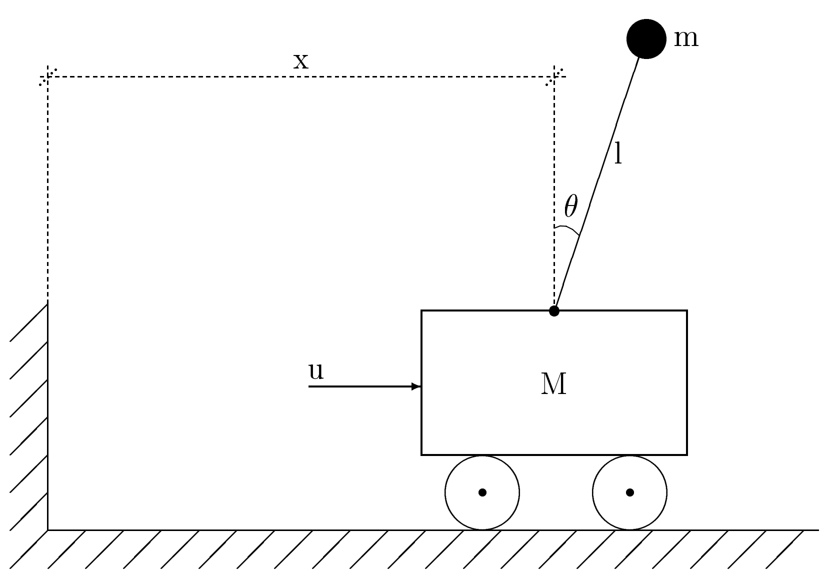

Figura A.1: Pêndulo invertido sobre um carro.

As forças de reação horizontal e vertical são denotadas por $H = H(t)$ e $V = V(t)$, respectivamente. O x e y são as coordenadas dos eixos de coordenadas xy. O deslocamento angular da haste da posição vertical é denotado por $\theta = \theta(t)$.

A massa do carro é denotada por M, enquanto que a massa da haste é m. O comprimento da haste é l, e seu centro de gravidade é o seu centro geométrico. A força de controle aplicada no carro é denominada por u. Assume-se que a roda do carro não deslisa.

A força de fricção da roda do carro sobre o trilho é dada por

$$f_c = \mu_c \mathrm{sign}(\dot{x}), \tag{A.1}$$

sendo μ_c o coeficiente de fricção do carro. Friedland (Friedland, 1996, página 201) refere-se a este modelo de fricção como o modelo de fricção clássico de Coulomb.

Considere (x_G, y_G) como as coordenadas do centro de gravidade da haste. Então

$$\begin{cases} x_G &= x + l\sin(\theta) \\ y_G &= l\cos(\theta). \end{cases} \tag{A.2}$$

A seguir serão descritas as equações do sistema. A equação que descreve o movimento de rotação da haste sobre seu centro de gravidade é obtida aplicando a versão rotacional da segunda Lei de Newton. Somando os momentos sobre o centro de gravidade da haste, obtém-se

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = Vl\sin(\theta) - Hl\cos(\theta), \tag{A.3}$$

sendo

$$J = \int_{-l}^{l} r^2 dm = ml^2/3. \tag{A.4}$$

A equação que descreve o movimento horizontal do centro de gravidade da haste é obtida aplicando a segunda lei de Newton ao longo do eixo x

$$m\frac{d^2}{dt^2}\left(x + l\sin(\theta)\right) = H. \tag{A.5}$$

Desenvolvendo a diferenciação, obtém-se

$$m\left(\ddot{x} + l\left(-\dot{\theta}^2\sin(\theta) + \ddot{\theta}\cos(\theta)\right)\right) = H. \tag{A.6}$$

A equação que descreve o movimento vertical do centro de gravidade da haste é obtida aplicando a segunda lei de Newton ao longo do eixo y:

$$m\frac{d^2}{dt^2}\left(l\cos(\theta)\right) = V - mg. \tag{A.7}$$

Desenvolvendo a diferenciação indicada acima, obtém-se

$$ml\left(-\dot{\theta}^2\cos(\theta) - \ddot{\theta}\sin(\theta)\right) = V - mg. \tag{A.8}$$

Finalmente, aplicando a segunda lei de Newton para o carro

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = u - H - f_c. \tag{A.9}$$

Substituindo (A.9) em (A.6) obtém-se

$$m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2\sin(\theta) + f_c = u - M\ddot{x}. \tag{A.10}$$

Substituindo agora a equação (A.8) e (A.9) em (A.3), então

$$\begin{aligned} J\ddot{\theta} &= \left(mg - ml\dot{\theta}^2\cos(\theta) - ml\ddot{\theta}\sin(\theta)\right) l\sin(\theta) + f_c l\cos(\theta) \\ &\quad - (u - M\ddot{x})\, l\cos(\theta). \end{aligned} \tag{A.11}$$

A seguir, substitui-se $u - M\ddot{x}$ de (A.10) em (A.11) e desenvolvendo as manipulações obtém-se

$$J\ddot{\theta} = mgl\sin(\theta) - ml^2\ddot{\theta} - m\ddot{x}l\cos(\theta). \tag{A.12}$$

Considere

$$a = \frac{1}{m+M}.$$

Então, pode-se representar (A.10) como

$$\ddot{x} = -mal\ddot{\theta}\cos(\theta) + mal\dot{\theta}^2\sin(\theta) - af_c + pu. \tag{A.13}$$

Substituindo (A.13) em (A.12) obtém-se

$$\ddot{\theta} = \frac{mgl\sin(\theta) - m^2l^2a\dot{\theta}^2\sin(2\theta)/2 + mal\cos(\theta)f_c - mal\cos(\theta)u}{J - m^2l^2a\cos^2(\theta) + ml^2}. \tag{A.14}$$

Considere $x_1 = \theta$ e $x_2 = \dot{\theta}$. Usando a expressão para J, dada por (A.4), pode-se representar (A.14) na forma de espaço de estado como a seguir

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g\sin(x_1) - mlax_2^2\sin(2x_1)/2 + a\cos(x_1)f_c}{4l/3 - mla\cos^2(x_1)} \\ &\quad - \frac{mal\cos(x_1)u}{4ml^2/3 - m^2l^2a\cos^2(x_1)}. \end{aligned} \tag{A.15}$$

Substituindo $\ddot{\theta}$, obtida de (A.12), em (A.13) obtém-se

$$\ddot{x} = \frac{-mag\sin(2x_1)/2 + ax_2^2\sin(x_1)4ml/3 + (u - f_c)4p/3}{4/3 - ma\cos^2(x_1)}. \tag{A.16}$$

Considere $x_3 = x$ e $x_4 = \dot{x}$. Combinando (A.15) e (A.16) pode-se obter um modelo de espaço de estados do pêndulo invertido sobre um carro da forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{g\sin(x_1) - mlax_2^2\sin(2x_1)/2}{4l/3 - mla\cos^2(x_1)} \\ x_4 \\ \frac{-mag\sin(2x_1)/2 + plx_2^2\sin(x_1)4m/3}{4/3 - ma\cos^2(x_1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-a\cos(x_1)}{4l/3 - mla\cos^2(x_1)} \\ 0 \\ \frac{4p/3}{4/3 - ma\cos^2(x_1)} \end{bmatrix} (u - f_c). \tag{A.17}$$

A equação (A.17) também pode ser representada por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{g\sin(x_1)}{4l/3 - mla\cos^2(x_1)} \\ x_4 \\ \frac{-maa\sin(2x_1)/2}{4/3 - ma\cos^2(x_1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-a\cos(x_1)}{4l/3 - mla\cos^2(x_1)} \\ 0 \\ \frac{4a/3}{4/3 - ma\cos^2(x_1)} \end{bmatrix} u_p \qquad \text{(A.18)}$$

sendo

$$u_p = (u - f_c + mlx_2^2\sin(x_1)). \qquad \text{(A.19)}$$

Em todos os exemplos desta tese serão considerados: g=9,8 m/s^2, M=8kg, m=2kg, l=0.5m.

Apêndice B

Construindo o Modelo de Projeto

Os pontos de equilíbrio de um sistema dinâmico são os pontos do espaço de estados, tais que, se o sistema for abandonado nestes pontos em $t = t_0$, ele permanecerá nestes pontos para $t > t_0$. Em problemas de controle, normalmente deseja-se trabalhar o mais próximo possível do ponto de operação, (outro nome de um ponto de equilíbrio).

Por exemplo, no caso de estabilização de uma planta não linear, constrói-se um controlador, partindo de uma condição inicial arbitrária em alguma vizinhança do ponto de operação, a trajetória do sistema de malha convergirá para o ponto de operação. Por outro lado, se o ponto inicial coincide com o ponto de operação, espera-se que a trajetória do sistema de malha fechada permaneçerá neste ponto por todo o tempo subseqüênte. A descrição acima supõe, naturalmente, que um ponto de operação deve ser um estado de equilíbrio assintoticamente estável do sistema de malha fechada.

O modelo de projeto é construído a partir do modelo de simulação. Para isto, uma descrição matemática do processo em termos do modelo verdadeiro e uma descrição linguística do processo são utilizadas para obter o modelo de projeto fuzzy. O modelo de projeto fuzzy é da forma de um modelo fuzzy TS. Os componentes essenciais deste modelo são os modelos locais lineares. Estes modelos locais lineares descrevem o comportamento dinâmico da planta em seus diferentes pontos de operação. A seguir será mostrado que, usando uma aproximação de linearização usual para construir modelos locais, pode-se obter em um modelo de projeto fuzzy diferente do que o projetista tinha em mente. Por exemplo, suponha que o modelo verdadeiro da planta tenha a forma:

$$\dot{\mathrm{x}} = \boldsymbol{f}(\mathrm{x}) + \boldsymbol{G}(\mathrm{x})\boldsymbol{u}. \tag{B.1}$$

Por simplicidade de notação, considere $\boldsymbol{F}(\mathrm{x}, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}(\mathrm{x}) + \boldsymbol{G}(\mathrm{x})\boldsymbol{u}$. Então, pode-se representar o modelo (B.1) como

$$\dot{\mathrm{x}} = \boldsymbol{F}(\mathrm{x}, \boldsymbol{u}). \tag{B.2}$$

Expandindo $\boldsymbol{F}$ por meio da série de Taylor em torno de $(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{u}_0)$ obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \boldsymbol{F}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{u}_0) + \left.\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \left.\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}} (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0) \\ &\quad + \text{termos de alta ordem}, \end{aligned} \tag{B.3}$$

sendo que

$$\boldsymbol{F}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{u}_0) = \boldsymbol{f}(\mathbf{x}_0) + \boldsymbol{G}(\mathbf{x}_0)\boldsymbol{u}_0. \tag{B.4}$$

Para escrever as expressões do o segundo e terceiro termos de (B) como as funções de $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{G}$, considere g_{ij} como sendo o elemento (i,j) da matriz $\boldsymbol{G}$. Então,

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} + \boldsymbol{H}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{u}_0), \tag{B.5}$$

sendo que o elemento (i, j) da matriz $\boldsymbol{H}$ $n \times n$ tem a forma

$$\sum_{k=1}^{m} u_k \left.\frac{\partial g_{ik}(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}}.$$

Finalmente,

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}} = \boldsymbol{G}(\mathbf{x}_0). \tag{B.6}$$

Um ponto $(\mathbf{x}_0^T, \boldsymbol{u}_0^T)^T \in \mathbb{R}^{n+m}$ é um ponto de equilíbrio de (B.2) se $\boldsymbol{F}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{u}_0) = \mathbf{0}$, isto é, se em $(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{u}_0)$, tivermos $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$. Considere $\delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ e $\delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0$. Note que

$$\frac{d\mathbf{x}_0}{dt} = \mathbf{0}.$$

Então, o modelo linearizado em torno do equilíbrio $(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{u}_0)$ é obtido negligenciando os termos de alta ordem e observando que para o ponto de equilíbrio $\boldsymbol{F}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{u}_0) = \mathbf{0}$. O modelo linearizado tem a forma

$$\frac{d}{dt}\delta\mathbf{x} = \mathbf{A}\delta\mathbf{x} + \mathbf{B}\delta\boldsymbol{u}, \tag{B.7}$$

sendo

$$\mathbf{A} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}}.$$

Para construir o modelo de projeto o primeiro passo é gerar modelos locais lineares que descrevem o comportamento da planta em pontos selecionados no espaço de estados. É natural costruir primeiro um um modelo local linear que descreve o comportamento da planta em torno do estado de equilíbrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Pode-se obter o primeiro modelo local linear usando a técnica de linearização descrita acima. O modelo resultante é dado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_1\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\boldsymbol{u}.$$

A seguir, constrói-se modelos locais lineares que descrevam o comportamento da planta nos outros pontos de operação remanescentes.

Suponha que $\mathbf{x} = \mathbf{x}_j$ seja o próximo ponto de interesse. O resultado da lineariação de Taylor do modelo não linear em torno de um ponto de operação, que não é um ponto de equilíbrio do sistema, é um modelo afim, não é um modelo linear.

Mesmo quando o ponto considerado é um ponto de equilíbrio diferente de $(x_0, u_0) = (0, 0)$, a linearização pelas séries de Taylor, em geral, não fornecerão modelo locais lineares. Realmente, suponha que o ponto de operação $(\mathbf{x}_j, \boldsymbol{u}_j)$ seja um ponto de equilíbrio, isto é

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{x}_j) + \boldsymbol{G}(\mathbf{x}_j)\boldsymbol{u}_j = \mathbf{0}. \tag{B.8}$$

O modelo linearizado resultante é

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) &= \boldsymbol{f}(\mathbf{x}_j) + \boldsymbol{G}(\mathbf{x}_j)\boldsymbol{u}_j + \mathbf{A}_j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) + \mathbf{B}_j(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_j) && \text{(B.9)} \\ &= \mathbf{A}_j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) + \mathbf{B}_j(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_j). && \text{(B.10)} \end{aligned}$$

Pode-se representar o modelo (B.10) na forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_j\mathbf{x} + \mathbf{B}_j\boldsymbol{u} - \left(\mathbf{A}_j\mathbf{x}_j + \mathbf{B}_j\boldsymbol{u}_j\right). \tag{B.11}$$

O termo $(\mathbf{A}_j\mathbf{x}_j + \mathbf{B}_j\boldsymbol{u}_j)$ não tem que ser igual a zero, e consequentemente o modelo (B.11) não é um modelo linear, ou seja, ele é um modelo afim. A análise apresentada neste apêndice tem como base os resultados descritos em Teixeira e Żak (1999).

Apêndice C

Propriedades Matemáticas

1. Produto da diferença

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}-\mathbf{B})^T(\mathbf{A}-\mathbf{B}) &= \mathbf{A}^T\mathbf{A}-\mathbf{A}^T\mathbf{B}-\mathbf{B}^T\mathbf{A}+\mathbf{B}^T\mathbf{B}\\ \mathbf{A}^T\mathbf{B}+\mathbf{B}^T\mathbf{A} &= \mathbf{A}^T\mathbf{A}+\mathbf{B}^T\mathbf{B}-(\mathbf{A}-\mathbf{B})^T(\mathbf{A}-\mathbf{B})\\ \mathbf{A}^T\mathbf{B}+\mathbf{B}^T\mathbf{A} &\leq \mathbf{A}^T\mathbf{A}+\mathbf{B}^T\mathbf{B}.\end{aligned}$$

   Portanto,

$$\Delta\tilde{\mathbf{f}}^T\mathbf{P}+\mathbf{P}\Delta\tilde{\mathbf{f}} \leq \Delta\tilde{\mathbf{f}}^T\Delta\tilde{\mathbf{f}}+\mathbf{P}\mathbf{P}.$$

   Veja Chen et al. (1999).

2. Produto da soma

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= \mathbf{A}^T\mathbf{A}+\mathbf{A}^T\mathbf{B}+\mathbf{B}^T\mathbf{A}+\mathbf{B}^T\mathbf{B}\\ -\mathbf{A}^T\mathbf{B}-\mathbf{B}^T\mathbf{A} &= \mathbf{A}^T\mathbf{A}+\mathbf{B}^T\mathbf{B}-(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T(\mathbf{A}+\mathbf{B})\\ -\mathbf{A}^T\mathbf{B}-\mathbf{B}^T\mathbf{A} &\leq \mathbf{A}^T\mathbf{A}+\mathbf{B}^T\mathbf{B}.\end{aligned}$$

   Portanto,

$$-\mathbf{F}_j^T\Delta\mathbf{g}^T\mathbf{P}-\mathbf{P}\Delta\mathbf{g}\mathbf{F}_j \leq \mathbf{F}_j^T\Delta\mathbf{g}^T\Delta\mathbf{g}\mathbf{F}_j+\mathbf{P}\mathbf{P}.$$

   Veja Chen et al. (1999).

3. Norma Euclidiana

$$||\mathbf{A}||_2 = \sqrt{\lambda_1}$$

   sendo que λ_1 é o maior autovalor da matriz $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$.

4. Norma máxima

$$\begin{aligned}||\Delta\tilde{\mathbf{f}}^T||_2 &\leq ||\Delta\tilde{\mathbf{f}}^T||_{2max}\\ ||\Delta\mathbf{g}^T||_2 &\leq ||\Delta\mathbf{g}^T||_{2max}\end{aligned}$$

   sendo $||\Delta\tilde{\mathbf{f}}^T||_{2max}$ e $||\Delta\mathbf{g}^T||_{2max}$ os valores máximos das normas Euclidianas de $\Delta\tilde{\mathbf{f}}^T$ e $\Delta\mathbf{g}^T$, respectivamente, na região de operação.

Apêndice D

Complemento de Schur

A idéia básica do complemento de Schur diz que a LMI (VanAntwerp e Braatz, 2000):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) & \mathbf{S}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{S}(\mathbf{x})^T & \mathbf{R}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} > \mathbf{0},$$

sendo que $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\mathbf{x})^T$, $\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}(\mathbf{x})^T$ e $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ têm uma dependência afim de $\mathbf{x}$, é equivalente a:

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) > 0 \text{ e } \mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{R}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{S}(\mathbf{x})^T > \mathbf{0}.$$

($\Rightarrow$) Suponha que:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) & \mathbf{S}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{S}(\mathbf{x})^T & \mathbf{R}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} > \mathbf{0} \tag{D.1}$$

e defina:

$$\mathbf{F}(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) & \mathbf{S}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{S}(\mathbf{x})^T & \mathbf{R}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}. \tag{D.2}$$

Então

$$\mathbf{F}(u, v) > 0, \ \forall [u, v] \neq \mathbf{0} \tag{D.3}$$

Considere, inicialmente, $u = 0$. Então:

$$\mathbf{F}(0, v) = v^T\mathbf{R}(\mathbf{x})v > \mathbf{0}, \ \forall \ v \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{R}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}.$$

Adote, agora,

$$v = -\mathbf{R}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{S}(\mathbf{x})^T u, \ \text{com } u \neq 0.$$

Então,

$$\mathbf{F}(u, v) = u^T(\mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{R}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{S}(\mathbf{x})^T)u > 0, \ \forall u \neq 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{R}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{S}(\mathbf{x})^T > \mathbf{0}.$$

Suponha que:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{R}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{S}(\mathbf{x})^T > 0, \ \mathbf{R}(\mathbf{x}) > 0. \tag{D.4}$$

Fixando-se u e otimizando-se em termos de v $\mathbf{F}(u,v)$ definido em (D.2), obtém-se:

$$\nabla_v F^T = 2\mathbf{R}(\mathbf{x})v + 2\mathbf{S}(\mathbf{x})^T u = 0 \tag{D.5}$$

Desde que $\mathbf{R}(\mathbf{x}) > 0$, de (D.5), segue que:

$$v = -\mathbf{R}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{S}(\mathbf{x})^T u. \tag{D.6}$$

Substituindo (D.6) em (D.2), então:

$$\mathbf{F}(u) = u^T(\mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{R}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{S}(\mathbf{x})^T)u.$$

Desde que $(\mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{R}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{S}(\mathbf{x})^T) > 0$, o mínimo de $\mathbf{F}(u)$ ocorre para $u = 0$, que também implica que $v = 0$. Então, o mínimo de $\mathbf{F}(u,v)$ ocorre em $(0,0)$ e é igual a zero. Portanto, $\mathbf{F}(u,v) > 0, \ \forall [u,v] \neq 0$, isto é,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) & \mathbf{S}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{S}(\mathbf{x})^T & \mathbf{R}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} > 0.$$

Referências Bibliográficas

Akar, M. e Özgüner, U. (1999). Decentralized parallel distributed compensator design for Takagi-Sugeno fuzzy systems, *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, Phoenix-Arizona, pp. 4834–4839.

Barada, S. e Singh, H. (1998). Generating optimal adaptive fuzzy-neural models of dynamical systems with applications to control, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics* **28**(3): 371–391.

Bellman, R. E. e Zadeh, L. A. (1970). Decision-making in a fuzzy environment, *Management Science* **17**(4): 141–164.

Bentalba, S., Hajjaji, A. E. e Rachid, A. (1998). Fuzzy sliding mode control of mobile robot, *Proceedings on the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa-Florida, pp. 4264–4265.

Bergsten, P., Palm, R. e Driankov, D. (2002). Observers for Takagi-Sugeno fuzzy systems, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics* **32**(1): 114–121.

Bezdec, J., Chandrasekhar, R. e Attikiouzel, Y. (1998). A geometric approach to edge detection, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **6**(1): 52–75.

Biasizzo, K., Skrjanc, I. e Matko, D. (1997). Fuzzy predictive control of highly nonlinear pH process, *Computers Chemistry Engineering* **21**: 613–618.

Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. e Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia,PA.

Campello, R. J. G. B. (2002). *Arquiteturas e metodologias para modelagem e controle de sistemas complexos utilizando ferramentas clássicas e modernas*, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação de Campinas - UNICAMP, Campinas-SP. Tese de Doutorado.

Campello, R. J. G. B. e Amaral, W. C. (2002a). Hierarchical fuzzy relational models: Linguistic interpretation and universal approximation, *Proceeding of the 11th IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, Honolulu-USA, pp. 162–167.

Campello, R. J. G. B. e Amaral, W. C. (2002b). Takagi-Sugeno fuzzy models within orthonormal basis function framework and their application to process control, *Proceedings of the 11th IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, Honolulu-USA, pp. 1399–1404.

Cannon, J. R. H. (1967). *Dynamics of Physical Systems*, McGraw-Hill, New York.

Cao, S. G., Rees, N. W. e Feng, G. (1996). Quadratic stability analysis and design of continuous-time fuzzy control systems, *International Journal of Systems Science* **27**(2): 193–203.

Cao, S. G., Rees, N. W. e Feng, G. (1997a). Lyapunov-like stability theorems for discrete-time fuzzy control systems , *International Journal of Systems Science* **28**(3): 297–308.

Cao, S. G., Rees, N. W. e Feng, G. (1997b). Further results about quadratic stability of continuous-time fuzzy control systems , *International Journal of Systems Science* **28**(4): 397–404.

Cao, S. G., Rees, N. W. e Feng, G. (2001). Universal fuzzy controllers for a class of nonlinear systems , *Fuzzy Sets and Systems* **122**: 117–123.

Cao, Y. Y. e Frank, P. M. (2000). Analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via fuzzy control approach, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **8**(2): 200–211.

Cao, Y. Y. e Lin, Z. (2003). Robust stability analysis and fuzzy scheduling control for nonlinear systems subject to actuator saturation, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **11**(1): 57–67.

Castro, J. L. (1995). Fuzzy logic controllers are universal approximators, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* **25**: 629–635.

Chang, W. J. (1999). Common observability Gramian assignment using discrete fuzzy control, *Proceedings of the 8th IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, Seoul-Korea, pp. 84–89.

Chang, W. J. (2000a). Model-based fuzzy controller design with common observability Gramian assignment, *ASME Journal Dynamic Systems, Measurement and Control* .

Chen, B. S. (1997). Nonlinear mixed H_2/H_∞ control for robust tracking design of robots systems, *International Journal Control* **67**: 837–857.

Chen, B. S., Tseng, C. S. e Uang, H. J. (1999). Robustness design of nonlinear dynamic systems via fuzzy linear control, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **7**(5): 571–585.

Chen, B. S., Tseng, C. S. e Uang, H. J. (2000). Mixed H_2/H_∞ fuzzy output feedback control design for nonlinear dynamic systems: An LMI Approach, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **8**: 249–265.

Chen, C. T. (1999). *Linear System Theory and Design*, 3rd Oxford University Press, New York.

Chen, W. e Wang, L. X. (2000). A note on universal approximation by hierarchical fuzzy systems, *Information Sciences* **123**: 241–248.

Chen, Y. e Xiao, D. (1999). Fuzzy identification and control algorithms based on an ETSK model, *Proceedings 1999 International Federation of Automatic Control (IFAC) World Congress*, Beijing-China, pp. 291–296.

Cheng, C. L. (1993). Analysis and design of fuzzy control systems, *Fuzzy Sets and Systems* **57**: 125–140.

Choi, S., Cheon, C. e Park., D. (1993). Moving switching surfaces for robust control of second order variable structure Systems, *International Journal Control* **58**: 229–245.

Chong, E. K. P. e Żak, S. H. (1996). *An Introduction to Optimization*, Wiley, New York-USA.

Daruichi, E. R. M. M., Teixeira, M. C. M. e Assunção, E. (2003). Construção e controle de modelos fuzzy Takagi-Sugeno reduzidos para sistemas não-lineares, *Proceedings of the SBAI - Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, Bauru, pp. 876–881.

Dexter, A. L. (1995). Fuzzy model-based fault-diagnosis, *IEE Proceedings -D: Control Theory Applicate*, Vol. 142, 6, pp. 545–550.

Diao, Y. e Passino, K. M. (2000). Fault diagnosis for a turbine engine, *Proceedings of the American Control Conference*, Chicago-Illinois, pp. 2393–2397.

Farinwata, S. S. (1993). Stability analysis of the fuzzy logic controller designed by the phase portrait assignment algorithm, *Proceeding of the 2nd International Conference on Fuzzy Systems*, pp. 1377–1382.

Farinwata, S. S. (1999). A robust stabilizing controller for a class of fuzzy systems, *Proceeding of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, Phoenix-Arizona, pp. 4355–4360.

Fayaz, A. M. (1999). On the Sugeno-Type fuzzy observers, *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, Phoenix-Arizona, pp. 4828–4833.

Feng, G., Cao, S. G., Rees, N. W. e Chak, C. K. (1997). Design of fuzzy control systems with guaranteed stability, *Fuzzy Sets and Systems* **85**: 1–10.

Feng, G. e Ma, J. (2001). Quadratic stabilization of uncertain discrete-time fuzzy dynamic systems, *IEEE Transactions on Circuits and Systems - I Fundamental Theory and Applications* **48**(11): 1337–1344.

Filev, D. (1991). Fuzzy modeling of complex systems, *International Journal Approximate Reasoning*, Vol. 5, pp. 281–290.

Filev, D. P. e Yager, R. R. (1997). Learning celibate fuzzy models, *Proceedings 7th IFSA World Congress*, Prague-Czech Republic, pp. 422–427.

Fink, A., Fischer, M., Nelles, O. e Isermann, R. (2000). Supervision of nonlinear adaptive controllers based on fuzzy models, *Control Engineering Practice* **8**: 1093–1105.

Fischer, M., Nelles, O. e Isermann, R. (1998). Adaptive predictive control of a heat exchanger based on fuzzy model, *Control Engineering Practice* **6**: 259–269.

Frank, P. M. e Kiupel, N. (1993). Fuzzy supervision and application to lean production, *International Journal System Science* **24**: 1935–1944.

Friedland, B. (1996). *Advanced Control Systems Design*, Prentice-Hall, New Jersey-USA.

Gazi, V. e Passino, K. M. (2000). Direct adaptive control using dynamic structure fuzzy systems, *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Chicago-Illinois, pp. 1954–1958.

Graham, B. P. e Newell, R. B. (1989). Fuzzy adaptive control of a first-order process, *Fuzzy Sets and Systems* **31**: 47–65.

Gu, Y., Wang, H. O. e Tanaka, K. (2001). Fuzzy control of nonlinear time-delay systems: Stability and design issues, *Proceedings of the 2001 American Control Conference*, Arlington, pp. 25–27.

Guillaume, S. (2001). Designing fuzzy inference systems from data: An interpretability-oriented review, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **9**: 426–443.

Guo, S., Shieh, L., Chen, G. e Lin, C. (2000). Effective chaotic orbit tracker: a prediction-based digital redesign approach, *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I Fundamental Theory and Application* **47**(11): 1557–1570.

Hadjili, M. L., Wertz, V. e Scorletti, G. (1998). Fuzzy model-based predictive control, *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa-Florida, pp. 2927–2929.

Hara, F. e Ishibe, M. (1992). Simulation study on the existence of limit cycle oscillation in a fuzzy control system, *Proceedings of the Korea-Japan Joint Conference on Fuzzy Systems and Engineering*, pp. 25–28.

Hirota, K. A., Arai, A. e Hachisu, S. (1989). Fuzzy controlled robot arm playing two-dimensional ping-pong game, *Fuzzy Sets and Systems* **32**(2): 149–159.

Hong, S. K. e Langari, R. (2000). An LMI-based H_∞ fuzzy control system design with TS framework, *Information Sciences* **123**: 163–179.

Hsiao, F. H. e Hwang, J. D. (2001). Stability analysis of fuzzy large-scale systems, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics- Part B* **32**(1): 122–126.

Huaguang, Z. e Bien, Z. (1998). Multivariable fuzzy generalizes predictive control approach and its performance analysis, *Proceedings of the American Control Conference*, Philadelphia, pp. 2276–2280.

Ichtev, A., Hellendoorn, J. e Babuska, R. (2001). Fault detection and isolation using multiple Takagi-Sugeno fuzzy model, *Proceedings of the 10th IEEE International Conference on Fuzzy Systems* pp. 1498–1502.

Inoue, H., Kamei, K. e Inoue, K. (1995). Auto-generation of fuzzy production rules using hyper-cone membership function by genetic algorithm, *Proceedings International Joint Conference CFSA/IFIS/SOFT'95*, pp. 53–58.

Ioannou, P. e Sun, J. (1996). *Robust adaptive control*, Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, New Jersey-USA.

Isermann, R. e Ulieru, M. (1993). Integrated fault detection and diagnosis, *In Proceedings of the IEEE Conference on Systems, Man and Cybernetics*, France, pp. 743–748.

Jadbabaie, A. (1999). A reduction in conservatism in stability and L_2 gain analysis of Takagi-Sugeno fuzzy systems via linear matrix inequalities, *Proceedings 1999 International Federation of Automatic Control (IFAC) World Congress*, China, pp. 285–289.

Jadbabaie, A., Titli, A. e Jamshidi., M. (1997). Fuzzy observer-based control of nonlinear systems, *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 3347–3349.

Joh, J., H., C. Y. e Langari, R. (1998). On the stability issues of linear Takagi-Sugeno fuzzy models, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **6**(3): 402–410.

Johansen, T. A. (1994). Fuzzy model based control: stability, robustness and performance issues, *IEEE Transactions on Fuzzy System* **2**: 221–234.

Johansen, T. A. (1996). Stability, robustness, and performance of fuzzy model based control, *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*, Kobe-Japan, pp. 604–609.

Johansen, T. A., Hunt, K. J. e Gawathrop, P. J. (1998). Transient performance, robustness and off-equilibrium linearizations in fuzzy gains scheduled control, *in Advances in Fuzzy Control* pp. 357–375.

Johansen, T. A., Shorten, R. e Smith, R. M. (1998). On the interpretation and identification of dynamic Takagi-Sugeno fuzzy models, *IEEE Transactions of Fuzzy and Systems* **8**(3): 297–313.

Johansson, M. e Malmborg, J. (1997). Modeling and control of fuzzy, heterogenous and hybrid systems, *Proceedings SICICA'97*, Annecy-France, pp. 33–38.

Johansson, M. e Rantzer, A. (1997). On the computation of piecewise quadratic Lyapunov function, *Proceedings 36th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 3515–3520.

Johansson, M. e Rantzer, A. (1998). Computation of piecewise quadratic Lyapunov functions for hybrid systems, *IEEE Transactions Automatic Control* **43**: 555–559.

Kadmiry, B. e Driankov, D. (2001). Fuzzy control of an autonomous helicopter, *IFSA World Congress and 20th NAFIPS International Conference* **5**: 2792–2802.

Katoh, R. (1993). Graphical stability analysis of a fuzzy control system, *Proceedings of IEEE International Conference on IECON'93*, Vol. 1, pp. 248–253.

Kawamoto, S. (1992). An approach to stability analysis of second order fuzzy systems, *Proceedings of First IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, Vol. 1, pp. 1427–1434.

Kawamoto, S. (1997). A new approach on fuzzy system and stability analysis for nonlinear control systems, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications* **30**(5): 3011–3018.

Kim, E. (2001). A new approaches to numerical stability analysis of fuzzy control systems, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part C: Applications and Reviews* **31**(1): 107–113.

Kim, E., Kang, H. J. e Park, M. (1999). Numerical stability analysis of fuzzy control system via quadratic programming and Linear Matrix Inequalities, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans* **29**(4): 333–346.

Kim, E. e Kim, D. (2001). Stability analysis and synthesis for an affine fuzzy system via LMI and ILMI: discrete case, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics* **31**(1): 132–140.

Kim, E. e Lee, H. (2000). New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems,, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **8**(5): 523–534.

Kim, E., Lee, H., Park, M. e Park, M. (1998). A simply identified Sugeno-type fuzzy model via double clustering, *Information Sciences* **110**: 25–39.

Kim, E., Park, M., Ji, S. e Park, M. (1997). A new approach to fuzzy modeling, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **5**(3): 328–337.

Kim, E., Park, M., Lee, H. J., Ji, S. e Park, M. (1996). Simple identified Sugeno-type fuzzy modeling, *Proceedings of 4th International Conference on Soft Computing*, Iizuka, pp. 448–451.

Kim, K., Joogseon, J., Langari, R. e Kwon, W. (1999). LMI-based design of T-S fuzzy controllers Using fuzzy estimator, *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, Phoenix-Arizona, pp. 4343–4348.

Kim, S., Cho, Y. e Park, M. (1996). A multirule-base controller using the robust property of a fuzzy controller and its design method,, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **4**: 315–327.

Kim, S. e Han, J. (1997). The design of sliding mode controller with nonlinear sliding surfaces, *Proceedings of ICASE*, Vol. 3, Seoul-Korea, pp. 36–41.

Kim, S. W., Kim, E. T. e Park, M. (1996). A new adaptive fuzzy controller using the parallel structure of fuzzy controller and its application, *Fuzzy Sets and Systems* **81**: 205–226.

Kiriakidis, K. (1999a). Takagi-Sugeno fuzzy modeling and control unmodeled dynamics and robustness, *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, Phoenix-Arizona, pp. 4361–4363.

Kiriakidis, K., Grivas, A. e Tzes, A. (1998). Quadratic stability analysis of the Takagi-Sugeno fuzzy models, *Fuzzy Sets and Systems* **98**: 1–14.

Kitamura, S. e Kurozumi, T. (1991). Extended circle criterion and stability analysis of fuzzy control systems, *Proceedings of the International Fuzzy Engineering Symposium.'91*, Vol. 2, pp. 634–643.

Kong, G. S. e Kosko, B. (1992). Adaptive fuzzy systems for backing up a truck-and-trailer, *IEEE Transactions Neural Networks* **3**: 211–223.

Korba, P. e Frank, P. (2000). An applied optimization-based gain-scheduled fuzzy control, *Proceedings of the American Control Conference*, Chicago-Illinois, pp. 3383–3387.

Kosko, B. (1997). *Fuzzy engineering*, Upper Saddle River, New Jersey 07458: Prentice-Hall, USA.

Kwakernnak, H. e Sivan, R. (1972). *Linear Optimal Control Systems*, Wiley, New York.

Langari, R. e Tomizuka, M. (1990). Analysis and synthesis of fuzzy linguistic control systems, *Proceedings ASME Winter Annual Meeting*, pp. 35–42.

Lee, H., Kang, E. K. H. J. e Park, M. (1998). Design of a sliding mode controller with fuzzy sliding surfaces, *IEEE Proceedings Control Theory Application*, Vol. 145, 5, pp. 411–418.

Lee, K. R., Lee, J. H., Jeung, E. T., Yun, H. O. e Park, H. B. (1999). Observer-based fuzzy H_∞ control for uncertain nonlinear systems with time delays, *Proceedings of the American Control Conference*, San Diego- California, pp. 1269–1273.

Lee, T. S., Chen, Y. H. e Chuang, J. (1998). Fuzzy modeling and uncertainty-based control for nonlinear systems, *Proceedings of the American Control Conference*, Philadelphia-Pennsylvania, pp. 2088–2092.

Leith, D. J. e Leithead, W. E. (1999). Analytic framework for blended multiple model systems using local linear models, *International Journal Control* **72**: 605–619.

Li, J., Niemann, D., Wang, H. O. e Tanaka, K. (1998). Multiobjective dynamic feedback control of Takagi-Sugeno model via LMIs, *Proceedings 4th Joint Conference of Information Science*, Vol. 1, Durham, pp. 159–162.

Li, J., Wang, H. O., Niemann, D. e Tanaka, K. (1999). Synthesis of gain-scheduled controller for a class of LPV Systems, *Proceedings 38th IEEE Conference on Decision and Control*, Phoenix, pp. 2314–2319.

Li, J., Wang, H. O., Niemann, D. e Tanaka, K. (2000). Dynamic parallel distributed compensation for Takagi-Sugeno fuzzy systems: an LMI approach, *Information Sciences* **123**: 201–221.

Lin, C. T., Juang, C. F. e Li, C. P. (2000). Water bath temperature control with a neural fuzzy inference network, *Fuzzy Sets and Systems* **111**: 285–306.

Ljung, L. (1999). *System identification: theory for the user*, 2nd ed, Prentice Hall.

Ma, X. J., Sun, Z. Q. e He, Y. Y. (1998). Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **6**(1): 41–51.

Mamdani, E. H. e Assilian, S. (1975). An experiment linguistic synthesis with a fuzzy logic controller, *International Journal Man Mach Studies* **7**(1): 1–13.

Marin, J. P. e Titli, A. (1995). Necessary and sufficient conditions for quadratic stability of a class of Takagi-Sugeno fuzzy systems, *Proceeding of EUFIT*, Aachen-Germany, pp. 786–790.

Marin, J. P. e Titli, A. (1997). Robust quadratic stabilizability of nonhomogeneous Sugeno's systems ensuring completeness of the closed-loop system, *Proceeding IEEE International Conference Fuzzy Systems*, Barcelona-Spain, pp. 185–192.

Marullo, A., Pollini, L., Giulietti, F. e Innocenti, M. (2001). Differential inclusion stability analysis of fuzzy gain-scheduling controlled systems, *Proceedings of the American Control Conference*, Arlington, pp. 4777–4781.

Matko, D., Biasizzo, K. K., Skrjanc, I. e Music, G. (2000). Generalized predictive control of a thermal plant using fuzzy model, *Proceedings of the American Control Conference*, Chicago-Illinois, pp. 2053–2057.

Mollov, S., Boom, T. V. D., Cuesta, F., Ollero, A. e Babuska, R. (2002). Robust stability constraints for fuzzy model predictive control, *IEEE Transactions of Fuzzy Systems* **10**(1): 50–64.

Mourot, G., Gasso, K. e Ragot, J. (1999). Modeling of ozone concentrations using a Takagi-Sugeno model, *Control Engineering Practice* **7**: 707–715.

Narendra, K. S. e Balakrishnan (1994). A common Lyapunov functions for stable LIT systems with commuting a-matrices, *IEEE Transactions on Automatic Control* **AC-39**: 2469–2471.

Niemann, D., Li, J., Wang, H. O. e Tanaka, K. (1999). Parallel Distributed Compensation for Takagi-Sugeno Fuzzy Models: New stability Conditions and Dynamic Feedback Designs, *Proceedings 1999 International Federation of Automatic Control (IFAC) World Congress*, Beijing, pp. 207–212.

Ogata, K. (1997). *Modern Control Engineering*, Prentice Hall, New Jersey-USA.

Oliveira, M. C., Farias, D. P. e Geromel, J. C. (1997). *LMISol, User's guide*, UNICAMP, Campinas-SP, Brasil.

Ordónez, R., Spooner, J. T. e Passino, K. M. (1996). Stable multi-input multi-output adaptive fuzzy control, *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*, Kobe-Japan, pp. 610–615.

Patton, R. J., Chen, J. e Toribio, L. C. J. (1998). Fuzzy observers for non-linear dynamic systems fault diagnosis, *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa-Florida, pp. 84–89.

Pedrycz, W. (1996). Fuzzy multimodels, *IEEE Transactions Fuzzy Systems* **4**(139-148).

Pedrycz, W. e Vasilakos, A. V. (1999). Linguistic models and linguistic modeling, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics - Part B: Cybernetics* **29**: 745–757.

Pietrobom, H. C. (1999). *Controle de sistemas não-lineares baseados em LMI utilizando modelos fuzzy*, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP, Ilha Solteira-SP. Tese de Mestrado.

Renders, J., Searens, M. e Bersini, H. (1997). Fuzzy adaptive control of a certain class of SISO discrete-time processes, *Fuzzy Sets and Systems* **85**: 49–61.

Rizk, M. R. M., Arabawy, I. F. e Khaddam, H. D. (2001). An algorithm for optimum stability region of fuzzy control systems using genetic algorithms, *Proceedings of the American Control Conference*, Arlington, pp. 192–197.

Ross, T. J. (1995). *Fuzzy logic with engineering applications*, McGraw-Hill, USA.

Roubos, J. A., Mollov, S., Babuska, R. e Verbruggen, H. B. (1999). Fuzzy model-based predictive control using Takagi-Sugeno models, *International Journal of Approximate Reasoning* **22**: 3–30.

Scherer, C., Gahinet, P. e Chilali, M. (1997). Multiobjective output-feedback control via LMI optimization, *IEEE Transactions Automatic Control* **42**: 896–911.

Söderström, T. e Stoica, P. (1989). *Predictive control*, Prentice Hall.

Setnes, M., Babuska, R. e Verbruggen, H. B. (1998). Rule-based modeling: precision and transparency, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics - Part C: Applications and Reviews* **28**: 165–169.

Shorten, R., Smith, S. M., Bjorgan, R. e Gollee, H. (1999). On the interpretation of local models in blended multiple model structures, *International Journal Control* **72**(7/8): 620–628.

Singh, S. (1992). Stability analysis of discrete fuzzy control systems, *Proceedings of First IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pp. 527–534.

Skrjanc, I. e Matko, D. (1999). Predictive functional control based on fuzzy model for heat-exchanger pilot plant, *Proceedings 1999 International Federation of Automatic Control (IFAC) World Congress*, Beijing-China, pp. 341–345.

Sousa, J. M., Babuska, R. e Verbruggen, H. B. (1997). Control Engineering Practice, **5**(10): 1395–1406.

Spooner, J. T. e Passino, K. M. (1995). Stable indirect adaptive control using fuzzy systems and neural networks, *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, pp. 243–248.

Spreitzer, K. e Ballé, P. (2000). A multi-model approach for detection and isolation of sensor and process faults for a heat exchanger , *Proceedings of the American Control Conference*, Chicago-Illinois, pp. 2730–2734.

Sugeno, M. (1988). *Fuzzy Control*, Nikkan Kougyo Shinbunsha Publisher, Tokyo.

Sugeno, M. e Kang, G. T. (1986b). Fuzzy modeling and control multilayer incinerator, *Fuzzy Sets and Systems* **18**: 329–346.

Sugeno, M. e Kang, G. T. (1988). Structure identification of fuzzy model, *Fuzzy Sets and Systems* **28**: 15–33.

Sugeno, M. e Nishida, M. (1985). Fuzzy control of model car , *Fuzzy Sets and Systems* pp. 103–113.

Sugeno, M. e Tanaka, K. (1991). Successive identification of a fuzzy model and its applications to prediction of a complex system, *Fuzzy Sets and Systems* **42**: 315–334.

Sugeno, M. e Yasukawa, T. (1993). A fuzzy-logic-based approach to qualitative modeling, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **1**: 7–31.

Takagi, T. e Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* **SMC-15**(1): 116–132.

Tanaka, K., Ikeda, T. e Wang, H. O. (1996a). Design of fuzzy control systems based on relaxed LMI stability conditions, *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*, Kobe-Japan, pp. 598–603.

Tanaka, K., Ikeda, T. e Wang, H. O. (1996b). Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control quadratic stabilizability H_∞ control theory, and linear matrix inequalities, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **4**(1): 1–13.

Tanaka, K., Ikeda, T. e Wang, H. O. (1997a). Controlling chaos via an model-based fuzzy control system design, *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego, pp. 1488–1493.

Tanaka, K., Ikeda, T. e Wang, H. O. (1998a). Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **6**(2): 250–265.

Tanaka, K., Ikeda, T. e Wang, H. O. (1998b). Fuzzy control of chaotic system using LMIs: regulation, synchronization and chaos model following, *Seventh International IEEE Conference on Fuzzy Systems*, Alaska, pp. 434–439.

Tanaka, K., Ikeda, T. e Wang, H. O. (1998c). A unified approach to controlling chaos via an LMI-based fuzzy control system design, *IEEE Transactions on Circuits and Systems* **45**(10): 1021–1040.

Tanaka, K. e Kosaki, T. (1997). Design of a stable fuzzy controller for an articulated vehicle, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernet-Part B* **27**(3): 552–558.

Tanaka, K., Kosaki, T. e Wang, H. O. (1996). Fuzzy control of an articulated vehicle and its stability analysis, *Proceedings 1996 International Federation of Automatic Control (IFAC) World Congress*, Vol. F, San Francisco, pp. 115–120.

Tanaka, K., Kosaki, T. e Wang, H. O. (1998). Backing control problem of a mobile robot with multiple trailers: fuzzy modeling and LMI-based design, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernet-Part C:Applications and Reviews* **28**(3): 329–337.

Tanaka, K., Nishimura, M. e Wang, H. O. (1998). Multi-objective fuzzy control of high rise/high speed elevators using LMIs, *Proceedings of the American Control Conference*, Philadelphia -Pennsylvania, pp. 3450–3454.

Tanaka, K., Ohtake, H. e Hori, T. (2001). Stable control for R/C helicopter, *IFSA World Congress and 20th NAFIPS International Conference* **4**: 2056–2061.

Tanaka, K. e Sano, M. (1993a). Fuzzy stability criterion of a class of nonlinear systems, *Information Science.* **71**: 3–26.

Tanaka, K. e Sano, M. (1994a). A robust stabilization problem of fuzzy control systems and its application to backing up control of a truck-trailer, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **2**(2): 119–134.

Tanaka, K. e Sugeno, M. (1990). Stability analysis of fuzzy systems using Lyapunov's direct method, *Proceedings of NAFIPS'90* pp. 133–136.

Tanaka, K. e Sugeno, M. (1992). Stability analysis and design of fuzzy control systems, *Fuzzy Sets and Systems* **45**(2): 136–156.

Tanaka, K. e Sugeno, M. (1993b). Concept of stability margin or fuzzy systems and design of robust fuzzy controllers, *Proceedings of the 2nd IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pp. 29–34.

Tanaka, K., Taniguchi, T. e Wang, H. O. (1998a). Model-based fuzzy control of TORA system: fuzzy regulator and fuzzy observer design via LMIs that represent decay rate, disturbance rejection, robustness, optimality, *Proceedings of the 7th IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, Alaska, pp. 313–318.

Tanaka, K., Taniguchi, T. e Wang, H. O. (1998b). Fuzzy control based on quadratic performance function - a linear matrix inequality approach, *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa-Florida, pp. 2914–2919.

Tanaka, K., Taniguchi, T. e Wang, H. O. (1999). An LMI approach to backing control of a vehicle with three trailers, *Eighth International Fuzzy Systems Association World Congress*, Vol. 2, Taipei, pp. 640–644.

Tanaka, K., Taniguchi, T. e Wang, H. O. (1999a). Robust and optimal fuzzy control: a linear matrix inequality approach, *Proceedings 1999 International Federation of Automatic Control (IFAC) World Congress*, Beijing-China, pp. 213–218.

Tanaka, K., Taniguchi, T. e Wang, H. O. (1999c). Trajectory control of an articulated vehicle with triple trailers, *IEEE International Conference on Control Applications*, Vol. 2, Hawaii.

Tanaka, K. e Wang, H. O. (2001). *Fuzzy control systems design and analysis - A linear matrix inequality approach*, John Wiley and Sons, Inc, USA.

Taniguchi, T., Tanaka, K., Ohatake, H. e Wang, H. O. (2001). Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **9**(4): 525–537.

Teixeira, M. C. M., Assunção, E. e Avellar, R. G. (2001). On relaxed LMI-based designs for fuzzy controller, *In Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Fuzzy Systems* pp. 704–707.

Teixeira, M. C. M., Assunção, E. e Avellar, R. G. (2003). On Relaxed LMI-Based Designs for Fuzzy Regulators and Fuzzy Observers, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **11**(5): 613–623.

Teixeira, M. C. M., Assunção, E. e Daruichi, E. R. M. M. (2003). A method for plotting complementary root locus using the root locus (positive gains) rules, *IEEE Transactions on Education (Artigo Aceito)* .

Teixeira, M. C. M., Assunção, E. e Pietrobom, H. C. (2001). On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers, *In Proceedings of the 2001 European Control Conference* pp. 120–125.

Teixeira, M. C. M., Daruichi, E. R. M. M. e Assunção, E. (1996). Idendificação rápida de sistemas dinâmicos com redes neurais de Hopfield, *Proceedings of the 11th Brazilian Automatic Control Conference - CBA*, São Paulo, pp. 543–548.

Teixeira, M. C. M., Daruichi, E. R. M. M. e Assunção, E. (1998). Idendificação rápida de sistemas dinâmicos com condições iniciais não nulas, *Proceedings of the 12th Brazilian Automatic Control Conference - CBA*, Urberlândia, pp. 1261–1266.

Teixeira, M. C. M., Daruichi, E. R. M. M. e Assunção, E. (2000). Idendificação rápida de sistemas dinâmicos com entrada e saída da planta, *Proceedings of the 13th Brazilian Automatic Control Conference - CBA*, Florianópolis, pp. 2282–2287.

Teixeira, M. C. M., Daruichi, E. R. M. M. e Assunção, E. (2002a). Construção de Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno Reduzidos para Sistemas Não-Lineares, *Proceedings of the 14th Brazilian Automatic Control Conference - CBA*, Natal, pp. 1885–1892.

Teixeira, M. C. M., Daruichi, E. R. M. M. e Assunção, E. (2002b). Um exemplo de construção de modelos fuzzy Takagi-Sugeno reduzidos com LMI, *Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações - DINCON*, São José do Rio Preto, pp. 987–992.

Teixeira, M. C. M., Pietrobom, H. C. e Assunção, E. (2000). Novos resultados para o projeto de reguladores fuzzy utilizando LMIs, *Controle e Automação* **11**: 37–48.

Teixeira, M. C. M. e Żak, S. H. (1999). Stabilizing controller design for uncertain nonlinear systems using fuzzy models , *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **7**(2): 133–142.

Thathachar, M. A. L. e Viswanath, P. (1997). On the Stability of Fuzzy Systems, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **5**(1): 145–151.

Tokunaga, M. e Ichihashi, H. (1992). Backer-upper control of trailer Truck by neuro-fuzzy optimal control, *Proceedings of 8th Fuzzy System Symposium*, pp. 49–52. in Japanese.

Tong, R. M. (1978). Synthesis of fuzzy models for industrial processes-some recent result, *International Journal General Systems* **4**: 143–162.

Toribio, C. J. L., Patton, R. J. e Davev, S. (1999). Supervisor Takagi-Sugeno fuzzy fault -tolerant control of a rail traction system, *Proceedings 1999 International Federation of Automatic Control (IFAC) World Congress*, Beijing-China, pp. 19–24.

Tuan, H. D., Apkarian, P., Narikiyo, T. e Yamamoto, Y. (2001). Parameterized Linear Matrix Inequality techniques in fuzzy control system design , *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **9**(2): 324–332.

VanAntwerp, J. G. e Braatz, R. D. (2000). A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities, *Journal of Process Control*, Vol. 10, pp. 363–385.

Wang, H. O. e Tanaka, K. (1996). An LMI-based stable fuzzy control of nonlinear systems and its application to control of chaos, *Proceedings of the 5th IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, Vol. 2, New Orleans-Louisiana, pp. 1433–1438.

Wang, H. O., Tanaka, K. e Griffin, M. F. (1995a). An analytical framework of fuzzy modeling and control of nonlinear systems: stability and design issues, *Proceedings of the American Control Conference*, Seattle, pp. 2272–2276.

Wang, H. O., Tanaka, K. e Griffin, M. F. (1995b). Parallel distributed compensation of nonlinear systems by Takagi-Sugeno's fuzzy models, *Proceedings of FUZZY-IEEE'95*, pp. 531–538.

Wang, H. O., Tanaka, K. e Griffin, M. F. (1996). An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **4**(1): 14–23.

Wang, H. O., Tanaka, K. e Ikeda, T. (1996a). Fuzzy modeling and control of chaotic systems, *1996 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, Vol. 3, Atlanta, pp. 209–212.

Wang, L. (1997). Mixed H_2/H_∞ control of nonlinear systems, *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, Vol. 12, New Orleans, pp. 333–338.

Wang, L. e Langari, R. (1995). A decomposition approach for fuzzy systems identification, *Proceedings of 34th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, pp. 261–266.

Wang, L. e Langari, R. (1995b). Building Sugeno-type models using fuzzy discretization and orthogonal parameter estimation techniques, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **3**: 454–458.

Wang, L. X. (1998). Universal approximation by hierarchical fuzzy systems, *Fuzzy Sets and Systems* **93**: 223–230.

Wang, L. X. (1999). Analysis and design of hierarchical fuzzy systems, *IEEE Transactions Fuzzy Systems* **7**: 617–624.

Will, A. B., Teixeira, M. C. M. e Żak, S. H. (1997). Four whell steering control systems design using fuzzy models, *Sixth IEEE Conference on Control Applications*, Hartford CT USA, pp. 73–78.

Yager, R. R. e Filev, D. P. (1994). *Essentials of fuzzy modeling and control*, John Wiley and Sons, USA.

Yamakawa, T. (1989). Stabilization of an inverted pendulum by a high-speed fuzzy logic controller hardware systems, *Fuzzy Sets and Systems* **32**: 161–180.

Yasunobu, S. e Miyamoto, S. (1985). Automatic train operation by predictive fuzzy control, *in Industrial Application of Fuzzy Control* **28**: 1–18.

Yasunobu, S., Sekino, S. e Hasegawa, T. (1987). Automatic train operation and automatic crane operation system based an predictive fuzzy control, *Proceedings 2nd IFSA Congress.*, Tokio-Japan, pp. 835–838.

Yen, J., Wang, L. e Gillespie, C. W. (1998). Improving the interpretability of TSK fuzzy model by combining global learning and local learning, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **6**(4): 530–537.

Yi, J. e Yubazaki, N. (2000). Stabilization fuzzy control of inverted pendulum systems, *Artificial Intelligence in Engineering* **14**: 153–163.

Yi, Z. e Heng, P. A. (2002). Stability of fuzzy control systems with bounded uncertain delays, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **10**(1): 92–97.

Ying, H. (1998e). General Takagi-Sugeno fuzzy systems with simplified linear rule consequent are universal controllers, models and filters, *Information Sciences, in press* .

Ying, H. (2000). Theory and application of a novel fuzzy PID controller using a simplified Takagi-Sugeno rule scheme, *Information Sciences* **123**: 281–293.

Yoneyama, J., Nishikawa, M., Katayama, H. e Ichikawa, A. (2000). Output stabilizations of Takagi-Sugeno fuzzy systems, *Fuzzy Sets and Systems* **111**: 253–266.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets, *Information and Control* **8**: 338–353.

Zadeh, L. A. (1968). Fuzzy algorithms, *Information and Control* **12**(2): 94–102.

Zadeh, L. A. (1971). Similarity relations and fuzzy ordering, *Information Sciences* **3**(2): 177–200.

Zadeh, L. A. (1973). Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* **SMC-3**(1): 28–44.

Zhang, H., He, X., Meng, Z. e Bien, Z. (1999). Multivariable FGPC controller and its performance analysis, *Proceedings 1999 International Federation of Automatic Control (IFAC) World Congress*, Beijing-China, pp. 223–228.

Zhao, J., Wertz, V. e Gorez, R. (1995). Linear TS fuzzy model based robust stabilizing controller design, *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 255–260.

Zheng, F., Wang, Q. G., Lee, T. H. e Huang, X. (2001). Robust PI controller design for nonlinear systems via fuzzy modeling approach, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part A: Systems and Humans* **31**(6): 666–675.