



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**

**Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica**

***VARIANTES DO MÉTODO DOS ELEMENTOS  
FINITOS PARA SOLUÇÃO DE FENÔMENOS  
CONVECTIVO-DIFUSIVOS BIDIMENSIONAIS***

**Estaner Claro Romão**

1210001492



**Ilha Solteira - SP**





unesp



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**

FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Defesa de Dissertação

**VARIANTES DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS  
PARA SOLUÇÃO DE FENÔMENOS  
CONVECTIVO-DIFUSIVOS BIDIMENSIONAIS**

Defesa de Dissertação apresentada à  
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira –  
UNESP, como parte dos requisitos para  
obtenção do título de Mestre em Engenharia  
Mecânica.

|                            |                                  |
|----------------------------|----------------------------------|
| <b>Aluno:</b>              | <b>Estaner Claro Romão</b>       |
| <b>Orientador:</b>         | <b>João Batista Aparecido</b>    |
| <b>Co-Orientador:</b>      | <b>João Batista Campos Silva</b> |
| <b>Data da Realização:</b> | <b>01/03/04</b>                  |
| <b>Horário:</b>            | <b>8:30</b>                      |
| <b>LOCAL:</b>              | <b>SALA DE SEMINÁRIO – M3</b>    |



FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação/Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da FEIS/UNESP

Romão, Estaner Claro

R761v Variantes do método dos elementos finitos para solução de fenômenos convectivo-difusivos bidimensionais / Estaner Claro Romão. -- Ilha Solteira : [s.n.], 2004  
160 p. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2004

Orientador: João Batista Aparecido

Co-orientador: Joãa Batista Campos Silva

Bibliografia: p. 146-150

1. Método dos elementos finitos. 2. Calor- Transmissão. 3. Mínimos quadrados. 4. Convecção-difusão.



# VARIANTES DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA SOLUÇÃO DE FENÔMENOS CONVECTIVO-DIFUSIVOS BIDIMENSIONAIS

*Estaner Claro Romão*

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO  
DO TÍTULO DE

**MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**

NA ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: "CIÊNCIAS TÉRMICAS" E APROVADA  
EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA MECÂNICA

*Prof. Dr. João Antônio Pereira*  
Coordenador

## COMISSÃO EXAMINADORA:

*Prof. Dr. João Batista Aparecido* - Orientador

*Luiz Felipe Mendes de Moura*  
Prof. Dr. Luiz Felipe Mendes de Moura

*Prof. Dr. André Luiz Seixlack*

*Doc. 063/04 - NPD 121/04*

|                                              |                 |
|----------------------------------------------|-----------------|
| UNESP - "CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA"            |                 |
| SERVIÇO TÉCNICO DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO |                 |
| DATA DE CHEGADA                              | DATA DE TOMBO   |
| <i>02.08.04</i>                              | <i>31.08.04</i> |
| REGISTRADO POR                               | TOMBO           |
| <i>Ailza</i>                                 | <i>Te. 1492</i> |
| AQUISIÇÃO                                    | CLASSIFICAÇÃO   |
| <i>Worran<br/>Antônio<br/>R\$10.00</i>       | <i>R761v</i>    |

Ilha Solteira - SP, fevereiro de 2004

BCpIS - FEIS - UNESP

unesp



ANÁLISE DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA  
ANÁLISE DE FENÔMENOS CONVECTIVO-DIFUSIVOS  
NUMERICALS

Resumo: O presente trabalho tem como objetivo

descrever a metodologia utilizada para a obtenção  
dos resultados.

Palavras-chave: Elementos finitos, Convecção, Difusão.

A metodologia utilizada para a obtenção dos resultados  
foi baseada na aplicação do método dos elementos finitos  
para a análise de fenômenos convectivo-difusivos.

Os resultados obtidos foram comparados com os resultados  
obtidos por outros autores, mostrando uma boa concordância.

Conclui-se que o método dos elementos finitos é uma  
ferramenta adequada para a análise de fenômenos convectivo-difusivos.

|                             |                             |
|-----------------------------|-----------------------------|
| UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO   | INSTITUTO DE FÍSICA         |
| DISCIPLINA: FÍSICA          | PROFESSOR: DR. JOÃO CARLOS  |
| ALUNO: JOÃO CARLOS          | DATA DE ENTREGA: 10/05/2010 |
| NOTA: 8,0                   | PROFESSOR: DR. JOÃO CARLOS  |
| ASSINATURA: DR. JOÃO CARLOS | DATA: 10/05/2010            |

À

***Dilce e Jaqueline***

*“... as pessoas se convencem, de que a sorte me ajudou,  
mas plantei cada semente que o meu coração desejou ...”*

Trecho da Música Coração Pirata  
interpretada pela banda Roupas Nova





unesp



# Agradecimentos

Lista de Agradecimentos

Resumo

Abstract

A Pós-Graduação e a CAPES pelo apoio técnico e financeiro, propiciando totais condições para o meu desenvolvimento durante o curso.

A todos os funcionários e professores envolvidos com curso que de forma direta ou indireta me ajudaram durante os dois anos de curso, em especial, quero agradecer a Elias Amaral dos Santos e o Prof. Dr. André Luiz Seixlack.

Aos meus inúmeros colegas e amigos de curso, peço um muito obrigado pela grandes momentos juntos, entre eles, Odacir, Miyasaki, Marco Donisete, Kátia Antonia, Kéteri, Vanessa Davanço, Rosiane, Sandhoerts, Gilson, e em muitíssimo especial, as minhas amigas: Edlene Cenedese, Rúbia Ap. Navas e Luciene Muniz Frigo, que não foram apenas grandes amigas, mas sim três “santas” pois me agüentaram enchendo o saco por dois anos.

Aos meus orientadores, João Batista Aparecido e João Batista Campos Silva agradeço o grande apoio acadêmico e a grande amizade.

Com relação aos meus familiares, agradeço do fundo do coração ao apoio que meus tios me deram na minha estadia em Ilha Solteira, tia Nair e tio Darci.

Finalmente dedico esta defesa de dissertação a Dilce Cândida Claro, Jaqueline Claro Polegatto, Antonio Manoel Claro e Benedita de Melo Claro, respectivamente, minha mãe, minha irmã, meu avô e minha avó, que nada mais são do que o alicerce da minha vida, são as pessoas que sempre estiveram do meu lado, em todo o momento.

E a Deus eu só tenho a agradecer pela minha existência, minha saúde e minha família.





## Sumário

### Lista de Símbolos

### Resumo

### Abstract

1. Introdução, *1*
2. Revisão Bibliográfica, *4*
3. Conceitos Fundamentais, *9*
  - 3.1 Funcionais – Primeira variação, *9*
  - 3.2 Produto Interno, Norma e Espaço de Funções, *10*
  - 3.3 Funções de Interpolação, *12*
  - 3.4 Elemento de Referência, *13*
  - 3.5 Tipos de Elementos, *15*
    - 3.5.1 Elementos Unidimensionais, *15*
    - 3.5.2 Elementos Bidimensionais, *17*
4. Método dos Resíduos Ponderados, *21*
  - 4.1 Introdução, *21*
  - 4.2 Método de Galerkin, *22*
  - 4.3 Método Petrov-Galerkin, *23*
  - 4.4 Método dos Mínimos Quadrados, *24*
5. Integração Numérica e Discretização Temporal, *26*
  - 5.1 Introdução – Quadratura de Gauss-Legendre, *26*
  - 5.2 Integração Numérica – Caso Unidimensional, *27*
    - 5.2.1 Aproximação da Geometria, *27*
    - 5.2.2 Quadratura de Gauss-Legendre, *28*
  - 5.3 Integração Numérica – Caso Bidimensional, *30*
    - 5.3.1 Transformação das Coordenadas, *30*
    - 5.3.2 Integração sobre o Elemento Quadrilateral, *33*

|       |                                                   |
|-------|---------------------------------------------------|
| 5.3.3 | Integração sobre o Elemento Triangular, 35        |
| 5.3.4 | Transformação das Integrais do Contorno, 36       |
| 5.4   | Discretização Temporal, 37                        |
| 6.    | Convecção-Difusão Unidimensional, 38              |
| 6.1   | Equação Modelo, 38                                |
| 6.2   | Formulação pelo Método de Galerkin, 38            |
| 6.3   | Formulação pelo Método Petrov-Galerkin, 42        |
| 6.4   | Formulação pelo Método dos Mínimos Quadrados, 44  |
| 7.    | Aplicações Numéricas Unidimensionais, 52          |
| 8.    | Convecção-Difusão Bidimensional, 76               |
| 8.1   | Equação Modelo, 76                                |
| 8.2   | Formulação pelo Método de Galerkin, 76            |
| 8.3   | Formulação pelo Método Petrov-Galerkin, 81        |
| 8.4   | Formulação pelo Método dos Mínimos Quadrados, 83  |
| 9.    | Aplicações Numéricas Bidimensionais, 94           |
| 10.   | Conclusões e Sugestões, 143                       |
|       | Referência Bibliográfica, 146                     |
|       | Apêndice A – Tabelas de resultados numéricos, 151 |
|       | Apêndice B – Tempo de execução computacional, 160 |

**Símbolos Arábicos**

|               |                                                                                                |
|---------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $A_x$ e $A_y$ | coeficientes que acompanham os termos convectivos, caso bidimensional                          |
| $B$           | coeficiente que acompanha a variável não diferencial, caso bidimensional                       |
| $f$           | termo fonte                                                                                    |
| $h$           | comprimento do elemento, caso unidimensional e maior aresta do elemento, no caso bidimensional |
| $k$           | condutividade térmica                                                                          |
| $q_x$         | variável adicional na direção $x$                                                              |
| $\tilde{q}_x$ | variável adicional na direção $x$ aproximada no tempo                                          |
| $\hat{q}_x$   | variável adicional na direção $x$ aproximada no espaço                                         |
| $\tilde{q}_y$ | variável adicional na direção $y$ aproximada no tempo                                          |
| $\hat{q}_y$   | variável adicional na direção $y$ aproximada no espaço                                         |
| $q_y$         | variável adicional na direção $y$                                                              |
| $\tilde{u}$   | distribuição de temperatura aproximada no tempo                                                |
| $\hat{u}$     | distribuição de temperatura aproximada no espaço                                               |
| $u$           | distribuição de temperatura                                                                    |





**Símbolos Gregos**

|                        |                                                                           |
|------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| $\Psi$                 | coeficiente que acompanha o termo transiente, caso unidimensional         |
| $\psi$                 | coeficiente que acompanha o termo transiente, caso bidimensional          |
| $\phi$                 | coeficiente que acompanha a variável não diferencial, caso unidimensional |
| $\gamma$               | coeficiente que acompanha o termo convectivo, caso unidimensional         |
| $\Omega$               | domínio de avaliação do fenômeno                                          |
| $\Omega^e$             | domínio do elemento, $\Omega^e \subset \Omega$                            |
| $d\Omega^e$            | $= dx$ , caso unidimensional; $= dxdy$ , no caso bidimensional            |
| $d\overline{\Omega}^e$ | $= d\xi$ , caso unidimensional; $= d\xi d\eta$ , no caso bidimensional    |



Este trabalho trata da aplicação do Método dos Elementos Finitos nas variantes Galerkin, Petrov-Galerkin e Mínimos Quadrados para a solução das equações diferenciais que modelam os fenômenos convectivo-difusivos definidos sobre os domínios uni e bidimensionais nos regimes permanente e transiente. Para a discretização temporal foi utilizado o Método Cranck-Nicolson e na discretização espacial foram utilizados elementos com dois, três e quatro nós para o caso unidimensional e elementos triangulares com três e seis nós e elementos quadriláterais com quatro e oito nós para o caso bidimensional, no qual foram adotadas funções de interpolação de Lagrange nas coordenadas locais. Transformando toda a formulação do problema das coordenadas globais para as coordenadas locais, o Método da Quadratura de Gauss-Legendre foi utilizada para integração numérica dos coeficientes das matrizes dos elementos. Adicionalmente, à formulação pelos três métodos, um código computacional foi implementado para simular o fenômeno proposto. Várias aplicações são apresentadas e discutidas.

Palavras-chave: Convecção-Difusão, Elementos Finitos, Galerkin, Petrov-Galerkin, Mínimos Quadrados.



Este trabalho tem como objetivo principal analisar o processo de implementação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) no Brasil, com foco especial na área da educação superior. A pesquisa é de natureza qualitativa e exploratória, utilizando-se de fontes secundárias de dados, como documentos oficiais, artigos científicos e livros. O estudo busca compreender as dificuldades e os avanços ocorridos durante a implementação da LDB, bem como identificar as principais questões que ainda permanecem em aberto. A metodologia utilizada foi a análise documental, com ênfase nos documentos produzidos pelo Ministério da Educação (MEC) e pelas instituições de ensino superior. Os resultados indicam que a implementação da LDB foi um processo complexo e contínuo, envolvendo diversas etapas e atores. Embora tenham sido alcançados alguns avanços, ainda existem desafios significativos, especialmente em relação à qualidade da educação superior e à equidade no acesso. O estudo conclui que é necessário continuar a trabalhar para superar essas dificuldades e garantir uma educação superior de qualidade para todos os brasileiros.

Palavras-chave: Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), educação superior, implementação, desafios.



This work deals with application of the Finite Element Method in its variants Galerkin, Petrov-Galerkin and Least Squares for solving partial differential equations that model the convective-diffusive phenomenon defined over one-dimensional and two-dimensional domains under steady and non-steady conditions. To do time discretization it was used the Cranck-Nicholson scheme and for spacial discretization it was used finite elements with two, three and four nodes for the one-dimensional mesh, and triangular elements with three and six nodes and quadrilateral elements with four and eight nodes for the two-dimensional mesh. The interpolating functions were the Lagrange polynomials defined using a reference coordinate system. Transforming all phenomenon formulation from the global coordinate system into the reference system, then the Method of Gauss-Legendre Quadrature was used to numerically integrate and obtain the coefficient matrix elements. Additionally, the formulation by using the three methods variants was utilized to implement a computational code to simulate the proposed phenomenon. Several applications for one and two-dimensional domains, steady and unsteady regimes, are done, presented and discussed.

**Keywords:** Convection-Diffusion, Finite Element, Galerkin, Petrov-Galerkin, Least Squares.



### Introdução

Os projetos da engenharia moderna têm se tornado extremamente complexos, caros e sujeitos à exigência de alta confiabilidade de seus resultados. Veículos espaciais, aeronaves e reatores nucleares são exemplos de projetos nos quais a confiabilidade é de crucial importância. Outras preocupações associadas às tecnologias modernas tais como a proteção do meio ambiente, o controle térmico, poluição acústica e química, a administração de recursos naturais e previsão do tempo, têm forçado engenheiros a reexaminar todos os métodos de análise. Para um amplo entendimento, analistas necessitam de modelos matemáticos que possam ser usados para simular o comportamento complexo de sistemas físicos.

Em várias aplicações práticas, tais como aquelas da mecânica dos sólidos, da mecânica dos fluidos, da termodinâmica e outras, o comportamento de sistemas físicos são descritos por equações diferenciais parciais. Atualmente, o Método dos Elementos Finitos tem se tornado um dos mais populares métodos para resolver tais equações. O método implementado em código computacional tem conquistado sucesso ao ser aplicado à solução de problemas nos regimes permanente e transiente, lineares e não-lineares para domínios uni, bi e tridimensionais.

O Método dos Elementos Finitos foi inicialmente desenvolvido pelos engenheiros de estrutura aeronáutica em 1950 para analisar grandes sistemas de elementos estruturais de aeronaves. Turner *et al.* (1956) apresentou o primeiro trabalho sobre o assunto, seguido por Clough (1960) e Argyris (1963) entre outros. A aplicação do Método de Elementos Finitos para problemas não-estruturais tais como escoamentos





de fluidos e eletromagnetismo foi inicializado por Zienkiewicz e Cheung (1965). E aplicações para uma vasta classe de problemas de interesse em mecânica não-linear foram feitas por Oden e Wellford (1972).

Nesse método, um domínio contínuo é dividido em Elementos Finitos – elementos de linha, triangulares, quadriláteros entre outros. Escolhendo adequadamente os pontos, chamados de “nós”, dentro do elemento, as incógnitas na equação diferencial são escritas como uma combinação linear de funções de interpolação apropriadas. Usando Princípios Variacionais ou Métodos dos Resíduos Ponderados, as equações diferenciais governantes são transformadas em “equações governantes de elementos finitos”, para cada elemento isoladamente. Esses elementos locais são finalmente reunidos para formar um sistema global de equações diferenciais com condições de contorno e/ou inicial apropriadas. Os valores nodais das variáveis são determinados a partir da solução do sistema algébrico.

Atualmente, após mais de quatro décadas de desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos, pode-se dizer que nenhuma aproximação universal para os diferentes problemas da Mecânica dos Fluidos foi encontrada, nem qualquer formulação específica tem sido capaz de obter bons resultados para um dado problema variando os parâmetros físicos. No caso particular dos problemas de transporte convectivo-difusivo no regime transiente é fácil encontrar bons resultados para grandes valores dos termos difusivos, o que nem sempre ocorre em situações convectivo dominante.

Neste trabalho o objetivo principal é realizar um estudo detalhado de três formulações numéricas, Galerkin, Petrov-Galerkin e Mínimos Quadrados (LSFEM – *Least Square Finite Element Method*) e principalmente verificar a performance do LSFEM. Adicionalmente à formulação pelos três métodos, um código computacional será implementado para a solução da equação que governa o fenômeno convectivo-difusivo visando compará-los em algumas variações dos parâmetros físicos.

Primeiramente, será estudado o Método de Galerkin. Esse é um Método dos Resíduos Ponderados e tem sido usado com sucesso em muitas aplicações da engenharia, especialmente em Mecânica dos Sólidos. No entanto, este método torna-se instável e leva a soluções oscilatórias quando é aplicado a problemas convectivo dominantes.

Em seguida, analisa-se o Método *Streamline-Upwind* Petrov-Galerkin, que consiste em introduzir um termo de perturbação adicional na direção do vetor velocidade às funções peso, visando eliminar as instabilidades que surgem no Método



de Galerkin, e resultando em um método com boa estabilidade mas com um alto custo de implementação computacional.

Finalmente estuda-se o Método dos Mínimos Quadrados, que apresenta simetria na formulação, soluções suaves e um aumento no custo computacional.

Um estudo da formulação e dos fundamentos teóricos dos três métodos é apresentado, objetivando explicitar suas diferenças, suas vantagens e desvantagens, convergência dos métodos, principalmente quando aplicados a problemas convectivo dominantes.







### Revisão Bibliográfica

Há algumas décadas vários autores vêm utilizando Métodos dos Elementos Finitos para solucionar problemas de transferência de calor e de mecânica dos fluidos.

Em muitos trabalhos o Método de Galerkin foi aplicado e se obteve excelentes resultados quando se tratava de problemas difusivo dominantes. Em Feng (2001), o Método dos Elementos Finitos de Galerkin foi utilizado para resolver computacionalmente vários problemas eletrohidrodinâmicos não-lineares em que o coeficiente que acompanha o termo da derivada de segunda ordem é maior que o coeficiente que acompanha o termo de primeira ordem.

Howle (1996) faz um estudo da eficiência computacional de dois métodos numéricos baseados na técnica Galerkin/Diferenças Finitas: Galerkin Reduzido e Pseudo-Espectral na solução do problema de convecção no regime permanente de Rayleigh-Bénard. O autor, após apresentar a formulação de ambos os métodos, mostra um teste numérico que demonstra graficamente que o método Pseudo-Espectral utiliza um número maior de iterações que o de Galerkin Reduzido para a convergência da solução.

Como uma grande parcela dos problemas físicos são convectivo dominantes, foi necessário a utilização de novos métodos para a solução desses problemas. Fernandes e Pulino (1999) analisaram e solucionaram o problema de difusão-convecção que modela a evolução espaço-tempo de manchas de óleo no mar sob a influência de ventos, correntes marítimas e marés. Uma vez que esse problema apresenta, na maioria dos casos, um coeficiente de convecção superior ao coeficiente de difusão, o Método de Galerkin apresenta um mau comportamento na sua solução, o que levou os autores a utilizarem outras ferramentas para a solução do problema. Fernandes e Pulino (1999) utilizaram os Métodos



que não apresenta bons resultados quando o problema é avaliado por malhas de elementos finitos não-estruturados. Entretanto, quando são utilizados métodos baseados nas Séries de Taylor no tempo, Método Taylor-Galerkin, são apresentadas boas vantagens, entre elas uma simples implementação e precisão de terceira-ordem em problemas não-lineares. Para finalizar, o Método dos Mínimos Quadrados utilizado apresenta a simplicidade do método Taylor-Galerkin e a estabilidade incondicional dos Métodos das Características, no entanto, sua precisão é comprometida para números de Courant maiores que a unidade.

No decorrer das décadas de aplicação do método de elementos finitos de mínimos quadrados foi constatado uma grave deficiência: baixa convergência para malhas menos refinadas. Em razão desse fato, vários autores começaram a testar diferentes versões do Método dos Mínimos Quadrados. Winterscheidt e Surana (1993) apresentaram uma versão-p da formulação dos elementos finitos dos mínimos quadrados da equação de convecção-difusão. A equação diferencial de segunda ordem que governa o problema convectivo-difusivo é reduzida a um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, para o qual a formulação dos mínimos quadrados é construída usando a mesma ordem de aproximação para cada variável dependente. Nesse trabalho, os autores utilizam-se da Regra da Quadratura de Gauss para calcular os valores numéricos dos elementos de matrizes e vetores. Uma das vantagens apresentadas, é o uso de uma regra de integração acurada, Quadratura de Gauss, levando a erros funcionais muito menores quando comparados com regras de integração reduzidas.

Bramble et al. (1998), introduzem e analisam dois Métodos dos Mínimos Quadrados para equações diferenciais elípticas de segunda-ordem com condições de contorno mistas. A principal diferença entre os dois métodos é a utilização ou não de uma variável adicional ao fluxo de calor. Os autores analisam a convergência de duas soluções, uma suave e outra singular, apresentando tabelas e fazendo uma comparação entre o tamanho do lado, cada lado analisado separadamente, o erro discreto  $L_2$  e a norma do erro máximo. Esse exemplo é solucionado sem nenhuma variável adicional. Muitos outros trabalhos podem ser encontrados na literatura envolvendo o Método dos Mínimos Quadrados, entre eles o de Cai et al. (1994) no qual trabalham basicamente com sistemas de primeira ordem, Codina (2000) que analisou o Método dos Elementos Finitos estabilizado baseado na escala sub-malha e em aproximações algébricas para as sub-escalas para a solução de equações de difusão-convecção-reação e Shen et al. (2001) que tratam de problemas hidrodinâmicos de dispositivos semicondutores.

Alguns autores se dedicaram a apresentar trabalhos visando comparar vários métodos aplicados a um mesmo problema. Camprub et al. (2000) apresentam um estudo de três





Streamline Diffusion e Galerkin com funções bolha e obtiveram bons resultados em suas simulações numéricas. Fernandes e Pulino (1999) propuseram aplicar os métodos citados anteriormente às equações de Navier-Stokes.

Em razão de soluções oscilatórias provindas da aplicação do Método de Galerkin em problemas convectivo dominantes, muitos autores iniciaram o uso de outras técnicas, tais como *upwind* e *mínimos quadrados*. Considerável sucesso foi alcançado em Almeida e Silva (1997) mediante do uso do Método Petrov-Galerkin, principalmente em razão da possibilidade do uso de funções ponderadas descontínuas como primeiramente propostas por Brooks e Hughes (1982). Esse método, *Streamline Upwind Petrov-Galerkin* (SUPG), que consiste em adicionar um termo à função peso na direção do escoamento visando estabilidade numérica, fornece resultados que alcançaram uma taxa de convergência quase ótima.

Apesar do sucesso alcançado na utilização de métodos de *upwind* na solução de problemas convectivo dominantes, alguns autores buscaram métodos mais robustos e computacionalmente mais baratos, evitando a dificuldade da implementação da técnica *upwind*. Várias vertentes do Método dos Mínimos Quadrados foram utilizadas com o objetivo de encontrar uma técnica mais acurada e com baixo custo computacional. Nguyen e Reynen (1984) apresentam um esquema de elementos finitos dos mínimos quadrados para problemas advectivo-difusivos transientes para altos números de Peclet. Esse esquema visa eliminar soluções espúrias. Os autores apresentam alguns exemplos, dentre eles um problema convectivo-difusivo unidimensional transiente, no qual a solução analítica é comparada com a solução pelo Método dos Mínimos Quadrados e com o Método de Galerkin, usando funções de interpolação lineares, quadráticas e cúbicas. Esse exemplo demonstra que o Método dos Mínimos Quadrados é o que mais se aproxima da solução exata do problema. Um exemplo bidimensional também é apresentando, mostrando-se mais uma vez a eficiência do Método dos Mínimos Quadrados.

Donea e Quartapelle (1992) apresentam um Método dos Elementos Finitos para resolver problemas transientes governados por equações lineares ou não-lineares com termos advectivo dominantes. Em razão das inúmeras dificuldades numéricas na simulação de problemas permanentes e transientes com termo advectivo dominante apresentadas na aplicação do método clássico de Galerkin, Donea e Quartapelle (1992) utilizam-se de alguns métodos para a solução de tais problemas. O primeiro deles é o Método de Galerkin Generalizado, que fornece excelentes resultados em razão de uma correta relação entre as variações espaciais e temporais expressadas por meio da teoria das características. Os autores também citam métodos de discretização no tempo, dentre eles, o Método Explícito de Euler



formulações numéricas de elementos finitos: Galerkin, Mínimos Quadrados e Galerkin/Mínimos Quadrados, aplicados a problemas convectivo-difusivos. Os autores detalham exemplos que implicam nas seguintes conclusões: enquanto o Método de Galerkin leva a soluções oscilatórias, os Métodos dos Mínimos Quadrados e o Galerkin/Mínimos Quadrados atingem a estabilidade. Porém, o LSFEM possui duas notáveis desvantagens: um alto custo computacional e soluções divergentes para malhas menos refinadas. O Método Galerkin/Mínimos Quadrados leva a soluções estáveis sem notável aumento no custo computacional e menor divergência da solução numérica. Finalmente, os autores concluem que o Método dos Mínimos Quadrados possui maiores custos computacionais do que os Métodos de Galerkin e de Galerkin/Mínimos Quadrados.

Codina (1998) compara vários métodos de elementos finitos para a solução da equação de difusão-convecção-reação. Entre eles, o autor mostra que o Método Clássico de *Streamline Upwind Petrov-Galerkin* (SUPG) é similar à versão explícita do Método de Galerkin Característico (CG) e que o Método Taylor-Galerkin (TG) tem um efeito de estabilização similar ao modelo de Escala Sub-Malha (SGS) e por fim, o autor desenvolve o Método Galerkin/Mínimos Quadrados. Após descrever os conceitos básicos e as formulações dos métodos citados anteriormente e realizar alguns testes numéricos, o autor faz uma comparação entre os métodos e cita conclusões importantes, como no Método Petrov-Galerkin que, pode gerar uma modificação na matriz massa associada com o Método de Galerkin original, tornando-a não-simétrica caso a discretização no tempo seja aplicada no resíduo  $R$ . O mesmo ocorre com o Método Galerkin/Mínimos Quadrados.

Sabendo-se que as equações de Navier-Stokes, quando adequadamente manipuladas, podem ser reduzidas a equações governantes de problemas convectivo-difusivos, é importante citar a grande aplicação do Método dos Elementos Finitos na solução de tais equações. Bochev e Gunzburger (1994), utilizam o Método dos Mínimos Quadrados para a solução aproximada da equação de Navier-Stokes que resulta em um sistema pressão-velocidade-vorticidade de primeira ordem. Entre as mais atrativas características do método aplicado está a escolha dos espaços de aproximação que não são sujeitos à condição de LBB, Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi (Babuska, 1971; Brezzi 1974), e um único espaço de funções polinomiais contínuas pode ser usado para aproximar todas as variáveis, resultando em um sistema simétrico e positivo-definido de equações algébricas. Bochev e Gunzburger (1994) comparam dois Métodos dos Elementos Finitos dos Mínimos Quadrados. O primeiro é baseado na minimização de um funcional quadrático que é definido em termos da norma indicada pela Teoria ADN, já o segundo é definido em termos da norma  $L_2$ . Alguns





exemplos numéricos são citados nesse trabalho, tendo como análise principal os erros a partir das normas  $L_2$  e  $H^1$ .

Tang e Tsang (1993) resolvem as equações de Navier-Stokes transientes e a equação de balanço de energia, para um fluido incompressível com propriedades constantes, numa aproximação de Boussinesq pelo Método dos Elementos Finitos dos Mínimos Quadrados baseados na formulação velocidade-pressão-vorticidade-temperatura-fluxo de calor e discretizada no tempo pelo Método das Diferenças Finitas (*Backward*). O esquema de discretização leva à minimização do resíduo na norma  $L^2$  para cada passo no tempo. Utilizando elementos quadrilaterais bilineares isoparamétricos e uma integração reduzida, os autores demonstram que o Método dos Mínimos Quadrados apresenta bons resultados na aplicação a escoamentos incompressíveis transientes com convecção térmica. Outros trabalhos nesta vertente foram apresentados, entre eles Jiang (1992), Harbord e Gellert (1991), e Ruas (1997) que avaliou problemas de Navier-Stokes tridimensionais, utilizando o Método Galerkin/ Mínimos Quadrados e Burrell et al. (1995), que utilizaram o Método dos Elementos Finitos dos Mínimos Quadrados para a solução do transporte advectivo da poluição do ar e obtiveram resultados promissores.

Após análise de todos os trabalhos anteriormente citados, chega-se à conclusão que o Método dos Elementos Finitos é uma poderosa ferramenta numérica para a solução de problemas da Mecânica dos Fluidos e da Transferência de Calor. Neste trabalho são comparadas três variantes do Método dos Elementos Finitos para a solução de fenômenos convectivo-difusivos em regimes permanente e transiente em domínios uni e bidimensional. Várias aplicações numéricas são apresentadas e em boa parte delas, analisa-se o erro da solução numérica da função  $u$  e de suas derivadas. No caso unidimensional será avaliado a derivada de  $u$  na direção  $x$  e já no caso bidimensional, são avaliadas as derivadas nas direções  $x$  e  $y$ . Também será utilizado diferentes tipos de elementos, e variando-se todos os parâmetros físicos, contribuindo assim para enriquecer a literatura sobre o assunto.



## Conceitos Fundamentais

Neste capítulo apresentam-se alguns conceitos fundamentais que são necessários para o desenvolvimento do trabalho.

### 3.1 Funcionais – Primeira variação

Seja a função  $u \in C^\infty$ , define-se o funcional  $I$  como sendo uma função de um conjunto de funções e suas derivadas,

$$I = I\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots\right). \quad (3.1.1)$$

A primeira variação de  $I$ ,  $\delta I$ , é definida como,

$$\delta I = \frac{\partial I}{\partial u} \delta u + \frac{\partial I}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \dots, \quad (3.1.2)$$

na qual  $\delta u$  e  $\delta(\partial u / \partial x)$  são respectivamente, variações arbitrárias de  $u$  e  $\partial u / \partial x$ .

O operador variação  $\delta$  tem as seguintes propriedades:



$$\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial(\delta u)}{\partial x}, \quad (3.1.3a)$$

$$\delta(\delta u) = 0, \quad (3.1.3b)$$

$$\delta\left(\int_{\Omega} u d\Omega\right) = \int_{\Omega} \delta u d\Omega, \quad (3.1.3c)$$

$$\delta(u + v) = \delta u + \delta v, \quad (3.1.3d)$$

$$\delta(uv) = u\delta v + v\delta u = \delta(vu), \quad (3.1.3e)$$

$$\delta(cu) = c\delta u \quad (c \text{ constante}), \quad (3.1.3f)$$

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} \delta x_2, \text{ na qual } F = F(x_1, x_2) \quad (3.1.3g)$$

### 3.2 Produto Interno, Norma e Espaço de Funções

**Definição 1.** Diz-se que o espaço vetorial  $\Omega$  é *completo* quando toda seqüência de Cauchy em  $\Omega$  é convergente.

Por exemplo, a reta é um espaço métrico completo.

**Definição 2.** Um espaço vetorial normado completo  $\Omega$  é denominado de *espaço de Banach*.

$\mathfrak{R}^n$  é um espaço de Banach.

**Definição 3.** Um *espaço de Hilbert* é um espaço vetorial  $\Omega$ , munido de um produto interno e completo em relação à norma definida por esse produto interno.

Neste trabalho, necessita-se definir um espaço de funções quadráticas integráveis em  $\Omega$ ;  $H^0(\Omega)$ :

$$H^0(\Omega) = L_2(\Omega) = \{u : u \text{ é definido em } \Omega \text{ e } \int_{\Omega} u^2 d\Omega < \infty\}. \quad (3.2.1)$$

Sendo a *norma* de  $u$  relacionada a esse espaço, denotada por,

$$\|u\|_0 = \left\{ \int_{\Omega} |u|^2 d\Omega \right\}^{1/2} \quad (3.2.2)$$

Expandindo-se para a norma  $L_p$ , no qual  $1 \leq p \leq \infty$ , tem-se que,

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \left\{ \int_{\Omega} |u|^p d\Omega \right\}^{1/p} \quad (3.2.3)$$

Assumindo-se que  $u, v \in H^0(\Omega)$ , então seu *produto interno* é definido como

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv d\Omega. \quad (3.2.4)$$

Também será de grande importância o espaço  $H^1(\Omega)$  consistindo de funções com derivadas de primeira ordem quadráticas integráveis,

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ em } \Gamma\}. \quad (3.2.5)$$

Esse espaço tem a norma associada,

$$\|u\|_1 = \left( \|u\|_0^2 + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_0^2 \right)^{1/2} \quad (3.2.6)$$

Para o espaço de funções  $H^1(\Omega)$  pode também ser introduzido a semi-norma

$$|u|_1 = \left( \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_0^2 \right)^{1/2} \quad (3.2.7)$$



Para a função vetorial  $u$  com  $m$  componentes, tem-se o espaço de produtos

$$L_2(\Omega) = [L_2(\Omega)]^m = \{(u_1, u_2, \dots, u_m) : u_j \in L_2(\Omega)\}; \quad (3.2.8a)$$

$$H^1(\Omega) = [H^1(\Omega)]^m = \{(u_1, u_2, \dots, u_m) : u_j \in H^1(\Omega)\}, \quad (3.2.9b)$$

e as correspondentes normas,

$$\|u\|_0^2 = \sum_{j=1}^m \|u_j\|_0^2, \quad (3.2.10a)$$

$$\|u\|_1^2 = \sum_{j=1}^m \|u_j\|_1^2. \quad (3.2.10b)$$

Por fim, define-se a norma relativa  $z$  entre dois vetores  $u$  e  $v$ ,

$$\|z_j\| = \frac{\|u_j - v_j\|}{|u_j|} \quad (3.2.10c)$$

### 3.3 Funções de Interpolação

Neste trabalho é necessário aproximar a solução exata  $u(x)$  da seguinte maneira, supondo-se o caso unidimensional:

$$u(x) \approx \bar{u}(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2 + \dots + N_n(x)u_n \quad \text{ou}$$

$$\bar{u}(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x)u_i, \quad (3.3.1)$$

com as seguintes observações:

- Os parâmetros  $u_i$  são os valores nodais;

- A equação 3.3.1 define uma aproximação nodal;
- As funções  $N_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , são chamadas de funções de interpolação.

A aproximação dada pela equação 3.3.1 será válida se satisfizer as seguintes relações:

a)  $\bar{u}(x_1) = u(x_1) = u_1$

$$\bar{u}(x_2) = u(x_2) = u_2$$

$\vdots$

$$\bar{u}(x_N) = u(x_N) = u_N.$$

b) Como  $u(x_i) = u_i$ , a função  $N_i$  satisfaz

$$N_j(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}.$$

c) O erro de aproximação

$$e(x) = u(x) - \bar{u}(x)$$

é nulo para todo ponto nodal  $x_i$ ,

$$e(x_i) = 0.$$

O mesmo raciocínio deve ser seguido para  $u(x, y)$ .

Antes de detalhar todos os tipos de elementos que são utilizados neste trabalho, apresenta-se o conceito de *elemento de referência*.

### 3.4 Elemento de Referência

Por simplicidade e facilidade, são utilizados elementos de referência para mapear todos os tipos de elementos usados neste trabalho. E em consequência todos os elementos serão mapeados para seus respectivos elementos de referência.



Seja um elemento  $V^r$  definido em um espaço adimensional abstrato com uma forma geométrica adequada e conveniente (Dhatt e Touzot, 1984). A geometria do elemento de referência mapeará a geometria do elemento real usando expressões de transformação geométrica.

Por exemplo, seja a região triangular mostrada na Figura 3.1.

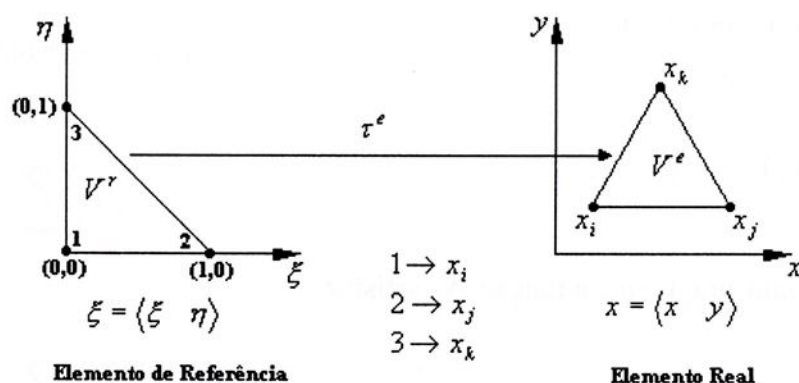


Figura 3.1 – Elemento de Referência (à esquerda) e Elemento Real (à direita).

Nesse caso, a transformação  $\tau^e$  define as coordenadas de cada ponto do elemento real em termos das coordenadas abstratas  $\xi$  do correspondente ponto do elemento de referência, conforme regra abaixo,

$$\tau^e : \xi \rightarrow x^e = x^e(\xi), \quad (3.4.1)$$

ou seja,  $\tau^e$  fornece a forma e a localização do elemento real. Assim, há uma diferente transformação  $\tau^e$  para cada elemento real, e a equação (3.4.1) é melhor expressa como segue,

$$\tau^e : \xi \rightarrow x^e = x^e(\xi, x_i, x_j, x_k, \dots) \quad (3.4.2)$$

Para concluir, as transformações  $\tau^e$  são escolhidas satisfazendo as seguintes propriedades:

- para cada ponto do elemento de referência  $V^r$ , há um e somente um ponto de um dado elemento real  $V^e$ ;

- os nós geométricos do elemento de referência correspondem aos nós geométricos do elemento real;
- cada parcela do contorno do elemento de referência, definido pelos nós geométricos do contorno, corresponde à porção do contorno do elemento real definido pelo nó correspondente.

### 3.5 Tipos de Elementos

Neste item são detalhados todos os tipos de elementos que são utilizados neste trabalho e seus respectivos elementos de referência e funções de interpolação.

#### 3.5.1 Elementos Unidimensionais

##### Elemento Linear (dois nós, $C^0$ )



Figura 3.2 – Elemento Linear com dois nós.

Para este elemento são utilizadas as funções de interpolação nodal e suas respectivas derivadas apresentadas na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Funções de Interpolação – Elemento Linear com dois nós.

| Nós | $\{N\}$         | $\{\partial N / \partial \xi\}$ |
|-----|-----------------|---------------------------------|
| 1   | $(1 - \xi) / 2$ | $-1/2$                          |
| 2   | $(1 + \xi) / 2$ | $1/2$                           |



### Elemento Quadrático com nós eqüidistantes (três nós, $C^0$ )



Figura 3.3 – Elemento Quadrático com três nós

Para este elemento quadrático de três nós são utilizadas as funções de interpolação nodal e suas respectivas derivadas apresentadas na Tabela 3.2.

Tabela 3.2 - Funções de Interpolação – Elemento Quadrático.

| Nós | $\{N\}$         | $\{\partial N / \partial \xi\}$ |
|-----|-----------------|---------------------------------|
| 1   | $-\xi(1-\xi)/2$ | $(-1+2\xi)/2$                   |
| 2   | $1-\xi^2$       | $-2\xi$                         |
| 3   | $\xi(1+\xi)/2$  | $(1+2\xi)/2$                    |

### Elemento Cúbico com nós eqüidistantes (quatro nós, $C^0$ )

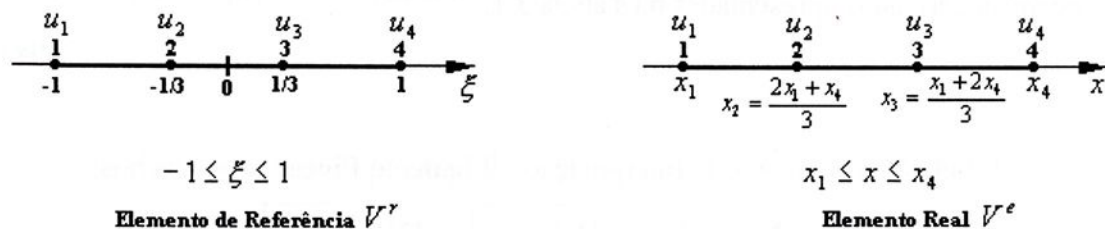


Figura 3.4 – Elemento Cúbico com quatro nós.

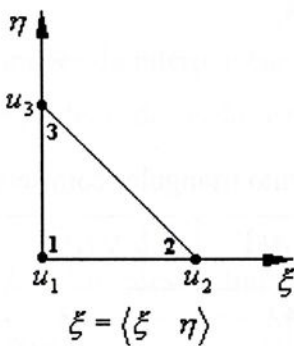
Para o elemento cúbico são utilizadas as funções de interpolação e suas derivadas apresentadas na Tabela 3.3.

Tabela 3.3 - Funções de Interpolação – Elemento Cúbico.

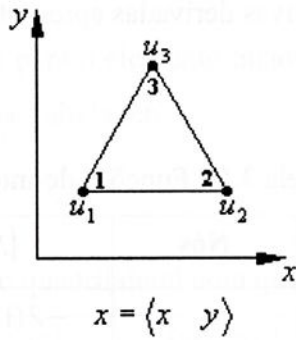
| Nós | $\{N\}$                 | $\{\partial N / \partial \xi\}$ |
|-----|-------------------------|---------------------------------|
| 1   | $-(1-\xi)(1-9\xi^2)/16$ | $(1+18\xi-27\xi^2)/16$          |
| 2   | $9(1-\xi^2)(1-3\xi)/16$ | $(-27-18\xi+81\xi^2)/16$        |
| 3   | $9(1-\xi^2)(1+3\xi)/16$ | $(27-18\xi-81\xi^2)/16$         |
| 4   | $-(1+\xi)(1-9\xi^2)/16$ | $(-1+18\xi+27\xi^2)/16$         |

3.5.2 Elementos Bidimensionais

Elemento Triangular Linear (três nós,  $C^0$ )



Elemento de Referência



Elemento Real

Figura 3.5 – Elemento triangular com três nós.

Para o triângulo de três nós são utilizadas as funções de interpolação e suas respectivas derivadas apresentadas na Tabela 3.4.

Tabela 3.4 - Funções de Interpolação – Elemento triangular com três nós.

| Nós | $\{N\}$      | $\{\partial N / \partial \xi\}$ | $\{\partial N / \partial \eta\}$ |
|-----|--------------|---------------------------------|----------------------------------|
| 1   | $1-\xi-\eta$ | -1                              | -1                               |
| 2   | $\xi$        | 1                               | 0                                |
| 3   | $\eta$       | 0                               | 1                                |

**Elemento Triangular Quadrático (seis nós,  $C^0$ )**

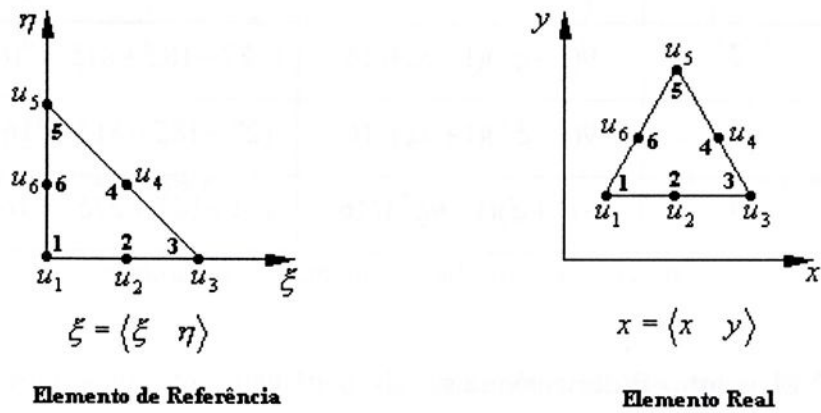


Figura 3.6 – Elemento triangular com seis nós.

Para o elemento triangular de seis nós são utilizadas as funções de interpolação e suas respectivas derivadas apresentadas na Tabela 3.5.

Tabela 3.5 - Funções de Interpolação – Elemento triangular com seis nós.

| Nós | $\{N\}$                | $\{\partial N / \partial \xi\}$ | $\{\partial N / \partial \eta\}$ |
|-----|------------------------|---------------------------------|----------------------------------|
| 1   | $-\lambda(1-2\lambda)$ | $1-4\lambda$                    | $1-4\lambda$                     |
| 2   | $4\xi\lambda$          | $4(\lambda-\xi)$                | $-4\xi$                          |
| 3   | $-\xi(1-2\xi)$         | $-1+4\xi$                       | 0                                |
| 4   | $4\xi\eta$             | $4\eta$                         | $4\xi$                           |
| 5   | $-\eta(1-2\eta)$       | 0                               | $-1+4\eta$                       |
| 6   | $4\eta\lambda$         | $-4\eta$                        | $4(\lambda-\eta)$                |

Na Tabela 3.5 a variável  $\lambda$  é dado por:  $\lambda = 1 - \xi - \eta$ .

**Elemento Quadrilateral Bilinear (quatro nós,  $C^0$ )**

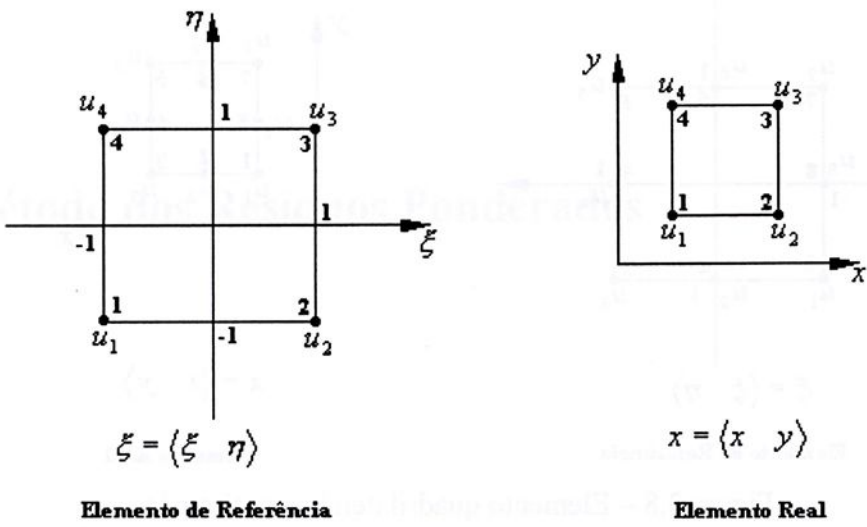


Figura 3.7 – Elemento quadrilateral com quatro nós.

As funções de interpolação que são utilizadas para o elemento quadrilateral de 4 nós e suas respectivas derivadas estão apresentadas na Tabela 3.6.

Tabela 3.6 - Funções de Interpolação – Elemento quadrilateral com quatro nós.

| Nós | $\{N\}$                   | $\{\partial N / \partial \xi\}$ | $\{\partial N / \partial \eta\}$ |
|-----|---------------------------|---------------------------------|----------------------------------|
| 1   | $(1 - \xi)(1 - \eta) / 4$ | $-1 + \eta$                     | $-1 + \xi$                       |
| 2   | $(1 + \xi)(1 - \eta) / 4$ | $1 - \eta$                      | $-1 - \xi$                       |
| 3   | $(1 + \xi)(1 + \eta) / 4$ | $1 + \eta$                      | $1 + \xi$                        |
| 4   | $(1 - \xi)(1 + \eta) / 4$ | $-1 - \eta$                     | $1 - \xi$                        |



Elemento Quadrilateral Quadrático Incompleto (oito nós,  $C^0$ )

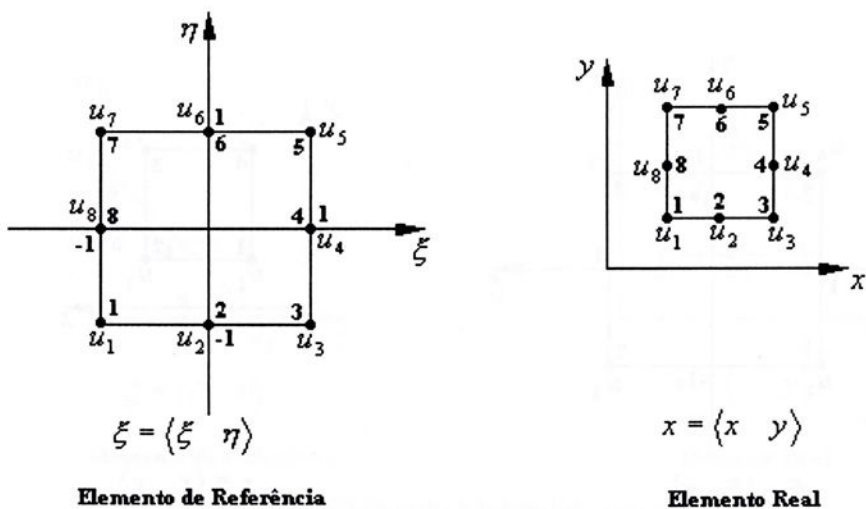


Figura 3.8 – Elemento quadrilateral com oito nós

As funções  $N(\xi, \eta)$  e suas derivadas estão apresentadas Tabela 3.7.

Tabela 3.7 - Funções de Interpolação – Elemento quadrilateral com oito nós.

| Nós | $\{N\}$                                  | $\{\partial N / \partial \xi\}$ | $\{\partial N / \partial \eta\}$ |
|-----|------------------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|
| 1   | $-\frac{(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)}{4}$ | $\frac{(1-\eta)(2\xi+\eta)}{4}$ | $\frac{(1-\xi)(\xi+2\eta)}{4}$   |
| 2   | $\frac{(1-\xi^2)(1-\eta)}{2}$            | $-(1-\eta)\xi$                  | $-\frac{(1-\xi^2)}{2}$           |
| 3   | $\frac{(1+\xi)(1-\eta)(-1+\xi-\eta)}{4}$ | $\frac{(1-\eta)(2\xi-\eta)}{4}$ | $-\frac{(1+\xi)(\xi-2\eta)}{4}$  |
| 4   | $\frac{(1+\xi)(1-\eta^2)}{2}$            | $\frac{(1-\eta^2)}{2}$          | $-(1+\xi)\eta$                   |
| 5   | $-\frac{(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta)}{4}$ | $\frac{(1+\eta)(2\xi+\eta)}{4}$ | $\frac{(1+\xi)(\xi+2\eta)}{4}$   |
| 6   | $\frac{(1-\xi^2)(1+\eta)}{2}$            | $-(1+\eta)\xi$                  | $\frac{(1-\xi^2)}{2}$            |
| 7   | $-\frac{(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta)}{4}$ | $\frac{(1+\eta)(2\xi-\eta)}{4}$ | $-\frac{(1-\xi)(\xi-2\eta)}{4}$  |
| 8   | $\frac{(1-\xi)(1-\eta^2)}{2}$            | $-\frac{(1-\eta^2)}{2}$         | $-(1-\xi)\eta$                   |

## Método dos Resíduos Ponderados

### 4.1 Introdução

Neste trabalho, o objetivo é utilizar o *Método dos Resíduos Ponderados* para obter uma solução aproximada para a equação diferencial da forma,

$$\sum_{m=1}^w \left[ \frac{\partial}{\partial x_m} \left( k \frac{\partial u}{\partial x_m} \right) + A_m \frac{\partial u}{\partial x_m} \right] + Bu + f + C \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \text{ em } \Omega \quad (4.1.1a)$$

sujeito às condições de contorno,

$$\sum_{n=1}^w \left[ k \frac{\partial u}{\partial x_n} \eta_n \right] + hu = g \text{ em } \Gamma \quad (4.1.1b)$$

no qual  $\eta_n$  são as componentes normais ao contorno com  $m, n = 1, w$ ,  $w = 1$  quando o problema for unidimensional,  $w = 2$  quando o problema for bidimensional,  $\Omega \subset \mathbb{R}^{w+1}$  e, em razão das condições de contorno serem adotadas invariantes no tempo, tem-se  $\Gamma \subset \mathbb{R}^{w-1}$ .

Introduz-se, para cada elemento, o seguinte conjunto de funções na forma,

$$u \approx \bar{u} = \sum_{i=1}^{N_{\text{nós}}} u_i N_i \quad (4.1.2)$$



na qual  $u_i$  são funções do tempo constantes e  $N_i$  são as funções de interpolação descritas no item (3.3). Tendo em vista que equação (4.2) é uma solução aproximada, nota-se que, substituindo-se a equação (4.2) na equação (4.1), isto não satisfaz exatamente a equação diferencial governante. Assim define-se um resíduo  $R$  como

$$R = \sum_{m=1}^w \left[ \frac{\partial}{\partial x_m} \left( k \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_m} \right) + A_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_m} \right] + B \bar{u} + f + C \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \quad (4.1.3)$$

Introduz-se um conjunto de funções peso  $v_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N_{\text{nós}}$ ) e define-se um produto interno  $(R, v_i)$ . Em seguida determina-se que este produto interno seja igual a zero,

$$(R, v_i) = \int_{\Omega} R v_i d\Omega = 0 \quad (4.1.4)$$

o que num sentido ponderado é equivalente a forçar o erro de aproximação da equação diferencial a ser igual a zero na média.

Há vários caminhos para se escolher as funções peso  $v_i$ . Neste trabalho, são utilizadas as seguintes formulações:

- (1) Método de Galerkin;
- (2) Método Petrov-Galerkin;
- (3) Método dos Mínimos Quadrados;

Estes três métodos estão descritos a seguir.

#### 4.2 Método de Galerkin

Para a introdução desta aproximação, é necessário definir a formulação variacional do problema (4.1), como segue: deve-se encontrar  $\bar{u}^e \in V^e$ , com  $V^e \in H^1(\Omega)$  tal que,

$$\int_{\Omega^e} R v_i^e d\Omega = 0, \quad \forall v_i^e \in V^e, \quad i = 1, 2, \dots, N_{\text{nós}} \quad (4.2.1)$$

visto que

$$u \approx \bar{u}^e = \sum_{j=1}^{N_{\text{nós}}} N_j \bar{u}_j^e \quad (4.2.2)$$

no qual  $N_{\text{nós}}$  é o número de nós em cada elemento.

A equação (4.2.1) será adotado  $v_i^e = N_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_{\text{nós}}$ , ou seja, a função peso é dada como igual à função de interpolação. A formulação pelo Método de Galerkin será simétrica e positiva-definida para problemas puramente difusivos ou quando o operador diferencial for auto-adjunto.

### 4.3 Método Petrov-Galerkin

No Método de Galerkin, as funções peso são contínuas no interior do elemento. Na formulação pelo Método Petrov-Galerkin, porém, são admitidas funções peso da forma

$$M_i = N_i + \theta \tilde{M}_i \quad (4.3.1)$$

no qual  $N_i$  são as mesmas funções utilizadas na equação (4.2.2) e  $M_i$  é tal que

$$\int_{\Omega^e} \tilde{M}_i d\Omega = \pm \frac{h}{2} \quad (4.3.2)$$

no qual  $h$  é o tamanho do elemento, comprimento para o elemento unidimensional e maior aresta do elemento no caso bidimensional, e o sinal de  $\pm h/2$  depende do sinal de  $A_m$ .

Várias formas para  $M_i$  são possíveis. Nesse trabalho utiliza-se a seguinte função descontínua,

$$\tilde{M}_i = \frac{h}{2} \frac{A_m}{|A|} \frac{dN_i}{dx_m} \quad (\text{sinal de } A_m) \quad (4.3.3)$$

No caso em que  $\theta = 0$  o Método Petrov-Galerkin reduz-se ao Método de Galerkin. Para  $\theta \neq 0$ , pode-se escolher um valor ótimo, dado por,





$$|\theta| = \theta_{opt} = \coth|Pe| - \frac{1}{|Pe|}, \quad Pe = \frac{|A|h}{2k} \quad (4.3.4a-b)$$

no qual  $|A| = \left[ \sum_{i=1}^w A_i^2 \right]^{1/2}$ ,  $w=1$  para o caso unidimensional e  $w=2$  para o caso bidimensional.

Seguindo-se as observações anteriores, deve-se encontrar um  $u^e \in V^e$  tal que

$$\int_{\Omega^e} R M_i^e d\Omega = 0, \quad \forall M_i^e \in V^e, \quad i = 1, 2, \dots, N_{n\acute{o}s} \quad (4.3.5)$$

Sendo

$$u \cong \bar{u}^e = \sum_{j=1}^{N_{n\acute{o}s}} N_j \bar{u}_j^e \quad (4.2.2)$$

#### 4.4 Método dos Mínimos Quadrados

A terceira alternativa utilizada neste trabalho para obter a solução aproximada do problema (4.1) é o Método dos Mínimos Quadrados, cuja idéia básica é determinar  $u^e \in V^e$  para a minimização da integral do quadrado do resíduo definido pela (4.1.3).

Para tal, define-se um funcional quadrático

$$I(u) = \|R(u)\|_0^2 = \int_{\Omega^e} \left\{ \sum_{i=1}^w \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} \right) + A_i \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} \right] + B\bar{u} + f + C \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right\}^2 dx \quad (4.4.1)$$

para todo  $u \in V = \{u \in H^1(0, L)\}$ , no qual  $H^1$  é o espaço de Hilbert de ordem 1 e  $i = 1, w$ .

A condição necessária para que  $\bar{u} \in V$  seja um minimizador do funcional  $I$  na equação (4.4.1) é que na primeira variação  $\bar{u}$  resulte,

$$\delta I(u) = 2 \int_{\Omega^e} (\delta R) R d\Omega = 0 \quad \text{ou} \quad \int_{\Omega^e} (\delta R) R d\Omega = 0 \quad (4.4.2)$$

Neste método, utiliza-se um artifício para baixar a ordem da equação diferencial problema e conseqüentemente das funções peso e de interpolação envolvidas, da seguinte maneira,

$$\bar{q}_i = -k \frac{d\bar{u}}{dx_i}, \quad i = 1, w \quad (4.4.3)$$

Observa-se que aplicando a equação (4.4.3) na equação (4.1.1), tem-se que,

$$\sum_{i=1}^w \left[ -\frac{\partial \bar{q}_i}{\partial x_i} + A_i \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} \right] + B\bar{u} + f + C \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = 0, \text{ com } i = 1, w, \quad (4.4.4)$$

resultando em um problema representado por um sistema de equações diferenciais parciais de primeira ordem a  $1+w$  incógnitas,  $u$  e  $q_i$ ,  $i = 1, w$ ,  $w = 1$ , quando o problema for unidimensional e  $w = 2$ , quando o problema for bidimensional.

Fazendo-se uma analogia as formulações (4.2.1) e (4.3.6), Métodos de Galerkin e Petrov-Galerkin respectivamente, a equação (4.4.2) pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\int_{\Omega^e} R v_i^e \Omega = 0 \quad (4.4.5)$$

no qual  $v_i^e = \delta R$ . O sistema de equações algébricas gerado pela formulação do Método dos Mínimos Quadrados é simétrico e positivo-definido, de acordo com Jiang (1998).

## Integração Numérica e Discretização Temporal

### 5.1 Introdução – Quadratura de Gauss-Legendre

A avaliação das integrais da forma

$$\int_a^b F(x)dx \quad \text{ou} \quad \int_a^b \int_c^d F(x,y)dx dy \quad (5.1.1)$$

de modo geral é difícil em razão da forma complexa do integrando  $F$ . A *integração numérica* ou *quadratura numérica* é também requerida no caso em que o integrando é avaliado inexato, como no elemento de Timoshenko, e no caso em que o integrando depende somente da quantidade de pontos discretos que é conhecida (em problemas não-lineares).

Neste trabalho utiliza-se uma das fórmulas de quadraturas numéricas mais comumente usadas, a *quadratura de Gauss-Legendre*. A fórmula requer que a integral designada seja avaliada sobre um intervalo limitado e fechado  $[-1,1]$  para o caso unidimensional e no intervalo  $[-1,1] \times [-1,1]$  para o caso bidimensional. Isso requer uma transformação do problema de coordenadas  $x$  para as coordenadas locais  $\xi$  e também das coordenadas  $y$  para as coordenadas locais  $\eta$ , para o caso bidimensional.

Os elementos de referência e suas respectivas funções de interpolação estão detalhados no Item 3.5.

A metodologia de Integração Numérica para os casos uni e bidimensional e a Discretização Temporal, são apresentadas a seguir.



## 5.2 Integração Numérica – Caso Unidimensional

### 5.2.1 Aproximação da Geometria

Nos capítulos 6 e 8, será mostrado que as formulações pelos Métodos de Galerkin, Petrov-Galerkin e dos Mínimos Quadrados geram um sistema de equações algébricas e que em cada coeficiente das matrizes estarão envolvidas integrais nas quais alguns termos são derivadas das funções de interpolação com relação às coordenadas globais de  $x$ . Uma transformação na forma,

$$x = f(\xi) \quad (5.2.1.1)$$

é requerida a fim de reescrever as integrais em termos de  $\xi$  ( $-1 \leq \xi \leq 1$ ). A função  $f$  é assumida sendo uma transformação bijetora.

Aqui, aproxima-se a geometria da mesma maneira que são aproximadas as variáveis dependentes. Esta aproximação pode ser escrita da seguinte forma,

$$x = \sum_{i=1}^{N_{\text{nós}}} x_i^e N_i^e(\xi) \quad (5.2.1.2)$$

na qual  $x_i^e$  é a coordenada global do  $i$ -ésimo nó do elemento  $\Omega^e$  e  $N_i^e$  são as funções interpolantes de Lagrange de grau  $(N_{\text{nós}} - 1)$ , no qual  $N_{\text{nós}}$  é igual à quantidade de nós em cada elemento. A equação (5.2.1.2) mapeia a forma geométrica do espaço  $x$  no espaço  $\xi$ , isto é, para qualquer dado  $\xi$ , a equação (5.2.1.2) leva ao correspondente  $x$ . A transformação dada por essa equação é essencial na avaliação das integrais pela Quadratura Gauss-Legendre.

Deve estar bem claro que esta transformação não é usada para escolher a real geometria do elemento e sim, é usada para escrever as expressões integrais envolvendo  $x$  em termos das expressões envolvendo  $\xi$ , ou seja,

$$\int_{x_A}^{x_B} F(x) dx = \int_{-1}^{+1} \bar{F}(\xi) d\xi \quad (5.2.1.3)$$



de modo que a Quadratura Gauss-Legendre pode ser usada para avaliar a integral no intervalo  $[-1, 1]$ .

O elemento diferencial  $dx$  no sistema de coordenadas globais  $x$ , é relacionado com o elemento diferencial  $d\xi$  no sistema de coordenadas naturais  $\xi$ , por,

$$dx = \frac{dx}{d\xi} d\xi = \det(J) d\xi, \quad (5.2.1.4)$$

no qual  $(J)$  é o chamado *Jacobiano da transformação* e

$$\bar{F}(\xi) = F(x(\xi)) \det(J) \quad (5.2.1.5)$$

Sendo  $\det(J) = dx / d\xi$  e utilizando a equação (5.2.1.2), tem-se que,

$$\det(J) = \frac{dx}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \left( \sum_{i=1}^{N_{\text{nós}}} x_i^e N_i^e \right) = \sum_{i=1}^{N_{\text{nós}}} x_i^e \frac{dN_i^e}{d\xi} \quad (5.2.1.6)$$

Define-se ainda a transformação da derivada da função de interpolação em relação à coordenada global para a coordenada local, da seguinte forma

$$\frac{dN_i^e}{dx} = \frac{dN_i^e}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{\det(J)} \frac{dN_i^e}{d\xi}. \quad (5.2.1.7)$$

## 5.2.2 Quadratura de Gauss-Legendre

Neste procedimento determina-se previamente os pontos base, chamados pontos de Gauss, de tal forma que a integração pode ser realizada como segue,

$$\int_a^b F(x) dx = \int_{-1}^{+1} \bar{F}(\xi) d\xi \approx \sum_{n=1}^r \bar{F}(\xi_n) w_n, \quad (5.2.2.1)$$

na qual  $w_n$  são os fatores peso,  $\xi_n$  são os pontos base e  $\bar{F}$  é o integrando transformado.



Os fatores peso e os pontos de Gauss para a quadratura de Gauss-Legendre (5.2.2.1) são listadas, para  $r = 1, 2, 3$ , na Tabela (5.1).

Tabela 5.1 – Pontos e Pesos de Gauss.

| $r$ | Pontos $\xi_n$                     | Pesos $w_n$                  |
|-----|------------------------------------|------------------------------|
| 1   | 0.0000000000                       | 2.0000000000                 |
| 2   | $\pm 0.5773502692$                 | 1.0000000000                 |
| 3   | 0.0000000000<br>$\pm 0.7745966692$ | 0.8888888889<br>0.5555555555 |

Sendo (5.2.2.1) uma expressão polinomial, nota-se que para  $n$  pontos amostrais tem-se  $2n$  incógnitas,  $w_n$  e  $\xi_n$ , e portanto um polinômio de grau  $(2n - 1)$  que pode ser construído e integrado exatamente. Assim, o erro é da ordem de  $O(h^{2n})$ .

Nas formulações por elementos finitos, encontram-se integrais nas quais os integrandos  $F$  são funções de  $x$ ,  $\psi_i(x)$  e das derivadas de  $\psi_i(x)$  com relação a  $x$ . Para a quadratura de Gauss-Legendre, deve-se transformar  $F(x)dx$  em  $\bar{F}(\xi)d\xi$  para utilizar a equação (5.2.2.1). Por exemplo, considere a integral

$$K_{ij}^e = \int_{x_A}^{x_B} a(x) \frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} dx \tag{5.2.2.2}$$

Usando a regra da cadeia da diferenciação, tem-se que,

$$\frac{d\psi_i^e(x)}{dx} = \frac{d\psi_i^e(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{\det(J)} \frac{d\psi_i^e(\xi)}{d\xi} \tag{5.2.2.3}$$

Portanto, a integral (5.2.2.2) pode ser escrita, com a ajuda de (5.2.2.3) como,

$$K_{ij}^e = \int_1^{-1} a(x(\xi)) \frac{1}{\det(J)} \frac{d\psi_i^e}{d\xi} \frac{1}{\det(J)} \frac{d\psi_j^e}{d\xi} \det(J) d\xi \approx \sum_{n=1}^r \bar{F}_{ij}^e(\xi_n) w_n \tag{5.2.2.4}$$

na qual



$$\bar{F}_{ij}^e = a(\xi) \frac{1}{\det(J)} \frac{d\psi_i^e}{d\xi} \frac{d\psi_j^e}{d\xi}, \det(J) = \sum_{i=1}^{Nn\acute{o}s} x_i^e \frac{d\bar{\psi}_i^e}{d\xi} \quad (5.2.2.5a-b)$$

no qual  $r$  é o número de pontos de Gauss e  $Nn\acute{o}s$  é o número de nós no elemento.

Apenas para exemplificar, definem-se algumas integrais e seus respectivos números de pontos e pesos de Gauss como apresentado na Tabela 5.2.

$$K_{ij}^e = \int_{x_A}^{x_B} \frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} dx, \quad M_{ij}^e = \int_{x_A}^{x_B} \psi_i^e \psi_j^e dx, \quad F_i^e = \int_{x_A}^{x_B} \psi_i^e dx, \quad (5.2.2.6a-c)$$

Tabela 5.2 – Número de pontos de Gauss necessários.

| Tipo de Elemento  | Número de pontos de Gauss necessários |            |         |
|-------------------|---------------------------------------|------------|---------|
|                   | $K_{ij}^e$                            | $M_{ij}^e$ | $F_i^e$ |
| <b>Linear</b>     | 1                                     | 2          | 1       |
| <b>Quadrático</b> | 2                                     | 3          | 2       |
| <b>Cúbico</b>     | 3                                     | 4          | 3       |

Neste trabalho adota-se o raciocínio análogo ao utilizado na Tabela 5.2.

### 5.3 Integração Numérica – Caso Bidimensional

#### 5.3.1 Transformação das Coordenadas

Assim como no caso unidimensional, os elementos das matrizes resultantes da discretização espacial do caso bidimensional envolvem as derivadas das funções de interpolação, agora em relação às coordenadas globais  $x$  e  $y$ . As transformações necessárias são da forma,

$$x = f_1(\xi) \quad \text{e} \quad y = f_2(\eta) \quad (5.3.1.1a-b)$$



para que seja possível reescrever as integrais em termos de  $\xi$  e  $\eta$  ( $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$ ). As funções  $f_1$  e  $f_2$  são consideradas transformações bijetoras.

As aproximações da geometria serão feitas da seguinte forma,

$$x = \sum_{i=1}^{N_{\text{nós}}} x_i^e \bar{\psi}_i^e(\xi, \eta) \quad \text{e} \quad y = \sum_{i=1}^{N_{\text{nós}}} y_i^e \bar{\psi}_i^e(\xi, \eta) \quad (5.3.1.2a-b)$$

na qual  $x_i^e$  e  $y_i^e$  são as coordenadas globais no  $i$ -ésimo nó do elemento  $\Omega^e$  e  $\bar{\psi}_i^e(\xi, \eta)$  são as funções de interpolação de Lagrange. Neste trabalho são adotadas funções lineares e quadráticas.

Neste trabalho, como já citado nos Itens 3.5.2 e 3.5.3, serão adotados para o caso bidimensional, elementos triangulares e quadrilaterais para a discretização espacial. Em ambos os casos, devido às transformações das coordenadas globais,  $x$  e  $y$ , para as coordenadas locais,  $\xi$  e  $\eta$ , é necessário definir as transformações das derivadas das funções de interpolação. Pela regra da cadeia da diferenciação parcial, tem-se que,

$$\frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad (5.3.1.3a)$$

e

$$\frac{\partial \psi_i^e}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (5.3.1.3b)$$

ou, em notação matricial,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}^e \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (5.3.1.4)$$

na qual relaciona-se as derivadas de  $N_i^e$  com as coordenadas globais e locais.

A matriz em (5.3.1.4) é chamada de *matriz Jacobiana* da transformação (5.3.1.2a-b)



$$(J^e) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}^e \quad (5.3.1.5)$$

No entanto, o sistema da Equação (5.3.1.4) deve ser invertido, da seguinte maneira,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{Bmatrix} = (J^e)^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (5.3.1.6)$$

Isso requer que a matriz Jacobiana seja não singular.

Então, é possível escrever a relação (5.3.1.6) da seguinte forma,

$$\frac{\partial N_i^e}{\partial x} = \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (5.3.1.7a)$$

e

$$\frac{\partial N_i^e}{\partial y} = \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (5.3.1.7b)$$

nas quais,

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{j=1}^{N_{\text{nós}}} x_j^e \frac{\partial N_j^e}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{j=1}^{N_{\text{nós}}} y_j^e \frac{\partial N_j^e}{\partial \xi} \quad (5.3.1.8a-b)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{j=1}^{N_{\text{nós}}} x_j^e \frac{\partial N_j^e}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{j=1}^{N_{\text{nós}}} y_j^e \frac{\partial N_j^e}{\partial \eta} \quad (5.3.1.8c-d)$$

Para que seja possível o cálculo das derivadas das funções de interpolação, uma condição necessária e suficiente para que a inversa da matriz Jacobiana exista, é que o

determinante de  $(J)$ , chamado de *Jacobiano*, seja não nulo em todos os pontos  $(\xi, \eta)$  em  $\overline{\Omega}^e$ , ou seja

$$\det(J) = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \neq 0 \quad (5.3.1.9)$$

As equações (5.3.1.7a-b) expressam as derivadas das funções de interpolação em relação a  $x$  e  $y$ , nas quais estão envolvidos os termos  $\partial \xi / \partial x$ ,  $\partial \xi / \partial y$ ,  $\partial \eta / \partial x$  e  $\partial \eta / \partial y$  que podem apresentar divisões por zero, por exemplo da seguinte maneira,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \xi}}, \text{ se } \frac{\partial x}{\partial \xi} = 0, \text{ tem-se que } \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{0}.$$

Para evitar esse fato, neste trabalho será adotado a transformação dada por,

$$\frac{\partial N_i^e}{\partial x} = \frac{1}{\det(J)} \left[ \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \right] \quad (5.3.1.10a)$$

e

$$\frac{\partial N_i^e}{\partial y} = \frac{1}{\det(J)} \left[ -\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \right] \quad (5.3.1.10b)$$

Como já mencionado neste trabalho, os domínios bidimensionais são discretizados com elementos triangulares ou quadrilaterais. Por isso, no próximo Item apresenta-se as integrações para os casos de elementos triangulares ou quadrilaterais.

### 5.3.2 Integração sobre o Elemento Quadrilateral

A fórmula da quadratura para integrais definidas sobre um elemento quadrilateral  $\overline{\Omega}_R$  pode ser derivada pela fórmula da quadratura unidimensional apresentada no item 5.2.2. Assim, tem-se que,

$$\int_{\bar{\Omega}_R} F(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^{+1} \left[ \int_{-1}^{+1} \bar{F}(\xi, \eta) d\eta \right] d\xi \approx \int_{-1}^{+1} \left[ \sum_{j=1}^N \bar{F}(\xi, \eta_j) w_j \right] d\xi \approx \sum_{I=1}^M \sum_{J=1}^N \bar{F}(\xi_I, \eta_J) w_I w_J \quad (5.3.2.1)$$

no qual  $M$  e  $N$  denotam o número de pontos da quadratura nas direções  $\xi$  e  $\eta$ ,  $(\xi_I, \eta_J)$  denota os pontos de Gauss, e  $w_I$  e  $w_J$  denotam os correspondentes pesos de Gauss.

Tabela 5.3 – Pontos e pesos de Gauss para o elemento quadrilateral com 4 nós.

| nº do ponto de Gauss (I,J) | $\xi_I$       | $\eta_J$      | $w_I \times w_J$ |
|----------------------------|---------------|---------------|------------------|
| 1                          | $1/\sqrt{3}$  | $1/\sqrt{3}$  | 1                |
| 2                          | $1/\sqrt{3}$  | $-1/\sqrt{3}$ | 1                |
| 3                          | $-1/\sqrt{3}$ | $1/\sqrt{3}$  | 1                |
| 4                          | $-1/\sqrt{3}$ | $-1/\sqrt{3}$ | 1                |

Tabela 5.4 – Pontos e pesos de Gauss para o elemento quadrilateral com 8 nós.

| nº do ponto de Gauss (I,J) | $\xi_I$       | $\eta_J$      | $w_I \times w_J$ |
|----------------------------|---------------|---------------|------------------|
| 1                          | $\sqrt{3/5}$  | $\sqrt{3/5}$  | 25/81            |
| 2                          | $\sqrt{3/5}$  | 0             | 40/81            |
| 3                          | $\sqrt{3/5}$  | $-\sqrt{3/5}$ | 25/81            |
| 4                          | 0             | $\sqrt{3/5}$  | 40/81            |
| 5                          | 0             | 0             | 64/81            |
| 6                          | 0             | $-\sqrt{3/5}$ | 40/81            |
| 7                          | $-\sqrt{3/5}$ | $\sqrt{3/5}$  | 25/81            |
| 8                          | $-\sqrt{3/5}$ | 0             | 40/81            |
| 9                          | $-\sqrt{3/5}$ | $-\sqrt{3/5}$ | 25/81            |

Nas Tabelas 5.3 e 5.4 estão apresentadas as quantidade de pontos e pesos de Gauss, respectivamente, para os elementos quadrilaterais de 4 e 8 nós e seus respectivos valores, conforme Reddy (1993).

### 5.3.3 Integração sobre o Elemento Triangular

Seguindo raciocínio análogo ao do elemento quadrilateral, para o elemento triangular tem-se que,

$$\int_{\Omega_T} F(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ \int_0^1 F(\xi, \eta) d\eta \right] d\xi \approx \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ \sum_{J=1}^N F(\xi, \eta_J) w_J \right] d\xi \approx \frac{1}{2} \sum_{I=1}^M \sum_{J=1}^N F(\xi_I, \eta_J) w_I w_J \tag{5.3.3.1}$$

no qual os termos envolvidos possuem as mesmas definições citadas no item 5.3.2.

Nas Tabelas 5.5 e 5.6 estão apresentados quantidade de pontos e pesos de Gauss, respectivamente, para os elementos triangulares de 3 e 6 nós, e seus respectivos valores conforme descrito em Reddy (1993).

Tabela 5.5 – Pontos e pesos de Gauss para o elemento triangular com 3 nós.

| n° do ponto de Gauss (I,J) | $\xi_I$ | $\eta_J$ | $w_I \times w_J$ |
|----------------------------|---------|----------|------------------|
| 1                          | 1/3     | 1/3      | 27/48            |
| 2                          | 3/5     | 1/5      | 25/48            |
| 3                          | 1/5     | 3/5      | 25/48            |
| 4                          | 1/5     | 1/5      | 25/48            |





Tabela 5.6 – Pontos e pesos de Gauss para o elemento quadrilateral com 8 nós.

| nº do ponto de Gauss (I,J) | $\xi_I$        | $\eta_J$       | $w_I \times w_J$ |
|----------------------------|----------------|----------------|------------------|
| 1                          | 1/3            | 1/3            | 0,225            |
| 2                          | 0,797426985353 | 0,101286507323 | 0,125939180544   |
| 3                          | 0,101286507323 | 0,797426985353 | 0,125939180544   |
| 4                          | 0,101286507323 | 0,101286507323 | 0,125939180544   |
| 5                          | 0,059715871789 | 0,470142064105 | 0,132394152788   |
| 6                          | 0,470142064105 | 0,059715871789 | 0,132394152788   |
| 7                          | 0,470142064105 | 0,470142064105 | 0,132394152788   |

### 5.3.4 Transformação das integrais do contorno

Nas formulações pelos Métodos de Galerkin e Petrov-Galerkin surgem integrais ao longo do contorno. Neste item, apresentam-se as transformações de coordenadas para essas integrais.

A integral,

$$I = \int_{\Gamma^e} ( ) d\Gamma$$

é escrita em termos da abscissa  $s$  ao longo da curva  $\Gamma$ , como,

$$I = \int_{s_1}^{s_2} ( ) J_s d\Gamma \tag{5.3.4.1}$$

Em geral, a abscissa  $s$  é uma das variáveis  $\xi$  ou  $\eta$ . A curva  $\Gamma$  geralmente corresponde a um dos lados do elemento de referência. E por fim, define-se (Dhatt e Touzot, 1984),

$$J_s = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2} \text{ ou } J_s = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}, \tag{5.3.4.2a-b}$$



$J_s$  dependendo de qual lado do elemento de referência que corresponde à curva  $\Gamma$ .

## 5.4 Discretização Temporal

Neste item são descritos esquemas de aproximações no tempo para converter equações diferenciais no tempo em equações algébricas.

As equações uni e bidimensionais que são avaliadas neste trabalho são equações parabólicas, ou seja, são equações de primeira ordem no tempo.

Um método comumente utilizado para resolver problemas como os propostos neste trabalho é o de *aproximação da família  $\alpha$* , no qual uma média ponderada da derivada em relação ao tempo da variável dependente é aproximada por dois passos consecutivos no tempo, por meio de uma interpolação linear dos valores da variável para os dois passos, como segue

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{\{\tilde{u}\}_{s+1} - \{\tilde{u}\}_s}{\Delta t_{s+1}} = (1 - \alpha) \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\}_s + (\alpha) \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\}_{s+1}, \quad (5.4.1)$$

para  $0 \leq \alpha \leq 1$  e  $t \in [t_s, t_{s+1}]$ , com  $s = 1, 2, \dots, mt$ , sendo que  $mt$  é o número de passos no tempo. Na equação (5.4.1),  $\{\}_s$  refere-se ao valor das variáveis no passo “s” e  $\Delta t_{s+1} = t_{s+1} - t_s$  é o  $(s + 1)$ -ésimo passo no tempo.

Para os diferentes valores de  $\alpha$ , obtém-se os seguintes esquemas de integração numérica conhecidos, Reddy (1993):

$$\alpha = \begin{cases} 0, & \text{esquema de diferenças para frente (ou Euler) - condicionalmente estável} \\ & \text{ordem de precisão} = O(\Delta t) \\ \frac{1}{2}, & \text{esquema Crank - Nicolson (estável); } O((\Delta t)^2) \\ \frac{2}{3}, & \text{método de Galerkin (estável); } O((\Delta t)^2) \\ 1, & \text{esquema de diferenças para trás (estável); } O(\Delta t) \end{cases}$$

Existem outras metodologias que poderiam ser usadas, tais como: Método Runge-Kutta, Método Preditor-Corretor e Método de Gear. Neste trabalho, será adotado o Método Crank-Nicolson,  $\alpha = 1/2$ .



## Convecção-Difusão Unidimensional

### 6.1 Equação Modelo

Introduz-se aqui um estudo numérico da solução da equação diferencial parcial que modela o fenômeno convectivo-difusivo unidimensional genérico, definido no domínio  $\Theta = \Omega \times \Xi \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\Omega, \Xi \subset \mathbb{R}$  ( $\Omega$  e  $\Xi$  são domínios unidimensionais limitados e fechados), descrito como,

$$\Psi \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + k \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \phi u(x,t) + f(x) - \gamma \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (6.1.1)$$

na qual assume-se  $\Psi$ ,  $k$ ,  $\phi$  e  $\gamma$  sendo constantes reais,  $x \in \Omega = [a, b]$  e  $t \in \Xi = [t_i, t_f]$ , sendo  $t_i$  o instante inicial de tempo e  $t_f$  o instante final de tempo. Essa equação está sujeita às condições de contorno de primeiro e segundo tipo bem como à condição inicial. Apenas por simplicidade define-se  $u = u(x, t)$  e  $f = f(x)$ .

### 6.2 Formulação pelo Método de Galerkin

A equação (6.1.1) pode ser escrita da seguinte forma,

$$\Psi \frac{\partial u}{\partial t} = -k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \phi u - f + \gamma \frac{\partial u}{\partial x} \quad (6.2.1)$$



Seguindo-se a discretização no tempo descrita na equação (5.4.1), a função  $u$  é aproximada pela função  $\tilde{u}$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \Psi \frac{\tilde{u}^{s+1} - \tilde{u}^s}{\Delta t} &= (1 - \alpha) \left[ -k \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} - \phi \tilde{u} + \gamma \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right]^s + \alpha \left[ -k \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} - \phi \tilde{u} + \gamma \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right]^{s+1} - f \Rightarrow \\ \left[ \frac{\Psi}{\Delta t} \tilde{u} + \alpha \left( k \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \phi \tilde{u} - \gamma \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) \right]^{s+1} &+ f + \left[ -\frac{\Psi}{\Delta t} \tilde{u} + (1 - \alpha) \left( k \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \phi \tilde{u} - \gamma \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) \right]^s = 0 \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

Após a discretização no tempo a derivada parcial  $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}$  é equivalente à derivada ordinária  $\frac{d\tilde{u}}{dx}$ .

Seguindo-se a discretização espacial pelo Método de Galerkin, definida na equação (4.5), obtém-se a seguinte equação integral,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ \frac{\Psi}{\Delta t} \tilde{u} + \alpha \left( k \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \phi \tilde{u} + f - \gamma \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) \right]^{s+1} N_i d\Omega &+ \int_{\Omega} f N_i d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} \left[ -\frac{\Psi}{\Delta t} \tilde{u} + (1 - \alpha) \left( k \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \phi \tilde{u} - \gamma \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) \right]^s N_i d\Omega = 0 \Rightarrow \\ \int_{\Omega} \alpha k \frac{\partial^2 \tilde{u}^{s+1}}{\partial x^2} N_i d\Omega &+ \int_{\Omega} \left[ \frac{\Psi}{\Delta t} + \alpha \phi \right] \tilde{u}^{s+1} N_i d\Omega + \int_{\Omega} (-\alpha \gamma) \frac{\partial \tilde{u}^{s+1}}{\partial x} N_i d\Omega + \int_{\Omega} f N_i d\Omega + \\ + \int_{\Omega} (1 - \alpha) k \frac{\partial^2 \tilde{u}^s}{\partial x^2} N_i d\Omega &+ \int_{\Omega} \left[ -\frac{\Psi}{\Delta t} + (1 - \alpha) \phi \right] \tilde{u}^s N_i d\Omega - \int_{\Omega} \gamma (1 - \alpha) \frac{\partial \tilde{u}^s}{\partial x} N_i d\Omega = 0 \quad (6.2.3) \end{aligned}$$

Para qualquer passo no tempo, a integração por partes do termo a seguir, torna-se

$$\int_{\Omega} N_i \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} d\Omega = N_i k \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \Big|_{\Gamma} - \int_{\Omega} k \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} d\Omega \quad (6.2.4)$$

Aplicando-se a equação (6.2.4) em (6.2.3), tem-se que,



$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \alpha k \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \tilde{u}^{s+1}}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} \left( \frac{\Psi}{\Delta t} + \alpha \phi \right) \tilde{u}^{s+1} N_i d\Omega + \int_{\Omega} (-\alpha \gamma) \frac{\partial \tilde{u}^{s+1}}{\partial x} N_i d\Omega - \\
& - \int_{\Omega} \alpha k \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \tilde{u}^s}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} \left( -\frac{\Psi}{\Delta t} + (1-\alpha)\phi \right) \tilde{u}^s N_i d\Omega - \int_{\Omega} \gamma (1-\alpha) \frac{\partial \tilde{u}^s}{\partial x} N_i d\Omega = \\
& = - \int_{\Omega} f N_i d\Omega - \alpha N_i k \frac{\partial \tilde{u}^{s+1}}{\partial x} \Big|_{\Gamma} - (1-\alpha) N_i k \frac{\partial \tilde{u}^s}{\partial x} \Big|_{\Gamma}
\end{aligned} \tag{6.2.5}$$

Como as condições de contorno espaciais propostas para este problema são invariantes no tempo, obtém-se,

$$- \alpha N_i k \frac{\partial \tilde{u}^{s+1}}{\partial x} \Big|_{\Gamma} - (1-\alpha) N_i k \frac{\partial \tilde{u}^s}{\partial x} \Big|_{\Gamma} = - N_i k \frac{\partial \tilde{u}^s}{\partial x} \Big|_{\Gamma} = - N_i k \frac{\partial \tilde{u}^{s+1}}{\partial x} \Big|_{\Gamma} \tag{6.2.6}$$

Agora, faz-se a aproximação da função  $\tilde{u}$  pela função  $\hat{u}^e$  da seguinte forma,

$$\tilde{u} \approx \hat{u}^e = \sum_{i=1}^{N_{\text{nós}}} N_i(x) \hat{u}_i^e \tag{6.2.7}$$

para qualquer passo no tempo e com  $N_{\text{nós}}$  sendo o número de nós em cada elemento.

Substituindo-se a aproximação (6.2.7) na equação (6.2.5), tem-se

$$\begin{aligned}
& \left\{ - \int_{\Omega^e} \alpha k \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega^e} \left[ \frac{\Psi}{\Delta t} + \alpha \phi \right] N_i N_j d\Omega + \int_{\Omega^e} (-\alpha \gamma) N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega \right\} \hat{u}_j^{s+1,e} + \\
& + \left\{ - \int_{\Omega^e} \alpha k \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega^e} \left( -\frac{\Psi}{\Delta t} + (1-\alpha)\phi \right) N_i N_j d\Omega - \int_{\Omega^e} \gamma (1-\alpha) N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega \right\} \hat{u}_j^{s,e} = \\
& = - \int_{\Omega^e} f N_i d\Omega - N_i k \frac{\partial \hat{u}^{s+1}}{\partial x} \Big|_{\Gamma}
\end{aligned} \tag{6.2.8}$$

com  $i, j = 1, \dots, N_{\text{nós}}$ .

O termo  $N_i k \frac{d\hat{u}}{dx} \Big|_{\Gamma}$ , que está relacionado com as condições de contorno do problema,

possui as seguintes propriedades,

$$N_i k \frac{d\hat{u}}{dx} \Big|_{\Gamma} = \begin{cases} 0, \text{ fora de } \Gamma \\ c, \text{ em } \Gamma \end{cases}, \quad c \in \Re \quad (6.2.9a)$$

e

$$c = \begin{cases} 0, \text{ se a condição de contorno é função prescrita} \\ q_x, \text{ para condição de fluxo prescrito} \end{cases} \quad (6.2.9b)$$

A partir da equação (6.2.8), obtém-se um sistema matricial com a seguinte forma,

$$[K]\{\hat{u}^{s+1,e}\} + [B]\{\hat{u}^{s,e}\} = \{F\} \quad (6.2.10)$$

Visto que as variáveis  $\hat{u}^s$  já são conhecidas do passo anterior de tempo “s”, o sistema linear algébrico (6.2.10) pode ser reescrito na forma,

$$[K]\{\hat{u}^{s+1,e}\} = \{F\} - [B]\{\hat{u}^{s,e}\} \quad (6.2.11)$$

na qual

$$K_{ij} = - \int_{\Omega^e} \alpha k \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega^e} \left[ \frac{\Psi}{\Delta t} + \alpha \phi \right] N_i N_j d\Omega + \int_{\Omega^e} (-\alpha \gamma) N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega, \quad (6.2.12a)$$

$$B_{ij} = - \int_{\Omega^e} \alpha k \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega^e} \left[ -\frac{\Psi}{\Delta t} + (1-\alpha)\phi \right] N_i N_j d\Omega - \int_{\Omega^e} \gamma (1-\alpha) N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega, \quad (6.2.12b)$$

$$F_i = - \int_{\Omega^e} f N_i d\Omega + (\text{Termo de Contorno}). \quad (6.2.12c)$$

A partir das transformações de coordenadas globais para as locais ( $x \rightarrow \xi$ ), descritas pelas equações (5.2.1.4) e (5.2.1.7), as equações (6.2.12a-c) são reescritas da forma,

$$K_{ij} = - \int_{\bar{\Omega}^e} \alpha k \frac{1}{\det(J)} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} d\bar{\Omega} + \int_{\bar{\Omega}^e} \left[ \frac{\Psi}{\Delta t} + \alpha \phi \right] N_i N_j \det(J) d\bar{\Omega} + \int_{\bar{\Omega}^e} (-\alpha \gamma) N_i \frac{\partial N_j}{\partial \xi} d\bar{\Omega}, \quad (6.2.13a)$$

$$B_{ij} = - \int_{\bar{\Omega}^e} \alpha k \frac{1}{\det(J)} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} d\bar{\Omega} + \int_{\bar{\Omega}^e} \left[ -\frac{\Psi}{\Delta t} + (1-\alpha)\phi \right] N_i N_j \det(J) d\bar{\Omega} - \int_{\bar{\Omega}^e} \gamma (1-\alpha) N_i \frac{\partial N_j}{\partial \xi} d\bar{\Omega}, \quad (6.2.13b)$$

$$F_i = - \int_{\bar{\Omega}^e} f N_i d\bar{\Omega} + (\text{Termo de Contorno}). \quad (6.2.13c)$$

Caso o problema esteja no regime permanente, ou seja,  $\Psi \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ , então o sistema matricial é escrito da seguinte forma,

$$[K] \{\hat{u}^e\} = \{F\} \quad (6.2.14)$$

na qual,

$$K_{ij} = - \int_{\bar{\Omega}^e} k \frac{1}{\det(J)} \frac{dN_i}{d\xi} \frac{dN_j}{d\xi} d\bar{\Omega} + \int_{\bar{\Omega}^e} \phi N_i N_j \det(J) d\bar{\Omega} - \int_{\bar{\Omega}^e} \gamma N_i \frac{dN_j}{d\xi} d\bar{\Omega}, \quad (6.2.15a)$$

$$F_i = - \int_{\bar{\Omega}^e} f N_i d\bar{\Omega} + (\text{Termo de Contorno}) \quad (6.2.15b)$$

com  $i, j = 1, N$  nós.

### 6.3 Formulação pelo Método Petrov-Galerkin

Visto que a única diferença na formulação entre o Método Petrov-Galerkin e o Método de Galerkin é a função peso, analogamente tem-se o seguinte sistema matricial

$$[G] \{\hat{u}^{s+1,e}\} = \{F\} - [H] \{\hat{u}^{s,e}\} \quad (6.3.1)$$

na qual

$$G_{ij} = - \int_{\bar{\Omega}^e} \alpha k \frac{1}{\det(J)} \frac{\partial M_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} d\bar{\Omega} + \int_{\bar{\Omega}^e} \left[ \frac{\Psi}{\Delta t} + \alpha \phi \right] M_i N_j \det(J) d\bar{\Omega} + \int_{\bar{\Omega}^e} (-\alpha \gamma) M_i \frac{\partial N_j}{\partial \xi} d\bar{\Omega}, \quad (6.3.2a)$$

$$B_{ij} = - \int_{\bar{\Omega}^e} \alpha k \frac{1}{\det(J)} \frac{\partial M_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} d\bar{\Omega} + \int_{\bar{\Omega}^e} \left[ -\frac{\Psi}{\Delta t} + (1-\alpha)\phi \right] M_i N_j \det(J) d\bar{\Omega} - \int_{\bar{\Omega}^e} \gamma (1-\alpha) M_i \frac{\partial N_j}{\partial \xi} d\bar{\Omega}, \quad (6.3.3b)$$

$$F_i = - \int_{\bar{\Omega}^e} f M_i d\bar{\Omega} + (\text{Termo de Contorno}). \quad (6.3.3c)$$

com  $i, j = 1, \dots, N$  nós e o termo de contorno  $M_i k \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \Big|_{\Gamma}$  contendo as mesmas características apresentadas nas equações (6.2.9a-b).

Para o problema em regime permanente, o sistema linear matricial é escrito da seguinte forma,

$$[G] \{\hat{u}^e\} = \{F\} \quad (6.3.4)$$

no qual,

$$G_{ij} = - \int_{\bar{\Omega}^e} k \frac{1}{\det(J)} \frac{\partial M_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} d\bar{\Omega} + \int_{\bar{\Omega}^e} \phi M_i N_j \det(J) d\bar{\Omega} - \int_{\bar{\Omega}^e} \gamma M_i \frac{\partial N_j}{\partial \xi} d\bar{\Omega} \quad (6.3.5a)$$

$$F_i = - \int_{\bar{\Omega}^e} f M_i d\bar{\Omega} \quad (6.3.5b)$$

com  $i, j = 1, \dots, N$  nós.



## 6.4 Formulação pelo Método dos Mínimos Quadrados

Aplicando-se na equação (6.1.1) o que está proposto nas equações (4.4.3) e (4.4.4), obtém-se

$$\Psi \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial q_x}{\partial x} + \phi u + f - \gamma \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (6.4.1a)$$

$$q_x + k \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (6.4.1b)$$

Primeiramente, deve-se discretizar o termo transiente da equação (6.4.1a), ou seja, aproximar as funções  $u$  e  $q_x$ , pelas funções  $\tilde{u}$  e  $\tilde{q}_x$ , resultando respectivamente,

$$\Psi \frac{\tilde{u}^{s+1} - \tilde{u}^s}{\Delta t} = \alpha \left[ \frac{\partial \tilde{q}_x}{\partial x} - \phi \tilde{u} + \gamma \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right]^{s+1} - f + (1 - \alpha) \left[ \frac{\partial \tilde{q}_x}{\partial x} - \phi \tilde{u} + \gamma \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right]^s. \quad (6.4.2)$$

Substituindo-se a equação (6.4.2) na equação (6.4.1a), obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais com duas equações e duas incógnitas, dado por,

$$\left\{ \frac{\Psi}{\Delta t} \tilde{u} - \alpha \left[ \frac{\partial \tilde{q}_x}{\partial x} - \phi \tilde{u} + \gamma \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right] \right\}^{s+1} + f + \left\{ -\frac{\Psi}{\Delta t} \tilde{u} - (1 - \alpha) \left[ \frac{\partial \tilde{q}_x}{\partial x} - \phi \tilde{u} + \gamma \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right] \right\}^s = 0 \quad (6.4.3a)$$

$$\tilde{q}_x^{s+1} + k \frac{\partial \tilde{u}^{s+1}}{\partial x} = 0 \quad (6.4.3b)$$

Seja  $\hat{u}^e$  e  $\hat{q}_x^e$  aproximações espaciais, respectivamente, de  $\tilde{u}$  e  $\tilde{q}_x$ , para qualquer passo no tempo, escritas da forma,

$$\tilde{u} \approx \hat{u}^e = \sum_{i=1}^{N_{\text{nós}}} N_i(x) \hat{u}_i^e \quad (6.4.4a)$$

e

$$\tilde{q}_x \approx \hat{q}_x^e = \sum_{i=1}^{N_{\text{nós}}} N_i(x) \hat{q}_{xi}^e \quad (6.4.4b)$$

Por simplicidade será adotado  $N_i = N_i(x)$ . Pode-se assim escrever as equações residuais das equações (6.4.3a-b) da seguinte maneira:

$$R_1 = \left\{ \frac{\Psi}{\Delta t} \tilde{u} - \alpha \left[ \frac{\partial \tilde{q}_x}{\partial x} - \phi \tilde{u} + \gamma \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right] \right\}^{s+1} + f + \left\{ -\frac{\Psi}{\Delta t} \tilde{u} - (1-\alpha) \left[ \frac{\partial \tilde{q}_x}{\partial x} - \phi \tilde{u} + \gamma \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right] \right\}^s \quad (6.4.5a)$$

$$R_2 = \tilde{q}_x^{s+1} + k \frac{\partial \tilde{u}^{s+1}}{\partial x} \quad (6.4.5b)$$

Substituindo as equações (6.4.4a-b) nas equações (6.4.5a-b), obtém-se,

$$R_1(x) = -\alpha \sum_{i=1}^{N_{\text{nós}}} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{q}_{xi}^{s+1,e} + \left[ \frac{\Psi}{\Delta t} + \alpha \phi \right] \sum_{i=1}^{N_{\text{nós}}} N_i \hat{u}_i^{s+1,e} - \alpha \gamma \sum_{i=1}^{N_{\text{nós}}} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{u}_i^{s+1,e} + f - \\ - (1-\alpha) \sum_{i=1}^{N_{\text{nós}}} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{q}_{xi}^{s,e} + \left[ -\frac{\Psi}{\Delta t} + (1-\alpha)\phi \right] \sum_{i=1}^{N_{\text{nós}}} N_i \hat{u}_i^{s,e} - \gamma (1-\alpha) \sum_{i=1}^{N_{\text{nós}}} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{u}_i^{s,e} \quad (6.4.6a)$$

$$R_2(x) = \sum_{i=1}^{N_{\text{nós}}} N_i \hat{q}_{xi}^{s+1,e} + k \sum_{i=1}^{N_{\text{nós}}} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{u}_i^{s+1,e} \quad (6.4.6b)$$

Como neste problema tem-se duas equações, o funcional é definido da seguinte maneira

$$I(R_1, R_2) = \int_{\Omega} R_1^2(x) dx + \int_{\Omega} R_2^2(x) dx \quad (6.4.7)$$

e sua primeira variação é escrita da forma,

$$\delta I(R_1, R_2) = 2 \int_{\Omega} (\delta R_1) R_1 dx + 2 \int_{\Omega} (\delta R_2) R_2 dx = 0$$

ou

$$\int_{\Omega} (\delta R_1) R_1 dx + \int_{\Omega} (\delta R_2) R_2 dx = 0 \quad (6.4.6)$$

com as seguintes propriedades,

$$\delta R_1 = \frac{\partial R_1}{\partial u^{s+1,e}} \delta \hat{u}^{s+1,e} + \frac{\partial R_1}{\partial q_{xi}^{s+1,e}} \delta \hat{q}_x^{s+1,e}, \quad (6.4.7a)$$

$$\delta R_2 = \frac{\partial R_2}{\partial u^{s+1,e}} \delta \hat{u}^{s+1,e} + \frac{\partial R_2}{\partial q_x^{s+1,e}} \delta \hat{q}_x^{s+1,e}, \quad (6.4.7b)$$

nos quais,

$$\frac{\partial R_1}{\partial \hat{u}^{s+1,e}} = \left[ \frac{\Psi}{\Delta t} + \alpha \phi \right] N - \alpha \gamma \frac{\partial N}{\partial x}, \quad (6.4.8a)$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial \hat{q}_x^{s+1,e}} = -\alpha \frac{\partial N}{\partial x}, \quad (6.4.8b)$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial \hat{u}^{s+1,e}} = k \frac{\partial N}{\partial x}, \quad (6.4.8c)$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial \hat{q}_x^{s+1,e}} = N. \quad (6.4.8d)$$

Substituindo-se as equações (6.4.5a-b), (6.4.8a-b) e (6.4.9a-d) em (6.4.7), tem-se

$$\int_{\Omega} \left\{ \left[ \left( \frac{\Psi}{\Delta t} + \alpha \phi \right) N_i - \alpha \gamma \frac{\partial N_i}{\partial x} \right] \delta \hat{u}_i^{s+1,e} + \left[ -\alpha \frac{\partial N_i}{\partial x} \right] \delta \hat{q}_{xi}^{s+1,e} \right\} \times$$

$$\times \left\{ -\alpha \sum_{j=1}^{Nn\acute{o}s} \frac{\partial N_j}{\partial x} \hat{q}_{xj}^{s+1,e} + \left[ \frac{\Psi}{\Delta t} - \alpha \phi \right] \sum_{j=1}^{Nn\acute{o}s} N_j \hat{u}_j^{s+1,e} - \alpha \gamma \sum_{j=1}^{Nn\acute{o}s} \frac{\partial N_j}{\partial x} \hat{u}_j^{s+1,e} + f - (1-\alpha) \sum_{i=1}^{Nn\acute{o}s} \frac{\partial N_j}{\partial x} \hat{q}_{xj}^{s,e} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ -\frac{\Psi}{\Delta t} + (1-\alpha)\phi \right] \sum_{j=1}^{N_{\text{nos}}} N_j \hat{u}_j^{s,e} - \gamma (1-\alpha) \sum_{j=1}^{N_{\text{nos}}} \frac{\partial N_j}{\partial x} \hat{u}_j^{s,e} \Big] d\Omega + \int_{\Omega} \left\{ \left[ k \sum_{j=1}^{N_{\text{nos}}} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right] \delta \hat{u}_j^{s+1,e} + \right. \\
& \left. + \left[ \sum_{j=1}^{N_{\text{nos}}} N_j \right] \delta \hat{q}_{xj}^{s+1,e} \right\} \times \left[ \sum_{j=1}^{N_{\text{nos}}} N_j \hat{q}_{xj}^{s+1,e} + k \sum_{j=1}^{N_{\text{nos}}} \frac{\partial N_j}{\partial x} \hat{u}_j^{s+1,e} \right] d\Omega = 0 \quad (6.4.9)
\end{aligned}$$

Reorganizando-se a equação (6.4.9) obtém-se

$$\begin{aligned}
\delta \hat{u}_i^{s+1,e} \times \int_{\Omega^e} (U_1 + U_2) d\Omega + \delta \hat{q}_{xi}^{s+1,e} \times \int_{\Omega^e} (Q_1 + Q_2) d\Omega = \\
= \delta \hat{u}_i^{s+1,e} \times \int_{\Omega^e} F_1 d\Omega + \delta \hat{q}_{xi}^{s+1,e} \times \int_{\Omega^e} F_2 d\Omega \quad (6.4.10)
\end{aligned}$$

na qual

$$\begin{aligned}
U_1 = & \left[ \left( \frac{\Psi}{\Delta t} + \alpha \phi \right) N_i - \alpha \gamma \frac{\partial N_i}{\partial x} \right] \times \left[ -\alpha \sum_{j=1}^{N_{\text{nos}}} \frac{\partial N_j}{\partial x} \hat{q}_{xj}^{s+1,e} + \left( \frac{\Psi}{\Delta t} - \alpha \phi \right) \sum_{j=1}^{N_{\text{nos}}} N_j \hat{u}_j^{s+1,e} - \right. \\
& \left. - \alpha \gamma \sum_{j=1}^{N_{\text{nos}}} \frac{\partial N_j}{\partial x} \hat{u}_j^{s+1,e} - (1-\alpha) \sum_{j=1}^{N_{\text{nos}}} \frac{\partial N_j}{\partial x} \hat{q}_{xj}^{s,e} + \left( -\frac{\Psi}{\Delta t} + (1-\alpha)\phi \right) \sum_{j=1}^{N_{\text{nos}}} N_j \hat{u}_j^{s,e} - \gamma (1-\alpha) \sum_{j=1}^{N_{\text{nos}}} \frac{\partial N_j}{\partial x} \hat{u}_j^{s,e} \right]
\end{aligned}$$

$$U_2 = \left[ k \frac{\partial N_i}{\partial x} \right] \times \left[ \sum_{j=1}^{N_{\text{nos}}} N_j \hat{q}_{xj}^{s+1,e} + k \sum_{j=1}^{N_{\text{nos}}} \frac{\partial N_j}{\partial x} \hat{u}_j^{s+1,e} \right],$$

$$\begin{aligned}
Q_1 = & \left[ -\alpha \frac{\partial N_i}{\partial x} \right] \times \left[ -\alpha \sum_{j=1}^{N_{\text{nos}}} \frac{\partial N_j}{\partial x} \hat{q}_{xj}^{s+1,e} + \left( \frac{\Psi}{\Delta t} - \alpha \phi \right) \sum_{j=1}^{N_{\text{nos}}} N_j \hat{u}_j^{s+1,e} - \alpha \gamma \sum_{j=1}^{N_{\text{nos}}} \frac{\partial N_j}{\partial x} \hat{u}_j^{s+1,e} - \right. \\
& \left. - (1-\alpha) \sum_{j=1}^{N_{\text{nos}}} \frac{\partial N_j}{\partial x} \hat{q}_{xj}^{s,e} + \left( -\frac{\Psi}{\Delta t} + (1-\alpha)\phi \right) \sum_{j=1}^{N_{\text{nos}}} N_j \hat{u}_j^{s,e} - \gamma (1-\alpha) \sum_{j=1}^{N_{\text{nos}}} \frac{\partial N_j}{\partial x} \hat{u}_j^{s,e} \right],
\end{aligned}$$

$$Q_2 = [N_i] \times \left[ \sum_{j=1}^{N_{\text{nos}}} N_j \hat{q}_{xj}^{s+1,e} + k \sum_{j=1}^{N_{\text{nos}}} \frac{\partial N_j}{\partial x} \hat{u}_j^{s+1,e} \right],$$

$$F_1 = \left[ \left( \frac{\Psi}{\Delta t} + \alpha \phi \right) N_i - \alpha \gamma \frac{\partial N_i}{\partial x} \right] \times (-f),$$



$$F_2 = \left[ -\alpha \frac{\partial N_i}{\partial x} \right] \times (-f).$$

Partindo da hipótese que  $\delta \hat{u}_i^{s+1,e}$  e  $\delta \hat{q}_{xi}^{s+1,e}$  são não identicamente nulos em todo o domínio, para que a equação (6.4.10) seja satisfeita, deve-se ter

$$\int_{\Omega^e} (U_1 + U_2) d\Omega = \int_{\Omega^e} F_1 d\Omega \quad (6.4.11a)$$

$$\int_{\Omega^e} (Q_1 + Q_2) d\Omega = \int_{\Omega^e} F_2 d\Omega \quad (6.4.11b)$$

O que gera o sistema linear matricial,

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}^{s+1,e} \\ \hat{q}_x^{s+1,e} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D & E \\ H & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}^{s,e} \\ \hat{q}_x^{s,e} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

Como  $\hat{u}^{s,e}$  e  $\hat{q}_x^{s,e}$  já são conhecidos do passo de tempo “s”, tem-se

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}^{s+1,e} \\ \hat{q}_x^{s+1,e} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} D & E \\ H & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}^{s,e} \\ \hat{q}_x^{s,e} \end{Bmatrix} \quad (6.4.12)$$

na qual

$$A_{ij} = \int_{\Omega^e} \left\{ \left[ \left( \frac{\Psi}{\Delta t} + \alpha \phi \right) N_i - \alpha \gamma \frac{\partial N_i}{\partial x} \right] \times \left[ \left( \frac{\Psi}{\Delta t} + \alpha \phi \right) N_j - \alpha \gamma \frac{\partial N_j}{\partial x} \right] + k^2 \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right\} d\Omega \quad (6.4.13a)$$

$$B_{ij} = \int_{\Omega^e} \left\{ \left[ \left( \frac{\Psi}{\Delta t} + \alpha \phi \right) N_i - \alpha \gamma \frac{\partial N_i}{\partial x} \right] \times \left[ -\alpha \frac{\partial N_j}{\partial x} \right] + k \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j \right\} d\Omega, \quad (6.4.13b)$$

$$C_{ij} = \int_{\Omega^e} \left[ \alpha^2 \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + N_i N_j \right] d\Omega, \quad (6.4.13c)$$

$$D_{ij} = \int_{\Omega^e} \left[ \left( \frac{\Psi}{\Delta t} + \alpha \phi \right) N_i - \alpha \gamma \frac{\partial N_i}{\partial x} \right] \times \left[ \left( -\frac{\Psi}{\Delta t} + (1-\alpha) \phi \right) N_j - \gamma (1-\alpha) \frac{\partial N_j}{\partial x} \right] d\Omega, \quad (6.4.13d)$$

$$E_{ij} = \int_{\Omega^e} \left[ \left( \frac{\Psi}{\Delta t} + \alpha \phi \right) N_i - \alpha \gamma \frac{\partial N_i}{\partial x} \right] \times \left[ -(1-\alpha) \frac{\partial N_j}{\partial x} \right] d\Omega, \quad (6.4.13e)$$

$$G_{ij} = \int_{\Omega^e} \alpha (1-\alpha) \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega, \quad (6.4.13f)$$

$$H_{ij} = \int_{\Omega^e} \left[ -\alpha \frac{\partial N_i}{\partial x} \right] \times \left[ \left( -\frac{\Psi}{\Delta t} + (1-\alpha) \phi \right) N_j - \gamma (1-\alpha) \frac{\partial N_j}{\partial x} \right] d\Omega, \quad (6.4.13g)$$

$$F_{1i} = - \int_{\Omega^e} \left[ \left( \frac{\Psi}{\Delta t} + \alpha \phi \right) N_i - \alpha \gamma \frac{\partial N_i}{\partial x} \right] \times f d\Omega, \quad (6.4.13h)$$

$$F_{2i} = \int_{\Omega^e} f \alpha \frac{\partial N_i}{\partial x} d\Omega, \quad (6.4.13i)$$

com  $i, j = 1, \dots, N$  nós.

Transformando as coordenadas globais para locais ( $x \rightarrow \xi$ ) através da equações (5.2.1.4) e (5.2.1.7), as equações (6.4.13a-i) são reescritas da forma:

$$A_{ij} = \int_{\bar{\Omega}^e} \left\{ \left[ \left( \frac{\Psi}{\Delta t} + \alpha \phi \right) N_i - \frac{\alpha \gamma}{\det(J)} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right] \times \left[ \left( \frac{\Psi}{\Delta t} + \alpha \phi \right) N_j - \frac{\alpha \gamma}{\det(J)} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right] + \frac{k^2}{\det(J)^2} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right\} \det(J) d\bar{\Omega}, \quad (6.4.14a)$$

$$B_{ij} = \int_{\bar{\Omega}^e} \left\{ \left[ \left( \frac{\Psi}{\Delta t} + \alpha \phi \right) N_i - \frac{\alpha \gamma}{\det(J)} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right] \times \left( -\alpha \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right) + k \frac{\partial N_i}{\partial \xi} N_j \right\} d\bar{\Omega}, \quad (6.4.14b)$$

$$C_{ij} = \int_{\bar{\Omega}^e} \left[ \frac{\alpha^2}{\det(J)} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} + N_i N_j \right] d\bar{\Omega}, \quad (6.4.14c)$$

$$D_{ij} = \int_{\bar{\Omega}^e} \left[ \left( \frac{\Psi}{\Delta t} + \alpha \phi \right) N_i - \frac{\alpha \gamma}{\det(J)} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right] \times \left[ \left( -\frac{\Psi}{\Delta t} + (1-\alpha) \phi \right) N_j - \frac{\gamma (1-\alpha)}{\det(J)} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right] d\bar{\Omega}, \quad (6.4.14d)$$

$$E_{ij} = \int_{\bar{\Omega}^e} \left[ \left( \frac{\Psi}{\Delta t} + \alpha \phi \right) N_i - \frac{\alpha \gamma}{\det(J)} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right] \times \left[ -\frac{(1-\alpha)}{\det(J)} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right] d\bar{\Omega}, \quad (6.4.14e)$$

$$G_{ij} = \int_{\bar{\Omega}^e} \frac{\alpha (1-\alpha)}{\det(J)} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} d\bar{\Omega}, \quad (6.4.14f)$$

$$H_{ij} = \int_{\bar{\Omega}^e} \left( -\alpha \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right) \times \left[ \left( -\frac{D}{\Delta t} + (1-\alpha) \phi \right) N_j - \frac{\gamma (1-\alpha)}{\det(J)} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right] d\bar{\Omega}, \quad (6.4.14g)$$

$$F_{1i} = - \int_{\bar{\Omega}^e} \left[ \left( \frac{D}{\Delta t} + \alpha \phi \right) N_i - \frac{\alpha \gamma}{\det(J)} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right] \times f \det(J) d\bar{\Omega}, \quad (6.4.14h)$$

$$F_{2i} = \int_{\bar{\Omega}^e} f \alpha \frac{\partial N_i}{\partial \xi} d\bar{\Omega}, \quad (6.4.14i)$$

com  $i, j = 1, Nnós$ .

Para o problema em regime permanente,  $\Psi \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ , o sistema terá a seguinte forma,

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}^e \\ \hat{q}_x^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (6.4.15)$$

na qual

$$A_{ij} = \int_{\bar{\Omega}^e} \left[ \left( \phi N_i - \frac{\gamma}{\det(J)} \frac{dN_i}{d\xi} \right) \times \left( \phi N_j - \frac{\gamma}{\det(J)} \frac{dN_j}{d\xi} \right) + \frac{k^2}{\det(J)^2} \frac{dN_i}{d\xi} \frac{dN_j}{d\xi} \right] \det(J) d\bar{\Omega} \quad (6.4.16a)$$

$$B_{ij} = \int_{\bar{\Omega}^e} \left[ \left( \phi N_i - \frac{\gamma}{\det(J)} \frac{dN_i}{d\xi} \right) \times \left( -\frac{dN_j}{d\xi} \right) + k \frac{dN_i}{d\xi} N_j \right] d\bar{\Omega}, \quad (6.4.16b)$$

$$C_{ij} = \int_{\bar{\Omega}^e} \left[ \frac{1}{\det(J)^2} \frac{dN_i}{d\xi} \frac{dN_j}{d\xi} + N_i N_j \right] d\bar{\Omega}, \quad (6.4.16c)$$

$$F_{1i} = - \int_{\bar{\Omega}^e} f \times \left[ \phi N_i - \frac{\gamma}{\det(J)} \frac{dN_i}{d\xi} \right] \det(J) d\bar{\Omega}, \quad (6.4.16d)$$

$$F_2 = \int_{\bar{\Omega}^e} f \frac{dN_i}{d\xi} d\bar{\Omega}, \quad (6.4.16e)$$

com  $i, j = 1, \dots, N$  nós.



## Aplicações Numéricas Unidimensionais

Neste capítulo são apresentadas algumas aplicações com o objetivo de comparar os Métodos de Galerkin, Petrov-Galerkin e dos Mínimos Quadrados, na solução de problemas convectivo-difusivos transientes unidimensionais. Para calcular o sistema linear foi utilizada a subrotina LSLRG da biblioteca IMSL do Fortran 90/95.

### Aplicação 1: Difusão Pura com termo fonte

Nesta aplicação, apresenta-se um problema puramente difusivo, com termo fonte, geração, em um domínio  $x \in [0,1]$  e com condições de contorno do tipo função prescrita, dada por,

$$\text{Equação Governante: } \frac{d^2 u}{dx^2} = 5 \qquad \text{Domínio: } x \in [0,1]$$

$$\text{Condições de Contorno: } u(0) = 0 \text{ e } u(1) = 0$$

**Solução Analítica:**

$$\begin{cases} u(x) = \frac{5}{2}(x^2 - x) \\ \frac{du(x)}{dx} = \frac{5}{2}(2x - 1) \end{cases}$$

O principal intuito é mostrar que para problemas deste tipo, os Métodos de Galerkin e dos Mínimos Quadrados apresentam bons resultados na solução numérica de  $u$ , até mesmo

quando malhas consideradas grosseiras são utilizadas para discretizar o domínio, Figura 7.1a-b. Vale ressaltar que o Método Petrov-Galerkin, quando  $\gamma = 0$ , reduz-se ao Método de Galerkin.

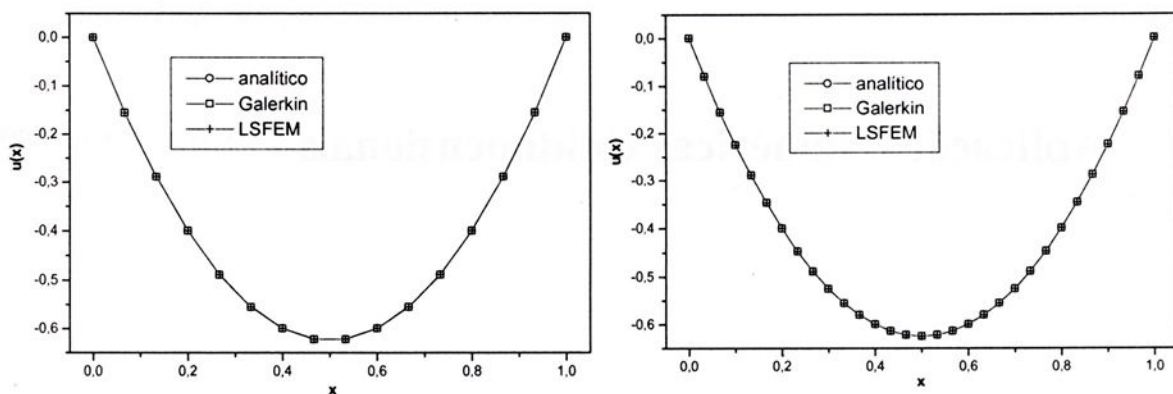


Figura 7.1a-b – Solução  $u(x)$  para malhas com 15 elementos com 2 nós cada (à esquerda) e com 3 nós cada (à direita).

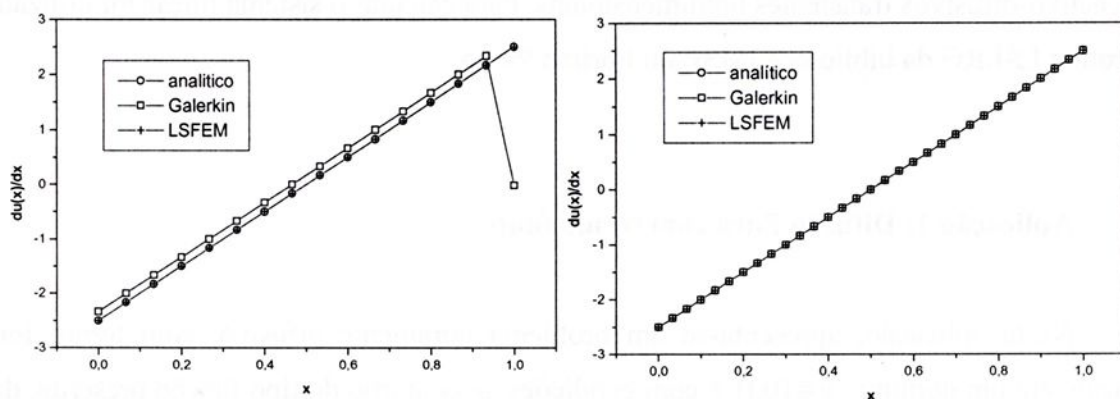


Figura 7.1c-d – Solução  $du(x)/dx$  para malhas com 15 elementos com 2 nós cada (à esquerda) e com 3 nós cada (à direita)

Ao analisar a solução numérica de  $\frac{du}{dx}$  é possível perceber que para um malha com 15 elementos com 2 nós cada o Método de Galerkin não apresenta bons resultado, o mesmo não acontece com o Método dos Mínimos Quadrados, Figura 7.1c.

Nesta aplicação o Método de Galerkin apresenta melhores resultados para  $u$  do que para  $\frac{du}{dx}$ .

## Aplicação 2: Convecção-Difusão com convecção dominante

Nesta aplicação, apresenta-se um teste numérico, no qual o coeficiente que acompanha o termo de convecção é consideravelmente maior que o coeficiente que acompanha o termo de difusão e as condições de contorno são do tipo função prescrita. Os resultados deste teste numérico são comparados com os resultados de Camprub et al. (2000).

**Equação Governante:**  $10 \frac{du}{dx} - 0,09 \frac{d^2 u}{dx^2} = 0$

**Domínio:**  $0 \leq x \leq 6$

**Condições de Contorno:**  $u(0) = 12$  e  $u(6) = 16$

**Solução Analítica:**  $u(x) = \frac{0,09}{10} c \exp\left(\frac{10x}{0,09}\right) + d$

no qual  $c = \frac{40}{\exp\left(\frac{10}{0,09} - 1\right) - 1}$  e  $d = 12 - \frac{0,09}{10} c$ .

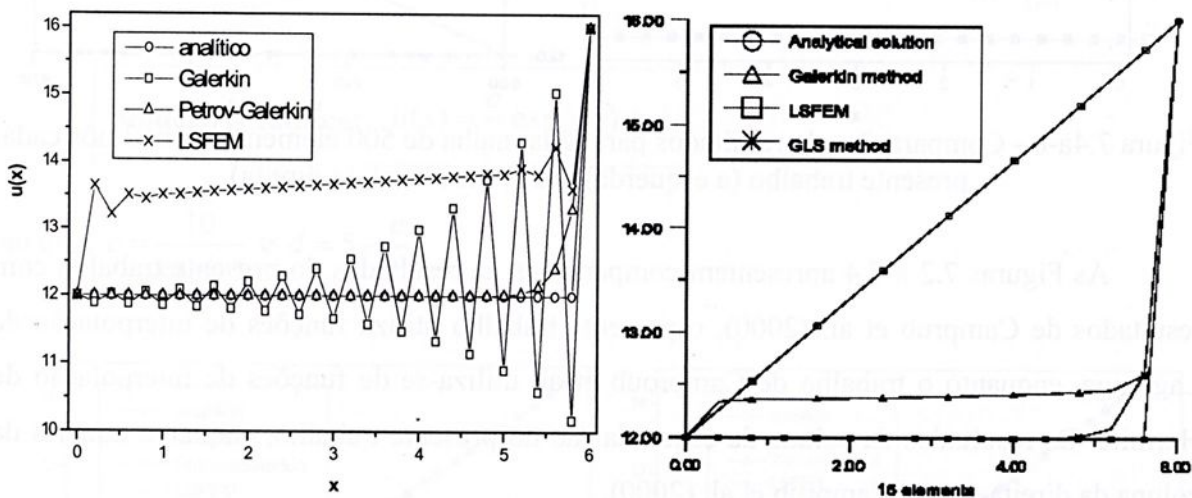


Figura 7.2a-b - Comparações de resultados para uma malha de 15 elementos com 3 nós cada, presente trabalho (a esquerda) e Camprub et al. (a direita)



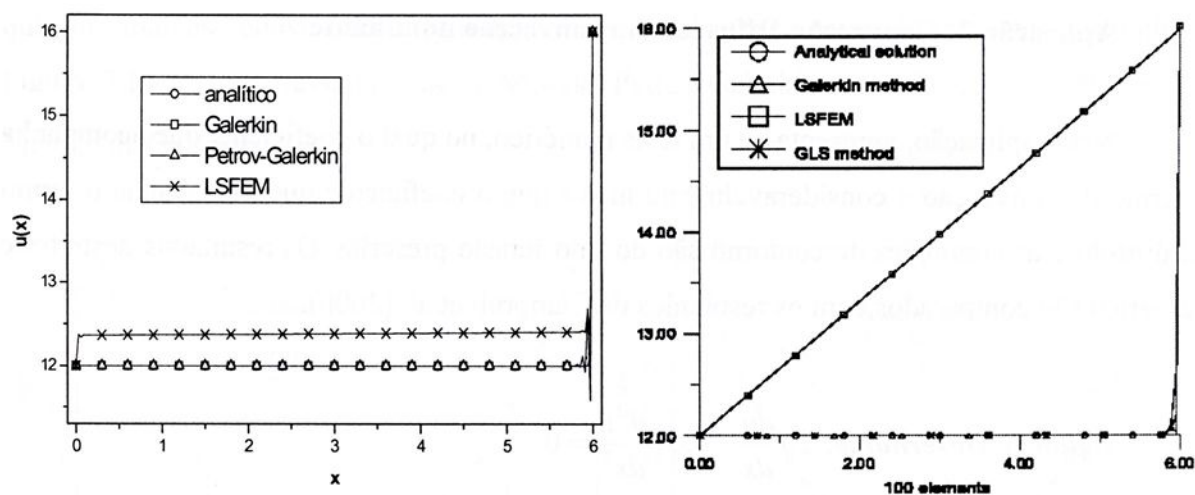


Figura 7.3a-b - Comparações de resultados para uma malha de 100 elementos com 3 nós cada, presente trabalho (a esquerda) e Camprub et al. (a direita)

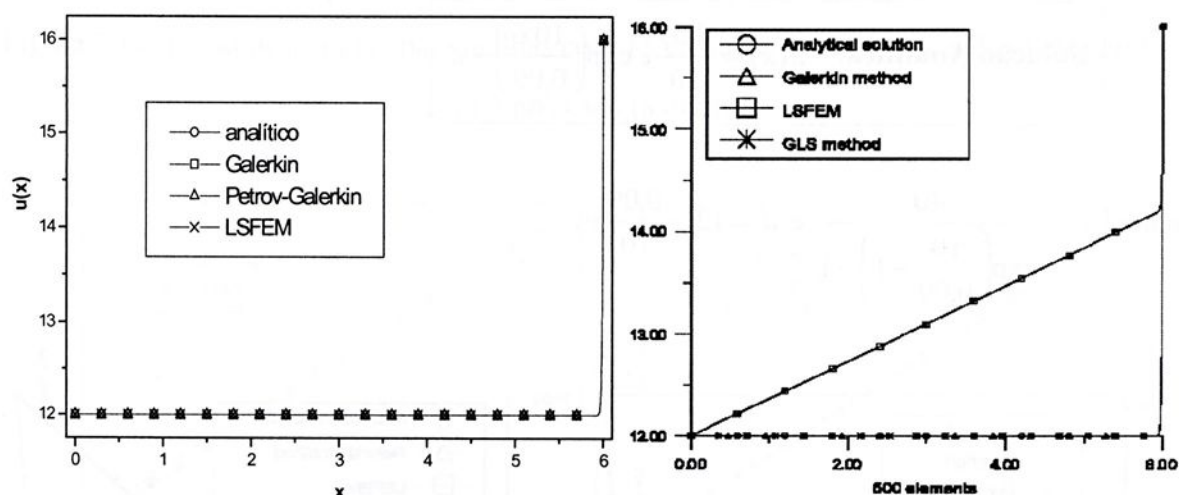


Figura 7.4a-b - Comparações de resultados para uma malha de 500 elementos com 3 nós cada, presente trabalho (a esquerda) e Camprub et al. (a direita)

As Figuras 7.2 a 7.4 apresentam comparações de resultados do presente trabalho com resultados de Camprub et al. (2000), o presente trabalho utiliza funções de interpolação de Lagrange, enquanto o trabalho de Camprub et al. utiliza-se de funções de interpolação de Hermite. Os resultados da coluna da esquerda são do presente trabalho, enquanto aqueles da coluna da direita são de Camprub et al. (2000).

Pode-se observar que o Método de Galerkin apresenta oscilações numéricas para este problema convectivo dominante, sendo tanto pior o resultado quanto mais grosseira for a malha, Figura 7.2a. O refinamento da malha, como esperado, tende a eliminar as oscilações do Método de Galerkin, Figura 7.4a. O Método Petrov-Galerkin, mesmo para a malha com 15 elementos, considerada grosseira, já apresenta resultados satisfatórios. O pior resultado é obtido pelo Método dos Mínimos Quadrados quando este é resolvido com uma malha com 15



elementos, Figura 7.2a, resultado este que melhora com o refinamento da malha, Figura 7.4a. O uso de polinômios de Hermite associados ao Método Galerkin/Mínimos Quadrados obtém bons resultados, como visto no trabalho de Camprub et. al (2000), Figura 7.4b.

### Aplicação 3: Convecção-Difusão com variações do parâmetro $\gamma$

Esta aplicação tem como finalidade analisar o comportamento da solução numérica pelos Métodos de Galerkin, Petrov-Galerkin e dos Mínimos Quadrados de um problema convectivo-difusivo com uma condição de contorno prescrita em  $x = 0$  e uma condição de contorno de fluxo prescrita em  $x = 1$ , quando o coeficiente de convecção  $\gamma$  é variado, e todos os outros coeficientes descritos na equação (6.1.1) são considerados fixos para todos os  $\gamma$ , utilizando-se malhas com 15 e 30 elementos (3 nós cada elemento).

O parâmetro  $\gamma$  será variado entre:  $10^{-1}$ , 1, 5, 25, 50 e 100 .

**Equação Governante:** 
$$\gamma \frac{du}{dx} - \frac{d^2u}{dx^2} = 0$$

**Domínio:**  $0 \leq x \leq 1$       **Condições de Contorno:**  $u(0) = 5$  e  $\left. \frac{du(x)}{dx} \right|_{x=1} = 10$

**Solução Analítica:** 
$$u(x) = \frac{c}{\gamma} \exp(\gamma x) + d$$

no qual  $c = \frac{10}{\exp(\gamma)}$  e  $d = 5 - \frac{c}{\gamma}$ .

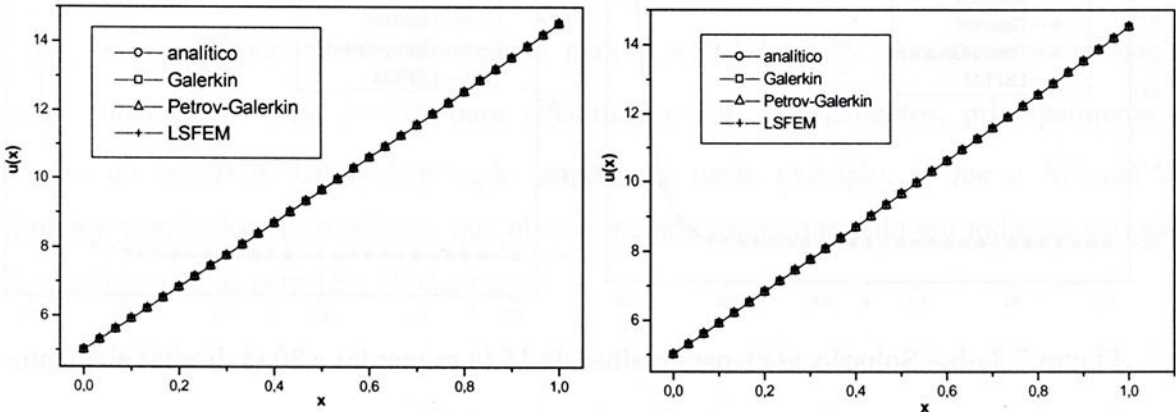


Figura 7.5a-b – Solução  $u(x)$  para malhas de 15 (à esquerda) e 30 (à direita) elementos com 3 nós cada, para  $\gamma = 10^{-1}$ .

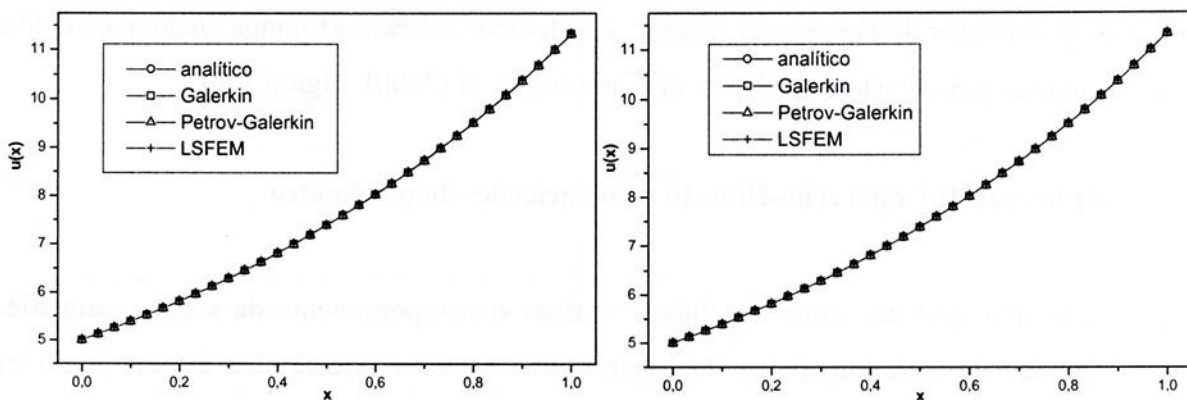


Figura 7.6a-b – Solução  $u(x)$  para malhas de 15 (à esquerda) e 30 (à direita) elementos com 3 nós cada, para  $\gamma = 1$ .

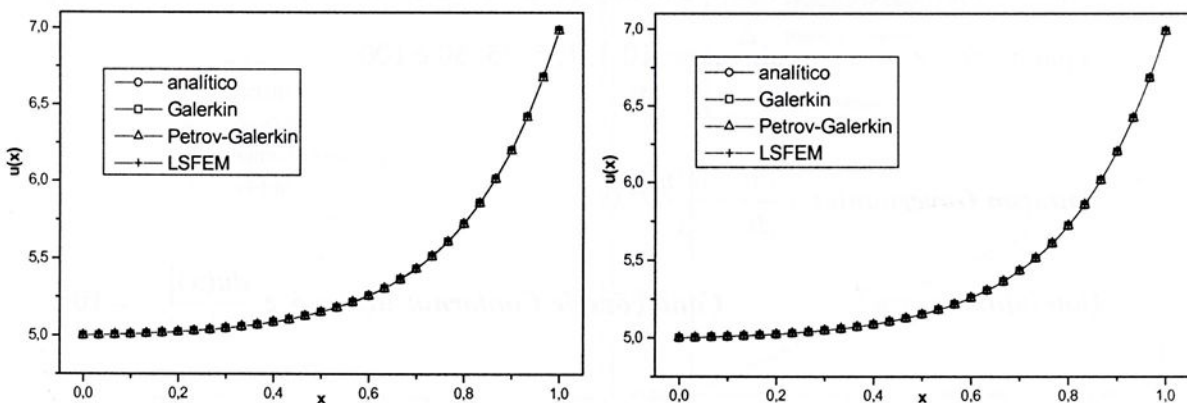


Figura 7.7a-b – Solução  $u(x)$  para malhas de 15 (à esquerda) e 30 (à direita) elementos com 3 nós cada, para  $\gamma = 5$ .

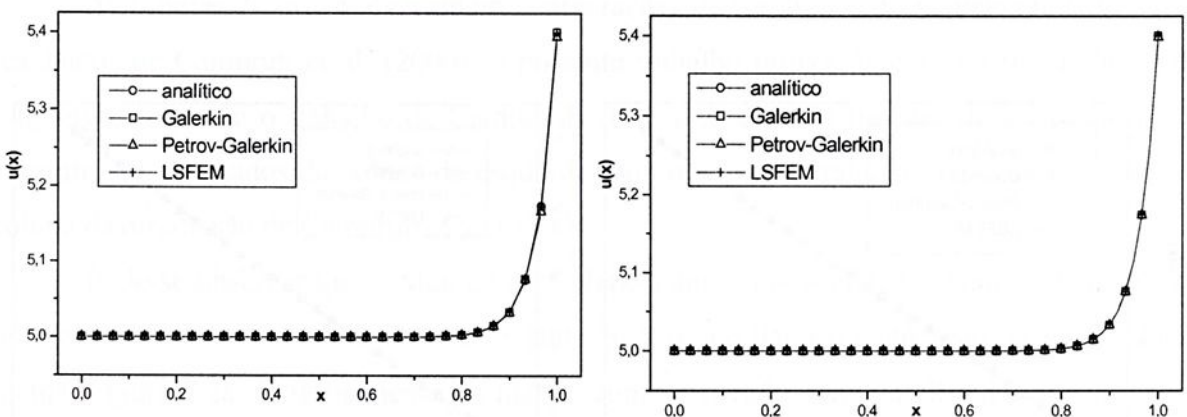


Figura 7.8a-b – Solução  $u(x)$  para malhas de 15 (à esquerda) e 30 (à direita) elementos com 3 nós cada, para  $\gamma = 25$ .

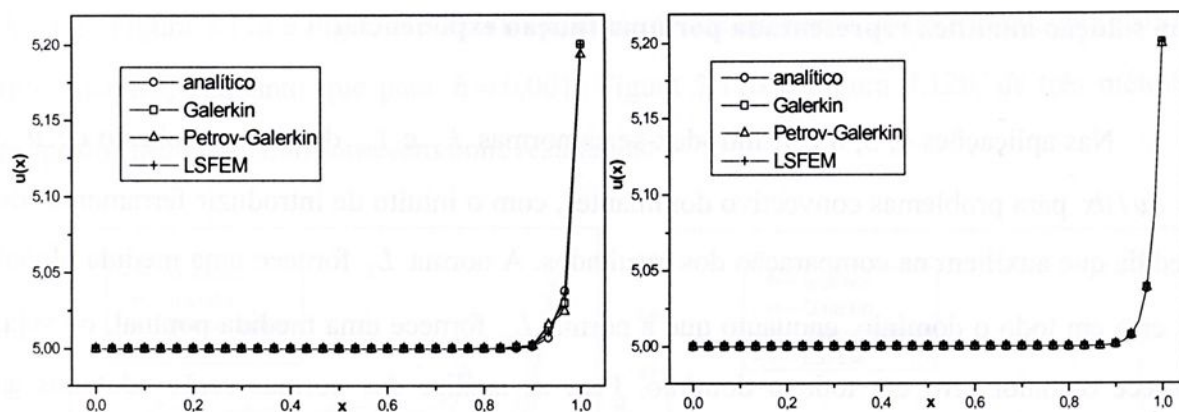


Figura 7.9a-b – Solução  $u(x)$  para malhas de 15 (à esquerda) e 30 (à direita) elementos com 3 nós cada, para  $\gamma = 50$ .

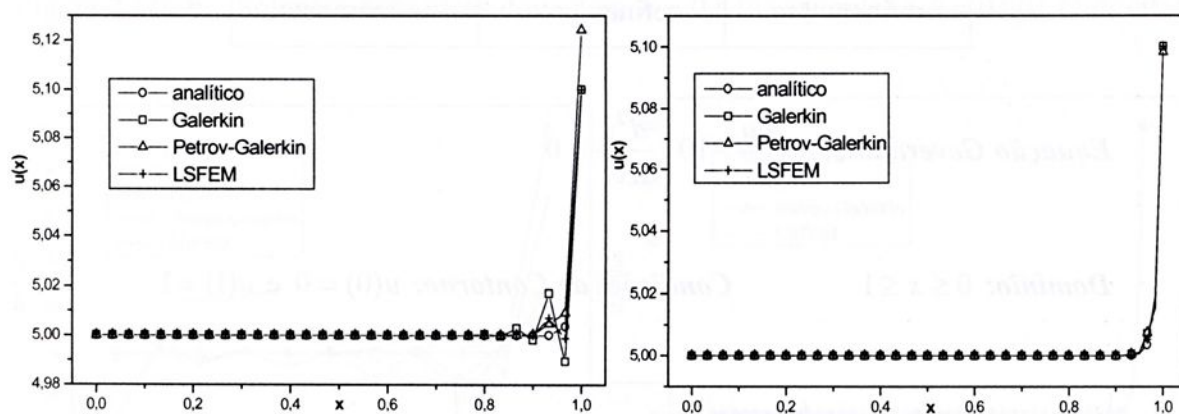


Figura 7.10a-b – Solução  $u(x)$  para malhas de 15 (à esquerda) e 30 (à direita) elementos com 3 nós cada, para  $\gamma = 100$ .

Percebe-se que utilizando malhas de 15 elementos e 30 elementos, cada elemento com 3 nós, bons resultados foram alcançados para  $\gamma = 10^{-1}, 1, 5$  e  $25$ . As primeiras oscilações foram apresentadas para  $\gamma = 50$  para uma malha com 15 elementos, principalmente no método de Galerkin. Uma observação importante neste exemplo, é que o Método dos Mínimos Quadrados foi o método que obteve melhor comportamento em todas as variações de  $\gamma$  e para malhas com 15 e 30 elementos.



**Aplicação 4: Convecção-Difusão com condições de contorno do primeiro tipo e com solução analítica representada por uma função exponencial**

Nas aplicações 4, 5, 6 e 7, introduz-se as normas  $L_2$  e  $L_\infty$  do erro na solução de  $u$  e de  $du/dx$  para problemas convectivo dominantes, com o intuito de introduzir ferramentas de medida que auxiliem na comparação dos resultados. A norma  $L_2$  fornece uma medida global do erro em todo o domínio, enquanto que a norma  $L_\infty$  fornece uma medida pontual, ou seja, fornece o maior erro em todo o domínio. Para as análise das normas serão adotados as seguintes convenções:

|                     |                   |                    |
|---------------------|-------------------|--------------------|
| $h = 0,1$           | $h = 0,01$        | $h = 0,001$        |
| pequeno refinamento | médio refinamento | grande refinamento |

**Equação Governante:**  $10 \frac{du}{dx} - 10^{-1} \frac{d^2u}{dx^2} = 0$

**Domínio:**  $0 \leq x \leq 1$       **Condições de Contorno:**  $u(0) = 0$  e  $u(1) = 1$

**Solução Analítica:**

$$\begin{cases} u(x) = \frac{c}{100} \exp(100x) + d \\ \frac{du(x)}{dx} = c \exp(100x) \end{cases}$$

no qual  $c = \frac{10}{\exp(100) - 1}$  e  $d = -\frac{c}{100}$ .

Nesta aplicação, tem-se um problema convectivo-difusivo, no qual o coeficiente que acompanha o termo convectivo é 100 vezes maior que o que acompanha o termo difusivo. Primeiramente, apresenta-se as soluções numéricas de  $u$  e  $\frac{du}{dx}$  para  $h = 0,1$  até  $h = 0,001$ . Logo em seguida apresenta-se uma avaliação das normas  $L_2$  e  $L_\infty$  do erro no cômputo de  $u$  e  $\frac{du}{dx}$  para alguns valores de  $h$ .





Analisando as Figuras 7.11a-b e 7.12a-b, é possível perceber que para o caso no qual  $h = 0,1$ , Figura 7.11a e Figura 7.12a a solução numérica apresenta grandes oscilações para os três métodos, enquanto que para  $h = 0,001$ , Figura 7.11b e Figura 7.12b, os três métodos propostos neste trabalho fornecem bons resultados.

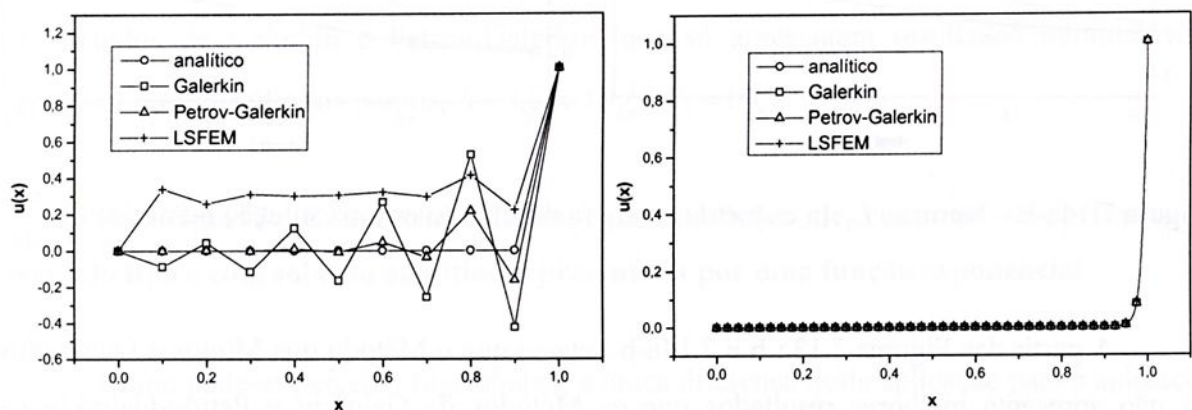


Figura 7.11a-b – Soluções numéricas de  $u$  para  $h = 0,1$  (à esquerda) e  $h = 0,001$  (à direita).

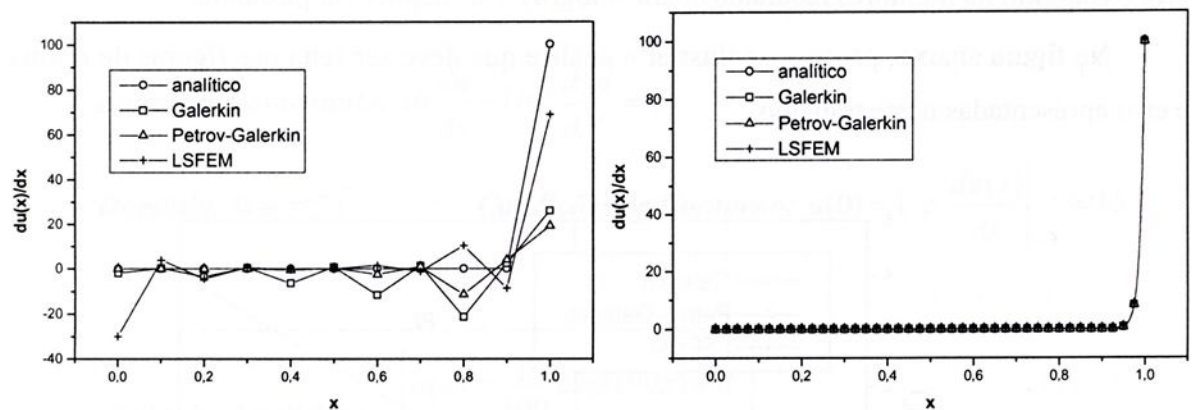


Figura 7.12a-b – Soluções numéricas de  $\frac{du}{dx}$  para  $h = 0,1$  (à esquerda) e  $h = 0,001$  (à direita).

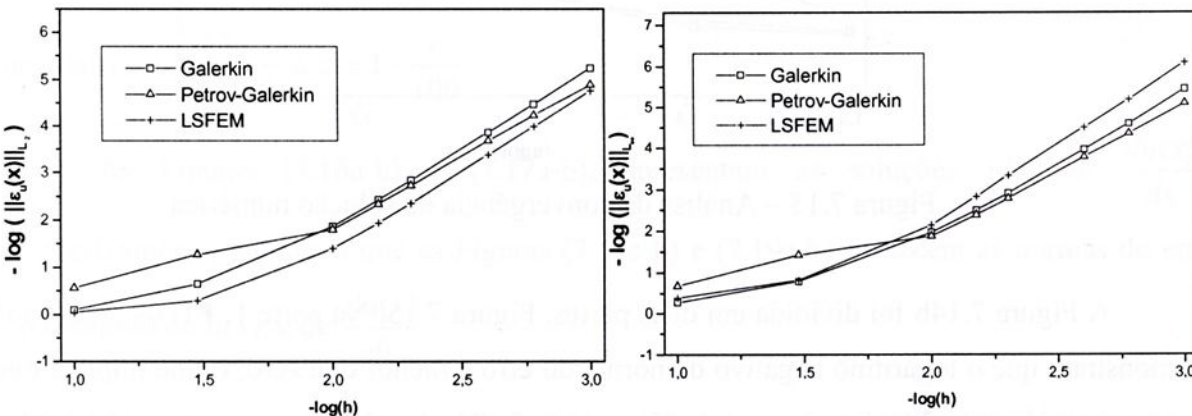


Figura 7.13a-b – Normas  $L_2$  (à esquerda) e  $L_\infty$  (à direita) do erro na solução numérica de  $u$ .

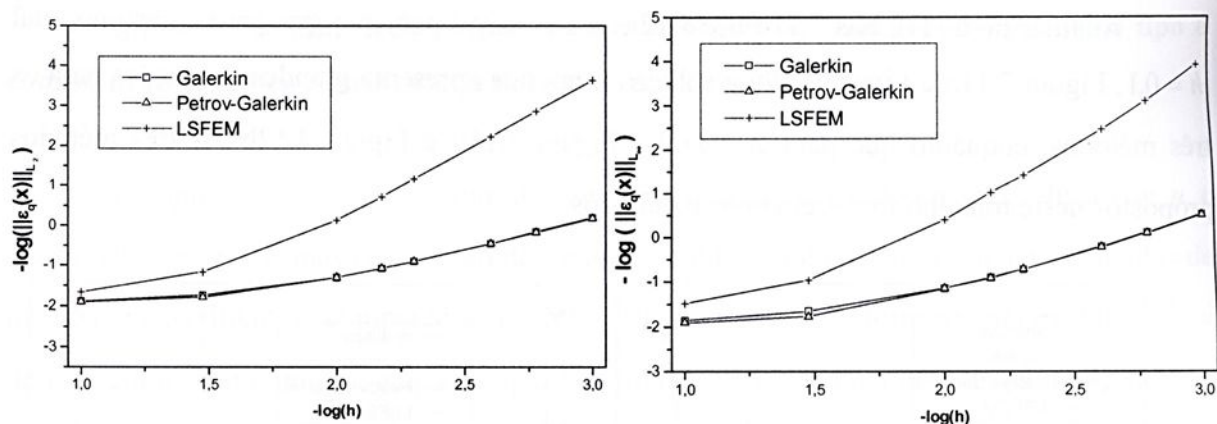


Figura 7.14a-b – Normas  $L_2$  (a esquerda) e  $L_\infty$  (a direita) do erro na solução numérica de  $\frac{du}{dx}$

A partir das Figuras 7.13a-b e 7.14a-b nota-se que o Método dos Mínimos Quadrados só não apresenta melhores resultados que os Métodos de Galerkin e Petrov-Galerkin na avaliação da norma  $L_2$  do erro na aproximação de  $u$ . Nota-se também que o Método Petrov-Galerkin dá melhores resultados para  $-\log(h) < 2$ , depois vai piorando.

Na figura abaixo, procura-se ilustrar a análise que deve ser feita nas figuras de normas de erro apresentadas neste trabalho.

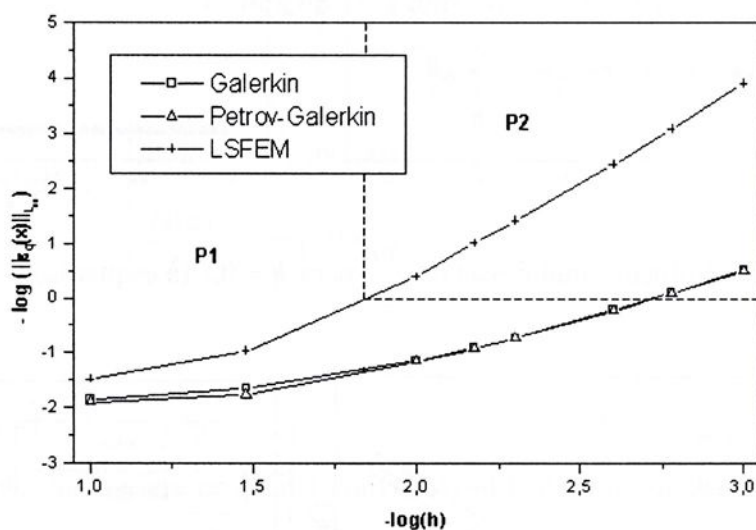


Figura 7.15 – Análise da convergência da solução numérica

A Figura 7.14b foi dividida em duas partes, Figura 7.15. Na parte 1, **P1**, os resultados demonstram que o logaritmo negativo da norma do erro é menor que zero, o que implica que o erro propriamente dito é maior que 1. Já na parte 2, **P2**, localizam-se os pontos no qual o erro é menor que 1. Portanto, quanto menor for o erro, maior será o logaritmo negativo deste

erro. Em outras palavras: A convergência da solução será melhor para as curvas mais ao alto na figura, bem como aquelas com maiores coeficientes angulares. Na Figura 7.14b, por exemplo, pode-se concluir que já no terceiro ponto da análise,  $h = 10^{-2}$ , o Método dos Mínimos Quadrados já apresenta um bom resultado, além disso, quanto mais refina-se a malha menor é o erro, ou maior é o logaritmo negativo do erro. O mesmo não acontece com os Métodos de Galerkin e Petrov-Galerkin, que só apresentam resultados minimamente razoáveis nos dois últimos pontos,  $h = 1,66 \times 10^{-3}$  e  $h = 10^{-3}$ .

#### **Aplicação 5: Convecção-Difusão com condições de contorno do primeiro e segundo tipo e com solução analítica representada por uma função exponencial**

Como pode-se perceber logo abaixo, a única diferença desta aplicação para a aplicação 4 são as condições de contorno. Nesta aplicação, tem-se a função prescrita em  $x = 0$  e um fluxo prescrito em  $x = 1$ .

**Equação Governante:**  $10 \frac{du}{dx} - 10^{-1} \frac{d^2u}{dx^2} = 0$

**Domínio:**  $0 \leq x \leq 1$       **Condições de Contorno:**  $u(0) = 1$  e  $\left. \frac{du(x)}{dx} \right|_{x=1} = 15$

|                                                                                                                                     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Solução Analítica:</b></p> $\begin{cases} u(x) = \frac{c}{100} \exp(100x) + d \\ \frac{du(x)}{dx} = c \exp(100x) \end{cases}$ |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

no qual  $c = \frac{15}{\exp(100)}$  e  $d = 1 - \frac{c}{100}$ .

As Figuras (7.16a-b) e (7.17a-b), apresentam as soluções  $u(x)$  e  $\frac{du(x)}{dx}$ , respectivamente, enquanto que as Figuras (7.18a-b) e (7.19a-b) fornecem as normas do erro no cômputo de  $u(x)$  e de  $\frac{du(x)}{dx}$ .



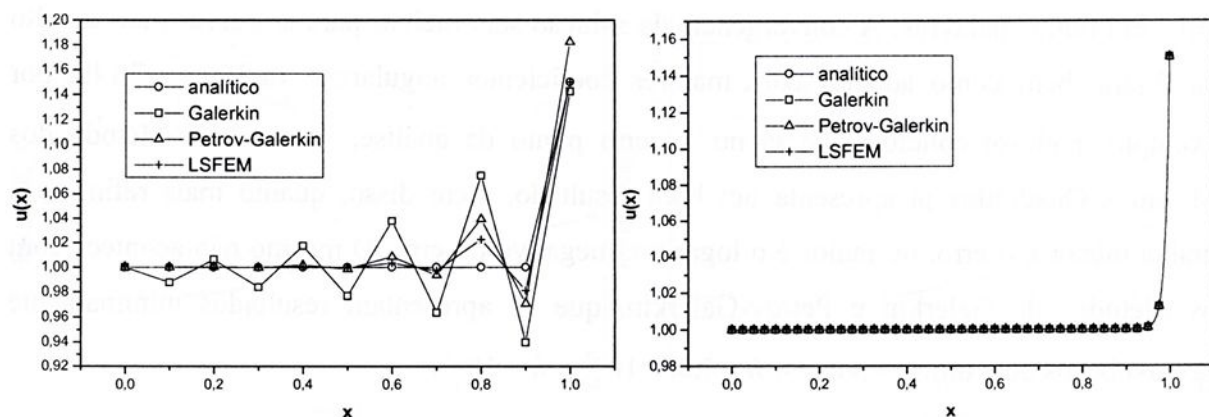


Figura 7.16a-b – Soluções numéricas de  $u$  para  $h = 0,1$  (à esquerda) e  $h = 0,001$  (à direita)

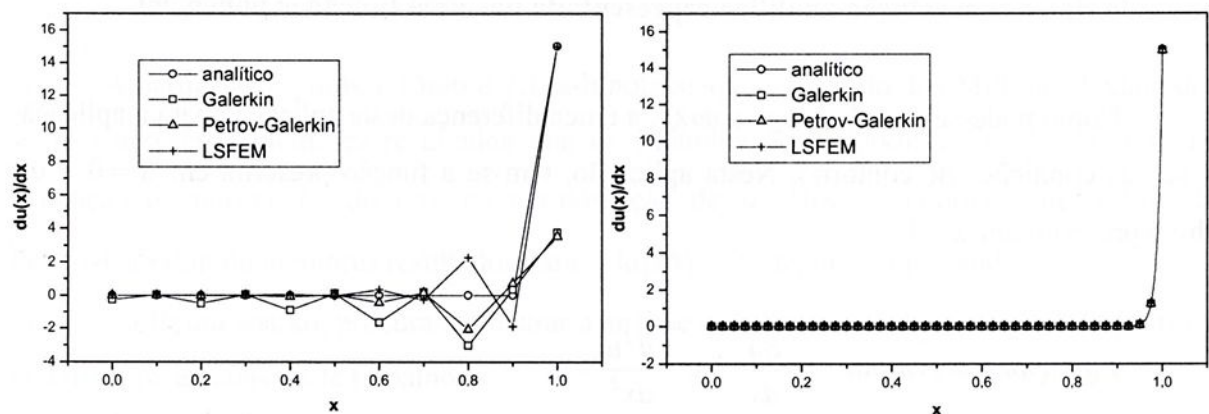


Figura 7.17a-b – Solução numéricas de  $\frac{du}{dx}$  para  $h = 0,1$  (à esquerda) e  $h = 0,001$  (à direita)

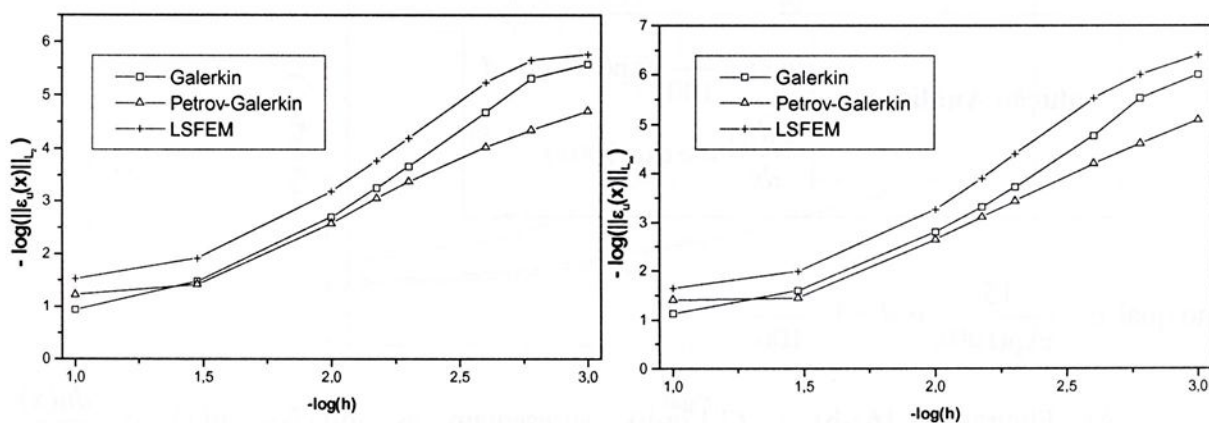


Figura 7.18a-b – Normas  $L_2$  (a esquerda) e  $L_\infty$  (a direita) do erro na solução numérica de  $u$



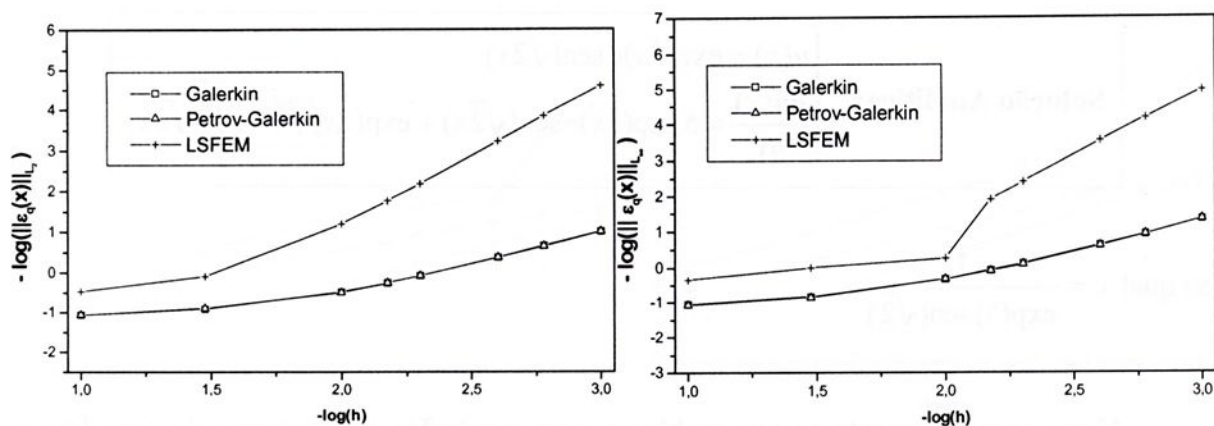


Figura 7.19a-b – Normas  $L_2$  (a esquerda) e  $L_\infty$  (a direita) do erro na solução numérica de  $\frac{du}{dx}$

Assim como na aplicação 4, para a malha com  $h = 0,1$ , Figuras 7.16a e 7.17a, as soluções numéricas de  $u$  e  $\frac{du}{dx}$  apresentam oscilações numéricas e para  $h = 0,001$  os três métodos propostos apresentaram bons resultados. Analisando agora as normas  $L_2$  e  $L_\infty$  do erro na aproximação de  $u$  e  $\frac{du}{dx}$ , nota-se que em todos os casos o Método dos Mínimos Quadrados é o que apresenta melhores resultados. O Método Petrov-Galerkin apresenta melhores resultados que o Método de Galerkin apenas nas malhas menos refinadas.

#### Aplicação 6: Convecção-Difusão com condições de contorno do primeiro tipo e com solução analítica representada por função exponenciais e trigonométricas

Nesta aplicação, tem-se como principal objetivo, analisar a solução numérica de um problema em que a solução analítica da equação diferencial que o representa é dada por uma combinação de funções exponenciais e trigonométricas.

**Equação Governante:**  $\frac{d^2u}{dx^2} - 10\frac{du}{dx} + 27u = 0$

**Domínio:**  $0 \leq x \leq 1$

**Condições de Contorno:**  $u(0) = 0$  e  $u(1) = 1$

**Solução Analítica:** 
$$\begin{cases} u(x) = \exp(5x)c \operatorname{sen}(\sqrt{2}x) \\ \frac{du(x)}{dx} = 5 \exp(5x)c \operatorname{sen}(\sqrt{2}x) + \exp(5x)\sqrt{2} c \cos(\sqrt{2}x) \end{cases}$$

no qual  $c = \frac{1}{\exp(5)\operatorname{sen}(\sqrt{2})}$ .

Neste caso, apresenta-se um problema com condições de contorno do tipo função prescrita nas duas extremidades do domínio, na aplicação 7 uma das condições envolvidas será de fluxo prescrito.

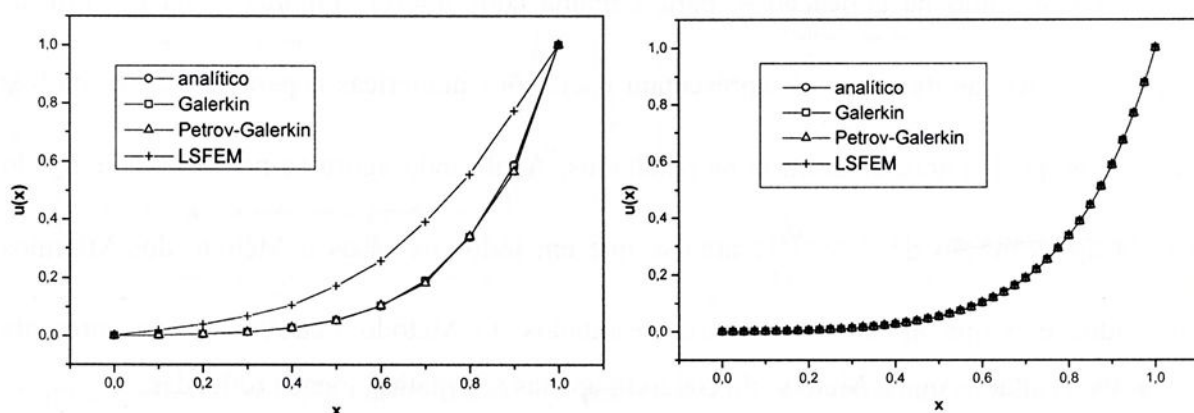


Figura 7.20a-b – Solução numéricas de  $u$  para  $h = 0,1$  (à esquerda) e  $h = 0,001$  (à direita)

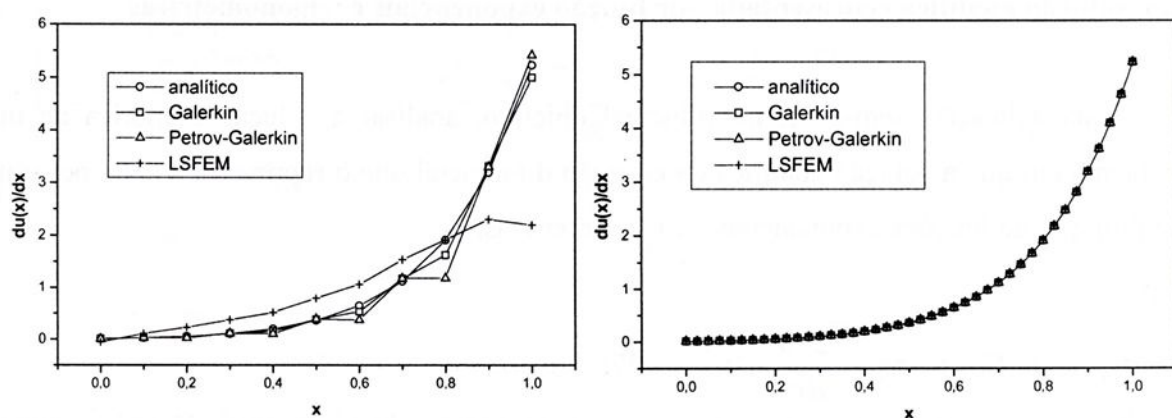


Figura 7.21a-b – Soluções numéricas de  $\frac{du}{dx}$  para  $h = 0,1$  (à esquerda) e  $h = 0,001$  (à direita)

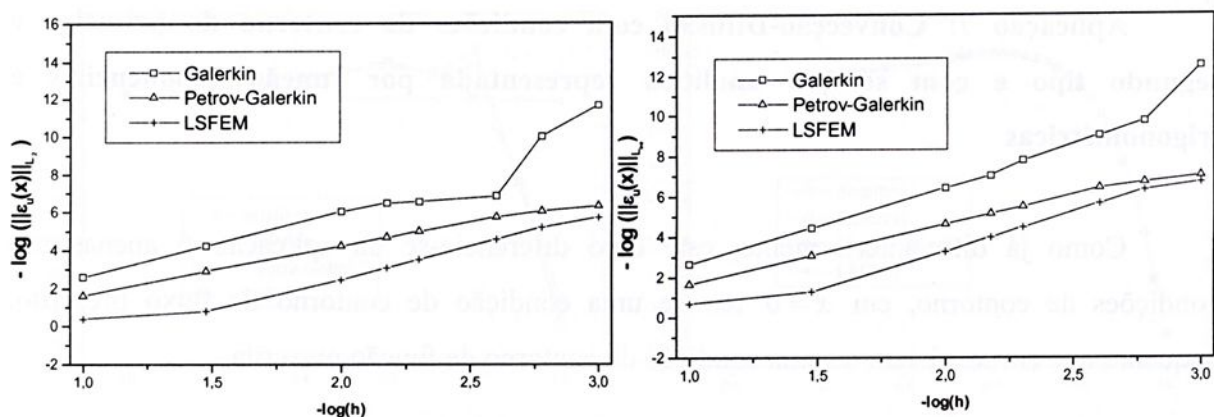


Figura 7.22a-b – Normas  $L_2$  (à esquerda) e  $L_\infty$  (à direita) do erro na solução numérica de  $u$

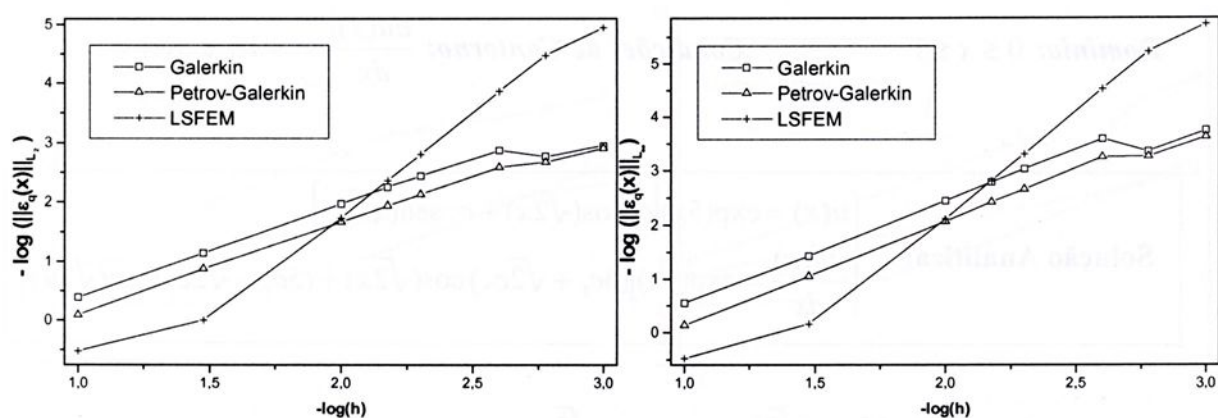


Figura 7.23a-b – Normas  $L_2$  (à esquerda) e  $L_\infty$  (à direita) do erro na solução numérica de  $\frac{du}{dx}$

Nas figuras 7.20a-b e 7.21a-b, tem-se que o único caso no qual surge oscilações é na solução numérica de  $\frac{du}{dx}$  com uma malha com  $h = 0,1$ . Isto deve-se ao fato de que o coeficiente que acompanha o termo convectivo ser apenas 10 vezes maior que o coeficiente que acompanha o termo difusivo. Por exemplo, nas aplicações 4 e 5 a relação é de 100 vezes maior. Para as soluções numéricas de  $u$  e  $\frac{du}{dx}$  com malha com  $h = 0,001$ , bons resultados são alcançados. Analisando-se as normas do erro, conclui-se que nesta aplicação o Método de Galerkin é o que apresenta melhores resultados na solução numérica de  $u$ , no entanto, para a solução numérica de  $\frac{du}{dx}$ , na medida que diminui-se  $h$ , o Método dos Mínimos Quadrados apresenta melhores resultados. O Método Petrov-Galerkin ocupa uma posição intermediária na comparação das soluções numéricas de  $u$  e  $\frac{du}{dx}$ .



**Aplicação 7: Convecção-Difusão com condições de contorno do primeiro e segundo tipo e com solução analítica representada por função exponenciais e trigonométricas**

Como já dito anteriormente, este caso diferencia-se da aplicação 6 apenas nas condições de contorno, em  $x=0$  tem-se uma condição de contorno de fluxo prescrito, enquanto que em  $x=1$  tem-se uma condição de contorno de função prescrita.

**Equação Governante:**  $\frac{d^2u}{dx^2} - 10\frac{du}{dx} + 27u = 0$

**Domínio:**  $0 \leq x \leq 1$       **Condições de Contorno:**  $\left. \frac{du(x)}{dx} \right|_{x=0} = 15$  e  $u(1) = 1$

**Solução Analítica:** 
$$\begin{cases} u(x) = \exp(5x) [c_1 \cos(\sqrt{2}x) + c_2 \sin(\sqrt{2}x)] \\ \frac{du(x)}{dx} = \exp(5x) [(5c_1 + \sqrt{2}c_2) \cos(\sqrt{2}x) + (5c_2 - \sqrt{2}c_1) \sin(\sqrt{2}x)] \end{cases}$$

no qual  $c_2 = \frac{5 \exp(-5) - 15 \cos(\sqrt{2})}{5 \sin(\sqrt{2}) - \sqrt{2} \cos(\sqrt{2})}$  e  $c_1 = 3 - \frac{\sqrt{2}c_2}{5}$ .

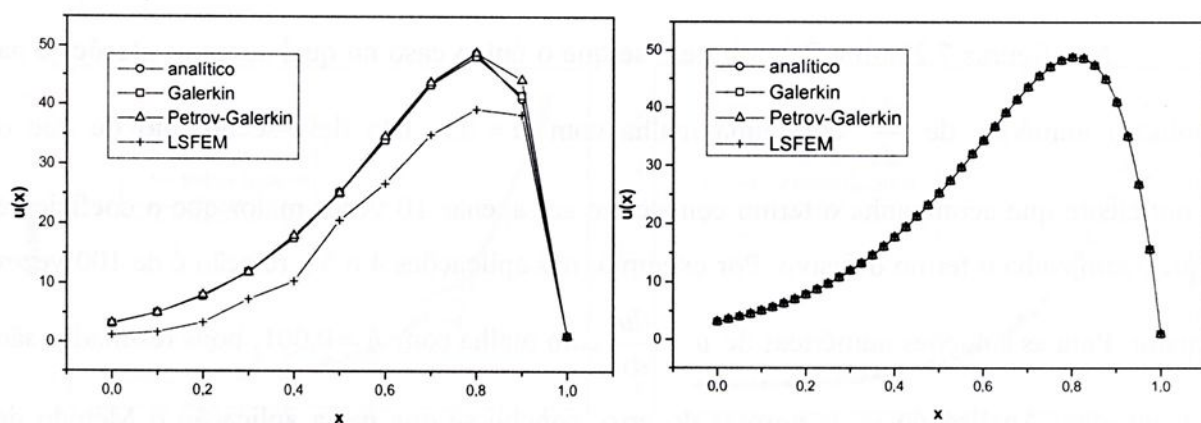


Figura 7.24a-b – Solução numéricas de  $u$  para  $h = 0,1$  (à esquerda) e  $h = 0,001$  (à direita).



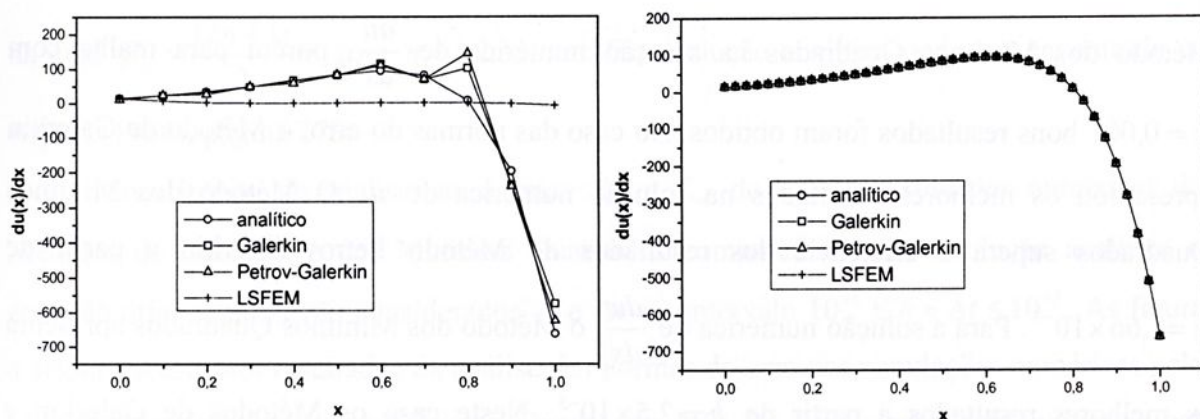


Figura 7.25a-b – Solução numéricas de  $u$  para  $h = 0,1$  (à esquerda) e  $h = 0,001$  (à direita).

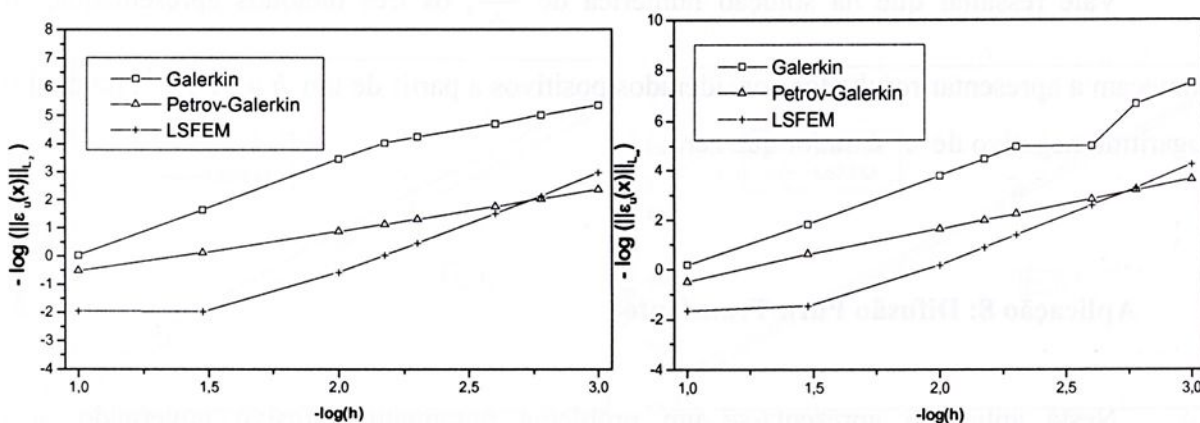


Figura 7.26a-b – Normas  $L_2$  (à esquerda) e  $L_\infty$  (à direita) do erro na solução numérica de  $u$ .

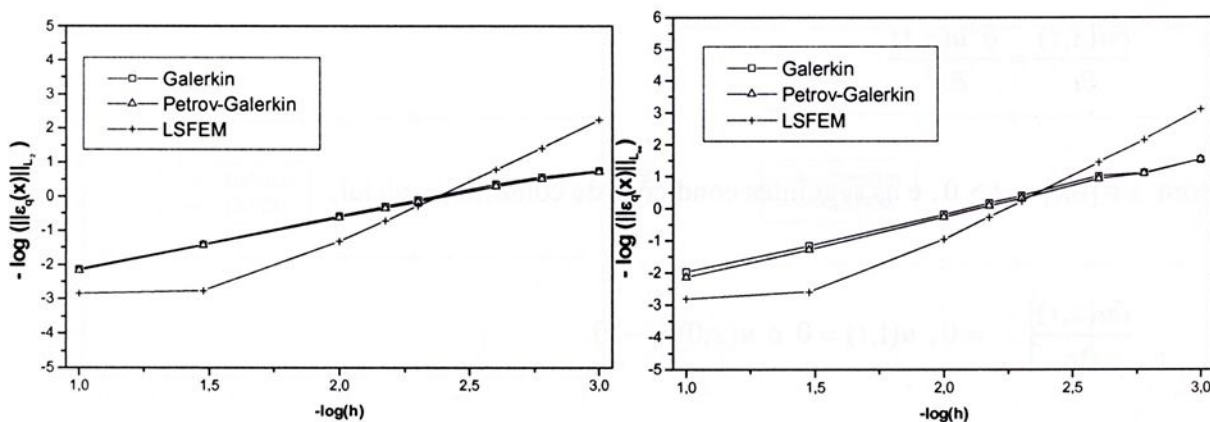


Figura 7.27a-b – Normas  $L_2$  (à esquerda) e  $L_\infty$  (à direita) do erro na solução numérica de  $\frac{du}{dx}$ .

Os resultados apresentados nas figuras 7.24a-b e 7.25a-b mostram que para malha com  $h = 0,1$  péssimos resultados foram obtidos, principalmente para os resultados obtidos pelo

Método dos Mínimos Quadrados na solução numérica de  $\frac{du}{dx}$ , porém para malha com  $h = 0,001$  bons resultados foram obtidos. No caso das normas do erro, o Método de Galerkin apresentou os melhores resultados na solução numérica de  $u$ . O Método dos Mínimos Quadrados supera a eficiência dos resultados do Método Petrov-Galerkin a partir de  $h = 1,66 \times 10^{-3}$ . Para a solução numérica de  $\frac{du}{dx}$ , o Método dos Mínimos Quadrados apresenta os melhores resultados a partir de  $h = 2,5 \times 10^{-3}$ . Neste caso os Métodos de Galerkin e Petrov-Galerkin apresentam resultados semelhantes.

Vale ressaltar que na solução numérica de  $\frac{du}{dx}$ , os três métodos apresentados, só começam a apresentar resultados considerados positivos a partir de um  $h = 5 \times 10^{-3}$ , no qual o logaritmo negativo de  $\varepsilon$  é maior que zero.

### **Aplicação 8: Difusão Pura Transiente**

Nesta aplicação apresenta-se um problema puramente difusivo governado pela seguinte equação diferencial

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

com  $x \in [0,1]$  e  $t > 0$ , e as seguintes condições de contorno e inicial,

$$\left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad u(1,t) = 0 \quad \text{e} \quad u(x,0) = -10.$$

A solução analítica deste problema dada por

$$u(x,t) = -20 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\beta_n} e^{-\beta_n^2 t} \cos(\beta_n x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 20 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-\beta_n^2 t} \sin(\beta_n x),$$



na qual  $\beta_n = \frac{(2n+1)}{2}\pi$  com  $n = 1,2,3,\dots,\infty$ . Esta solução analítica pode ser encontrada em Arpaci (1966), página 273.

Com intuito de analisar as normas  $L_2$  e  $L_\infty$  do erro das soluções numéricas dos Métodos de Galerkin e dos Mínimos Quadrados comparados com a solução analítica da equação diferencial, serão considerados  $h$  e  $\Delta t$  no intervalo  $10^{-1} \leq h = \Delta t \leq 10^{-3}$ . As figuras a seguir apresentam resultados da análise das normas do erro nas simulações numéricas pelos Métodos de Galerkin e dos Mínimos Quadrados. Não foi feita a simulação numérica pelo Método Petrov-Galerkin pois o fenômeno de difusão pura este método é idêntico ao de Galerkin.

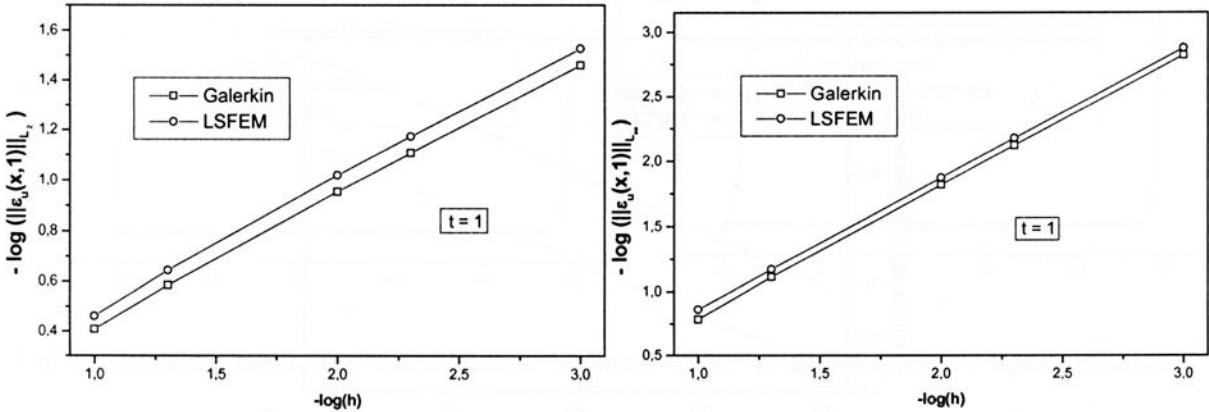


Figura 7.28a-b – Normas  $L_2$  (à esquerda) e  $L_\infty$  (à direita) do erro na solução numérica de  $u$

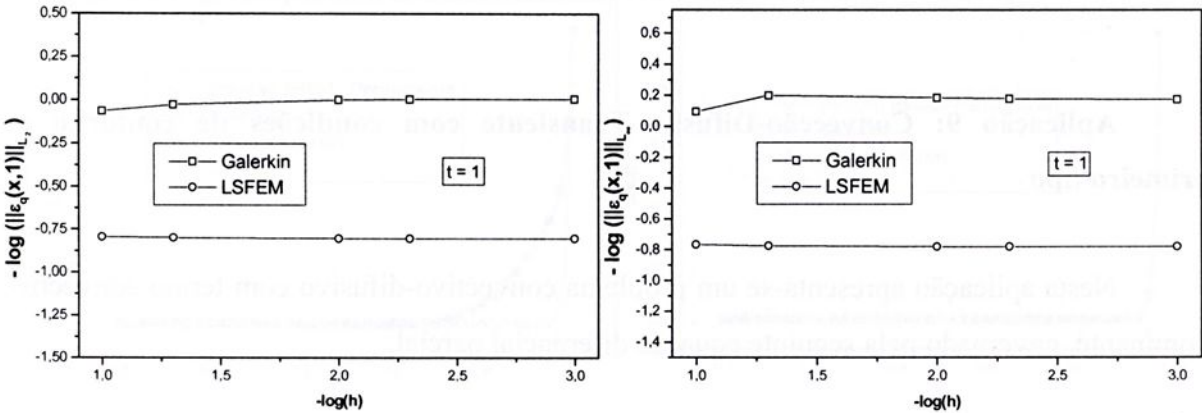


Figura 7.29a-b – Normas  $L_2$  (à esquerda) e  $L_\infty$  (à direita) do erro na solução numérica de  $\frac{\partial u}{\partial x}$

Analisando as figuras apresentadas, pode-se concluir que quanto menor o  $\Delta t$ , menor são as normas  $L_2$  e  $L_\infty$  do erro para a função  $u$ , na qual o Método dos Mínimos Quadrados apresenta resultados ligeiramente melhores em ambas as normas. Já com relação as normas



$L_2$  e  $L_\infty$  do erro para  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , ambos os métodos apresentam resultados praticamente inalteráveis conforme o refinamento da malha, com a ressalva que para este caso o Método de Galerkin apresentou melhores resultados, este fato é freqüente em algumas aplicações, na qual o “ganho” com o refinamento da malha não é suficiente para apresentar melhora significativa nas normas  $L_2$  e  $L_\infty$ , visto que com o refinamento da malha ocorre o aumento do número de nós. Para ilustrar de maneira mais clara este fato, a seguir, apresenta-se uma figura na qual divide-se o valor da norma  $L_2$  pela quantidade de nós em cada malha. Por exemplo, malhas com 50 elementos de 3 nós cada, implica em um total de 101 nós, logo divide-se o valor da norma  $L_2$  desta malha por 101 nós. Os resultados são apresentados na figura a seguir.

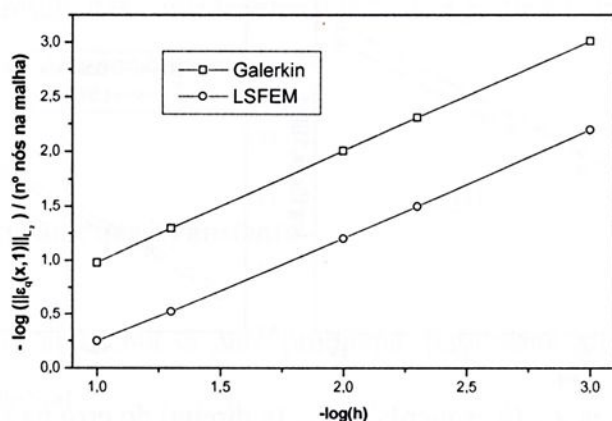


Figura 7.30 - Norma  $L_2$  do erro / (nº total de nós na malha) para  $\frac{\partial u}{\partial x}$ .

### Aplicação 9: Convecção-Difusão Transiente com condições de contorno de primeiro tipo

Nesta aplicação apresenta-se um problema convectivo-difusivo com termo convectivo dominante, governado pela seguinte equação diferencial parcial,

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 10^{-1} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - 10 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

com  $x \in [0,1]$  e  $t > 0$ , e as seguintes condições inicial e de contorno,

$$u(x,0) = 1, u(0,t) = 0 \text{ e } u(1,t) = 1.$$



Com o objetivo de analisar o comportamento da solução numérica de  $u$  e  $\frac{\partial u}{\partial x}$  ao

longo do tempo, nesta aplicação será adotado  $h = \Delta t = 10^{-3}$  (500 elementos com 3 nós cada e 1000 passos no tempo, visto que o último instante no tempo adotado será  $t = 1$ ). As figuras a seguir apresentam resultados das simulações numéricas pelas três formulações de Métodos dos Elementos Finitos propostas neste trabalho.

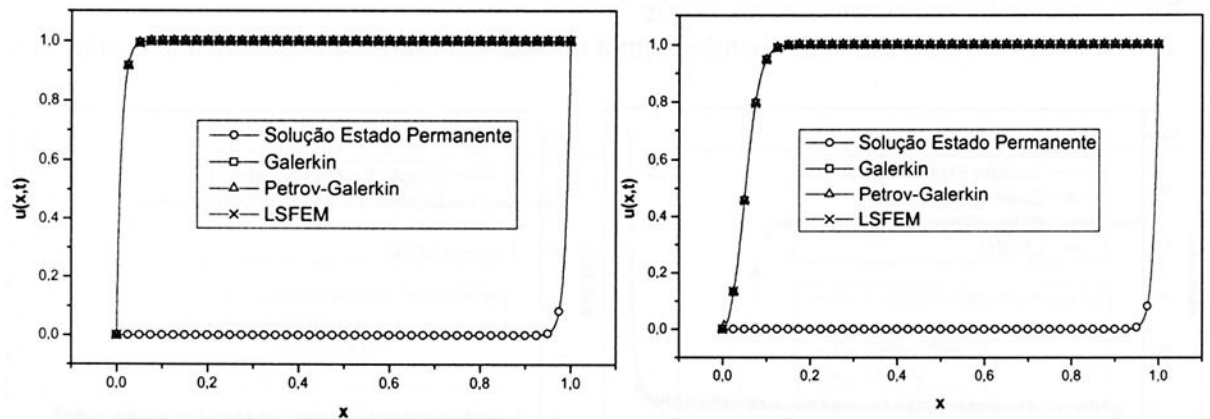


Figura 7.31a-b – Soluções Numéricas de  $u$  para  $t = 10^{-3}$  (à esquerda) e  $t = 0,005$  (à direita)

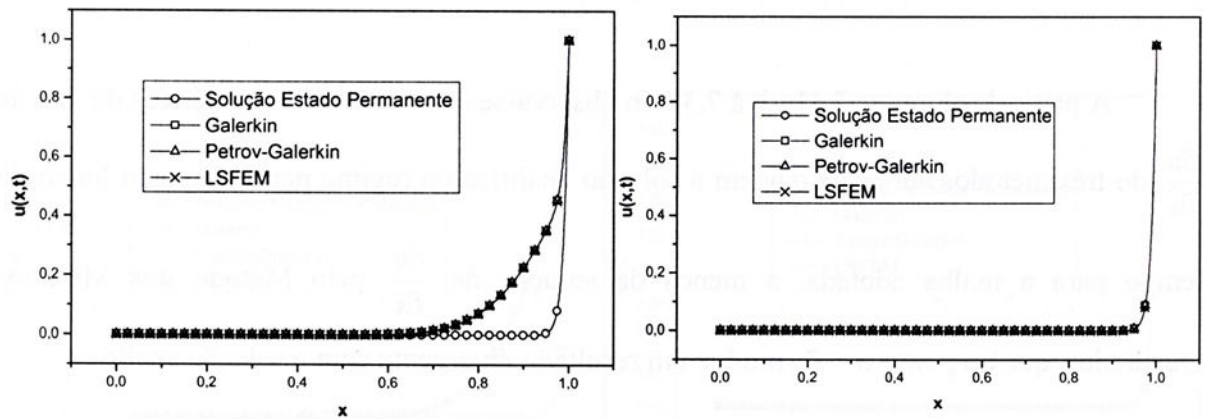


Figura 7.32a-b – Soluções Numéricas de  $u$  para  $t = 0,01$  (à esquerda) e  $t = 1$  (à direita)

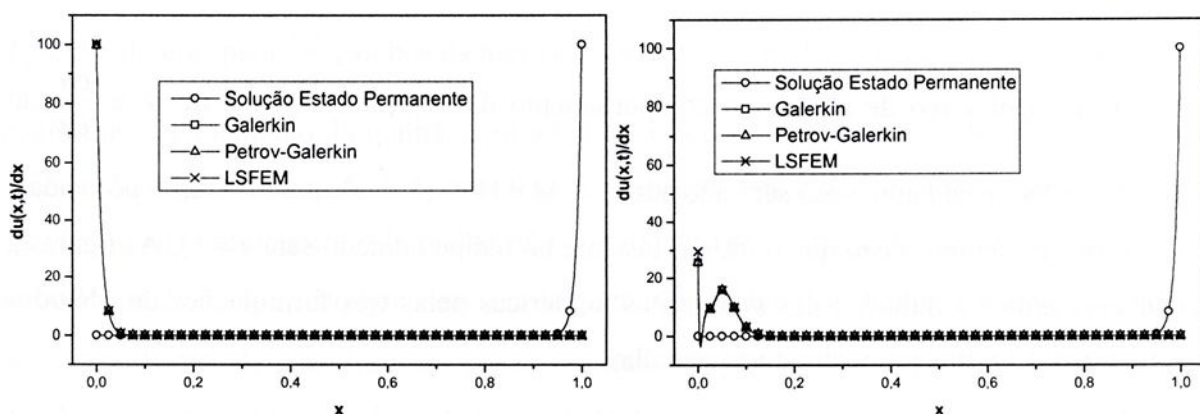


Figura 7.33a-b – Soluções Numéricas de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  para  $t = 10^{-3}$  (à esquerda) e  $t = 0,005$  (à direita)

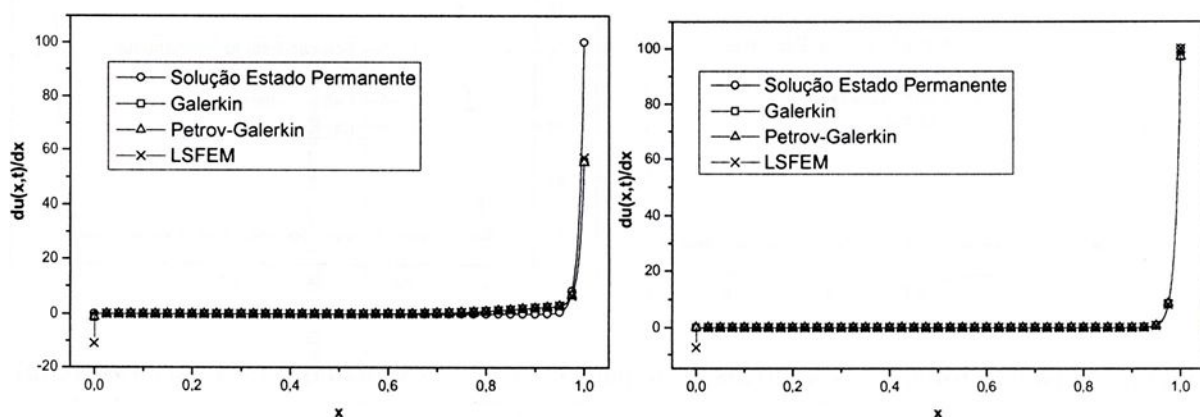


Figura 7.34a-b – Soluções Numéricas de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  para  $t = 0,01$  (à esquerda) e  $t = 1$  (à direita)

A partir das Figuras 7.31a-b à 7.34a-b observa-se que as soluções numéricas de  $u$  e de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  do três métodos adotados tendem a solução analítica no regime permanente ao longo do tempo para a malha adotada, a menos da solução de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  pelo Método dos Mínimos Quadrados, que no ponto  $x = 0$ , produz um resultado divergente com a solução analítica.

#### Aplicação 10: Convecção-Difusão Transiente com condições de contorno de primeiro e segundo tipo

Nesta aplicação apresentam-se soluções numéricas ao longo do tempo do problema com a mesma equação governante da aplicação 2, mas com as seguintes condições de contorno e inicial

$$u(0,t) = 1, \quad \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=1} = 15 \text{ e } u(x,0) = 2.$$

na qual  $x \in [0,1]$  e  $t > 0$ .

O objetivo desta aplicação é o de analisar o comportamento da solução numérica pelos Métodos de Galerkin, Petrov-Galerkin e dos Mínimos Quadrados ao longo do tempo para um problema cuja uma das condições de contorno é de fluxo prescrito. Para esta aplicação será adotado  $h = 2,5 \times 10^{-3}$  e  $\Delta t = 10^{-3}$  (200 elementos com 3 nós cada e 1000 passos no tempo, visto que nesta aplicação o último instante no tempo adotado também será  $t = 1$ )

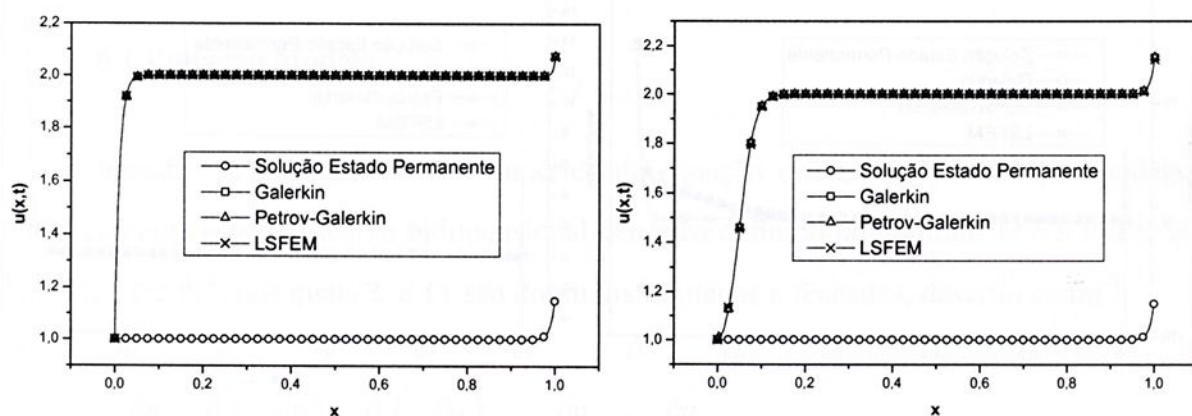


Figura 7.35a-b – Soluções Numéricas de  $u$  para  $t = 10^{-3}$  (à esquerda) e  $t = 0,005$  (à direita)

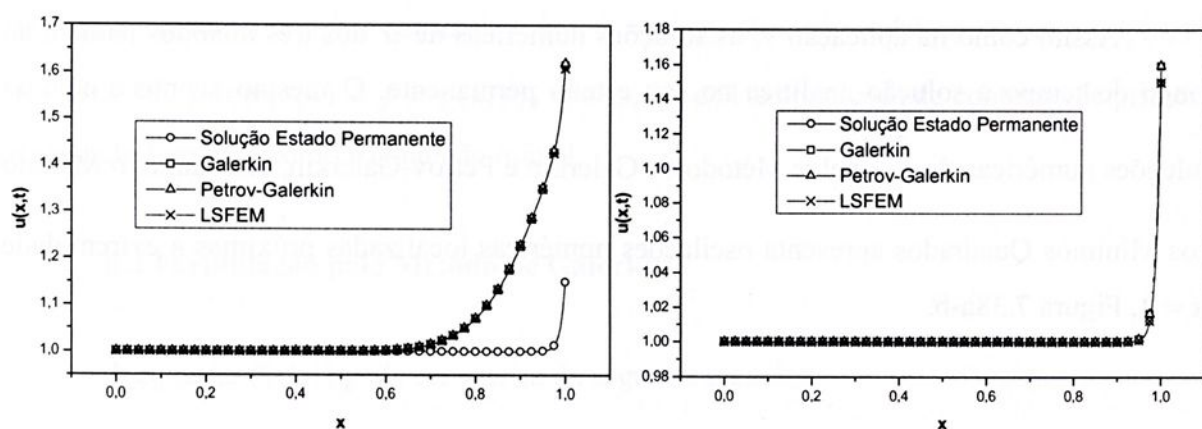


Figura 7.36a-b – Soluções Numéricas de  $u$  para  $t = 0,01$  (à esquerda) e  $t = 1$  (à direita)



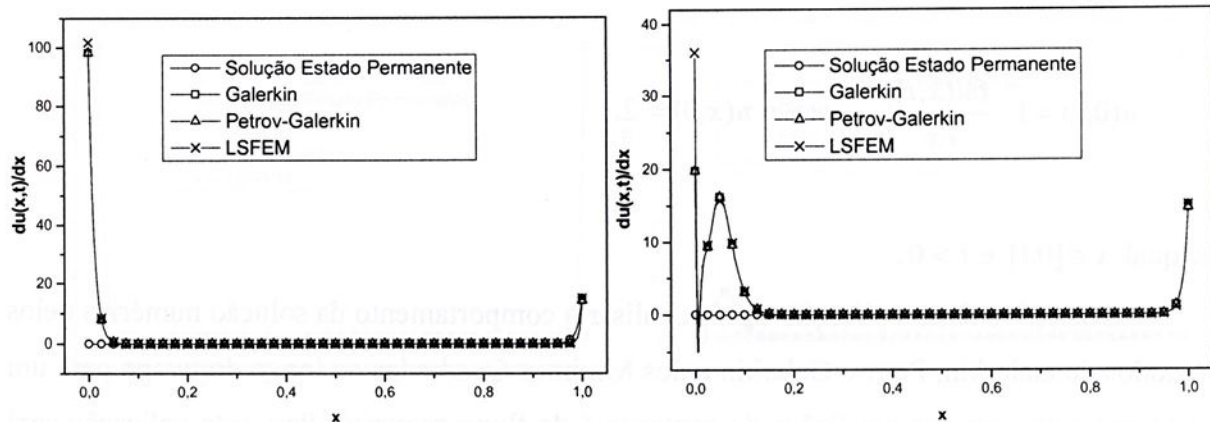


Figura 7.37a-b – Soluções Numéricas de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  para  $t = 10^{-3}$  (à esquerda) e  $t = 0,005$  (à direita)

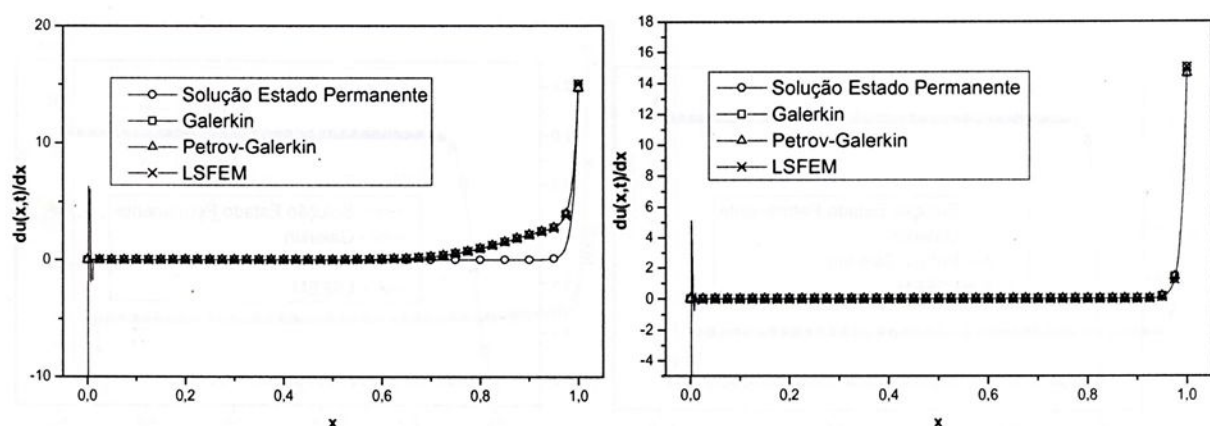


Figura 7.38a-b – Soluções Numéricas de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  para  $t = 0,01$  (à esquerda) e  $t = 1$  (à direita)

Assim como na aplicação 9, as soluções numéricas de  $u$  dos três métodos tendem ao longo do tempo à solução analítica no seu estado permanente. O mesmo acontece com as soluções numéricas de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  pelos Método de Galerkin e Petrov-Galerkin, entretanto, o Método dos Mínimos Quadrados apresenta oscilações numéricas localizadas próximas a extremidade  $x = 0$ , Figura 7.38a-b.



## Convecção-Difusão Bidimensional

### 8.1 Equação Modelo

Introduz-se aqui um estudo numérico da equação diferencial parcial que modela o fenômeno convectivo-difusivo bidimensional genérico definido no domínio  $\Theta = \Xi \times \Omega \subset \mathbb{R}^3$ ,  $\Xi \subset \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , nos quais  $\Xi$  e  $\Omega$  são domínios limitados e fechados, descrito como,

$$\psi \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + A_x \frac{\partial u}{\partial x} + A_y \frac{\partial u}{\partial y} + Bu + f = 0 \quad (8.1.1)$$

na qual assume-se  $k = \text{constante} > 0$ ,  $u = u(x, y, t)$ ,  $A_x = A_x(x, y)$ ,  $A_y = A_y(x, y)$ ,  $B = B(x, y)$ ,  $\psi = \psi(x, y)$  e  $f = f(x, y)$ , com  $x, y, t \in \mathbb{R}$  e condições de contorno de primeiro e segundo tipo bem como a condição inicial.

### 8.2 Formulação pelo Método de Galerkin

A equação (8.1.1) pode ser escrita da seguinte maneira,

$$\psi \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial u}{\partial y} \right) - A_x \frac{\partial u}{\partial x} - A_y \frac{\partial u}{\partial y} - Bu - f. \quad (8.2.1)$$

Seguindo-se a discretização no tempo descrita na equação (5.4.1) que aproxima a função  $u$  pela função  $\tilde{u}$ , tem-se

$$\begin{aligned} \psi \frac{\tilde{u}^{s+1} - \tilde{u}^s}{\Delta t} &= \alpha \left[ -\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right) - A_x \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - A_y \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - B\tilde{u} \right]^{s+1} - f + \\ &+ (1-\alpha) \left[ -\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right) - A_x \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - A_y \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - B\tilde{u} \right]^s \Rightarrow \\ &\left\{ \frac{\psi}{\Delta t} \tilde{u} + \alpha \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right) + A_x \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + A_y \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + B\tilde{u} \right] \right\}^{s+1} + f + \\ &+ \left\{ -\frac{\psi}{\Delta t} \tilde{u} + (1-\alpha) \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right) + A_x \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + A_y \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + B\tilde{u} \right] \right\}^s = 0. \quad (8.2.2) \end{aligned}$$

Seguindo o que está definido na equação (4.2.1), obtém-se a seguinte equação integral, dada por,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ \frac{\psi}{\Delta t} \tilde{u} + \alpha \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right) + A_x \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + A_y \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + B\tilde{u} \right) \right]^{s+1} N_j d\Omega + \int_{\Omega} f N_j d\Omega + \\ + \int_{\Omega} \left[ -\frac{\psi}{\Delta t} \tilde{u} + (1-\alpha) \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right) + A_x \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + A_y \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + B\tilde{u} \right) \right]^s N_j d\Omega = 0. \quad (8.2.3) \end{aligned}$$

Para qualquer passo no tempo, tem-se as seguintes integrações por partes,

$$\int_{\Omega} N_j \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) d\Omega = \oint_{\Gamma} N_j k \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \cos \theta d\Gamma - \int_{\Omega} k \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} d\Omega, \quad (8.2.4a)$$

$$\int_{\Omega} N_j \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right) d\Omega = \oint_{\Gamma} N_j k \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \sin \theta d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial N_j}{\partial y} k \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} d\Omega. \quad (8.2.4b)$$

Os detalhes das integrações (8.2.4a-b) encontram-se em Dhatt e Touzot (1984), página 140.

Substituindo-se as equações (8.2.4a-b) na equação (8.2.3), tem-se



$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[ \frac{\psi}{\Delta t} \tilde{u} - \alpha k \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \alpha k \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right) + A_x \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + A_y \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + B \tilde{u} \right) N_i \right]^{s+1} d\Omega + \\
& + \oint_{\Gamma} \alpha N_j k \frac{\partial \tilde{u}^{s+1}}{\partial x} \cos \theta d\Gamma + \oint_{\Gamma} \alpha N_j k \frac{\partial \tilde{u}^{s+1}}{\partial y} \sin \theta d\Gamma + \int_{\Omega} f N_i d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} \left\{ -\frac{\psi}{\Delta t} \tilde{u} + (1-\alpha) \times \left[ -k \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} - k \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + A_x \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + A_y \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + B \tilde{u} \right] \right\}^s N_i d\Omega + \\
& + \oint_{\Gamma} (1-\alpha) N_j k \frac{\partial \tilde{u}^s}{\partial x} \cos \theta d\Gamma + \oint_{\Gamma} (1-\alpha) N_j k \frac{\partial \tilde{u}^s}{\partial y} \sin \theta d\Gamma = 0 \quad (8.2.5)
\end{aligned}$$

Da mesma maneira que no caso unidimensional, as condições de contorno propostas neste trabalho são invariantes no tempo, logo

$$\begin{aligned}
& \oint_{\Gamma} \alpha N_j k \frac{\partial \tilde{u}^{s+1}}{\partial x} \cos \theta d\Gamma + \oint_{\Gamma} \alpha N_j k \frac{\partial \tilde{u}^{s+1}}{\partial y} \sin \theta d\Gamma + \oint_{\Gamma} (1-\alpha) N_j k \frac{\partial \tilde{u}^s}{\partial x} \cos \theta d\Gamma + \\
& + \oint_{\Gamma} (1-\alpha) N_j k \frac{\partial \tilde{u}^s}{\partial y} \sin \theta d\Gamma = \oint_{\Gamma} N_j k \left( \cos \theta \frac{\partial \tilde{u}^{s+1}}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial \tilde{u}^{s+1}}{\partial y} \right) d\Gamma \quad (8.2.6)
\end{aligned}$$

Agora, faz-se a aproximação da função  $\tilde{u}$  pela função  $\hat{u}^e$  da seguinte forma

$$\tilde{u} \cong \hat{u}^e = \sum_{i=1}^{N_{\text{nós}}} N_i(x, y) \hat{u}_i^e \quad (8.2.7)$$

para qualquer passo no tempo e com  $N_{\text{nós}}$  sendo o número de nós em cada elemento.

Apenas por simplicidade daqui por diante será adotado  $N_i = N_i(x, y)$ .

Substituindo-se a aproximação (8.2.7) na equação (8.2.5) obtém-se a seguinte equação,

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega^e} \alpha k \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega \hat{u}_j^{s+1,e} - \int_{\Omega^e} \alpha k \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega \hat{u}_j^{s+1,e} + \int_{\Omega^e} \alpha A_x N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega \hat{u}_j^{s+1,e} + \\
& + \int_{\Omega^e} \alpha A_y N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega \hat{u}_j^{s+1,e} + \int_{\Omega^e} \left( \frac{\psi}{\Delta t} + \alpha B \right) N_i N_j d\Omega \hat{u}_j^{s+1,e} - \int_{\Omega^e} (1-\alpha) k \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega \hat{u}_j^{s,e} - \\
& - \int_{\Omega^e} (1-\alpha) k \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega \hat{u}_j^{s,e} + \int_{\Omega^e} (1-\alpha) A_x N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega \hat{u}_j^{s,e} + \int_{\Omega^e} (1-\alpha) A_y N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega \hat{u}_j^{s,e} + \\
& + \int_{\Omega^e} \left( -\frac{\psi}{\Delta t} + (1-\alpha) B \right) N_i N_j d\Omega \hat{u}_j^{s,e} = - \int_{\Omega^e} f N_i d\Omega + \oint_{\Gamma^e} N_j k \left( \cos \theta \frac{\partial \hat{u}^{s+1}}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial \hat{u}^{s+1}}{\partial y} \right) d\Gamma \quad (8.2.8)
\end{aligned}$$



com  $i, j = 1, \dots, N$  nós.

Visto que o segundo termo do lado direito da equação (8.2.8) que carrega as informações do contorno e  $\hat{u}^{s,e}$  já é conhecido do passo anterior de tempo “s”, tem-se o seguinte sistema

$$[K]\{\hat{u}^{s+1,e}\} = \{F\} - [H]\{\hat{u}^{s,e}\} \quad (8.2.9)$$

no qual

$$K_{ij} = - \int_{\Omega^e} \alpha k \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega - \int_{\Omega^e} \alpha k \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega + \int_{\Omega^e} \alpha A_x N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega + \\ + \int_{\Omega^e} \alpha A_y N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega + \int_{\Omega^e} \left( \frac{\psi}{\Delta t} + \alpha B \right) N_i N_j d\Omega \quad (8.2.10a)$$

$$H_{ij} = - \int_{\Omega^e} (1-\alpha) k \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega - \int_{\Omega^e} (1-\alpha) k \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega + \\ + \int_{\Omega^e} (1-\alpha) A_x N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega^e} (1-\alpha) A_y N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega + \int_{\Omega^e} \left( -\frac{\psi}{\Delta t} + (1-\alpha) B \right) N_i N_j d\Omega \quad (8.2.10b)$$

$$F_i = - \int_{\Omega^e} f N_i d\Omega + (\text{Termo de Contorno}) \quad (8.2.10c)$$

com  $i, j = 1, \dots, N$  nós.

A partir das transformações de coordenadas globais para locais ( $x \rightarrow \xi$ ,  $y \rightarrow \eta$ ) descritas nas equações (5.3.1.7a-b) e (5.3.1.9), as equações (8.2.10a-c) são reescritas na forma:

$$K_{ij} = - \int_{\bar{\Omega}^e} \frac{\alpha k}{\det(J)} \Phi_1 \Phi_2 d\bar{\Omega} - \int_{\bar{\Omega}^e} \frac{\alpha k}{\det(J)} \Phi_3 \Phi_4 d\bar{\Omega} + \int_{\bar{\Omega}^e} \alpha A_\xi N_i \Phi_2 d\bar{\Omega} + \\ + \int_{\bar{\Omega}^e} \alpha A_\eta N_i \Phi_4 d\bar{\Omega} + \int_{\bar{\Omega}^e} \left( \frac{\psi}{\Delta t} + \alpha B \right) N_i N_j \det(J) d\bar{\Omega}, \quad (8.2.11a)$$



$$H_{ij} = - \int_{\bar{\Omega}^e} \frac{(1-\alpha)k}{\det(J)} \Phi_1 \Phi_2 d\bar{\Omega} - \int_{\bar{\Omega}^e} \frac{(1-\alpha)k}{\det(J)} \Phi_1 \Phi_2 d\bar{\Omega} + \int_{\bar{\Omega}^e} (1-\alpha) A_\xi N_i \Phi_2 d\bar{\Omega} + \\ + \int_{\bar{\Omega}^e} (1-\alpha) A_\eta N_i \Phi_4 d\bar{\Omega} + \int_{\bar{\Omega}^e} \left( -\frac{\psi}{\Delta t} + (1-\alpha) B \right) N_i N_j \det(J) d\bar{\Omega}, \quad (8.2.10b)$$

$$F_i = - \int_{\bar{\Omega}^e} f N_i \det(J) d\bar{\Omega} + (\text{Termo de Contorno}), \quad (8.2.10c)$$

nos quais

$$\Phi_1 = \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta}, \quad (8.2.11a)$$

$$\Phi_2 = \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \eta}, \quad (8.2.11b)$$

$$\Phi_3 = -\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta}, \quad (8.2.11c)$$

$$\Phi_4 = -\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \eta}, \quad (8.2.11d)$$

com  $i, j = 1, \dots, N$  nós.

Caso o problema esteja em regime permanente, ou seja  $\psi \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ , tem-se o seguinte

sistema linear matricial

$$[K] \{\hat{u}^e\} = \{F\} \quad (8.2.12)$$

no qual

$$K_{ij} = \int_{\bar{\Omega}^e} \left[ -\frac{k}{\det(J)^2} \Phi_1 \Phi_2 - \frac{k}{\det(J)^2} \Phi_3 \Phi_4 + \frac{A_x}{\det(J)} \Phi_1 N_j + \right. \\ \left. + \frac{A_y}{\det(J)} \Phi_3 N_j + B N_i N_j \right] \det(J) d\bar{\Omega}, \quad (8.2.13a)$$

$$F_i = - \int_{\bar{\Omega}^e} f N_i \det(J) d\bar{\Omega} + (\text{Termo de Contorno}), \quad (8.2.13b)$$

no qual  $i, j = 1, \dots, N_{\text{nós}}$  e  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  e  $\Phi_4$  estão definidos nas equações (8.2.11a-d).

### 8.3 Formulação pelo Método Petrov-Galerkin

Assim como no caso unidimensional, a formulação pelo Método Petrov-Galerkin é análoga a formulação pelo Método de Galerkin, a menos da função peso, sendo assim, tem-se o seguinte sistema matricial,

$$[S]\{\hat{u}^{s+1,e}\} = \{F\} - [Z]\{\hat{u}^{s,e}\} \quad (8.3.1)$$

na qual

$$S_{ij} = - \int_{\Omega^e} \alpha k \frac{\partial M_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega - \int_{\Omega^e} \alpha k \frac{\partial M_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega + \int_{\Omega^e} \alpha A_x M_i \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega + \\ + \int_{\Omega^e} \alpha A_y M_i \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega + \int_{\Omega^e} \left( \frac{\psi}{\Delta t} + \alpha B \right) M_i N_j d\Omega, \quad (8.3.2a)$$

$$Z_{ij} = - \int_{\Omega^e} (1-\alpha) k \frac{\partial M_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega - \int_{\Omega^e} (1-\alpha) k \frac{\partial M_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega + \\ + \int_{\Omega^e} (1-\alpha) A_x M_i \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega^e} (1-\alpha) A_y M_i \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega + \int_{\Omega^e} \left( -\frac{\psi}{\Delta t} + (1-\alpha) B \right) M_i N_j d\Omega, \quad (8.3.2b)$$

$$F_i = - \int_{\Omega^e} f M_i d\Omega + (\text{Termo de Contorno}), \quad (8.3.3c)$$

com  $i, j = 1, \dots, N_{\text{nós}}$ .

A partir das transformações de coordenadas globais para locais ( $x \rightarrow \xi, y \rightarrow \eta$ ) descritas nas equações (5.3.1.7a-b) e (5.1.3.9), as equações (7.3.3a-c) são reescritas da forma:

$$S_{ij} = - \int_{\bar{\Omega}^e} \frac{\alpha k}{\det(J)} \aleph_1 \aleph_2 d\bar{\Omega} - \int_{\bar{\Omega}^e} \frac{\alpha k}{\det(J)} \aleph_3 \aleph_4 d\bar{\Omega} + \int_{\bar{\Omega}^e} \alpha A_\xi N_i \aleph_2 d\bar{\Omega} + \\ + \int_{\bar{\Omega}^e} \alpha A_\eta M_i \aleph_4 d\bar{\Omega} + \int_{\bar{\Omega}^e} \left( \frac{\psi}{\Delta t} + \alpha B \right) M_i N_j d\bar{\Omega}, \quad (8.3.4a)$$

$$Z_{ij} = -\int_{\bar{\Omega}^e} \frac{(1-\alpha)k}{\det(J)} \aleph_1 \aleph_2 d\bar{\Omega} - \int_{\bar{\Omega}^e} \frac{(1-\alpha)k}{\det(J)} \aleph_3 \aleph_4 d\bar{\Omega} + \int_{\bar{\Omega}^e} (1-\alpha) A_\xi M_i \aleph_2 d\bar{\Omega} + \int_{\bar{\Omega}^e} (1-\alpha) A_\eta M_i \aleph_4 d\bar{\Omega} + \int_{\bar{\Omega}^e} \left( -\frac{\Psi}{\Delta t} + (1-\alpha) B \right) M_i N_j \det(J) d\bar{\Omega}, \quad (8.3.4b)$$

$$F_i = -\int_{\bar{\Omega}^e} f M_i \det(J) d\bar{\Omega} + (\text{Termo de Contorno}), \quad (8.3.4c)$$

nos quais

$$\aleph_1 = \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial M_i}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial M_i}{\partial \eta}, \quad (8.3.5a)$$

$$\aleph_2 = \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial M_j}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial M_j}{\partial \eta}, \quad (8.3.5b)$$

$$\aleph_3 = -\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta}, \quad (8.3.5c)$$

$$\aleph_4 = -\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \eta}, \quad (8.3.5d)$$

com  $i, j = 1, \dots, Nnós$ .

Quando o problema atingir o seu regime permanente, tem-se o seguinte sistema linear matricial

$$[S] \{\hat{u}^e\} = \{F\} \quad (8.3.6)$$

no qual

$$S_{ij} = \int_{\bar{\Omega}^e} \left[ -\frac{k}{\det(J)^2} \aleph_1 \aleph_2 - \frac{k}{\det(J)^2} \aleph_3 \aleph_4 + \frac{A_x}{\det(J)} \aleph_1 N_j + \frac{A_y}{\det(J)} \aleph_3 N_j + B M_i N_j \right] \det(J) d\bar{\Omega}, \quad (8.3.7a)$$

$$F_i = -\int_{\bar{\Omega}^e} f M_i \det(J) d\bar{\Omega} + (\text{Termo de Contorno}), \quad (8.3.7b)$$

no qual  $i, j = 1, \dots, N$  e  $\aleph_1, \aleph_2, \aleph_3$  e  $\aleph_4$  estão definidos nas equações (8.3.5a-d).

#### 8.4 Formulação pelo Método dos Mínimos Quadrados

Analogamente ao caso unidimensional, a aplicação do Método dos Mínimos Quadrados para fenômenos bidimensionais utiliza-se da adição de duas equações auxiliares, gerando um sistema de três equações diferenciais parciais com três incógnitas, definidas como segue

$$\psi \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + A_x \frac{\partial u}{\partial x} + A_y \frac{\partial u}{\partial y} + Bu + f = 0 \quad (8.4.1a)$$

$$q_x + k \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad q_y + k \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (8.4.1b-c)$$

Primeiramente, deve-se discretizar no tempo as equações (8.4.1a-c), fazendo uso das funções aproximantes de  $u$ ,  $q_x$  e  $q_y$ , respectivamente, pelas equações  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{q}_x$  e  $\tilde{q}_y$ , da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \psi \frac{\tilde{u}^{s+1} - \tilde{u}^s}{\Delta t} = & \alpha \left[ \frac{\partial \tilde{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{q}_y}{\partial y} - A_x \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - A_y \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - B\tilde{u} \right]^{s+1} - f + \\ & (1 - \alpha) \left[ \frac{\partial \tilde{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{q}_y}{\partial y} - A_x \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - A_y \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - B\tilde{u} \right]^s \end{aligned} \quad (8.4.2a)$$

$$\tilde{q}_x + k \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = 0 \quad (8.4.2b)$$

$$\tilde{q}_y + k \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = 0 \quad (8.4.2c)$$

Agora, faz-se as aproximações espaciais em cada elemento das funções  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{q}_x$  e  $\tilde{q}_y$  pelas funções  $\hat{u}^e$ ,  $\hat{q}_x^e$  e  $\hat{q}_y^e$ , da seguinte forma



$$\tilde{u} \cong \hat{u}^e = \sum_{i=1}^{Nn\acute{o}s} N_i \hat{u}_i^e ; \quad \tilde{q}_x \cong \hat{q}_x^e = \sum_{i=1}^{Nn\acute{o}s} N_i \hat{q}_{xi}^e ; \quad \tilde{q}_y \cong \hat{q}_y^e = \sum_{i=1}^{Nn\acute{o}s} N_i \hat{q}_{yi}^e , \quad (8.4.3a-c)$$

para qualquer passo no tempo e com  $Nn\acute{o}s$  sendo o número de nós em cada elemento.

Após definido as aproximações espaciais, pode-se escrever as equações residuais das equações (8.4.2a-c) como segue

$$R_1(x, y) = \left\{ \frac{\psi}{\Delta t} \hat{u} + \alpha \left[ -\frac{\partial \hat{q}_x}{\partial x} - \frac{\partial \hat{q}_y}{\partial y} + A_x \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + A_y \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} + B \hat{u} \right] \right\}^{s+1} + f + \\ + \left\{ -\frac{\psi}{\Delta t} \hat{u} + (1-\alpha) \left[ -\frac{\partial \hat{q}_x}{\partial x} - \frac{\partial \hat{q}_y}{\partial y} + A_x \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + A_y \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} + B \hat{u} \right] \right\}^s \quad (8.4.4a)$$

$$R_2(x, y) = \hat{q}_x + k \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \quad (8.4.4b)$$

$$R_3(x, y) = \hat{q}_y + k \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \quad (8.4.4c)$$

Substituindo-se as aproximações (8.4.3a-c) nas equações (8.4.4a-c), obtém-se

$$R_1(x, y) = -\alpha \sum_{i=1}^{Nn\acute{o}s} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{q}_{xi}^{e,s+1} - \alpha \sum_{i=1}^{Nn\acute{o}s} \frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{q}_{yi}^{e,s+1} + \alpha A_x \sum_{i=1}^{Nn\acute{o}s} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{u}_i^{e,s+1} + \alpha A_y \sum_{i=1}^{Nn\acute{o}s} \frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{u}_i^{e,s+1} + \\ + \left[ \frac{\Psi}{\Delta t} + \alpha B \right] \sum_{i=1}^{Nn\acute{o}s} N_i \hat{u}_i^{e,s} + f - (1-\alpha) \sum_{i=1}^{Nn\acute{o}s} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{q}_{xi}^{e,s} - (1-\alpha) \sum_{i=1}^{Nn\acute{o}s} \frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{q}_{yi}^{e,s} + \\ + (1-\alpha) A_x \sum_{i=1}^{Nn\acute{o}s} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{u}_i^{e,s+1} + (1-\alpha) A_y \sum_{i=1}^{Nn\acute{o}s} \frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{u}_i^{e,s} + \left[ -\frac{\psi}{\Delta t} + (1-\alpha) B \right] \sum_{i=1}^{Nn\acute{o}s} N_i \hat{u}_i^{e,s} , \quad (8.4.5a)$$

$$R_2(x, y) = \sum_{i=1}^{Nn\acute{o}s} N_i \hat{q}_{xi}^{e,s+1} + k \sum_{i=1}^{Nn\acute{o}s} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{u}_i^{e,s+1} , \quad (8.4.5b)$$

$$R_3(x, y) = \sum_{i=1}^{Nn\acute{o}s} N_i \hat{q}_{yi}^{e,s+1} + k \sum_{i=1}^{Nn\acute{o}s} \frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{u}_i^{e,s+1} . \quad (8.4.5c)$$

Como neste problema tem-se três equações, o funcional é definido da seguinte maneira,

$$I(R_1, R_2, R_3) = \int_{\Omega^e} R_1^2(x, y) d\Omega + \int_{\Omega^e} R_2^2(x, y) d\Omega + \int_{\Omega^e} R_3^2(x, y) d\Omega$$

e sua primeira variação é escrita da forma

$$\delta I(R_1, R_2, R_3) = 2 \int_{\Omega^e} (\delta R_1) R_1 d\Omega + 2 \int_{\Omega^e} (\delta R_2) R_2 d\Omega + 2 \int_{\Omega^e} (\delta R_3) R_3 d\Omega = 0$$

ou

$$\int_{\Omega^e} (\delta R_1) R_1 d\Omega + \int_{\Omega^e} (\delta R_2) R_2 d\Omega + \int_{\Omega^e} (\delta R_3) R_3 d\Omega = 0 \quad (8.4.6)$$

com as seguintes propriedades, independente do passo de tempo

$$\delta R_1 = \frac{\partial R_1}{\partial u_i^e} \delta u_i^e + \frac{\partial R_1}{\partial q_{xi}^e} \delta q_{xi}^e + \frac{\partial R_1}{\partial q_{yi}^e} \delta q_{yi}^e, \quad (8.4.7a)$$

$$\delta R_2 = \frac{\partial R_2}{\partial u_i^e} \delta u_i^e + \frac{\partial R_2}{\partial q_{xi}^e} \delta q_{xi}^e + \frac{\partial R_2}{\partial q_{yi}^e} \delta q_{yi}^e, \quad (8.4.7b)$$

$$\delta R_3 = \frac{\partial R_3}{\partial u_i^e} \delta u_i^e + \frac{\partial R_3}{\partial q_{xi}^e} \delta q_{xi}^e + \frac{\partial R_3}{\partial q_{yi}^e} \delta q_{yi}^e, \quad (8.4.7c)$$

com

$$\frac{\partial R_1}{\partial \hat{u}_i^e} = \alpha A_x \frac{\partial N_i}{\partial x} + \alpha A_y \frac{\partial N_i}{\partial y} + \left( \frac{\psi}{\Delta t} + \alpha B \right) N_i, \quad (8.4.8a)$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial \hat{q}_{xi}^e} = -\alpha \frac{\partial N_i}{\partial x}; \quad \frac{\partial R_1}{\partial \hat{q}_{yi}^e} = -\alpha \frac{\partial N_i}{\partial y}, \quad (8.4.8b-c)$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial \hat{u}_i^e} = k \frac{\partial N_i}{\partial x}; \quad \frac{\partial R_2}{\partial \hat{q}_{xi}^e} = N_i; \quad \frac{\partial R_2}{\partial \hat{q}_{yi}^e} = 0, \quad (8.4.8d-f)$$

$$\frac{\partial R_3}{\partial \hat{u}_i^e} = k \frac{\partial N_i}{\partial y}; \quad \frac{\partial R_3}{\partial \hat{q}_{xi}^e} = 0; \quad \frac{\partial R_3}{\partial \hat{q}_{yi}^e} = N_i. \quad (8.4.8g-i)$$

Substituindo-se as equações (8.4.7a-c) e (8.4.8a-i) na equação (8.4.6) tem-se,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left\{ \left[ \alpha A_x \frac{\partial N_i}{\partial x} + \alpha A_y \frac{\partial N_i}{\partial y} + \left( \frac{\psi}{\Delta t} + \alpha B \right) N_i \right] \delta \hat{u}_i^{e,s+1} - \alpha \frac{\partial N_i}{\partial x} \delta \hat{q}_{xi}^{e,s+1} - \right. \\ & \left. - \alpha \frac{\partial N_i}{\partial y} \delta \hat{q}_{yi}^{e,s+1} \right\} \times \left\{ -\alpha \sum_{j=1}^{N_{\text{nos}}} \frac{\partial N_j}{\partial x} \hat{q}_{xj}^{e,s+1} - \alpha \sum_{j=1}^{N_{\text{nos}}} \frac{\partial N_j}{\partial y} \hat{q}_{yj}^{e,s+1} + \alpha A_x \sum_{j=1}^{N_{\text{nos}}} \frac{\partial N_j}{\partial x} \hat{u}_j^{e,s+1} + \right. \\ & + \alpha A_y \sum_{j=1}^{N_{\text{nos}}} \frac{\partial N_j}{\partial y} \hat{u}_j^{e,s+1} + \left[ \frac{\psi}{\Delta t} + \alpha B \right] \sum_{j=1}^{N_{\text{nos}}} N_j \hat{u}_j^{e,s+1} + f - (1-\alpha) \sum_{j=1}^{N_{\text{nos}}} \frac{\partial N_j}{\partial x} \hat{q}_{xj}^{e,s} - (1-\alpha) \sum_{j=1}^{N_{\text{nos}}} \frac{\partial N_j}{\partial y} \hat{q}_{yj}^{e,s} + \\ & + (1-\alpha) A_x \sum_{j=1}^{N_{\text{nos}}} \frac{\partial N_j}{\partial x} \hat{u}_j^{e,s} + (1-\alpha) A_y \sum_{j=1}^{N_{\text{nos}}} \frac{\partial N_j}{\partial y} \hat{u}_j^{e,s} + \left[ -\frac{\psi}{\Delta t} + (1-\alpha) B \right] \sum_{j=1}^{N_{\text{nos}}} N_j \hat{u}_j^{e,s} \left\} d\Omega + \right. \\ & + \int_{\Omega^c} \left[ k \frac{\partial N_i}{\partial x} \delta \hat{u}_i^{e,s+1} + N_i \delta \hat{q}_{xi}^{e,s+1} \right] \times \left[ \sum_{j=1}^{N_{\text{nos}}} N_j \hat{q}_{xj}^{e,s+1} + k \sum_{j=1}^{N_{\text{nos}}} \frac{\partial N_j}{\partial x} \hat{u}_j^{e,s+1} \right] d\Omega + \\ & + \int_{\Omega^c} \left[ k \frac{\partial N_i}{\partial y} \delta \hat{u}_i^{e,s+1} + N_i \delta \hat{q}_{yi}^{e,s+1} \right] \times \left[ \sum_{j=1}^{N_{\text{nos}}} N_j \hat{q}_{yj}^{e,s+1} + k \sum_{j=1}^{N_{\text{nos}}} \frac{\partial N_j}{\partial y} \hat{u}_j^{e,s+1} \right] d\Omega = 0 \end{aligned}$$

Reorganizando-se a equação anterior, pode-se obter,

$$\begin{aligned} & \delta \hat{u}_i^{e,s+1} \times \int_{\Omega^c} (U_1 \times U_2 + U_3 + U_4) d\Omega + \delta \hat{q}_{xi}^{e,s+1} \times \int_{\Omega^c} (U_5 \times U_2 + U_6) d\Omega + \delta \hat{q}_{yi}^{e,s+1} \times \\ & \times \int_{\Omega^c} (U_7 \times U_2 + U_8) d\Omega = \delta \hat{u}_i^{e,s+1} \times \int_{\Omega^c} (-f) \times U_1 d\Omega + \delta \hat{q}_{xi}^{e,s+1} \times \int_{\Omega^c} (-f) \times U_5 d\Omega + \\ & + \delta \hat{q}_{yi}^{e,s+1} \times \int_{\Omega^c} (-f) \times U_7 d\Omega \end{aligned} \quad (8.4.9)$$

na qual

$$U_1 = \alpha A_x \frac{\partial N_i}{\partial x} + \alpha A_y \frac{\partial N_i}{\partial y} + \left[ \frac{\psi}{\Delta t} + \alpha B \right] N_i, \quad (8.4.10a)$$

$$\begin{aligned}
U_2 = & -\alpha \sum_{i=1}^{Nn\acute{o}s} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{q}_{xi}^{e,s+1} - \alpha \sum_{i=1}^{Nn\acute{o}s} \frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{q}_{yi}^{e,s+1} + \alpha A_x \sum_{i=1}^{Nn\acute{o}s} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{u}_i^{e,s+1} + \alpha A_y \sum_{i=1}^{Nn\acute{o}s} \frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{u}_i^{e,s+1} + \\
& + \left[ \frac{\psi}{\Delta t} + \alpha B \right] \sum_{i=1}^{Nn\acute{o}s} N_i \hat{u}_i^{e,s+1} - (1-\alpha) \sum_{i=1}^{Nn\acute{o}s} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{q}_{xi}^{e,s} - (1-\alpha) \sum_{i=1}^{Nn\acute{o}s} \frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{q}_{yi}^{e,s} + (1-\alpha) A_x \sum_{i=1}^{Nn\acute{o}s} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{u}_i^{e,s+1} + \\
& + (1-\alpha) A_y \sum_{i=1}^{Nn\acute{o}s} \frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{u}_i^{e,s} + \left[ -\frac{\psi}{\Delta t} + (1-\alpha) B \right] \sum_{i=1}^{Nn\acute{o}s} N_i \hat{u}_i^{e,s}, \quad (8.4.10b)
\end{aligned}$$

$$U_3 = k \frac{\partial N_i}{\partial x} \times \left[ \sum_{j=1}^{Nn\acute{o}s} N_j \hat{q}_{xj}^{e,s+1} + k \sum_{j=1}^{Nn\acute{o}s} \frac{\partial N_j}{\partial x} \hat{u}_j^{e,s+1} \right], \quad (8.4.10c)$$

$$U_4 = k \frac{\partial N_i}{\partial y} \times \left[ \sum_{j=1}^{Nn\acute{o}s} N_j \hat{q}_{yj}^{e,s+1} + k \sum_{j=1}^{Nn\acute{o}s} \frac{\partial N_j}{\partial y} \hat{u}_j^{e,s+1} \right], \quad (8.4.10d)$$

$$U_5 = -\alpha \frac{\partial N_i}{\partial x}, \quad (8.4.10e)$$

$$U_6 = N_i \times \left[ \sum_{j=1}^{Nn\acute{o}s} N_j \hat{q}_{xj}^{e,s+1} + k \sum_{j=1}^{Nn\acute{o}s} \frac{\partial N_j}{\partial x} \hat{u}_j^{e,s+1} \right], \quad (8.4.10f)$$

$$U_7 = -\alpha \frac{\partial N_i}{\partial y}, \quad (8.4.10g)$$

$$U_8 = N_i \times \left[ \sum_{j=1}^{Nn\acute{o}s} N_j \hat{q}_{yj}^{e,s+1} + k \sum_{j=1}^{Nn\acute{o}s} \frac{\partial N_j}{\partial y} \hat{u}_j^{e,s+1} \right]. \quad (8.4.10h)$$

Para que a equação (8.4.9) seja satisfeita, deve-se ter, simultaneamente

$$\int_{\Omega^e} (U_1 \times U_2 + U_3 + U_4) d\Omega = \int_{\Omega^e} (-f) \times U_1 d\Omega, \quad (8.4.11a)$$

$$\int_{\Omega^e} (U_5 \times U_2 + U_6) d\Omega = \int_{\Omega^e} (-f) \times U_5 d\Omega, \quad (8.4.11b)$$



$$\int_{\Omega^c} (U_7 \times U_2 + U_8) d\Omega = \int_{\Omega^c} (-f) \times U_7 d\Omega, \quad (8.4.11c)$$

ou seja,  $\delta u_i^{s+1,e}$ ,  $\delta q_{xi}^{s+1,e}$  e  $\delta q_{yi}^{s+1,e}$  não são identicamente nulos em todo o domínio.

As equações (7.4.10a-c) geram o seguinte sistema linear matricial

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ B^T & D & E \\ C^T & E^T & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}^{e,s+1} \\ \hat{q}_x^{e,s+1} \\ \hat{q}_y^{e,s+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H & I & J \\ M & L & K \\ P & S & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}^{e,s} \\ \hat{q}_x^{e,s} \\ \hat{q}_y^{e,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (8.4.12)$$

Visto que as variáveis  $\hat{u}^{e,s}$ ,  $\hat{q}_x^{e,s}$  e  $\hat{q}_y^{e,s}$  já são conhecidas do passo anterior de tempo “s”, o sistema (8.4.12) fica da seguinte forma,

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ B^T & D & E \\ C^T & E^T & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}^{e,s+1} \\ \hat{q}_x^{e,s+1} \\ \hat{q}_y^{e,s+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H & I & J \\ M & L & K \\ P & S & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}^{e,s} \\ \hat{q}_x^{e,s} \\ \hat{q}_y^{e,s} \end{bmatrix} \quad (8.4.13)$$

no qual

$$A_{ij} = \int_{\Omega^c} \left\{ \left[ \alpha A_x \frac{\partial N_i}{\partial x} + \alpha A_y \frac{\partial N_i}{\partial y} + \left( \frac{\psi}{\Delta t} + \alpha B \right) N_i \right] \times \left[ \alpha A_x \frac{\partial N_j}{\partial x} + \alpha A_y \frac{\partial N_j}{\partial y} + \left( \frac{\psi}{\Delta t} + \alpha B \right) N_j \right] + k^2 \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + k^2 \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right\} d\Omega, \quad (8.4.14a)$$

$$B_{ij} = \int_{\Omega^c} \left\{ \left[ \alpha A_x \frac{\partial N_i}{\partial x} + \alpha A_y \frac{\partial N_i}{\partial y} + \left( \frac{\psi}{\Delta t} + \alpha B \right) N_i \right] \times \left[ -\alpha \frac{\partial N_j}{\partial x} \right] + k \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j \right\} d\Omega, \quad (8.4.14b)$$

$$C_{ij} = \int_{\Omega^c} \left\{ \left[ \alpha A_x \frac{\partial N_i}{\partial x} + \alpha A_y \frac{\partial N_i}{\partial y} + \left( \frac{\psi}{\Delta t} + \alpha B \right) N_i \right] \times \left[ -\alpha \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] + k \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j \right\} d\Omega, \quad (8.4.14c)$$

$$D_{ij} = \int_{\Omega^e} \left[ \alpha^2 \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + N_i N_j \right] d\Omega, \quad (8.4.14d)$$

$$E_{ij} = \int_{\Omega^e} \alpha^2 \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega, \quad (8.4.14e)$$

$$G_{ij} = \int_{\Omega^e} \left[ \alpha^2 \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + N_i N_j \right] d\Omega, \quad (8.4.14f)$$

$$H_{ij} = \int_{\Omega^e} \left\{ \left[ \alpha A_x \frac{\partial N_i}{\partial x} + \alpha A_y \frac{\partial N_i}{\partial y} + \left( \frac{\psi}{\Delta t} + \alpha B \right) N_i \right] \times \left[ (1-\alpha) A_x \frac{\partial N_j}{\partial x} + (1-\alpha) A_y \frac{\partial N_j}{\partial y} + \left( -\frac{\psi}{\Delta t} + (1-\alpha) B \right) N_j \right] \right\} d\Omega, \quad (8.4.14g)$$

$$I_{ij} = \int_{\Omega^e} \left[ \alpha A_x \frac{\partial N_i}{\partial x} + \alpha A_y \frac{\partial N_i}{\partial y} + \left( \frac{\psi}{\Delta t} + \alpha B \right) N_i \right] \times \left[ -(1-\alpha) \frac{\partial N_j}{\partial x} \right] d\Omega, \quad (8.4.14h)$$

$$J_{ij} = \int_{\Omega^e} \left[ \alpha A_x \frac{\partial N_i}{\partial x} + \alpha A_y \frac{\partial N_i}{\partial y} + \left( \frac{\psi}{\Delta t} + \alpha B \right) N_i \right] \times \left[ -(1-\alpha) \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] d\Omega, \quad (8.4.14i)$$

$$M_{ij} = \int_{\Omega^e} \left[ -\alpha \frac{\partial N_i}{\partial x} \right] \times \left[ (1-\alpha) A_x \frac{\partial N_j}{\partial x} + (1-\alpha) A_y \frac{\partial N_j}{\partial y} + \left( -\frac{\psi}{\Delta t} + (1-\alpha) B \right) N_j \right] d\Omega, \quad (8.4.14j)$$

$$K_{ij} = \int_{\Omega^e} (1-\alpha) \alpha \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega, \quad (8.4.14k)$$

$$L_{ij} = \int_{\Omega^e} (1-\alpha) \alpha \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega, \quad (8.4.14l)$$

$$P_{ij} = \int_{\Omega^e} \left[ -\alpha \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] \times \left[ (1-\alpha) A_x \frac{\partial N_j}{\partial x} + (1-\alpha) A_y \frac{\partial N_j}{\partial y} + \left( -\frac{\psi}{\Delta t} + (1-\alpha) B \right) N_j \right] d\Omega, \quad (8.4.14m)$$

$$S_{ij} = \int_{\Omega^e} \alpha(1-\alpha) \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega, \quad (8.4.14n)$$

$$O_{ij} = \int_{\Omega^e} (1-\alpha)\alpha \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega, \quad (8.4.14o)$$

$$F_{1i} = \int_{\Omega^e} (-f) \times \left[ \alpha A_x \frac{\partial N_i}{\partial x} + \alpha A_y \frac{\partial N_i}{\partial y} + \left( \frac{\psi}{\Delta t} + \alpha B \right) N_i \right] d\Omega, \quad (8.4.14p)$$

$$F_{2i} = \int_{\Omega^e} (-f) \times \left[ -\alpha A_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \right] d\Omega, \quad (8.4.14q)$$

$$F_{3i} = \int_{\Omega^e} (-f) \times \left[ -\alpha A_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] d\Omega. \quad (8.4.14r)$$

A partir das transformações de coordenadas globais para locais ( $x \rightarrow \xi$ ,  $y \rightarrow \eta$ ) descritas nas equações (5.3.1.7a-b) e (5.3.1.9), as equações (8.4.14a-o) são reescritas da forma:

$$A_{ij} = \int_{\bar{\Omega}^e} \left\{ \left[ \frac{\alpha A_x}{\det(J)} \Phi_1 + \frac{\alpha A_y}{\det(J)} \Phi_3 + \left( \frac{\psi}{\Delta t} + \alpha B \right) N_i \right] \times \left[ \frac{\alpha A_x}{\det(J)} \Phi_2 + \frac{\alpha A_y}{\det(J)} \Phi_4 + \left( \frac{\psi}{\Delta t} + \alpha B \right) N_2 \right] + \frac{k^2}{\det(J)^2} \Phi_1 \Phi_2 + \frac{k^2}{\det(J)^2} \Phi_3 \Phi_4 \right\} \det(J) d\bar{\Omega}, \quad (8.4.15a)$$

$$B_{ij} = \int_{\bar{\Omega}^e} \left\{ \left[ \frac{\alpha A_x}{\det(J)} \Phi_1 + \frac{\alpha A_y}{\det(J)} \Phi_3 + \left( \frac{\psi}{\Delta t} + \alpha B \right) N_i \right] \times (-\alpha \Phi_2) + k \Phi_1 N_j \right\} d\bar{\Omega}, \quad (8.4.15b)$$

$$C_{ij} = \int_{\bar{\Omega}^e} \left\{ \left[ \frac{\alpha A_x}{\det(J)} \Phi_1 + \frac{\alpha A_y}{\det(J)} \Phi_3 + \left( \frac{\psi}{\Delta t} + \alpha B \right) N_i \right] \times (-\alpha \Phi_4) + k \Phi_3 N_j \right\} d\bar{\Omega}, \quad (8.4.15c)$$

$$D_{ij} = \int_{\bar{\Omega}^e} \left[ \frac{\alpha^2}{\det(J)^2} \Phi_1 \Phi_2 + N_i N_j \right] \det(J) d\bar{\Omega}, \quad (8.4.15d)$$

$$E_{ij} = \int_{\bar{\Omega}^e} \frac{\alpha^2}{\det(J)} \Phi_1 \Phi_4 d\bar{\Omega}, \quad (8.4.15e)$$

$$G_{ij} = \int_{\bar{\Omega}^e} \left[ \frac{\alpha^2}{\det(J)^2} \Phi_3 \Phi_4 + N_i N_j \right] \det(J) d\bar{\Omega}, \quad (8.4.15f)$$

$$H_{ij} = \int_{\bar{\Omega}^e} \left[ \left( \frac{\alpha A_x}{\det(J)} \Phi_1 + \frac{\alpha A_y}{\det(J)} \Phi_3 + \left( \frac{D}{\Delta t} + \alpha B \right) N_i \right) \times \left( \frac{(1-\alpha) A_x}{\det(J)} \Phi_2 + \frac{(1-\alpha) A_y}{\det(J)} \Phi_4 + \left( \frac{D}{\Delta t} + (1-\alpha) B \right) N_2 \right) \right] \det(J) d\bar{\Omega}, \quad (8.4.15g)$$

$$I_{ij} = \int_{\bar{\Omega}^e} \left[ \frac{\alpha A_x}{\det(J)} \Phi_1 + \frac{\alpha A_y}{\det(J)} \Phi_3 + \left( \frac{D}{\Delta t} + \alpha B \right) N_i \right] \times [-(1-\alpha) \Phi_2] d\bar{\Omega}, \quad (8.4.15h)$$

$$J_{ij} = \int_{\bar{\Omega}^e} \left[ \frac{\alpha A_x}{\det(J)} \Phi_1 + \frac{\alpha A_y}{\det(J)} \Phi_3 + \left( \frac{D}{\Delta t} + \alpha B \right) N_i \right] \times [-(1-\alpha) \Phi_4] d\bar{\Omega}, \quad (8.4.15i)$$

$$K_{ij} = \int_{\bar{\Omega}^e} \frac{(1-\alpha)\alpha}{\det(J)} \Phi_1 \Phi_2 d\bar{\Omega}, \quad (8.4.15j)$$

$$L_{ij} = \int_{\bar{\Omega}^e} \frac{(1-\alpha)\alpha}{\det(J)} \Phi_1 \Phi_4 d\bar{\Omega}, \quad (8.4.15k)$$

$$O_{ij} = \int_{\bar{\Omega}^e} \frac{(1-\alpha)\alpha}{\det(J)} \Phi_3 \Phi_4 d\bar{\Omega}, \quad (8.4.15l)$$

$$F_{li} = \int_{\bar{\Omega}^e} (-f) \times \left[ \frac{\alpha A_x}{\det(J)} \Phi_1 + \frac{\alpha A_y}{\det(J)} \Phi_3 + \left( \frac{\psi}{\Delta t} + \alpha B \right) N_i \right] \det(J) d\bar{\Omega}, \quad (8.4.15m)$$



$$F_{2i} = \int_{\bar{\Omega}^e} (-f) \times (-\alpha A_x \Phi_1) d\bar{\Omega}, \quad (8.4.15n)$$

$$F_{3i} = \int_{\bar{\Omega}^e} (-f) \times (-\alpha A_y \Phi_3) d\bar{\Omega}, \quad (8.4.15o)$$

nos quais

$$\Phi_1 = \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta}, \quad (8.2.11a)$$

$$\Phi_2 = \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \eta}, \quad (8.2.11b)$$

$$\Phi_3 = -\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta}, \quad (8.2.11c)$$

$$\Phi_4 = -\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \eta}. \quad (8.2.11d)$$

Caso o problema em regime permanente, o sistema linear algébrico se reduzirá à seguinte forma,

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ B^T & D & E \\ C^T & E^T & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}^e \\ \hat{q}_x^e \\ \hat{q}_y^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1i} \\ F_{2i} \\ F_{3i} \end{Bmatrix} \quad (8.4.15)$$

no qual,

$$A_{ij} = \int_{\bar{\Omega}^e} \left\{ \left[ \frac{A_x}{\det(J)} \Phi_1 + \frac{A_y}{\det(J)} \Phi_3 + BN_i \right] \times \left[ \frac{A_x}{\det(J)} \Phi_2 + \frac{A_y}{\det(J)} \Phi_4 + BN_j \right] + \right. \\ \left. + \frac{k^2}{\det(J)^2} \Phi_1 \Phi_2 + \frac{k^2}{\det(J)^2} \Phi_3 \Phi_4 \right\} \det(J) d\bar{\Omega}, \quad (8.4.16a)$$

$$B_{ij} = \int_{\bar{\Omega}^e} \left\{ \left[ \frac{A_x}{\det(J)} \Phi_1 + \frac{A_y}{\det(J)} \Phi_3 + BN_i \right] \times \left[ \frac{-1}{\det(J)} \Phi_2 \right] + k \Phi_1 N_j \right\} d\bar{\Omega}, \quad (8.4.16b)$$

$$C_{ij} = \int_{\bar{\Omega}^e} \left\{ \left[ \frac{A_x}{\det(J)} \Phi_1 + \frac{A_y}{\det(J)} \Phi_3 + BN_i \right] \times \left[ \frac{-1}{\det(J)} \Phi_4 \right] + k \Phi_3 N_j \right\} d\bar{\Omega}, \quad (8.4.16c)$$

$$D_{ij} = \int_{\bar{\Omega}^e} \left[ \frac{1}{\det(J)^2} \Phi_1 \Phi_2 + N_i N_j \right] \det(J) d\bar{\Omega}, \quad (8.4.16d)$$

$$E_{ij} = \int_{\bar{\Omega}^e} \frac{1}{\det(J)} \Phi_1 \Phi_4 d\bar{\Omega}, \quad (8.4.16e)$$

$$G_{ij} = \int_{\bar{\Omega}^e} \left[ \frac{1}{\det(J)^2} \Phi_3 \Phi_4 + N_i N_j \right] \det(J) d\bar{\Omega}, \quad (8.4.16f)$$

$$F_{1i} = \int_{\bar{\Omega}^e} \left[ \frac{A_x}{\det(J)} \Phi_1 + \frac{A_y}{\det(J)} \Phi_3 + BN_i \right] \times (-f) \det(J) d\bar{\Omega}, \quad (8.4.16g)$$

$$F_{2i} = \int_{\bar{\Omega}^e} \Phi_1 f d\bar{\Omega}, \quad (8.4.16h)$$

$$F_{3i} = \int_{\bar{\Omega}^e} \Phi_3 f d\bar{\Omega}, \quad (8.4.16i)$$

com  $i, j = 1, \dots, N$  e  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  e  $\Phi_4$  descritos nas equações 8.2.11a-b.

## Aplicações Numéricas Bidimensionais

Nesse capítulo são apresentadas as soluções numéricas de problemas puramente difusivos e convectivo-difusivos nos regimes permanente e transiente. Apenas para conhecimento, todas as malhas utilizadas nas aplicações deste capítulo foram geradas no software Ansys (1994). Para solução do sistema linear foi utilizado o Método Frontal. Nos apêndices A e B, encontram-se respectivamente, tabelas de resultados numéricos e de tempos de execução de algumas aplicações desse capítulo.

### Aplicação 1: Difusão Pura com condições de contorno de primeiro tipo

Nesta aplicação apresenta-se um caso puramente difusivo no regime permanente com todas as condições de contorno do tipo função prescrita, vide Fig. 9.1.

**Equação Governante:** 
$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

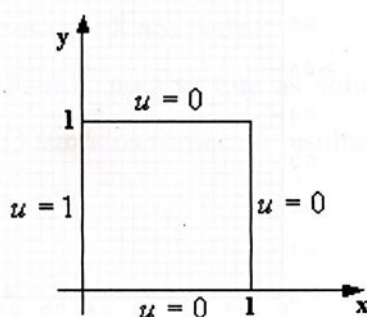


Figura 9.1 – Geometria Cartesiana com condições de contorno de primeiro tipo.

Inicialmente apresentam-se as soluções analíticas e numéricas de  $u$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}$  e  $\frac{\partial u}{\partial y}$  e logo em seguida serão apresentadas as normas  $L_2$  e  $L_\infty$  do erro dessas funções na aplicação dos Métodos de Galerkin e dos Mínimos Quadrados.

A solução analítica para este caso é da forma,

$$u(x, y) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh[(2n+1)\pi(1-x)]}{\operatorname{sen}[(2n+1)\pi]} \frac{\operatorname{sen}[(2n+1)\pi y]}{2n+1},$$

então

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = -4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cosh[(2n+1)\pi(1-x)]}{\operatorname{sen}[(2n+1)\pi]} \operatorname{sen}[(2n+1)\pi y],$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh[(2n+1)\pi(1-x)]}{\operatorname{sen}[(2n+1)\pi]} \cos[(2n+1)\pi y].$$

Vale ressaltar que para uma melhor análise das normas dos erros, foram adotadas malhas nas quais todos os elementos fossem idênticos, no caso foram adotados quadriláteros quadrados. A Figura 9.2 é um exemplo de malha adotada nesta aplicação, no qual trata-se de uma malha com 1600 quadriláteros.

Para a análise das normas foram adotadas malhas com quadriláteros com quatro e oito nós, com o objetivo de analisar se uma malha com elementos quadriláteros com oito nós apresenta melhores resultados do que a com elementos quadriláteros com quatro nós.

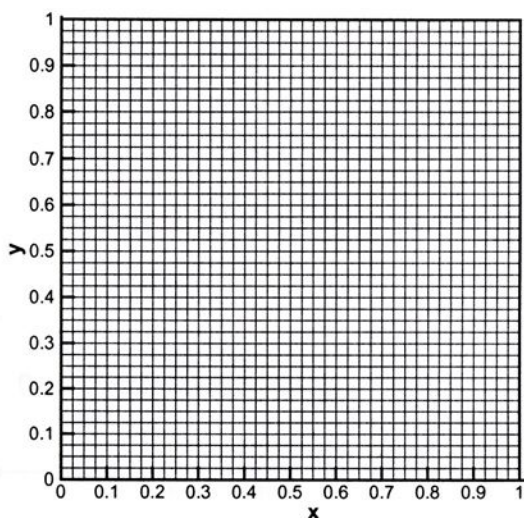


Figura 9.2 – Malha com 1600 elementos quadriláteros.



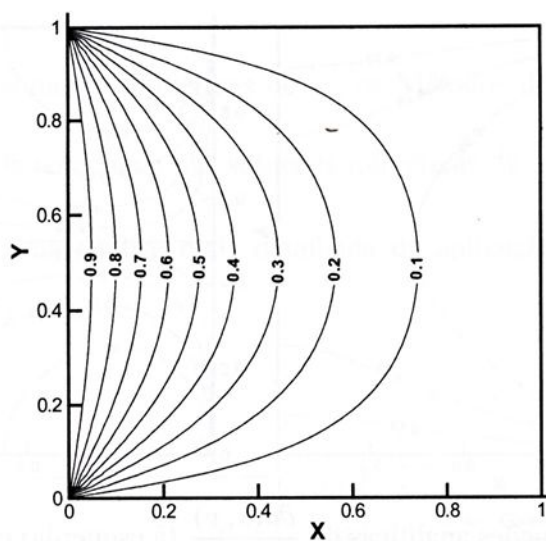


Figura 9.3 – Solução analítica de  $u(x, y)$ .

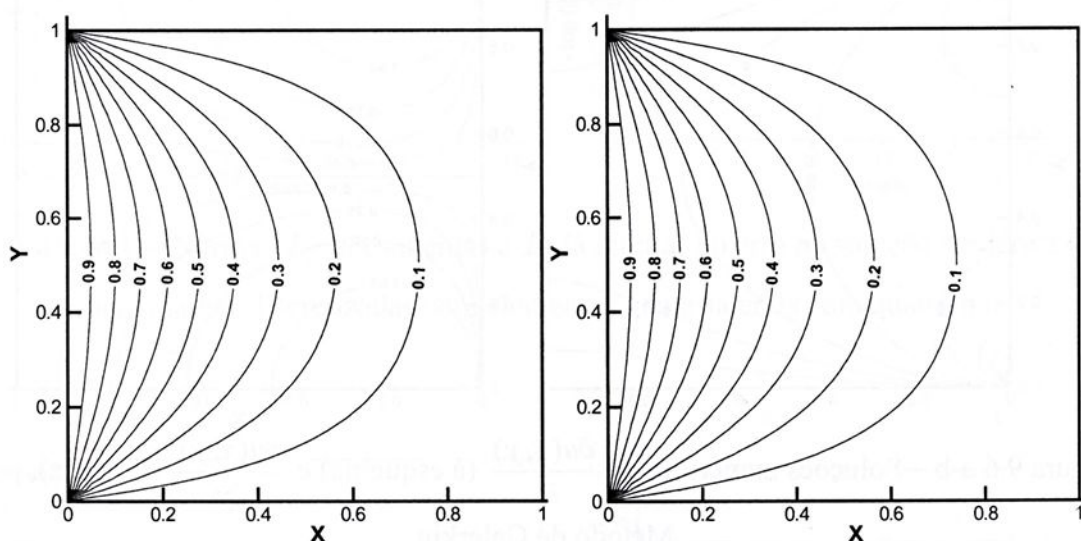


Figura 9.4a-b – Soluções numéricas de  $u(x, y)$  pelo Método de Galerkin (à esquerda) e pelo Método dos Mínimos Quadrados (à direita).

As soluções analíticas e numéricas apresentadas na Figuras 9.3 à 9.7 foram calculadas para uma malha com 1600 quadriláteros com 8 nós cada.

Analisando as figuras 9.3 e 9.4a-b, nota-se que as soluções numéricas de  $u$  pelos Métodos de Galerkin e dos Mínimos Quadrados fornecem resultados satisfatórios.

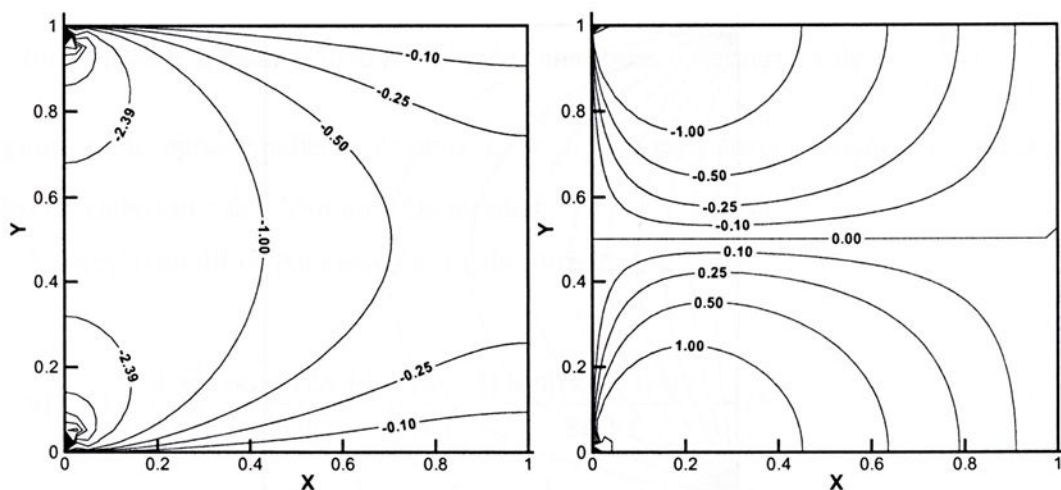


Figura 9.5 a-b – Soluções analíticas de  $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$  (à esquerda) e  $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$  (à direita).

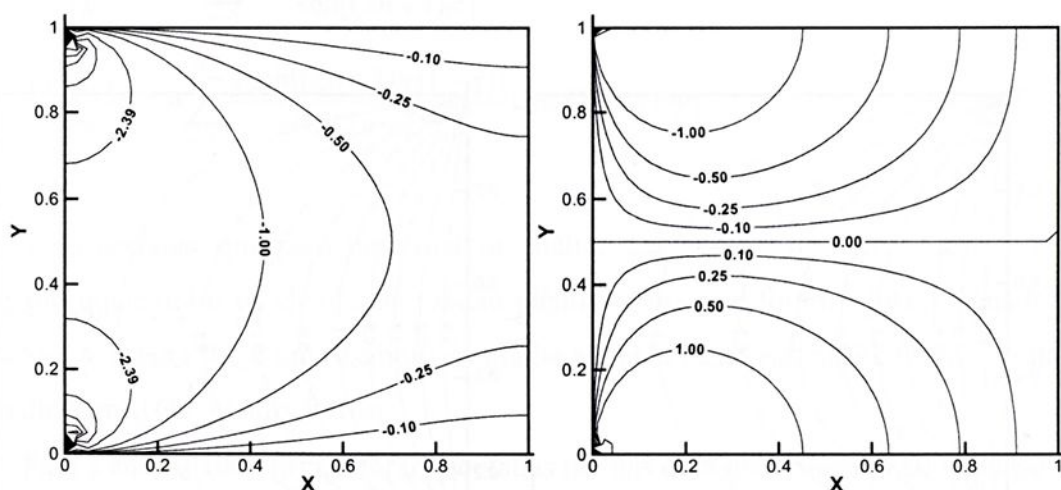


Figura 9.6 a-b – Soluções numéricas de  $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$  (à esquerda) e  $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$  (à direita), pelo Método de Galerkin.

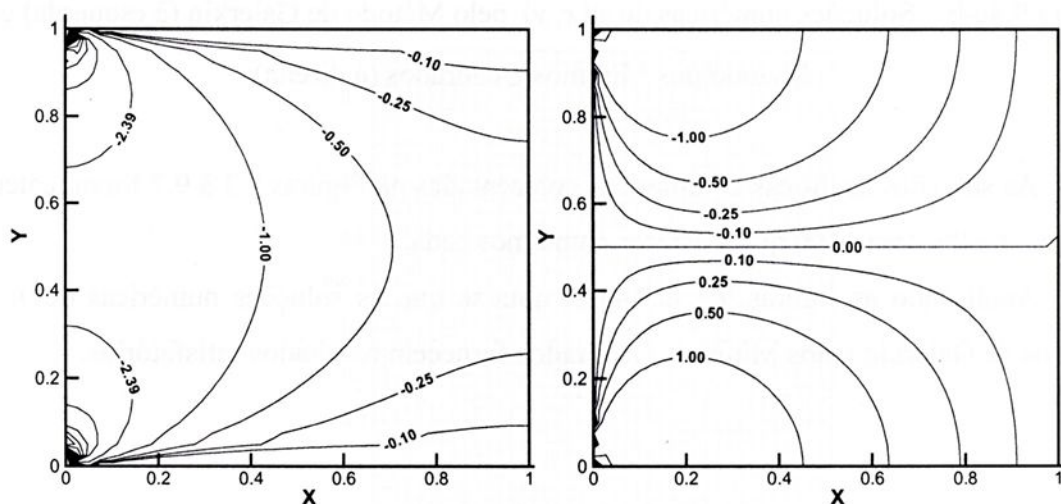


Figura 9.7a-b – Soluções Numéricas de  $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$  (à esquerda) e  $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$  (à direita), pelo Método dos Mínimos Quadrados.

Assim como nas soluções numéricas de  $u$ , os Métodos de Galerkin e dos Mínimos Quadrados obtiveram bons resultados nas soluções numéricas de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  e  $\frac{\partial u}{\partial y}$ , figuras 9.6a-b e 9.7a-b. Agora será feita uma análise mais detalhada da aplicação dos métodos numéricos avaliando-se as normas  $L_2$  e  $L_\infty$ .

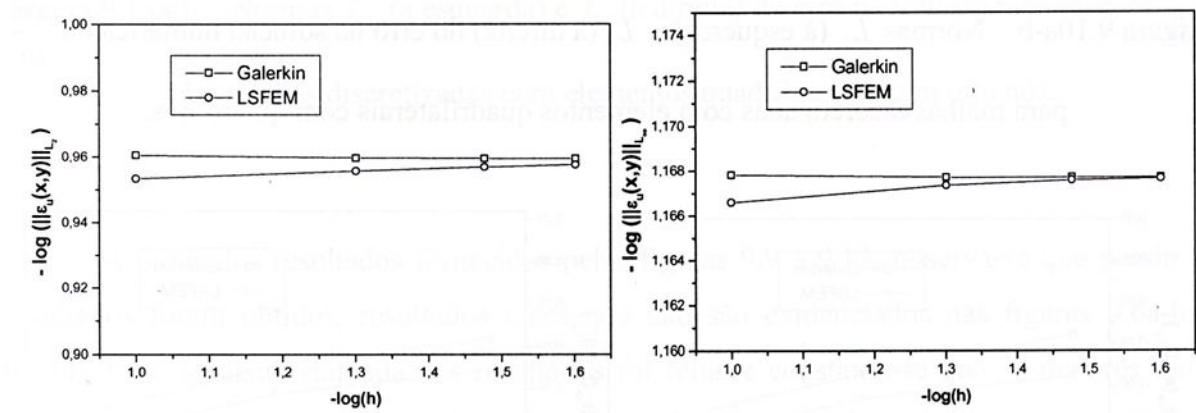


Figura 9.8a-b – Normas  $L_2$  (à esquerda) e  $L_\infty$  (à direita) do erro na solução numérica de  $u$  para malhas discretizadas com elementos quadrilaterais com quatro nós.

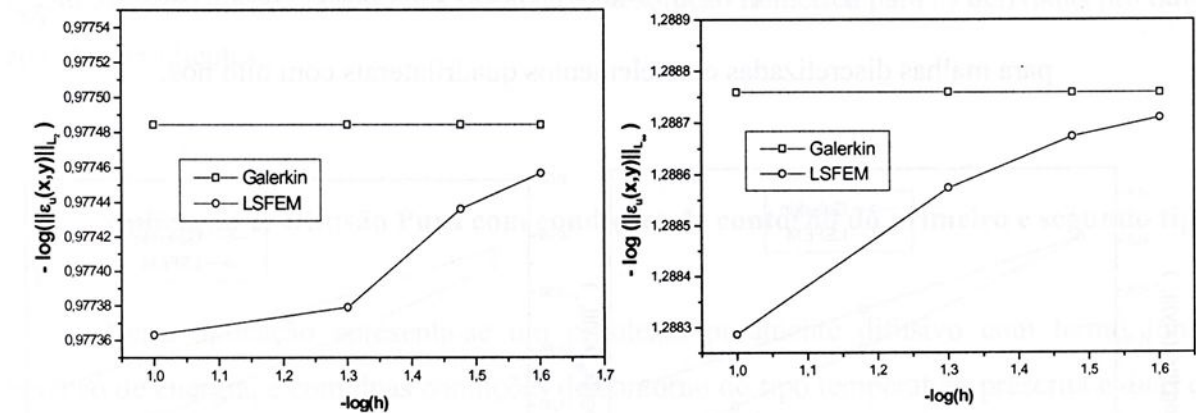


Figura 9.9a-b – Normas  $L_2$  (à esquerda) e  $L_\infty$  (à direita) do erro na solução numérica de  $u$  para malhas discretiza das com elementos quadrilaterais com oito nós.



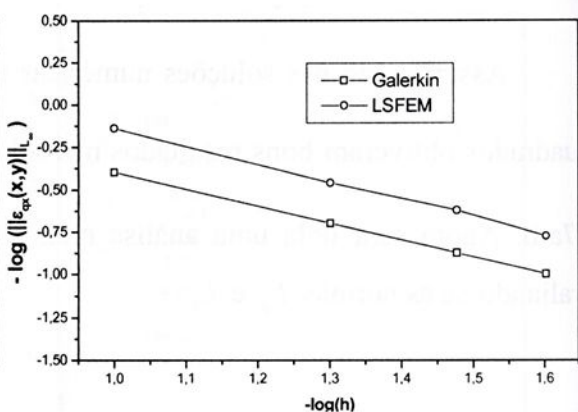
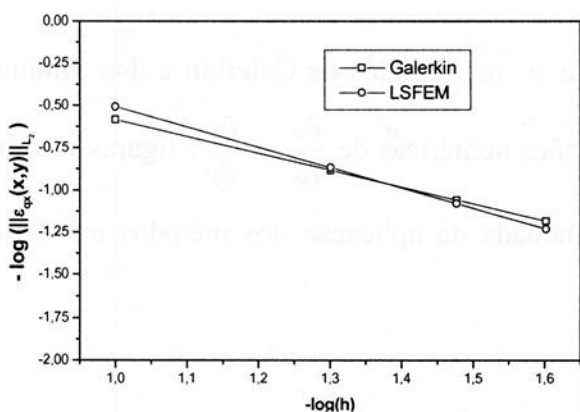


Figura 9.10a-b – Normas  $L_2$  (à esquerda) e  $L_\infty$  (à direita) do erro na solução numérica de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  para malhas discretizadas com elementos quadrilaterais com quatro nós.

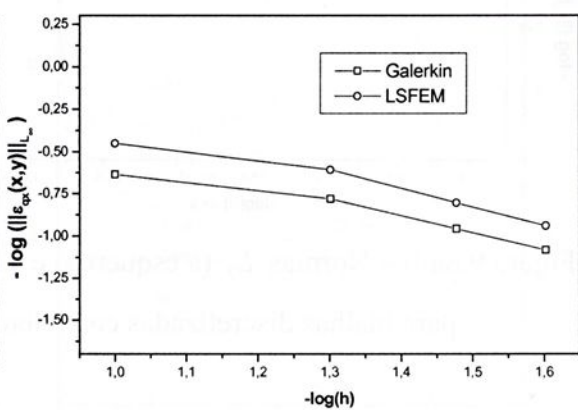
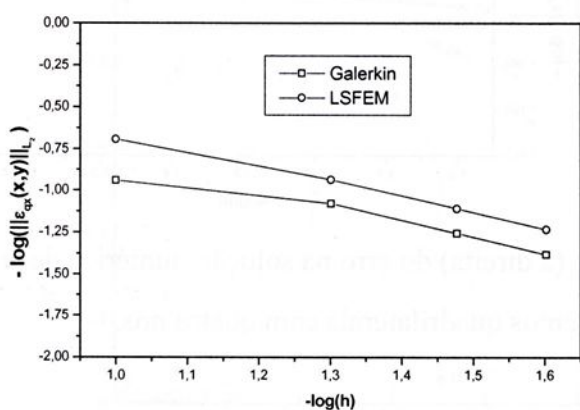


Figura 9.11a-b – Normas  $L_2$  (à esquerda) e  $L_\infty$  (à direita) do erro na solução numérica de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  para malhas discretizadas com elementos quadrilaterais com oito nós.

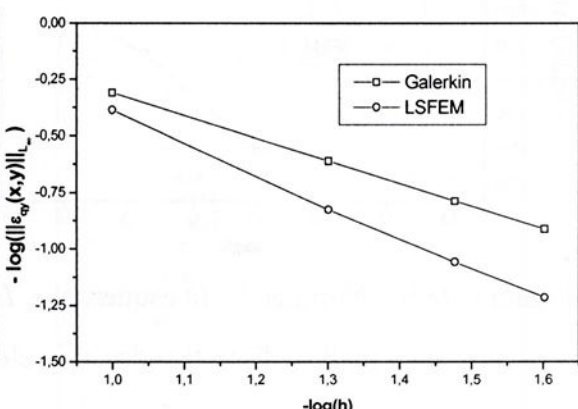
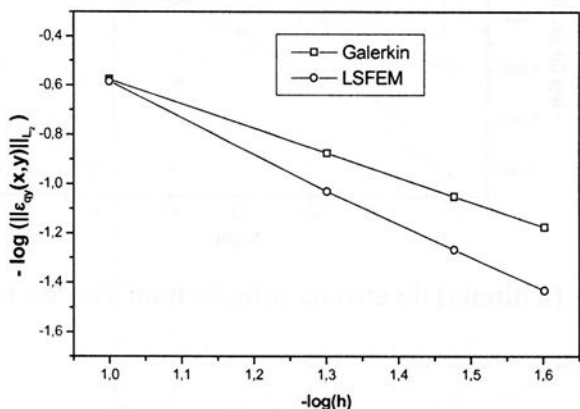


Figura 9.12a-b – Normas  $L_2$  (à esquerda) e  $L_\infty$  (à direita) do erro na solução numérica de  $\frac{\partial u}{\partial y}$  para malhas discretizadas com elementos quadrilaterais com quatro nós.



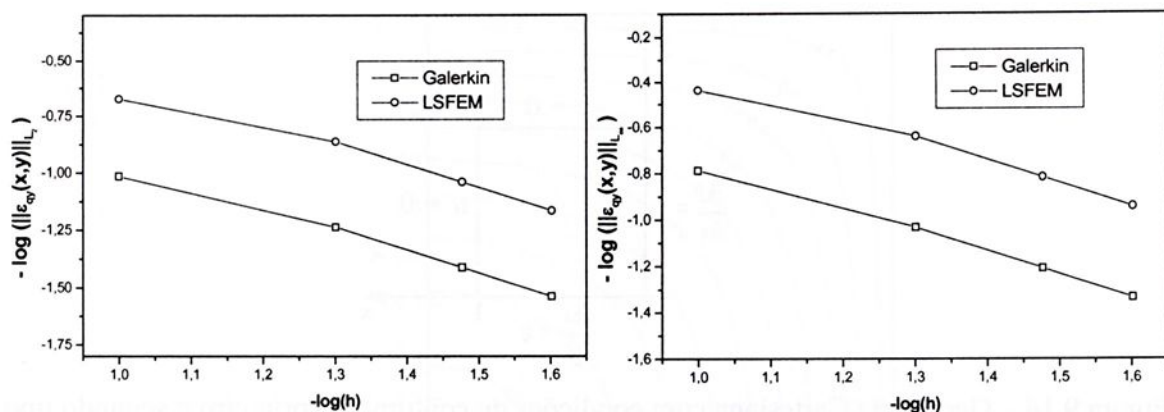


Figura 9.13a-b – Normas  $L_2$  (à esquerda) e  $L_{\infty}$  (à direita) do erro na solução numérica de  $\frac{\partial u}{\partial y}$

para malhas discretizadas com elementos quadrilaterais com oito nós.

A partir dos resultados fornecidos pelas figuras 9.9 à 9.13, observa-se que péssimos resultados foram obtidos, resultados esses que não são evidenciados nas figuras 9.6a-b e 9.7a-b. Uma análise detalhada dos resultados foi feita, e constatou-se que os maiores erros foram obtidos o quão mais próximos os nós se localizavam dos vértices  $(x,y) = (0,0)$  e  $(x,y) = (0,1)$ . E em razão destas regiões serem de altos gradientes os erros se tornaram tão significativos. Em outras palavras, as normas das derivadas não são boas porque existem duas descontinuidades nos cantos. Portanto neste caso os Métodos de Galerkin e dos Mínimos Quadrados não apresentaram bons resultados na solução numérica para as derivadas próximas aos altos gradientes.

## Aplicação 2: Difusão Pura com condições de contorno do primeiro e segundo tipo

Nesta aplicação apresenta-se um problema puramente difusivo com termo fonte, geração de energia, e com duas condições de contorno do tipo temperatura prescrita e duas de isolamento, Fig. 9.14. Para a discretização do domínio, foi utilizado uma malha com 3200 elementos triangulares com 3 e 6 nós cada, Fig. 9.15.

Do mesmo modo que na aplicação 1, serão apresentadas as soluções analíticas e numéricas e as normas  $L_2$  e  $L_{\infty}$ .

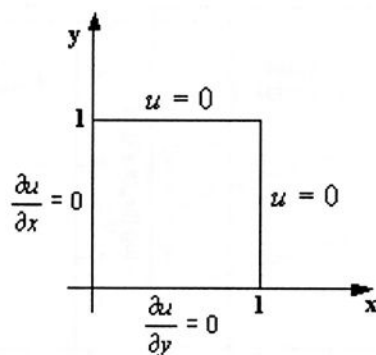


Figura 9.14 – Geometria Cartesiana com condições de contorno de primeiro e segundo tipo.

**Equação Governante:** 
$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + 5 = 0$$

A solução analítica desta aplicação é descrita logo a seguir,

$$u(x, y) = 5 \times \left\{ \frac{1}{2}(1 - x^2) - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n^3} \frac{\cosh(\lambda_n y)}{\cosh(\lambda_n)} \cos(\lambda_n x) \right\},$$

então

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 5 \times \left\{ -x + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n^2} \frac{\cosh(\lambda_n y)}{\cosh(\lambda_n)} \sin(\lambda_n x) \right\},$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -10 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n^2} \frac{\sinh(\lambda_n y)}{\cosh(\lambda_n)} \cos(\lambda_n x)$$

no qual  $\lambda_n = (2n + 1)\pi / 2$  e  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

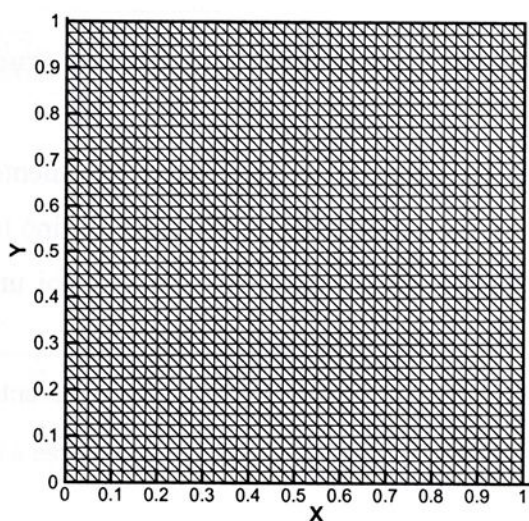


Figura 9.15 – Malha com 3200 elementos triangulares.

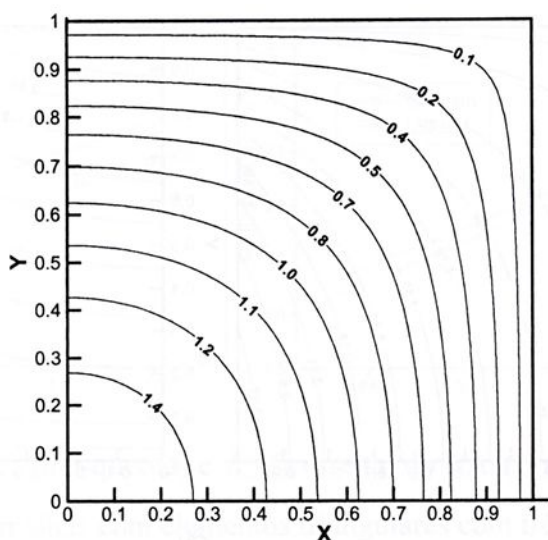


Figura 9.16 – Solução Analítica de  $u(x, y)$ .

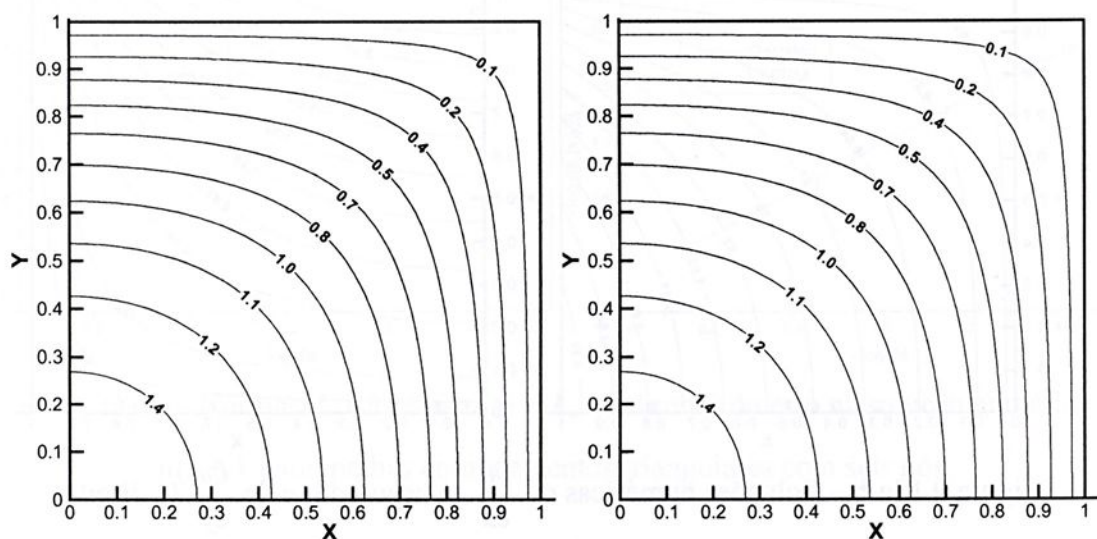


Figura 9.17a-b Soluções numéricas de  $u(x, y)$  pelos Método de Galerkin (à esquerda) e pelo Método dos Mínimos Quadrados (à direita).

Nota-se nas figuras 9.16 e 9.17a-b que as soluções numéricas de  $u$  pelos Métodos de Galerkin e dos Mínimos Quadrados fornecem bons resultados. Vale ressaltar que nesta aplicação, caso puramente difusivo, o Método Petrov-Galerkin reduz-se ao Método de Galerkin,  $A_x = A_y = 0$ . Do mesmo modo, as soluções numéricas de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  e  $\frac{\partial u}{\partial y}$  pelos métodos utilizados apresentam bons resultados, Figuras 9.18 a 9.20.



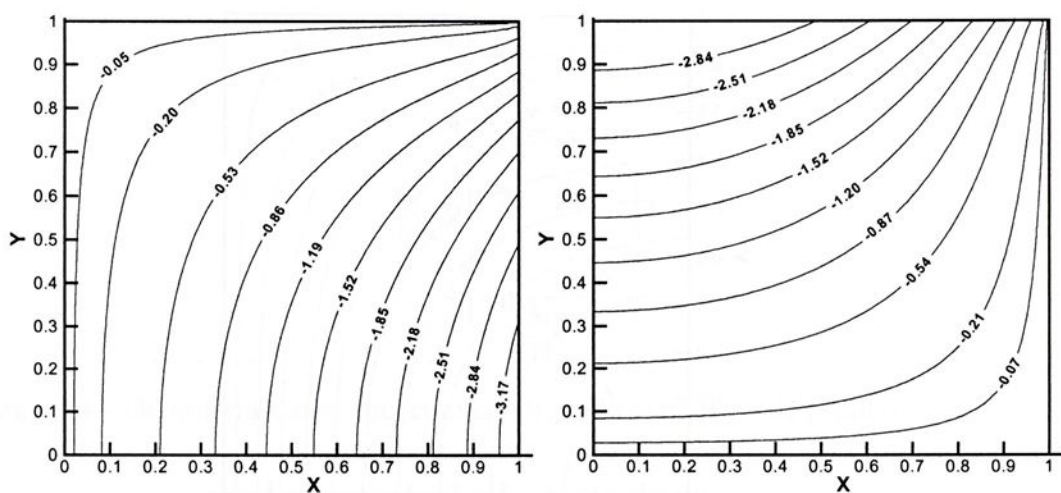


Figura 9.18a-b – Solução analítica de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  (à esquerda) e de  $\frac{\partial u}{\partial y}$  (à direita).

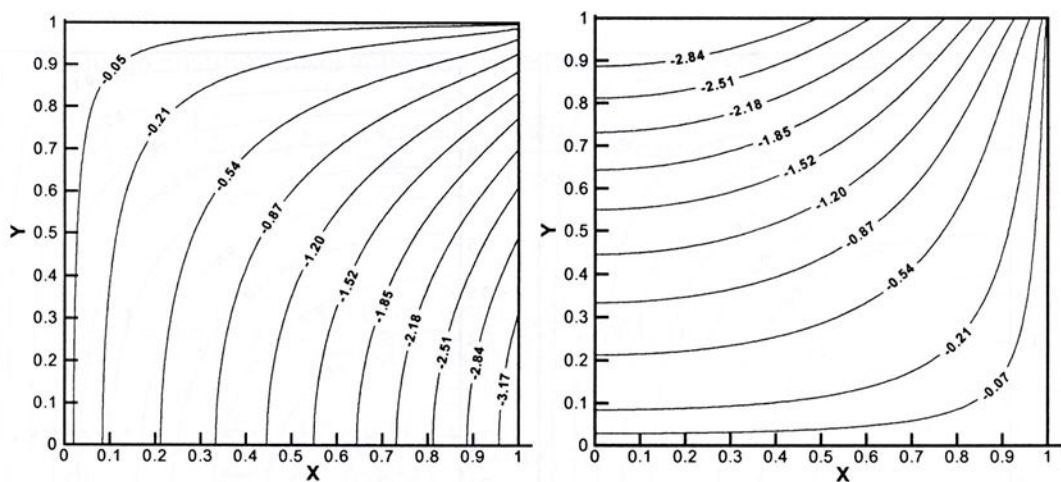


Figura 9.19a-b – Soluções numéricas de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  (à esquerda) e de  $\frac{\partial u}{\partial y}$  (à direita) pelo Método de Galerkin.

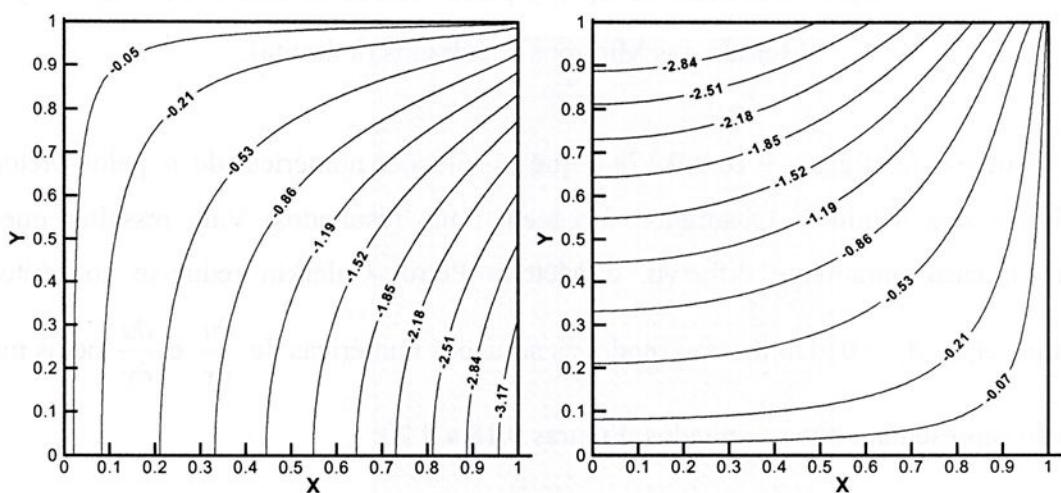


Figura 9.20a-b – Soluções numéricas de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  (à esquerda) e de  $\frac{\partial u}{\partial y}$  (à direita) pelo Método dos Mínimos Quadrados.



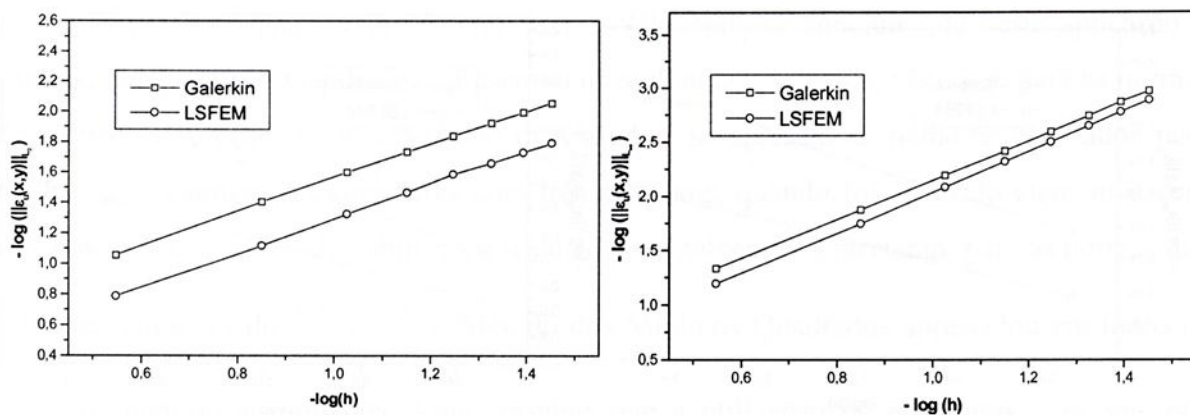


Figura 9.21a-b – Normas  $L_2$  (à esquerda) e  $L_\infty$  (à direita) do erro na solução numérica de  $u(x, y)$  para malhas com elementos triangulares com três nós.

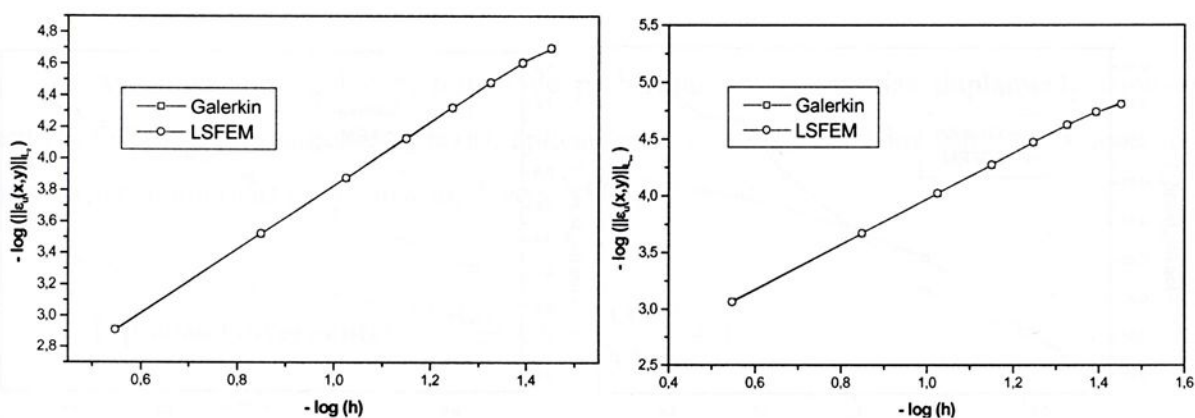


Figura 9.22a-b – Normas  $L_2$  (à esquerda) e  $L_\infty$  (à direita) do erro na solução numérica de  $u(x, y)$  para malhas com elementos triangulares com seis nós.

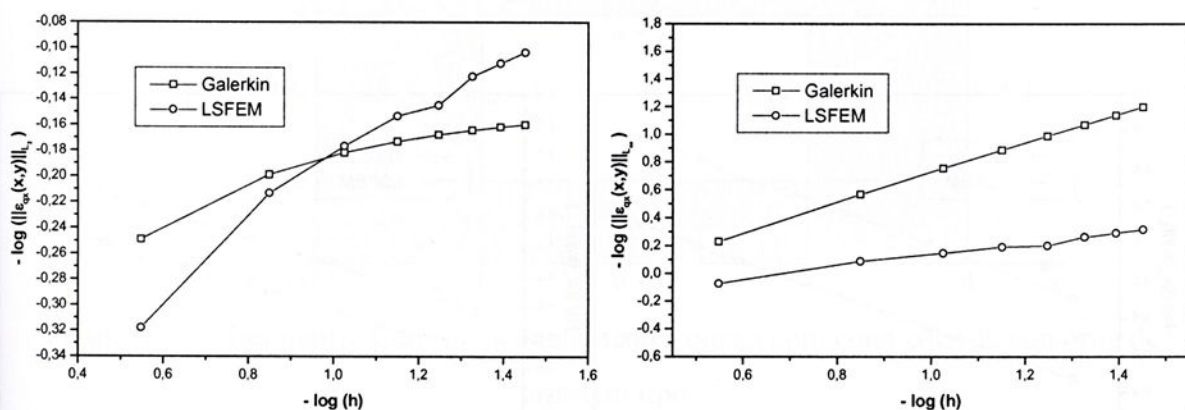


Figura 9.23a-b – Normas  $L_2$  (à esquerda) e  $L_\infty$  (à direita) do erro na solução numérica de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  para malhas com elementos triangulares com três nós.

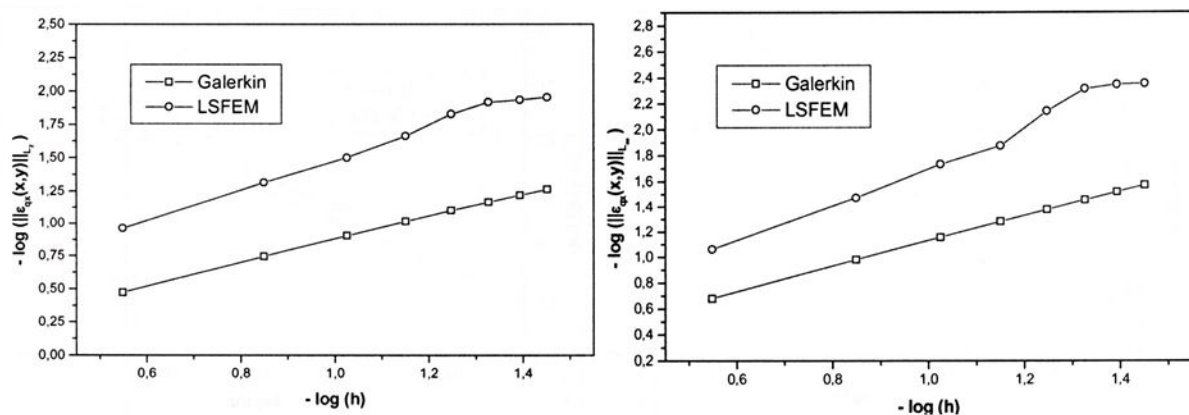


Figura 9.24a-b – Normas  $L_2$  (à esquerda) e  $L_\infty$  (à direita) do erro na solução numérica de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  para malhas com elementos triangulares com seis nós.

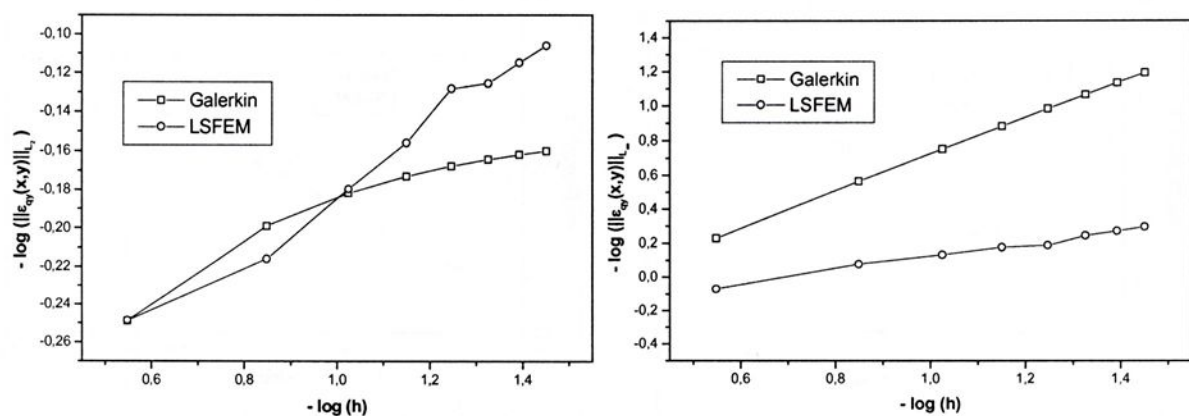


Figura 9.25a-b – Normas  $L_2$  (à esquerda) e  $L_\infty$  (à direita) do erro na solução numérica de  $\frac{\partial u}{\partial y}$  para malhas com elementos triangulares com três nós.

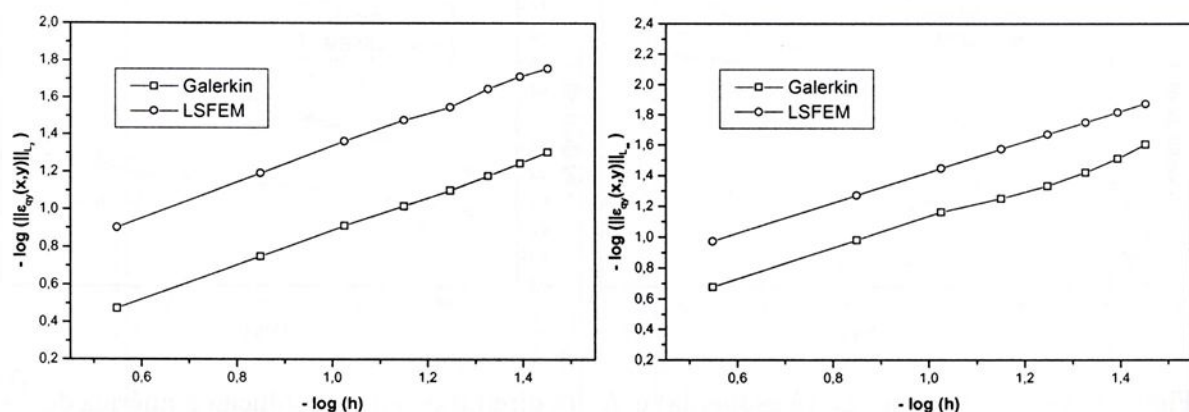


Figura 9.26a-b – Normas  $L_2$  (à esquerda) e  $L_\infty$  (à direita) do erro na solução numérica de  $\frac{\partial u}{\partial y}$  para malhas com elementos triangulares com seis nós.

A partir da análise das figuras 9.21 à 9.26 pode-se concluir que nesta aplicação o Método dos Mínimos Quadrados apresentou os melhores resultados, visto que para as normas dos erros na solução de  $u$  o Método de Galerkin só apresentou melhores resultados para malhas com elementos triangulares com três nós, pois, quando foi utilizado elementos com seis nós, ambos os métodos obtiveram resultados semelhantes. Entretanto, para as normas dos erros nas soluções de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  e  $\frac{\partial u}{\partial y}$  o Método dos Mínimos Quadrados apresentou em todos os casos os melhores resultados. Vale ressaltar que a utilização de elementos com seis nós apresentou melhores resultados do que com elementos com três nós.

### Aplicação 3: Difusão Pura em uma geometria duplamente conexa

As aplicações 3, 4 e 5, tratam de problemas em geometrias duplamente conexas, aplicação 3, e multiplamente conexas, aplicações 4 e 5. Os resultados são comparados com simulações numéricas pelo software Ansys (1994).

**Equação Governante:** 
$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

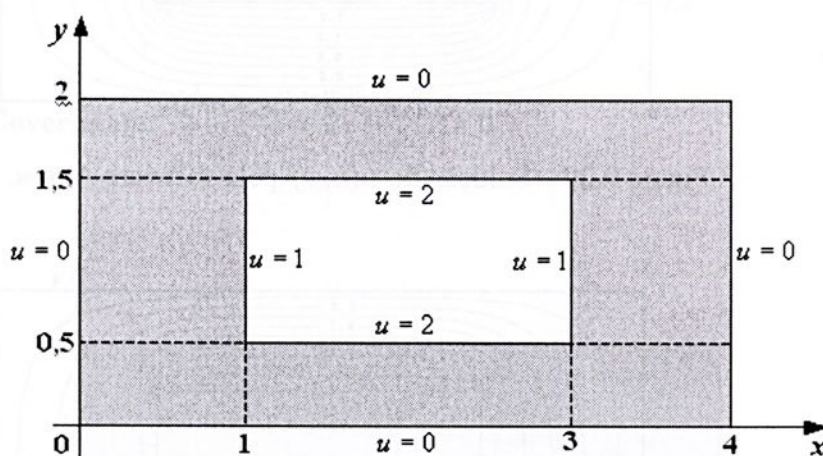


Figura 9.27 – Geometria Cartesiana duplamente conexa com condições de contorno de primeiro tipo

Nesta aplicação, apresenta-se um problema puramente difusivo com todas condições de contorno do tipo função prescrita. A geometria do domínio é definida como duplamente conexa. Essa definição é devido ao fato de a geometria possuir dois contornos, um externo e



outro interno. A malha utilizada para solução deste problema contém 726 elementos quadrilaterais com oito nós cada. Para este caso não foi utilizado elementos contendo a mesma área e formato, Figura 9.28.

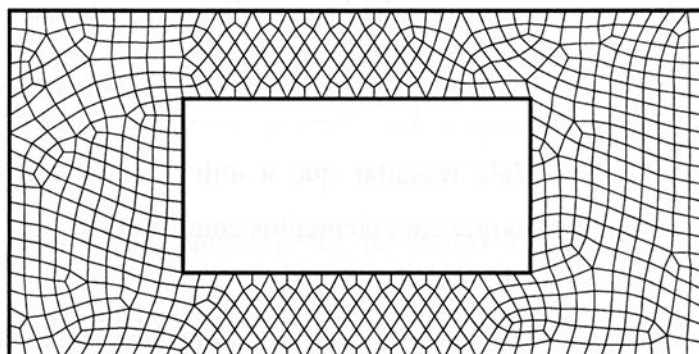


Figura 9.28 – Malha com 726 elementos quadrilaterais

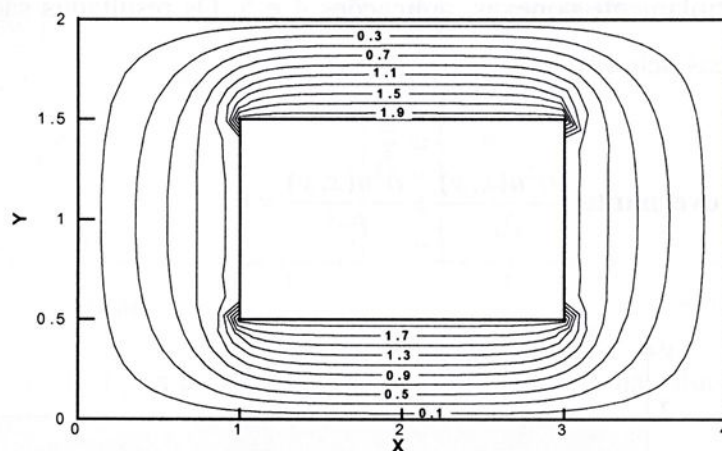


Figura 9.29 – Solução de  $u(x, y)$  pelo software Ansys.

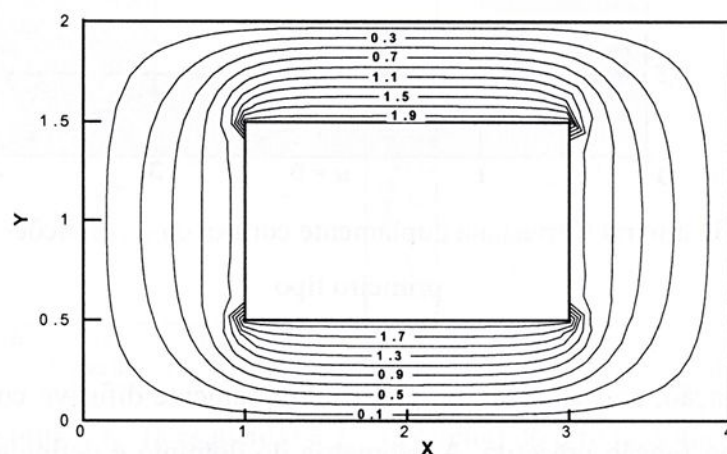


Figura 9.30 – Isotermas – Solução numérica de  $u(x, y)$  pelo Método de Galerkin



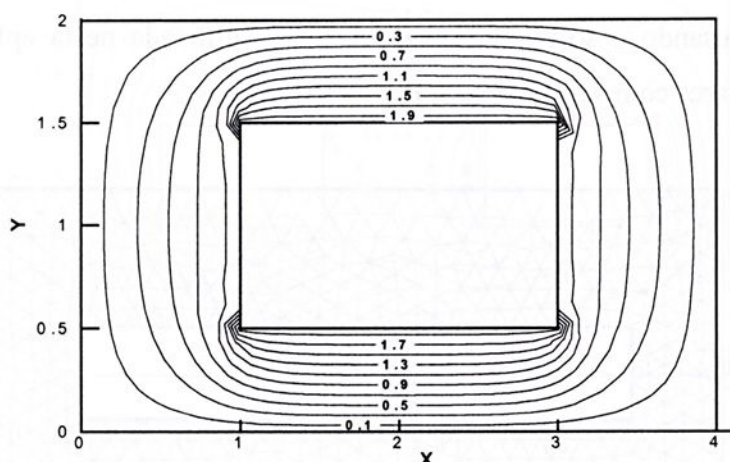


Figura 9.31 – Solução numérica de  $u(x, y)$  pelo Método dos Mínimos Quadrados

Como pode ser visto nas figuras 9.29 a 9.31, os Métodos de Galerkin e dos Mínimos Quadrados apresentam resultados semelhantes ao do software Ansys.

#### Aplicação 4: Difusão Pura em uma geometria multiplamente conexa

Esta aplicação tem como objetivo apresentar um caso parecido com o da aplicação 3, mas com uma geometria cartesiana multiplamente conexa, definição essa em razão do domínio do problema possuir um contorno externo e dois contornos internos.

**Equação Governante:** 
$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

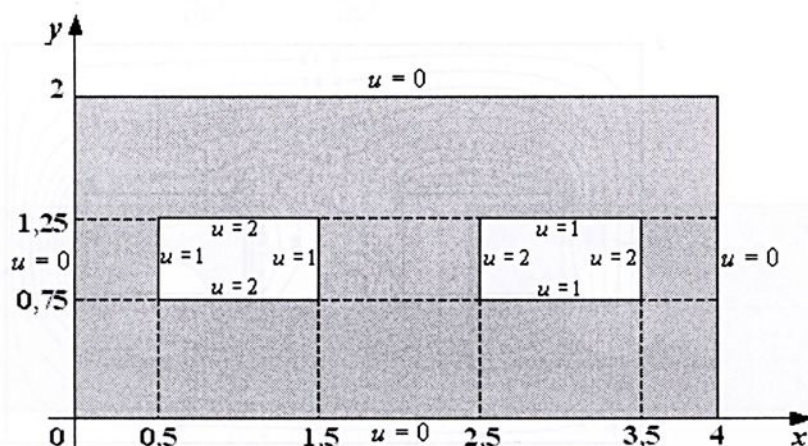


Figura 9.32 – Geometria Cartesiana multiplamente conexa com condições de contorno de primeiro tipo

Da mesma maneira que na aplicação 3, os resultados numéricos são comparados com a solução obtida usando o software Ansys. A malha utilizada nesta aplicação possui 966 elementos triangulares com seis nós cada, Figura 9.33.

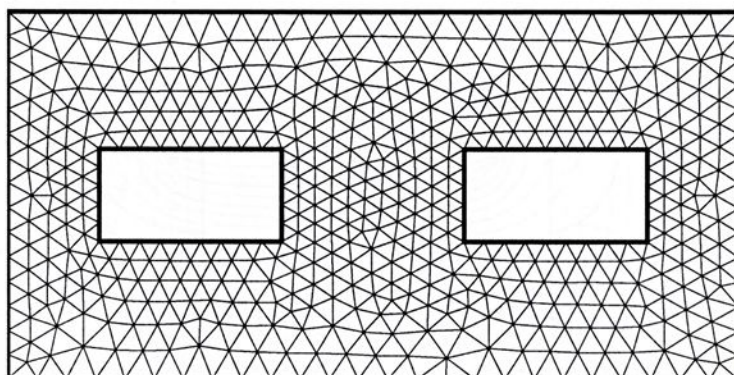


Figura 9.33 – Malha com 966 elementos triangulares

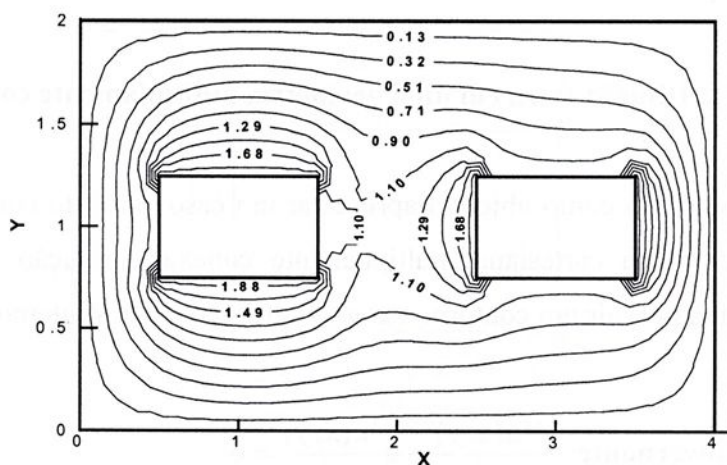


Figura 9.34 – Solução numérica de  $u(x, y)$  pelo software Ansys

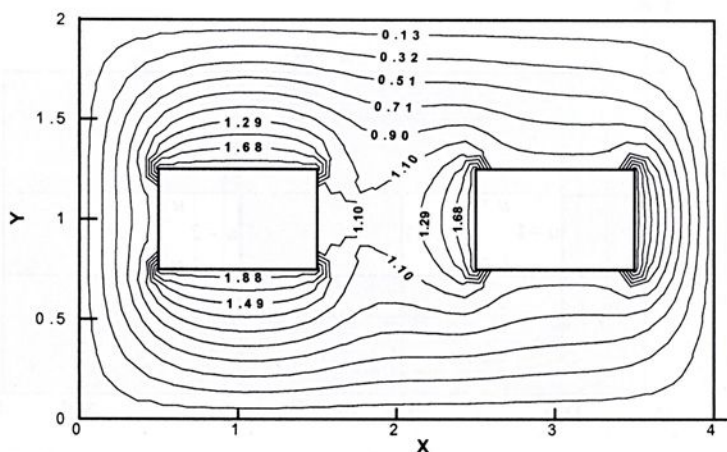


Figura 9.35 – Solução numérica de  $u(x, y)$  pelo Método de Galerkin



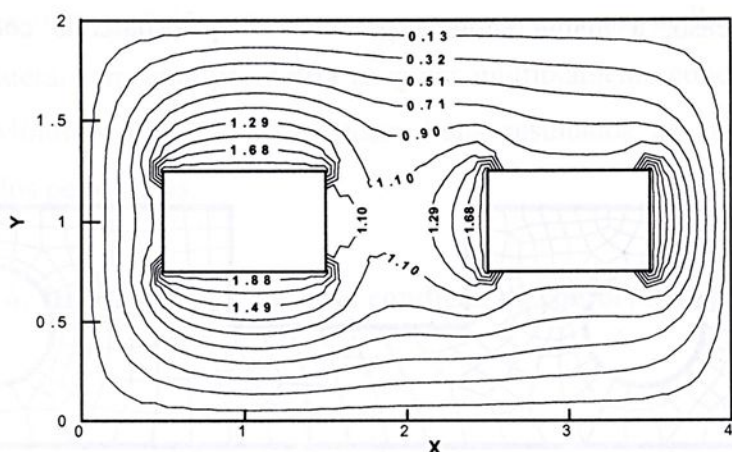


Figura 9.36 – Solução numérica de  $u(x, y)$  pelo Método dos Mínimos Quadrados

Os resultados numéricos apresentados nas figuras 7.35 e 7.36 comparados com a solução pelo Ansys, Figura 7.34, mostram que os Métodos de Galerkin e dos Mínimos Quadrados novamente apresentam bons resultados para a geometria cartesiana multiplamente conexa.

#### Aplicação 5: Difusão Pura com termo fonte em uma geometria irregular multiplamente conexa

Esta aplicação tem como principal objetivo verificar a performance dos Métodos de Galerkin e dos Mínimos Quadrados para solução de problemas dispostos em geometrias irregulares multiplamente conexas.

**Equação Governante:**  $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 7$

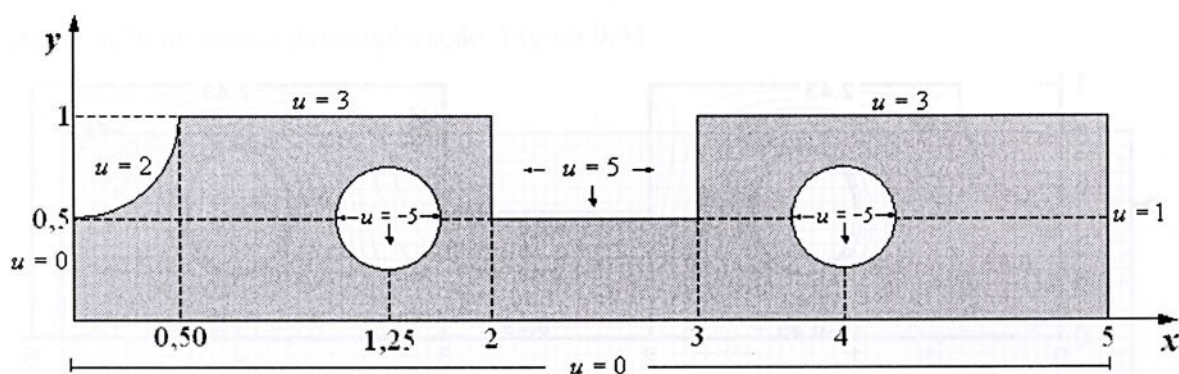


Figura 9.37 – Geometria irregular multiplamente conexa com condições de contorno de primeiro tipo.

Para este caso, a malha adotada possui 451 quadriláteros com oito nós cada, Figura 9.38.

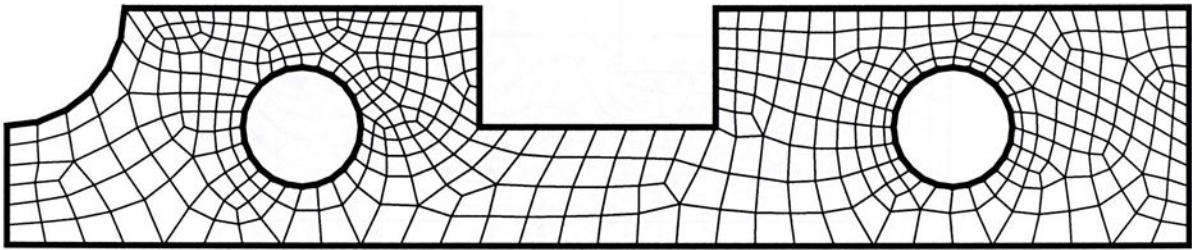


Figura 9.38 – Malha com 451 elementos quadriláteros.

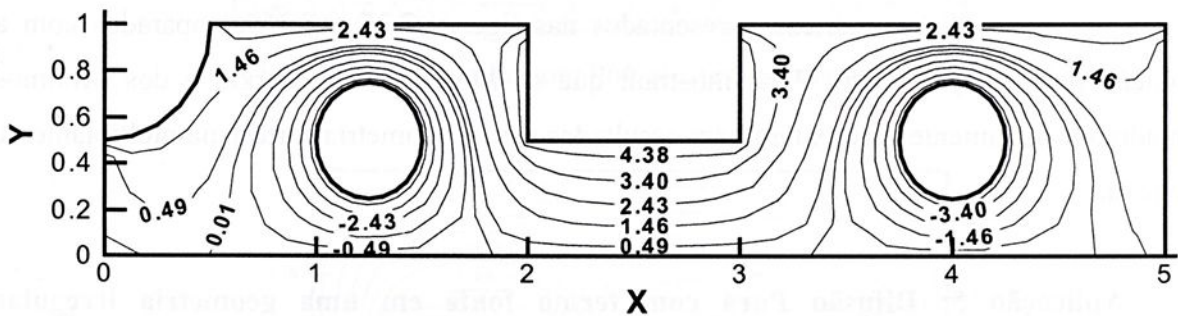


Figura 9.39 – Solução numérica de  $u(x, y)$  utilizando o software Ansys.

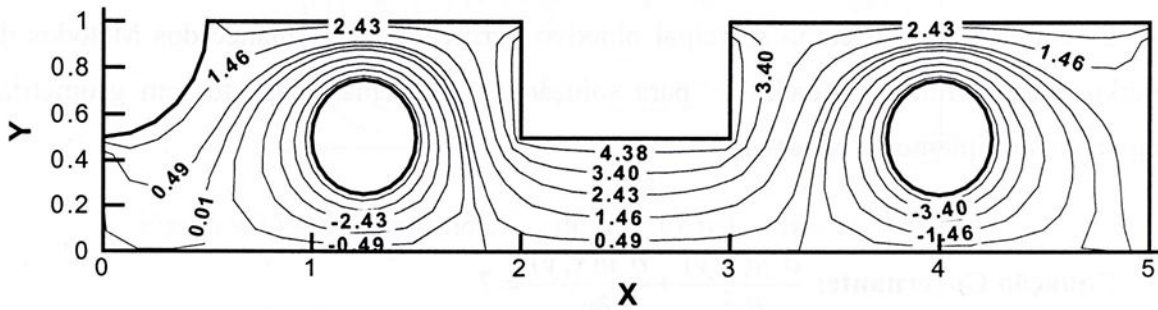


Figura 9.40 – Solução numérica de  $u$  pelo Método de Galerkin.

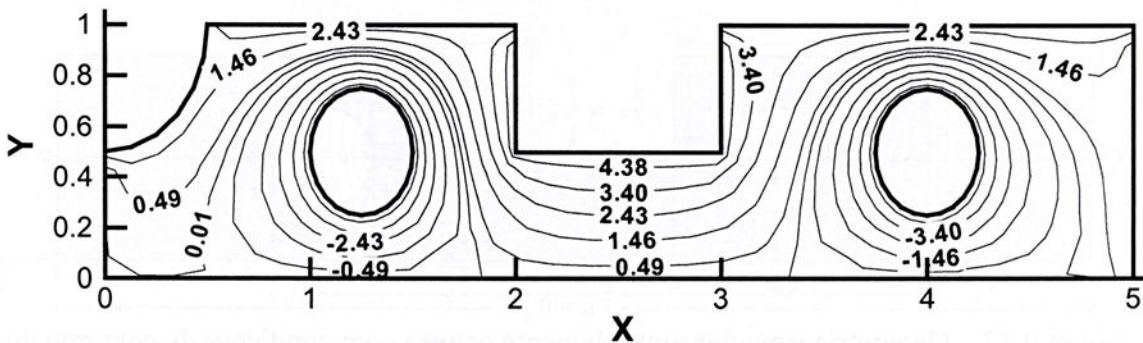


Figura 9.41 – Solução numérica de  $u$  pelo Método de Mínimos Quadrados.



Nas figuras 9.39 a 9.41 nota-se que mesmo com uma malha com apenas 451 elementos quadrilaterais em uma geometria irregular multiplamente conexa, os Métodos de Galerkin e dos Mínimos Quadrados fornecem bons resultados se comparados com os resultados fornecidos pelo Ansys.

#### **Aplicação 6: Difusão Pura com uma condição de contorno do tipo fluxo prescrito não nulo**

Para finalizar os casos difusivos em regime permanente, a aplicação 6, trata-se de um caso com duas das condições de contorno sendo de fluxo prescrito, um nulo e outro não nulo.

**Equação Governante:** 
$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} - 10u(x, y) = 0$$

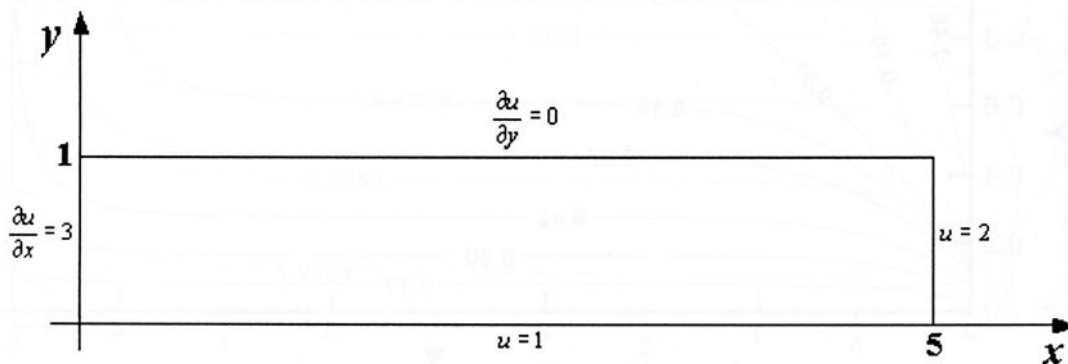


Figura 9.42 – Geometria Cartesiana com condições de contorno de primeiro e segundo tipo.

Nesta aplicação, duas das condições de contorno são de fluxo prescrito, sendo uma delas de fluxo prescrito não nulo, característica essa que as aplicações de 1 a 5 não apresentaram. Uma malha com 2000 elementos quadrilaterais com 8 nós cada foi adotada para solução numérica desta aplicação, Figura 9.43.

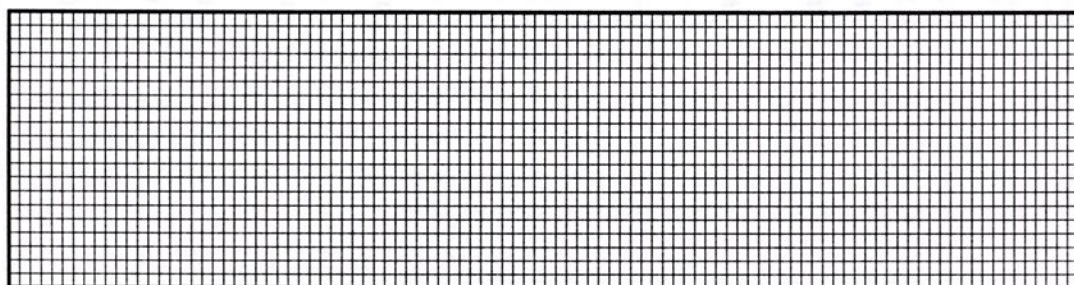


Figura 9.43 – Malha contendo 2000 elementos quadrilaterais com 8 nós cada.

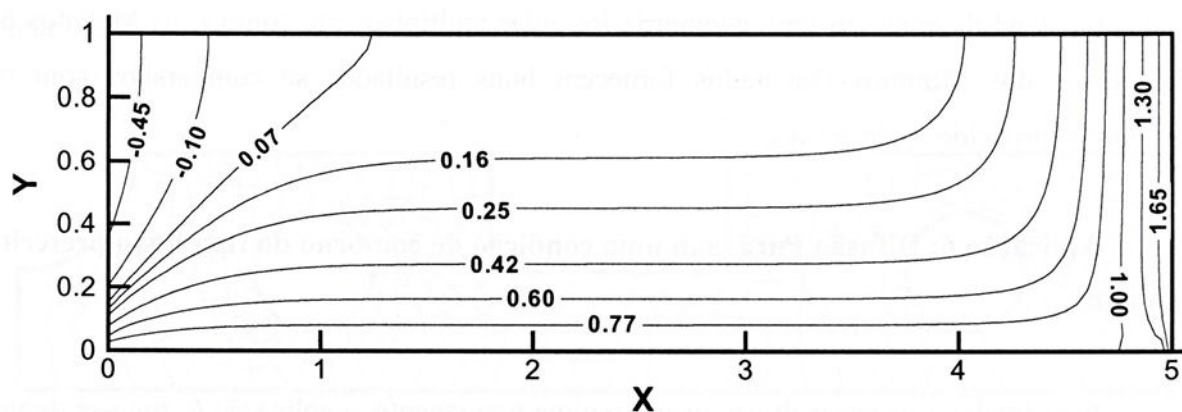


Figura 9.44 – Solução numérica de  $u(x, y)$  pelo Método de Galerkin.

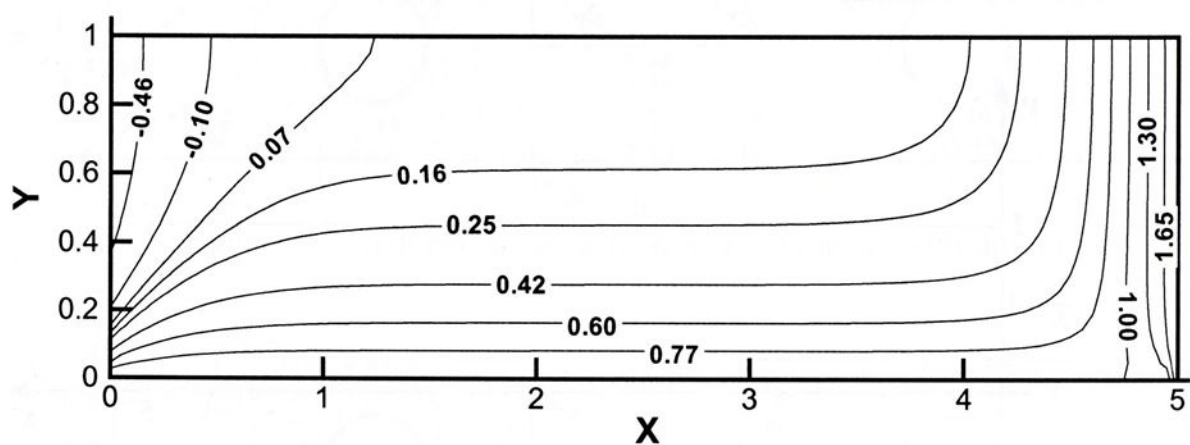


Figura 9.45 – Solução numérica de  $u(x, y)$  pelo Método dos Mínimos Quadrados.

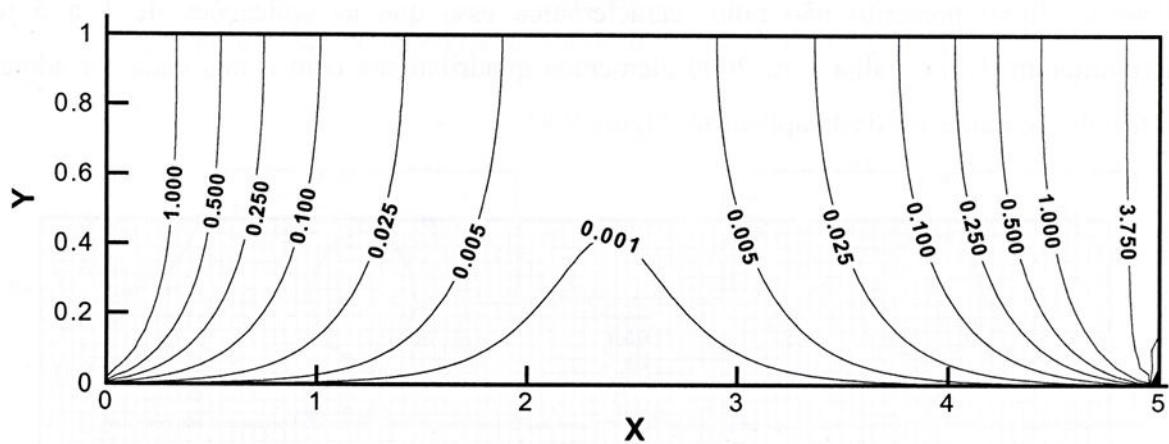


Figura 9.46 – Solução Numérica de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  pelo Método de Galerkin.

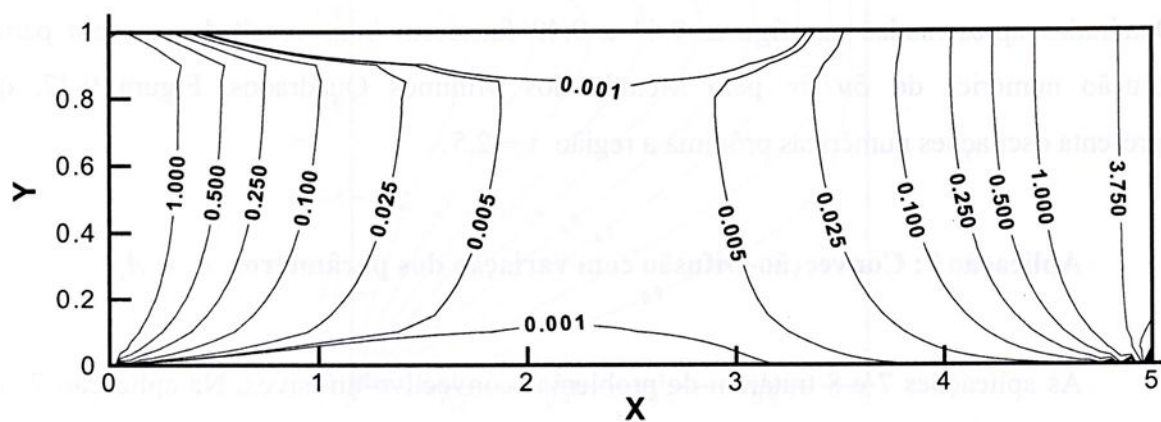


Figura 9.47 – Solução numérica de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  pelo Método dos Mínimos Quadrados.

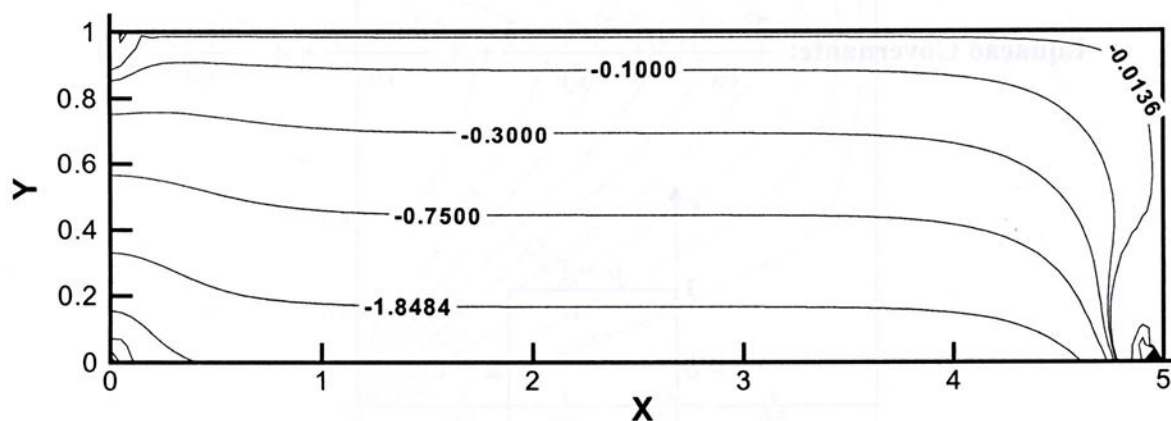


Figura 9.48 – Solução numérica de  $\frac{\partial u}{\partial y}$  pelo Método de Galerkin.

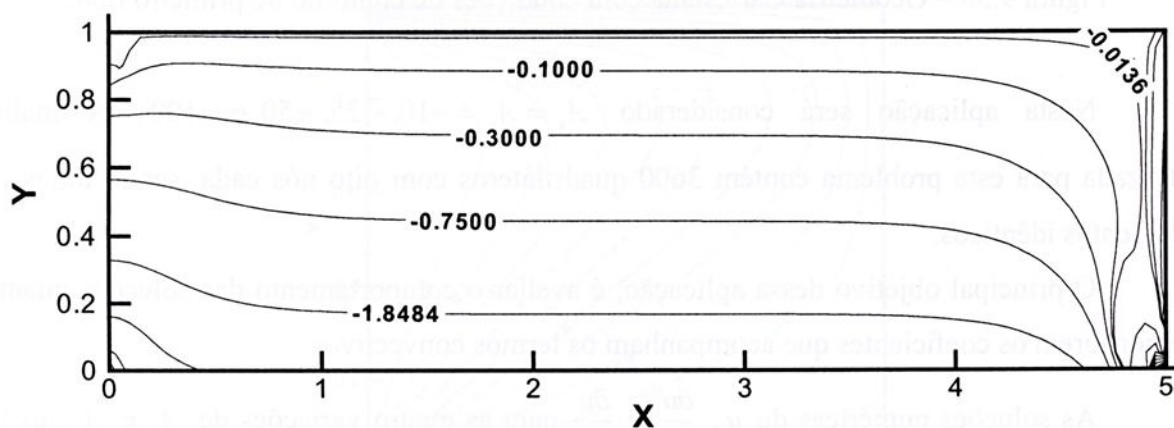


Figura 9.49 – Solução numérica de  $\frac{\partial u}{\partial y}$  pelo Método dos Mínimos Quadrados.



A soluções numéricas de  $u$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}$  e  $\frac{\partial u}{\partial y}$  pelos Métodos de Galerkin e dos Mínimos Quadrados apresentadas nas figuras 9.44 a 9.49 fornecem bons resultados, exceto para a solução numérica de  $\partial u / \partial x$  pelo Método dos Mínimos Quadrados, Figura 9.47, que apresenta oscilações numéricas próxima a região  $x = 2,5$ .

#### Aplicação 7: Convecção-Difusão com variação dos parâmetros $A_x$ e $A_y$

As aplicações 7 e 8 trataram de problemas convectivo-difusivos. Na aplicação 7 será fixada uma malha e variado os parâmetros físicos,  $A_x$  e  $A_y$ , já ao contrário, na aplicação 8 será fixado todos os parâmetros físicos e variado a malha.

**Equação Governante:** 
$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + A_x \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + A_y \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 0$$

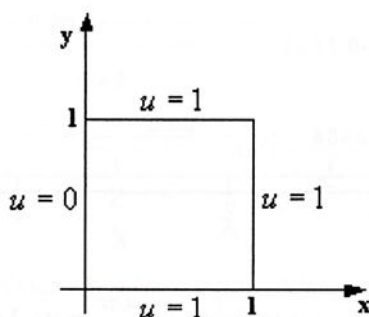


Figura 9.50 – Geometria Cartesiana com condições de contorno de primeiro tipo.

Nesta aplicação será considerado  $A_x = A_y = -10, -25, -50$  e  $-100$ . A malha utilizada para este problema contém 3600 quadriláteros com oito nós cada, sendo todos os elementos idênticos.

O principal objetivo dessa aplicação, é avaliar o comportamento das soluções quanto maior forem os coeficientes que acompanham os termos convectivos.

As soluções numéricas de  $u$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}$  e  $\frac{\partial u}{\partial y}$  para as quatro variações de  $A_x$  e  $A_y$ , estão apresentadas nas figuras 9.51 a 9.74.



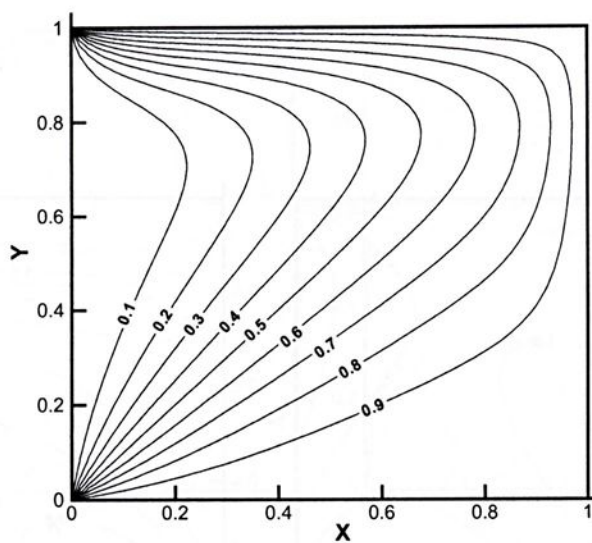


Figura 9.51 Solução numérica de  $u(x, y)$  pelo Método de Galerkin para  $A_x = A_y = -10$ .

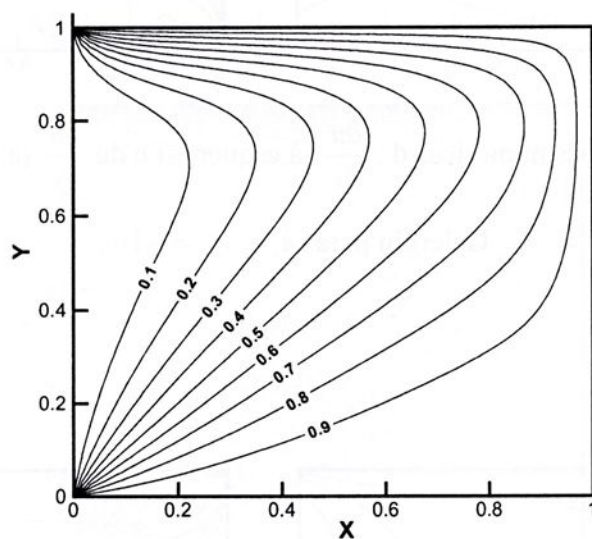


Figura 9.52 – Solução numérica de  $u(x, y)$  pelo Método Petrov-Galerkin para  $A_x = A_y = -10$

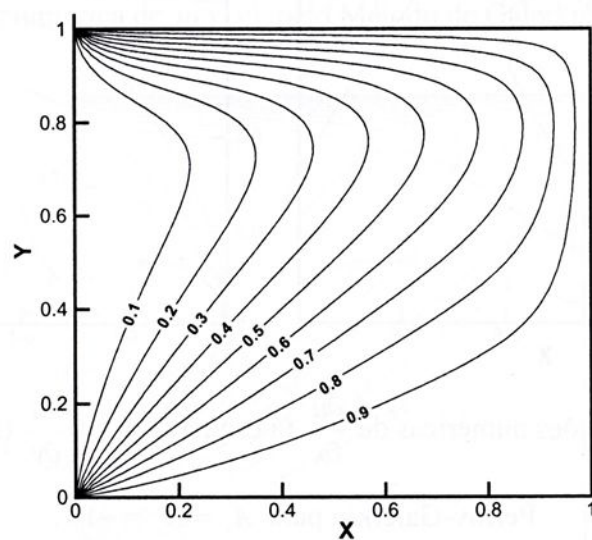


Figura 9.53 – Solução numérica de  $u(x, y)$  pelo Método dos Mínimos Quadrados para  $A_x = A_y = -10$ .

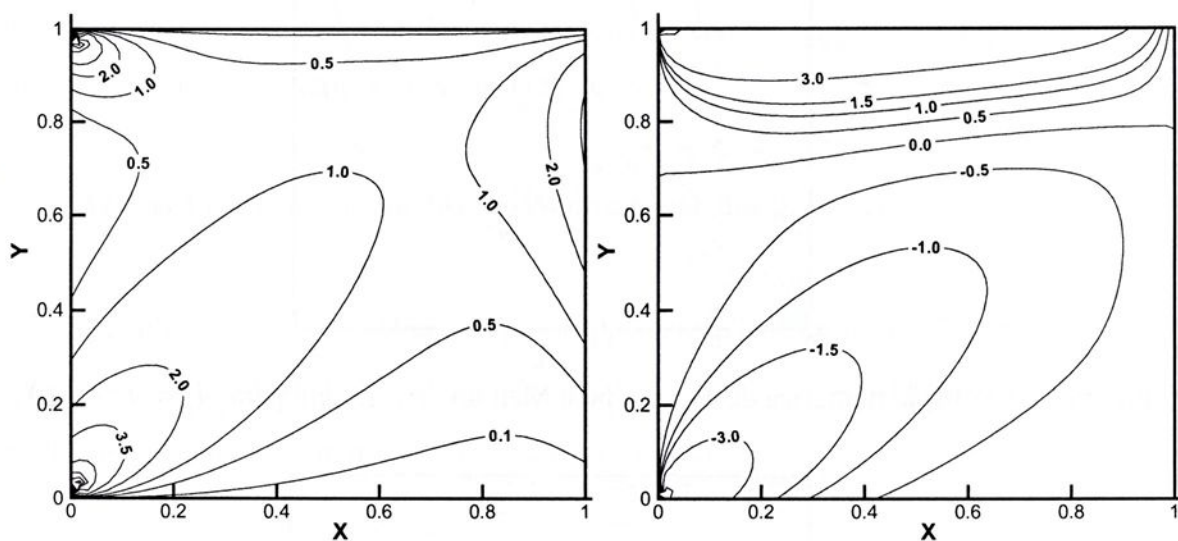


Figura 9.54a-b – Soluções numéricas de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  (à esquerda) e de  $\frac{\partial u}{\partial y}$  (à direita) pelo Método de Galerkin para  $A_x = A_y = -10$ .

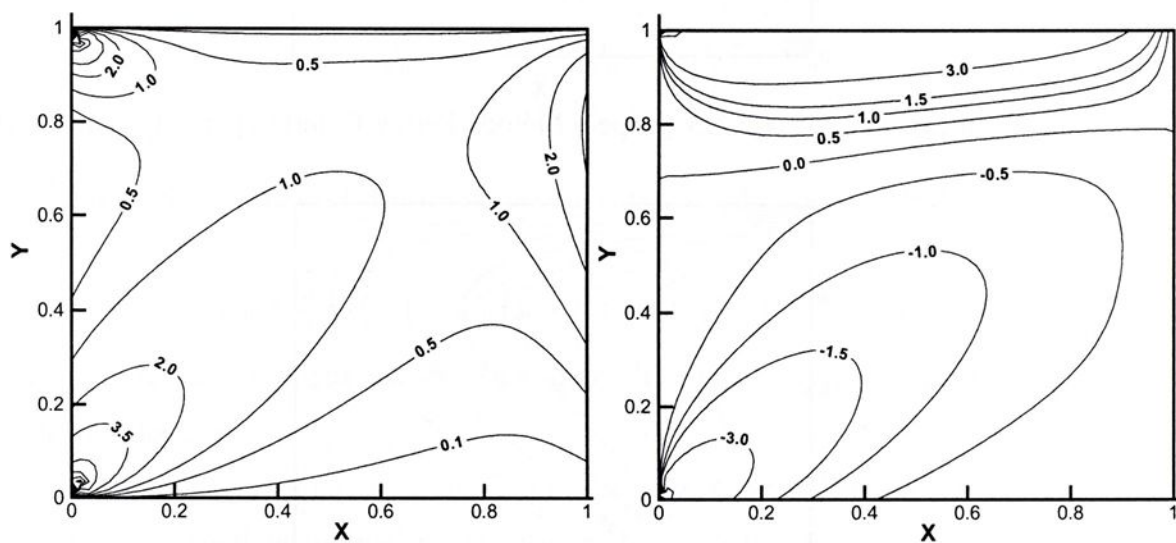


Figura 9.55a-b – Soluções numéricas de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  (à esquerda) e de  $\frac{\partial u}{\partial y}$  (à direita) pelo Método Petrov-Galerkin para  $A_x = A_y = -10$ .

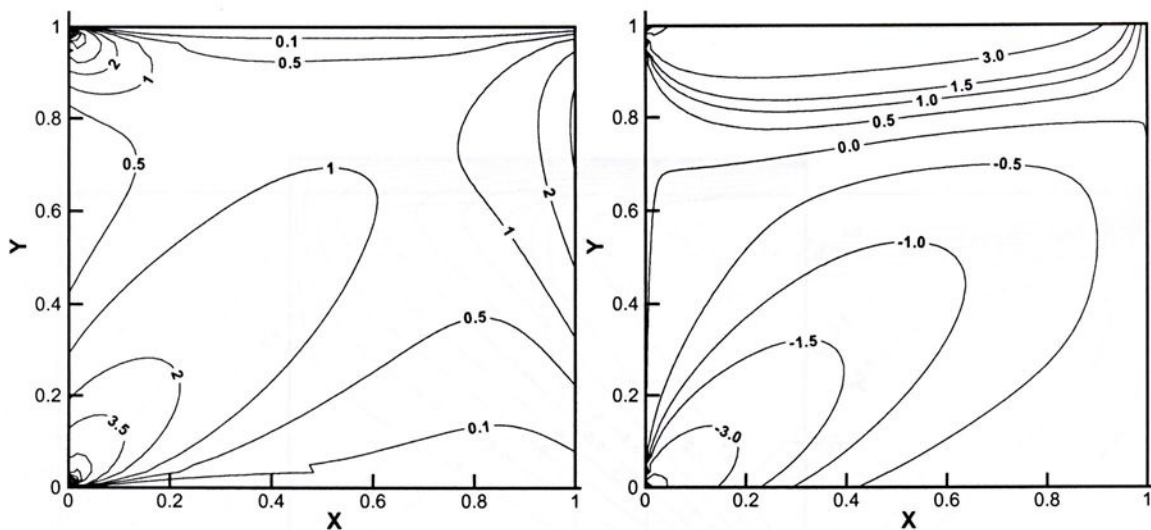


Figura 9.56a-b – Soluções numéricas de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  (à esquerda) e de  $\frac{\partial u}{\partial y}$  (à direita) pelo Método dos Mínimos Quadrados para  $A_x = A_y = -10$ .

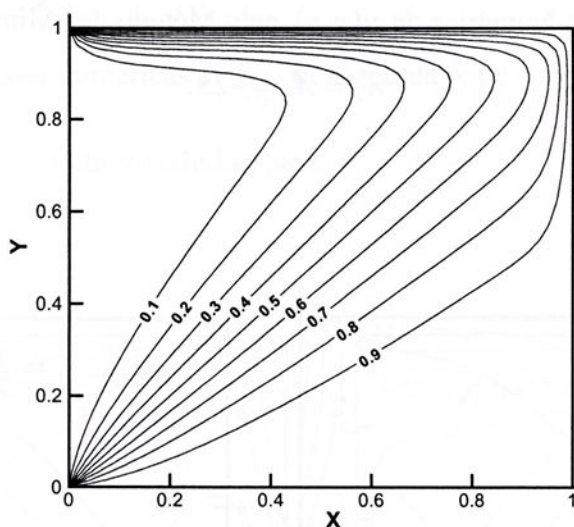


Figura 9.57 Solução Numérica de  $u(x,y)$  pelo Método de Galerkin para  $A_x = A_y = -25$ .

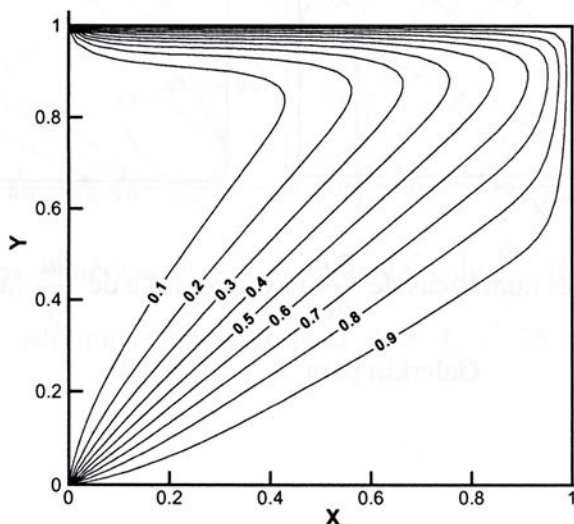


Figura 9.58 Solução Numérica de  $u(x,y)$  pelo Método Petrov-Galerkin para  $A_x = A_y = -25$ .

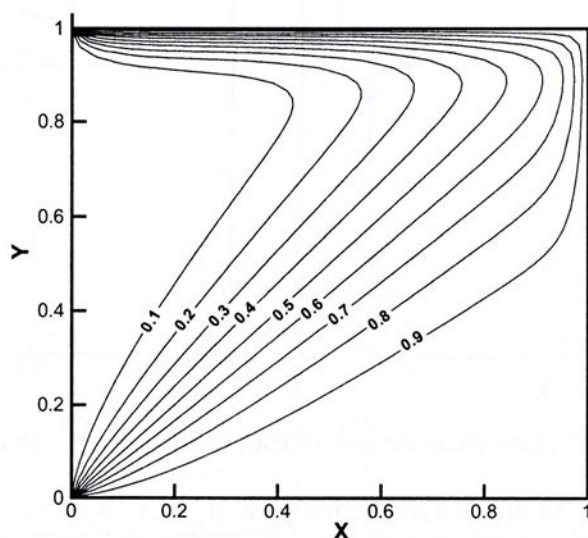


Figura 9.59 – Solução Numérica de  $u(x, y)$  pelo Método dos Mínimos Quadrados para  $A_x = A_y = -25$ .

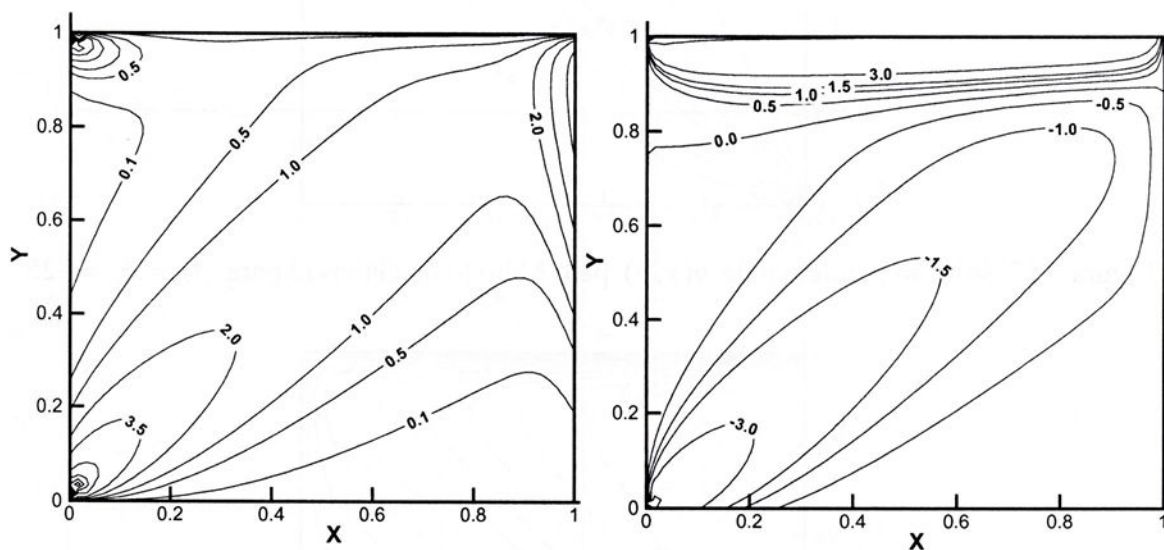


Figura 9.60a-b – Soluções numéricas de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  (à esquerda) e de  $\frac{\partial u}{\partial y}$  (à direita) pelo Método de Galerkin para  $A_x = A_y = -25$ .



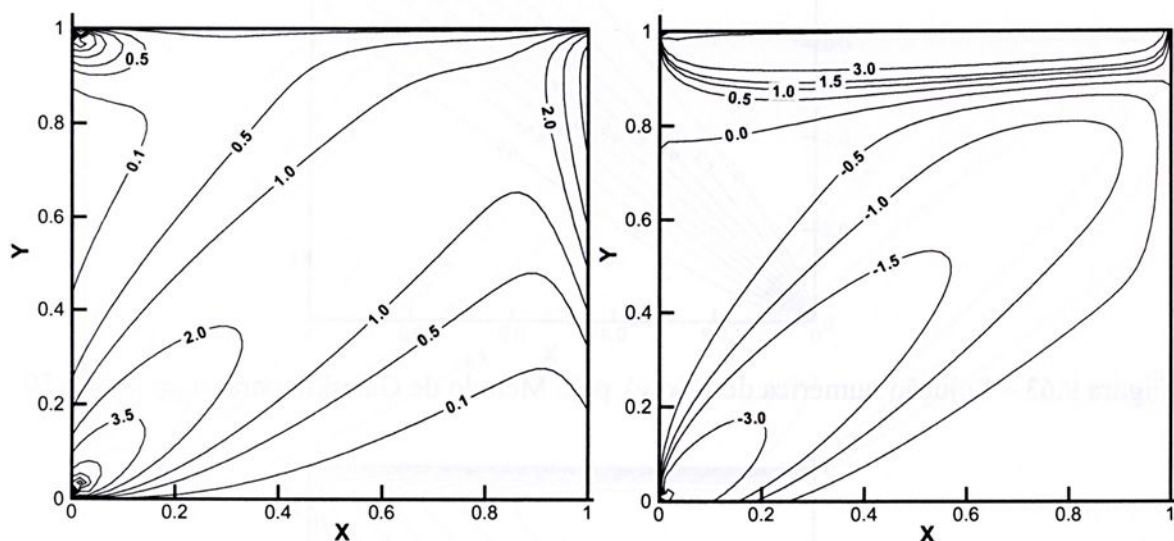


Figura 9.61a-b – Soluções numéricas de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  (à esquerda) e de  $\frac{\partial u}{\partial y}$  (à direita) pelo Método Petrov-Galerkin para  $A_x = A_y = -25$ .

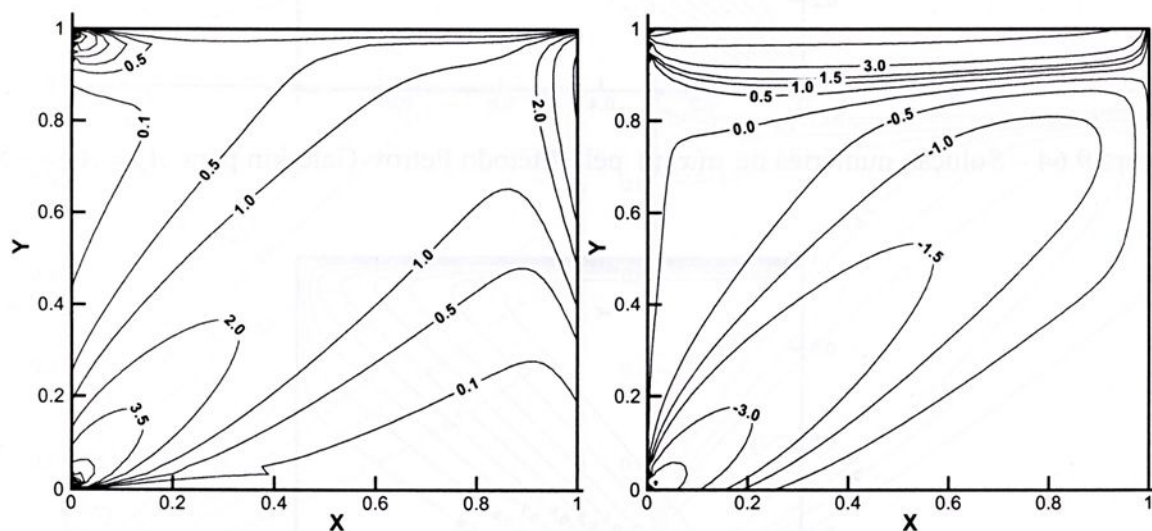


Figura 9.62a-b – Soluções numéricas de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  (à esquerda) e de  $\frac{\partial u}{\partial y}$  (à direita) pelo Método dos Mínimos Quadrados para  $A_x = A_y = -25$ .

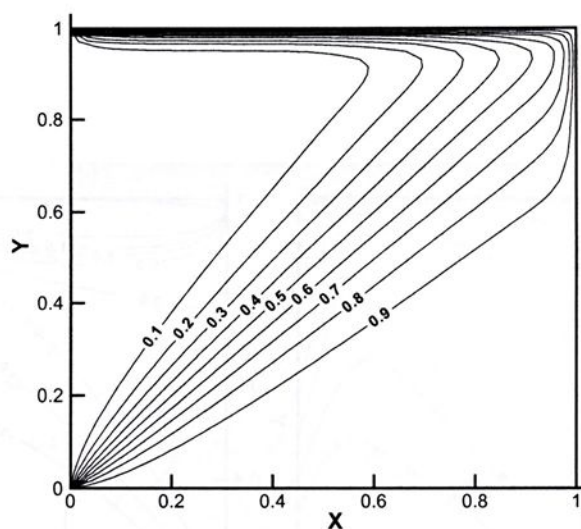


Figura 9.63 – Solução numérica de  $u(x, y)$  pelo Método de Galerkin para  $A_x = A_y = -50$ .

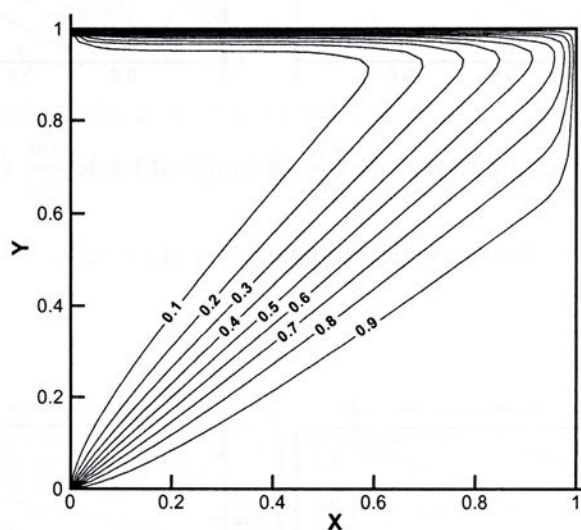


Figura 9.64 – Solução numérica de  $u(x, y)$  pelo Método Petrov-Galerkin para  $A_x = A_y = -50$ .

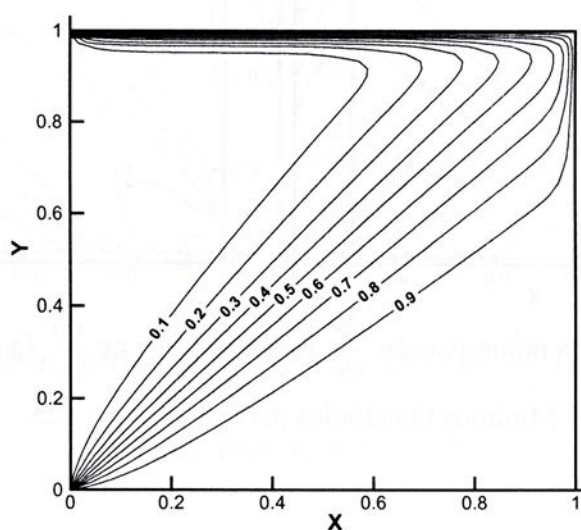


Figura 9.65 – Solução numérica de  $u(x, y)$  pelo Método dos Mínimos Quadrados para  $A_x = A_y = -50$ .

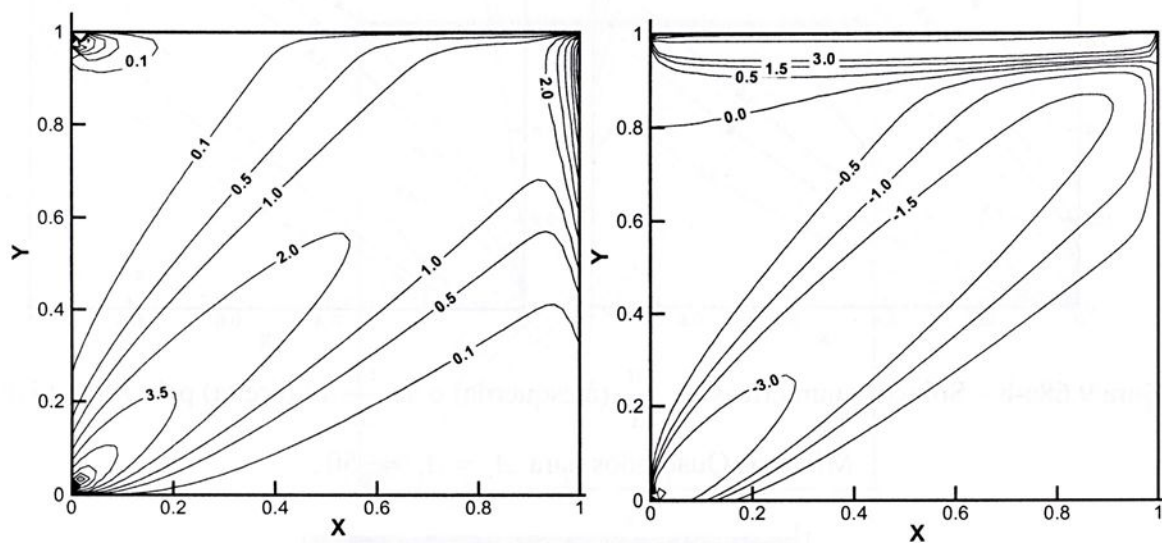


Figura 9.66a-b – Soluções numéricas de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  (à esquerda) e de  $\frac{\partial u}{\partial y}$  (à direita) pelo Método de Galerkin para  $A_x = A_y = -50$ .

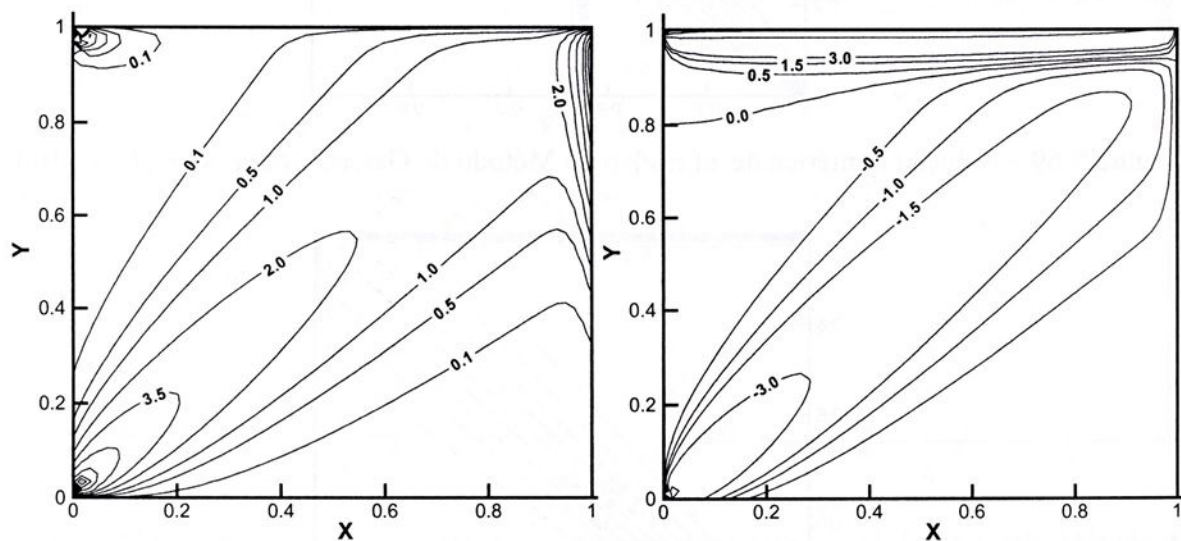


Figura 9.67a-b – Soluções numéricas de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  (à esquerda) e de  $\frac{\partial u}{\partial y}$  (à direita) pelo Método Petrov-Galerkin para  $A_x = A_y = -50$ .



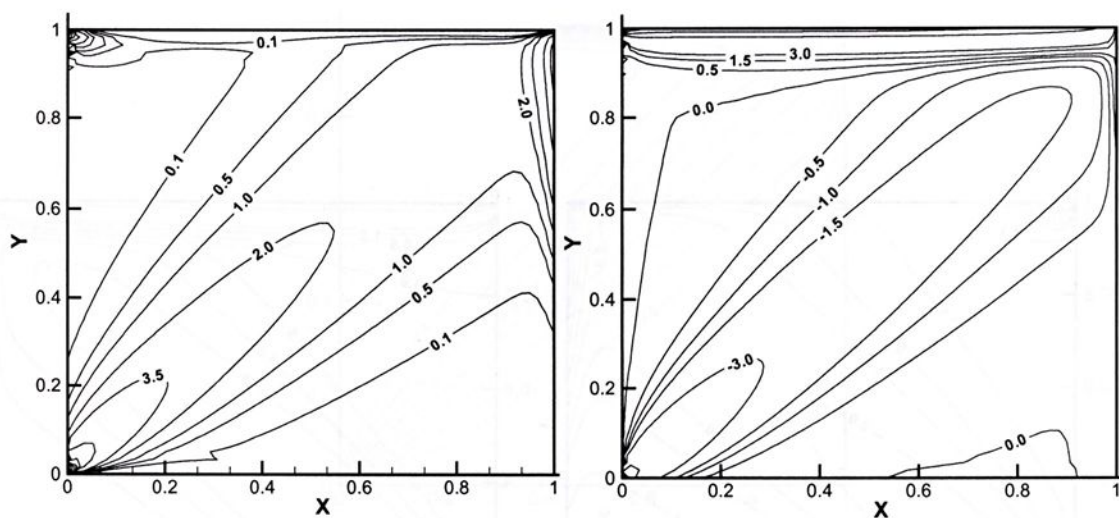


Figura 9.68a-b – Soluções numéricas de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  (à esquerda) e de  $\frac{\partial u}{\partial y}$  (à direita) pelo Método dos Mínimos Quadrados para  $A_x = A_y = -50$ .

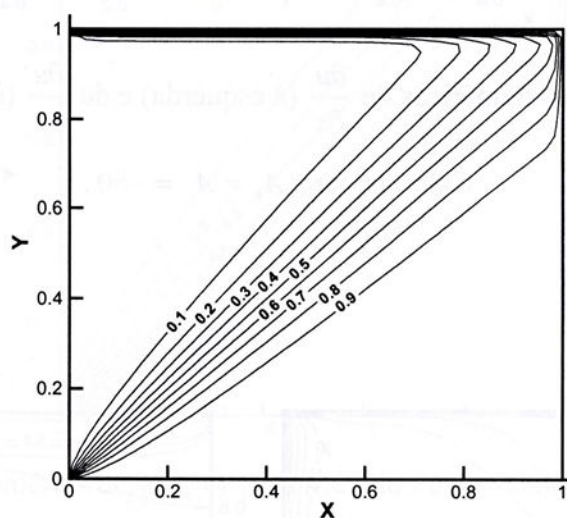


Figura 9.69 – Solução numérica de  $u(x,y)$  pelo Método de Galerkin para  $A_x = A_y = -100$ .

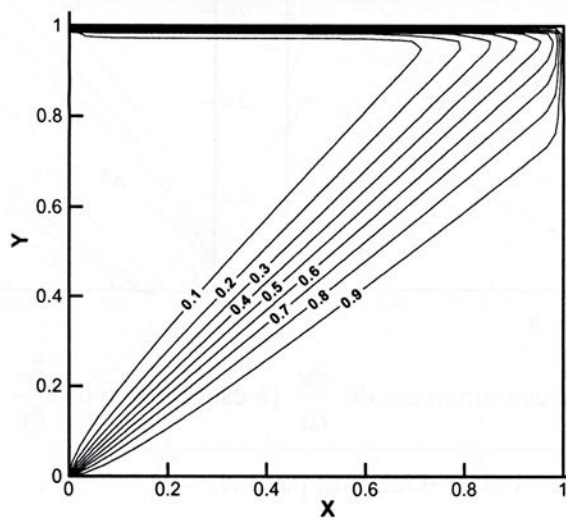


Figura 9.70 – Solução numérica de  $u(x,y)$  pelo Método Petrov-Galerkin para  $A_x = A_y = -100$ .



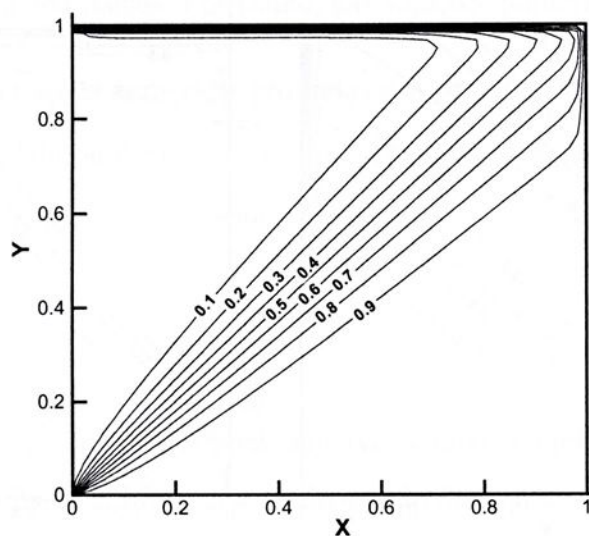


Figura 9.71 – Solução Numérica de  $u$  pelo Método dos Mínimos Quadrados para  $A_x = A_y = -100$ .

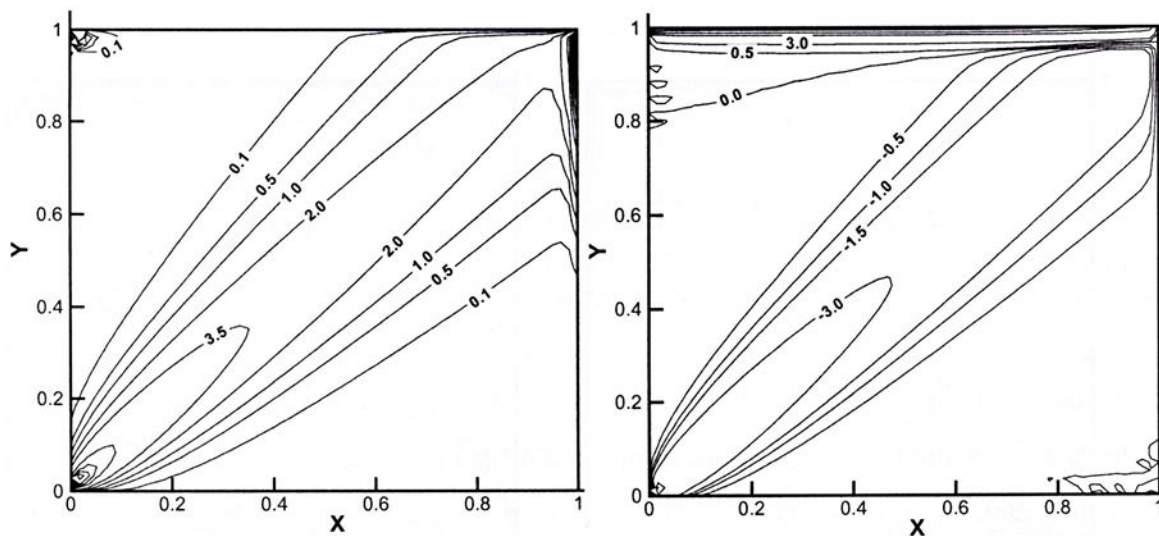


Figura 9.72a-b – Soluções numéricas de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  (à esquerda) e de  $\frac{\partial u}{\partial y}$  (à direita) pelo Método de Galerkin para  $A_x = A_y = -100$ .

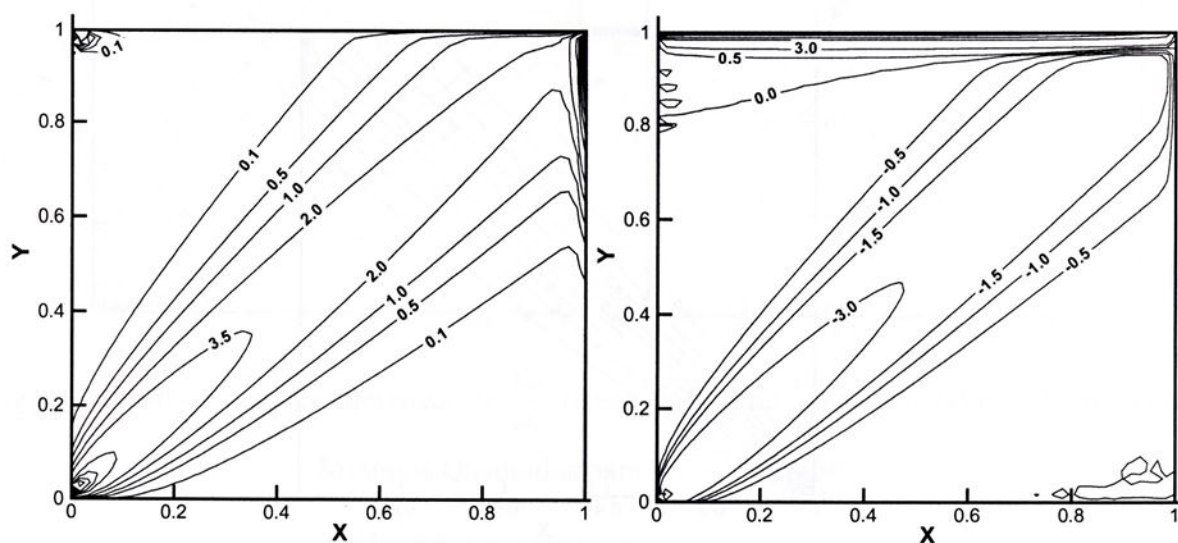


Figura 9.73a-b – Solução Numérica de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  (à esquerda) e de  $\frac{\partial u}{\partial y}$  (à direita) pelo Método Petrov-Galerkin para  $A_x = A_y = -100$ .

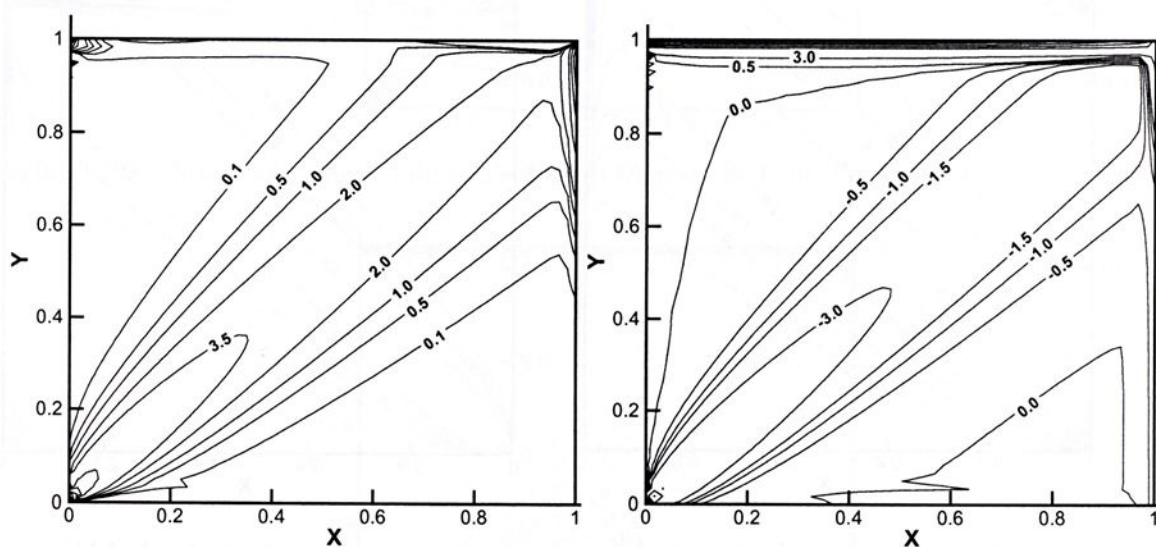


Figura 9.74a-b – Soluções numéricas de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  (à esquerda) e de  $\frac{\partial u}{\partial y}$  (à direita) pelo Método dos Mínimos Quadrados para  $A_x = A_y = -100$ .

De modo geral as soluções numéricas pelos Métodos de Galerkin, Petrov-Galerkin e dos Mínimos Quadrados não apresentam oscilações numéricas na solução de  $u$  em nenhuma das variações dos parâmetros físicos. Entretanto, nas soluções numéricas de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  e  $\frac{\partial u}{\partial y}$ , os três métodos apresentam oscilações numéricas próximas aos vértices  $(x, y) = (1, 0)$  e  $(x, y) = (0, 1)$  para  $A_x = A_y = -100$ . Vale também ressaltar que as regiões próximas aos vértices citados, são regiões de altos gradientes.

### Aplicação 8:

Essa aplicação tem como principal objetivo avaliar a melhoria na solução de um problema convectivo-difusivo em função do refinamento da malha.

**Equação Governante:** 
$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + 30 \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - 100 \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 0$$

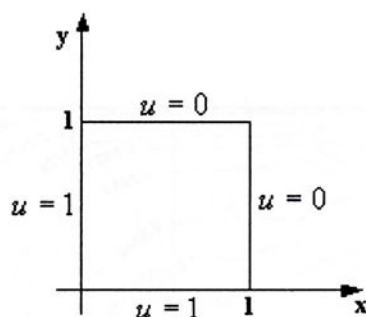


Figura 9.75 – Geometria Cartesiana com condições de contorno de primeiro tipo

Para tal análise serão adotadas malhas com 100, 900 e 2500 elementos quadrilaterais com oito nós cada, todos sendo quadriláteros quadrados idênticos. Para essas três malhas adotadas tem os valores  $h = 0,1$ ,  $h \approx 0,03$  e  $h = 0,02$ , respectivamente, para as malhas com 100, 900 e 2500 elementos quadrilaterais.

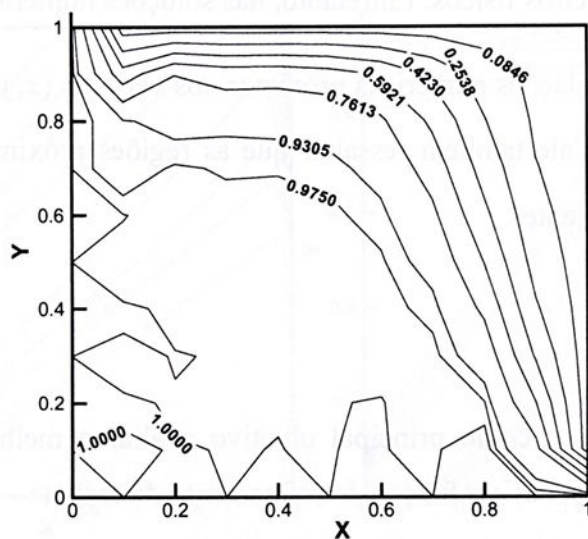


Figura 9.76 – Solução numérica de  $u(x, y)$  pelo Método de Galerkin para uma malha com 100 elementos quadrilaterais com 8 nós cada.

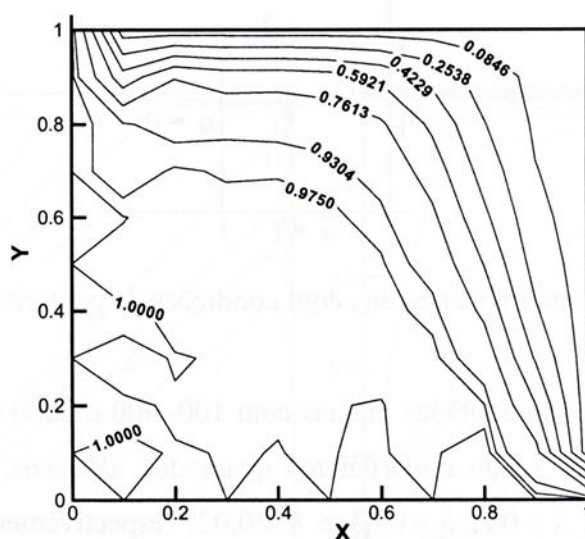


Figura 9.77 – Solução numérica de  $u(x, y)$  pelo Método Petrov-Galerkin para uma malha com 100 elementos quadrilaterais com 8 nós cada.



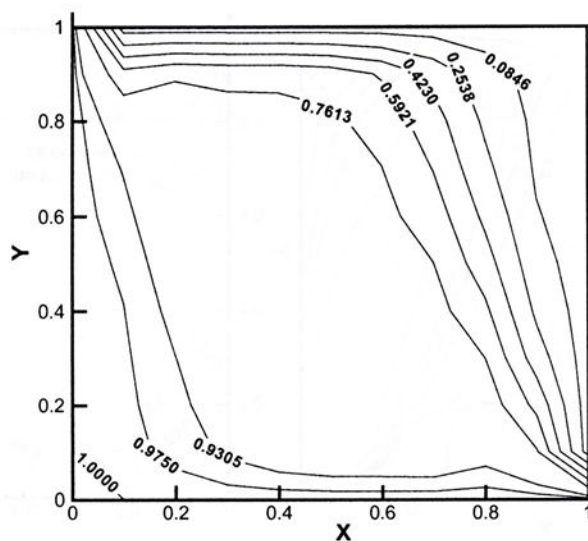


Figura 9.78 – Solução numérica de  $u(x, y)$  pelo Método dos Mínimos Quadrados para uma malha com 100 elementos quadrilaterais com 8 nós cada.

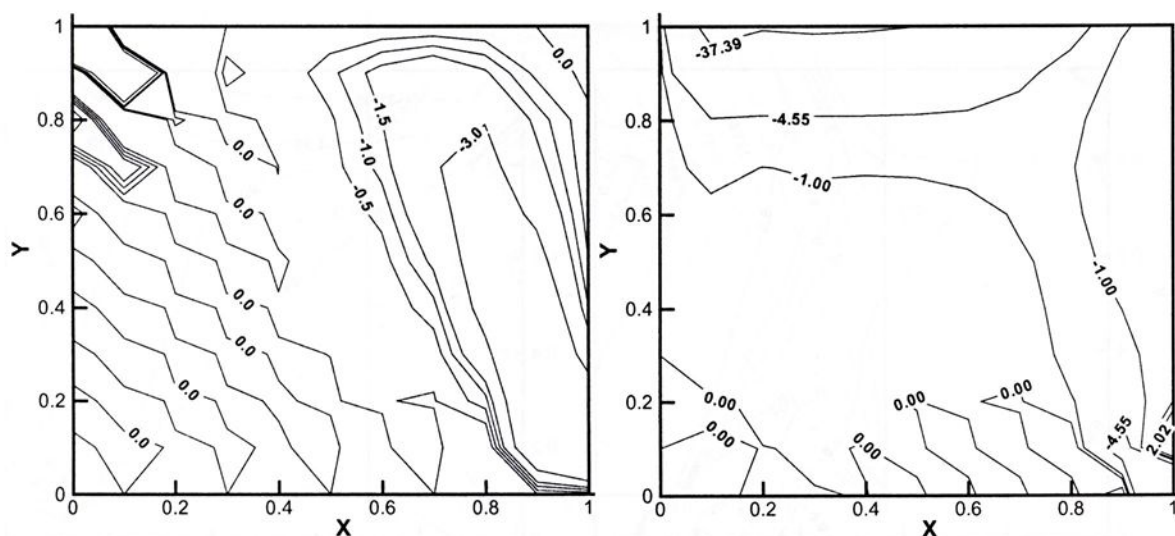


Figura 9.79a-b – Soluções numéricas de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  (à esquerda) e  $\frac{\partial u}{\partial y}$  (à direita) pelo Método de Galerkin para uma malha com 100 elementos quadrilaterais com 8 nós cada.

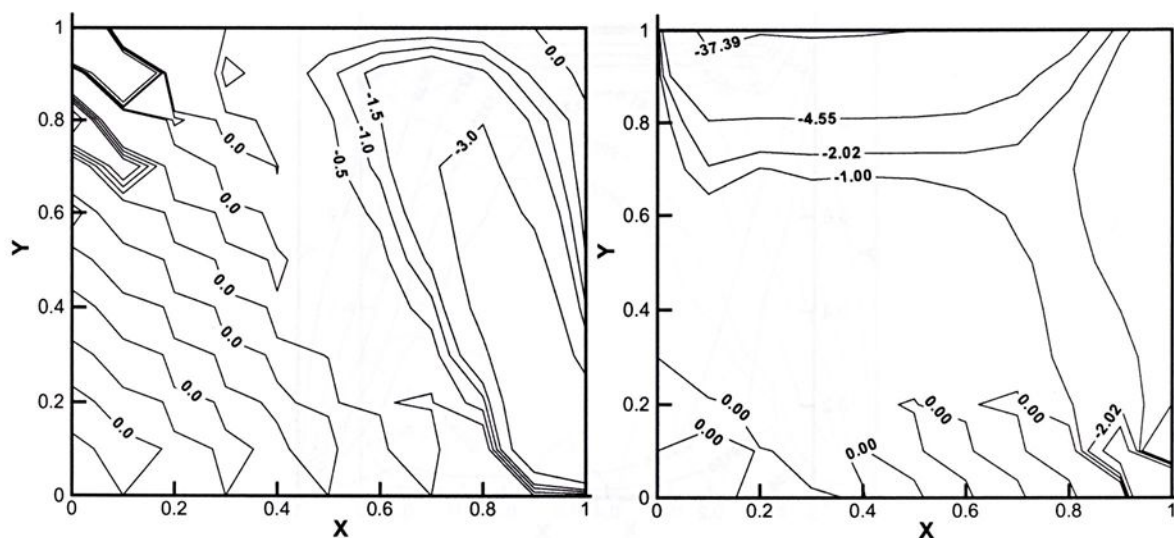


Figura 9.80a-b – Soluções numéricas de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  (à esquerda) e  $\frac{\partial u}{\partial y}$  (à direita) pelo Método Petrov-Galerkin para uma malha com 100 elementos quadrilaterais com 8 nós cada.

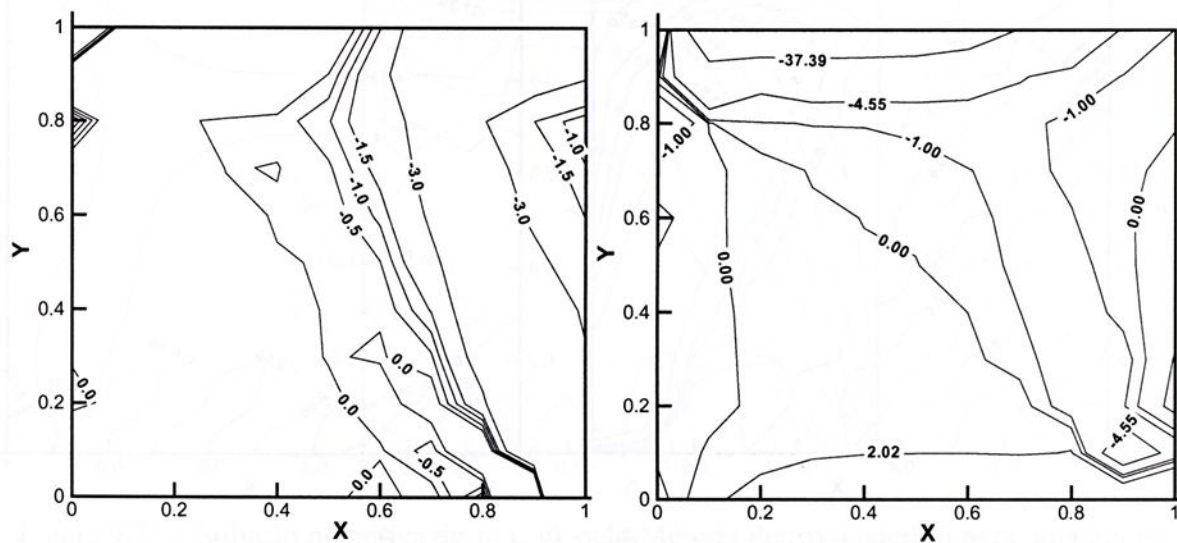


Figura 9.81a-b – Soluções numéricas de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  (à esquerda) e  $\frac{\partial u}{\partial y}$  (à direita) pelo Método dos Mínimos Quadrados para uma malha com 100 elementos quadrilaterais com 8 nós cada.

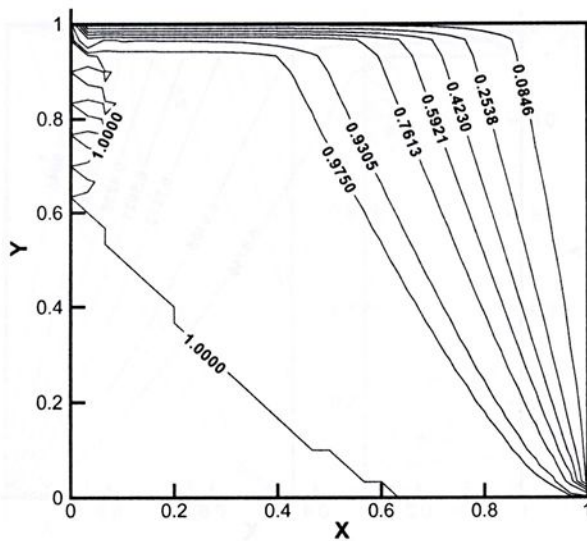


Figura 9.82 – Solução numérica de  $u(x, y)$  pelo Método de Galerkin para uma malha com 900 elementos quadrilaterais com 8 nós cada.

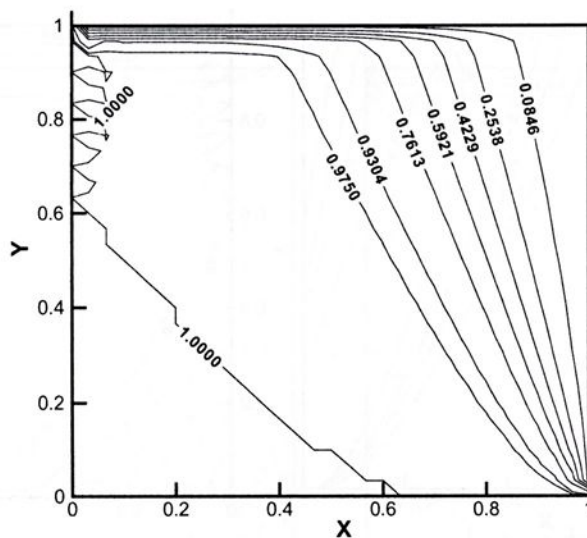


Figura 9.83 – Solução numérica de  $u(x, y)$  pelo Método Petrov-Galerkin para uma malha com 900 elementos quadrilaterais com 8 nós cada.

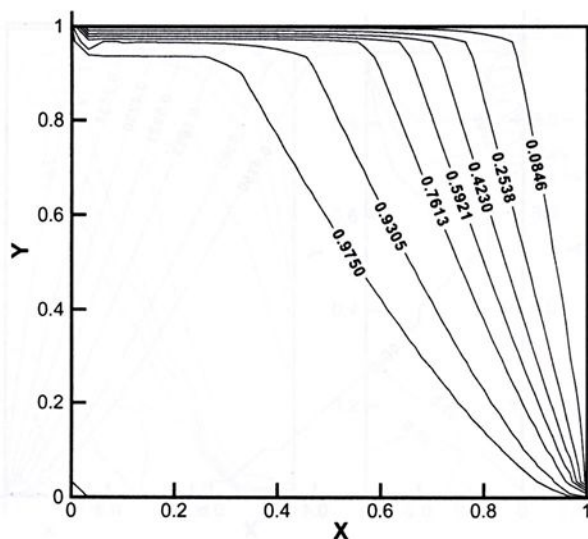


Figura 9.84 – Solução numérica de  $u(x, y)$  pelo Método dos Mínimos Quadrados para uma malha com 900 elementos quadrilaterais com 8 nós cada.

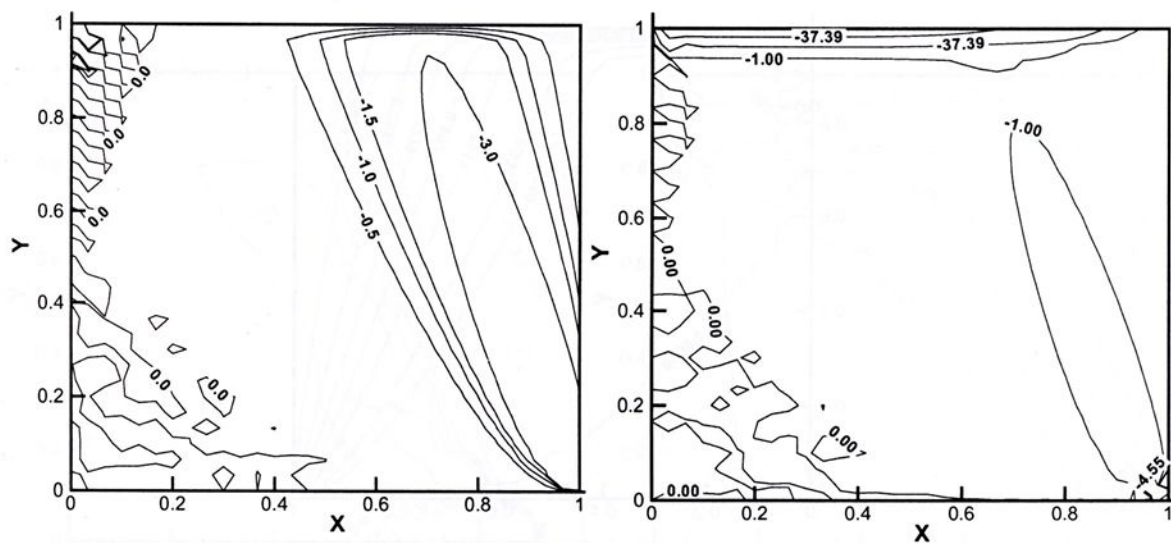


Figura 9.85a-b – Soluções numéricas de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  (à esquerda) e  $\frac{\partial u}{\partial y}$  (à direita) pelo Método de Galerkin para uma malha com 900 elementos quadrilaterais com 8 nós cada.



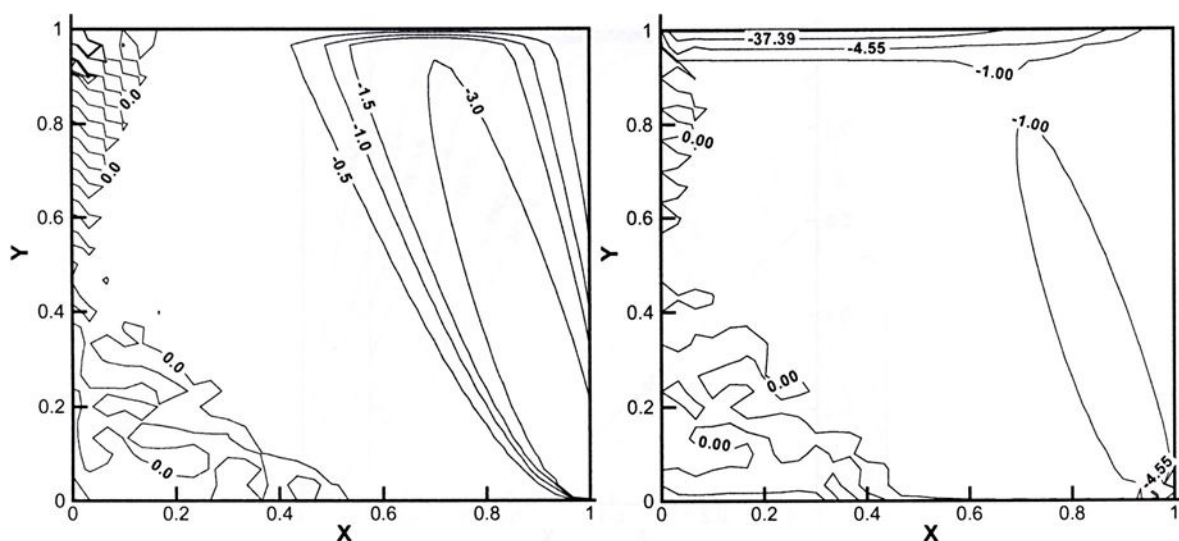


Figura 9.86a-b – Soluções numéricas de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  (à esquerda) e  $\frac{\partial u}{\partial y}$  (à direita) pelo Método Petrov-Galerkin para uma malha com 900 elementos quadrilaterais com 8 nós cada.

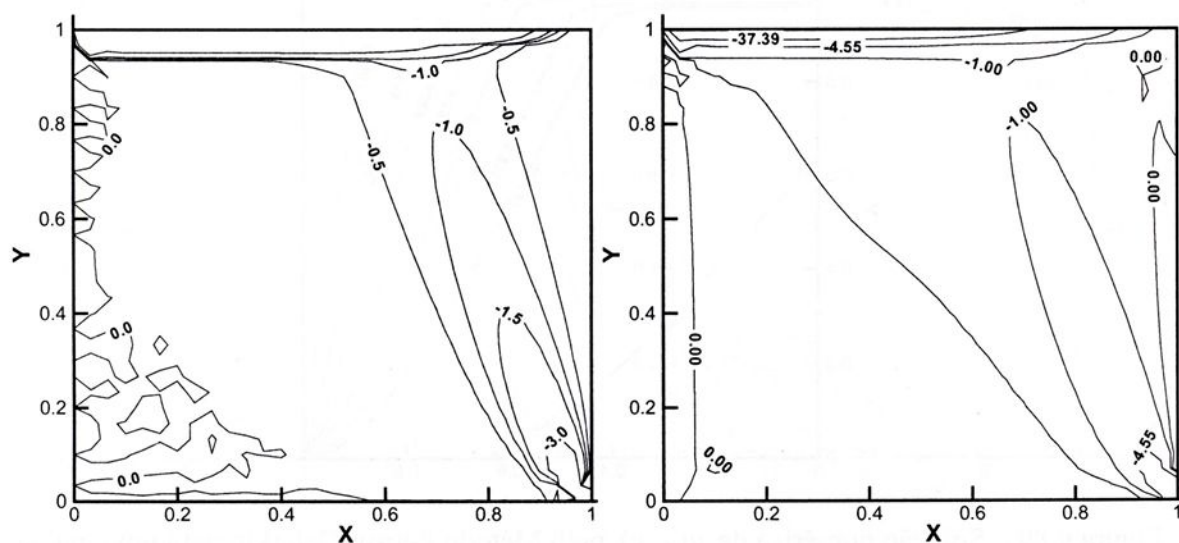


Figura 9.87a-b – Soluções numéricas de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  (à esquerda) e  $\frac{\partial u}{\partial y}$  (à direita) pelo Método dos Mínimos Quadrados para uma malha com 900 elementos quadrilaterais com 8 nós cada.

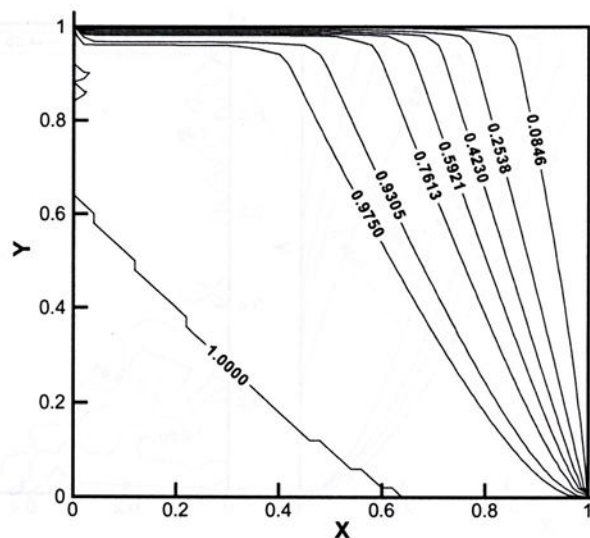


Figura 9.88 – Solução numérica pelo de  $u(x, y)$  Método de Galerkin para uma malha com 2500 elementos quadrilaterais com 8 nós cada.

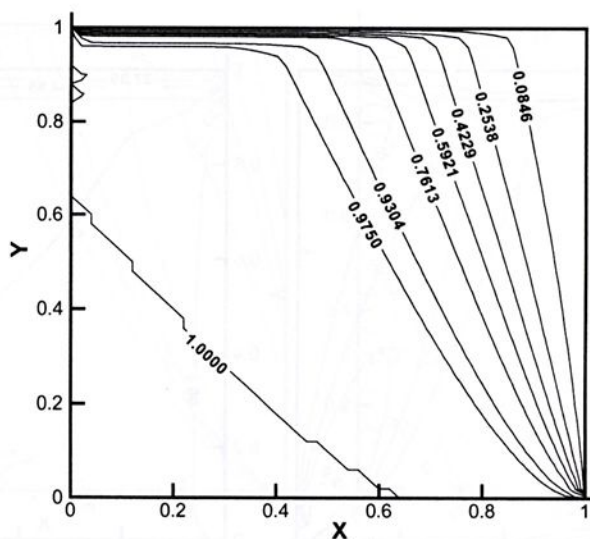


Figura 9.89 – Solução numérica de  $u(x, y)$  pelo Método Petrov-Galerkin para uma malha com 2500 elementos quadrilaterais com 8 nós cada.

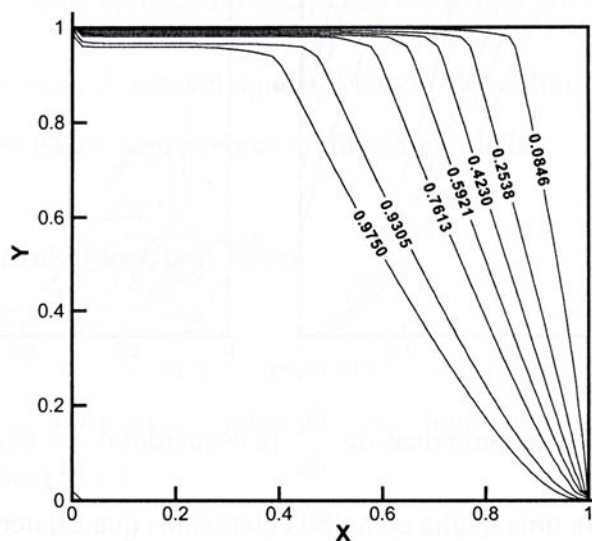


Figura 9.90 – Solução numérica de  $u(x, y)$  pelo Método dos Mínimos Quadrados para uma malha com 2500 elementos quadrilaterais com 8 nós cada.

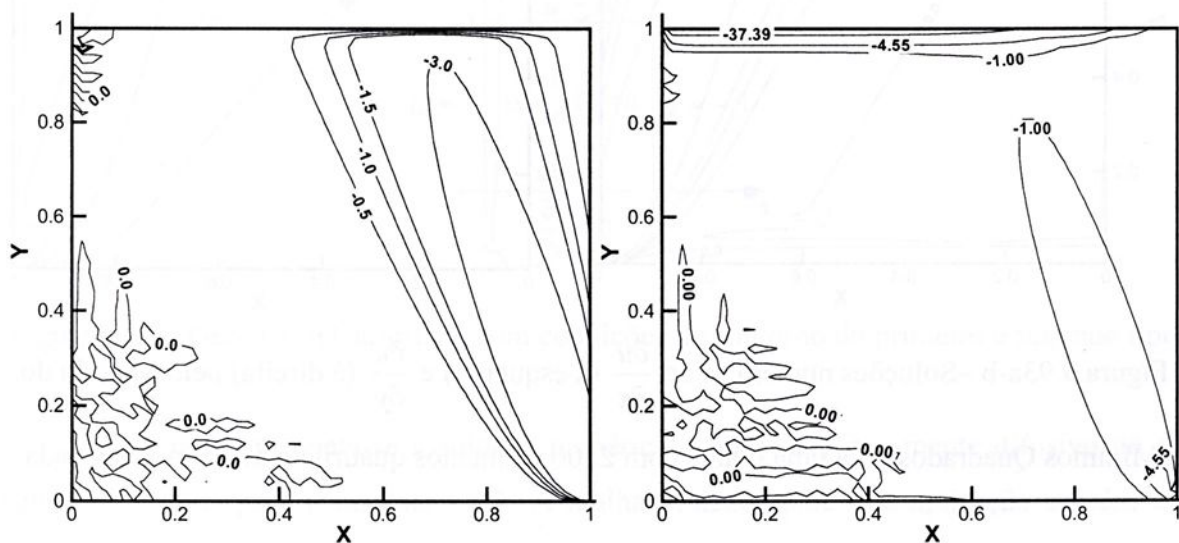


Figura 9.91a-b – Soluções numéricas de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  (à esquerda) e  $\frac{\partial u}{\partial y}$  (à direita) pelo Método de

Galerkin para uma malha com 2500 elementos quadrilaterais com 8 nós cada.

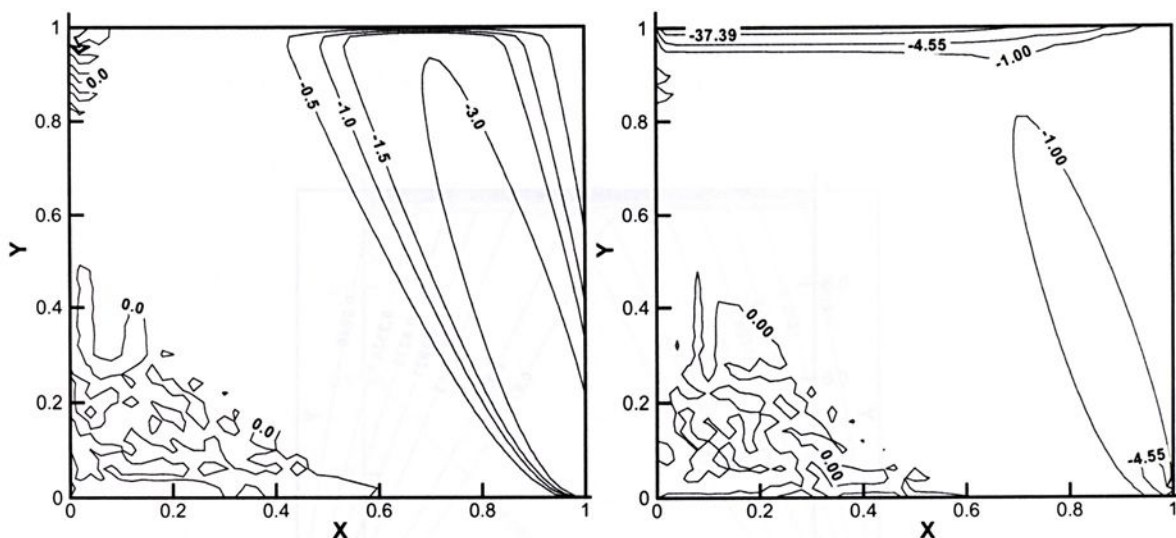


Figura 9.92a-b – Soluções numéricas de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  (à esquerda) e  $\frac{\partial u}{\partial y}$  (à direita) pelo Método

Petrov-Galerkin para uma malha com 2500 elementos quadrilaterais com 8 nós cada.

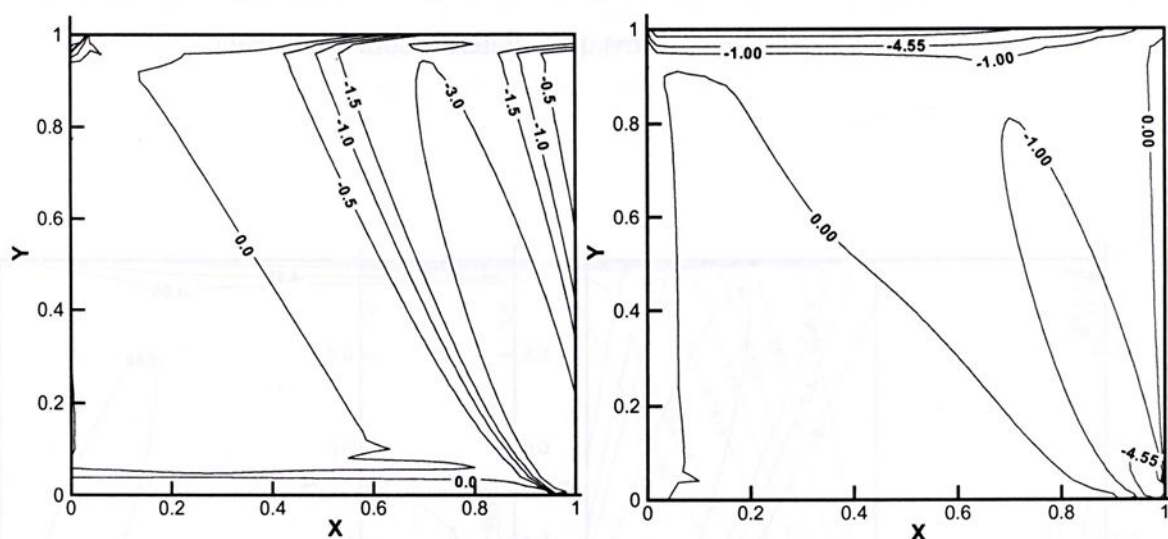


Figura 9.93a-b – Soluções numéricas de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  (à esquerda) e  $\frac{\partial u}{\partial y}$  (à direita) pelo Método dos

Mínimos Quadrados para uma malha com 2500 elementos quadrilaterais com 8 nós cada.

Avaliando as Figuras 9.76 a 9.81, nota-se que o Método dos Mínimos Quadrados, mesmo para uma malha com apenas 100 elementos quadrilaterais,  $h = 0,1$ , apresenta menos oscilações numéricas que os Métodos de Galerkin e Petrov-Galerkin, principalmente na solução numérica de  $u$ . Para a malha com 900 elementos, Figuras 9.82 a 9.87, percebe-se que as oscilações numéricas dos três métodos começam a diminuir, tendo como maior destaque a solução numérica de  $u$  pelo Método dos Mínimos Quadrados que já não apresenta oscilações



numéricas. Por fim, para a malha com 2500 elementos, Figuras 9.88 a 9.93, os Métodos de Galerkin e Petrov-Galerkin ainda não fornecem bons resultados, principalmente para as soluções de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  e  $\frac{\partial u}{\partial y}$ , na qual apresentam oscilações numéricas próximas a região do vértice  $(x,y) = (0,0)$ , enquanto isso, é notável que o Método dos Mínimos Quadrados melhora expressivamente seus resultados o quanto mais refinada é a malha.

### Aplicação 9: Difusão Pura Transiente

Nas aplicações 9 e 10, serão apresentados problemas no regime transiente. Primeiramente um caso difusivo, aplicação 9, logo em seguida um problema convectivo-difusivo, aplicação 10.

**Equação Governante:** 
$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}$$

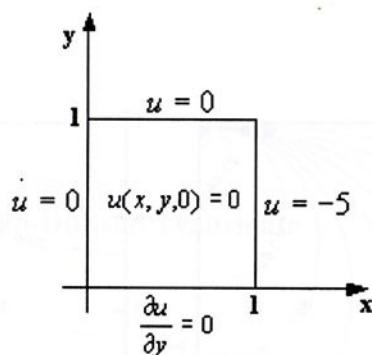


Figura 9.94 – Geometria Cartesiana com condições de contorno do primeiro e segundo tipo

Neste caso apresenta-se a solução numérica de um caso puramente difusivo no seu regime transiente, para o instante  $t = 1$ . A malha utilizada para esta aplicação contém 625 quadriláteros com 8 nós cada, todos os elementos são idênticos,  $h = 0,04$ .

Para a discretização do tempo foi utilizado passos no tempo de valor  $\Delta t = 10^{-2}$  e  $\alpha = 0,5$ , correspondente ao Método Crank-Nicholson.

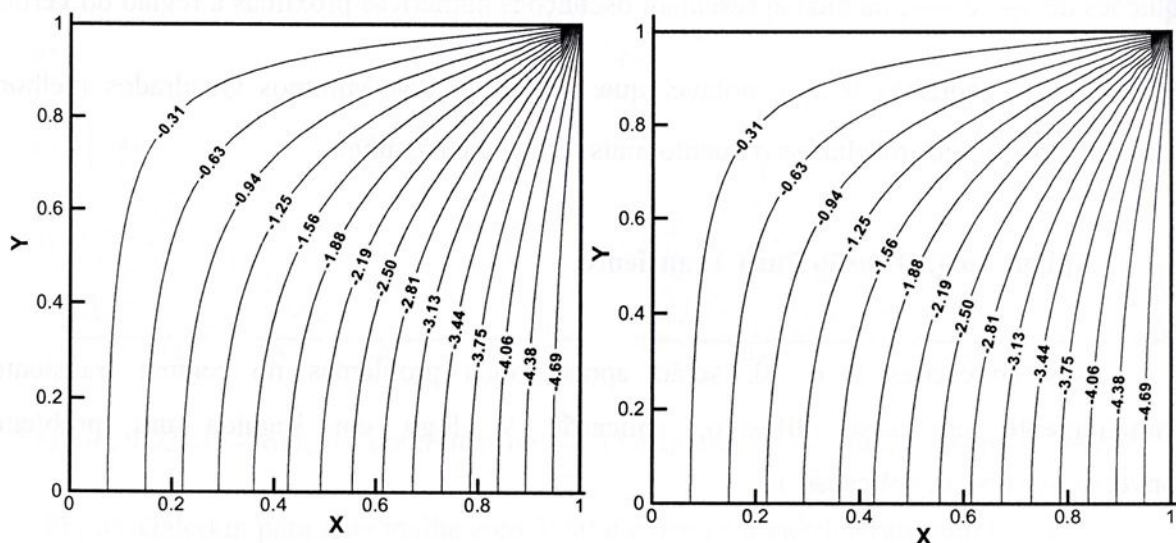


Figura 9.95a-b – Soluções numéricas de  $u(x, y)$  pelo Método de Galerkin (à esquerda) e pelo Método dos Mínimos Quadrados (à direita).

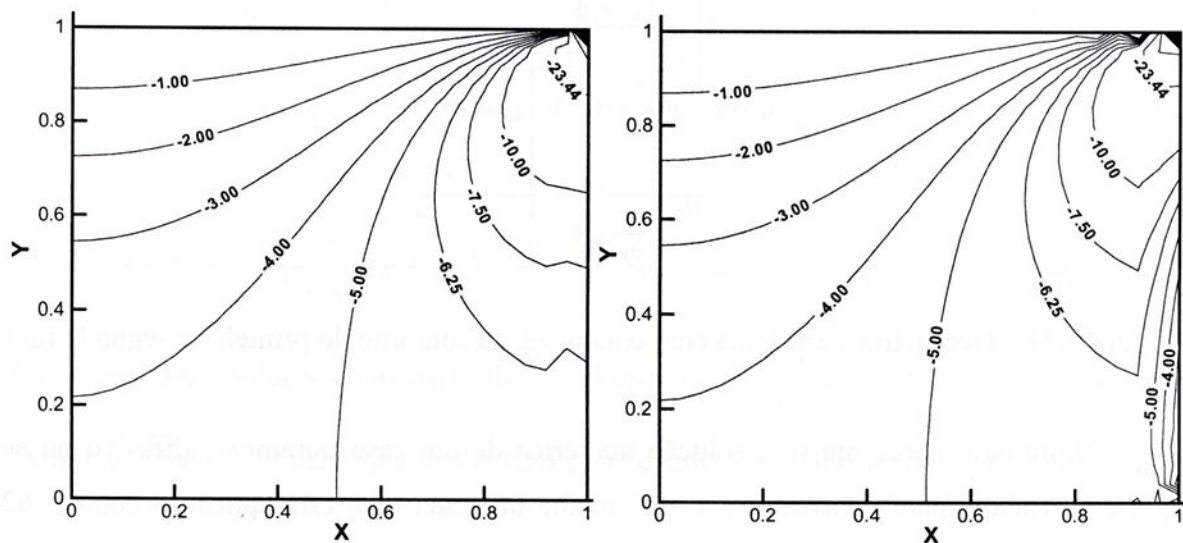


Figura 9.96a-b – Soluções numéricas de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  pelo Método de Galerkin (à esquerda) e pelo Método dos Mínimos Quadrados (à direita).

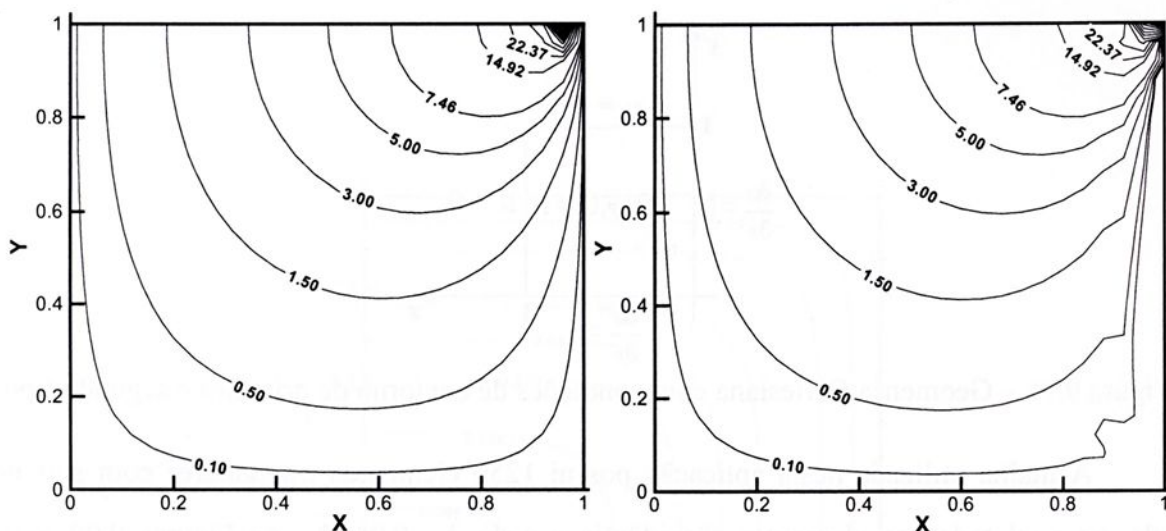


Figura 9.97a-b – Soluções numéricas de  $\frac{\partial u}{\partial y}$  pelo Método de Galerkin (à esquerda) e pelo Método dos Mínimos Quadrados (à direita).

Avaliando as figuras 9.95 à 9.97, nota-se que o Método de Galerkin apresentou bons resultados em todas as soluções, o que não aconteceu com o Método dos Mínimos Quadrados que apresentou oscilações numéricas nas soluções de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  e  $\frac{\partial u}{\partial y}$  nas proximidades da região de  $x = 1$ .

### Aplicação 10: Convecção-Difusão Transiente

A última aplicação deste capítulo apresenta um caso convectivo-difusivo em regime transiente com duas condições de contorno do tipo função prescrita e duas do tipo fluxo prescrita (isolamento). A condição inicial é do tipo função prescrita.

#### Equação Governante:

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} + 10 \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} + 10 \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2}$$

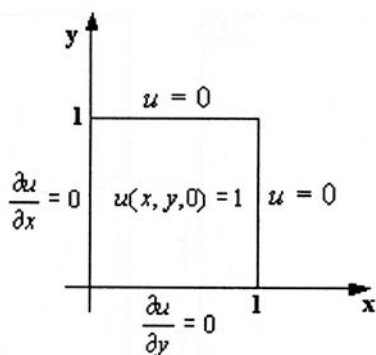


Figura 9.98 – Geometria Cartesiana com condições de contorno de primeiro e segundo tipo.

A malha utilizada nesta aplicação possui 1250 elementos triangulares com seis nós cada, no qual todos os elementos são idênticos e de  $h = 0,04\sqrt{2}$ . As Figuras 9.99 a 104 apresentam soluções numéricas para o instante  $t = 0,5$ .

Na discretização temporal foi adotado  $\Delta t = 10^{-2}$  e  $\alpha = 0,5$ .

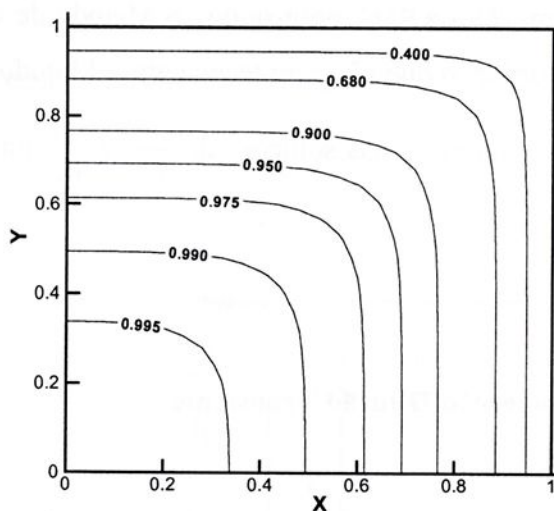


Figura 9.99 – Solução numérica de  $u(x, y)$  pelo Método de Galerkin.

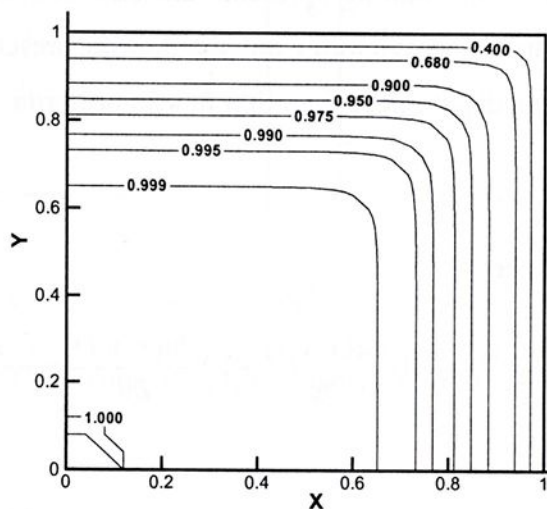


Figura 9.100 – Solução Numérica de  $u(x, y)$  pelo Método Petrov-Galerkin.



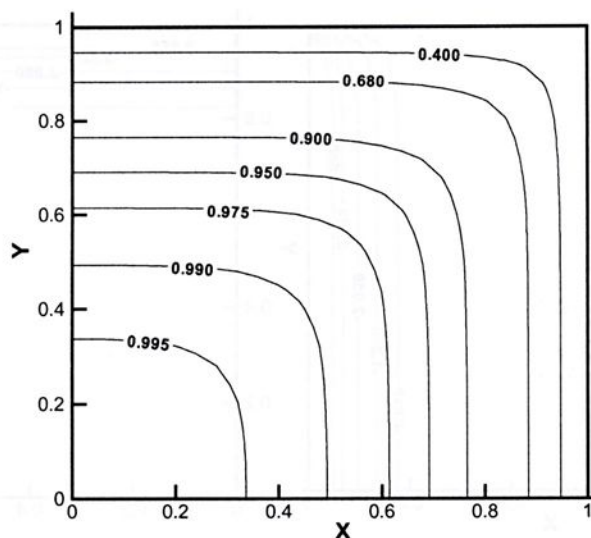


Figura 9.101 – Solução numérica de  $u(x, y)$  pelo Método dos Mínimos Quadrados.

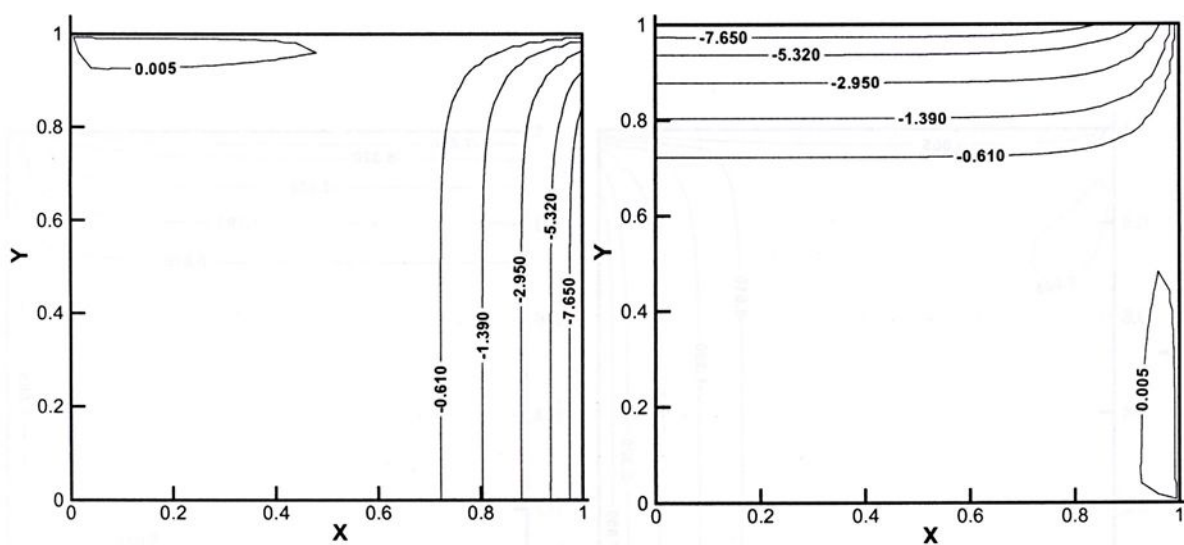


Figura 9.102a-b – Soluções numéricas de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  (à esquerda) e  $\frac{\partial u}{\partial y}$  (à direita) pelo Método de Galerkin.

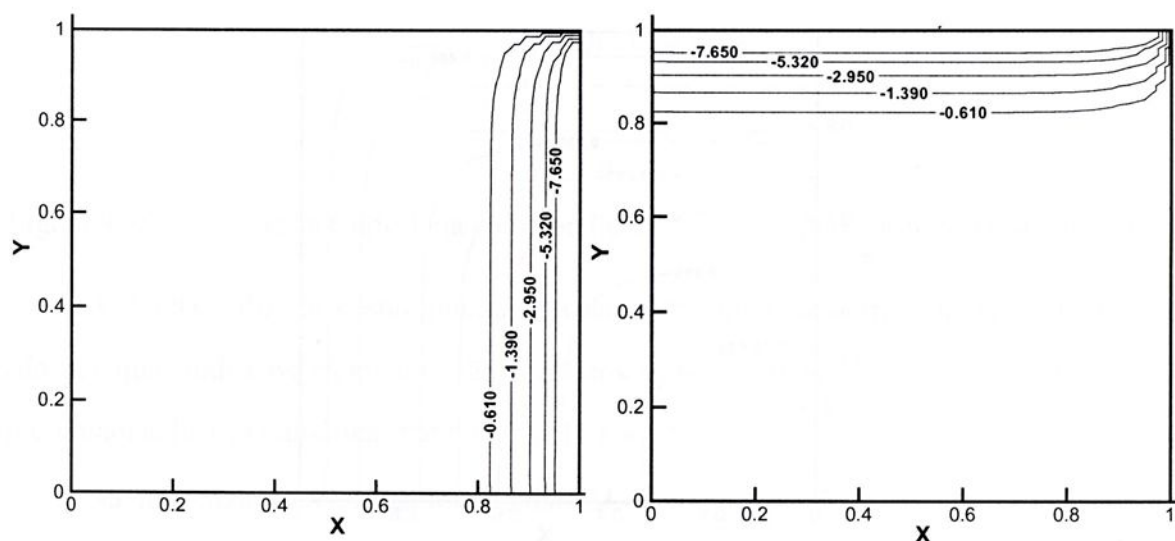


Figura 9.103a-b – Soluções numéricas de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  (à esquerda) e  $\frac{\partial u}{\partial y}$  (à direita) pelo Método Petrov-Galerkin.

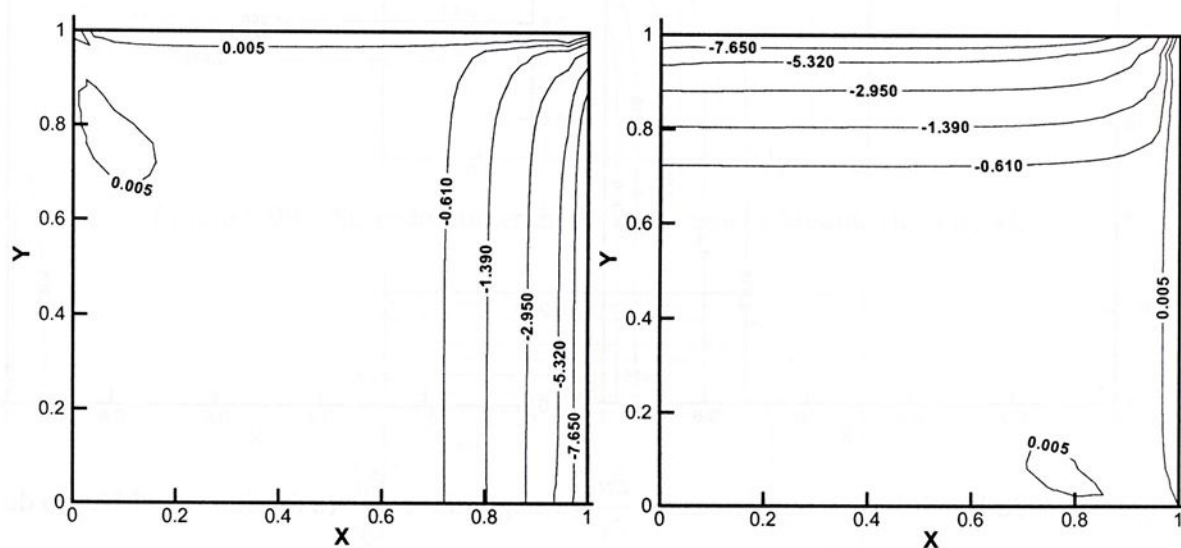


Figura 9.104a-b – Soluções numéricas de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  (à esquerda) e  $\frac{\partial u}{\partial y}$  (à direita) pelo Método dos Mínimos Quadrados.

A conclusão que pode-se chegar analisando as figuras de 9.99 a 9.104 é que o Método de Galerkin e dos Mínimos Quadrados apresentaram bons resultados em todas as soluções, ao contrário do Método Petrov-Galerkin nas três soluções apresentadas.



## **Conclusões e Sugestões**

Inicialmente é interessante mencionar que o Método dos Mínimos Quadrados prove o cômputo direto dos fluxos. Os Métodos de Galerkin e Petrov-Galerkin não possuem esta característica e portanto, caso seja necessário o cômputo dos fluxos, terá que ser feito por algum procedimento extra de recuperação do gradiente.

O Método dos Mínimos Quadrados apresenta na sua formulação uma matriz dos coeficientes que é simétrica e positivo definida para problemas difusivos bem como para convectivo-difusivos. O Método de Galerkin apresenta estas propriedades apenas para problemas puramente difusivos. E o Método Petrov-Galerkin não apresenta simetria na matriz dos coeficientes, nem garante que seja positiva definida.

Devido ao fato, positivo, do cômputo simultâneo dos fluxos no Método dos Mínimos Quadrados, faz-se necessário a introdução de novas variáveis dependentes, os fluxos. Assim, aumenta-se o grau de liberdade por nó e, conseqüentemente, aumenta-se o custo computacional. Esta desvantagem é um pouco aliviada se considerarmos que a matriz dos coeficientes, embora maior, é simétrica, possibilitando o armazenamento de apenas aproximadamente metade de seus elementos. Como, neste método, a matriz é simétrica e positiva definida, a taxa de convergência para o sistema linear será maior. De qualquer forma o custo computacional será maior.

Percebe-se dos resultados apresentados que o Método dos Mínimos Quadrados tem sua eficiência prejudicada, quanto ao cômputo dos fluxos, quando todas as condições de contorno são de primeiro tipo. Ou quando há predominância de condições de contorno de primeiro tipo. Este





comportamento deve-se ao fato de que para calcular fluxos necessita-se de informações sobre fluxo nos contornos, como todas, ou a maioria, das condições de contorno seriam de primeiro tipo, fica-se sem informações, ou com pouca informação, sobre o fluxo nos contornos, levando a piores resultados. Esta dificuldade pode ser minorada refinando-se a malha, o que irá provocar o efeito colateral mencionado acima: aumento do custo computacional.

Quanto ao refinamento de malha os Métodos de Galerkin e dos Mínimos Quadrados aumentam sensivelmente a eficiência quando a malha é refinada. Para malhas bem refinadas o Método dos Mínimos Quadrados apresenta um incremento considerável na eficiência. Para malhas com pouco refinamento o Método Galerkin apresenta resultados em geral melhores que o dos Mínimos Quadrados. O Método Petrov-Galerkin tem boa eficiência apenas para malhas com pequeno refinamento. Para malhas mais refinadas apresenta resultados semelhantes ou piores que os apresentados pelos Métodos de Galerkin e dos Mínimos Quadrados.

Para problemas puramente difusivos e quando não há necessidade de calcular os fluxos o melhor método é o Galerkin.

Quando há a necessidade de se calcular os fluxos com precisão o melhor método é o dos Mínimos Quadrados. Uma alternativa seria usar o Método de Galerkin, com posterior cômputo dos fluxos.

Para problemas convectivo-difusivos o Método dos Mínimos Quadrados de um modo geral apresenta os melhores resultados, ressalvado a questão do custo computacional, mencionado acima. O Método de Galerkin também pode ser utilizado, desde que com malhas bem refinadas, ressalvado sua incapacidade de calcular fluxos. O Método Petrov-Galerkin é competitivo apenas para malhas com pequeno refinamento. Neste caso seria indicado para situações onde o refinamento da malha não seja possível por questões econômicas.

Para trabalhos futuros o autor apresenta as seguintes propostas:

- A utilização de funções de interpolação de Hermite, possibilitando assim a comparação as funções de interpolação de Lagrange, funções essas utilizadas no presente trabalho;
- A implementação dos Métodos de Taylor-Galerkin e Galerkin/ Mínimos Quadrados;
- Expandir o fenômeno convectivo-difusivo para o domínio tridimensional.
- Desenvolver algoritmo numérico para estimar o erro da solução.



- Aplicar estas técnicas sobre as equações de Navier-Stokes bidimensionais e tridimensionais.
- Efetuar estudos de turbulência.



- Almeida, R. C. and Silva, R. S.,** (1997), *A stable Petrov-Galerkin method for convection-dominated problems*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **140**, 291-304.
- Argyris, J. H.,** (1963), *Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis*, Pergamon Press, Elmsford, New York.
- Arpaci, V. S.,** (1966), *Conduction Heat Transfer*, Addison-Wesley Publishing Company.
- Babuska, I.,** (1971), *Error bounds for finite element method*, Numer. Math. **16**, 322-333.
- Bejan, A.,** (1996), *Transferência de Calor*, Editora Edgard Blücher Ltda.
- Bochev, P. B. and Gunzburger, M. D.,** (1994), *Analysis of Least Squares Finite Element Methods for the Stokes Equations*, Mathematics of Computation, vol. 63, **208**, 479-506.
- Bramble, J. H., Lazarov, R. D. and Pasciak, J. E.,** (1998), *Least-squares for second-order elliptic problems*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **152**, 195-210.
- Brezzi, F.,** (1974), *On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange multipliers*, Rech. Oper., Ser. Rouge Anal. Numer. **8, R-2**, 129-151.





**Brooks, A. N. and Hughes, T. J. R.,** (1982), *Streamline upwind Petrov-Galerkin formulations of convection-dominated flows with particular significant emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **32**, 199-259.

**Burrell, L. L., Tang, L. Q. and Tsang T. T. H.,** (1995), *On a Least-Squares Finite Element Method for advective transport in air pollution modeling*, Atmospheric Environment, vol. 29, **12**, 1425-1439.

**Cai, Z., Lazarov, R., Manteuffel, T. A. and McCormick S. F.,** (1994), *First-order System Least Squares for second-order Partial Differential Equations: Part I*, SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 31, **06**, 1785-1799.

**Camprub, N., Colominas, I., Navarrina, F. and Casteleiro, M.,** (2000), *Galerkin, Least-Squares and G.L.S. numerical approaches for convective-diffusive transport problems in engineering*, European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering.

**Clough, R. W.,** (1960), *The Finite Element Method in Plane Stress Analysis*, Proceedings of 2<sup>nd</sup> Conf. on Electronic Computation, American Society of Civil Engineers, Pittsburg, Penn., 345-378.

**Codina, R.,** (1998), *Comparison of some finite element methods for solving the diffusion-convection-reaction equation*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **156**, 185-210.

**Codina, R.,** (2000), *On stabilized finite element methods for linear systems of convection-diffusion-reaction equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **188**, 61-82.

**Dhatt, G. and Touzot, G.,** (1984) *The Finite Element Method*, John Wiley & Sons.





- Donea J., Quartapelle L.,** (1992), *An introduction to finite element methods for transient advection problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **95**, 169-203.
- Feng, J. Q.,** (2001), *Aplication of Galerkin finite-element computations in studying electrohydrodynamic problems*, Journal of Electrostatic, **51-52**, 590-596.
- Fernandes, M. R. e Pulino, P.,** (1999) *Métodos de Elementos Finitos para Problemas de Difusão-Convecção: Um modelo bidimensional*, Relatório de Pesquisa 09/1999, IMECC-UNICAMP.
- Harbord, R. and Gellert, M.,** (1991), *A simple least-squares method for FE analysis of the Navier-Stokes problem*, Computational Mechanics, **8**, 19-24.
- Holman, J. P.,** (1976), *Heat Transfer*, Fourth Edition, McGraw-Hill Kogakusha.
- Howle, L. E.,** (1996), *A comparison of the reduced Galerkin and pseudo-spectral methods for simulation of steady Rayleigh-Bénard convection*, International Journal Heat Mass Transfer, vol. 39, **12**, 2401-2407.
- Jiang, B. N.,** (1992), *A Least-Squares Finite Element Method for incompressible Navier-Stokes problems*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, **14**, 843-859.
- Jiang, B. N.,** (1998), *The Least-Squares Finite Element Method – Theory and Applications in Computational Fluid Dynamics and Electromagnetics*, Springer.
- Johnson, C.,** (1987), *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*, Cambridge.
- Lima, E. L.,** (1977), *Espaços Métricos*, Projeto Euclides, 3ª edição, Rio de Janeiro-RJ.



- Nguyen, H. and Reynen, J.**, (1984), *A space-time Least-Squares Finite Element Method scheme for advection-diffusion equations*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., **42**, 331-342.
- Oden, J. T. and Wellford, L. C., Jr.**, (1972), *Analysis of Flow of Viscous Fluids by the Finite Element Method*, AIAA J., **10**, nº 12, 1590-1599.
- Oden, J. T. and Demkowicz, L. F.**, (1996), *Applied Functional Analysis*, Texas A&M University.
- Özisik, M. N.**, (1977), *Basic Heat Transfer*, McGraw-Hill Kogakusha.
- Reddy, J. N.**, (1993), *An Introduction to the Finite Element Method*, Second Edition, McGraw-Hill.
- Ruas, V.**, (1997), *Galerkin-least-squares finite element methods for the three-field Stokes system in  $R^3$* , Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **142**, 235-256.
- Shen, M., Zhou, T., Cheng, M. and Fithen, R. M.**, (2001), *Least-squares finite element formulation for hydrodynamic modeling of semiconductor devices*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **190**, 2875-2891.
- Tang L. Q. and Tsang T. T. H.**, (1993), *A Least-Squares Finite Element Method for time-dependent incompressible flows with thermal convection*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 17, 271-289.
- Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C., and Topp, L. P.**, (1956), *Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures*, J. Aeron. Sci., **23**, nº 9, 805-823.



**Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L.,** (1991), *The Finite Element Method*, Fourth Edition, Volume 2 – Solid and Fluid Mechanics Dynamics and Non-Linearity, McGraw-Hill.

**Zienkiewicz, O. C. and Cheung, Y. K.,** (1965), *Finite Elements in the Solution of Field Problems*, The Engineer, 507-510.

**Winterscheidt, D. and Surana, K. S.,** (1993), *p-Version Least-Squares Finite Element formulation for convection-diffusion problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 36, 111-133.



## APÊNDICE A – Tabelas de resultados numéricos

Neste apêndice é apresentado alguns resultados numéricos das aplicações numéricas 7 e 9 do capítulo 9.

Tabela A1 – Resultados numéricos de  $u(x, y)$  da aplicação 7 para  $A_x = A_y = -10$

| x   | y   | Galerkin    | Petrov-Galerkin | LSFEM       |
|-----|-----|-------------|-----------------|-------------|
| 0,2 | 0,2 | 0,500024680 | 0,500024682     | 0,500028646 |
| 0,2 | 0,4 | 0,214383817 | 0,214383816     | 0,214384949 |
| 0,2 | 0,6 | 0,102543021 | 0,102543021     | 0,102542732 |
| 0,2 | 0,8 | 0,114561610 | 0,114561610     | 0,114559656 |
| 0,4 | 0,2 | 0,785920311 | 0,785920310     | 0,785921222 |
| 0,4 | 0,4 | 0,500719368 | 0,500719369     | 0,500720676 |
| 0,4 | 0,6 | 0,298728348 | 0,298728348     | 0,298728803 |
| 0,4 | 0,8 | 0,263460840 | 0,263460840     | 0,263460220 |
| 0,6 | 0,2 | 0,901481790 | 0,901481791     | 0,901481503 |
| 0,6 | 0,4 | 0,711630125 | 0,711630125     | 0,711630657 |
| 0,6 | 0,6 | 0,512847561 | 0,512847561     | 0,512848134 |
| 0,6 | 0,8 | 0,434950628 | 0,434950628     | 0,434950568 |
| 0,8 | 0,2 | 0,953231967 | 0,953231966     | 0,953231323 |
| 0,8 | 0,4 | 0,844265070 | 0,844265069     | 0,844265047 |
| 0,8 | 0,6 | 0,700002298 | 0,700002299     | 0,70002685  |
| 0,8 | 0,8 | 0,619833457 | 0,619833458     | 0,619833626 |





Tabela A2 – Resultados numéricos de  $u(x, y)$  da aplicação 7 para  $A_x = A_y = -100$

| x   | y   | Galerkin       | Petrov-Galerkin | LSFEM          |
|-----|-----|----------------|-----------------|----------------|
| 0,2 | 0,2 | 0,499923110    | 0,499923110     | 0,501969449    |
| 0,2 | 0,4 | 0,296050083E-1 | 0,296050082E-1  | 0,311830932E-1 |
| 0,2 | 0,6 | 0,708314171E-3 | 0,708314117E-3  | 0,270471411E-2 |
| 0,2 | 0,8 | 0,126621789E-4 | 0,126621778E-4  | 0,215230855E-2 |
| 0,4 | 0,2 | 0,970380289    | 0,970380288     | 0,970917596    |
| 0,4 | 0,4 | 0,499950667    | 0,499950668     | 0,501634378    |
| 0,4 | 0,6 | 0,740558836E-1 | 0,740558838E-1  | 0,757086848E-1 |
| 0,4 | 0,8 | 0,454277086E-2 | 0,454277080E-2  | 0,661816088E-2 |
| 0,6 | 0,2 | 0,999291332    | 0,999291331     | 0,999160748    |
| 0,6 | 0,4 | 0,925916573    | 0,925916573     | 0,926573674    |
| 0,6 | 0,6 | 0,499960888    | 0,499960889     | 0,501500769    |
| 0,6 | 0,8 | 0,112048689    | 0,112048689     | 0,113718205    |
| 0,8 | 0,2 | 0,999987333    | 0,999987333     | 0,999707216    |
| 0,8 | 0,4 | 0,995455209    | 0,995455209     | 0,995283047    |
| 0,8 | 0,6 | 0,887918663    | 0,887918664     | 0,888639801    |
| 0,8 | 0,8 | 0,499966608    | 0,499966610     | 0,501427097    |



Tabela A3 – Resultados numéricos de  $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$  da aplicação 7 para  $A_x = A_y = -10$

| x   | y   | Galerkin       | Petrov-Galerkin | LSFEM          |
|-----|-----|----------------|-----------------|----------------|
| 0,2 | 0,2 | 0,214781700E+1 | 0,214781702E+1  | 0,480171829E+1 |
| 0,2 | 0,4 | 0,144265288E+1 | 0,144265283E+1  | 0,750853130    |
| 0,2 | 0,6 | 0,793265243    | 0,793265251     | 0,244363893E-1 |
| 0,2 | 0,8 | 0,680183334    | 0,680183316     | 0,268046293E-2 |
| 0,4 | 0,2 | 0,871803107    | 0,871803164     | 0,478976942    |
| 0,4 | 0,4 | 0,129088190E+1 | 0,129088188E+1  | 0,327539508E+1 |
| 0,4 | 0,6 | 0,109324364E+1 | 0,109324356E+1  | 0,113280494E+1 |
| 0,4 | 0,8 | 0,812877751    | 0,812877658     | 0,991048997E-1 |
| 0,6 | 0,2 | 0,365556692    | 0,365556856     | 0,144959086E-1 |
| 0,6 | 0,4 | 0,825832015    | 0,825831757     | 0,875703224    |
| 0,6 | 0,6 | 0,100531178E+1 | 0,100531182E+1  | 0,264042853E+1 |
| 0,6 | 0,8 | 0,883677279    | 0,883677075     | 0,125745617E+1 |
| 0,8 | 0,2 | 0,189230521    | 0,189230414     | 0,709655407E-3 |
| 0,8 | 0,4 | 0,559173218    | 0,559173081     | 0,679407396E-1 |
| 0,8 | 0,6 | 0,928712532    | 0,928712659     | 0,105128869E+1 |
| 0,8 | 0,8 | 0,104204025E+1 | 0,104204023E+1  | 0,226618375E+1 |

Tabela A4 – Resultados numéricos de  $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$  da aplicação 7 para  $A_x = A_y = -100$

| X   | y   | Galerkin       | Petrov-Galerkin | LSFEM          |
|-----|-----|----------------|-----------------|----------------|
| 0,2 | 0,2 | 0,476921494E+1 | 0,476921426E+1  | 0,480171829E+1 |
| 0,2 | 0,4 | 0,729203341    | 0,729203273     | 0,825094075    |
| 0,2 | 0,6 | 0,232460408E-1 | 0,232460379E-1  | 0,244363893E-1 |
| 0,2 | 0,8 | 0,474159604E-3 | 0,474159525E-3  | 0,268046293E-2 |
| 0,4 | 0,2 | 0,508960387    | 0,508960436     | 0,478976942    |
| 0,4 | 0,4 | 0,326463072E+1 | 0,326463051E+1  | 0,327539508E+1 |
| 0,4 | 0,6 | 0,110901467E+1 | 0,110901457E+1  | 0,113280494E+1 |
| 0,4 | 0,8 | 0,984724442E-1 | 0,984724341E-1  | 0,991048997E-1 |
| 0,6 | 0,2 | 0,138468780E-1 | 0,138470101E-1  | 0,144959086E-1 |
| 0,6 | 0,4 | 0,898761677    | 0,898761784     | 0,875703224    |
| 0,6 | 0,6 | 0,263573305E+1 | 0,263573290E+1  | 0,264042853E+1 |
| 0,6 | 0,8 | 0,123770877E+1 | 0,123770868E+1  | 0,125745617E+1 |
| 0,8 | 0,2 | 0,258534975E-3 | 0,258666390E-3  | 0,709655407E-3 |
| 0,8 | 0,4 | 0,699407300E-1 | 0,699409856E-1  | 0,679407396E-1 |
| 0,8 | 0,6 | 0,106713752E+1 | 0,106713770E+1  | 0,105128869E+1 |
| 0,8 | 0,8 | 0,226960130E+1 | 0,226960121E+1  | 0,226618375E+1 |



Tabela A5 – Resultados numéricos de  $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$  da aplicação 7 para  $A_x = A_y = -10$

| X   | y   | Galerkin       | Petrov-Galerkin | LSFEM          |
|-----|-----|----------------|-----------------|----------------|
| 0,2 | 0,2 | -0,21475171E+1 | -0,21475170E+1  | -0,21506544E+1 |
| 0,2 | 0,4 | -0,868276097   | -0,868276176    | -0,868320759   |
| 0,2 | 0,6 | -0,310382194   | -0,310382211    | -0,309262797   |
| 0,2 | 0,8 | 0,774123877    | 0,774123884     | 0,779014690    |
| 0,4 | 0,2 | -0,14400178E+1 | -0,14400176E+1  | -0,14396826E+1 |
| 0,4 | 0,4 | -0,12791117E+1 | -0,12791117E+1  | -0,12795473E+1 |
| 0,4 | 0,6 | -0,709030676   | -0,709030659    | -0,708630342   |
| 0,4 | 0,8 | 0,694957209    | 0,694957184     | 0,698306276    |
| 0,6 | 0,2 | -0,765555961   | -0,765555916    | -0,765343519   |
| 0,6 | 0,4 | -0,10552801E+1 | -0,10552805E+1  | -0,10553079E+1 |
| 0,6 | 0,6 | -0,844258044   | -0,84425794     | -0,844005372   |
| 0,6 | 0,8 | 0,377428223    | 0,377428121     | 0,379894102    |
| 0,8 | 0,2 | -0,387852523   | -0,387852698    | -0,388055820   |
| 0,8 | 0,4 | -0,679197789   | -0,679197569    | -0,679335441   |
| 0,8 | 0,6 | -0,692247333   | -0,692247093    | -0,691996284   |
| 0,8 | 0,8 | 0,140491799    | 0,140491652     | 0,142534719    |



Tabela A6 – Resultados numéricos de  $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$  da aplicação 7 para  $A_x = A_y = -100$

| X   | y   | Galerkin       | Petrov-Galerkin | LSFEM          |
|-----|-----|----------------|-----------------|----------------|
| 0,2 | 0,2 | -0,47689313E+1 | -0,47689305E+1  | -0,48053963E+1 |
| 0,2 | 0,4 | -0,508711938   | -0,508711874    | -0,482714869   |
| 0,2 | 0,6 | -0,13839876E-1 | -0,13839874E-1  | -0,14432383E-1 |
| 0,2 | 0,8 | -0,25820307E-3 | -0,25820302E-3  | -0,51926767E-3 |
| 0,4 | 0,2 | -0,729544056   | -0,729544243    | -0,745527929   |
| 0,4 | 0,4 | -0,32645567E+1 | -0,32645563E+1  | -0,32765434E+1 |
| 0,4 | 0,6 | -0,898469510   | -0,898469403    | -0,879837606   |
| 0,4 | 0,8 | -0,69910287E-1 | -0,69910277E-1  | -0,68253059E-1 |
| 0,6 | 0,2 | -0,23257570E-1 | -0,23257831E-1  | -0,24350421E-1 |
| 0,6 | 0,4 | -0,11093472E+1 | -0,11093471E+1  | -0,11279874E+1 |
| 0,6 | 0,6 | -0,26356962E+1 | -0,26356959E+1  | -0,26410170E+1 |
| 0,6 | 0,8 | -0,10668885E+1 | -0,10668883E+1  | -0,10547764E+1 |
| 0,8 | 0,2 | -0,47432541E-3 | -0,47458223E-3  | 0,25413007E-2  |
| 0,8 | 0,4 | -0,98513605E-1 | -0,98513594E-1  | -0,98543147E-1 |
| 0,8 | 0,6 | -0,12379723E+1 | -0,12379722E+1  | -0,12536798E+1 |
| 0,8 | 0,8 | -0,22695782E+1 | -0,22695779E+1  | -0,22665616E+1 |

Tabela A7 – Resultados numéricos de  $u(x, y)$  da aplicação 9 para  $t = 1$ .

| x   | Y   | Galerkin       | LSFEM          |
|-----|-----|----------------|----------------|
| 0,2 | 0,0 | -0,844081587   | -0,844082134   |
| 0,2 | 0,2 | -0,815874271   | -0,815874735   |
| 0,2 | 0,4 | -0,725308581   | -0,725308819   |
| 0,2 | 0,6 | -0,558601192   | -0,558601039   |
| 0,2 | 0,8 | -0,308955471   | -0,308954896   |
| 0,4 | 0,0 | -0,17424189E+1 | -0,17424202E+1 |
| 0,4 | 0,2 | -0,16925036E+1 | -0,16925047E+1 |
| 0,4 | 0,4 | -0,15275238E+1 | -0,15275245E+1 |
| 0,4 | 0,6 | -0,12056223E+1 | -0,12056221E+1 |
| 0,4 | 0,8 | -0,684856429   | -0,684855156   |
| 0,6 | 0,0 | -0,27354414E+1 | -0,27354448E+1 |
| 0,6 | 0,2 | -0,26792979E+1 | -0,26793008E+1 |
| 0,6 | 0,4 | -0,24848987E+1 | -0,24849011E+1 |
| 0,6 | 0,6 | -0,20634029E+1 | -0,20634040E+1 |
| 0,6 | 0,8 | -0,12546427E+1 | -0,12546403E+1 |
| 0,8 | 0,0 | -0,38327684E+1 | -0,38327839E+1 |
| 0,8 | 0,2 | -0,37943613E+1 | -0,37943783E+1 |
| 0,8 | 0,4 | -0,36545681E+1 | -0,36545857E+1 |
| 0,8 | 0,6 | -0,33074711E+1 | -0,33074870E+1 |
| 0,8 | 0,8 | -0,23905897E+1 | -0,23905939E+1 |



Tabela A8 – Resultados numéricos de  $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$  da aplicação 9 para  $t = 1$ .

| x   | Y   | Galerkin       | LSFEM          |
|-----|-----|----------------|----------------|
| 0,2 | 0,0 | -0,43131470E+1 | -0,43147422E+1 |
| 0,2 | 0,2 | -0,41819739E+1 | -0,41837781E+1 |
| 0,2 | 0,4 | -0,37522172E+1 | -0,37545458E+1 |
| 0,2 | 0,6 | -0,29307394E+1 | -0,29334102E+1 |
| 0,2 | 0,8 | -0,16440399E+1 | -0,16457625E+1 |
| 0,4 | 0,0 | -0,47039321E+1 | -0,47049690E+1 |
| 0,4 | 0,2 | -0,46253951E+1 | -0,46267311E+1 |
| 0,4 | 0,4 | -0,43338809E+1 | -0,43363730E+1 |
| 0,4 | 0,6 | -0,36345804E+1 | -0,36390271E+1 |
| 0,4 | 0,8 | -0,22055213E+1 | -0,22101813E+1 |
| 0,6 | 0,0 | -0,52351315E+1 | -0,52348778E+1 |
| 0,6 | 0,2 | -0,52592528E+1 | -0,52592889E+1 |
| 0,6 | 0,4 | -0,52918309E+1 | -0,52933007E+1 |
| 0,6 | 0,6 | -0,50915812E+1 | -0,50984465E+1 |
| 0,6 | 0,8 | -0,37461338E+1 | -0,37625092E+1 |
| 0,8 | 0,0 | -0,57097444E+1 | -0,56977115E+1 |
| 0,8 | 0,2 | -0,58611145E+1 | -0,58591492E+1 |
| 0,8 | 0,4 | -0,63823863E+1 | -0,63787261E+1 |
| 0,8 | 0,6 | -0,74537784E+1 | -0,74521805E+1 |
| 0,8 | 0,8 | -0,84831125E+1 | -0,85349542E+1 |



Tabela A9 – Resultados numéricos de  $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$  da aplicação 9 para  $t = 1$ .

| x   | Y   | Galerkin       | LSFEM         |
|-----|-----|----------------|---------------|
| 0,2 | 0,0 | -0,38842192E-4 | 0,000000000   |
| 0,2 | 0,2 | 0,287145486    | 0,287542218   |
| 0,2 | 0,4 | 0,630756206    | 0,631365306   |
| 0,2 | 0,6 | 0,10439605E+1  | 0,10441225E+1 |
| 0,2 | 0,8 | 0,14343295E+1  | 0,14331750E+1 |
| 0,4 | 0,0 | -0,92750474E-4 | 0,000000000   |
| 0,4 | 0,2 | 0,511577439    | 0,512548291   |
| 0,4 | 0,4 | 0,11734997E+1  | 0,11753699E+1 |
| 0,4 | 0,6 | 0,20857578E+1  | 0,20872456E+1 |
| 0,4 | 0,8 | 0,31015356E+1  | 0,30991053E+1 |
| 0,6 | 0,0 | -0,14382391E-3 | 0,000000000   |
| 0,6 | 0,2 | 0,581385331    | 0,582954169   |
| 0,6 | 0,4 | 0,14318673E+1  | 0,14359021E+1 |
| 0,6 | 0,6 | 0,29197339E+1  | 0,29266653E+1 |
| 0,6 | 0,8 | 0,52702512E+1  | 0,52699278E+1 |
| 0,8 | 0,0 | -0,12450270E-3 | 0,000000000   |
| 0,8 | 0,2 | 0,401880771    | 0,403351405   |
| 0,8 | 0,4 | 0,10706072E+1  | 0,10755751E+1 |
| 0,8 | 0,6 | 0,26467265E+1  | 0,26619181E+1 |
| 0,8 | 0,8 | 0,73896301E+1  | 0,74350538E+1 |







## **APÊNDICE B – Tabelas de Tempos de Execuções Computacionais**

Neste apêndice é apresentado alguns tempos de execuções computacionais de algumas aplicações do capítulo 9.

### **B1 – Aplicação 1**

Para o caso no qual é utilizado uma malha com 1600 elementos quadrilaterais com 8 nós cada, os tempos são,

**Galerkin:** *38 seg*

**LSFEM:** *2 min 03 seg*

### **B2 – Aplicação 2**

Para o caso no qual é utilizado uma malha com 3200 elementos triangulares com 6 nós cada, os tempos são,

**Galerkin:** *49 seg*

**LSFEM:** *2 min 36 seg*

### **B3 – Aplicação 4**

**Galerkin:** *12 seg*

**LSFEM:** *6 min 14 seg*

### **B4 – Aplicação 9**

**Galerkin:** *13 min 15 seg*

**LSFEM:** *1h 12 min 12 seg*







**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"**

**Campus de Ilha Solteira  
Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica  
Av. Brasil Centro, 56  
CEP 15385-000 - Ilha Solteira - SP  
[www.dem.feis.unesp.br](http://www.dem.feis.unesp.br)**

