



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Um estudo sobre polinômios auto-recíprocos e auto-inversíveis

Susan Jerlin Ayala Lopez

Orientadora

Profa. Dra. Vanessa Avansini Botta Pirani

Programa

Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente-SP

Maio de 2025

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Um estudo sobre polinômios auto-recíprocos e auto-inversíveis

Susan Jerlin Ayala Lopez

Orientadora

Profa. Dra. Vanessa Avansini Botta Pirani

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente-SP

Maio de 2025

L864e	Lopez, Susan Jerlin Um estudo sobre polinômios auto-recíprocos e auto-inversíveis / Susan Jerlin Lopez. -- Presidente Prudente, 2025 92 p. : il., tabs. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente Orientadora: Vanessa Avansini Botta Pirani 1. Polinômios. 2. Zeros de Polinômios. 3. Círculo unitário. 4. Polinômios auto-recíprocos. 5. Polinômios auto-inversíveis.. I. Título.
-------	--

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: UM ESTUDO SOBRE POLINÔMIOS AUTO-RECÍPROCOS E AUTO-INVERSÍVIES

AUTORA: SUSAN JERLIN AYALA LOPEZ

ORIENTADORA: VANESSA AVANSINI BOTTA PIRANI

Aprovada como parte das exigências para obtenção do Título de Mestra em Matemática Aplicada e Computacional, pela Comissão Examinadora:

Documento assinado digitalmente
 **VANESSA AVANSINI BOTTA PIRANI**
Data: 27/05/2025 12:07:56-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. VANESSA AVANSINI BOTTA PIRANI (Participação Virtual)
Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente - FCT/Unesp

Prof. Dr. DANIEL OLIVEIRA VERONESE (Participação Virtual)
Departamento de Matemática Aplicada / Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Profa. Dra. VANESSA GONÇALVES PASCHOA FERRAZ (Participação Virtual)
Câmpus São José dos Campos / Universidade Federal de São Paulo

Presidente Prudente, 24 de fevereiro de 2025

Para o meu Negrito e minha Blanquita, meus amados cães, que sempre estiveram ao meu lado durante minha jornada universitária no Peru. Mesmo agora que já não estão mais aqui, sua presença continua viva em meu coração.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, que me mostrou que sua graça não tem fim. Estudar um mestrado era apenas um sonho durante a minha trajetória universitária, um sonho que Deus tornou realidade. Meu mais profundo agradecimento também é para a minha Virgem Maria, que sempre intercede por mim.

À minha mãe, agradeço por ser o meu maior exemplo de perseverança e esforço. Graças a ela, pude estudar uma carreira e conquistar tantas coisas. Seu amor incondicional e seus sacrifícios foram fundamentais para cada passo que dei.

Ao meu pai, que me ensinou a confiar em mim mesma. Cada vez que eu dizia que não podia, ele me fazia sentir que eu poderia, que não existia o "não posso".

À minha irmã, por confiar em mim, pelo apoio incondicional em cada passo que dei, e por sempre pedir a Deus pelo meu bem-estar.

À minha orientadora de mestrado, professora Vanessa Avansini Botta Pirani, por todo seu apoio, por me incentivar a apresentar trabalhos acadêmicos em diferentes eventos e por confiar em mim. Obrigada pela paciência, por ser mais que uma orientadora, por ser como uma amiga.

Agradeço aos meus professores do Peru, Sotelo Pejerrey, Paulo Seminario e Franco Díaz Vega, e também à professora Patricia Tacuri, pela orientação e apoio.

À minha família, em especial às minhas tias Reyna, Hilda e Paola, aos meus tios Antonio e Víctor, por cuidarem do meu pai na minha ausência e me ajudarem a tornar esse sonho possível.

À minha prima Liz Hilario, por ser como uma irmã para mim, por ajudar sempre meus pais e por cuidar do meu peluche.

A Elard, pelo apoio incondicional, pela paciência e por todas as vezes que me ajudou com dúvidas acadêmicas. Nunca esquecerei todas as vezes que me incentivou a continuar, fazendo-me acreditar em mim mesma. Obrigada por tornar este capítulo da minha vida tão especial.

Às pessoas do retiro da paróquia São Gabino, pela linda carta que fizeram quando fui para o Brasil. Obrigada por aquele terço que tantas vezes me acompanhou nos momentos difíceis.

Aos meus amigos e colegas, tanto do Brasil quanto do Peru, agradeço profundamente pelo apoio, e amizade ao longo dessa jornada. Agradeço também aos meus colegas de mestrado pelo apoio incondicional e por tornar essa etapa tão significativa.

Finalmente, aos meus professores de mestrado, especialmente ao professor Fabiano Borges da Silva e ao professor Marcos Tadeu de Oliveira, agradeço pelo apoio e orientação, e por me motivarem a continuar com o meu sonho de realizar um doutorado.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior do Brasil (CAPES)-código de financiamento 001.

Por fim, quero expressar minha gratidão a todos que, de uma forma ou de outra, fizeram parte desta jornada. Cada palavra de encorajamento contribuiu para que esse sonho se tornasse realidade. Obrigada de todo coração.

“O Senhor é o meu pastor: nada me faltará. Ele me faz descansar em pastos verdes e me leva a águas tranquilas. O Senhor renova as minhas forças e me guia por caminhos certos, como Ele mesmo prometeu. Ainda que eu ande por um vale escuro, como a morte, não terei medo de nada. Pois tu, ó Senhor Deus, estás comigo; tu me proteges e me diriges.”

Salmo 23:1-4

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo sobre propriedades de polinômios, com ênfase nos polinômios auto-recíprocos e auto-inversíveis, incluindo casos especiais como os polinômios auto-recíprocos $R_n^{(\lambda)}(z)$, $S_n^{(\lambda)}(z)$ e $A_n^{(\lambda, \delta)}(z)$. Realizamos uma análise detalhada da localização de seus zeros no plano complexo, investigando como essa localização se relaciona com os valores dos parâmetros λ e δ e o grau do polinômio em questão. O estudo combina uma abordagem teórica com exemplos ilustrativos, permitindo uma compreensão mais profunda das propriedades dos polinômios e de seus zeros. Portanto, este trabalho enriquece a base teórica existente e oferece uma nova perspectiva sobre a relevância dos polinômios auto-recíprocos e auto-inversíveis.

Palavras-Chave: *Polinômios, Zeros de Polinômios, Círculo unitário, Polinômios auto-recíprocos, Polinômios auto-inversíveis.*

Abstract

This work presents a study on the properties of polynomials, with an emphasis on self-reciprocal and self-inversive polynomials, including special cases such as the self-reciprocal polynomials $R_n^{(\lambda)}(z)$, $S_n^{(\lambda)}(z)$, and $A_n^{(\lambda,\delta)}(z)$. We conduct a detailed analysis of the location of their zeros in the complex plane, investigating how this location relates to the values of the parameters λ and δ and the degree of the polynomial in question. The study combines a theoretical approach with illustrative examples, allowing for a deeper understanding of the properties of polynomials and their zeros. Therefore, this work enriches the existing theoretical foundation and offers a new perspective on the relevance of self-reciprocal and self-inversive polynomials.

Keywords: *Polynomials, Zeros of Polynomials, Unit Circle, Self-Reciprocal Polynomials, Self-Inversive Polynomials.*

Lista de Figuras

2.3.1	Polinômios de Jacobi de graus 1, 2, 3 e 4 para $\alpha = 2$ e $\beta = 1$.	21
2.3.2	Polinômios de Jacobi de graus 2 e 3 para $\alpha = 2$ e $\beta = 1$.	21
2.3.3	Polinômios de Jacobi de grau 4 para $\alpha = 1.5, 2, 2.5$ e $\beta = 1$.	22
2.3.4	Polinômios de Jacobi de grau 4 para $\alpha = 2$ e $\beta = 0, 0.5, 1, 1.5$.	22
2.3.5	Polinômios de Chebyshev de 1ª espécie $T_n(x)$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5$.	24
2.3.6	Polinômios de Chebyshev de 2ª espécie $U_n(x)$ para $n = 1, 2, 3, 4$.	27
2.3.7	Relação entre os pontos críticos do polinômio $U_2(x)$ com os pontos de $T_3(x)$.	29
3.1.1	Representação gráfica dos zeros do polinômio $P(z)$.	33
3.1.2	Representação gráfica dos zeros do polinômio $P(z)$.	34
3.1.3	Representação gráfica dos zeros do polinômio $P(z)$.	34
3.1.4	Os zeros de $P(z)$ são simétricos em relação à reta real e ao círculo unitário.	39
3.1.5	Representação gráfica dos zeros do polinômio $P(z) = iz^2 + iz + i$.	39
3.1.6	Os zeros de $P(z)$ se localizam dentro e fora do círculo unitário.	44
3.2.1	Transformação do polinômio auto-inversível $P(z)$ em um polinômio auto-conjugado $Q(z)$.	48
4.1.1	Representação gráfica dos zeros do polinômio $P(z)$ no círculo unitário.	53
4.2.1	Representação gráfica dos zeros do polinômio $R_5^{(1)}(z)$ no círculo unitário.	58
4.3.1	Representação gráfica dos zeros do polinômio $S_4^{(2)}(z)$ no círculo unitário.	65
4.3.2	Representação gráfica dos zeros do polinômio $S_4^{(-3)}(z)$.	66
4.4.1	Representação gráfica dos zeros do polinômio $A_4^{(\lambda, \delta)}(z)$ com $\delta = -4$ e $\lambda = -7$.	68
4.4.2	Representação gráfica dos zeros do polinômio $A_6^{(\lambda, \delta)}(z)$ com $\delta = 1/2$ e $\lambda = 1/4$.	69
4.4.3	Representação gráfica dos zeros do polinômio $A_4^{(\lambda, \delta)}(z)$ com $\delta = 1$ e $\lambda = 1, 3$.	71
4.4.4	Representação gráfica dos zeros do polinômio $A_7^{(\lambda, \delta)}(z)$ com $\delta = 1$ e $\lambda = 3/2$.	73
4.4.5	Representação gráfica dos zeros do polinômio $A_9^{(\lambda, \delta)}(z)$ com $\delta = -3$ e $\lambda = -1$.	74
4.4.6	Representação gráfica dos zeros do polinômio $A_7^{(\lambda, \delta)}(z)$ com $\delta = -1$ e $\lambda = -2$.	75

Lista de Tabelas

4.2.1 Os valores dos zeros de $R_5^{(1)}(z)$	58
4.3.1 Os valores dos zeros de $S_4^{(2)}(z)$	64

Sumário

Resumo	5
Abstract	7
Lista de Figuras	8
Lista de Tabelas	9
Sumário	10
1 Introdução	11
2 Resultados Preliminares	13
2.1 Introdução	13
2.2 Transformação de Möbius	14
2.3 Polinômios Ortogonais	16
2.3.1 Polinômios Ortogonais Clássicos	19
2.3.1.1 Polinômios de Jacobi	20
2.3.1.1.1 Polinômios de Chebyshev de 1ª espécie	23
2.3.1.1.2 Polinômios de Chebyshev de 2ª espécie	26
3 Polinômios auto-conjugados, auto-recíprocos e auto-inversíveis	31
3.1 Introdução	31
3.2 Polinômios obtidos através da transformação de Möbius	44
4 Classes especiais de polinômios	49
4.1 Introdução	49
4.2 Análise das propriedades de $R_n^{(\lambda)}(z)$	53
4.3 Análise das propriedades de $S_n^{(\lambda)}(z)$	59
4.4 Análise das propriedades de $A_n^{(\lambda, \delta)}(z)$	66
5 Considerações finais	79
Referências	81

Introdução

No campo da matemática, os polinômios desempenham um papel fundamental em diversas áreas, desde Álgebra até Análise Matemática. Ao longo da história, esses polinômios têm capturado a atenção dos matemáticos por suas características. Dentre elas, podemos destacar a simetria.

Nosso objetivo é realizar uma análise dos polinômios auto-recíprocos e auto-inversíveis, explorando suas propriedades, estruturas e relações. A metodologia incluirá uma abordagem teórica que combinará análise algébrica e exemplos ilustrativos, com o fim de proporcionar uma melhor compreensão.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira:

No segundo capítulo, discutiremos alguns conceitos preliminares que servirão como base para a compreensão dos tópicos abordados nos capítulos posteriores. Dentro deste capítulo, destacaremos a importância do Teorema Fundamental da Álgebra, da transformação de Möbius e dos polinômios de Chebyshev de primeira e segunda espécies, que serão utilizados ao longo do nosso estudo. Cabe destacar que, neste texto, o termo “círculo unitário” será usado para designar somente sua borda.

No terceiro capítulo, abordaremos o estudo de polinômios com características especiais, tais como auto-conjugados, auto-recíprocos e auto-inversíveis. Para abordar esses polinômios, é necessário um conhecimento sólido dos conceitos básicos relacionados aos polinômios conjugados, recíprocos e inversíveis. Também abordaremos um teorema clássico chamado Teorema de Cohn. Este teorema é um importante resultado na teoria dos polinômios que fornece uma condição necessária e suficiente para que um polinômio seja auto-inversível. Além disso, observaremos como, através da transformação de Möbius, podemos compreender a relação entre os polinômios auto-conjugados e os polinômios auto-inversíveis. Essa mesma transformação também nos permitirá explorar outros tipos de polinômios.

No quarto capítulo, analisaremos os polinômios auto-recíprocos $R_n^{(\lambda)}(z)$, $S_n^{(\lambda)}(z)$ e $A_n^{(\lambda, \delta)}(z)$, apresentando condições necessárias para que os zeros desses polinômios estejam localizados no círculo unitário. Dentro desse contexto, discutiremos também a relação entre os zeros dos polinômios com os valores assumidos por λ e δ e o grau do polinômio.

Em resumo, este estudo tem como objetivo realizar uma análise dos polinômios auto-recíprocos e auto-inversíveis, explorando suas propriedades. Através desta pesquisa, espera-se contribuir para o entendimento desses polinômios e sua relevância no contexto matemático.

Resultados Preliminares

Este capítulo apresenta uma série de resultados que serão necessários para facilitar a leitura e compreender com mais profundidade as ideias apresentadas neste trabalho. Para isso, utilizaremos as referências [1], [3], [4], [5], [10], [11], [12], [13], [17], [18] e [19].

2.1 Introdução

Um polinômio complexo é uma função $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, definida da seguinte maneira:

$$P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k,$$

onde a_k são coeficientes complexos, nem todos nulos, e $z \in \mathbb{C}$. Se $a_n \neq 0$, dizemos que o polinômio tem grau n .

Além disso, $P(z)$ é um polinômio real se e somente se satisfaz a seguinte igualdade:

$$\overline{P(\bar{z})} = P(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

A multiplicidade algébrica do zero de um polinômio é definida como o número de vezes que esse zero aparece como solução do polinômio. Se considerarmos um polinômio $P(z)$ que pode ser expresso na forma:

$$P(z) = (z - \xi)^m Q(z),$$

onde ξ é zero do polinômio e m é um número inteiro positivo, então ξ possui multiplicidade algébrica m . Na teoria dos polinômios, a análise dos zeros e suas multiplicidades é fundamental para entender o comportamento dos polinômios. A multiplicidade de um zero de um polinômio pode ser caracterizada da seguinte maneira: seja $r \in \mathbb{N}^*$ ($\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$), $P \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ ¹ e $a \in \mathbb{C}$. O número a é um zero de multiplicidade r do polinômio P se, e somente se:

$$P(a) = P'(a) = \dots = P^{(r-1)}(a) = 0 \quad \text{e} \quad P^{(r)}(a) \neq 0.$$

Essa condição, conhecida como caracterização da multiplicidade de um zero, indica que todas as derivadas do polinômio até a ordem $r - 1$ avaliadas em a são iguais a zero, enquanto a derivada de ordem r não é igual a zero.

A seguir, apresentamos dois resultados da referência [19], importantes no contexto do estudo dos zeros de polinômios.

¹ $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ é o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a n com coeficientes em $\mathbb{C}$.

Teorema 2.1.1 (O Teorema Fundamental da Álgebra). *Cada polinômio*

$$P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k,$$

de grau n tem representação única da seguinte forma:

$$P(z) = a_n \prod_{k=1}^n (z - z_k), \quad (2.1.1)$$

onde $a_n \neq 0$ e z_k são os zeros de $P(z)$.

De [19], Todo polinômio não constante tem pelo menos um zero. Seja $P(z)$ um polinômio de grau n . Se $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m$ denotam os zeros distintos de $P(z)$ com multiplicidades $r_1, r_2, \dots, r_m$ respectivamente, então podemos reescrever a equação (2.1.1) como:

$$P(z) = a_n \prod_{k=1}^m (z - \zeta_k)^{r_k}, \quad \sum_{k=1}^m r_k = n.$$

O seguinte teorema é um caso particular do Teorema do Valor Intermediário. Para mais detalhes, consulte [4].

Teorema 2.1.2 (Bolzano). *Seja f uma função de valor real e contínua em um intervalo compacto $[a, b]$ em $\mathbb{R}$. Suponha também que $f(a)$ e $f(b)$ tenham sinais opostos, ou seja, que $f(a)f(b) < 0$. Nesse caso, podemos afirmar que existe pelo menos um ponto c dentro do intervalo aberto (a, b) tal que $f(c) = 0$.*

2.2 Transformação de Möbius

Nesta seção, vamos abordar as propriedades das transformações de Möbius, que recebem o nome do matemático alemão August Ferdinand Möbius, famoso por sua descoberta da faixa de Möbius. A principal referência utilizada para esta seção foi [13].

Definição 2.2.1. *Uma transformação de Möbius é uma função racional expressa como*

$$\mathcal{F}(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ e $\Delta = ad - bc \neq 0$.

A condição $\Delta = ad - bc \neq 0$ assegura que o domínio $D(\mathcal{F})$ da função $\mathcal{F}$ é um conjunto não-vazio. Isso ocorre porque $D(\mathcal{F}) = \emptyset$ se, e somente se, $cz + d = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Em termos equivalentes, isso se dá quando $c = d = 0$ e então $\Delta = ad - bc = 0$. Além disso, se z_1 e z_2 pertencem a $D(\mathcal{F})$, temos que $\mathcal{F}(z_1) = \mathcal{F}(z_2)$ se, e somente se,

$$(ad - bc)z_1 = (ad - bc)z_2.$$

Isso indica que $\mathcal{F}$ é injetora em seu domínio quando $ad - bc \neq 0$. Em particular, $\mathcal{F}$ é não-constante.

Quando compomos transformações de Möbius, surgem pontos do plano complexo que podem ser problemáticos, pois não estão incluídos no domínio ou na imagem de algumas dessas transformações. Para evitar tais problemas, consideremos o plano complexo completado, representado por $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \infty$ (esfera de Riemann). Podemos analisar a transformação de

Möbius dada por $\mathcal{F}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, com $\Delta = ad - bc \neq 0$ e $c \neq 0$. Neste caso, definimos a transformação em $\mathbb{C}_\infty$ levando em conta que $\mathcal{F}\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$. O ponto $w = \frac{a}{c}$, que não era a imagem de nenhum ponto de $\mathbb{C}$ por $\mathcal{F}$, agora será considerado como $\mathcal{F}(\infty)$, ou seja, $\mathcal{F}(\infty) = \frac{a}{c}$. Dessa forma, $\mathcal{F}$ se torna uma bijeção de $\mathbb{C}_\infty$ em $\mathbb{C}_\infty$. Por outro lado, se $c = 0$, podemos afirmar que $\mathcal{F}$ é uma bijeção de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$. Definindo $\mathcal{F}(\infty) = \infty$, concluímos que $\mathcal{F}$ também é uma bijeção de $\mathbb{C}_\infty$ em $\mathbb{C}_\infty$. Assim, uma transformação de Möbius é uma bijeção $\mathcal{F} : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ dada por:

$$\mathcal{F}(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

com $\Delta = ad - bc \neq 0$, onde:

$$\begin{cases} \mathcal{F}(\infty) = \frac{a}{c} \text{ e } \mathcal{F}\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty, & \text{se } c \neq 0, \\ \mathcal{F}(\infty) = \infty, & \text{se } c = 0. \end{cases}$$

Vale a pena observar que as transformações elementares no plano complexo, que são definidas a seguir, constituem casos especiais da transformação de Möbius:

- (i) Seja $\beta \in \mathbb{C}$ fixo. A translação por β é expressa como $T_\beta(z) = z + \beta$.
- (ii) Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ com $\alpha \neq 0$. A multiplicação por α é dada por $H(z) = \alpha z$.
- (iii) Seja $\theta \in \mathbb{R}$. A rotação de θ radianos é dada por $R_\theta(z) = e^{i\theta}z$.
- (iv) A inversão é representada como $J(z) = \frac{1}{z}$.

Teorema 2.2.1. *Toda transformação de Möbius é obtida por composição de translações, multiplicação por números complexos e a inversão.*

Dado que toda transformação de Möbius resulta da composição de transformações elementares, que são inversíveis, podemos concluir o seguinte resultado.

Corolário 2.2.1. *Toda transformação de Möbius é inversível.*

Outra característica que decorre do fato de que toda transformação de Möbius é uma composição de transformações elementares é que essas transformações, ao atuarem sobre $\mathbb{C}_\infty$, convertem círculos em círculos.

Por meio de cálculos simples, podemos determinar que a inversa da transformação de Möbius é expressa por

$$\mathcal{F}^{-1}(z) = -\frac{dz+b}{cz-a}, \quad \text{com } \Delta = ad - bc \neq 0,$$

onde

$$\begin{cases} \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) = \infty \text{ e } \mathcal{F}^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}, & \text{se } c \neq 0, \\ \mathcal{F}^{-1}(\infty) = \infty, & \text{se } c = 0. \end{cases}$$

Definimos um elemento $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$ como um ponto fixo da transformação de Möbius $\mathcal{F}$ se, e somente se, $\mathcal{F}(z_0) = z_0$. É evidente que todos os pontos de $\mathbb{C}_\infty$ são pontos fixos da transformação identidade em $\mathbb{C}_\infty$.

Proposição 2.2.1. *Uma transformação de Möbius distinta da identidade tem um ou dois pontos fixos em $\mathbb{C}_\infty$.*

Corolário 2.2.2. *Uma transformação de Möbius com mais de dois pontos fixos é a identidade.*

Para duas séries de pontos distintos z_1, z_2, z_3 e w_1, w_2, w_3 , se houver uma transformação de Möbius $\mathcal{F}$ que satisfaça $\mathcal{F}(z_i) = w_i$, para $i = 1, 2, 3$, então essa transformação é única. O resultado a seguir demonstra a existência de tal transformação. Portanto, uma transformação de Möbius é completamente determinada pela ação sobre três pontos distintos.

Teorema 2.2.2. *Dados dois pares de ternas de pontos distintos z_1, z_2, z_3 e w_1, w_2, w_3 em $\mathbb{C}^\infty$, existe uma única transformação de Möbius $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F}(z_i) = w_i$ para $i = 1, 2, 3$.*

Uma característica relevante da transformação de Möbius $\mathcal{F}$ é que ela estabelece uma transformação conforme em $\mathbb{C}$, o que significa que preserva ângulos no plano complexo. Essa propriedade decorre do fato de que, se uma função analítica $\mathcal{F}(z)$ tem uma derivada $\mathcal{F}'(z)$ que é finita e diferente de zero em uma região do plano, então $\mathcal{F}$ é conforme em todos os pontos dessa região. No caso específico da transformação de Möbius $\mathcal{F}$, ela é analítica, e sua derivada é finita e não nula em todos os pontos de $\mathbb{C}$, com exceção nos pontos $z = -\frac{d}{c}$ (quando $c \neq 0$) e ∞ (quando $c = 0$).

Ao longo deste trabalho, faremos uso da transformação de Möbius que mapeia o círculo de raio η , com $\eta > 0$, na reta real. Considerando os pontos $z_1 = \eta i$, $z_2 = \eta$, $z_3 = -\eta i$ e $w_1 = \eta$, $w_2 = 0$, $w_3 = -\eta$, é simples demonstrar que a função $\mathcal{F}$ é expressa por:

$$\mathcal{F}(z) = -\eta i \left(\frac{z - \eta}{z + \eta} \right).$$

Desta forma, a inversa da transformação é dada por:

$$\mathcal{F}^{-1}(z) = -\eta \left(\frac{z - \eta i}{z + \eta i} \right).$$

Para simplificar a notação, quando mencionarmos x , nos referimos a uma relação com a reta real, enquanto z está associado ao plano complexo. Portanto, utilizaremos $x(z)$ para representar a transformação de Möbius que leva o círculo de raio η para a reta real, definida como:

$$x(z) = -\eta i \left(\frac{z - \eta}{z + \eta} \right),$$

e a notação $z(x)$ que transforma a reta real no círculo de raio η , é expressa por:

$$z(x) = -\eta \left(\frac{x - \eta i}{x + \eta i} \right).$$

2.3 Polinômios Ortogonais

Os polinômios ortogonais são uma classe especial de polinômios que têm um papel fundamental em diversas áreas, como análise numérica, teoria das funções e física. A principal característica central desses polinômios é a sua relação de ortogonalidade em relação a um produto interno específico definido em um espaço funcional. Existem diversos polinômios ortogonais, como os polinômios de Legendre, Chebyshev, Hermite, Laguerre, entre

outros. Cada um relacionado a diferentes tipos de problemas e domínios. Esses polinômios oferecem ferramentas poderosas para simplificar e resolver problemas complexos. Nesta seção, realizaremos um breve estudo dos polinômios ortogonais clássicos, pois os polinômios de Chebyshev serão úteis ao longo deste trabalho. Utilizaremos as referências [1], [3], [11], [17] e [18]. Os polinômios ortogonais formam uma sequência de polinômios que atendem à condição de ortogonalidade em relação a uma função peso em um determinado intervalo $[a, b]$. A função peso $w(x)$ desempenha um papel fundamental na definição e na avaliação das propriedades ortogonais desses polinômios.

Definição 2.3.1. Consideremos um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ onde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. A função $w(x)$ é uma função não negativa que é mensurável no sentido de Lebesgue, e satisfaz a condição

$$\int_a^b w(x) dx > 0.$$

Chamaremos $w(x)$ de uma função de peso sobre o intervalo $[a, b]$.

Esta função peso permite a definição do produto interno em $C[a, b]$,

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx. \quad (2.3.1)$$

Definição 2.3.2. Uma sequência de polinômios $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$, $P_n \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ de grau n , é uma sequência de polinômios ortogonais, em relação à função peso $w(x)$ em um intervalo (a, b) se satisfaz as seguintes condições:

1. O grau exato de $P_n(x)$ deve ser n , onde $n \geq 0$.
2. $\langle P_n, P_m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ \varrho_n \neq 0, & \text{se } n = m. \end{cases}$

Observa-se que, $\varrho_n > 0$, pois $P_n^2(x)w(x) \geq 0$ em (a, b) . Além disso, usando o delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

podemos escrever o item 2 da seguinte forma:

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_a^b P_n(x) P_m(x) w(x)dx = \delta_{nm} \varrho_n. \quad (2.3.2)$$

Corolário 2.3.1. Dados duas sequências de polinômios ortogonais $\{q_n(x)\}_{n=0}^\infty$ e $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$, em relação à função peso $w(x)$ em um intervalo (a, b) . Então,

$$q_j(x) = c_j P_j(x), \quad j = 0, 1, \dots,$$

onde c_j é uma constante que depende de j .

A seguir, apresentaremos o importante teorema conhecido como relação de recorrência de três termos, que é uma propriedade essencial dos polinômios ortogonais. Essa relação permite calcular os valores dos polinômios ortogonais e entender suas propriedades de uma maneira mais simples e rápida.

Teorema 2.3.1 (Relação de recorrência de três termos). Se $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortogonais no intervalo (a, b) em relação à função peso $w(x)$, então,

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (2.3.3)$$

onde $P_0(x) = 1$, $P_{-1}(x) = 0$, α_{n+1} , β_n , $\gamma_n \in \mathbb{R}$, com $n \geq 1$, e

$$\gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} \neq 0, \quad \beta_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle}, \quad e \quad \alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle} \neq 0.$$

A seguir, enunciaremos algumas características dos zeros dos polinômios ortogonais.

Teorema 2.3.2. Se $\{P_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortogonais, então dois polinômios consecutivos quaisquer dessa sequência não têm zeros em comum.

Os próximos resultados são inspirados nas referências [5] e [11].

Teorema 2.3.3 (Teorema da separação dos zeros). Se $\{P_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortogonais, então entre dois zeros consecutivos do polinômio $P_n(x)$ existe somente um zero de $P_{n-1}(x)$.

Na seguinte observação, vamos apresentar outro tipo de relação de recorrência de três termos que foi estudada na referência [20], no artigo intitulado ‘Polynomials generated by a three term recurrence relation: bounds for complex zeros’. Esta relação de recorrência é diferente da relação de recorrência de três termos para os polinômios ortogonais reais.

Observação 2.3.1. Consideramos a sequência de polinômios $\{Q_m\}$ gerada pela relação de recorrência de três termos:

$$Q_{m+1}(z) = (z + \beta_{m+1})Q_m(z) - \alpha_{m+1}zQ_{m-1}(z), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (2.3.4)$$

com $Q_0 = 1$ e $Q_1(z) = z + \beta_1$, onde α_m e β_m são números complexos tais que $\alpha_m \neq 0$ para $m = 2, 3, \dots$ e $\beta_m \neq 0$ para $m = 1, 2, 3, \dots$. Essa relação de recorrência tem sido amplamente estudada quando:

$$\alpha_{m+1} > 0 \quad e \quad \beta_m < 0 \quad \text{para} \quad m \geq 1. \quad (2.3.5)$$

A referência [14] motivou o estudo desse caso particular da relação de recorrência. Quando a condição (2.3.5) é satisfeita, foi demonstrado em [14] que os polinômios correspondentes satisfazem a propriedade de ortogonalidade de Laurent (L-ortogonalidade):

$$\int t^{-m+s} Q_m(t) d\phi(t) = 0, \quad s = 0, 1, \dots, m-1,$$

onde $d\phi$ é uma medida positiva forte definida no eixo real positivo. A palavra "forte" é usada para indicar que os momentos $\mu_m = \int t^m d\phi(t)$ existem também para todos os valores negativos de m .

A partir da relação de recorrência de três termos (2.3.4), observa-se que:

$$Q_m(0) = \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m \neq 0, \quad m \geq 1.$$

Além disso, a equação (2.3.4) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$(i) \quad \alpha_2 z = (z + \beta_2)Q_1(z) - Q_2(z), \quad (2.3.6)$$

$$(ii) \quad \alpha_{m+1} z = (z + \beta_{m+1}) \frac{Q_m(z)}{Q_{m-1}(z)} - \frac{Q_{m+1}(z)}{Q_{m-1}(z)} \quad m \geq 2. \quad (2.3.7)$$

A seguir, enunciamos um lema importante sobre os polinômios Q_m .

Lema 2.3.1. *Para qualquer $m \geq 1$, dois polinômios consecutivos Q_m e Q_{m+1} não possuem zeros em comum.*

Demonstração. *Inicialmente, consideremos o caso base $m = 1$. Suponhamos, por absurdo, que exista um $\omega \in \mathbb{C}$ tal que $Q_1(\omega) = Q_2(\omega) = 0$. De acordo com a relação de recorrência (2.3.7), temos:*

$$\begin{aligned}\alpha_2\omega &= (\omega + \beta_2)\frac{Q_1(\omega)}{Q_0(\omega)} - \frac{Q_2(\omega)}{Q_0(\omega)} \\ -\alpha_2\omega Q_0(\omega) &= Q_2(\omega),\end{aligned}$$

e como $Q_0 = 1$ e $\alpha_2 \neq 0$, isso implica que $\omega = 0$. Como $\omega = 0$ não é zero de nenhum polinômio Q_m , obtemos uma contradição. Portanto, Q_1 e Q_2 não possuem zeros em comum.

Prosseguimos agora com o passo indutivo. Suponhamos que, para algum $m \geq 2$, os polinômios Q_{m-1} e Q_m não compartilham zeros (hipótese de indução). Seja $\omega \in \mathbb{C}$ tal que $Q_m(\omega) = 0$. Pela hipótese de indução, temos $Q_{m-1}(\omega) \neq 0$. Aplicando novamente a relação (2.3.7) e avaliando-a em ω , obtemos:

$$Q_{m+1}(\omega) = -\alpha_{m+1}\omega Q_{m-1}(\omega).$$

Dado que $Q_{m-1}(\omega) \neq 0$ e $\omega \neq 0$ (pois ω não é zero de nenhum Q_m), concluímos que $Q_{m+1}(\omega) \neq 0$. Assim, Q_m e Q_{m+1} não possuem zeros em comum. Pelo princípio da indução, segue que, para todo $m \geq 1$, os polinômios Q_m e Q_{m+1} não têm zeros em comum. ■

A partir da equação (2.3.4), é possível verificar que, para qualquer $n \geq 1$, temos:

$$Q_n(z) = \begin{vmatrix} z + \beta_1 & -\alpha_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -z & z + \beta_2 & -\alpha_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -z & z + \beta_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z + \beta_{n-1} & -\alpha_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -z & z + \beta_n \end{vmatrix}.$$

Com base nessa expressão, da referência [20], observa-se que os zeros de Q_n correspondem aos autovalores da matriz de Hessenberg inferior

$$\mathbf{H}_n = \begin{pmatrix} \eta_1 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \alpha_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \alpha_{n-1} & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \cdots & \eta_{n-1} & \alpha_n \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \cdots & \eta_{n-1} & \eta_n \end{pmatrix},$$

onde $\eta_m = \alpha_m - \beta_m$ para $m = 1, 2, \dots, n$, com $\alpha_1 = 0$.

2.3.1 Polinômios Ortogonais Clássicos

Os polinômios ortogonais de Jacobi, Legendre, Gegenbauer, Chebyshev, Laguerre e Hermite são chamados polinômios ortogonais clássicos. Nesta seção abordaremos as propriedades mais importantes dos polinômios de Jacobi. Isso nos ajudará a entender os polinômios de Chebyshev. Esses últimos polinômios serão usados posteriormente no estudo dos polinômios auto-recíprocos. Utilizaremos as referências [1], [3] e [11].

Definição 2.3.3. Os polinômios ortogonais em relação ao produto interno no intervalo (a, b) são denominados *polinômios ortogonais clássicos* se a função de peso $w(x)$ satisfaz a seguinte equação diferencial, chamada *equação de Pearson*:

$$\frac{d}{dx}(M(x) \cdot w(x)) = N(x)w(x),$$

onde

$$M(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{se } (a, b) = (-1, 1), \\ x, & \text{se } (a, b) = (0, \infty), \\ 1, & \text{se } (a, b) = (-\infty, \infty), \end{cases}$$

e $N(x)$ é um polinômio de grau 1.

Definiremos, agora, alguns tipos de polinômios ortogonais clássicos.

2.3.1.1 Polinômios de Jacobi

De acordo com [18], os polinômios de Jacobi foram introduzidos pelo alemão Carl Gustav Jakob Jacobi. Ele foi o primeiro matemático judeu a ser designado professor em uma universidade alemã. Jacobi contribuiu significativamente para as funções elípticas, equações diferenciais e a teoria dos números. Os Polinômios de Jacobi são uma classe de polinômios ortogonais clássicos e são denotados como $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$. Além disso, estão definidos através da fórmula de Rodrigues:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}].$$

Observaremos que esses polinômios são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ em relação à função peso $w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Temos que o coeficiente do termo de maior grau dos polinômios de Jacobi é

$$a_{n,n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k! (n-k)!} (\alpha+n)(\alpha+n-1) \dots (\alpha+k+1)(\beta+n)(\beta+n-1) \dots (\beta+n-k+1).$$

Esse coeficiente também pode ser escrito utilizando a função gama. Assim,

$$a_{n,n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k! (n-k)!} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} \frac{\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\beta+n-k+1)} = \frac{1}{2^n n!} \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}.$$

Os polinômios de Jacobi satisfazem a seguinte relação de ortogonalidade:

$$\langle P_n^{(\alpha, \beta)}, P_m^{(\alpha, \beta)} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1) n! \Gamma(\alpha+\beta+n+1)}, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Além disso, a relação de recorrência de três termos para os polinômios de Jacobi é dada por:

$$P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(x) = (\gamma_{n+1} - \beta_{n+1}) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) - \alpha_{n+1} P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x), \quad n \geq 0,$$

onde $P_0(x) = 1$, $P_{-1}(x) = 0$ e

$$\gamma_{n+1} = \frac{(\alpha + \beta + 2n + 2)(\alpha + \beta + 2n + 1)}{2(n+1)(\alpha + \beta + n + 1)},$$

$$\beta_{n+1} = \frac{(\beta^2 - \alpha^2)(\alpha + \beta + 2n + 1)}{2(n + 1)(\alpha + \beta + n + 1)(\alpha + \beta + 2n)},$$

$$\alpha_{n+1} = \frac{(\alpha + n)(\beta + n)(\alpha + \beta + 2n + 2)}{(n + 1)(\alpha + \beta + n + 1)(\alpha + \beta + 2n)}.$$

Agora, mostraremos os gráficos dos polinômios de Jacobi do grau 1 a 4, para os mesmos valores de α e β (ver Figura 2.3.1).

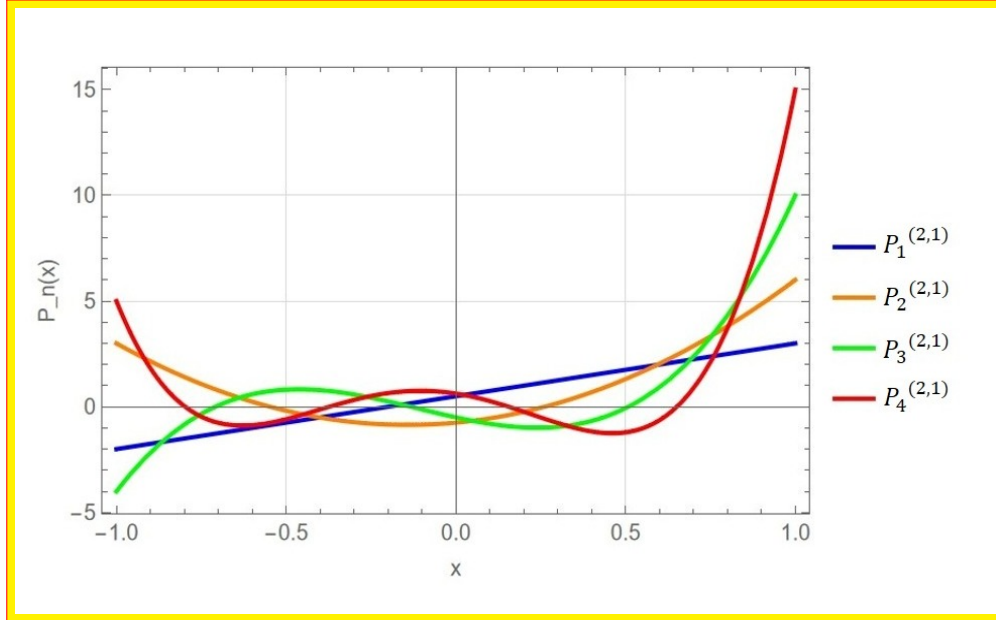


Figura 2.3.1: Polinômios de Jacobi de graus 1, 2, 3 e 4 para $\alpha = 2$ e $\beta = 1$.

Na Figura 2.3.2, apresentamos os polinômios de Jacobi de graus 2 e 3 com os mesmos valores de $\alpha = 2$ e $\beta = 1$. Note que, entre dois zeros consecutivos do polinômio de grau 2, existe um único zero do polinômio de grau 3.

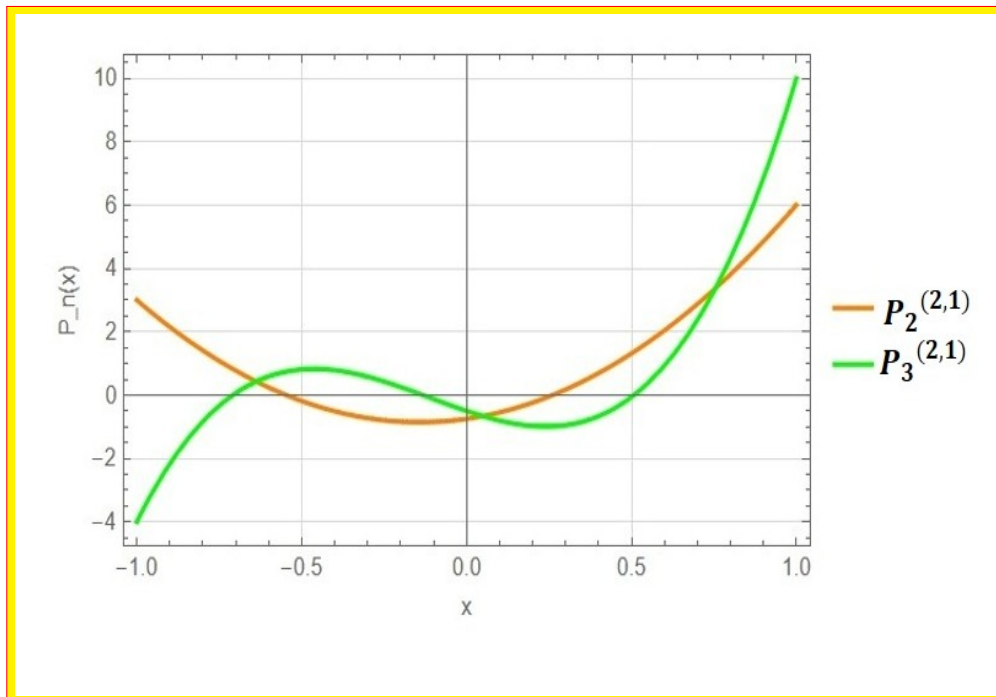


Figura 2.3.2: Polinômios de Jacobi de graus 2 e 3 para $\alpha = 2$ e $\beta = 1$.

Na Figura 2.3.3, estão representados os polinômios de Jacobi de grau 4, com valores diferentes de α . Se os valores de α crescem, para cada $i = 1, 2, 3, 4$, o zero $x_{4,i}$ decresce.

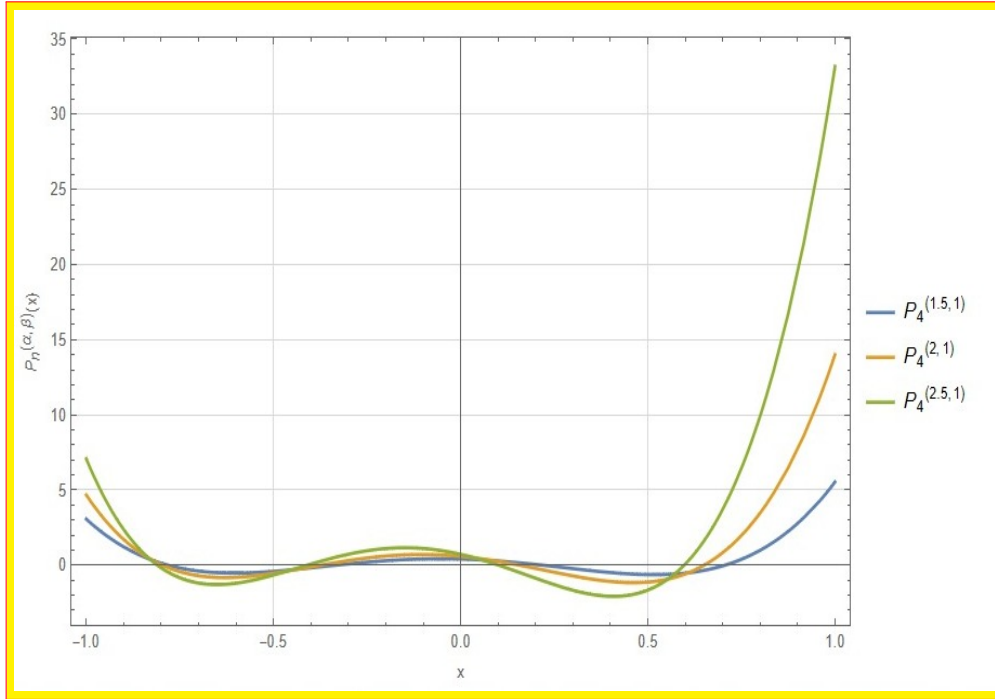


Figura 2.3.3: Polinômios de Jacobi de grau 4 para $\alpha = 1.5, 2, 2.5$ e $\beta = 1$.

A Figura 2.3.4 mostra os polinômios de Jacobi de grau 4, com valores diferentes de β . Se os valores de β crescem, para cada $i = 1, 2, 3, 4$, o zero $x_{4,i}$ cresce.

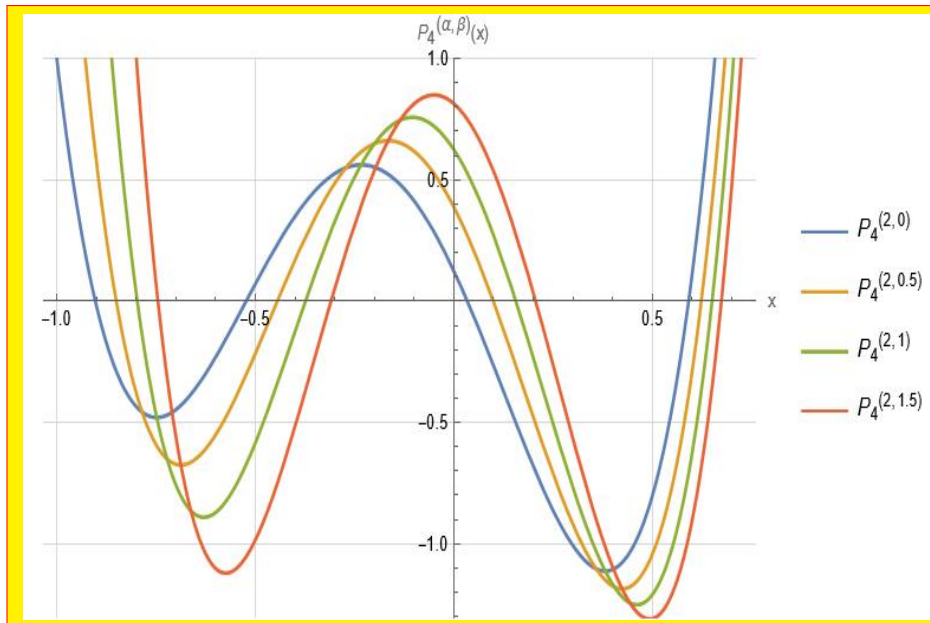


Figura 2.3.4: Polinômios de Jacobi de grau 4 para $\alpha = 2$ e $\beta = 0, 0.5, 1, 1.5$.

Propriedades 2.3.1. As seguintes igualdade são válidas:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(1) = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n! \Gamma(\alpha + 1)} = \binom{\alpha + n}{n}. \quad (2.3.8)$$

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(-1) = \frac{(-1)^n \Gamma(\beta + n + 1)}{n! \Gamma(\beta + 1)} = (-1)^n \binom{\beta + n}{n}. \quad (2.3.9)$$

A seguir, abordaremos dois tipos de polinômios de Jacobi, os chamados Polinômios de Chebyshev de 1ª espécie, $T_n(x)$, e de 2ª espécie, $U_n(x)$. Em [17], os polinômios de Chebyshev têm o nome do matemático russo Pafnuty Lvovich Chebyshev. Em seu artigo intitulado “Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes”, publicado em 1854, surge pela primeira vez seus famosos polinômios de Chebyshev.

2.3.1.1.1 Polinômios de Chebyshev de 1ª espécie

Em [3], os polinômios de Chebyshev de 1ª espécie são uma sequência de polinômios ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ com relação à função peso $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ com $\alpha = \beta = -1/2$. Os polinômios de Chebyshev podem ser definidos através das identidades trigonométricas, da seguinte forma

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in [-1, 1], \quad (2.3.10)$$

e fazendo $x = \cos \theta$, onde $\theta \in [0, \pi]$, obtemos pela definição de funções trigonométricas inversas que $\theta = \arccos(x)$. Logo, substituímos na equação (2.3.10) obtendo

$$T_n(x) = \cos(n\theta). \quad (2.3.11)$$

Além disso,

$$T_{n+1}(x) = \cos((n+1)\theta) \quad \text{e} \quad T_{n-1}(x) = \cos((n-1)\theta),$$

agora substituindo na seguinte relação trigonométrica,

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2 \cos(n\theta) \cos \theta,$$

obtemos a relação de recorrência de três termos para os polinômios de Chebyshev de 1ª espécie

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

com $T_0(x) = 1$ e $T_1(x) = x$.

Observaremos os primeiros polinômios de Chebyshev de 1ª espécie $T_n(x)$ (ver Figura 2.3.5) e analisaremos como os coeficientes dos termos de maior grau se comportam,

$$(a) \quad T_0(x) = \cos(0 \arccos x) = \cos(0) = 1,$$

$$(b) \quad T_1(x) = \cos(\arccos x) = \cos(\theta) = x = 2^0 x,$$

$$(c) \quad T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1,$$

$$(d) \quad T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x = 2^2 x^3 - 3x,$$

$$(e) \quad T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 8x^2 + 1 = 2^3 x^4 - 2^3 x^2 + 1,$$

$$(f) \quad T_5(x) = 2xT_4(x) - T_3(x) = 2x(8x^4 - 8x^2 + 1) - (4x^3 - 3x) = 2^4 x^5 - 20x^3 + 5x,$$

portanto,

$$a_{n,n} = 2^{n-1}, \quad n \geq 1. \quad (2.3.12)$$

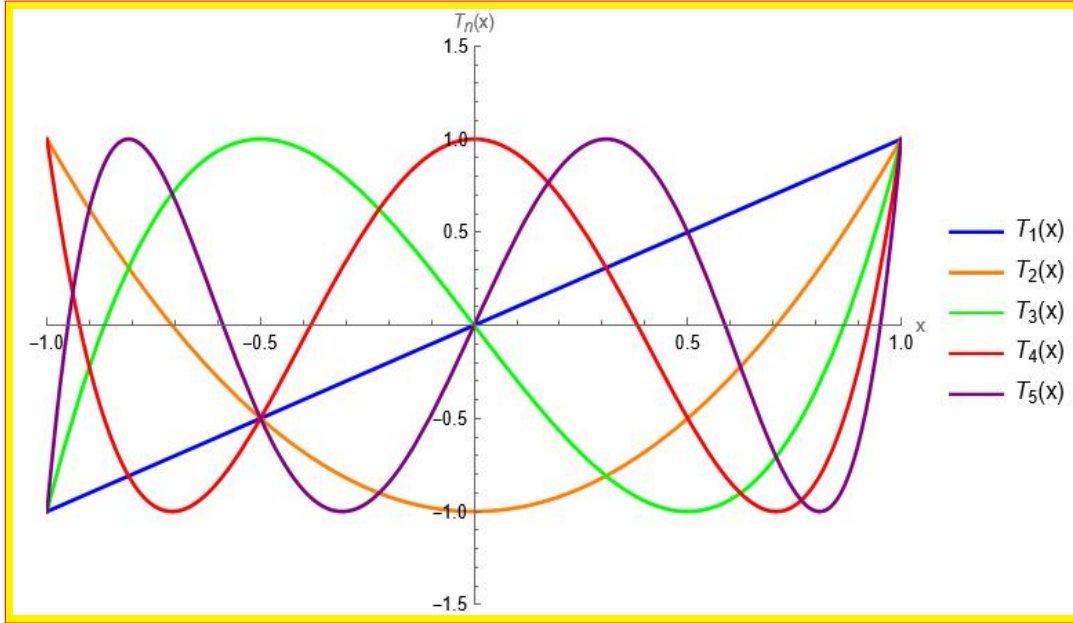


Figura 2.3.5: Polinômios de Chebyshev de 1ª espécie $T_n(x)$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Do gráfico, observe que os mínimos e máximos dos polinômios de Chebyshev no $[-1, 1]$ são iguais a 1.

Teorema 2.3.4. *Os polinômios de Chebyshev de 1ª espécie, $T_n(x)$, verificam a relação de ortogonalidade da seguinte maneira:*

$$\langle T_n, T_m \rangle = \begin{cases} \pi, & \text{se } m = n = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } m = n > 0, \\ 0, & \text{se } m \neq n. \end{cases}$$

Demonstração. Como

$$\begin{aligned} \langle T_n, T_m \rangle &= \int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) w(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 \cos(n \arccos x) \cos(m \arccos x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, \end{aligned}$$

realizaremos a mudança de variável $x = \cos \theta$, onde $dx = -\sin \theta d\theta$, substituindo na equação acima, temos:

$$\langle T_n, T_m \rangle = - \int_{\pi}^0 \frac{\cos(n\theta) \cos(m\theta) \sin \theta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} d\theta = \int_0^{\pi} \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta.$$

A seguir, analisaremos os três casos:

1. Para $m = n = 0$, obtemos:

$$\langle T_0, T_0 \rangle = \int_0^{\pi} \cos^2(0) d\theta = \pi.$$

2. Para $m = n > 0$, temos:

$$\langle T_n, T_n \rangle = \int_0^\pi \cos^2(n\theta) d\theta.$$

Logo, usando a identidade trigonométrica para o cosseno do arco duplo, temos

$$\cos^2(n\theta) = \frac{\cos(2n\theta) + 1}{2},$$

substituindo na equação acima,

$$\int_0^\pi \cos^2(n\theta) d\theta = \int_0^\pi \frac{\cos(2n\theta) + 1}{2} d\theta = \int_0^\pi \frac{\cos(2n\theta)}{2} d\theta + \int_0^\pi \frac{1}{2} d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Portanto,

$$\langle T_n, T_n \rangle = \frac{\pi}{2}.$$

3. Para $m \neq n$, usaremos as seguintes identidades trigonométricas:

- (i) $\cos((m+n)\theta) = \cos(m\theta) \cos(n\theta) - \sin(m\theta) \sin(n\theta),$
- (ii) $\cos((m-n)\theta) = \cos(m\theta) \cos(n\theta) + \sin(m\theta) \sin(n\theta).$

Somando e integrando, temos:

$$\int_0^\pi [\cos((m+n)\theta) + \cos((m-n)\theta)] d\theta = 2 \int_0^\pi \cos(m\theta) \cos(n\theta) d\theta = 2\langle T_n, T_m \rangle.$$

Assim,

$$2\langle T_n, T_m \rangle = \int_0^\pi \cos((m+n)\theta) d\theta + \int_0^\pi \cos((m-n)\theta) d\theta = 0. \quad \blacksquare$$

Observação 2.3.2. Mostraremos algumas características que os polinômios de Chebyshev de 1ª espécie, $T_n(x)$, possuem em relação aos seus coeficientes, zeros e seus pontos extremos.

- (a) Observe que, fazendo $\alpha = \beta = -1/2$ na função peso dos polinômios de Jacobi, temos que $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Assim,

$$T_n(x) = 2^{2n} \binom{2n}{n}^{-1} P_n^{(-1/2, -1/2)}(x).$$

De fato, pelo Corolário 2.3.1, temos que $T_n(x) = c_n P_n^{(-1/2, -1/2)}(x)$. Tendo em conta que $a_{n,i}^T, i = 1, 2, \dots, n$, para os coeficientes do polinômio de Chebyshev e $a_{n,i}^P, i = 1, 2, \dots, n$, para os coeficientes do polinômio de Jacobi com $\alpha = \beta = -1/2$, então,

$$a_{n,n}^T x^n + a_{n,n-1}^T x^{n-1} + \dots + a_{n,0}^T = c_n (a_{n,n}^P x^n + a_{n,n-1}^P x^{n-1} + \dots + a_{n,0}^P),$$

logo,

$$c_n = \frac{a_{n,n}^T}{a_{n,n}^P} = \frac{2^{n-1}}{\frac{1}{n! 2^n} \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)}}. \quad (2.3.13)$$

Lembrando que o coeficiente binomial é definido como

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

então, substituindo (2.3.12) e usando a Proposição 2.3.1 na equação (2.3.13), obtemos:

$$\frac{2^{n-1}}{n! 2^n \Gamma(n)} = \frac{2^n 2^{-1}}{n! 2^n (n-1)!} = \frac{2^{2n} 2^{-1}}{2n n! (n-1)! n} = \frac{2^{2n} 2^{-1}}{(2n)! n} = \frac{2^{2n}}{(2n)!} = 2^{2n} \binom{2n}{n}^{-1}.$$

Portanto,

$$T_n(x) = 2^{2n} \binom{2n}{n}^{-1} P_n^{(-1/2, -1/2)}(x).$$

- (b) Para calcular os zeros dos polinômios de Chebyshev de 1ª espécie $T_n(x)$, precisamos resolver a equação $\cos(n\theta) = 0$, onde os valores do ângulo θ podem variar entre 0 e π . A solução é dada por

$$(n\theta)_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

onde,

$$\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Dessa forma, os zeros dos polinômios de Chebyshev de 1ª espécie $T_n(x)$, são:

$$x_{n,k} = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), \text{ para, } k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad \text{com } 0 \leq \frac{(2k+1)\pi}{2n} \leq \pi.$$

- (c) Os pontos de máximo e mínimo dos polinômios de Chebyshev de 1ª espécie $T_n(x)$ são aqueles pontos onde $\cos(n\theta) = \pm 1$, para valores do ângulo θ que variam entre 0 e π . Além disso,

$$\theta_k = \frac{k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Portanto, os pontos extremos são:

$$m_{n,k} = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

2.3.1.1.2 Polinômios de Chebyshev de 2ª espécie

Em [3], os polinômios de Chebyshev de 2ª espécie são uma sequência de polinômios ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ com relação à função peso $w(x) = \sqrt{1-x^2}$ com $\alpha = \beta = 1/2$ e são definidos por

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}, \quad x \in [-1, 1],$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$, e $x = \cos\theta$, com $\theta \in [0, \pi]$. Além disso,

$$U_{n+1}(x) = \frac{\sin((n+2)\theta)}{\sin\theta} \quad \text{e} \quad U_{n-1}(x) = \frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}.$$

A relação de ortogonalidade está definida da seguinte maneira:

$$\langle U_n, U_m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

A relação de recorrência de três termos é

$$U_{n+1}(x) = 2x U_n(x) - U_{n-1}(x), \text{ com } n \geq 1.$$

Observaremos os primeiros polinômios de Chebyshev de 2ª espécie (ver Figura 2.3.6) e analisaremos como os coeficientes dos termos de maior grau se comportam, ou seja:

$$(1) U_0(x) = \frac{\sin \theta}{\sin \theta} = 1,$$

$$(2) U_1(x) = \frac{\sin(2\theta)}{\sin \theta} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta} = 2 \cos \theta = 2x,$$

$$(3) U_2(x) = 2x U_1(x) - U_0(x) = 2^2 x^2 - 1,$$

$$(4) U_3(x) = 2x U_2(x) - U_1(x) = 2^3 x^3 - 4x,$$

$$(5) U_4(x) = 2x U_3(x) - U_2(x) = 2^4 x^4 - 12x^2 + 1,$$

$$(6) U_5(x) = 2x U_4(x) - U_3(x) = 2^5 x^5 - 32x^3 + 6x,$$

portanto,

$$a_{n,n} = 2^n, \quad n \geq 0. \quad (2.3.14)$$

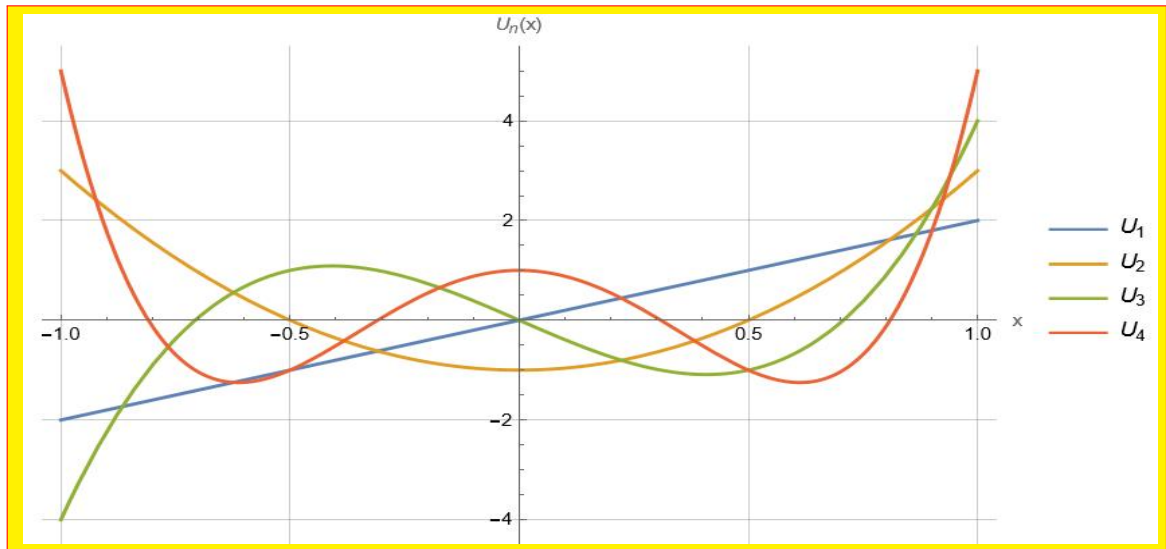


Figura 2.3.6: Polinômios de Chebyshev de 2ª espécie $U_n(x)$ para $n = 1, 2, 3, 4$.

Observação 2.3.3. *Mostraremos algumas características que os polinômios de Chebyshev de 2ª espécie $U_n(x)$:*

(a) *Observe que, fazendo $\alpha = \beta = 1/2$ na função peso dos polinômios de Jacobi, temos que $w(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Assim,*

$$U_n(x) = 2^{2n} \binom{2n+1}{n+1}^{-1} P_n^{(1/2, 1/2)}(x).$$

De fato, pelo Corolário 2.3.1, temos que $U_n(x) = c_n P_n^{(-1/2, -1/2)}(x)$. Considerando $a_{n,i}^U$, $i = 1, 2, \dots, n$, para os coeficientes do polinômio de Chebyshev e $a_{n,i}^P$, $i = 1, 2, \dots, n$, para os coeficientes do polinômio de Jacobi com $\alpha = \beta = 1/2$, então,

$$a_{n,n}^U x^n + a_{n,n-1}^U x^{n-1} + \dots + a_{n,0}^U = c_n (a_{n,n}^P x^n + a_{n,n-1}^P x^{n-1} + \dots + a_{n,0}^P),$$

logo,

$$c_n = \frac{a_{n,n}^U}{a_{n,n}^P} = \frac{2^n}{\frac{1}{n! 2^n} \frac{\Gamma(2n+2)}{\Gamma(n+2)}}. \quad (2.3.15)$$

Substituindo (2.3.14) e usando a Proposição 2.3.1 na equação (2.3.15), obtemos:

$$\frac{2^n}{\frac{1}{n! 2^n} \frac{\Gamma(2n+2)}{\Gamma(n+2)}} = \frac{2^n}{\frac{1}{n! 2^n} \frac{(2n+1)!}{(n+1)!}} = \frac{2^n 2^n}{\frac{1}{n!} \frac{2n+1!}{n+1!}} = 2^{2n} \binom{2n+1}{n+1}^{-1}.$$

Portanto,

$$U_n(x) = 2^{2n} \binom{2n+1}{n+1}^{-1} P_n^{(1/2, 1/2)}(x).$$

- (b) Para encontrar os zeros dos polinômios de Chebyshev de 2ª espécie $U_n(x)$, precisamos resolver a equação $\frac{\text{sen}((n+1)\theta)}{\text{sen}\theta} = 0$, onde os valores do ângulo θ podem variar entre 0 e π . Isso implica que:

$$\text{sen}((n+1)\theta) = 0.$$

Os ângulos para os quais a condição anterior é satisfeita é

$$(n+1)\theta_k = k\pi, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

daqui obtemos:

$$\theta_k = \frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Dessa forma, os zeros dos polinômios de Chebyshev de 2ª espécie $U_n(x)$, são:

$$x_{n,k} = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

- (c) Derivando os polinômios de Chebyshev de 1ª espécie $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$,

$$\begin{aligned} T'_n(x) &= -\text{sen}(n \arccos x) n (\arccos x)' \\ &= -\text{sen}(n \arccos x) n \left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \right) \\ &= \text{sen}(n \arccos x) \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}, \end{aligned}$$

obtemos,

$$T'_n(x) = n U_{n-1}(x).$$

Observamos que os zeros de $U_{n-1}(x)$ são os pontos de máximo e mínimo de $T_n(x)$. Vejamos o seguinte exemplo.

Exemplo 2.3.1. Para o polinômio de Chebyshev de 1ª espécie de grau 3, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$, a primeira derivada é $T'_3(x) = 12x^2 - 3$. Igualando $T'_3(x) = 0$ para encontrar os pontos críticos, obtemos $x = \pm 0,5$. Depois, substituímos esses pontos na segunda derivada $T''(x) = 24x$, para determinar quais dos pontos são máximos ou mínimos, temos que $x = 0,5$ é um mínimo local e $x = -0,5$ é um máximo local para $T_3(x)$. Observe que os zeros de $U_2(x)$ são os pontos locais de máximo e mínimo de $T_3(x)$ (ver Figura 2.3.7).

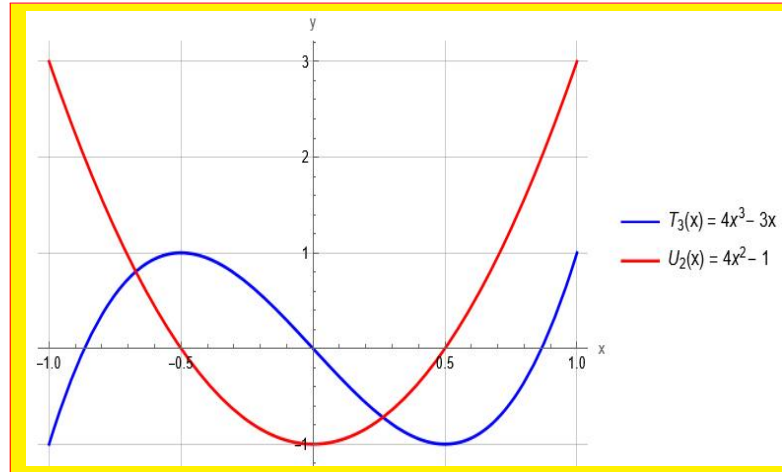


Figura 2.3.7: Relação entre os pontos críticos do polinômio $U_2(x)$ com os pontos de $T_3(x)$.

Polinômios auto-conjugados, auto-recíprocos e auto-inversíveis

O objetivo deste capítulo é estudar os polinômios auto-recíprocos, auto-conjugados e auto-inversíveis, apresentando alguns resultados fundamentais. Além disso, analisaremos um teorema clássico relacionado aos polinômios auto-inversíveis, conhecido como Teorema de Cohn. Também estudaremos os polinômios obtidos através da transformação de Möbius. Para isso, usaremos as referências [6], [7], [9], [21] e [22].

3.1 Introdução

Vamos considerar o polinômio $P(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n$ de grau n com coeficientes complexos. Este polinômio será usado para definir o polinômio *conjugado* $\bar{P}(z)$, *recíproco* $P^*(z)$ e *inversível* $P^\dagger(z)$. Definimos esses polinômios da seguinte maneira:

$$\bar{P}(z) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1z + \cdots + \bar{a}_{n-1}z^{n-1} + \bar{a}_nz^n, \quad (3.1.1)$$

$$P^*(z) = a_n + a_{n-1}z + \cdots + a_1z^{n-1} + a_0z^n, \quad (3.1.2)$$

$$P^\dagger(z) = \bar{a}_n + \bar{a}_{n-1}z + \cdots + \bar{a}_1z^{n-1} + \bar{a}_0z^n, \quad (3.1.3)$$

onde os coeficientes que possuem barra são coeficientes conjugados. No resultado a seguir observamos que esses polinômios também podem ser definidos sem o uso dos coeficientes de $P(z)$.

Proposição 3.1.1. *Seja $P(z)$ um polinômio de grau n , temos as seguintes afirmações:*

1. $\bar{P}(z) = \overline{P(\bar{z})}$.
2. $P^*(z) = z^n P(\frac{1}{z})$.
3. $P^\dagger(z) = z^n \overline{P(\frac{1}{\bar{z}})}$.

Demonstração. Usaremos as definições dos polinômios conjugados, recíproco e inversível das equações (3.1.1), (3.1.2) e (3.1.3) respectivamente.

1. Para provar a primeira afirmação usaremos a definição do polinômio conjugado $\bar{P}(z)$ da equação (3.1.1). Temos:

$$\begin{aligned}
 \bar{P}(z) &= \bar{a}_0 + \bar{a}_1(\bar{z}) + \cdots + \bar{a}_{n-1}(\bar{z})^{n-1} + \bar{a}_n(\bar{z})^n \\
 &= \bar{a}_0 + \bar{a}_1(\bar{z}) + \cdots + \bar{a}_{n-1}(\overline{(\bar{z})^{n-1}}) + \bar{a}_n(\overline{(\bar{z})^n}) \\
 &= \bar{a}_0 + \overline{a_1 \bar{z}} + \cdots + \overline{a_{n-1}(\bar{z})^{n-1}} + \overline{a_n(\bar{z})^n} \\
 &= \overline{a_0 + a_1 \bar{z} + \cdots + a_{n-1}(\bar{z})^{n-1} + a_n(\bar{z})^n} \\
 &= \overline{P(\bar{z})}.
 \end{aligned}$$

2. Para provar a segunda afirmação, usaremos a definição do polinômio recíproco $P^*(z)$ da equação (3.1.2). Segue que:

$$\begin{aligned}
 P^*(z) &= a_n + a_{n-1}z + \cdots + a_1z^{n-1} + a_0z^n \\
 &= a_n \frac{z^n}{z^n} + a_{n-1} \frac{z^n}{z^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{z^n}{z} + a_0z^n \\
 &= z^n \left(a_n \frac{1}{z^n} + a_{n-1} \frac{1}{z^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{1}{z} + a_0 \right) \\
 &= z^n \left(a_n \left(\frac{1}{z} \right)^n + a_{n-1} \left(\frac{1}{z} \right)^{n-1} + \cdots + a_1 \left(\frac{1}{z} \right) + a_0 \right) \\
 &= z^n P \left(\frac{1}{z} \right).
 \end{aligned}$$

3. Na terceira afirmação usaremos a definição do polinômio inversível $P^\dagger(z)$ da equação (3.1.3). Obtemos que:

$$\begin{aligned}
 P^\dagger(z) &= \bar{a}_n + \bar{a}_{n-1}z + \cdots + \bar{a}_1z^{n-1} + \bar{a}_0z^n \\
 &= \bar{a}_n \frac{z^n}{z^n} + \bar{a}_{n-1} \frac{z^n}{z^{n-1}} + \cdots + \bar{a}_1 \frac{z^n}{z} + \bar{a}_0z^n \\
 &= z^n \left(\bar{a}_n \frac{1}{z^n} + \bar{a}_{n-1} \frac{1}{z^{n-1}} + \cdots + \bar{a}_1 \frac{1}{z} + \bar{a}_0 \right) \\
 &= z^n \left(\bar{a}_n \frac{1}{(\bar{z})^n} + \bar{a}_{n-1} \frac{1}{(\bar{z})^{n-1}} + \cdots + \bar{a}_1 \frac{1}{(\bar{z})^1} + \bar{a}_0 \right) \\
 &= z^n \left(\bar{a}_n \left(\overline{\left(\frac{1}{\bar{z}} \right)^n} \right) + \bar{a}_{n-1} \left(\overline{\left(\frac{1}{\bar{z}} \right)^{n-1}} \right) + \cdots + \bar{a}_1 \left(\overline{\left(\frac{1}{\bar{z}} \right)^1} \right) + \bar{a}_0 \right) \\
 &= z^n \left(\overline{a_n \left(\frac{1}{\bar{z}} \right)^n} + \overline{a_{n-1} \left(\frac{1}{\bar{z}} \right)^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 \left(\frac{1}{\bar{z}} \right)^1} + \bar{a}_0 \right) \\
 &= z^n \left(\overline{a_n \left(\frac{1}{\bar{z}} \right)^n + a_{n-1} \left(\frac{1}{\bar{z}} \right)^{n-1} + \cdots + a_1 \left(\frac{1}{\bar{z}} \right)^1 + a_0} \right) \\
 &= z^n P \left(\frac{1}{\bar{z}} \right).
 \end{aligned}$$

■

Observação 3.1.1. De acordo com [22], $P^\dagger(z)$ e $P^*(z)$, são simplesmente o polinômio conjugado do outro, ou seja, temos a seguinte propriedade:

$$P^\dagger(z) = \overline{P^*}(z) = \overline{P^*(\bar{z})} \quad e \quad P^*(z) = \overline{P^\dagger}(z) = \overline{P^\dagger(\bar{z})}. \quad (3.1.4)$$

De fato, usaremos os polinômios (3.1.2), (3.1.3) e, também, as propriedades dos complexos conjugados. Mostraremos apenas duas igualdades. Na relação (3.1.4), as outras igualdades seguem as mesmas ideias.

1.

$$\begin{aligned} P^\dagger(z) &= \bar{a}_n + \bar{a}_{n-1}z + \dots + \bar{a}_1z^{n-1} + \bar{a}_0z^n \\ &= \bar{a}_n + \bar{a}_{n-1}\bar{z} + \dots + \bar{a}_1(\bar{z})^{n-1} + \bar{a}_0(\bar{z})^n \\ &= \bar{a}_n + \bar{a}_{n-1}\bar{z} + \dots + \bar{a}_1\overline{((\bar{z})^{n-1})} + \bar{a}_0\overline{((\bar{z})^n)} \\ &= \overline{a_n + a_{n-1}\bar{z} + \dots + a_1(\bar{z})^{n-1} + a_0(\bar{z})^n} \\ &= \overline{P^*(\bar{z})}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} P^*(z) &= a_n + a_{n-1}z + \dots + a_1z^{n-1} + a_0z^n \\ &= \bar{a}_n + \bar{a}_{n-1}\bar{z} + \dots + \bar{a}_1(\bar{z})^{n-1} + \bar{a}_0(\bar{z})^n \\ &= \bar{a}_n + \bar{a}_{n-1}\bar{z} + \dots + \bar{a}_1\overline{((\bar{z})^{n-1})} + \bar{a}_0\overline{((\bar{z})^n)} \\ &= \overline{a_n + a_{n-1}\bar{z} + \dots + a_1(\bar{z})^{n-1} + a_0(\bar{z})^n} \\ &= \overline{P^\dagger(\bar{z})}. \end{aligned}$$

As definições a seguir que serão apresentadas exploram conceitos fundamentais sobre polinômios auto-conjugados, auto-recíprocos e auto-inversíveis. A referência utilizada para essas definições foram extraídas da fonte [22]. Inicialmente, abordaremos algumas definições, observações e teoremas fundamentais para o desenvolvimento deste capítulo.

Definição 3.1.1. $P(z)$ é um polinômio auto-conjugado, se para qualquer zero ξ de $P(z)$ o conjugado complexo $\bar{\xi}$ é zero de $P(z)$. Isto é, os zeros de qualquer polinômio auto-conjugado são todos simétricos em relação à reta real $\mathbb{R}$.

Exemplo 3.1.1. O polinômio $P(z) = z^2 + 1$ cujos zeros são $z_1 = i$ e $z_2 = -i$, é um polinômio auto-conjugado. Na imagem 3.1.1, observamos uma simetria entre os zeros de $P(z)$.

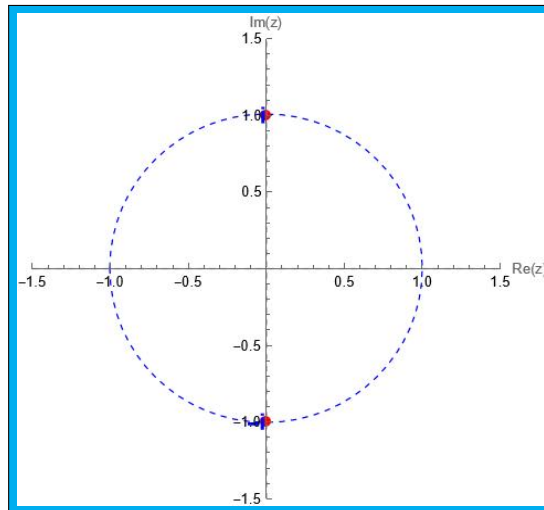


Figura 3.1.1: Representação gráfica dos zeros do polinômio $P(z)$.

Definição 3.1.2. $P(z)$ é um polinômio auto-recíproco, se para qualquer zero ξ de $P(z)$, o inverso $\frac{1}{\xi}$ é zero de $P(z)$.

Exemplo 3.1.2. O polinômio $P(z) = z^2 + \frac{3}{2i}z + 1$ cujos zeros são $z_1 = 2i$ e $z_2 = \frac{1}{2i}$, é um polinômio auto-recíproco.

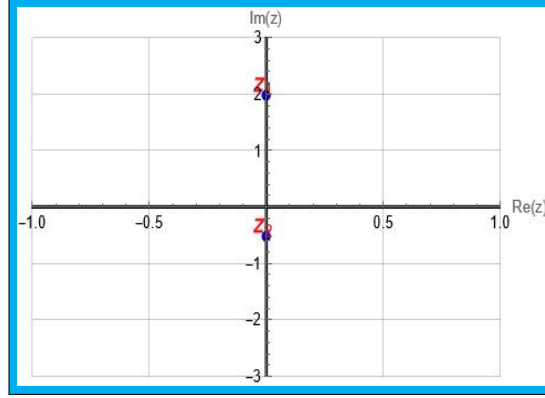


Figura 3.1.2: Representação gráfica dos zeros do polinômio $P(z)$.

Definição 3.1.3. $P(z)$ é um polinômio auto-inversível, se para qualquer zero ξ de $P(z)$, o inverso do conjugado complexo $\frac{1}{\bar{\xi}}$ é zero de $P(z)$. Isto é, os zeros de qualquer polinômio auto-inversível são simétricos no círculo unitário $\mathbb{S}^1$.

Exemplo 3.1.3. O polinômio $P(z) = z^2 - \frac{5i}{2}z - 1$ cujos zeros são $z_1 = 2i$ e $z_2 = \frac{i}{2}$, é um polinômio auto-inversível.

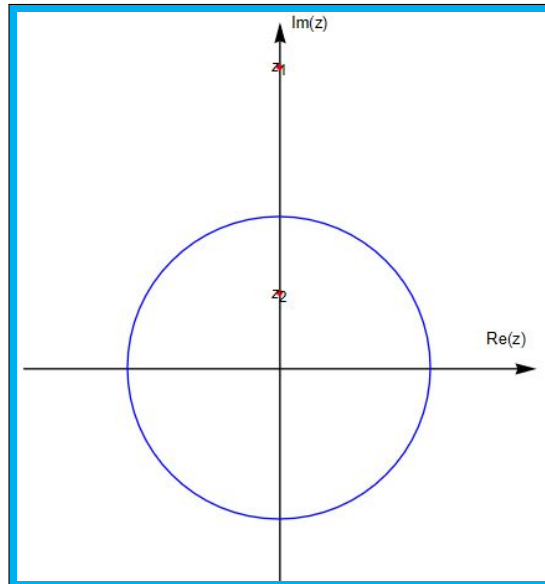


Figura 3.1.3: Representação gráfica dos zeros do polinômio $P(z)$.

O teorema a seguir, baseado em [22], apresenta uma condição suficiente para que $P(z)$ seja auto-conjugado, auto-inversível ou auto-recíproco.

¹ $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

Teorema 3.1.1. *Um polinômio complexo $P(z)$ é auto-conjugado, auto-recíproco, ou auto-inversível se, e somente se, existe um número complexo w_1, w_2, w_3 de módulo 1, de modo que as seguintes relações sejam respectivamente:*

1. $P(z) = w_1 \bar{P}(z)$.
2. $P(z) = w_2 P^*(z)$.
3. $P(z) = w_3 P^\dagger(z)$.

Demonstração. Usaremos a definição dos polinômios conjugados, recíprocos e inversíveis da equação (3.1.1), (3.1.2) e (3.1.3) respectivamente. Também usaremos a Proposição 3.1.1 e o Teorema 2.1.1.

- (1) *Vamos supor que $P(z)$ é auto-conjugado. Com esta suposição, a Definição 3.1.1 nos diz que se ξ é zero de $P(z)$, então o conjugado complexo $\bar{\xi}$ também é zero de $P(z)$. Assim escrevemos,*

$$\begin{aligned} P(z) &= a_n \prod_{k=1}^n (z - \bar{\xi}_k) = a_n \prod_{k=1}^n \overline{(\bar{z} - \xi_k)} = a_n \left(\frac{\bar{a}_n}{a_n} \right) \prod_{k=1}^n \overline{(\bar{z} - \xi_k)} \\ &= \left(\frac{a_n}{\bar{a}_n} \right) \overline{a_n \prod_{k=1}^n (\bar{z} - \xi_k)} = \left(\frac{a_n}{\bar{a}_n} \right) \overline{P(\bar{z})} = w_1 \bar{P}(z), \end{aligned}$$

onde $w_1 = \frac{a_n}{\bar{a}_n}$. Além disso,

$$|w_1| = \left| \frac{a_n}{\bar{a}_n} \right| = \left| \frac{a_n a_n}{\bar{a}_n a_n} \right| = \left| \frac{(a_n)^2}{|a_n|^2} \right| = 1.$$

- (2) *Agora, suponha que $P(z)$ é auto-recíproco. Com esta suposição, a Definição 3.1.2 nos diz que se ξ é zero de $P(z)$, então o recíproco $\frac{1}{\xi}$ também é zero de $P(z)$. Assim,*

$$P(z) = a_n \prod_{k=1}^n \left(z - \frac{1}{\xi_k} \right) = a_n \left[\left(z - \frac{1}{\xi_1} \right) \cdots \left(z - \frac{1}{\xi_n} \right) \right],$$

que também pode ser escrito da seguinte maneira:

$$P(z) = a_n \left[(-1) \left(\frac{1}{\xi_1} - z \right) \cdots (-1) \left(\frac{1}{\xi_n} - z \right) \right] = a_n (-1)^n \left[\left(\frac{1}{\xi_1} - z \right) \cdots \left(\frac{1}{\xi_n} - z \right) \right].$$

Após algumas manipulações, temos:

$$\begin{aligned} P(z) &= a_n (-1)^n \left[z \left(\frac{1}{z\xi_1} - 1 \right) \cdots z \left(\frac{1}{z\xi_n} - 1 \right) \right] \\ &= a_n (-1)^n (z)^n \left[\left(\frac{1}{z\xi_1} - 1 \right) \cdots \left(\frac{1}{z\xi_n} - 1 \right) \right] \\ &= a_n (-1)^n (z)^n \left[\frac{1}{\xi_1} \left(\frac{1}{z} - \xi_1 \right) \cdots \frac{1}{\xi_n} \left(\frac{1}{z} - \xi_n \right) \right] \\ &= a_n (-1)^n (z)^n \frac{1}{\xi_1 \cdots \xi_n} \left[\left(\frac{1}{z} - \xi_1 \right) \cdots \left(\frac{1}{z} - \xi_n \right) \right] \\ &= \frac{(-1)^n (z)^n}{\xi_1 \cdots \xi_n} \left[a_n \prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{z} - \xi_k \right) \right], \end{aligned}$$

e pelo Teorema 2.1.1, obtemos:

$$\frac{(-1)^n (z)^n}{\xi_1 \dots \xi_n} \left[a_n \prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{z} - \xi_k \right) \right] = \frac{(-1)^n (z)^n}{\xi_1 \dots \xi_n} P\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{(-1)^n}{\xi_1 \dots \xi_n} \left[z^n P\left(\frac{1}{z}\right) \right].$$

Através da Proposição 3.1.1 (2), segue que:

$$P(z) = w_2 P^*(z),$$

onde $w_2 = \frac{(-1)^n}{\xi_1 \dots \xi_n}$. Além disso, para qualquer zero ξ de $P(z)$ (que é necessariamente diferente de zero, pois $P(z)$ é auto-recíproco), haverá outro zero cujo valor é $\frac{1}{\bar{\xi}}$ de modo que $|\xi_1 \dots \xi_n| = 1$ e isso implica que $|w_2| = 1$.

- (3) E por último, suponha que $P(z)$ é auto-inversível. Com esta suposição, a Definição 3.1.3 nos diz que se ξ é zero de $P(z)$, então o recíproco conjugado complexo $\frac{1}{\bar{\xi}}$ também é zero de $P(z)$. Assim, escrevemos,

$$P(z) = a_n \prod_{k=1}^n \left(z - \frac{1}{\bar{\xi}_k} \right) = a_n \left[\left(z - \frac{1}{\bar{\xi}_1} \right) \dots \left(z - \frac{1}{\bar{\xi}_n} \right) \right],$$

que também pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} P(z) &= a_n \left[(-1) \left(\frac{1}{\bar{\xi}_1} - z \right) \dots (-1) \left(\frac{1}{\bar{\xi}_n} - z \right) \right] \\ &= a_n (-1)^n \left[\left(\frac{1}{\bar{\xi}_1} - z \right) \dots \left(\frac{1}{\bar{\xi}_n} - z \right) \right]. \end{aligned}$$

Após algumas manipulações, obtemos:

$$\begin{aligned} P(z) &= a_n (-1)^n \left[z \left(\frac{1}{\bar{\xi}_1 z} - 1 \right) \dots z \left(\frac{1}{\bar{\xi}_n z} - 1 \right) \right] \\ &= a_n (-1)^n (z)^n \left[\left(\frac{1}{\bar{\xi}_1 z} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{\bar{\xi}_n z} - 1 \right) \right] \\ &= a_n (-1)^n (z)^n \left[\frac{1}{\bar{\xi}_1} \left(\frac{1}{z} - \bar{\xi}_1 \right) \dots \frac{1}{\bar{\xi}_n} \left(\frac{1}{z} - \bar{\xi}_n \right) \right] \\ &= \frac{a_n (-1)^n (z)^n}{\bar{\xi}_1 \dots \bar{\xi}_n} \left[\left(\frac{1}{z} - \bar{\xi}_1 \right) \dots \left(\frac{1}{z} - \bar{\xi}_n \right) \right]. \end{aligned}$$

Também observamos que:

$$\begin{aligned}
 \frac{a_n (-1)^n (z)^n}{\bar{\xi}_1 \dots \bar{\xi}_n} \left[\left(\frac{1}{z} - \bar{\xi}_1 \right) \dots \left(\frac{1}{z} - \bar{\xi}_n \right) \right] &= \frac{a_n (-1)^n (z)^n}{\bar{\xi}_1 \dots \bar{\xi}_n} \left[\left(\frac{1}{\bar{z}} - \bar{\xi}_1 \right) \dots \left(\frac{1}{\bar{z}} - \bar{\xi}_n \right) \right] \\
 &= \frac{a_n (-1)^n (z)^n}{\bar{\xi}_1 \dots \bar{\xi}_n} \overline{\left[\left(\frac{1}{z} - \xi_1 \right) \dots \left(\frac{1}{z} - \xi_n \right) \right]} \\
 &= \frac{a_n (-1)^n (z)^n}{\bar{\xi}_1 \dots \bar{\xi}_n} \overline{\left[\left(\frac{1}{z} - \xi_1 \right) \dots \left(\frac{1}{z} - \xi_n \right) \right]} \\
 &= \frac{a_n (-1)^n z^n}{\bar{\xi}_1 \dots \bar{\xi}_n} \prod_{k=1}^n \overline{\left(\frac{1}{z} - \xi_k \right)} \\
 &= \frac{(-1)^n z^n}{\bar{\xi}_1 \dots \bar{\xi}_n} \bar{a}_n \prod_{k=1}^n \overline{\left(\frac{1}{z} - \xi_k \right)},
 \end{aligned}$$

e pelo Teorema 2.1.1,

$$\begin{aligned}
 \frac{(-1)^n z^n}{\bar{\xi}_1 \dots \bar{\xi}_n} \bar{a}_n \prod_{k=1}^n \overline{\left(\frac{1}{z} - \xi_k \right)} &= \frac{(-1)^n z^n}{\bar{\xi}_1 \dots \bar{\xi}_n} \overline{P\left(\frac{1}{z}\right)} \\
 &= \frac{(-1)^n}{\bar{\xi}_1 \dots \bar{\xi}_n} \left[z^n \overline{P\left(\frac{1}{z}\right)} \right].
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{(-1)^n}{\bar{\xi}_1 \dots \bar{\xi}_n} \left[z^n \overline{P\left(\frac{1}{z}\right)} \right] = w_3 P^\dagger(z),$$

onde $w_3 = \frac{(-1)^n}{\bar{\xi}_1 \dots \bar{\xi}_n}$. Além disso, para qualquer zero ξ de $P(z)$ (que é necessariamente diferente de zero pois $P(z)$ é auto-inversível), haverá outro zero cujo valor é $\frac{1}{\bar{\xi}}$ de modo que $|\bar{\xi}_1 \dots \bar{\xi}_n| = 1$ e isso implica que $|w_3| = 1$.

Agora vamos demonstrar o recíproco. Para provar que um polinômio complexo $P(z)$ é auto-conjugado, auto-recíproco, ou auto-inversível, usaremos a Proposição 3.1.1 e as equações (3.1.1), (3.1.2), e (3.1.3) respectivamente. Vamos supor que ξ é zero de $P(z)$.

(a) Suponha que existe um número complexo w_1 de módulo 1, tal que:

$$P(\bar{\xi}) = w_1 \bar{P}(\bar{\xi}).$$

Logo,

$$\left| P(\bar{\xi}) \right| = \left| w_1 \bar{P}(\bar{\xi}) \right| = |w_1| \left| \bar{P}(\bar{\xi}) \right| = \left| \bar{P}(\bar{\xi}) \right| = \left| \overline{P(\xi)} \right| = \left| P(\xi) \right| = 0,$$

e então $P(\bar{\xi}) = 0$. Portanto, $P(z)$ é um polinômio auto-conjugado.

(b) Suponha que existe um número complexo w_2 de módulo 1, tal que:

$$P\left(\frac{1}{\xi}\right) = w_2 P^*\left(\frac{1}{\xi}\right).$$

Logo,

$$\left|P\left(\frac{1}{\xi}\right)\right| = \left|w_2 P^*\left(\frac{1}{\xi}\right)\right| = |w_2| \left|P^*\left(\frac{1}{\xi}\right)\right| = \left|P^*\left(\frac{1}{\xi}\right)\right| = \left|\left(\frac{1}{\xi}\right)^n P(\xi)\right| = 0,$$

e então $P\left(\frac{1}{\xi}\right) = 0$. Portanto, $P(z)$ é um polinômio auto-recíproco.

(c) Suponha que existe um número complexo w_3 de módulo 1, tal que:

$$P\left(\frac{1}{\bar{\xi}}\right) = w_3 P^\dagger\left(\frac{1}{\bar{\xi}}\right).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left|P\left(\frac{1}{\bar{\xi}}\right)\right| &= \left|w_3 P^\dagger\left(\frac{1}{\bar{\xi}}\right)\right| = |w_3| \left|P^\dagger\left(\frac{1}{\bar{\xi}}\right)\right| = \left|P^\dagger\left(\frac{1}{\bar{\xi}}\right)\right| = \left|\left(\frac{1}{\bar{\xi}}\right)^n \overline{P\left(\frac{1}{\xi}\right)}\right| \\ &= \left|\left(\frac{1}{\bar{\xi}}\right)^n \overline{P\left(\frac{1}{\xi}\right)}\right| = \left|\left(\frac{1}{\bar{\xi}}\right)^n \overline{P(\xi)}\right| = 0, \end{aligned}$$

e então $P\left(\frac{1}{\bar{\xi}}\right) = 0$. Portanto, $P(z)$ é um polinômio auto-inversível.

■

Agora, apresentaremos alguns exemplos, utilizando apenas o teorema anterior, a fim de entender melhor o seu conceito.

Exemplo 3.1.4. Seja o polinômio $P(z) = z^2 - 1$. Observamos que:

$$\bar{P}(z) = z^2 - 1 \quad e \quad P^*(z) = P^\dagger(z) = 1 - z^2.$$

Agora verificamos:

- $P(z) = w_1 \bar{P}(z) = (1)(z^2 - 1)$, com $|w_1| = 1$.
- $P(z) = w_2 P^*(z) = (-1)(1 - z^2)$, com $|w_2| = 1$.
- $P(z) = w_3 P^\dagger(z) = (-1)(1 - z^2)$, com $|w_3| = 1$.

Portanto, pelo teorema anterior, concluímos que o polinômio $P(z)$ é:

- Auto-conjugado, com $w_1 = 1$;
- Auto-recíproco e auto-inversível, com $w_2 = w_3 = -1$.

Os zeros do polinômio $P(z)$ são $z = 1$ e $z = -1$. Como esses zeros estão no eixo real, eles possuem simetria em relação à reta real e também simetria em relação ao círculo unitário (ver Figura 3.1.4).

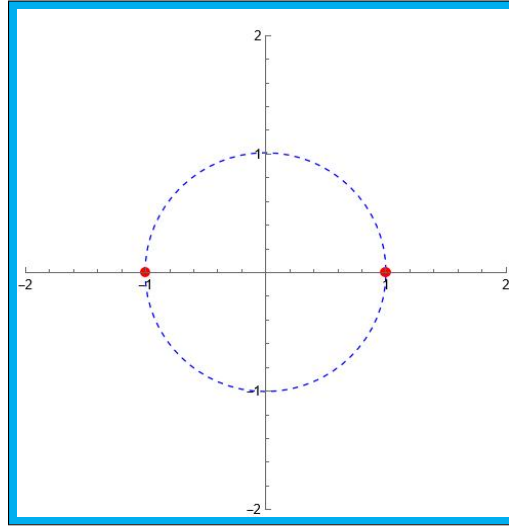


Figura 3.1.4: Os zeros de $P(z)$ são simétricos em relação à reta real e ao círculo unitário.

Exemplo 3.1.5. Seja o polinômio $P(z) = iz^2 + iz + i$. Observamos que:

$$P^*(z) = i + iz + iz^2 \quad e \quad \bar{P}(z) = P^\dagger(z) = -i - iz - iz^2.$$

Agora verificamos:

- $P(z) = w_1 \bar{P}(z) = (-1)(-i - iz - iz^2)$, com $|w_1| = 1$.
- $P(z) = w_2 P^*(z) = (1)(i + iz + iz^2)$, com $|w_2| = 1$.
- $P(z) = w_3 P^\dagger(z) = (-1)(-i - iz - iz^2)$, com $|w_3| = 1$.

Portanto, pelo Teorema anterior, concluímos que o polinômio $P(z)$ é:

- Auto-conjugado e auto-inversível, com $w_1 = w_3 = -1$;
- Auto-recíproco, com $w_2 = 1$.

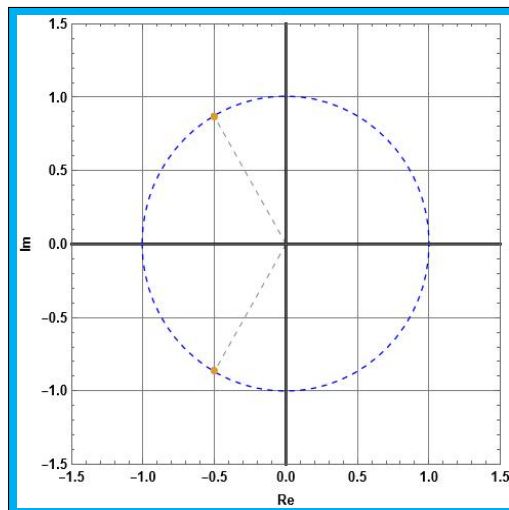


Figura 3.1.5: Representação gráfica dos zeros do polinômio $P(z) = iz^2 + iz + i$.

Observação 3.1.2. Do teorema anterior, observemos a relação entre o polinômio $P(z)$ com os coeficientes dos polinômios auto-conjugados, auto-recíprocos e auto-inversíveis.

(1) Consideremos a relação dada por:

$$P(z) = w_1 \bar{P}(z),$$

onde:

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n,$$

e

$$\bar{P}(z) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 z + \bar{a}_2 z^2 + \dots + \bar{a}_n z^n.$$

Isso pode ser expresso como:

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n = w_1 (\bar{a}_0 + \bar{a}_1 z + \bar{a}_2 z^2 + \dots + \bar{a}_n z^n).$$

Dessa forma, estabelece-se a relação entre os coeficientes:

$$a_k = w_1 \bar{a}_k \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n.$$

(2) Consideremos a relação dada por:

$$P(z) = w_2 P^*(z),$$

onde:

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n,$$

e

$$P^*(z) = a_n + a_{n-1} z + \dots + a_1 z^{n-1} + a_0 z^n.$$

Isso pode ser expresso como:

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n = w_2 (a_n + a_{n-1} z + \dots + a_1 z^{n-1} + a_0 z^n).$$

Dessa forma, estabelece-se a relação entre os coeficientes:

$$a_k = w_2 a_{n-k} \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n.$$

(3) Consideremos a relação dada por:

$$P(z) = w_3 P^\dagger(z),$$

onde:

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n,$$

e

$$P^\dagger(z) = \bar{a}_n + \bar{a}_{n-1} z + \dots + \bar{a}_1 z^{n-1} + \bar{a}_0 z^n.$$

Isso pode ser expresso como:

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n = w_3 (\bar{a}_n + \bar{a}_{n-1} z + \dots + \bar{a}_1 z^{n-1} + \bar{a}_0 z^n).$$

Dessa forma, estabelece-se a relação entre os coeficientes:

$$a_k = w_3 \bar{a}_{n-k} \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n.$$

Definição 3.1.4. Um polinômio auto-recíproco $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ será um polinômio auto-recíproco real se todos os seus coeficientes a_k pertencem ao conjunto dos números reais.

Note que um polinômio auto-recíproco real é também chamado de palindrômico, isto é, se $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ é palíndromo, então $a_k = a_{n-k}$, para $k = 0, 1, \dots, n$.

Observação 3.1.3. Apresentamos algumas observações importantes sobre os polinômios auto-recíprocos reais:

- (a) De acordo com [9], é possível construir polinômios reais auto-recíprocos a partir de combinações lineares de polinômios de Chebyshev de primeira espécie. Considerando um polinômio real auto-recíproco

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{2n} z^{2n}$$

de grau $2n$, do Teorema 3.1.1 (2) e da Observação 3.1.2 (2) com $w_2 = 1$, pode-se verificar que:

$$P(z) = \sum_{j=0}^{2n} a_j z^j = 2z^n \left[\frac{a_{2n}}{2} \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right) + \dots + \frac{a_{n+1}}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) + \frac{a_n}{2} \right]. \quad (3.1.5)$$

Para $z = e^{i\theta}$, consideramos a transformação:

$$x = x(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) = \cos \theta.$$

A partir dessa transformação, podemos estendê-la para potências de z . Para z^j , temos:

$$z^j = e^{ij\theta} \quad e \quad \frac{1}{z^j} = e^{-ij\theta},$$

o que leva a:

$$x_j = \frac{1}{2} \left(z^j + \frac{1}{z^j} \right) = \frac{1}{2} (e^{ij\theta} + e^{-ij\theta}) = \cos(j\theta).$$

Os polinômios de Chebyshev de primeira espécie $T_j(x)$ da equação (2.3.11) são definidos pela relação:

$$T_j(\cos \theta) = \cos(j\theta).$$

Assim, ao substituir $x = \cos \theta$, estabelece-se que:

$$T_j(x) = \cos(j \arccos(x)) = \cos(j\theta) = \frac{1}{2} \left(z^j + \frac{1}{z^j} \right).$$

Portanto, podemos concluir que:

$$\frac{1}{2} \left(z^j + \frac{1}{z^j} \right) = T_j(x), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Assim, a equação (3.1.5) pode ser expressa da seguinte forma:

$$P(z) = 2z^n \left\{ a_{2n} T_n(x) + a_{2n-1} T_{n-1}(x) + \dots + a_{n+1} T_1(x) + \frac{a_n}{2} T_0(x) \right\}.$$

A seguir, apresentaremos um exemplo.

Exemplo 3.1.6. Considere o seguinte polinômio real auto-recíproco:

$$P(z) = z^4 + 3z^3 + 5z^2 + 3z + 1.$$

Para reescrever o polinômio, agrupamos os termos simétricos da forma $z^j + \frac{1}{z^j}$:

$$P(z) = z^4 + 3z^3 + 5z^2 + 3z + 1 = 2z^2 \left[\frac{1}{2} \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) + \frac{3}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) + \frac{5}{2} \right].$$

Sabemos que $\frac{1}{2} \left(z^j + \frac{1}{z^j} \right) = T_j(x)$, onde $T_j(x)$ são os polinômios de Chebyshev de primeira espécie. Assim, substituímos cada termo:

$$(i) \quad \frac{1}{2} \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) = T_2(x),$$

$$(ii) \quad \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) = T_1(x),$$

$$(iii) \quad T_0(x) = 1.$$

Dessa forma, o polinômio $P(z) = z^4 + 3z^3 + 5z^2 + 3z + 1$ pode ser representado como:

$$P(z) = 2z^2 \left[T_2(x) + 3T_1(x) + \frac{5}{2}T_0(x) \right], \quad x = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

(b) Os polinômios auto-recíprocos reais são também polinômios auto-inversíveis.

De fato, da Definição 3.1.4, seja $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, um polinômio auto-recíproco real ($a_k \in \mathbb{R}$). Então do Teorema 3.1.1(2),

$$P(z) = w_2 P^*(z),$$

e da Proposição 3.1.1,

$$w_2 P^*(z) = w_2 \left(z^n P\left(\frac{1}{z}\right) \right).$$

Assim,

$$|P(z)| = |w_2| \left| z^n P\left(\frac{1}{z}\right) \right| = |z^n| \left| P\left(\frac{1}{z}\right) \right|. \quad (3.1.6)$$

Suponha que ξ é zero de $P(z)$ então,

$$|P(\xi)| = |\xi^n| \left| P\left(\frac{1}{\xi}\right) \right| = 0. \quad (3.1.7)$$

Como os coeficientes de $P(z)$ são números reais, a seguinte igualdade é satisfeita,

$$|P(\xi)| = |P(\bar{\xi})|. \quad (3.1.8)$$

Logo, substituindo $\frac{1}{\bar{\xi}}$ na equação (3.1.6), e usando as equações (3.1.7) e (3.1.8), temos:

$$\left| P\left(\frac{1}{\bar{\xi}}\right) \right| = \left| \left(\frac{1}{\bar{\xi}}\right)^n \right| |P(\bar{\xi})| = 0.$$

Portanto, pela Definição 3.1.3, temos que $P(z)$ é um polinômio auto-inversível.

Definição 3.1.5. Um polinômio real auto-recíproco $P(z)$ que satisfaz a relação $P(z) = w_2 z^n P(\frac{1}{z})$ será chamado polinômio auto-recíproco positivo se $w_2 = 1$ e será chamado polinômio auto-recíproco negativo se $w_2 = -1$.

Observação 3.1.4. Algumas propriedades elementares dos polinômios auto-recíproco positivo e auto-recíproco negativo são as seguintes:

- (a) Se ξ é zero de qualquer polinômio $P(z)$ auto-recíproco positivo ou auto-recíproco negativo de grau $n \geq 4$, então os números complexos $\frac{1}{\xi}$, $\bar{\xi}$ e $\frac{1}{\bar{\xi}}$ também são zeros de $P(z)$.
- (b) Qualquer polinômio auto-recíproco negativo tem $z = 1$ como zero e $\frac{P(z)}{z-1}$ é um polinômio auto-recíproco positivo. Ademais, se $P(z)$ tem grau par, então $z = -1$ também é zero de $P(z)$ e $\frac{P(z)}{z^2-1}$ é um polinômio auto-recíproco positivo de grau par. De maneira semelhante, qualquer polinômio auto-recíproco positivo $P(z)$ de grau ímpar tem $z = -1$ como zero e $\frac{P(z)}{z+1}$ é também um polinômio auto-recíproco positivo.
- (c) O produto de dois polinômios auto-recíprocos positivos, ou dois polinômios auto-recíprocos negativos, é um polinômio auto-recíproco positivo.

Agora, iremos apresentar um teorema clássico que relaciona a localização dos zeros de um polinômio com a condição de que ele seja auto-inversível. Esse teorema pode ser encontrado na referência [22]. O teorema de Cohn é um resultado importante sobre as condições para que um polinômio auto-inversível tenha todos os seus zeros no círculo unitário $\mathbb{S}$. Em [6] F. F. Bonsall e Morris Marden fornecem uma prova desse resultado.

Teorema 3.1.2. Uma condição necessária e suficiente para que todos os zeros de um polinômio complexo $P(z)$ estejam localizados em $\mathbb{S}$ é que $P(z)$ seja um polinômio auto-inversível e que sua derivada $P'(z)$ não tenha nenhum zero fora de $\mathbb{S}$.

Observação 3.1.5. Se um polinômio tiver todos seus zeros no círculo unitário $\mathbb{S}$, então é um polinômio auto-inversível. O recíproco não é necessariamente verdadeiro. Ou seja, se um polinômio é auto-inversível, isso não garante que todos os seus zeros estejam no círculo unitário, eles podem estar dentro e fora, sempre que respeitem a simetria.

Para uma melhor compreensão, observe o exemplo seguinte.

Exemplo 3.1.7. Seja o polinômio:

$$P(z) = (z-2) \left(z - \frac{1}{2} \right).$$

Os zeros são:

$$\xi_1 = 2, \quad \xi_2 = \frac{1}{2}.$$

Observamos que $\frac{1}{\xi_1} = \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{\xi_2} = 2$ são zeros de $P(z)$, o que significa que $P(z)$ é um polinômio auto-inversível. Mas isso não garante que os zeros de $P(z)$ estejam no círculo unitário, pois ξ_1 e ξ_2 estão fora e dentro do círculo unitário respectivamente (ver Figura 3.1.6). Porém, esses zeros mantêm sua simetria em relação ao círculo unitário $\mathbb{S}$.

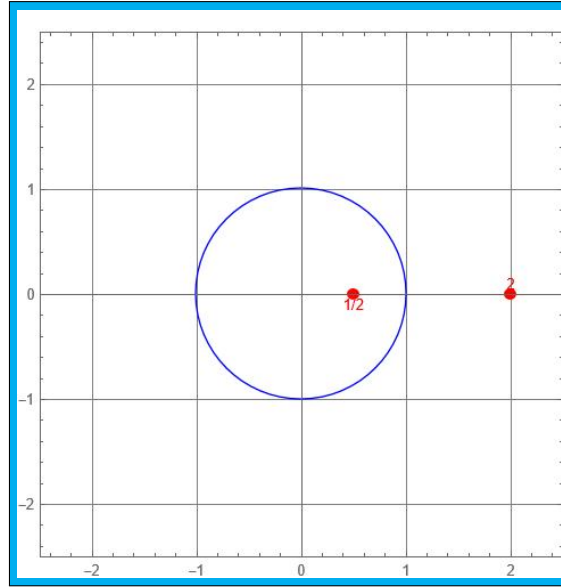


Figura 3.1.6: Os zeros de $P(z)$ se localizam dentro e fora do círculo unitário.

3.2 Polinômios obtidos através da transformação de Möbius

Argumentando como em [22], uma maneira de revelar sua conexão é utilizar um par adequado de *transformações de Möbius*, que mapeiam o círculo unitário na reta real e vice-versa, o que costuma ser chamado *transformações de Cayley*, definidas pelas fórmulas:

$$\mathcal{M}(z) = \frac{(z - i)}{z + i} \quad \text{e} \quad \mathcal{W}(z) = \frac{-i(z + 1)}{z - 1}. \quad (3.2.1)$$

Além disso, $\mathcal{M}(\infty) = 1$, $\mathcal{M}(-i) = \infty$, $\mathcal{W}(1) = \infty$, e $\mathcal{W}(\infty) = -i$. Cada transformação torna-se o inverso da outra no plano complexo estendido $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ e $\mathcal{M}(z)$ mapeia a reta real $\mathbb{R}$ no círculo unitário complexo $\mathbb{S}$, enquanto $\mathcal{W}(z)$ mapeia o círculo unitário complexo $\mathbb{S}$ na reta real $\mathbb{R}$. Como mostrado em [21], $\mathcal{M}(z)$ envia qualquer ponto no plano médio superior (meio inferior) para o interior (exterior) de $\mathbb{S}$, então $\mathcal{W}(z)$ envia qualquer ponto dentro (fora) de $\mathbb{S}$ para o semi-plano superior (semi-plano inferior).

Seja um polinômio $P(z)$ de grau n . Definimos dois polinômios transformados pela transformada de Möbius:

$$\mathcal{Q}(z) = (z + i)^n P(\mathcal{M}(z)) \quad \text{e} \quad \mathcal{T}(z) = (z - 1)^n P(\mathcal{W}(z)). \quad (3.2.2)$$

O teorema a seguir tem como base a referência [22] e nos mostra como os zeros de $\mathcal{Q}(z)$ e $\mathcal{T}(z)$ estão relacionados com os zeros de $P(z)$.

Teorema 3.2.1. *Sejam $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ os zeros de um polinômio complexo $P(z)$ e $\eta_1, \dots, \eta_n$ os zeros do polinômio transformado $\mathcal{Q}(z)$. Se $P(1) \neq 0$ então, $\eta_1 = \mathcal{W}(\zeta_1), \dots, \eta_n = \mathcal{W}(\zeta_n)$. Do mesmo modo, seja $\tau_1, \dots, \tau_n$ os zeros do polinômio transformado $\mathcal{T}(z)$, então $\tau_1 = \mathcal{M}(\zeta_1), \dots, \tau_n = \mathcal{M}(\zeta_n)$, com a condição $P(-i) \neq 0$.*

Demonstração. *Sejam ζ_k , η_k e τ_k com $k = 1, \dots, n$, os zeros de $P(z)$, $\mathcal{Q}(z)$ e $\mathcal{T}(z)$, respectivamente. A partir do polinômio transformado $\mathcal{Q}(z)$ da equação (3.2.2) determinaremos $P(z)$:*

$$\frac{\mathcal{Q}(z)}{(z + i)^n} = P(\mathcal{M}(z)).$$

Substituindo $\mathcal{M}(z)$ da equação (3.2.1) na igualdade anterior, obtemos:

$$\frac{\mathcal{Q}(z)}{(z+i)^n} = P\left(\frac{z-i}{z+i}\right). \quad (3.2.3)$$

Logo, através de uma mudança de variável em $P\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$, temos:

$$\begin{aligned} \zeta_k &= \frac{z-i}{z+i} \\ \zeta_k z + \zeta_k i &= z - i \\ z &= \frac{-i(1+\zeta_k)}{(\zeta_k-1)}. \end{aligned}$$

Agora, substituímos o novo valor de z na equação (3.2.3), e obtemos:

$$\frac{\mathcal{Q}\left(\frac{-i(1+\zeta_k)}{(\zeta_k-1)}\right)}{\left(\frac{-i(1+\zeta_k)}{(\zeta_k-1)} + i\right)^n} = P(\zeta_k),$$

vamos substituir a variável de $\mathcal{Q}$ por $\mathcal{W}(\zeta_k)$,

$$P(\zeta_k) = \frac{\mathcal{Q}(\mathcal{W}(\zeta_k))}{\left(\frac{-i(1+\zeta_k) + i(\zeta_k-1)}{\zeta_k-1}\right)^n} = \frac{\mathcal{Q}(\mathcal{W}(\zeta_k))}{\left(\frac{-2i}{\zeta_k-1}\right)^n} = \frac{(\zeta_k-1)^n \mathcal{Q}(\mathcal{W}(\zeta_k))}{(-2i)^n},$$

multiplicando numerador e denominador por i^{4n} , segue que

$$\begin{aligned} P(\zeta_k) &= \frac{i^{4n} (\zeta_k-1)^n \mathcal{Q}(\mathcal{W}(\zeta_k))}{i^{4n} (-2i)^n} \\ &= \frac{i^{3n} (\zeta_k-1)^n \mathcal{Q}(\mathcal{W}(\zeta_k))}{i^{4n} (-2)^n} \\ &= \frac{(i^3)^n (\zeta_k-1)^n \mathcal{Q}(\mathcal{W}(\zeta_k))}{(i^4)^n (-2)^n} \\ &= \frac{(-i)^n (\zeta_k-1)^n \mathcal{Q}(\mathcal{W}(\zeta_k))}{(1)^n (-2)^n}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$P(\zeta_k) = \left(\frac{i}{2}\right)^n (\zeta_k-1)^n \mathcal{Q}(\mathcal{W}(\zeta_k)),$$

para todo $1 \leq k \leq n$. Como 1 não é zero de $P(z)$, i.e., $P(1) \neq 0$ (note que para $z = 1$ temos que $\zeta_k \neq 1$), portanto $\eta_k = \mathcal{W}(\zeta_k)$ é zero de $\mathcal{Q}(z)$.

Também, a partir do polinômio transformado $\mathcal{T}(z)$ da equação (3.2.2), determinaremos $P(z)$:

$$\frac{\mathcal{T}(z)}{(z-1)^n} = P(\mathcal{W}(z)).$$

Substituindo $\mathcal{W}(z)$ da equação (3.2.1) na igualdade anterior,

$$\frac{\mathcal{T}(z)}{(z-1)^n} = P\left(\frac{-i(z+1)}{z-1}\right). \quad (3.2.4)$$

Logo, através de uma mudança de variável em $P\left(\frac{-i(z+1)}{z-1}\right)$, temos:

$$\begin{aligned} \zeta_k &= \frac{-i(z+1)}{z-1} \\ \zeta_k z - \zeta_k &= -iz - i \\ z &= \frac{-i + \zeta_k}{\zeta_k + i}. \end{aligned}$$

Agora, substituímos o novo valor de z na equação (3.2.4),

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{T}(z)}{(z-1)^n} &= P\left(\frac{-i(z+1)}{z-1}\right) \\ \frac{\mathcal{T}\left(\frac{\zeta_k - i}{\zeta_k + i}\right)}{\left(\frac{\zeta_k - i}{\zeta_k + i} - 1\right)^n} &= P(\zeta_k). \end{aligned}$$

Substituindo a variável de $\mathcal{T}$ por $\mathcal{M}(\zeta_k)$, segue que

$$P(\zeta_k) = \frac{\mathcal{T}(\mathcal{M}(\zeta_k))}{\left(\frac{\zeta_k - i - (\zeta_k + i)}{\zeta_k + i}\right)^n} = \frac{\mathcal{T}(\mathcal{M}(\zeta_k))}{\left(\frac{-2i}{\zeta_k + i}\right)^n} = \frac{(\zeta_k + i)^n \mathcal{T}(\mathcal{M}(\zeta_k))}{(-2i)^n},$$

multiplicando o numerador e denominador por i^{4n} , temos

$$\begin{aligned} P(\zeta_k) &= \frac{i^{4n} (\zeta_k + i)^n \mathcal{T}(\mathcal{M}(\zeta_k))}{i^{4n} (-2i)^n} \\ &= \frac{i^{3n} (\zeta_k + i)^n \mathcal{T}(\mathcal{M}(\zeta_k))}{i^{4n} (-2)^n} \\ &= \frac{(i^3)^n (\zeta_k + i)^n \mathcal{T}(\mathcal{M}(\zeta_k))}{(i^4)^n (-2)^n} \\ &= \frac{(-i)^n (\zeta_k + i)^n \mathcal{T}(\mathcal{M}(\zeta_k))}{(1)^n (-2)^n}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$P(\zeta_k) = \left(\frac{i}{2}\right)^n (\zeta_k + i)^n \mathcal{T}(\mathcal{M}(\zeta_k)),$$

para todo $1 \leq k \leq n$. Como $-i$ não é zero de $P(z)$, i.e., $P(-i) \neq 0$ (note que para $z = -i$ temos que $\zeta_k \neq -i$), portanto $\tau_k = \mathcal{M}(\zeta_k)$ é zero de $\mathcal{T}(z)$. ■

Observação 3.2.1. As seguintes igualdades serão usadas no próximo teorema, para provar que o conjunto de polinômios auto-inversíveis é isomorfo ao conjunto de polinômios auto-conjugados. Temos :

(a) Suponhamos que $\frac{1}{\bar{\zeta}}$ zero de um polinômio auto-inversível $P(z)$ e η zero de $Q(z)$, então,

$$\mathcal{W}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) = \bar{\eta}.$$

De fato, substituindo $\frac{1}{\bar{\zeta}}$ na transformada de Cayley $\mathcal{W}(z)$ de (3.2.1) e usando o Teorema 3.2.1, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{W}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) &= \frac{-i\left(\frac{1}{\bar{\zeta}} + 1\right)}{\left(\frac{1}{\bar{\zeta}} - 1\right)} = \frac{-i\left(\frac{1+\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}}\right)}{\left(\frac{1-\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}}\right)} = \frac{-i(1+\bar{\zeta})}{(1-\bar{\zeta})} = \frac{i(\bar{\zeta}+1)}{(\bar{\zeta}-1)} \\ &= \frac{\overline{-i(\zeta+1)}}{(\zeta-1)} = \frac{\overline{-i(\zeta+1)}}{(\zeta-1)} = \overline{\left(\frac{-i(\zeta+1)}{\zeta-1}\right)} = \overline{\mathcal{W}(\zeta)} \\ &= \bar{\eta}. \end{aligned}$$

(b) Suponhamos que $\bar{\zeta}$ zero de um polinômio auto-conjugado $P(z)$ e τ zero de $T(z)$, então,

$$\mathcal{M}(\bar{\zeta}) = \frac{1}{\bar{\tau}}.$$

De fato, substituindo $\bar{\zeta}$ na transformada de Cayley $\mathcal{M}(z)$ de (3.2.1) e usando o Teorema 3.2.1, temos:

$$\mathcal{M}(\bar{\zeta}) = \frac{\bar{\zeta} - i}{\bar{\zeta} + i} = \frac{\frac{1}{\bar{\zeta} + i}}{\frac{1}{\bar{\zeta} - i}} = \frac{1}{\left(\frac{\zeta - i}{\bar{\zeta} + i}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{\zeta - i}{\bar{\zeta} + i}\right)} = \frac{1}{\overline{\mathcal{M}(\zeta)}} = \frac{1}{\bar{\tau}}.$$

O teorema a seguir tem como base a referência [22] e demonstra que o conjunto de polinômios auto-inversíveis é isomorfo ao conjunto de polinômios auto-conjugados.

Teorema 3.2.2. Seja $P(z)$ um polinômio auto-inversível. Então, o polinômio transformado $Q(z) = (z + i)^n P(\mathcal{M}(z))$ é um polinômio auto-conjugado. Da mesma forma, se $P(z)$ for um polinômio auto-conjugado, então o polinômio transformado $T(z) = (z - 1)^n P(\mathcal{W}(z))$ será um polinômio auto-inversível.

Demonstração. Sejam ζ e $\frac{1}{\bar{\zeta}}$ dois zeros de um polinômio auto-inversível $P(z)$. De acordo com o Teorema 3.2.1 e a Observação 3.2.1, os zeros correspondentes de $Q(z)$ serão:

$$\mathcal{W}(\zeta) = \frac{-i(\zeta + 1)}{\zeta - 1} = \eta \quad e \quad \mathcal{W}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) = \frac{-i\left(\frac{1}{\bar{\zeta}} + 1\right)}{\left(\frac{1}{\bar{\zeta}} - 1\right)} = \bar{\eta}.$$

Assim, qualquer par de zeros simétricos de $P(z)$ no círculo unitário também são zeros simétricos de $Q(z)$ na reta real, pois $P(z)$ é um polinômio auto-inversível, portanto $Q(z)$ é um polinômio auto-conjugado.

Além disso, se ζ e $\bar{\zeta}$ são dois zeros de um polinômio conjugado $P(z)$, então de acordo com o Teorema 3.2.1 e a Observação 3.2.1, os zeros correspondentes de $T(z)$ serão:

$$\mathcal{M}(\zeta) = \frac{\zeta - i}{\zeta + i} = \tau \quad e \quad \mathcal{M}(\bar{\zeta}) = \frac{\bar{\zeta} - i}{\bar{\zeta} + i} = \frac{1}{\bar{\tau}}.$$

Portanto, qualquer par de zeros simétricos de $P(z)$ na reta real também são zeros simétricos de $T(z)$ no círculo unitário, porque $P(z)$ é um polinômio auto-conjugado. Portanto, $T(z)$ é um polinômio auto-inversível. ■

Exemplo 3.2.1. Seja o polinômio $P(z) = (z - 2)(z - \frac{1}{2})$, um polinômio auto-inversível. Aplicando a transformação $Q(z) = (z + i)^2 \cdot P(\mathcal{M}(z))$, onde $\mathcal{M}(z) = \frac{z - i}{z + i}$, obtemos um polinômio auto-conjugado. Ao substituir $\mathcal{M}(z)$ no polinômio $P(z)$, temos:

$$P(\mathcal{M}(z)) = \frac{(-z - 3i)(z - 3i)}{2(z + i)^2}.$$

Sustituindo em $Q(z)$, obtemos:

$$Q(z) = (z + i)^2 \cdot \frac{(-z - 3i)(z - 3i)}{2} = \frac{-z^2 - 9}{2}.$$

Os zeros de $Q(z)$ são $z = \pm 3i$, que estão simetricamente localizadas em relação ao eixo real. Isso confirma que $Q(z)$ é um polinômio auto-conjugado. Portanto, transformamos o polinômio auto-inversível $P(z) = (z - 2)\left(z - \frac{1}{2}\right)$ em um polinômio auto-conjugado $Q(z) = \frac{-z^2 - 9}{2}$ (ver Figura 3.2.1).

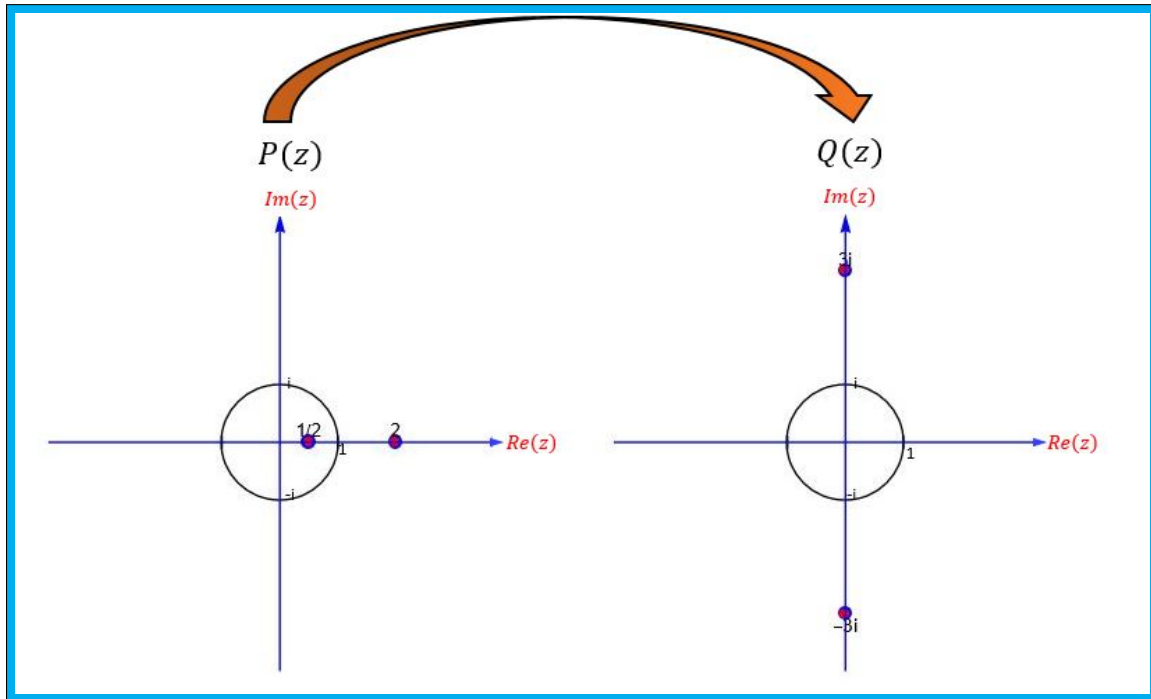


Figura 3.2.1: Transformação do polinômio auto-inversível $P(z)$ em um polinômio auto-conjugado $Q(z)$.

Classes especiais de polinômios

Neste capítulo, vamos estudar os polinômios auto-recíprocos reais $R_n^{(\lambda)}(z)$, $S_n^{(\lambda)}(z)$ e $A_n^{(\lambda, \delta)}(z)$, com foco nas suas propriedades em função de parâmetros específicos. Começaremos com os polinômios $R_n^{(\lambda)}(z)$ e $S_n^{(\lambda)}(z)$, utilizando as referências [7] e [8].

Iniciaremos com uma análise detalhada das propriedades do polinômio

$$R_n^{(\lambda)}(z) = 1 + \lambda(z + z^2 + \dots + z^{n-1}) + z^n, \quad n \geq 2 \text{ com } \lambda \in \mathbb{R},$$

focando nas características que definem esse tipo especial de polinômio. Depois, exploraremos os polinômios

$$S_n^{(\lambda)}(z) = \sum_{k=0}^n s_k^{(\lambda)} z^k, \quad n \geq 2, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

com $s_0^{(\lambda)} = s_n^{(\lambda)} = 1$ e

(i) $s_{n-k}^{(\lambda)} = s_k^{(\lambda)} = 1 + k\lambda$, $k = 1, 2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$ quando n é ímpar,

(ii) $s_{n-k}^{(\lambda)} = s_k^{(\lambda)} = 1 + k\lambda$, $k = 1, 2, \dots, n/2 - 1$, $s_{n/2}^{(\lambda)} = (n/2)\lambda$ quando n é par.

Além disso daremos as condições suficientes para garantir que todos os zeros dos polinômios $S_n^{(\lambda)}(z)$ estejam no círculo unitário.

Por último, abordaremos o polinômio $A_n^{(\lambda, \delta)}(z) = z^n + \lambda z^{n-1} + \delta(z^{n-2} + z^{n-3} + \dots + z^2) + \lambda z + 1$ com parâmetros λ e $\delta \in \mathbb{R}$.

4.1 Introdução

Começaremos apresentando alguns exemplos dos polinômios $R_n^{(\lambda)}(z)$, $S_n^{(\lambda)}(z)$ e $A_n^{(\lambda, \delta)}(z)$. Para isso, será necessário introduzir as seguintes notações:

- o maior número inteiro menor ou igual a $n/2$,

$$\lfloor n/2 \rfloor := \max(-\infty, n/2] \cap \mathbb{Z}.$$

- o menor número inteiro maior ou igual a $n/2$,

$$\lceil n/2 \rceil := \min[n/2, \infty) \cap \mathbb{Z}.$$

Exemplo 4.1.1. Para $n = 3$, a forma de $R_n^{(\lambda)}(z)$ varia conforme o valor de λ . A seguir, apresentamos as expressões correspondentes para dois casos específicos.

- Quando $\lambda = 1$, temos:

$$R_3^{(1)}(z) = 1 + (z + z^2) + z^3.$$

- Quando $\lambda = -1$, obtemos:

$$R_3^{(-1)}(z) = 1 - (z + z^2) + z^3.$$

Exemplo 4.1.2. Para $n = 6$ e $\lambda = -1$, que corresponde a um caso em que n é par. O polinômio $S_6^{(-1)}(z)$ é dado por:

$$S_6^{(-1)}(z) = \sum_{k=0}^6 s_k^{(-1)} z^k,$$

e os seus coeficientes verificam as seguintes condições:

(i) $s_0^{(-1)} = s_6^{(-1)} = 1$,

(ii) Para $k = 1, 2$, temos $s_k^{(-1)} = s_{6-k}^{(-1)} = 1 + k(-1)$; assim, os valores para cada k são:

- Quando $k = 1$:

$$s_1^{(-1)} = s_5^{(-1)} = 1 + 1(-1) = 0.$$

- Quando $k = 2$:

$$s_2^{(-1)} = s_4^{(-1)} = 1 + 2(-1) = -1.$$

(iii) Para $k = 3$, temos $s_3^{(-1)} = 3(-1) = -3$.

Portanto, o polinômio $S_6^{(-1)}(z)$ é dado por:

$$S_6^{(-1)}(z) = 1 + 0z - z^2 - 3z^3 - z^4 + 0z^5 + z^6 = 1 - z^2 - 3z^3 - z^4 + z^6.$$

Exemplo 4.1.3. Para $n = 5$, mostramos como a escolha dos valores de λ e δ determina a forma do polinômio $A_n^{(\lambda, \delta)}(z)$.

- Para $n = 5$, $\delta = -2$ e $\lambda = -1$:

$$A_5^{(-1, -2)}(z) = z^5 - z^4 - 2z^3 - 2z^2 - z + 1.$$

- Para $n = 5$, $\delta = -7$ e $\lambda = -3$:

$$A_5^{(-3, -7)}(z) = z^5 - 3z^4 - 7z^3 - 7z^2 - 3z + 1.$$

Observação 4.1.1. Para facilitar a compreensão deste capítulo, introduzimos algumas notações e definições utilizando a referência [16].

- As expressões $\overline{m}(a)$ e $\underline{m}(a)$ são determinadas da seguinte forma:

$$\overline{m}(a) := a_{\sigma(\lceil n/2 \rceil)} \quad e \quad \underline{m}(a) := a_{\sigma(\lfloor n/2 \rfloor)}.$$

- Se n for par, então:

$$\overline{m}(a) = \underline{m}(a).$$

- Vamos considerar a seguinte função $L : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$L(a) := \min_{y \in \mathbb{R}} \sum_{j=1}^{n-1} |a_j - y|, \quad (4.1.1)$$

onde $a = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ e os a_j são os coeficientes de um polinômio $P(z)$. Além disso, a sequência a tem uma permutação σ em $\{1, 2, \dots, n-1\}$ para o qual

$$a_{\sigma(1)} \leq a_{\sigma(2)} \leq \dots \leq a_{\sigma(n-1)}. \quad (4.1.2)$$

A função $L(a)$ busca minimizar a soma das distâncias $|a_j - y|$, e o valor y que a minimiza é o mediano do conjunto ordenado de a_j .

É importante destacar:

(a) Se n é par, então

$$L(a) = \sum_{j=1}^{n-1} |a_j - a_{\sigma(n/2)}|. \quad (4.1.3)$$

(b) Se n é ímpar, então

$$L(a) = \sum_{j=1}^{n-1} |a_j - y|, \quad (4.1.4)$$

para cada y pertencente ao intervalo fechado $[a_{\sigma(\lfloor n/2 \rfloor)}, a_{\sigma(\lceil n/2 \rceil)}]$.

Para uma melhor compreensão, vamos apresentar dois exemplos.

Exemplo 4.1.4. Seja o polinômio $P(z) = 9z^6 + 6z^5 + 5z^4 + 4z^3 + 3z^2 + 2z + 1$, a sequência $a \in \mathbb{R}^5$ é dada por $a = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (2, 3, 4, 5, 6)$. Assim, de (4.1.2),

$$a_{\sigma(1)} = 2 \leq a_{\sigma(2)} = 3 \leq a_{\sigma(3)} = 4 \leq a_{\sigma(4)} = 5 \leq a_{\sigma(5)} = 6.$$

Por outro lado,

$$(a) \quad \underline{m}(a) = a_{\sigma(\lfloor 6/2 \rfloor)} = a_{\sigma(\max(-\infty, 6/2] \cap \mathbb{Z})} = a_{\sigma(3)} = 4,$$

$$(b) \quad \overline{m}(a) = a_{\sigma(\lceil 6/2 \rceil)} = a_{\sigma(\min[6/2, \infty) \cap \mathbb{Z})} = a_{\sigma(3)} = 4.$$

Portanto $\overline{m}(a) = \underline{m}(a) = a_{\sigma(3)} = 4$.

Como n é par, de (4.1.3), temos:

$$\begin{aligned} L(a) &= \sum_{j=1}^5 |a_j - a_{\sigma(3)}| = |a_1 - a_{\sigma(3)}| + |a_2 - a_{\sigma(3)}| + |a_3 - a_{\sigma(3)}| + |a_4 - a_{\sigma(3)}| + |a_5 - a_{\sigma(3)}| \\ &= |2 - 4| + |3 - 4| + |4 - 4| + |5 - 4| + |6 - 4| \\ &= 6. \end{aligned}$$

Exemplo 4.1.5. Seja o polinômio $P(z) = 5z^5 + 2z^4 + 4z^3 + z^2 + 3z + 4$, a sequência $a \in \mathbb{R}^4$ é dada por $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) = (3, 1, 4, 2)$. Assim, de (4.1.2),

$$a_{\sigma(1)} = 1 \leq a_{\sigma(2)} = 2 \leq a_{\sigma(3)} = 3 \leq a_{\sigma(4)} = 4.$$

Por outro lado,

$$(a) \underline{m}(a) = a_{\sigma(\lfloor 5/2 \rfloor)} = a_{\sigma(\max(-\infty, 5/2] \cap \mathbb{Z})} = a_{\sigma(2)} = 2,$$

$$(b) \overline{m}(a) = a_{\sigma(\lceil 5/2 \rceil)} = a_{\sigma(\min[5/2, \infty) \cap \mathbb{Z})} = a_{\sigma(3)} = 3.$$

Como $n = 5$ é ímpar, os valores de y que minimizam a função $L(a)$ devem estar no intervalo $[a_{\sigma(\lfloor n/2 \rfloor)}, a_{\sigma(\lceil n/2 \rceil)}]$. Portanto, y deve estar no intervalo $[2, 3]$. Da equação (4.1.4) calculamos o valor da função $L(a)$, tomamos $y = 2, 5$, que está no intervalo $[2, 3]$:

$$\begin{aligned} L(a) &= \sum_{j=1}^4 |a_j - y| = |a_1 - 2, 5| + |a_2 - 2, 5| + |a_3 - 2, 5| + |a_4 - 2, 5| \\ &= |3 - 2, 5| + |1 - 2, 5| + |4 - 2, 5| + |2 - 2, 5| \\ &= 4. \end{aligned}$$

O teorema a ser apresentado tem como referência [8] e [16]. Este teorema é a base para apresentar as propriedades do polinômio $A_n^{(\lambda, \delta)}(z)$.

Teorema 4.1.1. *Seja $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ um polinômio auto-recíproco de grau n com $a_n > 0$, e $a = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$.*

1. *Suponha que $\underline{m}(a) + L(a) \leq 2a_n$.*

(a) *Se $P(1) \geq 0$, então todos os zeros de P estão no círculo unitário. Nesse caso, há pelo menos dois zeros da forma $e^{i\theta}$ com $\frac{-2\pi}{n} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{n}$.*

(b) *Se $P(1) < 0$, então P tem zeros reais $\beta > 1$ e β^{-1} e os outros zeros estão no círculo unitário.*

2. *Suponha que $\overline{m}(a) \geq L(a) + 2a_n$. Então, uma das seguintes situações é válida:*

(a) *Todos os zeros de P estão no círculo unitário. Além disso:*

(i) *Quando n é ímpar, há três ou cinco zeros da forma $e^{i\theta}$ com $\frac{(n-1)\pi}{n} \leq \theta \leq \frac{(n+1)\pi}{n}$.*

(ii) *Quando n é par, -1 é um zero com multiplicidade 2 ou 4.*

(b) *P tem zeros reais $\beta < -1$ e β^{-1} , e os outros zeros estão no círculo unitário.*

Exemplo 4.1.6. *Seja o polinômio*

$$P(z) = z^4 - 2z^2 + 1 = (z - 1)^2 (z + 1)^2,$$

com $a_4 = 1$ e $a = (a_1, a_2, a_3) = (0, -2, 0)$.

Calculemos $\underline{m}(a)$ e $L(a)$:

$$(a) \underline{m}(a) = a_{\sigma(\lfloor 4/2 \rfloor)} = a_{\sigma(\max(-\infty, 2] \cap \mathbb{Z})} = a_{\sigma(2)} = 0,$$

$$(a) L(a) := \sum_{j=1}^3 |a_j - a_{\sigma(3)}| = |a_1 - a_{\sigma(2)}| + |a_2 - a_{\sigma(2)}| + |a_3 - a_{\sigma(2)}| = |-2 - 0| = 2.$$

Observamos que:

$$\underline{m}(a) + L(a) = 0 + 2 = 2 \leq 2 \cdot 1 = 2.$$

Os zeros de $P(z)$, que são 1 e -1 com multiplicidade 2, estão localizados no círculo unitário. Estes podem ser representados como:

$$1 = e^{i0} \quad e \quad -1 = e^{i\pi}.$$

Além disso, para $n = 4$:

$$\frac{-2\pi}{n} = -\frac{\pi}{2} \quad e \quad \frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{2}.$$

Observamos que $\theta = 0$ está no intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, o que cumpre com as condições do Teorema 4.1.1 (1a)(ver Figura 4.1.1).

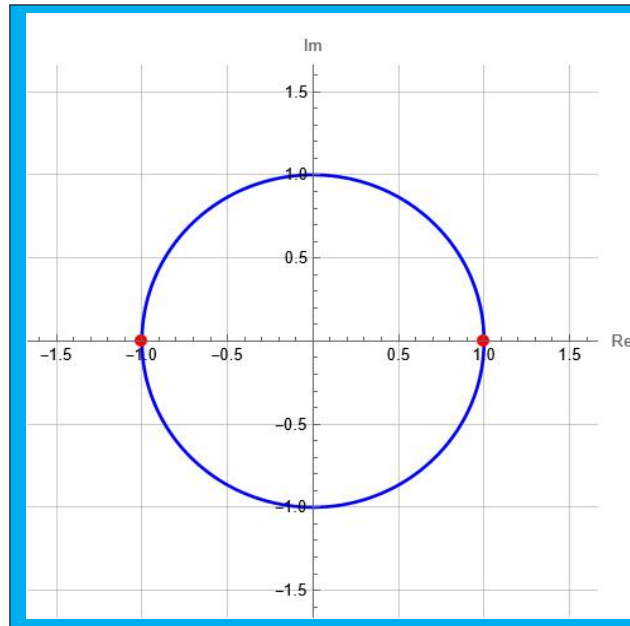


Figura 4.1.1: Representação gráfica dos zeros do polinômio $P(z)$ no círculo unitário.

4.2 Análise das propriedades de $R_n^{(\lambda)}(z)$

Nesta seção, abordaremos as propriedades mais importantes dos polinômios $R_n^{(\lambda)}(z)$. Além disso, é importante mencionar que, de acordo com a Observação 2.3.1, a sequência de polinômios $\{R_n^{(\lambda)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ é gerada pela relação de recorrência de três termos:

$$R_{n+1}^{(\lambda)}(z) = (z + 1)R_n^{(\lambda)}(z) - \alpha_{n+1}zR_{n-1}^{(\lambda)}(z), \quad n \geq 1,$$

onde $R_0^{(\lambda)}(z) = 1$, $R_1^{(\lambda)}(z) = z + 1$, $\alpha_2 = 2 - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e $\alpha_n = 1$ para $n \geq 3$.

Com base no Lema 2.3.1, para qualquer $n \geq 1$, os polinômios consecutivos $R_n^{(\lambda)}(z)$ e $R_{n+1}^{(\lambda)}(z)$ não possuem zeros em comum.

Quando n é ímpar, o polinômio auto-recíproco $R_n^{(\lambda)}(z)$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, apresenta algumas propriedades interessantes, que serão apresentadas no próximo resultado. O seguinte lema deriva da referência [8].

Lema 4.2.1. *Seja um polinômio $R_n^{(\lambda)}(z) = 1 + \lambda(z + z^2 + \dots + z^{n-1}) + z^n$ de grau ímpar. Então*

1. $z = -1$ é um zero de $R_n^{(\lambda)}(z) = (z + 1)Q(z)$, onde

$$Q(z) = \sum_{i=0}^{n-1} q_i z^i, \text{ com } q_i = \begin{cases} 1, & \text{se } i \text{ é par,} \\ \lambda - 1, & \text{se } i \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

2. Se $\lambda = \frac{2n}{n-1}$, $n > 1$, então $z = -1$ é um zero de $R_n^{(\lambda)}(z)$ de multiplicidade 3 e $R_n^{(\lambda)}(z) = (z + 1)^3 U(z)$, onde

$$U(z) = \sum_{i=0}^{n-3} u_i z^i, \text{ com } u_i = \begin{cases} \frac{(i+2)(n-1-i)}{2(n-1)}, & \text{se } i \text{ é par,} \\ -\frac{(i+1)(n-1-(i+1))}{2(n-1)}, & \text{se } i \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Demonstração. *Seja $R_n^{(\lambda)}(z) = 1 + \lambda z + \lambda z^2 + \lambda z^3 + \dots + \lambda z^{n-1} + z^n$ um polinômio de grau ímpar. A seguir, vamos demonstrar os dois itens,*

1. *Sabendo que*

$$R_n^{(\lambda)}(-1) = 1 + \lambda \underbrace{(-1 + 1 - 1 + \dots + 1)}_0 - 1 = 0,$$

podemos afirmar que,

$$\begin{aligned} R_n^{(\lambda)}(z) &= (z + 1)Q(z) = (z + 1) \sum_{i=0}^{n-1} q_i z^i \\ &= (z + 1) \left[q_0 + q_1 z + q_2 z^2 + q_3 z^3 + \dots + q_{n-1} z^{n-1} \right] \\ &= (z + 1)q_0 + (z + 1)q_1 z + (z + 1)q_2 z^2 + \dots + (z + 1)q_{n-1} z^{n-1} \\ &= q_0 + (q_0 + q_1)z + (q_1 + q_2)z^2 + (q_2 + q_3)z^3 + \dots + (q_{n-2} + q_{n-1})z^{n-1} + q_{n-1}z^n. \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Comparando os coeficientes do polinômio $R_n^{(\lambda)}(z)$ com (4.2.1), temos que:

$$q_0 = 1, \quad q_0 + q_1 = \lambda, \quad q_1 + q_2 = \lambda, \quad q_2 + q_3 = \lambda, \dots, \quad q_{n-2} + q_{n-1} = \lambda, \quad q_{n-1} = 1.$$

Assim,

$$q_1 = \lambda - 1, \quad q_2 = 1, \quad q_3 = \lambda - 1, \dots, \quad q_{n-2} = \lambda - 1, \quad q_{n-1} = 1.$$

Portanto,

$$q_i = \begin{cases} 1, & \text{se } i \text{ é par,} \\ \lambda - 1, & \text{se } i \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

2. *Do Lema 4.2.1 item 1, temos $R_n^{(\lambda)}(z) = (z + 1)Q(z)$, onde*

$$Q(z) = \sum_{i=0}^{n-1} q_i z^i, \text{ com } q_i = \begin{cases} 1, & \text{se } i \text{ é par,} \\ \lambda - 1, & \text{se } i \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Substituímos $z = -1$ para calcular $Q(-1)$,

$$Q(-1) = \sum_{i=0}^{n-1} q_i(-1)^i,$$

separamos os termos par e ímpar,

$$\begin{aligned} Q(-1) &= \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} q_i(-1)^i}_{i: \text{ par}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} q_i(-1)^i}_{i: \text{ ímpar}} \\ &= \left(\frac{n+1}{2}\right)(1) - \left(\frac{n-1}{2}\right)(\lambda - 1). \end{aligned}$$

Para $\lambda = \frac{2n}{n-1}$, $n > 1$,

$$\begin{aligned} Q(-1) &= \left(\frac{n+1}{2}\right)(1) - \left(\frac{n-1}{2}\right)(\lambda - 1) \\ &= \left(\frac{n+1}{2}\right)(1) - \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{2n}{n-1} - 1\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$Q(z) = (z+1)T(z), \quad (4.2.2)$$

com

$$T(z) = \sum_{i=0}^{n-2} t_i z^i, \quad t_i = t_{n-2-i} = \frac{n-1-i}{n-1}, \quad i \text{ par}.$$

A expressão $T(z) = \sum_{i=0}^{n-2} t_i z^i$ é desenvolvida para assegurar que $Q(z)$ seja auto-recíproco. Para i par, definimos $t_i = \frac{n-1-i}{n-1}$. Isso garante que os coeficientes sejam proporcionais ao grau e preservem sua estrutura, já que o grau de $T(z)$ é $n-2$.

Por outro lado, desenvolvendo $Q(z)$, temos:

$$\begin{aligned} Q(z) &= (z+1)T(z) = (z+1) \sum_{i=0}^{n-2} t_i z^i \\ &= t_0 + (t_0 + t_1)z^1 + (t_1 + t_2)z^2 + \dots + (t_{n-3} + t_{n-2})z^{n-2} + t_{n-2}z^{n-1}. \end{aligned}$$

Usando a afirmação anterior notamos que $T(-1) = 0$ e então,

$$T(z) = (z+1)U(z), \quad (4.2.3)$$

onde,

$$U(z) = \sum_{i=0}^{n-3} u_i z^i, \quad u_i = \begin{cases} \frac{(i+2)(n-1-i)}{2(n-1)}, & \text{se } i \text{ é par,} \\ -\frac{(i+1)(n-1-(i+1))}{2(n-1)}, & \text{se } i \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

A função $U(z)$ é composta por uma série de termos, cada um com um coeficiente u_i que varia conforme o índice seja par ou ímpar. Isso significa que os coeficientes possuem uma simetria. Essa simetria é importante para que o polinômio $R_n^{(\lambda)}(z)$ apresente determinadas propriedades.

Do Lema 4.2.1 (item 1) e das equações (4.2.3) e (4.2.2), temos:

$$\begin{aligned} R_n^{(\lambda)}(z) &= (z+1)Q(z) \\ &= (z+1)((z+1)T(z)) \\ &= (z+1)((z+1)((z+1)U(z))) \\ &= (z+1)^3U(z). \end{aligned}$$

■

A seguir, apresentaremos a demonstração do teorema, tomando como referência [8].

Teorema 4.2.1. Os zeros do polinômio $R_n^{(\lambda)}(z) = 1 + \lambda(z + z^2 + \dots + z^{n-1}) + z^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, de grau $n > 1$, estão no círculo unitário se e somente se

1. $-\frac{2}{n-1} \leq \lambda \leq 2$, se n é par;
2. $-\frac{2}{n-1} \leq \lambda \leq 2 + \frac{2}{n-1}$, se n é ímpar.

Demonstração. Do Teorema 4.1.1, $a = (\lambda, \lambda, \dots, \lambda)$, $\overline{m}(a) = \underline{m}(a) = \lambda$ e $L(a) = 0$. Se $\underline{m}(a) + L(a) = \lambda + 0 = \lambda \leq 2a_n = 2$, ou seja, $\lambda \leq 2$, como

$$\begin{aligned} R_n^{(\lambda)}(1) &= 1 + \lambda((1) + (1)^2 + \dots + (1)^{n-1}) + (1)^n = 1 + \lambda(n-1) + 1 \\ &= 2 + \lambda(n-1) \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

quando $\lambda \geq \frac{-2}{n-1}$, do item 1(a) do Teorema 4.1.1 pode-se observar que todos os zeros de $R_n^{(\lambda)}(z)$ estão localizados no círculo unitário quando $-\frac{2}{n-1} \leq \lambda \leq 2$.

Ademais, se $\underline{m}(a) + L(a) = \lambda \leq 2$ e $R_n^{(\lambda)}(1) = 2 + \lambda(n-1) < 0$, quando $\lambda < \frac{-2}{n-1}$, então $R_n^{(\lambda)}(z)$ tem um zero real no intervalo $(1, \infty)$. De fato,

$$\lim_{z \rightarrow 1} R_n^{(\lambda)}(z) = 2 + (n-1)\lambda < 0 \quad (4.2.4)$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} R_n^{(\lambda)}(z) = \infty > 0. \quad (4.2.5)$$

De (4.2.5), por definição de limite, existe $x_1 > 0$ tal que $R_n^{(\lambda)}(x_1) > 0$. A partir de (4.2.4), existe $x_2 \in \mathbb{R}$ e considerando que $R_n^{(\lambda)}(z)$ é um polinômio real contínuo em $\mathbb{R}$ tal que $R_n^{(\lambda)}(x_2) < 0$, portanto podemos aplicar o Teorema 2.1.2 para afirmar que existe uma mudança de sinal de $R_n^{(\lambda)}(z)$ no intervalo $(1, \infty)$, portanto, existe um zero real nesse intervalo. Assim do item 1(b) do Teorema 4.1.1, existem zeros no círculo unitário. Note que as observações anteriores se aplicam a todos os valores de n .

A seguir, analisaremos os casos quando n é par e n é ímpar, seguindo o raciocínio que apresentamos anteriormente:

- (i) Para n par, se $\lambda > 2$ ($\overline{m}(a) > L(a) + 2$), $R_n^{(\lambda)}(z)$ tem um zero real no intervalo $(-\infty, -1)$. De fato, como

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} R_n^{(\lambda)}(z) = \infty > 0 \quad e \quad \lim_{z \rightarrow -1} R_n^{(\lambda)}(z) = 2 - \lambda < 0. \quad (4.2.6)$$

A partir de (4.2.6) e considerando que $R_n^{(\lambda)}(z)$ é um polinômio real contínuo em $\mathbb{R}$, podemos aplicar o Teorema 2.1.2 para afirmar que existe uma mudança de sinal de $R_n^{(\lambda)}(z)$ no intervalo $(-\infty, -1)$. Assim, do item 2(b) do Teorema 4.1.1, existem zeros no círculo unitário.

Logo, para n par, os zeros de $R_n^{(\lambda)}(z)$ estão localizados no círculo unitário se, e somente se, $-\frac{2}{n-1} \leq \lambda \leq 2$.

- (ii) Para n ímpar, se $\lambda > 2$ ($\overline{m}(a) > L(a) + 2$), consideramos as seguintes situações:

- (a) Se $\lambda > \frac{2n}{n-1}$, $R_n^{(\lambda)}(z)$ tem um zero real no intervalo $(-\infty, -1)$. De fato, podemos escrever $R_n^{(\lambda)}(z) = (z+1)Q(z)$, então temos que:

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} Q(z) > 0 \quad e \quad \lim_{z \rightarrow -1} Q(z) = n - \frac{n-1}{2}\lambda < 0. \quad (4.2.7)$$

A partir de (4.2.7) e considerando que $Q(z)$ é um polinômio real contínuo em $\mathbb{R}$, podemos aplicar o Teorema 2.1.2 para afirmar que existe uma mudança de sinal de $Q(z)$ no intervalo $(-\infty, -1)$, e, conseqüentemente, $R_n^{(\lambda)}(z)$ tem um zero real em $(-\infty, -1)$, de acordo com o item 2(b) do Teorema 4.1.1.

- (b) Se $\lambda < \frac{2n}{n-1}$, com $R_n^{(\lambda)}(z) = (z+1)Q(z)$, então temos que:

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} Q(z) > 0 \quad e \quad \lim_{z \rightarrow -1} Q(z) = n - \left(\frac{n-1}{2}\right)\lambda > 0, \quad (4.2.8)$$

isso quer dizer que não ocorre mudança de sinal de $Q(z)$ em $(-\infty, -1)$ e todos os zeros de $R(z)$ estão no círculo unitário, de acordo com o item 2(a) do Teorema 4.1.1.

- (c) Se $\lambda = \frac{2n}{n-1}$, do Lema 4.2.1 (item 2) $z = -1$ é um zero de multiplicidade 3 de $R_n^{(\lambda)}(z)$ e temos que $R_n^{(\lambda)}(z) = (z+1)^3 U(z)$. Além disso,

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} U(z) = \infty > 0 \quad e \quad \lim_{z \rightarrow -1} U(z) > 0, \quad (4.2.9)$$

isso quer dizer que não ocorre mudança de sinal de $U(z)$ no intervalo $(-\infty, -1)$ e de 2(a) do Teorema 4.1.1 $R_n^{(\lambda)}(z)$ possui todos seus zeros no círculo unitário.

Assim, para n ímpar, os zeros de $R_n^{(\lambda)}(z)$ estão no círculo unitário se, e somente se $-\frac{2}{n-1} \leq \lambda \leq 2$ (demonstrado no início desta prova) ou $2 < \lambda \leq \frac{2n}{n-1}$ (conforme as considerações acima). A partir dessas desigualdades, temos:

$$-\frac{2}{n-1} \leq \lambda \leq \frac{2n}{n-1},$$

ou, de forma equivalente,

$$-\frac{2}{n-1} \leq \lambda \leq 2 + \frac{2}{n-1}. \quad \blacksquare$$

A seguir, apresentamos um exemplo que ilustra o teorema.

Exemplo 4.2.1. *Seja o polinômio:*

$$R_5^{(1)}(z) = 1 + \lambda(z + z^2 + \dots + z^{n-1}) + z^n.$$

De acordo com o teorema anterior, os zeros do polinômio estão no círculo unitário se certas condições sobre λ forem satisfeitas. Como $n = 5$, temos:

$$-\frac{1}{2} \leq \lambda \leq \frac{5}{2}.$$

Portanto, concluímos que para $\lambda = 1$ todos os zeros do polinômio $R_5^{(1)}(z)$ estão localizados no círculo unitário no plano complexo. A seguir, apresentaremos uma tabela com os zeros do polinômio $R_5^{(1)}(z)$ e o gráfico correspondente, para que se possa verificar que o teorema realmente se aplica.

Tabela 4.2.1: Os valores dos zeros de $R_5^{(1)}(z)$.

z
$z_1 \approx -1$
$z_2 \approx -1/2 - i\sqrt{3}/2$
$z_3 \approx -1/2 + i\sqrt{3}/2$
$z_4 \approx 1/2 + i\sqrt{3}/2$
$z_5 \approx 1/2 - i\sqrt{3}/2$

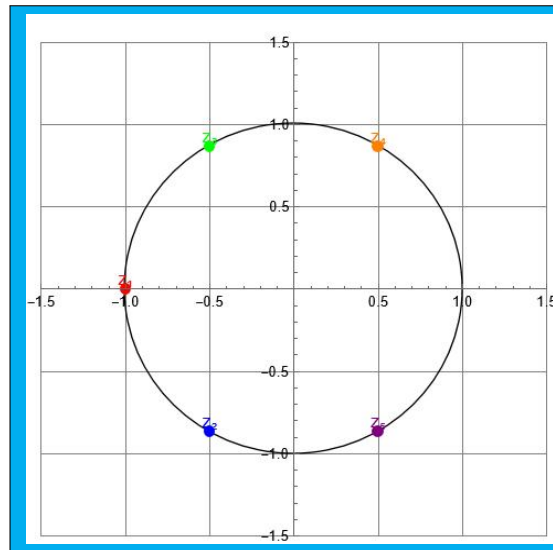


Figura 4.2.1: Representação gráfica dos zeros do polinômio $R_5^{(1)}(z)$ no círculo unitário.

Da referência [7], apresentaremos um teorema que aborda o principal resultado sobre o comportamento dos dois zeros positivos de $R_n^{(\lambda)}(z)$ e dos dois zeros negativos de $R_n^{(\lambda)}(z)$, quando esses zeros existem.

Teorema 4.2.2. *Seja o polinômio $R_n^{(\lambda)}(z)$, então,*

- (1) Se $\lambda < \frac{-2}{n-1}$, com $n > 1$, $R_n^{(\lambda)}(z)$ possui dois zeros positivos $z_k^{(\lambda)}$ e $\frac{1}{z_k^{(\lambda)}}$, onde $z_k^{(\lambda)} \in (1, \infty)$ e $\frac{1}{z_k^{(\lambda)}} \in (0, 1)$. Além disso, $z_k^{(\lambda)}$ é uma função decrescente de λ e, consequentemente, $\frac{1}{z_k^{(\lambda)}}$ é uma função crescente de λ .

- (2) Se $\lambda > 2$ (quando $n > 1$ é par) ou $\lambda > 2 + \frac{2}{n-1}$ (quando $n > 1$ é ímpar), $R_n^{(\lambda)}(z)$ possui dois zeros negativos $z_k^{(\lambda)}$ e $\frac{1}{z_k^{(\lambda)}}$, onde $z_k^{(\lambda)} \in (-\infty, -1)$ e $\frac{1}{z_k^{(\lambda)}} \in (-1, 0)$. Além disso, $z_k^{(\lambda)}$ é uma função decrescente de λ e, consequentemente, $\frac{1}{z_k^{(\lambda)}}$ é uma função crescente de λ .
- (3) Se $\lambda \in \left(-\infty, \frac{-2}{n-1}\right)$, $R_n^{(\lambda)}(z)$ possui dois zeros positivos $z_k^{(\lambda)}$ e $\frac{1}{z_k^{(\lambda)}}$, e os outros zeros estão localizados no círculo unitário.
- (4) Se $\lambda \in (2, \infty)$ (caso par) e $\lambda \in \left(2 + \frac{2}{n-1}, \infty\right)$ (caso ímpar), $R_n^{(\lambda)}(z)$ possui dois zeros negativos $z_k^{(\lambda)}$ e $\frac{1}{z_k^{(\lambda)}}$, e os outros zeros estão localizados no círculo unitário.

Observação 4.2.1. De acordo com [8], se n for par e $\lambda = 2$, temos $R_n^{(\lambda)}(-1) = 0$ e $z = -1$ é um zero de multiplicidade 2 de $R_n^{(\lambda)}(z)$, conforme descrito no item 2(a) do Teorema 4.1.1.

A seguir, apresentamos um exemplo que ilustra essa observação

Exemplo 4.2.2. Seja o polinômio:

$$R_4^{(2)}(z) = 1 + 2(z + z^2 + z^3) + z^4.$$

Verificamos:

$$R_4^{(2)}(-1) = 1 + 2(-1 + 1 - 1) + 1 = 0.$$

Assim, $z = -1$ é um zero do polinômio. O polinômio pode ser fatorado como:

$$R_4^{(2)}(z) = (z + 1)^2(z^2 + 1).$$

Portanto, conforme a análise, temos que $R_4^{(2)}(-1) = 0$ e $z = -1$ é um zero de multiplicidade 2 do polinômio.

4.3 Análise das propriedades de $S_n^{(\lambda)}(z)$

Como consequência do estudo realizado por Kim e Park [15], temos um resultado relacionado com a localização dos zeros do polinômio auto-recíproco real

$$S_n^{(\lambda)}(z) = \sum_{k=0}^n s_k^{(\lambda)} z^k,$$

onde

$$s_k^{(\lambda)} = 1 + k\lambda \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor \quad (n \text{ ímpar}),$$

e para alguns valores de $\lambda \in \mathbb{R}$. Os autores mencionam que, nos casos onde:

- $2 < \lambda < 2 + \frac{2}{\lfloor n/2 \rfloor}$ ($\lfloor n/2 \rfloor$ ímpar),
- $\lambda = 2 + \frac{2}{\lfloor n/2 \rfloor}$ ($\lfloor n/2 \rfloor$ ímpar),
- $\lambda = -\frac{2}{\lfloor n/2 \rfloor}$,

a localização dos zeros de $S_n^{(\lambda)}(z)$ era um problema aberto, mas foi demonstrado (veja [7]).

Nesta seção, apresentamos uma demonstração sobre a localização dos zeros de $S_n^{(\lambda)}(z)$ no caso em que n é ímpar e $\lambda \in \mathbb{R}$, assim como quando n é par. Esses resultados podem ser vistos com mais detalhes em [7].

Para alcançar esse objetivo, é necessário considerar alguns conceitos, como os descritos na referência [7]. Os polinômios $\mathcal{W}_n^{(\lambda)}(x)$ são definidos por

$$\mathcal{W}_n^{(\lambda)}(x) = \mathcal{W}_n^{(\lambda)}(x(z)) = z^{-n/2} R_n^{(\lambda)}(z) = U_n(x) - (1 - \lambda)U_{n-2}(x), \quad n \geq 1, \quad (4.3.1)$$

onde os polinômios $U_n(x)$, para $n \geq 0$ e $U_{-1}(x) = 0$, são os polinômios de Chebyshev de segunda espécie. De fato,

$$\begin{aligned} R_n^{(\lambda)}(z) &= 1 + \lambda(z + z^2 + \dots + z^{n-1}) + z^n \\ &= 1 + z + \dots + z^n + (\lambda - 1)z(1 + z + \dots + z^{n-2}) \\ &= \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} + (\lambda - 1)z \left(\frac{z^{n-1} - 1}{z - 1} \right) \\ &= \frac{z^{n/2}(z^{(n+1)/2} - z^{-(n+1)/2})}{z^{1/2} - z^{-1/2}} + (\lambda - 1) \frac{z^{n/2}(z^{(n-1)/2} - z^{-(n-1)/2})}{z^{1/2} - z^{-1/2}}. \end{aligned}$$

Utilizando que $\frac{z^{1/2} + z^{-1/2}}{2} = \cos(\theta/2) = x$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_n^{(\lambda)}(x) &= z^{-n/2} R_n^{(\lambda)}(z) = \frac{z^{(n+1)/2} - z^{-(n+1)/2}}{z^{1/2} - z^{-1/2}} + (\lambda - 1) \left(\frac{z^{(n-1)/2} - z^{-(n-1)/2}}{z^{1/2} - z^{-1/2}} \right) \\ &= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} + (\lambda - 1) \frac{\sin\left(\frac{(n-1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= U_n(x) - (1 - \lambda)U_{n-2}(x). \end{aligned}$$

Como $U_n(x) - U_{n-2}(x) = 2T_n(x)$, para $n \geq 2$, onde o polinômio $T_n(x)$ é o polinômio de Chebyshev de primeira espécie, também podemos escrever

$$\mathcal{W}_n^{(\lambda)}(x) = \lambda U_n(x) + 2(1 - \lambda)T_n(x). \quad (4.3.2)$$

Observação 4.3.1. Para $\frac{-2}{n-1} \leq \lambda \leq 2$ (n par) ou $\frac{-2}{n-1} \leq \lambda \leq 2 + \frac{2}{n-1}$ (n ímpar), sabemos que os zeros de $R_n^{(\lambda)}(z)$ localizados no primeiro e segundo quadrantes são representados por

$$z_{n,r}^{(\lambda)} = e^{i\theta_{n,r}^{(\lambda)}}, \quad r = 1, 2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor,$$

com $0 \leq \theta_{n,r}^{(\lambda)} \leq \pi$, onde

$$\theta_{n,r}^{(\lambda)} = 2 \arccos(\xi_{n,r}^{(\lambda)}),$$

e $\xi_{n,r}^{(\lambda)}$ são os zeros não negativos de $\mathcal{W}_n^{(\lambda)}(x)$. Se n é ímpar, $r = 1, 2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor + 1$ e $\theta_{n, \lfloor n/2 \rfloor + 1}^{(\lambda)} = \pi$.

Agora, analisaremos alguns dos valores que λ pode assumir:

(a) Se $\lambda = 0$, a partir da equação (4.3.2), temos:

$$z^{-\frac{n}{2}} R_n^{(0)}(z) = \mathcal{W}_n^{(0)}(x) = 2T_n(x).$$

Então, os zeros de $\mathcal{W}_n^{(0)}(x)$ são representados por

$$\xi_{n,r}^{(0)} = \cos\left(\frac{(2r-1)\pi}{2n}\right), \quad r = 1, 2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor.$$

Consequentemente, obtemos:

$$\theta_{n,r}^{(0)} = 2 \arccos(\xi_{n,r}^{(0)}) = \frac{(2r-1)\pi}{n}.$$

E, para n ímpar, temos:

$$\theta_{n, \lfloor n/2 \rfloor + 1}^{(0)} = \pi.$$

(b) Se $\lambda = 1$, a partir da equação (4.3.1), temos:

$$\mathcal{W}_n^{(1)}(x) = U_n(x).$$

Então, os zeros de $\mathcal{W}_n^{(1)}(x)$ são representados por

$$\xi_{n,r}^{(1)} = \cos\left(\frac{r\pi}{n+1}\right), \quad r = 1, 2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor.$$

Consequentemente, obtemos:

$$\theta_{n,r}^{(1)} = 2 \arccos(\xi_{n,r}^{(1)}) = \frac{2r\pi}{n+1}.$$

E, para n ímpar, temos:

$$\theta_{n, \lfloor n/2 \rfloor + 1}^{(1)} = \pi.$$

(c) Se $\lambda = 2$, a partir da equação (4.3.1), temos:

$$\mathcal{W}_n^{(2)}(x) = U_n(x) - T_n(x).$$

Então, todos os zeros de $\mathcal{W}_n^{(2)}(x)$ são representados por

$$\xi_{n,r}^{(2)} = \cos\left(\frac{r\pi}{n}\right), \quad r = 1, 2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor \quad e \quad \xi_{n, \lfloor n/2 \rfloor + 1}^{(2)} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{para } n \text{ ímpar}).$$

Por conseguinte,

$$\theta_{n,r}^{(2)} = 2 \arccos(\xi_{n,r}^{(2)}) = \frac{2r\pi}{n}, \quad r = 1, 2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor \quad e \quad \theta_{n, \lfloor n/2 \rfloor + 1}^{(2)} = \pi \quad (\text{para } n \text{ ímpar}).$$

Observe que, se $\lambda = 2$ e n é par, segue que $z = -1$ é zero de multiplicidade 2 de $R_n^{(\lambda)}(z)$ e, consequentemente,

$$\theta_{n, \lfloor n/2 \rfloor}^{(2)} = \theta_{n, \lfloor n/2 \rfloor + 1}^{(2)} = \pi.$$

A seguir, apresentaremos a demonstração do teorema principal desta seção baseado em [7].

Teorema 4.3.1. *Os zeros do polinômio $S_n^{(\lambda)}(z)$, $n \geq 2$, estão localizados no círculo unitário se, e somente se,*

1. $-\frac{2}{\lfloor n/2 \rfloor} \leq \lambda \leq 2$, se $\lfloor n/2 \rfloor$ é ímpar,
2. $-\frac{2}{\lfloor n/2 \rfloor} \leq \lambda \leq 2 + \frac{2}{\lfloor n/2 \rfloor}$, se $\lfloor n/2 \rfloor$ é par.

Além disso,

- (i) Se $\lambda \in \left(-\infty, -\frac{2}{\lfloor n/2 \rfloor}\right)$, $S_n^{(\lambda)}(z)$ tem dois zeros positivos $z_k^{(\lambda)} \in (1, +\infty)$ e $\frac{1}{z_k^{(\lambda)}} \in (0, 1)$, e os outros zeros estão localizados no círculo unitário.
- (ii) Se $\lambda \in (2, +\infty)$ $\left(\lambda \in \left(2 + \frac{2}{\lfloor n/2 \rfloor}, +\infty\right)\right)$ e $\lfloor n/2 \rfloor$ é ímpar ($\lfloor n/2 \rfloor$ é par), $S_n^{(\lambda)}(z)$ possui dois zeros negativos $z_k^{(\lambda)} \in (-\infty, -1)$ e $\frac{1}{z_k^{(\lambda)}} \in (-1, 0)$, e os outros zeros estão localizados no círculo unitário.

Demonstração. Para realizar esta prova, consideraremos dois casos: quando n é par e quando n é ímpar.

1. Por indução, se n é par, note que:

$$S_n^{(\lambda)}(z) = \left(\frac{z^{n/2} - 1}{z - 1}\right) R_{n/2+1}^{(\lambda)}(z) = R_{n/2-1}^{(1)}(z) \cdot R_{n/2+1}^{(\lambda)}(z),$$

onde, $R_0^{(1)}(z) = 1$, $R_1^{(1)}(z) = z + 1$, e para $n \geq 2$, $R_n^{(\lambda)}(z) = 1 + \lambda(z + z^2 + \dots + z^{n-1}) + z^n$. Assim, precisamos analisar os zeros de $R_{n/2-1}^{(1)}(z)$ e $R_{n/2+1}^{(\lambda)}(z)$.

A partir dos Teoremas 4.2.1, 4.2.2 e da Observação 4.3.1, temos que os zeros de $R_{n/2-1}^{(1)}(z)$ estão localizados no círculo unitário e são dados por: $z_{n,r}^{(1)} = e^{i\theta_{n,r}^{(1)}}$, onde $\theta_{n/2-1,r}^{(1)} = \frac{2r\pi}{n/2-1+1} = \frac{4r\pi}{n}$, e

- $r = 1, 2, \dots, \frac{n/2-1}{2} = \frac{n-2}{4}$, se $n/2 - 1$ é par,
- $r = 1, 2, \dots, \frac{n/2-1}{2} + 1 = \frac{n+2}{4}$, se $n/2 - 1$ é ímpar.

Observe que $0 \leq \theta_{n/2-1,r}^{(1)} \leq \pi$ (estamos considerando apenas os zeros no primeiro e no segundo quadrantes, os demais zeros são os conjugados complexos. Isso ocorre porque, se z_0 é um zero de $R_{n/2-1}^{(1)}$, então $R_{n/2-1}^{(1)}(z_0) = 0$, mas $\overline{R_{n/2-1}^{(1)}(z_0)} = R_{n/2-1}^{(1)}(\bar{z}_0) = 0$. Isso se deve ao fato de que os coeficientes do polinômio $R_{n/2-1}^{(1)}(z)$ são reais). Além disso, note que os zeros de $R_{n/2-1}^{(1)}(z)$ são fixos.

Agora analisaremos o polinômio $R_{n/2+1}^{(\lambda)}(z)$. O grau n é par, mas $n/2$ pode ser par ou ímpar, então do Teorema 4.2.1, sabemos que os zeros de $R_{n/2+1}^{(\lambda)}(z)$ estão localizados no círculo unitário se:

- $n/2 + 1$ é par (com $n/2$ ímpar), obtemos:

$$-\frac{2}{(n/2 + 1) - 1} \leq \lambda \leq 2,$$

então,

$$-\frac{2}{n/2} \leq \lambda \leq 2.$$

- $n/2 + 1$ é ímpar (com $n/2$ par), temos:

$$-\frac{2}{n/2} \leq \lambda \leq 2 + \frac{2}{(n/2 + 1) - 1},$$

então,

$$-\frac{2}{n/2} \leq \lambda \leq 2 + \frac{2}{n/2}.$$

Além disso, do Teorema 4.2.2 itens (1) e (3), se $\lambda \in \left(-\infty, -\frac{2}{n/2}\right)$, então $R_{n/2+1}^{(\lambda)}(z)$ tem dois zeros positivos $z_k^{(\lambda)} \in (1, +\infty)$ e $\frac{1}{z_k^{(\lambda)}} \in (0, 1)$, e os outros zeros estão localizados no círculo unitário. De maneira similar, do Teorema 4.2.2 itens (2) e (4), se $\lambda \in (2, +\infty)$ quando $\frac{n}{2}$ é ímpar, e $\lambda \in \left(2 + \frac{2}{n/2}, +\infty\right)$ quando $\frac{n}{2}$ é par, $R_{n/2+1}^{(\lambda)}(z)$ tem dois zeros negativos $z_k^{(\lambda)} \in (-\infty, -1)$ e $\frac{1}{z_k^{(\lambda)}} \in (-1, 0)$, e os outros zeros estão localizados no círculo unitário.

2. Por indução, se n é ímpar, note que:

$$S_n^{(\lambda)}(z) = \left(\frac{z^{\lfloor n/2 \rfloor + 1} - 1}{z - 1}\right) R_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}^{(\lambda)}(z) = R_{\lfloor n/2 \rfloor}^{(1)}(z) \cdot R_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}^{(\lambda)}(z),$$

onde, $R_{\lfloor n/2 \rfloor}^{(1)}(z) = 1$, $R_{\lfloor 3/2 \rfloor}^{(1)}(z) = z + 1$. Assim, precisamos analisar os zeros de $R_{\lfloor n/2 \rfloor}^{(1)}(z)$ e $R_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}^{(\lambda)}(z)$.

A partir dos Teorema 4.2.1, 4.2.2 e da Observação 4.3.1, temos que os zeros de $R_{\lfloor n/2 \rfloor}^{(1)}(z)$ estão localizados no círculo unitário e são dados por: $z_{\lfloor n/2 \rfloor, r}^{(1)} = e^{i\theta_{\lfloor n/2 \rfloor, r}^{(1)}}$, onde $\theta_{\lfloor n/2 \rfloor, r}^{(1)} = \frac{2r\pi}{\lfloor n/2 \rfloor + 1}$, e

- $r = 1, 2, \dots, \frac{\lfloor n/2 \rfloor}{2}$, se $\lfloor n/2 \rfloor$ é par,
- $r = 1, 2, \dots, \frac{\lfloor n/2 \rfloor}{2} + 1$, se $\lfloor n/2 \rfloor$ é ímpar.

Observe que $0 \leq \theta_{n/2-1, r}^{(1)} \leq \pi$ (outra vez, consideraremos apenas os zeros no primeiro e no segundo quadrantes).

Agora analisaremos o polinômio $R_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}^{(\lambda)}(z)$. O grau n é ímpar, mas $\lfloor n/2 \rfloor$ pode ser par ou ímpar, então do Teorema 4.2.1, sabemos que os zeros de $R_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}^{(\lambda)}(z)$ estão localizados no círculo unitário se:

- $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ é par (com $\lfloor n/2 \rfloor$ ímpar), temos:

$$-\frac{2}{(\lfloor n/2 \rfloor + 1) - 1} \leq \lambda \leq 2,$$

então,

$$-\frac{2}{\lfloor n/2 \rfloor} \leq \lambda \leq 2.$$

- $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ é ímpar (com $\lfloor n/2 \rfloor$ par), obtemos:

$$-\frac{2}{\lfloor n/2 \rfloor} \leq \lambda \leq 2 + \frac{2}{(\lfloor n/2 \rfloor + 1) - 1},$$

então,

$$-\frac{2}{\lfloor n/2 \rfloor} \leq \lambda \leq 2 + \frac{2}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Além disso, dos Teoremas 4.2.2 (1) e 4.2.2 (3), se $\lambda \in \left(-\infty, -\frac{2}{\lfloor n/2 \rfloor}\right)$, $R_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}^{(\lambda)}(z)$ tem dois zeros positivos $z_k^{(\lambda)} \in (1, +\infty)$ e $\frac{1}{z_k^{(\lambda)}} \in (0, 1)$, e os outros zeros estão localizados no círculo unitário. De maneira similar, do Teorema 4.2.2 itens (2) e (4), se $\lambda \in (2, +\infty)$ quando $\lfloor n/2 \rfloor$ é ímpar, e $\lambda \in \left(2 + \frac{2}{\lfloor n/2 \rfloor}, +\infty\right)$ quando $\lfloor n/2 \rfloor$ é par, $R_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}^{(\lambda)}(z)$ tem dois zeros negativos $z_k^{(\lambda)} \in (-\infty, -1)$ e $\frac{1}{z_k^{(\lambda)}} \in (-1, 0)$, e os outros zeros estão localizados no círculo unitário. ■

A seguir, mostraremos um exemplo no qual examinaremos o Teorema 4.3.1 (2).

Exemplo 4.3.1. Seja o polinômio $S_4^{(\lambda)}(z)$ para $n = 4$ e $\lambda = 2$. De acordo com as definições, temos:

$$S_4^{(2)}(z) = \sum_{k=0}^4 s_k^{(2)} z^k.$$

Sabemos que $s_0^{(2)} = s_4^{(2)} = 1$. Para $n = 4$ (par), aplicamos as regras para calcular os coeficientes $s_k^{(2)}$:

(i) Para $k = 1$:

$$s_1^{(2)} = s_3^{(2)} = 1 + 1 \cdot 2 = 3,$$

(ii) Para $k = 2$:

$$s_2^{(2)} = \frac{4}{2} \cdot 2 = 4.$$

Assim, obtemos:

$$S_4^{(2)}(z) = s_0^{(2)} z^0 + s_1^{(2)} z^1 + s_2^{(2)} z^2 + s_3^{(2)} z^3 + s_4^{(2)} z^4 = 1 + 3z + 4z^2 + 3z^3 + 1z^4.$$

Logo, para $n = 4$, temos $\lfloor n/2 \rfloor = 2$, que é par. Portanto, de acordo com a condição fornecida, verificamos:

$$-1 \leq \lambda \leq 3.$$

Assim, os zeros do polinômio $S_4^{(2)}(z)$ estão localizados no círculo unitário. A seguir, apresentaremos uma tabela com os zeros do polinômio e o gráfico correspondente.

Tabela 4.3.1: Os valores dos zeros de $S_4^{(2)}(z)$.

z
$z_1 \approx -1$ (multiplicidade 2)
$z_2 \approx -1/2 + i\sqrt{3}/2$
$z_3 \approx -1/2 - i\sqrt{3}/2$

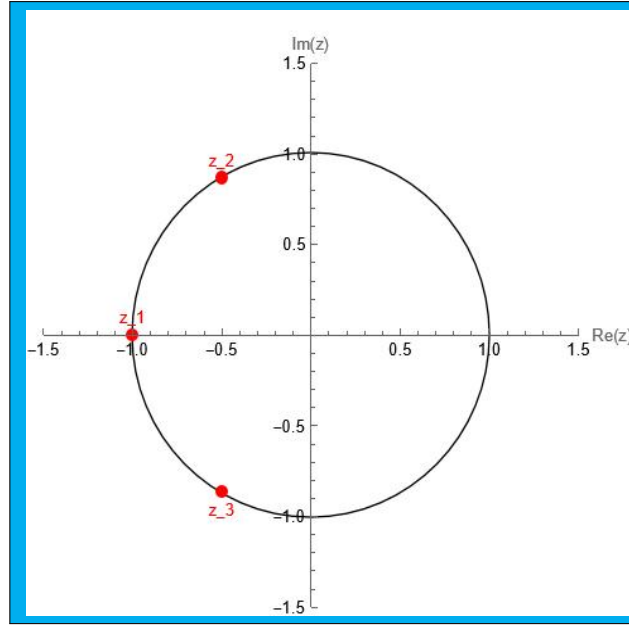


Figura 4.3.1: Representação gráfica dos zeros do polinômio $S_4^{(2)}(z)$ no círculo unitário.

A seguir, mostraremos um exemplo em que analisaremos o Teorema 4.3.1 (i).

Exemplo 4.3.2. Seja o polinômio $S_4^{(-3)}(z)$, onde $n = 4$ e $\lambda = -3$. Usando as definições dadas, temos:

$$S_4^{(-3)}(z) = \sum_{k=0}^4 s_k^{(-3)} z^k = s_0^{(-3)} + s_1^{(-3)} z + s_2^{(-3)} z^2 + s_3^{(-3)} z^3 + s_4^{(-3)} z^4,$$

calculando os coeficientes:

$$s_0^{(-3)} = s_4^{(-3)} = 1.$$

(i) Para $k = 1$, temos:

$$s_1^{(-3)} = s_3^{(-3)} = 1 + 1 \cdot (-3) = -2.$$

(ii) Para $k = 2$, temos:

$$s_2^{(-3)} = \frac{4}{2} \cdot (-3) = -6.$$

Então, o polinômio $S_4^{(-3)}(z)$ é dado por:

$$S_4^{(-3)}(z) = 1 - 2z - 6z^2 - 2z^3 + z^4 = (z + 1)^2 \left(z - (2 + \sqrt{3}) \right) \left(z - (2 - \sqrt{3}) \right).$$

Das condições de localização dos zeros, para $\lambda = -3$:

$$-\frac{2}{\lfloor n/2 \rfloor} = -\frac{2}{\lfloor 4/2 \rfloor} = -\frac{2}{2} = -1.$$

Assim, $\lambda \in \left(-\infty, -\frac{2}{\lfloor n/2 \rfloor} \right) = (-\infty, -1)$. Portanto, de acordo com o teorema anterior, $S_4^{(-3)}(z)$ tem dois zeros positivos $z \in (1, +\infty)$ e $\frac{1}{z} \in (0, 1)$, e os outros zeros estão localizados no círculo unitário.

Analisando os zeros do polinômio $S_4^{(-3)}(z)$, observamos que:

- $z_1 = -1$ (de multiplicidade 2), é um zero localizado no círculo unitário,
- $z_2 = 2 + \sqrt{3} \in (1, +\infty)$,
- $z_3 = 2 - \sqrt{3} \in (0, 1)$ e $z_3 = \frac{1}{z_2}$.

A partir da análise dos zeros do polinômio $S_4^{(-3)}(z)$, é possível confirmar o Teorema 4.3.1(i) (ver Figura 4.3.2).

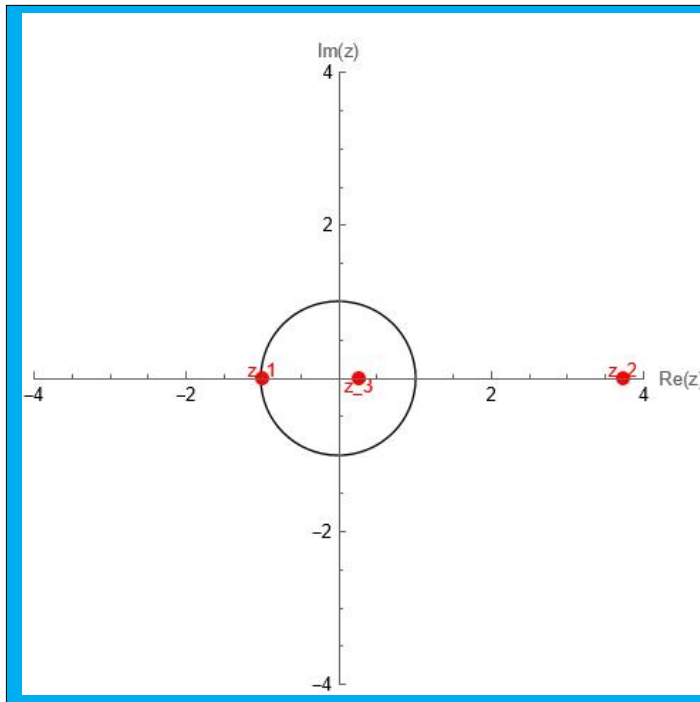


Figura 4.3.2: Representação gráfica dos zeros do polinômio $S_4^{(-3)}(z)$.

4.4 Análise das propriedades de $A_n^{(\lambda, \delta)}(z)$

Neste seção, apresentaremos novos resultados relacionados ao polinômio auto-recíproco $A_n^{(\lambda, \delta)}(z) = z^n + \lambda z^{n-1} + \delta(z^{n-2} + z^{n-3} + \dots + z^2) + \lambda z + 1$, baseado no Teorema 4.1.1. Esses resultados dependem dos parâmetros reais λ , δ e do grau n , e tratam da distribuição dos zeros de $A_n^{(\lambda, \delta)}(z)$ no plano complexo de acordo com determinadas condições.

Embora seja verdade que para muitos desses polinômios dessa forma, podem ser usados os demais teoremas das outras seções do capítulo para determinar a localização de seus zeros, muitos desses teoremas exigem condições como $\underline{m}(a) + L(a) \leq 2a_n$, $a = (\lambda, \underbrace{\delta, \dots, \delta}_{n-3}, \lambda)$, que são bastante tediosas de calcular. Por esse motivo, os teoremas que apresentaremos são ideais para entender as propriedades dos zeros de um polinômio.

Os Teoremas 4.4.1 e 4.4.2 são válidos para os polinômios $A_n^{(\lambda, \delta)}(z)$ com n par e $n \geq 4$. Não consideramos o caso $n = 2$, pois, nesse caso, o polinômio $A_2^{(\lambda, \delta)}(z)$ não estaria bem definido em função dos parâmetros.

Por outro lado, os Teoremas 4.4.3 e 4.4.4 são válidos apenas para polinômios da forma $A_n^{(\lambda, \delta)}(z)$, com n ímpar e $n \geq 5$. Para $n = 3$, o polinômio $A_3^{(\lambda, \delta)}(z)$ não estaria bem definido em função dos parâmetros.

Teorema 4.4.1. *Seja $A_n^{(\lambda, \delta)}(z) = z^n + \lambda z^{n-1} + \delta(z^{n-2} + z^{n-3} + \dots + z^2) + \lambda z + 1$ um polinômio auto-recíproco real de grau $n \geq 4$, n par, onde $\lambda \leq \delta$.*

Considerando:

$$\frac{3\delta - 2}{2} \leq \lambda,$$

é possível afirmar que:

1. Se $A_n^{(\lambda, \delta)}(1) \geq 0$, então todos os zeros de $A_n^{(\lambda, \delta)}$ estão no círculo unitário. Nesse caso, há pelo menos dois zeros da forma $e^{i\theta}$ com $\frac{-2\pi}{n} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{n}$.
2. Se $A_n^{(\lambda, \delta)}(1) < 0$, então $A_n^{(\lambda, \delta)}$ tem zeros reais $\beta > 1$ e β^{-1} e os outros zeros estão no círculo unitário.

Demonstração. Como $\lambda \leq \delta$, ao ordenar os coeficientes do polinômio $A_n^{(\lambda, \delta)}$, obtemos:

$$\underbrace{a_{\sigma(1)}}_{\lambda} \leq \underbrace{a_{\sigma(2)}}_{\lambda} \leq \underbrace{a_{\sigma(3)}}_{\delta} \dots \leq \underbrace{a_{\sigma(n-1)}}_{\delta}.$$

Dado que n é par, segue que $\overline{m}(a) = \underline{m}(a)$. A partir disso, realizaremos a seguinte análise:

- Se $n = 4$, então $\overline{m}(a) = \underline{m}(a) = \lambda$.
- Se $n > 4$, então $\overline{m}(a) = \underline{m}(a) = \delta$.

Agora, verificaremos que $\underline{m}(a) + L(a) \leq 2$.

(a) Se $n = 4$, então o polinômio é da forma $A_4^{(\lambda, \delta)}(z) = z^4 + \lambda z^3 + \delta(z^2) + \lambda z + 1$. Da equação (4.1.3), temos que:

$$\begin{aligned} L(a) &= |a_1 - a_{\sigma(2)}| + |a_2 - a_{\sigma(2)}| + |a_3 - a_{\sigma(2)}| \\ &= |\lambda - \lambda| + |\delta - \lambda| + |\lambda - \lambda| \\ &= |\delta - \lambda| \\ &= \delta - \lambda. \end{aligned}$$

Assim, $\underline{m}(a) + L(a) = \lambda + \delta - \lambda = \delta$. A partir das condições dadas, por transitividade, obtemos:

$$\frac{3\delta - 2}{2} \leq \delta.$$

Isolando δ , temos:

$$\delta \leq 2.$$

Dessa forma:

$$\underline{m}(a) + L(a) \leq 2.$$

(b) Se $n > 4$ e a partir da equação (4.1.3), temos que:

$$\begin{aligned} L(a) &= \sum_{j=1}^{n-1} |a_j - a_{\sigma(n/2)}| \\ &= |a_1 - a_{\sigma(n/2)}| + |a_2 - a_{\sigma(n/2)}| + \dots + |a_{n-1} - a_{\sigma(n/2)}| \\ &= |\lambda - \delta| + |\delta - \delta| + \dots + |\delta - \delta| + |\lambda - \delta| \\ &= 2|\lambda - \delta| \\ &= 2|\delta - \lambda| \\ &= 2(\delta - \lambda). \end{aligned}$$

Assim, $\underline{m}(a) + L(a) = \delta + 2(\delta - \lambda) = 3\delta - 2\lambda$. Como $\lambda \in \left[\frac{3\delta - 2}{2}, \delta\right]$ temos que:

$$\underline{m}(a) + L(a) \leq 2.$$

Portanto, a partir de (a) e (b), concluímos que, para qualquer n par ($n \geq 4$), a relação $\underline{m}(a) + L(a) \leq 2$ é satisfeita. Assim, pelo Teorema 4.1.1, obtemos os itens (1) e (2). ■

A seguir, apresentamos alguns exemplos utilizando unicamente o teorema anterior.

Exemplo 4.4.1. Seja o polinômio $A_4^{(\lambda, \delta)}(z) = z^4 - 7z^3 - 4z^2 - 7z + 1$, com $\delta = -4$ e $\lambda = -7$. Como $A_4^{(-7, -4)}(1) = -16 < 0$, pelo Teorema 4.4.1, sabemos que $A_4^{(\lambda, \delta)}$ tem zeros reais $\beta > 1$ e β^{-1} , e os outros zeros estão no círculo unitário.

Analisando os zeros do polinômio $A_4^{(\lambda, \delta)}$, temos:

- $z_1 \approx 7,6411 \in \mathbb{R}$,
- $z_2 \approx \frac{1}{z_1} = 0,13087 \in \mathbb{R}$,
- $z_3 \approx -0,38600 - 0,92250i$,
- $z_4 \approx -0,38600 + 0,92250i$.

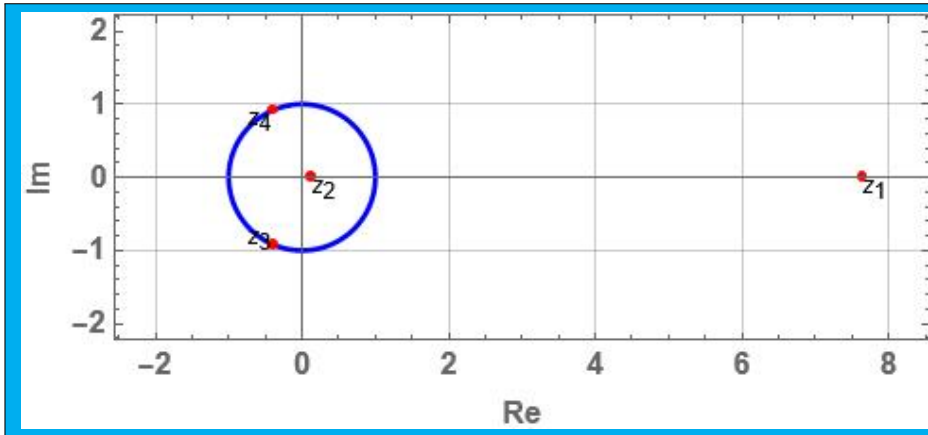


Figura 4.4.1: Representação gráfica dos zeros do polinômio $A_4^{(\lambda, \delta)}(z)$ com $\delta = -4$ e $\lambda = -7$.

Esses resultados confirmam o que foi previsto pelo teorema.

Exemplo 4.4.2. Seja o polinômio $A_6^{(\lambda, \delta)}(z) = z^6 + \frac{1}{4}z^5 + \frac{1}{2}(z^4 + z^3 + z^2) + \frac{1}{4}z + 1$, com $\delta = \frac{1}{2}$ e $\lambda = \frac{1}{4}$. Como $A_6^{(\lambda, \delta)}(1) > 0$, pelo Teorema 4.4.1, sabemos que todos os zeros de $A_6^{(\lambda, \delta)}$ estão no círculo unitário. Nesse caso, há pelo menos dois zeros da forma $e^{i\theta}$ com $-\frac{2\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{6}$.

Analisando os zeros do polinômio $A_6^{(\lambda, \delta)}$, encontramos:

- $z_1 = i$,
- $z_2 = -i$,

- $z_3 \approx -0,85554 - 0,51774i$,
- $z_4 \approx -0,85554 + 0,51774i$,
- $z_5 \approx 0,73054 - 0,68287i \approx e^{i(-0.748)}$ e $\theta_5 = -0.748$ radianos está dentro do intervalo $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$,
- $z_6 \approx 0,73054 + 0,68287i \approx e^{i(0.744)}$ e $\theta_6 = 0.744$ radianos está dentro do intervalo $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$.

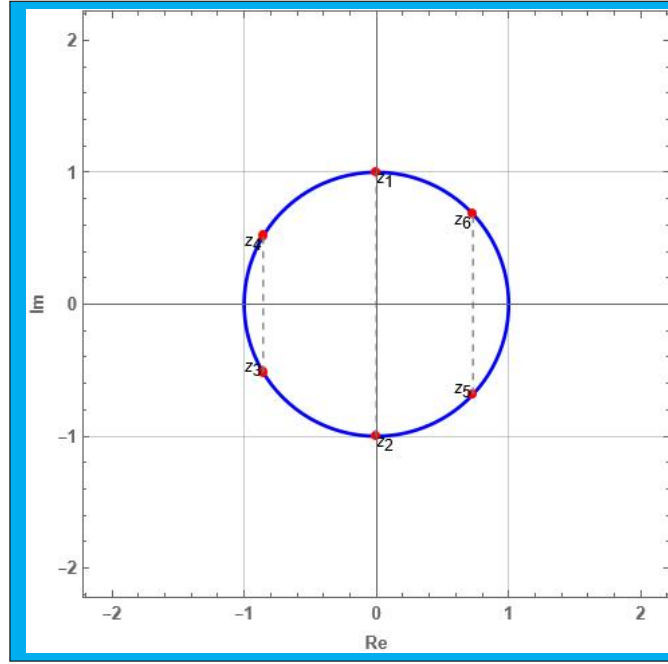


Figura 4.4.2: Representação gráfica dos zeros do polinômio $A_6^{(\lambda, \delta)}(z)$ com $\delta = 1/2$ e $\lambda = 1/4$.

Esses resultados confirmam o que foi previsto pelo teorema.

Teorema 4.4.2. Seja $A_n^{(\lambda, \delta)}(z) = z^n + \lambda z^{n-1} + \delta(z^{n-2} + z^{n-3} + \dots + z^2) + \lambda z + 1$ um polinômio auto-recíproco real de grau $n \geq 4$, n par, onde $\lambda > \delta$.

Considerando:

$$\frac{\delta + 2}{2} > \lambda,$$

é possível afirmar que:

1. Se $A_n^{(\lambda, \delta)}(1) \geq 0$, então todos os zeros de $A_n^{(\lambda, \delta)}$ estão no círculo unitário. Nesse caso, há pelo menos dois zeros da forma $e^{i\theta}$ com $-\frac{2\pi}{n} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{n}$.
2. Se $A_n^{(\lambda, \delta)}(1) < 0$, então $A_n^{(\lambda, \delta)}$ tem zeros reais $\beta > 1$ e β^{-1} e os outros zeros estão no círculo unitário.

Demonstração. Como $\lambda > \delta$, ao ordenar os coeficientes do polinômio $A_n^{(\lambda, \delta)}$, obtemos:

$$\underbrace{a_{\sigma(1)}}_{\delta} \leq \underbrace{a_{\sigma(2)}}_{\delta} \leq \underbrace{a_{\sigma(3)}}_{\delta} \leq \dots \leq \underbrace{a_{\sigma(n-3)}}_{\delta} \leq \underbrace{a_{\sigma(n-2)}}_{\lambda} \leq \underbrace{a_{\sigma(n-1)}}_{\lambda}.$$

Dado que n é par, segue que $\overline{m}(a) = \underline{m}(a)$. A partir disso, realizaremos a seguinte análise:

- Se $n = 4$, então $\overline{m}(a) = \underline{m}(a) = \lambda$.
- Se $n > 4$, então $\overline{m}(a) = \underline{m}(a) = \delta$.

Agora, verificaremos que $\underline{m}(a) + L(a) \leq 2$.

(a) Se $n = 4$, então o polinômio é da forma $A_4^{(\lambda, \delta)}(z) = z^4 + \lambda z^3 + \delta z^2 + \lambda z + 1$. Da equação (4.1.3), temos que:

$$\begin{aligned} L(a) &= |a_1 - a_{\sigma(2)}| + |a_2 - a_{\sigma(2)}| + |a_3 - a_{\sigma(2)}| \\ &= |\lambda - \lambda| + |\delta - \lambda| + |\lambda - \lambda| \\ &= |\delta - \lambda| \\ &= \lambda - \delta. \end{aligned}$$

Assim, $\underline{m}(a) + L(a) = \lambda + \lambda - \delta = 2\lambda - \delta$. Como $\frac{\delta + 2}{2} > \lambda$ temos que:

$$\underline{m}(a) + L(a) < 2.$$

(b) Se $n > 4$ e a partir da equação (4.1.3), temos que:

$$\begin{aligned} L(a) &= \sum_{j=1}^{n-1} |a_j - a_{\sigma(n/2)}| \\ &= |a_1 - a_{\sigma(n/2)}| + |a_2 - a_{\sigma(n/2)}| + \cdots + |a_{n-1} - a_{\sigma(n/2)}| \\ &= |\lambda - \delta| + |\delta - \delta| + \cdots + |\delta - \delta| + |\lambda - \delta| \\ &= 2|\lambda - \delta| \\ &= 2(\lambda - \delta). \end{aligned}$$

Assim, $\underline{m}(a) + L(a) = \delta + 2(\lambda - \delta) = 2\lambda - \delta$. Como $\frac{\delta + 2}{2} > \lambda$ temos que:

$$\underline{m}(a) + L(a) < 2.$$

Portanto, a partir de (a) e (b), concluímos que, para qualquer n par ($n \geq 4$), a relação $\underline{m}(a) + L(a) \leq 2$ é satisfeita. Assim, pelo Teorema 4.1.1, obtemos os itens (1) e (2). ■

A seguir, apresentamos um exemplo utilizando unicamente o teorema anterior.

Exemplo 4.4.3. Seja o polinômio $A_4^{(\lambda, \delta)}(z) = z^4 + 1, 3z^3 + z^2 + 1, 3z + 1$, com $\delta = 1$ e $\lambda = 1, 3$.

Como $A_4^{(1, 3; 1)}(1) > 0$, pelo Teorema 4.4.2, sabemos que todos os zeros de $A_4^{(\lambda, \delta)}$ estão no círculo unitário. Nesse caso, há pelo menos dois zeros da forma $e^{i\theta}$ com $\frac{-2\pi}{n} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{n}$.

Analisando os zeros do polinômio $A_4^{(\lambda, \delta)}$, temos:

- $z_1 \approx -0,921343 - 0,388751i$,
- $z_2 \approx -0,921343 + 0,388751i$,
- $z_3 \approx 0,271343 - 0,962483i \approx e^{i(1,292)}$ e $\theta_3 = 1,292$ radianos está dentro do intervalo $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$,

- $z_4 \approx 0,271343 + 0,962483i \approx e^{i(1,273)}$ e $\theta_4 = 1,273$ radianos está dentro do intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

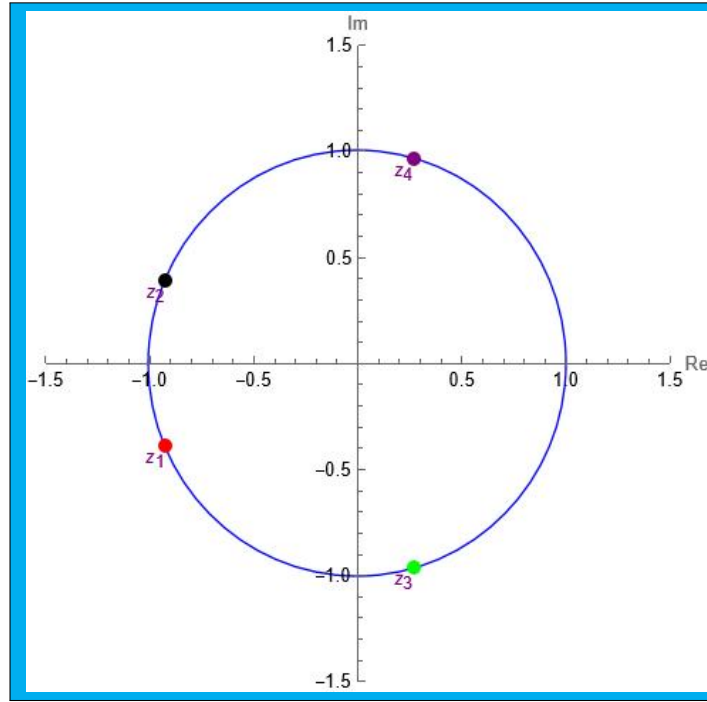


Figura 4.4.3: Representação gráfica dos zeros do polinômio $A_4^{(\lambda, \delta)}(z)$ com $\delta = 1$ e $\lambda = 1, 3$.

Esses resultado confirma o que foi previsto pelo teorema.

Teorema 4.4.3. Seja $A_n^{(\lambda, \delta)}(z) = z^n + \lambda z^{n-1} + \delta(z^{n-2} + z^{n-3} + \dots + z^2) + \lambda z + 1$ um polinômio auto-recíproco real de grau $n \geq 5$, n ímpar, onde $\delta \leq \lambda$.

Considerando:

$$\lambda \leq \frac{2 + \delta}{2},$$

é possível afirmar que:

1. Se $A_n^{(\lambda, \delta)}(1) \geq 0$, então todos os zeros de $A_n^{(\lambda, \delta)}$ estão no círculo unitário. Nesse caso, há pelo menos dois zeros da forma $e^{i\theta}$ com $\frac{-2\pi}{n} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{n}$.
2. Se $A_n^{(\lambda, \delta)}(1) < 0$, então $A_n^{(\lambda, \delta)}$ tem zeros reais $\beta > 1$ e β^{-1} e os outros zeros estão no círculo unitário.

Demonstração. Para demonstrar o resultado, consideraremos dois casos:

(a) Quando $n = 5$, e como $\delta \leq \lambda$, ao ordenar os coeficientes do polinômio $A_5^{(\lambda, \delta)}$, obtemos:

$$\underbrace{a_{\sigma(1)}}_{\delta} \leq \underbrace{a_{\sigma(2)}}_{\delta} \leq \underbrace{a_{\sigma(3)}}_{\lambda} \leq \underbrace{a_{\sigma(4)}}_{\lambda}.$$

Dado que n é ímpar, segue que $\underline{m}(a) = a_{\sigma(\lfloor n/2 \rfloor)} = \delta$.

Da equação (4.1.4), realizaremos a seguinte análise para $y \in \left[\underbrace{a_{\sigma(\lfloor n/2 \rfloor)}}_{\delta}, \underbrace{a_{\sigma(\lceil n/2 \rceil)}}_{\lambda} \right]$:

$$\begin{aligned}
 L(a) &= \sum_{j=1}^4 |a_j - y| \\
 &= |a_1 - y| + |a_2 - y| + |a_3 - y| + |a_4 - y| \\
 &= |\lambda - y| + |\delta - y| + |\delta - y| + |\lambda - y| \\
 &= 2|\lambda - y| + 2|\delta - y| \\
 &= 2(\lambda - y) + 2|y - \delta| \\
 &= 2(\lambda - y) + 2(y - \delta) \\
 &= 2\lambda - 2\delta
 \end{aligned}$$

Assim, $\underline{m}(a) + L(a) = \delta + 2(\lambda - \delta) = 2\lambda - \delta$. Como $\lambda \leq \frac{2 + \delta}{2}$ temos que:

$$\underline{m}(a) + L(a) \leq 2.$$

(b) Quando $n > 5$, e como $\delta \leq \lambda$, ao ordenar os coeficientes do polinômio $A_n^{(\lambda, \delta)}$, obtemos:

$$\underbrace{a_{\sigma(1)}}_{\delta} \leq \underbrace{a_{\sigma(2)}}_{\delta} \leq \underbrace{a_{\sigma(3)}}_{\delta} \cdots \leq \underbrace{a_{\sigma(n-3)}}_{\delta} \leq \underbrace{a_{\sigma(n-2)}}_{\lambda} \leq \underbrace{a_{\sigma(n-1)}}_{\lambda}.$$

Dado que n é ímpar, segue que $\underline{m}(a) = a_{\sigma(\lfloor n/2 \rfloor)} = \delta$. Da equação (4.1.4), realizaremos a seguinte análise para $y \in \left[\underbrace{a_{\sigma(\lfloor n/2 \rfloor)}}_{\delta}, \underbrace{a_{\sigma(\lceil n/2 \rceil)}}_{\delta} \right]$:

$$\begin{aligned}
 L(a) &= \sum_{j=1}^{n-1} |a_j - y| \\
 &= |a_1 - \delta| + |a_2 - \delta| + \dots + |a_{n-2} - \delta| + |a_{n-1} - \delta| \\
 &= |\lambda - \delta| + |\delta - \delta| + \dots + |\delta - \delta| + |\lambda - \delta| \\
 &= 2|\lambda - \delta| \\
 &= 2(\lambda - \delta)
 \end{aligned}$$

Assim, $\underline{m}(a) + L(a) = \delta + 2(\lambda - \delta) = 2\lambda - \delta$. Como $\lambda \leq \frac{2 + \delta}{2}$ temos que:

$$\underline{m}(a) + L(a) \leq 2.$$

Portanto, a partir de (a) e (b), concluímos que para o nosso n ímpar, dadas as condições estabelecidas, a relação $\underline{m}(a) + L(a) \leq 2$ é satisfeita. Assim, pelo Teorema 4.1.1, obtemos os itens (1) e (2). ■

A seguir, apresentamos alguns exemplos utilizando unicamente o teorema anterior.

Exemplo 4.4.4. Seja o polinômio $A_7^{(\lambda, \delta)}(z) = z^7 + \frac{3}{2}z^6 + 1(z^5 + z^4 + z^3 + z^2) + \frac{3}{2}z + 1$, com $\delta = 1$ e $\lambda = \frac{3}{2}$. Como $A_7^{(\lambda, \delta)}(1) = 9 > 0$, pelo Teorema 4.4.3, sabemos que todos os zeros de $A_7^{(\lambda, \delta)}$ estão no círculo unitário. Nesse caso, há pelo menos dois zeros da forma $e^{i\theta}$ com $-\frac{2\pi}{7} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{7}$.

Analisando os zeros do polinômio $A_7^{(\lambda, \delta)}$, encontramos:

- $z_1 = -1$,
- $z_2 \approx -0,879704 - 0,475521i$,
- $z_3 \approx -0,879704 + 0,475521i$,
- $z_4 \approx -0,0976748 - 0,995218i$,
- $z_5 \approx -0,0976748 + 0,995218i$,
- $z_6 \approx 0,727379 - 0,686236i = e^{i(-0,749)}$ e $\theta_6 = -0,749$ radianos está dentro do intervalo $\left[-\frac{2\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}\right]$,
- $z_7 \approx 0,727379 + 0,686236i = e^{i(0,7563)}$ e $\theta_7 = 0,7563$ radianos está dentro do intervalo $\left[-\frac{2\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}\right]$.

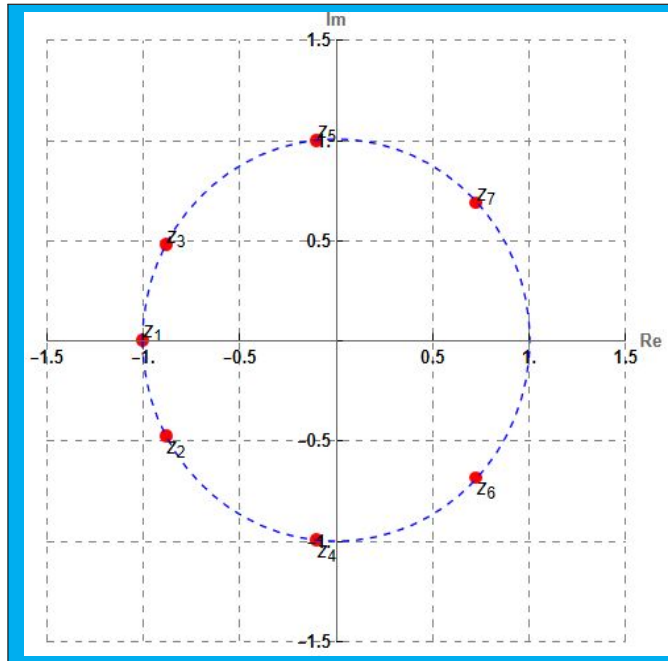


Figura 4.4.4: Representação gráfica dos zeros do polinômio $A_7^{(\lambda, \delta)}(z)$ com $\delta = 1$ e $\lambda = 3/2$.

Esse resultado confirma o que foi previsto pelo teorema.

Exemplo 4.4.5. Seja o polinômio $A_9^{(\lambda, \delta)}(z) = z^9 - z^8 - 3(z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2) - z + 1$, com $\delta = -3$ e $\lambda = -1$. Como $A_9^{(\lambda, \delta)}(1) = -18 < 0$, pelo Teorema 4.4.3, sabemos que $A_9^{(\lambda, \delta)}$ tem zeros reais $\beta > 1$ e β^{-1} e os outros zeros estão no círculo unitário.

Analisando os zeros do polinômio $A_9^{(\lambda, \delta)}$, temos:

- $z_1 = -1 \in \mathbb{R}$,
- $z_2 \approx 2,73024 \in \mathbb{R}$,
- $z_3 \approx 0,366268 = \frac{1}{z_2} \in \mathbb{R}$,
- $z_4 \approx -0,85223 - 0,52316i$,
- $z_5 \approx -0,85223 + 0,52316i$,

- $z_6 \approx -0,25446 - 0,96708i$,
- $z_7 \approx -0,25446 + 0,96708i$,
- $z_8 \approx 0,55844 - 0,82954i$,
- $z_9 \approx 0,55844 + 0,82954i$.

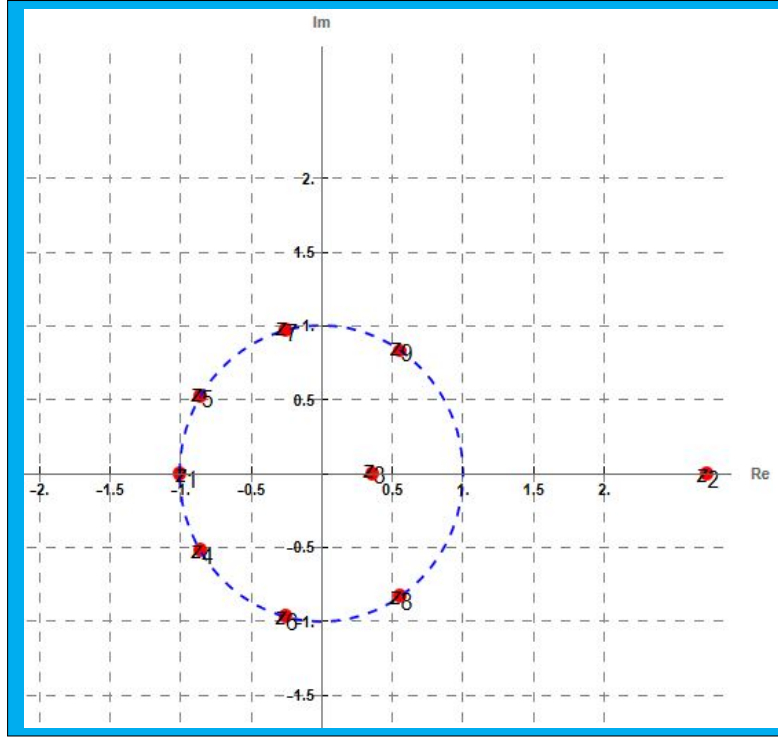


Figura 4.4.5: Representação gráfica dos zeros do polinômio $A_9^{(\lambda, \delta)}(z)$ com $\delta = -3$ e $\lambda = -1$.

Esse resultado confirma o que foi previsto pelo teorema.

Teorema 4.4.4. *Seja $A_n^{(\lambda, \delta)}(z) = z^n + \lambda z^{n-1} + \delta(z^{n-2} + z^{n-3} + \dots + z^2) + \lambda z + 1$ um polinômio auto-recíproco real de grau $n > 5$, n ímpar, onde $\delta > \lambda$.*

Considerando:

$$\delta \leq \frac{2(\lambda + 1)}{3},$$

é possível afirmar que:

1. Se $A_n^{(\lambda, \delta)}(1) \geq 0$, então todos os zeros de $A_n^{(\lambda, \delta)}$ estão no círculo unitário. Nesse caso, há pelo menos dois zeros da forma $e^{i\theta}$ com $\frac{-2\pi}{n} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{n}$.
2. Se $A_n^{(\lambda, \delta)}(1) < 0$, então $A_n^{(\lambda, \delta)}$ tem zeros reais $\beta > 1$ e β^{-1} e os outros zeros estão no círculo unitário.

Demonstração. Como $\delta > \lambda$, ao ordenar os coeficientes do polinômio $A_n^{(\lambda, \delta)}$, obtemos:

$$\underbrace{a_{\sigma(1)}}_{\lambda} \leq \underbrace{a_{\sigma(2)}}_{\lambda} \leq \underbrace{a_{\sigma(3)}}_{\delta} \leq \dots \leq \underbrace{a_{\sigma(n-3)}}_{\delta} \leq \underbrace{a_{\sigma(n-2)}}_{\delta} \leq \underbrace{a_{\sigma(n-1)}}_{\delta}.$$

Dado que n é ímpar, segue que $\underline{m}(a) = a_{\sigma(\lfloor n/2 \rfloor)} = \delta$.

Da equação (4.1.4), realizaremos a seguinte análise para $y \in \left[\underbrace{a_{\sigma(\lfloor n/2 \rfloor)}}_{\delta}, \underbrace{a_{\sigma(\lceil n/2 \rceil)}}_{\delta} \right]$:

$$\begin{aligned} L(a) &= \sum_{j=1}^{n-1} |a_j - y| \\ &= |a_1 - \delta| + |a_2 - \delta| + \dots + |a_{n-2} - \delta| + |a_{n-1} - \delta| \\ &= |\lambda - \delta| + |\delta - \delta| + \dots + |\delta - \delta| + |\lambda - \delta| \\ &= 2|\lambda - \delta| \\ &= 2(\delta - \lambda) \end{aligned}$$

Assim, $\underline{m}(a) + L(a) = \delta + 2(\delta - \lambda) = 3\delta - 2\lambda$. Como $\delta \leq \frac{2(\lambda + 1)}{3}$ temos que:

$$\underline{m}(a) + L(a) \leq 2.$$

Portanto, concluímos que para o nosso n ímpar, dadas as condições estabelecidas, a relação $\underline{m}(a) + L(a) \leq 2$ é satisfeita. Assim, pelo Teorema 4.1.1, obtemos os itens (1) e (2). ■

A seguir, apresentamos um exemplo utilizando unicamente o teorema anterior.

Exemplo 4.4.6. Seja o polinômio $A_7^{(\lambda, \delta)}(z) = z^7 - 2z^6 - z^5 - z^4 - z^3 - z^2 - 2z + 1$, com $\delta = -1$ e $\lambda = -2$. Como $A_7^{(-2, -1)}(1) < 0$, pelo Teorema 4.4.4, sabemos que $A_7^{(\lambda, \delta)}$ tem zeros reais $\beta > 1$ e β^{-1} , e os outros zeros estão no círculo unitário.

Analisando os zeros do polinômio $A_7^{(\lambda, \delta)}$, temos:

- $z_1 = -1 \in \mathbb{R}$,
- $z_2 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \in \mathbb{R}$,
- $z_3 = \frac{1}{z_2} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \in \mathbb{R}$,
- $z_4 = \frac{-1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$,
- $z_5 = \frac{-1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$,
- $z_6 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$,
- $z_7 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

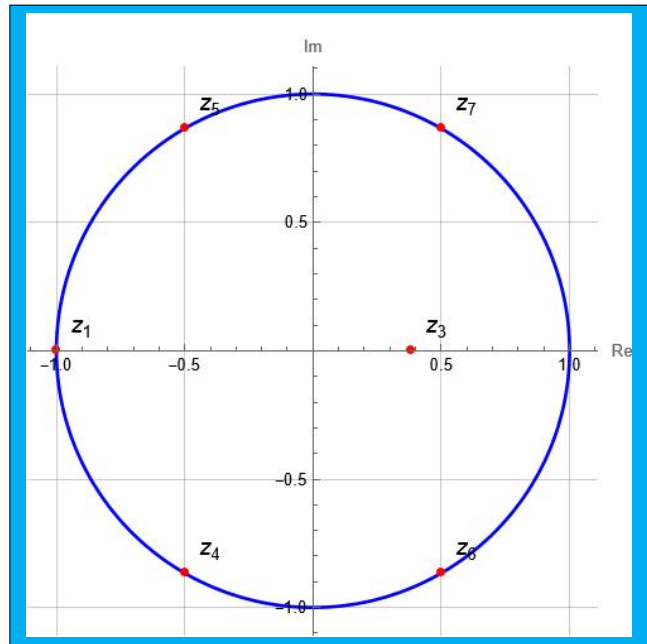


Figura 4.4.6: Representação gráfica dos zeros do polinômio $A_7^{(\lambda, \delta)}(z)$ com $\delta = -1$ e $\lambda = -2$

Esse resultado confirma o que foi previsto pelo teorema.

As condições dadas no teorema anterior são satisfeitas para os polinômios $A_n^{(\lambda, \delta)}$ de grau $n > 5$. Para $n = 5$, é necessário impor outras condições. A seguir, apresentaremos essas condições para o polinômio $A_5^{(\lambda, \delta)}$.

Observação 4.4.1. *Seja o polinômio auto-recíproco real $A_5^{(\lambda, \delta)}(z) = z^5 + \lambda z^4 + \delta(z^3 + z^2) + \lambda z + 1$ para $\delta > \lambda$ e $\delta \leq \frac{\lambda + 2}{2}$, é possível afirmar que:*

1. *Se $A_5^{(\lambda, \delta)}(1) \geq 0$, então todos os zeros de $A_5^{(\lambda, \delta)}$ estão no círculo unitário. Nesse caso, há pelo menos dois zeros da forma $e^{i\theta}$ com $\frac{-2\pi}{n} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{n}$.*
2. *Se $A_5^{(\lambda, \delta)}(1) < 0$, então $A_5^{(\lambda, \delta)}$ tem zeros reais $\beta > 1$ e β^{-1} e os outros zeros estão no círculo unitário.*

De fato, como $\delta > \lambda$ e ao ordenar os coeficientes do polinômio $A_5^{(\lambda, \delta)}$, obtemos:

$$\underbrace{a_{\sigma(1)}}_{\lambda} \leq \underbrace{a_{\sigma(2)}}_{\lambda} \leq \underbrace{a_{\sigma(3)}}_{\delta} \leq \underbrace{a_{\sigma(4)}}_{\delta}.$$

Dado que n é ímpar, segue que $\underline{m}(a) = a_{\sigma(\lfloor n/2 \rfloor)} = \lambda$.

Da equação (4.1.4), realizaremos a seguinte análise para $y \in \left[\underbrace{a_{\sigma(\lfloor n/2 \rfloor)}}_{\lambda}, \underbrace{a_{\sigma(\lceil n/2 \rceil)}}_{\delta} \right]$:

$$\begin{aligned} L(a) &= \sum_{j=1}^4 |a_j - y| \\ &= |a_1 - y| + |a_2 - y| + |a_3 - y| + |a_4 - y| \\ &= |\lambda - y| + |\delta - y| + |\delta - y| + |\lambda - y| \\ &= 2|\lambda - y| + 2|\delta - y| \\ &= 2(y - \lambda) + 2(\delta - y) \\ &= 2\delta - 2\lambda. \end{aligned}$$

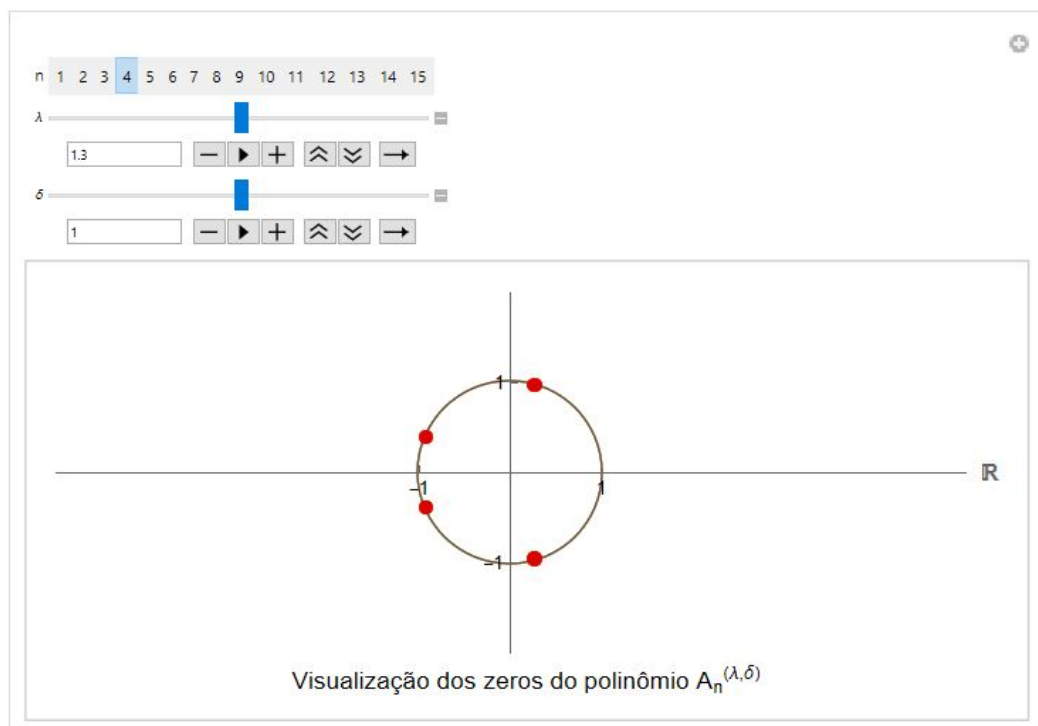
Assim, $\underline{m}(a) + L(a) = \lambda + 2(\delta - \lambda) = 2\delta - \lambda$. Como $\delta \leq \frac{\lambda + 2}{2}$, temos que:

$$\underline{m}(a) + L(a) \leq 2.$$

Portanto, concluímos que para $n = 5$, dadas as condições estabelecidas, a relação $\underline{m}(a) + L(a) \leq 2$ é satisfeita. Assim, pelo Teorema 4.1.1, obtemos os itens (1) e (2).

Com o objetivo de entender melhor como os zeros do polinômio $A_n^{(\lambda, \delta)}(z)$ se comportam no plano complexo, desenvolvemos um código em **Wolfram Mathematica** que gera essa visualização, variando os parâmetros λ , δ e o grau n .

```
A[n_, λ_, δ_][z_] := z^n + λ * z^(n-1) + δ * Sum[z^m, {m, 2, n-2}] + λ * z + 1;
Manipulate[
  Labeled[Graphics[
    Reverse@Table[{
      {Lighter[ColorData[3, "ColorList"][[k]], Circle[{0, 0}]},
      {ColorData[3, "ColorList"][[k]], PointSize[.015], ColorData[2, "ColorList"][[k]], PointSize[.015],
      Point[{Re[z], Im[z]} /. Solve[p[n, λ, δ][z] == 0]]}, {k, n}],
    Axes → True, PlotRange → {{-5, 5}, {-2, 2}}, ImageSize → 500, Ticks → {{-1, 1}, {-1, 1}}, AxesLabel → {Style[R, 13, Bold]}],
  Text[Row[{"Visualização dos zeros do polinômio  $A_n^{(\lambda, \delta)}$ "}]]
],
{{n, 1}, Range[15], ControlType → SetterBar}, {{λ, 0}, -50, 50}, {{δ, 0}, -50, 50}, SaveDefinitions → True]
```



Considerações finais

Nesta dissertação, estudamos as propriedades dos polinômios auto-inversíveis e auto-recíprocos. Observe que todo polinômio auto-inversível real também é um polinômio auto-recíproco real.

Focamos na análise dos zeros dos polinômios reais $R_n^{(\lambda)}(z)$, $S_n^{(\lambda)}(z)$ e $A_n^{(\lambda,\delta)}(z)$, cujos resultados mais importantes podem ser vistos nos Teoremas [4.2.1](#), [4.3.1](#), [4.4.1](#), [4.4.2](#), [4.4.3](#) e [4.4.4](#).

Atualmente está em fase de elaboração um artigo que no qual serão apresentados resultados sobre o comportamento dos zeros de $A_n^{(\lambda,\delta)}(z)$.

Referências

- [1] R.P. Agarwal, G.V. Milovanović. *Extremal problems, inequalities, and classical orthogonal polynomials*. Applied Mathematics and Computation, 128(2002), 151 – 166.
- [2] G. Ancochea. *Zeros of self-inversive polynomials*. Proceedings of the American Mathematical Society 4 (6) (1953) 900 – 902 (1953).
- [3] E.X.L. de Andrade, C. F. Bracciali, F. R. Rafaeli. *Introdução aos Polinômios ortogonais*. Notas em Matemática Aplicada; v. 6, 2012, 144p.
- [4] T.M. Apostol. *Mathematical analysis*. 2nd ed. Reading, MA: Addison-Wesley; 1981.
- [5] R. Beals, R. Wong. *Special functions and orthogonal polynomials*. Cambridge University Press; 2016.
- [6] F.F. Bonsall, M. Marden. *Zeros of self-inversive polynomials*. Proc. Amer. Math. Soc. vol. 3 (1952) pp.471 – 475.
- [7] V. Botta, C.F. Bracciali, J.A. Pereira. *Some properties of classes of real self-reciprocal polynomials*. J. Math. Anal. and Appl., 433 (2016), 1290 – 1304.
- [8] V. Botta, L.F. Marques, M. Meneguetto. *Palindromic and perturbed polynomials: zeros location*. Acta Math. Hungar. 143 (2014) 81 – 87.
- [9] V. Botta, M.H. Suni. *On the location of zeros of quasi-orthogonal polynomials with applications to some real self-reciprocal polynomials*. J. Class. Anal., 19 (2022), 89–115.
- [10] S. Cecília, C. Fernandes Nilson, Jr. Bernardes. *Introdução às funções de uma variável* (5a ed.). SBM.(2019).
- [11] T.S. Chihara. *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. Gordon and Breach, New York; 1978.
- [12] E. Freitag, R. Busam. *Complex Analysis*. Springer, Berlin, Heidelberg; 2005.
- [13] A. Hefez, M.L.T. Villela. *Polinômios e equações algébricas*. Sociedade Brasileira de Matemática, Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro; 2012.
- [14] W.B. Jones, W.J. Thron, H. Waadeland, A strong Stieltjes moment problem, Trans. Amer. Math. Soc. 261 (1980) 503 – 528.
- [15] S.H. Kim, C.W. Park, *On the zeros of certain self-reciprocal polynomials*, J. Math. Anal. Appl. 339 (2008) 240-247.
- [16] D. Kwon. *Reciprocal polynomials with all but two zeros on the unit circle*. Acta Math. Hungar., 134 (2012), 472 – 480.

- [17] E. F. Robertson, J. J. O'Connor. MacTutor History of Mathematics archive. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Chebyshev/>>. Acesso em: 8 de agosto de 2024.
- [18] E.F. Robertson, J.J. O'Connor. MacTutor History of Mathematics archive. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Jacobi/>>. Acesso em: 13 de Julho de 2024.
- [19] T. Sheil-Small. *Complex polynomials*, Vol. 75, Cambridge University Press, Cambridge; 2002.
- [20] A.P. da Silva, A. Sri Ranga, Polynomials generated by a three term recurrence relation: bounds for complex zeros, *Linear Algebra Appl.* 397 (2005) 299 – 324.
- [21] R.S. Vieira. *How to count the number of zeros that a polynomial has on the unit circle?*, arXiv preprint arXiv:1902.04231 (2019).
- [22] R.S. Vieira. *Polynomials with symmetric zeros*, in: *Polynomials – Theory and Application*. IntechOpen, 2019, pp. 1 – 19. doi:10.5772/intechopen.82728.