

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA
FACULDADE DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS
Campus de Marília

ROMULO ALBANO DE FREITAS

**UM MODELO ALGÉBRICO PARA A LÓGICA PROPOSICIONAL DA
VIZINHANÇA**

**Marília
2026**

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA
FACULDADE DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS
Campus de Marília

ROMULO ALBANO DE FREITAS

**UM MODELO ALGÉBRICO PARA A LÓGICA PROPOSICIONAL DA
VIZINHANÇA**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Faculdade de Filosofia e Ciências da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, *Campus de Marília*.

Orientador: Professor Dr. Luiz Henrique da Cruz Silvestrini

Coorientador: Professor Dr. Hércules de Araújo Feitosa

Marília
2026

F866m Freitas, Romulo Albano de
Um modelo algébrico para a Lógica Proposicional da
Vizinhança / Romulo Albano de Freitas. -- Marília, 2026
89 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista
(UNESP), Faculdade de Filosofia e Ciências, Marília
Orientador: Luiz Henrique da Cruz Silvestrini
Coorientador: Hércules de Araujo Feitosa

1. Lógica algébrica. 2. Lógica temporal. 3. Lógica da
vizinhança. 4. Modelo algébrico. 5. Semianel. I. Título.

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Um modelo algébrico para a Lógica Proposicional da Vizinhança

AUTOR: ROMULO ALBANO DE FREITAS

ORIENTADOR: LUIZ HENRIQUE DA CRUZ SILVESTRINICOORIENTADOR: HERCULES DE ARAUJO FEITOSA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em Filosofia, pela Comissão Examinadora:

Prof(a). Dr(a). LUIZ HENRIQUE DA CRUZ SILVESTRINI (Participação Presencial)
Departamento de Matemática / UNESP / Câmpus de Bauru - FC

Prof. Dr. EDÉLCIO GONÇALVES DE SOUZA (Participação Virtual)
Departamento de Filosofia e Programa de Pós-Graduação em Filosofia / Universidade de São Paulo

Profa. Dra. ANA CLAUDIA DE JESUS GOLZIO (Participação Presencial)
Departamento de Engenharia de Biossistemas / UNESP / Câmpus de Tupã - FCE

Marília, 12 de janeiro de 2026.

Gustavo Henrique Nicolau Alves Gabardo
Supervisor Técnico de Seção
Seção Técnica de Pós-Graduação

AGRADECIMENTOS

Meus mais sinceros agradecimentos a todos que tornaram este trabalho possível e que estiveram presentes e participaram de minha trajetória, nem que por um ínfimo instante de tempo.

Em especial,

aos meus pais, Adriana Cristina Albano e Roger Adrian Stevanato de Freitas, e a toda a minha família;

à minha namorada, Isabelle Vieira dos Santos;

aos meus orientadores, professores e amigos, Luiz Henrique da Cruz Silvestrini e Hércules de Araujo Feitosa;

a todos os docentes do Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Unesp de Marília, que tive o prazer de conhecer, em particular Marcos Antonio Alves, Maria Eunice Quilici Gonzalez, Mariana Claudia Broens e Ricardo Pereira Tassinari, bem como a todos os servidores públicos da instituição;

às amizades que fiz ao longo da pós-graduação, em especial Giovanna Dias Cardoso e Beatriz Evaristo;

à banca avaliadora, composta por Ana Claudia de Jesus Golzio e Edécio Gonçalves de Souza.

Sou eternamente grato a todos.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

Motivado pela falta de uma semântica algébrica bem estabelecida e com resultados de Adequação (Correção e Completude), este trabalho tem como objetivo desenvolver um modelo algébrico para uma lógica temporal intervalar no intuito de preencher esta lacuna deixada na literatura por autores que pavimentaram o caminho para sua algebrização. A lógica em questão faz parte da coleção de lógicas proposicionais da vizinhança proposta por Goranko, Montanari e Sciavicco. O sistema é precisamente o caso não-estrito dessa referida coleção de lógicas, a qual apresenta, como modelo algébrico sugerido na literatura, uma estrutura de semianel booleano munida de operadores de domínio e codomínio modais (que em nossa formalização adotará apenas o nome de álgebra da vizinhança). No entanto, no decorrer de nossos desenvolvimentos, embora o resultado de Correção seja possível, veremos que a ausência de determinados conectivos em sua linguagem original nos levará à falha em obter um resultado de Completude. Em vista disso, estendemos a lógica proposicional da vizinhança não-estrita até alcançarmos um sistema que, além de correto, seja completo em relação à estrutura algébrica proposta como modelo.

Palavras-chave: Lógica algébrica. Lógica temporal. Lógica da vizinhança. Modelo algébrico. Semianel.

ABSTRACT

Motivated by the lack of a well-established algebraic semantics with results of adequacy, this work aims to develop an algebraic model for an interval temporal logic in order to fill the gap left in the literature by authors who paved the way for its algebraization. The logic in question is part of the collection of propositional neighbourhood logics proposed by Goranko, Montanari and Sciavicco. The system is precisely the non-strict case of that mentioned collection of logics, which presents, as an algebraic model suggested in the literature, a boolean semiring structure endowed with modal domain and codomain operators (which in our formalization we have adopted simply as the neighborhood algebra). However, in the course of our developments, although a Soundness result is possible, we will see that the absence of certain connectives in its original language lead us to fail in obtaining a Completeness result. In view of this, we extend the non-strict propositional neighbourhood logic until we reach a system that, in addition to being sound, is also complete with respect to the algebraic structure proposed as its model.

Keywords: Algebraic logic. Temporal logic. Neighbourhood logic. Algebraic model. Semiring.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Relações R e L	19
Figura 2 – Propriedade (FV_2)	20
Figura 3 – Propriedade (FV_3) , quando $x = y$	20
Figura 4 – Propriedade (FV_3) , quando $y \subset x$	20
Figura 5 – Propriedade (FV_3) , quando $x \subset y$	21
Figura 6 – Propriedade (FV_4)	21
Figura 7 – Condição do <i>frame</i> não-estrito	22
Figura 8 – Disposição de fórmulas modais nos intervalos temporais	25
Figura 9 – Esquema de adequação	64

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Identificação de algumas fórmulas e regras modais	27
--	----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	PRIMEIRA PARTE: UMA ÁLGEBRA PARA UMA LÓGICA?	13
2.1	Lógica Proposicional da Vizinhança	13
2.1.1	Linguagem proposicional	15
2.1.2	Semântica	18
2.1.3	Base dedutiva	25
2.2	O ambiente algébrico	35
2.2.1	Álgebra de Boole	35
2.2.2	Semianeis	42
2.2.2.1	Subidentidades e operadores de domínio e codomínio	44
2.3	O modelo algébrico	45
2.3.1	Álgebra da vizinhança	46
2.3.1.1	Uma motivação e exemplo de álgebra da vizinhança	56
2.3.2	Consequência algébrica	63
2.3.2.1	Correção	64
3	SEGUNDA PARTE: UMA LÓGICA PARA UMA ÁLGEBRA	70
3.1	O sistema $LPV_{\pi_0}^+$	74
3.1.1	Adequação algébrica	77
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	84
	REFERÊNCIAS	87

1 INTRODUÇÃO

Não é incomum encontrarmos a Lógica vista como o estudo do raciocinar e das inferências válidas (D'Ottaviano; Feitosa, 2003). Embora esse tipo de visão não exprima plenamente o que é a Lógica em sua totalidade e múltiplas facetas (área de estudo, disciplina e/ou sistema formal), ela não está equivocada.

Uma preocupação central da Lógica é discriminar entre argumentos válidos e inválidos; e pretende-se que sistemas lógicos formais, tais como os conhecidos cálculos sentencial e de predicados, forneçam cânones precisos, padrões puramente formais, de validade (Haack, 2002, p. 25).

Como o objetivo do presente trabalho não é o de discutir disputas demarcativas sobre a Lógica, o que não caberia nesta Dissertação, tomaremos a fala de Susan Haack como o caso.

Levando em consideração a sinonímia $Lógica \approx Sistema\ Formal$, uma pergunta que pode surgir é: A Lógica ou as Lógicas? Isto é, deve existir alguma lógica que seja a “correta” e “válida” – assim como para Kant a Lógica é a Lógica Aristotélica (D'Ottaviano; Feitosa, 2003, p. 6)? Ou seria o caso de haver muitas outras lógicas? O Princípio da Liberdade Lógica, introduzido por Tassinari e D'Ottaviano (2012), pode ser uma possibilidade de discussão sobre essa questão.

Na interpretação dada em Tassinari e D'Ottaviano (2012), leis lógicas são estabelecidas pelo pensamento para o próprio pensamento. Tomando, ainda, a definição de lógica como um sistema formal e o sistema formal, por sua vez, uma artificialidade introduzida como uma tentativa de representação de um dado tipo de pensamento, desde que existam n formas de se pensar, então é possível a existência de n sistemas formais, ou ainda, n lógicas. Essa posição se enquadra como uma posição pluralista, no sentido de considerar a existência de mais de um sistema lógico correto e válido (Tassinari; D'Ottaviano, 2012, p. 164).

Se nos comprometemos com esse posicionamento pluralista, é razoável pensarmos também nos mais variados objetos sob os quais as inferências desses sistemas lógicos se debruçam.

O que podemos condensar na seguinte pergunta: A Lógica estuda, de certo modo, as inferências; mas inferências sobre o que? Muitas são as possibilidades. Podemos nos interessar nas inferências sobre a doxa e, então, Lógicas Doxásticas seriam o caso. Poderíamos nos debruçar sobre deontologia e tomarmos as Lógicas Deonticas. Mas, também, podemos nos interessar pelo estudo do tempo e inferências acerca deste objeto com Lógicas Temporais, como será o caso da presente Dissertação.

Há muitos conceitos sobre os quais podemos estabelecer as inferências e, assim como há uma multiplicidade de interpretações acerca deste tema, existem muitas lógicas que se dedicam a este tema comum. Olhando para alguns aspectos ontológicos do tempo, por exemplo, verificamos interpretações distintas quanto à sua estrutura macroscópica - linear, circular ou ramificado – e quanto à estrutura microscópica – denso ou discreto (Pessoa Jr., 2016). Para cada caso, um sistema lógico temporal diferente advém.

Descrições de sistemas temporais sob um único ponto de vista, i. e., sistemas temporais unidimensionais, são abundantes na literatura. Essas lógicas temporais unidimensionais se diferem de muitas maneiras. Elas diferem na abordagem, seja teoria da prova, teoria de modelos ou algebricamente. Elas diferem na ontologia adotada, seja o tempo representado como um conjunto de pontos, intervalos, ou eventos. Elas podem, também, divergirem nas propriedades atribuídas aos *flows of time*, seja o tempo linear ou ramificado, discreto ou denso, contínuo ou que permita lacunas (Finger; Gabbay, 1996, p. 204, tradução nossa).

Para a presente pesquisa, tomaremos um caso de sistema (lógico) temporal intervalar e linear, dentre os mais variados encontrados na literatura, pretendendo-se trabalhar com a formalização do conceito de tempo seguindo a abordagem lógico-algébrica. Embora a lógica a ser estudada no presente texto adote a concepção do tempo linear, não nos comprometeremos em defender qualquer posição metafísica a respeito do tempo. A motivação para o presente trabalho decorre, única e exclusivamente, de certas lacunas encontradas ao buscarmos por modelos algébricos para o caso da Lógica da Vizinhança de Chaochen e Hansen (1997, 2004).

A Lógica da Vizinhança contempla não somente um fragmento proposicional e modal, como também quantificacional. Höfner e Möller (2008), contudo, investigam apenas o comportamento algébrico dos operadores modais dessa lógica.

Tanto em (Höfner, 2007), quanto em (Höfner; Möller, 2008), os autores desenvolvem o que chamam de *algebraic embedding* da Lógica da Vizinhança, o que, em princípio, não é um modelo algébrico com meta-resultados como os de Correção e Completude.

Com a estrutura algébrica de uma álgebra de Boole, subjacente a uma estrutura de semianel, munida de operadores de domínio e codomínio, os autores derivam muitos dos teoremas centrais da parte modal e proposicional da Lógica da Vizinhança em suas versões algébricas. Nas palavras dos próprios autores, o trabalho pavimenta um caminho para a algebrização dessa lógica em questão (Höfner; Möller, 2008, p. 2).

Eis, então, o objetivo do presente trabalho: investigar as estruturas mencionadas por Höfner e Möller, além de alcançarmos os almejados resultados de Correção e Completude para que seja possível a construção de um modelo algébrico adequado para a Lógica Proposicional da Vizinhança (o fragmento proposicional e modal da Lógica da Vizinhança).

A presente dissertação se dividirá em dois momentos. Durante o Capítulo 2, exploraremos o referencial teórico para o desenvolvimento desta pesquisa:

- (a) dedicaremos a Seção 2.1 para o entendimento da Lógica Proposicional da Vizinhança¹. Na referida seção, passaremos por múltiplos aspectos desta lógica. Veremos a arquitetura de sua linguagem, a parte semântica e, também, seu sistema axiomático;
- (b) na Seção 2.2, teremos a apresentação de todo o maquinário algébrico necessário para a posterior introdução da álgebra da vizinhança, nossa formalização da estrutura algébrica de Höfner

¹ Nos referimos a ela desse modo por ser justamente o fragmento proposicional (sem quantificadores) da Lógica da Vizinhança. Porém, no artigo em que ela é introduzida, vide (Goranko; Montanari e Sciavicco, 2003), ela recebe o nome de Lógica Proposicional da Vizinhança não-estrita.

e Möller - um semianel booleano, com subidentidades, munido de operadores de domínio e codomínio modais;

(c) por fim, durante a Seção 2.3, teremos a apresentação da estrutura pensada como contraparte algébrica da Lógica Proposicional da Vizinhança, onde derivaremos importantes resultados sobre essa estrutura e obteremos o meta-resultado de Correção entre a axiomática da Lógica Proposicional da Vizinhança e a álgebra da vizinhança.

Ao final da Seção 2.3, constataremos um entrave: a possibilidade de falharmos em obter o resultado de Completude devido à ausência de certos conectivos na linguagem da lógica com a qual estaremos trabalhando.

O método a ser empregado para a algebrização da Lógica Proposicional da Vizinhança será o de Lindenbaum-Tarski. Em síntese, esse método caracteriza-se principalmente por quotientar a álgebra das fórmulas do sistema, gerando a álgebra quociente de Lindenbaum, e por verificar se a álgebra resultante corresponde a um caso da estrutura algébrica concebida como modelo para o sistema lógico (Bueno-Soler, 2004). Desse modo, é razoável pensarmos que seja necessário que a álgebra das fórmulas tenha um conectivo correspondente para cada operação da estrutura algébrica modelo, seja ele um conectivo primitivo ou não. Porém, notaremos que na álgebra das fórmulas da Lógica Proposicional da Vizinhança não haverá conectivos para quatro das operações presentes na álgebra da vizinhança e, parte deles, talvez não sendo passíveis de serem definidos a partir dos conectivos já presentes, o que nos leva ao Capítulo 3 da dissertação.

Durante o Capítulo 3, tentaremos resolver o problema relativo à impossibilidade da obtenção do resultado de Completude, o que culminará na contribuição mais original deste trabalho, o desenvolvimento de um novo sistema lógico, uma extensão da Lógica Proposicional da Vizinhança, que demonstraremos ser correta e completa em relação à álgebra da vizinhança.

2 PRIMEIRA PARTE: UMA ÁLGEBRA PARA UMA LÓGICA?

A pesquisa conduzida, e geradora desta dissertação, partiu de um primeiro anseio em investigar uma possível interpretação algébrica da parte modal da Lógica da Vizinhança de Chaochen e Hansen (1997, 2004), o que nos levou aos textos de Höfner (2007) e Höfner e Möller (2008).

Contudo, embora Höfner e Möller tratassem algébricamente apenas da parte modal da Lógica da Vizinhança, não havia como contribuímos para a discussão desses autores e obter resultados de Correção e Completude, em vista de que tínhamos conhecimento apenas da Lógica da Vizinhança que abarcava também uma parte quantificacional - i. e. não havia um sistema que fosse precisamente a parte proposicional e modal dessa lógica.

Foi assim que o trabalho de Goranko, Montanari e Sciavicco (2003) se tornou relevante para o projeto. Nas palavras dos autores,

diferentemente da lógica clássica e de muitas lógicas modais e temporais, onde os sistemas axiomáticos de primeira-ordem são obtidos ao estender seus fragmentos proposicionais com axiomas relevantes para os quantificadores, a Lógica da Vizinhança de primeira-ordem foi axiomatizada primeiro, sem ter seu fragmento proposicional identificado. Agora se descobriu que este último estava oculto no sistema axiomático de primeira-ordem originalmente introduzido, cujos axiomas proposicionais, considerados isoladamente, são substancialmente incompletos. (Goranko; Montanari; Sciavicco, 2003, p. 1140, tradução nossa).

O ponto é que inicialmente buscávamos uma álgebra para uma lógica. Como o trabalho algébrico de Höfner e Möller se debruçava principalmente na parte modal da Lógica da Vizinhança, achávamos que a álgebra de Höfner e Möller poderia ser um modelo algébrico para a Lógica Proposicional da Vizinhança não-estrita desenvolvida por Goranko, Montanari e Sciavicco (2003). O presente capítulo captura, então, a primeira metade de nossa pesquisa, que tomará outro rumo ao passarmos para o capítulo seguinte.

2.1 Lógica Proposicional da Vizinhança

Para esta etapa, teremos a apresentação da Lógica Proposicional da Vizinhança não-estrita de Goranko, Montanari e Sciavicco (2003), a qual denotaremos por $\mathbf{LPV}^+$.

Estes autores desenvolvem sistemas axiomáticos para o que chamam de Lógicas Proposicionais da Vizinhança, uma classe/família de lógicas temporais intervalares. Para as Lógicas Proposicionais da Vizinhança, existem duas possíveis semânticas para o domínio temporal linear: *não-estritas* e *estritas*. A distinção diz respeito à relação de ordem utilizada na definição semântica dos operadores e conectivos, ou ainda, na ordem utilizada na definição dos intervalos temporais nos quais as fórmulas são satisfeitas.

Definição 1 (Burris; Sankappanavar, 1981, p. 4) *Uma relação binária R definida em um conjunto A é dita ser uma ordem (parcial) em A se, para elementos arbitrários $x, y, z \in A$, as seguintes condições são satisfeitas:*

- (i) xRx ; (Reflexividade)
- (ii) se xRy e yRz , então xRz ; (Transitividade)
- (iii) se xRy e yRx , então $x = y$. (Antissimetria)

Desse modo, dizemos que $\langle A, R \rangle$ é uma estrutura parcialmente ordenada (ou apenas uma estrutura ordenada), sendo seu domínio o conjunto A e R ordena A . Se $\langle A, R \rangle$ é uma estrutura parcialmente ordenada, podemos chamar A apenas de *poset*.

Definição 2 (Burris; Sankappanavar, 1981, p. 4) *Uma ordem R em A é linear (ou total) se, para todo $x, y \in A$, satisfaz a condição:*

- (iv) xRy ou yRx . (Linearidade/Totalidade)

Nesse caso, A é um domínio linearmente ordenado e $\langle A, R \rangle$ uma estrutura linearmente ordenada.

Definição 3 (Goranko; Montanari; Sciavico, 2003, p. 1143) *Se $\langle \mathbb{D}, < \rangle$ é uma estrutura linearmente ordenada:*

- (i) *um intervalo em $\mathbb{D}$ determinado por $d_0, d_1 \in \mathbb{D}$ é o conjunto $[d_0, d_1] = \{x \in \mathbb{D} : d_0 \leq x \leq d_1\}$;*
- (ii) *o intervalo $[d_0, d_1]$ é dito ser um intervalo estrito caso $d_0 < d_1$;*
- (iii) *$[d_0, d_1]$ é um intervalo degenerado se $d_0 = d_1$.*

Informalmente, definimos: lógicas proposicionais da vizinhança estritas como sendo os sistemas, dentre a coleção de Lógicas Proposicionais da Vizinhança, que tem como domínio temporal linearmente ordenado um conjunto constituído exclusivamente de intervalos estritos; e lógicas proposicionais da vizinhança não-estritas como sendo os sistemas, dentre a coleção de Lógicas Proposicionais da Vizinhança, que tem como domínio temporal linearmente ordenado um conjunto constituído de intervalos, sendo estes intervalos estritos ou não.

Podemos entender, também, o caso estrito como sistemas que não admitem intervalos constituídos de um único ponto (intervalos degenerados do tipo $[x, x]$), enquanto que os sistemas não-estritos incluem intervalos degenerados (Goranko; Montanari; Sciavico, 2003, p. 1139).

O caso de lógica proposicional da vizinhança não-estrita de Goranko, Montanari e Sciavico (2003) é o que por vezes também chamamos apenas de Lógica Proposicional da Vizinhança, por ser o fragmento proposicional da Lógica da Vizinhança de Chaochen e Hansen (1997, 2004).

A Lógica da Vizinhança de Chaochen e Hansen é, além de modal, também quantificacional. Ela contempla, dentre outros, os operadores $\Box_r, \Box_l, \Diamond_r$ e $\Diamond_l$. Por estarmos interessados

no comportamento algébrico destes operadores apenas, nos restringimos à parte proposicional e modal da Lógica da Vizinhança.

Wójcicki (1984, p. 12) pontua que lógicas podem ser apresentadas e definidas, principalmente, por dois caminhos: sintaticamente e semanticamente. Porém, qualquer definição que encontrarmos na literatura - do que pode ser uma lógica - indicará a necessidade da introdução de sua linguagem inicialmente.

Desse modo, a seguir, nos desdobraremos na apresentação da linguagem da $\mathbf{LPV}^+$, da semântica de seus conectivos e, por fim, introduziremos a base dedutiva, um sistema axiomático para essa lógica, componente de extrema importância para o desenvolvimento dos futuros resultados de Correção e Completude.

2.1.1 Linguagem proposicional

Para Wójcicki (1988, p. 7), podemos olhar para uma linguagem proposicional como uma álgebra abstrata, sendo o domínio dessa álgebra um conjunto de fórmulas, e as operações os conectivos. Portanto, julga-se pertinente para o entendimento dessa abordagem a inclusão de tópicos introdutórios sobre Álgebra Universal, tomando principalmente a obra de Burris e Sankappanavar (1981) como referencial.

Definição 4 (Burris; Sankappanavar, 1981, p. 25-26) *Para um conjunto não-vazio A e um inteiro não-negativo n definimos $A^0 = \{\emptyset\}$, e, para $n > 0$, A^n é o conjunto de n -tuplas de elementos de A . Uma operação n -ária (ou função) em A é uma função f de A^n em A (na usual notação $f: A^n \rightarrow A$); n é a aridade (ou rank) de f . Uma operação finitária é uma operação n -ária, para algum n . A imagem de $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ sob uma operação n -ária f é denotada por $f(a_1, \dots, a_n)$. Uma operação f em A é chamada de operação nula (ou constante) se sua aridade é zero; é completamente determinada pela imagem $f(\emptyset)$ em A do único elemento $\emptyset$ em A^0 . Portanto, uma operação nula é vista como um elemento de A . Uma operação f em A é unária, binária ou ternária se sua aridade é 1, 2 ou 3, respectivamente.*

Definição 5 (Burris; Sankappanavar, 1981, p. 26) *Uma linguagem (ou tipo) para álgebras é um conjunto $\mathcal{F}$ de símbolos de funções tal que um inteiro não-negativo n é atribuído a cada membro f de $\mathcal{F}$. Esse inteiro é chamado de aridade (ou rank) de f , e f é dito ser um símbolo de função n -ária. O subconjunto de símbolos de função n -árias em $\mathcal{F}$ é denotado por $\mathcal{F}_n$. Assim, $\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$.*

Observação 6 *Na literatura, podemos encontrar também o conjunto de símbolos de funções $\mathcal{F}$ sendo chamado de domínio de assinatura, sendo assinatura a família composta por cada subconjunto de símbolos de funções n -árias em $\mathcal{F}$ (Fernández, 2005, p. 10).*

Definição 7 (Burris; Sankappanavar, 1981, p. 26) *Se $\mathcal{F}$ é uma linguagem para álgebras, então uma álgebra $\mathcal{A}$ de tipo $\mathcal{F}$ é um par ordenado $\langle A, F \rangle$, em que A é um conjunto não-vazio e*

F é uma família de operações finitárias em A indexadas pela linguagem $\mathcal{F}$ tal que, para cada símbolo de função n -ária f em $\mathcal{F}_n$, existe uma operação n -ária $f^{\mathfrak{A}}$ em A . O conjunto A é chamado de universo (ou conjunto domínio) de $\mathfrak{A} = \langle A, F \rangle$, e as $f^{\mathfrak{A}}$'s são chamadas de operações fundamentais de $\mathfrak{A}$.

Observação 8 Por economia, optaremos sempre que possível por omitir, e. g., o sobrescrito $\mathfrak{A}$ de $f^{\mathfrak{A}}$. Apenas quando necessária a distinção que indicaremos de qual estrutura a operação advém. Não somente faremos com as operações, mas também com as relações.

Assim, uma estrutura algébrica, ou apenas álgebra, é um conjunto não-vazio, chamado também de domínio ou universo, munido de algumas (ou alguma) operações satisfazendo certas identidades/axiomas.

Uma lei mais básica que deve ser satisfeita pelas estruturas algébricas é a lei de fechamento: para qualquer elemento do domínio quando operado pelas operações da estrutura deve resultar em um elemento do domínio. Em termos simples, se a operação não resulta em um elemento fora do conjunto domínio, então ele é fechado para essa operação.

Nesse sentido, um caso de estrutura algébrica mais básica - no quesito satisfação das identidades para as operações - é a álgebra dos termos.

Definição 9 (Burris; Sankappanavar, 1981, p. 68-69) Seja X um conjunto de (distintos) objetos chamados de variáveis. Seja $\mathcal{F}$ um tipo para álgebras. O conjunto $T(X)$ de termos do tipo $\mathcal{F}$ sobre X é o menor conjunto tal que:

- (i) $X \cup \mathcal{F}_0 \subseteq T(X)$;
- (ii) se $p_1, \dots, p_n \in T(X)$ e $f \in \mathcal{F}_n$, então $f(p_1, \dots, p_n) \in T(X)$.

Definição 10 (Burris; Sankappanavar, 1981, p. 71) Dados $\mathcal{F}$ e X , se $T(X) \neq \emptyset$, então a álgebra de termos do tipo $\mathcal{F}$ sobre X , escrito $\mathcal{T}(X)$, tem como seu universo o conjunto $T(X)$, e as operações fundamentais satisfazem:

$$f^{\mathcal{T}(X)} : \langle p_1, \dots, p_n \rangle \mapsto f(p_1, \dots, p_n),$$

para $f \in \mathcal{F}_n$ e $p_i \in T(X)$, $1 \leq i \leq n$.

Agora vejamos que toda linguagem proposicional é constituída de três componentes (Wójcicki, 1988, p. 12):

- (i) um conjunto não-vazio de símbolos para as variáveis proposicionais;
- (ii) um conjunto não-vazio finito de símbolos chamados de conectivos ou operadores lógicos;
- (iii) um conjunto de regras gramaticais que define indutivamente o conjunto de todas as fórmulas da linguagem a partir das variáveis e dos conectivos.

Assim, torna-se evidente que uma linguagem proposicional satisfaz as condições de uma álgebra dos termos. Logo, podemos usar essa noção para estabelecer a linguagem da $\mathbf{LPV}^+$.

Para a linguagem da $\mathbf{LPV}^+$, teremos constantes (conectivos de aridade 0 e, portanto, elementos do domínio), conectivos de aridade 1 (unários) e aridade 2 (binários), com os seguintes conjuntos contemplando a assinatura da linguagem proposicional da $\mathbf{LPV}^+$:

$$\mathcal{F}_0 = \{\perp, \top\}; \quad (2.1)$$

$$\mathcal{F}_1 = \{\neg, \Diamond_r, \Diamond_l\}; \quad (2.2)$$

$$\mathcal{F}_2 = \{\vee, \wedge\}. \quad (2.3)$$

A união desses conjuntos dá origem ao domínio da assinatura da linguagem:

$$\{\vee, \wedge, \neg, \Diamond_r, \Diamond_l, \perp, \top\}. \quad (2.4)$$

Consideremos $Var = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$ o conjunto de variáveis (proposicionais) da álgebra de termos da linguagem da $\mathbf{LPV}^+$. Desse modo, definimos indutivamente o conjunto das fórmulas For da linguagem:

- $Var \cup \mathcal{F}_0 \subseteq For$;
- se $\varphi \in For$, como $\neg, \Diamond_r, \Diamond_l \in \mathcal{F}_1$, então $\neg\varphi, \Diamond_r\varphi, \Diamond_l\varphi \in For$;
- se $\varphi, \psi \in For$, como $\vee, \wedge \in \mathcal{F}_2$, então $\varphi \vee \psi, \varphi \wedge \psi \in For$.

Assim, variáveis proposicionais e as constantes para a contradição e tautologia são fórmulas. Qualquer elemento do domínio, se operado por algum conectivo lógico, resulta também em uma fórmula.

Embora não definidos inicialmente, na linguagem proposicional da $\mathbf{LPV}^+$ consideraremos também os conectivos $\rightarrow, \leftrightarrow, \Box_r$ e $\Box_l$ para a implicação, bi-implicação, e os duais de $\Diamond_*$ (para $*$ $\in \{r, l\}$), respectivamente. A inclusão segue, como usualmente, pelas convenções notacionais, dados $\varphi, \psi \in For$:

$$\varphi \rightarrow \psi := \neg\varphi \vee \psi; \quad (2.5)$$

$$\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi); \quad (2.6)$$

$$\Box_r\varphi := \neg\Diamond_r\neg\varphi; \quad (2.7)$$

$$\Box_l\varphi := \neg\Diamond_l\neg\varphi. \quad (2.8)$$

Desse modo, a regra de formação garante que os elementos $\varphi \rightarrow \psi, \varphi \leftrightarrow \psi, \Box_r\varphi$ e $\Box_l\varphi$ também sejam fórmulas.

Evocamos, então, a álgebra das fórmulas (ou álgebra dos termos) da $\mathbf{LPV}^+$ por:

$$For = \langle For, \vee, \wedge, \neg, \Diamond_r, \Diamond_l, \perp, \top \rangle.$$

Observação 11 *Os conjuntos Var e For , e $\mathcal{F}or$, estão para a nossa definição de linguagem para LPV^+ assim como X , $T(X)$ e $\mathcal{T}(X)$ estão para a álgebra dos termos na definição de Burris e Sankappanavar, respectivamente.*

Definida a linguagem da LPV^+ e sua respectiva álgebra das fórmulas, abordaremos, a seguir, aspectos semânticos dessa lógica.

2.1.2 Semântica

Existem distintas maneiras de se definir uma lógica. A mais usual, no contexto abstrato, é a de que uma lógica é um par $\langle A, C \rangle$, constituído de um conjunto não-vazio A e um operador de consequência C definido em A . Alguns podem considerar, ao invés do operador de consequência, uma relação de consequência (Fernández, 2005, p. 12). As abordagens são equivalentes de certa forma (Font; Jansana; Pigozzi, 2003, p. 17).

A abordagem do presente texto considera uma miscelânea de autores e autoras em Lógica Matemática e Lógica Algébrica como Font, Jansana e Pigozzi (2003), Rasiowa (1974) e Wójcicki (1984, 1988). Assim, consideraremos uma lógica como um par $\langle For, \vdash \rangle$, em que For é o domínio e universo da linguagem proposicional - ou da álgebra das fórmulas - dessa lógica e $\vdash$ uma relação de consequência definida em For , i. e. $\vdash \subseteq \mathcal{P}(For) \times For$.

A concepção é bastante simples. A Lógica é caracterizada, principalmente, pelas inferências; assim, é razoável que uma lógica seja um universo de fórmulas munido de uma relação de consequência que fará a separação, dentre as fórmulas do domínio, o que é teorema do que não é, o que é válido do que não é.

Desde que haja a possibilidade de relações de consequência sintática e semântica, segue-se a existência de, no mínimo, duas apresentações possíveis para uma lógica: sintaticamente e semanticamente, como já pontuado em tópico anterior.

Por agora, levaremos em consideração o caso da LPV^+ e a apresentação de sua semântica.

A introdução de sua semântica segue a usual apresentação de semântica de Kripke para lógicas modais normais, também chamada de modelo *standard* (Chellas, 1980, p. 67-68).

Em Chellas (1980, p. 67-68), um modelo *standard* é uma terna:

$$\mathfrak{M} = \langle W, R, P \rangle, \quad (2.9)$$

tal que:

- (i) W é um conjunto não-vazio;
- (ii) R uma relação binária em W (i. e. $R \subseteq W \times W$);
- (iii) P é uma família de funções em que cada função atribui a cada variável proposicional um subconjunto de W ($P = \{P_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $P_i : \{p_i\} \rightarrow \mathcal{P}(W)$, para $p_i \in Var$).

O fragmento $\langle W, R \rangle$ é por vezes chamado de *frame* (Chellas, 1980; Blackburn, Rijke, Venema, 2001). Cabe destacar que existe a possibilidade do modelo admitir mais de uma relação de acessibilidade (Blackburn; Rijke; Venema, 2001, p. 2). Assim, é plausível considerarmos uma família de relações ao invés de uma única relação.

Usualmente, entende-se W por um conjunto de mundos possíveis ou estados. A relação R denota a relação de acessibilidade entre mundos e P_i interpreta a variável proposicional p_i no conjunto de mundos possíveis em que a variável proposicional é satisfeita ou verdadeira, isso se pensamos em um modelo para uma lógica modal alética onde as modalidades $\Box$ e $\Diamond$ tomam o lugar dos conceitos de “necessário” e “possível”.

Para o caso da $\mathbf{LPV}^+$, haverá duas relações de acessibilidade, dado que os operadores modais ocorrem tanto marcados com r quanto com l . Sendo $\mathbf{LPV}^+$ uma lógica modal, temporal e intervalar, é razoável considerarmos - para a interpretação intuitiva da estrutura - intervalos possíveis no lugar de mundos possíveis.

Definição 12 (Goranko; Montanari; Sciavico, 2003, p. 1141) *Um frame de vizinhança é uma estrutura $\mathfrak{F} = \langle I, R, L \rangle$, em que I é um conjunto não-vazio de elementos e R, L são relações em I ($R, L \subseteq I \times I$).*

Tomemos as seguintes propriedades para um *frame* de vizinhança:

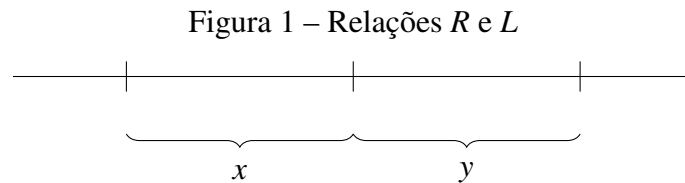
(FV₁) R e L são mutuamente inversas, i. e. (para $x, y \in I$) se xRy , então yLx , e se xLy , então yRx ;

(FV₂) $\forall x \forall y (\exists z (xLz \wedge zRy) \rightarrow \forall w (xLw \rightarrow wRy))$ e $\forall x \forall y (\exists z (xRz \wedge zLy) \rightarrow \forall w (xRw \rightarrow wLy))$;

(FV₃) $\forall x \forall y (\exists z \exists u (xLz \wedge zLu) \wedge \exists t (xRt \wedge tLy) \rightarrow x = y \vee (\exists j \exists k ((xLj \wedge jRk \wedge kRy) \vee (xLj \wedge jLk \wedge kRy))))$ e $\forall x \forall y (\exists z \exists u (xRz \wedge zRu) \wedge \exists t (xLt \wedge tRy) \rightarrow x = y \vee (\exists j \exists k ((xRj \wedge jLk \wedge kLy) \vee (xRj \wedge jRk \wedge kLy))))$;

(FV₄) $\forall w \forall x \forall y \forall z ((wRx \wedge xRy \wedge yRz) \rightarrow (\exists u (wRu \wedge uRz)))$.

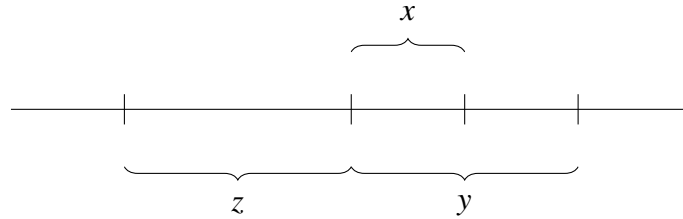
A relação L captura alguma noção sobre o passado, enquanto a relação R representa alguma noção sobre o futuro. A expressão xRy pode ser interpretada como “o intervalo y está à direita (ao futuro em relação ao x) e concatenado com o intervalo x ”. Em outras palavras, y é uma vizinhança à direita de x , como ilustra a figura abaixo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Se xRy e, portanto, y está à direita e concatenado com o intervalo x , então também podemos dizer que “ x está à esquerda (ao passado em relação a y) e concatenado com y ”, o que é denotado por yLx . Esta noção é precisamente capturada pela propriedade (FV_1).

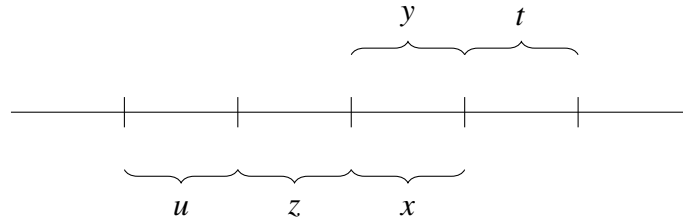
Figura 2 – Propriedade (FV_2)



Fonte: Elaborado pelo autor.

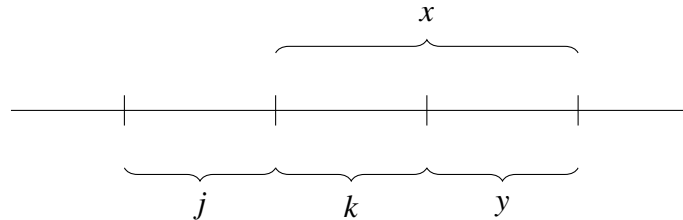
As duas condições da propriedade (FV_2) nos dizem que: se dois intervalos x e y partilham do mesmo ponto inicial, então qualquer vizinhança à esquerda de x é também uma vizinhança à esquerda de y - a figura acima exemplifica esse caso; e se dois intervalos x e y partilham do mesmo ponto final, qualquer vizinhança à direita de x é também uma vizinhança à direita de y .

Figura 3 – Propriedade (FV_3), quando $x = y$

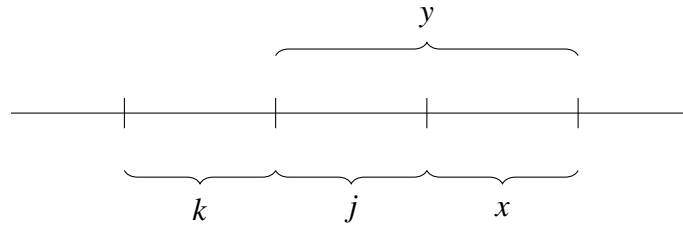


Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 4 – Propriedade (FV_3), quando $y \subset x$

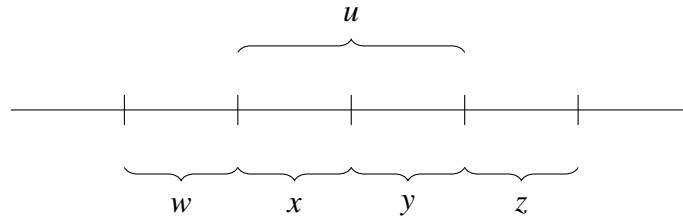


Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 5 – Propriedade (FV_3) , quando $x \subset y$ 

Fonte: Elaborado pelo autor.

Em relação às propriedades de (FV_3) , se dois intervalos x e y partilham o mesmo ponto inicial ou o mesmo ponto final, então são três as possibilidades: (i) x e y podem ser iguais, possuindo o mesmo comprimento; (ii) $y \subset x$ e o intervalo x é maior que o intervalo y ; (iii) ou $x \subset y$ e o intervalo x é menor que o intervalo y .

Figura 6 – Propriedade (FV_4) 

Fonte: Elaborado pelo autor.

Já a condição de (FV_4) , se ocorrem três composições em sequência, então existe um intervalo o qual está em composição à direita do intervalo inicial da sequência de composições e à esquerda do intervalo final da sequência. Entendemos esse intervalo como a composição resultante entre os dois intervalos do meio da sequência.

Definição 13 (Goranko; Montanari; Sciavicco, 2003, p. 1141-1142) *Um frame de vizinhança de intervalos é uma estrutura $\mathfrak{F} = \langle I, R, L \rangle$, em que $\mathfrak{F}$ é um frame de vizinhança cujas relações R e L satisfazem as propriedades (FV_1) , (FV_2) , (FV_3) e (FV_4) .*

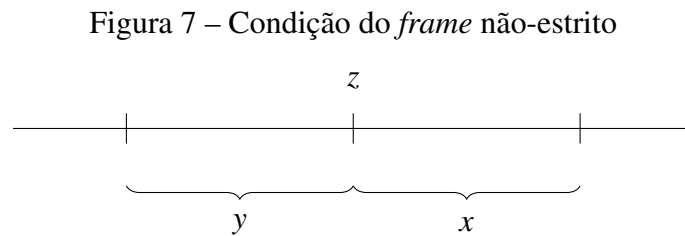
Por enquanto, estamos na versão mais abstrata do modelo/semântica relacional de $\mathbf{LPV}^+$, onde I é apenas um conjunto não-vazio de elementos quaisquer, e R, L relações arbitrárias definidas em $I \times I$ satisfazendo certas condições. A seguir, serão apresentadas demais condições para o frame de vizinhança de intervalos que nos permitirá a introdução de uma versão mais “concreta” da semântica dessa lógica.

Definição 14 (Goranko; Montanari; Sciavicco, 2003, p. 1142) *Um frame de vizinhança de intervalos $\mathfrak{F} = \langle I, R, L \rangle$ é dito ser:*

- (i) *não-estrito*, se $\forall x(\exists y \exists z(xLy \wedge yRz \wedge zRx))$;
- (ii) *aberto*, se $\forall x(\exists y(xLy) \wedge \exists z(xRz))$;

- (iii) *rico*, se $\forall x(\exists y(xRy \wedge yRy) \wedge \exists z(xLz \wedge zLz))$;
- (iv) *normal*, se $\forall x\forall y((\forall z(zRx \leftrightarrow zRy) \wedge \forall w(wLx \leftrightarrow wLy)) \rightarrow x = y)$;
- (v) *apertado*, se $\forall x\forall y((\exists z(xRz \wedge zRy) \wedge \exists w(yRw \wedge wRx)) \rightarrow x = y)$;
- (vi) *conectado*, se $(\forall x\forall y)((\exists z)(xLz \wedge zRy) \vee ((\exists w\exists t)(xLw \wedge wRt \wedge tRy)) \vee ((\exists s\exists r)(xLs \wedge sLr \wedge rRy)))$ e $(\forall x\forall y)((\exists z)(xRz \wedge zLy) \vee ((\exists w\exists t)(xRw \wedge wRt \wedge tLy)) \vee ((\exists s\exists r)(xRs \wedge sLr \wedge rLy)))$.

A condição de $\mathfrak{F}$ não-estrito caracteriza precisamente a semântica das lógicas proposicionais da vizinhança não-estritas, determinando que o domínio da estrutura modelo seja um conjunto que admita intervalos degenerados. No exemplo abaixo, a condição de $\mathfrak{F}$ não-estrito só pode ser satisfeita caso z seja um intervalo de comprimento zero - um intervalo degenerado - independentemente do comprimento dos demais intervalos x e y .



Fonte: Elaborado pelo autor.

O *frame* $\mathfrak{F}$ é dito ser aberto pois a referida condição implica no domínio linear temporal ser um conjunto aberto, dado que, para qualquer intervalo da linha temporal, sempre haverá um intervalo à esquerda e à direita.

A propriedade que caracteriza o *frame* rico assemelha-se à condição do *frame* aberto - para todo intervalo da estrutura, sempre haverá um intervalo à esquerda e outro à direita - no entanto, esses intervalos são degenerados. Um elemento dessa estrutura relaciona-se consigo mesmo apenas quando se trata de um intervalo degenerado, pois, nesse caso, seu instante inicial coincide com seu instante final, o que torna possível a composição do intervalo com ele próprio.

No caso de $\mathfrak{F}$ normal, podemos interpretar a condição como “se dois intervalos partilham os instantes inicial e final (ou possuem a mesma vizinhança à esquerda e direita), trata-se, então, de intervalos coincidentes”. E a propriedade de $\mathfrak{F}$ apertado indica que os quatro intervalos que ocorrem na fórmula devem estar aglutinados e, portanto, coincidentes e degenerados.

Por fim, a condição que caracteriza o *frame* conectado, em certo sentido, diz que para quaisquer intervalos x e y existem três possibilidades: (i) eles tem o mesmo instante inicial (ou mesmo instante final); (ii) o instante inicial de x ocorre antes do instante inicial de y (ou o instante final de x ocorre antes do instante final de y); (iii) ou o instante inicial de x ocorre após o instante inicial de y (ou o instante final de x ocorre após o instante final de y).

Observação 15 *Goranko, Montanari e Sciavicco (2003) não comentam sobre essas propriedades para o frame, apenas as definem. Os comentários feitos nesta dissertação refletem*

exclusivamente uma interpretação do autor que vos escreve, em uma tentativa de discutir sobre o significado dessas propriedades.

Proposição 16 *Todo frame de vizinhança de intervalos rico é não-estrito e aberto.*

Demonstração: (Goranko; Montanari; Sciavicco, 2003, p. 1142). □

A seguir, é apresentada a definição da estrutura concreta, assim como Goranko, Montanari e Sciavicco (2003, p. 1143) se referem a ela, que servirá como semântica de Kripke para LPV^+ .

Definição 17 (Goranko; Montanari; Sciavicco, 2003, p. 1143) *Uma estrutura de vizinhança de intervalos não-estritos é um frame de vizinhança $\langle I(\mathbb{D}), R, L \rangle$, em que $I(\mathbb{D})$ é o conjunto de todos os intervalos em $\langle \mathbb{D}, < \rangle$ e R, L são relações binárias mutuamente inversas em $I(\mathbb{D})$ definidas do modo que segue, dados $d_0, d_1, d_2 \in \mathbb{D}$:*

- (i) vRw sse $v = [d_0, d_1]$ e $w = [d_1, d_2]$; *(w é uma vizinhança à direita de v)*
- (ii) vLw sse $v = [d_1, d_2]$ e $w = [d_0, d_1]$. *(w é uma vizinhança à esquerda de v)*

Teorema 18 *Se $\mathfrak{F}$ é um frame de vizinhança de intervalos apertado, rico, conectado e normal, então $\mathfrak{F}$ é isomorfo a uma estrutura de vizinhança de intervalos não-estritos.*

Demonstração: (Goranko; Montanari; Sciavicco, 2003, p. 1143). □

Definição 19 *Uma valoração restrita $\hat{v}$ para LPV^+ , com respeito a um frame de vizinhança $\mathfrak{F} = \langle I, R, L \rangle$, é uma função do conjunto de fórmulas atômicas, variáveis proposicionais, da linguagem de LPV^+ em $\mathcal{P}(I)$, isto é, $\hat{v} : Var \rightarrow \mathcal{P}(I)$.*

Desta maneira, a valoração restrita leva cada variável proposicional no conjunto de intervalos em que esta variável é verdadeira ou satisfeita.

Definição 20 *Um modelo $\mathfrak{M}$ para LPV^+ é um par $\langle \mathfrak{F}, \hat{v} \rangle$, ou uma quadrupla $\langle I(\mathbb{D}), R, L, \hat{v} \rangle$, em que $\mathfrak{F} = \langle I(\mathbb{D}), R, L \rangle$ é uma estrutura de vizinhança de intervalos não-estritos e $\hat{v} : Var \rightarrow \mathcal{P}(I(\mathbb{D}))$ é uma valoração restrita.*

Se um intervalo temporal w no modelo $\mathfrak{M}$ satisfaz uma fórmula φ , ou φ é verdadeira no intervalo temporal w de $\mathfrak{M}$, então escreve-se $(\mathfrak{M}, w) \models \varphi$. Quando for o caso de todo e qualquer intervalo satisfazer a fórmula, então é escrito apenas que $\mathfrak{M} \models \varphi$.

Indutivamente, define-se quando uma fórmula φ é satisfeita ou satisfatível. Algumas definições de satisfatibilidade das fórmulas são dadas sem a inclusão da extensão da valoração restrita para todo o conjunto das fórmulas da linguagem, assim como as inicialmente apresentadas por Chellas (1980), Blackburn, Rijke e Venema (2001) e, até mesmo, definição introduzida por Goranko, Montanari e Sciavicco (2003) para LPV^+ .

Na definição que segue, entenderemos $(\mathfrak{M}, w) \not\models \varphi$ como “não é o caso que $(\mathfrak{M}, w) \models \varphi$ ”. Usaremos, também, $\iff$ como símbolo metalinguístico para “se, e somente se”.

Definição 21 Seja $\mathfrak{M} = \langle I(\mathbb{D}), R, L, \hat{v} \rangle$ um modelo para LPV^+ . Dados $\varphi, \sigma \in For$ e $\{w_1, w_2, \dots, w_n\} \subseteq I(\mathbb{D})$, a satisfatibilidade de $\psi \in For$ é definida pelos itens a seguir:

- (i) se $\psi \in Var$, então $(\mathfrak{M}, w_1) \models \psi \iff w_1 \in \hat{v}(\psi)$;
- (ii) se $\psi \equiv \neg\varphi$, então $(\mathfrak{M}, w_1) \models \psi \iff (\mathfrak{M}, w_1) \not\models \varphi$;
- (iii) se $\psi \equiv \varphi \wedge \sigma$, então $(\mathfrak{M}, w_1) \models \psi \iff (\mathfrak{M}, w_1) \models \varphi$ e $(\mathfrak{M}, w_1) \models \sigma$;
- (iv) se $\psi \equiv \varphi \vee \sigma$, então $(\mathfrak{M}, w_1) \models \psi \iff (\mathfrak{M}, w_1) \models \varphi$ ou $(\mathfrak{M}, w_1) \models \sigma$ (ou ambas);
- (v) se $\psi \equiv \Diamond_r \varphi$, então $(\mathfrak{M}, w_1) \models \psi \iff \exists w_2 : w_1 R w_2$ e $(\mathfrak{M}, w_2) \models \varphi$;
- (vi) se $\psi \equiv \Diamond_l \varphi$, então $(\mathfrak{M}, w_1) \models \psi \iff \exists w_2 : w_1 L w_2$ e $(\mathfrak{M}, w_2) \models \varphi$;
- (vii) se $\psi \equiv \perp$, então $\forall w \in I(\mathbb{D}) : (\mathfrak{M}, w) \not\models \psi$;
- (viii) se $\psi \equiv \top$, então $\forall w \in I(\mathbb{D}) : (\mathfrak{M}, w) \models \psi$.

A definição de satisfação acima apresenta apenas os casos dos conectivos lógicos tidos como primitivos na linguagem. A satisfação para os conectivos restantes pode ser facilmente obtida a partir da definição e abreviação desses conectivos dada na linguagem.

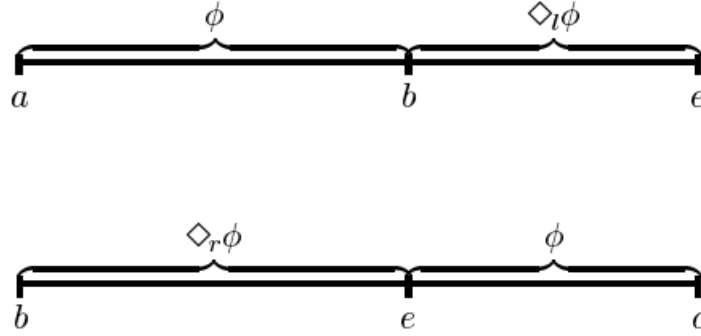
Proposição 22 Seja $\mathfrak{M} = \langle I(\mathbb{D}), R, L, \hat{v} \rangle$ um modelo para LPV^+ . Dados $\varphi, \sigma \in For$ e $\{w_1, w_2, \dots, w_n\} \subseteq I(\mathbb{D})$:

- (ix) se $\psi \equiv \varphi \rightarrow \sigma$, então $(\mathfrak{M}, w_1) \models \psi \iff$ se $(\mathfrak{M}, w_1) \models \varphi$, então $(\mathfrak{M}, w_1) \models \sigma$;
- (x) se $\psi \equiv \varphi \leftrightarrow \sigma$, então $(\mathfrak{M}, w_1) \models \psi \iff (\mathfrak{M}, w_1) \models \varphi$ se, e somente se, $(\mathfrak{M}, w_1) \models \sigma$;
- (xi) se $\psi \equiv \Box_r \varphi$, então $(\mathfrak{M}, w_1) \models \psi \iff \forall w_2 : \text{se } w_1 R w_2, \text{ então } (\mathfrak{M}, w_2) \models \varphi$;
- (xii) se $\psi \equiv \Box_l \varphi$, então $(\mathfrak{M}, w_1) \models \psi \iff \forall w_2 : \text{se } w_1 L w_2, \text{ então } (\mathfrak{M}, w_2) \models \varphi$.

Demonstração: Considere as definições desses conectivos na Subseção 2.1.1. □

No que diz respeito à satisfatibilidade das fórmulas modais: (a) um intervalo satisfaz $\Diamond_r \varphi$ se, e somente se, há algum intervalo *futuro* ao intervalo de $\Diamond_r \varphi$, que começa no mesmo instante em que o intervalo que satisfaz $\Diamond_r \varphi$ termina, e que satisfaz φ ; (b) um intervalo satisfaz $\Diamond_l \varphi$ se, e somente se, há algum intervalo *passado* ao intervalo de $\Diamond_l \varphi$, que termina no mesmo instante em que o intervalo que satisfaz $\Diamond_l \varphi$ começa, e que satisfaz φ ; (c) um intervalo satisfaz $\Box_r \varphi$ se, e somente se, todo intervalo *futuro* ao intervalo de $\Box_r \varphi$, que começa no mesmo instante em que o intervalo que satisfaz $\Box_r \varphi$ termina, satisfaz φ ; (d) um intervalo satisfaz $\Box_l \varphi$ se, e somente se, todo intervalo *passado* ao intervalo de $\Box_l \varphi$, que termina no mesmo instante em que o intervalo que satisfaz $\Box_l \varphi$ começa, satisfaz φ .

Figura 8 – Disposição de fórmulas modais nos intervalos temporais



Fonte: Retirado de Chaochen e Hansen (2004, p. 191).

A figura acima exemplifica o comportamento dos operadores $\Diamond_l$ e $\Diamond_r$. Há um intervalo que satisfaz ϕ à esquerda de (passado a) $\Diamond_l \phi$, que termina no mesmo instante onde o intervalo $[b, e]$ de $\Diamond_l \phi$ começa. Logo, o intervalo $[b, e]$ satisfaz a fórmula $\Diamond_l \phi$. Simetricamente, há um intervalo que satisfaz ϕ à direita de (futuro a) $\Diamond_r \phi$ e que começa no mesmo instante onde o intervalo $[b, e]$ de $\Diamond_r \phi$ termina, portanto, o intervalo $[b, e]$ satisfaz a fórmula $\Diamond_r \phi$.

Definição 23 Uma fórmula ϕ é válida em um modelo $\mathfrak{M} = \langle I(\mathbb{D}), R, L, \hat{v} \rangle$ para $\mathbf{LPV}^+$, denotado por $\mathfrak{M} \models \phi$, se, e somente se, é satisfeita em todo $w \in I(\mathbb{D})$.

Na sequência, veremos o sistema axiomático proposto por Goranko, Montanari e Sciavicco (2003) para a $\mathbf{LPV}^+$.

2.1.3 Base dedutiva

Uma base dedutiva, segundo Wójcicki (1988, p. 77), é uma terna:

$$\langle A, \Theta, \Omega \rangle, \quad (2.10)$$

de modo que A contempla o conjunto de axiomas da base dedutiva (constituído de fórmulas de uma dada linguagem), Θ denota o conjunto de regras-H e Ω o conjunto de regras-G.

As regras-H correspondem a regras de inferência no estilo da axiomática Hilbertiana, enquanto as regras-G seguem o estilo de “dedução natural” de Gentzen (1969, p. 68-103). Eventualmente, alguma das componentes pode ser vazia.

A disposição feita em Goranko, Montanari e Sciavicco (2003, p. 1152) da base dedutiva da $\mathbf{LPV}^+$ abarca apenas o esquema de axiomas e um conjunto de regras de inferência do tipo H. Será usado $\mathcal{H}_{\mathbf{LPV}^+}$ para indicar o referido sistema axiomático.

Por economia, indexamos $*$ aos conectivos modais para indicar que a fórmula pode ocorrer fixados uniformemente $* = r$ e $* = l$.

Esquema de Axiomas

(Ax0) Tautologias do Cálculo Proposicional Clássico

(Ax1) $\Box_*(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box_*\varphi \rightarrow \Box_*\psi)$

(Ax2) $\Box_*\varphi \rightarrow \Diamond_*\varphi$

(Ax3) $\varphi \rightarrow \Box_r\Diamond_l\varphi$ e $\varphi \rightarrow \Box_l\Diamond_r\varphi$

(Ax4) $\Diamond_r\Diamond_l\varphi \rightarrow \Box_r\Diamond_l\varphi$ e $\Diamond_l\Diamond_r\varphi \rightarrow \Box_l\Diamond_r\varphi$

(Ax5) $\Diamond_*\Diamond_*\Diamond_*\varphi \rightarrow \Diamond_*\Diamond_*\varphi$

(Ax6) $\Box_r\Diamond_l\varphi \rightarrow \Diamond_l\Diamond_r\Diamond_r\varphi \vee \Diamond_l\Diamond_l\Diamond_r\varphi$ e $\Box_l\Diamond_r\varphi \rightarrow \Diamond_r\Diamond_l\Diamond_l\varphi \vee \Diamond_r\Diamond_r\Diamond_l\varphi$

(Ax7) $\Box_*\varphi \wedge \Diamond_*\psi_1 \wedge \dots \wedge \Diamond_*\psi_n \rightarrow \Diamond_*(\Box_*\varphi \wedge \Diamond_*\psi_1 \wedge \dots \wedge \Diamond_*\psi_n)$, para qualquer $n \geq 1$.

Regras de Inferência

(MP) $\varphi, \varphi \rightarrow \psi / \psi$

(RN) $\vdash \varphi / \vdash \Box_*\varphi$, para qualquer $* \in \{r, l\}$.

O axioma (Ax0) sugere o caráter de extensão da Lógica Proposicional Clássica da $\mathbf{LPV}^+$, além disso indica que todo teorema clássico também faz parte da axiomática.

O símbolo $\vdash$ em $\mathcal{H}_{\mathbf{LPV}^+}$ é usado para a consequência sintática. Escreve-se $\Gamma \vdash \varphi$ para indicar que φ é consequência sintática ou dedutiva do conjunto de fórmulas Γ . Em particular, o conjunto Γ pode ser vazio, e então imprime-se apenas $\vdash \varphi$, o que indica que φ é um teorema de $\mathcal{H}_{\mathbf{LPV}^+}$.

Definição 24 *Seja $\Gamma \cup \{\psi\} \subseteq \text{For}$ da linguagem da $\mathbf{LPV}^+$. A fórmula ψ é deduzida ou derivada, em $\mathcal{H}_{\mathbf{LPV}^+}$, do conjunto de fórmulas Γ , o que é denotado por $\Gamma \vdash \psi$, se existe uma sequência finita $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ de fórmulas, de maneira que para cada $1 \leq i \leq n$ um dos três casos ocorre:*

(i) φ_i é um axioma;

(ii) $\varphi_i \in \Gamma$;

(iii) φ_i é obtida de fórmulas que ocorreram anteriormente na sequência, por aplicação de alguma regra de inferência do sistema $\mathcal{H}_{\mathbf{LPV}^+}$, e $\varphi_n = \psi$.

Teorema 25 $\mathcal{H}_{\mathbf{LPV}^+}$ é correto e completo para a classe de todas as estruturas de vizinhança de intervalos não-estritos.

Demonstração: Segue do resultado de correção e completude de Goranko, Montanari e Sciacovich (2003, p. 1153). $\square$

A identificação de algumas das fórmulas mais usuais em sistemas modais, para este trabalho, considera os desenvolvimentos de Chellas (1980) como base.

Tabela 1 – Identificação de algumas fórmulas e regras modais

Nome	Disposição da fórmula ou regra
(RN)	$\varphi \vdash \Box \varphi$
(RM)	$\varphi \rightarrow \psi \vdash \Box \varphi \rightarrow \Box \psi$
(RE)	$\varphi \leftrightarrow \psi \vdash \Box \varphi \leftrightarrow \Box \psi$
(RR)	$\varphi \wedge \psi \rightarrow \sigma \vdash \Box \varphi \wedge \Box \psi \rightarrow \Box \sigma$
(K)	$\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box \varphi \rightarrow \Box \psi)$
(T)	$\Box \varphi \rightarrow \varphi$
(D)	$\Box \varphi \rightarrow \Diamond \varphi$
(B)	$\varphi \rightarrow \Box \Diamond \varphi$
(N)	$\Box \top$
(M)	$\Box(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Box \varphi \wedge \Box \psi$
(C)	$\Box \varphi \wedge \Box \psi \rightarrow \Box(\varphi \wedge \psi)$
(R)	$\Box(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \Box \varphi \wedge \Box \psi$

Fonte: Elaborado pelo próprio autor, com base em Chellas (1980).

Certamente, a versão dos teoremas e regras de inferência abordada acima toma o conectivo modal $\Box$ como o caso, mas a versão para $\Diamond$ pode ser facilmente obtida dualizando-os¹, e. g., trocando as ocorrências de $\Box$ por $\Diamond$, $\wedge$ por $\vee$ e a ordenação das sub-fórmulas diante da implicação $\rightarrow$. No decorrer do texto, indexaremos ao nome do esquema ou regra o operador ao qual nos referimos. Vale ressaltar, também, que esta tabela não compreende todos os teoremas e regras modais.

Definição 26 (Chellas, 1980, p. 114) *Um sistema de lógica modal é normal se, e somente se, contém a inter-definição entre os operadores modais duais e é fechado sob a regra (RK) $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \psi \vdash \Box \varphi_1 \wedge \Box \varphi_2 \wedge \dots \wedge \Box \varphi_n \rightarrow \Box \psi$.*

Teorema 27 *Seja Σ um sistema de lógica modal contendo a inter-definição entre operadores modais. O sistema Σ é dito normal quando satisfaz uma das seguintes condições:*

- (i) Σ contém K e é fechado sob a regra RN ;
- (ii) Σ contém N e é fechado sob a regra RR ;
- (iii) Σ contém N e C e é fechado sob RM ;
- (iv) Σ contém N , C , e M e é fechado sob RE .

Demonstração: Para a demonstração, conferir Chellas (1980, p. 116). □

Pelo teorema enunciado, pode-se concluir que o sistema da $\mathbf{LPV}^+$ é um sistema normal de lógica modal, dado que em $\mathcal{H}_{\mathbf{LPV}^+}$ temos o esquema K como axioma, mais precisamente o (Ax1), e contém, também, a regra da necessitação (RN abreviadamente).

Ademais, por incluir os axiomas (Ax2) e (Ax3), na abordagem de Chellas (1980) nomeados por (D) e (B), podemos entender que o sistema da $\mathbf{LPV}^+$ é, ao menos, um sistema KDB

¹ A interesse do leitor, o processo de dualização pode ser encontrado na seção 4.2 *Replacement and duality* de Chellas (1980), para os desenvolvimentos do presente trabalho não o tomaremos em detalhes.

na hierarquia das lógicas modais normais. Logo, é plausível pensarmos nas fórmulas e regras de inferência dadas na Tabela 1 como teoremas e regras em $\mathcal{H}_{LPV}^+$, consequência do Teorema 4.2 de Chellas (1980, p. 114).

Proposição 28 *O sistema axiomático $\mathcal{H}_{LPV}^+$ garante as seguintes regras de inferência:*

- (i) $(RM_{\Box_r}) \quad \varphi \rightarrow \psi \vdash \Box_r \varphi \rightarrow \Box_r \psi;$
- (ii) $(RM_{\Box_l}) \quad \varphi \rightarrow \psi \vdash \Box_l \varphi \rightarrow \Box_l \psi;$
- (iii) $(RM_{\Diamond_r}) \quad \varphi \rightarrow \psi \vdash \Diamond_r \varphi \rightarrow \Diamond_r \psi;$
- (iv) $(RM_{\Diamond_l}) \quad \varphi \rightarrow \psi \vdash \Diamond_l \varphi \rightarrow \Diamond_l \psi;$
- (v) $(RE_{\Box_r}) \quad \varphi \leftrightarrow \psi \vdash \Box_r \varphi \leftrightarrow \Box_r \psi;$
- (vi) $(RE_{\Box_l}) \quad \varphi \leftrightarrow \psi \vdash \Box_l \varphi \leftrightarrow \Box_l \psi;$
- (vii) $(RE_{\Diamond_r}) \quad \varphi \leftrightarrow \psi \vdash \Diamond_r \varphi \leftrightarrow \Diamond_r \psi;$
- (viii) $(RE_{\Diamond_l}) \quad \varphi \leftrightarrow \psi \vdash \Diamond_l \varphi \leftrightarrow \Diamond_l \psi.$

Demonstração:

$$(i) \quad \varphi \rightarrow \psi \vdash \Box_r \varphi \rightarrow \Box_r \psi$$

$$1. \quad \varphi \rightarrow \psi$$

$$2. \quad \Box_r(\varphi \rightarrow \psi)$$

$$3. \quad \Box_r(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box_r \varphi \rightarrow \Box_r \psi)$$

$$4. \quad \Box_r \varphi \rightarrow \Box_r \psi$$

Hipótese

(RN) em (1)

$(Ax1)$

(MP) em (2) e (3)

$$(ii) \quad \varphi \rightarrow \psi \vdash \Box_l \varphi \rightarrow \Box_l \psi$$

$$1. \quad \varphi \rightarrow \psi$$

$$2. \quad \Box_l(\varphi \rightarrow \psi)$$

$$3. \quad \Box_l(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box_l \varphi \rightarrow \Box_l \psi)$$

$$4. \quad \Box_l \varphi \rightarrow \Box_l \psi$$

Hipótese

(RN) em (1)

$(Ax1)$

(MP) em (2) e (3)

$$(iii) \quad \varphi \rightarrow \psi \vdash \Diamond_r \varphi \rightarrow \Diamond_r \psi$$

$$1. \quad \varphi \rightarrow \psi$$

$$2. \quad \neg \psi \rightarrow \neg \varphi$$

$$3. \quad \Box_r \neg \psi \rightarrow \Box_r \neg \varphi$$

$$4. \quad \neg \Box_r \neg \varphi \rightarrow \neg \Box_r \neg \psi$$

$$5. \quad \Diamond_r \varphi \rightarrow \Diamond_r \psi$$

Hipótese

LPC em (1)

$(RM_{\Box_r})$ em (2)

LPC em (3)

Definição de $\Box_r$ em (4)

$$(iv) \quad \varphi \rightarrow \psi \vdash \Diamond_l \varphi \rightarrow \Diamond_l \psi$$

$$1. \quad \varphi \rightarrow \psi$$

$$2. \quad \neg \psi \rightarrow \neg \varphi$$

$$3. \quad \Box_l \neg \psi \rightarrow \Box_l \neg \varphi$$

$$4. \quad \neg \Box_l \neg \varphi \rightarrow \neg \Box_l \neg \psi$$

Hipótese

LPC em (1)

$(RM_{\Box_l})$ em (2)

LPC em (3)

$$5. \Diamond_l \varphi \rightarrow \Diamond_l \psi$$

Definição de $\Box_l$ em (4)

De (v) - (viii): inicialmente, basta aplicarmos a definição de $\leftrightarrow$, indicada durante o desenvolvimento da linguagem proposicional da $\mathbf{LPV}^+$, isto é, $\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$; em seguida, aplicar a simplificação - da Lógica Proposicional Clássica - na fórmula, gerando $\varphi \rightarrow \psi$ e $\psi \rightarrow \varphi$; por fim, aplicar as regras de inferência já demonstradas em (i)-(iv). $\square$

Proposição 29 As fórmulas listadas são teoremas em $\mathcal{H}_{\mathbf{LPV}^+}$:

- (i) $(B_{\Diamond_r}) \Diamond_r \Box_l \varphi \rightarrow \varphi$;
- (ii) $(B_{\Diamond_l}) \Diamond_l \Box_r \varphi \rightarrow \varphi$;
- (iii) $(M_{\Box_r}) \Box_r(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Box_r \varphi \wedge \Box_r \psi$;
- (iv) $(M_{\Box_l}) \Box_l(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Box_l \varphi \wedge \Box_l \psi$;
- (v) $(M_{\Diamond_r}) \Diamond_r \varphi \vee \Diamond_r \psi \rightarrow \Diamond_r(\varphi \vee \psi)$;
- (vi) $(M_{\Diamond_l}) \Diamond_l \varphi \vee \Diamond_l \psi \rightarrow \Diamond_l(\varphi \vee \psi)$;
- (vii) $(C_{\Box_r}) \Box_r \varphi \wedge \Box_r \psi \rightarrow \Box_r(\varphi \wedge \psi)$;
- (viii) $(C_{\Box_l}) \Box_l \varphi \wedge \Box_l \psi \rightarrow \Box_l(\varphi \wedge \psi)$;
- (ix) $(C_{\Diamond_r}) \Diamond_r(\varphi \vee \psi) \rightarrow \Diamond_r \varphi \vee \Diamond_r \psi$;
- (x) $(C_{\Diamond_l}) \Diamond_l(\varphi \vee \psi) \rightarrow \Diamond_l \varphi \vee \Diamond_l \psi$;
- (xi) $(R_{\Box_r}) \Box_r(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \Box_r \varphi \wedge \Box_r \psi$;
- (xii) $(R_{\Box_l}) \Box_l(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \Box_l \varphi \wedge \Box_l \psi$;
- (xiii) $(R_{\Diamond_r}) \Diamond_r \varphi \vee \Diamond_r \psi \leftrightarrow \Diamond_r(\varphi \vee \psi)$;
- (xiv) $(R_{\Diamond_l}) \Diamond_l \varphi \vee \Diamond_l \psi \leftrightarrow \Diamond_l(\varphi \vee \psi)$.

Demonstração:

$$(i) \Diamond_r \Box_l \varphi \rightarrow \varphi$$

$$1. \varphi \rightarrow \Box_r \Diamond_l \varphi$$

(Ax3)

$$2. \neg \varphi \rightarrow \Box_r \Diamond_l \neg \varphi$$

Substituição em (1)

$$3. \neg \Box_r \Diamond_l \neg \varphi \rightarrow \neg \neg \varphi$$

LPC em (2)

$$4. \neg \neg \Diamond_r \neg \neg \Box_l \neg \neg \varphi \rightarrow \neg \neg \varphi$$

Definição de $\Box_r$ e $\Diamond_l$

$$5. \Diamond_r \Box_l \varphi \rightarrow \varphi$$

LPC em (4)

$$(ii) \Diamond_l \Box_r \varphi \rightarrow \varphi$$

$$1. \varphi \rightarrow \Box_l \Diamond_r \varphi$$

(Ax3)

$$2. \neg \varphi \rightarrow \Box_l \Diamond_r \neg \varphi$$

Substituição em (1)

$$3. \neg \Box_l \Diamond_r \neg \varphi \rightarrow \neg \neg \varphi$$

LPC em (2)

$$4. \neg \neg \Diamond_l \neg \Diamond_r \neg \varphi \rightarrow \neg \neg \varphi$$

Definição de $\Box_l$

$$5. \Diamond_l \Box_r \varphi \rightarrow \varphi$$

LPC e Definição de $\Box_l$ em (4)

$$(iii) \Box_r(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Box_r \varphi \wedge \Box_r \psi$$

1. $\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$ *LPC*
2. $\varphi \wedge \psi \rightarrow \psi$ *LPC*
3. $\Box_r(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Box_r\varphi$ *(RM $\Box_r$) em (1)*
4. $\Box_r(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Box_r\psi$ *(RM $\Box_r$) em (2)*
5. $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \sigma) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \wedge \sigma)))$ *LPC*
6. $(\Box_r(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Box_r\varphi) \rightarrow ((\Box_r(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Box_r\psi) \rightarrow$ *Substituição em (5)*
 $(\Box_r(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\Box_r\varphi \wedge \Box_r\psi)))$
7. $(\Box_r(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Box_r\psi) \rightarrow (\Box_r(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\Box_r\varphi \wedge \Box_r\psi))$ *(MP) em (3) e (6)*
8. $\Box_r(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Box_r\varphi \wedge \Box_r\psi$ *(MP) em (4) e (7)*

$$(iv) \Box_l(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Box_l\varphi \wedge \Box_l\psi$$

1. $\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$ *LPC*
2. $\varphi \wedge \psi \rightarrow \psi$ *LPC*
3. $\Box_l(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Box_l\varphi$ *(RM $\Box_l$) em (1)*
4. $\Box_l(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Box_l\psi$ *(RM $\Box_l$) em (2)*
5. $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \sigma) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \wedge \sigma)))$ *LPC*
6. $(\Box_l(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Box_l\varphi) \rightarrow ((\Box_l(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Box_l\psi) \rightarrow (\Box_l(\varphi \wedge$ *Substituição em (5)*
 $\psi) \rightarrow (\Box_l\varphi \wedge \Box_l\psi)))$
7. $(\Box_l(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Box_l\psi) \rightarrow (\Box_l(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\Box_l\varphi \wedge \Box_l\psi))$ *(MP) em (3) e (6)*
8. $\Box_l(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Box_l\varphi \wedge \Box_l\psi$ *(MP) em (4) e (7)*

$$(v) \Diamond_r\varphi \vee \Diamond_r\psi \rightarrow \Diamond_r(\varphi \vee \psi)$$

1. $\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$ *LPC*
2. $\psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$ *LPC*
3. $\Diamond_r\varphi \rightarrow \Diamond_r(\varphi \vee \psi)$ *(RM $\Diamond_r$) em (1)*
4. $\Diamond_r\psi \rightarrow \Diamond_r(\varphi \vee \psi)$ *(RM $\Diamond_r$) em (2)*
5. $(\varphi \rightarrow \sigma) \rightarrow ((\psi \rightarrow \sigma) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \sigma))$ *LPC*
6. $(\Diamond_r\varphi \rightarrow \Diamond_r(\varphi \vee \psi)) \rightarrow ((\Diamond_r\psi \rightarrow \Diamond_r(\varphi \vee \psi)) \rightarrow ((\Diamond_r\varphi \vee$ *Substituição em (5)*
 $\Diamond_r\psi) \rightarrow \Diamond_r(\varphi \vee \psi)))$
7. $(\Diamond_r\psi \rightarrow \Diamond_r(\varphi \vee \psi)) \rightarrow ((\Diamond_r\varphi \vee \Diamond_r\psi) \rightarrow \Diamond_r(\varphi \vee \psi))$ *(MP) em (3) e (6)*
8. $\Diamond_r\varphi \vee \Diamond_r\psi \rightarrow \Diamond_r(\varphi \vee \psi)$ *(MP) em (4) e (7)*

$$(vi) \Diamond_l\varphi \vee \Diamond_l\psi \rightarrow \Diamond_l(\varphi \vee \psi)$$

1. $\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$ *LPC*
2. $\psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$ *LPC*
3. $\Diamond_l\varphi \rightarrow \Diamond_l(\varphi \vee \psi)$ *(RM $\Diamond_l$) em (1)*
4. $\Diamond_l\psi \rightarrow \Diamond_l(\varphi \vee \psi)$ *(RM $\Diamond_l$) em (2)*
5. $(\varphi \rightarrow \sigma) \rightarrow ((\psi \rightarrow \sigma) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \sigma))$ *LPC*

6. $(\Diamond_I \phi \rightarrow \Diamond_I(\phi \vee \psi)) \rightarrow ((\Diamond_I \psi \rightarrow \Diamond_I(\phi \vee \psi)) \rightarrow ((\Diamond_I \phi \vee \Diamond_I \psi) \rightarrow \Diamond_I(\phi \vee \psi)))$ *Substituição em (5)*
 7. $(\Diamond_I \psi \rightarrow \Diamond_I(\phi \vee \psi)) \rightarrow ((\Diamond_I \phi \vee \Diamond_I \psi) \rightarrow \Diamond_I(\phi \vee \psi))$ *(MP) em (3) e (6)*
 8. $\Diamond_r \phi \vee \Diamond_r \psi \rightarrow \Diamond_r(\phi \vee \psi)$ *(MP) em (4) e (7)*

$$(vii) \Box_r \phi \wedge \Box_r \psi \rightarrow \Box_r(\phi \wedge \psi)$$

1. $(\phi \wedge \psi) \rightarrow \phi$ *LPC*
 2. $(\Box_r \phi \wedge \Box_r \psi) \rightarrow \Box_r \phi$ *Substituição em (1)*
 3. $\Diamond_I(\Box_r \phi \wedge \Box_r \psi) \rightarrow \Diamond_I \Box_r \phi$ *(RM $_{\Diamond_I}$) em (2)*
 4. $\Diamond_I \Box_r \phi \rightarrow \phi$ *Prop. 29 (ii)*
 5. $\Diamond_I(\Box_r \phi \wedge \Box_r \psi) \rightarrow \phi$ *LPC em (3) e (4)*
 6. $(\phi \wedge \psi) \rightarrow \psi$ *LPC*
 7. $(\Box_r \phi \wedge \Box_r \psi) \rightarrow \Box_r \psi$ *Substituição em (6)*
 8. $\Diamond_I(\Box_r \phi \wedge \Box_r \psi) \rightarrow \Diamond_I \Box_r \psi$ *(RM $_{\Diamond_I}$) em (7)*
 9. $\Diamond_I \Box_r \psi \rightarrow \psi$ *Substituição em (4)*
 10. $\Diamond_I(\Box_r \phi \wedge \Box_r \psi) \rightarrow \psi$ *LPC em (8) e (9)*
 11. $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\phi \rightarrow \sigma) \rightarrow (\phi \rightarrow (\psi \wedge \sigma)))$ *LPC*
 12. $(\Diamond_I(\Box_r \phi \wedge \Box_r \psi) \rightarrow \phi) \rightarrow ((\Diamond_I(\Box_r \phi \wedge \Box_r \psi) \rightarrow \psi) \rightarrow (\Diamond_I(\Box_r \phi \wedge \Box_r \psi) \rightarrow (\phi \wedge \psi)))$ *Substituição em (11)*
 13. $(\Diamond_I(\Box_r \phi \wedge \Box_r \psi) \rightarrow \psi) \rightarrow (\Diamond_I(\Box_r \phi \wedge \Box_r \psi) \rightarrow (\phi \wedge \psi))$ *(MP) em (5) e (12)*
 14. $\Diamond_I(\Box_r \phi \wedge \Box_r \psi) \rightarrow (\phi \wedge \psi)$ *(MP) em (10) e (13)*
 15. $\Box_r \Diamond_I(\Box_r \phi \wedge \Box_r \psi) \rightarrow \Box_r(\phi \wedge \psi)$ *(RM $_{\Box_r}$) em (14)*
 16. $\phi \rightarrow \Box_r \Diamond_I \phi$ *(Ax3)*
 17. $\Box_r \phi \wedge \Box_r \psi \rightarrow \Box_r \Diamond_I(\Box_r \phi \wedge \Box_r \psi)$ *Substituição em (16)*
 18. $\Box_r \phi \wedge \Box_r \psi \rightarrow \Box_r(\phi \wedge \psi)$ *LPC em (15) e (17)*

$$(viii) \Box_I \phi \wedge \Box_I \psi \rightarrow \Box_I(\phi \wedge \psi)$$

1. $(\phi \wedge \psi) \rightarrow \phi$ *LPC*
 2. $(\Box_I \phi \wedge \Box_I \psi) \rightarrow \Box_I \phi$ *Substituição em (1)*
 3. $\Diamond_r(\Box_I \phi \wedge \Box_I \psi) \rightarrow \Diamond_r \Box_I \phi$ *(RM $_{\Diamond_r}$) em (2)*
 4. $\Diamond_r \Box_I \phi \rightarrow \phi$ *Prop. 29 (i)*
 5. $\Diamond_r(\Box_I \phi \wedge \Box_I \psi) \rightarrow \phi$ *LPC em (3) e (4)*
 6. $(\phi \wedge \psi) \rightarrow \psi$ *LPC*
 7. $(\Box_I \phi \wedge \Box_I \psi) \rightarrow \Box_I \psi$ *Substituição em (6)*
 8. $\Diamond_r(\Box_I \phi \wedge \Box_I \psi) \rightarrow \Diamond_r \Box_I \psi$ *(RM $_{\Diamond_r}$) em (7)*
 9. $\Diamond_r \Box_I \psi \rightarrow \psi$ *Substituição em (4)*
 10. $\Diamond_r(\Box_I \phi \wedge \Box_I \psi) \rightarrow \psi$ *LPC em (8) e (9)*
 11. $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\phi \rightarrow \sigma) \rightarrow (\phi \rightarrow (\psi \wedge \sigma)))$ *LPC*

12. $(\Diamond_r(\Box_l\varphi \wedge \Box_l\psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow ((\Diamond_r(\Box_l\varphi \wedge \Box_l\psi) \rightarrow \psi) \rightarrow (\Diamond_r(\Box_l\varphi \wedge \Box_l\psi) \rightarrow (\varphi \wedge \psi)))$ *Substituição em (11)*
13. $(\Diamond_r(\Box_l\varphi \wedge \Box_l\psi) \rightarrow \psi) \rightarrow (\Diamond_r(\Box_l\varphi \wedge \Box_l\psi) \rightarrow (\varphi \wedge \psi))$ *(MP) em (5) e (12)*
14. $\Diamond_r(\Box_l\varphi \wedge \Box_l\psi) \rightarrow (\varphi \wedge \psi)$ *(MP) em (10) e (13)*
15. $\Box_l\Diamond_r(\Box_l\varphi \wedge \Box_l\psi) \rightarrow \Box_l(\varphi \wedge \psi)$ *(RM $\Box_l$) em (14)*
16. $\varphi \rightarrow \Box_l\Diamond_r\varphi$ *(Ax3)*
17. $\Box_l\varphi \wedge \Box_l\psi \rightarrow \Box_l\Diamond_r(\Box_l\varphi \wedge \Box_l\psi)$ *Substituição em (16)*
18. $\Box_l\varphi \wedge \Box_l\psi \rightarrow \Box_l(\varphi \wedge \psi)$ *LPC em (15) e (17)*

$$(ix) \Diamond_r(\varphi \vee \psi) \rightarrow \Diamond_r\varphi \vee \Diamond_r\psi$$

1. $\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$ *LPC*
2. $\Diamond_r\varphi \rightarrow (\Diamond_r\varphi \vee \Diamond_r\psi)$ *Substituição em (1)*
3. $\Box_l\Diamond_r\varphi \rightarrow \Box_l(\Diamond_r\varphi \vee \Diamond_r\psi)$ *(RM $\Box_l$) em (2)*
4. $\varphi \rightarrow \Box_l\Diamond_r\varphi$ *(Ax3)*
5. $\varphi \rightarrow \Box_l(\Diamond_r\varphi \vee \Diamond_r\psi)$ *LPC em (3) e (4)*
6. $\psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$ *LPC*
7. $\Diamond_r\psi \rightarrow (\Diamond_r\varphi \vee \Diamond_r\psi)$ *Substituição em (6)*
8. $\Box_l\Diamond_r\psi \rightarrow \Box_l(\Diamond_r\varphi \vee \Diamond_r\psi)$ *(RM $\Box_l$) em (7)*
9. $\psi \rightarrow \Box_l\Diamond_r\psi$ *Substituição em (4)*
10. $\psi \rightarrow \Box_l(\Diamond_r\varphi \vee \Diamond_r\psi)$ *LPC em (8) e (9)*
11. $(\varphi \rightarrow \sigma) \rightarrow ((\psi \rightarrow \sigma) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \sigma))$ *LPC*
12. $(\varphi \rightarrow \Box_l(\Diamond_r\varphi \vee \Diamond_r\psi)) \rightarrow ((\psi \rightarrow \Box_l(\Diamond_r\varphi \vee \Diamond_r\psi)) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \Box_l(\Diamond_r\varphi \vee \Diamond_r\psi)))$ *Substituição em (11)*
13. $(\psi \rightarrow \Box_l(\Diamond_r\varphi \vee \Diamond_r\psi)) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \Box_l(\Diamond_r\varphi \vee \Diamond_r\psi))$ *(MP) em (5) e (12)*
14. $(\varphi \vee \psi) \rightarrow \Box_l(\Diamond_r\varphi \vee \Diamond_r\psi)$ *(MP) em (10) e (13)*
15. $\Diamond_r(\varphi \vee \psi) \rightarrow \Diamond_r\Box_l(\Diamond_r\varphi \vee \Diamond_r\psi)$ *(RM $\Diamond_r$) em (14)*
16. $\Diamond_r\Box_l\varphi \rightarrow \varphi$ *Prop. 29 (i)*
17. $\Diamond_r\Box_l(\Diamond_r\varphi \vee \Diamond_r\psi) \rightarrow \Diamond_r\varphi \vee \Diamond_r\psi$ *Substituição em (16)*
18. $\Diamond_r(\varphi \vee \psi) \rightarrow \Diamond_r\varphi \vee \Diamond_r\psi$ *LPC em (15) e (17)*

$$(x) \Diamond_l(\varphi \vee \psi) \rightarrow \Diamond_l\varphi \vee \Diamond_l\psi$$

1. $\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$ *LPC*
2. $\Diamond_l\varphi \rightarrow (\Diamond_l\varphi \vee \Diamond_l\psi)$ *Substituição em (1)*
3. $\Box_r\Diamond_l\varphi \rightarrow \Box_r(\Diamond_l\varphi \vee \Diamond_l\psi)$ *(RM $\Box_r$) em (2)*
4. $\varphi \rightarrow \Box_r\Diamond_l\varphi$ *(Ax3)*
5. $\varphi \rightarrow \Box_r(\Diamond_l\varphi \vee \Diamond_l\psi)$ *LPC em (3) e (4)*
6. $\psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$ *LPC*
7. $\Diamond_l\psi \rightarrow (\Diamond_l\varphi \vee \Diamond_l\psi)$ *Substituição em (6)*

8. $\Box_r \Diamond_l \psi \rightarrow \Box_r (\Diamond_l \phi \vee \Diamond_l \psi)$ ($RM_{\Box_r}$) em (7)
9. $\psi \rightarrow \Box_r \Diamond_l \psi$ Substituição em (4)
10. $\psi \rightarrow \Box_r (\Diamond_l \phi \vee \Diamond_l \psi)$ LPC em (8) e (9)
11. $(\phi \rightarrow \sigma) \rightarrow ((\psi \rightarrow \sigma) \rightarrow ((\phi \vee \psi) \rightarrow \sigma))$ LPC
12. $(\phi \rightarrow \Box_r (\Diamond_l \phi \vee \Diamond_l \psi)) \rightarrow ((\psi \rightarrow \Box_r (\Diamond_l \phi \vee \Diamond_l \psi)) \rightarrow ((\phi \vee \psi) \rightarrow \Box_r (\Diamond_l \phi \vee \Diamond_l \psi)))$ Substituição em (11)
13. $(\psi \rightarrow \Box_r (\Diamond_l \phi \vee \Diamond_l \psi)) \rightarrow ((\phi \vee \psi) \rightarrow \Box_r (\Diamond_l \phi \vee \Diamond_l \psi))$ (MP) em (5) e (12)
14. $(\phi \vee \psi) \rightarrow \Box_r (\Diamond_l \phi \vee \Diamond_l \psi)$ (MP) em (10) e (13)
15. $\Diamond_l (\phi \vee \psi) \rightarrow \Diamond_l \Box_r (\Diamond_l \phi \vee \Diamond_l \psi)$ ($RM_{\Diamond_l}$) em (14)
16. $\Diamond_l \Box_r \phi \rightarrow \phi$ Prop. 29 (ii)
17. $\Diamond_l \Box_r (\Diamond_l \phi \vee \Diamond_l \psi) \rightarrow \Diamond_l \phi \vee \Diamond_l \psi$ Substituição em (16)
18. $\Diamond_l (\phi \vee \psi) \rightarrow \Diamond_l \phi \vee \Diamond_l \psi$ LPC em (15) e (17)

$$(xi) \Box_r (\phi \wedge \psi) \leftrightarrow \Box_r \phi \wedge \Box_r \psi$$

Direto de Prop. 29 (iii) e (vii).

$$(xii) \Box_l (\phi \wedge \psi) \leftrightarrow \Box_l \phi \wedge \Box_l \psi$$

Direto de Prop. 29 (iv) e (viii).

$$(xiii) \Diamond_r \phi \vee \Diamond_r \psi \leftrightarrow \Diamond_r (\phi \vee \psi)$$

Direto de Prop. 29 (v) e (ix).

$$(xiv) \Diamond_l \phi \vee \Diamond_l \psi \leftrightarrow \Diamond_l (\phi \vee \psi)$$

Direto de Prop. 29 (vi) e (x).

□

Demais resultados na proposição que segue.

Proposição 30 Em $\mathcal{H}_{LPV}^+$, as fórmulas a seguir são teoremas:

- (i) $\Box_r \Diamond_l \Box_r \phi \leftrightarrow \Box_r \phi$;
- (ii) $\Box_l \Diamond_r \Box_l \phi \leftrightarrow \Box_l \phi$;
- (iii) $\Diamond_r \Box_l \Diamond_r \phi \leftrightarrow \Diamond_r \phi$;
- (iv) $\Diamond_l \Box_r \Diamond_l \phi \leftrightarrow \Diamond_l \phi$;
- (v) $\Box_r \Diamond_l \phi \leftrightarrow \Diamond_r \Diamond_l \phi$;
- (vi) $\Box_l \Diamond_r \phi \leftrightarrow \Diamond_l \Diamond_r \phi$.

Demonstração:

$$(i) \Box_r \Diamond_l \Box_r \phi \leftrightarrow \Box_r \phi$$

1. $\Diamond_l \Box_r \phi \rightarrow \phi$ Prop. 29 (ii)
2. $\Box_r \Diamond_l \Box_r \phi \rightarrow \Box_r \phi$ ($RM_{\Box_r}$) em (1)
3. $\phi \rightarrow \Box_r \Diamond_l \phi$ (Ax3)

$$4. \Box_r \varphi \rightarrow \Box_r \Diamond_l \Box_r \varphi$$

$$5. \Box_r \varphi \leftrightarrow \Box_r \Diamond_l \Box_r \varphi$$

Substituição em (3)

LPC em (2) e (4)

$$(ii) \Box_l \Diamond_r \Box_l \varphi \leftrightarrow \Box_l \varphi$$

$$1. \Diamond_r \Box_l \varphi \rightarrow \varphi$$

$$2. \Box_l \Diamond_r \Box_l \varphi \rightarrow \Box_l \varphi$$

$$3. \varphi \rightarrow \Box_l \Diamond_r \varphi$$

$$4. \Box_l \varphi \rightarrow \Box_l \Diamond_r \Box_l \varphi$$

$$5. \Box_l \varphi \leftrightarrow \Box_l \Diamond_r \Box_l \varphi$$

Prop. 29 (i)

(RM $_{\Box_l}$) em (1)

(Ax3)

Substituição em (3)

LPC em (2) e (4)

$$(iii) \Diamond_r \Box_l \Diamond_r \varphi \leftrightarrow \Diamond_r \varphi$$

$$1. \Diamond_r \Box_l \varphi \rightarrow \varphi$$

$$2. \Diamond_r \Box_l \Diamond_r \varphi \rightarrow \Diamond_r \varphi$$

$$3. \varphi \rightarrow \Box_l \Diamond_r \varphi$$

$$4. \Diamond_r \varphi \rightarrow \Diamond_r \Box_l \Diamond_r \varphi$$

$$5. \Diamond_r \varphi \leftrightarrow \Diamond_r \Box_l \Diamond_r \varphi$$

Prop. 29 (i)

Substituição em (1)

(Ax3)

(RM $_{\Diamond_r}$) em (3)

LPC em (2) e (4)

$$(iv) \Diamond_l \Box_r \Diamond_l \varphi \leftrightarrow \Diamond_l \varphi$$

$$1. \Diamond_l \Box_r \varphi \rightarrow \varphi$$

$$2. \Diamond_l \Box_r \Diamond_l \varphi \rightarrow \Diamond_l \varphi$$

$$3. \varphi \rightarrow \Box_r \Diamond_l \varphi$$

$$4. \Diamond_l \varphi \rightarrow \Diamond_l \Box_r \Diamond_l \varphi$$

$$5. \Box_l \varphi \leftrightarrow \Box_l \Diamond_r \Box_l \varphi$$

Prop. 29 (ii)

Substituição em (1)

(Ax3)

(RM $_{\Diamond_l}$) em (3)

LPC em (2) e (4)

$$(v) \Box_r \Diamond_l \varphi \leftrightarrow \Diamond_r \Diamond_l \varphi$$

$$1. \Box_r \varphi \rightarrow \Diamond_r \varphi$$

$$2. \Box_r \Diamond_l \varphi \rightarrow \Diamond_r \Diamond_l \varphi$$

$$3. \Diamond_r \Diamond_l \varphi \rightarrow \Box_r \Diamond_l \varphi$$

$$4. \Box_r \Diamond_l \varphi \leftrightarrow \Diamond_r \Diamond_l \varphi$$

(Ax2)

Substituição em (1)

(Ax4)

LPC em (2) e (3)

$$(vi) \Box_l \Diamond_r \varphi \leftrightarrow \Diamond_l \Diamond_r \varphi$$

$$1. \Box_l \varphi \rightarrow \Diamond_l \varphi$$

$$2. \Box_l \Diamond_r \varphi \rightarrow \Diamond_l \Diamond_r \varphi$$

$$3. \Diamond_l \Diamond_r \varphi \rightarrow \Box_l \Diamond_r \varphi$$

$$4. \Box_l \Diamond_r \varphi \leftrightarrow \Diamond_l \Diamond_r \varphi$$

(Ax2)

Substituição em (1)

(Ax4)

LPC em (2) e (3)

Os teoremas demonstrados até então, para a axiomática da $\mathbf{LPV}^+$, não são os únicos. Resultados suplementares podem ser facilmente encontrados, e adaptados, em Goranko, Montanari e Sciavicco (2003) e de Chaochen e Hansen (1997; 2004). Além, é claro, da literatura em lógicas modais como Chellas (1980), Girle (2000) e Blackburn, Rijke e Venema (2001). Afinal, como vimos que $\mathcal{H}_{\mathbf{LPV}^+}$ é um sistema *KDB*, teoremas e demais resultados relativos a esse tipo de sistema podem ser trazidos para o caso da axiomática da $\mathbf{LPV}^+$.

2.2 O ambiente algébrico

Findada a apresentação da $\mathbf{LPV}^+$, iniciamos com a parte algébrica mais geral do trabalho.

2.2.1 Álgebra de Boole

Álgebras de Boole correspondem aos modelos algébricos da Lógica Proposicional Clássica (LPC)². São ao menos duas as possíveis maneiras de se definir uma álgebra de Boole, pode-se optar pela caracterização via relação de ordem ou por meio das operações algébricas (Morgado, 1962; Burris; Sankappanavar, 1981). Partiremos da caracterização algébrica, porém, obteremos a equivalência entre as duas abordagens no decorrer de nossos desenvolvimentos.

Definição 31 (Burris; Sankappanavar, 1981, p. 71) *Uma identidade de tipo $\mathcal{F}$ sobre X é uma expressão da forma*

$$p \approx q,$$

onde $p, q \in T(X)$.

Definição 32 (Burris; Sankappanavar, 1981, p. 71) *Uma álgebra $\mathfrak{A}$ de tipo $\mathcal{F}$ satisfaz uma identidade*

$$p(x_1, \dots, x_n) \approx q(x_1, \dots, x_n),$$

se para qualquer escolha de $a_1, \dots, a_n \in A$ temos que:

$$p^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = q^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n).$$

Se isso ocorre, dizemos que a identidade é verdadeira ou satisfeita em $\mathfrak{A}$. Nesse caso, escrevemos

$$\mathfrak{A} \models p(x_1, \dots, x_n) \approx q(x_1, \dots, x_n),$$

ou de forma resumida

$$\mathfrak{A} \models p \approx q.$$

² Esse resultado pode ser facilmente consultado em (Bueno-Soler, 2004).

Definição 33 (Burris; Sankappanavar, 1981, p. 4) Uma álgebra $\langle L, \vee, \wedge \rangle$, sendo L um conjunto não-vazio munido de duas operações binárias $\vee, \wedge : L \times L \rightarrow L$, é chamada de reticulado se satisfaz as seguintes identidades:

- (i) $x \vee y \approx y \vee x$ e $x \wedge y \approx y \wedge x$; (Comutatividade)
- (ii) $x \vee (y \vee z) \approx (x \vee y) \vee z$ e $x \wedge (y \wedge z) \approx (x \wedge y) \wedge z$; (Associatividade)
- (iii) $x \approx x \vee (x \wedge y)$ e $x \approx x \wedge (x \vee y)$. (Absorção)

No trabalho de Burris e Sankappanavar (1981) é incluído também a lei da idempotência para a definição de um reticulado:

$$x \vee x \approx x \text{ e } x \wedge x \approx x. \quad (2.11)$$

Porém, em Morgado (1962, p. 114) vemos que as únicas identidades independentes são as leis da comutatividade, associatividade e absorção; a idempotência pode ser derivada a partir da lei de absorção.

A seguir, veremos a abordagem de reticulados via relação de ordem. Como a relação parcial já foi definida na Seção 2.1, Definição 1, não incluiremos a definição aqui novamente. Apenas relembremos que uma ordem parcial é uma relação que satisfaz a reflexividade, transitividade e antissimetria.

Observação 34 Na definição de identidade de Burris e Sankappanavar dada no início da atual subseção, vimos que uma álgebra satisfaz uma identidade $p(x_1, \dots, x_n) \approx q(x_1, \dots, x_n)$ sempre que $p(a_1, \dots, a_n) = q(a_1, \dots, a_n)$ para qualquer escolha de elementos $a_1, \dots, a_n$ do domínio. Portanto, daqui em diante, o leitor poderá se deparar com passagens onde é usado $=$ no lugar de $\approx$. Espera-se o não comprometimento do entendimento, pois estaremos considerando sempre que a igualdade seja válida para “qualquer” elemento do domínio que substituirmos na fórmula, e. g. ao invés de evocar que a identidade $x \vee y \approx y \vee x$ é satisfeita, apenas diremos que $x \vee y = y \vee x$ para qualquer x e y da estrutura.

Proposição 35 Se $\langle P, \leq \rangle$ é uma estrutura parcialmente ordenada, então em $\langle P, \leq \rangle$ valem as seguintes leis:

- (i) para todo $x \in P$, $x \leq a \implies x \leq b$ se, e somente se, $a \leq b$;
- (ii) para todo $x \in P$, $x \leq a \iff x \leq b$ se, e somente se, $a = b$;
- (iii) para todo $x \in P$, $b \leq x \implies a \leq x$ se, e somente se, $a \leq b$;
- (iv) para todo $x \in P$, $b \leq x \iff a \leq x$ se, e somente se, $a = b$.

Demonstração: (i) $[\implies]$ Como a condição vale para todo x , então vale para $x = a$. Assim, se $x = a$, então $a \leq a \implies a \leq b$ e, como $a \leq a$, então $a \leq b$.

$[\impliedby]$ Se $x \leq a$, como $a \leq b$, então $x \leq b$.

(ii) $[\implies]$ Como a condição vale para todo x , então vale para $x = a$ e $x = b$. Assim, se $x = a$, então $a \leq a \iff a \leq b$ e, como $a \leq a$, conclui-se que $a \leq b$.

Por outro lado, se $x = b$, então $b \leq a \iff b \leq b$ e, como $b \leq b$, conclui-se que $b \leq a$.

Dado que $a \leq b$ e $b \leq a$, temos que $a = b$.

$[\Leftarrow]$ Se $a = b$, então a e b partilham exatamente as mesmas propriedades e, então, $x \leq a \iff x \leq b$.

(iii) $[\implies]$ Como a condição vale para todo x , então vale para $x = b$. Assim, se $x = b$, então $b \leq b \implies a \leq b$ e, como $b \leq b$, então $a \leq b$.

$[\Leftarrow]$ Se $b \leq x$, como $a \leq b$, então $a \leq x$.

(iv) $[\implies]$ Como a condição vale para todo x , então vale para $x = a$ e $x = b$. Assim, se $x = b$, então $b \leq b \iff a \leq b$ e, como $b \leq b$, conclui-se que $a \leq b$.

Por outro lado, se $x = a$, então $b \leq a \iff a \leq a$ e, como $a \leq a$, conclui-se que $b \leq a$.

Dado que $a \leq b$ e $b \leq a$, temos que $a = b$.

$[\Leftarrow]$ Se $a = b$, então a e b partilham exatamente as mesmas propriedades e, então, $b \leq x \iff a \leq x$. $\square$

Definição 36 (Burris; Sankappanavar, 1981, p. 5) Seja A um subconjunto de um conjunto parcialmente ordenado P .

- (i) Um elemento $s \in P$ é um limitante superior de A se $a \leq s$ para todo $a \in A$.
- (ii) Um elemento $i \in P$ é um limitante inferior de A se $i \leq a$ para todo $a \in A$.
- (iii) Um elemento $s \in P$ é o menor limitante superior de A se s é um limitante superior de A e $a \leq s'$, para todo $a \in A$, implica que $s \leq s'$.
- (iv) Um elemento $i \in P$ é o maior limitante inferior de A se i é um limitante inferior de A e $i' \leq a$, para todo $a \in A$, implica que $i' \leq i$.

Considerando $\{x, y\} \subseteq P$ e P um conjunto parcialmente ordenado, chamaremos também o menor limitante superior de $\{x, y\}$ por supremo (denotado por $\sup\{x, y\}$), e o maior limitante inferior de $\{x, y\}$ por ínfimo (denotado por $\inf\{x, y\}$) (Birkhoff, 1948, p. 16).

Proposição 37 Em um conjunto parcialmente ordenado P , se o supremo e ínfimo de $\{x, y\} \subseteq P$ existem, então são únicos.

Demonstração: Suponha s_1 e s_2 supremos de $\{x, y\}$. Pela definição de supremo, $s_1 \leq s_2$, mas também $s_2 \leq s_1$. Portanto, decorre da antissimetria de $\leq$ que $s_1 = s_2$.

Uma prova análoga pode ser construída para o caso do ínfimo. $\square$

As operações binárias $\vee$ e $\wedge$ de um reticulado algébrico podem ser vistas como o supremo e o ínfimo entre dois elementos de uma estrutura parcialmente ordenada, assim como o supremo e o ínfimo são duas operações binárias que satisfazem a comutatividade, associatividade e absorção.

Proposição 38 Cada estrutura algébrica de reticulado $\langle P, \vee, \wedge \rangle$ determina um conjunto parcialmente ordenado P onde $x \vee y = \sup\{x, y\}$ e $x \wedge y = \inf\{x, y\}$ em P .

Demonstração: A demonstração se divide em dois passos: (i) em P há uma relação de ordem parcial e (ii) $x \vee y = \sup\{x, y\}$ e $x \wedge y = \inf\{x, y\}$.

Definimos uma relação $\leq$ em P do seguinte modo, para $x, y \in P$:

$$x \leq y \iff x \vee y = y. \quad (2.12)$$

(i) Como a idempotência é satisfeita em uma estrutura algébrica de reticulado (derivada a partir das leis de absorção), então $x \leq x$ e a relação $\leq$ é reflexiva.

Suponha que $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \vee y = y$ e $y \vee z = z$. Assim, segue que $x \vee z = x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z = y \vee z = z$, portanto, $x \leq z$ e a relação é transitiva.

Por fim, suponha que $x \leq y$ e $y \leq x$. Então $x \vee y = y$, $y \vee x = x$ e $x = y$. A relação é antissimétrica.

Neste caso, $\leq$ pode ser vista como uma relação de ordem parcial.

Para o item (ii), precisaremos do fato de que $x \vee y = y \iff x \wedge y = x$: $x \vee y = y \implies x \wedge (x \vee y) = x \wedge y \implies x = x \wedge y$ e $x \wedge y = x \implies (x \wedge y) \vee y = x \vee y \implies y = x \vee y$.

Assim, $x \vee y = x \iff x \wedge y = x$.

(ii) Pela absorção $(x \vee y) \wedge y = y$ e $(x \vee y) \wedge x = x$, então $x, y \leq x \vee y$ e $x \vee y$ é um limitante superior de $\{x, y\}$. Suponha um $z \in P$ tal que $x \leq z$ e $y \leq z$ (z é também um limitante superior). Segue que $y \vee z = z \implies x \vee (y \vee z) = x \vee z \implies x \vee (y \vee z) = z \implies (x \vee y) \vee z = z$ e, então, $x \vee y \leq z$. Isto é, em outras palavras, $x \vee y$ é o supremo de $\{x, y\}$.

Pela absorção $(x \wedge y) \vee y = y$ e $(x \wedge y) \vee x = x$, portanto $x \wedge y \leq x, y$ e $x \wedge y$ é um limitante inferior de $\{x, y\}$. Agora, suponha um $z \in P$ tal que $z \leq x$ e $z \leq y$ (z é um limitante inferior). Segue que $z \wedge x = z \implies (z \wedge x) \wedge y = z \wedge y \implies (z \wedge x) \wedge y = z \implies z \wedge (x \wedge y) = z$ e, então, $z \leq x \wedge y$. Em outras palavras, $x \wedge y$ é o ínfimo de $\{x, y\}$. $\square$

Proposição 39 Cada estrutura parcialmente ordenada $\langle P, \leq \rangle$, em que para todo $x, y \in P$ existe o $\inf\{x, y\}$ e o $\sup\{x, y\}$ em P , determina uma álgebra de reticulado.

Demonstração: Considere $\langle P, \vee, \wedge \rangle$ de modo que $\vee : \langle x, y \rangle \mapsto \sup\{x, y\}$ e $\wedge : \langle x, y \rangle \mapsto \inf\{x, y\}$.

(Associatividade) Seja $(x \wedge y) \wedge z = \wedge\{(x \wedge y), z\}$ e $x \wedge (y \wedge z) = \wedge\{x, (y \wedge z)\}$.

Da definição de $\wedge$, então $\wedge\{(x \wedge y), z\} \leq x \wedge y$ e $\wedge\{(x \wedge y), z\} \leq z$. Portanto, $\wedge\{(x \wedge y), z\} \leq x$ e $\wedge\{(x \wedge y), z\} \leq y$, dado que $x \wedge y = \wedge\{x, y\} \leq x, y$ e $\leq$ é transitiva. Por outro lado, $\wedge\{x, (y \wedge z)\} \leq x$ e $\wedge\{x, (y \wedge z)\} \leq y \wedge z$. Assim, $\wedge\{x, (y \wedge z)\} \leq y$ e $\wedge\{x, (y \wedge z)\} \leq z$, dado que $y \wedge z = \wedge\{y, z\} \leq y, z$ e $\leq$ é transitiva.

Por fim, temos que $\wedge\{(x \wedge y), z\} \leq x, y, z$ e $\wedge\{x, (y \wedge z)\} \leq x, y, z$ e, então, eles são limitantes inferiores de x, y e z . Agora, como $\wedge$ é o maior limitante inferior, então $\wedge\{(x \wedge y), z\} \leq \wedge\{x, (y \wedge z)\}$, mas também $\wedge\{x, (y \wedge z)\} \leq \wedge\{(x \wedge y), z\}$. Pela antissimetria de $\leq$ obtemos que $\wedge\{(x \wedge y), z\} = \wedge\{x, (y \wedge z)\}$ e, portanto, para o $\wedge$ a associatividade é válida.

A demonstração da associatividade do $\vee$ pode ser obtida dualmente à demonstração dada para o $\wedge$.

(Comutatividade) $x \wedge y = \wedge\{x, y\} = \wedge\{y, x\} = y \wedge x$ e $x \vee y = \vee\{x, y\} = \vee\{y, x\} = y \vee x$.
 Dado que $\{x, y\} = \{y, x\}$, então o supremo de um deve ser igual ao supremo do outro, de maneira similar acontece para o ínfimo. Logo, a comutatividade é válida.

(Absorção) Existem duas possibilidades para $\wedge\{x, y\}$: $\wedge\{x, y\} = x$ ou $\wedge\{x, y\} = y$. Se $\wedge\{x, y\} = y$, então $\vee\{\wedge\{x, y\}, y\} = \vee\{y, y\} = y$. Por outro lado, se $\wedge\{x, y\} = x$, então $x \leq y$ (dado que o ínfimo é um limitante inferior) e $\vee\{\wedge\{x, y\}, y\} = \vee\{x, y\} = y$ e a absorção é válida. $\square$

Segue dos resultados acima as duas possibilidades de se definir um reticulado.

Corolário 40 Se $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ é um reticulado algébrico e $\leq$ uma relação em L definida como em (2.12), então para $x, y, z \in L$:

- (i) $x \leq y \iff x \wedge y = x \iff x \vee y = y$;
- (ii) $x \leq x \vee y$ e $y \leq x \vee y$; (Limitante Superior)
- (iii) $x \wedge y \leq x$ e $x \wedge y \leq y$; (Limitante Inferior)
- (iv) se $x \leq z$ e $y \leq z$, então $x \vee y \leq z$; (Menor Limitante Superior)
- (v) se $z \leq x$ e $z \leq y$, então $z \leq x \wedge y$. (Maior Limitante Inferior)

Demonstração: Segue inteiramente do fato de que todo reticulado algébrico determina um poset munido de supremo e ínfimo. Isto é, segue da Proposição 38 e de sua respectiva demonstração. $\square$

Proposição 41 Seja $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ um reticulado algébrico e $\leq$ uma relação em L definida como em (2.12), para $w, x, y, z \in L$:

- (i) se $x \leq y$ e $w \leq z$, então $x \vee w \leq y \vee z$;
- (ii) se $x \leq y$ e $w \leq z$, então $x \wedge w \leq y \wedge z$.

Demonstração: (i) Pela hipótese $x \leq y$ e $w \leq z$. Portanto, $x \vee y = y$, $x \wedge y = x$, $w \vee z = z$ e $w \wedge z = w$. Assim, $x \vee y = y \implies (x \vee y) \vee (w \vee z) = y \vee (w \vee z) \implies (x \vee y) \vee (w \vee z) = y \vee z \implies (x \vee w) \vee (y \vee z) = y \vee z$.

(ii) Se $x \leq y$ e $w \leq z$, então $x \vee y = y$, $x \wedge y = x$, $w \vee z = z$ e $w \wedge z = w$. Portanto, $x \wedge y = x \implies (x \wedge y) \wedge (w \wedge z) = x \wedge (w \wedge z) \implies (x \wedge y) \wedge (w \wedge z) = x \wedge w \implies (x \wedge w) \wedge (y \wedge z) = x \wedge w$. $\square$

Definição 42 (Burris; Sankappanavar, 1981, p. 10) Um reticulado distributivo é um reticulado o qual satisfaz uma das seguintes identidades:

- (i) $x \wedge (y \vee z) \approx (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$; (Distributividade de $\wedge$ em $\vee$)
- (ii) $x \vee (y \wedge z) \approx (x \vee y) \wedge (x \vee z)$. (Distributividade de $\vee$ em $\wedge$)

Como Burris e Sankappanavar (1981, p. 10) pontuam, para definir um reticulado distributivo basta apenas uma das condições acima, dado que um reticulado satisfaz (i) se, e somente se, satisfaz (ii)³.

³ Ver Teorema 3.2. de Burris e Sankappanavar (1981, p. 10).

Definição 43 (Burris; Sankappanavar, 1981, p. 25) *Uma álgebra $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1 \rangle$, sendo L um conjunto não-vazio munido de duas operações binárias $\vee, \wedge : L \times L \rightarrow L$ e duas constantes $0, 1 \in L$, é chamada de reticulado limitado se, além de $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ ser um reticulado, satisfaz as seguintes identidades:*

- (i) $x \wedge 0 \approx 0$; (Elemento Absorvente de $\wedge$)
- (ii) $x \vee 1 \approx 1$. (Elemento Absorvente de $\vee$)

Assim como feito para o reticulado algébrico, podemos pensar em uma caracterização para o reticulado limitado por meio da relação de ordem.

Definição 44 (Morgado, 1961, p. 99) *O elemento h de uma estrutura parcialmente ordenada $\langle P, \leq \rangle$ é dito ser um minorante se, e somente se, $h \leq x$ para todo $x \in P$.*

Definição 45 (Morgado, 1961, p. 99) *O elemento h de uma estrutura parcialmente ordenada $\langle P, \leq \rangle$ é dito ser um majorante se, e somente se, $x \leq h$ para todo $x \in P$.*

Proposição 46 *Em qualquer estrutura parcialmente ordenada, se existem o minorante e majorante, então eles são únicos.*

Demonstração: *Suponha uma estrutura parcialmente ordenada $\langle P, \leq \rangle$ em que existam dois elementos m_1 e m_2 de tal forma que $m_1 \leq x$ e $m_2 \leq x$ para todo $x \in P$. Desse modo, $m_1 \leq m_2$ e $m_2 \leq m_1$. Donde segue que $m_1 = m_2$ pela antissimetria da ordem parcial.*

Analogamente obtém-se a unicidade do majorante. □

A proposição legitima a definição do primeiro elemento (zero) e último elemento (um) em um *poset*.

Definição 47 (Morgado, 1962, p. 28) *Se existem em um conjunto parcialmente ordenado P :*

- (i) *um elemento 0 tal que, para todo $x \in P$, $0 \leq x$, diz-se que 0 é o primeiro elemento da estrutura;*
- (ii) *um elemento 1 tal que, para todo $x \in P$, $x \leq 1$, diz-se que 1 é o último elemento da estrutura.*

Destaquemos a condição obtida para um reticulado algébrico durante o Corolário 40 (ou ainda, durante demonstração da Proposição 38):

$$x \leq y \iff x \vee y = y \iff x \wedge y = x, \quad (2.13)$$

considerando o resultado acima, derivamos facilmente que $0 \leq x$ e $x \leq 1$ são condições equivalentes às condições $x \wedge 0 \approx 0$ e $x \vee 1 \approx 1$ de um reticulado algébrico limitado. Ou seja, podemos pensar no reticulado algébrico limitado como um *poset* com o supremo e ínfimo definidos para cada par de elementos desse *poset*, onde existem o menor e maior elemento do sistema - inclusive, a estrutura algébrica toma o nome de limitado pois a mesma é superiormente limitada, por conta de existir o majorante, e é inferiormente limitada, por existir o minorante (Morgado, 1961, p. 99).

Proposição 48 Se $\mathfrak{L} = \langle L, \vee, \wedge, 0, 1 \rangle$ é um reticulado algébrico limitado e $\leq$ uma ordem parcial em L vide (2.12), então:

- (i) para qualquer $x \in L$, $0 \leq x$; (Menor Elemento)
- (ii) para qualquer $x \in L$, $x \leq 1$; (Maior Elemento)
- (iii) $\mathfrak{L} \models x \vee 0 \approx x$; (Elemento Neutro de $\vee$)
- (iv) $\mathfrak{L} \models x \wedge 1 \approx x$. (Elemento Neutro de $\wedge$)

Demonstração: Imediato. Todos os itens decorrem da aplicação do Corolário 40 (i) na Definição 43 de reticulado limitado. $\square$

Definição 49 (Burris; Sankappanavar, 1981, p. 25) Uma álgebra $\langle L, \vee, \wedge, \sim, 0, 1 \rangle$, sendo L um conjunto não-vazio munido de duas operações binárias $\vee, \wedge : L \times L \rightarrow L$, uma operação unária $\sim : L \rightarrow L$ e duas constantes $0, 1 \in L$, é chamada de álgebra de Boole se, além de $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1 \rangle$ ser um reticulado distributivo e limitado, satisfaz as seguintes identidades:

- (i) $x \wedge \sim x \approx 0$;
- (ii) $x \vee \sim x \approx 1$.

Outras abordagens, como a de Rasiowa (1974, p. 112), chamam o reticulado limitado de reticulado com zero e um. Para Rasiowa (1974, p. 112), em um reticulado com zero e um, um elemento $x \in L$ é dito ser complementado se existe $y \in L$ tal que $(c_1) x \wedge y = 0$ e $(c_2) x \vee y = 1$.

Proposição 50 Seja $\mathfrak{L} = \langle L, \vee, \wedge, 0, 1 \rangle$ um reticulado distributivo com zero e um (limitado). Se $x \in L$ é complementado, então existe um único elemento em L que satisfaz (c_1) e (c_2) .

Demonstração: Suponha que $x \wedge a = 0$, $x \wedge b = 0$, $x \vee a = 1$ e $x \vee b = 1$. Devemos obter que $a = b$. Vejamos, $a = a \wedge 1 = a \wedge (x \vee b) = (a \wedge x) \vee (a \wedge b) = 0 \vee (a \wedge b) = (x \wedge b) \vee (a \wedge b) = (x \vee a) \wedge b = 1 \wedge b = b$. $\square$

Assim, dada a unicidade desse elemento, por vezes atribuímos a ele o nome de complemento, ou ainda, atribuímos a ele uma operação unária - como feito por Burris e Sankappanavar (1981).

Se todo elemento do reticulado é complementado, podemos chamar a estrutura de reticulado complementado. Logo, usualmente evocamos álgebras de Boole apenas por reticulado distributivo e complementado; sendo que ao atribuímos a ele o nome de complementado, já estamos pressupondo que ele seja limitado.

Proposição 51 Seja $\mathfrak{L} = \langle L, \vee, \wedge, \sim, 0, 1 \rangle$ uma álgebra de Boole e $\leq$ uma relação de ordem parcial em L vide (2.12), então:

- (i) $\mathfrak{L} \models \sim(x \vee y) \approx \sim x \wedge \sim y$ e $\mathfrak{L} \models \sim(x \wedge y) \approx \sim x \vee \sim y$; (Leis de DeMorgan)
- (ii) $\sim 0 = 1$;
- (iii) $\sim 1 = 0$;
- (iv) $\mathfrak{L} \models \sim \sim x \approx x$; (Involução)
- (v) para quaisquer $x, y \in L$: $x \leq y \implies \sim y \leq \sim x$; (Inverte Ordem)

(vi) para quaisquer $x, y, z \in L$: $x \wedge y \leq z \iff x \leq \sim y \vee z$. (Shunting-rule)

Demonstração: (i) Para mostrar que $\sim(x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$, basta verificar que $(x \vee y) \vee (\sim x \wedge \sim y) = 1$ e $(x \vee y) \wedge (\sim x \wedge \sim y) = 0$, dado que, se este for o caso, então $(\sim x \wedge \sim y)$ é complemento de $(x \vee y)$, i. e., $\sim(x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$.

Primeiro passo, $(x \vee y) \vee (\sim x \wedge \sim y) = [(x \vee y) \vee \sim x] \wedge [(x \vee y) \vee \sim y] = [(x \vee \sim x) \vee y] \wedge [x \vee (y \vee \sim y)] = [1 \vee y] \wedge [x \vee 1] = 1 \wedge 1 = 1$. Segundo passo, $(x \vee y) \wedge (\sim x \wedge \sim y) = [x \wedge (\sim x \wedge \sim y)] \vee [y \wedge (\sim x \wedge \sim y)] = [(x \wedge \sim x) \wedge \sim y] \vee [\sim x \wedge (y \wedge \sim y)] = [0 \wedge \sim y] \vee [\sim x \wedge 0] = 0 \vee 0 = 0$.

A outra identidade segue dualmente.

(ii) Segue que $0 \vee 1 = 1$ e $0 \wedge 1 = 0$. Portanto, pela definição de complemento, 1 é complemento de 0, isto é, $\sim 0 = 1$.

(iii) Análogo ao item (ii), segue que $1 \vee 0 = 1$ e $1 \wedge 0 = 0$. Portanto, pela definição de complemento, 0 é complemento de 1, isto é, $\sim 1 = 0$.

(iv) Segue da definição de complemento. Naturalmente, se $\sim x$ é complemento de x , então x também é complemento de $\sim x$. Em outras palavras, $\sim\sim x = x$.

(v) $x \leq y \implies x \vee y = y \implies \sim(x \vee y) = \sim y \implies \sim x \wedge \sim y = \sim y \implies \sim y \leq \sim x$.

(vi) $x \wedge y \leq z \implies (x \wedge y) \vee \sim y \leq z \vee \sim y \implies (x \vee \sim y) \wedge (y \vee \sim y) \leq \sim y \vee z \implies (x \vee \sim y) \wedge 1 \leq \sim y \vee z \implies x \vee \sim y \leq \sim y \vee z$. Como $x \leq x \vee \sim y$, então $x \leq \sim y \vee z$.

Por outro lado, $x \leq \sim y \vee z \implies x \wedge y \leq (\sim y \vee z) \wedge y \implies x \wedge y \leq (\sim y \wedge y) \vee (z \wedge y) \implies x \wedge y \leq 0 \vee (z \wedge y) \implies x \wedge y \leq z \wedge y$. Como $z \wedge y \leq z$, então $x \wedge y \leq z$. $\square$

Muitos são os resultados em álgebras de Boole. Por conseguinte, elencamos nesta subseção apenas algumas propriedades mais básicas e suficientes para os desenvolvimentos posteriores.

2.2.2 Semianeis

Definição 52 (Burris; Sankappanavar, 1981, p. 27) Uma álgebra $\mathfrak{M} = \langle M, *, \varepsilon \rangle$, sendo M um conjunto não-vazio munido de uma operação binária $*$: $M \times M \rightarrow M$ e uma constante $\varepsilon \in M$, é chamada de monoide se satisfaz as seguintes identidades:

(i) $x * (y * z) \approx (x * y) * z$; (Associatividade)

(ii) $x * \varepsilon \approx x$ e $\varepsilon * x \approx x$. (Elemento Neutro)

Quando é o caso da operação $*$ ser, também, comutativa, i. e.

$$\mathfrak{M} \models x * y \approx y * x, \quad (2.14)$$

então a estrutura é chamada de monoide comutativo, por vezes também chamada de monoide abeliano.

Definição 53 (Golan, 1999, p. 1) Uma álgebra $\mathfrak{S} = \langle S, +, \circ, 0, 1' \rangle$, em que S é um conjunto não-vazio, $+, \circ: S \times S \rightarrow S$ são operações binárias e $0, 1' \in S$ são constantes, é dita um semianel se:

- (i) o reduto $\langle S, +, 0 \rangle$ é um monoide comutativo;
- (ii) o reduto $\langle S, \circ, 1' \rangle$ é um monoide;
- (iii) $\mathfrak{S} \models x \circ (y + z) \approx (x \circ y) + (x \circ z)$ e $\mathfrak{S} \models (x + y) \circ z \approx (x \circ z) + (y \circ z)$; (*Distributividade*)
- (iv) $\mathfrak{S} \models x \circ 0 \approx 0$ e $\mathfrak{S} \models 0 \circ x \approx 0$. (*Elemento Absorvente*)

Se a operação $+$ do semianel for também idempotente, i. e.

$$\mathfrak{S} \models x + x \approx x, \quad (2.15)$$

então a estrutura recebe o nome de semianel aditivamente idempotente (Golan, 1999, p. 3).

A partir de uma estrutura de semianel aditivamente idempotente $\mathfrak{S}$, podemos pensar na inclusão de uma relação de ordem parcial do seguinte modo, para quaisquer $x, y \in S$:

$$x \leq^{\mathfrak{S}} y \iff x + y = y. \quad (2.16)$$

Vejamos que, de fato, a definição caracteriza uma relação de ordem parcial.

Proposição 54 *Seja $\mathfrak{S}$ um semianel aditivamente idempotente:*

- (i) a relação $\leq^{\mathfrak{S}}$ é uma ordem parcial;
- (ii) 0 é o menor elemento (minorante) para a ordem $\leq^{\mathfrak{S}}$.

Demonstração: (i) *Pela idempotência, segue-se que $x + x = x$ e, então, vale a reflexividade $x \leq x$.*

Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x + y = y$ e $y + z = z$. Segue daí que $x + z = x + (y + z) = (x + y) + z = y + z = z$, e assim $x \leq z$, donde obtemos a transitividade.

Se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x + y = y$ e $x + y = x$. Segue que $x = x + y = y$ e vale a antissimetria. Logo, conclui-se que $\leq$ é uma relação de ordem parcial.

(ii) *Como 0 é neutro para $+$, então para qualquer $x \in S$ tem-se que $0 + x = x$ e, portanto, $0 \leq x$ para todo e qualquer $x \in S$. $\square$*

Em um semianel idempotente $\mathfrak{S}$, a constante 0 é o menor elemento (ou ainda, $\mathfrak{S}$ é limitada inferiormente), porém $1'$ pode não ser o maior elemento.

Proposição 55 *Se $\langle S, +, \circ, 0, 1' \rangle$ é um semianel aditivamente idempotente e $\leq$ uma relação definida para esta estrutura como em (2.16), então para quaisquer $w, x, y, z \in S$:*

- (i) $x \leq y \implies x + z \leq y + z$;
- (ii) $x \leq y \implies z + x \leq z + y$;
- (iii) $x \leq y \implies x \circ z \leq y \circ z$;
- (iv) $x \leq y \implies z \circ x \leq z \circ y$;
- (v) se $x \leq y$ e $w \leq z$, então $x \circ w \leq y \circ z$;
- (vi) se $x \leq y$ e $w \leq z$, então $w \circ x \leq z \circ y$.

Demonstração: (i) $x \leq y \implies x + y = y \implies (x + y) + z = y + z \implies (x + y) + (z + z) = y + z \implies (x + z) + (y + z) = y + z \implies x + z \leq y + z$.

(ii) $x \leq y \implies x + y = y \implies z + (x + y) = z + y \implies (z + z) + (x + y) = z + y \implies (z + x) + (z + y) = z + y \implies z + x \leq z + y$.

(iii) $x \leq y \implies x + y = y \implies (x + y) \circ z = y \circ z \implies (x \circ z) + (y \circ z) = y \circ z \implies x \circ z \leq y \circ z$.

(iv) $x \leq y \implies x + y = y \implies z \circ (x + y) = z \circ y \implies (z \circ x) + (z \circ y) = z \circ y \implies z \circ x \leq z \circ y$.

(v) Como $x \leq y$ e $w \leq z$, então $x \circ w \leq y \circ w$ e $y \circ w \leq y \circ z$. Pela transitividade da ordem, segue que $x \circ w \leq y \circ z$.

(vi) Como $x \leq y$ e $w \leq z$, então $w \circ x \leq w \circ y$ e $w \circ y \leq z \circ y$. Pela transitividade da ordem, segue que $w \circ x \leq z \circ y$. $\square$

2.2.2.1 Subidentidades e operadores de domínio e codomínio

Definição 56 Em um semianel aditivamente idempotente $\mathfrak{S} = \langle S, +, \circ, 0, 1' \rangle$, considerando uma relação de ordem parcial $\leq$ em $\mathfrak{S}$, denomina-se subidentidade todo elemento $a \in S$ tal que $a \leq 1'$.

Para a definição dos elementos tidos como subidentidades é suficiente que a estrutura seja ao menos um semianel idempotente, dado que faz-se necessário a relação de ordem.

Consideraremos $Sub(S)$ o conjunto de todas as subidentidades⁴ de um semianel aditivamente idempotente $\mathfrak{S}$. Assim,

$$Sub(S) = \{a \in S : a \leq 1'\}. \quad (2.17)$$

Definidas as subidentidades em um semianel aditivamente idempotente, é possível introduzirmos as operações de domínio e codomínio.

Definição 57 Seja $\mathfrak{S} = \langle S, +, \circ, \ulcorner, 0, 1' \rangle$ uma estrutura algébrica em que o reduto $\langle S, +, \circ, 0, 1' \rangle$ é um semianel aditivamente idempotente, $\leq$ uma ordem parcial em $\mathfrak{S}$ e considere $Sub(S)$ o conjunto de subidentidades de $\mathfrak{S}$. Assim, o operador de domínio $\ulcorner : S \rightarrow S$ é um operador unário que satisfaz as seguintes condições, para quaisquer $x \in S$ e $a \in Sub(S)$:

(i) $x \leq \ulcorner x \circ x$;

(ii) $\ulcorner (a \circ x) \leq a$.

Definição 58 O operador de domínio $\ulcorner : S \rightarrow S$ é dito modal se, e somente se, além de ser um operador de domínio, satisfaz também a seguinte propriedade, para quaisquer $x, y \in S$:

(iii) $\ulcorner (x \circ \ulcorner y) \leq \ulcorner (x \circ y)$.

Observação 59 A partir de agora, reservaremos x, y, z para elementos arbitrários de S e a, b, c para elementos necessariamente de $Sub(S)$.

⁴ Em alguns trabalhos, como em Desharnais e Möller (2001), Desharnais, Möller e Struth (2003), Desharnais, Möller e Struth (2004), os autores nomeiam esses elementos por *type* ou *tests*. Como nos baseamos, principalmente, em Maddux (2006), optou-se por chamar esses elementos de subidentidades.

Desharnais, Möller e Struth (2004), e Höfner (2007), colocam o operador de domínio como na definição acima, e no caso do operador também satisfazer a propriedade (iii) $\lceil (x \circ \lceil y) \leq \lceil (x \circ y)$, então o semianel é chamado de semianel modal.

Todavia, existem abordagens levemente distintas na literatura. Höfner e Möller (2008) e Möller (2004, 2007), por exemplo, definem o operador de domínio como um operador que satisfaz as três propriedades, enquanto que Desharnais, Möller e Struth (2003) chamam de pré-domínio se o operador satisfaz apenas as duas primeiras propriedades, e de domínio se também satisfaz a terceira.

A abordagem do presente trabalho segue parcialmente como em Desharnais, Möller e Struth (2004) e Höfner (2007).

Definição 60 *Seja $\mathfrak{S} = \langle S, +, \circ, \lceil, 0, 1' \rangle$ uma estrutura algébrica em que o reduto $\langle S, +, \circ, 0, 1' \rangle$ é um semianel aditivamente idempotente, $\leq$ uma ordem parcial em $\mathfrak{S}$ e considere $\text{Sub}(S)$ o conjunto de subidentidades de $\mathfrak{S}$. Assim, o operador de codomínio $\lceil : S \rightarrow S$ é um operador unário que satisfaz as seguintes condições, para quaisquer $x \in S$ e $a \in \text{Sub}(S)$:*

- (i) $x \leq x \circ x^\lceil$;
- (ii) $(x \circ a)^\lceil \leq a$.

Definição 61 *O operador de codomínio $\lceil : S \rightarrow S$ é dito modal se, e somente se, além de ser um operador de codomínio, satisfaz também a seguinte propriedade, para quaisquer $x, y \in S$:*

- (iii) $(x^\lceil \circ y)^\lceil \leq (x \circ y)^\lceil$.

Vejamos que de ambas as definições de domínio e codomínio é possível obter que o domínio e codomínio são subidentidades.

Proposição 62 *Seja $\mathfrak{S} = \langle S, +, \circ, \lceil, \lceil, 0, 1' \rangle$ um semianel aditivamente idempotente munido de um operador de domínio e codomínio, $\leq$ uma ordem parcial definida em $\mathfrak{S}$ e $\text{Sub}(S)$ o conjunto das subidentidades da estrutura. Em $\mathfrak{S}$, para qualquer $x \in S$, $\{\lceil x, x^\lceil\} \subseteq \text{Sub}(S)$.*

Demonstração: *Das Definições 57 e 60 item (ii), e considerando que $1' \in \text{Sub}(S)$ (dado que $\leq$ é uma ordem parcial e, portanto, $1' \leq 1'$), segue-se que $\lceil (1' \circ x) \leq 1'$ e $(x \circ 1')^\lceil \leq 1'$. Como $1'$ é o elemento neutro para $\circ$, então $\lceil x \leq 1'$ e $x^\lceil \leq 1'$. Logo, $\lceil x, x^\lceil \in \text{Sub}(S)$. $\square$*

2.3 O modelo algébrico

Apresentadas as álgebras de Boole, a estrutura de semianel, os elementos chamados de subidentidade e operadores de domínio e codomínio, temos meios o suficiente para a introdução da álgebra da vizinhança, a estrutura pensada como contraparte algébrica da parte proposicional e modal da Lógica da Vizinhança.

2.3.1 Álgebra da vizinhança

Definição 63 Uma álgebra $\mathfrak{A} = \langle A, \vee, \wedge, \circ, \sim, \ulcorner, \lrcorner, 0, 1, 1' \rangle$, sendo A um conjunto não-vazio munido de três operações binárias $\vee, \wedge, \circ : A \times A \rightarrow A$, três operações unárias $\sim, \ulcorner, \lrcorner : A \rightarrow A$ e três elementos $0, 1$ e $1'$ de A , é chamada de álgebra da vizinhança se, e somente se:

- (i) o reduto $\langle A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1 \rangle$ é uma álgebra de Boole;
- (ii) o reduto $\langle A, \circ, 1' \rangle$ é um monoide;
- (iii) $\mathfrak{A} \models x \circ (y \vee z) \approx (x \circ y) \vee (x \circ z)$ e $\mathfrak{A} \models (y \vee z) \circ x \approx (y \circ x) \vee (z \circ x)$;
- (iv) $\mathfrak{A} \models x \circ 0 \approx 0$ e $\mathfrak{A} \models 0 \circ x \approx 0$;
- (v) $\ulcorner$ e $\lrcorner$ são operadores de domínio e codomínio modais, respectivamente.

Como $\langle A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1 \rangle$ é uma álgebra de Boole, por $\preceq$ entenderemos uma relação de ordem parcial definida como a encontrada na Proposição 38, a saber:

$$x \preceq y \iff x \vee y = y \quad (\iff x \wedge y = x). \quad (2.18)$$

Nota-se ainda que $\langle A, \vee, \circ, 0, 1' \rangle$ é um fragmento da álgebra da vizinhança que satisfaz as condições de uma estrutura de semianel aditivamente idempotente. Desse modo, todos os resultados obtidos para álgebras de Boole e semianéis podem ser trazidos para o caso da álgebra da vizinhança. Dada a relação de ordem parcial $\preceq$ e $\langle A, \vee, \circ, 0, 1' \rangle$ sendo um semianel aditivamente idempotente, consideramos também a existência das subidentidades $\text{Sub}(A)$ da álgebra da vizinhança.

Definição 64 Em uma álgebra da vizinhança $\mathfrak{A}$, para o conjunto $\text{Sub}(A) \subseteq A$, define-se uma operação unária $- : \text{Sub}(A) \rightarrow \text{Sub}(A)$ do modo que segue:

$$-a := \sim a \wedge 1'.$$

Na proposição a seguir, constataremos que $-$ caracteriza precisamente uma operação de complemento para as subidentidades e que ela está bem definida para esse conjunto.

Proposição 65 Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra da vizinhança e $a, b \in \text{Sub}(A) \subseteq A$. As seguintes asserções são válidas:

- (i) $0, 1' \in \text{Sub}(A)$;
- (ii) o conjunto $\text{Sub}(A)$ é fechado para as operações $\vee, \wedge$ e $\circ$;
- (iii) $a \circ b \preceq a \wedge b$;
- (iv) $a \wedge (-a) = 0$ e $a \vee (-a) = 1'$;
- (v) a operação $\circ$ é idempotente em $\text{Sub}(A)$;
- (vi) $a \circ b = a \wedge b$, para todo $a, b \in \text{Sub}(A)$.

Demonstração: (i) Dado o reduto booleano da álgebra da vizinhança, então 0 é o menor elemento e, portanto, $0 \preceq 1'$. Logo, $0 \in \text{Sub}(A)$. Pela reflexividade da ordem, tem-se que $1' \preceq 1'$ e, portanto, $1' \in \text{Sub}(A)$.

(ii) Se $a, b \in \text{Sub}(A) \subseteq A$, então $a \preceq 1'$ e $b \preceq 1'$. Donde segue que $a \vee b \preceq 1'$ e, portanto, $a \vee b \in \text{Sub}(A)$. Por outro lado, $a \wedge b \preceq 1' \wedge 1' = 1'$ e, assim, $a \wedge b \in \text{Sub}(A)$. No caso da operação $\circ$, $a \preceq 1' \implies a \circ b \preceq 1' \circ b$. Como $1'$ é neutro para a operação e $b \preceq 1'$, segue que $a \circ b \preceq b \preceq 1'$. Logo, $a \circ b \preceq 1'$. Assim, pode-se concluir que $\text{Sub}(A)$ é fechado para as operações $\vee$, $\wedge$ e $\circ$.

(iii) $a \preceq 1' \implies a \circ b \preceq 1' \circ b \implies a \circ b \preceq b$ e $b \preceq 1' \implies a \circ b \preceq a \circ 1' \implies a \circ b \preceq a$. Donde segue que $a \circ b \preceq a \wedge b$.

(iv) $a \wedge (-a) = a \wedge (\sim a \wedge 1') = (a \wedge (\sim a)) \wedge 1' = 0 \wedge 1' = 0$.

$a \vee (-a) = a \vee (\sim a \wedge 1') = (a \vee (\sim a)) \wedge (a \vee 1') = 1 \wedge (a \vee 1') = a \vee 1'$. Dado que $a \preceq 1'$, então $a \vee 1' = 1'$.

(v) Como $a \preceq 1'$, então $a \circ a \preceq 1' \circ a = a$. Por outro lado, $a = 1' \circ a = (a \vee (-a)) \circ a = (a \circ a) \vee (-a \circ a)$. Como $a \circ a \preceq a \circ a$ e $-a \circ a \preceq -a \wedge a$ pelo item (iii), segue que $(a \circ a) \vee (-a \circ a) \preceq (a \circ a) \vee (-a \wedge a)$ e, assim, $(a \circ a) \vee (-a \circ a) \preceq (a \circ a) \vee 0 \implies (a \circ a) \vee (-a \circ a) \preceq (a \circ a) \implies a \preceq a \circ a$. Logo, $a \circ a = a$.

(vi) Para demonstrar que $a \circ b = a \wedge b$, mostraremos que $a \wedge b \preceq a \circ b$, dado que já foi demonstrado que $a \circ b \preceq a \wedge b$ no item (iii). Segue que $a \wedge b \preceq a$ e $a \wedge b \preceq b$ implica em $(a \wedge b) \circ (a \wedge b) \preceq a \circ b$. Como vale a idempotência para $\circ$, conclui-se que $a \wedge b \preceq a \circ b$. $\square$

Pela proposição acima, o conjunto $\text{Sub}(A)$ é fechado para as operações $\vee$, $\wedge$ e $\circ$, tem 0 e $1'$ como menor e maior elemento, respectivamente, e nele há definido um operador de complemento. Não somente é definido o complemento em $\text{Sub}(A)$, mas também todo $a \in \text{Sub}(A)$ tem seu complemento em $\text{Sub}(A)$: basta verificarmos que pela definição $-a = \sim a \wedge 1' \preceq 1'$ e, portanto, $-a \in \text{Sub}(A)$. Assim, é possível perceber que em $\text{Sub}(A)$ temos uma álgebra de Boole.

Corolário 66 O fragmento $\langle \text{Sub}(A), \vee(\circ), \wedge, -, 0, 1' \rangle$ de uma álgebra da vizinhança $\mathfrak{A}$ é uma álgebra de Boole.

Demonstração: Consequência da proposição anteriormente apresentada. $\square$

Proposição 67 Em uma álgebra da vizinhança $\mathfrak{A}$, as seguintes afirmações valem para $a, b \in \text{Sub}(A)$ e $x \in A$:

- (i) $(a \wedge b) \circ x = (a \circ x) \wedge (b \circ x)$ e $x \circ (a \wedge b) = (x \circ a) \wedge (x \circ b)$;
- (ii) $\sim(a \circ 1) = -a \circ 1$ e $\sim(1 \circ a) = 1 \circ (-a)$;
- (iii) $x \circ a \preceq x$;
- (iv) $a \circ x \preceq x$;
- (v) $x \preceq x \circ 1$;
- (vi) $x \preceq 1 \circ x$;
- (vii) $1 \circ 1 = 1$.

Demonstração: (i) Vejamos que $a \wedge b \preceq a \implies (a \wedge b) \circ x \preceq a \circ x$ e $a \wedge b \preceq b \implies (a \wedge b) \circ x \preceq b \circ x$. Portanto, $(a \wedge b) \circ x \preceq (a \circ x) \wedge (b \circ x)$. De forma análoga, ocorre que $a \wedge b \preceq a \implies x \circ (a \wedge b) \preceq x \circ a$ e $a \wedge b \preceq b \implies x \circ (a \wedge b) \preceq x \circ b$. Portanto, $x \circ (a \wedge b) \preceq (x \circ a) \wedge (x \circ b)$.

Para este lado da desigualdade não precisamos do fato de a e b serem subidentidades, mas para o outro lado precisamos da condição.

Para o outro lado, $(a \circ x) \wedge (b \circ x) = 1' \circ ((a \circ x) \wedge (b \circ x)) = (a \vee (-a)) \circ ((a \circ x) \wedge (b \circ x)) = (a \circ ((a \circ x) \wedge (b \circ x))) \vee (-a \circ ((a \circ x) \wedge (b \circ x)))$. Como $(a \circ x) \wedge (b \circ x) \preceq b \circ x \implies a \circ ((a \circ x) \wedge (b \circ x)) \preceq a \circ (b \circ x)$ e $(a \circ x) \wedge (b \circ x) \preceq a \circ x \implies -a \circ ((a \circ x) \wedge (b \circ x)) \preceq -a \circ (a \circ x)$, segue que $(a \circ ((a \circ x) \wedge (b \circ x))) \vee (-a \circ ((a \circ x) \wedge (b \circ x))) \preceq (a \circ (b \circ x)) \vee (-a \circ (a \circ x))$. Por fim, $(a \circ (b \circ x)) \vee (-a \circ (a \circ x)) = ((a \circ b) \circ x) \vee ((-a \circ a) \circ x) = ((a \wedge b) \circ x) \vee (0 \circ x) = ((a \wedge b) \circ x) \vee 0 = (a \wedge b) \circ x$ e, assim, $(a \circ x) \wedge (b \circ x) \preceq (a \wedge b) \circ x$.

Para o outro caso, $(x \circ a) \wedge (x \circ b) = ((x \circ a) \wedge (x \circ b)) \circ 1' = ((x \circ a) \wedge (x \circ b)) \circ (b \vee (-b)) = (((x \circ a) \wedge (x \circ b)) \circ b) \vee (((x \circ a) \wedge (x \circ b)) \circ -b)$. De forma análoga ao parágrafo acima, $((x \circ a) \wedge (x \circ b)) \circ b \preceq (x \circ a) \circ b$ e $((x \circ a) \wedge (x \circ b)) \circ -b \preceq (x \circ b) \circ -b$. E como $(x \circ a) \circ b \preceq (x \circ (a \circ b))$ e $(x \circ b) \circ -b \preceq (x \circ (b \circ -b))$, então $(x \circ (a \circ b)) \vee (x \circ (b \circ -b)) = (x \circ (a \wedge b)) \vee (x \circ 0) = (x \circ (a \wedge b)) \vee 0 = x \circ (a \wedge b)$, então $(x \circ a) \wedge (x \circ b) \preceq x \circ (a \wedge b)$.

(ii) Esta demonstração segue dois caminhos, será visto que $(a \circ 1) \vee (-a \circ 1) = 1$ e que $(a \circ 1) \wedge (-a \circ 1) = 0$ e, daí, que $(-a \circ 1)$ é o complemento $(a \circ 1)$, ou ainda, que $\sim(a \circ 1) = (-a \circ 1)$. Assim: $(a \circ 1) \vee (-a \circ 1) = (a \vee (-a)) \circ 1 = 1' \circ 1 = 1$ e $(a \circ 1) \wedge (-a \circ 1) = (a \wedge (-a)) \circ 1 = 0 \circ 1 = 0$.

Analogamente, tem-se que $(1 \circ a) \vee (1 \circ -a) = 1 \circ (a \vee (-a)) = 1 \circ 1' = 1$ e $(1 \circ a) \wedge (1 \circ -a) = 1 \circ (a \wedge (-a)) = 1 \circ 0 = 0$. Assim, conclui-se que $(1 \circ -a)$ é o complemento $(1 \circ a)$, isto é, $\sim(1 \circ a) = (1 \circ -a)$.

(iii) Como $a \in \text{Sub}(A)$, segue que $a \preceq 1' \implies x \circ a \preceq x \circ 1' \implies x \circ a \preceq x$.

(iv) Do mesmo modo, como $a \in \text{Sub}(A)$, segue que $a \preceq 1' \implies a \circ x \preceq 1' \circ x \implies a \circ x \preceq x$.

(v) $1' \preceq 1 \implies x \circ 1' \preceq x \circ 1$. Dado que $1'$ é neutro para $\circ$, então $x \preceq x \circ 1$.

(vi) $1' \preceq 1 \implies 1' \circ x \preceq 1 \circ x$. Como $1'$ é neutro para $\circ$, então $x \preceq 1 \circ x$.

(vii) Certamente $1 \circ 1 \preceq 1$. Por outro lado, utilizando os itens anteriores $1 \preceq 1 \circ 1$ e, portanto, $1 = 1 \circ 1$. $\square$

Proposição 68 Se $\mathfrak{A}$ é uma álgebra da vizinhança, então valem as seguintes afirmações, para $x \in A$ e $a \in \text{Sub}(A)$:

(i) $\lceil x \rceil \preceq a \implies x \preceq a \circ x$ se, e somente se, $x \preceq \lceil x \circ x \rceil$;

(ii) $x \preceq a \circ x \implies \lceil x \rceil \preceq a$ se, e somente se, $\lceil a \circ x \rceil \preceq a$.

Demonstração: (i) $[\implies]$ Como $\lceil x \rceil \preceq \lceil x \rceil$ e, pela hipótese, $\lceil x \rceil \preceq \lceil x \rceil \implies x \preceq \lceil x \circ x \rceil$, então $x \preceq \lceil x \circ x \rceil$.

$[\impliedby]$ Se $\lceil x \rceil \preceq a$, então $\lceil x \circ x \rceil \preceq a \circ x$. Como, por hipótese, $x \preceq \lceil x \circ x \rceil$, pela transitividade de $\preceq$, obtém-se que $x \preceq a \circ x$.

(ii) $[\implies]$ Certamente $a \circ x \preceq a \circ x$ e, pela idempotência, segue-se que $a \circ x \preceq (a \circ a) \circ x$ e, pela associatividade, que $a \circ x \preceq a \circ (a \circ x)$. Utilizando a hipótese, conclui-se que $\lceil a \circ x \rceil \preceq a$.

$[\impliedby]$ Como $a \in \text{Sub}(A)$, então $a \preceq 1'$. Assim, $a \circ x \preceq 1' \circ x$ e como $1'$ é neutro para a operação $\circ$, então $a \circ x \preceq x$. Dado que $x \preceq a \circ x$, então $x = a \circ x$. Pela hipótese $\lceil a \circ x \rceil \preceq a$ e, portanto, $\lceil x \rceil \preceq a$. $\square$

Decorre do resultado acima que uma outra possibilidade para se definir o operador de domínio seria pela junção dos itens (i) e (ii):

$$x \preceq a \circ x \iff \lceil x \preceq a. \quad (2.19)$$

Simetricamente, obtém-se esse resultado para o operador de codomínio.

Proposição 69 *Se $\mathfrak{A}$ é uma álgebra da vizinhança, então valem as seguintes afirmações, para $x \in A$ e $a \in \text{Sub}(A)$:*

(i) $x^\top \preceq a \implies x \preceq x \circ a$ se, e somente se, $x \preceq x \circ x^\top$;

(ii) $x \preceq x \circ a \implies x^\top \preceq a$ se, e somente se, $(x \circ a)^\top \preceq a$.

Demonstração: (i) $[\implies]$ Como $x^\top \preceq x^\top$, então, pela hipótese, $x^\top \preceq x^\top \implies x \preceq x \circ x^\top$ e, portanto, temos que $x \preceq x \circ x^\top$.

$[\impliedby]$ Se $x^\top \preceq a$, então $x \circ x^\top \preceq x \circ a$. Como, pela hipótese, $x \preceq x \circ x^\top$, com a transitividade de $\preceq$ obtém-se que $x \preceq x \circ a$.

(ii) $[\implies]$ Considerando que $x \circ a \preceq x \circ a$, pela idempotência de $\circ$, segue que $x \circ a \preceq x \circ (a \circ a)$ e, pela associatividade, $x \circ a \preceq (x \circ a) \circ a$. Utilizando a hipótese, conclui-se que $(x \circ a)^\top \preceq a$.

$[\impliedby]$ Como $a \in \text{Sub}(A)$, então $a \preceq 1'$. Assim, $x \circ a \preceq x \circ 1'$ e como $1'$ é neutro para a operação $\circ$, então $x \circ a \preceq x$. Dado que $x \preceq x \circ a$, então $x = x \circ a$. Pela hipótese $(x \circ a)^\top \preceq a$ e, portanto, $x^\top \preceq a$. $\square$

Como consequência do resultado acima, a junção dos itens (i) e (ii) culminam em uma nova propriedade e possibilidade de se definir o operador de codomínio:

$$x^\top \preceq a \iff x \preceq x \circ a. \quad (2.20)$$

A seguir, demonstraremos uma outra propriedade que nos será útil no decorrer dos desenvolvimentos.

Proposição 70 *Dada uma álgebra de vizinhança $\mathfrak{A}$, $x \in A$ e $a \in \text{Sub}(A)$:*

(i) $\lceil x \preceq a \iff -a \circ x \preceq 0$;

(ii) $x^\top \preceq a \iff x \circ -a \preceq 0$.

Demonstração: (i) Dado que $\lceil x \preceq a \iff x \preceq a \circ x$, como resultado da Proposição 68, resta-nos mostrar que $x \preceq a \circ x \iff -a \circ x \preceq 0$.

$[\implies]$ $x \preceq a \circ x \implies -a \circ x \preceq -a \circ (a \circ x) \implies -a \circ x \preceq (-a \circ a) \circ x \implies -a \circ x \preceq 0 \circ x \implies -a \circ x \preceq 0$;

$[\impliedby]$ $-a \circ x \preceq 0 \implies (a \circ x) \vee (-a \circ x) \preceq (a \circ x) \vee 0 \implies (a \vee -a) \circ x \preceq a \circ x \implies 1' \circ x \preceq a \circ x \implies x \preceq a \circ x$.

(ii) Dado que $x^\top \preceq a \iff x \preceq x \circ a$, como resultado da Proposição 69, resta-nos mostrar que $x \preceq x \circ a \iff x \circ -a \preceq 0$.

$$\begin{aligned}
& [\implies] x \preceq x \circ a \implies x \circ -a \preceq (x \circ a) \circ -a \implies x \circ -a \preceq x \circ (a \circ -a) \implies x \circ -a \preceq x \circ 0 \implies \\
& x \circ -a \preceq 0; \\
& [\impliedby] x \circ -a \preceq 0 \implies (x \circ a) \vee (x \circ -a) \preceq (x \circ a) \vee 0 \implies x \circ (a \vee -a) \preceq x \circ a \implies x \circ 1' \preceq \\
& x \circ a \implies x \preceq x \circ a. \quad \square
\end{aligned}$$

Com esses resultados e definições, demonstraremos a validade de algumas propriedades das álgebras da vizinhança relativas aos operadores de domínio e codomínio.

Proposição 71 *Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra da vizinhança e $\ulcorner : A \rightarrow A$ um operador de domínio modal em $\mathfrak{A}$. Para quaisquer $x, y \in A$ e $a \in \text{Sub}(A) \subseteq A$:*

- (i) $\ulcorner x \preceq 0 \iff x \preceq 0$;
- (ii) $\ulcorner a = a$;
- (iii) $\ulcorner(\ulcorner x) = \ulcorner x$;
- (iv) $\ulcorner 0 = 0$;
- (v) $\ulcorner(-a) = -\ulcorner a$;
- (vi) $x = \ulcorner x \circ x$;
- (vii) $x \preceq \ulcorner x \circ 1$;
- (viii) $\ulcorner(x \vee y) = \ulcorner x \vee \ulcorner y$;
- (ix) $x \preceq y \implies \ulcorner x \preceq \ulcorner y$;
- (x) $\ulcorner(x \wedge y) \preceq \ulcorner x \wedge \ulcorner y$;
- (xi) $\ulcorner(a \circ x) = a \circ \ulcorner x$;
- (xii) $\ulcorner(x \circ y) \preceq \ulcorner(x \circ \ulcorner y)$;
- (xiii) $\ulcorner(x \circ y) = \ulcorner(x \circ \ulcorner y)$;
- (xiv) $\ulcorner 1 = 1'$;
- (xv) $-\ulcorner x \preceq \ulcorner(\sim x)$.

Demonstração: (i) Como $x \preceq a \circ x \iff \ulcorner x \preceq a$, para $a = 0$, tem-se que $\ulcorner x \preceq 0 \iff x \preceq 0 \circ x \iff x \preceq 0$.

(ii) Da Definição 57 (i), para $x = a$, tem-se que $a \preceq \ulcorner a \circ a$. Como a é subidentidade, então $a \preceq 1'$ e, assim, $\ulcorner a \circ a \preceq \ulcorner a \circ 1' \implies \ulcorner a \circ a \preceq \ulcorner a$. Como $a \preceq \ulcorner a \circ a$ e $\ulcorner a \circ a \preceq \ulcorner a$, conclui-se que $a \preceq \ulcorner a$.

Por outro lado, da Definição 57 (ii), $\ulcorner(a \circ 1') \preceq a$ e como $a \circ 1' = a$, então $\ulcorner a \preceq a$. Por fim, se $a \preceq \ulcorner a$ e $\ulcorner a \preceq a$, então $\ulcorner a = a$.

(iii) Dado que $\ulcorner x \in \text{Sub}(A)$, segue do item (ii) que $\ulcorner(\ulcorner x) = \ulcorner x$.

(iv) Como $0 \in \text{Sub}(A)$, então $\ulcorner 0 = 0$.

(v) Como $a, -a \in \text{Sub}(A)$, então, pelo item (ii), $\ulcorner(-a) = -a = -\ulcorner a$.

(vi) Da Definição 57 (i), segue que $x \preceq \ulcorner x \circ x$. Por outro lado, como $\ulcorner x \in \text{Sub}(A)$, então $\ulcorner x \preceq 1'$ e, portanto, $\ulcorner x \circ x \preceq 1' \circ x \implies \ulcorner x \circ x \preceq x$. Logo, $\ulcorner x \circ x = x$.

(vii) $x \preceq 1 \implies \ulcorner x \circ x \preceq \ulcorner x \circ 1$ e, como $x = \ulcorner x \circ x$, então $x \preceq \ulcorner x \circ 1$.

(viii) Da Proposição 70 (i), $\ulcorner(x \vee y) \preceq a \iff -a \circ (x \vee y) \preceq 0$. Dos reticulados, tem-se que $-a \circ (x \vee y) \preceq 0 \iff (-a \circ x) \vee (-a \circ y) \preceq 0 \iff -a \circ x \preceq 0$ e $-a \circ y \preceq 0$.

Usando novamente a Proposição 70 (i), tem-se $-a \circ x \preceq 0$ e $-a \circ y \preceq 0 \iff \lceil x \preceq a$ e $\lceil y \preceq a \iff \lceil x \vee \lceil y \preceq a$.

Como $\lceil (x \vee y) \preceq a \iff \lceil x \vee \lceil y \preceq a$, para qualquer $a \in \text{Sub}(A)$, utilizando Proposição 35 (iv), conclui-se que $\lceil (x \vee y) = \lceil x \vee \lceil y$.

(ix) Pela hipótese temos que $x \preceq y$ e, portanto, pela definição da ordem, $x \vee y = y$. Assim, $x \preceq y \implies x \vee y = y \implies \lceil (x \vee y) = \lceil y \implies \lceil x \vee \lceil y = \lceil y \implies \lceil x \preceq \lceil y$.

(x) Como $x \wedge y \preceq x, y$, então $\lceil (x \wedge y) \preceq \lceil x, \lceil y$ pelo item acima. Assim, com a Proposição 40 (v), segue que $\lceil (x \wedge y) \preceq \lceil x \wedge \lceil y$.

(xi) Da condição (ii) da definição de domínio, segue-se que $\lceil (a \circ x) \preceq a$. Agora, como $a \circ x \preceq x$, então $\lceil (a \circ x) \preceq \lceil x$ e, portanto, $\lceil (a \circ x) \preceq a \wedge \lceil x = a \circ \lceil x$.

Por outro lado, pela definição de domínio modal, se tomarmos $x = a$ e $y = x$, então segue que $\lceil (a \circ \lceil x) \preceq \lceil (a \circ x)$. Como $a, \lceil x \in \text{Sub}(A)$, então $a \circ \lceil x \in \text{Sub}(A)$ e assim, pelo item (ii), segue que $\lceil (a \circ \lceil x) = a \circ \lceil x$. Logo, conclui-se que $a \circ \lceil x \preceq \lceil (a \circ x)$.

Por fim, se $\lceil (a \circ x) \preceq a \circ \lceil x$ e $a \circ \lceil x \preceq \lceil (a \circ x)$, então $\lceil (a \circ x) = a \circ \lceil x$.

(xii) Vejamos que $x \circ y = x \circ (\lceil y \circ y) = (x \circ \lceil y) \circ y = (\lceil (x \circ \lceil y) \circ (x \circ \lceil y)) \circ y = \lceil (x \circ \lceil y) \circ ((x \circ \lceil y) \circ y) = \lceil (x \circ \lceil y) \circ (x \circ (\lceil y \circ y)) = \lceil (x \circ \lceil y) \circ (x \circ y)$. Assim, $x \circ y \preceq \lceil (x \circ \lceil y) \circ (x \circ y)$.

Mas, pela Proposição 68, $\lceil (x \circ y) \preceq \lceil (x \circ \lceil y) \iff x \circ y \preceq \lceil (x \circ \lceil y) \circ (x \circ y)$. Logo, $\lceil (x \circ y) \preceq \lceil (x \circ \lceil y)$.

(xiii) Segue do item anterior e da condição (iii) da definição de domínio modal.

(xiv) Considerando que $\lceil 1 \in \text{Sub}(A)$, então $\lceil 1 \preceq 1'$. Por outro lado, $1' \preceq 1$ e, pelo item (ix), $\lceil 1' \preceq \lceil 1$. Dado que $\lceil 1' = 1'$, então $1' \preceq \lceil 1$. Por fim, se $\lceil 1 \preceq 1'$ e $1' \preceq \lceil 1$, então $\lceil 1 = 1'$.

(xv) Como $1' = \lceil 1 = \lceil (x \vee \sim x) = \lceil x \vee \lceil (\sim x)$, então $1' \preceq \lceil x \vee \lceil (\sim x)$. Por fim, $1' \preceq \lceil x \vee \lceil (\sim x) \iff 1' \wedge (\neg \lceil x) \preceq \lceil (\sim x) \iff 1' \circ (\neg \lceil x) \preceq \lceil (\sim x) \iff \neg \lceil x \preceq \lceil (\sim x)$. $\square$

Simetricamente, tem-se os mesmos resultados para o operador de codomínio.

Proposição 72 Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra da vizinhança e $\neg : A \rightarrow A$ um operador de codomínio modal em $\mathfrak{A}$. Para quaisquer $x, y \in A$ e $a \in \text{Sub}(A) \subseteq A$:

- (i) $x^\neg \preceq 0 \iff x \preceq 0$;
- (ii) $a^\neg = a$;
- (iii) $(x^\neg)^\neg = x^\neg$;
- (iv) $0^\neg = 0$;
- (v) $(-a)^\neg = -a^\neg$;
- (vi) $x = x \circ x^\neg$;
- (vii) $x \preceq 1 \circ x^\neg$;
- (viii) $(x \vee y)^\neg = x^\neg \vee y^\neg$;
- (ix) $x \preceq y \implies x^\neg \preceq y^\neg$;
- (x) $(x \wedge y)^\neg \preceq x^\neg \wedge y^\neg$;
- (xi) $(x \circ a)^\neg = x^\neg \circ a$;
- (xii) $(x \circ y)^\neg \preceq (x^\neg \circ y)^\neg$;

$$(xiii) (x \circ y)^\top = (x^\top \circ y)^\top;$$

$$(xiv) 1^\top = 1';$$

$$(xv) -x^\top \preceq (\sim x)^\top.$$

Demonstração: (i) Como $x^\top \preceq a \iff x \preceq x \circ a$, para $a = 0$, tem-se que $x^\top \preceq 0 \iff x \preceq x \circ 0 \iff x \preceq 0$.

(ii) Pela Definição 60 (i), para $a = x$, tem-se que $a \preceq a \circ a^\top$. Como a é subidentidade, então $a \preceq 1'$ e, assim, $a \circ a^\top \preceq 1' \circ a^\top \implies a \circ a^\top \preceq a^\top$. Como $a \preceq a \circ a^\top$ e $a \circ a^\top \preceq a^\top$, conclui-se que $a \preceq a^\top$.

Por outro lado, da Definição 60 (ii), $(1' \circ a)^\top \preceq a$ e como $1' \circ a = a$, então $a^\top \preceq a$. Por fim, se $a \preceq a^\top$ e $a^\top \preceq a$, então $a^\top = a$.

(iii) Dado que $x^\top \in \text{Sub}(A)$, segue do item (ii) que $(x^\top)^\top = x^\top$.

(iv) Como $0 \in \text{Sub}(A)$, então $0^\top = 0$.

(v) Como $a, -a \in \text{Sub}(A)$, então, pelo item (ii), $(-a)^\top = -a = -a^\top$.

(vi) Da Definição 60 (i), segue que $x \preceq x \circ x^\top$. Por outro lado, como $x^\top \in \text{Sub}(A)$, então $x^\top \preceq 1'$ e, portanto, $x \circ x^\top \preceq x \circ 1' \implies x \circ x^\top \preceq x$. Logo, $x \circ x^\top = x$.

(vii) $x \preceq 1 \implies x \circ x^\top \preceq 1 \circ x^\top$ e, como $x = x \circ x^\top$, então $x \preceq 1 \circ x^\top$.

(viii) Da Proposição 70 (ii), $(x \vee y)^\top \preceq a \iff (x \vee y) \circ -a \preceq 0$. Dos reticulados, tem-se que $(x \vee y) \circ -a \preceq 0 \iff (x \circ -a) \vee (y \circ -a) \preceq 0 \iff x \circ -a \preceq 0$ e $y \circ -a \preceq 0$.

Usando novamente 70 (ii), tem-se que $x \circ -a \preceq 0$ e $y \circ -a \preceq 0 \iff x^\top \preceq a$ e $y^\top \preceq a \iff x^\top \vee y^\top \preceq a$.

Como $(x \vee y)^\top \preceq a \iff x^\top \vee y^\top \preceq a$, para qualquer $a \in \text{Sub}(A)$, utilizando a Proposição 35 (iv), conclui-se que $(x \vee y)^\top = x^\top \vee y^\top$.

(ix) Pela hipótese temos que $x \preceq y$ e, portanto, pela definição da ordem, $x \vee y = y$. Assim, $x \preceq y \implies x \vee y = y \implies (x \vee y)^\top = y^\top \implies x^\top \vee y^\top = y^\top \implies x^\top \preceq y^\top$.

(x) Como $x \wedge y \preceq x, y$, então $(x \wedge y)^\top \preceq x^\top, y^\top$ pelo item acima. Assim, com a Proposição 40 (v), segue que $(x \wedge y)^\top \preceq x^\top \wedge y^\top$.

(xi) Da condição (ii) da definição de codomínio, segue-se que $(x \circ a)^\top \preceq a$. Agora, como $x \circ a \preceq x$, então $(x \circ a)^\top \preceq x^\top$ e, portanto, $(x \circ a)^\top \preceq x^\top \wedge a = x^\top \circ a$.

Por outro lado, pela definição de codomínio modal, se tomarmos $y = a$, então segue que $(x^\top \circ a)^\top \preceq (x \circ a)^\top$. Como $a, x^\top \in \text{Sub}(A)$, então $x^\top \circ a \in \text{Sub}(A)$ e assim, pelo item (ii), segue que $(x^\top \circ a)^\top = x^\top \circ a$. Logo, conclui-se que $x^\top \circ a \preceq (x \circ a)^\top$.

Por fim, se $(x \circ a)^\top \preceq x^\top \circ a$ e $x^\top \circ a \preceq (x \circ a)^\top$, então $(x \circ a)^\top = x^\top \circ a$.

(xii) Vejamos que $x \circ y = (x \circ x^\top) \circ y = x \circ (x^\top \circ y) = x \circ ((x^\top \circ y) \circ (x^\top \circ y)^\top) = (x \circ (x^\top \circ y)) \circ (x^\top \circ y)^\top = ((x \circ x^\top) \circ y) \circ (x^\top \circ y)^\top = (x \circ y) \circ (x^\top \circ y)^\top$. Assim, $x \circ y \preceq (x \circ y) \circ (x^\top \circ y)^\top$.

Mas, pela Proposição 69, $(x \circ y)^\top \preceq (x^\top \circ y)^\top \iff x \circ y \preceq (x \circ y) \circ (x^\top \circ y)^\top$. Logo, $(x \circ y)^\top \preceq (x^\top \circ y)^\top$.

(xiii) Segue do item anterior e da condição (iii) da definição de codomínio modal.

(xiv) Considerando que $1^\top \in \text{Sub}(A)$, então $1^\top \preceq 1'$. Por outro lado, $1' \preceq 1$ e, pelo item (ix), $1'^\top \preceq 1^\top$. Dado que $1'^\top = 1'$, então $1' \preceq 1^\top$. Por fim, se $1^\top \preceq 1'$ e $1' \preceq 1^\top$, então $1^\top = 1'$.

(xv) Como $1' = 1^\top = (x \vee \sim x)^\top = x^\top \vee (\sim x)^\top$, então $1' \preceq x^\top \vee (\sim x)^\top$. Por fim, $1' \preceq x^\top \vee (\sim x)^\top \iff 1' \wedge (-x^\top) \preceq (\sim x)^\top \iff 1' \circ (-x^\top) \preceq (\sim x)^\top \iff -x^\top \preceq (\sim x)^\top$. $\square$

Proposição 73 Em uma álgebra da vizinhança $\mathfrak{A}$, para um arbitrário $x \in A$, se $x \circ 1 = 0$ ou $1 \circ x = 0$, então $x = 0$.

Demonstração: Considere que $x \circ 1 = 0$ ou $1 \circ x = 0$. Consequentemente, $\top(x \circ 1) = \top 0$ ou $(1 \circ x)^\top = 0^\top$ e, então, $\top(x \circ \top 1) = \top 0$ ou $(1^\top \circ x)^\top = 0^\top$.

Como $\top 1 = 1^\top = 1'$, obtemos que $\top x = \top 0 = 0$ ou $x^\top = 0^\top = 0$. Portanto, pelas Proposições 71 e 72 (i), $x = 0$. $\square$

Proposição 74 Dada uma álgebra da vizinhança $\mathfrak{A}$, para quaisquer $x \in A$ e $a \in \text{Sub}(A)$, as seguintes condições são válidas:

- (i) $x \circ a = x \wedge (1 \circ a)$;
- (ii) $a \circ x = x \wedge (a \circ 1)$.

Demonstração: (i) Similar à demonstração de (ii).

(ii) Primeiramente, vejamos que $x \wedge (a \circ 1) \preceq a \circ x$. Se $a \preceq 1'$, então $a \circ \sim x \preceq 1' \circ \sim x = \sim x$ e $x \wedge (a \circ \sim x) \preceq x \wedge \sim x = 0$. Portanto, $x \wedge (a \circ \sim x) = 0$. Mas como $x \wedge (a \circ 1) = x \wedge (a \circ (x \vee \sim x)) = x \wedge ((a \circ x) \vee (a \circ \sim x)) = (x \wedge (a \circ x)) \vee (x \wedge (a \circ \sim x))$, então $x \wedge (a \circ 1) = (x \wedge (a \circ x)) \preceq a \circ x$.

Resta-nos verificar se $a \circ x \preceq x \wedge (a \circ 1)$. Como $a \preceq 1'$, então $a \circ x \preceq 1' \circ x = x$ e, portanto, $(a \circ x) \wedge (a \circ x) \preceq x \wedge (a \circ 1)$. Pela idempotência de $\wedge$, $(a \circ x) \preceq x \wedge (a \circ 1)$. $\square$

Corolário 75 Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra da vizinhança:

- (i) $\mathfrak{A} \models \top x \approx (1 \circ \top x) \wedge 1'$;
- (ii) $\mathfrak{A} \models x^\top \approx (x^\top \circ 1) \wedge 1'$.

Demonstração: (i) Uma prova análoga pode ser derivada a partir de (ii).

- (ii) Considere $a = x^\top$ e $x = 1'$ na Proposição 74 e, assim, $x^\top \circ 1' = x^\top = 1' \wedge (x^\top \circ 1)$. $\square$

Em uma álgebra da vizinhança $\mathfrak{A}$, é possível definir quatro novos operadores, que serão responsáveis pela caracterização algébrica das quatro modalidades $\Diamond_l, \Diamond_r, \Box_l$ e $\Box_r$ da $\mathbf{LPV}^+$.

Definição 76 Em uma álgebra da vizinhança $\mathfrak{A}$, definimos:

- (i) $\delta_l x := x^\top \circ 1$; (versão algébrica de $\Diamond_l$)
- (ii) $\delta_r x := 1 \circ \top x$; (versão algébrica de $\Diamond_r$)
- (iii) $\omega_l x := -([\sim x]^\top) \circ 1$; (versão algébrica de $\Box_l$)
- (iv) $\omega_r x := 1 \circ -(\top[\sim x])$. (versão algébrica de $\Box_r$)

Para obtermos algumas propriedades para esses operadores, aplicaremos resultados sobre pares de Galois, pares de funções definidos a partir de estruturas parcialmente ordenadas. Mais precisamente, veremos que $[\Diamond_l, \Box_r]$ e $[\Diamond_r, \Box_l]$ algebricamente constituem dois pares de adjunções.

Definição 77 (Dunn; Hardegree, 2001, p. 396) *Sejam dois posets $\mathfrak{A} = \langle A, \leq^{\mathfrak{A}} \rangle$ e $\mathfrak{P} = \langle P, \leq^{\mathfrak{P}} \rangle$ e as funções $f : A \rightarrow P$ e $g : P \rightarrow A$, o par $[f, g]$ é uma adjunção quando para todo $a \in A$ e todo $p \in P$ vale $a \leq^{\mathfrak{A}} g(p) \iff f(a) \leq^{\mathfrak{P}} p$.*

O que chamamos de par de adjunção por vezes é chamado de par residuado⁵.

Proposição 78 *Dados dois posets $\langle A, \leq^{\mathfrak{A}} \rangle$ e $\langle P, \leq^{\mathfrak{P}} \rangle$ e as funções $f : A \rightarrow P$ e $g : P \rightarrow A$, para $a, b \in A$ e $p, q \in P$. O par $[f, g]$ é uma adjunção se, e somente se, valem as seguintes condições:*

- (i) $a \leq^{\mathfrak{A}} g(f(a))$;
- (ii) $f(g(p)) \leq^{\mathfrak{P}} p$;
- (iii) $a \leq^{\mathfrak{A}} b \implies f(a) \leq^{\mathfrak{P}} f(b)$;
- (iv) $p \leq^{\mathfrak{P}} q \implies g(p) \leq^{\mathfrak{A}} g(q)$.

Demonstração: *Seja $[f, g]$ uma adjunção. Vamos mostrar que $[f, g]$ satisfaz as quatro condições do enunciado.*

- (i) *Como $f(a) \leq^{\mathfrak{P}} f(a)$ e $[f, g]$ é adjunção, então $a \leq^{\mathfrak{A}} g(f(a))$.*
- (ii) *Como $g(p) \leq^{\mathfrak{A}} g(p)$ e $[f, g]$ é adjunção, então $f(g(p)) \leq^{\mathfrak{P}} p$.*
- (iii) *Se $a \leq^{\mathfrak{A}} b$, como por (i), $b \leq^{\mathfrak{A}} g(f(b))$, então $a \leq^{\mathfrak{A}} g(f(b))$. Sendo $[f, g]$ uma adjunção, então $a \leq^{\mathfrak{A}} g(f(b)) \iff f(a) \leq^{\mathfrak{P}} f(b)$. Portanto, $f(a) \leq^{\mathfrak{P}} f(b)$.*
- (iv) *Se $p \leq^{\mathfrak{P}} q$, desde que por (ii), $f(g(p)) \leq^{\mathfrak{P}} p$, então $f(g(p)) \leq^{\mathfrak{P}} q$. Sendo $[f, g]$ uma adjunção, temos que $f(g(p)) \leq^{\mathfrak{P}} q \iff g(p) \leq^{\mathfrak{A}} g(q)$. Logo, $g(p) \leq^{\mathfrak{A}} g(q)$.*

Agora mostramos que as quatro condições garantem uma adjunção.

Se $a \leq^{\mathfrak{A}} g(p)$, por (iii) $f(a) \leq^{\mathfrak{P}} f(g(p))$ e por (ii) $f(a) \leq^{\mathfrak{P}} p$. Por outro lado, se $f(a) \leq^{\mathfrak{P}} p$, então por (iv) $g(f(a)) \leq^{\mathfrak{A}} g(p)$ e por (i) $a \leq^{\mathfrak{A}} g(p)$.

Portanto, $a \leq^{\mathfrak{A}} g(p) \iff f(a) \leq^{\mathfrak{P}} p$. □

Proposição 79 *Se o par $[f, g]$ é uma adjunção para $\mathfrak{A} = \langle A, \leq^{\mathfrak{A}} \rangle$ e $\mathfrak{P} = \langle P, \leq^{\mathfrak{P}} \rangle$, e $a \in A$ e $p \in P$, então valem:*

- (i) $f(a) = f(g(f(a)))$;
- (ii) $g(b) = g(f(g(b)))$.

Demonstração: *Pela proposição anterior, item (i), $a \leq^{\mathfrak{A}} g(f(a))$ e, por (iii), $f(a) \leq^{\mathfrak{P}} f(g(f(a)))$. Por outro lado, de (ii), $f(g(f(a))) \leq^{\mathfrak{P}} f(a)$. Logo, $f(a) = f(g(f(a)))$.*

Pela proposição anterior, item (ii), $f(g(b)) \leq^{\mathfrak{P}} b$ e, por (iv), $g(f(g(b))) \leq^{\mathfrak{A}} g(b)$. Por outro lado, em (i), $g(b) \leq^{\mathfrak{A}} g(f(g(b)))$. Logo, $g(b) = g(f(g(b)))$. □

Proposição 80 *Se o par $[f, g]$ é uma adjunção para os reticulados $\mathfrak{A} = \langle A, \vee^{\mathfrak{A}}, \wedge^{\mathfrak{A}} \rangle$ e $\mathfrak{P} = \langle P, \vee^{\mathfrak{P}}, \wedge^{\mathfrak{P}} \rangle$, considerando $\leq^{\mathfrak{A}}$ e $\leq^{\mathfrak{P}}$ relações de ordem parcial para essas estruturas, então valem:*

- (i) $f(x \vee^{\mathfrak{A}} y) = f(x) \vee^{\mathfrak{P}} f(y)$;

⁵ Cf. (Areces; Bernardi; Moortgat, 2004), (Erné et al, 1993), (Jarvinen; Kondo; Kortelainen, 2008), (Smith, 2010) e (Oriowska; Rewitzky, 2010).

$$(ii) \ g(x \wedge^{\mathfrak{P}} y) = g(x) \wedge^{\mathfrak{A}} g(y).$$

Demonstração: (i) Como $x \leq^{\mathfrak{A}} x \vee^{\mathfrak{A}} y$ e $y \leq^{\mathfrak{A}} x \vee^{\mathfrak{A}} y$, então $f(x) \leq^{\mathfrak{P}} f(x \vee^{\mathfrak{A}} y)$ e $f(y) \leq^{\mathfrak{P}} f(x \vee^{\mathfrak{A}} y)$. Logo, $f(x) \vee^{\mathfrak{P}} f(y) \leq^{\mathfrak{P}} f(x \vee^{\mathfrak{A}} y)$.

Do outro lado, $f(x) \leq^{\mathfrak{P}} f(x) \vee^{\mathfrak{P}} f(y)$ e $f(y) \leq^{\mathfrak{P}} f(x) \vee^{\mathfrak{P}} f(y)$. Como $[f, g]$ é uma adjunção, então $x \leq^{\mathfrak{A}} g(f(x)) \leq^{\mathfrak{A}} g(f(x) \vee^{\mathfrak{P}} f(y))$ e $y \leq^{\mathfrak{A}} g(f(y)) \leq^{\mathfrak{A}} g(f(x) \vee^{\mathfrak{P}} f(y))$. Daí $x \vee^{\mathfrak{A}} y \leq^{\mathfrak{A}} g(f(x) \vee^{\mathfrak{P}} f(y))$ e então $f(x \vee^{\mathfrak{A}} y) \leq^{\mathfrak{P}} f(g(f(x) \vee^{\mathfrak{P}} f(y))) \leq^{\mathfrak{P}} f(x) \vee^{\mathfrak{P}} f(y)$.

(ii) Como $x \wedge^{\mathfrak{P}} y \leq^{\mathfrak{P}} x$ e $x \wedge^{\mathfrak{P}} y \leq^{\mathfrak{P}} y$, então $g(x \wedge^{\mathfrak{P}} y) \leq^{\mathfrak{A}} g(x)$ e $g(x \wedge^{\mathfrak{P}} y) \leq^{\mathfrak{A}} g(y)$ e, portanto, $g(x \wedge^{\mathfrak{P}} y) \leq^{\mathfrak{A}} g(x) \wedge^{\mathfrak{A}} g(y)$.

Do outro lado, de $g(x) \wedge^{\mathfrak{A}} g(y) \leq^{\mathfrak{A}} g(x)$ e $g(x) \wedge^{\mathfrak{A}} g(y) \leq^{\mathfrak{A}} g(y)$, segue que $f(g(x) \wedge^{\mathfrak{A}} g(y)) \leq^{\mathfrak{P}} f(g(x)) \leq^{\mathfrak{P}} x$ e $f(g(x) \wedge^{\mathfrak{A}} g(y)) \leq^{\mathfrak{P}} f(g(y)) \leq^{\mathfrak{P}} y$. Assim, temos $f(g(x) \wedge^{\mathfrak{A}} g(y)) \leq^{\mathfrak{P}} x \wedge^{\mathfrak{P}} y$. Logo $g(f(g(x) \wedge^{\mathfrak{A}} g(y))) \leq^{\mathfrak{A}} g(x \wedge^{\mathfrak{P}} y)$ e, finalmente, $g(x) \wedge^{\mathfrak{A}} g(y) \leq^{\mathfrak{A}} g(x \wedge^{\mathfrak{P}} y)$. $\square$

Os pares de adjunção - bem como os pares de Galois, no geral - são definidos a partir de duas estruturas parcialmente ordenadas distintas; porém, para nossa aplicação, consideraremos uma única estrutura ordenada. Tomaremos uma álgebra da vizinhança $\mathfrak{A}$ e δ_* e ω_* (para $*$ $\in \{r, l\}$) no lugar das funções f e g .

Usaremos parte desses resultados durante a obtenção da Correção.

Proposição 81 O par $[\delta_r, \omega_l]$ é uma adjunção em $\mathfrak{A}$.

Demonstração: $[\implies]$ Tomemos $x \preceq \omega_l(y)$.

Assim, $x \preceq \omega_l(y) \implies x \preceq -((\sim y)^\top) \circ 1 \implies \ulcorner x \preceq \ulcorner -((\sim y)^\top) \circ 1 \implies \ulcorner x \preceq -((\sim y)^\top) \circ \ulcorner 1 \implies \ulcorner x \preceq -((\sim y)^\top) \circ 1' \implies \ulcorner x \preceq -((\sim y)^\top) \implies 1 \circ \ulcorner x \preceq 1 \circ -((\sim y)^\top) \implies 1 \circ \ulcorner x \preceq \sim (1 \circ (\sim y)^\top) \implies \sim \sim (1 \circ (\sim y)^\top) \preceq \sim (1 \circ \ulcorner x) \implies 1 \circ (\sim y)^\top \preceq \sim (1 \circ \ulcorner x)$.

Como $\sim y \preceq 1 \circ (\sim y)^\top$, então $\sim y \preceq \sim (1 \circ \ulcorner x)$.

Por fim, $\sim y \preceq \sim (1 \circ \ulcorner x) \implies 1 \circ \ulcorner x \preceq y \implies \delta_r(x) \preceq y$.

$[\impliedby]$ Tomemos $\delta_r(x) \preceq y$.

Assim, $\delta_r(x) \preceq y \implies 1 \circ \ulcorner x \preceq y \implies \sim y \preceq \sim (1 \circ \ulcorner x) \implies \sim y \preceq 1 \circ (-\ulcorner x) \implies (\sim y)^\top \preceq (1 \circ (-\ulcorner x))^\top \implies (\sim y)^\top \preceq 1^\top \circ (-\ulcorner x) \implies (\sim y)^\top \preceq 1' \circ (-\ulcorner x) \implies (\sim y)^\top \preceq -\ulcorner x \implies - - \ulcorner x \preceq -((\sim y)^\top) \implies \ulcorner x \preceq -((\sim y)^\top) \implies \ulcorner x \circ 1 \preceq -((\sim y)^\top) \circ 1 \implies \ulcorner x \circ 1 \preceq \omega_l(y)$.

Como $x \preceq \ulcorner x \circ 1$, então $x \preceq \omega_l(y)$. $\square$

Proposição 82 O par $[\delta_l, \omega_r]$ é uma adjunção em $\mathfrak{A}$.

Demonstração: $[\implies]$ Tomemos $x \preceq \omega_r(y)$.

Assim, $x \preceq \omega_r(y) \implies x \preceq 1 \circ -(\ulcorner (\sim y)) \implies x^\top \preceq (1 \circ -(\ulcorner (\sim y)))^\top \implies x^\top \preceq 1^\top \circ -(\ulcorner (\sim y)) \implies x^\top \preceq 1' \circ -(\ulcorner (\sim y)) \implies x^\top \preceq -(\ulcorner (\sim y)) \implies x^\top \circ 1 \preceq -(\ulcorner (\sim y)) \circ 1 \implies x^\top \circ 1 \preceq \sim (\ulcorner (\sim y) \circ 1) \implies \sim \sim (\ulcorner (\sim y) \circ 1) \preceq \sim (x^\top \circ 1) \implies \ulcorner (\sim y) \circ 1 \preceq \sim (x^\top \circ 1)$.

Como $\sim y \preceq \ulcorner (\sim y) \circ 1$, então $\sim y \preceq \sim (x^\top \circ 1)$.

Por fim, $\sim y \preceq \sim (x^\top \circ 1) \implies x^\top \circ 1 \preceq y \implies \delta_l(x) \preceq y$.

$[\impliedby]$ Tomemos $\delta_l(x) \preceq y$.

Assim, $\delta_l(x) \preceq y \implies x^\top \circ 1 \preceq y \implies \sim y \preceq \sim (x^\top \circ 1) \implies \sim y \preceq -x^\top \circ 1 \implies \ulcorner (\sim y) \preceq \ulcorner (-x^\top \circ 1) \implies \ulcorner (\sim y) \preceq -x^\top \circ \ulcorner 1 \implies \ulcorner (\sim y) \preceq -x^\top \circ 1' \implies \ulcorner (\sim y) \preceq -x^\top \implies - -x^\top \preceq -\ulcorner (\sim y) \implies x^\top \preceq -\ulcorner (\sim y) \implies 1 \circ x^\top \preceq 1 \circ -\ulcorner (\sim y)$.

Como $x \preceq 1 \circ x^\top$, então $x \preceq 1 \circ -\ulcorner (\sim y)$ e, portanto, $x \preceq \omega_r(y)$. $\square$

Corolário 83 Em uma álgebra da vizinhança $\mathfrak{A}$, as operações δ_r , δ_l , ω_r e ω_l satisfazem as seguintes propriedades para quaisquer $x, y \in A$:

- (i) $x \preceq y \implies \delta_l x \preceq \delta_l y$;
- (ii) $x \preceq y \implies \delta_r x \preceq \delta_r y$;
- (iii) $x \preceq y \implies \omega_l x \preceq \omega_l y$;
- (iv) $x \preceq y \implies \omega_r x \preceq \omega_r y$;
- (v) $\delta_r \omega_l x \preceq x$;
- (vi) $\delta_l \omega_r x \preceq x$;
- (vii) $x \preceq \omega_r \delta_l x$;
- (viii) $x \preceq \omega_l \delta_r x$;
- (ix) $\delta_l(x \curlyvee y) = \delta_l x \curlyvee \delta_l y$;
- (x) $\delta_r(x \curlyvee y) = \delta_r x \curlyvee \delta_r y$;
- (xi) $\omega_l(x \curlywedge y) = \omega_l x \curlywedge \omega_l y$;
- (xii) $\omega_r(x \curlywedge y) = \omega_r x \curlywedge \omega_r y$.

Demonstração: Consequência dos pares de adjunção. $\square$

Proposição 84 Em uma álgebra da vizinhança $\mathfrak{A}$, os operadores δ_r , ω_r e δ_l , ω_l são duais.

Demonstração: Considere $\sim x$ no lugar de x na Definição 76 e obtenha que $\delta_r \sim x = 1 \circ \ulcorner \sim x$. Assim, $\sim \delta_r \sim x = \sim (1 \circ \ulcorner \sim x)$. Entretanto, dada Proposição 67 (ii), segue-se que $\sim \delta_r \sim x = \sim (1 \circ \ulcorner \sim x) = 1 \circ -\ulcorner \sim x$. Portanto, $\sim \delta_r \sim x = \omega_r x$.

Para δ_l e ω_l , a demonstração segue analogamente. $\square$

2.3.1.1 Uma motivação e exemplo de álgebra da vizinhança

Construiremos um exemplo de álgebra da vizinhança e obteremos, assim, uma intuição sobre essa estrutura, bem como uma justificativa dela ser planejada como um possível modelo para $\mathbf{LPV}^+$. Passo a passo, estabeceremos uma álgebra de vizinhança de intervalos $\mathfrak{A}(I)$.

Para isso, primeiramente consideremos um conjunto $\mathbb{D}$ munido de uma ordem linear $<$. Definamos $I(\mathbb{D})$ como o conjunto de todos os possíveis intervalos sobre $\mathbb{D}$ ⁶, isto é,

$$I(\mathbb{D}) := \{[a, b] : \forall a, b \in \mathbb{D} : a \leq b\}. \quad (2.21)$$

Assim, podemos considerar $\mathfrak{A}(I)$ como o reticulado booleano de conjuntos sobre $\mathcal{P}(I(\mathbb{D}))$. Desse modo, cada elemento de $\mathfrak{A}(I)$ será um conjunto de intervalos de $\mathbb{D}$ mais o conjunto vazio:

⁶ Esse conjunto já foi definido ao introduzirmos a semântica relacional de $\mathbf{LPV}^+$.

as operações de supremo, ínfimo e complemento do reticulado booleano corresponderão às operações de união, intersecção e complemento de conjuntos sobre $\mathcal{P}(I(\mathbb{D}))$; o conjunto $\emptyset$ e $I(\mathbb{D})$ serão o menor e maior elemento do reticulado limitado; e a relação de inclusão de conjuntos será a ordem parcial.

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} &= \langle A, \quad \vee, \quad \wedge, \quad \sim, \quad 0, \quad 1, \quad \dots \rangle \\ &\quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \mathfrak{A}(I) &= \langle \mathcal{P}(I(\mathbb{D})), \quad \cup, \quad \cap, \quad \neg, \quad \emptyset, \quad I(\mathbb{D}), \quad \dots \rangle\end{aligned}$$

A operação de composição $\circ$ em $\mathfrak{A}(I)$ será definida como a composição de conjuntos de intervalos. Dados dois conjuntos de intervalos $A, B \in \mathcal{P}(I(\mathbb{D}))$, a composição é não vazia apenas quando existir ao menos um intervalo $[i, j] \in A$ e outro intervalo $[m, n] \in B$ tal que o último instante de $[i, j]$ coincide com o primeiro instante de $[m, n]$, isto é, quando $j = m$ (uma abordagem bem próxima da composição entre relações binárias⁷); do contrário, a composição é o conjunto $\emptyset$. Desse modo, a composição de A e B contém todo intervalo resultante da composição/concatenação de dois intervalos, um em A e outro em B :

$$\text{para } A, B \in \mathcal{P}(I(\mathbb{D})) : A \circ B := \{[a, c] : \exists b \text{ tal que } [a, b] \in A \text{ e } [b, c] \in B\}. \quad (2.22)$$

Enquanto $I(\mathbb{D})$ é o maior elemento do reticulado booleano sobre $\mathcal{P}(I(\mathbb{D}))$, e então o universo de todos os possíveis intervalos em $\mathbb{D}$, o elemento $1'$ de $\mathfrak{A}(I)$, denotado por Id , corresponderá ao maior elemento do reticulado booleano de conjuntos de intervalos degenerados de $I(\mathbb{D})$. Em outras palavras, Id é o universo de todos os possíveis intervalos degenerados da estrutura:

$$Id := \{[a, a] : a \in \mathbb{D}\}. \quad (2.23)$$

Pela definição (2.22) de composição em nossa abordagem intervalar, a composição é associativa.

Exemplo 85 Considere $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, dado $\mathbb{R}$ - o conjunto dos reais - ser um exemplo de conjunto denso e linearmente ordenado (Rosenstein, 1982). Seja $A = \{[1, 2], [7, 8], [11, 15]\}$, $B = \{[2, 4], [8, 8]\}$ e $C = \{[4, 5], [8, 10]\}$.

Desse modo, $A \circ B = \{[1, 4], [7, 8]\}$ e $(A \circ B) \circ C = \{[1, 5], [7, 10]\}$.

Por outro lado, $B \circ C = \{[2, 5], [8, 10]\}$ e $A \circ (B \circ C) = \{[1, 5], [7, 10]\}$.

Logo, $A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C$ é o caso.

Observação 86 Por enquanto, seguiremos apenas com exemplos. Uma demonstração formal será dada ao final desta subseção, mostrando que $\mathfrak{A}(I)$ que estamos construindo é de fato uma álgebra da vizinhança.

Além disso, Id definido em (2.23) é um elemento neutro para a operação de composição. Quando um conjunto de intervalos compõe com Id , os intervalos degenerados correspondentes

⁷ Ver Maddux (2006).

aos instantes finais e iniciais de qualquer intervalo do conjunto estarão inclusos em Id . Vejamos que se $[a, b] \in A$, então $[a, a], [b, b] \in Id$, e portanto a composição não altera o conjunto de intervalos.

Exemplo 87 Dado $A = \{[1, 2], [4, 6], [8, 8]\}$, obtemos que $A \circ Id = \{[1, 2], [4, 6], [8, 8]\} = A$ e $Id \circ A = \{[1, 2], [4, 6], [8, 8]\} = A$; pois $[2, 2], [6, 6], [8, 8] \in Id$, assim como $[1, 1], [4, 4] \in Id$.

O conjunto vazio $\emptyset$ é um elemento absorvente para a composição em $\mathfrak{A}(I)$, dado que não há nenhum intervalo em $\emptyset$ e, portanto, não haverá nenhum intervalo em qualquer que seja a composição com $\emptyset$. A composição é, também, distributiva sobre $\cup$.

Exemplo 88 Dados A, B e C do Exemplo 85:

- $B \cup C = \{[2, 4], [8, 8], [4, 5], [8, 10]\}$ e, então, $A \circ (B \cup C) = \{[1, 4], [7, 8], [7, 10]\}$.
 - $A \circ B = \{[1, 4], [7, 8]\}$ e $A \circ C = \{[7, 10]\}$.
- Portanto, $(A \circ B) \cup (A \circ C) = \{[1, 4], [7, 8], [7, 10]\}$.

Até o presente momento, alcançamos uma estrutura $\mathfrak{A}(I) = \langle \mathcal{P}(I(\mathbb{D})), \cup, \cap, \circ, _{}^c, \emptyset, Id \rangle$, com propriedades de uma álgebra de Boole, mas também de um semianel: uma álgebra de Boole ao considerarmos o reduto $\langle \mathcal{P}(I(\mathbb{D})), \cup, \cap, _{}^c, \emptyset, Id \rangle$ e um semianel aditivamente idempotente se considerarmos o fragmento $\langle \mathcal{P}(I(\mathbb{D})), \cup, \circ, \emptyset, Id \rangle$.

Dada a ordem parcial $\subseteq$, é possível definir o conjunto $Sub(\mathcal{P}(I(\mathbb{D})))$ de subidentidades da estrutura por $Sub(\mathcal{P}(I(\mathbb{D}))) := \{B \in \mathcal{P}(I(\mathbb{D})) : B \subseteq Id\}$. Assim, nessa abordagem, uma subidentidade pode ser o conjunto $\emptyset$ ou um conjunto de intervalos degenerados.

O conjunto $Sub(\mathcal{P}(I(\mathbb{D})))$ é fechado sob qualquer operação de $\mathfrak{A}(I)$, com exceção do complemento $_{}^c$. Para uma operação de complemento em $Sub(\mathcal{P}(I(\mathbb{D})))$, definimos uma operação $\bar{}$, para $A \subseteq Id$, por $\bar{A} := A^c \cap Id$. Nesse caso, $\langle Sub(\mathcal{P}(I(\mathbb{D}))), \cup, \cap, \bar{}, \emptyset, Id \rangle$ é uma álgebra de Boole e as operações $\cap$ e $\circ$ colapsam em $Sub(\mathcal{P}(I(\mathbb{D})))$.

Exemplo 89 Seja $M = \{[1, 1], [3, 3]\}$ e $N = \{[3, 3], [5, 5]\}$:

- $M \circ N = \{[3, 3]\}$;
- $M \cap N = \{[3, 3]\}$.

Por último, a estrutura $\mathfrak{A}(I)$ tem operações de domínio e codomínio modais, respectivamente, se introduzirmos:

$$\text{para } A \in \mathcal{P}(I(\mathbb{D})) : A^d := \{[a, a] : [a, b] \in A\}; \quad (2.24)$$

$$\text{para } A \in \mathcal{P}(I(\mathbb{D})) : A^{cd} := \{[b, b] : [a, b] \in A\}. \quad (2.25)$$

Para a condição (i) da Definição 57 de domínio⁸, em uma estrutura de vizinhança de intervalos desse exemplo, denotada por $\mathfrak{A}(I)$, como todo elemento do universo é um conjunto

⁸ Apenas as condições referentes à operação de domínio serão discutidas, dado o codomínio ser simétrico.

de intervalos, o operador ${}^d : \mathcal{P}(I(\mathbb{D})) \rightarrow \mathcal{P}(I(\mathbb{D}))$ nos retorna um conjunto composto de intervalos degenerados correspondentes ao primeiro instante de cada intervalo do conjunto operado. Portanto, é, de certo, imediato obter que elementos de um dado conjunto A de intervalos são intervalos em A em composição com instantes iniciais de cada intervalo.

Exemplo 90 *Seja $A \in \mathcal{P}(I(\mathbb{D}))$ o seguinte conjunto $\{[1, 2], [4, 6], [8, 8]\}$. Consequentemente, $A^d = \{[1, 1], [4, 4], [8, 8]\}$ e, então, $A^d \circ A = \{[1, 2], [4, 6], [8, 8]\}$. Logo, $A \subseteq A^d \circ A$.*

As demais condições (ii) - da Definição 57 de domínio - e (iii) - da Definição 58 de domínio modal - são também intuitivas.

Para (ii), se anexarmos intervalos degenerados de um conjunto subidentidade A à esquerda de intervalos de um conjunto arbitrário X , então os instantes iniciais dessa composição serão constituídos de elementos de A , ou seja, $(A \circ X)^d \subseteq A$. Por outro lado, é possível que $[a, a] \in A$ enquanto $[a, a] \notin X^d$. Nesse caso, a composição não estaria bem definida para esse específico elemento $[a, a]$ e, portanto, $A \not\subseteq (A \circ X)^d$.

Por fim, a condição (iii) afirma que, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{P}(I(\mathbb{D}))$, intervalos em $X \circ Y$ e em $X \circ Y^d$ tem exatamente os mesmos instantes iniciais.

Exemplo 91 *Seja $A = \{[1, 1], [3, 3], [5, 5]\}$ e $X = \{[1, 2], [3, 6], [7, 8], [9, 9]\}$. Assim, $A \circ X = \{[1, 2], [3, 6]\}$ e, então, $(A \circ X)^d = \{[1, 1], [3, 3]\} \subseteq \{[1, 1], [3, 3], [5, 5]\} = A$. Porém, $A \not\subseteq (A \circ X)^d$, dado que $[5, 5] \in A$ e $[5, b] \notin X$, para qualquer $b \in \mathbb{D}$.*

Para (iii), considere $Y = \{[2, 4], [8, 10]\}$. Portanto: $Y^d = \{[2, 2], [8, 8]\}$, $X \circ Y = \{[1, 4], [7, 10]\}$ e $X \circ Y^d = \{[1, 2], [7, 8]\}$. Consequentemente, $(X \circ Y)^d = \{[1, 1], [7, 7]\} = (X \circ Y^d)^d$.

Proposição 92 *A estrutura $\mathfrak{A}(I) = \langle \mathcal{P}(I(\mathbb{D})), \cup, \cap, \circ, {}^c, {}^d, {}^{cd}, \emptyset, I(\mathbb{D}), Id \rangle$ é uma álgebra da vizinhança.*

Demonstração: (i) *É de conhecimento geral que $\langle \mathcal{P}(I(\mathbb{D})), \cup, \cap, {}^c, \emptyset, I(\mathbb{D}) \rangle$ é uma álgebra de Boole de conjuntos (Rasiowa, 1974, Capítulo VI).*

(ii) *$\langle \mathcal{P}(I(\mathbb{D})), \circ, Id \rangle$ é um monoide:*

(Associatividade) Seja $X, Y, Z \in \mathcal{P}(I(\mathbb{D}))$:

$$\begin{aligned} [m, n] \in X \circ (Y \circ Z) &\iff \exists c_1 : [m, c_1] \in X \wedge [c_1, n] \in Y \circ Z \\ &\iff \exists c_1, c_2 : [m, c_1] \in X \wedge [c_1, c_2] \in Y \wedge [c_2, n] \in Z \\ &\iff \exists c_2 : [m, c_2] \in X \circ Y \wedge [c_2, n] \in Z \\ &\iff [m, n] \in (X \circ Y) \circ Z. \end{aligned}$$

(Elemento Neutro) Seja $X \in \mathcal{P}(I(\mathbb{D}))$ e $Id := \{[a, a] : a \in \mathbb{D}\} \in \mathcal{P}(I(\mathbb{D}))$:

$$\begin{aligned} [m, n] \in X &\iff \exists n : [m, n] \in X \wedge [n, n] \in Id \\ &\iff [m, n] \in X \circ Id. \\ [m, n] \in X &\iff \exists m : [m, m] \in Id \wedge [m, n] \in X \\ &\iff [m, n] \in Id \circ X. \end{aligned}$$

(iii) $\circ$ é distributiva em $\cup$ e tem $\emptyset$ como elemento absorvente:

(Distributividade) Seja $X, Y, Z \in \mathcal{P}(I(\mathbb{D}))$:

$$\begin{aligned}
 [m, n] \in X \circ (Y \cup Z) &\iff \exists c_1 : [m, c_1] \in X \wedge [c_1, n] \in Y \cup Z \\
 &\iff \exists c_1 : [m, c_1] \in X \wedge ([c_1, n] \in Y \vee [c_1, n] \in Z) \\
 &\iff \exists c_1 : ([m, c_1] \in X \wedge [c_1, n] \in Y) \vee ([m, c_1] \in X \wedge [c_1, n] \in Z) \\
 &\implies [m, n] \in X \circ Y \vee [m, n] \in X \circ Z \\
 &\iff [m, n] \in (X \circ Y) \cup (X \circ Z).
 \end{aligned}$$

Para $[\iff]$ na quarta linha:

$$\begin{aligned}
 &[m, n] \in X \circ Y \vee [m, n] \in X \circ Z \\
 \implies &\exists c_1, c_2 : \underbrace{([m, c_1] \in X \wedge [c_1, n] \in Y)}_{(*)} \vee \underbrace{([m, c_2] \in X \wedge [c_2, n] \in Z)}_{(**)} \\
 (*) &\implies \exists c_1 : [m, c_1] \in X \wedge [c_1, n] \in Y \cup Z, \quad (\text{como } Y \subseteq Y \cup Z) \\
 &\implies [m, n] \in X \circ (Y \cup Z). \\
 (**) &\implies \exists c_2 : [m, c_2] \in X \wedge [c_2, n] \in Y \cup Z, \quad (\text{como } Z \subseteq Y \cup Z) \\
 &\implies [m, n] \in X \circ (Y \cup Z).
 \end{aligned}$$

(Elemento Absorvente) Imediato. Não há elemento em $\emptyset$ e, portanto, não há nenhum elemento na composição de $\emptyset$ com qualquer outro conjunto.

(iv) $^d : \mathcal{P}(I(\mathbb{D})) \rightarrow \mathcal{P}(I(\mathbb{D}))$ e $^{cd} : \mathcal{P}(I(\mathbb{D})) \rightarrow \mathcal{P}(I(\mathbb{D}))$ são operações de domínio e codomínio modais:

- Dado $X \in \mathcal{P}(I(\mathbb{D}))$, verifica-se que $X \subseteq X^d \circ X$ e $X \subseteq X \circ X^{cd}$:

$$\begin{aligned}
 [m, n] \in X &\implies \exists m : [m, m] \in X^d \wedge [m, n] \in X \\
 &\implies [m, n] \in X^d \circ X. \\
 [m, n] \in X &\implies \exists n : [m, n] \in X \wedge [n, n] \in X^{cd} \\
 &\implies [m, n] \in X \circ X^{cd}.
 \end{aligned}$$

- Dados $X \in \mathcal{P}(I(\mathbb{D}))$ e $A \subseteq Id$, verifica-se que $(A \circ X)^d \subseteq A$ e $(X \circ A)^{cd} \subseteq A$:

$$\begin{aligned}
 [m, m] \in (A \circ X)^d &\implies \exists n : [m, n] \in A \circ X \\
 &\implies \exists n, c_1 : m = c_1 \wedge [m, c_1] \in A \wedge [c_1, n] \in X \\
 &\implies [m, m] \in A. \\
 [n, n] \in (X \circ A)^{cd} &\implies \exists m : [m, n] \in X \circ A \\
 &\implies \exists m, c_1 : n = c_1 \wedge [m, c_1] \in X \wedge [c_1, n] \in A \\
 &\implies [n, n] \in A.
 \end{aligned}$$

- Dados $X, Y \in \mathcal{P}(I(\mathbb{D}))$, verifica-se que $(X \circ Y)^d = (X \circ Y^d)^d$ e $(X \circ Y)^{cd} = (X^{cd} \circ Y)^{cd}$:

$$\begin{aligned}
[m, m] \in (X \circ Y)^d &\iff \exists n : [m, n] \in X \circ Y \\
&\iff \exists n, c_1 : [m, c_1] \in X \wedge [c_1, n] \in Y \\
&\iff \exists c_1 : [m, c_1] \in X \wedge [c_1, c_1] \in Y^d \\
&\iff \exists c_1 : [m, c_1] \in X \circ Y^d \\
&\iff [m, m] \in (X \circ Y^d)^d. \\
[n, n] \in (X \circ Y)^{cd} &\iff \exists m : [m, n] \in X \circ Y \\
&\iff \exists m, c_1 : [m, c_1] \in X \wedge [c_1, n] \in Y \\
&\iff \exists c_1 : [c_1, c_1] \in X^{cd} \wedge [c_1, n] \in Y \\
&\iff \exists c_1 : [c_1, n] \in X^{cd} \circ Y \\
&\iff [n, n] \in (X^{cd} \circ Y)^{cd}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathfrak{A}(I) = \langle \mathcal{P}(I(\mathbb{D})), \cup, \cap, \circ, \mathbb{C}, ^d, ^{cd}, \emptyset, I(\mathbb{D}), Id \rangle$ é uma álgebra da vizinhança. $\square$

Do modo como construímos esse exemplo de álgebra da vizinhança de intervalos $\mathfrak{A}(I)$, podemos emprestar desta estrutura certas noções e prover uma distinta maneira de olhar para a satisfatibilidade das fórmulas modais na semântica de Kripke da $\mathbf{LPV}^+$. Para isso, apresentamos a definição de conjunto verdade de uma fórmula.

Durante a Seção 2.1, vimos que um modelo de Kripke para a $\mathbf{LPV}^+$ é uma estrutura do tipo $\langle I(\mathbb{D}), R, L, \hat{v} \rangle$, onde $I(\mathbb{D})$ é o domínio da estrutura - o conjunto de todos os possíveis intervalos gerados a partir de um domínio linearmente ordenado -, R e L são relações binárias em $I(\mathbb{D}) \times I(\mathbb{D})$ e $\hat{v}$ uma valoração restrita que interpreta as variáveis proposicionais em intervalos que a satisfaz.

Embora $\hat{v}$ seja definida apenas para as variáveis proposicionais, é possível estender $\hat{v}$ para todo o conjunto de fórmulas. Na roupagem de Chellas (1980), o que para nós é dado por valoração, para o autor o objeto recebe o nome de conjunto verdade. Um conjunto verdade de uma fórmula qualquer φ é um subconjunto de W (ou, no caso da semântica de Kripke da $\mathbf{LPV}^+$, subconjunto de $I(\mathbb{D})$):

$$\|\varphi\| = \{[x, y] \in I(\mathbb{D}) : (\mathfrak{M}, [x, y]) \models \varphi\}. \quad (2.26)$$

Assim, o conjunto verdade é o conjunto de todos os elementos que satisfazem a fórmula, naturalmente, uma extensão de $\hat{v}$ para todo o conjunto de fórmulas. Conferindo o Teorema 2.10 de Chellas (1980, p. 38), constata-se que:

- (i) $\|p\| = \hat{v}(p)$, para $p \in Var$;
- (ii) $\|\neg\varphi\| = \|\varphi\|^\mathbb{C}$;
- (iii) $\|\varphi \wedge \psi\| = \|\varphi\| \cap \|\psi\|$;
- (iv) $\|\varphi \vee \psi\| = \|\varphi\| \cup \|\psi\|$;
- (v) $\|\varphi \rightarrow \psi\| = \|\varphi\|^\mathbb{C} \cup \|\psi\|$;
- (vi) $\|\top\| = I(\mathbb{D})$;

(vii) $\|\perp\| = \emptyset$.

Para as fórmulas modais, podemos utilizar as operações de composição, domínio e co-domínio definidas na álgebra da vizinhança de intervalos $\mathfrak{A}(I)$.

Proposição 93 *Seja $\mathfrak{M}$ um modelo (de Kripke) para a LPV^+ , $\varphi \in \text{For}$ e intervalos na forma $[x, y]$ como intervalos em $I(\mathbb{D})$. Assim, a satisfatibilidade das fórmulas modais pode ser descrita por:*

- (i) $(\mathfrak{M}, [x, y]) \models \Diamond_I \varphi \iff [x, y] \in \|\varphi\|^{cd} \circ I(\mathbb{D})$;
- (ii) $(\mathfrak{M}, [x, y]) \models \Diamond_r \varphi \iff [x, y] \in I(\mathbb{D}) \circ \|\varphi\|^d$;
- (iii) $(\mathfrak{M}, [x, y]) \models \Box_l \varphi \iff [x, y] \in (\|\varphi\|^{\mathbb{L}})^{cd} \circ I(\mathbb{D})$;
- (iv) $(\mathfrak{M}, [x, y]) \models \Box_r \varphi \iff [x, y] \in I(\mathbb{D}) \circ (\|\varphi\|^{\mathbb{L}})^d$.

Demonstração: (i) *Sabe-se que $\|\varphi\|^{cd}$ é o conjunto de conjuntos de todos os instantes finais dos intervalos temporais em que a fórmula φ é válida. Sendo $I(\mathbb{D})$ o conjunto de todos os intervalos temporais possíveis de $\mathbb{D}$, segue que $\|\varphi\|^{cd} \circ I(\mathbb{D}) = \{[w, v] : \exists w \in \mathbb{D} \text{ t.q. } [w, w] \in \|\varphi\|^{cd} \text{ e } [w, v] \in I(\mathbb{D})\}$, isto é, o conjunto que contempla intervalos temporais que possuem instantes iniciais iguais aos instantes finais dos intervalos que satisfazem φ .*

Assim, $(\mathfrak{M}, [x, y]) \models \Diamond_I \varphi \implies \exists w \in \mathbb{D} : [w, x] \in \|\varphi\| \implies [x, x] \in \|\varphi\|^{cd}$. Como $[x, y] \in I(\mathbb{D})$ e $[x, x] \in \|\varphi\|^{cd}$, então $[x, y] \in \|\varphi\|^{cd} \circ I(\mathbb{D})$.

Por outro lado, se $[x, y] \in \|\varphi\|^{cd} \circ I(\mathbb{D})$, então $[x, y]$ é um intervalo composto à direita de algum intervalo que satisfaz a fórmula φ e, portanto, podemos dizer que $(\mathfrak{M}, [x, y]) \models \Diamond_I \varphi$.

(ii) *Simétrico e analogamente ao caso (i). Sabe-se que $\|\varphi\|^d$ é o conjunto de conjuntos de todos os instantes iniciais dos intervalos temporais em que a fórmula φ é válida. Logo, $I(\mathbb{D}) \circ \|\varphi\|^d = \{[w, v] : \exists v \in \mathbb{D} \text{ t.q. } [w, v] \in I(\mathbb{D}) \text{ e } [v, v] \in \|\varphi\|^d\}$, isto é, o conjunto que contempla intervalos temporais que possuem instantes finais iguais aos instantes iniciais dos intervalos que satisfazem φ .*

Assim, $(\mathfrak{M}, [x, y]) \models \Diamond_r \varphi \implies \exists z \in \mathbb{D} : [y, z] \in \|\varphi\| \implies [y, y] \in \|\varphi\|^d$. Como $[x, y] \in I(\mathbb{D})$ e $[y, y] \in \|\varphi\|^d$, então $[x, y] \in I(\mathbb{D}) \circ \|\varphi\|^d$.

Por outro lado, se $[x, y] \in I(\mathbb{D}) \circ \|\varphi\|^d$, então $[x, y]$ é um intervalo composto à esquerda de algum intervalo que satisfaz a fórmula φ e, portanto, podemos dizer que $(\mathfrak{M}, [x, y]) \models \Diamond_r \varphi$.

(iii) *Para os operadores $\Box$ o caso carece de uma certa intuição imediata, o resultado segue da inter-definição entre operadores $\Diamond$ e $\Box$. Porém, Höfner (2007, p. 66) indica que $(\|\varphi\|^{\mathbb{L}})^{cd} \circ I(\mathbb{D})$ “é o conjunto de todos os pares, cujos ‘predecessores’ (elementos que podem ser compostos pela esquerda) são todos elementos de” $\|\varphi\|$, i. e., contempla intervalos os quais todos os intervalos predecessores satisfazem a fórmula φ .*

Pela inter-definição, segue-se que $(\mathfrak{M}, [x, y]) \models \Box_l \varphi \iff (\mathfrak{M}, [x, y]) \models \neg \Diamond_l \neg \varphi \iff [x, y] \in ((\neg \varphi)^{cd} \circ I(\mathbb{D}))^{\mathbb{L}} \iff^9 [x, y] \in (\|\varphi\|^{\mathbb{L}})^{cd} \circ I(\mathbb{D})$.

(iv) *Simétrico ao item (iii).*

⁹ Essa última passagem segue do resultado que obtivemos na Proposição 67 (ii): $\sim(a \circ 1) = -a \circ 1$, para todo elemento subidentidade a .

Segue que $(\mathfrak{M}, [x, y]) \models \Box_r \varphi \iff (\mathfrak{M}, [x, y]) \models \neg \Diamond_r \neg \varphi \iff [x, y] \in (I(\mathbb{D}) \circ \|\neg \varphi\|^d)^{\mathbb{C}} \iff^{10} [x, y] \in I(\mathbb{D}) \circ (\|\varphi\|^{\mathbb{C}})^d$.

Podemos entender $I(\mathbb{D}) \circ (\|\varphi\|^{\mathbb{C}})^d$ como o conjunto de intervalos os quais todos os intervalos sucessores satisfazem a fórmula φ . $\square$

2.3.2 Consequência algébrica

A seguir, definiremos uma consequência algébrica para a $\mathbf{LPV}^+$ levando em consideração uma álgebra da vizinhança $\mathfrak{A}$ - a candidata à álgebra modelo para essa referida lógica - e a motivação dada anteriormente pelo exemplo dessa álgebra.

Definição 94 *Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra da vizinhança e A seu conjunto universo. Uma valoração restrita, em $\mathfrak{A}$, é uma função $\hat{v}^{\mathfrak{A}} : \text{Var} \rightarrow A$, que interpreta cada variável proposicional da linguagem da $\mathbf{LPV}^+$ em um elemento algébrico da $\mathfrak{A}$.*

Definição 95 *Seja $\mathfrak{A} = \langle A, \Upsilon, \wedge, \circ, \sim, \lceil, \rceil, 0, 1, 1' \rangle$ uma álgebra da vizinhança. Uma valoração, em $\mathfrak{A}$, é uma função $v^{\mathfrak{A}} : \text{For} \rightarrow A$ que estende $\hat{v}^{\mathfrak{A}}$ para todo o conjunto de fórmulas da linguagem da $\mathbf{LPV}^+$ da seguinte maneira:*

- (i) $v^{\mathfrak{A}}(\perp) := 0$;
- (ii) $v^{\mathfrak{A}}(\top) := 1$;
- (iii) $v^{\mathfrak{A}}(\neg \varphi) := \sim v^{\mathfrak{A}}(\varphi)$;
- (iv) $v^{\mathfrak{A}}(\varphi \vee \psi) := v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \Upsilon v^{\mathfrak{A}}(\psi)$;
- (v) $v^{\mathfrak{A}}(\varphi \wedge \psi) := v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \wedge v^{\mathfrak{A}}(\psi)$;
- (vi) $v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_l \varphi) := \delta_l(v^{\mathfrak{A}}(\varphi)) = v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \rceil \circ 1$;
- (vii) $v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_r \varphi) := \delta_r(v^{\mathfrak{A}}(\varphi)) = 1 \circ \lceil v^{\mathfrak{A}}(\varphi)$.

Como consequência imediata da definição acima e da definição dos demais conectivos na linguagem da $\mathbf{LPV}^+$ (conferir o tópico “Linguagem proposicional” da Seção 2.1), elencamos as seguintes valorações sem demonstração:

- $v^{\mathfrak{A}}(\varphi \rightarrow \psi) = \sim v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \Upsilon v^{\mathfrak{A}}(\psi)$;
- $v^{\mathfrak{A}}(\varphi \leftrightarrow \psi) = (\sim v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \Upsilon v^{\mathfrak{A}}(\psi)) \wedge (\sim v^{\mathfrak{A}}(\psi) \Upsilon v^{\mathfrak{A}}(\varphi))$;
- $v^{\mathfrak{A}}(\Box_r \varphi) = \omega_r(v^{\mathfrak{A}}(\varphi)) = 1 \circ -(\lceil \sim v^{\mathfrak{A}}(\varphi))$;
- $v^{\mathfrak{A}}(\Box_l \varphi) = \omega_l(v^{\mathfrak{A}}(\varphi)) = -([\sim v^{\mathfrak{A}}(\varphi)] \rceil) \circ 1$.

Definição 96 *Uma valoração $v^{\mathfrak{A}} : \text{For} \rightarrow A$ é um modelo para uma fórmula φ da linguagem da $\mathbf{LPV}^+$ se, e somente se, $v^{\mathfrak{A}}(\varphi) = 1$.*

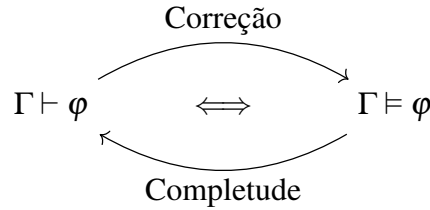
Definição 97 *Uma valoração $v^{\mathfrak{A}} : \text{For} \rightarrow A$ é um modelo para um conjunto de fórmulas Γ da linguagem da $\mathbf{LPV}^+$ se, e somente se, $v^{\mathfrak{A}}$ é um modelo para toda fórmula $\varphi \in \Gamma$.*

¹⁰ Simétrico ao caso do item (iii): $\sim(1 \circ a) = 1 \circ -a$, para todo elemento subidentidade a .

Definição 98 Uma fórmula φ é válida em $\mathfrak{A}$ se, e somente se, para toda valoração $v^{\mathfrak{A}} : For \rightarrow A$, a valoração é modelo para φ .

Quando uma fórmula φ é válida em $\mathfrak{A}$, indicamos por $\mathfrak{A} \models \varphi$. Se for o caso $(\mathfrak{A}, \Gamma) \models \varphi$, entenderemos que φ é uma consequência semântica (algébrica) do conjunto de fórmulas Γ , isto é, todo modelo de Γ é, também, modelo de φ .

Figura 9 – Esquema de adequação



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

A seguir, alcançaremos os resultados que corroboram para a adequação algébrica. Destacaremos resultados de correção, tanto a versão fraca quanto a forte. Do esquema disposto acima, temos os resultados em suas versões forte; e quando $\Gamma = \emptyset$, então temos a versão fraca.

Com o resultado de *Correção Fraca* obtemos que todos axiomas e teoremas são válidos na semântica algébrica, enquanto que a *Correção Forte* garante, além da validade semântica dos axiomas e teoremas, que qualquer dedução ou derivação também é válida.

O caminho oposto toma o nome de *Completude*. Este caminho, em sua versão fraca, garante que toda fórmula válida segundo a semântica algébrica investigada deve ser um teorema do sistema lógico axiomático. Já a *Completude Forte*, que toda consequência algébrica válida tenha como correspondente uma dedução sintática.

A *adequação* surge ao se combinar ambos os caminhos, isto é, ao se verificar que o sistema dedutivo é correto e completo (fraco e forte) segundo o modelo proposto. Então temos a adequação (fraca e forte) entre as duas apresentações lógicas, a sintática e a semântica.

2.3.2.1 Correção

Antes de atingirmos o Teorema de Correção, iremos precisar de mais alguns resultados auxiliares para a sua demonstração.

Lema 99 $\mathfrak{A} \models \varphi \rightarrow \psi \iff v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \preceq v^{\mathfrak{A}}(\psi)$.

Demonstração: Lembremos que $\mathfrak{A} \models \varphi \rightarrow \psi$ se, e somente se, $v^{\mathfrak{A}}(\varphi \rightarrow \psi) = 1$.

Assim, $v^{\mathfrak{A}}(\varphi \rightarrow \psi) = 1 \iff \sim v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \vee v^{\mathfrak{A}}(\psi) = 1$.

Agora, se $1 \preceq \sim v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \vee v^{\mathfrak{A}}(\psi)$, com a *shunting-rule* da Proposição 51, segue-se que $1 \wedge v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \preceq v^{\mathfrak{A}}(\psi)$ e, portanto, $v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \preceq v^{\mathfrak{A}}(\psi)$. $\square$

Lema 100 Em uma álgebra da vizinhança $\mathfrak{A}$, para qualquer $a \in Sub(A) \subseteq A$:

- (i) $a \circ 1 \preceq (a \circ 1)^\top \circ 1$;
(ii) $1 \circ a \preceq 1 \circ^\top (1 \circ a)$.

Demonstração: (i) Da Proposição 67 (v), $a \preceq a \circ 1$. Pela monotonicidade de $^\top$, Prop. 72 (ix), segue-se que $a^\top \preceq (a \circ 1)^\top$. Com a aplicação da Proposição 72 (ii), $a \preceq (a \circ 1)^\top$. Logo, pela Proposição 55 (iii), tem-se que $a \circ 1 \preceq (a \circ 1)^\top \circ 1$.

(ii) Da Proposição 67 (vi), $a \preceq 1 \circ a$. Pela monotonicidade de $^\top$, Prop. 71 (ix), segue-se que $^\top a \preceq^\top (1 \circ a)$. Com a aplicação da Proposição 71 (ii), $a \preceq^\top (1 \circ a)$. Por fim, pela Proposição 55 (iv), tem-se que $1 \circ a \preceq 1 \circ^\top (1 \circ a)$. $\square$

Teorema 101 (Correção Fraca) *Seja φ uma fórmula da linguagem da LPV^+ . Se $\vdash \varphi$ em $\mathcal{H}_{LPV^+}$, então $\mathfrak{A} \models \varphi$.*

Demonstração: *Seja $\mathfrak{A} = \langle A, \top, \wedge, \circ, \sim, {}^\top, {}^\top, 0, 1, 1' \rangle$ uma álgebra da vizinhança.*

Se $\vdash \varphi$ ocorre, então φ é um axioma ou teorema de $\mathcal{H}_{LPV^+}$. Caso φ seja um axioma, mostraremos que φ é válido em $\mathfrak{A}$. Caso φ seja um teorema, mostraremos que as regras de inferência de $\mathcal{H}_{LPV^+}$ preservam validade.

(Ax0) *Como álgebras booleanas são modelos algébricos para a LPC, então qualquer axioma clássico ou teorema também é válido em $\mathfrak{A}$.*

$$(Ax1) \quad \Box_*(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box_*\varphi \rightarrow \Box_*\psi) :$$

Pelo Corolário 83, $\omega_l(x \wedge y) = \omega_l(x) \wedge \omega_l(y)$ e $\omega_r(x \wedge y) = \omega_r(x) \wedge \omega_r(y)$. Assim, para qualquer $ \in \{l, r\}$, é o caso que $v^{\mathfrak{A}}(\varphi \rightarrow \psi) \wedge v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \preceq v^{\mathfrak{A}}(\psi) \implies \omega_*(v^{\mathfrak{A}}(\varphi \rightarrow \psi) \wedge v^{\mathfrak{A}}(\varphi)) \preceq \omega_*(v^{\mathfrak{A}}(\psi)) \implies \omega_*(v^{\mathfrak{A}}(\varphi \rightarrow \psi)) \wedge \omega_*(v^{\mathfrak{A}}(\varphi)) \preceq \omega_*(v^{\mathfrak{A}}(\psi))$. Com a aplicação da shunting-rule, obtemos que $\omega_*(v^{\mathfrak{A}}(\varphi \rightarrow \psi)) \preceq \sim(\omega_*(v^{\mathfrak{A}}(\varphi))) \top \omega_*(v^{\mathfrak{A}}(\psi))$ e, portanto, $v^{\mathfrak{A}}(\Box_*(\varphi \rightarrow \psi)) \preceq v^{\mathfrak{A}}(\Box_*\varphi \rightarrow \Box_*\psi)$. Sendo assim, (Ax1) é válido em $\mathfrak{A}$.*

$$(Ax2) \quad \Box_*\varphi \rightarrow \Diamond_*\varphi :$$

$$\begin{aligned} v^{\mathfrak{A}}(\Box_l\varphi \rightarrow \Diamond_l\varphi) &= \sim v^{\mathfrak{A}}(\Box_l\varphi) \top v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_l\varphi) \\ &= \sim(-([\sim v^{\mathfrak{A}}(\varphi)]^\top) \circ 1) \top ([v^{\mathfrak{A}}(\varphi)]^\top \circ 1) \\ \sim(a \circ 1) &= -a \circ 1, &= (- -([\sim v^{\mathfrak{A}}(\varphi)]^\top) \circ 1) \top ([v^{\mathfrak{A}}(\varphi)]^\top \circ 1) \\ - -a &= a, &= ([\sim v^{\mathfrak{A}}(\varphi)]^\top \circ 1) \top ([v^{\mathfrak{A}}(\varphi)]^\top \circ 1) \\ \text{Distributividade de } \circ, & &= ([\sim v^{\mathfrak{A}}(\varphi)]^\top \top [v^{\mathfrak{A}}(\varphi)]^\top) \circ 1 \\ (x \top y)^\top &= x^\top \top y^\top, &= [\sim v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \top v^{\mathfrak{A}}(\varphi)]^\top \circ 1 \\ \sim x \top x &= 1, &= 1^\top \circ 1 \\ 1^\top &= 1', &= 1' \circ 1 \\ 1' &\text{ é neutro para } \circ, &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^{\mathfrak{A}}(\Box_r\varphi \rightarrow \Diamond_r\varphi) &= \sim v^{\mathfrak{A}}(\Box_r\varphi) \top v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_r\varphi) \\ &= \sim(1 \circ -(\top[\sim v^{\mathfrak{A}}(\varphi)])) \top (1 \circ^\top [v^{\mathfrak{A}}(\varphi)]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sim (1 \circ a) &= 1 \circ -a, & &= (1 \circ - - (\neg[\sim v^{\mathfrak{A}}(\varphi)])) \vee (1 \circ \neg[v^{\mathfrak{A}}(\varphi)]) \\
--a &= a, & &= (1 \circ \neg[\sim v^{\mathfrak{A}}(\varphi)]) \vee (1 \circ \neg[v^{\mathfrak{A}}(\varphi)]) \\
\text{Distributividade de } \circ, & & &= 1 \circ (\neg[\sim v^{\mathfrak{A}}(\varphi)] \vee \neg[v^{\mathfrak{A}}(\varphi)]) \\
\neg(x \vee y) &= \neg x \vee \neg y, & &= 1 \circ \neg[\sim v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \vee v^{\mathfrak{A}}(\varphi)] \\
\sim x \vee x &= 1, & &= 1 \circ \neg 1 \\
\neg 1 &= 1', & &= 1 \circ 1' \\
1' \text{ é neutro para } \circ, & & &= 1.
\end{aligned}$$

Sendo assim, (Ax2) também é válido em $\mathfrak{A}$.

$$(Ax3) \varphi \rightarrow \Box_r \Diamond_l \varphi \text{ e } \varphi \rightarrow \Box_l \Diamond_r \varphi :$$

A partir do Corolário 83, obtemos $v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \preceq \omega_r(\delta_l(v^{\mathfrak{A}}(\varphi)))$ e $v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \preceq \omega_l(\delta_r(v^{\mathfrak{A}}(\varphi)))$. Assim, $v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \preceq v^{\mathfrak{A}}(\Box_r \Diamond_l \varphi)$ e $v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \preceq v^{\mathfrak{A}}(\Box_l \Diamond_r \varphi)$. Portanto, (Ax3) é válido em $\mathfrak{A}$.

$$(Ax4) \Diamond_r \Diamond_l \varphi \rightarrow \Box_r \Diamond_l \varphi \text{ e } \Diamond_l \Diamond_r \varphi \rightarrow \Box_l \Diamond_r \varphi :$$

Para esse caso, é suficiente verificar que $v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_r \Diamond_l \varphi) = v^{\mathfrak{A}}(\Box_r \Diamond_l \varphi)$ e $v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_l \Diamond_r \varphi) = v^{\mathfrak{A}}(\Box_l \Diamond_r \varphi)$.

$$\begin{aligned}
v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_r \Diamond_l \varphi) &= 1 \circ \neg(v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_l \varphi)) & v^{\mathfrak{A}}(\Box_r \Diamond_l \varphi) &= 1 \circ -\neg(\sim v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_l \varphi)) \\
&= 1 \circ \neg(v^{\mathfrak{A}}(\varphi)^{\top} \circ 1) & &= 1 \circ -\neg(\sim (v^{\mathfrak{A}}(\varphi)^{\top} \circ 1)) \\
&= 1 \circ (v^{\mathfrak{A}}(\varphi)^{\top} \circ \neg 1) & &= 1 \circ -\neg(-v^{\mathfrak{A}}(\varphi)^{\top} \circ 1) \\
&= 1 \circ (v^{\mathfrak{A}}(\varphi)^{\top} \circ 1') & e &= 1 \circ -(-v^{\mathfrak{A}}(\varphi)^{\top} \circ \neg 1) \\
&= 1 \circ v^{\mathfrak{A}}(\varphi)^{\top} & &= 1 \circ -(-v^{\mathfrak{A}}(\varphi)^{\top} \circ 1') \\
& & &= 1 \circ -(-v^{\mathfrak{A}}(\varphi)^{\top}) \\
& & &= 1 \circ v^{\mathfrak{A}}(\varphi)^{\top} \\
v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_l \Diamond_r \varphi) &= (v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_r \varphi))^{\top} \circ 1 & v^{\mathfrak{A}}(\Box_l \Diamond_r \varphi) &= -(\sim v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_r \varphi))^{\top} \circ 1 \\
&= (1 \circ \neg v^{\mathfrak{A}}(\varphi))^{\top} \circ 1 & &= -(\sim (1 \circ \neg v^{\mathfrak{A}}(\varphi)))^{\top} \circ 1 \\
&= (1^{\top} \circ \neg v^{\mathfrak{A}}(\varphi)) \circ 1 & e &= -(1 \circ -\neg v^{\mathfrak{A}}(\varphi))^{\top} \circ 1 \\
&= (1' \circ \neg v^{\mathfrak{A}}(\varphi)) \circ 1 & &= -(1^{\top} \circ -\neg v^{\mathfrak{A}}(\varphi)) \circ 1 \\
&= \neg v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \circ 1 & &= -(1' \circ -\neg v^{\mathfrak{A}}(\varphi)) \circ 1 \\
& & &= -(\neg v^{\mathfrak{A}}(\varphi)) \circ 1 \\
& & &= \neg v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \circ 1
\end{aligned}$$

Logo, $v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_r \Diamond_l \varphi) \preceq v^{\mathfrak{A}}(\Box_r \Diamond_l \varphi)$ e $v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_l \Diamond_r \varphi) \preceq v^{\mathfrak{A}}(\Box_l \Diamond_r \varphi)$. Donde segue que (Ax4) é também válido em $\mathfrak{A}$.

$$(Ax5) \Diamond_* \Diamond_* \Diamond_* \varphi \rightarrow \Diamond_* \Diamond_* \varphi :$$

Veamos que $v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_l \Diamond_l \Diamond_l \varphi) = v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_l \Diamond_l \varphi)$ e $v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_r \Diamond_r \Diamond_r \varphi) = v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_r \Diamond_r \varphi)$.

$$\begin{array}{ll}
v^{\mathfrak{A}}(\diamond_l \diamond_l \diamond_l \varphi) & v^{\mathfrak{A}}(\diamond_r \diamond_r \diamond_r \varphi) \\
= ((v^{\mathfrak{A}}(\varphi)^{\top} \circ 1)^{\top} \circ 1)^{\top} \circ 1 & = 1 \circ \ulcorner (1 \circ \ulcorner (1 \circ \ulcorner v^{\mathfrak{A}}(\varphi)) \\
= ((v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \circ 1)^{\top} \circ 1)^{\top} \circ 1 & = 1 \circ \ulcorner (1 \circ \ulcorner (1 \circ v^{\mathfrak{A}}(\varphi))) \\
= ((v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \circ 1) \circ 1)^{\top} \circ 1 & = 1 \circ \ulcorner (1 \circ (1 \circ v^{\mathfrak{A}}(\varphi))) \\
= (v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \circ (1 \circ 1))^{\top} \circ 1 & e \quad = 1 \circ \ulcorner ((1 \circ 1) \circ v^{\mathfrak{A}}(\varphi)) \\
= (v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \circ 1)^{\top} \circ 1 & = 1 \circ \ulcorner (1 \circ v^{\mathfrak{A}}(\varphi)) \\
= (v^{\mathfrak{A}}(\varphi)^{\top} \circ 1)^{\top} \circ 1 & = 1 \circ \ulcorner (1 \circ \ulcorner v^{\mathfrak{A}}(\varphi)) \\
= v^{\mathfrak{A}}(\diamond_l \diamond_l \varphi) & = v^{\mathfrak{A}}(\diamond_r \diamond_r \varphi)
\end{array}$$

Por consequência, $v^{\mathfrak{A}}(\diamond_l \diamond_l \diamond_l \varphi) \preceq v^{\mathfrak{A}}(\diamond_l \diamond_l \varphi)$ e $v^{\mathfrak{A}}(\diamond_r \diamond_r \diamond_r \varphi) \preceq v^{\mathfrak{A}}(\diamond_r \diamond_r \varphi)$.

Logo, (Ax5) é válido em $\mathfrak{A}$.

(Ax6) $\Box_r \diamond_l \varphi \rightarrow \diamond_l \diamond_r \diamond_r \varphi \vee \diamond_l \diamond_l \diamond_r \varphi$ e $\Box_l \diamond_r \varphi \rightarrow \diamond_r \diamond_l \diamond_l \varphi \vee \diamond_r \diamond_r \diamond_l \varphi$:

Sabendo que, para qualquer $x \in A$, $x \preceq 1 \circ x$ (Proposição 67 (vi)), derivamos $x \preceq 1 \circ x \implies \ulcorner v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \preceq 1 \circ \ulcorner v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \implies \ulcorner \ulcorner v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \preceq \ulcorner (1 \circ \ulcorner v^{\mathfrak{A}}(\varphi)) \implies \ulcorner v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \preceq \ulcorner (1 \circ \ulcorner v^{\mathfrak{A}}(\varphi)) \implies 1 \circ \ulcorner v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \preceq 1 \circ \ulcorner (1 \circ \ulcorner v^{\mathfrak{A}}(\varphi))$. Dado que $1 \circ \ulcorner v^{\mathfrak{A}}(\varphi) = v^{\mathfrak{A}}(\diamond_r \varphi)$, então segue que $v^{\mathfrak{A}}(\diamond_r \varphi) \preceq v^{\mathfrak{A}}(\diamond_r \diamond_r \varphi)$. Por outro lado, de $x \preceq x \circ 1$ (Proposição 67 (v)), derivamos $x \preceq x \circ 1 \implies v^{\mathfrak{A}}(\varphi)^{\top} \preceq v^{\mathfrak{A}}(\varphi)^{\top} \circ 1 \implies v^{\mathfrak{A}}(\varphi)^{\top\top} \preceq (v^{\mathfrak{A}}(\varphi)^{\top} \circ 1)^{\top} \implies v^{\mathfrak{A}}(\varphi)^{\top} \preceq (v^{\mathfrak{A}}(\varphi)^{\top} \circ 1)^{\top} \implies v^{\mathfrak{A}}(\varphi)^{\top} \circ 1 \preceq (v^{\mathfrak{A}}(\varphi)^{\top} \circ 1)^{\top} \circ 1$. Dado que $v^{\mathfrak{A}}(\varphi)^{\top} \circ 1 = v^{\mathfrak{A}}(\diamond_l \varphi)$, então segue que $v^{\mathfrak{A}}(\diamond_l \varphi) \preceq v^{\mathfrak{A}}(\diamond_l \diamond_l \varphi)$.

Pela monotocidade de δ_l , uma consequência dos pares de adjunção, obtemos $v^{\mathfrak{A}}(\diamond_l \diamond_r \varphi) \preceq v^{\mathfrak{A}}(\diamond_l \diamond_r \diamond_r \varphi)$. Também, como $v^{\mathfrak{A}}(\diamond_l \varphi) \preceq v^{\mathfrak{A}}(\diamond_l \diamond_l \varphi)$, então $v^{\mathfrak{A}}(\diamond_l \diamond_r \varphi) \preceq v^{\mathfrak{A}}(\diamond_l \diamond_l \diamond_r \varphi)$. E, portanto, $v^{\mathfrak{A}}(\diamond_l \diamond_r \varphi) \vee v^{\mathfrak{A}}(\diamond_l \diamond_r \varphi) \preceq v^{\mathfrak{A}}(\diamond_l \diamond_r \diamond_r \varphi) \vee v^{\mathfrak{A}}(\diamond_l \diamond_l \diamond_r \varphi)$. Pela idempotência de $\vee$, segue-se que $v^{\mathfrak{A}}(\diamond_l \diamond_r \varphi) \preceq v^{\mathfrak{A}}(\diamond_l \diamond_r \diamond_r \varphi) \vee v^{\mathfrak{A}}(\diamond_l \diamond_l \diamond_r \varphi)$. Por fim, resta-nos mostrar que $v(\Box_r \diamond_l \varphi) \preceq v(\diamond_l \diamond_r \varphi)$.

Sabemos que, para qualquer $x \in A$, $x \preceq 1 \circ x^{\top}$ pela Proposição 72 (vii), assim $x \preceq 1 \circ x^{\top} \implies \ulcorner x \circ x \preceq \ulcorner x \circ (1 \circ x^{\top}) \implies x \preceq (\ulcorner x \circ 1) \circ x^{\top}$. Mas $(\ulcorner x \circ 1) \circ x^{\top} \preceq \ulcorner x \circ 1$, dado que $x^{\top} \preceq 1 \implies 1 \circ x^{\top} \preceq 1 \circ 1 \implies \ulcorner x \circ (1 \circ x^{\top}) \preceq \ulcorner x \circ 1 \implies (\ulcorner x \circ 1) \circ x^{\top} \preceq \ulcorner x \circ 1$. Portanto, $x \preceq \ulcorner x \circ 1$. Como $x \preceq 1 \circ x^{\top} \implies x \preceq \ulcorner x \circ 1$, segue da Proposição 35 que $1 \circ x^{\top} \preceq \ulcorner x \circ 1$. E, em particular, $1 \circ v^{\mathfrak{A}}(\varphi)^{\top} \preceq \ulcorner v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \circ 1$. Como já visto durante a prova da validade de (Ax4), temos que $1 \circ v^{\mathfrak{A}}(\varphi)^{\top} = v^{\mathfrak{A}}(\Box_r \diamond_l \varphi)$ e $\ulcorner v(\varphi) \circ 1 = v^{\mathfrak{A}}(\diamond_l \diamond_r \varphi)$, portanto $v^{\mathfrak{A}}(\Box_r \diamond_l \varphi) \preceq v^{\mathfrak{A}}(\diamond_l \diamond_r \varphi)$. Logo, dado $v^{\mathfrak{A}}(\Box_r \diamond_l \varphi) \preceq v^{\mathfrak{A}}(\diamond_l \diamond_r \varphi)$ e $v^{\mathfrak{A}}(\diamond_l \diamond_r \varphi) \preceq v^{\mathfrak{A}}(\diamond_l \diamond_r \diamond_r \varphi) \vee v^{\mathfrak{A}}(\diamond_l \diamond_l \diamond_r \varphi)$, então $v^{\mathfrak{A}}(\Box_r \diamond_l \varphi) \preceq v^{\mathfrak{A}}(\diamond_l \diamond_r \diamond_r \varphi) \vee v^{\mathfrak{A}}(\diamond_l \diamond_l \diamond_r \varphi)$ e a fórmula $\Box_r \diamond_l \varphi \rightarrow \diamond_l \diamond_r \diamond_r \varphi \vee \diamond_l \diamond_l \diamond_r \varphi$ é válida em $\mathfrak{A}$.

De maneira similar obtemos a validade da segunda fórmula de (Ax6). Como já visto, $v^{\mathfrak{A}}(\diamond_r \varphi) \preceq v^{\mathfrak{A}}(\diamond_r \diamond_r \varphi)$ e $v^{\mathfrak{A}}(\diamond_l \varphi) \preceq v^{\mathfrak{A}}(\diamond_l \diamond_l \varphi)$. Assim, segue-se que $v^{\mathfrak{A}}(\diamond_r \diamond_l \varphi) \preceq v^{\mathfrak{A}}(\diamond_r \diamond_r \diamond_l \varphi)$ e, com a monotonicidade de δ_r , $v^{\mathfrak{A}}(\diamond_r \diamond_l \varphi) \preceq v^{\mathfrak{A}}(\diamond_r \diamond_l \diamond_l \varphi)$. Logo, $v^{\mathfrak{A}}(\diamond_r \diamond_l \varphi) \preceq v^{\mathfrak{A}}(\diamond_r \diamond_l \diamond_l \varphi) \vee v^{\mathfrak{A}}(\diamond_r \diamond_r \diamond_l \varphi)$. Resta-nos mostrar que $v^{\mathfrak{A}}(\Box_l \diamond_r \varphi) \preceq v^{\mathfrak{A}}(\diamond_r \diamond_l \varphi)$.

Vejamus que $x \preceq \ulcorner x \circ 1 \implies x \circ x^{\top} \preceq (\ulcorner x \circ 1) \circ x^{\top} \implies x \preceq \ulcorner x \circ (1 \circ x^{\top})$. Mas $\ulcorner x \circ (1 \circ x^{\top}) \preceq 1 \circ x^{\top}$, dado que $\ulcorner x \preceq 1 \implies \ulcorner x \circ 1 \preceq 1 \circ 1 \implies (\ulcorner x \circ 1) \circ x^{\top} \preceq 1 \circ x^{\top} \implies \ulcorner x \circ (1 \circ x^{\top}) \preceq 1 \circ x^{\top}$. Portanto, $x \preceq 1 \circ x^{\top}$. Como $x \preceq \ulcorner x \circ 1 \implies x \preceq 1 \circ x^{\top}$, segue da Proposição 35 que $\ulcorner x \circ 1 \preceq 1 \circ x^{\top}$.

E, em particular, $\lceil v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \circ 1 \preceq 1 \circ v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \rceil$. Dado que $\lceil v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \circ 1 = v^{\mathfrak{A}}(\Box_l \Diamond_r \varphi) \text{ e } 1 \circ v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \rceil = v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_r \Diamond_l \varphi)$, obtemos que $v^{\mathfrak{A}}(\Box_l \Diamond_r \varphi) \preceq v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_r \Diamond_l \varphi)$. Logo, como $v^{\mathfrak{A}}(\Box_l \Diamond_r \varphi) \preceq v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_r \Diamond_l \varphi)$ e $v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_r \Diamond_l \varphi) \preceq v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_r \Diamond_l \Diamond_l \varphi) \vee v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_r \Diamond_r \Diamond_l \varphi)$, então $v^{\mathfrak{A}}(\Box_l \Diamond_r \varphi) \preceq v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_r \Diamond_l \Diamond_l \varphi) \vee v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_r \Diamond_r \Diamond_l \varphi)$.

Assim, segue que (Ax6) é válido em $\mathfrak{A}$.

$$(Ax7) (\Box_l \varphi \wedge \Diamond_l \psi_1 \wedge \dots \wedge \Diamond_l \psi_n) \rightarrow \Diamond_l (\Box_l \varphi \wedge \Diamond_l \psi_1 \wedge \dots \wedge \Diamond_l \psi_n) \text{ e}$$

$$(\Box_r \varphi \wedge \Diamond_r \psi_1 \wedge \dots \wedge \Diamond_r \psi_n) \rightarrow \Diamond_r (\Box_r \varphi \wedge \Diamond_r \psi_1 \wedge \dots \wedge \Diamond_r \psi_n) :$$

Do ponto de vista algébrico, devemos mostrar que $v^{\mathfrak{A}}(\Box_l \varphi \wedge \Diamond_l \psi_1 \wedge \dots \wedge \Diamond_l \psi_n) \preceq v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_l (\Box_l \varphi \wedge \Diamond_l \psi_1 \wedge \dots \wedge \Diamond_l \psi_n)) = (v^{\mathfrak{A}}(\Box_l \varphi \wedge \Diamond_l \psi_1 \wedge \dots \wedge \Diamond_l \psi_n))^{\top} \circ 1$ e $v^{\mathfrak{A}}(\Box_r \varphi \wedge \Diamond_r \psi_1 \wedge \dots \wedge \Diamond_r \psi_n) \preceq v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_r (\Box_r \varphi \wedge \Diamond_r \psi_1 \wedge \dots \wedge \Diamond_r \psi_n)) = 1 \circ \lceil v^{\mathfrak{A}}(\Box_r \varphi \wedge \Diamond_r \psi_1 \wedge \dots \wedge \Diamond_r \psi_n) \rceil$.

Mas $v^{\mathfrak{A}}(\Box_l \varphi \wedge \Diamond_l \psi_1 \wedge \dots \wedge \Diamond_l \psi_n) = v^{\mathfrak{A}}(\Box_l \varphi) \wedge v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_l \psi_1) \wedge \dots \wedge v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_l \psi_n) = (-(\sim v^{\mathfrak{A}}(\varphi))^{\top} \circ 1) \wedge (v^{\mathfrak{A}}(\psi_1)^{\top} \circ 1) \wedge \dots \wedge (v^{\mathfrak{A}}(\psi_n)^{\top} \circ 1) = (-(\sim v^{\mathfrak{A}}(\varphi))^{\top} \wedge v^{\mathfrak{A}}(\psi_1)^{\top} \wedge \dots \wedge v^{\mathfrak{A}}(\psi_n)^{\top}) \circ 1$ e $v^{\mathfrak{A}}(\Box_r \varphi \wedge \Diamond_r \psi_1 \wedge \dots \wedge \Diamond_r \psi_n) = v^{\mathfrak{A}}(\Box_r \varphi) \wedge v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_r \psi_1) \wedge \dots \wedge v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_r \psi_n) = (1 \circ -\lceil \sim v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \rceil) \wedge (1 \circ \lceil v^{\mathfrak{A}}(\psi_1) \rceil) \wedge \dots \wedge (1 \circ \lceil v^{\mathfrak{A}}(\psi_n) \rceil) = 1 \circ (-\lceil \sim v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \rceil \wedge \lceil v^{\mathfrak{A}}(\psi_1) \rceil \wedge \dots \wedge \lceil v^{\mathfrak{A}}(\psi_n) \rceil)$.

Como $(-(\sim v^{\mathfrak{A}}(\varphi))^{\top} \wedge v^{\mathfrak{A}}(\psi_1)^{\top} \wedge \dots \wedge v^{\mathfrak{A}}(\psi_n)^{\top})$ e $(-\lceil \sim v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \rceil \wedge \lceil v^{\mathfrak{A}}(\psi_1) \rceil \wedge \dots \wedge \lceil v^{\mathfrak{A}}(\psi_n) \rceil)$ são subidentidades, então pelo Lema 100 temos que (Ax7) é válido em $\mathfrak{A}$ para qualquer $1 \leq n$: para o caso do Lemma 100 item (i), basta considerar $a = (-(\sim v^{\mathfrak{A}}(\varphi))^{\top} \wedge v^{\mathfrak{A}}(\psi_1)^{\top} \wedge \dots \wedge v^{\mathfrak{A}}(\psi_n)^{\top})$; e para o Lema 100 item (ii), considerar $a = (-\lceil \sim v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \rceil \wedge \lceil v^{\mathfrak{A}}(\psi_1) \rceil \wedge \dots \wedge \lceil v^{\mathfrak{A}}(\psi_n) \rceil)$.

(MP) : Se $\mathfrak{A} \models \varphi$ e $\mathfrak{A} \models \varphi \rightarrow \psi$, então $v^{\mathfrak{A}}(\varphi) = 1$ e $v^{\mathfrak{A}}(\varphi \rightarrow \psi) = 1$. Donde segue que $v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \preceq v^{\mathfrak{A}}(\psi) \implies 1 \preceq v^{\mathfrak{A}}(\psi)$ e, assim, $v^{\mathfrak{A}}(\psi) = 1$.

Logo, a regra (MP) preserva validade.

(RN) : Como $\mathfrak{A} \models \varphi$, então $v^{\mathfrak{A}}(\varphi) = 1$. Assim, $[-([\sim 1]^{\top})] \circ 1 = [-([0]^{\top})] \circ 1 = [-0] \circ 1 = 1' \circ 1 = 1$. Também é o caso de $1 \circ [-\lceil \sim 1 \rceil] = 1 \circ [-\lceil 0 \rceil] = 1 \circ [-0] = 1 \circ 1' = 1$.

Por fim, (RN) também preserva validade. $\square$

Corolário 102 (Correção Forte) Seja $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{For da linguagem da } \mathbf{LPV}^+$. Se $\Gamma \vdash \varphi$ em $\mathcal{H}_{\mathbf{LPV}^+}$, então $(\mathfrak{A}, \Gamma) \models \varphi$.

Demonstração: A prova segue pela indução sob o comprimento da dedução $\Gamma \vdash \varphi$.

Se $\Gamma \vdash \varphi$ tem apenas um passo, então φ é um axioma ou $\varphi \in \Gamma$. Quando φ é um axioma, segue do teorema anterior de Correção Fraca que ele é válido em $\mathfrak{A}$. Se $\varphi \in \Gamma$, todo modelo de Γ é também modelo de φ .

Por fim, se a dedução tem mais de um passo, então a fórmula é obtida pela aplicação das regras de inferência, regras estas que preservam validade segundo o teorema anterior de Correção Fraca. $\square$

Para a Completude, a faremos utilizando o método Lindenbaum-Tarski, onde o estabelecimento de uma álgebra de Lindenbaum torna-se necessário. Porém, um entrave parece ocorrer se nos atentarmos à álgebra das fórmulas da $\mathbf{LPV}^+$ e à estrutura do possível modelo algébrico.

Em certo sentido, a álgebra da vizinhança aparenta ser mais rica que a álgebra das fórmulas da $\mathbf{LPV}^+$. Em termos algébricos, álgebras quociente são do mesmo *tipo* da álgebra quocientada (Burris; Sankappanavar, 1981, p. 39). Como a álgebra de Lindenbaum de uma lógica corresponde à álgebra quociente da álgebra das fórmulas, se pretendemos obter que a álgebra de Lindenbaum da $\mathbf{LPV}^+$ é um caso de $\mathfrak{A} = \langle A, \vee, \wedge, \circ, \sim, \lceil, \rceil, 0, 1, 1' \rangle$, então ambas as álgebras devem ser do mesmo tipo, o que não parece ser o caso atual, impossibilitando o desenvolvimento de Completude no modo que pretendemos.

Na álgebra das fórmulas da $\mathbf{LPV}^+$, temos os conectivos clássicos com acréscimo de quatro novos conectivos modais. Não há na linguagem conectivos para a composição, domínio e codomínio, e muito menos uma constante para o caso de $1'$ na álgebra da vizinhança. Assim, dedicamos o seguinte capítulo a contornar esse problema.

3 SEGUNDA PARTE: UMA LÓGICA PARA UMA ÁLGEBRA

Durante nossos desenvolvimentos anteriores, percorremos tópicos versando sobre a Lógica Proposicional da Vizinhança (não-estrita), como sua semântica e sintaxe; vimos sobre estruturas algébricas, como a de álgebras de Boole, semianeis aditivamente idempotentes e a álgebra da vizinhança - nossa formalização do semianel booleano com operadores de domínio e codomínio de Höfner e Möller (2008); culminando no resultado de Correção Forte do sistema da $\mathbf{LPV}^+$.

Embora a Correção seja assegurada, consideramos possível que a Completude não o seja. O que nos leva a essa consideração é a ausência de determinados conectivos na linguagem da $\mathbf{LPV}^+$. Não há nenhum conectivo na linguagem que corresponda à composição $\circ$ da álgebra da vizinhança, muito menos conectivos para o domínio, codomínio ou a identidade $1'$. Uma possível solução seria introduzir, na linguagem da $\mathbf{LPV}^+$, os conectivos mencionados, seja como primitivos, seja definindo-os a partir dos conectivos já presentes.

Em Goranko, Montanari e Sciavicco (2003), encontramos também uma extensão da $\mathbf{LPV}^+$, com o acréscimo da constante π na linguagem. Essa extensão permite aos autores tratar, sintaticamente, com intervalos degenerados, o que parece ser um bom ponto de partida para a dissolução de nosso problema.

A inclusão de π no sistema axiomático dessa lógica contempla, além dos já mencionados axiomas e regras de inferência de $\mathcal{H}_{\mathbf{LPV}^+}$, também os seguintes axiomas:

$$\Diamond_l \pi \wedge \Diamond_r \pi \quad (3.1)$$

$$\Diamond_*(\pi \wedge \varphi) \rightarrow \Box_*(\pi \rightarrow \varphi) \quad (3.2)$$

$$\Diamond_* \varphi \wedge \Box_* \psi \rightarrow \Diamond_*(\pi \wedge \Diamond_* \varphi \wedge \Box_* \psi). \quad (3.3)$$

No ambiente semântico, a inclusão de π é caracterizada por:

$$(\mathfrak{M}, w) \models \pi \iff w \text{ é um intervalo degenerado.} \quad (3.4)$$

Nesse sentido, o conjunto verdade de π indicaria o conjunto de todos os possíveis intervalos degenerados do modelo. Isto é, $v^{\mathfrak{A}}(\pi)$ corresponderia à constante $1'$ na álgebra.

Obtivemos no capítulo anterior que $\mathfrak{A} \models \ulcorner x \approx (1 \circ \ulcorner x) \urcorner \wedge 1'$ e $\mathfrak{A} \models x^\top \approx (x^\top \circ 1) \urcorner \wedge 1'$ (vide Corolário 75). Sendo $1 \circ \ulcorner v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \urcorner$ a interpretação algébrica da fórmula $\Diamond_r \varphi$ e $v^{\mathfrak{A}}(\varphi)^\top \circ 1$ a interpretação de $\Diamond_l \varphi$, vislumbramos nessa extensão da $\mathbf{LPV}^+$ acrescida da constante π , denotada por $\mathbf{LPV}_\pi^+$, uma possibilidade de incluir também os conectivos correspondentes ao domínio e codomínio da álgebra:

$$\ulcorner \varphi := \Diamond_r \varphi \wedge \pi \quad (3.5)$$

$$\varphi^\top := \Diamond_l \varphi \wedge \pi. \quad (3.6)$$

Assim, π também faria parte do domínio da assinatura da linguagem e, portanto, $\ulcorner \varphi$ e $\varphi^\top$ também seriam fórmulas da linguagem (para quaisquer $\varphi, \psi \in \text{For}$).

Se considerarmos a semântica de Kripke e a definição proposta acima para domínio e codomínio na linguagem, $\|\ulcorner \varphi \urcorner\|$ capturaria precisamente todos os intervalos que são os instantes iniciais de intervalos que satisfazem φ . Vejamos que se fosse o caso $(\mathfrak{M}, [x, y]) \models \varphi$, então, para qualquer $a \in \mathbb{D}$ tal que $a \leq x$, obteríamos que $(\mathfrak{M}, [a, x]) \models \Diamond_r \varphi$. Porém, tomando a conjunção de $\Diamond_r \varphi$ com π , filtraríamos, dentre todos esses possíveis intervalos que terminam em x , apenas o intervalo degenerado $[x, x]$.

Assim como $\|\varphi^\neg\|$ contemplaria todos os intervalos que são os instantes finais de intervalos que satisfazem φ . Se fosse o caso $(\mathfrak{M}, [x, y]) \models \varphi$, então, para qualquer $b \in \mathbb{D}$ tal que $y \leq b$, obteríamos que $(\mathfrak{M}, [y, b]) \models \Diamond_l \varphi$. E tomando a conjunção de $\Diamond_l \varphi$ com π , filtraríamos apenas o intervalo degenerado $[y, y]$.

Ao optarmos pela extensão $\mathbf{LPV}_\pi^+$, é razoável verificarmos também se é possível manter o resultado de Correção. Para isso, estendemos a valoração $v^\mathfrak{A}$ para uma fórmula π . Na definição que segue, For é o conjunto de fórmulas da extensão $\mathbf{LPV}_\pi^+$, gerada pela linguagem da $\mathbf{LPV}^+$ com o acréscimo de $\pi \in \mathcal{F}_0$.

Definição 103 *Seja $\mathfrak{A} = \langle A, \vee, \wedge, \circ, \sim, \ulcorner, \neg, 0, 1, 1' \rangle$ uma álgebra da vizinhança. Tomando exclusivamente o caso de $\pi \in For$, uma valoração, em $\mathfrak{A}$, é uma função $v^\mathfrak{A} : For \rightarrow A$ tal que:*

$$(viii) \ v^\mathfrak{A}(\pi) := 1'.$$

Considerando as abreviações de $\ulcorner$ e $\neg$, e o Corolário 75, obtemos que:

- $v^\mathfrak{A}(\ulcorner \varphi \urcorner) = v^\mathfrak{A}(\Diamond_r \varphi \wedge \pi) = v^\mathfrak{A}(\Diamond_r \varphi) \wedge v^\mathfrak{A}(\pi) = (1 \circ \ulcorner v^\mathfrak{A}(\varphi) \urcorner) \wedge 1' = \ulcorner v^\mathfrak{A}(\varphi) \urcorner$;
- $v^\mathfrak{A}(\varphi^\neg) = v^\mathfrak{A}(\Diamond_l \varphi \wedge \pi) = v^\mathfrak{A}(\Diamond_l \varphi) \wedge v^\mathfrak{A}(\pi) = (v^\mathfrak{A}(\varphi)^\neg \circ 1) \wedge 1' = v^\mathfrak{A}(\varphi)^\neg$.

Uma intuição é possível. Para obtermos os instantes iniciais de intervalos que satisfazem uma dada fórmula, basta pegarmos apenas os intervalos degenerados do conjunto de todos os possíveis intervalos que terminam quando intervalos que satisfazem a fórmula começam. Para os instantes finais, basta pegarmos apenas os intervalos degenerados do conjunto de todos os possíveis intervalos que se iniciam quando intervalos que satisfazem a fórmula terminam.

Lema 104 *Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra da vizinhança e $a, b \in Sub(A) \subseteq A$. Assim, é o caso:*

- (i) $\ulcorner a \urcorner \wedge \ulcorner b \urcorner = \ulcorner (a \wedge b) \urcorner$;
- (ii) $a^\neg \wedge b^\neg = (a \wedge b)^\neg$.

Demonstração: (i) Como a e b são subidentidades, segue-se que $\ulcorner a \urcorner \preceq a$ e $\ulcorner b \urcorner \preceq b$ e, assim, $\ulcorner a \urcorner \wedge \ulcorner b \urcorner \preceq a \wedge b$. Logo, $\ulcorner (\ulcorner a \urcorner \wedge \ulcorner b \urcorner) \urcorner \preceq \ulcorner (a \wedge b) \urcorner$. Sabendo-se que $\ulcorner a \urcorner \wedge \ulcorner b \urcorner$ é, também, uma subidentidade, então $\ulcorner a \urcorner \wedge \ulcorner b \urcorner \preceq \ulcorner (a \wedge b) \urcorner$. Por outro lado, $\ulcorner (a \wedge b) \urcorner \preceq \ulcorner a \urcorner \wedge \ulcorner b \urcorner$ é uma consequência direta de Prop. 71.

(ii) Análogo ao caso acima. □

Lema 105 *Em uma álgebra da vizinhança $\mathfrak{A}$, para qualquer $a \in Sub(A) \subseteq A$, tem-se que:*

- (i) $a \circ 1 \preceq (1' \wedge (a \circ 1))^\neg \circ 1$;

(ii) $1 \circ a \preceq 1 \circ \ulcorner (1' \wedge (1 \circ a)) \urcorner$.

Demonstração: (i) Simétrico ao caso (ii).

(ii) Sabe-se que $x \preceq 1 \circ x$ e, portanto, em particular, $a \preceq 1 \circ a$. Agora, $a \preceq 1 \circ a \implies 1' \wedge a \preceq 1' \wedge (1 \circ a)$. Porém, como $1'$ é o maior elemento das subidentidades, segue que $1' \wedge a = a$ e, logo, $a \preceq 1' \wedge (1 \circ a)$. Pela monotonicidade do operador de domínio, temos que $\ulcorner a \urcorner \preceq \ulcorner (1' \wedge (1 \circ a)) \urcorner$. Mas, por a ser subidentidade e, assim, $\ulcorner a \urcorner = a$, segue-se que $a \preceq \ulcorner (1' \wedge (1 \circ a)) \urcorner$. Por fim, $a \preceq \ulcorner (1' \wedge (1 \circ a)) \urcorner \implies 1 \circ a \preceq 1 \circ \ulcorner (1' \wedge (1 \circ a)) \urcorner$. $\square$

Teorema 106 Seja $\mathcal{H}_{\mathbf{LPV}^+}^\pi$ o sistema axiomático estendido da $\mathbf{LPV}^+$ pelo acréscimo dos axiomas (3.1), $\mathfrak{A}$ uma álgebra da vizinhança e $\varphi \in \text{For}$. Se $\vdash \varphi$ em $\mathcal{H}_{\mathbf{LPV}^+}^\pi$, então $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Demonstração: Como $\vdash_{\mathcal{H}_{\mathbf{LPV}^+}} \subseteq \vdash_{\mathcal{H}_{\mathbf{LPV}^+}^\pi}$, se já foi desenvolvido anteriormente a correção para $\mathcal{H}_{\mathbf{LPV}^+}$, então segue que nos resta apenas alcançar a validade dos axiomas (3.1).

Observação: A demonstração será feita apenas para os casos em que $* = r$. Para $* = l$ a demonstração pode ser facilmente dualizada.

• $\Diamond_l \pi \wedge \Diamond_r \pi$:

$v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_l \pi \wedge \Diamond_r \pi) = v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_l \pi) \wedge v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_r \pi) = (v^{\mathfrak{A}}(\pi) \top \circ 1) \wedge (1 \circ \ulcorner v^{\mathfrak{A}}(\pi) \urcorner) = (1' \top \circ 1) \wedge (1 \circ \ulcorner 1' \urcorner) = (1' \circ 1) \wedge (1 \circ 1') = 1 \wedge 1 = 1$. Portanto, a fórmula é válida em $\mathfrak{A}$.

• $\Diamond_*(\pi \wedge \varphi) \rightarrow \Box_*(\pi \rightarrow \varphi)$:

Para o caso de $* = r$, podemos verificar que $v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_r(\pi \wedge \varphi)) \preceq v^{\mathfrak{A}}(\Box_r(\pi \rightarrow \varphi))$. Vejamos,

$$\begin{aligned} & v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \wedge \sim v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \preceq 0 \\ \implies & 1' \wedge (v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \wedge \sim v^{\mathfrak{A}}(\varphi)) \preceq 1' \wedge 0 \\ \implies & (1' \wedge v^{\mathfrak{A}}(\varphi)) \wedge \sim v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \preceq 0 \\ \implies & ((1' \wedge v^{\mathfrak{A}}(\varphi)) \wedge \sim v^{\mathfrak{A}}(\varphi)) \wedge 1' \preceq 0 \wedge 1' \\ \implies & (1' \wedge v^{\mathfrak{A}}(\varphi)) \wedge (\sim v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \wedge 1') \preceq 0 \\ \implies & (1' \wedge v^{\mathfrak{A}}(\varphi)) \wedge (1' \wedge \sim v^{\mathfrak{A}}(\varphi)) \preceq 0 \\ \implies & \ulcorner ((1' \wedge v^{\mathfrak{A}}(\varphi)) \wedge (1' \wedge \sim v^{\mathfrak{A}}(\varphi))) \urcorner \preceq \ulcorner 0 \urcorner. \end{aligned}$$

Com o Lema 104, já que $1' \wedge v^{\mathfrak{A}}(\varphi)$ e $1' \wedge \sim v^{\mathfrak{A}}(\varphi)$ são subidentidades pois $1' \wedge v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \preceq 1'$ e $1' \wedge \sim v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \preceq 1'$, concluímos que $\ulcorner ((1' \wedge v^{\mathfrak{A}}(\varphi)) \wedge (1' \wedge \sim v^{\mathfrak{A}}(\varphi))) \urcorner = \ulcorner (1' \wedge v^{\mathfrak{A}}(\varphi)) \urcorner \wedge \ulcorner (1' \wedge \sim v^{\mathfrak{A}}(\varphi)) \urcorner$.

Assim:

$$\begin{aligned}
& \vdash ((1' \wedge v^{\mathfrak{A}}(\varphi)) \wedge (1' \wedge \sim v^{\mathfrak{A}}(\varphi))) \preceq \vdash 0 \\
\implies & \vdash (1' \wedge v^{\mathfrak{A}}(\varphi)) \wedge \vdash (1' \wedge \sim v^{\mathfrak{A}}(\varphi)) \preceq 0 \\
\implies & \vdash (1' \wedge v^{\mathfrak{A}}(\varphi)) \preceq -[\vdash (1' \wedge \sim v^{\mathfrak{A}}(\varphi))] \vee 0, \text{ pela shunting-rule} \\
\implies & \vdash (1' \wedge v^{\mathfrak{A}}(\varphi)) \preceq -[\vdash (1' \wedge \sim v^{\mathfrak{A}}(\varphi))] \\
\implies & 1 \circ \vdash (1' \wedge v^{\mathfrak{A}}(\varphi)) \preceq 1 \circ -[\vdash (1' \wedge \sim v^{\mathfrak{A}}(\varphi))] \\
\implies & 1 \circ \vdash (1' \wedge v^{\mathfrak{A}}(\varphi)) \preceq 1 \circ -[\vdash (\sim (\sim 1' \vee v^{\mathfrak{A}}(\varphi)))] \\
\implies & 1 \circ \vdash (v^{\mathfrak{A}}(\pi) \wedge v^{\mathfrak{A}}(\varphi)) \preceq 1 \circ -[\vdash (\sim (\sim v^{\mathfrak{A}}(\pi) \vee v^{\mathfrak{A}}(\varphi)))] \\
\implies & 1 \circ \vdash (v^{\mathfrak{A}}(\pi \wedge \varphi)) \preceq 1 \circ -[\vdash (\sim v^{\mathfrak{A}}(\pi \rightarrow \varphi))] \\
\implies & v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_r(\pi \wedge \varphi)) \preceq v^{\mathfrak{A}}(\Box_r(\pi \rightarrow \varphi)).
\end{aligned}$$

Logo, conclui-se que a fórmula é válida em $\mathfrak{A}$.

• $\Diamond_* \varphi \wedge \Box_* \psi \rightarrow \Diamond_*(\pi \wedge \Diamond_* \varphi \wedge \Box_* \psi)$:

Este caso é demonstrado utilizando o Lema 105.

Seja $* = r$. Tome $a = \vdash v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \wedge -\vdash \sim v^{\mathfrak{A}}(\psi)$ em Lema 105 (ii). Assim,

$$\begin{aligned}
& 1 \circ (\vdash v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \wedge -\vdash \sim v^{\mathfrak{A}}(\psi)) \preceq 1 \circ \vdash (1' \wedge (1 \circ (\vdash v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \wedge -\vdash \sim v^{\mathfrak{A}}(\psi)))) \\
\implies & (1 \circ \vdash v^{\mathfrak{A}}(\varphi)) \wedge (1 \circ -\vdash \sim v^{\mathfrak{A}}(\psi)) \preceq 1 \circ \vdash (1' \wedge ((1 \circ \vdash v^{\mathfrak{A}}(\varphi)) \wedge (1 \circ -\vdash \sim v^{\mathfrak{A}}(\psi)))) \\
\implies & v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_r \varphi) \wedge v^{\mathfrak{A}}(\Box_r \psi) \preceq 1 \circ \vdash (v^{\mathfrak{A}}(\pi) \wedge (v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_r \varphi) \wedge v^{\mathfrak{A}}(\Box_r \psi))) \\
\implies & v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_r \varphi \wedge \Box_r \psi) \preceq 1 \circ \vdash (v^{\mathfrak{A}}(\pi \wedge \Diamond_r \varphi \wedge \Box_r \psi)) \\
\implies & v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_r \varphi \wedge \Box_r \psi) \preceq v^{\mathfrak{A}}(\Diamond_r(\pi \wedge \Diamond_r \varphi \wedge \Box_r \psi)).
\end{aligned}$$

Assim, a formula é válida em $\mathfrak{A}$. □

A Correção Forte sai como corolário, já que as regras de inferência preservam validade (demonstrado no Teorema 101).

Corolário 107 Seja $\mathcal{H}_{LPV^+}^\pi$ o sistema axiomático estendido da LPV^+ pelo acréscimo dos axiomas (3.1), $\mathfrak{A}$ uma álgebra da vizinhança e $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq For$. Se $\Gamma \vdash \varphi$ em $\mathcal{H}_{LPV^+}^\pi$, então $(\mathfrak{A}, \Gamma) \models \varphi$.

Demonstração: São três possibilidades para $\Gamma \vdash \varphi$: (i) φ é um axioma, (ii) $\varphi \in \Gamma$ ou (iii) φ é um teorema ou obtido pela aplicação de alguma regra de inferência.

Se (i) for o caso, pelo teorema anterior e Teorema 101, φ é válido.

Se (ii) for o caso, todo modelo de Γ é, também, modelo de φ .

Se (iii) for o caso, pelo Teorema 101, as regras de inferência preservam validade. Assim, teoremas e fórmulas obtidas pela aplicação de regras de inferência em fórmulas válidas também são válidos. □

Até agora conseguimos obter dois importantes metaresultados: a LPV^+ é fortemente correta em relação à $\mathfrak{A}$ e a LPV_π^+ de Goranko, Montanari e Sciavicco (2003) também o é. Por outro lado, LPV^+ parece não ter conectivo o suficiente para que seja possível o resultado de

Completude via Lindenbaum-Tarski, enquanto $\mathbf{LPV}_\pi^+$ resolve parcialmente o problema ao incluir um novo conectivo π e, a partir dele, ser possível definir conectivos correspondentes ao domínio e codomínio da álgebra da vizinhança. Parece-nos que um caminho para a completude toma forma, restando-nos apenas a inclusão de um correspondente na linguagem para a composição da álgebra.

3.1 O sistema $\mathbf{LPV}_{\pi\circ}^+$

Embora tenhamos obtido um meio de se definir parte dos conectivos restantes utilizando a nova constante π , e vimos que a axiomática da $\mathbf{LPV}_\pi^+$ proposta por Goranko, Montanari e Sciavicco (2003) é correta em relação às álgebras da vizinhança, não há indícios de que os axiomas de π sejam suficientes para caracterizar certas propriedades para a álgebra de Lindenbaum do sistema necessárias para a completude.

Assim, introduzimos um novo sistema, denotado por $\mathbf{LPV}_{\pi\circ}^+$, que estende a $\mathbf{LPV}^+$ de Goranko, Montanari e Sciavicco (2003) ao incluir π na linguagem, com diferentes axiomas, e com acréscimo também de um novo conectivo para a composição.

A linguagem, e álgebra das fórmulas, da $\mathbf{LPV}_{\pi\circ}^+$ é gerada a partir do mesmo domínio de assinatura $\langle \vee, \wedge, \neg, \Diamond_r, \Diamond_l, \perp, \top \rangle$ da $\mathbf{LPV}^+$, porém acrescido do elemento $\pi \in \mathcal{F}_0$ e o conectivo $\circ \in \mathcal{F}_2$:

$$\mathcal{F}or = \langle \mathcal{F}or, \vee, \wedge, \circ, \neg, \Diamond_r, \Diamond_l, \perp, \top, \pi \rangle. \quad (3.7)$$

Certamente a linguagem da $\mathbf{LPV}_{\pi\circ}^+$ abarca todas as convenções notacionais já introduzidas na linguagem da $\mathbf{LPV}^+$ com o acréscimo das seguintes, dados $\varphi, \psi \in \mathcal{F}or$:

$$\ulcorner \varphi := \Diamond_r \varphi \wedge \pi; \quad (3.8)$$

$$\varphi \urcorner := \Diamond_l \varphi \wedge \pi. \quad (3.9)$$

Observação 108 *A partir de agora, toda vez que evocarmos ao longo do texto o conjunto de fórmulas $\mathcal{F}or$, estaremos pensando no conjunto de formulas gerados pela linguagem da $\mathbf{LPV}_{\pi\circ}^+$, e não mais o da linguagem da $\mathbf{LPV}^+$.*

Denotaremos a base dedutiva desse nosso novo sistema por $\mathcal{H}_{\mathbf{LPV}^+}^{\pi\circ}$ e, assim como acontece na linguagem, $\mathcal{H}_{\mathbf{LPV}^+}^{\pi\circ}$ estende $\mathcal{H}_{\mathbf{LPV}^+}$ com a introdução de novos axiomas para π e $\circ$.

Esquema de Axiomas

(Ax₀) Tautologias do Cálculo Proposicional Clássico

(Ax₁) $\Box_*(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box_*\varphi \rightarrow \Box_*\psi)$

(Ax₂) $\Box_*\varphi \rightarrow \Diamond_*\varphi$

(Ax₃) $\varphi \rightarrow \Box_r\Diamond_l\varphi$

$\varphi \rightarrow \Box_l\Diamond_r\varphi$

(Ax₄) $\Diamond_r\Diamond_l\varphi \rightarrow \Box_r\Diamond_l\varphi$

$$\begin{aligned}
& \Diamond_l \Diamond_r \varphi \rightarrow \Box_l \Diamond_r \varphi \\
(Ax_5) & \Diamond_* \Diamond_* \Diamond_* \varphi \rightarrow \Diamond_* \Diamond_* \varphi \\
(Ax_6) & \Box_r \Diamond_l \varphi \rightarrow \Diamond_l \Diamond_r \Diamond_r \varphi \vee \Diamond_l \Diamond_l \Diamond_r \varphi \\
& \Box_l \Diamond_r \varphi \rightarrow \Diamond_r \Diamond_l \Diamond_l \varphi \vee \Diamond_r \Diamond_r \Diamond_l \varphi \\
(Ax_7) & \Box_* \varphi \wedge \Diamond_* \psi_1 \wedge \dots \wedge \Diamond_* \psi_n \rightarrow \Diamond_* (\Box_* \varphi \wedge \Diamond_* \psi_1 \wedge \dots \wedge \Diamond_* \psi_n), \text{ for any } n \geq 1 \\
(Ax_1^\pi) & \varphi \rightarrow ((\Diamond_r \varphi \wedge \pi) \circ \varphi) \\
& \varphi \rightarrow (\varphi \circ (\Diamond_l \varphi \wedge \pi)) \\
(Ax_2^\pi) & (\alpha \rightarrow \pi) \rightarrow ((\Diamond_r (\alpha \circ \varphi) \wedge \pi) \rightarrow \alpha) \\
& (\alpha \rightarrow \pi) \rightarrow ((\Diamond_l (\varphi \circ \alpha) \wedge \pi) \rightarrow \alpha) \\
(Ax_3^\pi) & (\Diamond_r (\varphi \circ (\Diamond_r \psi \wedge \pi)) \wedge \pi) \rightarrow (\Diamond_r (\varphi \circ \psi) \wedge \pi) \\
& (\Diamond_l ((\Diamond_l \varphi \wedge \pi) \circ \psi) \wedge \pi) \rightarrow (\Diamond_l (\varphi \circ \psi) \wedge \pi) \\
(Ax_1^\circ) & \varphi \circ (\psi \circ \gamma) \leftrightarrow (\varphi \circ \psi) \circ \gamma \\
(Ax_2^\circ) & \varphi \circ (\psi \vee \gamma) \leftrightarrow (\varphi \circ \psi) \vee (\varphi \circ \gamma) \\
& (\psi \vee \gamma) \circ \varphi \leftrightarrow (\psi \circ \varphi) \vee (\gamma \circ \varphi) \\
(Ax_3^\circ) & ((\varphi \circ \perp) \vee (\perp \circ \varphi)) \rightarrow \perp \\
(Ax_4^\circ) & \varphi \circ \pi \leftrightarrow \varphi \\
& \pi \circ \varphi \leftrightarrow \varphi \\
(Ax_5^\circ) & (\neg(\neg(\varphi \rightarrow \psi) \circ \top) \wedge \neg(\top \circ \neg(\gamma \rightarrow \sigma))) \rightarrow ((\varphi \circ \gamma) \rightarrow (\psi \circ \sigma)).
\end{aligned}$$

Regras de Inferência

$$\begin{aligned}
(MP) & \varphi, \varphi \rightarrow \psi / \psi \\
(RN) & \vdash \varphi / \vdash \Box_* \varphi, \text{ for any } * \in \{r, l\}.
\end{aligned}$$

O axioma (Ax_0) informa que o sistema inclui a Lógica Proposicional Clássica enquanto $(Ax_1) - (Ax_7)$ são os axiomas básicos da $\mathbf{LPV}^+$ já dispostos na literatura (Goranko; Montanari; Sciavicco, 2003).

Os axiomas $(Ax_1^\pi) - (Ax_3^\pi)$ carregam alguma noção sobre os operadores de domínio e codomínio da álgebra da vizinhança. Inclusive, estes axiomas são precisamente as fórmulas que garantem que a classe de equivalência do domínio e codomínio, da álgebra de Lindenbaum, satisfazem a definição desses operadores em uma álgebra da vizinhança.

Os axiomas $(Ax_1^\circ) - (Ax_5^\circ)$ são incluídos na tentativa de afirmar que a composição é associativa e distributiva em relação à disjunção, que o vazio é um elemento absorvente e que π é neutro em relação à composição.

O quinto axioma para a composição será o que garantirá que a composição preserva ordem, condição importante para o desenvolvimento da completude. Essa referida fórmula é, em certo sentido, uma versão da fórmula $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\gamma \rightarrow \sigma)) \rightarrow ((\varphi \# \gamma) \rightarrow (\psi \# \sigma))$, para um conectivo binário arbitrário $\#$ da linguagem. Em uma possível semântica de Kripke para a $\mathbf{LPV}_{\pi \circ}^+$, $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\gamma \rightarrow \sigma)) \rightarrow ((\varphi \circ \gamma) \rightarrow (\psi \circ \sigma))$ “forçaria” todas as fórmulas que ocorrem nela a serem válidas por todo o comprimento do intervalo que a satisfaz. Se a $\mathbf{LPV}^+$ admitisse a

restrição de *homogeneidade*¹, isso não seria um problema, dado que poderíamos “escolher” um sub-intervalo que satisfaz a composição. No entanto, como $\mathbf{LPV}^+$ não admite homogeneidade, consideramos a inclusão da fórmula de (Ax_5^-) no lugar de $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\gamma \rightarrow \sigma)) \rightarrow ((\varphi \circ \gamma) \rightarrow (\psi \circ \sigma))$, dado que com essa fórmula podemos precisamente especificar que “se φ é válida no sub-intervalo da esquerda da composição, então ψ também o é”, e “se γ é válida no sub-intervalo da direita da composição, então σ também o é”.

Proposição 109 *Considere $\mathcal{H}_{\mathbf{LPV}^+}^{\pi_0}$ a base dedutiva da $\mathbf{LPV}_{\pi_0}^+$ e $\{\varphi, \psi, \gamma, \sigma, \perp\} \subseteq \text{For}$. Os seguintes teoremas e regras de inferência são obtíveis em $\mathcal{H}_{\mathbf{LPV}^+}^{\pi_0}$:*

- (i) $\vdash \varphi \circ \perp \rightarrow \perp$;
- (ii) $\vdash \perp \circ \varphi \rightarrow \perp$;
- (iii) $\vdash \varphi \circ \perp \leftrightarrow \perp$;
- (iv) $\vdash \perp \circ \varphi \leftrightarrow \perp$;
- (v) se $\vdash \varphi$, então $\vdash \neg(\neg\varphi \circ \psi)$;
- (vi) se $\vdash \varphi$, então $\vdash \neg(\psi \circ \neg\varphi)$;
- (vii) se $\vdash \varphi \rightarrow \psi$, então $\vdash (\varphi \circ \gamma) \rightarrow (\psi \circ \gamma)$;
- (viii) se $\vdash \varphi \rightarrow \psi$, então $\vdash (\gamma \circ \varphi) \rightarrow (\gamma \circ \psi)$;
- (ix) se $\vdash \varphi \rightarrow \psi$ e $\vdash \gamma \rightarrow \sigma$, então $\vdash (\varphi \circ \gamma) \rightarrow (\psi \circ \sigma)$;
- (x) se $\vdash \varphi \rightarrow \psi$ e $\vdash \gamma \rightarrow \sigma$, então $\vdash (\gamma \circ \varphi) \rightarrow (\sigma \circ \psi)$.

Demonstração: (i) Apenas considere que $\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$ é um teorema clássico e tome φ como $\varphi \circ \perp$ e ψ como $\perp \circ \varphi$. Assim, com (Ax_3^o) derivamos o resultado desejado.

(ii) Mesmo argumento de (i).

(iii) Segue do item (i) e considerando que $\perp \rightarrow \varphi$ é um teorema clássico (tome φ como $\varphi \circ \perp$).

(iv) Mesmo argumento de (iii).

(v)

1. $\vdash \varphi$	Hipótese
2. $\vdash \varphi \leftrightarrow \top$	LPC em (1)
3. $\vdash \neg\varphi \leftrightarrow \perp$	LPC em (2)
4. $\vdash \perp \circ \psi \leftrightarrow \perp$	Substituição em (iv)
5. $\vdash \neg(\perp \circ \psi) \leftrightarrow \top$	LPC em (4)
6. $\vdash \neg(\perp \circ \psi)$	LPC em (5)
7. $\vdash \neg(\neg\varphi \circ \psi)$	Subst. em (6) [(3)]

(vi) Análogo ao item (v).

(vii)

¹ Homogeneidade: uma restrição na semântica de lógicas temporais intervalares em que a validade de uma fórmula em um intervalo implica na validade da fórmula em todo sub-intervalo desse referido intervalo (Goranko; Montanari; Sciavicco, 2004, p. 8).

1. $\vdash \varphi \rightarrow \psi$	<i>Hipótese</i>
2. $\vdash \neg(\neg(\varphi \rightarrow \psi) \circ \top)$	(v) em (1)
3. $\vdash \gamma \rightarrow \gamma$	<i>LPC</i>
4. $\vdash \neg(\top \circ \neg(\gamma \rightarrow \gamma))$	(vi) em (3)
5. $\vdash (\neg(\neg(\varphi \rightarrow \psi) \circ \top) \wedge \neg(\top \circ \neg(\gamma \rightarrow \gamma))) \rightarrow ((\varphi \circ \gamma) \rightarrow (\psi \circ \gamma))$	<i>Subst. em (Ax_5°)</i>
6. $\vdash \neg(\neg(\varphi \rightarrow \psi) \circ \top) \wedge \neg(\top \circ \neg(\gamma \rightarrow \sigma))$	<i>LPC em (2) e (4)</i>
7. $\vdash (\varphi \circ \gamma) \rightarrow (\psi \circ \sigma)$	(MP) em (5) e (6)

(viii) Uma demonstração análoga pode ser derivada a partir da de (vii).

(ix)

1. $\vdash \varphi \rightarrow \psi$	<i>Hipótese</i>
2. $\vdash \neg(\neg(\varphi \rightarrow \psi) \circ \top)$	(v) em (1)
3. $\vdash \gamma \rightarrow \sigma$	<i>Hipótese</i>
4. $\vdash \neg(\top \circ \neg(\gamma \rightarrow \sigma))$	(vii) em (3)
5. $\vdash (\neg(\neg(\varphi \rightarrow \psi) \circ \top) \wedge \neg(\top \circ \neg(\gamma \rightarrow \sigma))) \rightarrow ((\varphi \circ \gamma) \rightarrow (\psi \circ \sigma))$	(Ax_5°)
6. $\vdash \neg(\neg(\varphi \rightarrow \psi) \circ \top) \wedge \neg(\top \circ \neg(\gamma \rightarrow \sigma))$	<i>LPC em (2) e (4)</i>
7. $\vdash (\varphi \circ \gamma) \rightarrow (\psi \circ \gamma)$	(MP) em (5) e (6)

(x) Uma demonstração análoga pode ser derivada a partir da de (ix). $\square$

As regras de inferência (v) e (vi) da Proposição 109 são as regras de generalização para a composição (Goranko; Montanari; Sciavicco, 2004, p. 26). Em conjunto com (Ax_5°) , a regra de generalização da composição assegura a monotonicidade de $\circ$, que nos permitirá definir uma relação de congruência entre fórmulas do sistema.

3.1.1 Adequação algébrica

Com a finalidade de obter os resultados de adequação para a $\mathbf{LPV}_{\pi\circ}^+$, estendemos a valoração em $\mathfrak{A}$ dada pelas Definições 95 e 103.

Definição 110 *Seja $\mathfrak{A} = \langle A, \top, \perp, \circ, \sim, \neg, \neg, 0, 1, 1' \rangle$ uma álgebra da vizinhança. Tomando exclusivamente o caso de $\varphi \circ \psi \in \text{For}$, para qualquer $\varphi, \psi \in \text{For}$, uma valoração, em $\mathfrak{A}$, é uma função $v^{\mathfrak{A}} : \text{For} \rightarrow A$ tal que:*

$$(ix) \ v^{\mathfrak{A}}(\varphi \circ \psi) := v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \circ v^{\mathfrak{A}}(\psi).$$

Teorema 111 (Correção Fraca) *Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra da vizinhança e $\varphi \in \text{For}$ da linguagem da $\mathbf{LPV}_{\pi\circ}^+$. Se $\vdash \varphi$ em $\mathcal{H}_{\mathbf{LPV}^+}^{\pi\circ}$, então $\mathfrak{A} \models \varphi$.*

Demonstração: Como $\mathcal{H}_{\mathbf{LPV}^+}^{\pi\circ}$ é o sistema axiomático de $\mathbf{LPV}^+$ acrescido de novos axiomas para π e $\circ$, e dado que já obtivemos a Correção Forte para $\mathbf{LPV}^+$, para a presente demonstração obteremos apenas a validade de $(Ax_1^\pi) - (Ax_5^\circ)$.

A validade desses referidos axiomas são quase imediatas em uma álgebra da vizinhança, a maioria seguirá diretamente das definições com a ajuda do Corolário 75.

• $(Ax_1^\pi) \varphi \rightarrow ((\diamond_r \varphi \wedge \pi) \circ \varphi)$ e $\varphi \rightarrow (\varphi \circ (\diamond_l \varphi \wedge \pi))$: como $\mathfrak{A}$ é uma álgebra da vizinhança, pela Definição 57 (i) e Definição 60 (i), segue-se que $v^\mathfrak{A}(\varphi) \preceq \ulcorner (v^\mathfrak{A}(\varphi)) \circ v^\mathfrak{A}(\varphi) \urcorner$ e $v^\mathfrak{A}(\varphi) \preceq v^\mathfrak{A}(\varphi) \circ (v^\mathfrak{A}(\varphi))^\top$. Dado o Corolário 75, então $v^\mathfrak{A}(\varphi) \preceq v^\mathfrak{A}((\diamond_r \varphi \wedge \pi) \circ \varphi)$ e $v^\mathfrak{A}(\varphi) \preceq v^\mathfrak{A}(\varphi \circ (\diamond_l \varphi \wedge \pi))$.

• $(Ax_2^\pi) (\alpha \rightarrow \pi) \rightarrow ((\diamond_r(\alpha \circ \varphi) \wedge \pi) \rightarrow \alpha)$ e $(\alpha \rightarrow \pi) \rightarrow ((\diamond_l(\varphi \circ \alpha) \wedge \pi) \rightarrow \alpha)$: suponha que $v^\mathfrak{A}(\alpha \rightarrow \pi) = 1$. Então $v^\mathfrak{A}(\alpha) \preceq v^\mathfrak{A}(\pi)$ e $v^\mathfrak{A}(\alpha)$ é uma subidentidade de $\mathfrak{A}$.

Como $\mathfrak{A}$ é uma álgebra da vizinhança, pela Definição 57 (ii) e Definição 60 (ii), segue-se que $\ulcorner (v^\mathfrak{A}(\alpha) \circ v^\mathfrak{A}(\varphi)) \urcorner \preceq v^\mathfrak{A}(\alpha)$ e $(v^\mathfrak{A}(\varphi) \circ v^\mathfrak{A}(\alpha))^\top \preceq v^\mathfrak{A}(\alpha)$. Portanto, $v^\mathfrak{A}((\diamond_r(\alpha \circ \varphi) \wedge \pi) \rightarrow \alpha) \preceq v^\mathfrak{A}(\alpha)$ e $v^\mathfrak{A}((\diamond_l(\varphi \circ \alpha) \wedge \pi) \rightarrow \alpha) \preceq v^\mathfrak{A}(\alpha)$ considerando o Corolário 75.

• $(Ax_3^\pi) (\diamond_r(\varphi \circ (\diamond_r \psi \wedge \pi)) \wedge \pi) \rightarrow (\diamond_r(\varphi \circ \psi) \wedge \pi)$ e $(\diamond_l((\diamond_l \varphi \wedge \pi) \circ \psi) \wedge \pi) \rightarrow (\diamond_l(\varphi \circ \psi) \wedge \pi)$: como $\mathfrak{A}$ é uma álgebra da vizinhança, pela Definição 58 e Definição 61, segue-se que $\ulcorner (v^\mathfrak{A}(\varphi) \circ \ulcorner (v^\mathfrak{A}(\psi)) \urcorner) \urcorner \preceq \ulcorner (v^\mathfrak{A}(\varphi) \circ v^\mathfrak{A}(\psi)) \urcorner$ e $(v^\mathfrak{A}(\varphi))^\top \circ (v^\mathfrak{A}(\psi))^\top \preceq (v^\mathfrak{A}(\varphi) \circ v^\mathfrak{A}(\psi))^\top$. Assim, considerando o Corolário 75, $v^\mathfrak{A}(\diamond_r(\varphi \circ (\diamond_r \psi \wedge \pi)) \wedge \pi) \preceq v^\mathfrak{A}(\diamond_r(\varphi \circ \psi) \wedge \pi)$ e $v^\mathfrak{A}(\diamond_l((\diamond_l \varphi \wedge \pi) \circ \psi) \wedge \pi) \preceq v^\mathfrak{A}(\diamond_l(\varphi \circ \psi) \wedge \pi)$.

• $(Ax_1^\circ) \varphi \circ (\psi \circ \gamma) \leftrightarrow (\varphi \circ \psi) \circ \gamma$: é suficiente observar que $\circ$ é associativa em qualquer álgebra da vizinhança $\mathfrak{A}$.

• $(Ax_2^\circ) \varphi \circ (\psi \vee \gamma) \leftrightarrow (\varphi \circ \psi) \vee (\varphi \circ \gamma)$ e $(\psi \vee \gamma) \circ \varphi \leftrightarrow (\psi \circ \varphi) \vee (\gamma \circ \varphi)$: a operação $\circ$ é distributiva para $\vee$ em uma álgebra da vizinhança $\mathfrak{A}$.

• $(Ax_3^\circ) ((\varphi \circ \perp) \vee (\perp \circ \varphi)) \rightarrow \perp$: vejamos que $v^\mathfrak{A}(\varphi \circ \perp) = v^\mathfrak{A}(\varphi) \circ v^\mathfrak{A}(\perp) = v^\mathfrak{A}(\varphi) \circ 0 = 0$ e $v^\mathfrak{A}(\perp \circ \varphi) = v^\mathfrak{A}(\perp) \circ v^\mathfrak{A}(\varphi) = 0 \circ v^\mathfrak{A}(\varphi) = 0$, considerando que 0 é elemento absorvente para $\circ$ em uma álgebra da vizinhança $\mathfrak{A}$.

Certamente $0 = 0 \vee 0 \preceq 0$ e, então, $v^\mathfrak{A}((\varphi \circ \perp) \vee (\perp \circ \varphi)) \preceq v^\mathfrak{A}(\perp)$. Portanto, a fórmula é válida em $\mathfrak{A}$.

• $(Ax_4^\circ) \varphi \circ \pi \leftrightarrow \varphi$ e $\pi \circ \varphi \leftrightarrow \varphi$: o elemento $1'$ é neutro para a operação $\circ$ em uma álgebra $\mathfrak{A}$.

• $(Ax_5^\circ) (\neg(\neg(\varphi \rightarrow \psi) \circ \top) \wedge \neg(\top \circ \neg(\gamma \rightarrow \sigma))) \rightarrow ((\varphi \circ \gamma) \rightarrow (\psi \circ \sigma))$: suponha que $v^\mathfrak{A}(\neg(\neg(\varphi \rightarrow \psi) \circ \top) \wedge \neg(\top \circ \neg(\gamma \rightarrow \sigma))) = 1$. Então $v^\mathfrak{A}(\neg(\neg(\varphi \rightarrow \psi) \circ \top)) = 1$, $v^\mathfrak{A}(\neg(\top \circ \neg(\gamma \rightarrow \sigma))) = 1$ e $v^\mathfrak{A}(\neg(\varphi \rightarrow \psi) \circ \top) = 0$, $v^\mathfrak{A}(\top \circ \neg(\gamma \rightarrow \sigma)) = 0$.

Como $v^\mathfrak{A}(\top) = 1$, pela Proposição 73 segue que $v^\mathfrak{A}(\neg(\varphi \rightarrow \psi)) = 0$, $v^\mathfrak{A}(\neg(\gamma \rightarrow \sigma)) =$

0, e então $v^{\mathfrak{A}}(\varphi \rightarrow \psi) = 1$ e $v^{\mathfrak{A}}(\gamma \rightarrow \sigma) = 1$. Portanto, $v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \preceq v^{\mathfrak{A}}(\psi)$ e $v^{\mathfrak{A}}(\gamma) \preceq v^{\mathfrak{A}}(\sigma)$.

Assim, pela Proposição 55, segue-se que $v^{\mathfrak{A}}(\varphi) \circ v^{\mathfrak{A}}(\gamma) \preceq v^{\mathfrak{A}}(\psi) \circ v^{\mathfrak{A}}(\sigma)$ e, portanto, $v^{\mathfrak{A}}((\varphi \circ \gamma) \rightarrow (\psi \circ \sigma)) = 1$. $\square$

Corolário 112 (Correção Forte) *Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra da vizinhança e $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{For}$ da linguagem da $\text{LPV}_{\pi_0}^+$. Se $\Gamma \vdash \varphi$ em $\mathcal{H}_{\text{LPV}^+}^{\pi_0}$, então $(\mathfrak{A}, \Gamma) \models \varphi$.*

Demonstração: Segue do fato de já termos demonstrado a Correção Fraca, tanto para a LPV^+ quanto para a $\text{LPV}_{\pi_0}^+$. Todo axioma do sistema é válido e toda regra de inferência preserva validade e, assim, todo teorema é válido na álgebra $\mathfrak{A}$ e qualquer derivação sintática em $\mathcal{H}_{\text{LPV}^+}^{\pi_0}$ leva fórmula válida em fórmula válida. $\square$

Seguimos com o resultado de Completude. Para isso, antes precisaremos estabelecer uma relação entre fórmulas do sistema e verificar se esta satisfaz as condições de uma congruência, para podermos, então, definir a álgebra de Lindenbaum gerada a partir de teorias em $\text{LPV}_{\pi_0}^+$.

Definição 113 *Seja Γ um subconjunto de fórmulas e φ, ψ fórmulas da $\text{LPV}_{\pi_0}^+$, definimos uma relação $\equiv_{\Gamma} \subseteq \text{For} \times \text{For}$ do modo que segue:*

$$\varphi \equiv_{\Gamma} \psi \iff \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ e } \Gamma \vdash \psi \rightarrow \varphi. \quad (3.10)$$

Em vista de que $\rightarrow$ é um conectivo referente à parte clássica do sistema, então sabemos que $\equiv_{\Gamma}$ é ao menos uma relação de equivalência. O resultado é usual; uma demonstração pode ser encontrada em Bueno-Soler (2004, p. 41), por exemplo. Nosso esforço será em demonstrar que $\equiv_{\Gamma}$ é mais que uma equivalência, uma relação de congruência.

Definição 114 (Burris; Sankappanavar, 1981, p. 18) *Uma relação binária R em A é uma relação de equivalência se, para quaisquer $x, y, z \in A$, ela satisfaz:*

- (i) xRx ; (Reflexividade)
- (ii) se xRy , então yRx ; (Simetria)
- (iii) se xRy e yRz , então xRz . (Transitividade)

Definição 115 (Burris; Sankappanavar, 1981, p. 38) *Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra de tipo $\mathcal{F}$ e θ uma relação de equivalência em A . Então θ é uma congruência em $\mathfrak{A}$ se θ satisfaz a seguinte condição:*

(i) para cada símbolo de função n -ária $f \in \mathcal{F}$ e elementos $a_i, b_i \in A$, se $a_i \theta b_i$ ocorre para $1 \leq i \leq n$, então

$$f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \theta f^{\mathfrak{A}}(b_1, \dots, b_n).$$

Proposição 116 *A relação $\equiv_{\Gamma}$ é uma congruência.*

Demonstração: Para esse resultado, consideramos apenas a parte não-booleana, dado que é de conhecimento na literatura de que $\equiv_{\Gamma}$ estabelece uma relação de congruência para a parte clássica². A seguir, consideraremos $* \in \{r, l\}$.

² Cf. (Bueno-Soler, 2004).

Para $\Box_*$: se $\varphi \equiv_{\Gamma} \psi$, então $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ e $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \varphi$. Considerando a Proposição 28 (i) e (ii), segue-se que $\Gamma \vdash \Box_* \varphi \rightarrow \Box_* \psi$ e $\Gamma \vdash \Box_* \psi \rightarrow \Box_* \varphi$. Portanto, $\Box_* \varphi \equiv_{\Gamma} \Box_* \psi$.

Para $\Diamond_*$: se $\varphi \equiv_{\Gamma} \psi$, então $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ e $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \varphi$. Considerando a Proposição 28 (iii) e (iv), segue-se que $\Gamma \vdash \Diamond_* \varphi \rightarrow \Diamond_* \psi$ e $\Gamma \vdash \Diamond_* \psi \rightarrow \Diamond_* \varphi$. Portanto, $\Diamond_* \varphi \equiv_{\Gamma} \Diamond_* \psi$.

Para $\circ$: se $\varphi \equiv_{\Gamma} \psi$ e $\gamma \equiv_{\Gamma} \sigma$, então $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$, $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \varphi$, $\Gamma \vdash \gamma \rightarrow \sigma$ e $\Gamma \vdash \sigma \rightarrow \gamma$. Considerando a Proposição 109 (ix) e (x), segue-se que $\Gamma \vdash (\varphi \circ \gamma) \rightarrow (\psi \circ \sigma)$ e $\Gamma \vdash (\psi \circ \sigma) \rightarrow (\varphi \circ \gamma)$. Portanto, $\varphi \circ \gamma \equiv_{\Gamma} \psi \circ \sigma$. $\square$

Em razão do modo como $\ulcorner$ e $\urcorner$ foram introduzidos na linguagem (conferir (3.5)), é garantido que eles preservam a congruência obtida acima:

- se $\varphi \equiv_{\Gamma} \psi$, então $\Diamond_r \varphi \equiv_{\Gamma} \Diamond_r \psi$ e, portanto, $\ulcorner \varphi = \Diamond_r \varphi \wedge \pi \equiv_{\Gamma} \Diamond_r \psi \wedge \pi = \ulcorner \psi$.
- se $\varphi \equiv_{\Gamma} \psi$, então $\Diamond_l \varphi \equiv_{\Gamma} \Diamond_l \psi$ e, portanto, $\varphi \urcorner = \Diamond_l \varphi \wedge \pi \equiv_{\Gamma} \Diamond_l \psi \wedge \pi = \psi \urcorner$.

Entenderemos $[\psi]_{\Gamma} = \{\gamma \in For : \gamma \equiv_{\Gamma} \psi\}$ como a classe de equivalência de ψ módulo $\equiv_{\Gamma}$ gerado pelo conjunto de fórmulas Γ .

Definição 117 A álgebra de Lindenbaum de Γ para a $LPV_{\pi o}^+$, denotada por $\mathfrak{A}_{\equiv}^{\Gamma}(LPV_{\pi o}^+)$, é a álgebra quociente pela relação $\equiv_{\Gamma}$ e definida como segue:

$$\mathfrak{A}_{\equiv}^{\Gamma}(LPV_{\pi o}^+) = \langle For_{\equiv}^{\Gamma}, \ulcorner_{\equiv}^{\Gamma}, \wedge_{\equiv}^{\Gamma}, \circ_{\equiv}^{\Gamma}, \sim_{\equiv}^{\Gamma}, \Diamond_r_{\equiv}^{\Gamma}, \Diamond_l_{\equiv}^{\Gamma}, 0_{\equiv}^{\Gamma}, 1_{\equiv}^{\Gamma}, 1'_{\equiv}^{\Gamma} \rangle, \quad (3.11)$$

de modo que:

- (i) $For_{\equiv}^{\Gamma} := \{[\gamma]_{\Gamma} : \gamma \in For\}$
- (ii) $[\varphi]_{\Gamma} \ulcorner_{\equiv}^{\Gamma} [\psi]_{\Gamma} := [\varphi \vee \psi]_{\Gamma}$
- (iii) $[\varphi]_{\Gamma} \wedge_{\equiv}^{\Gamma} [\psi]_{\Gamma} := [\varphi \wedge \psi]_{\Gamma}$
- (iv) $[\varphi]_{\Gamma} \circ_{\equiv}^{\Gamma} [\psi]_{\Gamma} := [\varphi \circ \psi]_{\Gamma}$
- (v) $\sim_{\equiv}^{\Gamma} [\varphi]_{\Gamma} := [\neg \varphi]_{\Gamma}$
- (vi) $\Diamond_r_{\equiv}^{\Gamma} [\varphi]_{\Gamma} := [\Diamond_r \varphi]_{\Gamma}$
- (vii) $\Diamond_l_{\equiv}^{\Gamma} [\varphi]_{\Gamma} := [\Diamond_l \varphi]_{\Gamma}$
- (viii) $0_{\equiv}^{\Gamma} := [\perp]_{\Gamma}$
- (ix) $1_{\equiv}^{\Gamma} := [\top]_{\Gamma}$
- (x) $1'_{\equiv}^{\Gamma} := [\pi]_{\Gamma}$.

Denotamos uma valoração em $\mathfrak{A}_{\equiv}^{\Gamma}(LPV_{\pi o}^+)$ por $v_{\Gamma} : For \rightarrow For_{\equiv}^{\Gamma}$.

Definição 118 Em $\mathfrak{A}_{\equiv}^{\Gamma}(LPV_{\pi o}^+)$, definimos uma relação $\preceq_{\Gamma}$ da seguinte maneira:

$$[\varphi]_{\Gamma} \preceq_{\Gamma} [\psi]_{\Gamma} \text{ se, e somente se, } \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi. \quad (3.12)$$

Proposição 119 A relação $\preceq_{\Gamma}$ é uma ordem parcial em $For_{\equiv}^{\Gamma}$.

Demonstração: A fórmula $\varphi \rightarrow \varphi$ é um teorema clássico (Bueno-Soler, 2004, p. 30) e, portanto,

$\Gamma \vdash \phi \rightarrow \phi$. Ou seja, $\preceq_\Gamma$ é reflexiva. Para a transitividade de $\preceq_\Gamma$, basta verificar que $\{\phi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \gamma\} \vdash \phi \rightarrow \gamma$ é um resultado clássico (Bueno-Soler, 2004, p. 30). Por fim, se ocorre que $\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi$ e $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \phi$, então $\phi \equiv_\Gamma \psi$. Porém, se $\phi \equiv_\Gamma \psi$, então $[\phi]_\Gamma = [\psi]_\Gamma^3$ e, portanto, vale a antissimetria para $\preceq_\Gamma$. $\square$

Proposição 120 A álgebra $\mathfrak{A}_\equiv^\Gamma(\mathbf{LPV}_{\pi_0}^+)$ determina uma álgebra da vizinhança.

Demonstração: Primeiramente, consideremos as seguintes operações em $\mathfrak{A}_\equiv^\Gamma(\mathbf{LPV}_{\pi_0}^+)$:

$$\begin{aligned} \ulcorner_\equiv^\Gamma : For_\equiv^\Gamma &\rightarrow For_\equiv^\Gamma & e & \quad \neg_\equiv^\Gamma : For_\equiv^\Gamma \rightarrow For_\equiv^\Gamma \\ [\phi]_\Gamma &\mapsto [\ulcorner \phi]_\Gamma & & [\phi]_\Gamma \mapsto [\neg \phi]_\Gamma. \end{aligned}$$

Como consequência, verifica-se facilmente pela definição de $\ulcorner$ e $\neg$ na linguagem que $\ulcorner_\equiv^\Gamma[\phi]_\Gamma = [\Diamond_r \phi \wedge \pi]_\Gamma = \Diamond_r^\Gamma[\phi]_\Gamma \wedge_\equiv^\Gamma 1_\equiv^\Gamma$ e $[\phi]_\Gamma \neg_\equiv^\Gamma = [\Diamond_l \phi \wedge \pi]_\Gamma = \Diamond_l^\Gamma[\phi]_\Gamma \wedge_\equiv^\Gamma 1_\equiv^\Gamma$.

(i) Para a parte clássica, naturalmente $\langle For_\equiv^\Gamma, \vee_\equiv^\Gamma, \wedge_\equiv^\Gamma, \sim_\equiv^\Gamma, 0_\equiv^\Gamma, 1_\equiv^\Gamma \rangle$ é uma álgebra de Boole (Bueno-Soler, 2004);

(ii) O reduto $\langle For_\equiv^\Gamma, \circ_\equiv^\Gamma, 1_\equiv^\Gamma \rangle$ é um monoide: a operação $\circ_\equiv^\Gamma$ é associativa pelo axioma (Ax_1°) , enquanto o axioma (Ax_4°) assegura que $1_\equiv^\Gamma$ é elemento neutro para $\circ_\equiv^\Gamma$;

(iii) pelo axioma (Ax_2°) , a operação $\circ_\equiv^\Gamma$ é distributiva para $\vee_\equiv^\Gamma$;

(iv) pela Proposição 109 (iii) e (iv), $0_\equiv^\Gamma$ é elemento absorvente para $\circ_\equiv^\Gamma$;

(v) $\ulcorner_\equiv^\Gamma$ e $\neg_\equiv^\Gamma$ são operadores de domínio e codomínio modais (mostraremos apenas o caso de $\ulcorner$, o resultado para $\neg$ pode ser facilmente obtido considerando a segunda fórmula de cada axioma $(Ax_1^\pi) - (Ax_3^\pi)$):

- pelo axioma (Ax_1^π) , $\Gamma \vdash \phi \rightarrow ((\Diamond_r \phi \wedge \pi) \circ \phi)$ e, então, $[\phi]_\Gamma \preceq_\Gamma [(\Diamond_r \phi \wedge \pi) \circ \phi]_\Gamma = [\Diamond_r \phi \wedge \pi]_\Gamma \circ_\equiv^\Gamma [\phi]_\Gamma = \ulcorner_\equiv^\Gamma[\phi]_\Gamma \circ_\equiv^\Gamma [\phi]_\Gamma$. Portanto, $[\phi]_\Gamma \preceq_\Gamma \ulcorner_\equiv^\Gamma[\phi]_\Gamma \circ_\equiv^\Gamma [\phi]_\Gamma$.

- considere $[\alpha]_\Gamma$ uma subidentidade e, assim, $[\alpha]_\Gamma \preceq_\Gamma 1_\equiv^\Gamma$. Pela definição de $\preceq_\Gamma$, então $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \pi$. Considerando o axioma (Ax_2^π) , $(\alpha \rightarrow \pi) \rightarrow ((\Diamond_r(\alpha \circ \phi) \wedge \pi) \rightarrow \alpha)$, então $\Gamma \vdash (\Diamond_r(\alpha \circ \phi) \wedge \pi) \rightarrow \alpha$. Portanto, $[\Diamond_r(\alpha \circ \phi) \wedge \pi]_\Gamma \preceq_\Gamma [\alpha]_\Gamma$ e, como $[\Diamond_r(\alpha \circ \phi) \wedge \pi]_\Gamma = \ulcorner_\equiv^\Gamma([\alpha]_\Gamma \circ_\equiv^\Gamma [\phi]_\Gamma)$, segue-se que $\ulcorner_\equiv^\Gamma([\alpha]_\Gamma \circ_\equiv^\Gamma [\phi]_\Gamma) \preceq_\Gamma [\alpha]_\Gamma$.

- a condição $\ulcorner_\equiv^\Gamma([\phi]_\Gamma \circ_\equiv^\Gamma \ulcorner_\equiv^\Gamma[\psi]_\Gamma) \preceq_\Gamma \ulcorner_\equiv^\Gamma([\phi]_\Gamma \circ_\equiv^\Gamma [\psi]_\Gamma)$ é obtida de (Ax_3^π) .

Enquanto observação, no caso da álgebra de Lindenbaum $\mathfrak{A}_\equiv^\Gamma(\mathbf{LPV}_{\pi_0}^+)$, as subidentidades são $Sub(For_\equiv^\Gamma) = \{[\alpha]_\Gamma : \Gamma \vdash \alpha \rightarrow \pi\}$ e o complemento para elas definido por $-\ulcorner_\equiv^\Gamma[\alpha]_\Gamma := [\neg \alpha \wedge \pi]_\Gamma$. Portanto, $Sub(For_\equiv^\Gamma)$ munido das operações $\vee_\equiv^\Gamma, \wedge_\equiv^\Gamma, \sim_\equiv^\Gamma, 0_\equiv^\Gamma$ e $1_\equiv^\Gamma$ de $\mathfrak{A}_\equiv^\Gamma(\mathbf{LPV}_{\pi_0}^+)$ e $-\ulcorner_\equiv^\Gamma$ determina uma álgebra de Boole para as subidentidades. $\square$

Proposição 121 Dado $\phi \in For$, então $\Gamma \vdash \phi$ em $\mathcal{H}_{\mathbf{LPV}^+}^{\pi_0}$ se, e somente se, $[\phi]_\Gamma = 1_\equiv^\Gamma$.

Demonstração: $[\implies]$

³ Este é um resultado geral para classes de equivalência, conferir Teorema 4.9 (b) de Burris e Sankappanavar (1981, p. 19). Se $\phi \equiv_\Gamma \psi$, ocorre que $\phi \in [\psi]_\Gamma$ e/ou $\psi \in [\phi]_\Gamma$. Dado o fato de que $\phi \in [\phi]_\Gamma$ e $\psi \in [\psi]_\Gamma$, então $[\phi]_\Gamma \cap [\psi]_\Gamma \neq \emptyset$. Donde segue, pela contrapositiva do Teorema 4.9 (b), que $[\phi]_\Gamma = [\psi]_\Gamma$.

1. $\Gamma \vdash \varphi$ *Hipótese*
2. $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ *LPC*
3. $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow (\top \rightarrow \varphi)$ *Substituição em (2)*
4. $\Gamma \vdash \top \rightarrow \varphi$ *(MP) em (1) e (3)*

Pela Definição 118, $1_{\equiv}^{\Gamma} \preceq_{\Gamma} [\varphi]_{\Gamma}$ e, portanto, $[\varphi]_{\Gamma} = 1_{\equiv}^{\Gamma}$.

$[\Leftarrow]$ Se $[\varphi]_{\Gamma} = 1_{\equiv}^{\Gamma}$, então $1_{\equiv}^{\Gamma} \preceq_{\Gamma} [\varphi]_{\Gamma}$ e, assim, $\Gamma \vdash \top \rightarrow \varphi$. Mas se $\Gamma \vdash \top$ (pela LPC), segue-se por (MP) que $\Gamma \vdash \varphi$. $\square$

Considerando $\Gamma = \emptyset$, obtemos a álgebra de Lindenbaum $\mathfrak{A}_{\equiv}(\mathbf{LPV}_{\pi_0}^+)$ da $\mathbf{LPV}_{\pi_0}^+$.

Definição 122 A álgebra $\mathfrak{A}_{\equiv}(\mathbf{LPV}_{\pi_0}^+)$ é o modelo canônico da $\mathbf{LPV}_{\pi_0}^+$.

Denotamos a valoração no modelo canônico por $v_0 : \text{For} \rightarrow \text{For}_{\equiv}$.

Teorema 123 Se $\varphi \in \text{For}$ e $\mathfrak{A}$ uma álgebra da vizinhança, então os seguintes itens são equivalentes:

- (i) $\vdash \varphi$ em $\mathcal{H}_{\mathbf{LPV}^+}^{\pi_0}$;
- (ii) $\mathfrak{A} \models \varphi$;
- (iii) $v_0(\varphi) = 1$, para a valoração canônica em $\mathfrak{A}_{\equiv}(\mathbf{LPV}_{\pi_0}^+)$.

Demonstração: (i) $\implies$ (ii): segue do teorema de Correção Fraca 111.

(ii) $\implies$ (iii): se φ é válido em $\mathfrak{A}$, então φ é válido em qualquer álgebra da vizinhança e, em particular, na álgebra da vizinhança determinada por $\mathfrak{A}_{\equiv}(\mathbf{LPV}_{\pi_0}^+)$ (vide Proposição 120).

(iii) $\implies$ (i): se $v_0(\varphi) = 1$, então $[\varphi] = 1_{\equiv}$ e o resultado segue da Proposição 121. $\square$

Corolário 124 (Completeness Fraca) Se $\varphi \in \text{For}$ e $\mathfrak{A}$ uma álgebra da vizinhança, então $\vdash \varphi$ em $\mathcal{H}_{\mathbf{LPV}^+}^{\pi_0}$ se, e somente se, $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Demonstração: Consequência do teorema anterior. $\square$

Na sequência, consideraremos $\Gamma \neq \emptyset$.

Definição 125 Um conjunto de fórmulas Γ é φ -saturado se:

- (i) $\Gamma \not\vdash \varphi$;
- (ii) e para toda fórmula σ tal que $\sigma \notin \Gamma$, segue-se que $\Gamma \cup \{\sigma\} \vdash \varphi$.

Lema 126 (Lema de Lindenbaum-Łoś) Se $\Gamma \not\vdash \varphi$, então existe um conjunto φ -saturado Δ tal que $\Gamma \subseteq \Delta$.

Demonstração: (Wójcicki, 1988, p. 27). $\square$

Teorema 127 (Completeness Forte) Seja $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{For}$ e $\mathfrak{A}$ uma álgebra da vizinhança, se $(\mathfrak{A}, \Gamma) \models \varphi$, então $\Gamma \vdash \varphi$ em $\mathcal{H}_{\mathbf{LPV}^+}^{\pi_0}$.

Demonstração: Considere que $\Gamma \not\vdash \varphi$. Pelo Lema 126, existe um conjunto φ -saturado Δ tal que $\Gamma \subseteq \Delta$ e $\Delta \not\vdash \varphi$. Portanto, para a álgebra de Lindenbaum $\mathfrak{A}_{\equiv}^{\Delta}(\mathbf{LPV}_{\pi_0}^+)$ e pela Proposição 121, ocorre que $v_{\Delta}(\varphi) = [\varphi]_{\Delta} \neq 1_{\equiv}^{\Delta}$.

Como $\Gamma \subseteq \Delta$, então é imediato que, para todo $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \in \Delta$ e, portanto, $\Delta \vdash \gamma$. Novamente, pela Proposição 121, inferimos que $v_\Delta(\gamma) = [\gamma]_\Delta = 1_\Delta^\Delta$, para todo $\gamma \in \Gamma$.

Por fim, obtivemos que v_Δ é modelo para Γ em $\mathfrak{A}_\Delta^\Delta(\mathbf{LPV}_{\pi_0}^+)$, enquanto v_Δ não é modelo para φ em $\mathfrak{A}_\Delta^\Delta(\mathbf{LPV}_{\pi_0}^+)$. Sabendo que $\mathfrak{A}_\Delta^\Delta(\mathbf{LPV}_{\pi_0}^+)$ determina uma álgebra da vizinhança (Proposição 120), então $(\mathfrak{A}, \Gamma) \not\models \varphi$. $\square$

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa tinha por objetivo o desenvolvimento de um modelo algébrico para uma lógica temporal. Porém, na literatura, muitas lógicas temporais são possíveis (Goranko, 2023), algumas muito gerais e introdutórias, e outras mais específicas e complexas. Interessava-nos associar a formalização temporal a algum tipo de interação com números reais, e tais requisitos nos levaram à Lógica da Vizinhança de Chaochen e Hansen (1997, 2004).

Esta lógica, no entanto, além de possuir uma parte modal, engloba também quantificadores e elementos da aritmética dos reais, o que torna a tarefa de algebrizá-la um tanto quanto desafiadora. Assim, decidimos nos debruçar apenas em sua parte modal e proposicional. O que nos conduziu ao trabalho de Goranko, Montanari e Sciavicco (2003).

No trabalho desses três autores, temos as lógicas proposicionais da vizinhança, que se dividem em lógicas proposicionais da vizinhança estritas e não-estrita, sendo esta última precisamente o caso do fragmento proposicional e modal da Lógica da Vizinhança. Portanto, dado que Goranko, Montanari e Sciavicco (2003) haviam conseguido desenvolver um sistema, com uma axiomática e semântica relacional bem estabelecidas, para a parte que nos interessava da Lógica da Vizinhança, tínhamos meios para iniciar nosso trabalho.

Para a parte do referencial teórico associada à álgebra, encontramos dois trabalhos de Höfner (2007) e Höfner e Möller (2008). Talvez com os mesmos anseios que os nossos, estes autores conseguem obter uma estrutura algébrica que valida muitos dos teoremas da parte modal e proposicional da Lógica da Vizinhança. Eles não desenvolvem um modelo ou semântica algébrica para a lógica em questão, porém pavimentam algum caminho. Como a álgebra introduzida por esses autores capturava uma boa intuição relativa à manipulação dos intervalos temporais e parecia expressar muito bem a parte modal da Lógica da Vizinhança, julgamos que talvez essa estrutura algébrica - que o autores chamam de semianel booleano, com subidentidades, munido de operadores de domínio e codomínio - pudesse ser precisamente a contraparte algébrica da lógica proposicional da vizinhança não-estrita de Goranko, Montanari e Sciavicco.

Vimos durante a presente dissertação que, embora a lógica desses autores seja correta em relação às álgebras da vizinhança (nossa formalização da estrutura introduzida por Höfner e Möller), a completude do modo que pensávamos talvez não fosse possível. Na parte sintática dessa lógica, não havia conectivos que correspondessem à operação de composição $\circ$, um elemento para a identidade $1'$, e correspondentes do domínio $\top$ e codomínio $\perp$ de uma álgebra da vizinhança. Isto é, parecia-nos que a álgebra da vizinhança é mais rica que a álgebra das fórmulas da $\mathbf{LPV}^+$. Se não há correspondente sintático para alguns dos componentes da álgebra da vizinhança, é razoável pensar que uma álgebra da vizinhança produziria mais “validades” do que uma lógica proposicional da vizinhança não-estrita teria de teoremas e deduções.

Para resolver esse problema, estendemos a $\mathbf{LPV}^+$, pouco a pouco, até encontrarmos uma lógica proposicional da vizinhança não-estrita que fosse completa em relação à álgebra da vizinhança. Começamos por incluir uma nova constante modal π na linguagem (um correspon-

dente para $1'$ da álgebra), gerando a $\mathbf{LPV}_\pi^+$, que inclusive já havia sido trabalhada por Goranko, Montanari e Sciavicco (2003). Obtivemos que todo teorema e dedução feita no sistema axiomático da $\mathbf{LPV}_\pi^+$ são válidos em uma álgebra da vizinhança. Em contrapartida, a axiomática da $\mathbf{LPV}_\pi^+$ proposta por esses autores parecia não refletir muito bem as propriedades desejáveis de $1'$ em uma álgebra da vizinhança, o que não resolvia nosso problema.

Porém, a partir da nova constante π e das modalidades básicas da $\mathbf{LPV}^+$, encontramos um meio de introduzir os correspondentes de $\ulcorner$ e $\urcorner$ na linguagem, o que considera-se, além dos resultados de correção e completude, uma das contribuições desta pesquisa.

$$\ulcorner \varphi := \Diamond_r \varphi \wedge \pi;$$

$$\varphi \urcorner := \Diamond_l \varphi \wedge \pi.$$

Gostaríamos que $\ulcorner$ e $\urcorner$ traduzissem precisamente a intuição que tínhamos para esses operadores na álgebra da vizinhança de intervalos, e capturassem os intervalos degenerados que são os instantes iniciais e finais, respectivamente, de intervalos de um dado conjunto, o que fica muito claro ao olhar para o conjunto verdade de uma fórmula do tipo $\ulcorner \varphi$ e $\varphi \urcorner$.

$$\begin{aligned} \|\ulcorner \varphi\| = \|\Diamond_r \varphi \wedge \pi\| &= \{[x, y] \in I(\mathbb{D}) : [x, y] \models \Diamond_r \varphi \text{ e } [x, y] \models \pi\} \\ &= \{[x, y] \in I(\mathbb{D}) : \exists z \text{ t. q. } [y, z] \models \varphi \text{ e } x = y\} \\ &= \{[x, x] \in I(\mathbb{D}) : [x, x] \models \varphi\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\varphi \urcorner\| = \|\Diamond_l \varphi \wedge \pi\| &= \{[x, y] \in I(\mathbb{D}) : [x, y] \models \Diamond_l \varphi \text{ e } [x, y] \models \pi\} \\ &= \{[x, y] \in I(\mathbb{D}) : \exists w \text{ t. q. } [w, x] \models \varphi \text{ e } x = y\} \\ &= \{[x, x] \in I(\mathbb{D}) : [w, x] \models \varphi\}. \end{aligned}$$

Assim, se um intervalo, por exemplo, $[x, y]$ está no conjunto verdade de uma fórmula φ , então certamente $[x, x]$ estará no conjunto verdade de $\ulcorner \varphi$ e $[y, y]$ no conjunto verdade de $\varphi \urcorner$.

Contudo, apesar de termos conseguido os correspondentes para $1'$, $\ulcorner$ e $\urcorner$ da álgebra da vizinhança, restava-nos ainda algum correspondente para a composição. O que nos leva à seguinte pergunta: esta composição daria para ser definida a partir do aparato linguístico e semântico fornecido pela $\mathbf{LPV}_\pi^+$?

Em lógicas temporais intervalares, temos dois principais tipos de modalidades: modalidades de contração e modalidades expansivas (Chaochen; Hansen, 1997; Goranko; Montanari; Sciavicco, 2004). As modalidades de contração são modalidades em que o valor de verdade da fórmula em um intervalo depende apenas de seus sub-intervalos. Por outro lado, modalidades expansivas são modalidades em que o valor de verdade de sua fórmula em um intervalo depende de intervalos exteriores a ele. Em síntese, para avaliar a satisfação de modalidades de contração, “olhamos para dentro do intervalo”, enquanto que para avaliarmos a satisfação de modalidades expansivas, “olhamos para fora”. As lógicas proposicionais da vizinhança de Goranko, Montanari e Sciavicco, no entanto, possuem apenas modalidades expansivas - como no caso não-estrito: $\Diamond_r$, $\Diamond_l$, $\Box_r$ e $\Box_l$. Se o sistema com o qual estamos trabalhando possui

apenas os conectivos clássicos, em que a satisfação depende apenas de avaliarmos o intervalo “atual”, e modalidades de expansão, é plausível pensarmos que não seja possível definir qualquer modalidade de contração a partir disso, como uma modalidade de *chop*¹ e composição desejada.

Ademais, o leitor poderia pensar na definição de uma composição $\varphi \circ \psi$ por meio de modalidades expansivas, como uma por meio da fórmula $\Diamond_l \Diamond_r \varphi \wedge \Diamond_r \Diamond_l \psi$. Desse modo, conseguiríamos dizer que um intervalo satisfaz $\varphi \circ \psi$ se, e somente se, esse intervalo começa em algum intervalo que satisfaz φ e termina em algum intervalo que satisfaz ψ , porém não seria possível dizer se esses intervalos que satisfazem φ e ψ estariam concatenados, assim como uma composição requeriria. Apesar disso, se fosse o caso de termos à disposição o aparato quantificacional e aritmética dos reais, tal qual ocorre na Lógica da Vizinhança, seria possível incluirmos um conectivo de composição, vide (Chaochen; Hansen, 1997, p. 591) - não apenas o conectivo de composição, como as três modalidades **C**, **D** e **T** de Venema (1991).

Dito isso, resolvemos manter a nova contante π e incluir uma nova modalidade para a composição na linguagem base da $\mathbf{LPV}^+$, o que culminou em um novo sistema, o qual denotamos por $\mathbf{LPV}_{\pi\circ}^+$. Por fim, obtivemos a adequação entre a base dedutiva proposta para esse sistema e as álgebras da vizinhança.

Vejamos que, embora julgamos não ser possível a definição da composição a partir dos demais conectivos da $\mathbf{LPV}^+$, não conseguimos fornecer nenhuma demonstração formal que de fato não seja possível essa inclusão. Contudo, isso não tira o mérito do resultado de adequação do nosso sistema $\mathbf{LPV}_{\pi\circ}^+$. Embora possa parecer um movimento *ad hoc* em incluir a composição para que fosse possível a adequação algébrica, acabamos por mostrar o que uma lógica precisaria para que fosse possível estabelecer as álgebras da vizinhança enquanto modelo. Ou seja, pode ser que seja descoberto uma maneira de incluir a composição em $\mathbf{LPV}^+$ (sem ser primitivamente) e, se isso ocorrer, basta verificar se o sistema colapsa em $\mathbf{LPV}_{\pi\circ}^+$. Se ambos tiverem a mesma coleção de teoremas, certamente o nosso resultado de adequação algébrica poderá ser reaproveitado.

Por fim, Höfner e Möller (2008) indicam interpretações algébricas de outros casos de lógicas temporais, como o caso de lógicas temporais com ramificações, utilizando a estrutura algébrica com a qual trabalhamos, senão uma muito próxima. Diante do exposto, o presente trabalho pode ser um estopim para a obtenção de modelos para demais casos de lógicas temporais, como o sistema **CTL** (Emerson, 1991) indicado por Höfner e Möller (2008), tão quanto demais casos de lógicas da vizinhança, como o caso estrito dessa família de sistemas de Goranko, Montanari e Sciavicco (2003).

¹ Modalidades de *chop* são casos de modalidade de contração, introduzidas por Venema (1991) em seu sistema **CDT**. Inclusive, nossa composição é o caso do conectivo **C** desse referido sistema.

REFERÊNCIAS

- [1] ARECES, C.; BERNARDI, R.; MOORTGAT, M. Galois connections in categorial type logic. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, v. 53, p. 3-20, 2004.
- [2] BIRKHOFF, G. *Lattice theory*. New York: American Mathematical Society, 1948.
- [3] BLACKBURN, P.; RIJKE, M.; VENEMA, Y. *Modal logic*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- [4] BUENO-SOLER, J. *Semântica algébrica de traduções possíveis*. Dissertação - Mestrado em Filosofia. Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Campinas, 2004.
- [5] BURRIS, S.; SANKAPPANAVAR, H. P. *A course in universal algebra*. New York: Springer-Verlag, 1981.
- [6] CHAOCHEN, Z.; HANSEN, M. R. An adequate first order interval logic. In: ROEVER, W. P.; LANGMAAK, H.; PNUELI, A. (Eds.). *Compositionality: the Significant Difference*. Lecture Notes in Computer Science, v. 1536, p. 584-608. Springer, 1997.
- [7] CHAOCHEN, Z.; HANSEN, M. R. *Duration Calculus: A Formal Approach to Real-Time Systems*. EATCS Monographs in Theoretical Computer Science, Springer, 2004.
- [8] CHELLAS, B. F. *Modal Logic: an introduction*. New York: University Press, Cambridge, 1980.
- [9] DESHARNAIS, J.; MÖLLER, B. Characterizing Determinacy in Kleene Algebras. *Information Sciences*, v. 139, p. 253-273, 2001.
- [10] DESHARNAIS, J.; MÖLLER, B.; STRUTH, G. *Kleene Algebra with Domain*. *arXiv : cs/0310054*, 2003.
- [11] DESHARNAIS, J.; MÖLLER, B.; STRUTH, G. Modal Kleene Algebra And Applications - A Survey. *Journal on Relational Methods in Computer Science*, v. 1, p. 93-131, 2004.
- [12] D'OTTAVIANO, I. M. L.; FEITOSA, H. A. *Sobre a história da lógica, a lógica clássica e o surgimento das lógicas não-clássicas*. 2003. Disponível em: https://www.cle.unicamp.br/cle/sites/default/files/shared_files/ArtGT.pdf. Acesso em: 28/11/24.
- [13] DUNN, M. J.; HARDEGREE M. G. *Algebraic methods in philosophical logic*. Oxford University Press, 2001.

- [14] EMERSON, E. A. Temporal and modal logic. In: J. VAN LEEUWEN (ed.). *Handbook of Theoretical Computer Science*, Vol. B: Formal Models and Semantics. Elsevier and MIT Press, 1991, p. 995–1072.
- [15] ERNÉ, M.; KOSLOWSKI, J; MELTON, A.; STERCKER, G. E. A primer on Galois connections. *Annals of the New York Academy of Sciences*, v. 704, p. 103-125, 1993.
- [16] FERNÁNDEZ, V. L. *Fibração de lógicas na hierarquia de Leibniz*. Tese - Doutorado em Filosofia. Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Campinas, 2005.
- [17] FINGER, M.; GABBAY, D. Combining Temporal Logic Systems. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v. 37, n. 2, p. 204-232, 1996.
- [18] FONT, J.; JANSANA, R.; PIGOZZI, D. A Survey of Abstract Algebraic Logic. *Studia Logica*, v. 74, p. 13-97, 2003.
- [19] GENTZEN, G. *The collected papers of Gerhard Gentzen*. Amsterdam: North-Holland Pub. Company, 1969.
- [20] GIRLE, R. *Modal Logics and Philosophy*. Montreal: McGill-Queen's University Press, 2000.
- [21] GOLAN, J. S. *Semirings and their applications*. Dordrecht: Springer, 1999.
- [22] GORANKO, V. *Temporal logics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2023. (Cambridge Elements, Elements in Philosophy and Logic).
- [23] GORANKO, V.; MONTANARI, A.; SCIAVICCO, G. Propositional Interval Neighborhood Temporal Logics. *Journal of Universal Computer Science*, v. 9, n. 9, p. 1137-1167, 2003.
- [24] GORANKO, V.; MONTANARI, A.; SCIAVICCO, G. A road map of Interval Temporal Logics and Duration Calculi. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, v. 14, n. 1, p. 9–54, 2004.
- [25] HAACK, S. *Filosofia das lógicas*. São Paulo: Ed. da Unesp, 2002.
- [26] HÖFNER, P. Semiring Neighbours: An Algebraic Embedding and Extension of Neighbourhood Logic. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, v. 191, p. 49-72, 2007.
- [27] HÖFNER, P.; MÖLLER, B. Algebraic neighbourhood logic. *The Journal of Logic and Algebraic Programming*, v. 76, n. 1, p. 35-59, 2008.

- [28] JARVINEN, J.; KONDO, M.; KORTELAJINEN J. Logics from Galois connections. *International Journal of Approximate Reasoning*, v. 49, p. 595-606, 2008.
- [29] MADDUX, R. D. *Relation algebras*. Elsevier Science, 2006. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, v. 150).
- [30] MÖLLER, B. Kleene getting lazy. *Science of Computer Programming*, v. 65, n. 2, p. 195-214, 2007.
- [31] MÖLLER, B. Lazy Kleene Algebra. In: Kozen, D. (eds) Mathematics of Program Construction. MPC 2004. *Lecture Notes in Computer Science*, v. 3125, Springer, Berlin, Heidelberg, 2004.
- [32] MORGADO, J. *Introdução à teoria dos reticulados*. Instituto de Física e Matemática, Universidade de Recife, 1962.
- [33] ORIOWSKA, E.; REWITZKY, I. Algebras for Galois-style connections and their discrete duality. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 161, n. 9, 2010, p. 1325-1342.
- [34] PESSOA JR., O. Tempo e infinito: o argumento de McTaggart. In: VILELA, D. S.; MONTEIRO, A (Org.). *Paradoxos do infinito e os limites da linguagem*. São Paulo: Livraria da Física, p. 59-85, 2016.
- [35] RASIOWA, H. *An algebraic approach to non-classical logics*. Amsterdam: North-Holland, 1974.
- [36] ROSENSTEIN, J. G. *Linear Orderings*. Academic Press, 1982. (Volume 98 of Pure and Applied Mathematics series).
- [37] SMITH, P. *The Galois connection between syntax and semantics*. Technical report. Cambridge: University of Cambridge, 2010.
- [38] TASSINARI, R. P.; D'OTTAVIANO, I. M. L. A Lógica e as Lógicas: sobre a noção de Sistema Formal e o Princípio da Liberdade Lógica. In: GONZALEZ, M. E. Q.; BROENS, M. C.; MARTINS, C. A. (eds.). *Informação, conhecimento e ação ética*. Marília: Oficina Universitária; São Paulo: Cultura Acadêmica, p. 153-168, 2012.
- [39] VENEMA, Y. A modal logic for chopping intervals. *Journal of Logic and Computation*, v. 1, n. 4, p. 453-476, 1991.
- [40] WÓJCICKI, R. *Lectures on propositional calculi*. Ossolineum [Poland]: Pub. House of the Polish Academy of Sciences, 1984.
- [41] WÓJCICKI, R. *Theory of Logical Calculi*. Synthese Library. Kluwer Academic Publishers, 1988.