

GEOMETRIAS DE THURSTON

UMA ABORDAGEM UTILIZANDO TOPOLOGIA COMPUTACIONAL

REIS, Renato Gomes dos
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas – IBILCE
renatogalois87@gmail.com

FRANCHI, Claudia Maria G. Gonçalves
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas – IBILCE
União das Faculdades dos Grandes Lagos - UNILAGO
claudiafranchi@oi.com.br

MACHADO, José Márcio
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas – IBILCE
jmarcio@ibilce.unesp.br

BORGES, Manoel Ferreira Neto
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas – IBILCE
borges@ibilce.unesp.br

RESUMO: Algoritmos para reconhecimento de 3-variedades utilizam-se do conceito de superfície normal, sendo assim, pode-se então tratar problemas de teoria de 3-variedades como sendo de programação linear. Como exemplos tem-se o Algoritmo de reconhecimento da 3-esfera triangulável de Rubinstein-Thompson que é implementado na suite de software Regina, como a decomposição soma conexa de 3-variedades. A completa classificação de 3-variedades pode ser realizada por meio de algoritmos, possuindo assim relevância para o Programa de Geometrização de Thurston para obtenção de resultados inicialmente utilizando topologia computacional. O objetivo do presente trabalho é discorrer sobre uma aplicação do software Regina. Obteve-se durante a elaboração do presente trabalho, o resultado entre a comparação da 3-esfera homológica de Poincaré com a 3-esfera, parte importante para o entendimento da Conjectura de Poincaré e do Programa de Geometrização.

PALAVRAS CHAVE: Geometrização, Algoritmo de Rubinstein-Thompson, 3-esfera

ABSTRACT: Algorithms for recognition of 3-manifolds are used the concept of normal surface, so one can then deal problems of theory 3-manifolds as linear programming. As examples we have the Rubinstein-Thompson algorithm recognize the triangulable 3-three-sphere which is implemented in software suite Regina, such as decomposition connected sum of 3-manifolds. The complete classification of 3-manifolds can be realized by means of algorithms, thus having relevance to the Thurston Geometrization Program to obtain a priori results using computational topology. Obtained during the elaboration of this work, the result of the comparison between the Homological Poincaré sphere with 3-sphere, an important part to understanding the Poincaré Conjecture and the Geometrization Program.

KEYWORDS: Geometrization, Rubinstein-Thompson algorithm, 3-sphere

INTRODUÇÃO

O objetivo do presente trabalho é a apresentação via tratamento computacional do Programa de Geometrização de Thurston [26], utilizando-se o ferramental da topologia e da geometria computacional [5], [9], [16], que se valem do desenvolvimento de algoritmos eficientes para resolver problemas fazendo uso de métodos topológicos/geométricos, particularmente a classificação de variedades em baixas dimensões.

Nas variedades em baixas dimensões tem-se um número considerável de algoritmos, em partiuclar sobre 3-variedades, suas decomposições, o problema do homeomorfismo [3], detecção de estruturas hiperbólicas [14]. Nesta área tem-se, por exemplo, o Algoritmo de Rubinstein-Thompson de reconhecimento da 3-esfera triangulável [6], [12], [18], [20]. Figura a decomposição soma conexa de 3-variedades [15], nesse rol e é o seu algoritmo semelhante ao de reconhecimento da 3-esfera. Pode-se des-

tacar também a decomposição Jaca-Johan-son-Shalen (JSJ) [5], que é parte fundamental da Geometrização.

Consoante a [19] pode-se realizar a classificação de 3-variedades através de algoritmos [4]. Não há até o momento algoritmo para implementação computacional da decomposição JSJ [22], existe um algoritmo. Para os demais casos existe um pacote de software denominado Regina [2].

No sistema tem-se a implementação de uma variante do algoritmo de reconhecimento da 3-esfera de Rubinstein-Thompson, que serve para determinar se uma 3-variedade triangulável é homeomorfa a 3-esfera. O presente trabalho discorre sobre a classificação de variedade em baixas dimensões e para tal, far-se-á uso do software Regina.

1. CONCEITOS E TÉCNICAS

Regina é uma suíte de softwares para uso em topologia de variedades em baixas dimensões, mais especificamente em dimensão 3. Utiliza-se de triangulações de 3-variedades incluindo também suporte para superfícies normais [7], [1] e estruturas angulares. Os principais objetos do Regina são triangulações de 3-variedades. Parte do software serve à criação, análise e manipulação dessas triangulações.

O software trabalha com a implementação de uma variante do algoritmo de reconhecimento da 3-esfera de Rubinstein. Este algoritmo determina se é ou não uma 3-variedade triangulável homeomorfa a 3-esfera. Tem-se também a implementação da decomposição em somas conexas de 3-variedade trianguláveis que as decompõem em uma soma conexa de 3-variedades trianguláveis primas.

Quanto aos conceitos relevantes tem-se as 3-variedades trianguláveis primas, existência e unicidade da decomposição prima de 3-variedades [11], triangulação. Superfície normal [24], [2] [1], que é base para muitos algoritmos na teoria das 3-variedades.

2. METODOLOGIA DE DESENVOLVIMENTO

Constitui-se de uma abordagem organizada visando alcançar um objetivo, que será exequível por intermédio do cumprimento de um conjunto de procedimentos preestabelecidos.

2.1 Métodos de abordagem

Para a elaboração do presente trabalho utilizar-se-á os métodos hipotético-dedutivo e dialético.

2.2 Métodos de procedimentos

São constituídos por etapas mais concretas da pesquisa, tendo por objetivo a explicação de objetos menos abstratos, portanto está relacionada especificamente com as fases da pesquisa e não com seu plano geral.

2.3 Método comparativo.

Define-se pelo confronto entre elementos, considerando-se seus atributos, pauta-se pela promoção do exame dos dados objetivando a obtenção de diferenças ou semelhanças que possam ser constatadas, e as devidas relações entre ambas.

2.4 Equações

As equações de (1) a (3) descrevem as somas conexas, as de (4) a (5) as Geometrias Modelos, partes integrantes do Programa de Geometrização de Thurston [26]:

$$M = M_1 \# \dots \# M_n \quad (1)$$

$$M = M_1' \# \dots \# M_n' \quad (2)$$

$$M = M \# S^n \quad (3)$$

As equações (1) e (2) descrevem somas conexas entre variedades. Utilizam-se destas para descrever o Teorema de Kneser [11] sobre a existência da decomposição prima de 3-variedades e o de Unicidade da Decomposição Prima de Milnor [15].

$$H: \pi_1(M) \rightarrow G \quad (4)$$

$$\Gamma = H(\pi_1(M)) < G \quad (5)$$

$$M = X/\Gamma \quad (6)$$

A aplicação (4) descreve um homomorfismo de holonomia, Γ um grupo de holonomia. Sendo (G, X) uma geometria modelo, X tem uma métrica riemanniana tal que $G = \text{Isom}(X)$, se M é compacta então é completa com a métrica induzida pela estrutura (G, X) é descrita por (6).

2.5 Superfícies normais

A teoria das superfícies normais constitui-se em um ferramental de grande vulto para o estudo de 3-variedades e para o desenvolvimento de algoritmos para sua análise. Essa teoria foi introduzida por Kneser e desenvolvida por Haken, que os usou para construir Reconhecendo um algoritmo para a um nó trivial, Haken iniciou a construção de um algoritmo para resolução do problema do homeomorfismo para uma grande classe de 3-variedades [23].

Superfícies normais apresentam-se em uma série de decomposições de 3-variedades, alguns algoritmos de reconhecimento, bem como em algoritmos para simplificação de triangulações de 3-variedades.

2.6 Análise

I - Objetivando a análise de superfícies normais, o software Regina instalações dispõem das seguintes ferramentas:

II - Visualização de superfícies normais em uma variedade de sistemas de coordenadas;

III - Calcula as propriedades básicas de superfícies normais como característica de Euler, orientabilidade (invariantes topológicos), por exemplo;

IV - Reconhecimento em superfícies com triangulação padrões, tais como: divisão e ligação de vértices e as ligações de bordas;

V - Filtragem de grandes listas de superfícies regulares por várias propriedades, tais como: característica de Euler, orientabilidade e bordo.

3. Resultados Preliminares

3.1 Homologia

Seja um espaço topológico X , em que se define uma cadeia complexa $C(X)$, que é uma sequência de grupos abelianos ou módulos $C_0, C_1, C_2, \dots$ conexo por homomorfismos de grupo, $\partial_n: C_n \rightarrow C_{n-1}$ que são denominados operadores de bordo. Isto é,

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0 \quad (7)$$

Em que 0 denota o grupo trivial e $C_i \equiv 0, \forall i < 0$. Faz-se mister que a composição de qualquer dos dois operadores de bordo consecutivos seja trivial, isto é,

$$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0_{n+1, n-1} \quad (8)$$

ou seja, o mapa constante leva os elementos de C_{n+1} à identidade de grupo em C_{n-1} , isso é, $\text{Im}(\partial_{n+1}) \subseteq \text{Ker}(\partial_n)$. Sendo cada C_n abeliano todos os seus subgrupos são normais e sendo dois subgrupos de C_n , são subgrupos normais então, pode-se considerar $\text{Im}(\partial_{n+1})$ um subgrupo normal de $\text{Ker}(\partial_n)$ e considerando-se,

$$H_n(X) := \text{Ker}(\partial_n) / \text{Im}(\partial_{n+1}). \quad (9)$$

Sendo (10) denominada de n -ésimo grupo de homologia de X .

3.2 Grupo Fundamental

Seja um espaço topológico X , $x_0 \in X$. Seja o conjunto de funções contínuas, denominadas laços com ponto base x_0

$$\{f: I \rightarrow X: f(0) = x_0 = f(1)\} \quad (10)$$

Agora, o grupo fundamental de X com ponto base x é este conjunto modulo de homotopia h ,

$$\{f: I \rightarrow X: f(0) = x_0 = f(1)\} / h \quad (11)$$

equipado com a multiplicação do grupo definido por $(f * g)(t) := 2t$ se $0 \leq t \leq 1/2$ e $(f * g)(t) := g(2t-1)$ se $1/2 \leq t \leq 1$. O produto de duas classes de homotopias de laços $[f]$ e $[g]$ é, então definida como $[f * g]$.

O conjunto de todas as classes de homotopias dos laços com ponto base x_0 forma o grupo fundamental de X no ponto x_0 denotado por $\pi_1(X, x_0)$ [15]. O elemento identidade é o mapa constante no ponto base, e o inverso de um laço f é o laço g definida por $g(t) = f(1-t)$.

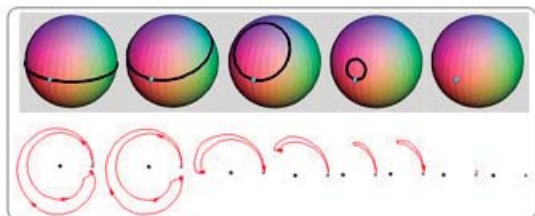


Figura 1: Grupo Fundamental

3.3 Triangulação

Uma triangulação de um espaço topológico X é um complexo simplicial K , conjuntamente com um homeomorfismo entre X e $U K$, se um complexo simplicial K tal que $U K$ seja homeomorfismo a X , então, X é triangulável.

3.4 Reconhecimento

Uma aplicação de recobrimento (também denominada recobrimento) é uma função:

$$p: X \rightarrow \tilde{X} \quad (12)$$

Sendo (12) contínua, sobrejetiva, tal que $\forall x \in X$ possui uma vizinhança distinguida, denomina-se $\tilde{X}$ espaço de recobrimento, X base de recobrimento, p é denominada projeção e $p^{-1}(x)$ é fibra sobre $x \in X$.

4. ESFERA HOMOLÓGICA DE POINCARÉ NÃO TOPOLOGICAMENTE EQUIVALENTE À 3-ESFERA

Poincaré afirmou em 1900 que a partir de um ferramental topológico denominado homologia, que tinha concebido com base em trabalhos anteriores de Enrico Betti, seria uma condição necessária e suficiente para dizer se uma 3-variedade seria topologicamente equivalente a uma 3-esfera. Não obstante, em um artigo de 1904,

descreveu um contra-exemplo, um espaço denominado agora de esfera homológica de Poincaré, para a consecução deste resultado, introduziu um novo invariante topológico, o grupo fundamental, e verificou que a esfera de Poincaré tem um grupo fundamental cuja ordem é 120 (interpretado como quaternions, os 120 vértices formam um grupo sob a multiplicação quaterniônica, é não-abeliano, denomina-se frequentemente grupo icosaédrico binário $2I$ uma vez que é o recobrimento duplo do grupo icosaédrico I . O grupo icosaédrico binário é isomorfo ao grupo linear especial $SL(2, 5)$, enquanto que a 3-esfera tem um grupo fundamental trivial. Desta forma, pode concluir que estes dois espaços são de fato, distintos.

Pode-se construir a esfera homológica de Poincaré como sendo o espaço quociente $SO(3)/I$, em que I é o grupo icosaédrico (o grupo de simetrias de rotação do icosaedro regular e dodecaedro isomorfo ao grupo alternante A_5). O grupo de isometrias Γ do icosaedro com centro na origem é um subgrupo de $SO(3)$.

Seja $SU(2)$ as transformações unitárias em $\mathbb{C}^2$ agindo sobre $\mathbb{C}^2$ pela direita, isso é $u = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, $a\bar{a} + b\bar{b} = 1$, então $u(z, w) = (z, w) \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, esta ação de $SU(2)$ sobre $\mathbb{C}^2$ comuta com multiplicação complexa, levando retas a retas, isso define uma ação sobre $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{S}^2 = \mathbb{C} \cup \infty$.

Considerando-se $u = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(2)$, então $z \in \mathbb{C} \cup \infty$, podemos identificar $\mathbb{C} \cup \infty$ com $\mathbb{S}^2$ por intermédio da projeção estereográfica, estas transformações são sobrejetivas sobre $SO(3)$. Define o mapa: $q: SU(2) \rightarrow SO(3)$ que define um recobrimento que é uma 2-upla, sendo, $q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, do ponto de vista topológico é o mapa $f: \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{RP}^3$, denotaremos o levantamento de I a $SU(2)$ por I^* , pode-se verificar que I^* é um grupo $\pi_1(\partial P^4)$, considerando-se $SU(2)$ como um mapa $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ preserva a distância de $\{0\}$, $SU(2)$ age sobre $\mathbb{S}^3$, podemos verificar também que existe um homeomorfismo $\mathbb{C}^2/I^* \rightarrow f^{-1}(0)$ sobre o qual é um biholomorfismo fora de zero.

Os grupos de homologia da 3-esfera são como se segue: $H_0(\mathbb{S}^3, \mathbb{Z})$ e $H_3(\mathbb{S}^3, \mathbb{Z})$ ambos cíclicos e infinitos, enquanto que

$H_i(\mathbb{S}^3, \mathbb{Z}) = \{0\}$ para todos os outros índices i .

Qualquer espaço topológico com esses grupos de homologias são conhecidos como uma homologia da 3-esfera.

5. SOFTWARE SUÍTE REGINA

Os objetos primários do Regina são 3-variedades triaanguláveis, destaque, grande parte do software é dedicada à criação, análise e manipulação de triangulações. No que se refere às triangulações pode-se utilizar os seguintes métodos que estão no suporte para a criação de triangulações:

5.1 Criação

- I - Construção de triangulações inserindo identificações individuais das faces do tetraedro;
- II - Geração automática de triangulações padrão como os toros sólidos em camadas: como espaços lentes sólidos em camadas [25];
- III - Construção automática de fibrados de Seifert sobre a 2-esfera;
- IV - Reconstrução de triangulações a partir de cordas desidratadas;
- V - Triangulações importadas de SnapPea.

5.2 Análise

Propriedades de uma triangulação que o software pode calcular:

- I - Detalhes sobre informações combinatórias sobre o esqueleto e componentes do bordo;
- II - Homologia e grupos de homotopia;
- II - Invariantes quânticos de Turaev e Viro [21];
- IV - Reconhecimento da 3-esfera, bem como a decomposição soma conexa;
- V - Atributos da triangulação relativos à existência de diversos tipos de superfície normais, tais como: 0-eficiência e a existência de superfícies de divisão.

5.3 Manipulação

No que tange a manipulação de uma triangulação, as seguintes rotinas estão disponíveis:

- I - Transformações locais para um pequeno número de tetraedros entre outras;
- II - Automatização do software para simplificação do uso combinado dos elementos descritos na alínea "a" objetivando-se reduzir o número de tetraedros tanto quanto possível, não obstante, não haja garantia de que o menor número possível de tetraedros será alcançado;
- III - Conversão de uma triangulação não orientável para recobrimento duplo orientável;
- IV - Redução de superfícies normais trianguláveis a um ponto.

6. APLICAÇÕES

6.1 Descrição da 3-esfera

A 3-esfera é uma subvariedade mergulhada fechada de $\mathbb{R}^4$, a métrica neste espaço induz a métrica na 3-esfera dando-lhe a estrutura de uma variedade riemanniana, possui curvatura seccional positiva constante igual a $1/r^2$ em que r é o raio. A 3-esfera tem uma estrutura de grupo de Lie naturalmente dada pela multiplicação quaterniônica. As únicas outras esferas com tal estrutura são a 0-esfera e a 1-esfera. Contrariamente a 2-esfera, a 3-esfera admite campos vetoriais não nulos (seções de seu fibrado tangente). Pode-se até encontrar três campos vetoriais linearmente independentes e não nulos $s_i(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \bar{s}_i(\mathbf{x}))$, podem estes ser tomados como campos vetoriais invariantes à esquerda que constituem a base para a álgebra de Lie da 3-esfera, implicando isso que a 3-esfera é paralelizável. Segue-se que o fibrado tangente da 3-esfera é trivial. Há uma ação do grupo $U(1)$ em $\mathbb{S}^3$ dando a 3-esfera estrutura de um fibrado circular principal C denominado fibrado de Hopf [10].

Considerando-se $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$ a ação é dada por $(z_1 \cdot z_2) \cdot \lambda = (z_1 \lambda \cdot z_2 \lambda)$. O espaço

de órbita desta ação é homeomorfa a $\mathbb{S}^2$. Sendo $\mathbb{S}^3$ não homeomorfa a $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, o fibrado de Hopf não é trivial.

6.2 Descrição do fibrado de seifert

Um fibrado de Seifert [13] pode ser visto como sendo uma 3-variedade com uma decomposição por círculos, que denominam-se fibras, tal que cada fibra possui uma vizinhança tubular isomorfa ou a um

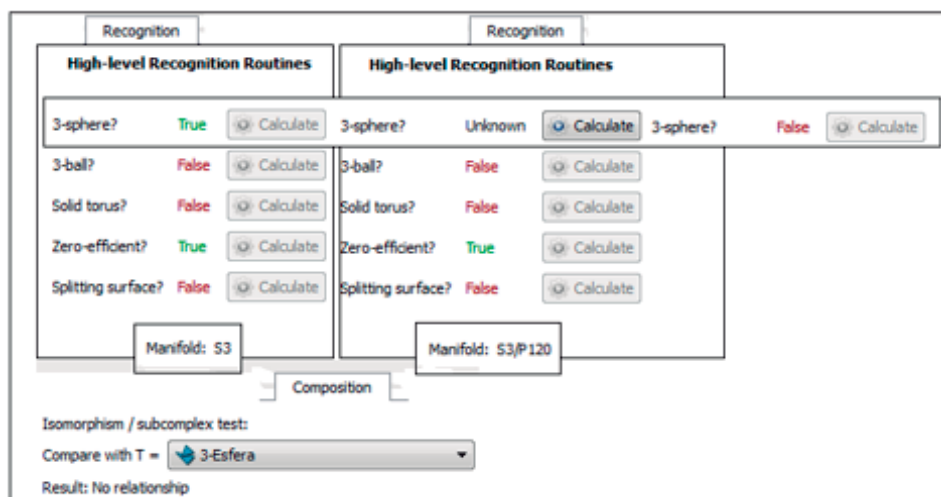


Figura 2: Comparação feita pelo software entre a Esfera Homológica de Poincaré e a 3-esfera.

toro fibrado ou a uma garrafa de Klein fibrada. Um fibrado de Seifert é uma folheação por círculos, vamos supor esta sempre de classe $\mathcal{C}^\infty$. Epstein mostra em [8], que toda folheação por círculos de uma variedade compacta de dimensão três é um fibrado de Seifert.

6.2.1 Classificação

Fibrados de Seifert [5], [6] fechados são classificados em termos dos seguintes invariantes. Variedades de Seifert são denotadas por $\{b, (\varepsilon, g); (a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)\}$.

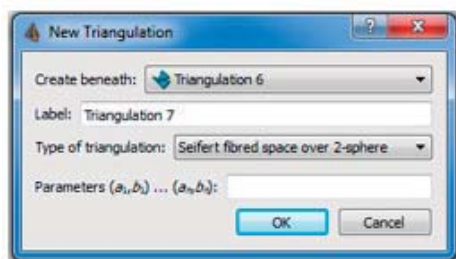


Figura 3: Janela para obtenção de um fibrado de Seifert.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho apresentamos uma introdução às aplicações do software Regina, que permite a descrição a priori do Programa de Geometriação de Thurston [26], [17], utilizando da geometria e topologia computacionais. O sistema tem ainda muitas peculiaridades a serem exploradas e mesmo a fusão com outros sistemas para resolução de outros problemas devem ser observadas em trabalhos futuros. Apresentamos aqui como resultado a comparação entre a 3-esfera e a 3-esfera homológica de Poincaré, que é um contra exemplo à sua conjectura.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] A. Burton, "Minimal triangulations and normal surfaces", Tese, 2003.
- [2] A. Burton, "Introducing Regina, the 3-manifold topology software," *Experimental Mathematics*, vol. 13, 2004, pp. 267-272.
- [3] A. Markov, "Insolubility of the problem of homeomorphism", In: *Proc. Internat. Congress Math.* 1958, pp. 300-306. Cambridge Univ. Press, New York, 1960.
- [4] A. Markov, "Theory of algorithms", Moscow, Academic Press, 1957.

my of Sciences of the USSR, 1954.

[5] A. R. Forrest, "Computational geometry", Proc. Royal Society London, n. 321, serie 4, pp. 187-195, 1971.

[6] A. Thompson, "Thin position and the recognition problem for S^3 ", Mathematical Research Letters, vol. 1, pp. 613-630, 1994.

[7] D. Cooper; S. Tillmann. "The Thurston norm via normal surfaces", Pacific J. Math.. vol. 239. pp. 1–15. 2009.

[8] D. Epstein, "Periodic flows on 3-manifolds, Annals of Mathematics," vol. 95, 1972, pp.66-82.

[9] H. Edelsbrunner; J. L. Harer "Computational topology:an introduction" AMS, 2009.

[10] H. Hopf, "Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension", Fundamenta Mathematicae n. 25, pp. 427–440, 1935.

[11] H. Kneser. "Geschlossene Flächen in dridimensionalen Mannigfaltigkeiten", Jahresbericht der Deut. Math. Verein., n. 38, pp. 248–260, 1929.

[12] H. Rubinstein. "An Algorithm to Recognize the 3-Sphere." In Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Zürich, 1994), Vol. 1, pp. 601–611, Basel: Birkhäuser, 1995.

[13] H. Seifert, "Topologie dreidimensionalen gefaseter Räume", Acta Math. Vol. 60, 1933, pp. 147-238.

[14] J. Manning, "Algorithmic detection and description of hyperbolic structures on 3-manifolds with solvable word problem", Geometry and Topology n° 6, pp. 1-26, 2002.

[15] J. Milnor. "A unique decomposition theorem for 3-manifolds" American Journal of Mathematics 84

1–7, 1962.

[16] P. Preparata; M. I. Shamos, "Computational geometry: an introduction", Springer-Verlag, 1988.

[17] P. Scott, "The geometry of 3-manifolds" Bull. Math. Soc., vol. 15, pp. 401-487.

[18] S. V. Matveev "An algorithm for the recognition of the 3-sphere (according to Thompson)". Sbornik: Mathematics 186:5, 695–710.

[19] S. Matveev "Algorithmic topology and the classification of 3-manifolds", Springer-Verlag 2003.

[20] T. Fomenko; V. E. Kuznecov; I. A. Volodin, "The problem of discriminating algorithmically the standard three-dimensional sphere", Russian Mathematical Surveys, vol. 29, n. 5, pp. 179, 71–172, 1974.

[21] V. G. Turaev; O. Y. Viro. "State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols". Topology. vol. 31. no. 4. pp. 865–902, 1992.

[22] W. H. Jaco, P. B. Shalen, "Seifert Fibered Spaces in Three Manifold", Memoirs Series n° 220, Memoirs of the American Mathematical Society; vol. 21, n° 220, 1979.

[23] W. Haken, "Über das Homöomorphieproblem der 3-Mannigfaltigkeiten", I. Math. Z.. vol. 80. pp. 89–120. 1962.

[24] W. Haken. "Theorie der Normalflächen", Acta Math. n. 105, pp. 245–375, 1961.

[25] W. Jaco; J. H. Rubinstein, "Layered-triangulations of 3-manifolds", Preprint. February 2006.

[26] W. Thurston. "Three-dimensional manifolds, kleinian groups and hyperbolic geometry", Bulletin of the American Mathematical Society, n. 6, vol. 3, pp. 357–381, 1982.