

UNESP  **UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**

FACULDADE DE CIÊNCIAS- CÂMPUS DE BAURU

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: ENSINO DE CIÊNCIAS.

Diego Fabian Vizcaíno Arevalo

**PAPEL DA “MATEMATIZAÇÃO” NAS EXPLICAÇÕES DE
PROFESSORES E ALUNOS EM DISCIPLINAS DE FÍSICA NA
FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES.**

Bauru

2013

Diego Fabian Vizcaíno Arevalo

PAPEL DA “MATEMATIZAÇÃO” NAS EXPLICAÇÕES DE PROFESSORES E ALUNOS EM DISCIPLINAS DE FÍSICA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES.

Tese apresentada à Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de Bauru, como requisito à obtenção do título de Doutor em Educação para a Ciência- Área de concentração: Ensino de Ciências, sob a orientação do: Prof. Dr. Eduardo Terrazzan.

Bauru
2013

Vizcaíno, Diego Fabian.

Papel da matematização nas explicações de professores e alunos em disciplinas de física na formação inicial de professores. / Diego Fabian Vizcaíno Arevalo, 2013
257 f.

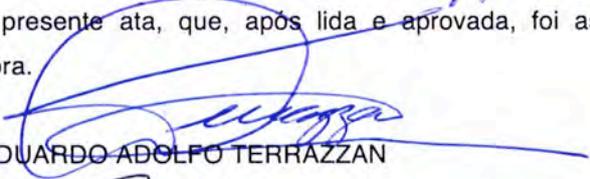
Orientador: Eduardo Adolfo Terrazzan

Tese (Doutorado)–Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências, Bauru, 2013

1. Formação Docente 2. Ensino de Física 3. A Matemática no Ensino de Física. 4. Matematização. I. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências. II. Título.

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA TESE DE DOUTORADO DE DIEGO FABIAN VIZCAINO AREVALO, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA, DO(A) FACULDADE DE CIÊNCIAS DE BAURU.

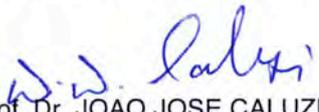
Aos 22 dias do mês de novembro do ano de 2013, às 14:00 horas, no(a) Anfiteatro da Pós-graduação da Faculdade de Ciências, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. EDUARDO ADOLFO TERRAZZAN do(a) Departamento de Metodologia de Ensino / Universidade Federal de Santa Maria, Prof. Dr. RICARDO AVELAR SOTOMAIOR KARAM do(a) Universidade de Hamburgo/Alemanha, Prof. Dr. JOAO JOSE CALUZI do(a) Departamento de Física / Faculdade de Ciências de Bauru, Profa. Dra. SONIA KRAPAS TEIXEIRA do(a) Programa de Pós-graduação em Educação da Univerisdade Federal Fluminense/RJ, Prof. Dr. ROBERTO NARDI do(a) Departamento de Educação / Faculdade de Ciências de Bauru, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da TESE DE DOUTORADO de DIEGO FABIAN VIZCAINO AREVALO, intitulado "PAPEL DA "MATEMATIZAÇÃO" NA EVOLUÇÃO DAS EXPLICAÇÃO DE PROFESSORES E ALUNOS EM DISCIPLINAS DE FÍSICA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES". Após a exposição, o discente foi arguido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: APROVADO. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que, após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.



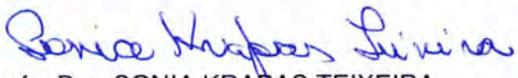
Prof. Dr. EDUARDO ADOLFO TERRAZZAN



Prof. Dr. RICARDO AVELAR SOTOMAIOR KARAM



Prof. Dr. JOAO JOSE CALUZI



Profa. Dra. SONIA KRAPAS TEIXEIRA



Prof. Dr. ROBERTO NARDI

Dedico este trabalho

*À minha esposa Olga, que encheu minha vida de força
e coragem para atingir esta meta.*

*Às minhas filhas Zulma e Belen que, sem perguntar,
estiveram conosco nos acompanhando com seus sorrisos e
inocência.*

*À minha mãe Teresa, com seu exemplo e ao meu pai
Alvaro, in memoriam.*

Às minhas irmãs, que sempre me acompanharam.

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer a todas as pessoas que de alguma maneira contribuíram para que este trabalho fosse possível. Quando, procurando uma qualificação, no nível de doutorado, se precisa deslocar para um país diferente do lugar de origem, junto com as filhas e a esposa, o objetivo acadêmico se transforma numa empresa, que envolve a ajuda de muitas pessoas, em todos os níveis, e hoje, é a elas que agradeço profundamente, especialmente:

- À embaixada do Brasil em Bogotá, e ao programa “estudante, convênio PEC-PG”,
- Às secretárias da Pós-Graduação da FC e do Departamento de Educação, por seus atendimentos sempre eficientes e amáveis. Obrigado, Denise, Andressa e Gethiely.
- À CAPES, pelo apoio financeiro no desenvolvimento desta pesquisa;
- Ao convênio entre o programa de Pós-Graduação da UNESP-Bauru, no Brasil e a Universidade Pedagógica Nacional na Colômbia.
- Ao Prof. Dr. Eduardo Terrazzan, pela orientação a este trabalho, pelas exigências e pelas críticas pautadas no zelo e competência profissional, permitindo que este trabalho se concretizasse, apesar de seus inúmeros compromissos.
- Para minha esposa, pelo apoio, pela compreensão, por sempre acreditar em mim de maneira incondicional.
- Ao professor Roberto Nardi, por me permitir compartilhar suas aulas, na graduação durante meu trabalho de estágio de docência e sua constante preocupação pelo nosso bem estar
- Ao professor Gustavo Iachel, que me permitiu assistir suas aulas.
- Aos colegas da Pós-graduação Job, Sergio, Andrea, Jairo, Iachel, pelas sugestões e revisões de diferentes capítulos desta tese.
- Aos professores do curso de Licenciatura em Física, da Universidade Estadual Paulista, que me permitiram participar de suas aulas para constituir os dados que fundamentaram o desenvolvimento desta tese.
- Aos licenciandos das disciplinas de Física, por me permitir que os acompanhasse e questionasse.
- Aos professores que constituíram a banca examinadora desta tese, por suas observações foram definitivas e muito importantes.

VIZCAÍNO, D.F. **Papel da “Matematização” nas explicações de professores e alunos em disciplinas de Física na formação inicial de professores.** 2013. 257f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência). Faculdade de Ciências, UNESP, Bauru, 2013.

RESUMO

O principal objetivo desta pesquisa é estabelecer parâmetros para a utilização da “Matematização da Física” como componente efetiva na construção de explicações, de modo a contribuir para a melhoria dos processos de ensino e de aprendizagem da Física na formação inicial de professores. Dessa forma, foi formulado o problema de pesquisa: “Que possíveis relações operam na utilização da Matemática da Física na construção de explicações, em atividades didáticas para o Ensino de Física, realizados em um curso de Licenciatura em Física”. Este problema foi desdobrado em três questões investigativas que indagaram pelos significados atribuídos à “Matematização da Física” em: atividades didáticas de professores, nos livros texto nestas atividades e, explicações de licenciandos. Para tal propósito, estudamos um referencial teórico, que nos permitiu indagar em resultados de pesquisa durante a última década, alusivas ao ensino de Física, especificamente no relacionado com estudos sobre a utilização da Matemática. Com base neste estudo, obtivemos três categorias sobre a “Matematização da Física” em processos de ensino. Elas são: (1) Matemática a partir da modelagem matemática; (2) Matemática a partir de processos físico-matemáticos; (3) Matemática como complemento do estudo fenomenológico. Assim, utilizamos estas três como categorias de análise dos dados que foram constituídos. A pesquisa foi de natureza qualitativa e utilizou metodologias de observação não participante, aplicação de questionários e análise textual de livros de texto didático, num curso de Licenciatura em Física, de uma Universidade pública do interior do Estado de São Paulo, Brasil. De maneira resumida podemos concluir que as perspectivas dos professores, se aproximam em alguns aspectos da *Matematização a partir da modelagem matemática* e, em outros casos, da *Matematização como complemento do estudo fenomenológico*; mas, se afastam delas em relação ao tipo de problemas que se resolvem no processo de ensino, uma vez que em geral, todos concordam em trabalhar problemas sugeridos pelos livros didáticos. O conteúdo dos livros didáticos se aproxima-se da categoria de Matemática a partir da modelagem matemática, uma vez que organizam as explicações com base em sequências que apresentam esquemas, algoritmos, símbolos e formalizações da descrição dos fenômenos físicos, mas se distancia na medida em que não se evidencia a orientação para a formação de habilidades de pensamento. Com relação aos licenciandos, os significados construídos são consequentes com a análise de seus professores e dos livros didáticos, uma vez que neles detectamos, também, a percepção de que a Matemática é a linguagem da Física, com alguns aspectos próximos da categoria de *Matematização a partir da modelagem matemática*, mas, também, se distanciando ao não evidenciar a necessidade de construção de habilidades de pensamento, que lhes permitam compreender a relação entre diversos tipos de representação de um fenômeno físico. Esse resultado evidenciou uma lacuna entre o que os físicos consideram como matemática da Física, o que os livros didáticos apresentam como matemática da Física, o que os professores consideram como processo de matemática da Física em sala de aula, e, o que, finalmente, os alunos entendem como importante em seu processo de aprendizagem. Esperamos oferecer à comunidade acadêmica uma melhor compreensão sobre este tópico com base no qual se podem desenvolver reflexões fundamentadas na formação inicial de professores.

Palavras-chave:

Ensino de Física. Licenciatura em Física. Formação de professores. A Matemática na Física. A Matemática no Ensino de Física. Matemática.

VIZCAÍNO, D.F. **Papel da “Matematização” nas explicações de professores e alunos em disciplinas de Física na formação inicial de professores.** 2013. 260f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência). Faculdade de Ciências, UNESP, Bauru, 2013.

ABSTRACT

The main objective of this research is to establish parameters for using of "Mathematization of Physics" as an effective component in the construction of explanations, in order to contribute to the improvement of teaching and learning of physics on initial education of teachers. Thus, we formulated the research problem: "

"What possible relations operate in the use of Mathematization of Physics in the construction of explanations in educational activities for Teaching Physics, held in an undergraduate course of teachers Physics?". This problem was split into three investigative questions that inquired about meanings attributed to "Mathematization of Physics" in: teaching activities of teachers, textbooks used in these activities, and explanations of undergraduate students. For this purpose, we study a theoretical framework that allowed us to investigate in search results over the last decade for the teaching of physics specifically related studies on the use of mathematics. Based on this study, we obtained three categories on the "Mathematization of Physics" in the process of teaching improvement. They are: (1) Mathematization from mathematical modeling, (2) Mathematization from physical-mathematical process, (3) Mathematization to complement the phenomenological study. Thus, we use these three as analysis categories of the data. The nature of this research was qualitative and we used methodologies such as, non-participant observation, questionnaires and textual analysis of textbooks teaching, on an undergraduate course from a public university in the state of São Paulo, Brazil. Briefly we can conclude that the perspectives of teachers coincide in some aspects of Mathematization through mathematical modeling, and in the second, they coincide with Mathematization as a complement of phenomenological study, but turn away them in relation to the type of problems that are solved in the teaching process, since in general, all agree to work problems suggested by textbooks. The content of textbooks approached the category Mathematization from mathematical modeling, since organized explanations are based on sequences with schemes, algorithms, symbols and formalization of the description of physical phenomena, but with a distance in that direction when there was no evidence about formation of thinking skills. With respect to undergraduate students, meanings constructed with the consequent analysis of their teachers and textbooks used as support, since we detected in them, the perception that mathematics is the language of physics, with some aspects of the category about Mathematization from mathematical modeling, but also moving away, by not understanding the need to construct thinking skills that allow them to comprehend the relationship between various types of representation of a physical phenomenon. This result showed a gap between what physicists consider as Mathematization of physics, what teachers consider as a process of Mathematization of physics in the classroom and, finally, what students believe is important in their learning process. Therefore, we hope to provide to the academic community a better understanding of this topic, from which it is possible develop founded reflections in initial education of physics teacher.

Keywords: Physics Teaching. Physics Teacher Education. Teacher Education. Mathematics in Physics. Mathematics in Physics Teaching. Mathematization.

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1-SÍNTESE DE TRÊS PERSPECTIVAS DE MATEMATIZAÇÃO NO ENSINO DA MATEMÁTICA.	47
QUADRO 2 -QUANTIDADE DE ARTIGOS PUBLICADOS POR CADA PERIÓDICO, NO PERÍODO ESCOLHIDO.	63
QUADRO 3. LISTA DE ARTIGOS SELECIONADOS COM OS RESPECTIVOS: TÍTULO, AUTORES, PERIÓDICO E ANO DE PUBLICAÇÃO.	65
QUADRO 4. QUANTIDADE DE ARTIGOS SELECIONADOS POR PERIÓDICO.....	67
QUADRO 5-CATEGORIAS DE MATEMATIZAÇÃO NO ENSINO DE FÍSICA A PARTIR DAS TRÊS QUESTÕES PROPOSTAS.	79
QUADRO 6-SÍNTESE DAS CATEGORIAS DE MATEMATIZAÇÃO A PARTIR DO QUADRO ANTERIOR.....	79
QUADRO 7-FONTES E INSTRUMENTOS PARA COLETA DE INFORMAÇÃO DA PESQUISA.	86
QUADRO 8. RELAÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS COM SEUS CORRESPONDENTES CAPÍTULOS ANALISADOS, E SÍMBOLOS PARA SE REFERÊNCIA AO LONGO DO CAPÍTULO.	94
QUADRO 9. EXEMPLO DE EXERCÍCIO QUE BUSCA RELACIONAR O TÓPICO DE “MOVIMENTO” COM O COTIDIANO NOS DOIS LIVROS DE FÍSICA CLÁSSICA.....	96
QUADRO 10. EXEMPLOS DE SITUAÇÕES COLOCADAS NOS LIVROS DE FÍSICA QUÂNTICA, A FIM DE INTRODUIZIR O ESTUDO DA NATUREZA DA RADIAÇÃO ELETROMAGNÉTICA.....	99
QUADRO 11. SEQUÊNCIA DE CONTEÚDOS DOS LIVROS DE FÍSICA CLÁSSICA “HALLIDAY” E “NUSSENSVEIG” NO CAPÍTULO DE MOVIMENTO UNIDIMENSIONAL.	101
QUADRO 12. EXEMPLOS DE DEFINIÇÃO DE CONCEITOS NOS LIVROS DE “HALLIDAY” E “NUSSENSVEIG” QUE EXIGEM CONHECIMENTOS PRÉVIOS DO LEITOR.....	102
QUADRO 13. SEQUÊNCIA DE CONTEÚDOS DOS LIVROS DE “EISBERG” E “PESSOA” EM CAPÍTULOS INTRODUTÓRIOS À FÍSICA QUÂNTICA.....	105
QUADRO 14. EXEMPLOS DE DEFINIÇÃO DE CONCEITOS NOS LIVROS DE “EISBERG” E “PESSOA” NOS QUAIS SE EXIGEM CONHECIMENTOS PRÉVIOS.	108
QUADRO 15. EXEMPLOS DE PROBLEMAS APRESENTADOS NO LIVRO DE HALLIDAY, EM TRÊS NÍVEIS DE DIFICULDADE, PARA OS QUAIS INDICAMOS POSSÍVEIS ETAPAS DA SOLUÇÃO.....	110
QUADRO 16. EXEMPLOS DE PROBLEMAS APRESENTADOS NO LIVRO DE NUSSENSVEIG, PARA OS QUAIS INDICAMOS POSSÍVEIS ETAPAS DE SUA SOLUÇÃO.....	111
QUADRO 17 EXEMPLOS DE PROBLEMAS APRESENTADOS NO LIVRO DE EISBERG, PARA OS QUAIS INDICAMOS POSSÍVEIS ETAPAS PARA A SOLUÇÃO.	112
QUADRO 18. EXEMPLOS DE PROBLEMAS APRESENTADOS NO LIVRO DE PESSOA, PARA OS QUAIS INDICAMOS POSSÍVEIS ETAPAS DA SOLUÇÃO.	113
QUADRO 19. SÍNTESE DA SEQUÊNCIA UTILIZADA NO PROCESSO DE EXPLICAÇÃO DOS TÓPICOS DE FÍSICA, CONFORME DESCRIÇÃO DOS PROFESSORES DA AMOSTRA.....	119
QUADRO 20. EXEMPLOS TOMADOS DA OBSERVAÇÃO DE AULAS RESPEITO À UTILIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES.	122
QUADRO 21. EVIDÊNCIAS OBSERVADAS NO DESENVOLVIMENTO DAS AULAS, COM RELAÇÃO À UTILIZAÇÃO DE REPRESENTAÇÕES DOS FENÔMENOS FÍSICOS EM ESTUDO.	128
QUADRO 22. EVIDÊNCIAS OBSERVADAS NO DESENVOLVIMENTO DAS AULAS, COM RELAÇÃO À UTILIZAÇÃO DE GRÁFICOS.	128
QUADRO 23. EXEMPLOS REPRESENTATIVOS DE RESPOSTA TIPO UM, À PERGUNTA QUE INDAGA PELO SIGNIFICADO DA EXPRESSÃO MATEMÁTICA: $\vec{F} = M\vec{a}$	138

QUADRO 24. EXEMPLOS REPRESENTATIVOS DE RESPOSTA TIPO DOIS, À PERGUNTA QUE INDAGA PELO SIGNIFICADO DA EXPRESSÃO MATEMÁTICA: $\vec{F} = M\vec{a}$.	139
QUADRO 25. CLASSIFICAÇÃO DOS FENÔMENOS ESCOLHIDOS PELOS ESTUDANTES DE FI E LFM, PORCENTAGEM DA QUANTIDADE DE ESTUDANTES POR CADA TIPO DE RESPOSTA E EXPRESSÕES REPRESENTATIVAS.	141
QUADRO 26. REPRESENTAÇÕES DOS FENÔMENOS ESCOLHIDOS POR ESTUDANTES DE FI E LFM, ASSOCIADOS ÀS ONDAS MECÂNICAS.	142
QUADRO 27. REPRESENTAÇÕES DOS FENÔMENOS ESCOLHIDOS POR ESTUDANTES DE FI E LFM, ASSOCIADOS ÀS ONDAS ELETROMAGNÉTICAS.	144
QUADRO 28. INDICADORES DE PARTICIPAÇÃO ORAL DOS ALUNOS DE FÍSICA I, EM MOMENTOS EM QUE RECEBEM EXPLICAÇÕES DO PROFESSOR E EM MOMENTOS EM QUE APRESENTAM SUAS EXPLICAÇÕES. (“X” INDICA A PRESENÇA DO INDICADOR E “NE” SIGNIFICA QUE NÃO HOUE EVIDENCIAS DO INDICADOR.)	147
QUADRO 29. INDICADORES DE PARTICIPAÇÃO ORAL DOS ALUNOS DE LABORATÓRIO DE FÍSICA MODERNA, EM MOMENTOS EM QUE RECEBEM EXPLICAÇÕES DO PROFESSOR E EM MOMENTOS EM QUE APRESENTAM SUAS EXPLICAÇÕES.	148
QUADRO 30. PORCENTAGEM DE ALUNOS DA DISCIPLINA DE FÍSICA I QUE DESCREVE O PROCESSO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE FÍSICA EM DIFERENTE QUANTIDADE DE ETAPAS.	157
QUADRO 31. PORCENTAGEM DE ALUNOS DA DISCIPLINA DE LABORATÓRIO DE FÍSICA MODERNA QUE DESCREVE O PROCESSO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE FÍSICA EM DIFERENTE QUANTIDADE DE ETAPAS.	157
QUADRO 32. CLASSIFICAÇÃO DOS CONTEÚDOS DAS RESPOSTAS DOS ESTUDANTES DE FÍSICA I, PORCENTAGEM DA QUANTIDADE DE ALUNOS POR CADA TIPO DE RESPOSTA.	239
QUADRO 33. CLASSIFICAÇÃO DOS CONTEÚDOS DAS RESPOSTAS DOS ESTUDANTES DE LABORATÓRIO DE FÍSICA MODERNA, PORCENTAGEM DA QUANTIDADE DE ALUNOS POR CADA	240

LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICO 1. REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA TABELA 1.	154
---	-----

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1. REPRESENTAÇÃO DA SÍNTESE DA DEMONSTRAÇÃO DE ARQUIMEDES SOBRE A LEI DA ALAVANCA EM TRÊS PASSOS BÁSICOS.	26
FIGURA 2. REPRESENTAÇÃO UTILIZADA POR GALILEU.	71
FIGURA 3. ESQUEMA GERAL DA CATEGORIA “MATEMATIZAÇÃO A PARTIR DA MODELAGEM MATEMÁTICA”	80
FIGURA 4. ESQUEMA GERAL DA CATEGORIA “MATEMATIZAÇÃO A PARTIR DE PROCESSOS FÍSICO-MATEMÁTICOS”	81
FIGURA 5. ESQUEMA GERAL DA CATEGORIA “MATEMATIZAÇÃO COMO COMPLEMENTO DO ESTUDO FENOMENOLÓGICO”	81

LISTA DE TABELAS

TABELA 1. PORCENTAGEM DE LICENCIANDOS COM A QUANTIDADE DE ETAPAS QUE CONSIDERA NO PROCESSO DE RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DA FÍSICA, NAS DISCIPLINAS DE FÍSICA I E LABORATÓRIO DE FÍSICA MODERNA.	154
--	-----

LISTA DE APÊNDICES

APÊNDICE A. TRECHOS DOS ARTIGOS QUE CORRESPONDEM COM A CATEGORIA 1. MATEMATIZAÇÃO A PARTIR DA MODELAGEM MATEMÁTICA.....	174
APÊNDICE B. TRECHOS DOS ARTIGOS QUE CORRESPONDEM COM A CATEGORIA 2. MATEMATIZAÇÃO A PARTIR DE PROCESSOS FÍSICO-MATEMÁTICOS.....	181
APÊNDICE C. TRECHOS DOS ARTIGOS QUE CORRESPONDEM COM A CATEGORIA 3. MATEMATIZAÇÃO COMO COMPLEMENTO DO ESTUDO FENOMENOLÓGICO.	188
APÊNDICE D. CLASSIFICAÇÃO DOS TEXTOS NAS TRÊS CATEGORIAS.....	192
APÊNDICE E. FICHA DIÁRIA DE OBSERVAÇÃO PRELIMINAR	193
APÊNDICE F. ROTEIRO DE OBSERVAÇÃO DE AULAS	194
APÊNDICE G. QUESTIONÁRIO PARA PROFESSORES.....	195
APÊNDICE H. QUESTIONÁRIO PARA ALUNOS	196
APÊNDICE I. QUESTIONÁRIO PILOTO PARA ESTUDANTES.....	197
APÊNDICE J. LISTADO DE LIVROS DIDÁTICOS SUGERIDOS NAS EMENTAS DAS DISCIPLINAS ACOMPANHADAS NO PRIMEIRO SEMESTRE DE 2012.....	198
APÊNDICE K. ROTEIROS DE ANÁLISE DO LIVRO DE TEXTO:.....	200
APÊNDICE L. RESPOSTAS DOS PROFESSORES AO QUESTIONÁRIO	215
APÊNDICE M. FICHA DE CARACTERIZAÇÃO DA I.E.S.	218
APÊNDICE N. FICHA DE CARACTERIZAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA- FC/UNESP/BAURU.	220
APÊNDICE O. RESPOSTAS AO QUESTIONÁRIO DOS ALUNOS DO GRUPO C1	223
APÊNDICE P. RESPOSTAS AO QUESTIONÁRIO DOS ALUNOS DO GRUPO C2.....	233
APÊNDICE Q. CLASSIFICAÇÃO DOS CONTEÚDOS DAS RESPOSTAS DOS ESTUDANTES DE FÍSICA I, PORCENTAGEM DA QUANTIDADE DE ALUNOS POR CADA TIPO DE RESPOSTA À QUESTÃO 2.....	239

LISTA DE ANEXOS

ANEXO 1. CÁLCULO DO CENTRO DE GRAVIDADE DE UM TRIANGULO, POR ARQUIMEDES. TOMADO DE. ASSIS, ANDRÉ KOCH TORRES, -ARQUIMEDES, O CENTRO DE GRAVIDADE E A LEI DA ALAVANCA 1962. ED APEIRON, MONTREAL.....	242
ANEXO 2. DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DE ONDA RELATIVISTA DE DIRAC.....	245
ANEXO 3. SINOPSE DE MÉTODOS DE MODELAGEM. HESTENES (2006).....	257

SUMARIO

APRESENTAÇÃO	14
INTRODUÇÃO	16
1. SIGNIFICADOS DE “MATEMATIZAÇÃO DA FÍSICA”	25
1.1. SIGNIFICADOS DE MATEMATIZAÇÃO DA FÍSICA EM TRÊS MOMENTOS NA HISTÓRIA DA FÍSICA	25
1.2. REFLEXÕES SOBRE “EXPLICAÇÃO” E “LINGUAGEM” NA MATEMATIZAÇÃO DA FÍSICA	35
1.3. QUESTIONANDO POSSÍVEIS IMPLICAÇÕES DA COMPREENSÃO SOBRE A MATEMATIZAÇÃO DA FÍSICA NO ENSINO DE FÍSICA.....	40
2. SIGNIFICADOS DA “MATEMATIZAÇÃO DA FÍSICA” NO ENSINO DE FÍSICA	43
2.1. PROPOSTAS DE MATEMATIZAÇÃO PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA	44
2.2. PROPOSTAS DE USOS DA MATEMÁTICA NO ENSINO DE FÍSICA	48
2.3. REFLEXÕES SOBRE SIGNIFICADOS DE “EXPLICAÇÃO” E “LINGUAGEM” NO ENSINO DE FÍSICA.....	55
3. CATEGORIAS DE “MATEMATIZAÇÃO” NO ENSINO DE FÍSICA	61
3.1 METODOLOGIA DA PESQUISA PRELIMINAR.....	61
3.2 SELEÇÃO DOS TEXTOS A SEREM ANALISADOS.....	63
3.3. PROCESSO DE CONSTITUIÇÃO DAS CATEGORIAS	67
3.3.1. <i>Categoria 1. Matemática a partir da modelagem matemática (ModelMat)</i>	68
3.3.2. <i>Categoria 2. Matemática a partir de processos físico-matemáticos (ProcesFisMat)</i>	71
3.3.3. <i>Categoria 3. Matemática como complemento do estudo fenomenológico (EstudFenom)</i>	75
3.4 SÍNTESE DAS PRINCIPAIS CARACTERÍSTICAS DAS TRÊS CATEGORIAS DE “MATEMATIZAÇÃO” NO ENSINO DA FÍSICA.....	78
4. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	84
4.1 PROBLEMA E QUESTÕES DE PESQUISA.....	84
4.2. CONSTITUIÇÃO DE DADOS	85
4.2.1 <i>Fontes de informação</i>	85
4.2.2 <i>Instrumentos de pesquisa</i>	85
4.3. NATUREZA DA PESQUISA	88
4.3.1 <i>Pesquisa qualitativa</i>	89
4.4. MÉTODOS DE ANÁLISE DAS INFORMAÇÕES COLETADAS.....	90
4.4.1. <i>Análise dos registros das observações realizadas</i>	90
4.4.2. <i>Análise de respostas aos questionários</i>	90
5. SIGNIFICADOS SOBRE “MATEMATIZAÇÃO DA FÍSICA” PRESENTES NA ORGANIZAÇÃO DE ATIVIDADES DIDÁTICAS DE PROFESSORES	92

PRIMEIRA PARTE: SIGNIFICADOS SOBRE MATEMATIZAÇÃO DA FÍSICA PARA O ENSINO, PRESENTES EM LIVROS DIDÁTICOS DE FÍSICA UNIVERSITÁRIA.	93
5.1. RELAÇÕES ENTRE FÍSICA E MATEMÁTICA	95
5.1.1. <i>Presença da Matemática em livros didáticos de Física Clássica</i>	95
5.1.2. <i>Presença da Matemática em livros didáticos de Física Quântica</i>	98
5.2. O QUE OS ALUNOS DEVEM ENTENDER PARA APRENDER A FÍSICA	101
5.2.1. <i>Pressupostos sobre a aprendizagem da Física em livros didáticos de Física Clássica</i>	101
5.2.2. <i>Pressupostos sobre a aprendizagem da Física em livros didáticos de Física Quântica</i> .	105
5.3. TIPO DE PROBLEMAS QUE O ALUNO DEVE RESOLVER PARA CONSOLIDAR SUA APRENDIZAGEM	109
5.4. SIGNIFICADOS ATRIBUÍDOS À “MATEMATIZAÇÃO DA FÍSICA” NO ENSINO DE FÍSICA, A PARTIR DOS LIVROS DIDÁTICOS.	114
SEGUNDA PARTE: SIGNIFICADOS SOBRE MATEMATIZAÇÃO DA FÍSICA NAS ATIVIDADES DIDÁTICAS DE PROFESSORES	117
5.5. RELAÇÕES ENTRE FÍSICA E MATEMÁTICA SEGUNDO OS PROFESSORES.....	118
5.6. O QUE OS ALUNOS DEVEM ENTENDER PARA APRENDER FÍSICA.....	126
5.7. TIPO DE PROBLEMAS QUE O ALUNO DEVE RESOLVER	129
5.8. SIGNIFICADOS ATRIBUÍDOS PELOS PROFESSORES À “MATEMATIZAÇÃO DA FÍSICA”	133
6. SIGNIFICADOS SOBRE “MATEMATIZAÇÃO DA FÍSICA” PRESENTES NAS EXPLICAÇÕES DE LICENCIANDOS	136
6.1. RELAÇÃO ENTRE FÍSICA E MATEMÁTICA NOS LICENCIANDOS	137
6.2. CONSIDERAÇÕES DOS LICENCIANDOS SOBRE SUA APRENDIZAGEM DA FÍSICA	145
6.3. COMO OS LICENCIANDOS ENTENDEM A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE FÍSICA?.....	153
6.4. SIGNIFICADOS ATRIBUÍDOS PELOS LICENCIANDOS À “MATEMATIZAÇÃO DA FÍSICA”	159
CONCLUSÕES.....	160
REFERÊNCIAS	165
BIBLIOGRAFIA CONSULTADA	170
APÊNDICES.....	173
ANEXOS.....	241

APRESENTAÇÃO

A minha carreira, como profissional do Ensino da Física, começou quando fiz o curso de *Licenciado em Física* na Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas (UDFJC) de Bogotá, Colômbia. Curso que finalizei no ano de 1996, apresentando como trabalho de conclusão uma dissertação intitulada “O vácuo e sua medição”, na qual desenvolvi uma estratégia didática para a construção dos conceitos de pressão e vácuo em sala de aula. Uma vez habilitado para ensinar Física no nível médio, trabalhei dois anos em colégio particular e, depois no ano de 1998, ingressei na “Secretaria de Educación del Distrito de Bogotá” (rede municipal), onde atuei por dez anos, como professor de Física e Matemática. Neste percurso, foram muitas as perguntas que me surgiram sobre como exercer um ensino de qualidade, relacionadas à necessidade de reformulação do meu conhecimento da Física e as formas como tal conhecimento podia ser ensinado e aprendido, especialmente naqueles contextos escolares, onde o aprendizado da Física parece não fazer muito sentido.

Foi então que decidi me formar como *Mestre em Ensino de Física*, na Universidad Pedagógica Nacional (UPN) de Bogotá, Colômbia, em 2004. Apresentei uma dissertação intitulada “A equação de Schroedinger”, na qual fiz uma análise de corte histórico e epistemológico sobre seu surgimento e impacto, visando compreender como a análise de uma equação pode ser uma ferramenta para o ensino da Física. Porém, este trabalho não me ofereceu respostas, somente gerou mais perguntas sobre os usos da Matemática no Ensino da Física.

Simultaneamente ao meu desempenho como professor de nível médio, ingressei no magistério de nível universitário, no ano de 2005, na Universidad Distrital Francisco José de Caldas, ministrando aulas de Física, no curso de Licenciatura em Física e, no ano de 2008, iniciei como docente de tempo integral da Universidad Libre de Colômbia, ministrando aulas de Física para alunos de Engenharia.

Nessas duas experiências, o meu interesse de pesquisa em relação à didática da Física foi aumentando, razão pela qual no ano de 2008, fui co-fundador do *grupo de pesquisa “Ensino e Aprendizagem da Física”*, vinculado ao departamento de Física da UDFJC. Foi assim que tive uma grande motivação para iniciar uma pesquisa, com um interesse especial, sobre as estratégias didáticas que podem auxiliar os alunos na compreensão da Física, preocupação que desencadeou meu desejo de iniciar o Doutorado. Obtive uma bolsa de estudos, no Programa de Pós-graduação em *Educación para a Ciência*, da Universidade

Estadual Paulista, a bolsa foi outorgada pela Embaixada do Brasil em Bogotá, Colômbia, no Programa Aluno Convênio de Pós-graduação (PEC-PG) da CAPES, a partir de Março de 2010.

Por essa razão, desloquei-me para o Brasil e desenvolvi a pesquisa intitulada “Papel da matematização nas explicações de professores e alunos em disciplinas de física na formação inicial de professores”. Esta pesquisa desenvolve-se visando dar resposta à questão: “Que possíveis relações operam na utilização da Matematização da Física na construção de explicações, em atividades didáticas para o Ensino de Física, realizados em um curso de Licenciatura em Física?”

Esta tese foi dividida nos seguintes capítulos. No capítulo 1, analisamos o significado da “Matematização” na evolução da Física, em torno da formulação de três leis da Física; No capítulo 2, procuramos o significado da Matematização em trabalhos de pesquisadores no ensino de Física e no ensino de Matemática; Capítulo 3, categorizamos as formas como pesquisadores em Ensino de Física entendem a Matematização, a partir de resultados de pesquisa empírica na área de Ensino de Física durante a última década.

Os procedimentos metodológicos da pesquisa são apresentados no capítulo 4, especificando o problema, as questões de pesquisa, junto com a natureza, as fontes de informação, instrumentos de coleta de dados e metodologias de análise.

Nos capítulos 5 e 6, apresentamos as evidências e constatações obtidas em relação aos significados de Matematização, presentes em livros-textos de Física universitária; critérios de organização de atividades didáticas de professores de um curso de Licenciatura em Física, e explicações de alunos de um curso de Licenciatura em Física.

INTRODUÇÃO

Na cultura, organização e desenvolvimento escolar é preciso trabalhar em investigações sobre os condicionantes que determinam os planejamentos didático-pedagógicos, a fim de ajudar na tarefa de encontrar novos métodos e caminhos, que oportunizem níveis de maior sucesso nos resultados do exercício docente. Isto implica entender a organização escolar como uma rede de especificidades, focos e objetivos, dentro dos quais, existem diferentes atores com diferentes funções, sendo a Formação Docente para o Ensino de Ciências, uma parte importante dentro da hierarquização destas funções.

Nesse âmbito, conta-se com atores, como: os professores formadores; os alunos de Licenciatura, que são futuros docentes, chamados também de docentes em pré-serviço; os docentes de ensino médio ou em serviço, que podem ser docentes experientes ou docentes novatos e os alunos de ensino médio. Nesta formalização do trabalho docente, os licenciandos atualmente em formação e em pré-serviço, logo voltarão para o ensino médio no papel de docentes, fechando um ciclo que vai criando e também perpetuando formas de desenvolver o processo de ensino e aprendizagem das Ciências. Ciclos que, por vezes têm vícios difíceis de serem superados, a não ser por meio da pesquisa sobre o processo em si mesmo.

Atualmente, pode-se falar que a pesquisa em Ensino de Ciências tem crescido e fornecido resultados importantes que orientam transformações, tanto no interior da sala de aula, quanto no contexto, no qual se desenvolvem as aulas. Mas o campo de Ensino de Ciências não é indiferente à cultura, organização e desenvolvimento escolar e, portanto, os resultados de pesquisa nem sempre têm a possibilidade de serem aplicados imediatamente, já que estão permeados pelos objetivos, culturas e estruturas educacionais, que condicionam o funcionamento da escola; o que, de uma parte, impedem as inovações e, de outra, geram novos desafios para a pesquisa, tanto no âmbito da formação docente em geral, quanto na formação específica para o Ensino de Ciências.

Das diferentes relações que se podem apresentar entre esses atores, surge um universo de possibilidades de problemas que a pesquisa em “Ensino de Ciências”, no seu desenvolvimento, tem procurado atingir. Mas, na medida em que aprofunda-se neste campo, vão se caracterizando cada vez mais e melhor os diversos problemas, objetos de estudo deste campo e, assim, vão surgindo novas perspectivas de pesquisa e, também novos problemas,

que embora não sejam “novos”, não tinham sido vistos como problemas. É assim que a formação de professores, como campo de estudo, vem crescendo nas últimas décadas, com pesquisas relacionadas às especificidades de ensinar cada uma das ciências, sendo o nosso interesse focado no Ensino da Física.

Ao considerar diferentes levantamentos do estado da arte em Ensino de Física, encontramos, na década de 1990, nas diferentes pesquisas, “uma significativa preocupação com o preparo do professor para atuar nas séries iniciais do Ensino Fundamental”. Este levantamento, “Permitiu ainda evidenciar o silêncio quase total em relação à formação do professor para o Ensino Superior” (ANDRE, *et al.* 1999, p.309). Também, de acordo com o estudo de Salém e Kawamura (2007) apresentado no XIV SNEF no 2005, confirma-se a predominância de trabalhos voltados ao ensino médio, que correspondem quase à metade do total de trabalhos, seguido pelo ensino superior, com cerca de um terço. Ainda que não sejam dados definitivos sobre a ausência de pesquisa em Ensino de Física no Ensino Superior, apresenta-se uma tendência de pouca pesquisa no tema, comparativamente com outras temáticas no Ensino de Física, pelo menos no contexto brasileiro.

Uma das razões da carência de pesquisa neste campo, pode-se encontrar no fato de que os formadores de professores de Física na universidade, geralmente foram formados como investigadores na Física e não em ensino; portanto, não podem formar para a pesquisa em ensino de Física. Há vinte anos, Gil-Perez (GIL-PEREZ, apud CALATAYUD, 1992) discutia esta situação para o caso da Espanha, apontando com preocupação, o fato de os professores universitários consideravam o trabalho docente como uma tarefa que interferia em suas pesquisas. Entende-se que esse professor, não foi formado para pesquisar sobre sua própria prática docente, sem querer dizer que seja correto isso acontecer, mas ressaltando que é um campo que merece o olhar colaborativo dos especialistas, tanto da área de Ciências, quanto da área de Ensino de Ciências.

Outro aspecto a ser considerado é a extrapolação que se costuma fazer de resultados obtidos em pesquisas de ensino de Ciências, no nível básico, para propor melhoras no ensino universitário, argumentando que as problemáticas são bastante similares, como é apresentado no trabalho de Gil-Perez, *et al* (1991). Concordamos parcialmente com estes autores, no sentido de que é possível sim, levar para a formação de professores conclusões, como: a formação inicial não pode ser uma somatória de conhecimentos científicos e conhecimentos psico-pedagógicos e, que o ensino das disciplinas científicas, em si mesmas, deve oportunizar a formação para o ensino desse conhecimento. Porém, discordamos no sentido de que não consideramos imediata, nem linear a aplicação de resultados obtidos, a partir da análise do

exercício de professores de Física no nível básico, para o exercício de professores universitários formadores de professores de Física.

A razão de nossa discordância fica pelo menos em três pontos que consideramos ser diferentes entre o ensino de Física no nível básico e o ensino de Física na formação de licenciados: 1- os conteúdos a ensinar são diferentes, mesmo sendo todos do domínio da Física, 2- os objetivos de ensino da Física são diferentes e, 3- o uso que o aluno de nível básico deverá fazer do conhecimento adquirido é diferente do uso que se espera que o aluno da Licenciatura faça. Isto leva-nos a crer que a extrapolação de um campo para outro fique apenas no campo da teoria e seja difícil desenvolver processos reais na prática da formação dos licenciandos, com base em estudos feitos com alunos de nível básico. Entendemos que a formação universitária precisa de seus próprios estudos em suas próprias realidades. De acordo com Imbernon (2000), tem se aberto caminho a novos questionamentos sobre os conhecimentos científicos e suas formas de ensino na universidade, mas estes têm-se incorporado mais no debate do que nas práticas.

Além do anteriormente mencionado, encontramos uma outra preocupação, no sentido de que os alunos da Licenciatura aprendem mais sobre como ensinar a Física, a partir do seu aprendizado da mesma, do que a partir do aprendizado em disciplinas de pedagogia e didática da Física. Como diz Gil-Perez e Pessoa, (apud Copello e Sanmartí, 2001, p.270) “tende-se a ensinar mais da forma como foi aprendido na escola e na universidade, do que aplicando as ideias “aprendidas” sobre como dever-se-ia ensinar”¹. Ideia que também concorda com a indicação que se faz na Resolução CNE/CP1/2002, que institui Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de professores, quando no Art.3, pede-se para considerar a coerência entre a formação oferecida e a prática esperada do futuro professor, tendo em vista, entre outras, a simetria invertida, onde o preparo do professor, por ocorrer em lugar similar àquele em que vai atuar, demanda consistência entre o que faz na formação e o que dele se espera.

Reconhece-se que tal formação é influenciada ao longo da vida do profissional docente, desde sua experiência escolar até o exercício profissional. Na escola, o sujeito aprende por imitação, na universidade formaliza seus conhecimentos em um processo de formação inicial e, no exercício profissional, aperfeiçoa seus conhecimentos docentes. Tais fatores geram certo grau de preocupação em relação à influência que o professor formador de

¹Texto traduzido livremente pelo autor deste trabalho.

Física tem no desempenho dos futuros professores de ensino médio que, muitas vezes, acontece de forma irreflexiva, sem perceber que tal influência existe.

Salientamos, que é preciso superar, a partir de estudos aprofundados e ajustados à realidade universitária, a barreira que separa a teoria da prática, nas melhoras do Ensino da Física, na Formação de Professores sem esquecer que, na comunidade acadêmica, a Formação de Professores é entendida, hoje, como um campo de pesquisa.

Na formação de Professores, encontramos apropriada a proposta de Shulman sobre as dimensões do conhecimento da matéria para o ensino, que o professor deve ter. Esta proposta pode-nos orientar para estudos do papel que o conhecimento do professor tem dentro da estrutura da formação inicial de professores.

Shulman sugere, em seu trabalho de 1986, “distinguir entre três categorias de conhecimento do conteúdo: (a) conhecimento do conteúdo específico; (b) conhecimento pedagógico geral e; (c) conhecimento curricular” (SHULMAN 1986. p.9). Porém, o autor e seu grupo de trabalho continuaram estudando sobre o conhecimento do professor e como resultado, apresentaram no ano 1989, quatro dimensões do conhecimento da matéria e afirmaram que elas influenciavam o ensino e o aprendizado dos futuros professores.

Essas dimensões respondem a um interesse em caracterizar o conhecimento especializado, necessário para o ensino de uma disciplina, superando a ideia de que basta saber o conteúdo da disciplina para saber ensiná-lo. Tais dimensões são: (1) Conhecimento de conteúdo para o ensino, (2) Conhecimento substantivo para o ensino, (3) Conhecimento sintático para o ensino, e (4) Crenças concernentes à matéria. (GROSSMAN; WILSON; SHULMAN, 1989/2005, p.11). Convém deter-nos um pouco na definição destas dimensões:

1-Conhecimento de conteúdo para o ensino: Este tipo de conhecimento se constrói quando os professores aprendem os conceitos centrais e os princípios organizacionais de sua matéria (o campo disciplinar em que se especializa). Mas os conteúdos devem ser apreendidos, não somente com relação ao domínio da disciplina em si, mas atrelados às formas como tais conteúdos podem ser comunicados em sala de aula, a fim de evitar que os professores tenham que aprender a ensinar tal conteúdo somente a partir da experiência na prática. Portanto, os professores em formação devem desenvolver a habilidade de adquirir novo conhecimento de forma autônoma, tanto no que se refere à matéria a ser ensinada, quanto no que se refere aos tratamentos dessa matéria em sala de aula.

O conhecimento de conteúdo pode afetar, por exemplo, como “os professores criticam os livros didáticos, como selecionam o material para o ensino, como estruturam suas aulas e como conduzem a instrução” (GROSSMAN; WILSON; SHULMAN, 1989/2005, p.13), uma

vez que, a falta de domínio deste conteúdo faz com que o professor siga o livro didático, como sua principal fonte de informação, tanto da ciência quanto da metodologia para o ensino, ao invés de criar suas próprias estratégias de ensino, ou ainda, pode conduzi-lo ao abandono do ensino daqueles tópicos que não domina, mas que poderia dominar se estudasse de forma autônoma.

2- *Conhecimento substantivo para o ensino*: Refere-se ao conhecimento das estruturas substantivas, que são os paradigmas ou marcos numa disciplina. É a forma como estão organizados os conceitos básicos e princípios de uma disciplina, que orientam o foco de indagação, ditando de muitas maneiras as questões que os investigadores fazem e o rumo que propõem para constituir as respostas. Para Shulman, o conteúdo emerge através de um processo de análise crítica, guiada tanto pelas estruturas substantivas, quanto pelas sintáticas de uma disciplina. Mas este conteúdo, usualmente, é difícil de ser ensinado na formação inicial de professores, dado que ali são ensinados tópicos específicos, organizados em diferentes disciplinas sem ligação entre elas, quer dizer, sem evidenciar para os alunos a estrutura substantiva da ciência que estão aprendendo.

No caso da Física, este conhecimento se constrói quando o professor entende, por exemplo, as diferenças conceituais e procedimentais entre os paradigmas da mecânica clássica e a mecânica quântica. A falta de domínio deste conteúdo conceitual pode levar o professor a organização de sequências de ensino sem compreender o porquê desta sequência, nem qual a relação entre um tópico e outro, apresentando para o aluno uma visão reduzida e única da ciência, já que não desenvolveu critérios para organizar outras formas de relacionar os conceitos ou para orientar debates e reflexões sobre o tema que esta sendo ensinado.

3- *Conhecimento sintático para o ensino*: As estruturas sintáticas, numa disciplina, estão conformadas pelos instrumentos de indagação da disciplina, os cânones de evidência e as provas através das quais o novo conhecimento é admitido no campo da disciplina (SCHWAB, 1978 apud GROSSMAN; WILSON; SHULMAN, 1989/2005). Quer dizer, trata-se da compreensão das maneiras como é produzido o novo conhecimento na matéria. Para o caso da Física implica, por exemplo, entender as formas de indagação e de investigação que levam à melhor compreensão da natureza.

Embora haja consciência entre os professores sobre a importância deste tipo de conhecimento, a realidade nos cursos de formação inicial mostra que se costuma ensinar uma visão de ciência como produto e não como processo. Isto acontece porque a formação do futuro professor não gira em torno da orientação para levá-los a gerar questionamentos sobre

como produzir Física, mas entorno ao estudo do que já foi elaborado, como conjunto fixo de conhecimentos da ciência, o qual não permite o estudo de suas estruturas sintáticas.

Assim, o licenciando acaba assumindo como verdade que a ciência já esta feita e o que ainda não esta feito somente poderá ser descoberto por físicos, com habilidades mentais muito especiais. Em consequência, o futuro professor, por sua vez, comunicará para seus alunos a ideia de que não é possível construir conhecimento em Física, ou que o conhecimento construído por eles não é válido. Significa que a falta de domínio do conhecimento sintático para o ensino impede os professores de desenvolverem habilidades para a produção de conhecimento ou implementarem novas informações a seus conhecimentos, impedindo, por exemplo, sua atualização no campo.

4- *Crenças concernentes à matéria*: Esta dimensão não é da mesma natureza das três dimensões anteriores, que tratam do conteúdo da matéria em si. É uma dimensão relacionada com as práticas de ensino, uma vez que é costume os professores entenderem suas crenças concernentes à matéria, como o conhecimento a ser ensinado. Segundo Shulman, vários estudos têm mostrado que tais crenças referem-se aos questionamentos: como entendem o que é ensinar e aprender tal matéria, como aprendem a partir de suas experiências e como desenvolvem a metodologia de ensino de seus conhecimentos.

O impacto das crenças, no exercício profissional, ocorre, principalmente, nos critérios que o professor cria para selecionar conteúdos, objetivos e estratégias de ensino, assim como seu posicionamento frente à ciência e ao fazer do cientista. Assim “[...] precisa-se que os professores em formação reconheçam as influências que tais crenças têm sobre o que aprendem e o que ensinam, e os formadores devem proporcionar oportunidades para que os futuros professores identifiquem e examinem as crenças que têm acerca do conteúdo que ensinam”.(GROSSMAN; WILSON; SHULMAN, 1989/2005, p.20)

Para Shulman, os professores podem aprender acerca de sua profissão “*in locu*”, através do processo de preparação e ensino do novo conteúdo, o que não significa que tal processo de preparação se limite ao planejamento de atividades improvisadas de última hora, mas ao planejamento baseado em conhecimentos de diversas ordens, como os mencionados acima. Neste ponto concorda com a crítica de Tardif e Lessard (2005), no sentido de que aprender a docência *in locu*, força os professores egressos da universidade a inventarem seu próprio conhecimento concreto de trabalho a partir da prática, já que na formação inicial não são educados, adequadamente, para desempenharem-se profissionalmente no ensino. Fato que leva desânimo aos professores ao encontrarem realidades escolares, que não se encaixam nas expectativas criadas, porém é na prática que o professor pode aperfeiçoar e acrescentar

seus conhecimentos sobre a profissão, sempre que for ciente dos tipos de conhecimentos que deve dominar.

Acreditamos que no processo de formação de professores, não é pertinente esperar até que o futuro professor esteja em exercício da profissão para começar a aprender como deve atuar em sala de aula. Isto é, o licenciando deve ser formado com base no conhecimento sobre como ensinar a matéria que está aprendendo, como parte dos conhecimentos de base que o docente deve ter, a fim de construir uma maior competência para o ensino. E, por sua vez, como parte importante do processo, o professor universitário no papel de formador de professores, deve ter clareza sobre os conhecimentos base que o licenciando precisa, a fim de utilizá-los no mesmo processo de formação que desenvolve.

No ensino de Física, um fator condicionante para que a formação inicial não cumpra completamente com a promessa de preparação profissional pode-se encontrar na falta de identidade do professor formador, uma vez que, usualmente, se identifica com a pesquisa em Física, mais do que com a pesquisa em Ensino. Embora o ensino seja um dos seus campos de atuação, não é o principal, já que os professores universitários deparam-se, diariamente, com exigências na atividade de pesquisa em seus campos disciplinares, ora por motivações pessoais, ora pela busca de recursos econômicos das agências financiadoras, exigidos explicitamente ou implicitamente pelas universidades ou ainda, em procura de reconhecimento da comunidade. Fatores que lhes impedem dedicar mais tempo a encarar desafios focados no ensino e que poderiam acarretar bons resultados com seus alunos.

Outro fator condicionante é a falta de identidade do aluno com a profissão de Licenciado, em parte como consequência da falta de identidade do professor, mas também como resultado da falta de domínio sobre o que devem ensinar e as formas como devem ensinar.

Com relação ao professor universitário, Gatti (2004) reflete sobre como o ser professor e o ser pesquisador comporta dois universos de significação que se entrecruzam, mas não, necessariamente, se mostram como totalmente superpostos e, portanto pesquisar nas especialidades das Ciências e pesquisar sobre as práticas docentes contém objetos e métodos de estudos diferentes, mas espera-se que possam convergir numa ação pedagógica integradora, lembrando que de uma parte, é importante a pesquisa científica na vida universitária, e de outra parte, também é importante a ação pedagógica. Isto acontece, principalmente, porque os docentes formadores, geralmente são formados como pesquisadores em seu campo disciplinar, mas são contratados como docentes. Esta

característica abre um amplo campo de estudos e um grande desafio nas reformulações do ensino universitário.

Nessa situação, o professor formador encontra-se nesta vacilação entre ser pesquisador de sua disciplina científica e docente da disciplina, influenciado pelas condições institucionais, que não permitem fomentar a identidade dos futuros licenciados. A respeito desta questão, Gatti diz:

[...] por quê, para a formação de médicos, engenheiros etc., há confluência em relação a uma base institucional bem definida, para a qual contribuem outras instâncias da universidade, porém como estacas que suportam um piso comum e um objetivo claro - formar o médico, ou formar o engenheiro - e esse lastro institucional e filosófico comum não existe quando se trata de formar o professor? O licenciando é um pingente pendurado em duas canoas, com identidade problemática: especialista em área específica ou professor? Matemático ou professor de Matemática? Geógrafo ou professor de Geografia? Físico ou professor de Física? (GATTI, 1992, p. 20)

Pensando nas possibilidades a serem encontradas em cursos de Licenciatura em Física, podemos dizer que o professor formador de licenciados deveria: conhecer a Física que ensina, conhecer as estruturas substantivas e sintáticas da Física que ensina e conhecer as crenças que os futuros docentes podem ter acerca da Física e do ensino da Física. Além disso, deve procurar fazer com que o professor em formação seja ciente dessas crenças e como elas podem influenciar seu futuro desempenho profissional.

Autores como Carvalho e Gil (1993) colocam essa questão como a necessidade de orientar a formação docente, além do conteúdo e, também, além dos conhecimentos de recursos e formas de ensinar, uma vez que se tem detectado, tanto em professores do ensino básico quanto do ensino universitário, ideias ingênuas do que é ensinar e, ainda, sobre o que é ensinar domínios específicos das ciências, gerando atividades docentes frustradas.

Esse fato coloca, novamente, as ideias de Shulman como uma das possibilidades de trabalho em busca de uma formação docente de qualidade que ofereça identidade de professor aos licenciandos, pois combinando o conhecimento de conteúdo, substantivo, sintático para o ensino, as crenças concernentes à matéria e o desafio das ideias ingênuas mencionadas por Carvalho e Gil-Perez, entrar-se-ia no campo das crenças dos docentes e elas poderiam ser superadas, desde a formação inicial de professores, não sendo preciso esperar o “problema” surgir com o docente em exercício.

De acordo com as ideias desenvolvidas no item anterior, podemos afirmar que a aprendizagem de processos de Matematização da Física pode ser entendida como um dos aspectos da formação do professor. Este conhecimento encaixar-se-ia no domínio do conteúdo

a ser ensinado e cuja presença na formação inicial dar-se-ia por meio do ensino das disciplinas de Física.

Em consequência, inscrevemos este trabalho no estudo de práticas de Ensino de Física universitária, num curso de Licenciatura em Física. Mas tendo plena consciência da complexidade do assunto, optamos por estudar apenas um dos seus aspectos: a conformação das explicações dos alunos, acerca de objetos e processos da Física, apoiados no uso da “Matematização”, como processo no Ensino da Física. Não há a pretensão de sugerir uma proposta concreta e acabada para a definição e uso da Matemática no ensino de tópicos de Física, mas sim de oferecer um material que possa ser analisado por professores formadores de Física, na tentativa de oportunizar debates sobre as diversas formas em que pode ser usada a Matemática no Ensino de Física, com seu respectivo impacto em termos de melhoras na formação dos futuros professores.

Nessa ordem de ideias, elaboramos uma perspectiva de análise sobre o modo como os alunos aprendem Física e o modo como os professores podem repensar o ensino da mesma. Torna-se importante na investigação da formação inicial de professores, delimitar o trabalho nas teorias de conformação dos modelos explicativos de alunos sobre objetos e processos relacionados com o conhecimento físico e com as formas de como pode ser orientado o futuro professor, para a construção de seus próprios modelos explicativos dos fenômenos da Física. É, portanto, o conhecimento de tais modelos explicativos, um dos saberes que todo professor deve ter para poder desenvolver sua ação pedagógica.

Assim, o foco de nossa pesquisa é estudar o papel da Matemática como processo nas atividades didáticas de Ensino de Física e sua relação com os modelos explicativos de alunos sobre objetos e processos relacionados ao conhecimento físico. Para tanto, assumimos como problema de pesquisa a seguinte questão: Que possíveis relações operam na utilização da Matemática da Física na construção de explicações, em atividades didáticas para o Ensino de Física?

1. SIGNIFICADOS DE “MATEMATIZAÇÃO DA FÍSICA”.

O objetivo deste capítulo é introduzir uma fundamentação teórica que nos permita entender os significados da Matemática da Física ao longo da história. Para tanto, apresentamos algumas evidências de que tal Matemática da Física foi se constituindo a partir de diversas formas de entender a relação entre Física e Matemática, em virtude das necessidades e possibilidades de explicação da natureza, predominantes em diferentes épocas e contextos.

Historiadores e filósofos da ciência como Paty (2003), Gingras (2001) e Cantor (1977) desenvolveram estudos sobre o processo de “Matemática da Física” ao comparar três grandes épocas ao longo de sua história: a primeira, trata da filosofia desenvolvida na Grécia Antiga; a segunda, dá-se na “revolução científica” a partir do século XV e a terceira, no começo do século XX, com o surgimento da Física Moderna e seus rápidos desenvolvimentos nestes últimos cem anos. Segundo Gingras (2001), expressões sobre a “Matemática da Física” aparecem com maior frequência nos estudos sobre as metodologias e princípios que orientam o trabalho desenvolvido pelos físicos, principalmente a partir do surgimento da mecânica clássica com os trabalhos de Galileu e Newton.

Seguindo essa perspectiva, selecionamos um princípio ou lei da física proposto em cada um dos três momentos históricos mencionados anteriormente, com o objetivo de caracterizar, ainda que de forma resumida, o processo de “Matemática da Física”. Temos ciência de que a evolução da Física não se dá de forma discreta nem linear, mas a partir de contínuas tensões, controvérsias, avanços e retrocessos. Concebemos esses três princípios ou leis como representativos de diferentes maneiras de entender a relação entre Física e Matemática no desenvolvimento da Física.

1.1. Significados de Matemática da Física em três momentos na história da Física

Neste item ressaltamos aspectos que nos permitem comparar três momentos na história e, com isso, analisar como o processo de “Matemática da Física” ocorreu em cada um deles. Para tanto, analisamos o que significou a Matemática da Física embasados em três princípios: 1- no princípio físico da lei da alavanca, proposta por Arquimedes três séculos A.C., uma vez que ele é considerado como o ápice da ciência grega; 2- no princípio da conservação da energia, proposto no começo do século XIX, considerado como uma possibilidade de unificação de diversas pesquisas desenvolvidas a partir do século XVI e; 3- na formulação da equação de onda relativística, proposta no século XX, que unificou a teoria

da Mecânica Quântica com a da Relatividade, propiciando o início de uma nova era para os desenvolvimentos da Física.

1) A Lei da Alavanca de Arquimedes

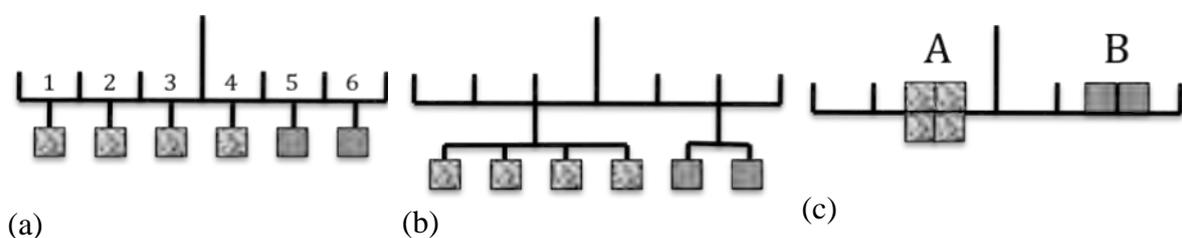
Esta lei é considerada como a origem da Mecânica que conhecemos hoje. Arquimedes não se inscreve estritamente em nenhuma escola fundada por algum de seus antecessores, porém apresenta influência euclidiana, ao introduzir uma série de postulados para demonstrar os princípios da Mecânica; influência aristotélica, ao entender a relação entre Geometria e Mecânica, sendo a segunda subordinada à primeira; e influência platônica e pitagórica, ao considerar que a Matemática constitui os princípios da Natureza. (TOLEDO, 2003, p.80)

No tempo de Arquimedes, estudava-se o problema do equilíbrio como um dos objetos de estudo da estática; nele consideravam-se movimentos possíveis, mas sempre estudando sistemas estáticos, quer dizer, considerava-se que havia uma ausência de movimento no sistema. Esta forma de estudar o fenômeno pode ser entendida como o resultado de que as demonstrações deviam ser de natureza estritamente matemática. Para a época, utilizava-se especificamente a Geometria com seus métodos de formulação de sistemas axiomáticos, que implicavam na proposição de postulados e deduções lógicas.

Segundo Vaccaro (2008), naquela época estudava-se a mecânica dos corpos com um enfoque geométrico e um enfoque físico, sendo que o primeiro era considerado formal, dependente do rigor da Matemática; e o segundo, mais de caráter qualitativo, ao se tratar da análise das tendências naturais do movimento, sem um compromisso específico com o rigor das demonstrações matemáticas. Assim, Arquimedes, considerado pelos historiadores como um dos principais autores, tanto da Matemática, quanto da Matemática aplicada, formalizou a lei da alavanca com base na proposta de sete postulados da Geometria.

A ideia principal da demonstração da Lei da Alavanca, de acordo com Renn, Damerow e McLaughlin (2003), pode ser resumida em três passos, representados nas Figuras 1a, 1b e 1c:

Figura 1. Representação da síntese da demonstração de Arquimedes sobre a Lei da Alavanca em três passos básicos.



No primeiro passo, considera-se uma barra dividida em seis unidades equidistantes e apoiada em seu ponto médio (em equilíbrio), considerando dois conjuntos de pesos: um composto por quatro unidades de peso e outro composto por duas unidades. No segundo passo, as seis unidades são penduradas no ponto médio de cada um dos conjuntos de pesos considerados, isto é, nos pontos médios das quatro e das duas unidades de peso respectivamente, portanto o equilíbrio continua. No terceiro passo, assume-se que o efeito das quatro unidades de peso e das duas unidades de peso não muda quando são concentradas em seus respectivos pontos médios. Desta forma, chega-se na situação em que o peso A, de quatro unidades, encontra-se a uma unidade de distância; e o peso B, de duas unidades, está a duas unidades de distância e, dado que a condição de equilíbrio não mudou, considera-se um caso especial da Lei da Alavanca.

Aparentemente a demonstração em experiências físicas, parte do fato de que isso acontece na realidade, mas estudos como o de Assis (2008) mostram que não foi assim, os fundamentos de sua demonstração estão totalmente organizados no campo da Geometria, a partir de um conjunto de postulados. Segundo o autor, a linha de raciocínio de Arquimedes desenvolve-se com base em sete postulados, dos quais os postulados 6 e 7 foram os mais decisivos no processo de formulação da Lei da Alavanca e do método para calcular corretamente o centro de gravidade de figuras geométricas, fossem elas filiformes, planas ou volumétricas. Tais postulados são:

Postulado 6: Se grandezas se equilibram a certas distâncias, então grandezas equivalentes a estas se equilibrarão, por sua vez, nas mesmas distâncias.

Postulado 7: O centro de gravidade de toda figura cujo perímetro gira sua concavidade para o mesmo lado tem de estar no interior da figura. (ASSIS, 2008, p. 122)

Para mais detalhes, apresentamos no Anexo 1 (p.242), uma parte do trabalho de Assis (2008) no qual se desenvolve a demonstração do método utilizado por Arquimedes para calcular o centro de gravidade de um triângulo escaleno, com base nos sete postulados. Segundo este autor, a obra de Arquimedes é uma das maiores obras científicas que a humanidade possui.

Com base nesse momento histórico, podemos dizer que a relação entre Física e Matemática foi mediada pelas possibilidades de considerar como verdadeiros os princípios da Mecânica, somente a partir das demonstrações da Geometria e não se considerava a experimentação como parte do processo de busca da verdade, uma vez que, o fato de estudar

os fenômenos da Natureza por meio de técnicas experimentais era considerado como um obstáculo na compreensão do essencial da natureza.

Considerava-se, assim, que a Geometria fornecia uma linguagem apropriada e rigorosa para descrever os problemas de estudo da Física, nomeada naquela época como Filosofia da Natureza, enquanto as descrições elaboradas a partir da observação da natureza, ou seja, a partir da ontologia, eram consideradas uma linguagem ambígua, ao conter, principalmente, descrições com características qualitativas.

2) O princípio de Conservação da Energia

O princípio de conservação da energia foi formulado no começo do século XIX, envolvendo resultados acumulados na formulação de outros princípios de conservação ao longo dos três séculos anteriores, tais como: conservação do momento angular, formulado como $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ que diz que, em um movimento circular o momento (\vec{L}) da quantidade de movimento do corpo que gira, permanecerá constante na ausência da ação de qualquer momento dinâmico; conservação do momento linear, o qual diz que na ausência de forças externas a um sistema de partículas com massas m e velocidades v , o momento linear total $\sum_i m_i v_i$ permanecerá constante; a conservação da *vis viva*, segundo o qual, para o caso específico de um sistema de corpos que interage por meio de colisões perfeitamente elásticas, a somatória dos produtos de suas massas m por suas velocidades ao quadrado $\sum_i m_i v_i^2$ se conserva; conservação do calor, onde para um sistema isolado composto por dois corpos A e B que modificam suas temperaturas, sem modificar sua composição química nem seu estado físico, o calor (Q) que A perde é igual ao calor que B ganha, $\Delta Q_A + \Delta Q_B = 0$, e; conservação da massa, segundo o qual a quantidade total da matéria dentro de um sistema permanece constante, já que a massa não muda quando a matéria passa por transformações físicas ou químicas.

A formulação destes princípios foi se dando com base na definição de conceitos como força, trabalho, energia e calor, dentre outros. Todos eles definidos por diversos cientistas, a partir de diversas formas de entender os processos de estudo da natureza; ora a partir da filosofia, ora a partir da experimentação, ora da representação simbólica, ou combinações destas; mas em todos os casos, buscava-se definir conceitos cada vez mais precisos e coerentes entre si, tanto quantitativa como qualitativamente.

Holton e Brush (1952/2001), em sua obra, mencionam a importância da introdução do conceito de trabalho, definido como uma quantidade escalar, que resulta do produto de duas quantidades vetoriais, força (F) e distância (s). Mas o trabalho podia atuar sobre um corpo de muitas formas e produzir muitos resultados. Um deles é a modificação do estado de movimento do corpo que acabou se chamando de variação da energia cinética do corpo ΔE_c , cuja equação se expressa como $Fxs = \Delta E_c$.

No século XVIII, o conceito de energia foi desenvolvido por diversos cientistas em diversos campos, como por exemplo: Faraday, ao mostrar a interação entre corrente elétrica, magnetismo e luz; a produção de eletricidade através de reações químicas, proposta por Volta; a produção de reações químicas a partir da eletricidade, proposta por Oersted; e também a proposta de Lagrange sobre o princípio de conservação da *vis viva*, para o qual utilizou o conceito de energia total de um sistema isolado e conservativo, como a somatória da energia potencial (E_p) e cinética (E_c), representado na equação $\Delta E_c + \Delta E_p = 0$.

Simultaneamente, durante o século XVIII, foi amplamente estudada a teoria do calórico para verificar, experimentalmente, se este era um fluido ou não, se tinha peso ou não, sendo Rumford o primeiro a afirmar que o calor não é outra coisa, senão movimento vibratório das partículas de um corpo e que o fluxo de calor pode ser criado por atrito em grandes quantidades. Mas esta teoria não conseguiu demonstrar o princípio de conservação do calor, nem o fenômeno do calor radiante, já que nesse modelo o calor precisava viajar, por exemplo, do Sol à Terra, por meio do movimento de partículas e não tinha um meio que permitisse tal movimento. No começo do século XIX, falou-se da similaridade, ao menos qualitativamente, entre as propriedades da luz e as propriedades do calor, mas a ideia do calor como vibração de partículas somente podia ser apoiada por aqueles que entendiam a luz como partículas ou aqueles que a entendiam como um movimento ondulatório no éter, que no caso de Young e Fresnel, lhes permitiu entender o calor como uma forma de energia, ao encontrar qualitativamente semelhanças entre o calor radiante e as características ondulatórias da luz.

Muitos outros estudos foram se desenvolvendo para mostrar a conversão de energia cinética em calor, a liberação de calor em reações químicas e o calor produzido por correntes elétricas. Assim, chegou-se a entender que o calor não somente incrementa a temperatura, mas também pode expandir os gases que produzem movimento ou trabalho, surgindo a ideia de que o calor é uma forma de energia que pode se transformar em outras formas, sendo possível determinar, numericamente, fatores de conversão entre diferentes tipos de energia e formular o princípio de conservação do calor.

Finalmente, esses e outros fenômenos que não apresentavam relação direta entre si, começaram a se interrelacionar levando à formulação do princípio de conservação da energia, que foi proposto simultaneamente por Mayer, Joule e Helmholtz, a partir de três formas diferenciadas de trabalho. Mayer trabalhava sobre raciocínios filosóficos do tipo: “Tomando as duas propriedades em conjunto, podemos dizer, que as causas são entidades quantitativamente indestrutíveis e qualitativamente conversíveis” (MAYER apud HOLTON; BRUSH, 1952/2001, p.239) fazendo referência à energia, embora tenha utilizado a palavra “Kraft” do alemão que traduz força, a interpretação dada por Holton para o texto de Mayer é, “[...] Energias são, portanto, entidades indestrutíveis e conversíveis.” (HOLTON; BRUSH, 1952/2001, p.239) . Mayer conclui que, se a energia potencial e cinética são equivalentes ao calor, então o calor naturalmente deve ser equivalente à energia cinética.

A proposta de Mayer não estava fundamentada na experimentação própria, ele reutilizava dados experimentais de outras pessoas, Joule estudou o fenômeno a partir da experimentação reiterativa e cada vez mais precisa, visando encontrar o equivalente entre calor e trabalho. Ele começou definindo a unidade de medida do calor, chamada *caloria* (cal) que é a quantidade de calor necessária para aumentar a temperatura de um grama de água, depois formulou o calor específico de diversas substâncias, sendo os gases um caso especial já que eles possuíam um calor específico se eram mantidos a volume constante, e outro, se eram mantidos a pressão constante. Joule dedicou-se a comparar o trabalho necessário para fazer funcionar um gerador elétrico com o calor produzido pela corrente gerada, o que lhe permitiu calcular um valor médio equivalente de $1 \text{ cal} = 4,78 \text{ joules}$. O resultado de seu grande trabalho experimental contribuiu na ideia de conservação do calor como uma forma de energia, nomeada como a energia cinética do movimento das moléculas.

Esses resultados influenciaram o trabalho de Helmholtz, que procurava uma demonstração matemática da aplicação do princípio de conservação da energia em diversos campos da ciência. Dedicou-se a encontrar equivalentes numéricos e fatores de conversão entre diferentes tipos de energia em distintos campos da Física (mecânica, calor, eletricidade, magnetismo, química-física e astronomia), chegando a uma formulação completa do princípio:

Trabalho externo realizado sobre, ou qualquer outra classe de energia fornecida a um sistema de corpos = $\sum [\Delta(PE \text{ 'Energia potencial' de todos os tipos}) + \Delta(KE \text{ 'Energia cinética de todos os tipos}) + \text{perdas por atrito} +$

Δ (energias químicas)...]² (HELMHOLTZ Apud HOLTON; BRUSH, 1952/2001. p.232)

Esses autores reconhecem na expressão anterior um amplo campo de possibilidades de organização de uma equação para o princípio de conservação da energia, sabendo que em diversos casos, somente serão importantes dois ou três tipos, entre as diversas opções de mudanças energéticas, porém, seu significado é suficientemente abrangente e geral, e sua essência fala da impossibilidade de criar ou destruir a energia sem que, em algum outro lugar do universo, se dê a correspondente mudança oposta.

De acordo com Holton e Brush (2001) nesse período foram criados alguns critérios básicos para entender um conceito como verdadeiro, como: a possibilidade de ser definido sem contradições internas nem ambiguidades, em termos de observáveis e efeitos mensuráveis, ao identificar se as medições são de forma direta, ou não, e ao testar sua validade numa ampla variedade de descrições e leis, tanto conhecidas anteriormente quanto recentemente deduzidas.

Historiadores das ciências têm encontrado estas características do trabalho científico a partir do século XVI. Afirmam que “[...] A ciência qualitativa de Aristóteles foi substituída por relacionamentos quantitativos, envolvendo espaço, movimento, e segundo Descartes, matéria.”³ (CANTOR, 1977, p.429), ou que “A Física Teórica enquanto tal, emancipada da Mecânica Racional, realmente começou a existir com o conceito de energia [...]”⁴ (BOCHNER, 1966/1991, p.194). Segundo este autor, a medição da energia gerou a necessidade de utilizar conceitos da Matemática para representá-la adequadamente. Assim que para descrever os sistemas físicos passaram a ser considerados os números reais, a ideia de função e o desenvolvimento da álgebra abstrata, propostos na Matemática durante o século XIX. Fato que aliás fomentou discussões entre os filósofos da ciência sobre a compreensão da relação entre Física e Matemática.

Para finalizar este item, queremos ressaltar a diferença entre a concepção sobre a relação Física-Matemática na época antiga, quando os fenômenos da natureza eram estudados, a partir da Filosofia, mas demonstrados a partir da Geometria, com o momento descrito anteriormente, em que o estudo dos fenômenos físicos implica na definição de novos conceitos, criados a partir da observação metódica de sistemas físicos, que por sua vez são idealizados a fim de obter a maior quantidade de generalizações e aplicações possíveis. Nesse

² Texto traduzido livremente pelo autor deste trabalho.

³ Texto traduzido livremente pelo autor deste trabalho.

⁴ Ídem

segundo momento histórico, a descrição dos sistemas físicos faz-se, principalmente, com base em relações entre símbolos, que representam variáveis de um sistema, cujo significado determina as condições de ocorrência de um fenômeno e as necessidades de idealização, a fim de construir expressões que expliquem seu comportamento, com base em princípios lógicos, não só da Geometria, mas também da Álgebra e do Cálculo, e simultaneamente, baseada em testes experimentais que, por sua vez, exigia da imposição de condições de observação dos sistemas ao determinar as condições de ocorrência de um fenômeno e as necessidades de idealização, a fim de, construir representações cada vez mais generalizáveis e simples.

3) A equação de onda relativística

A primeira equação que unificou a teoria da relatividade especial com a mecânica quântica foi proposta por Dirac. O grande impacto da formulação desta equação de onda relativística foi a solução da equação, que lhe permitiu prever a existência de elétrons com carga positiva, chamados anti-elétrons e, em consequência, prever que para toda partícula elementar deveria existir sua correspondente anti-partícula.

A formulação desta lei se fundamenta no uso de operadores matemáticos que atuam numa função de onda, sendo que tais operadores substituem observáveis da mecânica clássica, que são grandezas experimentalmente mensuráveis (energia, quantidade de movimento, etc.). Também estes operadores se expressam em derivadas parciais de primeira ordem, as quais são apropriadas para descrever o caso de quantidades pequenas de ordem microscópica. Na formulação da equação de Dirac, foram utilizados operadores definidos, especificamente, para a mecânica quântica, como por exemplo, o da Energia (E) e os das componentes retangulares (x, y, z) do momentum linear (p), definidos como;

$$(1) \quad E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

$$(2) \quad p_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}; \quad p_y = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y}; \quad p_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z}$$

sendo $i = \sqrt{-1}$ e $\hbar = 1/2$ da constante de Planck.

Dirac partiu da equação que relaciona a energia total (E) de uma partícula de massa m , com seu momentum p , cujos fundamentos se encontram na formulação da teoria da relatividade especial;

$$(3) \quad E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2,$$

Estabelecendo as condições de validade da equação, utilizou operadores como os anteriormente mencionados e colocou-os atuando sobre uma função de onda, que é função tanto do tempo, quanto das coordenadas cartesianas, para o qual teve que organizar um

conjunto de matrizes 4x4 que cumprissem com os requisitos de ser não comutativas e de que multiplicadas por si mesmas dessem como resultado a unidade, mas também teve de criar a função delta (δ) para representar a descontinuidade no espaço-tempo, chegando finalmente numa equação como a seguinte⁵.

$$(4) \quad E = \pm \left\{ p^2 c^2 + m^2 c^4 \right\}^{1/2} = E \pm$$

Um dos grandes desafios, que orientou a forma de proceder de Dirac, foi a busca do sentido físico da equação, que obteve e cuja solução tinha uma parte positiva e uma parte negativa, na qual o sinal negativo pode ser interpretado com o elétron que possui carga elétrica negativa e o sinal positivo com o anti-elétron que possui carga positiva.

O problema da interpretação física das equações não era um problema só de Dirac, ele se deu com o surgimento da mecânica quântica, marcando uma necessidade de melhor entendimento da relação entre Física e Matemática. Para Dirac, tal relação embasa-se numa concepção de uso dos processos matemáticos, como princípios orientadores para a compreensão dos fenômenos naturais, mais que na comprovação experimental. Segundo Kragh (1990), a filosofia de Dirac caracteriza-se por sua ideia de beleza Matemática que nunca definiu, mas que pode ser entendida como a conformação das teorias da Física, a partir de princípios de simplicidade na base Matemática.

[...] Se uma discrepância surge entre as predições dadas por uma teoria e os resultados experimentais, uma primeira reação seria a suspeitar de algum erro experimental e somente depois de verificar exaustivamente o experimento é que a gente aceita a visão de que é necessário modificar a teoria, quer dizer, procurar uma teoria com uma base Matemática ainda mais bonita.⁶ (DIRAC apud KRAGH, 1990, p.286).

Esse pensamento de Dirac pode ser interpretado sob a luz de um dos problemas que encaravam os físicos e filósofos da Física moderna, a saber, o de entender o papel do “observador” no estudo dos sistemas físicos e questionar sobre o que poderia ser considerado como observável ou não observável e, como caracterizar o observado, especialmente quando se trata de estudar sistemas microscópicos, que fogem da experiência sensorial do observador.

Dirac propunha diferenças com a teoria dos observáveis trabalhada por Bohr e Heisenberg, já que para estes os observáveis deveriam ser mensuráveis, enquanto para Dirac

⁵ Esta é uma versão sobre-simplificada do trabalho de Dirac. Pode encontrar detalhes da dedução no Anexo 2, p.245.

⁶ Texto traduzido livremente pelo autor deste trabalho.

poderiam existir observáveis não mensuráveis, como o anti elétron. O caráter relativístico da equação de Dirac lhe permitiu entender a possibilidade do elétron possuir um estado de energia negativa, cujo comportamento seria paradoxal, uma vez que, nunca um elétron tinha apresentado a propriedade de se comportar com o sinal da carga elétrica contrário, mas, o fato de não poder verificar a existência de tais partículas, não levou a Dirac a desistir de sua teoria, já que ele considerava que o desenvolvimento da Matemática utilizada para descrever tal sistema possuía sentido físico e simplicidade.

Dessa perspectiva, achamos uma maneira de entender a relação entre Física e Matemática, na qual, os princípios lógicos da Matemática podem orientar os processos e métodos de estudo e descrição dos fenômenos naturais, sendo que a experimentação pode determinar a validade de uma teoria mas não necessariamente está na base da formulação da teoria.

No começo do século XX, surgiram grandes questionamentos sobre como entender os processos de construção da ciência. Nesse século, gerou-se uma série de discussões sobre o problema da “medição” e da “observação” dos sistemas físicos, assim como da “natureza da causalidade”. Todos estes aspectos têm, como pano de fundo, questionamentos sobre o que significa entender a Matemática como uma linguagem da Física. O surgimento da Física moderna implicou também o surgimento de filósofos das ciências que já não buscavam somente descrever, listar e comparar diversas formas de pensamento, mas que buscavam ampliar o conhecimento dos processos de construção da ciência.

Henri Poincaré, em seu livro “O valor da ciência”, publicado em 1905, ressaltava que a relação entre Física e Matemática vai além do mero uso de cálculos numéricos para o estudo dos fenômenos da Física e outorga à Matemática um status de linguagem que permite ao físico explorar de melhor maneira as leis que vêm da experiência. Ele diz que “o objetivo da Física matemática não é só facilitar ao físico o cálculo numérico de certas constantes, [...] ele é sobretudo o de facultar ao físico o conhecimento da harmonia oculta das coisas, fazendo com que as veja sob uma nova perspectiva.” (POINCARÉ, 1905/2000, p.94).

Isso significa que a visão da Matemática dentro dos processos de construção da Física vai além de entendê-la como um conjunto de algoritmos coerentes e organizados em campos como a Geometria, Álgebra e Cálculo. Esta visão aproveita os processos de construção da linguagem matemática e estabelece uma conexão com os processos de construção da linguagem em Física.

De maneira complementar, Hanson, em seu livro “Padrões de descoberta, observação e explicação” defende a ideia de que mesmo com todas as mudanças nos princípios da Física,

os pensadores da Física clássica são da mesma classe que os pensadores da Física moderna. Segundo o autor “Todos eles são físicos: isto é, filósofos da natureza que buscam explicações dos fenômenos, seguindo caminhos mais próximos do que a dicotomia “clássico-moderna” tem levado a imaginar aos filósofos da ciência” (HANSON, 1971/1985, p.74). Isso demonstra que o trabalho dos físicos não se foca unicamente no uso de equações mais ou menos complexas, mas nos processos utilizados para explicar os fenômenos, ou seja, os processos da Matemática estão ligados aos processos de compreensão dos fenômenos físicos, indo além de uma simples descrição.

Observa-se que nos três casos dos princípios ou leis apresentados anteriormente, há uma constante em relação à necessidade de explicação da natureza e o uso da Matemática como linguagem da Física, porém a partir de diversas perspectivas. Podemos dizer, em termos gerais, que a Matematização da Física é o processo mediante o qual as metodologias de trabalho dos físicos foram se interrelacionando cada vez mais com os símbolos, conceitos e metodologias de trabalho da Matemática, para constituir explicações mais completas. Parece ser que a Matematização foi modificando, principalmente, a linguagem da Física para dar conta de explicações do comportamento da natureza, mais completas e mais abrangentes. A fim de aprofundar mais um pouco nesta discussão, desenvolvemos o próximo item focando nas ideias de “explicação” e “linguagem”.

1.2. Reflexões sobre “Explicação” e “Linguagem” na Matematização da Física

Nesse último século têm sido desenvolvidos vários trabalhos de análise do significado da Matematização da Física moderna. Segundo o epistemólogo Paty (2005), a “Matematização da Física”, ao longo da história, se justifica pela necessidade de expressar as propriedades dos conceitos e das grandezas e constitui-se num *princípio de explicação*. O autor apresenta como, ao longo dos três últimos séculos, as matematizações da Física têm fornecido credibilidade às teorias, na medida em que tem sido possível formular, de forma exata, a especificidade dos fenômenos físicos. Por exemplo, com relação à definição das “grandezas”, o autor mostra que cientistas, como Einstein, preocupavam-se com seu caráter físico, isto é, as expressões matemáticas deveriam permitir a descrição das propriedades de tais “grandezas” em si. Paty conclui que,

[...] esta investigação sobre a ideia original de valores, e de grandezas Físicas entendidas através da Matematização, leva-nos a sugerir uma extensão do significado para o conceito de grandeza Física, colocando a ênfase em aspectos estruturais e relacionais, mais do que contê-lo numa ideia simples de quantidades “numericamente valorizadas”. Tal ampliação teria implicações na nossa compreensão dos aspectos “não clássicos” da Física

contemporânea no campo da quântica e dos sistemas dinâmicos.⁷ (PATY, 2003, p.1).

Esse autor compara a inteligibilidade cartesiana, que entende ações produzidas por choques, com a inteligibilidade Newtoniana que entende ações por atração, sendo que o estatuto de tal atração foi se transformando num princípio de explicação para a teoria do sistema solar, e finalmente, a inteligibilidade da relatividade de Einstein que tem novos níveis de racionalização com conceitos mais simples e mais homogêneos (PATY 2005. p.380).

Segundo Gingras (2001) que concorda com a perspectiva de Paty, as possibilidades de introduzir abstração e generalização nas explicações fez com que acontecessem mudanças epistemológicas que levaram à transformação e/ou criação de conceitos. Um exemplo é a concepção da matéria em termos de substâncias que foi desaparecendo e em troca enfatizou-se os aspectos relacionais das teorias que explicam a natureza da matéria. Tais mudanças de tipo epistemológico na história da Física, incidiram também em mudanças de tipo ontológico, uma vez que “objetos físicos” que antigamente imaginavam-se como parte da natureza, já não se imaginam mais, como os fluidos elétricos ou calóricos. E também, “objetos” que antigamente não se imaginavam existir, hoje são possíveis de ser descritos, como as anti-partículas.

Com base nessas reflexões deduzimos que a “Matematização da Física” está determinada por, pelo menos, dois aspectos interdependentes; o primeiro, em torno do que se entende como a construção da “**explicação**” de um fenômeno da natureza, e o segundo, em torno da “**linguagem**” apropriada para construir tais explicações.

- Sobre a explicação na Matemática da Física

A explicação no âmbito científico relaciona-se com a melhor compreensão do por quê acontecem determinados fenômenos, sendo fundamental o ato de descrever e representá-los. Para Galileu, tal capacidade de descrição dos fenômenos encontrava-se na Matemática. Segundo ele, a Matemática oferecia a técnica para ordenar e compreender a natureza. Por exemplo, no caso do estudo do fenômeno da gravidade durante os séculos XVII e XVIII, a explicação significava descrever o mecanismo físico envolvido na queda dos corpos. Neste contexto, a teoria newtoniana permitiu pensar as “realidades concretas”, a partir de proposições matemáticas abstratas, embora tais descrições não falassem diretamente do por quê acontece o fenômeno.

⁷ Texto traduzido livremente pelos autores deste trabalho.

A forma elíptica das órbitas planetárias foram explicadas com base na existência de uma força centrípeta que diminui com relação ao inverso do quadrado da distância, mas isto não explicava a natureza de tal força, o que levou muitos filósofos a entender nesta proposição uma demonstração matemática e não uma demonstração física, mas no final, ofereceu-se uma nova maneira de explicar, misturando a experiência sensorial com a formulação de cálculos, estratégia que, como observamos acima, também operou em certa medida, na formulação do princípio de conservação da energia.

Nos séculos seguintes, o termo “explicação” foi mudando de significado, uma vez que a relação entre o mundo real ontológico e o mundo abstrato exigiu a idealização de sistemas, visando generalizar resultados, mas sempre associado ao problema epistemológico de definir os fundamentos sobre os quais se formulam as leis ou princípios físicos, quer dizer, poder falar do porquê acontecem os fenômenos.

No surgimento da Física Moderna, esse aspecto foi altamente relevante, dado que os fenômenos foram descritos de forma cada vez mais abstrata, pois se tratava de fenômenos que fugiam da experiência sensorial imediata e da observação e medição diretas, precisando de métodos que permitissem “observar” e descrever o “observado”. Vemos como o papel do cientista que estudava a realidade física da natureza, no século XVI era o de ser “intérprete” da realidade Física; no entanto, nos séculos recentes, o problema da medição e da observação coloca o cientista como parte da mesma realidade que quer explicar. E portanto, entende-se que a mera descrição do que acontece não garante uma explicação do que ocorre, precisa-se de maiores explicitações da estrutura conceitual que fundamenta determinada descrição.

Embora possa se dizer que os filósofos do último século convergem na ideia geral de que o ato de explicar em ciências implica na consideração das concepções epistemológicas e ontológicas dos sujeitos que explicam, existem diversas ênfases. Para alguns, a explicação se dá quando se apresentam novas leis com base em leis conhecidas, para outros, consiste na formulação de novas leis com base na resposta dos “o que?” e “por que?” acontece o fenômeno. Para outros, trata-se de formular leis matemáticas que descrevam as observações, sabendo que a natureza do observado e a linguagem do observador influenciam o tipo de explicação.

Hanson (1971) afirma que uma explicação científica geralmente é apresentada de maneira associada a uma lei conhecida, no sentido de que a partir de tal lei se podem desencadear uma série de sucessos de tipo causal. O autor entende a explicação como sendo parte de um efeito psicológico, onde explicar algum evento x surpreendente, consiste em

decompor o x em elementos menores, cada um deles referidos a uma situação prévia carente de surpresa ou novidade de qualquer tipo (HANSON 1971/1985, p.36).

De outro lado, Hempel e Oppenheim (1948) propuseram um modelo moderno de explicação científica, segundo o qual a explicação deve ser efetivada em termos de leis, ou seja, não é possível dar uma explicação científica sem dar uma lei, de forma tal que a explicação responda tanto aos "o que?", quanto aos "por quê?" sem se limitar a descrições superficiais das relações implícitas na lei.

Também Holton e Brush (1952/2001) dizem que as leis da Física são geralmente relações matemáticas entre grandezas expressas por meio de funções que determinam o tipo de relação entre variáveis x, y, z , que permitem um valor numérico dentre uma gama de valores, em função das condições dadas ao sistema observado. Para este autor, a explicação está diretamente associada à descoberta de leis que descrevem os observáveis, com base em relações de causa e efeito entre elas, quer dizer, que “as observações são explicadas quando encontramos a lei matemática que relaciona as observações.”⁸ (HOLTON e BRUSH, 1952/2001, p.165)

A partir das propostas dos autores acima, podemos entender que “explicar” não se limita à descrição com palavras das relações representadas numa equação. A explicação científica se dá necessariamente quando há compreensão das representações do fenômeno, tanto no campo das funções que relacionam as grandezas envolvidas, quanto no campo dos “por quês” da existência de tais funções, sendo determinante a linguagem utilizada para criar e comunicar as explicações. Podemos entender também que, ao longo da história da Física, tem existido diversas maneiras de construir explicações e também diversos níveis de raciocínio na construção delas, portanto não há uma maneira privilegiada de construir explicações, mas um propósito comum no objetivo de compreender a natureza, sabendo que o sujeito faz parte da mesma natureza que explica.

- Sobre a linguagem na Matematização da Física

Segundo o filósofo Carnap (1966) o método quantitativo, utilizado pela primeira vez de forma precisa por Galileu, introduziu regras explícitas que lhe permitiram ter um vocabulário mais eficiente, uma vez que, antes da introdução de um conceito quantitativo, há dúzias de adjetivos qualitativos para descrever os estados possíveis de um objeto com respeito a uma magnitude. Exemplificando, sem o conceito de temperatura teríamos de falar em coisas que estão “muito quentes”, “quentes”, “cálidas”, “mornas”, “frescas”, “frias”, “muito frias”

⁸ Texto traduzido livremente pelos autores deste trabalho.

etc. Portanto, a principal vantagem da linguagem em termos quantitativos foi que permitiu expressar conceitos com base na formulação de leis quantitativas, e estas leis permitiram explicar os fenômenos e prever novos fenômenos (CARNAP, 1966/1973, p.108).

De acordo com este autor, a palavra “linguagem” na Física deve ser utilizada num sentido extraordinariamente amplo, referindo a todo procedimento que objetive comunicar informação sobre o mundo exterior: palavras, quadros, desenhos, imagens, diagramas, equações, etc. Ele afirma que a questão da linguagem remete-nos a pensar na natureza dos conceitos envolvidos nas explicações.

“Os conceitos quantitativos não são dados pela natureza; eles decorrem da prática de aplicar números a fenômenos naturais. (...) Eles são parte da linguagem e não parte da natureza. Somos *nós* que os introduzimos, e, portanto, é legítimo perguntar o *por quê* os estamos introduzindo”.⁹ (CARNAP, 1966/1973, p. 107).

Embora sejam cada vez mais abstratas as representações que explicam o mundo físico, elas não deixam de conter a essência do que deve ser comunicado e portanto é preciso estudar as características de tal linguagem. Carnap faz uma analogia com as partituras musicais para exemplificar esta situação. Ele propõe imaginar uma página de uma partitura musical, a qual é vista pela primeira vez por uma criança ou um adulto que não conhece aquela notação e não consegue ver a música na partitura, nem imaginar música a partir disso; porém, não significa que a partitura não esteja efetivamente comunicando o sentido da altura, a duração e a variação da intensidade de cada nota, de tal modo que para transmitir de forma significativa para tal criança ou adulto, é preciso apresentar a evidência imediata interpretando a música num piano e apresentando a chave para a tradução daqueles símbolos em música. (CARNAP, 1966/1973, p. 115)

Também o matemático Salomon Bochner, em seu livro “O papel da Matemática no desenvolvimento da ciência”, caracteriza a Matemática como uma linguagem da ciência, mas uma linguagem – segundo ele – no sentido amplo da palavra, como aquele meio que permite a comunicação. Significa que tal linguagem inscreve-se nos processos de pensamento com os quais se cria e desenvolve a ciência. Ele diz que “[...] A matemática não é apenas para formular, clarificar e tornar manejáveis de forma rigorosa conceitos e leis científicas [...] mas além disso, em certas situações cruciais se mostra como um elemento essencial tanto de sua criação quanto de seu desenvolvimento”¹⁰ (BOCHNER, 1966/1991, p.237).

⁹ Texto traduzido livremente pelos autores deste trabalho.

¹⁰ Ídem

Com base no exposto, concluímos que a linguagem da Física foi ganhando poder de explicação, mas, ao mesmo tempo, foi se transformando em um conjunto de representações cada vez mais abstratas, em função das necessidades de descrever de forma cada vez mais apropriada, os problemas estudados em cada momento. Por exemplo, na época de Arquimedes não era necessário associar sentido físico a uma expressão matemática, dado que a demonstração por meio de métodos matemáticos era suficiente garantia para ser considerada como verdade. Para a época, entre os séculos XVI e XVIII, a relação entre Física e Matemática estava mediada pela experimentação e a descrição cada vez mais precisa do comportamento dos sistemas; portanto, a linguagem devia dar conta de tal precisão mas também devia permitir prever os comportamentos dos sistemas.

Entretanto, na época da Física Moderna, o sentido físico das representações matemáticas ganharam mais importância, já que ali os sistemas físicos não são observáveis a olho nu e portanto a linguagem utilizada para descrever grandezas macroscópicas não resultava totalmente apropriada, o que gerou a necessidade de criar uma nova linguagem para descrever tais sistemas, com base, por exemplo, em geometrias não euclidianas, novos operadores e novas funções.

1.3. Questionando possíveis implicações da compreensão sobre a Matematização da Física no Ensino de Física

Depois de ter feito uma rápida revisão de aspectos históricos da Matematização da Física, entende-se que a relação entre Física e Matemática é mais complexa do que o simples uso de algoritmos para representar as leis, além de que tal relação tem mudado e provavelmente continuará mudando na medida em que apareçam novas necessidades de explicação e, com isso, novas necessidades de adaptação de linguagens para produzir e comunicar tais explicações. De tal maneira que compreender em que consiste a Matematização da Física e como ela evolui, faz parte do conhecimento que todo físico deve adquirir.

Agora, quando pensamos nas implicações de tal compreensão em um processo de Ensino de Física, notamos que a complexidade aumenta, já que surgem várias interrogações para as quais não há uma resposta imediata nem simples. Por exemplo, em aspectos como: as diferenças que devem existir entre o que se considera uma “explicação científica” e o que se considera uma “explicação para o ensino da ciência”; ou também a diferença que deve existir entre o que se considera “a linguagem da Física” e o que se considera “a linguagem do professor de Física”.

Embora pareça óbvio pensar que o professor evidentemente deve adequar as explicações científicas em explicações escolares, com a respectiva adequação da linguagem, o que não resulta óbvio é decidir em que consiste tal adequação, aspecto que precisa de estudos em maior profundidade. Podemos dizer por exemplo, que uma coisa é a maneira como cientistas da Física e da Matemática vão construindo o conhecimento científico, e outra coisa é a maneira como se pretende orientar o aluno na construção de seu conhecimento com base no que ocorreu na história e o que continua a ocorrer no mundo científico.

A definição de perspectivas sobre estas considerações podem ter impactos diferenciados, uma vez que tradicionalmente se entende que a Matemática é uma ferramenta da Física, dando a ideia de que matematizar a Física significa juntar dois campos de conhecimento, para o qual, de um lado, têm-se os fenômenos físicos e, de outro lado, os algoritmos de matemática. Portanto, seria só questão de utilizar os algoritmos para descrever os fenômenos já caracterizados, quando a realidade é que, nem o estudo dos fenômenos pode se dar de forma estritamente qualitativa, nem o uso de processos da Matemática no estudo dos fenômenos pode ser dar de forma estritamente quantitativa.

Vimos anteriormente, que existem pelo menos três maneiras de entender a relação entre Física e Matemática. A primeira, na Antiguidade, onde se considerava que a Matemática constituía os princípios da Natureza, permitindo descrições quantitativas, que eram consideradas como formais frente às descrições qualitativas, que eram consideradas como ambíguas.

A segunda, no surgimento e evolução da mecânica clássica, onde as explicações dos fenômenos físicos foram fruto da combinação de expressões qualitativas e quantitativas, que tinham como base a aplicação da Matemática, tanto nos processos de experimentação sistemática, quanto na descrição do que se observa.

A terceira, na qual os processos matemáticos são considerados princípios orientadores para a compreensão dos fenômenos naturais, onde os fenômenos fogem da experiência sensorial, levando a considerar o observador como sendo parte do sistema físico em estudo.

Ainda sendo três perspectivas diferenciadas, não se pode afirmar que sejam desconexas, nem que uma seja mais importante do que outra ou que a mais recente é a única que tem validade. A única afirmação que podemos fazer é que as três respondem a diversas maneiras de explicar a natureza e que todas constituem um conjunto de estratégias que oportunizaram a construção da linguagem da Física como a conhecemos hoje. Então, surgem perguntas como:

- Sabendo que cada campo da Matemática (Geometria euclidiana, Geometrias não euclidianas, Álgebra, Cálculo) oferecem diversas linguagens para descrever os mesmos fenômenos, obtendo diversos resultados, qual delas devemos ensinar aos alunos? Qual dessas deu melhor resultado na Física e qual dará melhor resultado no ensino de Física?
- A explicação para os alunos consiste em ensinar a construir explicações científicas ou em apresentar as explicações construídas? E ainda, quais seriam as explicações científicas mais apropriadas a serem apresentadas?
- Qual a linguagem a utilizar para orientar o aluno na interpretação da linguagem da Física e na construção de novas linguagens científicas? Por exemplo, qual seria a linguagem mais apropriada para trabalhar conceitos como matéria, espaço, tempo, movimento e energia, sabendo que têm tido diversas definições e naturezas ao longo de sua história?
- Como educar o aluno para entender os diversos níveis de racionalização desenvolvidos na história da Física? Na descrição de um fenômeno? Em sua representação? Na formulação das leis?

Questionamentos deste tipo são os que motivam esta pesquisa, mas precisamos salientar que não pretendemos responder estas questões mas construir um caminho que permita avançar na construção de tais respostas. Portanto, com esta pesquisa pretendemos evidenciar as maneiras como um grupo de professores e alunos de um curso de Licenciatura em Física, assim como de autores dos respectivos livros didáticos utilizados, estão entendendo a “Matematização da Física” na história e a “Matematização da Física” no ensino, e assim, poder refletir sobre possíveis estratégias que, permitam melhorar a formação inicial de professores, baseados na melhor compreensão da Matemática da Física no ensino.

Partimos do pressuposto de que posicionar-se como professor de Física implica compreender o modo como as relações entre Física e Matemática têm sido desenvolvidas na construção do conhecimento científico, mas também implica compreender os processos de ensino e aprendizagem em sala de aula. A ligação entre estes dois aspectos, constitui-se em objeto de pesquisa, uma vez que, embora a Física e o Ensino da Física compartilhem o mesmo saber disciplinar sobre o estudo da natureza, são campos diferentes em sua epistemologia, fins, formas de evolução e fundamentos teóricos.

2. SIGNIFICADOS DA “MATEMATIZAÇÃO DA FÍSICA” NO ENSINO DE FÍSICA

Este capítulo é desenvolvido, partindo do pressuposto de que, embora o Ensino de Física tenha a Física como conteúdo de trabalho, a maneira como é entendida a relação entre Física e Matemática na evolução da Física, difere da maneira como tal relação deve ser trabalhada em sala de aula. Em outras palavras, aprender sobre como a linguagem da Física foi se matematizando, durante sua evolução, não implica em uma aprendizagem automática da maneira como deve ser apresentada a Matematização da Física em sala de aula, uma vez que, uma coisa é aprofundar no conhecimento dos conteúdos da Física e outra é pôr tal conhecimento, no centro de processos de aprendizagem.

Como vimos no capítulo anterior, a pesquisa em Física propõe-se a explicar a natureza, embasando suas explicações na formulação de leis que deem conta do comportamento de fenômenos físicos, para os quais têm se utilizado linguagens (esquemas de descrição e comunicação) apropriadas em diferentes épocas, de acordo com as necessidades de explicação e os conhecimentos prévios sobre um determinado problema. Já no contexto do Ensino de Física, consideramos que os sentidos de termos como “explicação” e “linguagem” apresentam algumas diferenças, uma vez que o papel do professor não é necessariamente a formulação de leis na busca de novas formas de explicar a natureza, mas explicar para outras pessoas, como foram construídas as formulações aceitas pela comunidade científica e, explicar, como se podem construir explicações do comportamento da natureza.

A linguagem, portanto, entendida no sentido de descrever e comunicar, deve transitar entre as linguagens da Física adotadas pelo professor para explicar determinados fenômenos físicos e as linguagens dos alunos que precisam compreender aspectos da natureza, processo este, que não se deve limitar à apresentação da “Matematização da Física”, ao longo da história, mas que objetiva orientar os alunos a desenvolverem suas próprias Matematizações dos fenômenos físicos e/ou suas próprias interpretações de determinados processos de matematização, é claro, sempre sob critérios adotados pelo professor.

Para corroborar esta hipótese, procuramos pelos usos do termo “Matematização” em algumas propostas da literatura que estudam a relação Física e Matemática, em âmbitos educacionais. Encontramos que este tópico é trabalhado por pesquisadores do Ensino da Matemática e do Ensino da Física. Na década de 60 e 70, falava-se de Matematização no ensino da Matemática, chamando a atenção sobre a importância de ensinar a Matemática

aplicada em diversos campos disciplinares, assim como formar o aluno em habilidades para matematizar. Entretanto, no Ensino da Física, sua utilização inicial estava em torno da questão sobre os usos da Matemática, com propostas embasadas, principalmente, na ideia de ensino a partir da modelagem.

2.1. Propostas de Matematização para o ensino da Matemática

Trabalharemos, a seguir, três autores que foram contemporâneos em suas produções iniciais na década de 60 e 70, com perspectivas independentes, mas similares em relação às revoluções que consideravam necessárias no âmbito do ensino da Matemática, são eles: Freudenthal, Steiner e Krygovska.

Anna Krygovska (1968) introduz o termo “Matematização” em sua proposta de ensino visando indicar a aplicação da Matemática em diferentes contextos. A autora critica a tendência (na década de 70) de ensinar a Matemática como se ela fosse autônoma e independente de suas aplicações. Ela diz que, no ensino, a Matemática deve ser aplicada a situações naturais de domínios externos à Matemática, de forma tal que resolver uma situação seja um “verdadeiro problema” exigindo do aluno, tanto a aplicação de métodos matemáticos, quanto o uso de uma teoria matemática já desenvolvida. Nos dois casos é necessária a compreensão das dificuldades de passar de um esquema matemático à realidade, o que permitiria a superação de algumas visões ingênuas, como por exemplo: (1) a de que o esquema matemático é a mesma realidade descrita ou (2) de que a solução matemática de um problema é achar um número e não encontrar a coerência do esquema que descreve a realidade.

Krygovska propõe que o objetivo do ensino da Matemática deva ser ensinar os princípios da Matematização e os princípios da aplicação do conhecimento matemático. Um exemplo, é começar determinando se a situação problema exige um esquema discreto ou contínuo para, posteriormente, entender as condições de idealização do sistema, considerando os casos excepcionais. Este processo levaria o aluno a organizar a realidade que vai ser matematizada, por meio da relação entre as categorias conceituais da situação e a linguagem adequada para descrevê-la. Isto significa que os problemas gerais, com questões gerais e soluções gerais, não contribuem na formação do pensamento matemático do aluno, além de que o impede de aplicar seu conhecimento para a solução de problemas reais. A autora ainda chama a atenção sobre o cuidado que se deve tomar para não confundir a realidade com o esquema que a representa, já que esta é uma visão superficial, que gera paradoxos incompreensíveis.

Por sua vez, Freudenthal (2002) apresenta uma definição de Matemática orientada pelas características próprias da Matemática. Ele diz que a Matemática é um processo que tem três componentes: (1) axiomatização, (2) formalização e (3) esquematização. Para este autor, axiomatizar tem a ver com a organização do conhecimento; formalizar é um processo de adequar e transformar a linguagem a partir das simbolizações e esquematizar exige generalizar a linguagem em forma de leis e regras por meio da abstração, que se adéquam à realidade. O autor chama a atenção sobre o fato de que, no âmbito educacional, costuma-se restringir o processo de Matemática a uma destas componentes e que, usualmente, no ensino, são apresentadas somente as formalizações.

Sua concepção de Matemática inclui tanto a Matemática aplicada quanto a Matemática pura. Matemática é uma forma de “organizar”, que pode ser aplicada aos objetos mesmos da matemática. Segundo Freudenthal, apud: Gravemeijer; Terwel, (2000, p.782) “[...] Matemática objetos da Matemática e Matemática objetos da realidade compartilham as mesmas características [...]”¹¹, características como generalidade, certeza, exatidão e brevidade; mas a Matemática sobre os objetos da Matemática é a Matemática pura. Ao pensar em contextos educacionais básicos, o autor chama a atenção de que se deve ensinar a matemática a realidade cotidiana e não os objetos da Matemática e que o problema é que os professores não sabem dessa diferença e sabem menos ainda sobre ensinar a matemática a realidade.

Freudenthal apresenta vários exemplos que podem ser utilizados no ensino de matemática escolar, objetivando estimular os alunos a matemática por meio de exercícios, que direcionam o pensamento do estudante, num tipo de estratégia necessária para formalizar. Um desses exemplos é o seguinte: se uma torneira enche um recipiente em uma hora e outra torneira leva duas horas, quanto tempo levarão as duas torneiras juntas para encher o mesmo recipiente? Este problema simples, à primeira vista, pode ser analisado a partir de duas formas distintas de raciocinar; uma, que pergunta pela quantidade de recipiente que pode ser enchido numa hora, encontrando a proporcionalidade entre os eventos que acontecem com as duas torneiras, e outra, que pergunta pelo tempo necessário para encher o recipiente, tomando uma (1) hora como referência. Ou seja, se a torneira 1 gasta um tempo a para encher o recipiente e a torneira 2 gasta um tempo b , então em uma hora, a torneira 1 enche $1/a$ do recipiente e a torneira 2 enche $1/b$ do recipiente. As consequências de avançar na solução do problema, a

¹¹Texto traduzido livremente pelo autor deste trabalho.

partir destas formas de raciocínio permitem orientar os alunos para que passem de uma representação individual (cada torneira por separado) para uma representação da relação entre as duas torneiras, induzindo-os a organizar esquemas.

Hans Steiner é outro dos autores que desenvolve a ideia de Matematização para o ensino de Matemática. Ele define seis atividades fundamentais que podem ser desenvolvidas para conseguir a Matematização de uma situação: 1-observação, 2-descrição, 3-idealização, 4-análise lógico-local, 5-axiomatização e 6-aplicação (STEINER 1968). Essas atividades podem ainda ser agrupadas em três tipos diferentes de fases.

A primeira, objetiva explorar a linguagem própria do aluno e os conceitos intuitivos, por meio da observação e descrição do fenômeno; na segunda fase, procura-se restringir a linguagem imprecisa utilizada na descrição, levando o aluno a prestar atenção em alguns aspectos específicos, buscando organizar um modelo matemático por meio de idealizações e análises lógico-locais em concordância com as opiniões e formas de raciocinar dos alunos e; a terceira fase, trata de chegar na definição dos conceitos básicos por meio da axiomatização e aplicação, etapa na qual, o aluno pode desenvolver exercícios sobre classificação de modelos, analisar o sistema axiomático ou desenvolver diferentes axiomatizações para o mesmo conceito.

Visando exemplificar esta ideia de Matematização, Steiner apresenta uma experiência com alunos que trabalham na resolução de problemas de aplicação em situações que acontecem na sociedade, quando os grupos de pessoas devem tomar decisões por votação. O autor diz que os alunos, rapidamente, vão fornecendo exemplos: a decisão de um prefeito de construir ou não uma escola, a escolha de um representante da classe etc. Os alunos pensam que sempre é necessário começar, definindo a quantidade de pessoas que podem participar da decisão, ou seja, os votantes (A). Para cada voto, somente podem ser consideradas as opções “a favor” ou “contra”, a abstenção não é considerada. Cada membro de A tem uma quantidade de votos ≥ 0 . Organizam-se subgrupos em A , em função de possíveis alianças K , tendo que $K \subseteq A$ chamada de aliança vencedora, quando a soma dos votos dá conta da maioria ($2/3$) etc. Este exercício oportuniza diversas discussões sobre a maneira como se pode ir organizando e esquematizando a solução. (STEINER 1968, p.183).

Em geral, os autores concordam em que o processo começa pela observação e o estabelecimento de algumas condições ou restrições ao sistema para poder representá-lo esquematicamente e também, propõem levar o aluno numa evolução de níveis de complexidade, exigindo maiores ou melhores organizações lógicas da teoria em construção, por meio de distintos métodos matemáticos de trabalho, onde a organização do conhecimento

do fenômeno dá-se numa série de ciclos, que têm a característica de se desenvolver em função da capacidade de descrição, esquematização do aluno. A fim de sintetizar as perspectivas dos três autores acima mencionados, em torno do que pode ser considerado como “Matematização” no ensino da Matemática, elaboramos o Quadro 1.

QUADRO 1-Síntese de três perspectivas de Matemática no ensino da Matemática.

Pesquisadores do Ensino da Matemática	Matematizar no ensino da Matemática¹² (expressões dos autores)
Krygovska (1968)	“A iniciação sistemática dos alunos nos processos de matemática não superficial, se embasa nas esquematizações e extrapolações conscientemente desenvolvidas pelo mesmo aluno, em procura das estruturas matemáticas utilizáveis na situação considerada” (p.16)
Freudenthal (2002)	“ <i>Uma vez que o nosso tema é a modelagem como um aspecto da Matemática, gostaria de salientar que, no contexto atual, devem-se incluir prontamente modelos concretos tangíveis, tais como túnel de vento para testar os modelos de avião e simulações em laboratório da teoria da hidrodinâmica. Em outras palavras, modelos que são avaliados por observação ao invés de matemática, embora sua construção possa exigir mais matemática do que o tratamento de modelos menos tangíveis.</i> ” (p.34)
Steiner (1968)	“... o trabalho dos alunos pode-se concentrar principalmente em atividades fundamentais que formam parte da Matemática: observação, descrição, idealização, análise lógico-local, axiomatização e aplicação.” (p.181)

Notamos que para Krygovska, Matemática é uma das fases do processo da formação do pensamento matemático. Entretanto, para Freudenthal, a modelagem é um aspecto da Matemática já que ela permite tratar exemplos tangíveis. E, para Steiner, conseguir o modelo matemático é igual a matemática a situação. Porém, os três autores concordam no seguinte aspecto: no ensino é necessário partir da aplicação da Matemática e superar o tratamento límpido e preciso da Matemática pura.

Levar em consideração esta conclusão do ensino da Matemática para o Ensino da Física, apresenta-se como um desafio, uma vez que a linguagem da Física é Matemática, mas não por isso, pode-se dizer que é Matemática pura, muito pelo contrário. A partir destes autores podemos inferir que a utilização da Matemática no Ensino de Física deve obedecer à necessidade de desenvolver processos, nos quais o aluno possa organizar e esquematizar os fenômenos em estudo, referenciando-se sempre na realidade. Visando esclarecer mais um

¹² Textos traduzidos livremente pelo autor deste trabalho.

pouco este t3pico, fomos 3 procura de alguns autores que discutissem a rela33o entre Matem3tica e F3sica no Ensino de F3sica.

2.2. Propostas de usos da Matem3tica no Ensino de F3sica

O trabalho de Redish (2006) defende a ideia de que compreender a rela33o entre F3sica e Matem3tica implica poder distinguir entre o que 3 fazer Matem3tica e o que 3 usar a Matem3tica no desenvolvimento da F3sica. Isso significa que o f3sico n3o aprende Matem3tica e F3sica de forma separada, para depois juntar os dois conhecimentos, mas toma o mundo f3sico, descrevendo seus conceitos por meio de representa333es matem3ticas e, assim, pode garantir uma interpreta33o f3sica de tais representa333es para, posteriormente, avaliar sua validade no mundo f3sico. Inferimos, ent3o, que n3o 3 na l3gica interna da Matem3tica que se encontra a validade de uma express3o da F3sica, mas na coer3ncia que tal express3o apresenta para descrever a natureza.

Este modo de pensar, quando transposto para o Ensino, pode ser interpretado da seguinte maneira: n3o faz muito sentido ensinar a Matem3tica pura, como pr3-requisito para estudar a F3sica, esperando que isto j3 garanta a compreens3o das descri333es formais da F3sica, uma vez que a aprendizagem da Matem3tica em si, n3o ensina como us3-la em outros contextos. No entanto, a aprendizagem da F3sica implica a aprendizagem de como utilizar s3mbolos e rela333es entre s3mbolos para poder expressar ideias e construir explica333es de comportamentos espec3ficos da natureza.

Esse autor chama a aten33o, por exemplo, sobre como o tema das “transforma333es afins” n3o 3 discutido com os alunos, quando se trabalha com as representa333es vetoriais das magnitudes de posi33o e velocidade. Costuma-se ensinar o uso dos vetores, sem se levar 3 compreens3o de que o fato de que v3rias magnitudes possam ser representadas e operadas como vetores, n3o significa que tenham comportamentos id3nticos. Por exemplo, na representa33o dos vetores de posi33o e velocidade em sistemas de coordenadas, temos que os dois vetores mudam da mesma forma, quando se faz a rota33o dos sistemas de coordenadas sobre a origem, por3m, se mudarmos a origem do sistema, o vetor posi33o muda, mas o vetor velocidade continua o mesmo, ou seja, ele independe da posi33o da origem.

Isso significa que estes aspectos precisam ser analisados com detalhe no ensino da F3sica para evitar que o aluno construa, por exemplo, a defini33o de vetor, desconsiderando as particularidades que envolvem operar com diferentes grandezas vetoriais da F3sica. Entendemos, ent3o, que utilizar ou assumir “o car3ter dedutivo do formalismo matem3tico”, em contextos de Ensino de F3sica, n3o significa ensinar somente a calcular valores, por meio

de uma equação, mas levar o aluno a compreender de maneira estrutural as grandezas físicas, selecionando apropriadamente determinadas estruturas matemáticas, a fim de compreender o uso e significado das representações construídas dos fenômenos físicos.

De acordo com Redish e Gupta (2010),

A compreensão de uma equação da Física não se limita à conexão dos símbolos com as variáveis físicas e o domínio das operações por meio da equação. Uma importante componente refere-se à conexão das operações matemáticas na equação com seus significados físicos e a relação entre a equação e suas implicações no mundo físico.¹³ (REDISH e GUPTA, 2010, p.12),

Nesse sentido, também Bing e Redish (2009) defendem que resolver problemas de Física, em sala de aula, implica desenvolver no aluno habilidades complexas de raciocínio, levando-os a ter consciência da razão pela qual podem ou devem optar pelo uso de determinados esquemas matemáticos, e não outros, na solução de problemas de Física, sendo conscientes de que esquemas matemáticos são mais do que algoritmos matemáticos ou equações isoladas.

Esses autores observaram grupos de alunos de nível universitário, nos momentos em que trabalhavam em grupo, resolvendo problemas de física, para analisar e descrever suas ideias em relação ao uso da Matemática. Perceberam que os alunos ficavam confusos, utilizando um conjunto limitado de habilidades ou de raciocínios, sem perceber que um conjunto diferente de ferramentas (que já possuem e até sabem como utilizar) poderiam lhes ajudar a resolver o problema de forma mais fácil e rápida.

Os autores concluem que o Ensino de Física deve formar o aluno, numa base epistemológica (*epistemological framing*) que lhes permita interpretar o papel da Matemática nos desenvolvimentos da Física. Por exemplo, em torno de uma expressão básica da Física como é $x_f = x_i + \langle v \rangle \Delta t$, que relaciona a posição inicial x_i , a posição final x_f , a velocidade média $\langle v \rangle$ e um intervalo de tempo Δt , podem ser estudados diferentes papéis epistemológicos desta expressão matemática, na compreensão de fenômenos físicos. Papéis como:

(1) *A expressão é em si mesma um esquema de cálculo.* Representa um esquema que permite calcular um resultado numérico com base em alguns dados conhecidos; se o objeto em movimento parte de uma posição conhecida, com um valor conhecido de velocidade, pode-se determinar a posição final para um tempo determinado.

¹³ Texto traduzido livremente pelo autor deste trabalho.

(2) *Representa uma relação física entre as grandezas.* O significado de $\langle v \rangle$ permite entender o quão rápido o corpo se desloca numa unidade de tempo e, conhecida a posição inicial, permite completar a relação encontrando a posição final.

(3) *A representação matemática fornece um sistema conciso para recordar regras e resultados previamente construídos.* Não necessariamente se devem começar todos os problemas físicos desde os princípios básicos do fenômeno. Ao citar a equação $x_f = x_i + \langle v \rangle \Delta t$ nem sempre se pensa na constituição da equação, e sim, “a equação da posição final é..”

(4) *A expressão inter-relaciona uma grande rede de ideias matemáticas.* Tal expressão:

Pode ser derivada por meio da operação algébrica a partir da definição de velocidade média;

Tem a estrutura conceitual de outras formas simbólicas $v_f = v_i + \langle a \rangle \Delta t$;

Pode ser interpretada a partir de um gráfico de velocidade, e;

Pode ser vista como a solução de $\frac{d^2x}{dt^2} = k$.

Tanto esse trabalho, quanto o de Tuminaro e Redish (2007) evidenciam que os alunos possuem um conjunto de estratégias sobre como resolver problemas, que os autores chamam de “jogos epistêmicos” (epistemic games), que na maioria dos casos, desconhecem a essência do uso da Matemática na construção de explicações.

Os autores encontraram que os alunos se enquadram basicamente em seis tipos de jogos: (1). “Mapping meaning to mathematics”, no qual os alunos começam compreendendo, conceitualmente, a situação física descrita, para identificar qual é o problema a resolver e em seguida avançam na solução quantitativa”; (2) “Mapping Mathematics to meaning”, no qual os alunos desenvolvem uma história conceitual, a partir de uma equação física particular, quer dizer, que vão primeiro em busca da equação; (3). “Physical mechanism game”, neste caso, os alunos constroem uma história do problema, a partir de seu senso comum do que é um mecanismo físico (eles não se referem a princípios, nem equações); (4) “Pictorial analysis game”, no qual os alunos partem de uma representação espacial, relacionando os aspectos apresentados no problema para tentar deduzir uma solução; (5) “Recursive Plug-and-Chug”, neste caso, os alunos identificam quantidades e as ligam, mediante uma equação, tentando obter um resultado sem compreender o que isso significa, conceitualmente; (6) “Transliteration to Mathematics”, no qual os alunos utilizam exemplos trabalhados para gerar

uma solução sem o desenvolvimento de uma compreensão conceitual de tal exemplo trabalhado.

Na identificação e caracterização destes seis tipos de jogos utilizados pelos alunos, os autores encontraram que, efetivamente, os estudantes, na maioria das vezes, ignoram ou não têm consciência do papel da Matemática na formulação da Física, uma vez que uma característica comum da maioria dos jogos utilizados é acreditar que podem demonstrar que aprenderam Física, quando conseguem calcular um valor e achar a resposta do problema, desconsiderando o processo que utilizaram. Mesmo quando o professor tenta desmitificar esta ideia ao ter ciência de que o ensino de Física não deve ser enciclopédico, nem, exclusivamente, embasado no uso das equações para calcular valores, os alunos ficam com essa ideia, quando percebem que o que realmente os aprova, são as notas obtidas nas provas que geralmente exigem alto grau de memorização e oportunizam que o aluno possa aplicar equações e resolver problemas sem se preocupar em expor a compreensão do fenômeno em si, nem o porquê está utilizando um determinado esquema matemático.

No problema identificado por estes autores, podemos ver que o entendimento da Matemática como linguagem da Física, do ponto de vista dos alunos, estaria longe da concepção, com a qual os cientistas têm construído a Física, ao longo de sua história. A identificação deste tipo de problema justifica a necessidade da pesquisa em Ensino de Física, que ofereça resultados para aprender a modificar as concepções ingênuas de professores e alunos em relação à solução de problemas no aprendizado da Física. Neste tópico, a literatura apresenta, atualmente, uma tendência de propostas de ensino em torno da Modelização, como um processo que permite educar os alunos em habilidades apropriadas para a construção e compreensão de modelos explicativos dos fenômenos físicos.

Na proposta de ensino a partir da Modelização, assume-se em geral que, orientar os alunos em atividades de modelagem, facilita sua formação em habilidades necessárias para o domínio da linguagem, com a qual se representam os fenômenos físicos. Segundo Hestenes (1996), o uso da modelagem no Ensino de Física permite criar condições para apreender a Física de forma mais eficaz, entendendo a Física como uma rede complexa de modelos que se interrelacionam num sistema de princípios teóricos. O autor afirma que os “Modelos são unidades de conhecimento estruturado usados para representar padrões observáveis nos fenômenos físicos. Assim, ‘a compreensão física’ é um conjunto complexo de habilidades de modelagem, ou seja, habilidades cognitivas para produzir e usar modelos”. (HESTENES, 1996, p.7)

Tais “unidades” de estruturação do conhecimento costumam ser entendidas no Ensino de Física como os problemas teóricos e sua solução, o que, segundo o autor está errado, uma vez que a solução de problemas é apenas uma parte da modelagem. O método de ensino por modelização visa orientar os alunos na reestruturação de suas intuições, envolvendo-os em construções explícitas e na manipulação de representações estruturadas. Para tanto, é importante decidir o que ensinar e o como ensinar.¹⁴

Com o pressuposto de que o Ensino de Física deve formar os alunos para pensar no âmbito científico, o autor define o modelo (em Física) como “uma representação da estrutura de um sistema físico e/ou suas propriedades”, onde o modelo refere-se a um sistema individual que pode ser exemplo para outros casos similares (HESTENES, 1996, p.8). A construção do modelo envolve quatro tipos de estrutura: (1) Estrutura sistêmica: partes internas do sistema, agentes externos ligados ao sistema e conexões entre as partes internas e externas; (2) Estrutura geométrica: posição com relação ao sistema de referência, relações geométricas entre as partes; (3) Estrutura temporal: mudanças das variáveis em função do tempo, mudanças por meio de equações diferenciais com leis de interação; (4) Estrutura de interação: interações entre os nexos causais, geralmente em função de variáveis de estado.

De forma que, no ensino, pode ser elaborado o processo de construção do modelo, seguindo a descrição das estruturas envolvidas no estudo do sistema físico para, posteriormente, compreender suas implicações e avaliar sua validade ao comparar as previsões obtidas, a partir da estrutura com os dados empíricos que representam o comportamento do sistema (sabendo que não se deve esperar uma confirmação exata de dados, já que todo modelo é uma representação incompleta).

Outros autores como Angell *et al.* (2008) consideram que o Ensino de Física deve educar os alunos para entender a natureza da Física, como uma empresa de modelagem, o que significa formá-los para que, por meio do raciocínio, consigam ligar as representações experimentais com as conceituais. Estes autores nomeiam sua proposta como uma abordagem empírico-matemática, para o qual propõem dois tipos de atividades: uma que visa levar o aluno a utilizar múltiplas representações do fenômeno físico, e outra que visa enfatizar que a produção da Física se baseia na construção de modelos. Quanto aos tipos de representações, eles são definidos em Guttersrud e Angell (2010): conceituais, pictóricos, gráficos e

¹⁴ver detalhes da sinopse do método de modelagem deste autor, no Anexo 3, p.257

matemáticos. Entende-se que para o aluno transitar entre eles precisa ter habilidades de raciocínio, que lhe permitam categorizar, identificar, decidir, avaliar, concluir e comunicar.

Por sua vez, Uhden *et al.* (2012) e Karam (2012) compartilham a mesma perspectiva sobre ciclos de modelado, com níveis gradativos de Matematização na formulação das leis físicas. Eles afirmam que é preciso partir da realidade do mundo para avançar na elaboração de modelos físico-matemáticos, não de forma linear, mas flexível, até chegar a trabalhar com cálculos de valores. Assim, o que eles chamam de “Matematização” é a fase preliminar ao trabalho com cálculos de valores, sendo esta fase subdividida em vários momentos, que vão das percepções do mundo até as organizações dos esquemas que o explicam, com sua interpretação e validação na realidade. Os autores dizem que, na fase de Matematização, o cientista pratica habilidades estruturantes de pensamento, enquanto na fase de cálculos, o cientista pratica habilidades técnicas.

Isso significa que, ao aplicar esta forma de entender a Matematização da Física em contextos de Ensino, é preciso desenvolver nos alunos um pensamento físico-matemático, por meio da compreensão dos conceitos da Física, a partir de seus aspectos matemáticos, superando a dicotomia: pensamento qualitativo para a Física e pensamento quantitativo para a Matemática. Portanto, a aprendizagem acontece na medida em que o aluno consegue: entender o caráter dedutivo do formalismo matemático; compreender as analogias que permitem pensar fenômenos físicos desconhecidos e; desenvolver abstrações, entre outras habilidades.

Segundo Karam (2012), a “Matematização da Física” nos últimos anos, embasa-se na definição da Matemática como estruturante do pensamento físico. Em seu trabalho de tese, o autor conclui que para melhorar o Ensino da Física resulta mais apropriado desenvolver, no aluno, habilidades que lhe permitam utilizar a Matemática, como instrumento para pensar o mundo físico, habilidades que nomeia como “estruturantes”, as quais se diferenciam das habilidades técnicas.

Sendo que as “[...] habilidades técnicas referem-se ao campo mais interno da matemática e estão relacionadas ao domínio instrumental de algoritmos, regras, fórmulas, gráficos, equações, etc.” Entretanto, as habilidades estruturantes estão associadas à “capacidade de se fazer um uso organizacional da matemática em domínios externos a ela e de compreender as razões para a relação de dependência mútua entre Física e Matemática” KARAM (2012, p.3). Somente por meio dessas últimas habilidades é possível entender o papel estruturante da Matemática na Física. Tais habilidades estruturantes podem ser: a interpretação física de expressões matemáticas, a demonstração de fórmulas a partir de

princípios físicos e o privilégio do pensamento matemático rigoroso sobre limitações da intuição sensorial.

Assim, as habilidades técnicas estão associadas ao saber fazer, enquanto as estruturais estão associadas ao saber por que fazer, para quê e quando usar. De acordo com Karam e Pietrocola (2009), uma das habilidades estruturais mais relevantes é a capacidade de identificar os aspectos essenciais, que justificam a presença de uma estrutura matemática em um modelo. Os autores apresentam, como exemplo de exercício para desenvolver esta habilidade, o estudo simultâneo de três enunciados com situações a serem resolvidas: uma que pergunta pelo momento binário aplicado a uma barra; outra que pergunta pela força elétrica sobre uma esfera eletrizada e; outra que pergunta pelo trabalho realizado por uma força. Enfatizando que nos três casos, é necessário aplicar funções trigonométricas para resolver a situação, fato perante o qual se propõem questionamentos, como:

- Por que as funções trigonométricas (seno e cosseno) aparecem nas fórmulas matemáticas utilizadas na resolução destes três problemas? O que os mesmos têm em comum?
- Quais são os aspectos relevantes para que as funções trigonométricas sejam úteis como estruturas matemáticas para modelizar fenômenos físicos?
- Poderíamos trocar seno por cosseno (ou vice-versa) em cada um dos três problemas? Por quê? (KARAM e PIETROCOLA, 2009, p.197)

Espera-se que este exercício, leve a compreender a razão do porquê certas estruturas matemáticas funcionam para explicar diversos problemas da Física e quais as condições que devem cumprir tais situações, para que possam ser representadas com o mesmo esquema matemático, além de entender as particularidades de cada situação.

Outro exemplo apresentado pelos mesmos autores para ilustrar o modelo de sua proposta de ensino de Física, trata sobre o problema da descrição do movimento de um corpo em queda livre, visando determinar sua posição em função do tempo. Eles propõem desenvolvê-lo em cinco etapas, fazendo uso de uma matematização gradativa, depois de ter imaginado o sistema ideal, desconsiderando variáveis como a resistência do ar e o tamanho do corpo e considerando a representação do espaço e do tempo com números reais: (1) reconhecer que a relação tempo e espaço neste movimento, não é linear; (2) reconhecer que a aceleração (taxa de aumento da velocidade) do movimento é constante; (3) representar, graficamente, a taxa de aumento da velocidade; (4) interpretar a área abaixo do gráfico como o deslocamento do corpo em função do tempo; (5) deduzir, algebricamente, a equação que permite resolver o problema de determinar a posição do corpo caindo em função do tempo,

utilizando nesta dedução, a fórmula para a aceleração constante ($v = gt$), o gráfico v versus t , e a interpretação da área abaixo do gráfico como o deslocamento $s(t)$:

$$(5) \quad s(t) = \frac{1}{2}vt = \frac{1}{2}(gt)t = \frac{1}{2}gt^2,$$

s (posição); v (velocidade); g (aceleração da gravidade); t (tempo)

Gostaríamos de finalizar, ressaltando que nas propostas de todos os autores mencionados anteriormente, não se considera eliminar o uso de algoritmos no ensino, uma vez que os conceitos e métodos da Física estão profundamente influenciados pelo pensamento matemático, mas usá-los por meio de um processo que leve o aluno a perceber uma relação aprofundada entre os esquemas matemáticos e a constituição das teorias da Física, porém com algumas diferenças entre eles, sobre as maneiras de entender a Matematização no ensino. Por exemplo, para Freudenthal a modelagem é um aspecto da Matematização, enquanto que para Uhdén *et al*, a Matematização é uma parte da modelagem, ao se desenvolver no uso das habilidades estruturantes de pensamento, entretanto, para Steiner, a Matematização é um processo de construção do modelo matemático com diversos níveis de abstração.

Contudo, é possível enxergar, que as ideias de “Matematização” em processos de Ensino de Física têm um sentido diferente da “Matematização” na evolução da Física, uma vez que, no primeiro caso, a principal preocupação gira em torno de definição de processos que permitam orientar os alunos, enquanto, no segundo, a preocupação principal gira em torno da coerência das representações mais adequadas para descrever o mundo físico. De outro lado, vemos que, dada a diversidade de perspectivas, é evidente a necessidade de continuar estudando em torno da relação Física e Matemática no Ensino de Física, buscando maiores consensos para uma melhor compreensão do significado dos processos de Matematização e seu significado na prática educativa.

2.3. Reflexões sobre significados de “explicação” e “linguagem” no Ensino de Física

Sabendo que as explicações construídas pela Física ao longo de sua história foram evoluindo, na medida em que foram sendo caracterizados novos objetos de estudo e, com isso, foi-se exigindo a reformulação das linguagens que, até cada momento, consideravam-se como verdadeiras ou adequadas, consideramos que, ensinar Física consiste, principalmente, em explicar “as explicações da Física”, o que nos leva a refletir sobre o significado de explicar Física em sala de aula.

A partir das propostas dos autores mencionados anteriormente, podemos entender uma preocupação generalizada por desenvolver processos em sala de aula que vão muito além de se limitar a narrar para os alunos os resultados da Física. Em geral, os autores propõem um trabalho interativo entre professor e aluno, por meio do desenvolvimento de processos com fases gradativas, nas quais o aluno seja orientado na evolução de diversos níveis de raciocínio para a compreensão dos fenômenos físicos que estão sendo estudados.

Significa que, para planejar a explicação das “explicações”, é importante se deter a pensar em aspectos que diferenciam as maneiras de operar na construção da Física das maneiras de operar na construção do conhecimento físico em sala de aula. Aspectos como:

Os problemas resolvidos pela Física frente aos problemas que o professor de Física deve resolver;

A linguagem da Física em seus diferentes momentos históricos, frente à linguagem do professor e do aluno, inseridos em um momento histórico;

O consolidado do conhecimento da Física como resultado de um trabalho coletivo de diversas comunidades científicas frente ao conhecimento científico do professor;

A construção de explicações da Física ao longo de largos períodos (anos, décadas, séculos) frente ao tempo limitado da sala de aula para orientar processos de construção de conhecimento ou de formação de pensamento científico, entre outros.

A partir do já exposto nestes dois capítulos, podemos inferir que os problemas que o professor de Física deve resolver se relacionam com o planejamento de atividades que oportunizem processos de estudo dos fenômenos físicos, propiciando ao aluno uma familiarização gradativa com as formas de representar o comportamento dos sistemas físicos. Mas isto implica que o professor tenha ciência da “linguagem” que domina, tanto no campo da Física, como no campo da interação em sala de aula. Também implica que tenha a intenção de combinar as duas em um discurso só, sem desfigurar a essência das expressões físico-matemáticas, mas procurando que o aluno compreenda sua complexidade, sempre partindo da própria realidade do professor e do aluno em relação a aspectos ontológicos e epistemológicos.

- Sobre a explicação das “explicações da Física” em sala de aula.

Ao comparar as propostas dos autores já apresentados, que pesquisaram em ensino de Matemática e ensino de Física, encontramos que há algumas tendências que convergem com relação ao que se pode considerar como explicar em sala de aula.

No ensino de Matemática, fazem-se propostas, cujo eixo que deve orientar o planejamento de atividades escolares, é o desenvolvimento de habilidades de pensamento do aluno, que para uns significa usar diversos métodos matemáticos de trabalho, a fim de levar o aluno numa evolução de níveis de complexidade no tipo de descrições e esquematizações de uma situação real; para outros, isto se resume na ideia de estudar a Matemática sempre aplicada, visando explicar seus usos práticos, enquanto para outros, explicar implica levar o aluno na compreensão da distância que existe entre calcular um valor e encontrar a coerência do esquema que explica a situação real em estudo.

Por sua vez, os pesquisadores do ensino de Física também propõem o desenvolvimento de processos que formem habilidades de pensamento no aluno, só que desta vez, o foco não é na compreensão dos esquemas matemáticos ao ser aplicados a situações reais e alheias à Matemática, mas na compreensão dos modelos explicativos dos fenômenos físicos, os quais, embora se embasem em esquemas matemáticos, exigem do aluno colocar em jogo, suas concepções epistemológicas de conceitos próprios da Física, como por exemplo, os de espaço, tempo, matéria, energia etc.

Embora seja uma realidade que os dois campos de ensino compartilhem quase os mesmos métodos de trabalho ao considerar tanto as situações reais quanto os esquemas matemáticos, os pesquisadores apresentam propostas que deixam ver a especificidade dos dois campos, já que, no caso do ensino de Física, não se trata de construir um esquema para depois analisar suas possíveis aplicações, mas de selecionar ou interpretar esquemas para descrever um ou mais fenômenos físicos, sabendo que cada símbolo utilizado e cada relação entre os símbolos deve ter necessariamente significado físico.

Portanto, explicar as explicações da Física, implica ensinar a organizar representações dos fenômenos, mas também significa orientar para que os alunos consigam encontrar relações mútuas entre diversas imagens, tanto quanto relações entre as imagens e os símbolos, de forma tal que o aprendiz vá construindo uma linguagem, por meio da qual possa descrever o comportamento de um fenômeno ou construir sua própria explicação e, além disso, possa expressar pensamentos que não poderia ter tido sem a constituição de tal linguagem, sempre sob a orientação do professor.

Assim, podemos dizer que um dos objetivos do professor *explicar* é levar o aluno a construir suas próprias explicações, acarretando-lhe, cada vez maiores níveis de organização cognitiva, para o qual precisa-se de planejamento e desenvolvimento de atividades em que os alunos devam resolver problemas. Mas é necessário que o professor diferencie entre o que é resolver problemas visando fixar determinados conhecimentos transmitidos com base na

formalização das leis da Física e o que é resolver problemas, com base em atividades, que lhe exijam desenvolver processos, por exemplo, de esquematização e axiomatização no estudo dos fenômenos físicos, uma vez que a primeira opção acaba limitando a aprendizagem da Física à formação de certas habilidades técnicas para dar conta do domínio dos formalismos matemáticos, enquanto na segunda opção, espera-se que o aluno tenha maior participação no planejamento e desenvolvimento da formulação e resolução do problema.

Para conseguir este resultado, o professor não somente deve considerar seus conhecimentos sobre a maneira como a Física foi se construindo, mas também seus conhecimentos sobre as maneiras de interagir e se comunicar em sala de aula, quer dizer, que além de conteúdos de tipo experimental, matemático, filosófico, histórico e epistemológico em torno da Física, deve levar em consideração conteúdos de tipo psicológico, pedagógico, sociológico e todos aqueles que lhe permitam gerar uma ambiente que propicie a comunicação com os alunos, em torno do estudo de um assunto científico.

Significa que, ainda quando um determinado modelo ou esquema fundamente uma *explicação científica*, não se pode dizer que a apresentação de tal modelo, em sala de aula, constitua em si uma *explicação* da realidade física para o aluno, uma vez que, levar o aluno a compreender e conhecer a ciência, não depende, exclusivamente, do reconhecimento da lógica envolvida nos conteúdos da ciência, mas da maneira como o aluno é orientado a construir significados em torno de tais conteúdos.

- *Sobre a linguagem da explicação em sala de aula.*

Para começar, gostaríamos de colocar alguns questionamentos para os quais, da mesma maneira que no capítulo anterior, não temos resposta ampla e imediata, mas representam as preocupações que orientam esta pesquisa:

Qual linguagem deve construir o professor que ensina Física, sabendo que deve partir da linguagem científica, que explica os fenômenos físicos, mas simultaneamente, deve garantir a função comunicacional de tal linguagem em sala de aula?

Qual linguagem deve construir os alunos, sabendo que se encontram em um processo educativo, no qual devem construir representações mentais que expressem sua compreensão da natureza e simultaneamente lhes permitam estabelecer um dialogo com os cientistas, com o professor e com seus colegas?

O fato de que algumas explicações da Física sejam construídas com esquemas que independem da experiência sensorial direta, significa que tais explicações estão longe da realidade e das possibilidades de pensamento dos alunos?

Consideramos que um dos objetivos de explicar é conseguir que o aluno consolide formas cada vez mais adequadas e eficientes na representação da realidade, mas é preciso orientá-lo na construção de critérios que lhe permitam julgar a eficiência e pertinência de sua própria linguagem no momento de explicar. Com isto, ele deve ir aprendendo a descrever os sistemas físicos cada vez com maiores níveis de abstração, o que implica que vá compreendendo as razões de uso de diversas representações baseadas, por exemplo, em “imagens”, “símbolos”, “gráficos”, “conceitos”, “equações”, etc., sempre com sentido físico.

Assim, para garantir que as representações possam ser interpretadas com sentido físico é preciso orientar o aluno para ir além da intuição elementar, que resulta da observação direta, uma vez que no estudo dos fenômenos físicos, nossos sentidos não chegam ao infinitamente pequeno nem ao infinitamente grande, o que implica ensinar a elaborar organizações que lhes permitam confiar no raciocínio, sendo este um campo apropriado para mostrar que a linguagem da Matemática fornece a possibilidade de criar expressões ou representações que operam de maneira relacionada, mas independente dos sistemas descritos, a partir da experiência sensorial.

Assim, é importante ensinar o aluno a diferenciar entre uma linguagem puramente matemática e uma linguagem matemática associada à representação dos fenômenos físicos, já que na matemática pura, a linguagem tem um caráter de abstração diferente ao da Física, pois a linguagem puramente Matemática descreve objetos matemáticos, enquanto a linguagem da Física descreve acontecimentos da natureza. Por exemplo, a Física necessita atribuir unidades de medida aos símbolos que representam quantidades e tais unidades de medida dependem de padrões ou parâmetros que variam em função dos sistemas e condições consideradas, o que não acontece com os parâmetros e as variáveis da Matemática, já que, nesta última, as relações independem de condições ontológicas.

É por isso que é importante mostrar para os alunos que as equações são mais do que fórmulas para calcular um valor numérico. Elas são relações entre símbolos que têm significados específicos em função do sistema. Isto, exige que o professor compreenda que, embora as leis físicas já tenham implícita uma lógica e um sentido físico, o fato de descrevê-las, em sala de aula, não significa que o aluno entenda tudo o que tem por trás, muito pelo contrário, para o aprendiz da Física, as leis podem parecer como absurdas e ilógicas.

Observa-se que, ao trabalhar com conceitos como velocidade, espaço, tempo, etc., os alunos têm suas próprias maneiras de se referir a eles, principalmente, baseadas em descrições da experiência sensorial, mas espera-se que, na medida em que, vão aprendendo Física, vão ganhando independência da descrição intuitiva e, simultaneamente, vão sentindo a

necessidade do uso de representações mais abstratas, quando se fala, por exemplo, de velocidades muito maiores do que aquela que percebemos com os sentidos ou quando medimos intervalos de tempo, em escalas muito menores do que a escala humana. Essa linguagem cada vez mais aperfeiçoada e especializada, exige novos conhecimentos e novas maneiras de raciocinar, que o professor deverá formar e que não, necessariamente, respondem ao caminho estritamente percorrido na construção da Física ao longo de sua história.

3. CATEGORIAS DE “MATEMATIZAÇÃO” NO ENSINO DE FÍSICA.

O propósito deste capítulo é apresentar os resultados de uma pesquisa preliminar onde procuramos nas publicações na área que tratam especificamente sobre a relação entre Física e Matemática e suas implicações no ensino de Física, a relação entre a matemática e física, e buscou criar categorias sobre as formas como pode ser entendida a Matematização por tais pesquisadores em ensino de Física.

Tendo como pano de fundo, o exposto nos dois capítulos anteriores, propomos três questões, a partir das quais esperamos constituir as categorias, já que a Matematização no Ensino da Física prioriza processos de estudo dos fenômenos físicos, mas tais processos, podem ser entendidos de formas diferentes e utilizados para propósitos diferentes.

Tais questões tem a ver com o que se entende pela relação entre Física e Matemática, o que sugere tal entendimento nas decisões sobre o que o aluno deve aprender, o que exigem tais aprendizados em termos dos tipos de problemas que o aluno deve resolver. Assim, para criar as categorias, analisamos os textos, procurando posições próximas ou distanciadas em torno das três questões, visando agrupar as ideias fundamentais dos diferentes autores em torno do que pode ser entendido, como matematização no ensino de Física.

Tais questões foram:

- 1. Como os pesquisadores entendem a relação entre Matemática e Física?;*
- 2. Qual o impacto desse entendimento na decisão sobre o que os alunos devem aprender e;*
- 3. Que tipo de problemas os alunos devem resolver para aprender Física?.*

3.1 Metodologia da pesquisa preliminar

Esta pesquisa preliminar é de caráter qualitativo, no sentido trabalhado por Flick (2004). Segundo o autor, neste tipo de pesquisa, elabora-se um texto com o conjunto de materiais, que contêm os dados e informações coletadas. Tal texto é organizado a fim de construir uma “nova realidade” a ser interpretada. A interpretação desse novo texto, pode ser mediante análises temáticas ou sob um conjunto de categorias que permitam a geração de novas interpretações e a proposta de teorias e resultados.

Para a seleção do conjunto de artigos nas publicações na área que tratam especificamente sobre a relação entre Física e Matemática e suas implicações no ensino de Física, que constituíram nossos textos a serem analisados, embasamo-nos na perspectiva de

Bardin (2002), que formula técnicas para estudar documentos de forma sistemática. Segundo Bardin,

Fazer uma análise temática, consiste em descobrir os “núcleos de sentido” que compõem a comunicação e cuja presença, ou frequência de aparição podem significar alguma coisa para o objetivo analítico escolhido. (BARDIN, 2002, p.105)

Na metodologia de análise dos textos, embasamo-nos na proposta da análise textual discursiva apresentada por Moraes (2003), no sentido de desmontar o texto em unidades de análise, as quais foram categorizadas e interpretadas. Moraes define esta abordagem de análise,

[...] como um ciclo de operações que se inicia com a unitarização dos materiais do corpus. Daí o processo move-se para a categorização das unidades de análise definidas no estágio inicial. A partir da impregnação atingida por esse processo, argumenta-se que emergem novas compreensões, aprendizagens criativas que se constituem por auto-organização, em nível inconsciente. (MORAES, 2003, p.209)

Para a constituição da amostra de resultados de pesquisa nesse campo presentes em artigos, o primeiro recorte foi feito, consultando a classificação das publicações em periódicos da área de “Ensino”, segundo a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior CAPES¹⁵, reconhecidos pela qualidade e seriedade de suas publicações. Para a constituição da amostra, foram selecionadas as publicações em estratos superiores A1 e A2, durante o período de 2000 a 2012. Sabemos que este grupo de periódicos consultados não abrange todos os existentes no mundo, na área de ensino de Ciências, porém, consideramos que é uma amostra que representa em boa parte os referenciais consultados, no contexto brasileiro.

Esta classificação (A1 e A2) apresenta 30 periódicos no relatório, área 46, ano base 2008. Dos 30 periódicos na área de ensino, não foram considerados aqueles periódicos, nos quais foi constatado que pela natureza dos artigos não, trabalharam a temática de Ensino de Física. Assim, consideramos somente 19 periódicos dos 30 levantados, conforme relacionados no Quadro 2.

¹⁵ No ano 2010, era chamada de *área 46 de Ensino de Ciências e Matemática*, pelo que os periódicos classificados pela CAPES eram mais focados nesta temática. Ao mudar para área de “ensino” foi expandido o foco, incluindo periódicos de muitas temáticas.

QUADRO 2 -Quantidade de artigos publicados por cada periódico, no período escolhido.

No	Periódico	Período considerado: (desde o ano 2000 até)	Quantidade de Artigos
1	BOLEMA	v.26 n.42b abr. 2012	270
2	Ciência & Educação	v. 18 n.3, 2012	420
3	Cultural Studies of Science Education	v. 7, n. 3, 2012	361
4	Educational Studies in Mathematics	v. 81, n. 3, 2012	730
5	Enseñanza de las Ciencias	v. 30 número 2, 2012	396
6	For the Learning of Mathematics	v. 32, n. 2, 2012	347
7	International Journal of Science Education	v. 34, n. 17, 2012	1137
8	Physics Education	v. 47, n. 6, 2012	1407
9	Research in Science & Technological Education	v. 30, n. 3, 2012	218
10	Science & Education	v. 21, n. 10, 2012	716
11	ZDM (The International Journal on Mathematics Education)	v. 44, n. 7, 2012	671
12	Annales de Didactique et de Sciences Cognitives	v. 17, 2012	79
13	Ensaio Pesquisa em Educação em Ciências	v. 14, n. 2, 2012	228
14	Technology, Knowledge and Learning; antes: International Journal of Computers for Mathematical Learning.	v. 17, n. 1, 2012	184
15	Investigações em Ensino de Ciências. (IENCI)	v. 17, n.3, 2012	234
16	REEC. Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias	v. 11, num. 3, 2012	342
17	Revista Brasileira de Pesquisa e Educação em Ciências	v. 12, n. 2, 2012	240
18	REIEC. Revista Electrónica de Investigación en Educacion en Ciencias	v.7, n.1, 2012	73
19	Studies in History and Philosophy of Modern Physics	v. 43, n. 4, 2012	431
		Total	8484

Os periódicos desconsiderados para esta classificação foram: 1- Advances in Physiology Education; 2- Biochemistry and Molecular Biology Education; 3- Cell Biology Education; 4- Computers & Education; 5- Caderno CEDES; 6- Enseñanza de las Ciencias de la Tierra; 7- Jcom, Journal of Science Communication; 8- Journal of Biological Education; 9- Philosophy of science; 10-Public understanding of science; 11-Science in context.

3.2 Seleção dos textos a serem analisados

Os títulos dos artigos publicados nestes periódicos durante o período indicado, foram listados em um processador de palavra, a fim de facilitar a busca de informações por meio da ferramenta “procurar” e selecionados com o critério de “discutir explicitamente estudos sobre o uso da Matemática no Ensino e aprendizagem da Física”. Começamos selecionando aqueles artigos que no título manifestaram presença da relação entre Matemática e Ensino de Física,

ao sugerir estudos nesta temática. Para tanto, procuramos em tais títulos a presença de raízes de quaisquer uma das palavras que indicassem o uso da Matemática, como: mat, equa, resol, algorit, form, model, parâmetr, estrateg, simul, represent, com as respectivas raízes em Inglês, Espanhol e Francês. As palavras matemática, equação, resolução e algoritmo, são de uso típico na Matemática, mas como as raízes form, model, parâmetr, estrateg, simul, represent, não remetem diretamente à Matemática, portanto, foi necessário dentre os títulos obtidos, considerar, unicamente, aqueles que apresentaram alguma relação da Matemática com o Ensino da Física.

Obtivemos 207 títulos. Três exemplos dos títulos dos artigos selecionados foram: 1. “Aprendizaje activo de la cinemática lineal y su representación gráfica en la escuela secundaria” de **Guidugli et al. 2004**; 2. “Conflito entre escolas de pensamento da Matemática: exploração de potencialidades para a melhoria dos ensinamentos de Matemática e da Física: BLGB” de Bastos, J.B. e Bastos Filho. 2003; 3. “Los problemas resueltos en textos universitarios de física” de Concari, S.B. e Giorgi, S.M. 2000.

Em seguida, fizemos a leitura e análise do resumo e conclusões destes 207 artigos, a fim de ampliar o significado do título e determinar se, efetivamente, cumpriam com nosso critério de seleção, uma vez que todos os artigos de Ensino de Física apresentam algum uso da Matemática, mas nem todos discutem ou estudam este aspecto em si. Neste processo, selecionamos 102 artigos, pois foram eliminados aqueles, cujo resumo e conclusões não ofereceram discussões específicas sobre o uso da Matemática no Ensino da Física, como o caso do artigo número um (1) relacionado no parágrafo anterior, cujo resumo e conclusões deixam ver que o objeto de estudo é a efetividade de uma proposta para a aprendizagem ativa da cinemática, mas não discute as maneiras como usa a Matemática, portanto, não atende nosso critério em questão.

A seleção continuou ao fazer leitura dos textos completos destes 102 artigos, aplicando o critério de discutir, explicitamente, o uso da Matemática no Ensino e aprendizagem da Física com base na pesquisa empírica. Como resultado, selecionamos 37 artigos, sendo o título número dois (2), relacionado anteriormente, um exemplo de artigo desconsiderado, uma vez que trabalha o tema principalmente no nível de reflexão documentada, mas no corpo do texto não apresenta resultados baseados no trabalho empírico do Ensino da Física. Finalmente, um exemplo de artigo selecionado é o número (3) ao cumprir plenamente com o critério.

Nesse grupo de artigos foram encontrados dois casos especiais; no primeiro o mesmo autor tinha quatro títulos apresentando as mesmas ideias de base em relação a nosso tópico de

pesquisa, pelo qual foram desconsiderados três e, no segundo caso, o mesmo autor tinha dois artigos com as mesmas ideias de base em relação a nosso tópico de pesquisa, sendo desconsiderado um.

Assim, no final constituímos um grupo de 33 artigos cujos títulos e autores se apresentam no Quadro 3, e que constituíram os textos sobre os quais fizemos uma análise textual discursiva, segundo a perspectiva de Moraes (2003).

QUADRO 3. Lista de artigos selecionados com os respectivos: título, autores, periódico e ano de publicação.

	TÍTULO DO ARTIGO	AUTOR(ES)	Periódico	Ano
1	Los problemas resueltos en textos universitarios de física.	Concari, S.B.; Giorgi, S.M.	Enseñanza de las ciencias.	2000
2	Galileo's mathematical Language of Nature.	Forinash, K.; Rumsey, W; Lang, C.	Science & Education.	2000
3	Un problema planteado como actividad de investigación: estudio de las posibles trayectorias para el lanzamiento efectivo de un tiro libre de baloncesto.	Martínez, J.A.	Enseñanza de las ciencias.	2000
4	Exploring the development of conceptual understanding through structured problem-solving in Physics.	Gaigher, E.; Rogan, J.M.; Braun, M. W. H.	Enseñanza de las ciencias.	2000
5	A Comparison of programming languages and algebraic notation as expressive languages for Physics.	Sherin, B.	International Journal of Computers for Mathematical Learning.	2001
6	Una nueva propuesta didáctica para la enseñanza de la relatividad en el bachillerato.	Alemañ, R.A.; Pérez, J.F.	Enseñanza de las ciencias.	2001
7	La construcción de la representación en la resolución de un problema en Física.	Coleoni, E; Otero, J; Gangoso, Z; Hamity, V.	IENCI	2001
8	Disonancias pedagógicas en la resolución de problemas de física: una propuesta para su superación de raíz vygotskiana.	Neto, A.J.; Valente, M.O.	Enseñanza de las ciencias.	2001
9	Graphic representation of force in secondary education: analysis and alternative educational proposals.	Jiménez-Valladares, J.D.; Perales-Palacios, F.J.	Physics Education.	2001
10	La Diferencial no es un incremento infinitesimal. Evolución del concepto de diferencial y su clarificación en la enseñanza de la Física.	Martínez T. J; Lopez-Gay, R; Gras, A.	Enseñanza de las Ciencias.	2002
11	Construyendo significados en mecánica cuántica: fundamentación y resultados de una propuesta innovadora para su introducción en el nivel universitario.	Greca, I. M; Herscovitz, V.E.	Enseñanza de las ciencias.	2002
12	Problemas abertos e seus problemas no laboratório de Física: uma alternativa dialética que passa pelo discursivo multivocal e univocal.	Laburu, C.	IENCI	2003
13	Los conceptos en la resolución de problemas de física «bien estructurados»: aspectos identificativos y aspectos formales.	Carcavilla, A.; Escudero, T.	Enseñanza de las Ciencias.	2004

	TÍTULO DO ARTIGO	AUTOR(ES)	Periódico	Ano
14	Aprendizaje activo de la cinemática lineal y su representación gráfica en la secundaria.	Guidugli, S.; Fernández, C.; Benegas, J.	Enseñanza de las Ciencias.	2004
15	The pendulum as a vehicle for transitioning from classical to quantum physics: history, quantum concepts, and educational challenges.	Barnes, M. B.; Garner, J.; Reid, D.	Science & Education	2004
16	Dificuldades da generalização das estratégias de modelação em ciências: o caso da Física e da Química.	Greca, I.; Dos Santos, F.	IENCI	2005
17	Learning Introductory Quantum Physics: Sensorimotor experiences and mental models.	Ke, J. L.; Monk, M.; Duschl, R.	International Journal of Science Education.	2005
18	El análisis cualitativo en la resolución de problemas de física y su influencia en el aprendizaje significativo.	Lucero, I.; Concari, S; Pozzo, R.	IENCI	2006
19	Una propuesta sobre enseñanza de la relatividad en el bachillerato como motivación para el aprendizaje de la física.	Pérez, H; Solbes, J.	Enseñanza de las Ciencias.	2006
20	The particle/wave-in-a-box model in Dutch secondary schools.	Hoekzema, D. <i>et al.</i>	Physics Education.	2007
21	The role of models and analogies in the electromagnetic theory: a historical case study.	Silva, C.C.	Science & Education.	2007
22	An empirical-mathematical modelling approach to upper secondary physics.	Angell, C. <i>et al.</i>	Physics Education.	2008
23	Construindo a linguagem gráfica em uma aula experimental de física.	Belluco A.; Carvalho A. M.	Ciência & Educação.	2009
24	Física moderna e contemporânea na formação de licenciandos em Física: necessidades, conflitos e perspectivas.	Rezende, Jr, M.; De Souza Cruz, F.	Ciência & Educação.	2009
25	La resolución de problemas de energía en la formación inicial de maestros.	Aznar, M.M.; Nieto, M.P.	Enseñanza de las Ciencias.	2009
26	Wave modelling: a lesson illustrating the integration of mathematics, science and technology through multiple representations.	Bryan, J.A.; Fennell, B.D.	Physics Education.	2009
27	Investigación y desarrollo de propuestas didácticas para la enseñanza de la Física en la Escuela Secundaria: Nociones Cuánticas.	Otero, M.R.; Fanaro, M.A.; Arlego, M.	REIEC	2009
28	What part of the concept of acceleration is difficult to understand: the mathematics, or both?	Taşar, M.	ZDM	2010
29	La selección de diferentes tipos de problemas de Física como herramienta para orientar procesos cognitivos.	Truyol, M. E; Gangoso, Z.	IENCI	2010
30	Representing the electromagnetic field: how Maxwell's mathematics empowered Faraday's field theory.	Tweney, R.	Science & Education.	2010
31	Learning with multiple representations: an example of a revision lesson in mechanics.	Wong, D. <i>et al.</i>	Physics Education.	2011
32	Modelling mathematical reasoning in physics education.	Uhden, O. <i>et al.</i>	Science & Education.	2012
33	El conocimiento físico intuitivo, la resolución de problemas en Física y el lugar de las ecuaciones matemáticas.	Buteler, L.; Coleoni, E.	IENCI	2012

QUADRO 4. Quantidade de artigos selecionados por periódico.

	PERIODICO	Quantidade
1	Enseñanza de las Ciencias.	11
2	IENCI - Investigações em Ensino de Ciências	6
3	Science & Education.	5
4	Physics Education	5
5	Ciência & Educação	2
6	ZDM - The International Journal on Mathematics Education.	1
7	International Journal of Computers for Mathematical Learning, Now called: Technology, Knowledge and Learning.	1
8	International Journal of Science Education	1
9	REIEC- Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias.	1
	TOTAL	33

3.3. Processo de constituição das categorias

Como já foi dito, buscamos agrupar as propostas dos pesquisadores em ensino de Física em torno de aproximações e/ou diferenças em suas formas de entender:

- 1- Qual a relação entre Física e Matemática;
- 2- Qual o impacto deste entendimento no que se supõe que o aluno deve aprender e;
- 3- Qual o tipo de problemas sobre Física que o aluno deve resolver no aprendizado da Física.

Essa busca começou procurando as respostas para as três questões já apresentadas, e ofereceu-nos a possibilidade de agrupar as propostas encontradas em três categorias de matematização no Ensino de Física, cujas definições detalhadas, fomos elaborando e aperfeiçoando na medida em que íamos analisando os textos. Nomeamos tais categorias como:

Categoria 1. *Matematização a partir da modelagem matemática (ModelMat)*;

Categoria 2. *Matematização a partir de processos físico-matemáticos (ProcesFisMat)*;

Categoria 3. *Matematização como complemento do estudo fenomenológico (EstudFenom)*.

Por questão de praticidade ao referirmos a cada uma destas categorias ao longo deste trabalho, simplificamos seus nomes, respectivamente, como: Cat. 1. *ModelMat*; Cat.2. *ProcesFisMat*; Cat. 3. *EstudFenom*.

A fim de exemplificar as ideias expostas pelos autores, elaboramos três quadros contendo o referencial de cada artigo e trechos de expressões dos autores, com base nos quais

conseguimos categorizar as propostas de “Matematização no ensino de Física”. Estes três quadros correspondem, respectivamente, às três categorias já mencionadas e são apresentados nos Apêndices A (p.175), B (p.182) e C (p.189).

Ao analisar estes textos, encontramos que há pelo menos uma tendência comum em todas as propostas, no sentido de que, a partir de estudos sobre a relação entre Física e Matemática é possível melhorar a compreensão da Física que é ensinada, melhorando os métodos utilizados para seu ensino, porém diferenciam-se em suas concepções de base sobre o que implica aplicar determinados resultados de pesquisa no planejamento e desenvolvimento de processos em sala de aula. Na sequência, apresentamos o consolidado das características de cada uma das três categorias, tomando como base as principais ideias expressas nos artigos categorizados.

Gostaríamos de salientar que, embora consideramos que as três categorias propostas são excludentes, nem todos os textos categorizados apresentam características exclusivas de uma determinada categoria. Alguns deles apresentam aspectos em mais de uma categoria, mas para esta apresentação, optamos por contar com as principais tendências das propostas, a fim de relacioná-los somente numa das categorias.

3.3.1. Categoria 1. Matemática a partir da modelagem matemática (ModelMat)

Nesta categoria a Matemática é entendida como uma linguagem da Física, no sentido de oferecer um conjunto de ferramentas para o estudo dos fenômenos físicos, de tal modo que o domínio de tais ferramentas melhora as possibilidades de compreensão, ao permitir decidir quais são mais apropriadas em função da capacidade de representação de um determinado fato físico.

A modo de exemplo no que se refere a maneira de entender a relação entre Física e Matemática, selecionamos expressões como as seguintes:

“[...] uma representação matemática pode ser melhor do que outra, mesmo quando ambas concordem com a experiência e a observação; e que, dado que a matemática fornece novas ferramentas para a física, as melhores formas de representar matematicamente os fenômenos físicos podem mudar”¹⁶ (FORINASH; RUMSEY; LANG, 2000, p. 450)

¹⁶ Para todos os trechos dos artigos na língua estrangeira a tradução é feita livremente pelos autores, e são identificados com o símbolo (*).

“[...] Tenho me preocupado em caracterizar a natureza profunda da compreensão do mundo físico associado à programação-física e a álgebra-física” * (SHERIN, 2001, P. 56)

“ [...] a professora criou condições para que os alunos olhassem as diversas linguagens matemáticas das quais a Física se apropria, da mesma forma que fazem os físicos, ou seja, como se fosse uma “lente” para enxergar o fenômeno”. (BELLUCO E CARVALHO, 2009, P. 81)

Desses trabalhos, deduzimos que a Matemática é entendida como uma linguagem apropriada para descrever a Física e, portanto, não pode ser um obstáculo para o aprendizado da Física, muito pelo contrario, sua estrutura permite enxergar os fenômenos e compreender a relação entre as variáveis que os descrevem. Nos exemplos, se ressalta que a Matemática fornece ferramentas que permitem descrever ou “ver” os fenômenos físicos, o que implica na compreensão de tais ferramentas e suas possibilidades de aplicação, fato que pode ser trabalhado em sala de aula, por meio da linguagem de programação ou a comparação de diversas expressões matemáticas para representar um mesmo fenômeno.

As sugestões sobre o que os alunos devem aprender, que surgem como resultado de entender a relação entre Física e Matemática desta maneira, é que o aluno deve começar por compreender a lógica das representações matemáticas, para depois compreender a razão pela qual, usa-se um determinado tipo de representação matemática na descrição de um fenômeno físico. Assim, é preciso levar os alunos a estudar por exemplo, por que a representação algébrica oferece melhores formas de representação de um experimento do que a geométrica, tal como foi trabalhado por Forinash; Rumsey; Lang (2000). Ou levar os alunos “[...] a deduzir as principais características qualitativas dos diagramas de Minkowski [...], notando que a geometria que os governa é diferente da euclidiana habitual [...]”* (Aléman; Pérez 2001, p. 337)

Nesse mesmo sentido, Martinez, J. *et al.* (2002, p.281) trabalham a importância de compreender a forma como é utilizado o conceito de diferencial no Ensino da Física, o que implica “[...] conhecer a estratégia que utiliza o cálculo para resolver esse problema e compreender o sentido das várias etapas desenvolvidas [...] estar cientes da natureza hipotética, tentativa, em quase todas as situações Físicas [...] valorar, positivamente, o papel da diferencial no aprendizado da Física”*. No mesmo sentido, Sherin (2001) expressa que uma forma de melhorar a compreensão da linguagem da Matemática é introduzir os alunos no uso da programação, que possibilita a manipulação de equações, compreendendo as notações matemáticas e o papel que elas desempenham na descrição de sistemas físicos.

E portanto, os problemas que os alunos devem resolver são, principalmente, sobre a busca consciente do esquema mais apropriado para representar um fenômeno físico, o que implica orientar o aluno para aprofundar na análise da aplicação de tais esquemas na descrição de situações físicas na resolução de problemas organizados, a partir de tal descrição.

Nesse ponto, fala-se da necessidade dos alunos atribuírem sentido físico aos algoritmos utilizados, estudando os conceitos e as linguagens que permitem constituir cada conceito, exemplificado por Belluco e Carvalho (2009, p. 62) “Aprender ciência é se envolver na cultura científica, aprendendo parte de suas linguagens, métodos, processos e práticas, adquirindo novas visões de mundo e ampliando as antigas”. Da mesma forma, segundo Taşar (2010) e Forinash; Rumsey; Lang (2000), na resolução de problemas, é preciso ir além de memorizar suas soluções; é necessário fortalecer a compreensão do significado dos conceitos, onde a análise do esquema matemático aplicado facilita a formação de representações do que está acontecendo no sistema físico, ou seja, que para resolver um problema, o aluno precisa reconhecer as características do esquema matemático, mas também evidenciar a aplicabilidade de tal esquema no mundo físico.

Em conclusão, essa categoria se embasa na ideia de que a principal função da Matemática na Física é permitir a formulação das leis científicas por meio de conjuntos de representações que envolvam dentro de si, rigor e capacidade de descrição dos fenômenos. Portanto, o aluno deve ser preparado, no desenvolvimento de processos de modelagem, que significa usar as representações matemáticas tendo plena consciência das razões pelas quais as usa, compreendendo a essência dos modos de representação dos fenômenos físicos, quer dizer, entender a lógica que envolvem os esquemas matemáticos e a razão pela qual são apropriadas para representar tais fenômenos físicos.

Um exemplo de proposta de ensino de Física nesta perspectiva é a apresentada por Forinash, Rumsey, Lang (2000). Os autores afirmam que,

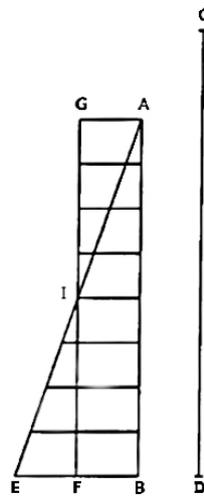
Se estivéssemos desenvolvendo a discussão iríamos pedir para os alunos resolver exercícios como o seguinte:

A construção de Galileu (representação geométrica na Figura 1), corresponde com a representação algébrica $s = \frac{1}{2}vt$, a qual é facilmente deduzível do caso geral representado algebricamente [...]: $s = V_{med}t$, onde s é a distância, t é o tempo, e V_{med} é a velocidade média que é igual a $\frac{v+v_0}{2}$ com v sendo a velocidade final e v_0 a velocidade inicial. Para provar isto, simplesmente definimos a velocidade inicial $v_0 = 0$. Pedimos ao estudante para representar o caso geral (incluindo os casos de velocidades iniciais negativas) utilizando métodos pre-algébricos de representação e de prova

como os utilizados por Galileu para representar o caso especial. (FORINASH, RUMSEY, LANG, 2000, p. 454)

Na figura 2, temos a construção de Galileu mencionada pelos autores como Figura 1. Nela, o segmento AB representa o tempo de uma queda livre de um corpo com velocidade inicial zero: o segmento EB representa a velocidade final de queda do corpo. Os diferentes pontos no segmento AB são os diferentes tempos durante a queda, e os segmentos que começam em tais pontos no segmento AB ate o segmento AE, são proporcionais à velocidade em cada tempo. Galileu prova que a distância percorrida num tempo com aceleração uniforme é igual à distância percorrida com uma velocidade constante e tal velocidade constante (GA) é a metade da velocidade máxima (EB) no caso acelerado, então $s = \frac{1}{2}vt$.

Figura 2. Representação utilizada por Galileu.



Fonte: Forinash, Rumsey, Lang 2000, p. 451.

Ao propor este exercício, os autores procuram que o aluno utilize diferentes tipos de representação do fenômeno da queda livre, onde, independentemente, do tipo de representação, as conclusões finais acerca do fenômeno são similares, e ao mesmo tempo, procuram incentivar no aluno uma análise da utilidade e alcances de cada tipo de representação, sem esquecer sua utilidade histórica, o que coloca a ênfase do ensino, na compreensão do porquê utilizar os esquemas e as representações matemáticas e qual é a essência e os limites de cada modo de representação dos fenômenos físicos.

3.1.2. Categoria 2. Matematização a partir de processos físico-matemáticos (ProcesFisMat)

A principal diferença entre a categoria *ModelMate* a *ProcesFisMat* é que na primeira a ênfase do ensino de Física gira em torno do conhecimento e compreensão dos modelos da

Matemática, enquanto nesta categoria, a ênfase do ensino é no uso de processos da Matemática, como orientadores da construção de conhecimento científico.

Isto é, na primeira, é condição necessária que o aluno seja formado inicial e/ou simultaneamente em determinados conhecimentos da Matemática e orientado para a compreensão dos esquemas, que descrevem apropriadamente o fenômeno, enquanto nesta categoria, espera-se que o aluno analise sistemas físicos e os represente, mas para chegar no nível de representação do fenômeno, o aluno deve ser orientado pelo professor por meio de atividades envolvendo um problema constituído em sala de aula, que induzam processos como: raciocínio hipotético-dedutivo, sistematização, análise, comunicação etc.

Com relação à concepção da relação entre Física e Matemática, encontramos nessa categoria que, mais do que usar modelos da matemática como ferramentas de representação das leis físicas, usam-se processos da Matemática para construir a linguagem da Física. Embora, a partir das duas opções, chega-se na formulação e uso de equações, os processos que sugerem para o ensino são diferentes.

Nesse caso, valoriza-se a formação do aluno, no raciocínio hipotético, como ponto de partida, no estudo de uma situação ou um sistema físico, para depois avançar em atividades de organização da informação, com as respectivas análises dessas organizações necessárias, até chegar na formulação de um problema, para, finalmente, propor e efetivar caminhos de solução de tal problema.

A construção de hipóteses é um aspecto ressaltado, por exemplo, por autores como Concari e Giorgi (2000), que consideram essa fase como uma oportunidade para propiciar análises significativas das situações físicas, aspecto que segundo elas, é característico do trabalho científico, uma vez que permite restringir problemas abertos e impor condições simplificadoras. Laburú (2003), também reflete sobre a necessidade de ensinar ao aluno a separar teoria de evidência; diferenciar problema de hipótese; construir argumentos relativos às formas de proceder na investigação; encontrar coerência entre as ideias teóricas e os dados buscando a generalização; entre outras opções.

Inferimos então, que o aluno deve aprender Física por meio da formação para construir modelos possíveis, mais do que para chegar à compreensão de modelos estabelecidos e assumidos como naturais e únicos. Tal processo de construção de modelos envolve a formulação do problema, que por sua vez, exige a construção de modelos conceituais, isto é, a elaboração de representações precisas, cada vez mais completas e consistentes com sua própria linguagem e suas formas de compreensão, mas também

consistentes com o conhecimento, cientificamente, compartilhado em sala de aula. Salientamos que concordamos com o significado de modelo como uma representação de uma idéia, objeto, evento, processo ou sistema, levando em consideração que este termo pode ter diferentes sentidos utilizados na literatura de ensino de ciências tal como mencionado por Krapas (KRAPAS *et all* 1997).

Assim, de acordo com Concari e Giorgi (2000), a solução de problemas por parte do aluno deve ser uma atividade de construção e transferência de conhecimento, mais do que uma mera aplicação de algoritmos e equações. No mesmo sentido, Truyol; Gangoso (2010, p. 466) expressam que “a compreensão e modelado de um problema instrucional de Física implica a construção integrada e consistente das representações. Este processo precisa colocar em jogo de habilidades específicas, que podem e devem ser favorecidas na instrução”*.

Nessa perspectiva a formulação e resolução de problemas são processos que envolvem diversos conhecimentos do aluno. De acordo com Coleoni *et al.* (2001) a resolução de um problema é,

[...] um processo que começa com a leitura do enunciado de um problema, no qual gera-se uma representação que guia a resolução do mesmo. Construções com base no texto e modelo de problema referem-se a representações dinâmicas, que são continuamente modificadas durante este processo. (COLEONI *et al.* 2001, p. 295) *

Por sua vez, Truyol; Gangoso (2010, p. 466) falam em três níveis de representação interdependentes, no processo de resolução de problemas, ainda que todos com diferente natureza ontológica e nível de abstração “Um nível constituído pelos objetos e fatos do mundo (categorias concretas), outro pelos conceitos, grandezas, princípios e leis Físicas e, outro pelas entidades matemáticas, sendo estes dois últimos, os níveis de categorias abstratas”*.

Em Lucero; Concari e Pozzo (2006, p.89), encontramos também alusão ao processo começando pela leitura compreensiva do enunciado, a fim de identificar o problema real e o conjunto de conhecimentos pertinentes, o que precisa de uma análise conceitual da situação tanto do ponto de vista das expressões conceituais, quanto das expressões matemáticas que o sustentam. Eles dizem que “a solução completa envolveria processos de identificação, classificação, discriminação, relação, análise e, em alguns casos, o calculo”*. Segundo os autores,

A solução de um problema não se restringe a uma simples aplicação de equações, mas é caracterizada por uma estreita interação entre as hipóteses,

os sistema de conceitos que se possui e as equações que estão disponíveis; nesta interação, as hipóteses têm um papel orientador decisivo.* (CONCARI e GIORGI, 2000, p. 383)

Significa que, os problemas a resolver por parte dos alunos, são principalmente, análise de situações, a fim de serem esquematizadas por meio de processos, que vão do simples ao complexo e que implicam a formação do aluno para propor hipóteses, estabelecer condições nos sistemas a ser analisados, deduzir informações, interagir com seus colegas e com o professor e encontrar soluções coerentes com os modelos explicativos construídos na literatura científica, mas principalmente coerentes com suas próprias formas de explicar o fenômeno.

Nesta perspectiva, um exemplo de proposta de ensino de Física, é o desenvolvida por Laburu (2003) que propõe o ensino da lei de Boyle-Mariotte, para o qual assume, como consideração inicial que a ação didática experimental deve estar orientada por seis momentos não, necessariamente, rígidos nem estritamente sequenciais, sendo eles: (1) Fenômeno, (2) Problema, (3) Hipóteses, (4) Plano de Trabalho, (5) Análise, (6) Conclusão. Tais etapas devem ser entendidas como plano de aula ou guia para o professor ir resolvendo as diversas situações com os alunos, em termos de explicações, formação de destrezas e relação com aspectos cognitivos ou metacognitivos, e portanto, não devem ser entendidas como uma fórmula a ser ensinada para o aluno ou uma maneira de lhe exigir um trabalho, numa sequência determinada de passos.

Nesse caso, o fenômeno é apresentado pelo professor expondo os detalhes com auxílio de esquemas e questões sobre o gás e as variáveis de volume e pressão que permitem descrever suas características. Posteriormente, coloca-se o problema: qual a relação entre a pressão total (P) sobre o gás e o ar e o volume total (V) correspondente dentro da seringa?. Isso implica em explicações sobre o significado de cada um dos termos colocados no problema. Em seguida pede-se para os alunos formularem hipóteses, etapa que precisa de vários esclarecimentos e diálogos com os alunos, uma vez que para eles não é possível formular hipóteses, sem ter compreendido a essência do fenômeno físico a ser estudado e o problema colocado, o que faz com que as hipóteses propostas pelos alunos tenham caráter provisório, pois eles devem ir ganhando em esclarecimentos sobre a relação entre o real e o ideal, o possível e o necessário e a matemática e a lei.

A quarta fase é a organização do plano de trabalho que visa voltar a atenção dos alunos no procedimento para resolver o problema com base na prática, a qual fornecerá dados

que deverão ser analisados para obter conclusões. Nestas três últimas etapas, é definitiva a mediação permanente do professor para orientar aspectos como: tipos e quantidades de medições, dúvidas ou diferenças de opinião entre os alunos, condições de contorno, organização e interpretação de dados, entre outras. Este processo é resumido pelo autor da seguinte forma;

A situação pedagógica sempre começa com um debate coletivo entre professor e alunos em que se procura manter um discurso reflexivo, varrendo, passo a passo, todas as etapas de 1 a 5, (...). Passada essa fase de maior duração, os alunos reunidos em grupo realizam o experimento propriamente dito, ou seja, trabalham nas etapas 4 e 5. Durante esse momento, há supervisão do professor sobre os grupos e intervenção direta dele sobre cada aluno. Nessa situação, se surgirem perguntas individuais de caráter geral, que subsidiem a realização do experimento, e que não foram levantadas na primeira fase, elas são colocadas para a classe, já que, frequentemente, são problemáticas para todos. A ideia principal dessa fase é o professor manter um permanente monitoramento dos grupos, a fim de que consigam vencer os problemas experimentais, realizem o experimento e obtenham os dados experimentais. Feito isso, os grupos colocam na lousa os seus dados tabelados para uma segunda discussão coletiva, em que está envolvida a etapa 5, que tem por objetivo chegar à resposta do Problema (etapa 2). Após esta fase, os alunos terminam a última etapa (Conclusão), fechando-a com um relatório do que foi realizado e discutido. (LABURU, 2003, p.244)

Assim, se pode dizer que esta categoria é baseada na ideia de que a principal função da Matemática no ensino de Física é orientar processos de análise no estudo de um fenômeno por meio de procedimentos matemáticos que lhes permitam chegar na construção de modelos explicativos. Portanto, o aluno deve ser formado em seus modos de raciocinar para a construção do conhecimento físico, o qual exige que os problemas a resolver estejam associados ao processo, por meio do qual se chega na explicação do comportamento da situação física que está sendo estudada.

3.1.3. Categoria 3. Matematização como complemento do estudo fenomenológico (EstudFenom)

Nesta categoria estuda-se a Física a partir da descrição fenomenológica, relacionando o cotidiano e a experiência sensorial com os conceitos físicos. Diferente da primeira categoria, não se trabalha na compreensão dos modelos da Matemática, uma vez que o objetivo é chegar ao uso de representações próximas a tais modelos, os quais são formalizados posteriormente. Também, difere da segunda categoria, em que os critérios de orientação das formas de raciocinar dos alunos não se embasam nos processos utilizados na Matemática, mas tem ênfase na reflexão sobre as próprias formas de proceder do aluno e suas

possibilidades de pensamento, onde a experiência sensório-motora está no coração da forma como são pensados os fenômenos físicos e a Matematização é uma etapa final do processo de ensino que faz parte da formalização dos resultados encontrados.

A relação entre Física e Matemática nesta categoria, é entendida como a complementariedade de dois campos. Isto é, que de um lado se têm os fenômenos físicos nos quais está envolvido o sujeito e de outro lado se tem a linguagem da Matemática que permite a formalização das explicações construídas pelo sujeito. Assim, a descrição e explicação do comportamento do sistema físico dá-se principalmente, com base nas possibilidades de pensamento e de linguagem que tem o sujeito, para o qual deve definir conceitos e estabelecer relações entre as grandezas envolvidas, para o qual, a Matemática auxilia na formalização de tais explicações construídas.

Autores como Greca e Herscovitz (2002, p. 331) propõem que para tratar conteúdos científicos em sala de aula é preciso desdobrá-los em núcleos temáticos, a fim de planejar a experiência sensorial necessária que permita ao aluno visualizar o fenômeno e incorporar, significativamente, os conceitos e as ideias que estão nos núcleos. Elas chamam esta proposta como fenomenológica-conceitual, “fenomenológica para favorecer a criação de uma nova percepção e conceitual porque os fenômenos selecionados para o curso devem ser suficientemente simples (elementares) e orientados de forma que a essência dos conceitos fundamentais seja evidente”*.

No processo de construção do modelo físico, segundo Greca; Dos Santos (2005, p. 36) “se parte de um problema ou fenômeno real, para o qual se busca uma solução matemática ou conceitual, sendo, a seguir, identificados os elementos (objetos, variáveis de interação, etc.) que servirão para descrevê-lo, escolha esta condicionada pela teoria Física a partir da qual a situação será descrita. Neste processo, a formalização das propriedades é uma etapa final que se dá, mediante a determinação das equações que entrelaçam tais propriedades.

O impacto desse entendimento na decisão sobre o que os alunos devem aprender, pode-se resumir na alusão à formação do aluno para construir modelos mentais, que se aproximem aos modelos conceituais da Física. De acordo com Greca; Dos Santos (2005, p. 44), a construção dos modelos mentais por parte dos alunos, envolve que eles consigam perceber os fenômenos físicos, a partir da compreensão dos enunciados que conformam a estrutura semântica da teoria e, também que consigam refinar a forma como percebem os fenômenos. “Depois deste processo “semântico”, é necessária a utilização do modelo matemático para fazer a tradução dos fenômenos à linguagem matemática, etapa fundamental

para a completa descrição dos sistemas (ou fenômenos) segundo os cânones aceitos na Física”.

Nessa perspectiva, coincidem autores como Ke; Monk; Duschl (2005, p. 1591) ao proporem a formação do aluno orientada pela construção de modelos mentais, a partir das experiências sensório-motoras. Eles dizem que “o ensino deve se focar em oportunizar experiências sensório-motoras para propiciar que os alunos construam seus esquemas com uma gama de modelos mentais”*.

Por exemplo, no trabalho de Greca e Herscovitz (2002) fala-se que a interação e o dialogo entre alunos e professores é uma das formas de trabalho que oportunizam ao aluno a modificação de seus modelos mentais por meio da aquisição de novos significados. As autoras encontraram que em sua pesquisa,

[...] esta interação entre os alunos e entre eles com o professor foi muito importante no projeto: para poder compreender o texto e responder às perguntas do mesmo, os alunos deviam expressar suas formas pessoais de perceber os fenômenos, expressando contradições e dificuldades. (GRECA; HERSCOVITZ, 2002, p. 332)

Por sua vez, para Carcavilla e Escudero (2004), as relações entre conceitos têm componentes tanto de conhecimento como de compreensão. Segundo eles, os

[...] problemas de significação, tais como os relacionados com a identificação de conceitos e relações entre conceitos, acreditamos que são dos mais importantes e devem ser tratados com o máximo interesse pela didática afim de proporcionar instrumentos cognitivos e metodológicos que permitam aos alunos encontrar um conforto intelectual e se desenvolver melhor do que antes, tanto ao estudar como ao resolver problemas.* (CARCAVILLA e ESCUDERO, 2004, p. 220)

Portanto, os problemas que os alunos devem resolver para aprender Física são principalmente de reflexão sobre suas próprias formas de perceber os fenômenos e de comparação com o expressado por seus colegas, seus professores, e os cientistas, visando construir modelos mentais que lhes permitam transitar até os modelos conceituais da ciência.

Um exemplo de proposta de ensino de Física é o desenvolvido por Ke, Monk, Duschl (2005). Segundo os autores, a experiência sensorial está no centro da maneira como os alunos entendem o fenômeno físico e em geral no centro do pensamento das pessoas, portanto uma implicação direta para o ensino é a necessidade de oportunizar experiências sensório-motoras

que envolvam os conceitos a ser estudados. No ensino da Mecânica quântica, os autores propõem

Incluir experiências sensório-motoras de ondas estacionárias em várias configurações –em uma corda, em um circuito fechado, na superfície de uma folha - e padrões de difração - da luz e de elétrons. Pois sem estas experiências sensório motoras, os alunos não terão um espectro adequado de p-prims para usá-los e incorporá-los em seus modelos mentais e esquemas. [...] Enquanto, pode ser suficiente com demonstrações no caso de difração de elétrons, para o caso de difração de luz e de ondas estacionárias é possível desenvolver experiências práticas em diversas configurações. (KE, MONK, DUSCHL, 2005, p.1590)

Entendendo que tais atividades práticas oferecem ao aluno a oportunidade de construir para si mesmos alguma experiência com relação ao fenômeno e, a partir de tal experiência é possível orientar o aluno a re-visitar o fenômeno e ir acompanhando-o num aprofundamento gradativo de sua compreensão: primeiro com discussões sobre a essência do fenômeno e depois na formalização de suas próprias organizações, aplicando testes durante todo o processo, que lhes permitam questionar suas próprias ideias e elaborar seus próprios esquemas.

Em conclusão, esta categoria é baseada na ideia de que a partir da descrição fenomenológica relacionam-se os conceitos físicos com o cotidiano ou com a experiência sensorial, a fim de que o aluno possa desenvolver organizações que lhe permitam conformar um modelo mental. A função dos modelos matemáticos, nesta perspectiva, é como fonte de interação entre os modelos mentais e os modelos conceituais da ciência para conseguir a formalização dos resultados. Portanto, o aluno deve ser preparado para a compreensão do fenômeno, numa primeira etapa e, posteriormente, a compreensão e utilização da formalização matemática, trabalhando os problemas a serem resolvidos pelos alunos com uma abordagem principalmente qualitativa.

3.4 Síntese das principais características das três categorias de “Matematização” no Ensino da Física

Nos artigos analisados, observamos que, em geral, existe uma preocupação de ir além do uso irreflexivo dos algoritmos e de assumir a Matemática como uma simples ferramenta de cálculos no ensino da Física. Embora encontramos a presença do termo “Matematização” somente em um dos 33 artigos, podemos dizer que na maioria deles há expressões sobre processos de explicação em sala de aula, indo de níveis de menor a maior compreensão dos conceitos da Física, e, que tais processos estão guiados por ideias de base sobre a relação

entre Física e Matemática, com diferentes interpretações. No Quadro 5, apresentamos as principais diferenças encontradas nas três categorias, a partir das três questões que orientaram esta análise.

QUADRO 5-Categorias de Matematização no Ensino de Física a partir das três questões propostas.

		QUESTÕES		
		Como os pesquisadores entendem a relação entre Matemática e Física?	Quais as recomendações sobre o que os alunos devem aprender?	Qual é o tipo de problemas que os alunos devem resolver?
CATEGORIAS	Cat.1. ModelMat	A estrutura da Matemática como fundamento na modelagem matemática das leis da Física.	Formação do aluno para o uso consciente de representações matemáticas, e compreensão da lógica implícita nos esquemas matemáticos.	Busca e compreensão de esquemas matemáticos apropriados na resolução do problema. Privilegiando o ponto de partida em exercícios de raciocínio.
	Cat.2. ProcesFisMat.	Organização dos sistemas físicos por meio da lógica de processos matemáticos.	Formação do aluno em seus modos de raciocinar para a construção do conhecimento físico, com base em processos físico-matemáticos.	Esquematização de situações físicas por meio de processos orientados pelo raciocínio matemático. Privilegiando o ponto de partida em formulação de hipóteses.
	Cat.3. EstudFenom.	Relação entre esquemas conceituais da física, experiência sensorial e modelos matemáticos.	Formação do aluno para a compreensão de suas próprias formas de entender o fenômeno, e posteriormente a compreensão da formalização matemática.	A reflexão e o debate no centro da resolução de problemas. Privilegiando o ponto de partida em experiências sensorio-motoras e sua descrição.

QUADRO 6-Síntese das categorias de Matematização a partir do quadro anterior.

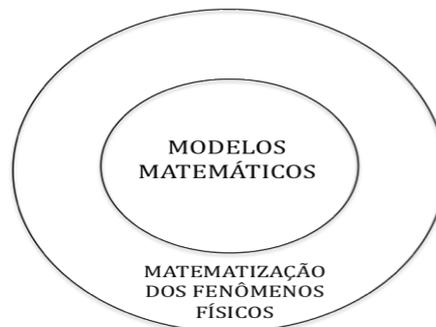
ModelMat: A estrutura da Matemática é o fundamento na modelagem das leis da Física. O aluno deve usar de forma consciente tais representações matemáticas, e compreender a lógica implícita nos esquemas matemáticos, assim, procura e compreende os esquemas matemáticos apropriados na resolução de problemas.
Cat.2. ProcesFisMat: Organiza os sistemas físicos por meio da lógica de processos matemáticos, trabalhando sobre modos de raciocinar do aluno para a construção do conhecimento físico, esquematizando situações físicas por meio de processos orientados pelo raciocínio matemático e assim privilegiando a formulação de hipóteses no ponto de partida.
Cat.3. EstudFenom. São privilegiadas as experiências sensorio-motoras e sua descrição na formação do aluno para a compreensão de suas próprias formas de entender o fenômeno, e posteriormente a compreensão da formalização matemática. A reflexão e o debate ficam no centro da resolução de problemas.

Observa-se que as perspectivas das três categorias têm impactos diferenciados na decisão sobre o tipo de atividades a serem desenvolvidas em sala de aula, nos processos de ensino desenvolvidos e nos resultados que se esperam dos alunos, assim como sobre o tipo de problemas que o aluno deve resolver no processo. Uma vez que, na primeira perspectiva, as atividades podem estar focadas no uso abstrato dos símbolos matemáticos, com base nos axiomas algébricos ou geométricos e a relação com as condições físicas envolvidas. Na segunda, o foco pode estar no processo por meio do qual se chega numa abstração, processo

sempre embasado no mundo real e orientado por métodos de trabalho da Matemática. E, na terceira o foco é sobre as formas de "trabalhar" do pensamento dos sujeitos envolvidos ao descrever fenômenos físicos, para o qual é preciso comparar modelos conceituais estabelecidos pela ciência com modelos mentais desenvolvidos pelos alunos.

Na sequência, apresentamos três figuras com as quais buscamos representar a essência de cada uma das três categorias e assim ampliar a compreensão do exposto até agora. Na Figura 3, apresentamos o que consideramos poderia ser um esquema da categoria *ModelMat*, ressaltando que os modelos matemáticos estão no centro da matematização dos fenômenos físicos, ou seja, que é a partir da modelagem matemática que é possível chegar na compreensão do mundo físico.

Figura 3. Esquema geral da categoria “Matematização a partir da modelagem matemática”

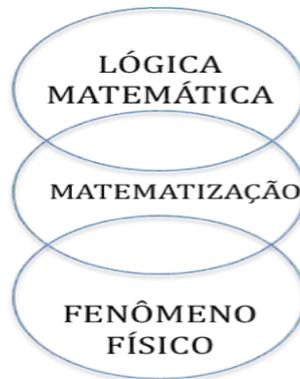


Deduzimos que, se entendemos a Matematização a partir da modelagem matemática podemos dizer que, uma das principais consequências em Ensino de Física é, sobre o tratamento "consciente" dos esquemas Matemáticos no sentido de entender a lógica que envolve cada um. Nesta perspectiva, o principal condicionante para ensinar a Física, radica no domínio da Matemática, sem querer dizer, que o domínio da Matemática deva-se reduzir ao domínio de uso de algoritmos, mas a compreensão de sua lógica e dos resultados que pode oferecer por meio de processos dedutivos. Espera-se que ao entender tal lógica fique mais fácil decidir o que é apropriado para representar o comportamento de um determinado fenômeno físico.

Enquanto isso, com a Figura 4, representamos a categoria *ProcesFisMat*, segundo a qual a Matematização não depende somente da lógica matemática expressa em seus modelos, mas inclui habilidades de interpretação do fenômeno físico. Ali, a Matematização é entendida

a partir de processos físico-matemáticos, cujo principal condicionante para chegar a um determinado nível de "consciência" sobre a capacidade de organização dos sistemas físicos é a lógica de processos matemáticos: formulação de hipóteses, dedução, abstração e interpretação.

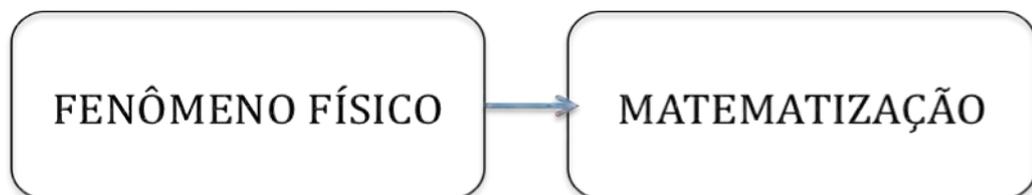
Figura 4. Esquema geral da categoria “Matematização a partir de processos físico-matemáticos”



Nessa visão a importância não é dada, exclusivamente, ao domínio dos esquemas matemáticos, mas nos critérios por meio dos quais se opta por selecionar algum esquema matemático, visando descrever o fenômeno físico, de forma que resulte coerente para o aluno.

Finalmente, por meio da Figura 5, representamos a categoria *EstudFenom*, na qual a Matemática é entendida como a formalização dos resultados de análises fenomenológicas, o que exige pensar nas formas em que os sujeitos organizam a informação que vem da experiência sensorial e as deduções que se podem extrair dali, especialmente para os casos em que não se opera a experiência sensorial. Nesta perspectiva, o principal condicionante radica na compreensão das próprias maneiras de construir conhecimento por parte dos sujeitos.

Figura 5. Esquema geral da categoria “Matematização como complemento do estudo fenomenológico”



Esta figura expressa o sentido em que se avança no caminho que começa com o estudo do fenômeno físico em si, entendendo que para tal estudo podem ser utilizadas diversas estratégias e culmina com a busca da relação entre tais estudos e a formalização dos resultados por meio de expressões matemáticas.

Ao comparar as propostas de ensino com base nas três categorias, podemos dizer que os problemas a serem resolvidos em sala de aula são de diversas naturezas. Na primeira, *ModelMat*, os alunos devem aprender a aplicar esquemas matemáticos para a melhor

descrição de determinados resultados experimentais, isto quer dizer que o professor deve ir além de ensinar uma série de etapas para a solução de problemas tipo: ensinando a compreender o porquê de cada etapa, por exemplo, por meio de softwares que os obriguem a organizar tais etapas ou por meio da problematização do uso de determinados esquemas matemáticos na descrição de um fenômeno, o qual levaria o aluno a desenvolver representações abstratas e explicar o significado físico dos cálculos matemáticos.

Na segunda, *ProcesFisMat*, são problemas nos quais os alunos partem da proposição de hipóteses, para depois organizar e sistematizar estratégias de estudo do fenômeno, visando fazer análises, organizar conclusões e comunicar resultados. Neste processo, o aluno deve discutir seus argumentos e fazer previsões de tipo qualitativo e quantitativo, o que lhe permite ir formalizando gradativamente a representação formal de seus resultados.

Na terceira, *EstudFenom*, o aluno elabora uma explicação do fenômeno, partindo da expressão de seus raciocínios com base em suas intuições físicas, para continuar com as análises qualitativas das grandezas físicas, envolvidas no fenômeno e, posteriormente, avançando em análises quantitativas, que lhe permitirá organizar uma descrição formal do sistema.

Esse resultado, além de nos evidenciar três formas de entender as tendências de melhora nos processos de ensino e aprendizagem da Física, fez com que surgissem diversas interrogações. Uma vez que não é fácil e, talvez, nem pertinente decidir qual destas perspectivas é melhor, sabendo que são resultados de pesquisas recentes e reconhecidas, além de conter ideias de fundo que precisam ser analisadas com mais detalhe, em aspectos como: Qual é a realidade do professor em relação à realidade do aluno que se está formando como cidadão, como cientista ou como professor? Qual a função da Matemática que o aluno aprende prévia e simultaneamente às disciplinas de Física, nos cursos de formação inicial? O que é que pode ser entendido como a solução de um problema ou a construção de um conhecimento? Qual o uso que o aluno pode fazer de seu aprendizado da Física a curto, meio e longo prazo?

Entendemos que, em geral, os resultados das pesquisas analisadas, objetivam, principalmente, se distanciar do chamado ensino tradicional (caracterizado pela transmissão de informação ou o ensino de exercícios modelo a serem resolvidos de forma inconsciente pelos alunos) apresentando três tendências. Consideramos ainda que é possível criar um diálogo entre estas três tendências, analisando suas fortalezas e também suas fraquezas, a fim de constituir discursos que possam ser apresentados a licenciandos e professores em exercício, como fundamento teórico para orientar transformações dos processos em sala de

aula. Acreditamos que a identificação dos professores com alguma destas perspectivas, ou com alguma integração possível entre elas, possa enriquecer os critérios com base nos quais planeja e desenvolve suas estratégias de ensino e, é claro, com as adequações necessárias em função dos contextos, objetivos educacionais, conhecimentos e atitudes do professor. Porém, entendemos que esse é um grande desafio.

Consideramos, também, que o primeiro passo para analisar práticas de ensino de Física, cujo objetivo seja projetar melhoras, pode ser, o reconhecimento da existência destas três categorias, uma vez que permitem a identificação com alguma delas ou com alguma combinação delas, ou a ausência delas, que implicaria na reflexão sobre o porquê e para quê o professor desenvolve determinadas atividades de ensino, da mesma forma que se compara o que o professor faz com o que os pesquisadores propõem.

Finalmente, gostaríamos de salientar que é com base nas três categorias apresentadas e nas respectivas reflexões que se desprenderam daí, que iremos analisar os dados constituídos nesta pesquisa. Lembrando que os dados foram organizados em três campos de ação, visando estudar a presença de processos de Matematização nas explicações oferecidas por alunos e professores, no contexto de formação inicial de professores, tais campos foram: 1- Análise textual de partes de livros de texto de Física universitária; 2. Observação e aplicação de questionário a professores de Física e; 3- Observação e questionamento a estudantes de disciplinas de Física num curso de Licenciatura.

4. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, apresentamos os procedimentos metodológicos que guiaram o desenvolvimento da pesquisa. Para isso, apresentamos, inicialmente, o problema de pesquisa e as questões que orientaram a constituição de dados e, em seguida, descrevemos os tipos de dados de acordo com o plano de resolução das questões de pesquisa. Estes recursos oferecem a descrição da natureza desta pesquisa e os tipos de análise das informações na construção das evidências e dos resultados.

4.1 Problema e questões de pesquisa.

O principal objetivo desta pesquisa é estabelecer parâmetros para a utilização da “Matematização da Física” como componente efetiva na construção de explicações, de modo a contribuir para a melhoria dos processos de ensino e de aprendizagem da Física. Desta forma, foi formulado o seguinte problema de pesquisa:

“Que possíveis relações operam na utilização da Matemática da Física na construção de explicações, em atividades didáticas para o Ensino de Física, realizados em um curso de Licenciatura em Física?”

De modo a operacionalizar as ações de pesquisa, o problema central foi desdobrado em questões investigativas mais específicas, a saber:

- 1. Que significados atribuídos à “Matematização da Física” costumam estar presentes em livros didáticos, utilizados em disciplinas de um curso de Licenciatura em Física?**
- 2. Como a “Matematização da Física” costuma estar presente na organização das atividades didáticas e discursos de professores de Física, de um curso de Licenciatura em Física?**
- 3. Que significados de “Matematização da Física” costumam estar presentes em discursos e explicações de alunos de um curso de Licenciatura em Física?**

4.2. Constituição de Dados

Levadas em consideração as questões de pesquisa, optamos por fazer a coleta de dados de forma a responder tais questões, utilizando fontes de informação relacionadas com esta problemática.

4.2.1 Fontes de informação

Ao considerar o foco e objetivos desta pesquisa, podemos dizer que se enquadra no âmbito educacional e, portanto, nossas principais fontes de informação são: os sujeitos, os espaços e os documentos, relacionados a seguir:

Sujeitos:(1) professores de Física de uma universidade pública do interior do estado de São Paulo, Brasil, no contexto da Licenciatura em Física; (2) alunos de Licenciatura em Física, da mesma universidade, no contexto das disciplinas: Física I, II e III, Física Moderna, Física-Matemática, Laboratório de Física I, Laboratório de Física Moderna.

Espaços:(1) disciplinas do curso de Licenciatura em Física, na mesma universidade.

Documentos:(1) textos didáticos utilizados em disciplinas de Física do mesmo curso de Licenciatura em Física, especificamente os utilizados como texto guia nas disciplinas de Física I, Física III e Física Moderna.

4.2.2 Instrumentos de pesquisa

A estrutura de cada um dos instrumentos para coleta de informação responde aos três tipos de fontes de informação relacionados anteriormente: sujeitos, espaços e documentos. Assim, para coleta de informações nos espaços utilizamos as observações (ver a ficha diária de observação preliminar no Apêndice E (p.193) e o roteiro de observação de aula no Apêndice F (p.194). Para coleta de informações com os sujeitos desta pesquisa, utilizamos os questionários (ver o questionário para professores no Apêndice G (P. 195) e o questionário para licenciandos no Apêndice H (P. 196)) E, por fim, para a coleta de informações a partir dos documentos foi realizada uma análise textual, a fim de responder às questões de pesquisa, como se relaciona no Quadro 7.

QUADRO 7-Fontes e instrumentos para coleta de informação da pesquisa.

QUESTÕES DE PESQUISA	FONTES/ INSTRUMENTOS			
	SUJEITOS		ESPAÇOS	DOCUMENTOS
	Professores	Alunos	Disciplinas	Livro didático
	Questio- nário 1	Questio- nário 2	Roteiro de Observação.	Roteiro de Análise Textual
1- Que significados atribuídos à “Matematização da Física” costumam estar presentes em textos didáticos utilizados em disciplinas de um curso de Licenciatura em Física?				X
2- Como a “Matematização da Física” costuma estar presente na organização de atividades didáticas e discursos de professores de Física de um curso de Licenciatura em Física?	X		X	
3- Que significados de “Matematização da Física” costumam estar presentes em discursos e explicações de alunos de um curso de Licenciatura em Física?		X	X	

• *Roteiros de Observação:* realizamos uma observação não participante de aulas em diferentes disciplinas de um curso de Licenciatura de Física, durante um ano. Para o registro da observação, preenchemos um diário de campo, com aspectos como: dados básicos da disciplina, conteúdos trabalhados, desenvolvimento da aula e observações gerais. Embasamos na proposta de Estrela (2006) acerca dos aspectos a serem observados em sala de aula, de forma direta e distanciada, considerando todos os elementos constitutivos da aula (professor, alunos, materiais), com o único fim de determinar os “observáveis” a sistematizar na relação entre Matemática de Física e Ensino de Física.

Como resultado da análise do diário de campo que foi preenchido durante um ano, elaboramos um roteiro de observação que abrangesse as características dos processos de Matemática. O roteiro foi constituído com indicadores de existência, uma coluna para marcar com “x” a presença dele e outra coluna, na qual foi registrada a descrição do modo como foi evidenciada a presença do indicador.

Assim, propomos 16 indicadores para observar os alunos e 22 indicadores para observar os professores, buscando responder as questões sobre os significados de “Matematização da Física”, que costumam estar presentes em discursos e explicações de alunos e professores de um Curso de Licenciatura em Física, da mesma forma que foi indagado pelos livros didáticos utilizados nas aulas.

De posse dos roteiros que foram constituídos com base na observação realizada durante um ano, observamos durante mais um semestre, as disciplinas: Física I (45 alunos), Física III (28 alunos) e Laboratório de Física Moderna (Grupo 1, 12 alunos), disciplinas do primeiro, terceiro e sétimo semestre, respectivamente. Acrescentamos que não foi possível fazer a observação nas mesmas disciplinas do ano anterior, devido ao rodízio de disciplinas que se dá a cada ano, neste curso de Licenciatura em Física, mas, em geral, foram observados os mesmos alunos.

Consideramos importante salientar também que esta pesquisa não objetiva julgar se os professores e alunos observados atuaram do jeito “certo” ou não, mas analisar a forma como aparecem os indicadores que caracterizam a presença de processos de Matematização da Física.

- *Questionários:* Para a elaboração do questionário a ser aplicado aos licenciandos, foi preciso validá-lo com um questionário piloto que nos indicasse possíveis erros em sua elaboração. As perguntas elaboradas visavam encontrar dados que permitissem comparar e/ou complementar as respostas para as questões de pesquisa relacionadas anteriormente. O questionário piloto (Apêndice I p.197), foi aplicado com alunos da disciplina Física III, correspondente ao terceiro semestre. A aplicação do questionário piloto permitiu-nos planejar quatro questões que, assim como no item anterior, foram inspiradas e organizadas, como resultado da observação não participante, realizada durante um ano. Além disso, foram orientadas pelas categorias de análise criadas, a partir do estudo da literatura em pesquisa sobre a relação entre Matemática e Ensino de Física. Sendo assim, o questionário para os alunos conteve as seguintes perguntas:

- 1) Descreva o processo que você costuma utilizar para resolver um problema da Física.
- 2) Escolha um fenômeno ondulatório, nomeie-o e represente-o.
- 3) Uma forma de expressar o princípio de Arquimedes é: “um corpo ao ser imerso, total ou parcialmente em um fluido, sofre um empuxo igual ao peso do volume do fluido deslocado”. Como você explicaria este princípio para outra pessoa?
- 4) Para você, qual o significado da expressão matemática: $\vec{F} = M\vec{a}$

Este questionário foi aplicado no final do terceiro semestre observado, para os alunos da disciplina de “Física I”, a qual é oferecida no primeiro semestre do curso de Licenciatura

em Física, da mesma universidade anteriormente mencionada e também para alunos da disciplina de “Laboratório de Física Moderna”, oferecida no sexto semestre.

As respostas dos alunos foram transcritas, a fim de constituir o corpus a ser analisado por meio da metodologia de Análise textual discursiva, na perspectiva de Moraes e Galiazzi (2007).

O questionário aplicado aos professores teve as seguintes questões:

- 1) Descreva o processo que você costuma utilizar para EXPLICAR um fenômeno da Física. Nesta descrição procure detalhar as etapas e os recursos que você utiliza para explicar.
- 2) No planejamento da aula, o que você prioriza?

Este questionário foi aplicado no final do semestre aos professores envolvidos nas disciplinas: Física I, Física III, Física Moderna I, Laboratório de Física Moderna, procurando que coincidiram com as disciplinas observadas.

- *Roteiro de Análise Textual de livros didáticos:* o roteiro contém seis questões que visaram obter informações sobre o conteúdo apresentado em um capítulo de cada livro analisado e a maneira como é apresentado tal conteúdo. Para tanto, procuramos descrever os seguintes aspectos:

- 1) Estrutura geral do capítulo;
- 2) Ideias fundamentais apresentadas em cada parte do capítulo;
- 3) Ideias explícitas sobre a relação da Física com o cotidiano;
- 4) Uso de fotografias, figuras, diagramas, esquemas ou desenhos na explicação dos conceitos;
- 5) Uso da História da Física na apresentação ou desenvolvimento dos conceitos;
- 6) Ideias explícitas sobre o que o aluno e/ou leitor devem saber previamente.

4.3. Natureza da Pesquisa

A coleta da informação e a metodologia descritas anteriormente, fazem com que o tipo de interações sociais que ocorrem, por exemplo, no percurso de aulas de diversas disciplinas,

se configurem em uma rede complexa de aspectos que as condicionam e envolvam de forma similantemente complexa o tipo de pesquisa, com o qual se propõe compreender tais interações.

Tal complexidade dos fenômenos sociais se contrapõe naturalmente aos métodos que no seu estudo procuram uma redução, a fim de representar os fatos sociais com a maior exatidão possível. Diante destas razões, a pesquisa deve, portanto, assumir-se de forma tal que tenha como fundamento a maleabilidade e complexidade dos fenômenos sociais e que também permita outorgar-lhe um caráter de rigor e confiabilidade às análises realizadas.

Para tanto, e em concordância com nosso objetivo, problema de pesquisa e questões de pesquisa, assumimos este trabalho como uma *pesquisa qualitativa*, no sentido desenvolvido conforme o seguinte tópico.

4.3.1 Pesquisa qualitativa.

Este tipo de pesquisa surge no campo da sociologia, no começo do século XX, visando estudar a vida de grupos humanos; depois foi utilizada em diversas disciplinas das ciências sociais e comportamentais. De acordo com Denzin e Lincoln (2006), as metodologias de pesquisa, neste campo, foram-se enriquecendo com técnicas utilizadas em áreas, como o trabalho de campo, utilizado na Antropologia. Os autores afirmam que “a pesquisa qualitativa como um conjunto de atividades interpretativas, não privilegia nenhuma única prática metodológica em relação a outra [...] nem possui um conjunto distinto de métodos ou práticas que seja inteiramente seu” (p.20). Porém, segundo Flick (2008), é possível identificar algumas características comuns, tendo em conta que o objetivo principal é entender, descrever e, às vezes, explicar os fenômenos sociais sob perspectivas diferentes, uma vez que se busca: analisar experiências de indivíduos ou grupos; examinar interações e comunicações que estejam se desenvolvendo e investigar documentos ou traços semelhantes de experiências ou interações.

Segundo Denzin e Lincoln (2006), usam-se diversas técnicas de coleta de dados, tais como: entrevista, textos observacionais, estudo de caso, estatísticas, tabelas, gráficos, entre outros, para os quais se aplica, por sua vez, análises do tipo: semiótica, narrativa, de conteúdo, de discurso, de arquivos, fonêmica, etc. Segundo Flick (2008), é importante saber administrar a diversidade por meio de estratégias que permitam superar visões e explicações rápidas tiradas dos materiais, que poderiam levar a análises superficiais.

Visando garantir a veracidade e seriedade da pesquisa qualitativa, vem-se utilizando cada vez mais o método de “triangulação”, o qual consiste em assumir diferentes perspectivas sobre uma questão em estudo. Flick apresenta quatro tipos de triangulação, se embasando no

trabalho de Denzin. São elas : (1) triangulação de dados, (2) triangulação de investigadores, (3) triangulação de teorias, e (4) triangulação de métodos. A primeira consiste em usar diferentes fontes de dados para estudar um mesmo campo, visando ampliar o conhecimento do objeto de estudo; na segunda, utilizam-se diferentes observadores ou entrevistadores para revelar e minimizar vieses vindos do pesquisador individual; a terceira consiste em experimentar uma ou outra teoria para analisar os dados ou usar diferentes teorias para explicar um fenômeno, e na quarta, distinguem-se duas alternativas: triangulação dentro de métodos (tratamento de uma mesma técnica de coleta de dados com diferentes métodos) e entre métodos (combinação de diferentes métodos a fim de limitar a relatividade).

4.4. Métodos de análise das informações coletadas

4.4.1. Análise dos registros das observações realizadas

Os roteiros de observação constituíram o texto que foi analisado de forma sistemática para obter inferências sobre o comportamento dos indicadores. Nesta metodologia de análise, embasamo-nos nos aportes teóricos e técnicas de Análise de Conteúdo propostas por Bardin (2002). Especialmente na análise sistemática da informação, a fim de inferir conhecimentos, uma vez que, segundo a autora, a análise de conteúdo é

um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter por procedimentos, sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção. (BARDIN,2002, p.42)

4.4.2. Análise de respostas aos questionários

A perspectiva utilizada nesta análise foi a desenvolvida por Moraes e Galiuzzi (2007), segundo a qual, parte-se da obtenção de materiais, como resultado de entrevistas, registros de observações, depoimentos de participantes, gravações de aulas, discussões de grupos, diálogos de diferentes interlocutores, além de outros. Tais materiais são submetidos a um processo de análise textual discursiva por meio de quatro etapas, sendo que as três primeiras (unitarização, categorização e captura do novo emergente) constituem o conteúdo principal, por meio de um ciclo que não necessariamente evolui em forma linear nem unidirecional, mas que pode ir se enriquecendo simultaneamente, para permitir obter resultados numa etapa final de interpretação e análise.

A unitarização significa desmontar os textos, examinando-os em seus detalhes, fragmentando-os no sentido de atingir unidades constituintes e enunciados referentes aos fenômenos estudados. A categorização significa estabelecer relações entre as unidades de base, combinando e classificando-as, reunindo esses elementos unitários na formação de

conjuntos que congreguem elementos próximos. A captura do novo emergente, trata-se de estudar intensamente os resultados dos dois passos anteriores, procurando uma nova compreensão, a fim de produzir um metatexto que possa ser comunicado.

Na análise das respostas aos questionários, fizemos a desmontagem do *corpus*, a fim de constituir textos a serem analisados ao procurar as convergências e divergências dos depoimentos dos licenciandos e professores. Para tanto, definimos unidades de contexto e unidades de texto. As unidades de contexto foram os níveis de aprendizagem da Física em que se encontram os alunos, sendo eles, primeiro, terceiro e sétimo semestres. As unidades de texto corresponderam aos tópicos indagados com relação à Matemática da Física no ensino.

No trabalho de pesquisa preliminar apresentado no Capítulo 3, que trata sobre a criação de três categorias de Matemática da Física no Ensino de Física, a partir de resultados de pesquisa neste campo, a análise textual discursiva foi desenvolvida com o objetivo de criar categorias de análise, dos dados coletados por meio da observação e os questionários, a qual se desenvolveu com base em três questões, que indagaram pela maneira como se entende a relação entre Física e Matemática e as respectivas consequências no que se entende que o aluno deve aprender para compreender a Física e o tipo de problemas que deve resolver.

Tais categorias orientaram a elaboração dos questionários e dos roteiros de observação, e de análise textual, ao mesmo tempo que, contribuíram nas análises dos resultados. A partir delas foi possível constituir indicadores que mostrassem evidências sobre as formas como professores e alunos expressam seu entendimento da “Matemática da Física” no ensino, e as consequências desse entendimento nas formas como desenvolvem processos de explicação em sala de aula.

5. SIGNIFICADOS SOBRE “MATEMATIZAÇÃO DA FÍSICA” PRESENTES NA ORGANIZAÇÃO DE ATIVIDADES DIDÁTICAS DE PROFESSORES

Procurando resolver nosso problema de pesquisa: “Que possíveis relações operam na utilização da Matemática da Física na construção de explicações, em atividades didáticas para o Ensino de Física, realizados em um curso de Licenciatura em Física?” encontramos que para sua solução, faz-se necessário, responder à questão: Como a “Matematização da Física” costuma estar presente na organização das atividades didáticas e discursos de professores de Física, de um curso de Licenciatura em Física?

Visando responder esta questão, analisamos dados que foram constituídos com base em diferentes fontes de informação: livros de texto, sujeitos e espaços. Os livros foram considerados por ser parte importante e característica na organização de atividades didáticas dos professores. Os sujeitos foram professores e os espaços foram as respectivas disciplinas de Física ministradas pelos professores da amostra, em um curso de Licenciatura em Física.

Para a constituição de dados, utilizamos um roteiro de análise textual, para a análise da amostra dos livros didáticos escolhidos. No caso dos professores, utilizamos a observação de aulas e dados obtidos através da aplicação de questionário. A fim de registrar a observação elaboramos um roteiro que consta de 12 indicadores de observação, com os quais visamos detectar evidências das maneiras em que os professores utilizaram os formalismos matemáticos, durante a apresentação dos conteúdos que ensinaram. Simultaneamente, elaboramos o questionário que foi aplicado aos professores da amostra no final de todo o processo de observação.

É assim que para responder à questão acerca das possíveis relações que operam na utilização da Matemática da Física, na construção de explicações em atividades didáticas para o Ensino de Física, realizadas por professores de um curso de Licenciatura em Física, se faz necessário responder também à questão acerca dos significados atribuídos à Matemática da Física presentes em livros didáticos, utilizados nas mesmas disciplinas de curso de Licenciatura em Física. Para tal, o capítulo foi dividido em duas partes; a primeira trata da análise dos livros didáticos escolhidos como amostra e, a segunda apresenta a análise da observação das aulas dos professores e do questionário os significados de matemática que estão presentes na organização de atividades didáticas do professor.

PRIMEIRA PARTE: SIGNIFICADOS SOBRE MATEMATIZAÇÃO DA FÍSICA PARA O ENSINO, PRESENTES EM LIVROS DIDÁTICOS DE FÍSICA UNIVERSITÁRIA.

Visando responder esta questão, foram analisados quatro livros didáticos que fazem parte da bibliografia sugerida nas ementas das disciplinas Física I, Física II, Física III e Laboratório de Física Moderna, que foram acompanhadas durante o segundo semestre de 2011 e o primeiro semestre de 2012 (ver lista completa de livros sugeridos no Apêndice J p.198).

Os critérios de seleção dos livros a serem analisados foram: que fossem os mais utilizados ou mencionados pelos professores no desenvolvimento das aulas e; que estivessem disponíveis para consulta dos alunos na Biblioteca, em língua Portuguesa.

Dos quatro livros selecionados, dois foram utilizados nas disciplinas de Física I, II e III, sendo eles: “Fundamentos de Física, v,1: mecânica”, de HALLIDAY, D., RESNICK, R. WALKER, J. e; “Curso de Física básica, v,1. Mecânica” de NUSSENVZVEIG, M., que tratam temáticas de física clássica. Os outros dois foram utilizados na disciplina de Física moderna, com as obras: “Física Quântica. Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas” de EISBERG, R.; RESNICK, R. e; “Conceitos de Física Quântica” v.1 de PESSOA Júnior, O.

Embora entendamos que o impacto dos livros didáticos no desenvolvimento de atividades em sala de aula dependa, principalmente da maneira como o professor o usa, neste capítulo não vamos considerar a análise de seus usos, uma vez que o nosso objeto de estudo é o livro como um todo, que auto define estratégias de ensino.

Assim, com esta análise, objetivamos saber em que medida o conteúdo dos livros se aproxima a cada uma das três categorias sobre a “Matematização da Física no Ensino de Física”, caracterizadas no terceiro capítulo deste trabalho, lembrando que elas são:

Categoria 1. *Matematização a partir da modelagem matemática (ModelMat);*

Categoria 2. *Matematização a partir de processos físico-matemáticos (ProcesFisMat);*

Categoria 3. *Matematização como complemento do estudo fenomenológico (EstudFenom).*

Também ressaltamos que vamos considerar o leitor destes livros analisados, sendo aluno de curso de Licenciatura em Física, nas disciplinas de Física, uma vez que entendemos que a interpretação dos leitores varia em função de seu nível de instrução, por exemplo, um professor poderia responder às questões-teste colocadas nestes livros, sem necessidade de lê-los. Portanto, toda vez que utilizamos a palavra “aluno” neste capítulo, deve ser entendido que

estamos nos referindo ao “aluno leitor”, na situação específica em que está lendo o livro para complementar seu aprendizado em sala de aula.

A fim de focar a análise dos livros no nosso problema de pesquisa, desenvolvemos um roteiro de análise textual, que implicou uma seleção dos trechos a serem analisados. Este *corpus* organizado com tais trechos, permitiu-nos fazer uma comparação dos quatro livros, visando encontrar aspectos em comum, com base no qual fizemos uma interpretação dos dados, sob as três categorias de análise. Tal roteiro foi utilizado apenas em um tema de Física clássica em dois dos livros e um tema de Física moderna nos outros dois, tal como é indicado no Quadro 8.

QUADRO 8. Relação de livros didáticos com seus correspondentes capítulos analisados, e símbolos para se referênciam ao longo do capítulo.

Livros didáticos	Capítulo selecionado	Símbolos
Título: Fundamentos de Física, v.1: mecânica. Autores: Halliday, Resnick e Walker (2002)	Capítulo 2. Movimento retilíneo. pp.14-41	FC Halliday
Título: Curso de Física básica, v.1. Autor: Nussenzveig (2002)	Capítulo 2: “Movimento unidimensional” pp.23-39	FC Nussenzveig
Título: Física Quântica. Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas. Autores: Eisberg e Resnick (1988)	Capítulo 2. Fótons- Propriedades corpusculares da radiação. pp.49-83	FQ Eisberg
Título: Conceitos de Física Quântica. v.1. Autor: Pessoa Jr.(2003)	Capítulo 1. Dualidade Onda-Partícula. pp.1-8	FQ Pessoa

Para efeitos práticos na apresentação deste capítulo, utilizaremos símbolos que representem os dois livros de texto de mecânica clássica (FC) e os dois livros de mecânica quântica (FQ) e, por sua vez, utilizaremos somente o sobrenome do primeiro autor para representar cada um deles, como foi indicado no Quadro anterior.

Para a elaboração do *corpus* a ser analisado, foi preenchido o roteiro contendo seis itens, para cada um dos quais foram descritos os exemplos que evidenciam a presença de cada item:

1. *Estrutura geral do capítulo e exemplos das ideias fundamentais apresentadas em cada parte:* breve descrição do tipo de introdução, apresentação do conteúdo e fechamento do capítulo.
2. *Ideias explícitas sobre a relação da Física com a cotidianidade.*
3. *Uso de Fotografias, figuras, diagramas, esquemas ou desenhos na explicação dos conceitos.*
4. *Uso da História da Física na apresentação ou desenvolvimento dos conceitos.*

5. *Ideias explícitas sobre que o aluno deve saber previamente.*¹⁷

5.1. **Relações entre Física e Matemática**

Esta relação foi estudada com base na seleção e análise de algumas situações colocadas pelos autores para dar o respectivo tratamento dos tópicos de Física, mas além de estudar o conteúdo das situações, foi considerada também a sequência em que elas foram se apresentando, até chegar no formalismo matemático.

Em termos gerais, podemos dizer que ao comparar o observado nos dois livros de Física clássica com os dois livros de Física Quântica, encontramos que a relação entre Física e Matemática refere-se à capacidade de representação e explicação dos fenômenos físicos a partir de modelos matemáticos. Na sequência, ampliamos esta conclusão analisando primeiro o caso da Física Clássica (FC) e depois o caso da Física Quântica (FQ).

5.1.1. *Presença da Matemática em livros didáticos de Física Clássica*

Observamos que nos livros de FC existe uma tendência generalizada de sequência de conteúdos. Inicia-se com a idealização de situações que poderiam ser do cotidiano, em seguida, apresentam-se os símbolos que representam cada uma das grandezas envolvidas com a respectiva relação entre tais grandezas, e finalmente, deduz-se ou apresentam-se as equações que representam os conceitos, as quais podem ser aplicadas para analisar outras situações similares.

Nessa sequência, detectamos ao menos três aspectos que, poderíamos dizer, buscam orientar o aluno na “Matematização da Física”. São eles: 1- a relação do tópico em estudo com a cotidianidade; 2- a representação simbólica de grandezas físicas e; 3- a formalização por meio de equações com suas respectivas aplicações.

Observamos que a relação com o cotidiano apresentada nestes livros é um recurso que visa contextualizar o fenômeno em estudo, pois permite descrever situações, onde pode ser aplicado um modelo matemático. Porém, os problemas a resolver pelo aluno, não partem de uma situação que esteja vivenciando, mas de situações que poderia encontrar em sua vida rotineira sem, necessariamente, ter tido a experiência, já que as situações são colocadas pelos autores, a fim de gerar a possibilidade de aplicar alguns conceitos específicos. Exemplos:

¹⁷ Ver os roteiros preenchidos para cada livro no Apêndice K.

QUADRO 9. Exemplo de exercício que busca relacionar o tópico de “movimento” com o cotidiano nos dois livros de Física clássica.

Livro	Situação
Halliday	“Durante um espirro, os olhos podem se fechar por até 0,50 s. Se você está dirigindo um carro a 90Km/h e espirra, de quanto o carro pode se deslocar até você abrir novamente os olhos?” (p.33)
Nussensveig	“ $x(t)$ é a posição na estrada no instante t , ocupada pelo para-choque dianteiro de um carro em movimento ao longo da estrada (em linha reta). Poderíamos determinar $x(t)$, por exemplo, filmando o movimento do carro e depois analisando uma a uma as imagens do filme. (...) Outro método de ‘congelar’ a posição instantânea de um objeto em movimento é tirar uma fotografia de exposição múltipla em que o objeto é iluminado a intervalos de tempo Δt regulares por um ‘flash’ ultrarrápido (estroboscópica).” (p.23)

Note-se que para achar a resposta da questão colocada por Halliday, é preciso identificar que se trata de calcular o valor da distância percorrida por uma partícula que se move durante 0,5 s com uma velocidade constante de 90Km/h, podendo o aluno se afastar da situação de se imaginar dirigindo um carro. Já no caso do problema colocado por Nussensveig, trata-se, principalmente, de poder calcular a posição que o carro terá depois de passar um determinado tempo, considerando as restrições de que o carro se move em linha reta e com movimento uniforme, ou seja, o aluno poderá imaginar o movimento de uma partícula e não, necessariamente, de um carro.

Observamos que nos livros de FC, a idealização de tais situações cotidianas é uma condição necessária para estudar o comportamento do fenômeno e também é um critério de introdução ao capítulo. Neste caso, os autores iniciam explicando que será estudado o fenômeno de movimento, mas considerando algumas restrições. Portanto, a análise de situações idealizadas, ou seja, situações nas quais são desconsideradas algumas variáveis envolvidas no fenômeno em estudo, é uma estratégia de apresentação do formalismo, já que talvez, se consideradas todas as variáveis da situação real, aumentaria a complexidade na seleção dos símbolos que representam as variáveis e a formalização da relação entre elas.

Por exemplo, no livro de Halliday, começa-se apresentando algumas propriedades gerais do movimento unidimensional com base em três restrições: (1) supor que a trajetória se dá ao longo de uma linha reta; (2) discutir o movimento e suas mudanças sem se preocupar pelas causas; (3) supor o objeto em movimento como uma partícula. E por sua vez, no livro de Nussensveig, apresentam-se, inicialmente, ideias sobre que o tema a estudar é a cinemática (descrição do movimento), mas não a dinâmica (como determinar o movimento produzido); que vai se limitar ao movimento em uma só dimensão e que vai se restringir a alguns tópicos centrais.

Significa que o fenômeno em estudo é o movimento, mas não qualquer tipo de movimento, é somente no caso de ocorrer em trajetória retilínea, para o qual será necessário imaginar trajetórias retas percorridas por objetos inanimados (carros), ou seres vivos (animais ou pessoas), idealizados como partículas e, que se comportam de maneira especial ao se deslocar de forma linear e com movimento constante, por exemplo, como dizem os autores, supondo que a via de São Paulo até Rio de Janeiro¹⁸ é retilínea, ou que um tatu¹⁹ se desloca com movimento uniforme.

Essas restrições permitem representar o objeto em movimento como uma partícula e também permite se despreocupar com as causas do movimento, já que o tema em estudo é a descrição do movimento. Em geral, trata-se de aplicar os modelos matemáticos que representam o comportamento de um sistema físico, exigindo que o aluno compreenda as condições, que deve cumprir o sistema para poder aplicar nele, tal formalismo matemático.

No livro de Halliday, para definir o conceito de Velocidade Média, começa-se aclarando que a notação $x(t)$ representa uma função x de t , e não o produto de x por t . Como um exemplo inicial, apresenta-se a função $x(t)$ para um tatu em repouso (considerado como partícula) durante um intervalo de 7 s, e posteriormente com o tatu em movimento, numa linha reta, com a respectiva representação no gráfico x vs t . Posteriormente, descrevem-se as informações que oferece o gráfico e define-se a velocidade média, por meio do formalismo matemático. “ (...) a velocidade media v_{med} é a razão entre o deslocamento Δx e o intervalo de 1” (p.16). Tal definição refere-se ao comportamento idealizado de uma partícula que se movimenta numa dimensão.

Esta mesma equação é apresentada no livro de Nussensveig, mas com notação simbólica e descrição um pouco diferentes, ele diz, “A velocidade v do movimento é definida por;

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}, \text{ ou seja, é a razão do deslocamento ao intervalo de tempo que}$$

ele leva para se produzir. Graficamente, v representa o *coeficiente angular* da reta no gráfico x vs t ” (p.24)

¹⁸São Paulo e Rio de Janeiro são duas cidades brasileiras, separadas por aproximadamente 358 quilômetros e cuja trajetória é quebrada dado que é preciso subir e descer a serra do mar.

¹⁹ Tatu é um mamífero que possui uma espécie de armadura que cobre e protege seu corpo, é nativo do continente americano, mora nas regiões de cerrado, pesa de 2,5 a 6 quilos e mede de 40 a 70 cm

Observamos nos exemplos anteriores, que a representação dos conceitos faz-se com base na formalização matemática, a qual mesmo descrevendo a relação entre grandezas mensuráveis, contém em si mesma um nível de abstração ao ser uma representação que pode ser utilizada para imaginar sistemas físicos, sem o requisito de estar desenvolvendo a experiência real.

Ao comparar este resultado observado com o apresentado no primeiro capítulo, referente ao que se considerava “explicar” na época da formulação da mecânica clássica, encontramos que os livros didáticos se embasam em tal ideia de explicação, dado que se focam em descrever os fenômenos físicos desconsiderando a reflexão sobre os “por quês” do surgimento de tais conceitos, e priorizando a descrição do “como” acontece, utilizando a matemática como a ferramenta mais apropriada para desenvolver as descrições, uma vez que permitem aplicar as leis de forma quantitativa para diversos sistemas físicos.

Já, ao comparar com o apresentado no segundo capítulo, a proposta do livro referente ao que se consideraria uma explicação das “explicações da Física”, é tal, que os processos que se espera siga o aluno não respondem explicitamente a processos de formação de habilidades de pensamento para a construção da ciência, como poderiam ser; a organização de diversas maneiras de representação dos fenômenos, ou a busca de relações mutuas entre diversas imagens, etc. Por tanto a explicação da Física, apresentada pelos livros, ao menos no tópico de movimento, parece obedecer mais à maneira como se desenvolveu a história da Física do que à maneira como vêm evoluindo os resultados de pesquisa em ensino de Física.

5.1.2. Presença da Matemática em livros didáticos de Física Quântica

Observa-se que na apresentação dos livros de FQ, em tópicos como o efeito fotoelétrico ou a natureza da radiação eletromagnética, também há uma tendência de apresentação dos conteúdos começando pela contextualização do fenômeno. Só que, neste caso, não é possível colocar situações que poderiam ser da vida rotineira, então, começa-se colocando a situação de algum dos experimentos cruciais que permitiram demonstrar o comportamento do mundo microscópico.

Nos livros de FQ, ao se tratar do estudo de fenômenos que acontecem a escala microscópica, não é possível iniciar idealizando um sistema, uma vez que os arranjos experimentais já têm implícita uma idealização, dado que foram elaborados com fins específicos de observação de alguns fenômenos que, se espera, aconteçam sob condições particulares.

Nos dois livros de FQ analisados, desenvolve-se o processo de definição dos conceitos com base nas controvérsias que surgem ao tentar aplicar o formalismo matemático da mecânica clássica para explicar os resultados obtidos nos experimentos cruciais que deram passo ao surgimento da teoria quântica. Dado que o sistema em estudo não contém partículas observáveis a olho nu, mas partículas do mundo microscópico, a idealização dos sistemas não parte de restringir algumas grandezas mensuráveis, pois não partem de fatos diretamente conexos com a experiência sensorial, mas, partem de imaginar o comportamento de ondas e partículas, cuja natureza é diferente das partículas e ondas caracterizadas na FC. Ilustramos esta situação com dois exemplos no Quadro 10.

QUADRO 10. Exemplos de situações colocadas nos livros de Física Quântica, a fim de introduzir o estudo da natureza da radiação eletromagnética.

Livro	Situação
Eisberg	“examinaremos processos nos quais a radiação interage com a matéria. Três processos (...) envolvem o espalhamento ou absorção pela matéria. Dois processos (...) envolvem a produção de radiação. Em cada caso obteremos evidências experimentais de que a radiação se comporta como uma partícula em sua interação com a matéria, diferentemente do comportamento ondulatório que apresenta quando se propaga” (p.51)
Pessoa	“(…) o que caracteriza a Teoria Quântica de maneira essencial é que ela é a teoria que atribui, para qualquer partícula individual, aspectos ondulatórios, e para qualquer forma de radiação, aspectos corpusculares. Esta é uma versão ‘geral’ da dualidade onda-partícula (...)”. (p.1).

No livro de Eisberg, apresenta-se o esquema do aparelho usado para estudar o efeito fotoelétrico, explicando a função de cada parte e os dados que podem ser obtidos, que permitem obter um gráfico de corrente fotoelétrica em função da diferença de potencial V , aplicada entre a placa de metal que libera elétrons e o coletor metálico que atrai tais elétrons. Neste caso, a análise do resultado experimental faz-se a partir do gráfico obtido, com base nos dados experimentais fornecidos pelo autor, procurando nele algum significado físico que possa ser representado por meio de símbolos e formalismos matemáticos, os quais por sua vez, usam-se para explicar o comportamento que foi observado pelos cientistas, em tal experimento.

É assim que se chega em conclusões como por exemplo, que a energia cinética máxima dos elétrons liberados ($K_{\max} = eV_0$) é independente da intensidade da luz incidente e que há um *limiar de frequência* abaixo do qual o efeito fotoelétrico deixa de ocorrer. Esta conclusão permite imaginar os elétrons como partículas que possuem energia cinética e cujo comportamento é similar ao das partículas do mundo macroscópico.

Por sua vez, no livro de Pessoa, apresenta-se o modelo que representa a essência do regime quântico. Segundo o autor, “o regime quântico é a Física das Ondas para baixas

intensidades, quando propriedades corpusculares passam a aparecer” (p.6). Portanto, para entender o comportamento da luz no regime quântico, é preciso considerar que “a energia de cada fóton detectado é dada por $E = h\nu$, onde ν é a frequência da luz. O momento associado a este fóton é dado por $p = \frac{h}{\lambda}$ onde λ é o comprimento da onda.” (p. 6).

Observamos que é com base nas equações colocadas que se apresenta a controvérsia do comportamento dual da luz, uma vez que a equação da quantidade de movimento (p) é definida em termos de comprimento de onda, que resulta contraditório com a expressão de quantidade de movimento (p) na física clássica, a qual é definida como o produto entre a massa (m) e a velocidade (v) de uma partícula.

Significa que o uso de formalismos matemáticos contém a explicação oferecida por uma teoria. Estes modelos não somente representam o comportamento do fenômeno, mas garantem a veracidade de sua descrição, ao permitir prever resultados experimentais e valores sob determinadas condições.

Resumindo, podemos dizer que a sequência nos livros de FQ assemelha-se à sequência nos livros de FC, no sentido de que, depois de introduzir o sistema físico em estudo, apresenta-se o formalismo matemático, que permite descrevê-lo, para, posteriormente, aplicá-los na análise de outros sistemas físicos similares. Assim, em termos gerais, o caráter abstrato das representações se mantém ao passar da FC para a FQ, mudando, principalmente, o tipo de sistemas físicos a serem estudados.

Ao comparar com o apresentado no primeiro capítulo referente à *Matematização da Física* nos últimos séculos, encontramos que a apresentação destes livros concorda com a ideia de explicação, no sentido de que as explicações da Física são possíveis sempre com base em leis conhecidas, uma vez que, as situações estudadas são apresentadas com base nas controvérsias surgidas ao tentar utilizar a formalização matemática, com os quais se descrevem os fenômenos da Física clássica e estes novos fenômenos observados.

Porém, encontramos mais uma vez, que a sequência de apresentação dos conteúdos obedece à sequência em que foram se constituindo os conceitos históricos e, não necessariamente, obedecem à necessidade de orientação e guia de processos de construção de representações por parte do aluno, visando levá-lo a fazer suas próprias organizações. A ideia principal nestes livros é apresentar para o aluno, o mais fielmente possível, a maneira como foram se desencadeando conclusões que permitiram construir uma linguagem cada vez mais específica, para descrever os sistemas microscópicos, nos quais a experiência sensorial é

impossível e, portanto, precisa-se de maior confiança nos raciocínios desenvolvidos. Ampliaremos estas conclusões nos itens a seguir.

5.2. O que os alunos devem entender para aprender a Física

A busca das ideias acerca do que os alunos devem entender, na procura do seu aprendizado da Física, foi feita, principalmente, analisando os exemplos e exercícios trabalhados pelos autores, ao longo da apresentação do capítulo, uma vez que eles representam os aspectos em que se espera que o aluno faça ênfase. Também, a partir da sequência de exemplos apresentados, foi possível determinar a progressão que os autores desenvolveram para orientar o aluno na passagem de níveis básicos para níveis cada vez mais complexos.

Observamos que, embora a apresentação de conteúdos seja diferente nos quatro livros, existem tendências comuns em relação a lógica que subjaz às sequências, uma vez que cada novo conceito é definido a partir do formalismo do conceito anterior. Também identificamos uma tendência comum, no sentido de requerer alguns conhecimentos prévios, por parte do aluno, que lhe permitirão compreender o conteúdo apresentado. Isto é, que tanto na FC quanto na FQ, espera-se que o aluno compreenda a linguagem que está sendo apresentada para descrever os sistemas físicos, por meio de formalismos matemáticos, ou seja espera-se que o aluno já possua conhecimentos de modelos explicativos básicos.

5.2.1. Pressupostos sobre a aprendizagem da Física em livros didáticos de Física Clássica

No livro de Halliday, inicia-se com definições de “movimento”, “posição” e “deslocamento” para depois entrar no conceito de “velocidade média”. E, no livro de Nussensveig, inicia-se com a definição de “velocidade média” que já tem implícitas definições de “movimento”, “posição” e “deslocamento”. Porém, nos dois casos a ordem da sequência vai da definição de velocidade para a definição de aceleração e, posteriormente, o estudo da queda livre dos corpos, como se indica no Quadro 11.

QUADRO 11. Sequência de conteúdos dos livros de Física clássica “Halliday” e “Nussensveig” no capítulo de movimento unidimensional.

Livro	Sequência de conteúdos
Halliday	Movimento, Posição e Deslocamento, Velocidade média e Velocidade escalar média, Velocidade instantânea, Velocidade escalar instantânea, Aceleração, Aceleração constante, Aceleração em queda livre e, Integração de gráficos em análise de movimento.
Nussensveig	Velocidade média; Velocidade instantânea; O problema inverso; Aceleração; Movimento retilíneo uniformemente acelerado; Galileu e a queda dos corpos.

Deduzimos que o modelo explicativo da queda livre dos corpos contém o modelo explicativo do “movimento uniformemente acelerado”, que, por sua vez, contém o modelo explicativo do “movimento retilíneo uniforme”, o qual exige conhecimentos básicos de Álgebra e Geometria. Quer dizer, espera-se que o aluno aprenda modelos explicativos cada vez mais complexos, sempre relacionados com modelos mais básicos, elaborados a partir de idealizações de experiências do cotidiano, representadas por meio de formalismos matemáticos.

No desenvolvimento do capítulo analisado no livro de Halliday, notamos que, embora o autor faça somente um chamado específico em um tópico do capítulo, no qual se exige ter domínio do cálculo integral, é evidente que o leitor precisa do domínio, tanto de conceitos da Física, quanto do uso de Álgebra e Cálculo para poder realizar, apropriadamente, sua leitura. A mesma situação se encontra no livro de Nussenzveig, que não tem exigências específicas de conhecimentos prévios, porém, pela forma de abordar os conteúdos, pode-se deduzir que o leitor precisa ter conhecimentos de cálculo diferencial e integral para poder compreender os conteúdos apresentados, tal como se evidencia nos exemplos do Quadro 12.

QUADRO 12. Exemplos de definição de conceitos nos livros de “Halliday” e “Nussenzveig” que exigem conhecimentos prévios do leitor.

Livro	Situação
Halliday	Definição do conceito de aceleração instantânea: “A <i>aceleração instantânea</i> (ou simplesmente aceleração) a é igual à derivada primeira em relação ao tempo da velocidade $v(t)$ ou á derivada segunda da posição $x(t)$ em relação ao tempo: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$. Em um gráfico de v em função de t , a aceleração a em qualquer instante t é igual à inclinação da curva no ponto que representa t .”. (p.31)
Nussenzveig	Depois de definir a velocidade instantânea, desenvolve o item “O problema inverso” como um processo contrário à “lei horaria” de um movimento, segundo a qual, se obtém um resultado ao derivar uma função. No “problema inverso” conhecem-se dados para um instante final e um instante inicial de forma que pode ser elaborada uma representação geométrica, e a partir dela desenvolver um processo de integração que permita obter o resultado. <i>Exemplo de “lei horaria”</i> : “Calcular a derivada de $x(t) = at^2 + bt + c$ onde a, b e c são constantes, num ponto t qualquer (...). A velocidade instantânea $v(t)$ num instante t qualquer, num movimento descrito por $x = x(t)$, é dada por $v(t) = \frac{dx}{dt}$ ” (p.27)

Observamos que os exemplos no livro de Halliday são de aplicação do formalismo matemático, os quais são apresentados em níveis de dificuldade, sendo que a dificuldade aumenta ao exigir combinar uma ou mais de uma equação. Mas também, apresenta questões “teste” para o aluno fazer controle de leitura, ao ter que verificar sua compreensão do conteúdo para responder tais testes.

Simultaneamente, os autores vão fornecendo táticas de resolução de exercícios, a fim de auxiliar no domínio das etapas que lhe permitem ir da leitura e interpretação do enunciado do exercício até a busca e aplicação do formalismo adequado para encontrar a solução da questão colocada nos exercícios, os quais usualmente são problemas de aplicação da teoria para calcular algum valor solicitado. Assim, vão sendo apresentadas e utilizadas “táticas” de resolução de problemas nos diferentes exemplos, e na medida em que vão se apresentando novos níveis de dificuldade, vão sendo apresentadas novas táticas com os respectivos exemplos de uso. Tais táticas são:

Tática 1: você compreende o problema? [...] a melhor forma de verificar se você compreendeu o problema é a seguinte: você seria capaz de explicá-lo a outra pessoa?.

Tática 2: As unidades estão corretas? antes de substituir valores numéricos nas equações, certifique-se de que as unidades usadas são compatíveis. [...].

Tática 3: A resposta obtida é razoável? a resposta fez sentido ou parece muito grande ou muito pequena? [...] O erro pode estar no método usado, nos cálculos ou no modo como os dados foram digitados em uma calculadora. [...]

Tática 4: Interpretação de gráficos. Em cada gráfico a variável associada ao eixo horizontal é o tempo t , [...] a variável associada ao eixo vertical é a posição x [...] preste sempre atenção nas unidades nas quais as variáveis estão expressas.

Tática 5: Sinal da Aceleração. [...] o sinal de uma aceleração indica um sentido, e não se a velocidade do objeto está aumentando ou diminuindo.[...]

Tática 6: Significado do sinal negativo. [...] um valor negativo de ‘ y ’ significa que o corpo está abaixo do ponto escolhido como origem. Uma velocidade negativa significa que o corpo está se deslocando no sentido negativo do eixo y . Uma aceleração negativa significa que a velocidade do corpo se torna menos positiva ou mais negativa.[...]

Tática 7: Respostas inesperadas. [...] Se você obtiver um número maior de respostas do que o previsto, não despreze cegamente [...] Examine-as atentamente para verificar se possuem algum significado físico (HALLIDAY *et al*, 2002)

Note-se que as táticas dão ênfase na compreensão do enunciado do problema, da razão pela qual vai utilizar um determinado formalismo e da coerência do resultado obtido de acordo com a situação colocada, assim como o uso correto dos formalismos. Em geral, são táticas para resolver problemas que têm uma única resposta ou para o qual se apresenta mais de uma resposta; uma delas é a resposta esperada e as outras deverão ser analisadas em função do significado físico.

Nesse livro, toda situação está acompanhada do respectivo gráfico que representa a relação entre variáveis expressas nas equações, objetivando visualizar a relação entre as grandezas, o que permite fazer inferências sobre o comportamento do sistema, gráficos do tipo velocidade *vs* posição, posição *vs* tempo, aceleração *vs* tempo, etc. Em algumas situações,

usam-se figuras e fotografias para ilustrar ou ambientar as situações em estudo, como a fotografia do pica-pau²⁰ ou a fotografia do efeito da velocidade sobre o rosto de uma pessoa que viaja de tremó ou a fotografia estroboscópica da queda livre de uma pena e uma maçã, sem que este tipo de ilustrações chegue a ser objeto de análise.

Observamos que no livro de Halliday uma das prioridades é que o aluno aprenda a resolver corretamente os exercícios de uma forma progressiva, evitando erros, como a não identificação da equação adequada ou a não identificação da variável solicitada ou dos dados fornecidos. Isto implica, que o aluno deve compreender as equações e as situações em que podem ser aplicadas, assim como, a relação entre os conceitos e o formalismo matemático que os representa. Neste caso, resolver corretamente o exercício significa, entender a Física envolvida no fenômeno, que é saber selecionar a representação matemática adequada para cada situação.

Já o livro de Nussenzweig não apresenta exemplos no desenvolvimento dos conteúdos, mas a definição de cada conceito é dada com base em exercícios, nos quais aplica diretamente os símbolos e as equações que representam o conceito. Neste caso, os exemplos aparecem implícitos no processo explicativo, ou seja, os exercícios desenvolvidos são, simultaneamente, exemplos e explicação da temática que se está trabalhando, mas não tem uma guia explícita de utilização, nem referências a táticas para resolução de exercícios, como no caso do Halliday.

Podemos dizer que o grau de progresso do aprendizado do aluno é testado pela capacidade de interpretação dos exercícios desenvolvidos, uma vez que todos os exercícios apresentados objetivam explicar o conteúdo trabalhado. Para isso, o autor dá ênfase na elaboração e interpretação de gráficos, explicitando a relação entre as grandezas envolvidas, com base nos conceitos de derivada e integral. Neste caso, não aparecem ilustrações ou fotografias que ambientem as situações apresentadas; portanto, a linguagem utilizada é meramente matemática.

Outro aspecto analisado sobre o que o aluno deve aprender foi o relacionado com o uso da História da Física. Encontramos que, nos livros de FC, praticamente, não há relação entre os modelos explicativos apresentados e sua história, com exceção de um evento no livro de Nussenzweig, no qual há um relato sobre fatos da história que levaram a introduzir o valor da constante da aceleração da gravidade.

²⁰ É uma ave da ordem Piciforme, de tamanho pequeno a médio, com o hábito de perfurar a madeira das árvores com seu bico para capturar larvas de insetos e para construir ninhos.

Portanto, inferimos que a ideia de processo de aprendizagem da Física, nos dois livros, está relacionada com o grau de interpretação e aplicação dos formalismos matemáticos, utilizados na descrição dos assuntos da Física em estudo. Ali espera-se que o aluno vá desenvolvendo níveis de progressão, em função dos passos necessários para conseguir responder a uma questão ou resolver um problema, que pede encontrar algum dado quantitativo, a partir da elaboração e interpretação de gráficos e da aplicação de equações adequadas. Dado que se entende que, quando o aluno consegue elaborar o gráfico e/ou aplicar a equação, é porque compreendeu o significado dos conceitos envolvidos.

Ao comparar esta perspectiva com o apresentado pelos pesquisadores em ensino de Física no segundo capítulo, observamos que, embora haja concordância no sentido de levar o aluno à compreensão dos modelos matemáticos, que explicam os fenômenos físicos, buscando que o aluno associe sentido físico às equações, há uma distância no sentido de propiciar atividades que o levem à formação de outras habilidades de pensamento, como por exemplo, a habilidade de construir explicações próprias ou de aperfeiçoar sua própria linguagem, até chegar em expressões cada vez mais adequadas para resolver uma determinada problemática.

5.2.2. Pressupostos sobre a aprendizagem da Física em livros didáticos de Física Quântica

No caso dos livros de FQ, a apresentação dos conteúdos é diferente em seus pressupostos, uma vez que, o livro de Eisberg, por exemplo, trabalha com base na evolução histórica de experimentos, que foram evidenciando a natureza dual da radiação e suas respectivas formalizações matemáticas; enquanto o livro de Pessoa trabalha com base no levantamento de questões e controvérsias surgidas na história da Física, sobre as interpretações dos modelos explicativos, evidenciando a essência da Física Quântica. Nos dois casos, os autores propõem uma sequência que orienta o aluno a compreender o fenômeno da interação da radiação com a matéria, por meio de uma sucessão de eventos, como se observa nas descrições a seguir:

QUADRO 13. Sequência de conteúdos dos livros de “Eisberg” e “Pessoa” em capítulos introdutórios à Física Quântica.

Livro	Sequencia de conteúdos
Eisberg	O efeito fotoelétrico; a teoria quântica de Einstein sobre o efeito fotoelétrico; o efeito Compton; a natureza dual da radiação eletromagnética; fótons e a produção de raios X; produção e aniquilação de pares; seções de choque para absorção e espalhamento de fótons.
Pessoa	A essência da Física Quântica; contradição entre onda e partícula; dualidade onda partícula: versão fraca; quatro interpretações básicas, regime quântico: ondas de baixa intensidade, e; soma e divisão de Ondas.

Inferimos que pelo menos dois aspectos são considerados como fundamentais por estes autores na compreensão da Física Quântica: a função dos experimentos cruciais na construção da teoria com seus respectivos modelos explicativos, e a interpretação de tais modelos explicativos. E, dado que estes dois aspectos não estão relacionados diretamente com experiências sensoriais rotineiras, é necessário que o aluno possua domínio em certos assuntos teóricos.

No livro de Eisberg, expressa-se que “Algum material destes dois capítulos pode ser uma revisão de tópicos que o estudante já encontrou ao estudar física elementar.” (p.51), note-se que o leitor é entendido como um aluno, que já possui conhecimentos de Física. Neste livro, espera-se que a teoria da FQ seja aprendida por meio das aplicações de seus formalismos, o qual exige domínio do cálculo diferencial e integral para poder ser usado e interpretado. Os autores afirmam na apresentação do livro, que “este livro foi concebido basicamente com a intenção de ser utilizado [...] para estudantes que já passaram por tratamentos substanciais de cálculo diferencial e integral elementar e de física clássica elementar em relação ao nível de cálculo”.

Desenvolvem-se exercícios baseados em demonstrações que evidenciam a impossibilidade de aplicar os modelos explicativos da mecânica clássica. Assim, a explicação se apoia na incapacidade de descrição dos formalismos da física clássica ao ser aplicados aos fenômenos quânticos, propondo por dedução lógica, a formalização de novos tipos de explicação do fenômeno. Tal descrição é desenvolvida, completamente, a partir de modelos matemáticos.

Nesse processo de explicação, os gráficos e as figuras são utilizados com o objetivo de representar e explicar os arranjos experimentais, que possibilitaram evidenciar o comportamento dos fenômenos quânticos. Gráficos como: o de frequência *vs* potencia limite no efeito fotoelétrico ou comprimento de onda *vs* intensidade no efeito Compton; figuras como: o esquema do aparelho usado para estudar o efeito fotoelétrico, o esquema da experiência de Comptone, o esquema do tubo de raios X.

Também encontram-se fotografias, como a da produção de pares, vista em uma câmara de bolha ou ilustrações, que representam a interpretação do comportamento quântico; como a representação de um fóton, com um determinado comprimento de onda, por meio do desenho de uma linha ondulada com uma flecha em um de seus extremos, indicando a direção

e sentido sobre um sistema de referência ou o desenho de um feixe de fótons passando através de uma lâmina.

Por sua vez, Pessoa refere-se à primeira parte do livro, como que “é uma introdução bastante suave à Física Quântica e, portanto, pode ser aproveitada mesmo por aqueles que nunca cursaram uma disciplina de Mecânica quântica, como alunos de Filosofia, Ensino de Ciências e História da Ciência” (p.1). Infere-se, segundo este autor, que o leitor não precisa ser da área de Física, mas precisa de alguns conhecimentos básicos aprendidos em áreas relacionadas com as Ciências.

Embora o autor proponha-se a desenvolver o conteúdo, apresentando um “formalismo matemático simples”, deduzimos que o aluno precisa de conhecimentos prévios, que lhe permitam compreender a essência das questões colocadas sobre a interpretação dos formalismos. Por exemplo, quando o autor defende a ideia de que muitas características essenciais da Física Quântica encontram-se na Física ondulatória clássica, é preciso compreender o modelo explicativo do comportamento das ondas.

Nesse capítulo, não se trabalha com base em exercícios de tipo quantitativo, mas de questões que visam contrapor modelos explicativos da FC, com explicações dos fenômenos quânticos. Para tanto, não demonstra o surgimento do modelo matemático, mas apresenta algumas equações básicas, que descrevem a fenomenologia correspondente, o qual se complementa com esquemas que representam os experimentos cruciais, como o esquema do experimento de duas fendas ou o esquema do experimento para dividir uma onda em duas componentes ou o desenho da superposição construtiva e destrutiva das ondas.

Assim, entendemos que o que se espera que o aluno aprenda é a continuação do que já sabe em termos de modelos explicativos, uma vez que se trabalha com base nas controvérsias que surgiram ao aplicar modelos de FC, para descrever resultados experimentais obtidos com previsões teóricas a partir da FQ e para isto, é preciso saber sobre tópicos, como a teoria da conservação da energia, o eletromagnetismo, entre outras.

Isso significa que a aprendizagem conceitual implicaria na compreensão de sua formalização matemática, a qual envolve símbolos, equações e gráficos, em campos da Matemática, tais como: Geometria, Álgebra, Trigonometria, Cálculo diferencial e Cálculo integral. No Quadro 14, apresentamos alguns exemplos de definições de conceitos, nestes dois livros.

QUADRO 14. Exemplos de definição de conceitos nos livros de “Eisberg” e “Pessoa” nos quais se exigem conhecimentos prévios.

Eisberg	Explicação do <i>Efeito Compton</i> : “A presença do comprimento de onda λ' não pode ser compreendida se os raios X incidentes forem encarados como uma onda eletromagnética clássica. [...] no modelo clássico a onda espalhada deveria ter a mesma frequência ν e o mesmo comprimento de onda λ da onda incidente. Compton (e independentemente Debye) interpretou seus resultados experimentais postulando que o feixe de raios X incidente não era uma onda de frequência ν , mas um conjunto de fótons, cada um com energia $E = h\nu$, e que esses fótons colidiam com os elétrons livres do alvo da mesma forma que colidem duas bolas de bilhar”. (EISBERG; RESNICK. 1979 p. 59)
Pessoa	Definição da versão fraca da dualidade onda-partícula: “para qualquer objeto microscópico, pode-se realizar um experimento tipicamente ondulatório (como um de interferência), mas a detecção sempre se dá através de uma troca pontual de um pacote mínimo de energia”. (PESSOA. 2006. p.3)

Observamos que as exigências implícitas de conhecimentos prévios têm a ver com o domínio de conceitos básicos da Física e o domínio de campos específicos da Matemática, que se espera garantam a aquisição de uma linguagem por parte do aluno, que lhe permita comunicar-se, uma vez que todos os conceitos tratados precisam do uso de palavras e símbolos que representam abstrações e relações já construídas pelos cientistas.

Em geral, podemos dizer que os gráficos são utilizados para representar a relação entre as grandezas envolvidas numa situação a ser resolvida, pois auxiliam a explicação do fenômeno ao permitir visualizar o tipo de relações entre as grandezas que descrevem o comportamento de um determinado sistema. Por sua vez, as figuras e fotografias são utilizadas, principalmente, para ilustrar os arranjos experimentais.

Nos livros de Física moderna, observamos o uso da história com a finalidade de apresentar os nomes, as épocas e os autores de descobertas que permitiram conformar a teoria da mecânica quântica, uma vez que os símbolos por eles introduzidos, tanto como seus questionamentos sobre a interpretação dos modelos teóricos, são utilizados na formulação dos problemas a serem resolvidos nos livros.

Particularmente, no livro de Eisberg, a justificativa para a introdução de dados ou informações da história é com base na necessidade de apresentar o surgimento e evolução dos conceitos, ao examinar a capacidade explicativa dos modelos da mecânica clássica. Já no livro de Pessoa, a apresentação da história não obedece à uma evolução dos conceitos, mas à análise de alguns fatos importantes ou paradigmáticos na conformação da mecânica quântica.

Todo o estudo anterior permite-nos dizer que, em síntese, o que se espera que o aluno faça para aprender a Física, tanto nos livros de Física clássica como nos de Física Quântica é:

- descrever uma situação física, considerando todos os condicionantes do sistema;

- compreender a relação entre as grandezas envolvidas no fenômeno em estudo;
- identificar as equações apropriadas para representar um determinado fenômeno;
- elaborar e interpretar gráficos, que representem a relação entre as grandezas físicas;
- aplicar o formalismo matemático para resolver problemas propostos pelos autores.

Esses aspectos indicam que há uma preocupação por levar o aluno à compreensão dos formalismos matemáticos, como modelos explicativos dos fenômenos físicos. Porém, há um alto risco de confundir esta linguagem matemática associada aos fenômenos físicos com uma linguagem puramente matemática, dado que os objetos de estudo podem tornar-se altamente abstratos para os alunos, distanciando-se da experiência real e da coerência que suas formas de pensamento lhes permitem, já que a resolução dos problemas pode se limitar a um trabalho meramente matemático.

Nesse sentido, os pesquisadores de ensino de Física, mencionados no segundo capítulo, chamam a atenção sobre a importância de desenvolver processos de explicação, que vão gerando maiores níveis de aperfeiçoamento, com base no desenvolvimento de novas maneiras de raciocinar, por parte dos alunos, que não, necessariamente, obedecem à evolução histórica dos conceitos, mas que envolvem o aperfeiçoamento de sua linguagem.

5.3. Tipo de problemas que o aluno deve resolver para consolidar sua aprendizagem

Dado que a natureza dos livros é expositiva, a interação com o aluno leitor ocorre a partir de questões que são propostas para ele responder no percurso da leitura. Visa testar sua compreensão do conteúdo, e também, a partir de exercícios e problemas propostos para treinar o uso de formalismos matemáticos, face às diversas situações criadas, especificamente, para este fim. Neste aspecto, a diferença entre os quatro livros, além do tipo de conteúdos, é, basicamente, na quantidade de problemas e nos níveis de dificuldade dos problemas, como apresentamos a seguir.

- No livro de Halliday, apresentam-se questões, nomeadas como “teste”, depois da definição de cada conceito, visando levar o aluno a aplicar o conceito apresentado. Exemplo, depois de definir “posição e deslocamento”, coloca-se o teste: “Considere três pares de posições iniciais e finais, respectivamente, ao longo do eixo x . A quais dos pares correspondem deslocamentos negativos?: (a) -3m , $+5\text{m}$; (b) -3m , -7m ; (c) 7m , -3m ?” (p.16). São exercícios que não pedem o cálculo de um valor, mas a aplicação do conceito para

deduzir um tipo de comportamento do sistema colocado. Com este mesmo objetivo, são propostas nove questões, no final do capítulo.

Mas também, apresentam-se no final do capítulo 118 problemas, categorizados em três níveis de dificuldade. No nível um, precisa-se aplicar uma equação para calcular um valor solicitado; no nível dois, exige-se o uso de mais de uma equação e também a interpretação de gráficos e; no nível três, além do anterior, exige-se deduzir outras equações por combinação das equações básicas ou análises de gráficos, como se observa nos exemplos a seguir, para os quais fizemos o exercício de resolvê-los, visando identificar um caminho possível para sua solução.

QUADRO 15. Exemplos de problemas apresentados no livro de Halliday, em três níveis de dificuldade, para os quais indicamos possíveis etapas da solução.

Nível	Problemas e possível caminho para sua solução
1	<p>Problema “Durante um espirro, os olhos podem se fechar por até 0,50 s. Se você está dirigindo um carro a 90Km/h e espirra, de quanto o carro pode se deslocar até você abrir novamente os olhos?” (p.33).</p> <p>Procedimento geral para a solução</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Identificar que se trata de um movimento retilíneo com velocidade constante. 2. Identificar que a pergunta é sobre a distância que percorre o automóvel durante 0,5s. 3. Identificar os dados fornecidos e fazer a conversão de unidades. 4. Aplicar a equação de deslocamento para velocidade constante a fim de calcular a distância percorrida.
2	<p>Problema “uma bola de argila úmida cai 15,0 m até o chão e permanece em contato com o solo por 20,0 m antes de parar completamente. (a) Qual é o módulo da aceleração média da bola durante o tempo de contato com o solo? (trate a bola como uma partícula) (b) A aceleração média é para cima ou para baixo?” (p.37)</p> <p>Procedimento geral para a solução</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Dividir a análise da situação em duas partes, a primeira desde que a bola começa cair até chegar no chão e a segunda a partir de que toca o solo até parar, sabendo que a velocidade inicial da segunda parte é a velocidade final da primeira. 2. Caracterizar o tipo de movimento sendo que a primeira parte é uma queda livre, e a segunda parte é um movimento acelerado uniforme retilíneo. 3. Transformar todos os dados fornecidos ao mesmo tipo de unidades. 4. Selecionar as equações a ser aplicadas, as quais devem permitir: calcular a velocidade final da primeira parte do movimento e com esse dado mais os dados fornecidos calcular a aceleração média na segunda parte do movimento.
3	<p>Problema “Ao pegar um rebote, um jogador de basquete pula 76,0 cm verticalmente. Qual o tempo total (de subida e descida) que o jogador passa (a) nos 15 cm mais altos e (b) nos 15 cm mais baixos do salto? Esses resultados explicam por que os jogadores de basquete parecem flutuar no ar quando saltam?” (p.37)</p> <p>Procedimento geral para a solução</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Identificar o tipo de movimento retilíneo uniformemente acelerado em sentido positivo e negativo, considerar que o tempo que gasta subindo é o mesmo que gasta descendo, considerar também que a velocidade inicial da queda é zero e que a aceleração da gravidade é $g=9,8 \text{ m/s}^2$. 2. Dividir a análise do movimento em duas partes: a primeira considerando os 15 cm percorridos depois de que o jogador ocupa a posição mais alta; a segunda considerando os últimos 15 cm da queda do jogador, para o qual se precisa o valor de velocidade inicial e o valor da altura total que caiu, assim, se pode calcular a velocidade final quando caiu 61 cm e quando caiu 76 cm. 3. Transformar todos os dados fornecidos ao mesmo tipo de unidades. 4. Aplicar as equações para calcular o tempo e as velocidades finais na queda livre.

Ao estudar o movimento retilíneo com velocidade constante e com aceleração constante, é exigido do aluno, identificar, em primeiro lugar, o tipo de movimento que está ocorrendo na situação colocada, a fim de associar os dados fornecidos às condições do movimento. O autor entende que o aluno deve dominar ideias como, por exemplo: que uma bola ao ser arremessada na vertical sobe e desce com o mesmo módulo de aceleração e também deve saber que a velocidade no ponto em que a bola começa a descer é zero. Além disso, o aluno deve saber que para trabalhar com o formalismo matemático deve expressar todas as quantidades no mesmo tipo de unidades. Este conhecimento, junto com o domínio de manipulação algébrica das equações é o que demonstrará que o aluno compreendeu os conteúdos apresentados no capítulo.

QUADRO 16. Exemplos de problemas apresentados no livro de Nussensveig, para os quais indicamos possíveis etapas de sua solução.

Ex.	Problemas e possível caminho para sua solução
1	<p>Problema</p> <p>“Na célebre corrida entre a lebre e a tartaruga, a velocidade da lebre é de 30 Km/h e a da tartaruga é de 1,5 m/min. A distância a percorrer é de 600 m, e a lebre corre durante 0,5 min antes de parar para uma soneca. Qual é a duração máxima da soneca para que a lebre não perca a corrida? Resolva analiticamente e graficamente.” (p.37)</p> <p>Procedimento geral para a solução</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Converter os dados fornecidos ao mesmo tipo de unidades, expressando tudo em termos de metros por segundo. 2. Identificar os trechos do movimento com velocidade constante. De 0 a 30s e de 30s ao tempo final, sendo que este é o valor a ser calculado. 3. Calcular o tempo que gasta a tartaruga e a distância que percorre a lebre em 30s. 4. Determinar quanto deve percorrer a lebre para chegar na meta depois de que parou e quanto tempo gastaria. 5. Do tempo total empregado pela tartaruga resta-se o tempo que levaria a lebre para chegar na meta e assim saber quanto tempo poderia dormir.
2	<p>Problema</p> <p>“O gráfico da figura (V vs t) representa a marcação do velocímetro de um automóvel em função do tempo. Trace os gráficos correspondentes da aceleração e do espaço percorrido pelo automóvel em função do tempo. Qual é a aceleração média do automóvel entre $t=0$ e $t=1min$? E entre $t=2min$ e $t=3min$?.” (p.37)</p> <p>Procedimento geral para a solução</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Interpretar o gráfico para obter o dado do tempo total empregado pelo automóvel. 2. Identificar o tipo de movimento para cada intervalo do gráfico. Sendo que uns deles são movimentos com aceleração constante (positiva ou negativa) e outros são movimentos com aceleração zero. 3. Tendo o valor do tempo e da velocidade em cada intervalo do gráfico, se elabora uma tabela de dados de tempo vs aceleração para elaborar o respectivo gráfico. 4. Utilizando o primeiro gráfico calcula-se a distância percorrida em cada intervalo e constrói-se a tabela de dados da distância percorrida vs tempo para elaborar o respectivo gráfico. Dado que os valores calculados são apenas para os pontos iniciais e finais de cada intervalo, é preciso conhecer o tipo de gráfico representativo dos diferentes tipos de movimento para representar adequadamente a forma da curva que une cada ponto. 5. Calcular a aceleração média a partir do gráfico ao considerar o tempo e a velocidade final e inicial do trecho indicado.

- Entretanto, no livro de Nussenzveig, são propostos 18 problemas no final do capítulo, sem diferenciar níveis de dificuldade. Observa-se que eles correspondem a

exercícios, que exigem o cálculo de um valor desconhecido, a partir de dados fornecidos ou a partir de análise de gráficos.

Nota-se que para resolver esses problemas, é exigido do aluno: identificar o tipo de movimento; representar graficamente os diversos movimentos; interpretar os gráficos para retirar dados; converter unidades; desenvolver demonstrações matemáticas de obtenção de equações e; reconhecer plenamente os usos das derivadas e integrais no processo de resolução.

- Já na Física Quântica, no livro de Eisberg, são propostas 23 questões, no final do capítulo, que visam levar o aluno a verificar sua compreensão dos conceitos apresentados. Exemplo: “Por que mesmo para a radiação incidente monocromática os fotoelétrons são emitidos com velocidades diferentes?” (p.79). Também são propostos 29 problemas sem discriminar níveis ou tipos. O aluno poderá imaginar o sistema físico que está sendo descrito, com base nos fenômenos apresentados, que para o caso é o efeito fotoelétrico, sobre os quais deverá aplicar equações, calculando um valor solicitado ou representar, graficamente, o comportamento da relação entre variáveis com base em dados, sejam fornecidos ou encontrados como parte do problema.

QUADRO 17 Exemplos de problemas apresentados no livro de Eisberg, para os quais indicamos possíveis etapas para a solução.

Ex.	Problemas e possível caminho para sua solução
2	<p>Problema A função trabalho para uma superfície de lítio lisa é $2,3 \text{ eV}$. Faça um esboço do gráfico do potencial de corte V_c contra a frequência da luz incidente para uma tal superfície, indicando suas características importantes. (p.81)</p> <p>Procedimento geral para a solução</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Sabendo que a pergunta é para fazer um esboço de gráfico, é preciso lembrar qual é a relação entre frequência e potencial de corte, no efeito fotoelétrico, na qual existe um limiar de frequência abaixo do qual o efeito não ocorre e depois de ocorrer existe uma relação linear entre o aumento da frequência e o aumento do potencial de corte. 2. Calcular o valor mínimo da frequência, utilizando a fórmula da Energia como o produto entre a constante de Planck e a frequência, e a partir daí, calcula-se o comprimento de onda. 3. Elaborar o esboço do gráfico, a partir do valor mínimo da frequência.
1	<p>Problema Considere que sobre uma placa fotográfica incide luz. A luz será “gravada” se dissociar uma molécula de AgBr da placa. A energia mínima necessária para dissociar essa molécula é da ordem de 10^{19} J. Calcule o comprimento de onda de corte, acima do qual a luz não vai sensibilizar a placa fotográfica. (p.81)</p> <p>Procedimento geral para a solução</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Associar esta situação com uma evidência do efeito fotoelétrico ocorrendo em um material conhecido, como é o bromo de prata para o qual já se conhece o valor da energia mínima necessária para dissociar essa molécula. 2. A partir do valor mínimo de energia, considerar a equação de Energia para determinar o valor do comprimento de onda.

Observa-se que resolver estes problemas exige que o aluno possua conhecimentos de física ondulatória, como o fato de ter que saber que a frequência é o inverso do comprimento de onda. Também o aluno precisa identificar as variáveis envolvidas no fenômeno com sua respectiva representação simbólica, por exemplo, ao falar de energia, esta pode ser dada em unidades de eletronsvolts (eV) ou de Joules (J), de modo que o aluno precisa saber em qual caso pode usar qual representação.

- Por fim, no livro de Pessoa, são apresentados quatro exercícios, no final do livro referentes ao capítulo, nos quais o aluno leitor deve responder questões para testar a compreensão do conteúdo apresentado.

QUADRO 18. Exemplos de problemas apresentados no livro de Pessoa, para os quais indicamos possíveis etapas da solução.

Problema e possível caminho para sua solução
<p>Problema</p> <p>Na Fig. I.3 ilustramos a superposição de ondas contínuas unidimensionais (de iguais amplitude Ψ e comprimento de onda λ) rumando no mesmo sentido. O que acontece quando duas dessas ondas rumando em sentidos <i>opostos</i> se superpõem?" (p.163)</p> <p>Procedimento geral para a solução</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Reconhecimento do princípio de superposição da física de ondas clássicas. 2. Explicação de que quando duas ondas se superpõem, suas amplitudes se somam, às vezes em interferência construtiva e outras vezes em interferência destrutiva, portanto a onda resultante varia sua amplitude em função do tempo.

Dos tipos de problemas colocados nos quatro livros, com seus respectivos requisitos de conhecimentos para poder elaborar uma solução, inferimos que os problemas a resolver, em geral, exigem dos alunos:

- Responder perguntas, oferecendo explicações com base nos conteúdos apresentados;
- Aprender critérios para selecionar formalismos matemáticos a fim de calcular algum valor numérico;
- Elaborar e interpretar gráficos;
- Encontrar a resposta esperada de acordo com o conteúdo apresentado no capítulo.

Nota-se que estes aspectos apresentam uma grande semelhança com os aspectos que concluímos no item anterior, a respeito do que se espera que o aluno faça para aprender a Física, que interpretamos como que a aprendizagem da Física nestas propostas têm uma forte ênfase no aprendizado da resolução de problemas teóricos propostos pelos autores, com os respectivos conhecimentos prévios que isso exige. Nestes livros a proposta de “problemas”,

“exercícios” ou “questões” é principalmente visando oportunizar ao aluno a comprovação de sua compreensão dos conceitos definidos, onde tais conceitos são definidos com base no comportamento de situações que foram idealizadas pelos cientistas com interesse na simplicidade das representações construídas.

5.4. Significados atribuídos à “Matematização da Física” no ensino de Física, a partir dos livros didáticos.

Visando inferir qual é o sentido de “Matematização da Física” para o Ensino de Física que está implícita na proposta dos livros didáticos universitários, tomamos como categorias de análise as três categorias criadas, a partir de resultados de pesquisa, durante a última década, segundo o que foi apresentado no capítulo três. Para tanto, comparamos as principais características de cada uma das categorias com as principais características observadas nos quatro livros analisados.

Assim, inferimos que a perspectiva desses quatro livros não se aproxima da perspectiva de “Matematização da Física”, caracterizada na categoria *FenomMat*, uma vez que, nesta categoria, propõe-se introduzir os modelos matemáticos no processo de ensino, somente depois de o aluno ter se envolvido na análise conceitual de alguma situação real, que lhe exija considerar sua experiência sensorial e aprimorar as explicações de tal experiência. Nesta categoria é fundamental a descrição que o aluno faz dos eventos em estudo, já que o processo de ensino implica orientar as formas de raciocinar, que o aluno expressa em suas descrições e explicações qualitativas, até chegar numa determinada formalização de sua linguagem, que será comparada com a formalização estabelecida pela ciência.

Podemos dizer que no conteúdo dos livros, não observamos referências ao estudo de situações, nas quais esteja envolvida, de forma direta, a experiência sensorial do aluno, nem propostas para trabalhar em torno de problemas reais, que o aluno leitor esteja vivenciando ou possa vivenciar, com base em sugestões da leitura e a partir dos quais sejam constituídos os problemas a serem resolvidos. Observamos que as situações colocadas nos livros de FC têm relação com a vida cotidiana, porém é apenas no sentido de ilustrar ou ambientar os exemplos e problemas, os quais podem ser imaginados, sem necessidade de ir à experiência real.

Inferimos também, que em geral, esses quatro livros também não se aproximam da ideia de “Matematização da Física”, caracterizada na categoria *ProcesFisMat*, segundo a qual os problemas a serem resolvidos pelo aluno giram em torno do planejamento, que o aluno faz para resolver um problema que foi colocado, sabendo que podem existir vários caminhos para

a resolução do problema e também diversas respostas que poderão ser comparadas entre si, procurando consensos, tanto nas descrições qualitativas, como quantitativas dos conceitos.

Embora tanto a sequência de apresentação dos conceitos, quanto as questões e problemas colocados nos livros analisados exijam que o aluno compreenda o fenômeno em estudo e também a formalização matemática, com a qual se representa o comportamento de tal fenômeno, estes não têm como objetivo principal a formação do aluno. Os processos de raciocínio não o levam à elaboração do modelo explicativo, por meio de atividades que peçam por exemplo, gerar hipóteses, planejar métodos por meio dos quais testar tais hipóteses, propor diversas explicações, concluir e socializar para, posteriormente, comparar com a formalização matemática estabelecida pelos cientistas. Os alunos não são convidados a propor enunciados de problemas, nem os problemas considerados tratam de “desafios” para os alunos, no sentido de pedir para eles construírem argumentos para poder decidir o processo de resolução do problema e também decidirem entre várias respostas qual seria a mais pertinente.

Finalmente, inferimos que a tendência geral destes livros didáticos aproxima-se da perspectiva de “Matematização da Física”, caracterizada na categoria *ModelMat*, uma vez que tanto a sequência de conteúdos apresentados, quanto os problemas propostos visam levar o aluno a compreender a razão de ser dos formalismos matemáticos utilizados para representar situações, nas quais acontece algum fenômeno físico, que por sua vez, exige que o aluno compreenda os conceitos envolvidos na descrição de tal fenômeno.

Podemos afirmar que as propostas dos livros didáticos se enquadram na categoria *ModelMat*, com base em aspectos como:

- O eixo que orienta o processo de ensino de Física é a compreensão da modelização matemática já desenvolvida pela ciência.

- A relação com o cotidiano do aluno é a partir de situações que poderiam ser da vida rotineira, mas consideradas de forma idealizada, o que implica um nível de abstração que é dado ao utilizar o formalismo matemático, para representar a relação entre as grandezas envolvidas no fenômeno, uma vez que tais formalismos exigem, por exemplo, considerar objetos como partículas, trajetórias retilíneas, que na vida real não poderiam ser assim, etc.

- A linguagem para se comunicar com os alunos vai sendo apresentada, na medida em que vão sendo apresentados os formalismos. Isto significa que a linguagem é baseada nos formalismos matemáticos, não somente, no que se refere a símbolos e equações, mas também com relação à representação gráfica da relação entre grandezas e a interpretação dos gráficos.

- Exige-se do aluno um conhecimento básico ou técnico de alguns formalismos da matemática, a fim de facilitar a compreensão de sua aplicação na descrição de determinados sistemas físicos.

Porém, simultaneamente, com a aproximação da categoria *ModelMat* nos aspectos antes mencionados, também se distancia desta categoria, no que se refere aos possíveis usos da história no processo de ensino, uma vez que nos livros didáticos de FC, praticamente, não é utilizada a história e nos livros de FQ, é utilizada como critério de apresentação da sequência de conteúdos, onde são apresentadas as controvérsias ocorridas na história e que geraram novas representações.

No caso de Eisberg, por exemplo, usa-se para apresentar a ordem cronológica em que foi se consolidando a teoria, com seus respectivos autores, enquanto no livro de Pessoa a história não é usada para apresentar uma ordem cronológica, mas para apresentar as diversas controvérsias, que os cientistas foram encarando, ao interpretar os modelos teóricos que explicam os resultados observados experimentalmente.

Em nenhum dos casos, a história, porém, é utilizada para gerar controvérsias nos alunos. Por exemplo, ao ter que decidir entre dois modelos explicativos, nem para desenvolver um raciocínio sobre a conveniência de uma representação algébrica versus uma representação geométrica ou a análise aprofundada sobre o significado de formalismos, como a derivada e a integral na representação de um fenômeno. Da mesma maneira que as fotografias, figuras e esquemas são utilizados para ilustrar ou ambientar as situações em estudo, não para serem problematizadas.

Em geral, podemos dizer que o processo que se espera que o aluno desenvolva é orientado pelo rumo em que se deu a matematização das representações dos fenômenos físicos ao longo da história. Isto é, os autores fazem uma transposição direta entre a Matematização da Física ao longo da história e a Matematização que se deve desenvolver em sala de aula. Em consequência, assume-se que o que deve ser ensinado é o resultado da Matematização da Física ao longo da história e não as condições para que tal Matematização acontecesse; podendo ser, assim, um tema de ensino.

Embora tenhamos ciência de que o mero uso do livro em sala de aula não implica que o exercício de ensino corresponda, estritamente, à proposta do livro, uma vez que ele sozinho não tem o poder de autodeterminar uma sequência de atividades, uma maneira de explicação, uma linguagem, etc., é visto como material de consulta em processos de ensino, orientados por qualquer uma das categorias mencionadas. Mas é claro, que se tomado como guia de

trabalho em sala de aula, vai fornecer sim, ideias sobre a natureza de ciência, a relação entre Física e Matemática, processos a ser desenvolvidos com alunos, avaliação de alunos, etc.

Gostaríamos, portanto, de salientar que com esta análise, não estamos querendo dizer que os livros estejam certos ou errados por estar mais próximos de uma categoria do que as outras ou por não ter nenhuma relação com alguma categoria. Estamos querendo descrever o “estado” da proposta de ensino de Física, que subjaz nos livros ao serem analisados, a partir destas três categorias de entendimento da “Matematização da Física”, no Ensino de Física, a fim de ampliar a compreensão da função que os livros podem vir a cumprir em um processo de ensino e aprendizagem da Física.

É por isso que nos próximos capítulos, continuaremos complementando estes resultados com a análise da observação de professores e alunos em disciplinas de Física, especificamente, com relação a suas maneiras de explicar os conteúdos e sua relação com a “Matematização da Física” no ensino e aprendizagem.

SEGUNDA PARTE: SIGNIFICADOS SOBRE MATEMATIZAÇÃO DA FÍSICA NAS ATIVIDADES DIDÁTICAS DE PROFESSORES.

A fim de responder à questão sobre: “Como a “Matematização da Física” costuma estar presente na organização das atividades didáticas e discursos de professores de Física de um curso de Licenciatura em Física?”, analisamos dados que foram constituídos com base em duas fontes de informação: sujeitos e espaços. Os sujeitos foram professores e os espaços foram as respectivas disciplinas de Física ministradas pelos professores da amostra, em um curso de Licenciatura em Física. Para a constituição de dados, utilizamos a observação de aulas e dados obtidos através da aplicação de questionário (Apêndice O p.223).

A observação se desenvolveu durante um ano e meio, em disciplinas de Física oferecidas em primeiro, terceiro, sexto e sétimo semestre, sendo elas respectivamente, Física I, Física III, Física Moderna I e Laboratório de Física Moderna. Simultaneamente, fomos elaborando o questionário que aplicamos aos professores que ministraram estas disciplinas (Apêndice L p.215) no final de todo o processo de observação. Para melhor entendimento do contexto das aulas observadas podem-se consultar as fichas de caracterização da Universidade

e do respectivo curso de Licenciatura em Física em que foi desenvolvida esta pesquisa, nos Apêndices M (p. 218) e N (p.220).

A fim de registrar a observação elaboramos um roteiro (ver Apêndice F p.194), que consta de 12 indicadores de observação com os quais visamos detectar evidências das maneiras em que os professores utilizaram os formalismos matemáticos, durante a apresentação dos conteúdos que ensinaram. Da mesma forma, visamos encontrar evidências dos critérios que aplicaram para suas escolhas de recursos de apoio, tipo de atividades e sequências de atividades em sala de aula. Ao mesmo tempo procuramos registrar aspectos da linguagem utilizada pelos professores nas explicações oferecidas aos licenciandos.

Com relação ao questionário, este constou de duas perguntas, ver Apêndice G (p.195), as quais indagaram, especificamente, pelos critérios que os professores aplicaram na hora de explicar um fenômeno físico e de planejar a aula. Tais perguntas foram:

- 1) *Descreva o processo que você costuma utilizar para explicar um fenômeno da Física.*
- 2) *No planejamento da aula o que você prioriza?*

A análise da comparação dos dados obtidos por meio da observação e do questionário foi elaborada com base nas três questões que fundamentaram a constituição das categorias de “Matematização da Física” no ensino, apresentadas no capítulo três. Isto é, tentando determinar de que maneira os professores entendem a relação entre Física e Matemática, o que consideram que os licenciandos devem aprender em Física e qual o tipo de problemas que se devem resolver para ensinar. A seguir, apresentamos os resultados obtidos nestes três aspectos.

Salientamos, que para efeitos práticos, identificaremos cada um dos quatro professores observados com os símbolos P_1 , P_2 , P_3 e P_4 . e também as disciplinas de Física I, Física III, Física Moderna I e Laboratório de Física Moderna, respectivamente como FI, FIII, FMI e LFM.

5.5. Relações entre Física e Matemática segundo os professores

Tanto nos registros de observação, quanto nas respostas aos questionários, pudemos identificar uma tendência a relacionar a Matemática da Física de um modo que pode ser generalizado para os quatro professores, com algumas diferenças.

Por exemplo, nas respostas à questão sobre o processo de explicação que eles dizem adotar em sala de aula, todos descrevem sequências, nas quais, em geral, começa-se com a apresentação do fenômeno físico a ser estudado, em seguida, apresenta-se a análise dos

conceitos envolvidos com a dedução e formalização matemática, para, finalmente, utilizar tais formalismos na resolução de problemas conceituais, no caso das disciplinas teóricas ou de tomada e análise de dados, no caso da disciplina experimental, como se pode observar no Quadro 19

QUADRO 19. Síntese da sequência utilizada no processo de explicação dos tópicos de Física, conforme descrição dos professores da amostra.

Professores	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄
Disciplina	Física I (FI)	Física III (FIII)	Física Moderna I (FMI)	Lab. Física Moderna (LFM)
Sequência descrita	1. Apresentação do fenômeno (a partir da discussão do desenvolvimento histórico dos conceitos). 2. Definição dos conceitos. 3. Resolução de problemas.	1. Apresentação do fenômeno físico (destacando alguns aspectos históricos e impactos sociais associados). 2. Descrição matemática do fenômeno. 3. Formulação de questões conceituais. 4. Resolução de problemas.	1. Apresentação do professor (aulas expositivas) sobre os experimentos e efeitos em estudo. 2. Apresentação de trabalhos por parte do aluno analisando os conceitos envolvidos. 3. Resolução de problemas.	1. Apresentação do fenômeno a ser estudado (a partir do conhecimento prévio dos alunos sobre as teorias). 2. Explicação dos experimentos a serem realizados no laboratório (as hipóteses de partida e a lei que vai ser comprovada). 3. Explicação das leis e equações envolvidas para atingir os objetivos da prática. 4. Desenvolvimento da prática de laboratório e análise dos resultados obtidos.

Assim, podemos inferir que os professores, de forma geral, compartilham formas recorrentes similares para a explicação de assuntos de Física. Eles se centram no estudo de um fenômeno com base na definição dos conceitos envolvidos, os quais são apresentados por meio da formulação das equações e suas respectivas aplicações na resolução de problemas.

Porém, ao analisar alguns detalhes nas respostas dos professores junto com o que foi observado, encontramos que a relação entre Física e Matemática costuma ser entendida como sendo a Matemática uma ferramenta que fornece expressões e/ou modelos que subsidiam a descrição e compreensão dos conceitos físicos. Existem nessa relação, ao menos duas formas de entendimento da função da Matematização, no ensino de Física:

1- Para dois professores (P₁, P₃), o processo de ensino da Física deve conter uma fase de análise conceitual prévia à fase de uso de formalismos matemáticos e à aplicação deles na resolução de problemas,

2- Para dois professores (P₂, P₄), a apresentação dos conceitos faz-se com base na descrição das equações que representam o comportamento dos sistemas físicos estudados, sendo que as demonstrações ou deduções das equações matemáticas fazem parte da apresentação conceitual do fenômeno.

A primeira inferência é que estas formas de entendimento não parecem depender se a Física ensinada é clássica ou moderna, dado que, nos dois casos, há um professor de cada temática. No primeiro caso, a análise conceitual deve ser desenvolvida de forma qualitativa, estabelecendo relações com o cotidiano, com as problemáticas que foram resolvidas na história ou por meio de analogias entre conceitos, como se pode observar nas respostas dos professores P_1 e P_3 , que ministravam, respectivamente, as disciplinas de FI e FMI.

Consideramos importante ressaltar que estas não são as respostas literais dos professores, mas paráfrases feitas, a fim de sintetizar os textos com foco no assunto da Matemática.

P_1 (FI): O entendimento conceitual é uma parte do processo que prepara o aluno para a Matemática do fenômeno, sendo que tal matemática é a que permite resolver os problemas colocados.

P_3 (FMI): Há uma parte na explicação que é puramente conceitual na qual se estabelecem analogias entre conceitos da mecânica clássica e quântica. A parte do uso de formalismo matemático é com base na resolução de problemas.

Entretanto, no segundo caso, a formalização matemática das leis físicas é a que permite apresentar os conceitos e estudar o comportamento do fenômeno. Segundo os professores P_2 e P_4 , que ministravam, respectivamente, as disciplinas de FIII e LFM;

P_2 (FIII): A Matemática é uma ferramenta que permite aperfeiçoar a descrição do fenômeno. Os modelos matemáticos não são o todo do conhecimento da Física mas algumas vezes lhe permite avançar.

P_4 (LFM): As leis da Física devem ser acompanhadas da apresentação das equações envolvidas, algumas das quais precisam ser demonstradas.

Ideias que são confirmadas, quando foi perguntado para eles o que priorizam no planejamento da aula, permitindo evidenciar estas duas tendências.

Segundo os professores P_1 e P_3 , a prioridade é no entendimento conceitual e a explicação fenomenológica, enquanto para os professores P_2 e P_4 , a prioridade é na explicação dos conceitos, com base na descrição dos formalismos matemáticos, como se observa nas respostas a seguir:

P_1 (FI): A prioridade é o entendimento conceitual.

P_3 (FMI): A prioridade é a explicação fenomenológica apresentando conceitos de forma qualitativa.

P₂ (FIII): A prioridade é relacionar os conceitos entre si e apresentar os conceitos e sua descrição matemática de forma clara.

P₄ (LFM): A prioridade é a compreensão da situação física que envolve a aplicação das leis físicas na resolução de problemas.

Sem que isto signifique que o estudo da formalização matemática não faça parte do processo desenvolvido pelo primeiro grupo (P₁ e P₃) ou que a procura do entendimento conceitual não faça parte do processo desenvolvido pelo segundo grupo (P₂ e P₄), mas que o fato de priorizar uns aspectos sobre outros gera em cada caso uma perspectiva, a partir da qual se definem determinadas sequências de atividades em sala de aula. Exemplificamos a seguir com base nos resultados da observação.

Com relação ao P₁, observamos que uma das ações adotadas, visando apoiar o entendimento conceitual foi a realização de um seminário interno na disciplina, com duração de duas horas. Neste, apresentou-se o desenvolvimento histórico do conceito de energia, como introdução ao tema de “trabalho e energia”, buscando levar o aluno a refletir sobre o surgimento do termo “energia” e do princípio de conservação da energia, como produto de diversos eventos científicos e sociais que foram se combinando ao longo de vários séculos até chegar na formulação que, atualmente, encontra-se nos livros didáticos e, que, portanto, precisa ser interpretada a partir de uma visão mais ampla. Isto evidencia uma preocupação do professor com o desenvolvimento conceitual.

P₃ apresenta o fenômeno a ser estudado, utilizando recursos como simuladores, vídeos ou imagens trazidas da internet. Por exemplo, o simulador da experiência do efeito fotoelétrico foi apresentado para introduzir o tema, buscando, principalmente, guiar o aluno numa análise qualitativa da relação entre as variáveis envolvidas. Nesta atividade, o professor ia modificando o valor do potencial ou os valores de intensidade e frequência da luz que ilumina a placa e notando como varia o valor da intensidade da corrente fotoelétrica produzida. Assim, o professor foi discutindo com os alunos o porquê disso acontecer e foi complementando sua apresentação com informações sobre os cientistas, que fizeram aportes na construção dos conhecimentos que permitiram caracterizar este fenômeno e as questões que tais cientistas responderam em suas épocas.

Nos dois casos, procurou-se criar um ambiente, onde o aluno pudesse pensar sobre o fenômeno em estudo, e só depois desta familiarização, começou-se com a abordagem baseada na formalização matemática. Fase, na qual, aparecem diferenças em função da temática em estudo, uma vez que os conteúdos da disciplina de FI tratam da Mecânica Clássica, especificamente, o movimento, enquanto a disciplina de FMI como seu nome o diz, trata

sobre Física moderna, especificamente, sobre o surgimento da mecânica quântica, que envolve diferentes níveis de abstração e diferentes maneiras de utilizar a linguagem, como se observa nos seguintes exemplos.

QUADRO 20. Exemplos tomados da observação de aulas respeito à utilização das equações.

Utilização de equações como complemento à compreensão dos conceitos apresentados	<p>P₁ (Física I)</p> <p>Na aula de introdução ao movimento retilíneo uniforme, o professor começa fazendo perguntas para os alunos a fim de detectar suas ideias prévias sobre o conceito de rapidez, com base na experiência cotidiana. A partir das respostas leva-os a identificar a relação entre distância percorrida por um objeto e o tempo que gasta nesse movimento, o qual lhe permite introduzir os símbolos que representam a distância, o tempo, a rapidez e a aceleração. Posteriormente, deduz a equação de velocidade média $v_{med} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ que define o conceito de velocidade e que lhe permite por sua vez, definir a aceleração. Também, na explicação elabora gráficos de velocidade e espaço percorrido vs tempo, explicitando as relações entre as grandezas envolvidas.</p>	<p>P₃ (FMI)</p> <p>No tema “dualidade onda partícula”, o professor inicia a aula com uma projeção que contém a descrição das características das ondas ao ser comparadas com as características das partículas. Nesta comparação, o professor vai apresentado fatos que se podem explicar ao entender o fenômeno como ondulatório ou como corpuscular, falando das propriedades observáveis em um ou outro caso, tais como, reflexão, refração, interferência, difração, polarização e efeito fotoelétrico. Depois apresenta o experimento da dupla fenda e explica o que acontece nesta situação por meio de uma simulação no computador. Finalmente apresenta a equação do comprimento de onda de DeBroglie ($\lambda=h/p$). Como exemplo, faz a comparação dos valores de comprimento de onda de DeBroglie, para uma bola de beisebol e para um elétron, analisando o significado dos valores obtidos.</p>
Utilização de equações como base para a apresentação de conceitos	<p>P₂ (Física III)</p> <p>Na introdução da aula de forças entre cargas elétricas, o professor afirma que uma estratégia é imaginar as cargas elétricas como pontos matemáticos. Para definir a força entre as cargas, introduz a equação $F=kq_1q_2/r^2$ e a compara com a equação da lei de gravitação universal ($F=Gm_1m_2/r^2$), ressaltando que nos dois casos o valor da força tem relação inversa com a distância ao quadrado. Com base na interpretação das equações introduz a ideia de campo elétrico, como o espaço entre as cargas, o qual tem características particulares por causa do fenômeno elétrico.</p>	<p>P₄ (LFM)</p> <p>Dado o caráter experimental da disciplina, o professor P₄ entrega uma apostilha para os alunos, na qual descreve o arranjo experimental da gota de Millikan e disponibiliza as equações que permitirão calcular o valor da massa e carga elétrica da gotícula. Depois da leitura da apostilha o professor resolve as dúvidas dos alunos e descreve as relações presentes nas equações utilizadas por Millikan. Neste experimento se busca comprovar o comportamento discreto do valor da carga elétrica, para tanto, deverá ser calculado o radio da gotícula de óleo, a fim de determinar sua massa e densidade, assim como calcular a velocidade de subida da gotícula sob o efeito do campo elétrico e de descida sob o efeito da gravidade. Também se deverão considerar valores constantes medidos previamente à observação, como a temperatura, pressão atmosférica, densidade e viscosidade do ar.</p>

Para P₁, as equações são deduzidas com base em análises de situações que poderiam acontecer na realidade. O professor deduz a equação de velocidade média ($v_{med} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$) para coordenadas retangulares, a partir da ideia intuitiva de rapidez, levando o aluno a estudar a relação entre a distância percorrida por um objeto e o tempo que gasta. No meio deste diálogo, ele define os conceitos de velocidade e aceleração, sempre envolvendo as expressões

dos alunos, para o qual vai introduzindo os símbolos que representam as grandezas e as equações, que descrevem a relação entre elas, com o auxílio da elaboração de gráficos das respectivas funções.

Por sua vez, P₃ apresenta a formulação das equações, como solução à impossibilidade de aplicar as equações da Mecânica Clássica na descrição de resultados dos experimentos cruciais. O professor apresenta as explicações e propriedades dos sistemas quânticos, a partir da equação de Broglie ($p=h/\lambda$) que prevê o comprimento de onda de uma partícula material e resolve exercícios para encontrar o comprimento de onda para uma bola de beisebol e para um elétron. Com este exercício, pretende-se explicar para os alunos que uma partícula de matéria de tipo “clássica”, como uma bola de beisebol, pode ter associada uma onda de matéria da mesma forma que uma partícula de tipo “quântica”, das dimensões de um elétron, porém, seu comportamento é completamente diferente.

Em termos de processos de explicação das “explicações da Física”, significa que P₁ desenvolve a análise conceitual e a formalização da teoria com base em possíveis relações entre a experiência sensorial ou cotidiana do aluno e a linguagem que descreve o fenômeno, enquanto P₃ desenvolve tal análise e formalização com base em conhecimentos prévios da Mecânica Clássica que por sua vez envolve relação com a experiência sensorial, e questionamentos sobre sua aplicabilidade na descrição dos sistemas quânticos, sempre começando por descrições qualitativas dos sistemas.

Por sua vez, P₂ e P₄ entendem a apresentação e compreensão dos conceitos com base no estudo dos formalismos matemáticos. Expõem o fenômeno físico, explicando as condições do sistema que é observado de forma relacionada às representações matemáticas que o descrevem, o qual leva a estabelecer comparações entre equações que representam diversos fenômenos.

O professor P₂, por exemplo, enfatiza a necessidade de imaginar as cargas elétricas como cargas pontuais, sem tamanho e sem massa, já que é uma estratégia que permite imaginá-las como pontos matemáticos, cujo comportamento pode ser idealizado. Também, em outro momento, este professor utiliza a estratégia de comparar a equação de energia potencial em um sistema massa-mola ($u = \frac{kx^2}{2}$) com a equação de energia potencial elétrica ($u = \frac{cv^2}{2}$), visando mostrar as similitudes estruturais das equações para os dois casos, nos quais se pode falar de energia armazenada, mesmo tratando-se de tipos diferentes de energia.

O professor P₄ apresenta as equações básicas que descrevem o comportamento de um fenômeno e que permitem fazer medições e cálculos para “comprovar uma lei”, como o caso da apresentação do experimento de Millikan para a comprovação do comportamento do elétron, como cargas elétricas pontuais que têm um valor discreto, sabendo que neste experimento, o que se mede no laboratório não é diretamente a carga, mas a velocidade de partículas de óleo que foram ionizadas e que interagem com o campo elétrico criado e com o campo gravitacional sob determinadas condições, o que permite obter valores de carga elétrica por meio da equação que relaciona estas variáveis. Assim, o aluno deve compreender que a dedução do valor da carga elétrica só é possível de ser feita com base no pressuposto de que o valor da velocidade das partículas observadas pode ser obtido por meio das equações do movimento uniforme que, alemm disso devem ser combinadas com o modelo explicativo de campo elétrico e o modelo do comportamento das partículas em um meio denso.

Em geral, para os quatro casos, pode-se dizer que o processo começa pelo pressuposto da ocorrência de um fenômeno, a partir do qual se explicitam as grandezas envolvidas e os conceitos que permitem relacioná-las. Continua-se com a dedução e/ou apresentação das equações que representam o fenômeno, para, posteriormente, interpretar a equação em aspectos, como as unidades de medida das grandezas envolvidas, a relação das variáveis, a função de constantes de proporcionalidade e as possíveis aplicações na resolução de problemas. Porém, neste processo, há diferenças nas maneiras de chegar à interpretação das equações, ora como complemento à compreensão dos conceitos apresentados qualitativamente, ora como base para apresentar e definir os conceitos.

Ao comparar esta maneira de entender a relação entre Física e Matemática com o que se encontrou nos livros didáticos, podemos dizer que compartilham ideias com relação à função da Matematização da Física como estratégia de explicação dos fenômenos. Há uma diferença no sentido de que, no caso dos professores, a interação com os alunos permite aprofundar em atividades que visam a interpretação do significado das expressões ou modelos matemáticos que descrevem um fenômeno, seja ligando com os conhecimentos prévios dos alunos ou por meio de exemplos, que apresentam as aplicações e que possibilitam a explicação do processo de dedução de tais formalismos.

Em geral, os professores percorrem um caminho que leva o aluno a aprender sobre o tratamento quantitativo do fenômeno, indo da linguagem cotidiana ou das concepções prévias (sabendo que tais concepções incluem conhecimentos básicos de Física e Matemática), para uma linguagem que permita cada vez descrições mais racionais dos eventos.

Podemos dizer então, que as perspectivas dos professores, descritas neste item, têm como base, concepções similares às dos filósofos e historiadores da ciência apresentados no primeiro capítulo, no que se refere ao entendimento da Matemática, como uma linguagem que possibilita as explicações da Física. Por exemplo, no sentido expresso por Holton e Brush (1952/2001) que falam de como na construção da Física foram-se criando critérios para a aceitação dos conceitos como verdadeiros, atrelados às possibilidades de definição sem contradições internas, nem ambiguidades em termos de observáveis e efeitos mensuráveis e cada vez com maior capacidade de generalização. Ou, no sentido expresso por Carnap (1966/1973), quando diz que as representações abstratas que explicam o mundo físico contêm em si a essência do que é comunicado.

Já na comparação com a perspectiva dos pesquisadores do ensino de Matemática e de Física apresentados no capítulo dois, encontramos que o imaginário dos professores está mais próximo das ideias expressas pelos pesquisadores do ensino de Matemática do que dos pesquisadores do ensino de Física.

Os pesquisadores do ensino de Física compartilham a ideia de que por meio de processos de aplicação de modelos matemáticos é possível compreender a essência de tais modelos e, simultaneamente, a essência das situações reais que estão sendo descritas. Por exemplo, de acordo com Krygovska (1968), o fato de resolver um “verdadeiro problema” com base em uma situação real, exige que o aluno compreenda as dificuldades de passar de um esquema matemático à realidade e, portanto, leva à compreensão da coerência do esquema que descreve tal realidade. Freudenthal (2002) também diz que a Matematização implica ensinar por meio de um processo, que leve o aluno à organização de seu conhecimento com base na axiomatização, para, posteriormente, formalizar sua linguagem, através das simbolizações e finalmente esquematizar tal linguagem em forma de leis e regras que envolvem graus de abstração.

Entretanto, estes professores se distanciam de ideias de pesquisadores em Ensino de Física, como as de Bing e Redish (2009) e Hestenes (1996), quando defendem que é preciso formar o aluno em habilidades complexas de raciocínio e educá-los numa base epistemológica que lhes permita interpretar o papel da Matemática nos desenvolvimentos da Física, para o qual propõem processos de modelagem Matemática. Tal modelagem não depende só do desenvolvimento de processos matemáticos, mas também da formação de habilidades cognitivas apropriadas para produzir e usar modelos matemáticos. Em um processo de modelagem, a aplicação de modelos matemáticos na resolução de problemas da Física, é

apenas uma parte, já que é necessário orientar os alunos na reestruturação de suas intuições, com base no reconhecimento das propriedades dos sistemas físicos.

Tais habilidades são descritas por autores como Angell *et al.* (2008), como aquelas que permitem aos alunos ligar as representações experimentais com as conceituais ou utilizar múltiplas representações de um fenômeno físico, o que implica poder transitar entre exercícios de identificação, categorização, decisão, avaliação, conclusão e comunicação de uma explicação. Para Uhden *et al.* (2012) e Karam (2012), é preciso trabalhar com os alunos em habilidades estruturantes de pensamento, que se diferenciam das habilidades técnicas, sendo que as primeiras, referem-se à compreensão do caráter dedutivo dos formalismos, as analogias para imaginar fenômenos físicos desconhecidos, a construção de interpretação física das expressões matemáticas, a compreensão das limitações da intuição sensorial, a evolução nos níveis de abstração, entre outras, enquanto as segundas referem-se ao domínio instrumental de algoritmos, regras, gráficos e fórmulas na resolução de um problema teórico.

5.6. O que os alunos devem entender para aprender Física

A partir das respostas ao questionário, notamos uma tendência nos pressupostos sobre o que os alunos devem entender para aprender Física. Os professores consideram que os aspectos mais importantes são a compreensão dos conceitos e o domínio dos formalismos matemáticos, que descrevem o fenômeno e é testado por meio da aplicação das equações na resolução de problemas, junto com a capacidade de responder questões de tipo qualitativo, com base nos conceitos estudados. Perspectiva que claramente é consequência da maneira de entender a relação entre Física e Matemática descrita no item anterior.

Um aspecto comum em todos os casos é que a etapa de explicação de um conceito culmina com a aplicação de equações na resolução de problemas, porém, há diferenças sobre o que o aluno deve aprender antes de chegar nas aplicações. Por exemplo, para os professores P₁ e P₃, o aluno deve compreender os conceitos, começando por estudos de tipo qualitativo, tal como se observa nos seguintes depoimentos:

P₁-FI: Os alunos devem compreender os conceitos, aprender sobre a matematização do conceito e saber aplicar os formalismos na resolução de problemas.

P₃- FMI: Os alunos devem compreender o fenômeno, a partir da parte conceitual e também da parte de aplicação de equações na resolução de problemas. Devem saber diferenciar as particularidades da escala macroscópica e microscópica, em relação aos modelos explicativos da clássica e a quântica.

Nota-se que para eles o processo de explicação envolve a apresentação e aplicação dos formalismos matemáticos, como uma fase complementar ao estudo conceitual do fenômeno. Entretanto, para os professores P_2 e P_4 tal compreensão, dá-se com base no entendimento da maneira como usam-se os formalismos matemáticos. Segundo eles:

P_2 – FIII: Os alunos devem descrever os fenômenos por meio de ferramentas matemáticas, como o cálculo diferencial e integral. Também devem poder responder questões conceituais e resolver problemas, aplicando os conceitos abordados.

P_4 -LFM: Os alunos devem possuir conhecimentos prévios que lhes permitam identificar a teoria que vai ser estudada. Conhecer sobre os experimentos cruciais que permitiram gerar ou comprovar leis da Física. Saber as equações que lhe permitem fazer tomada de dados e analisar as informações coletadas.

Observa-se que para P_2 , as ferramentas matemáticas do cálculo diferencial e integral são o meio que permite descrever o fenômeno e portanto o conhecimento e domínio de tais ferramentas ajuda na compreensão dos conceitos. Já no caso do professor P_4 , espera-se que o aluno tenha um domínio básico da teoria que está sendo estudada; isto pode ser devido a que é uma disciplina avançada na estrutura curricular e também a que é de tipo experimental, onde se espera que o aluno aplique conhecimentos prévios da teoria, mas fazendo esta ressalva, entendemos que compartilha a mesma perspectiva em relação com a necessidade de conhecimento das relações expressas nos formalismos matemáticos que fundamentam as leis físicas.

Nos quatro casos, porém, há uma tendência geral nos procedimentos de análises das equações. Podemos dizer que a linguagem que se utiliza é principalmente científica, quer dizer, com base em expressões, símbolos e representações próprias do campo científico. Nos processos de apresentação e análise dos conceitos, em todos os casos, utilizam-se esquemas para representar arranjos experimentais ou situações físicas a serem estudadas, assim como gráficos para analisar equações.

Com relação ao uso de esquemas, encontramos por exemplo, que são utilizados para auxiliar a representação dos sistemas físicos a serem estudados, uma vez que permitem descrever as partes implicadas, as condições de ocorrência do fenômeno e os símbolos utilizados para representar as grandezas envolvidas, como se aprecia nas seguintes descrições do que foi observado no desenvolvimento das aulas:

QUADRO 21. Evidências observadas no desenvolvimento das aulas, com relação à utilização de representações dos fenômenos físicos em estudo.

P ₁ FI	P ₂ FIII	P ₃ FMI	P ₄ LFM
Faz o esquema de um sistema massa-mola para explicar o conceito de força elástica com base na equação $F = -kx$, indicando os valores da massa e da constante elástica da mola.	Desenha esquemas de circuitos elétricos indicando as partes que o compõem com a disposição das partes e seus valores. Desenha a seção transversal de um fio condutor representando elétrons em seu interior, indicando seu movimento com flechas que representam o fluxo de elétrons. Representa as linhas de campo e seus respectivos símbolos.	Leva para a sala de aula esquemas e desenhos previamente preparados no computador, principalmente de arranjos experimentais, como o do efeito fotoelétrico, a experiência de Compton ou a experiência da dupla fenda. Também modelos de interação entre partículas subatômicas, tais como a interação de Compton, a produção e aniquilação de pares ou o processo bremsstrahlung.	Faz esquemas dos arranjos experimentais como o do experimento da gota de Millikan. Utiliza símbolos que representam variáveis e parâmetros do fenômeno a ser observado na experimentação.

Já com relação ao uso de gráficos, são usados em todos os casos, principalmente, para representar e analisar a relação entre as variáveis. Sendo que a análise dos gráficos se constitui em um dos aspectos que todos os alunos devem dominar, uma vez que a partir da interpretação é possível detectar, se houve compreensão do comportamento do sistema físico. A seguir relatamos observações que evidenciam o uso de gráficos.

QUADRO 22. Evidências observadas no desenvolvimento das aulas, com relação à utilização de gráficos.

P ₁ FI	P ₂ FIII	P ₃ FMI	P ₄ LFM
Elabora o gráfico de velocidade vs tempo e analisa alguns intervalos de tempo, escolhidos a fim de determinar junto com os alunos qual o comportamento da velocidade (positiva, negativa, constante, variável). Os valores deduzidos na elaboração do gráfico são utilizados para a determinação dos valores da aceleração em função do tempo, respectivamente.	Ao estudar o comportamento de um capacitor elabora o gráfico de potencial vs distância, a fim de analisar a capacidade de armazenamento de carga com relação à distância entre as placas paralelas. Também o gráfico de intensidade de corrente vs tempo, para estudar a carga e descarga de um capacitor, a partir dos quais pretende ampliar o entendimento das características do capacitor.	Não desenha os gráficos no quadro, mas traz gráficos previamente elaborados ou disponíveis na internet, a fim de apresentar e analisar a relação entre variáveis como frequência vs energia, corrente (no coletor) vs energia cinética, comprimento de onda vs amplitude para a soma de ondas.	Os alunos devem elaborar o gráfico de tensão vs velocidade, para obter a razão entre a constante de Planck e a carga do elétron (h/e).

Inferimos que os alunos devem aprender a utilizar diferentes formas de representação dos fenômenos, tais como representações simbólicas das grandezas, representações pictóricas

ou esquemáticas dos sistemas em estudo, representações gráficas da relação entre variáveis e representações formais com base nos algoritmos matemáticos.

Embora se possa dizer que o propósito de que o aluno aprenda a descrever os fenômenos com base nestes tipos de representação, corresponderia à perspectiva de pesquisadores de Ensino de Física, como Guttusrud e Angell (2010), que propõem a formação de habilidades de raciocínio que lhe permitam ao aluno transitar entre diversos tipos de representações (gráficas, pictóricas, conceituais e matemáticas), não se pode dizer que haja evidências de desenvolvimento de processos específicos para a formação de tais habilidades, uma vez que o que se observou é que o professor efetivamente transita pelos tipos de representações e demonstra para os alunos como o faz, com o propósito de que o aluno aprenda por imitação mas sem desenvolver processos específicos os alunos façam aquele transito entre as representação de maneira consciente e refletiva, dado que por exemplo, não foram detectados exercícios, nos quais o aluno tivesse que questionar, criticar ou reformular as representações apresentadas.

5.7. Tipo de problemas que o aluno deve resolver

Encontramos que a principal diferença entre o tipo de problemas a ser resolvido pelos alunos, aparece como consequência das diferentes naturezas das disciplinas. Os professores de disciplinas teóricas não fazem preferência às práticas experimentais e nas disciplinas experimentais o conteúdo é desenvolvido em torno das práticas realizadas no laboratório junto com os experimentos disponibilizados, sem uso de resolução de problemas de tipo teórico. Porém, no fundo, todos compartilham a mesma concepção com relação à importância de aplicar as equações para a melhor compreensão das situações físicas estudadas.

Observamos que, independentemente, das concepções dos professores com relação ao uso da Matemática no ensino, os problemas a serem resolvidos pelo aluno são retirados do livro didático adotado como guia em cada disciplina, com exceção da disciplina de laboratório, onde o problema a ser resolvido pelos alunos é a comprovação de leis físicas por meio da tomada e análise de dados, com base nos experimentos indicados pelo professor.

Em todos os casos, espera-se que a resolução destes problemas seja uma oportunidade para o aluno aplicar o que aprendeu e demonstrar que compreendeu, portanto, são a base da preparação para apresentar as avaliações. Significa que a melhora do desempenho nas provas escritas, depende da preparação para aplicar a formalização das leis, na resolução de problemas. Mas esta tendência comum não significa que os critérios ou as metodologias de

avaliação sejam idênticas, uma vez que há diferenças na maneira como se oportuniza a preparação dos estudantes para realizar tais provas escritas.

No caso de P₁, o professor elabora uma lista de exercícios e resolve alguns deles. Assim, se espera que o resto dos exercícios possam ser resolvidos por situação análoga, no estudo extraclasse do aluno. Um exemplo de exercício é: “Dois trens, cada um com velocidade de 30 Km/h trafegam em sentidos opostos, na mesma linha férrea retilínea. Um pássaro capaz de voar a 60Km/h parte da frente de um dos trens, quando eles estão separados por 60Km e se dirige em linha reta para outro trem. Ao chegar ao outro trem, o pássaro faz meia-volta e se dirige para o primeiro trem e assim por diante. Qual é a distância total que o pássaro percorre até os trens colidirem?”

Com este exemplo, se estuda o tema do movimento em uma dimensão, argumentando que é um exercício interessante, como complemento da temática ensinada, já que permite ampliar a compreensão dos conceitos e também serve como parte da preparação para a prova. Adicional a este exemplo, o professor fornece uma lista de exercícios selecionados a fim de que os alunos complementem sua preparação.

No caso de P₂, além dos exemplos de exercícios resolvidos, o professor pede para os licenciandos elaborar explicações sobre o raciocínio, que poderia ser utilizado com alunos de ensino médio, na resolução destes problemas, e também, dedicar um certo tempo da aula para a resolução, por parte dos licenciandos, do resto de exercícios colocados. Por exemplo, para o estudo dos circuitos elétricos, pede-se para determinar as correntes elétricas em cada ramo de um circuito, que contém quatro resistências e duas fontes, a partir das leis de Kirchhoff. Ele enfatiza que os licenciandos devem prestar atenção nos passos de resolução do problema e do como a resolução dos exercícios lhes permitira melhorar a compreensão do fenômeno.

Nesse caso, os problemas são resolvidos em sala de aula com os estudantes organizados por grupos, o que permite a consulta entre colegas e também a consulta ao professor para ir resolvendo as dúvidas. Mas na prova escrita não são avaliados somente os exercícios sugeridos, também são feitas questões do tipo: “O que significa que a Lei de Coulomb é empírica? Como você explicaria para um aluno do ensino fundamental ou médio, o porquê do comportamento da força de Coulomb com a distância, isto é $F \propto \frac{1}{r^2}$ $F' \propto \frac{1}{r'^2}$?, para os quais não se espera uma resposta quantitativa mas qualitativa.

No caso de P₃, os exercícios utilizados na prova escrita são estudados e apresentados, previamente, em sala de aula por parte dos licenciandos, para isto, o professor organiza

pequenos grupos e lhes designa, aleatoriamente, de quatro a seis exercícios que deverão resolver em casa e apresentar posteriormente para a classe, sendo que cada aluno deve apresentar ao menos um exercício. Trabalha-se exercícios do tipo: “(a) Mostre que um elétron livre não pode absorver um fóton e durante esse processo conservar, simultaneamente, a energia e o momento. Portanto, o efeito fotoelétrico impõe a existência de um elétron ligado. (b) No efeito Compton, entretanto, pode-se ter um elétron livre. Explique”.

Este professor complementa a prova oral com a prova escrita. Na prova oral, os alunos devem trabalhar em grupos para preparar e apresentar a solução de um problema, o qual permite que ao professor analisar a maneira como os alunos estão entendendo o processo de resolução. Assim, a prova escrita é planejada com base nos exercícios que foram trabalhados com os licenciandos em sala de aula.

No caso de P₄, os alunos devem preparar o desenvolvimento das práticas experimentais, segundo o guia fornecido pelo professor, mas antes da prática, devem responder um questionário que avalia sua preparação para desenvolver a prática experimental, com perguntas do tipo: “Qual o objetivo do experimento? O experimento baseia-se essencialmente em que conceito(s)? Por meio de qual(is) medida(s) você alcançará o seu objetivo? Posteriormente à prática, dedica-se uma aula para que os alunos apresentem os resultados obtidos, com a interpretação que fizeram e as conclusões que lhes permitiram obter o resultado solicitado, como por exemplo, deduzir o valor da velocidade da luz, a partir de medidas experimentais ou medir a relação carga-massa do elétron. Com base nestas apresentações, os licenciandos devem-se preparar para a avaliação escrita, que indaga pela compreensão dos processos desenvolvidos nos diversos experimentos trabalhados, tanto nos aspectos teóricos como nos aspectos práticos.

Do exposto anteriormente, podemos afirmar que o licenciando que cursa todas estas disciplinas acaba sendo exigido de diversas maneiras para dar conta de sua compreensão dos conceitos. Uma vez que, deve resolver exercícios teóricos com base em exemplos desenvolvidos pelo professor, resolver exercícios com acompanhamento do professor e dos colegas, preparar a resolução de exercícios para ser apresentados para a classe e responder provas escritas, comprovar leis com base na experimentação. Porém, tal exigência de demonstração da compreensão dos conceitos, dá-se, principalmente, com base na resolução de problemas teóricos, para o qual deve saber aplicar a formalização das teorias, por meio do uso das equações.

De forma complementar a este resultado, encontramos com base nos indicadores de observação, que há pouca presença do uso de analogias como geradoras de problematizações, ou do uso de linguagem cotidiana para estabelecer e estudar analogias de diversos tipos entre o comportamento dos sistemas reais e o comportamento de sistemas idealizados apresentados, ou ainda no uso de exercícios envolvendo a prática dentro do desenvolvimento das disciplinas teóricas.

Também, há total ausência do uso dos resultados dos alunos nas provas escritas como base para a preparação das aulas seguintes, ou para a continuidade das explicações. Isto significa que os exercícios costumam ser problemas teóricos nos quais o aluno deve demonstrar a compreensão conceitual por meio da seleção e aplicação adequadas dos formalismos matemáticos, o que não necessariamente implica em uma “problematização” do conhecimento que está sendo ensinado e aprendido.

Significa que a problematização está previamente planejada nas propostas dos livros didáticos ou nas propostas de problemas teóricos ou práticos colocados pelo professor para a classe. Isto faz com que os problemas resolvidos não sejam “reais” no sentido colocado por Krygovska (1968), Freudenhtal (2002) ou Steiner (1968) que falando da Matematização no ensino de Matemática, propõem o tratamento de situações tangíveis, nas quais o aluno seja exigido a organizar e esquematizar um evento.

Mas também não são problemas no sentido exposto por pesquisadores do ensino de Física, como Hestenes (1996) que propõe levar o aluno a identificar e representar padrões observáveis nos fenômenos físicos, visando uma reestruturação em suas intuições, o que deve envolvê-los em construções explícitas e na manipulação de representações estruturadas. Ou no sentido exposto por Karam e Pietrocola (2009), que propõem trabalhar exercícios nos quais o aluno tenha que explicar a razão pela qual considera que certas estruturas matemáticas funcionam para explicar diversos problemas da Física, expressando as qualidades generalizáveis das estruturas e as condições particulares das diversas situações.

De forma complementar a este resultado, encontramos com base nos indicadores de observação, que há pouca presença do uso de analogias como geradoras de problematizações ou do uso de linguagem cotidiana para estabelecer e estudar analogias de diversos tipos entre o comportamento dos sistemas reais e o comportamento de sistemas idealizados apresentados ou ainda no uso de exercícios, envolvendo a prática dentro do desenvolvimento das disciplinas teóricas.

Também, há total ausência do uso dos resultados dos alunos nas provas escritas como base para a preparação das aulas seguintes ou para a continuidade das explicações. Isto significa que os exercícios costumam ser problemas teóricos nos quais o aluno deve demonstrar a compreensão conceitual por meio da seleção e aplicação adequadas dos formalismos matemáticos, o que não, necessariamente, implica em uma “problematização” do conhecimento que está sendo ensinado e aprendido.

5.8. Significados atribuídos pelos professores à “Matematização da Física”

Para este item, fizemos uma leitura das principais características do processo de ensino realizado pelos professores observados, utilizando as três categorias de “Matematização da Física” apresentadas no capítulo três desta tese. Inferimos que a perspectiva utilizada pelos professores é próxima de duas das categorias de análise. Dois professores apresentam características da categoria *EstudFenom* e os outros dois apresentam características da categoria *ModelMat*.

Entendemos que a proximidade com a categoria *EstudFenom*, dá-se no sentido de que os professores consideram necessária uma fase de introdução ao tópico da Física em estudo, a partir de análises qualitativas, buscando um nível de compreensão dos conceitos envolvidos de forma prévia à formalização matemática. Segundo estes professores tal introdução pode ser realizada, a partir de revisões históricas do conceito a ser estudado, contextualizações do fenômeno em estudo ou análises da relação entre as grandezas envolvidas.

Por exemplo, P_1 ao ensinar o tópico de “trabalho, potência e energia” começa fazendo uma apresentação do desenvolvimento histórico do conceito de energia; P_3 começa o tema de “Interação da radiação com a matéria” fazendo uma apresentação da história do descobrimento do elétron, do tubo de raios catódicos e também leva uma animação de átomos com níveis de energia concêntricos para introduzir a controvérsia da aplicação da teoria clássica na explicação do efeito fotoelétrico.

Há aspectos, porém, nos quais se distanciam desta categoria ao apresentar, poucas atividades que procurem um maior aprofundamento na reflexão por parte do licenciando sobre suas próprias formas de proceder no processo de compreensão do fenômeno e também poucas atividades de análises de práticas, que envolvam a experiência sensorial em estudos fenomenológicos. Também se distancia, no sentido de que a apresentação da formalização matemática depende quase totalmente da exposição do professor, quer dizer, que o estudante tem uma participação limitada no processo em que a partir de uma análise fenomenológica vai

sendo organizada a descrição do fenômeno, a fim de criar a necessidade de utilizar determinadas representações matemáticas.

Outro aspecto em que há uma distância é com relação à avaliação. Uma vez que nesta categoria *EstudFenom*, a análise das respostas dos alunos faz parte do processo de interação entre aluno e professor, o qual vai orientando a sequência de atividades que buscam levar o estudante a re-visitare suas concepções sobre o fenômeno em estudo. Entretanto, no que foi observado, encontramos que há um pressuposto tácito de que quando o aluno compreende os conceitos é capaz de responder às questões e problemas colocados pelos professores nas provas, finalizando o processo parcialmente, já que se inicia um novo ciclo com uma nova temática.

Com respeito aos professores que apresentam uma proximidade com a categoria *ModelMat*, podemos dizer que se dá no sentido de que os professores entendem que a compreensão dos conceitos ocorre a partir da análise dos formalismos matemáticos e sua capacidade de representação dos fenômenos Físicos. Portanto, é necessário um preparo adequado dos estudantes com relação ao domínio de alguns conhecimentos da Matemática, que lhes permitirão ter maior compreensão da pertinência para a formulação de uma lei, como o caso do domínio necessário do cálculo integral e diferencial, uma vez que estas estruturas matemáticas permitem enxergar o fenômeno e representar a relação entre as variáveis.

Por exemplo, em FIII, na aula do tema “Circuitos RC”, o professor fala da equação diferencial (RC) e suas possibilidades de solução, quando afirma que é necessário ter conhecimentos do cálculo integral para a compreensão da solução. Enquanto, o professor P₄ afirma em sua resposta à primeira pergunta de nosso questionário : “os alunos (...) devem abordar os conceitos envolvidos e as demonstrações matemáticas mais básicas, porém necessárias para chegar ao objetivo proposto”, intenção que se observou em sua aula, quando para cada experiência de laboratório, pedia para o licenciando “investigar”, previamente, à prática, os conceitos e demonstrações matemáticas envolvidas.

Entendemos, porém, uma distância entre o que foi observado e a proposta desta categoria *ModelMat*, quando se evidencia a ausência de exercícios que visem por exemplo, analisar o porquê de uma representação matemática ser melhor do que outra, ainda quando as duas concordem com a experiência e a observação ou exercícios buscando maior aprofundamento na compreensão da natureza das representações matemáticas adotadas para descrever o fenômeno, e assim, contribuir na tomada de consciência por parte dos estudantes

com relação ao papel que têm as estruturas matemáticas na construção das explicações dos fenômenos físicos, tanto quanto a análise do sentido físico que elas envolvem.

Também com relação a avaliação, há uma distância ao pressupor que o aluno é ciente da função das estruturas matemáticas, na descrição dos fenômenos quando consegue resolver os problemas. Dado que o estudante em geral não é exigido a expressar, explicitamente, seus raciocínios, inferimos que há o pressuposto de que no momento em que o aluno decide corretamente sobre as equações que deve utilizar para relacionar as grandezas envolvidas numa determinada situação, ele está evidenciando sua compreensão dos conceitos.

A respeito da categoria *ProcessFisMat*, podemos dizer que não encontramos evidências de sua presença, já que não detectamos o desenvolvimento de sequências de atividades que objetivassem orientar o aluno na construção de representações matemáticas, por exemplo, com base no desenvolvimento do pensamento hipotético-dedutivo ou de processos de sistematização e análise de informações obtidas, a partir de problemas colocados aos alunos, sem esperar uma única resposta ou que o processo culminasse, necessariamente, com a aplicação de equações no cálculo de valores. Também não se trabalha com a análise de problemas abertos que exijam uma participação explícita do estudante no planejamento das estratégias de caracterização e resolução do problema.

Insistimos, mais uma vez, que nosso interesse não é julgar a metodologia de ensino usada pelos professores, mas determinar o estado de seus pressupostos com relação à “Matematização da Física”, no ensino de Física.

Vemos, ainda, como as particularidades que, necessariamente, tem cada professor em função de sua formação, personalidade, de seus conhecimentos, da disciplina que ministra, entre outros aspectos, é possível detectar algumas tendências que ao ser analisadas sob as três categorias criadas, oferecem um panorama, a partir do qual, podem ser organizadas discussões acadêmicas a respeito das formas de ligar a teoria produzida pela pesquisa em ensino de Física com a prática do ensino de Física, na formação inicial de professores.

6. SIGNIFICADOS SOBRE “MATEMATIZAÇÃO DA FÍSICA” PRESENTES NAS EXPLICAÇÕES DE LICENCIANDOS

Neste capítulo, objetivamos dar resposta à questão que indaga pelos significados de “Matematização da Física”, que costumam estar presentes em discursos e explicações de alunos de um curso de Licenciatura em Física. Para a constituição de dados, utilizamos a observação em sala de aula e a aplicação de um questionário no final da observação, em disciplinas de Física.

A observação foi do tipo não participante e desenvolveu-se durante três semestres de forma simultânea com a observação de professores, sendo que, ao longo do primeiro ano, fomos constituindo o roteiro de observação com vários testes, resultados que permitiram aperfeiçoar o instrumento a ser aplicado na observação desenvolvida, durante o terceiro semestre observado. O roteiro constou de itens como:

1. Faz perguntas
2. Faz desenhos no quadro
3. Responde oralmente às perguntas do professor
4. Responde às perguntas dos colegas
5. Faz analogias e/ ou comparações com saberes aprendidos em outros contextos.
6. Faz tomada de dados experimentais
7. Analisa os dados experimentais
8. Interpreta os resultados obtidos na resolução de problemas

No final do terceiro semestre observado, foi aplicado o questionário, sem aviso prévio, aos licenciandos. Este foi composto por quatro itens, tratando tópicos de mecânica clássica, por ser uma temática na qual consideramos que todos os alunos questionados já tinham conhecimentos básicos. Para chegar na definição das perguntas do questionário, foi desenvolvida uma versão piloto, ver Apêndice I (p.197), que aplicamos aos alunos da disciplina de Física III, de tal maneira que a análise do tipo de respostas permitiu-nos aperfeiçoá-lo ao evidenciar alguns erros na formulação das perguntas, já que induzia a um tipo de resposta; ou no caso das perguntas que foram consideradas resultavam muito complexas ou ambíguas para os alunos.

Assim, com base nesse resultado, planejamos um novo questionário, que já não podia ser trabalhado com os licenciandos de Física III, uma vez que eles já tinham conhecimento do tipo de perguntas e respostas esperadas e também não foi possível aplicá-lo na disciplina de Física Moderna I, uma vez que não foi ministrada, neste semestre, devido ao rodízio de disciplinas que se dão no curso. Portanto, a versão final do questionário foi aplicada somente

aos grupos de primeiro e sétimo semestre nas disciplinas de Física I e Laboratório de Física Moderna. As perguntas foram:

- 1) Descreva o processo que você costuma utilizar para resolver um problema da Física.
- 2) Escolha um fenômeno ondulatório, nomeie-o e represente-o.
- 3) Uma forma de expressar o princípio de Arquimedes é: “um corpo ao ser imerso, total ou parcialmente em um fluido, sofre um empuxo igual ao peso do volume do fluido deslocado”. - Como você explicaria este princípio para outra pessoa?
- 4) Para você, qual o significado da expressão matemática: $\vec{F} = M\vec{a}$

A análise dos dados foi desenvolvida, utilizando o mesmo processo apresentado no capítulo anterior, com relação aos professores. Isto é, comparando os resultados da observação com os do questionário, interpretando-os com base nas três questões que fundamentaram a constituição das categorias de “Matematização da Física” no ensino, apresentadas no terceiro capítulo desta tese. Significa que foi perguntado para os dados constituídos embasados na observação e questionário: Como o aluno entende a relação entre Física e Matemática? O que ele considera como evidência de sua aprendizagem da Física? Qual o processo que aplica na resolução de problemas de Física? Podemos ver as respostas dos alunos na íntegra nos apêndices O (223) e P (233).

6.1. Relação entre Física e Matemática nos licenciandos

Para responder este aspecto, analisamos as respostas que os licenciandos deram para a questão que indagou pelo significado que eles dão à expressão matemática: $\vec{F} = M\vec{a}$, e também, para a questão que lhes pediu para escolher um fenômeno ondulatório, nomeá-lo e representá-lo. Estes resultados foram comparados com o que foi evidenciado na observação, no que se refere à linguagem que eles utilizaram para apresentar suas explicações, em momentos em que foi solicitado pelo professor ou que, voluntariamente, participaram da aula.

Com relação ao significado da equação $\vec{F} = M\vec{a}$, encontramos semelhanças e diferenças entre os alunos de Física I e os de Laboratório de Física Moderna. Semelhanças, principalmente, no conjunto de tipos de resposta e diferenças, principalmente, na porcentagem de alunos que responderam em cada um dos tipos.

Surgiram, basicamente dois tipos de respostas nos dois cursos questionados. O primeiro tipo descreve o significado da equação, nomeando as grandezas envolvidas nela e descrevendo com palavras a relação matemática; entretanto o segundo tipo, também nomeia as grandezas e sua relação, mas amplia um pouco a resposta, tentando descrever a natureza

das grandezas. A porcentagem do primeiro tipo de respostas foi maior em FI e do segundo tipo foi maior em LFM.

Especificamente, encontramos que 67% dos estudantes de FI e 20% dos alunos de LFM referem-se ao primeiro tipo de resposta, ou seja, responderam nomeando os símbolos e/ou descrevendo com palavras a relação matemática exposta na equação. Vejamos alguns exemplos representativos no Quadro 23.

QUADRO 23. Exemplos representativos de resposta tipo um, à pergunta que indaga pelo significado da expressão matemática: $\vec{F} = M\vec{a}$.

Estudantes Física I (FI)	<ul style="list-style-type: none"> - “O vetor (F= força), é igual à constante (m=massa), pelo produto do vetor (a=aceleração)” - “Que a massa vezes o vetor aceleração é igual ao vetor força” - “Massa vezes aceleração é diretamente proporcional à força, ou seja, força esta relacionada à massa e aceleração.
Estudantes Lab. Fís. Moderna (LFM)	<ul style="list-style-type: none"> - “O modulo da força aplicada a um objeto é igual à massa do objeto vezes sua aceleração” - “Onde F é a força resultante aplicada em um corpo, dada em Newton (N) (S.I.); m é a massa desse corpo, dada em kilogramos (Kg)(S.I.); e a é a aceleração que esse corpo possui, dada em metros por segundo ao quadrado ($\frac{m}{s^2}$)(S.I.). Portanto, todo corpo construído de matéria possui massa, a qual esta susceptível à ação de forças de qualquer natureza, produzindo assim uma aceleração nesse corpo, dependendo diretamente do valor em modulo da força”

Considerando que a questão indaga pelo significado da expressão matemática, observamos que o principal significado que este grupo de estudantes dá é como uma ferramenta de cálculo de valores, uma vez que colocam a ênfase na relação de proporcionalidade das grandezas envolvidas. Isto significa que para a maioria dos alunos de FI e a minoria de LFM, o significado físico de uma equação é a equação em si.

Nota-se que a principal tendência é descrever a fórmula matemática, sem se referir às especificidades da lei física, que subjazem nesta representação matemática: como as leis fundamentais do movimento, a partir das quais se pode imaginar tal relação entre força e massa; como o princípio de inércia ou a lei de ação-reação, as quais determinam as condições espaciais e temporais em que poderia ser aplicada a equação; ou como a natureza dos conceitos envolvidos, que no caso do conceito de força implicaria falar de sua natureza associada à “interação”, dos tipos de interação que evidenciam a existência de uma força, de sua natureza vectorial.

Da mesma forma, no caso do conceito de aceleração, não se considera o caráter abstrato que envolve ao não responder às experiências intuitivas diretas, uma vez que falar que as unidades de aceleração realizam-se em termos de metros por segundo ao quadrado não

evidencia, necessariamente, a compreensão de que o deslocamento de um corpo por unidade de tempo aumenta na mesma quantidade para cada unidade de tempo. Tampouco se explicita, se o valor de tal aceleração calculada com esta equação é instantânea ou média, nem se é produzida por uma força que atua em um instante ou durante todo o movimento.

Em geral, observa-se a ausência de descrições do fenômeno com base em aspectos qualitativos ou em suportes experimentais. Isto nos diz que a maneira como estes alunos relacionam a Física e a Matemática é entendendo as representações matemáticas como a linguagem privilegiada para representar os fenômenos físicos, porém, sem ter clareza sobre como se interpretam os formalismos para compreender o fenômeno que envolvem.

Entretanto, no segundo tipo de resposta, 16% dos estudantes de FI e 80% dos estudantes de LFM, ampliam a descrição da relação entre as grandezas expressas na equação. Neste caso, observamos que os alunos que estão cursando a disciplina mais avançada possuem maior léxico matemático, o que lhes permite expressar a equação em forma diferencial. A seguir algumas respostas representativas.

QUADRO 24. Exemplos representativos de resposta tipo dois, à pergunta que indaga pelo significado da expressão matemática: $\vec{F} = M\vec{a}$.

Estudantes Física I	<p>- “Esta expressão matemática evidencia que a força é vetorial e tem o mesmo sentido e direção da aceleração, pois é outra grandeza vetorial. Além disso, para mesma força aplicada em diferentes corpos de diferentes massas, a reação, ou seja, a aceleração sofrida será diferente”.</p> <p>- “$F=m.a$, a conhecida expressão da 2ª lei de Newton, nos diz que a força resultante sobre uma partícula de massa m (a força resultante pode ser “real” ou ser a soma vetorial das forças aplicadas ao corpo) é diretamente proporcional à aceleração do corpo (em um referencial inercial). É uma expressão geral que adquire seu pleno significado físico quando substituimos F pela soma das forças aplicadas ao corpo”</p>
Estudantes Lab. Fís. Moderna	<p>- “Este é o conhecido enunciado da segunda lei de Newton, onde é originado da equação $\vec{F} = \frac{dP}{dT}$, onde P é o momento e T o tempo, quando m não varia no tempo podendo isolar a massa e chamar $\frac{dV}{dT}$ de \vec{a}, onde a é aceleração (vetorial). Logo essa equação representa a soma das forças sobre um corpo cujas massas não varia em relação à aceleração do mesmo permitindo entender as relações propostas para o movimento de uma maneira mais quantizada, abrangendo uma forma de resolver problemas para diferentes referenciais (problemas dinâmicos)”</p> <p>- “Esta equação representa uma perturbação à inércia de um corpo com massa m. Ela tem caráter vetorial porque as grandezas associadas (força e aceleração) são vetoriais. Genericamente, esta equação é tratada em componentes separadas de coordenadas de interesse para facilitar a compreensão da atuação de cada elemento sobre a massa.”</p> <p>- “$F=m.a$, é a segunda lei de Newton que relaciona a força com a massa de um determinado corpo e sua aceleração, onde pode-se relacionar com a mesma equação a força peso $P=mg$ e a aceleração da gravidade g no caso de um lançamento vertical. $F=m.a$, é utilizada para o MU (movimento uniforme), $P=mg$ pode ser utilizada para lançamento vertical, lançamento de projeteis”</p>

Nota-se que, neste caso, os alunos referem-se à equação como a segunda lei de Newton e descrevem de forma mais aprofundada, já que se fala em aspectos como: a natureza vetorial da força e da aceleração; a relação entre força e aceleração, a partir da definição de variação da quantidade de movimento com a massa se mantendo constante; a produção de diferentes acelerações ao aplicar a mesma força em diferentes massas; dos tipos de força ao identificar a gravidade e o peso, mas também a força aplicada como a somatória de várias forças; das condições do sistema, em que poderá ser aplicada a equação; como deve-se considerar um referencial inercial; também que a massa não varia em função da aceleração ou que se usa na solução de problemas que envolvam movimentos do tipo lançamento vertical ou de projéteis.

Entendemos que, para estes alunos descreverem a representação matemática de um fenômeno físico, implica, explicarem as relações expressas nela e as condições que devem ser impostas em um sistema para poder aplicar as equações, ainda que há ausência de ideias explícitas sobre a natureza dos conceitos de força, massa e aceleração ou especificações das causas desta lei.

Essa perspectiva dos alunos coincide com a visão dos físicos de antes do século XVIII, no sentido de que os formalismos matemáticos permitiam descrever o como acontecem os fenômenos, sem que, necessariamente, houvesse uma preocupação pelo por que acontece.

Essa observação, porém, contrasta com o encontrado nas respostas à segunda questão: “Escolha um fenômeno ondulatório, nomeie-o e represente-o”, para a qual podemos dizer que a representação matemática foi quase inexistente e o principal tipo de representação utilizado foi o pictórico, como se observa nos resultados a seguir.

Para a análise destas respostas, as agrupamos em cinco tipos de conteúdos sobre os fenômenos ondulatórios escolhidos pelos alunos: 1) as que se referem a fenômenos que envolvem ondas mecânicas; 2) as que envolvem ondas eletromagnéticas; 3) as que não falam de um fenômeno ondulatório, mas de propriedades ou características das ondas; 4) as que referem-se a comportamentos oscilatórios e; 5) quem não responde ou expressa ideias sem responder à questão proposta. Apresentamos de forma resumida, nos quadros 25 e 26, respectivamente, para os casos dos estudantes de FI e LFM. Ver quadro completo no Apêndice Q (p.239).

QUADRO 25. Classificação dos fenômenos escolhidos pelos estudantes de FI e LFM, porcentagem da quantidade de estudantes por cada tipo de resposta e expressões representativas.

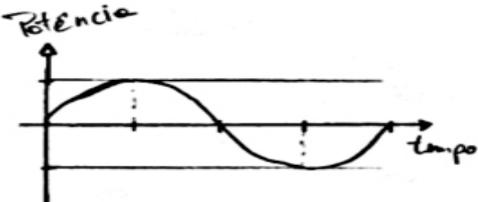
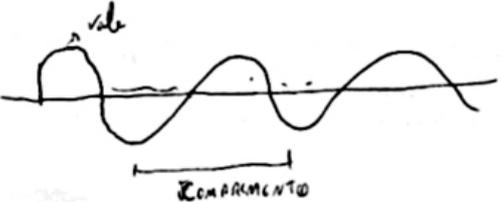
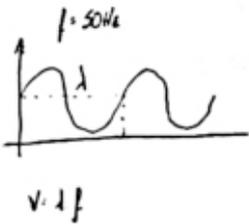
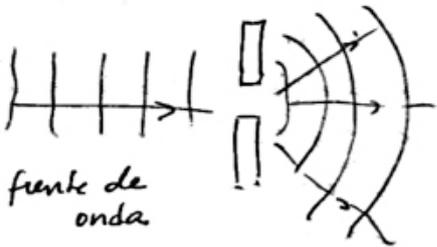
Disciplina: Física I		
Tipo de fenômeno ondulatório e	% Est.	Fenômenos nomeados Expressões representativas dos estudantes de Física I
Ondas mecânicas	52	“Interferência de ondas numa corda”, “Som”, “Ondas sonoras”, “A voz é um fenômeno ondulatório, sonoro”
Ondas eletromagnéticas	16	“A transmissão de energia através de ondas de radio”, “sinal de televisão”, “Um pulso de luz realizado em laboratório”, “micro ondas”
Propriedades das ondas	23	“Difração”, “frequência”, “É refração da luz (...)”, “Efeito de superposição de ondas (...)”, “Interferência eletromagnética?”
Comportamentos oscilatórios	3	“Corrente elétrica alternada. (...)”
Não responde à pergunta	6	“Circuito interno” ou não responde.
Disciplina: Laboratório de Física Moderna		
Ondas mecânicas	30	“Cuba de água”, “corda vibrante”
Ondas eletromagnéticas	40	“Propagação da luz. (...)”, “radiação eletromagnética emitida por um gás monoatômico, “ (...) o caráter ondulatório da luz”
Comportamentos oscilatórios	10	“Desenho de uma mola suspensa”, “Desenho de uma função sinusoidal sem nome nem explicação”
Não responde à pergunta	20	- “Os fenômenos ondulatórios estão relacionados em toda a natureza (...)”, “Um fenômeno ondulatório pode ser identificado pela variação cíclica de uma grandeza e sua propagação, (...)”.

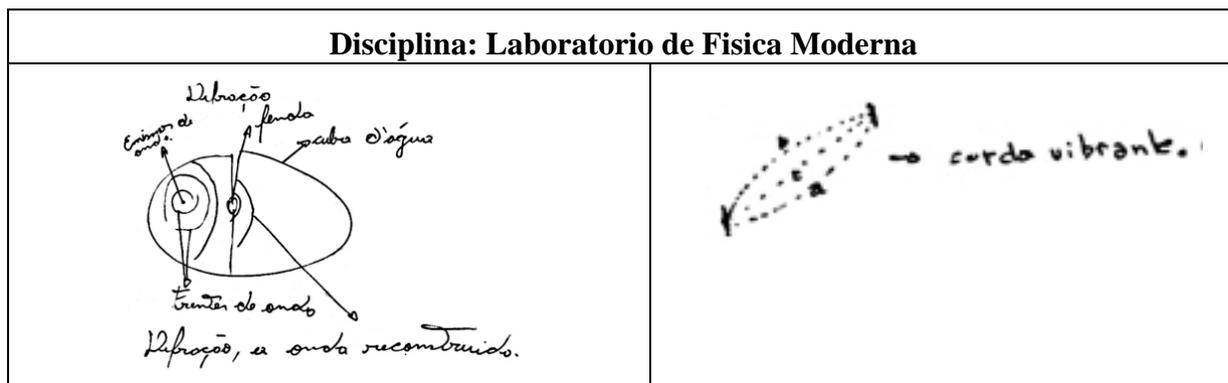
Nota-se que nas duas turmas, aproximadamente 70% dos alunos referem-se a fenômenos que envolvem ondas mecânicas e/ou ondas eletromagnéticas. Dentro das ondas mecânicas menciona-se, principalmente, o som. Entretanto, aproximadamente, 30% dos alunos não responderam ou falaram em propriedades das ondas ou de um comportamento oscilatório, sem nomear um fenômeno ondulatório em particular, mas mencionando propriedades como a difração, reflexão ou superposição.

Da maneira de nomear os fenômenos, podemos deduzir que os estudantes de LFM têm uma linguagem mais exata para descrever o fenômeno, porém ao representar os fenômenos que mencionam, encontramos bastantes similaridades com os estudantes de FI, sendo em sua maioria, representações pictóricas, uma vez que usam desenhos que buscam apresentar a imagem do evento que está acontecendo, como por exemplo, a propagação da onda na água, na corda, a propagação do som a partir de uma fonte sonora ou a propagação da luz,

utilizando diagramas generalizados da imagem de uma onda. Como se observa nos Quadros 26 e 27, nos quais apresentamos, tais representações discriminadas por tipos de ondas envolvidas, sendo elas, mecânicas e eletromagnéticas, para cada turma.

QUADRO 26. Representações dos fenômenos escolhidos por estudantes de FI e LFM, associados às ondas mecânicas.

Ondas Mecânicas	
Disciplina: Física I	
	
	
	
	
	
	



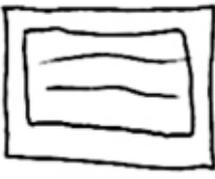
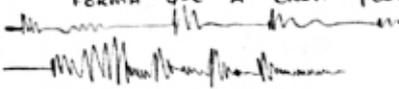
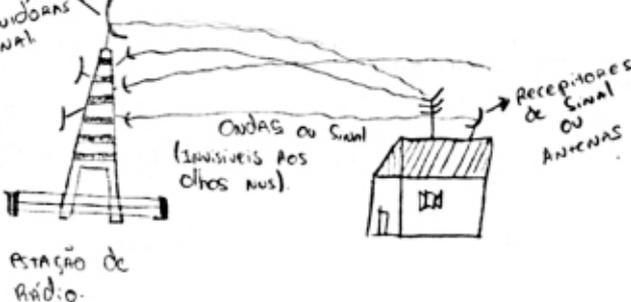
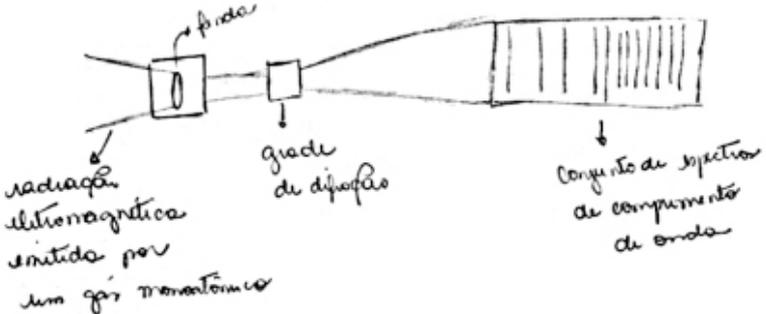
Nota-se que nas primeiras seis representações de FI, os eixos utilizados não têm a finalidade de representar a relação entre duas variáveis específicas e nem são utilizadas escalas ou unidades de medida. Entendemos então que os sistemas de referência são utilizados de forma generalizada, como um símbolo que se espera represente os gráficos que relacionam variáveis, como comprimento de onda *vs* amplitude ou frequência *vs* tempo, mas sem definir, especificamente, o significado de representar graficamente um comportamento ondulatório.

Entretanto, nas últimas cinco representações de FI, utiliza-se, basicamente, a imagem pictórica, generalizada sobre a propagação do som. Porém, sem considerar que o som se propaga em todas as direções em torno à fonte de produção.

Em todos os casos, evidenciamos que os estudantes consideram que a representação satisfatória do fenômeno consiste em apresentar uma imagem pictórica, que permita visualizar a maneira como o evento ocorre. Tais imagens não são acompanhadas nem de formulações matemáticas, nem de conceptualizações ou explicações que descrevam a natureza do fenômeno, nem as variáveis que intervêm no sistema físico observado, nem a relação entre as variáveis.

Ao comparar as representações de ondas mecânicas dos estudantes de LFM, encontramos que há maior conceptualização do fenômeno, mas persiste a representação pictórica, como a mais utilizada, resultado que ainda se mantém, quando se observam as representações de ondas eletromagnéticas, como se observa no Quadro 27.

QUADRO 27. Representações dos fenômenos escolhidos por estudantes de FI e LFM, associados às ondas eletromagnéticas.

Ondas electromagneticas	
Disciplina: Fisica I	
	
<p style="text-align: center;">+ <u>Ondas de rádio.</u> forma que a cada pode se manifestar</p> <p style="text-align: center;">  </p> <p> ANENAS que transmitem as ondas, cu distribuidoras de sinal ESTAÇÃO de rádio. ONDAS ou sinal (transmissos por chos nus) RECEPTORES de sinal ou ANENAS </p> 	
Disciplina: Laboratorio de Fisica Moderna	
	<p style="text-align: center;">luz se propagando</p> 
 <p style="text-align: center;"> fenda radiação eletromagnética emitida por um gás atômico grade de difração Conjunto de espectro de componentes de onda </p>	

Nesse caso, a representação das ondas eletromagnéticas é basicamente pictórica com imagens que buscam apresentar a fonte de criação e o percurso da onda. Entendemos que este resultado pode ser consequência de que os alunos de FI ainda não têm cursado a disciplina de eletromagnetismo. Entretanto, alguns alunos de LFM utilizam os gráficos, como meio de representação, porém sem indicar as variáveis envolvidas no caso do fenômeno da luz e representadas em cada eixo do sistema de referência. Observa-se que praticamente não se consideram as equações como formas de representação dos fenômenos.

Esse resultado evidencia a brecha que existe entre o que os físicos consideram como matematização da Física, que envolve entender, representar a natureza e a essência de cada fenômeno. O que os livros didáticos apresentam como matematização da Física são os algoritmos e as representações matemáticas que estão no centro do processo de compreensão do fenômeno; o que os professores consideram como matematização da Física é a preocupação com o processo que o estudante vai desenvolvendo na compreensão das representações matemáticas dos conceitos e o que os alunos, finalmente, entendem como matematização dos fenômenos físicos, são as equações representando relações entre variáveis; mas porém, na hora de pedir para eles representarem, optam por priorizar a representação pictórica da ocorrência do fenômeno.

6.2. Considerações dos licenciandos sobre sua aprendizagem da Física

Dado que a “explicação” com sua respectiva “linguagem” são fundamentais na maneira como se constrói o conhecimento científico, tanto no desenvolvimento da Física como no desenvolvimento do Ensino de Física, consideramos pertinente analisar a observação dos alunos em aulas de Física, buscando evidências específicas sobre as maneiras como eles formulam questões a seus professores e também como eles explicam os conceitos ou temas.

Para tanto, identificamos como observáveis aqueles momentos em que o aluno tinha a oportunidade de se expressar, oralmente, sob três condições: uma, quando foi convidado no desenvolvimento da aula, seja por professores ou colegas a responder questões; outra, quando perguntou aos professores ou colegas sobre alguma dúvida ou necessidade de ampliar as explicações recebidas e, por último, quando teve de se expressar, devido à exigência de apresentação oral de trabalhos ou resultados de tarefas e exercícios.

Assim, os indicadores de observação buscaram identificar aspectos como: linguagem utilizada pelos alunos, usos de algoritmos, uso de analogias, raciocínios hipotéticos, usos de

símbolos matemáticos, explicação de conceitos, descrição de problemas, interpretação de dados experimentais e análises da solução de problemas.

Para evidenciar este grupo de indicadores, foi necessário que o aluno se expressasse oralmente em público, razão pela qual foram poucas as evidências na disciplina de Física I, uma vez que, pelo caráter teórico, a metodologia se desenvolveu, principalmente, com base na explicação do professor e o trabalho individual e, algumas vezes, coletivo dos alunos, sem espaço para o aluno apresentar explicações em público. No entanto, a metodologia de ensino utilizada na disciplina de LFM, por seu caráter experimental, permitiu-nos observar os alunos apresentando explicações de resultados obtidos nas práticas de laboratório.

Apresentamos exemplos de evidências dos indicadores, em momentos em que os alunos receberam explicações por parte do professor e em momentos em que os alunos explicaram seus argumentos de forma oral, para cada uma das duas disciplinas observadas, respectivamente nos Quadros 28 e 29.

QUADRO 28. Indicadores de participação oral dos alunos de Física I, em momentos em que recebem explicações do professor e em momentos em que apresentam suas explicações. (“X” indica a presença do indicador e “NE” significa que não houve evidências do indicador.)

Intervenções dos licenciandos no meio da explicação do professor				
Indicador	Disciplina: Física I		Disciplina: Laboratório de Física Moderna	
	Presença do indicador	Por quê/ de que tipo/ de que modo	Presença do indicador	Por quê/ de que tipo/ de que modo
1. Faz perguntas	X	O professor resolve no quadro um exercício que se trata de elaborar um gráfico de espaço percorrido vs tempo e aceleração vs tempo, a partir dos dados do velocímetro de um automóvel em função do tempo. Para calcular a aceleração o professor aplica a derivada da função velocidade e para a posição do automóvel utiliza uma integral a fim de calcular a área sob a curva V vs t . No desenvolvimento, alguns alunos pedem esclarecimentos dos termos utilizados pelo professor na solução da derivada e da integral, do procedimento de cálculo e do resultado numérico. O professor fala das possibilidades de encontrar uma solução para uma integral, afirmando que não sempre se tem solução. Um estudante pergunta se é falha na física ou no cálculo.	X	1- No arranjo experimental da medida da velocidade da luz, os alunos perguntam acerca da forma de colocar os espelhos no banco ótico para refletir luz, e perguntam como usar o osciloscópio onde eram combinadas as sinais. 2- Na medição dos espectros de diferentes gases, (no arranjo de níveis de energia) o aluno pergunta acerca de como fazer a tomada de dados dos ângulos no espectroscópio. 3- Na medição da carga do elétron no aparelho da gotícula de óleo de Millikan, os alunos perguntam sobre seu funcionamento, como inverter a diferença de potencial, como ionizar as gotículas, como variar a diferença de potencial, como usar o atomizador de gotículas.
2. Faz desenhos no quadro	NE		X	Quando os alunos fazem a exposição dos resultados obtidos no laboratório, usam desenhos para apresentar o funcionamento do arranjo experimental como o do experimento de Millikan e, gráficos para representar a relação entre as variáveis envolvidas, por exemplo, a corrente das bobinas de Helmholtz (IbH) e a voltagem acelerador (Va).
3. Responde oralmente às perguntas do professor	NE		X	Na exposição acerca do trabalho desenvolvido no laboratório, respondem às perguntas que o professor faz para testar sua compreensão e respondem perguntas dos alunos acerca do trabalho experimental, perguntas como por exemplo por que se tem que ionizar as gotículas de óleo na experiência de Millikan, ou do significado das linhas de emissão no espectroscópio.
4. Responde às perguntas dos colegas	NE		NE	
5. Faz analogias e/ ou comparações com saberes aprendidos em outros contextos	NE		NE	
6. Faz tomada de dados experimentais	NE		X	A aula é experimental. Todos fazem tomada de dados baseados na apostila fornecida pelo professor.

7. Analisa os dados experimentais	NE		NE	A apresentação dos dados experimentais deve se basear na análise feita pelo aluno, de acordo com a apostila correspondente. Por exemplo, como os dados de interferência de duas sinas luminosas permitem obter a velocidade da luz e qual é a precisão dos resultados obtidos?
8. Interpreta os resultados obtidos na resolução de problemas	NE		NE	

QUADRO 29. Indicadores de participação oral dos alunos de Laboratório de Física Moderna, em momentos em que recebem explicações do professor e em momentos em que apresentam suas explicações.

Explicações dos licenciandos em apresentações orais				
Indicador	Disciplina: Física I		Disciplina: Laboratório de Física Moderna	
	Presença do indicador	Por que/ de que tipo/ de que modo	Presença do indicador	Por que/ de que tipo/ de que modo
1. Fundamenta suas explicações	NE		X	Na exposição que fazem os alunos de cada um dos arranjos experimentais, eles falam das teorias em que eles se baseiam. P. ex., na medição da carga do elétron, suas explicações falam de campo elétrico, diferencia de potencial, ionização, a partir da teoria da eletrostática.
2. Considera os algoritmos matemáticos em suas explicações	NE		X	Na apresentação de sua prática de laboratório, os alunos apresentam as deduções feitas dos princípios físicos correspondentes à proposta experimental para justificar o resultado obtido. Por exemplo a partir da equação de força magnética e as considerações experimentais (velocidade perpendicular ao campo magnético) chegar numa equação que relaciona e/m com os dados de entrada I e V e de saída a .
3. Considera as representações em suas explicações	NE		X	Utiliza os símbolos, signos e desenhos que usualmente representam por exemplo, campo magnético, direção da força, direção do campo, entrada ou saída do campo.
4. Faz uso de gráficos	NE		X	Representa dependências entre variáveis de forma gráfica, por exemplo a relação entre potencia e velocidade da gotícula no experimento de Millikan.
5. Faz uso de modelos explicativos da Física	NE		X	Utiliza os modelos aceitos na física como apoio em seus argumentos. Por exemplo modelo atômico de Bohr para as linhas espectrais.
6. Utiliza linguagem científica (termos)	NE		X	É estrito no uso de termos e nomes, como potencia, energia, sinal de luz, ionização, bobinas, eletrodos.
7. Utiliza linguagem cotidiana (termos)	NE		X	Os termos cotidianos são usados para comentar fatos ou procedimentos de laboratório, por exemplo para falar como utilizar o atomizador de gotículas de óleo.
8. Considera os dados experimentais	NE		X	Aplica as leis da física nos dados obtidos por exemplo, para obter valores de constantes físicas universais como a velocidade da luz.

A observação mostrou que o único indicador que demonstrou evidências, tanto na disciplina de caráter teórico, como na de caráter experimental, foi quando os licenciandos fizeram perguntas ao professor. Ao analisar o tipo de perguntas, encontramos que a maioria delas pretendia esclarecer o procedimento, pelo qual foi resolvido um exercício ou o procedimento de organização de arranjos experimentais, a dedução de uma equação ou aplicação no cálculo de valores, as unidades utilizadas e, em alguns casos, solicitando o esclarecimento de termos científicos. Por exemplo, em FI, os alunos perguntaram sobre o significado da derivada, sua utilização nos exercícios e o procedimento para aplicá-las, em LFM as perguntas foram sobre a maneira de utilizar o aparelho para fazer a tomada de dados e a maneira de aplicar as equações.

Já os indicadores que buscaram evidenciar o uso de desenhos no quadro, respostas às perguntas do professor ou dos colegas, utilização de analogias, utilização de gráficos, uso de linguagem científica ou cotidiana, tomada de dados com sua respectiva análise e interpretação, tiveram presença só na disciplina experimental, dado que estas ações são oportunizadas pela mesma natureza da disciplina e dos exercícios colocados pelo professor, que exigiam a apresentação oral dos resultados de práticas de laboratório.

Nesses momentos, observamos que os licenciandos fundamentam as explicações, principalmente, no uso das equações que descrevem as leis Físicas e que lhes permitem obter valores. Por exemplo, para explicar a obtenção da velocidade da luz, os alunos descrevem o arranjo experimental com cada uma das partes, falando dos cuidados para a tomada do valor da distância dos espelhos, no ponto de interferência dos sinais e, logo depois, apresentaram a equação que lhes permitiu inserir os dados obtidos, desenvolvendo procedimentos algorítmicos, sem chegar a explicar o princípio físico em si.

Nos indicadores que buscaram evidenciar o uso de representações e gráficos, observamos o uso de representações como desenhos, fotografias e esquemas de montagens experimentais para fornecer uma determinada visualização do fenômeno, a fim de facilitar suas explicações. Também utilizam gráficos generalizados para representar a relação entre as variáveis observadas no experimento, como o caso do gráfico de uma onda sinusoidal que representa a relação inversa entre frequência e comprimento de onda, ou o gráfico da relação entre energia e carga do elétron para explicar os dados obtidos no experimento de Millikan. Em geral, estes recursos são utilizados, principalmente, para dinamizar seu discurso ou para complementar a expressão oral, mas não foram observadas análises, interpretações ou questionamentos sobre os desenhos, fotografias ou gráficos utilizados.

Com relação aos indicadores sobre o uso da linguagem científica e cotidiana, observamos que os licenciandos usam os termos científicos para garantir exatidão na descrição do fenômeno e só usam a linguagem cotidiana para fazer comentários adicionais à explicação, visando expor os problemas ou acertos que tiveram no desenvolvimento da prática. Por exemplo, ao falar do procedimento utilizado para a medição da carga do elétron, com a experiência da gota de óleo proposta por Millikan, utilizam termos científicos tais como: “campo elétrico uniforme”, “placas paralelas”, “diferença de potencial”, fazendo comentários adicionais na linguagem cotidiana como “as gotas se observam como estrelas num telescópio” ou “vou pegar uma gota, para medir o tempo dela”.

Finalmente, com relação à maneira como eles utilizam os dados experimentais, observamos que principalmente são utilizados para compará-los com a teoria, a fim de analisar o grau de exatidão de sua tomada de dados, como, no caso, da medição da velocidade da luz em que o valor obtido é comparado com o valor teórico para obter a porcentagem de erro.

Inferimos que os licenciandos entendem como importante para sua aprendizagem da Física, além de prestar atenção na fala dos professores, a busca de melhores esclarecimentos dos processos de dedução, aplicação de equações ou, explicitamente, na resolução de problemas ou de desenvolvimento de práticas de laboratório, nos quais se aplicam os modelos matemáticos. Em geral, há ausência de outras intenções de comunicação, como poderiam ser, o uso de analogias, comparações com saberes obtidos em outros contextos ou o estudo de um fenômeno com base na análise de diversos tipos de representação.

Em consequência, podemos dizer que os aspectos considerados como fundamentais pelos licenciandos na construção de suas explicações e, portanto, na construção de sua aprendizagem da Física, estão relacionados com o domínio das equações que lhes permitem expressar, da melhor maneira possível, as teorias em estudo ou resolver os problemas colocados pelo professor, fundamentando-se, principalmente, na descrição da relação entre as variáveis.

Visando aprofundar mais um pouco sobre a percepção dos licenciandos sobre o que eles consideram “explicar” um fenômeno da Física, para ver por exemplo, se eles imaginam processos ou níveis de compreensão do fenômeno ou níveis de abstração na resolução de problemas, analisamos as respostas à questão: *“Uma forma de expressar o "princípio de Arquimedes é: um corpo ao ser imerso, total ou parcialmente em um fluido, sofre um empuxo igual ao peso do volume do fluido deslocado. - Como você explicaria este princípio para outra pessoa?.”*

Encontramos que 29% dos alunos de FI e 20% dos alunos de LFM coincidem na proposta geral de que explicar um princípio físico é fazer uma paráfrase do enunciado, como se observa nos seguintes exemplos, sobre as explicações que ofereceram do princípio de Arquimedes:

FI: “Ao afundar um corpo em um fluido, ele sofre pressão do fluido de todos os lados, com isso sofre o empuxo que é basicamente o peso do fluido que foi deslocado pelo corpo ao ser imerso”

LFM: “Dois corpos não ocupam o mesmo espaço, dessa forma ao imergir o corpo num fluido, o fluido que estava ocupando o lugar onde o corpo é imergido se espalha ocasionando assim o empuxo, que tem o mesmo peso desse volume que foi deslocado pelo corpo imerso”

Note-se que a ideia apresentada do que seria “explicar” é basicamente a paráfrase do princípio como foi enunciado, sem acudir a um processo de compreensão por etapas e, ainda, sem incluir outras formas de análise deste princípio, como poderiam ser a elaboração e interpretação de um experimento e/ou a análise dos formalismos matemáticos, que representam o estado de um corpo que flutua em equilíbrio. Portanto, a explicação, para estes licenciandos, não inclui a análise das diversas grandezas envolvidas, como a relação entre as densidades do objeto e do fluido, a relação entre a força e a pressão exercida pelo fluido ou as diversas condições de equilíbrio do sistema físico.

Entretanto, 35% dos alunos de FI e 40% dos alunos de LFM tentaram explicar, ampliando um pouco a definição do princípio, porém, sem ser uma explicação completa, como se observa nos seguintes depoimentos:

FI: “Sempre que você coloca algum corpo dentro de um recipiente com algum líquido, o nível da coluna desse líquido vai aumentar de acordo com a massa desse determinado corpo”

LFM: “Isso, basicamente, representa que dois corpos não ocupam o mesmo lugar no espaço, ou seja, ao submergir um corpo, total ou parcialmente em um fluido, o corpo ocupará o local onde antes havia um fluido, sofrendo assim um empuxo, por parte do fluido, igual ao peso do volume do fluido deslocado, mostrando que o volume do fluido deslocado é igual ao volume do corpo.”

Nota-se que, no depoimento do primeiro caso, fala-se que o volume de líquido que se desloca depende da massa do corpo que está submerso, sem considerar que, além da massa, é importante a relação entre as densidades. No segundo caso, fala-se que o volume do fluido deslocado é igual ao volume do corpo, sem esclarecer se é o volume total ou parcial do corpo.

Além de que não se consideram as condições necessárias para que o valor da força exercida pelo peso submerso seja igual ao valor da força de empuxo, nem se esclarecem as razões pelas quais o líquido se desloca; para alguns, é por causa do peso, para outros, por

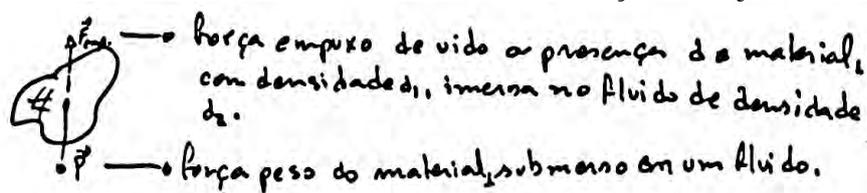
causa da massa e ainda para outros, por causa do volume, mas sem distinguir se se trata do volume parcial ou total do corpo.

3% dos alunos de FI e 30% dos alunos de LFM propuseram-se a explicar por meio de desenhos e equações. Os desenhos são representações pictóricas da situação que está ocorrendo, a qual trata de um corpo submerso num líquido, acima do qual se escrevem os símbolos que representam as forças atuantes. Já o uso das equações aparece só em um dos alunos de FI (3%) e em um dos alunos de LFM (10%), e nos dois casos tem a finalidade de oferecer uma ferramenta de cálculo, sem alguma explicação adicional sobre o porquê da apresentação de tal equação. Exemplos:

FI: "Exemplo de Desenho"



LFM: "Cada corpo material possui uma densidade específica. $D=m/v$, A densidade dos materiais influenciam na localização do objeto em um fluido.



Nota-se que, nos dois casos a representação pictórica, usa-se para indicar as forças que atuam no objeto, e, no segundo caso, a equação representa a relação entre variáveis, mas as explicações em geral não relacionam a equação com a representação e o enunciado do princípio.

Finalmente, 16% dos alunos de FI e 10% de LFM, expressam que utilizariam o experimento ou a mesma experiência sensorial para constituir a explicação, por exemplo:

FI: "Explicaria que uma pessoa quando entra na piscina sente o seu corpo mais leve, isto é, devido a esta força chamada empuxo que nos equilibra perante a força que nos faz ficar com os pés na terra".

LFM: "O princípio de Arquimedes é a base para a flutuação de navios, bem como outros meios de locomoção marítimos. Basicamente, este princípio diz que quando um objeto é imerso na água, certa quantidade de volume é deslocado, assim, uma força, denominada empuxo é exercida sobre o objeto de forma que este suba verticalmente, no entanto, existe uma força peso (do objeto) que é exercida na mesma direção, só que em um sentido oposto. Quando essas duas forças são iguais, o objeto flutua sobre a água."

Finalmente, 13% de alunos de FI não responderam esta questão.

Inferimos que para a maioria dos licenciandos “explicar”, consiste em descrever o fenômeno de forma literária ou parafrasear o enunciado com o pressuposto de que sua apresentação já envolve uma explicação, entretanto, quem considera a explicação por meio de representações, somente refere-se a representações pictóricas, que poderiam ser entendidas como diagramas de forças e, finalmente, quem considera a experimentação ou comparação com sistemas reais, desconsiderando os diversos condicionantes do sistema para poder fazer as afirmações que realizam.

Ao comparar com o encontrado na maneira como eles entendem sua aprendizagem da Física, podemos notar que, de um lado, os licenciandos priorizam a compreensão das representações matemáticas, utilizadas pelos professores em suas explicações, e de outro lado, quando eles se propõem a explicar, priorizam as representações pictóricas e definições literais dos conceitos, o qual nos diz que eles consideram que sua aprendizagem da Física envolve compreender os conceitos, mas não têm clareza sobre o que realmente seria uma compreensão do conceito, nem qual a linguagem mais apropriada para descrever e explicá-lo.

6.3. Como os licenciandos entendem a resolução de problemas de Física?

Para responder a esta questão, trabalhamos sobre as repostas que os alunos deram à questão: “Descreva o processo que você costuma utilizar para resolver um problema da Física”

Esta questão induz a falar em alguma sequência de passos para resolução de problemas, o qual permitiu-nos caracterizar os tipos de problemas da Física que eles costumam resolver, tanto quanto as etapas que são desenvolvidas, em geral, para chegar no resultado. Assim, fizemos leitura das respostas procurando os “passos”, que eles mencionaram ao definir tal *processo*, analisando tanto a quantidade de passos que se propõem a desenvolver, quanto os objetivos de cada um deles.

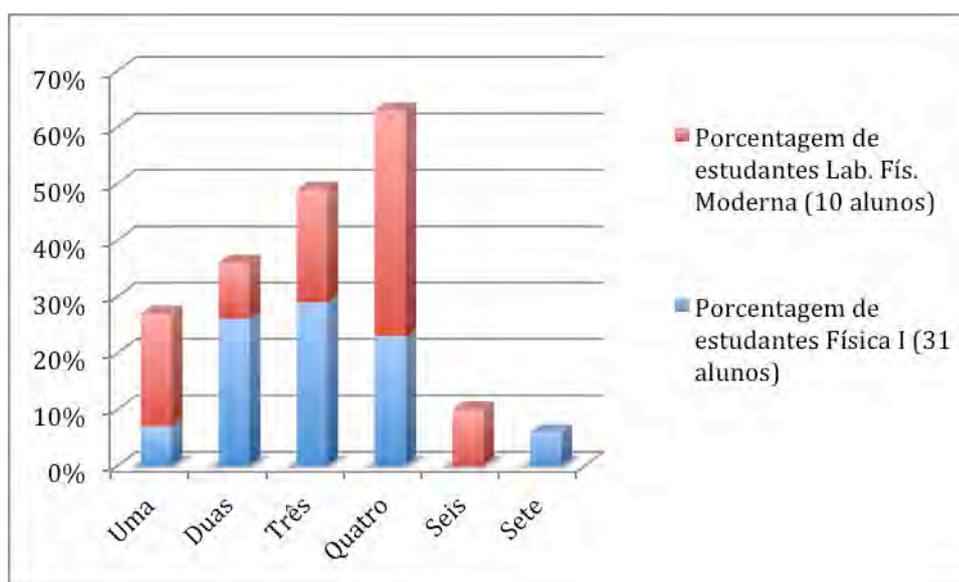
Da maneira em que os alunos expressaram suas respostas, podemos dizer que referem-se em geral a formas de resolver exercícios de aplicação de equações, que chamamos de problemas teóricos de “lápiz e papel”, embora a questão tenha indagado por problemas da Física, que poderiam ser de outros tipos, como por exemplo experimentais, de busca de repostas a uma questão ou de representação de um fenômeno em estudo etc.

Notamos também que a principal diferença entre as propostas de resolução expressas pelos licenciandos, foi na quantidade de etapas do processo, já que para alguns todo o processo está contido em uma etapa só, enquanto para outros pode ser entre duas e sete etapas, como se relaciona na Tabela 1 e no gráfico 1.

Tabela 1. Porcentagem de licenciandos com a quantidade de etapas que considera no processo de resolução de um problema da Física, nas disciplinas de Física I e Laboratório de Física Moderna.

Quantidade de etapas do processo	Porcentagem de estudantes Física I (31 alunos)	Porcentagem de estudantes Lab. Fís. Moderna. (10 alunos)	Porcentagem total
1	7%	20%	27%
2	26%	10%	36%
3	29%	20%	49%
4 (2 versões)	23%	40%	63%
6		10%	10%
7	6%		6%

Gráfico 1. Representação gráfica da Tabela 1



Observa-se que o processo de resolução mais comum é entendido em quatro etapas, que, basicamente, tratam de: (1) leitura do enunciado; (2) identificação de variáveis; (3) aplicação de equações e; (4) interpretação de resultados, porém há duas vertentes desta proposta. Também, observa-se que há uma constante nos dois grupos na maneira como aumenta a porcentagem que considera uma, duas ou três etapas e depois diminui, consideravelmente, a quantidade de alunos que consideram mais de quatro etapas. Na sequência, exemplificamos cada uma das opções.

Os alunos de FI que consideram uma etapa só, entendem que o processo todo trata de utilizar as fórmulas adequadas. Entretanto, no caso de LFM, os estudantes que propõem uma etapa, não falam numa sequência de passos, mas do primeiro que eles fariam para resolver um problema genérico, sendo, basicamente, a busca da compreensão do problema, a partir das definições da literatura, por exemplo:

FI: “são várias formulas ou dados que um exercício costuma fornecer”

LFM: “faço uma reflexão sobre o conteúdo físico do problema, nem sempre sei completamente, para isso, busco informações em livros-textos e sites de universidades”

Já os alunos de FI, que consideram duas etapas, coincidem em que a primeira, trata-se de ler o enunciado, visando identificar os dados fornecidos e as perguntas que faz, enquanto a segunda, trata-se da aplicação das fórmulas, que alguns chamam de trabalho algébrico para encontrar uma resposta. Perspectiva que é compartilhada pelos alunos de LFM que descrevem a primeira etapa, como a identificação das variáveis do problema e a segunda, como a verificação do significado físico em função da teoria. Exemplos deles são:

FI: “procuro primeiramente analisar o que o exercício está me propondo, e após isso, passo a explorar o exercício algebricamente, até solucioná-lo”

LFM: “Primeiramente, verifico quais são as variáveis e quais são as constantes no caso de um processo matemático. Tendo isso, verifico se existe um significado físico e se este significado é coerente com a teoria”

No caso de descrição de três etapas, os alunos de FI concordam em que a primeira trata-se da leitura do enunciado, tentando entendê-lo, a segunda, é a extração dos dados que oferece o problema e identificação de variáveis, o qual vai acompanhado da seleção de equações apropriadas, e a terceira, é a resolução matemática ou tratamento algébrico. Perspectiva que é muito similar à dos alunos de LFM, segundo os quais a primeira, é a observação do fenômeno que está ocorrendo com a identificação das respectivas variáveis, na segunda, relaciona-se o fenômeno com os conceitos teóricos e na terceira, soluciona-se o problema, fazendo as adaptações necessárias. Por exemplo:

FI: “Primeiro, procuro analisar o que o exercício está pedindo, achando isso, procurarei a equação em que se encaixe o solicitado e depois usarei de matemática para a resolução”.

LFM: “primeiramente, identifico o problema e as respectivas variáveis. Posteriormente, procuro identificar a relação da teoria com o problema, bem como suas variáveis. Em seguida, através da relação teórica realizada, procuro resolver o problema”

Seguindo na sequência e como já foi dito, o grupo de estudantes que considera quatro etapas é o mais numeroso e apresenta duas vertentes, que são comuns nos alunos de FI e LFM. A primeira vertente considera, praticamente, as mesmas três etapas típicas do grupo anterior, acrescentando uma quarta etapa que consiste em verificar a validade da resposta, seja revisando o porquê deu errado no caso de dar errado, seja comparando com a informação dos livros ou interpretando o resultado do ponto de vista físico. A segunda vertente culmina com a resolução algébrica do problema, mas antes disso introduz uma etapa, que se trata de

complementar os dados que oferece o problema com o máximo de informações relacionadas ao princípio físico em que se enquadra o problema, a fim de elaborar uma explicação matemática e/ou teórica do problema resolvido. São exemplos das duas vertentes:

FI (vertente 1): “faço leitura do enunciado para me contextualizar, depois, leio e extraio as informações dadas referentes ao problema e separo ao lado do exercício; depois escrevo os dados em expressões matemáticas, previamente, conhecidas para chegar a um resultado numérico, depois de obtido o resultado numérico, interpreto do ponto de vista físico e formulo a resposta final”

LFM (vertente 1): “ler com atenção o problema, pesquisar na literatura e depois tento resolvê-lo. Caso não consiga, procuro a ajuda de colegas e professor”

FI (vertente 2): “Costumo entender o problema. A partir disso, coeto os dados necessários ou aqueles que o problema me oferece e com isso analiso em qual princípio físico ele se enquadra. Assim encontro a fórmula que vou necessitar para resolver o problema”

LFM (vertente 2): “1º leio o problema com atenção, 2º tento entender o que a questão está pedindo, 3º tento relacionar o máximo de conteúdo de física com o problema, 4º Utilizo todo meu conhecimento teórico e as equações que eu conheço que relacionam com o problema para resolvê-lo”

Finalmente, os alunos de FI que descrevem sete etapas, praticamente, acrescentam às anteriores, as fases de esquematizar a situação, verificar se a resposta é plausível e interpretar fisicamente o resultado. Por sua vez os alunos de LFM que descrevem seis etapas, entendem a mesma lógica do grupo anterior, só que as primeiras duas etapas são desdobradas em quatro, ao distinguir entre: pensar sobre o problema, levantar dados, reconhecer variáveis, planejar a solução e, finalmente, resolver analisando o resultado, como se aprecia nos seguintes exemplos:

FI: “1º procuro entender a situação física proposta e a pergunta do problema; 2º Faço, se possível, um esquema da situação; 3º anoto o que é conhecido e o que se pede; 4º tento relacionar o que é dado com o que é pedido, através das leis físicas conhecidas; 5º Faço um plano mental de resolução; 6º Ao tentar resolver o problema, se não dá certo, faço novamente a 1ª etapa e procuro fatores relevantes ao problema que não foram percebidos e, 7º chegando a uma resposta, verifico se ela é plausível”

LFM: “Pensar sobre ele, levantar os dados, reconhecer variáveis. Visualizar o que quero obter, sem resolver (planejamento). Resolver, analisar e concluir (Pensar sobre o que for obtido)”

A fim de visualizar, de forma sintética, as informações apresentadas anteriormente, nomeamos cada etapa em função dos propósitos que os alunos expressam.. Resultado que apresentamos nos Quadros 30 e 31 para os casos de Física I e Laboratório de Física Moderna respectivamente.

QUADRO 30. Porcentagem de alunos da disciplina de Física I que descreve o processo de resolução de problemas de Física em diferente quantidade de etapas.

Etapas	1ª. et	2ª. et	3ª. et	4ª. et	5ª. et	6ª. et	7ª. et
% Alunos							
7%	Aplicação de fórmulas						
26%	Leitura e compreensão do enunciado	Aplicação de fórmulas					
29%	<i>Idem anterior</i>	Identificação de dados, variáveis e equações	Aplicação de fórmulas (trabalho algébrico)				
23%	<i>Idem anterior</i>	<i>Idem anterior</i>	<i>Idem anterior</i>	Interpretação do resultado			
	<i>Idem anterior</i>	<i>Idem anterior</i>	Enquadramento do problema num princípio físico	Aplicação de fórmulas (resolução)			
6%	Leitura e compreensão do problema	Representação com esquemas ou desenhos	Identificação de dados, variáveis e equações	Enquadramento num princípio físico	Plano mental de resolução	Aplicação de fórmulas (resolução)	Interpretação do resultado

QUADRO 31. Porcentagem de alunos da disciplina de Laboratório de Física Moderna que descreve o processo de resolução de problemas de Física em diferente quantidade de etapas.

Etapas	1ª. et	2ª. et	3ª. et	4ª. et	5ª. Et	6ª. et
% Alunos						
20%	Compreensão do problema					
10%	Identificação das variáveis	Significado físico em função da teoria				
20%	Observação do fenômeno e identificação de variáveis	Relação do fenômeno com a teoria.	Solução do problema			
40%	<i>Idem anterior</i>	<i>Idem anterior</i>	<i>Idem anterior</i>	Procura de ajuda caso não conseguir		
	Leitura do problema com atenção	Identificação de dados	Relação do problema com a teoria	Solução do problema		
10%	Pensar sobre o problema	Levantar dados	Reconhecer variáveis	Planejar a solução	Resolver o problema	Analisar resultados

Ao comparar os dois grupos, encontramos que se diferenciam na linguagem utilizada para nomear as etapas, que entendemos como a expressão de interpretações diferentes do

processo de resolução desenvolvido. No caso de FI, a etapa final para a maioria é “Aplicação de fórmulas”, com algumas exceções que consideram uma etapa adicional de interpretação dos resultados, sendo tal interpretação a revisão se os cálculos numéricos obtidos são coerentes com a questão colocada.

Entretanto, no caso de LFM, a etapa final é a “Solução do problema”, embora isto possa ser entendido, como a mesma etapa de “aplicar as fórmulas”, apresenta um aperfeiçoamento na linguagem que, por sua vez, deixa ver pressupostos sobre que a solução do problema exige algo além da aplicação das fórmulas, o que também pode se inferir da função das etapas anteriores, nas quais o primeiro grupo refere-se à “Leitura e compreensão do problema”, enquanto no segundo aparecem expressões como “Pensar no problema” ou “Observar o fenômeno” que sugere uma intenção de se afastar da mera leitura do enunciado de um problema para pensar no fenômeno envolvido.

Porém, nota-se que em geral, o processo é entendido como linear, isto é, não tem comportamento cíclico nem espiralado, uma vez que sempre tem um começo e um fim, sem retorno ao começo nem a um ponto intermédio. Interpretamos, isto, como que se outorgasse toda confiança na solução do problema ao fato de usar esquemas matemáticos para conseguir o resultado certo.

Se no caminho aparecem dificuldades, elas são entendidas como problemas de compreensão dos conceitos e de compreensão da relação entre as variáveis, e não, por exemplo, como problemas nas formas de proceder ou problemas na formulação do problema. Somente a minoria dos alunos propõe como parte do processo, a revisão da plausibilidade da resposta encontrada e em consequência a revisão do processo desenvolvido.

Notamos, também, que a minoria de alunos, nos dois grupos, entende que um passo fundamental prévio à “aplicação de fórmulas”, é a tomada de consciência do conhecimento que têm sobre os princípios físicos envolvidos, a fim de poder fazer leitura compreensiva do enunciado e também poder selecionar as equações mais apropriadas na resolução do problema. Isto indica que para este pequeno grupo, a ideia de Matematização tem pressupostos que vão além da aplicação cega de equações e que procuram compreender a essência do que estão fazendo, bem seja consultando aos professores ou, por meio de trabalho com os colegas, ou consultando em livros ou na internet. Porém, para a maioria, o processo todo gira em torno da seleção e aplicação adequada de equações.

6.4. Significados atribuídos pelos licenciandos à “Matematização da Física”

Dada a condição de alunos dos licenciandos, não podemos dizer que apresentem alguma perspectiva sobre o que consideram é o significado da “matematização da Física” no ensino, portanto, vamos analisar os efeitos que neles produzem os significados atribuídos pelos professores e os livros didáticos com os quais eles tiveram contato.

No capítulo seis, vimos que os livros didáticos aproximam-se da categoria *ModelMat*, no propósito de levar o aluno a compreender a razão de ser dos formalismos matemáticos, que representam os fenômenos físicos, o qual levará à compreensão dos conceitos envolvidos na descrição dos fenômenos, porém, distanciando-se em aspectos, como a utilização de exercícios histórico-críticos, sobre a construção das diversas representações ou a orientação para o aluno integrar diversas formas de representação de um mesmo fenômeno.

Por sua vez, no capítulo sete, vimos que os professores apresentam algumas características da categoria *EstudFenom*, principalmente, nas maneiras de introduzir às temáticas que vão ser estudadas em sala de aula, distanciando-se dela ao apresentar ausência de exercícios, que envolvam processos de análises fenomenológicas. Também apresentam algumas características da categoria *ModelMat* no que tem a ver com a visão de assumir a Matemática, como a linguagem da Física que permite explicar os conceitos, mas se distanciando ao não apresentar exercícios, que envolvam processos de modelagem matemática, no sentido amplo do termo.

Dessa maneira, os resultados dos licenciandos, se podem assumir como uma consequência de estarem submersos numa forma de trabalho, orientada, principalmente, pela perspectiva do professor e dos livros de texto, no sentido de que, as explicações fornecidas pelos alunos se enquadram dentro da categoria *ModelMat*, ao privilegiarem a descrição dos formalismos matemáticos, como estratégia de explicação dos conceitos, distanciando-se da essência desta categoria. Consideram que o sentido físico das expressões matemáticas está explícito nas relações de proporcionalidade das variáveis e não na interpretação que delas pode ser feita, por exemplo, envolvendo aspectos históricos, filosóficos, epistemológicos ou de capacidade de explicação das diferentes representações de um fenômeno.

CONCLUSÕES

Lembrando que nosso problema de pesquisa foi tentar responder a questão: “Que possíveis relações operam na utilização da Matemática da Física na construção de explicações, em atividades didáticas para o Ensino de Física, realizados em um curso de Licenciatura em Física?”, podemos dizer que uma relação importante é a visão que se tem sobre a relação entre Física e Matemática, por parte dos professores e dos livros didáticos utilizados como apoio em sala de aula, como isso influencia nos processos de ensino e aprendizagem.

Mas descrever esse condicionante não é simples, uma vez que é preciso se embasar em critérios de análise e interpretação dos eventos pesquisados, que oportunizem um diálogo entre as práticas de ensino de Física e a pesquisa em ensino de Física.

Estudar a “matematização da Física” na construção de explicações em sala de aula, exige esclarecimentos sobre o que podemos entender como “matematização da Física”, tanto nos contextos científicos da Física e de seu ensino, como no contexto acadêmico da formação inicial de professores, o qual por sua vez exige compreensão do que podemos entender como “explicação” e “linguagem” na Física e em seu ensino.

Assim, antes de concluir ideias sobre os significados de “Matematização da Física” presentes em livros didáticos, professores e alunos de um curso de Licenciatura em Física, é preciso apresentar algumas considerações iniciais sobre os tópicos mencionados no parágrafo anterior. Considerações como:

-A relação entre Física e Matemática, ao longo do desenvolvimento da Física, foi mudando, desde uma visão que considerava as demonstrações da Geometria como garantia de verdade, na explicação dos fenômenos da natureza até a construção de linguagens, nas quais sujeito e natureza se fundem. Da mesma maneira, a construção de linguagens foi evoluindo da definição de conceitos qualitativos para os quantitativos e qualis/quantis, sendo expressos por meio de diversos tipos de representações, sejam relacionadas ou não com o ontológico e as evidências experimentais.

A história da Física mostra como sua linguagem foi se matematizando, de tal forma que as representações matemáticas são construídas, buscando cada vez mais a generalização e a capacidade de descrição da essência dos fenômenos físicos, processo no qual intervêm discussões sobre aspectos epistemológicos da construção da Física, por exemplo, sobre o quê e como “medir” e “observar”.

- A ideia de “Matematização” considerada no ensino de Matemática está ligada à aplicação dos esquemas matemáticos na solução de problemas “reais”, cujo processo começa na observação e vai até a formalização do comportamento da situação, mas tal processo não é linear e pode conter diversas etapas. Já a ideia de “Matematização da Física”, no ensino de Física, comporta a compreensão estrutural da representação de um fenômeno, por meio da formação de habilidades de pensamento, que permitam ao aluno compreender os modelos explicativos, também sem ser um processo linear, e com diversas maneiras de entendê-lo.

- Em consequência aos dois itens anteriores, o que se considera uma “explicação” em Física não, necessariamente, é uma “explicação” para o ensino de Física, embora a primeira esteja contida na segunda, uma vez que, na construção da Física é fundamental a descrição do comportamento dos fenômenos e a resposta do porquê acontece desse jeito, enquanto, explicar para o ensino, significa planejar processos de orientação do aluno para que compreenda as explicações da Física. Fato que não acontece com a mera descrição das leis, mas que precisa de atividades que o formem, especificamente, para tal compreensão, sob a consideração dos diversos condicionantes nos ambientes educacionais. Isto implica uma melhor compreensão do que significa a linguagem científica e o que significa colocar tal linguagem em sala de aula.

- Ao procurar e interpretar resultados de pesquisa no campo específico do ensino de Física, observamos que existem na literatura da área, pelo menos três formas diferenciadas de entender a Matemática no Ensino de Física: uma, que se fundamenta na modelagem matemática (*ModelMat*); outra que se fundamenta no desenvolvimento de processos de análises físico-matemáticas (*ProcessFisMat*) e; outra que parte de estudos fenomenológicos para chegar na formalização das representações dos fenômenos (*EstudFenom*). A partir destas três perspectivas, que se enquadram fora do objetivo tradicional de transmitir informações, é possível entender diversas propostas sobre a função da Matemática no ensino de Física, sobre as prioridades de aprendizagem dos alunos e sobre o tipo de problemas de Física que podem ser resolvidos em sala de aula.

Portanto, com base na observação, aplicação de questionários e análise textual de livros didáticos, conseguimos constituir dados que consolidaram algumas respostas para as três questões de pesquisa, como se apresenta a seguir:

1) *Que significados atribuídos à “Matematização da Física” costumam estar presentes em livros didáticos utilizados em disciplinas de um curso de Licenciatura em Física?*

Em geral, podemos dizer que o objetivo dos livros é apresentar as explicações da Física. Para tanto, se aproxima da perspectiva da categoria *ModelMat*, no sentido de que há algumas tendências de desenvolver processos de explicações ao organizar sequências de conteúdos que buscam esquematizar, algoritmizar, simbolizar e formalizar a descrição dos fenômenos físicos, mas se distancia desta perspectiva, na medida em que não se evidencia orientação para a formação, no aluno, de habilidades de pensamento que lhe permitam construir explicações de um fenômeno.

A estrutura dos livros parece obedecer a percepções dos autores sobre como se desenvolveu a história da Física, mais do que a percepções sobre como se tem desenvolvido a pesquisa em Ensino de Física, isto é o que não, necessariamente, obedecem à necessidade de orientação e guia de processos de construção de representações por parte do aluno, visando levá-lo às suas próprias organizações.

Portanto, inferimos que a ideia de processo de aprendizagem da Física, nos livros estudados, tem a ver com uma certa progressão que se espera que o aluno consiga desenvolver, em função da resolução de problemas teóricos, com o que isto implica em termos de domínio conceitual, baseado nas representações matemáticas. Em consequência, assume-se que o que deve ser ensinado é o resultado da Matemática da Física ao longo da história e não que as condições para que tal Matemática aconteça, possa ser um tema de ensino.

2) *Como a “Matematização da Física” costuma estar presente na organização das atividades didáticas e discursos de professores de Física de um curso de Licenciatura em Física?*

As perspectivas dos professores parecem estar fundamentadas em concepções que entendem a Matemática como uma linguagem que possibilita as explicações da Física. Porém, há diversas maneiras de materializar esta perspectiva em sala aula. Foram identificadas duas: na primeira, os professores aproximam-se em alguns aspectos da categoria *ModelMat* e na segunda, aproximam-se da categoria *EstudFenom*.

A proximidade é, basicamente, no que se relaciona com a maneira de definir os pontos de partida para trabalhar as explicações da Física em sala de aula. Assim, para alguns professores, este processo deve se embasar no estudo das representações matemáticas, como

base para definir e compreender os conceitos, enquanto para outros, deve se começar por uma introdução qualitativa do conceito para, posteriormente, apresentar a formalização. Porém as duas perspectivas se distanciam da definição destas categorias, no que se refere ao tipo de problemas que se resolve no processo de ensino, uma vez que, em geral, todos concordam em trabalhar problemas sugeridos pelos livros didáticos, a partir dos quais se espera evidenciar o quanto o aluno compreendeu a teoria estudada.

Significa que nas propostas de ensino dos professores, há uma mescla entre o que consideram importante formar em seus alunos, a linguagem científica própria que tem construído, a linguagem que esperam que seus alunos construam e a problematização proposta pelos livros didáticos, aspectos que, dependendo do tipo de tratamento em sala de aula, podem se aproximar de exercícios de modelagem matemática ou de estudos fenomenológicos.

3) *Que significados de “Matematização da Física” costumam estar presentes em discursos e explicações de alunos de um curso de Licenciatura em Física?*

Como é de se esperar, os significados construídos pelos alunos com relação à “Matematização da Física” são consequentes com as percepções de seus professores e dos livros didáticos, utilizados como apoio, uma vez que neles detectamos também a percepção de que a Matemática é a linguagem da Física, com alguns aspectos próximos da categoria *ModelMat*.

Percebemos que há um distanciamento da essência da maneira como nessa categoria se entende, por exemplo, a modelagem matemática, como oportunidade na construção de habilidades de pensamento que lhes permitam compreender a relação entre diversos tipos de representação de um fenômeno físico. Mas também, se aproximam no sentido de que manifestam interesse pela compreensão de processos de dedução, aplicação de equações e resolução de problemas teóricos ou práticos no laboratório, mas se distanciam, por exemplo, ao não ter inserido em seus discursos de explicação da Física que sabem, o uso de analogias, comparações com saberes obtidos em outros contextos, ou o estudo de um fenômeno com base na análise de diversos tipos de representação.

Em consequência podemos dizer que os aspectos considerados como fundamentais pelos licenciandos na construção de suas explicações e, portanto, na construção de sua aprendizagem da Física, estão relacionados com o domínio das equações que lhes permitem expressar da melhor maneira possível as teorias em estudo ou resolver os problemas colocados pelo professor, fundamentando-se, principalmente na descrição da relação entre as

variáveis, porém, no momento de materializar suas explicações, em geral, optam por descrições qualitativas e representações pictóricas.

Esse resultado evidencia a grande diferença presente entre o que os físicos, os livros didáticos, os professores e os estudantes de física consideram como matematização da física. Os físicos consideram que envolve entender e representar a natureza e a essência de cada fenômeno, os livros didáticos a apresentam colocando os algoritmos e as representações matemáticas, no centro do processo de compreensão do fenômeno, os professores consideram importante o processo que o estudante vai desenvolvendo na compreensão das representações matemáticas dos conceitos e; finalmente, os alunos a entendem como o uso das equações que representam relações entre variáveis e tais representações tem uma funcionalidade de descrever a ocorrência do fenômeno em sentido figurado mas não real.

Com base nos resultados apresentados até agora, podemos concluir que o fato de ter aumentado nossa compreensão sobre o que se entende por “Matematização da Física” pelos professores, alunos e autores dos livros utilizados nas aulas de Física deste curso de Licenciatura em Física, constitui um ponto de referência a partir do qual é possível refletir de maneira fundamentada sobre a relação entre as práticas de ensino e a pesquisa em ensino de Física, objetivando abrir caminhos para visualizar processos de aperfeiçoamento das práticas educativas e, simultaneamente, visualizar um campo de pesquisa na formação inicial de professores, uma vez que esta é uma evidência de que aprender sobre como a linguagem da Física foi se matematizando durante sua evolução, não implica em uma aprendizagem automática da maneira como deve ser apresentada a Matematização da Física em sala de aula, dado que, uma coisa é aprofundar no conhecimento dos conteúdos da Física e outra coisa é pôr tal conhecimento no centro de processos de aprendizagem.

Como última reflexão, gostaríamos de dar ênfase em que não consideramos que o encontrado nesta tese a respeito do significado de ensinar Física na formação inicial de professores, possa ser extrapolado para o ensino de Física no nível básico, já que naquele contexto, as preocupações de instituições, alunos e professores são diferentes e precisariam de estudos particulares.

REFERÊNCIAS

- ALÉMAÑ, R. A.; PÉREZ, J. F. Una nueva propuesta didáctica para la enseñanza de la relatividad en el bachillerato. **Enseñanza de las Ciências**. Barcelona, v.19, n.2, 2001.
- ANDRÉ, M.; SIMÕES, R.; CARVALHO, J.; BRZEZINSKI. Estado da Arte da Formação de Professores no Brasil. **Educação & Sociedade**, Campinas, ano XX, n.68, Dezembro, 1999.
- ANGELL, Carl, et al. An empirical-mathematical modelling approach to upper secondary physics. **Physics Education**, London, v 43, n 3, p. 256, 2008.
- ASSIS, A. K. T. **Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca**. Montreal: Editora Apeíron, 2008. 243p.
- BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Tradutores Luís A. Reto e Augusto Pinheiro. Lisboa: Edições 70, 2002. 223p.
- BELLUCO A.; CARVALHO A. M. Construindo a linguagem gráfica em uma aula experimental de Física. **Ciência & Educação**, Bauru, v.15, n.1, p. 61-84, 2009.
- BING, T. J.; REDISH, E. F. Analyzing problem solving using math in physics: Epistemological framing via warrants. **Physical Review Special Topics-Physics Education Research**, New York, v.5, n.2, 2009.
- BOCHNER, S. **El papel de la matemática en el desarrollo de la ciência**. Original, Princenton University Press, 1966. Madrid: Tradução Castellano, Alianza Editorial, 1991.
- BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Resolução CNE/CP1/2002, de 18 de fevereiro de 2002. Institui Diretrizes Curriculares Nacionais, para a formação de professores de Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena. **Diário oficial da União**, Brasília, 9 de Abril de 2002. Seção 1, p.31
- CALATAYUD A. M. L.; GIL-PÉREZ, D.; GIMENO A. J. V. Cuestionando el pensamiento docente espontáneo del profesorado universitario: ¿las deficiencias de la enseñanza como origen de las dificultades de los estudiantes? **Revista Interuniversitaria de formación del profesorado**, Zaragoza, n.14, p. 71-81, 1992.
- CANTOR, G. N. Berkeley, reid, and the mathematization of mid-eighteenth-century optics. **Journal of the History of Ideas**, Pennsylvania, v.38, n.3, p. 429-448, 1977.
- CARCAVILLLA, A.; ESCUDERO, T. Los conceptos en la resolución de problemas de física «bien estructurados»: aspectos identificativos y aspectos formales. **Enseñanza de las Ciências**, Barcelona, v.22, n.2, 2004.
- CARNAP, R. **Les fondements philosophiques de la physique**. 1966. Traduction de Jean-Mathieu et Antonia Soulez. Paris: Librairie Armand Colin, 1973.
- CARVALHO, A.M.P.; GIL-PEREZ, D. **Formação de professores de ciências**. 2.ed. São Paulo: Cortez Editora, 1993. 120p.

COLEONI, E. *et al.* La construcción de la representación en la resolución de un problema en Física. **IENCI**, Porto Alegre, v.6, n.3, 2001.

CONCARI, S.; GIORGI, S. Los problemas resueltos en textos universitarios de Física. **Enseñanza de las ciencias**, Barcelona, v.18, n.3, Noviembre, 2000.

COPELLO L.; SANMARTÍ, N. Fundamentos de un modelo de formación permanente del profesorado de ciencias centrado en la reflexión dialógica sobre las concepciones y las prácticas. **Enseñanza de las ciencias**, Barcelona, v.19, n.2, p.269-283, 2001.

DENZIN, N.; LINCOLN, Y. A disciplina e a prática da pesquisa qualitativa. In: DENZIN, N. *et al.* **O planejamento da pesquisa qualitativa: teorias e abordagens**. 2th. ed. Porto Alegre: Artmed, 2006. 432p.

EISBERG, R.; RESNICK, E. **Física Quântica-Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas**. Rio de Janeiro: Editora Campus. 1979.

ESTRELA, A. **Teoria e Prática de Observação de classes: uma estratégia de Formação de Professores**. 4.ed. Porto: Porto Editora, 2006. 479p.

FLICK, U. **Introducción a la investigación cualitativa**. 2. ed. Madrid: Ediciones Morata, 2004. 324p.

FLICK, U. **Qualidade na pesquisa qualitativa**. Obra original: *Managing Quality in Qualitative Research*. Sage Publications of London. 2008. Tradutor Roberto C. Costa. Porto Alegre: Artmed, 2009. 196p.

FORINASH, F.; RUMSEY, W.; LANG, C. Galileo's mathematical language of nature. **Science & Education**, Sydney, v.9, n.5, September, 2000.

FREUDENTHAL, H. **Revisiting Mathematics Education China Lectures**. London: Kluwer Academic Publishers Dordrecht, 2002. 220p.

GATTI, B. A formação dos docentes: o confronto necessário professor x academia. **Cad. Pesq.**, São Paulo, n.81, 1992.

GATTI, B. Formação do professor pesquisador para o ensino superior: desafios. In: BARBOSA, R. (Org.). **Trajetórias e perspectivas da formação de professores**. São Paulo: Editora UNESP, 2004. 582p.

GIL-PÉREZ, D., et al. La formación del profesorado universitario de materias científicas: contra algunas ideas y comportamientos de «sentido común». **Revista Interuniversitaria de formación del profesorado**, Zaragoza, n.12, Sept/Dic, 1991.

GINGRAS, Yves. What did mathematics do to physics?. **History of science**, Massachusetts, vol. 39, p. 383-416. 2001.

GRAVEMEIJER, K. TERWEL, J. Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. **J. Curriculum Studies**, v.32, n.6. Viena. 2000.

GRECA, I.; Dos SANTOS, F. Dificuldades da generalização das estratégias de modelação em ciências: O caso da Física e da Química. **Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, v.10, n.1, 2005.

GRECA, I. M.; HERSCOVITZ, V. E. Construyendo significados en mecánica cuántica: fundamentación y resultados de una propuesta innovadora para su introducción en el nivel universitario. **Enseñanza de las ciencias**, Barcelona, v.20, n.2, 2002.

GROSSMAN, P.; WILSON, S.; SHULMAN, L. Profesores de sustancia: el conocimiento de la materia para la enseñanza. Publicación original: "Teachers of substance: subject matter knowledge for teaching", en M.C. Reynolds (ed.): Knowledge Base for the Beginning Teacher. Pergamon Press, Oxford, p.23-36,1989. Tradução: Pedro de Vicente Rodríguez. Profesorado. **Revista de currículum y formación del profesorado**, Granada, v.9, n.2, 2005.

GUTTERSUD, Ø; ANGELL, C. Mathematics in physics: Upper secondary physics students' competency to describe phenomena applying mathematical and graphical representations. In: **GIREP-ICPE MPTL Conference**. Reims France. 2010.

HALLIDAY; RESNICK ; WALKER. **Fundamentos de Física, v,1: mecânica**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2002.

HANSON, N.R. **Patrones de descubrimiento Observación y explicación**. 1971. Original, Harper & Row Publishers, Inc. Tradução, Ed. Cast. Madrid: Alianza Editorial, 1985.

HEMPEL, C; OPPENHEIM, P. Studies in the Logic of Explanation. **Philosophy of Science**, Chicago, Vol. 15, No. 2. p. 135-175. 1948.

HESTENES, D. Modeling methodology for physics teachers. **International Conference on Undergraduate Physics Education** (College Park, August) **Proceedings...** AIP, vol.399 p.935. 1996.

HOLTON, G; BRUSH, S. **Physics, the Human Adventure: from Copernicus to Einstein and Beyond. 1952**. Rutgers University Press; New Brunswick, New Jersey and London. 2001.

IMBERNON, F. Un nuevo profesorado para una nueva universidad. ¿conciência o presión?. **Revista Interuniversitaria de formación del profesorado**, Zaragoza, n.38, 2000.

KARAM, R.; PIETROCOLA, M. Habilidades Técnicas Versus Habilidades Estruturantes: Resolução de Problemas e o Papel da Matemática como Estruturante do Pensamento Físico. **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Florianapolis v.2, n.2, p.181-205, 2009.

KARAM. R. A. S. **Estruturação matemática do pensamento físico no ensino: uma ferramenta teórica para analisar abordagens didáticas**, 2012. 275p. Tese doutorado, Faculdade de Educação, Universidade de Sao Paulo, Sao Paulo, 2012.

KE, J. L. ; MONK, M.; DUSCHL, R. Learning Introductory Quantum Physics: Sensori-motor experiences and mental models. **International Journal of Science Education**, v. 27, n. 13, p. 1571–1594, 28 October, 2005.

KRAGH, H. **Dirac: A Scientific Biography**, Cambridge University Press, 1990. 389p.

KRAPAS, S., QUEIROZ, G., COLINVAUX, D., FRANCO, C., & ALVES, F. Modelos: uma análise de sentidos na literatura de pesquisa em ensino de ciências. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 2, n.3, p.185-205. 1997.

KRYGOVSKA, A. Z. Processus de la mathématisation dans l'enseignement. **Educational Studies in Mathematics**, Illinois, v.1, p.9-16, 1968.

LABURU, C. Problemas abertos e seus problemas no laboratório de Física: uma alternativa dialética que passa pelo discursivo multivocal e univocal. **IENCI**, Porto Alegre, v.8, n.3, 2003.

LUCERO, I.; CONCARI, S.; POZZO, R. El análisis cualitativo en la resolución de problemas de Física y su influencia en el aprendizaje significativo. **Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, v.11, n.1, 2006.

MARTÍNEZ, T. J. et al. La diferencial no es un incremento infinitesimal. Evolución del concepto de diferencial y su clarificación en la enseñanza de La Física. **Enseñanza de las Ciencias**, Vol.20 (2), 2002.

MORAES, R. Uma tempestade de luz: a compreensão possibilitada pela análise textual discursiva. **Ciência & Educação**, Bauru, v.9, n.2, 2003.

MORAES, R.; GALIAZZI, M.C. **Análise textual discursiva**. Ijuí: Editora Unijuí, 2007. 224 p.

PATY. M. Inteligibilidade racional e historicidade. **Estudos avançados**, São Paulo, v.19, n.54, 2005.

PATY. M. The idea of quantity at the origin of the legitimacy of mathematization in physics. In: GOULD, C., et al (org) **Constructivism and practice: towards a social and historical epistemology**, Boston, p.109-135, 2003.

PESSOA, JR. **Conceitos de Física Quântica. v.1**. Sao Paulo: Livraria da Física, 2006.

POINCARÉ, H. **O valor da ciência**. 1905. Tradução, 2ª ed. 2000. 1ª ed 1995. Rio de Janeiro: Contraponto Editora, 2000.

REDISH, E; GUPTA, A. Making Meaning with Math in Physics: A Semantic Analysis. In: GIREP 2009. Leicester UK. **Proceedings...** Leicester, 2010.

REDISH, E. Problem solving and the use of math in physics courses. In: CONFERENCE, WORLD VIEW ON PHYSICS EDUCATION. August 21-26, 2005. Delhi. **Proceedings...** Delhi, 2006.

RENN, J; DAMEROW, P; McLAUGHLIN, P. Aristóteles, Arquímedes y los orígenes de la mecánica: perspectiva desde la epistemología histórica. In: Symposium Arquímedes Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia Congreso de la Real Sociedad Matemática Española. 31.02.2002. **Proceedings...** Ed. José Luis Montesinos Sirera, 2003.

SALÉM, S; KAWAMURA. Simpósios nacionais de ensino de Física: uma sistematização. IN: SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE FÍSICA, XVII, **Atas...** São Luis, SBF, 2007.

SHERIN, B. A Comparison of programming languages and algebraic notation as expressive languages for physics. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, London, v.6, n.1, 2001.

SHULMAN, L. “Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching”, **Educational Researcher**, Standford, v.15, n.2, 1986.

STEINER, H G. Examples of exercises in mathematization on the secondary school level. **Educational Studies in Mathematics**, Illinois, v.1, p.181-201, 1968.

TARDIF, M.; LESSARD, C. **O trabalho docente: elementos para uma teoria da docência como profissão de interações humanas**. 2. ed. Petrópolis: Editora Vozes, 2005. 317p.

TAŞAR, M. What part of the concept of acceleration is difficult to understand: the mathematics, both? **Zentralblatt Fur Didaktik Der Mathematik (ZDM)**, Hamburg, v.42, p.469–482, 2010.

TOLEDO, S. El significado filosófico de las matemáticas en la cultura griega. In: Symposium Arquímedes Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia **Congreso de la Real Sociedad Matemática Española**. 31.02.2002. **Proceedings...** Ed. José Luis Montesinos Sirera, 2003.

TRUYOL, M. E; GANGOSO, Z. La selección de diferentes tipos de problemas de Física como herramienta para orientar procesos cognitivos. **IENCI**, Porto Alegre, v.15, n.3, 2010.

TUMINARO, J; REDISH, E. Elements of a cognitive model of physics problem solving: Epistemic games. **Physical review special topics - physics education research**, New York, v.3, n.2, 2007.

UHDEN, O, *et al.* Modelling Mathematical Reasoning in Physics Education. **Science & Education**, Sydney, v.21, n.4, p. 485-506, 2012.

VACCARO, D. La tensión entre estática y dinámica desde la Antigüedad hasta el Renacimiento. **Scientle Studia**, São Paulo, v.6, n.4, p. 509-49, 2008.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

- AZNAR, M.M.; NIETO, M.P. La resolución de problemas de energía en la formación inicial de maestros. **Enseñanza de las Ciencias**. Barcelona, 27(3), 343-360. 2009.
- BARNES, M. B.; GARNER, J.; REID, D. The pendulum as a vehicle for transitioning from classical to quantum physics: history, quantum concepts, and educational challenges. **Science & Education**, 13(4-5), 417-436. 2004.
- BRYAN, J.A.; FENNELL, B.D. Wave modelling: a lesson illustrating the integration of mathematics, science and technology through multiple representations. **Physics Education**. 44(4), 403. 2009.
- BUTELER, L.; COLEONI, E. El conocimiento físico intuitivo, la resolución de problemas en Física y el lugar de las ecuaciones matemáticas. **IENCI**, 17(2), 435-452, 2012.
- De Lozano, S. R., & Cardenas, M. Some learning problems concerning the use of symbolic language in physics. **Science & Education**, 11(6), 589-599, 2002.
- ETKINA, E., et al. Scientific abilities and their assessment. **Physical review special topics - Physics Education Research**. V.2, n.2, 2006
- FEYNMAN, R. P. **The character of physical law**. Massachusetts: MIT press. 1967.
- GAIGHER, E.; ROGAN, J.M.; BRAUN, M. W. H. Exploring the development of conceptual understanding through structured problem-solving in Physics. **Enseñanza de las ciencias**. v.29, n.9, p.1089-1110, 2000.
- GIBBS, G. **Análise de dados qualitativos**. Porto Alegre: Artmed, 2009.
- GRECA, I.; MOREIRA, M. Modelos mentales, modelos conceptuales y modelización. **Cad.Cat.Ens.Fís.**, v. 15, n. 2: p. 107-120, ago. 1998.
- GUIDUGLI, S.; FERNÁNDEZ, C.; BENEGAS, J. Aprendizaje activo de la cinemática lineal y su representación gráfica en la secundaria. **Enseñanza de las Ciencias**. V.22, n.3, p. 463-472. 2004.
- HESTENES, D. Oersted Medal Lecture 2002: Reforming the Mathematical Language of Physics. **American Journal of Physics**, v.71, p.104, 2003.
- HOEKZEMA, D., *et al.* The particle/wave-in-a-box model in Dutch secondary schools. **Physics Education**. V.42, n.4, p.391. 2007.
- IZQUIERDO, M.; SANMARTÍ, N.; ESPINET, M. Fundamentación y diseño de las prácticas escolares de ciencias experimentales. **Enseñanza de las Ciencias**, v.17, n1, p.45-59, 1999.

JEANS, J.J. **Physics and Philosophy**. New York: Dover Publications, 1942/1981.

JIMÉNEZ-VALLADARES, J.D.; PERALES-PALACIOS, F.J. Graphic representation of force in secondary education: analysis and alternative educational proposals. **Physics Education**, v.36, n.3, p.227, 2001

JOHNSON-LAIRD, P. **Mental models**, en Posner, M. (ed.), Foundations of cognitive science. Cambridge, MA: MIT Press, p. 469-499, 1990.

GÓMEZ-MOLINÉ, M.; SANMARTÍ, N. Reflexiones sobre el lenguaje de la ciencia y el aprendizaje. **Educación Química**, v.11, n.2, 2000.

OTERO, M. R. Psicología cognitiva, representaciones mentales e investigación en enseñanza de las ciencias, **Investigações em Ensino de Ciências**, v.4, n.2, p. 93-119, 1999.

MARTÍNEZ, J.A. Un problema planteado como actividad de investigación: estudio de las posibles trayectorias para el lanzamiento efectivo de un tiro libre de baloncesto. **Enseñanza de las ciencias**, v.18, n.1, p.131-140. 2000.

NERSESSIAN, N. Abstraction via Generic Modeling in Concept Formation in Science. **Mind & Society**, v.3, n.1, p.129-154, 2002.

NETO, A.J.; VALENTE, M. O. Disonancias pedagógicas en la resolución de problemas de física: una propuesta para su superación de raíz vygotskiana. **Enseñanza de las ciencias**. V.19, n.1, p.21-30, 2001.

NUSSENZVEIG. **Curso de Física básica, v.1**. São Paulo: Blucher, 1981.

OTERO, M.R.; FANARO, M.A.; ARLEGO, M. Investigación y desarrollo de propuestas didácticas para la enseñanza de la Física en la Escuela Secundaria: Nociones Cuánticas. **REIEC**, v.4, n.1, p.58-74, 2009

PERALES F. J. Uso (y abuso) de la imagen en la enseñanza de las ciencias. **Enseñanza de las ciencias**, v.24, n.1, p.13-30, 2006.

PÉREZ, H; SOLBES, J. Una propuesta sobre enseñanza de la relatividad en el bachillerato como motivación para el aprendizaje de la física. **Enseñanza de las Ciencias**, v.24, n.2, p.269-285, 2006.

REZENDE, JR, M.; DE SOUZA CRUZ, F. Física moderna e contemporânea na formação de licenciandos em Física: necessidades, conflitos e perspectivas. **Ciência & Educação**, v.15, n.2, p.305-21, 2009.

SILVA, C. C. The role of models and analogies in the electromagnetic theory: a historical case study. **Science & Education**, v.16, n.7-8, p.835-848, 2007

STRAUSS, A; CORBIN ,A. 2008 **Pesquisa Qualitativa: Técnicas e procedimentos para o desenvolvimento de teoria fundamentada**. Porto Alegre. Artmed.2008

GRIFFITH, T.; NERSESSIAN, N.; GOEL, A. The role of generic models in conceptual change. En: Of the eighteenth annual conference of the cognitive science society. **Proceedings....** p. 312-317, 1996

TWENEY, R. Representing the electromagnetic field: how Maxwell's mathematics empowered Faraday's field theory. **Science & Education**, v.20, n.7-8, p.687-700, 2010.

WONG, D., *et al.* Learning with multiple representations: an example of a revision lesson in mechanics. **Physics Education**. v.46, n.2, 2011.

APÊNDICES

APÊNDICE A. TRECHOS DOS ARTIGOS QUE CORRESPONDEM COM A CATEGORIA 1. MATEMATIZAÇÃO A PARTIR DA MODELAGEM MATEMÁTICA.

No	REFERENCIA RESUMDA	Trecho relacionado com: como os pesquisadores entendem a relação entre Física e Matemática?	Trecho relacionado com: Que tipo de problemas os alunos devem resolver para aprender física?	Trecho relacionado com: O que devem aprender os alunos? (No ensino de física)
2	Forinash, K.; Rumsey, W; Lang, C. 2000	“[...] uma representação matemática pode ser melhor do que outra, mesmo quando ambas concordem com a experiência e a observação; e que, dado que a matemática fornece novas ferramentas para a física, as melhores formas de representar matematicamente os fenômenos físicos podem mudar” (p.450).*	“Careful discussion of this question is, we think, an excellent way to bring students to understand that Galileo is right about the need for experiment because it is one thing to prove the mathematical relationships, and another thing to demonstrate that the physical relationships correspond. His proof draws out some of the features of his mathematical map, but to do physics He needs to show the applicability of his mathematical map to the physical world: the mathematics itself isn't physics.” (p. 452)	The goal is to get students to realize that there are at least two purposes for which the algebra is better: one would be that for calculational purposes the algebra is usually simpler to use; another would be that the algebraic representation is embedded in a more powerful system so that more mathematical consequences can be drawn when we use the resources of algebra. (p. 454)
3	Martínez, J.A. 2000	Cada vez se intenta profundizar más, (...), insistiéndose más en el formalismo matemático que en el fenómeno físico real. (p. 131)	Aquí se propone un trabajo que, sin salir de la línea clásica, obliga al alumno a plantearse, desde un punto de vista físico, un problema con el que se tropieza en su vida cotidiana, ya como actor, ya como espectador, y a comprobar que la física no está tan alejada de la realidad. (p. 132)	En cuanto al aparato matemático, en apariencia complicado, se pone en evidencia la necesidad de un buen manejo del álgebra y la trigonometría elementales, y exige la solución, con un poco de ingenio, de ecuaciones en apariencia complicadas, especialmente al buscar la velocidad mínima. Al mismo tiempo, sin embargo, se ha verificado que los nuevos instrumentos, como la hoja electrónica de cálculo, de manejo sencillo y eficaz, permiten hallar rápida y exactamente una solución que, con los métodos tradicionales, exigiría cálculos mucho más complejos. (p. 136)

No	REFERENCIA RESUMDA	Trecho relacionado com: como os pesquisadores entendem a relação entre Física e Matemática?	Trecho relacionado com: Que tipo de problemas os alunos devem resolver para aprender física?	Trecho relacionado com: O que devem aprender os alunos? (No ensino de física)
5	Sherin, B. 2001	“[...] Tenho estado preocupado com caracterizar a natureza profunda da compreensão do mundo físico associado à programação-física e a álgebra-física” (p.56). *	“Students will be learning programming and programming algorithms, rather than some derivational and problem solving strategies that are particular to textbook physics problems. However, my focus will not be on this level of difference. Rather, I am interested in whether there are fundamental differences in learning and understanding that are traceable to features of the particular representational languages employed.” (p. 2)	“In this paper, I will look at the possibility of introducing student programming in one domain: physics. Within the discipline of physics, equations and related mathematical notations play an extremely important role. Physicists write equations and manipulate symbols in order to perform extended and complex computations. Furthermore” (p.2)
6	Alemañ, R.A; Pérez, J.F. 2001	“Por isso, é necessário um esforço adicional para fazê-los ver que os teoremas matemáticos – de forma semelhante às teorias físicas- possuem condições de validade [...] fora das quais sua vigência não está de todo garantida” (p. 338).*	O artigo não apresenta relação explícita com esta questão.	“... los estudiantes serán conducidos a deducir las principales características cualitativas de los diagramas de Minkowski (Bunge, 1967), notando que la geometría que rige en ellos es distinta de la euclídea habitual (Margenau, 1970)”. (p. 337)
10	Martinez, J.; et al. 2002	“Embora a diferencial de Leibniz, com suas dificuldades e contradições, foi um grande avanço na compreensão e o estudo da física, manter a mesma concepção [...], no ensino, três séculos mais tarde, não parece ser o mais adequado para promover a compreensão, a confiança e autonomia dos estudantes” (p. 274).*	O artigo não apresenta relação explícita com esta questão.	“(…) una adecuada comprensión del concepto de diferencial en las clases de física implica (...) saber cuando y por que se hace necesario su uso, (...) conocer la estrategia que utiliza el cálculo y comprender el sentido de los distintos pasos (...) ser consciente de la naturaleza hipotética tentativa en casi todas las situaciones físicas (...) valorar positivamente el papel de la diferencial en el aprendizaje de la física”. (p. 281)

No	REFERENCIA RESUMDA	Trecho relacionado com: como os pesquisadores entendem a relação entre Física e Matemática?	Trecho relacionado com: Que tipo de problemas os alunos devem resolver para aprender física?	Trecho relacionado com: O que devem aprender os alunos? (No ensino de física)
21	Silva, C, C. 2007	The scientific models can materialize as mathematical formulations, analogies or material artifacts (Greca & Moreira 2000, p. 5). In the specific case of a physical model, it is expected that it be materialized as a mathematical formulation. (p. 837)	The historical case study presented in this paper shows that models and analogies play an essential role in the practice of science. Furthermore, the students can learn that new physical theories and their equations do not emerge completely ready from brilliant minds. The electromagnetic field equations are not derived by induction from the experimental data and electrical considerations alone. On the contrary, they were constructed by the use of a wide range of heuristic procedures, among whose are the analogies (Nersessian 1992, p. 12). (p. 844)	Knowing the historical roots of physical ideas can facilitate learning because students can have a context in which to place them. In this perspective the historical analogies can potentially help students in constructing mental models of difficult scientific concepts such as the field concept and developing qualitative understandings of mathematical expressions as well. Historical analogies can be helpful to teachers who aim at helping students in constructing their own mental models on physical phenomena, which will be as close as possible to currently accepted scientific models. (p. 845)
22	Angell et al. 2008	The relationship between mathematics and physics was emphasized, and there was a focus on scientific reasoning related to experimental results, particularly by proposing hypotheses and testing them out experimentally. (p. 258)	Thus an important component in a modelling approach to physics education would be to give students an understanding of reasoning as an essential mediator between experimental observations and theory/model, strengthening the connection between experimental and conceptual representations (...) In this conceptualization, working with physics always involves working with representations of a physical phenomenon. (p. 257)	The consequences of a 'modelling view of physics' for physics teaching would be that physics education should give students a view of the nature of physics as a modelling enterprise; and physics education should train students to become competent modellers and interpreters of models. To become competent modellers, students need practice in performing reasoning processes. Scientific reasoning, particularly reasoning on the basis of empirical evidence, has proven difficult for physics students. (p. 257)

No	REFERENCIA RESUMDA	Trecho relacionado com: como os pesquisadores entendem a relação entre Física e Matemática?	Trecho relacionado com: Que tipo de problemas os alunos devem resolver para aprender física?	Trecho relacionado com: O que devem aprender os alunos? (No ensino de física)
23	Belluco A.; Carvalho A. M. 2009	“[...] a professora criou condições para que os estudantes olhassem as diversas linguagens matemáticas das quais a Física se apropria, da mesma forma que fazem os físicos, ou seja, como se fosse uma “lente” para enxergar o fenômeno.” (p. 81).	“Aprender ciência é se envolver na cultura científica, aprendendo parte de suas linguagens, métodos, processos e práticas, adquirindo novas visões de mundo e ampliando as antigas. Para atribuir significados aos conceitos usam-se as linguagens de forma cooperativa ou especializada.” (p. 63)	“Para aprender a matemática das ciências, é desejável que o aluno tome conhecimento da geometria dos fenômenos por meio dos recursos topológicos, das linguagens. Processo em que deve ocorrer uma tradução da linguagem natural/fenomenológica para a linguagem gráfica/algébrica, possibilitando que o fenômeno possa tornar-se transparente ao olhar do educando.” (p. 66)
24	Rezende, Jr, M; Cruz, F. 2009	O artigo não apresenta relação explícita com esta questão.	Contudo, durante as entrevistas realizadas, foi expressivo o número de entrevistados que ressaltaram o fato de que são necessários, durante a sua formação, além dos compromissos com as disciplinas estruturantes: a demonstração, a discussão e o enfrentamento por meio de “exemplares”, que seriam adaptados em função da sua aplicação. E, indubitavelmente, é no período de formação inicial que respostas precisam ser dadas, pois “é nesta fase que a maioria dos licenciandos tem passado por um período de mudanças, ou seja, de alunos a professores” (p. 319)	“Ainda no que concerne aos objetivos deste trabalho, é importante frisar que, em nossa análise, nos preocupamos com a discussão sobre o par formação/informação. Isto se deve, sobretudo, ao fato de que notamos, em algumas propostas e aplicações, que a falta de clareza quanto aos objetivos tem como sintoma a presença de um conflito entre dar um tratamento mais formativo ou mais informativo aos tópicos e temas de FMC no EM. Entendemos aqui o formativo como a escolha de temas e tópicos e de abordagens que almejam fornecer uma base conceitual estruturada que dê ao aluno da escola básica os instrumentos para pensar e, sobretudo, modelar temas da FMC. Por outro lado, entendemos o informativo como o tratamento que se destina, sobretudo, a uma ampliação despreocupada da “cultura” científica dos estudantes, sem uma preocupação mais efetiva com os aspectos conceituais nem com os processos de modelização dos fenômenos que envolvem a FMC.” (p. 307)

No	REFERENCIA RESUMDA	Trecho relacionado com: como os pesquisadores entendem a relação entre Física e Matemática?	Trecho relacionado com: Que tipo de problemas os alunos devem resolver para aprender física?	Trecho relacionado com: O que devem aprender os alunos? (No ensino de física)
26	Bryan, J.A.; Fennell, B.D. 2009	This paper describes an instructional sequence on wave motion based on teaching through modelling that serves not only to build student understanding of wave characteristics, but also to demonstrate through multiple representations a primary relationship between science and mathematics. (p. 403)	The study of wave motion provides an excellent opportunity to illustrate the importance of modelling in science and mathematics and to incorporate the variety of modelling techniques described earlier.(p. 404) Using multiple methods gives students a variety of models to aid in understanding the concept of the wave. The approach in this article tries to allow students the opportunity to experience several kinds of models, therefore giving them the opportunity to see wave characteristics from a variety of views. (p. 408)	Such models serve as multiple representations of the physical phenomena and are powerful tools in science teaching. In their review of multiple-representation studies, Rosengrant et al (2006) demonstrated 'that representations are very important for student learning. They assist students in acquisition of knowledge and in problem solving. We can say that using high quality multiple representations while solving a problem is a sufficient condition for success but it is not a necessary condition' (discussion). (p. 404)
27	Otero, M.R.; Fanaro, M.A.; Arlego, M. 2009	O artigo não apresenta relação explícita com esta questão.	Aplicando la fórmula para el caso de un sistema libre mencionado en la etapa 2 al problema de la doble rendija se obtiene la expression $P(x) = 4 \cos^2\left(\frac{md}{2\eta T} x\right)$ Los estudiantes discutieron y analizaron con su grupo las características funcionales de esta expresión.. A partir de ella y proporcionando determinadas características experimentales (distancia de separación, tiempo empleado, etc.) realizaron una representación gráfica aproximada de P(x). (p. 68)	Es importante que con las modestas herramientas físicas y matemáticas a disposición de los estudiantes, los obstáculos fueran sorteados. (...) El diseño es adaptable, pues si los estudiantes dispusieran de un conocimiento más sólido de los fenómenos ondulatorios, la secuencia permite aprovecharlos para producir asociaciones fecundas con relación a la longitud de onda. (p. 71)

No	REFERENCIA RESUMDA	Trecho relacionado com: como os pesquisadores entendem a relação entre Física e Matemática?	Trecho relacionado com: Que tipo de problemas os alunos devem resolver para aprender física?	Trecho relacionado com: O que devem aprender os alunos? (No ensino de física)
28	Taşar, M. 2010	“Existe uma relação mutua não-trivial entre Física e Matemática. Os físicos usam a Matemática para entender a natureza e os matemáticos muitas vezes aplicam a Física para compreender sua Matemática.” (p. 471). *	“When a student recognizes that the magnitude of velocity is increasing after each second by the magnitude of acceleration for a consecutive 10 s, s/he then can get a grasp of the underlining meaning of the concept. This is not an accustomed general way of teaching acceleration. But handling it in this way to promote conceptual growth has invaluable advantage over simple plug and chug type of problem solving.” (p. 471)	“As always emphasized, in principle, teaching and learning should begin from the concrete and progress to the more abstract, from the known to the unknown, from the near to the far, and from simple to complex. Therefore, alternative examples and clear analogies need to be developed and integrated into the teaching of these concepts. As Hackworth (1994) suggests, “Calculus students should first learn about rate of change from everyday situations [emphasis added] then the more formal language of the calculus can be introduced” (p. 161).
30	Tweney, R. 2010	Maxwell’s achievements and his discussions of the way in which mathematical physics needs to rest upon mathematical representations suggests that attention to the development of model-building skills is an important aspect of science teaching. (p. 698)	Feynman reminds us that students need to have certain aspects of their skills honed to a high and automatic degree, and that the only way to attain this is via practice, practice, practice. What the example of Maxwell further suggests is that this practice should include problem solving practice that involves specifically representational practice. (p. 697)	Science rests on the construction and use of appropriate mental models. The difficulties of learning physics are, in part, difficulties in learning how to do just this. Far more is involved than simply acquiring knowledge; the student must also acquire the skills of analogical extension and model-building, and must be sufficiently expert in the use of the elements of the model (the differential equations in Maxwell’s case) to be able to rely upon the quick and automated retrieval of the relevant skills. (p. 698)

No	REFERENCIA RESUMDA	Trecho relacionado com: como os pesquisadores entendem a relação entre Física e Matemática?	Trecho relacionado com: Que tipo de problemas os alunos devem resolver para aprender física?	Trecho relacionado com: O que devem aprender os alunos? (No ensino de física)
31	Wong, D. et al. 2011	O artigo não apresenta relação explícita com esta questão.	Simulations and multimedia learning environments offer the unique advantage of combining different representations in one interface. In particular, dynamic presentations offer the possibility to connect representations not only by integrating them, but also by linking them so that a change in one representation is concurrent with a change in another representation. This helps learners establish relationships between the representations. Besides supporting learning in the classroom, simulations can also help consolidate and extend student learning beyond the classroom and allow motivated students to test out the model of the physical phenomenon in different scenarios in their own time. (p. 184)	Physics often involves the modelling of realworld physical phenomena using external representations that range from concrete to abstract forms: pictures, diagrams, words, graphs and equations. Indeed, new representational tools can be developed to scaffold student learning from the more concrete physical situation to the more abstract, but generalizable forms of representation. (p. 178)
32	Uhden et al. 2012	“A matematização de uma teoria física torna ela não apenas uma representação mais concisa e precisa, mas também serve como guia de raciocínio para pensar sobre novos fenômenos. Analogias formais usadas para pensar a eletricidade como um fluido, a luz como onda e, o circuito elétrico como um sistema massa-mola, são exemplos de raciocínio por meio de similitudes formais em Física.” (p. 490). *	“The different paths in the model can illustrate different ways of reasoning, locate possible difficulties and suggest more adequate approaches. We are in favour of a gradual path (didactic approach) if it is intended to introduce the structural role of mathematics in physics. If the instruction is performed at university level, the final goal should be enabling the students to perform like the abstract example. However, they should be able to explain the physical meaning of their mathematical calculations.” (p.502)	“The structural aspects have to be considered as inseparable from physics, whereas the technical ones exist independently. When this issue is transferred to an educational context it leads to the distinction of technical from structural skills. The technical skills are associated with pure mathematical manipulations whereas the structural skills are related to the capacity of employing mathematical knowledge for structuring physical situations.” (p.493)

APÊNDICE B. TRECHOS DOS ARTIGOS QUE CORRESPONDEM COM A CATEGORIA 2. MATEMATIZAÇÃO A PARTIR DE PROCESSOS FÍSICO-MATEMÁTICOS.

No	REFERENCIA RESUMDA	Trecho relacionado com: como os pesquisadores entendem a relação entre Física e Matemática?	Trecho relacionado com: Que tipo de problemas os alunos devem resolver para aprender física?	Trecho relacionado com: O que devem aprender os alunos? (No ensino de física)
1	Concari, S.B.; Giorgi, S.M. 2000.	“[...] Isto se contrapõe com a solução segundo as características do trabalho científico, na qual a construção de hipóteses surge de Análises significativas das situações e intervêm na obtenção de uma capacidade formativa muito superior à dos habituais tratamentos puramente operativos” (p.387). *	“Estos modelos posibilitan el acceso del estudiante a la resolución de problemas como una actividad de construcción y transferencia de conocimiento y no como una mera aplicación de algoritmos y ecuaciones...) (p.382)	“ La elección de sistema y modelo como natural y única, y no como una construcción intelectual conveniente, posible entre otras, no contribuye a que el estudiante comprenda que el modelado que se hace de la situación y del sistema físico seleccionado como objeto de estudio constituye un paso crucial en la resolución del problema.” (p. 387)

* Todos os trechos dos artigos na língua estrangeira, a tradução é própria, e serão identificados com o símbolo (*).

No	REFERENCIA RESUMDA	Trecho relacionado com: como os pesquisadores entendem a relação entre Física e Matemática?	Trecho relacionado com: Que tipo de problemas os alunos devem resolver para aprender física?	Trecho relacionado com: O que devem aprender os alunos? (No ensino de física)
4-	E. Gaigher; J. M. Rogan; M. W. H. Braun. 2000	Instead of focusing on algebra, they use multiple representations to align concrete situations with models and abstract concepts, which are then expressed algebraically to become part of an effective process. It is proposed that conceptual understanding develops from making translations made while traversing the four knowledge domains. Translations create links between a particular concrete situation and particular physics concepts. (p. 1107)	Regarding the development of a conceptual approach, the case study indicated that many translations between the concrete, model and abstract domains are required before translation to the symbolic domain. In the first four steps of the strategy, translations are made between the written problem statement, a visual representation of the concrete situation, physics models, and abstract physics concepts. Only in the fifth step are the physics concepts translated to mathematics, and mathematical operations are limited to the sixth step. In the final step, the mathematical solution is translated back to the concrete situation. (p. 1109)	Regarding algebra, the strategy used in this study was simplified. Students were encouraged to substitute numerical values before starting algebraic manipulation, the reason being that poor mathematical abilities could prevent many students from arriving at correct symbolic solutions. Here the current approach differed from that of others (Huffman, 1997; Reif, Larkin, & Brackett, 1976; Wright & Williams, 1986) who preferred symbolic solutions before substitution. We argued that emphasis on symbolic solutions could be counterproductive for disadvantaged students with poor mathematical skills. Incorrect symbolic solutions would not develop insight into the relevant physics relationships, and numeric substitutions into wrong symbolic solutions would be meaningless, adding to confusion. (p. 1096)
7	Coleoni, E; Otero, J; Gangoso, Z; Hamity, V. 2001.	“Este conjunto de esquemas algébricos constitui a base explícita que orienta a construção de um modelo situacional construído com as relações formais em mente” (p. 287)*	A lo largo del trabajo, se han utilizado herramientas teóricas que pretenden modelar un proceso que se inicia con la lectura del enunciado de un problema, en el cual se genera una representación que guía la resolución del mismo. Los constructos base de texto y modelo de problema se refieren a representaciones dinámicas, que son continuamente modificadas durante este proceso. (p. 295)	Al leer un enunciado de un problema de física, la posibilidad de un sujeto de construir un modelo de la situación que represente el evento en términos cotidianos, u otro que involucre las relaciones formales de manera estructural, dependerá del conjunto de esquemas disponibles (calidad y cantidad) y de las estrategias de recuperación. (p. 287)

No	REFERENCIA RESUMDA	Trecho relacionado com: como os pesquisadores entendem a relação entre Física e Matemática?	Trecho relacionado com: Que tipo de problemas os alunos devem resolver para aprender física?	Trecho relacionado com: O que devem aprender os alunos? (No ensino de física)
8	Neto, A.J.; Valente, M.O. 2001	O artigo não apresenta relação explícita com esta questão.	La forma que nos hemos propuesto experimentar para abordar la enseñanza de la física pretende fomentar la competencia de los alumnos en la resolución de problemas para romper con algunos condicionantes inhibidores.. (p. 22)	Una fuerte orientación cualitativa, no con el objetivo de dar a entender a los alumnos que la física sólo tiene que ver con conceptos, sino en el sentido de minimizar en ellos la idea de que la física tiene que ver sólo con fórmulas. (p. 23) la necesidad de evitar el «operativismo ciego», a través de la realización de análisis cualitativos iniciales amplios, con la subsiguiente construcción de representaciones (internas y externas) consistentes y productivas (p. 29)
12	Laburu, C. 2003	“[...] a etapa de formulação de hipóteses vê-se prejudicada, caso o aluno não esteja de posse da competência cognitiva em que a marca de um raciocínio hipotético acha-se na ponderação entre um pensar nas possibilidades e um pensar na necessidade, em que este último é buscado entre os primeiros. Possibilidades que no caso são inerentemente matemáticas, pertencentes ao domínio das idealizadas e diversificadas funções matemáticas, que estabelecem relações entre grandezas físicas, corporificadas em equações ou fórmulas.” (p.247)	“...Observadas as ponderações até agora discutidas, propomos que a ação didática experimental oriente-se por momentos, não necessariamente rígidos, que convencionamos pelas seguintes denominações: I) Fenômeno, II) Problema, III) Hipóteses, IV) Plano de Trabalho, V) Análise, VI) Conclusão. A não rigidez desses momentos deve ser compreendida no sentido de que, muitas vezes, é necessário que momentos anteriores, aparentemente ultrapassados, precisam ser retornados” (p. 241)	“Como veremos, pode-se enfrentar junto aos aprendizes, durante uma atividade investigativa empírica, toda sorte de problemas que traspassam os aspectos metodológicos, indo, desde a comum dificuldade na articulação e domínio do conteúdo (ou conteúdos relacionados), até problemas epistêmicos que se mostram recalcitrantes à melhora da performance do primeiro. Quando se está desenvolvendo um trabalho desse tipo em sala de aula, problemas relacionados à ecologia conceitual (Posner et al. 1982) do aluno, como conceitos e crenças metaafísicas, compromissos epistemológicos, entre outros, encontram-se certamente em pauta.” (p. 238)

No	REFERENCIA RESUMDA	Trecho relacionado com: como os pesquisadores entendem a relação entre Física e Matemática?	Trecho relacionado com: Que tipo de problemas os alunos devem resolver para aprender física?	Trecho relacionado com: O que devem aprender os alunos? (No ensino de física)
18	Lucero. I; Concari, S; Pozzo, R. 2006	O artigo não apresenta relação explícita com a questão (formas de entender a relação entre Física e Matemática).	“De ahí que en la resolución de problemas es importante, el análisis cualitativo de las expresiones matemáticas involucradas en el fenómeno en estudio, para tomar ideas de las variaciones que se pueden dar, al cambiar alguna de las variables intervinientes. Comprender el significado de la fórmula, demostraría la comprensión del modelo explicativo del fenómeno, acusando un aprendizaje más significativo que el mero uso algebraico de fórmulas y datos numéricos (...) Definido de esta manera el problema cualitativo, no necesariamente será una situación abierta que admita distintas soluciones, ni tampoco será una situación donde las expresiones matemáticas no entren en juego para la resolución, sino que de ser usadas exigirá que este acompañada de alguna interpretación conceptual, que lleve a un análisis de las variables intervinientes en el fenómeno y de cómo afecta al sistema físico involucrado, la variación de alguna de ellas. (p. 88)	“Se maneja la siguiente hipótesis de trabajo: si en las clases de resolución de problemas, se trabaja mayoritariamente, dando más peso, a los problemas cualitativos, dejando aquellos de resolución típicamente numérica como actividades complementarias, se favorecería el aprendizaje significativo de los temas en cuestión, lo que debería manifestarse en un mayor rendimiento académico de los estudiantes.” (p.89)

No	REFERENCIA RESUMDA	Trecho relacionado com: como os pesquisadores entendem a relação entre Física e Matemática?	Trecho relacionado com: Que tipo de problemas os alunos devem resolver para aprender física?	Trecho relacionado com: O que devem aprender os alunos? (No ensino de física)
19	Pérez, H; Solbes, J. 2006	O artigo não apresenta relação explícita com esta questão.	Esta hipótesis se puede fundamentar en la concepción del aprendizaje como una construcción de conocimientos, que toma por base el modo de producción de los conocimientos en la ciencia y la forma de construirlos en el aprendizaje (Driver, 1986, 1988; Hodson, 1988...), en concreto en el modelo de enseñanza-aprendizaje como investigación (Gil et al., 1991; Gil, 1993), a partir de situaciones problemáticas de interés, lo que facilita los cambios conceptual, metodológico y actitudinal. (p. 272)	... es posible realizar una enseñanza de la teoría de la relatividad que dé lugar en los estudiantes a una mejora en su aprendizaje y a un aumento de la valoración positiva y crítica de la ciencia y su desarrollo, mediante programas de actividades diseñados en consonancia con un modelo de enseñanza-aprendizaje como investigación. (p. 272) Un buen aprendizaje ha de conducir al uso práctico de las relaciones conceptuales entre sistemas inerciales y a manejar comprensivamente los fenómenos de dilatación de tiempo y contracción de longitudes. Una forma de hacerlo sin aparato matemático que complica el tema innecesariamente es mediante el reloj de luz, constituido por un cilindro en cuya base inferior se emite luz y en cuya base superior hay un espejo (p. 273).
20	Hoekzema, D., et al. 2007	The combination of mathematical and conceptual difficulties makes teaching quantum physics at secondary schools a precarious undertaking. With many of the conceptual difficulties being unavoidable, simplifying the mathematics becomes top priority. The particle/wave-in-a-box provides a teaching model which includes many aspects of serious quantum physics, while avoiding most of the mathematics. (p. 391)	O artigo não apresenta relação explícita com esta questão.	Meanwhile, experience in over 40 schools has shown that students can handle the model, and we think that results can improve further as teachers gain more experience in teaching about quantum phenomena and using the model. (p. 392) However, apart from emphasizing the conceptual side of quantum physics, we did want to include some computation, and decided to use the particle-in-a-box model for that. That choice has turned out to be a lucky one, as we encountered more and more phenomena where the model results in reasonable estimates. (p. 392)

No	REFERENCIA RESUMDA	Trecho relacionado com: como os pesquisadores entendem a relação entre Física e Matemática?	Trecho relacionado com: Que tipo de problemas os alunos devem resolver para aprender física?	Trecho relacionado com: O que devem aprender os alunos? (No ensino de física)
25	Aznar, M.M.; Nieto, M.P. 2009	O artigo não apresenta relação explícita com esta questão.	etapa del modelo es sumamente importante para la resolución del problema, pues en ella los estudiantes tienen que ser conscientes de la situación que se les plantea y de las concepciones que tienen acerca de la misma, es decir, el análisis les permite construir una representación de la situación, del objetivo a conseguir, de las estrategias a diseñar así como ser conscientes de su dominio del conocimiento necesario (Greeno, 1998). (p. 348)	Se fundamenta en la comparación entre cómo resuelven los científicos las situaciones problemáticas que se les presentan en sus investigaciones y el procedimiento que se debe utilizar dentro de las clases de Ciencias para que los estudiantes aprendan a resolver sus problemas escolares, favoreciendo así su formación. En esta línea de trabajo, y desde hace más de una década. (p. 344)

No	REFERENCIA RESUMDA	Trecho relacionado com: como os pesquisadores entendem a relação entre Física e Matemática?	Trecho relacionado com: Que tipo de problemas os alunos devem resolver para aprender física?	Trecho relacionado com: O que devem aprender os alunos? (No ensino de física)
29	Truyol, M. E.; Gangoso, Z. 2010	“Assume-se, neste modelo proposto, que a compreensão de um problema instrucional de Física implica habilidades necessárias para a construção e gestão das diferentes representações. Essas habilidades são as que chamamos de habilidades de modelagem, que envolvem tanto a construção das representações das situações, a manipulação fluente das diferentes representações construídas e a (re) interpretação de tais representações.” (p.466). *	“(…) um aspecto relevante del comportamiento que lleva a soluciones exitosas (del problema) consiste en que el que resuelve comprende la situación y genera una representación interna que le permite hacer una discusión y predicciones cualitativas. Sobre esa base, puede obtener una representación formal del problema. Esta representación formal (también interna), incorpora los objetos y eventos descriptos en la situación, en conceptos, leyes y principios, cambiando las características ontológicas de la nueva representación. La competencia para resolver problemas de física radica principalmente en la habilidad para reformular el problema en términos de estas representaciones, usualmente llamados modelos, más que destreza matemática o utilización de leyes aisladas”. (p. 465)	“A modo de síntesis, podemos expresar que la comprensión y modelado de un problema instrucional de física implica la construcción integrada y consistente de las representaciones. Este proceso requiere de la puesta en juego de habilidades específicas que pueden y deben ser favorecidas en la instrucción. El tipo de objetos involucrados en la situación que narra el enunciado del problema y la pregunta que es posible plantear en términos de estos objetos, orientan fuertemente los objetivos del resolvidor. Estos objetivos son los que, finalmente, guían al sujeto en la toma de decisiones. Es por esto que los enunciados de problemas resultan herramientas promisorias a la hora de orientar determinados procesos cognitivos en los estudiantes.” (p. 481)

APÊNDICE C. TRECHOS DOS ARTIGOS QUE CORRESPONDEM COM A CATEGORIA 3. MATEMATIZAÇÃO COMO COMPLEMENTO DO ESTUDO FENOMENOLÓGICO.

No	REFERENCIA RESUMDA	Trecho relacionado com: como os pesquisadores entendem a relação entre Física e Matemática?	Trecho relacionado com: Que tipo de problemas os alunos devem resolver para aprender física?	Trecho relacionado com: O que devem aprender os alunos? (No ensino de física)
9	Jiménez-Valladares, J.D.; Perales-Palacios, F.J. 2001	O artigo não apresenta relação explícita com esta questão.	In spite of this, the DOI representation possesses an indubitable communicative potential in various senses. In the first place, it makes the identification of the mechanical interaction explicit with a relationship between pairs of objects. (p. 229)	Vector notation is a powerful mathematical instrument in mechanics and the teaching of mechanics. But, as the saying goes, it is better not to put the cart before the horse, meaning that students must first acquire the essential ideas of the mechanical interaction between objects. In this regard, the SRI is a useful and easy-to-use classroom instrument which lays the groundwork for students to learn the concept of force and its vector representation.(p. 234)
11	Greca, I. M; Herscovitz, V.E. 2002	“Denominamos esta estratégia como fenomenológica-conceitual [...]: fenomenológica para favorecer a criação de uma nova percepção e conceitual porque os fenômenos selecionados para o curso devem ser suficientemente simples (elementares) e dirigidos de forma que a essência dos conceitos fundamentais seja evidente” (p. 331).	“Las exigências matemáticas fueron mínimas y en la discusión de soluciones de la ecuación de Schrödinger, fueron usados programas computacionales para proporcionar a los Estudiantes la visualización de las soluciones de la ecuación con el fin de evitar resoluciones matemáticas de ecuaciones diferenciales. En la figura 1 están relacionados los temas tratados en la unidad y sus características más significativas” (p. 331)	O artigo não apresenta relação explícita com esta questão..

No	REFERENCIA RESUMDA	Trecho relacionado com: como os pesquisadores entendem a relação entre Física e Matemática?	Trecho relacionado com: Que tipo de problemas os alunos devem resolver para aprender física?	Trecho relacionado com: O que devem aprender os alunos? (No ensino de física)
13	Carcavilla, et all 2004	“Estes problemas de significação, tais como os relacionados com a identificação de conceitos e relações entre conceitos, acreditamos que são dos mais importantes e devem ser tratados com o máximo interesse pela didática a fim de proporcionar instrumentos cognitivos e metodológicos que permitam aos alunos encontrar um conforto intelectual e se desenvolver melhor do que antes, tanto ao estudar como ao resolver problemas.” (p.220). *	O artigo não apresenta relação explícita com esta questão.	“A maior parte das dificuldades que têm os alunos ao se enfrentar com os problemas de uma prova são de falta de compreensão dos conceitos e de falta de conhecimentos necessários, tanto conceituais quanto procedimentais, que chamamos de estratégias 1 e 2. A maior parte destas dificuldades se deveriam resolver antes de se enfrentar com o problema na prova” (p. 220)
14	Guidugli, S.; Fernández Gauna, C. y Benegas, J. 2004	O artigo não apresenta relação explícita com esta questão.	Se han presentado en este trabajo los resultados preliminares de una propuesta educativa para el aprendizaje conceptual de la cinemática. Está inscrita en lo que se llama aprendizaje activo y se basa en que los alumnos, a través de su propia experiencia sensorial, desarrollen los conceptos cinemáticos. Los resultados muestran que es posible, con medios modestos y con poco crédito horario semanal, obtener resultados muy satisfactorios. (p. 468)	Nuestra estrategia educativa presupone que el conocimiento se construye en cada alumno a partir de sus experiencias previas y las que le propone la instrucción. (...) En un camino que partía de lo sensorial para arribar a la conceptualización formal, los alumnos debían comparar las nuevas experiencias con sus ideas previas y resolver las contradicciones (por ejemplo, la no-diferenciación generalizada con que los alumnos utilizan los términos gran velocidad y gran aceleración para describir el movimiento de un objeto que se mueve rápidamente). Es por ello que se utilizó en la medida de lo posible, la cinestecia. (p. 465)

No	REFERENCIA RESUMDA	Trecho relacionado com: como os pesquisadores entendem a relação entre Física e Matemática?	Trecho relacionado com: Que tipo de problemas os alunos devem resolver para aprender física?	Trecho relacionado com: O que devem aprender os alunos? (No ensino de física)
15	Barnes, M. B.; Garner, J.; Reid, D. 2004	O artigo não apresenta relação explícita com esta questão.	In addition to our plans to teach quantum ideas in a conceptually-based undergraduate course, we intend to work with high school teachers on their understanding of quantum theory and its importance, as we believe that quantum thinking should begin in secondary schools. The quantum world appeals to the imagination and students should not be deprived of opportunities to appreciate the stories and world views connected to the emergence of modern science. We believe that the pendulum will serve our students well as they journey toward understanding the duality of their worlds. (p. 434)	Students need to be reminded of analogous contexts and commonalities when faced with a new situation. For example, computer simulations can be useful when used in groups in which students can explore, manipulate, and negotiate meanings in various contexts. (p. 432)
16	Greca, I.; Dos Santos, F. 2005.	“Assim, basicamente neste processo se parte de um problema ou fenômeno real, para o qual se busca uma solução matemática ou conceitual, sendo, a seguir, identificados os elementos (objetos, variáveis de interação, etc.) que servirão para descrevê-lo- escolha esta condicionada pela teoria física a partir da qual a situação será descrita. O seguinte estágio deste processo é a formalização de tais propriedades, ou seja, a determinação das equações que as entrelaçam e a exploração das mesmas.” (p. 36).	O artigo não apresenta relação explícita com esta questão.	“Na Física, pelo menos no ensino universitário, a compreensão deve estar relacionada com a capacidade dos estudantes para perceber os fenômenos físicos segundo uma determinada teoria e a formalização desta compreensão. Ou seja, para compreender um fenômeno ou processo em Física, é primeiramente necessário entender os enunciados que conformam a estrutura semântica da teoria, seus modelos físicos, modificando ao mesmo tempo, a maneira em que os fenômenos são percebidos.” (p.44)

No	REFERENCIA RESUMDA	Trecho relacionado com: como os pesquisadores entendem a relação entre Física e Matemática?	Trecho relacionado com: Que tipo de problemas os alunos devem resolver para aprender física?	Trecho relacionado com: O que devem aprender os alunos? (No ensino de física)
17	KE, J. L. ; Monk, M.; Duschl, R. 2005.	“Experiências sensoriais diretas estão no coração de como os estudantes pensam sobre fenômenos físicos. [...] Entendemos que é importante incluir experiências sensorio motoras de ondas estacionarias em diferentes configurações –em uma corda, em um circuito fechado, na superfície de uma folha - e padrões de difração - da luz e de elétrons. Já que, sem estas experiências sensorio motoras, os alunos não terão um espectro adequado de p-prims para usá-los e incorporá-los em seus modelos mentais e esquemas.” (p. 1590). *	O artigo não apresenta relação explícita com esta questão.	Again we reiterate, teaching should focus on providing sensori-motor experiences so students can construct their schema with a range of mental models. (p.1591)
33	Buteler; Coleoni. 2012	“Este estudo pretende mostrar uma relação mais próxima entre intuições físicas e a Matemática, nas quais, as equações são subordinadas às intuições físicas que, parecem “decidir” que tipo de equações são aceitas e quais não o são.” (p.440) . *	“Los dos últimos casos (M y J y E y C), parecen indicar que las intuiciones físicas están estrechamente involucradas durante la resolución de problemas en dos sentidos: en la comprensión cualitativa de los mecanismos involucrados en la situación y en el planteo de las ecuaciones matemáticas. Esto nos hace pensar en la relevancia de poder entender los razonamientos de los estudiantes, sus intuiciones físicas, para actuar en consecuencia.” (p.450)	“La hipótesis sugerida es que no siempre el planteo matemático de un problema físico ayuda a cuestionar y refinar intuiciones. En particular no lo hace cuando ese planteo no involucra, de alguna manera evidente para los estudiantes, las intuiciones físicas que permitieron la comprensión (correcta o incorrecta) de la situación.” (p. 450)

APÊNDICE D. CLASSIFICAÇÃO DOS TEXTOS NAS TRÊS CATEGORIAS.

ARTIGOS QUE CORRESPONDEM COM A CATEGORIA 1. (MODELMAT)	ARTIGOS QUE CORRESPONDEM COM A CATEGORIA 2. (PROCESFISMAT)	ARTIGOS QUE CORRESPONDEM COM A CATEGORIA 3.
<p>2. Galileo's mathematical Language of Nature. Forinash, K.; Rumsey, W; Lang, C.</p> <p>3. Un problema planteado como actividad de investigación: estudio de las posibles trayectorias para el lanzamiento efectivo de un tiro libre de baloncesto. Martínez, J.A.</p> <p>5. A Comparison of programming languages and algebraic notation as expressive languages for Physics. Sherin, B.</p> <p>6. Una nueva propuesta didáctica para la enseñanza de la relatividad en el bachillerato. Alemañ, R.A.; Pérez, J.F.</p> <p>10. La Diferencial no es un incremento infinitesimal. Evolución del concepto de diferencial y su clarificación en la enseñanza de la Física. Martínez T. J; Lopez-Gay, R; Gras, A.</p> <p>21. The role of models and analogies in the electromagnetic theory: a historical case study. Silva, C.C.</p> <p>22. An empirical-mathematical modelling approach to upper secondary physics. Angell, C., <i>et al.</i></p> <p>23. Construindo a linguagem gráfica em uma aula experimental de física. Belluco A.; Carvalho A. M.</p> <p>24. Física moderna e contemporânea na formação de licenciandos em Física: necessidades, conflitos e perspectivas. Rezende, Jr, M.; De Souza Cruz, F.</p> <p>26. Wave modelling: a lesson illustrating the integration of mathematics, science and technology through multiple representations.</p> <p>27. Investigación y desarrollo de propuestas didácticas para la enseñanza de la Física en la Escuela Secundaria: Nociones Cuánticas. Otero, M.R.; Fanaro, M.A.; Arlego, M.</p> <p>28. What part of the concept of acceleration is difficult to understand: the mathematics, or both? Taşar, M.</p> <p>30. Representing the electromagnetic field: how Maxwell's mathematics empowered Faraday's field theory. Tweney, R.</p> <p>31. Learning with multiple representations: an example of a revision lesson in mechanics. Wong, D., <i>et al.</i></p> <p>32. Modelling mathematical reasoning in physics education. Uhden, O., <i>et al.</i></p>	<p>1. Los problemas resueltos en textos universitarios de física. Concari, S.B.; Giorgi, S.M.</p> <p>4. Exploring the development of conceptual understanding through structured problem-solving in Physics. Gaigher, E.; Rogan, J.M.; Braun, M. W. H.</p> <p>7. La construcción de la representación en la resolución de un problema en Física. Coleoni, E; Otero, J; Gangoso, Z; Hamity, V.</p> <p>8. Disonancias pedagógicas en la resolución de problemas de física: una propuesta para su superación de raíz vygotskiana. Neto, A.J.; Valente, M.O.</p> <p>12. Problemas abertos e seus problemas no laboratório de Física: uma alternativa dialética que passa pelo discursivo multivocal e univocal. Laburu, C.</p> <p>18. El análisis cualitativo en la resolución de problemas de física y su influencia en el aprendizaje significativo. Lucero. I; Concari, S; Pozzo, R.</p> <p>19. Una propuesta sobre enseñanza de la relatividad en el bachillerato como motivación para el aprendizaje de la física. Pérez, H; Solbes, J.</p> <p>20. The particle/wave-in-a-box model in Dutch secondary schools. Hoekzema, D., <i>et al.</i></p> <p>25. La resolución de problemas de energía en la formación inicial de maestros. Aznar, M.M.; Nieto, M.P.</p> <p>29. La selección de diferentes tipos de problemas de Física como herramienta para orientar procesos cognitivos. Truyol, M. E; Gangoso, Z.</p>	<p>9. Graphic representation of force in secondary education: analysis and alternative educational proposals. Jiménez-Valladares, J.D.; Perales-Palacios, F.J.</p> <p>11. Construyendo significados en mecánica cuántica: fundamentación y resultados de una propuesta innovadora para su introducción en el nivel universitario. Greca, I. M; Herscovitz, V.E.</p> <p>13. Los conceptos en la resolución de problemas de física «bien estructurados»: aspectos identificativos y aspectos formales. Carcavilla, A.; Escudero, T.</p> <p>14. Aprendizaje activo de la cinemática lineal y su representación gráfica en la secundaria. Guidugli, S.; Fernández, C.; Benegas, J.</p> <p>15. The pendulum as a vehicle for transitioning from classical to quantum physics: history, quantum concepts, and educational challenges. Barnes, M. B.; Garner, J.; Reid, D.</p> <p>16. Dificuldades da generalização das estratégias de modelação em ciências: o caso da Física e da Química. Greca, I.; Dos Santos, F.</p> <p>17. Learning Introductory Quantum Physics: Sensori-motor experiences and mental models. Ke, J. L.; Monk, M.; Duschl, R.</p> <p>33. El conocimiento físico intuitivo, la resolución de problemas en Física y el lugar de las ecuaciones matemáticas. Buteler, L.; Coleoni, E.</p>

APÊNDICE E. FICHA DIÁRIA DE OBSERVAÇÃO PRELIMINAR

I. DADOS BÁSICOS

Disciplina: _____ Período: _____

Data: _____ Aula No. 1

Professor titular: Anônimo Observador: Diego Vizcaíno.

II. DESCRIÇÃO DA AULA

1. Conteúdos ou tópicos desenvolvidos.
2. Descrição dos momentos da aula..
3. Participação do observador.

III. OBSERVAÇÕES GERAIS

APÊNDICE F. ROTEIRO DE OBSERVAÇÃO DE AULAS

I. DADOS BÁSICOS

I. DADOS BÁSICOS

Disciplina: _____ Período: _____

Data: _____ Aula No. _____

Professor titular: _____ Observador: Diego Vizcaíno.

TEMA: _____

1. Indicadores de Observação de como os professores costumam utilizar os elementos de matemática no desenvolvimento de atividades didáticas.

Indicador	Por quê/ de que tipo/ de que modo
1. Apresenta ou manifesta os objetivos e o plano de cada aula.	
2. Apresenta os modelos explicativos dos fenômenos físicos.	
3. Discute a interpretação Física das equações utilizadas.	
4. Expressa critérios de seleção dos exercícios a serem resolvidos.	
5. Faz uso de analogias.	
6. Elabora gráficos	
7. Elabora desenhos ou esquemas.	
8. Faz uso de vídeos, softwares, sites em internet, outros recursos.	
9. Utiliza linguagem científica	
10. Utiliza linguagem cotidiana	
11. Utiliza dados experimentais	
12. Utiliza os resultados obtidos pelos alunos nas provas.	

OBSERVAÇÕES GERAIS

APÊNDICE G. QUESTIONÁRIO PARA PROFESSORES

AVISO: Este questionário forma parte da coleta de dados para a tese “O papel da Matemática nas explicações e suas possibilidades no ensino e na aprendizagem da Física”. Os pesquisadores se comprometem a guardar sigilo com a informação, e respeitar a ética profissional no uso dos dados.

Nome: _____

Disciplina(s) Ministrada(s): _____

1) Descreva o processo que você costuma utilizar para EXPLICAR um fenômeno da Física.

Nesta descrição procure detalhar as etapas e os recursos que você utiliza para explicar.

2) No planejamento da aula, o que é que você prioriza?

APÊNDICE H. QUESTIONÁRIO PARA ALUNOS

AVISO: Este questionário faz parte da coleta de dados para a tese “O papel da Matematização nas explicações e suas possibilidades no ensino e na aprendizagem da Física”. Os pesquisadores se comprometem a guardar sigilo com a informação, e respeitar a ética profissional no uso dos dados.

Disciplina: _____ Idade: _____ Data: _____

1) Descreva o processo que você costuma utilizar para resolver um problema da Física.

2) Escolha um fenômeno ondulatório, nomeie-o e represente-o.

3) Uma forma de expressar o princípio de Arquimedes é: “um corpo ao ser imerso, total ou parcialmente em um fluido, sofre um empuxo igual ao peso do volume do fluido deslocado”. -Como você explicaria este princípio para outra pessoa?.

4) - Para você qual o significado da expressão matemática:

APÊNDICE I. QUESTIONÁRIO PILOTO PARA ESTUDANTES

AVISO: Este questionário faz parte da coleta de dados para a tese “O papel da matematização nas explicações e suas possibilidades no ensino e na aprendizagem da Física”. Os pesquisadores se comprometem a guardar sigilo com a informação, e respeitar a ética profissional no uso dos dados.

Disciplina: _____ Período: _____ Data: _____

- 1) Descreva o processo que você costuma utilizar para resolver um problema da Física
- 2) Na sua **COMPREENSÃO** dos fenômenos físicos, Qual o papel que desempenham os seguintes aspectos?
 - a. Resolução de problemas _____
 - b. Desenhos
 - c. Gráficos
 - d. Dados experimentais
 - e. Analogia
 - f. Perguntas e respostas
 - g. Linguagem científica
- 3) Você compreende os significados e usos de todos os signos e símbolos usados nas aulas e nos livros de física?
- 4) Você tira informação dos gráficos apresentados nas aulas de física? Explique.
- 5) Você compreende facilmente a relação entre as equações utilizadas na física e a teoria da física? Explique.

APÊNDICE J. Listado de livros didáticos sugeridos nas ementas das disciplinas acompanhadas no primeiro semestre de 2012

DISCIPLINA	TÍTULO
FÍSICA I	<p>HALLIDAY, D., RESNICK, R. E WALKER, J., "Fundamentos de Física ", VOL. 1, 6ª Ed., Editora Livros Técnicos e Científicos Ltda, Rio de Janeiro, 2002.</p> <p>NUSSENZVEIG, H.M. – Curso de Física Básica – Vol.I - 4ª. Edição, Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo 2002.</p> <p>TIPLER, P. "FÍSICA". Vol.1.Editora: Guanabara Dois. Rio de Janeiro.2002.</p> <p>ALONSO, M. E FINN, E.J. "Física, um curso universitário". VOL.1. Editora Livros Técnicos e Científicos Ltda, São Paulo.</p> <p>KELLER, FJ. GETTYS, W.E, SKOVE, M.J, "Física", Vol. 1, Editora Makron Books, São Paulo. 1999.</p> <p>SEARS, F., ZEMANSKY, MW E YOUNG, H.D. e FREEDMAN, R.A., "Física I" , Editora: Addison Wesley Ltda,2004. São Paulo</p>
FÍSICA II	<p>HALLIDAY, D., RESNICK, R. E WALKER, J., "Fundamentos de Física ", VOL. 1, 6ª Ed., Editora Livros Técnicos e Científicos Ltda, Rio de Janeiro, 2002.</p> <p>NUSSENZVEIG, H.M. – Curso de Física Básica – Vol.I - 4ª. Edição, Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo 2002.</p> <p>TIPLER, P. "FÍSICA". Vol.1.Editora: Guanabara Dois. Rio de Janeiro.2002.</p> <p>ALONSO, M. E FINN, E.J. "Física, um curso universitário". VOL.1. Editora Livros Técnicos e Científicos Ltda, São Paulo.</p> <p>KELLER, FJ. GETTYS, W.E, SKOVE, M.J, "Física", Vol. 1, Editora Makron Books, São Paulo. 1999.</p> <p>SEARS, F., ZEMANSKY, MW E YOUNG, H.D. e FREEDMAN, R.A., "Física I" , Editora: Addison Wesley Ltda,2004. São Paulo</p>
FÍSICA III	<p>HALLIDAY, D., RESNICK, R. E WALKER, J., "Fundamentos de Física ", VOL. 3, 6ª Ed., Editora Livros Técnicos e Científicos Ltda, Rio de Janeiro, 2002.</p> <p>NUSSENZVEIG, H.M. – Curso de Física Básica – Vol.III - 4ª. Edição, Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo 2002.</p> <p>TIPLER, P. "FÍSICA". Vol.2.Editora: Guanabara Dois. Rio de Janeiro.2002.</p> <p>ALONSO, M. E FINN, E.J. "Física, um curso universitário". VOL.2. Editora Livros Técnicos e Científicos Ltda, São Paulo.</p> <p>KELLER, FJ., GETTYS, W.E, SKOVE, M.J, "Física", Vol. 2, Editora Makron Books, São Paulo. 1999.</p> <p>SEARS, F., ZEMANSKY, MW E YOUNG, H.D. e FREEDMAN, R.A., "Física III" , Editora: Addison Wesley Ltda,2004. São Paulo</p>
LAB. FÍSICA MODERNA	<p>PRESTON, D; DITZ, E.R. The Art of Experimental Physics, Willey, Nova York, 1991.</p> <p>EISBERG, R; RESNICK, R. Física Quântica, Ed. Campus Ltda., Rio de Janeiro, 1979.</p>

	<p>PASCO Scientific. Manuais das montagens experimentais (vários), EUA.</p> <p>PHYWE Systeme GMBH. Manuais das montagens experimentais (vários), Alemanha.</p>
FÍSICA MODERNA	<p>EISBERG, R.; RESNICK, R., Física Quântica, Rio de Janeiro, Editora: Campus, 1988.</p> <p>RICHTMYER; KENNARD; LAURITSEN. Introduction to Modern Physics.</p> <p>LEIGHTON, R.B., Principles of Modern Physics, Editora: McGraw-Hill, New York, 1959.</p> <p>EISBERG, R. Fundamentos de Física Moderna.</p> <p>PESSOA Jr. O. Conceitos de Física Quântica, Livraria da Física; São Paulo. 2003</p> <p>VALADARES, E. C., CHAVES, A., ALVES, E. G., Aplicações da Física Quântica: do Transistor à Nanotecnologia, Editora Livraria da Física.</p>
FÍSICA MATEMÁTICA II	<p>ARFKEN, G. Mathematical Methods for Physicists, Academic Press, 1970.</p> <p>BUTKOV, E. Física Matemática, Editora Guanabara Dois, 1975.</p> <p>MORSE, P.M.; FESHBACH. Methods of Theoretical Physics, Ed. MacGraw-Hill, 1953.</p>

APÊNDICE K. ROTEIROS DE ANÁLISE DO LIVRO DE TEXTO:

LIVRO 1

HALLIDAY, D., RESNICK, R. WALKER, J. Fundamentos de Física, v,1: mecânica. Editora Livros Técnicos e Científicos. 8.ed. Rio de Janeiro, 2011.

Capítulo analisado	Capítulo 2. Movimento retilíneo. pp.14-41
--------------------	---

1. Estrutura geral do capítulo.***Introdução.***

- Título do capítulo acompanhado de uma questão convidando ao leitor a encontrar a resposta no interior do capítulo.
- Breve reflexão sobre os propósitos da Física.

Apresentação do conteúdo.

Os conceitos deste capítulo são: Movimento, Posição e Deslocamento, Velocidade Média e Velocidade Escalar Média, Velocidade Instantânea, Velocidade Escalar Instantânea, Aceleração, Aceleração constante, Aceleração em Queda livre e, Integração de gráficos em Análise de Movimento.

A definição dos conceitos faz-se a partir de uma breve introdução do significado dos símbolos utilizados em situações específicas, para chegar na formulação da equação que representa o conceito com o respectivo gráfico da função, finaliza propondo uma questão de “teste” para o leitor verificar o aprendizado do conteúdo e desenvolve um exemplo de aplicação da(s) equação(ões) na solução de um problema (apresentando as “ideias chave” ao considerar as condições do problema, cálculos e um comentário ou raciocínio), alguns exemplos são básicos e outros se intitulam como “aumente sua capacidade” e têm um maior grau de dificuldade.

Ao longo do capítulo vão sendo oferecidas táticas para a solução de problemas visando enfatizar mecanismos de uso das equações para evitar erros nos cálculos ao ter má interpretação do problema ou não utilizar de forma adequada as equações com relação aos conceitos envolvidos no problema.

Encerramento do capítulo

<ul style="list-style-type: none"> - Revisão e Resumo, com uma síntese das definições de todos os conceitos apresentados e suas respectivas equações. - Perguntas, cujas respostas requerem um raciocínio com base em figuras ou gráficos ou um cálculo mental com base em equações dadas. - Problemas, cujas soluções requerem o cálculo de um valor desconhecido.
--

2. Ideias fundamentais apresentadas em cada uma das partes do capítulo.

Introdução.	<p>Depois do título “Movimento retilíneo” coloca a seguinte questão: como um pica-pau pode sobreviver aos violentos impactos de seu bico em uma árvore? (p.14) E convida ao leitor a encontrar a resposta no interior do capítulo. Em seguida coloca a questão: o que é Física? Para afirmar que um dos propósitos da física é estudar o movimento dos objetos. Descreve alguns exemplos e conclui que neste capítulo estuda-se o movimento em linha reta ou unidimensional.</p>
Apresentação do conteúdo	<p>Começa expondo algumas propriedades gerais do movimento unidimensional com base em três restrições: (1) supor que a trajetória se dá ao longo de uma linha reta; (2) discutir o movimento e suas mudanças sem se preocupar pelas causas; (3) supor o objeto em movimento como uma partícula.</p> <p>Exemplo: Conceito de Velocidade Média. Começa aclarando que a notação $x(t)$ representa uma função x de t, e não o produto de x por t. Como um exemplo simples mostra a função $x(t)$ para um tatu em repouso (tratado como partícula) durante um intervalo de 7 s, e posteriormente com o tatu em movimento numa linha reta, com a respectiva representação no gráfico t vs x. Ao descrever as informações que oferece o gráfico define a velocidade media e apresenta a representação matemática. “.. a velocidade media v_{med}, que é a razão entre o deslocamento Δx e o intervalo de tempo Δt durante o qual esse deslocamento ocorre (p.16):</p> $v_{med} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} .”$ <p>Posteriormente resolve o problema: “Depois de dirigir uma van em uma estrada retilínea por 8,4 Km a 70 Km/h, você caminha por mais 2,0 Km ao longo da estrada até chegar ao posto de gasolina mais próximo. (a) Qual é o deslocamento total, desde o início da viagem até chegar ao posto de gasolina? (b) Qual é o intervalo de tempo Δt entre o início da viagem e o instante em que você chega ao posto?. “(p.16). Apresenta quatro “ideias chave” a primeira para calcular o deslocamento, a segunda para calcular o tempo entre o início da viagem e a chegada ao posto, a terceira para calcular a velocidade média e a quarta para representar graficamente e calcular a velocidade escalar média.</p> <p>Finaliza com o teste: “As equações a seguir fornecem a posição $x(t)$ de uma partícula em quatro casos (em todas as equações, x está em metros, t em segundos e $t > 0$): (1) $x = 3t - 2$; (2) $x = -4t^2 - 2$; (3) $x = \frac{2}{t^2}$; (4) $x = -2$. (a) Em que caso(s) a velocidade v da partícula é constante? (b) Em que caso(s) a velocidade v é no sentido negativo do eixo x?” (p.19)</p> <p>As “Táticas para a solução de problemas” são apresentadas na página 18 (táticas 1,2,3,4), p. 22 (tática 5) e, p. 29 (táticas 6,7), sendo elas:</p> <p>Tática 1: você compreende o problema? (...) a melhor forma de verificar se você compreendeu o problema é a seguinte: você seria capaz de explicá-lo a outra pessoa?.</p> <p>Tática 2: As unidades estão corretas? antes de substituir valores numéricos nas equações, certifique-se de que as unidades usadas são compatíveis. (...).</p> <p>Tática 3: A resposta obtida é razoável? a resposta fez sentido ou parece muito grande ou muito pequena? (...) O erro pode estar no método usado, nos cálculos ou no modo como os dados foram digitados em uma calculadora. (...)</p> <p>Tática 4: Interpretação de gráficos. Em cada gráfico a variável associada ao eixo horizontal é o tempo t,</p>

	<p>(...) a variável associada ao eixo vertical é a posição x (...) preste sempre atenção nas unidades nas quais as variáveis estão expressas.</p> <p>Tática 5: Sinal da Aceleração. (...) o sinal de uma aceleração indica um sentido, e não se a velocidade do objeto esta aumentando ou diminuindo.(...)</p> <p>Tática 6: Significado do sinal negativo. (...) um valor negativo de ‘y’ significa que o corpo esta abaixo do ponto escolhido como origem. Uma velocidade negativa significa que o corpo está se deslocando no sentido negativo do eixo y. Uma aceleração negativa significa que a velocidade do corpo se torna menos positiva.(...)</p> <p>Tática 7: Respostas inesperadas. (...) Se você obtiver um número maior de respostas do que o previsto, não despreze cegamente (...) Examine-as atentamente para verificar se possuem algum significado físico (...)</p>
<p>Encerramento do capítulo</p>	<p>O resumo contem a descrição das equações que representam cada conceito. Exemplo: Conceito de Aceleração Instantânea: “A <i>aceleração instantânea</i> (ou simplesmente aceleração) a é igual à derivada primeira em relação ao tempo da velocidade $v(t)$ ou á derivada segunda da posição $x(t)$ em relação ao tempo: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$. Em um gráfico de v em função de t, a aceleração a em qualquer instante t é igual à inclinação da curva no ponto que representa t.”. (p.31)</p> <p>A seção de perguntas tem questões similares às colocadas nos testes. Exemplo: “Em $t = 0$, uma partícula que se move em um eixo x esta na posição $x_0 = 20\text{m}$. Os sinais da velocidade inicial v_0 (no instante t_0) e da aceleração constante a partícula são, respectivamente, para quatro situações: (1) +, +; (2)+,-; (3)-,+; (4) -,-. Em quais das situações a partícula (a) para momentaneamente, (b) passa pela origem e (c) não passa pela origem?”(p.33)</p> <p>- 118 Problemas em três níveis de dificuldade. No nível um precisa-se aplicar uma equação para calcular um valor solicitado, no nível dois se exigem o uso de mais de uma equação e também a interpretação de gráficos e, no nível três além do anterior se exige deduzir outras equações por combinação das equações básicas ou análises de gráficos.</p> <p>Exemplo problema nível um: “Durante um espirro, os olhos podem se fechar por ate 0,50 s. Se você esta dirigindo um carro a 90Km/h e espirra, de quanto o carro pode se deslocar ate você abrir novamente os olhos?” (p.33)</p> <p>Exemplo problema nível dois: “uma bola de argila úmida cai 15,0 m até o chão e permanece em contato com o solo por 20,0 m antes de parar completamente. (a) Qual é o módulo da aceleração média da bola durante o tempo de contato com o solo? (trate a bola como uma partícula) (b) A aceleração média é para cima ou para baixo?” (p.37)</p> <p>Exemplo problema nível três: “Ao pegar um rebote, um jogador de basquete pula 76,0 cm verticalmente. Qual o tempo total (de subida e descida) que o jogador passa (a) nos 15 cm mais altos e (b) nos 15 cm mais baixos do salto? Esses resultados explicam por que os jogadores de basquete parecem flutuar no ar quando saltam?”</p>

3. Ideias explícitas sobre a relação da Física com a cotidianidade.

Situação	Expressão dos autores
<p>Resposta à pergunta inicial do capítulo</p>	<p>A pergunta do começo do capitulo, é tratada como exemplo do conceito de Aceleração constante. A questão é, <i>como um pica pau pode sobreviver aos violentos impactos do seu bico em uma arvore ?</i>”, para o qual coloca o problema: “A cabeça de um pica-pau está se movendo para a frente com uma velocidade de 7,49 m/s quando o bico faz contato com um tronco de árvore. O pico para depois de penetrar 1,87 mm no tronco. Determine o módulo da aceleração em unidades de g, supondo que ela é constante” ao aplicar a equação $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$, calcula $a = (1,53 \times 10^3)g$.</p> <p>Adicionando um comentário: “(...) A capacidade de um pica-pau de suportar acelerações tão elevadas ainda não foi bem explicada, mas existem duas teorias principais: (1) O movimento da cabeça do pica-pau é quase retilíneo (diminuindo a probabilidade de uma concussão da cabeça); (2) O cérebro do pica-pau está tão fortemente preso ao crânio que as duas estruturas</p>

	se movem em uníssono, o que minimiza os efeitos da aceleração. (p.25)
Depois da definição de aceleração	“Quando o elevador acelera, você se sente como se estivesse sendo empurrado para baixo; mais tarde, quando o elevador freia até parar, tem a impressão de que esta sendo puxado para cima. Entre esses dois intervalos não sente nada de especial. Em outras palavras, nosso corpo reage a acelerações (é um acelerômetro), mas não a velocidades (não é um velocímetro). Quando estamos viajando de carro a 90 Km/h ou viajando de avião a 900 Km/h não temos nenhuma sensação de movimento. Entretanto, se o carro ou o avião muda bruscamente de velocidade percebemos imediatamente a mudança e podemos até ficar assustados. Boa parte da emoção que sentimos quando andamos de montanha-russa se deve às mudanças súbitas de velocidade às quais somos submetidos (pagamos pela aceleração, não pela velocidade). p.21
Na formulação de problemas	Exemplo: “Lesões de pescoço causadas pelo ‘efeito chicote’ são freqüentes em colisões traseiras, em que um automóvel é atingido por trás por outro automóvel. (...) em um teste recente para estudar as lesões do pescoço, em colisões traseiras (...) O início da aceleração do tronco sofreu um retardo de 40ms, tempo que o encosto do assento levou para ser comprimido contra o voluntário. A aceleração da cabeça sofreu um retardo de mais 70ms. Qual era a velocidade do tronco quando a cabeça começou a acelerar?” (Halliday 2011)

4. Uso de Fotografias, figuras, diagramas ou desenhos na explicação dos conceitos.

Dos nove exemplos apresentados no capítulo, seis tem associado gráficos, um deles um desenho e um outro uma fotografia. Os gráficos representam posição, velocidade ou aceleração em função do tempo e são utilizados para fornecer dados, ou descrever o movimento da partícula no problema.

O desenho tem um lançador arremessando uma bola de beisebol na vertical para cima, nele são descritas cada uma das partes do movimento, para indicar o sentido negativo da aceleração g , durante a descida e a subida da bola.

A primeira fotografia usa-se para apresentar o pica-pau no começo do capítulo. A segunda fotografia busca apresentar a sensação de choque do piloto de um trenó a jato que aumenta bruscamente sua velocidade. E, a terceira fotografia, apresenta uma pena e uma maçã em queda livre no vácuo, é usada como ilustração da afirmação de que ao desconsiderar o efeito do ar sobre o movimento de um objeto lançado para cima ou para baixo, o objeto sofre uma aceleração constante.

5. Uso da História da Física na apresentação ou desenvolvimento dos conceitos.

Não apresenta

6. Ideias explícitas sobre que o aluno e/ou leitor devem saber previamente.

Situação	Expressão dos autores
Na obtenção por integração das equações para o cálculo da aceleração.	“esta seção se destina a alunos que conhecem cálculo integral”. P.26
Apresentação do livro	“Este livro foi concebido basicamente com a intenção de ser utilizado em um curso de um ano para estudantes que já passaram por tratamentos substanciais de cálculo diferencial e integral elementar e de física clássica elementar em relação ao nível de cálculo” (apresentação do livro)

LIVRO 2

NUSSENVZVEIG, M. Curso de Física básica, v.1. Mecânica. 4.ed. Editora Blucher, São Paulo 2002, 6 reimpressão 2009.

Capítulo analisado	Capítulo 2: “Movimento unidimensional” pp.23-39
--------------------	---

1. Estrutura geral do capítulo.

<p><i>Introdução.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Título do capítulo. - Parágrafo introdutório <p style="text-align: center;"><i>Apresentação do conteúdo.</i></p> <p>Os conceitos deste capítulo são: Velocidade média; Velocidade instantânea; O problema inverso; Aceleração; Movimento retilíneo uniformemente acelerado; Galileu e a queda dos corpos.</p> <p>A definição dos conceitos faz-se apresentando uma situação física que permita introduzir a notação dos símbolos que representam as variáveis envolvidas no conceito com a respectiva equação. Posteriormente faz-se a representação gráfica da função, a qual é analisada com base nas definições de limite, derivada e integral.</p> <p style="text-align: center;"><i>Encerramento do capítulo</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Relato histórico. - Problemas, cujas soluções requerem o cálculo do valor pedido de uma variável, ou dedução de valores a partir de um gráfico, ou demonstração matemática de uma função.
--

2. Ideias fundamentais apresentadas em cada uma das partes do capítulo.

Introdução.	Depois do título “Movimento unidimensional” coloca o subtítulo “Velocidade média” no qual apresenta ideias introdutórias sobre: o tema a estudar é a cinemática (descrição do movimento) mas não a dinâmica (como determinar o movimento produzido); vai se limitar ao movimento em uma só dimensão e; vai se restringir a alguns tópicos centrais.
-------------	---

Apresentação do conteúdo

Começa descrevendo uma situação física que pode ser estudada a partir da definição do conceito.
Exemplo: “ $x(t)$ é a posição na estrada no instante t , ocupada pelo pára-choque dianteiro de um carro em movimento ao longo da estrada (em linha reta). Poderíamos determinar $x(t)$, por exemplo, filmando o movimento do carro e depois analisando uma a uma as imagens do filme. (...) Outro método de ‘congelar’ a posição instantânea de um objeto em movimento é tirar uma fotografia de exposição múltipla em que objeto é iluminado a intervalos de tempo Δt regulares por um ‘flash’ ultra-rápido (estroboscópica).” (p.23) (...)

Posteriormente define o conceito por meio da equação, para finalizar com a interpretação geométrica do gráfico que relaciona as grandezas em cada caso: tempo, posição, velocidade e aceleração.

Exemplo: “A velocidade v do movimento é definida por

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

ou seja, é a razão do deslocamento ao intervalo de tempo que ele leva para se produzir. Graficamente, v representa o *coeficiente angular* da reta no gráfico x vs t ” (p.24)

Depois de definir a velocidade instantânea, desenvolve o item “O problema inverso” como um processo contrário à “lei horaria” de um movimento, segundo a qual, se obtém um resultado ao derivar uma função. No “problema inverso” conhecem-se dados para um instante final e um instante inicial de forma que pode ser elaborada uma representação geométrica, e a partir dela desenvolver um processo de integração que permita obter o resultado.

Exemplo de “lei horaria”: “Calcular a derivada de $x(t) = at^2 + bt + c$ onde a, b e c são constantes, num ponto t qualquer (...). A velocidade instantânea $v(t)$ num instante t qualquer, num movimento descrito por

$x = x(t)$, é dada por
$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$
 (p.27)

Exemplo de “problema inverso”: “conhecendo a velocidade instantânea $v(t)$ entre um dado instante inicial t_1 , e um instante final t_2 , calcular o espaço percorrido entre estes dois instantes, ou seja $x(t_2) - x(t_1)$ ” (p.28) Na solução considera primeiro a representação geométrica de um movimento uniforme cujo gráfico é uma reta paralela ao eixo das abscissas, na sequencia considera um movimento não uniforme, para imaginar a representação em gráficos de pequenos intervalos de tempo para obter o deslocamento total com base na somatória. “(...) se prosseguirmos ate t_2 , obteremos a soma das contribuições de todos os subintervalos em que $[t_1, t_2]$ foi dividido:

$$x(t_2) - x(t_1) \approx \sum_i v(t'_i) \Delta t'_i$$

Graficamente (...) cada termo da soma é a área de um retângulo, e a soma (...) é a área compreendida entre o eixo Ot e uma linha poligonal "em escada" inscrita na curva v x t entre t_1 e t_2 . (...) O limite é chamado de integral definida de $v(t)$ entre os extremos t_1 e t_2 , é representado pela notação

$$\lim_{\Delta t'_i \rightarrow 0} \sum_i v(t'_i) \Delta t'_i = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

Encerramento do capítulo	<p>No item “Galileu e a queda dos corpos” apresenta um breve relato sobre o surgimento do Calculo infinitesimal (limite, derivada e integral) como resultado da análise do problema do movimento, cujos inícios estão nos paradoxos de Zenon na época da Grécia clássica. Este problema foi estudado por Galileu que foi educado na Física de Aristóteles, mas que acaba propondo uma ciência sobre o problema do movimento, se focando no movimento acelerado. O autor diz que a experiência de Galileu e muitas outras posteriores “acabaram estabelecendo como fato experimental que o movimento de queda livre de um corpo solto ou lançado verticalmente, na medida em que a resistência do ar possa ser desprezada, é um movimento uniformemente acelerado, em que a aceleração é a mesma para todos os corpos (embora sofra pequenas variações de ponto a ponto da Terra). Esta <i>aceleração da gravidade</i> é indicada por g e seu valor aproximado é $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$” (p.37)</p> <p>Propõe 18 problemas para o leitor, dos quais: 14 correspondem a exercícios de cálculo de um valor desconhecido a partir de dados de entrada; 2 fornecem os dados através de gráficos e; 2 pedem a demonstração de uma expressão matemática.</p> <p><i>Exemplo 1:</i> “Na célebre corrida entre a lebre e a tartaruga, a velocidade da lebre é de 30 (1) “Na célebre corrida entre a lebre e a tartaruga, a velocidade da lebre é de 30 Km/h e a da tartaruga é de 1,5 m/min. A distância a percorrer é de 600 m, e a lebre corre durante 0,5 min antes de parar para uma soneca. Qual é a duração máxima da soneca para que a lebre não perca a corrida? Resolva analiticamente e graficamente.” (p.37)</p> <p>(2) “O gráfico da figura ($v \times t$) representa a marcação do velocímetro de um automóvel em função do tempo. Trace os gráficos correspondentes da aceleração e do espaço percorrido pelo automóvel em função do tempo. Qual é a aceleração média do automóvel entre $t=0$ e $t=1 \text{ min}$? E entre $t=2 \text{ min}$ e $t=3 \text{ min}$?. (p.37)</p> <p>(3) “A integral, com limite inferior a fixo e limite superior x variável, define uma função de x, $f(x) = \int_a^x f(x') dx'$. Mostre que $dF/dx = f(x)$. Assim, a integração pode ser considerada como operação inversa da derivação. Sugestão: Use a interpretação geométrica da integral.</p>
---------------------------------	---

3. Ideias explícitas sobre a relação da Física com a cotidianidade.

Situação	Expressão dos autores
Na formulação de um exemplo usando o conceito de Velocidade média	“para um carro que percorresse a estrada São Paulo-Rio (suposta retilínea) em dez horas, a velocidade média entre partida e chegada seria de 400 km/10h. Mas isto informa muito pouco sobre o movimento durante o percurso. O carro poderia ter parado durante algumas horas em um ponto intermediário, e poderia ter desenvolvido velocidades médias bem maiores em algumas etapas do percurso. Seria bem mais informativo dar o valor de \bar{v} em diferentes etapas do percurso, e isto descreveria tanto melhor o movimento quanto mais curtas as etapas, pois o erro cometido ao aproximar trechos curtos do percurso por movimentos uniformes vai diminuindo à medida que encurtamos esses trechos”. (p.25)
Como ilustração do conceito de velocidade instantânea	Apresenta uma anedota utilizada por Feynman, na qual apresenta um dialogo entre um estudante e um guarda de transito, no qual o estudante e um guarda que o faz para, acusando-o de excesso de velocidade. O estudante se defende argumentando que ele só superou o limite em um intervalo de tempo extremamente curto, enquanto o guarda lhe explica que o que conta é a velocidade instantânea.

4. Uso de Fotografias, figuras, diagramas ou desenhos na explicação dos conceitos.

- Não apresenta fotografias.
- O desenho de um carro é apresentado na ilustração do movimento unidimensional.
- Uma figura representa a visão estroboscópica de uma bolinha em queda livre.
- Cada conceito tem associado um gráfico relacionando duas variáveis.

5. Uso da História da Física na apresentação ou desenvolvimento dos conceitos.

No encerramento do capítulo é apresentado um relato histórico visando introduzir o conceito de aceleração da gravidade com seu símbolo e seu valor.

6. Ideias explícitas sobre que o aluno e/ou leitor devem saber previamente.

Não tem.

LIVRO 3

EISBERG,R.; RESNICK,R. (1974) Física quântica. Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas. Editora Campus; Rio de Janeiro, 1979.

Capítulo analisado	Capítulo 2. Fótons- Propriedades corpusculares da radiação. pp.49-83.
--------------------	---

1. Estrutura geral do capítulo.

<p><i>Introdução.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Breve descrição do conteúdo de cada item. - Parágrafo introdutório descrevendo a ideia principal a ser desenvolvida no capítulo. <p style="text-align: center;"><i>Apresentação do conteúdo.</i></p> <p>Os itens trabalhados neste capítulo são: o efeito fotoelétrico; a teoria quântica de Einstein sobre o efeito fotoelétrico; o efeito Compton; a natureza dual da radiação eletromagnética; fótons e a produção de raios X; produção e aniquilação de pares; seções de choque para absorção e espalhamento de fótons.</p> <p>A definição dos conceitos gira em torno à explicação da interação da radiação com a matéria, por meio da apresentação de uma sequência de problemáticas que levaram ao surgimento do conceito. Assim, começa com uma breve introdução histórica, seguida da</p>

definição do conceito o qual é acompanhado de ilustrações, representações gráficas, e cálculos que permitem evidenciar as diversas problemáticas ao aplicar a teoria clássica ou moderna em acordo com o caso. Cada conceito finaliza com um ou dois exemplos que envolvem conceito, por meio de cálculos obtidos ao aplicar as equações deduzidas na demonstração, ou exemplos que fazem parte da mesma demonstração.

Encerramento do capítulo

- 23 questões que visam levar o leitor a verificar sua compreensão dos conteúdos apresentados.
- 29 problemas nos quais o leitor deverá utilizar as equações para calcular um valor pedido, ou demonstrar um resultado.

2. Ideias fundamentais apresentadas em cada uma das partes do capítulo.

Introdução.	No item intitulado como “Introdução” faz ênfase em que trata-se os processos de interação da radiação com a matéria se apoiando em evidencias experimentais. Os autores afirmam “examinaremos processos nos quais a radiação interage com a matéria. Três processos (...) envolvem o espalhamento ou absorção pela matéria. Dois processos (...) envolvem a produção de radiação. Em cada caso obteremos evidencias experimentais de que a radiação se comporta como uma partícula em sua interação com a matéria, diferentemente do comportamento ondulatório que apresenta quando se propaga” (p.51)
Apresentação do conteúdo	<p>Começa com uma breve história da importância da descoberta de Hertz ao confirmar a existência das ondas eletromagnéticas e como esse resultado foi utilizado posteriormente por Einstein para criticar a teoria eletromagnética clássica. Em seguida apresenta o esquema do aparelho usado para estudar o efeito fotoelétrico, explicando o funcionamento de cada uma de suas partes e os dados que oferece, os quais permitem obter um gráfico de corrente fotoelétrica em função da diferença de potencial V aplicada entre a placa de metal que libera elétrons e o coletor metálico que atrai tais elétrons.</p> <p>A partir do gráfico analisa o significado desse resultado experimental, notando por exemplo que: a energia cinética máxima dos elétrons liberados ($K_{\max} = eV_0$) é independente da intensidade da luz incidente e que; há um <i>limiar de frequência</i> abaixo do qual o efeito fotoelétrico deixa de ocorrer.</p> <p>Nesta altura coloca a problemática de que há três aspectos principais do efeito fotoelétrico que não podem ser explicados em termos da teoria ondulatória clássica da luz: “ (1) a teoria ondulatória requer que a amplitude do campo elétrico oscilante E da onda luminosa cresça se a intensidade da luz for aumentada. (2) De acordo com a teoria ondulatória, o efeito fotoelétrico deveria ocorrer para qualquer frequência da luz, desde que esta fosse intensa o bastante para dar a energia necessária à ejeção dos elétrons. (3) (...) se a luz é suficientemente fraca, deveria haver um intervalo de tempo mensurável, (...) entre o instante em que a luz começa a incidir sobre a superfície e o instante da ejeção do fotoelétron (...) <i>No entanto, nenhum retardamento detectável foi jamais medido</i>” Pg.53</p> <p>Para finalizar este item desenvolve um exemplo que visa demonstrar o terceiro aspecto dos mencionados anteriormente, no sentido de que se assumirmos a explicação da teoria clássica para a absorção de uma onda, teríamos que considerar que a energia luminosa distribui-se uniformemente sobre a frente de onda e portanto, considerando uma determinada região para tal distribuição é possível calcular o tempo que levaria, obtendo resultados da ordem de minutos ou ainda de segundos, mas ressalta que na experiência nunca foi possível medir um tempo neste processo.</p> <p>No próximo item “A teoria quântica de Einstein sobre o efeito fotoelétrico” relata que Einstein, tomando como base este resultado, os experimento de Lenard e Millikan e a proposta de Planck sobre a quantização da energia nas paredes de um corpo negro, veio a formular a existência dos fótons como pacotes concentrados de energia radiante. Explica que Einstein supôs a energia E do pacote relacionada com sua frequência ν, por meio da equação $E = h\nu$, e supôs também que no processo fotoelétrico um fóton é completamente absorvido por um elétron.</p>

Os autores continuam este item mostrando como esta explicação de Einstein resolve a problemática levantada nos três aspectos mencionados acima, uma vez que: a teoria do fóton permite pensar que o aumento da intensidade só aumenta o número de fótons mas não muda a energia de cada fóton; o limiar de frequência é explicado quando se entende que um fóton de frequência ν_0 tem exatamente a energia necessária para ejetar os fotoelétrons, e nenhum excesso que possa aparecer como energia cinética, e; ao ser a energia fornecida em pacotes concentrados ela não se espalha sobre uma área já que o fóton é absorvido pelo átomo de forma imediata causando a emissão imediata de um fotoelétron.

Em seguida apresentam dois exemplos que visam demonstrar a validade do modelo de Einstein ao corroborar dados obtidos experimentalmente. E finalizam apresentando a consequência de usar a hipótese do fóton em todo o espectro eletromagnético, não apenas na região visível.

A fim de ilustrar de forma breve o conteúdo trabalhado no capítulo todo, relacionamos a seguir, trechos contendo as principais problemáticas levantadas pelos autores, sobre a impossibilidade de explicação de dados experimentais com base na teoria clássica e a relação com o efeito fotoelétrico:

Efeito Compton: “A presença do comprimento de onda λ' não pode ser compreendida se os raios X incidentes forem encarados como uma onda eletromagnética clássica. No modelo clássico o campo elétrico oscilante com frequência ν da onda incidente age sobre os elétrons livres do alvo fazendo-os oscilar com a mesma frequência. Esses elétrons, como cargas oscilando em uma pequena antena de rádio, irradiam ondas eletromagnéticas com a mesma frequência ν . Portanto, no modelo clássico a onda espalhada deveria ter a mesma frequência ν e o mesmo comprimento de onda λ da onda incidente. Compton (e independentemente Debye) interpretou seus resultados experimentais postulando que o feixe de raios X incidente não era uma onda de frequência ν , mas um conjunto de fótons, cada um com energia $E = h\nu$, e que esses fótons colidiam com os elétrons livres do alvo da mesma forma que colidem duas bolas de bilhar”. (p. 59)

O Exemplo resolvido neste caso foi o seguinte exercício: “Considere um feixe de raios X. Com $\lambda = 1,00 \text{ \AA}$, e também um feixe de raios γ vindo de uma fonte de ^{137}Cs , com $\lambda = 1,88 \times 10^{-2} \text{ \AA}$. Se a radiação espalhada pelos elétrons livres é observada a 90° do feixe incidente: (a) qual é o deslocamento Compton em cada caso? (b) Que energia cinética é cedida ao elétron em cada caso? (c) Que percentagem da energia do fóton incidente é perdida na colisão em cada caso?” (p.65);

A natureza dual da radiação eletromagnética: “A dualidade evidente na natureza onda-partícula da radiação não é mais considerada tão estranha, porque agora se sabe que isto é uma característica geral de todos os entes físicos. Iremos ver que prótons e elétrons, por exemplo, têm a mesma natureza dual dos fótons. Também veremos que é possível conciliar a existência de aspectos ondulatórios com a existência de aspectos corpusculares, para qualquer um desses entes, com o auxílio da mecânica quântica.” (p.67);

Fótons e a produção de Raios X: “Os raios X (...) apresentam propriedades típicas de ondas como polarização, interferência e difração, da mesma forma que a luz e todas as outras radiações eletromagnéticas. (...) são produzidos quando um feixe de elétrons de alta energia, acelerados por uma diferença de potencial de alguns milhares de volts, é freado ao atingir o alvo. (...) Segundo a física clássica, a desaceleração dos elétrons, freados pelo material do alvo, causa a emissão de um espectro contínuo de radiação eletromagnética. (...) Embora a forma do espectro contínuo de raios X dependa do potencial V e um pouco do material do alvo, o valor de λ_{\min} depende apenas de V , sendo o mesmo para todos os materiais. A teoria eletromagnética clássica não pode explicar esse fato, não havendo nenhuma razão pela qual ondas com comprimento de onda menor que um certo valor crítico não devam ser emitidas pelo alvo. Uma explicação surge imediatamente, entretanto, se encararmos os raios X como fótons.” (p.67).

O Exemplo trabalhado é o exercício: “Determine a constante de Planck h a partir do fato que o comprimento de onda mínimo produzido por elétrons de 40,0 KeV é $3,11 \times 10^{-11} \text{ m}$.

- *Produção e aniquilação de pares:* “A produção de pares é também um ótimo exemplo da conversão de energia radiante em massa de repouso e energia cinética. Neste processo (...) um fóton de alta energia perde toda sua energia $h\nu$ em uma colisão com um núcleo, criando um par elétron-pósitron, com uma certa energia cinética. Um pósitron é uma partícula que tem todas as propriedades de um elétron, exceto o

	<p>sinal de sua carga (e de seu momento magnético) que é oposto ao do elétron; o pósitron é um elétron positivamente carregado. Na produção de pares a energia de recuo absorvida pelo núcleo é desprezível por causa de sua grande massa, e assim a equação da conservação da energia total relativística no processo é simplesmente</p> $h\nu = E_- + E_+ = (m_0c^2 + K_-) + (m_0c^2 + K_+) = K_- + K_+ + 2m_0c^2, \text{ (p.70)}$ <p>O exemplo trabalhado é: “A análise de uma fotografia de câmara de bolha mostra a criação de um par elétron-pósitron quando fótons atravessam a matéria. As trajetórias do elétron e do pósitron têm curvaturas opostas no campo magnético uniforme B de $0,20 \frac{\text{Weber}}{\text{m}^2}$. Sendo seus raios r ambos iguais a $2,5 \times 10^{-2} \text{ m}$. Qual era a energia e o comprimento de onda do fóton que produziu o par?</p> <p>- <i>Seções de choque para absorção e espalhamento de fótons</i>: “Consideremos um feixe paralelo de fótons atravessando uma lâmina de matéria, (...). os fótons podem interagir com os átomos da lâmina por meio de quatro processos diferentes: fotoelétrico, produção de pares, espalhamento Thomson e Compton. Os dois primeiros absorvem completamente os fótons, enquanto os dois últimos apenas os espalham, mas todos eles removem fótons do feixe paralelo” (p.75). Concluem fazendo ênfase em que os fótons se comportam como partículas na interação mas desde onde são emitidos até onde são absorvidos parecem guiados por ondas clássicas.</p>
<p>Encerramento do capítulo</p>	<p>As questões visam provar a compreensão dos conceitos, a seguir três exemplos de questões: (1) A existência de um limiar de frequência no efeito fotoelétrico é frequentemente encarada como a objeção mais forte à teoria ondulatória. Explique; (2) Um fóton de energia E tem massa? Se tem, calcule-a.; (3) Quais os fatores que o levariam a achar que um fóton iria perder sua energia em interações com a matéria pelo processo fotoelétrico, pelo processo Compton, ou pelo processo de produção de pares?. (p.79)</p> <p>Os problemas visam aplicar os conteúdos apresentados na solução de problemas relacionados com possíveis resultados de medições experimentais, ou demonstrar a obtenção de resultados, a seguir dois exemplos:</p> <p>(1) Considere que sobre uma placa fotográfica incide luz. A luz será “gravada” se dissociar uma molécula de AgBr da placa. A energia mínima necessária para dissociar essa molécula é da ordem de 10^{17} J. Calcule o comprimento de onda de corte, acima do qual a luz não vai sensibilizar a placa fotográfica.</p> <p>(2) A função trabalho para uma superfície de lítio lisa é $2,3 \text{ eV}$. Faça um esboço do gráfico do potencial de corte V_c contra a frequência da luz incidente para uma tal superfície, indicando suas características importantes.</p> <p>(3) Obtenha a relação $\cos\theta = \frac{1 + \frac{m_0c}{m_e c}}{1 + \frac{m_0c}{m_e c} \cos\phi}$ entre as direções de movimento do fóton espalhado e do elétron envolvidos no efeito Compton.</p>

3. Ideias explícitas sobre a relação da Física com a cotidianidade.

Não apresenta ideias neste sentido. Pode-se dizer que trabalha sobre a relação entre: experiências produzidas em laboratório por meio de arranjos experimentais que têm determinados fins e o poder explicativo dos diversos modelos teóricos para dar conta dos resultados obtidos em tais experimentos.

4. Uso de Fotografias, figuras, diagramas ou desenhos na explicação dos conceitos.

Situação	Expressão dos autores
Ilustração das formas de produção de fótons.	- Esquema dos aparelho usado para estudar o efeito fotoelétrico. - Esquema da experiência de Compton. - Esquema de tubo de raios X.
Representação gráfica de resultados obtidos nas experiências.	- Gráfico de corrente fotoelétrica em função da diferença de potencial. - Gráfico das medidas de Millikan do potencial limite no sódio em várias frequências. - Gráfico da relação entre a Intensidade e o comprimento de onda na experiência de Compton. - Gráfico do espectro contínuo de raios X emitido de um alvo de tungstênio, para quatro diferentes valores de eV . - Gráfico das seções de choque de espalhamento, fotoelétrica, de produção de pares, e total para um átomo de chumbo. - Fotografia da produção de pares vista em uma câmara de bolha.
Representação da interpretação de resultados	- Figura representando o fóton como uma onda transversal com direção e sentido antes e depois de interagir com um elétron em repouso, na experiência de Compton. - Figura representando o processo de bremsstrahlung, na qual o elétron (bolinha) é desviado da trajetória retilínea pelo núcleo (bolinha maior) produzindo uma nova energia cinética ao elétron e a produção de um fóton representado como onda. - Figura representando o processo de produção de pares, na qual incide um fóton (onda com sentido) no núcleo (bolinha) e, saem duas partículas (elétron e pósitron) - Representação dos níveis de energia de um elétron livre segundo Dirac. (positivos e negativos). - Representação de um feixe de fótons passando através de uma lamina.

5. Uso da História da Física na apresentação ou desenvolvimento dos conceitos.

Situação	Expressão dos autores
Introdução do efeito fotoelétrico	Relata que foi em 1886 e 1887 que Hertz realizou as experiências que confirmaram a existência de ondas eletromagnéticas e a teoria de Maxwell sobre propagação da luz. Efeito que Einstein usou depois para contradizer outros aspectos da teoria eletromagnética clássica. “Hertz descobriu que uma descarga elétrica entre dois eletrodos ocorre mais facilmente quando se faz incidir sobre um deles luz ultravioleta” (p.51)
Relação entre teoria quântica e efeito fotoelétrico	Relata que foi Einstein em 1905 que colocou em questão a teoria clássica da luz, propôs que a energia radiante está quantizada em pacotes concentrados, e citou o efeito fotoelétrico como uma aplicação que poderia testar qual teoria estava correta e que permitiu mostrar que os fótons se propagam como ondas clássicas. “Einstein não concentrou sua atenção na forma ondulatória familiar com que a luz se propaga, mas sim na maneira corpuscular com que ela é emitida e absorvida” (p.55)
Introdução ao efeito Compton	Relata a demonstração da natureza corpuscular da radiação que fez Compton em 1923, na qual fez com que um feixe de raios X de comprimento de onda λ incidisse sobre um alvo de grafite, para medir a intensidade dos raios X espalhados como função de seu comprimento de onda, para vários ângulos de espalhamento. (p.59)

6. Ideias explícitas sobre que o aluno e/ou leitor devem saber previamente.

Situação	Expressão dos autores
Na introdução	“Algum material destes dois capítulos pode ser uma revisão de tópicos que o estudante já encontrou ao estudar física elementar.”. (p.51)

Capítulo analisado	Capítulo 1. Dualidade Onda-Partícula. pp.1-8
--------------------	--

1. Estrutura geral do capítulo.

Introdução.

Não apresenta introdução explícita, porém o primeiro item introduz ideias sobre a problemática de entender a dualidade onda-partícula.

Apresentação do conteúdo.

Os itens trabalhados neste capítulo são: 1-A essência da Física Quântica, 2-Contradição entre Onda e Partícula, 3-Dualidade onda partícula: versão fraca, 4 -quatro interpretações básicas, regime quântico: ondas de baixa intensidade, e 6 -soma e divisão de Ondas.

As ideias apresentadas neste capítulo giram em torno às intepretações da dualidade onda-partícula, analisando as possíveis contradições ou vantagens para explicar o experimento da dupla fenda. Para cada item apresenta referencias bibliográficas comentadas, a ser consultadas para maior aprofundamento.

Encerramento do capítulo

Dado que é um capítulo curto, ele não fecha mas deixa aberta a pergunta para continuar com o próximo capítulo. No final do livro encontram-se quatro exercícios para o leitor, correspondentes a este capítulo.

2. Ideias fundamentais apresentadas em cada uma das partes do capítulo.

Introdução.	No primeiro item intitulado “A Essência da Física Quântica” coloca nove possíveis respostas à pergunta sobre, qual é a maior diferença da Física quântica com a física clássica?. Conclui que “o que caracteriza a Teoria Quântica de maneira essencial é que ela é a teoria que <i>atribui, para qualquer partícula individual, aspectos ondulatórios, e para qualquer forma de radiação, aspectos corpusculares</i> ” (p.1) sendo esta a visão defendida ao longo do capítulo.
-------------	--

Apresentação do conteúdo	<p>No item “A contradição entre onda e partícula” anuncia que vão se trabalhar dois tipos de enunciados diferentes para a dualidade onda-partícula “ O que iremos chamar de “versão fraca” tenta conciliar interferência (típico de uma onda) com a direção pontual de um quantum (a indivisibilidade típica de um corpúsculo). Já a “versão forte” desenvolvida por Niels Bohr, concerne a existência de interferência e de trajetórias”. (p.2)</p> <p>No item três, apresenta a “versão fraca” explica o experimento da dupla fenda, feito com luz tênue e também com elétrons. O enunciado desta versão é que “Para qualquer objeto microscópico, pode-se realizar um experimento tipicamente ondulatório (como um de interferência), mas a detecção sempre se dá através de uma troca pontual de um pacote mínimo de energia”. (p.3).</p> <p>No próximo item “quatro interpretações básicas” visa apresentar tais interpretações como formas de explicar a “versão fraca”, são elas: onda e partícula não coexistem simultaneamente mas apresentam um comportamento alternado, com base na interpretação ondulatória de Schroedinger. O fóton e o elétron são sempre partículas, o padrão de interferência aparece só por causa da interação da partícula com a fenda e do anteparo, com base na interpretação corpuscular defendida por Landé e Bellinde. O objeto quântico se divide em duas partes, uma que é partícula e outra que tem uma onda associada, com base na interpretação dualista realista de De Broglie e Bohm. O “fenômeno” em questão é ondulatório e não corpuscular, existe uma descontinuidade essencial em qualquer processo atômico, com base no princípio de complementaridade formulado por Bohr e sustentado no postulado de Planck. No quinto item, o autor resume a abordagem afirmando que “o regime quântico é a <i>Física das Ondas para baixas intensidades</i>, quando propriedades corpusculares passam a aparecer” (p.6). Portanto, para entender o comportamento da luz no regime quântico, é preciso considerar que “a energia de cada fóton detectado é dada por $E = h\nu$, onde ν é a frequência da luz. O momento associado a este fóton é dado por $p = \frac{h}{\lambda}$ onde λ é o comprimento da onda.” (p. 6)</p> <p>Em seguida ressalta que muitas características essenciais da Física Quântica encontram-se na Física Ondulatória Clássica, como por exemplo, na proporcionalidade entre a intensidade da onda I e o quadrado da amplitude da função de onda, ou, o princípio de superposição, quando ocorre a soma das amplitudes de ondas que passam por um mesmo ponto. Definição da versão fraca da dualidade onda-partícula “ para qualquer objeto microscópico, pode-se realizar um experimento tipicamente ondulatório (como um de interferência), mas a detecção sempre se dá através de uma troca pontual de um pacote mínimo de energia”. (p.3)</p>
Encerramento	<p>O capítulo finaliza colocando a situação na qual um feixe de luz laser é decomposto em dois feixes por meio de um espelho semi-refletor. Ao supor que cada novo feixe tem a metade da intensidade do feixe original e aplicar a equação para calcular a intensidade da recombinação das ondas conclui que a resultante da somatória seria duas vezes a intensidade da onda original, o que certamente não pode ser, então, convida ver no próximo capítulo a forma de recombinar amplitudes de onda por meio do Interferômetro de Mach-Zehnder.</p> <p>No final do livro apresenta exercícios referentes a cada capítulo. Exemplo “Na Fig. I.3 ilustramos a superposição de ondas contínuas unidimensionais (de iguais amplitude Ψ e comprimento de onda λ) rumando no mesmo sentido. O que acontece quando duas dessas ondas rumado em sentidos <i>opostos</i> se superpõem?” (p.163)</p>

3. Ideias explícitas sobre a relação da Física com a cotidianidade.

Não apresenta ideias neste item, a não ser pela referencia a arranjos experimentais como o da dupla fenda.

4. Uso de Fotografias, figuras, diagramas ou desenhos na explicação dos conceitos.

Situação	Expressão dos autores
Na descrição da experiência da dupla fenda.	Esquema que representa o arranjo experimental. Figura da formação paulatina do padrão de interferência detectado como ionizações numa placa detectora.
Ao ilustrar o princípio de superposição de ondas.	Figura com a representação de um objeto quântico como uma onda com sentido, as quais ao serem somadas podem dar um resultado construtivo (onda com maior amplitude), ou destrutivo (linha horizontal). Esquema de um laser emitindo uma onda que é decomposta em dois feixes por meio de um espelho semi-refletor.

5. Uso da História da Física na apresentação ou desenvolvimento dos conceitos.

Situação	Expressão dos autores
Como informação complementar sobre a formulação de uma equação.	“Para entender o comportamento da luz no regime quântico, é preciso considerar que a energia de cada fóton detectado, é dada por $E=h\nu$, onde ν é a frequência da luz. O momento associado a este fóton é dado por $p=h/\lambda$, onde λ é o comprimento da onda. A lei de energia do fóton é devida a Albert Einstein,(1905), baseando-se no trabalho pioneiro de Max Planck (1900) que definiu a constante h .” (p. 6)

6. Ideias explícitas sobre que o aluno e/ou leitor devem saber previamente.

Situação	Expressão dos autores
Na apresentação do livro	Refere-se a primeira parte do livro como que “é uma introdução bastante suave à Física Quântica, e pode ser aproveitada mesmo por aqueles que nunca cursaram uma disciplina de Mecânica Quântica, como alunos de Filosofia, Ensino de Ciências e História da Ciência” (apresentação)
Na apresentação do livro	“O formalismo matemático é apresentado da maneira mais simples possível, visando fornecer instrumentos para o entendimento dos problemas” (apresentação do livro)

APÊNDICE L. RESPOSTAS DOS PROFESSORES AO QUESTIONÁRIO

Este questionário, contendo duas perguntas, foi aplicado a quatro professores de Física de um curso de Licenciatura em Física de uma universidade pública do interior do estado de São Paulo. Não mencionamos os nomes das disciplinas, a fim de cumprir com nosso compromisso ético do sigilo, evitando possíveis identificações dos professores envolvidos. As respostas estão citadas de forma aleatória, significando que a primeira resposta da primeira questão não é, necessariamente, do mesmo professor da primeira resposta da questão dois.

Salientamos que quando os professores foram responder às questões, eles fizeram modificações às mesmas. É por isso, que apresentamos não somente a resposta mas também, a questão que o professor respondeu.

Questão 1. Descreva o processo que você costuma utilizar para explicar um fenômeno da Física. (detalhe as etapas e os recursos que utiliza para explicar)

Professor 1. *Descreva o processo que você costuma utilizar para EXPLICAR um fenômeno da física. Nesta descrição procure detalhar as etapas e os recursos que você utiliza para explicar.*

Inicialmente, a apresentação do fenômeno a ser estudado. Em geral, esta apresentação inicial é feita a partir de um livro didático. Quando possível discutir o desenvolvimento histórico do entendimento do fenômeno estudado. As fontes históricas utilizadas são fora do livro texto utilizado. Em todas as fases, a ênfase é dada no entendimento conceitual e histórico do fenômeno. Finalmente, a matematização e resolução de alguns problemas relacionados com o fenômeno. Como recurso a tradicional giz e lousa e no desenvolvimento histórico apresentação power-point.

Professor 2. *Descreva o processo...*

No desenvolvimento dessa disciplina utilizei uma abordagem tradicional caracterizada, em linhas gerais, por: apresentação do fenômeno físico, procurando destacar alguns aspectos históricos e impactos sociais associados.

Por exemplo: relacionar o desenvolvimento dos dispositivos semicondutores com o surgimento da física quântica, no início do século XX, e associar a invenção do transistor na década de 40 aos esforços de guerra dos Estados Unidos, bem como destacar o impacto econômico e social decorrentes da revolução tecnológica que a invenção proporcionou.

descrição matemática do fenômeno procurando destacar o seu potencial (especialmente do cálculo diferencial e integral, no caso) como ferramenta que permite aperfeiçoar a descrição do fenômeno.

Em alguns momentos do curso, por exemplo ao tratar da Lei de Gauss, procurei destacar que se trata de uma lei fundamental do eletromagnetismo (mas não só) e procurei destacar que um modelo matemático muitas vezes impulsiona o desenvolvimento do conhecimento na física (ver comentários ao final). NO entanto não cheguei a trabalhar na linha de fazer uso da modelagem matemática para discutir os fenômenos;

Desenvolvimento de atividades coletivas em sala (2 horas por semana), constituindo-se um estudo dirigido. As atividades foram desenvolvidas a partir de questões conceituais e resolução de problemas em que se procurou aplicar os conceitos abordados. Essas atividades (12 no total, durante o semestre) representaram 30% da composição da nota final.

Professor 3. *Explicar Fenômeno:*

São utilizadas aulas expositivas, e aulas de apresentação de trabalhos por parte dos alunos. Durante as aulas expositivas são utilizados recursos computacionais para mostrar os diferentes experimentos e efeitos em estudo.

Durante a apresentação de trabalhos, eles são separados numa parte conceitual e outra de resolução de problemas. Principalmente, na parte conceitual o aluno é incentivado a discutir os diferentes conceitos envolvidos. Sempre tentamos estabelecer relações entre os conceitos de MQ e análogos do mundo macroscópico, para os alunos terem uma idéia mais intuitiva de como as coisas acontecem. Entretanto sempre tomamos o cuidado de deixar claro que nem sempre essas analogias não rigorosamente corretas já que os efeitos em mecânica quântica tem as suas particularidades que são próprias da escala microscópico .

Professor 4. *Descreva o processo que voce costuma utilizar para explicar um fenômeno da Física. (detalhe as etapas e os recursos que utiliza para explicar)*

1. *Definir a qual parte da Teoria pertence o fenômeno a ser estudado buscando na literatura já conhecida pelos alunos.*

2. *Explicitar em que ponto o experimento demonstra as leis da Física Clássica ou da Física Quântica. Quais são as hipóteses de partida.*

3. *Explicar a metodologia do experimento: a finalidade, os meios, os parâmetros envolvidos*

4. *Explicitar as leis e equações envolvidas e necessárias para chegar aos objetivos propostos*

5. *Os alunos devem buscar a contextualização do primeiro experimento realizado no qual observou-se o fenômeno, devem abordar os conceitos envolvidos e as demonstrações matemáticas mais básicas porém necessárias para chegar ao objetivo proposto. Não é exigido demonstrações matemáticas muito elaboradas.*

Analisar os resultados dos experimentos levando em conta falhas no modelo escolhido, falhas no procedimento adotado, parâmetros que influenciaram o experimento e fontes de dispersão dos dados obtidos. Na verdade, a metodologia da aula pretende que o aluno percorra por si mesmo o caminho acima nos itens 1 a 4 e que ao apresentar o relatório e o seminário sigam um processo semelhante que será testado na prova oral.

Questão 2- No planejamento da aula o que você prioriza?

Professor 1. *No planejamento da aula, o que é você prioriza?*

Eu priorizo o entendimento conceitual e histórico do fenômeno estudado.

Professor 2. *No planejamento da aula*

Priorizo:

resgatar os conceitos trabalhados anteriormente e que guardam relação com o assunto da aula;

Na parte expositiva da aula fazer uma apresentação clara e organizada dos conceitos e da descrição matemática;

Em algumas poucas situações fazer uso de slides (figuras essencialmente);

Expor a resolução de alguns poucos problemas;

Sendo um curso noturno valorizar as atividades dos alunos em sala de aula, conforme explicitado na primeira questão.

Apresento, a seguir, algumas considerações sobre o trabalho desenvolvido na turma em questão, as quais considero relevantes mesmo que possam não ser essenciais para a tese do Sr. Diego:

Encontrei dificuldades extremas para trabalhar os conteúdos de eletromagnetismo com esta turma. Em minha opinião, devido a três aspectos principais: nível baixo de presença em aula (muitas faltas), apatia muito grande da maioria dos presentes, nível de conhecimento de matemática e cálculo, em particular, muito abaixo do mínimo desejável.

Registrei casos de vários estudantes com dificuldades para fazer operações matemáticas básicas, como trabalhar com frações, por exemplo. Esse fato não constitui uma novidade porém chamou-me a atenção pela extensão do problema. A grande maioria dos ingressantes esteve retida nas disciplinas de cálculo, outros sequer fizeram cálculo II. Registrei também, casos de estudantes que, durante as atividades semanais, embora me oferecesse para discutir uma questão ou problema, simplesmente abandonavam a atividade, entregando-a incompleta.

Outros professores também têm apontado as mesmas dificuldades e tem-se pensado em estratégias para superar estas dificuldades.

Durante o semestre refleti sobre algumas alternativas: por exemplo, ao tratar da Lei de Coulomb e o conceito de campo elétrico distribuí artigo sobre as possibilidades de se abordar a interação entre cargas (por meio de campo) ou à distância. Procurei despertar a reflexão de como desenvolver o assunto numa sala de ensino médio etc. Avalio, porém, que não tive sucesso. Não fui capaz de estimular a sala de um modo geral e superar a indiferença reinante durante os trabalhos.

Ressalvo que as observações feitas não têm o propósito de justificar o insucesso do trabalho no semestre, muito menos culpabilizar os estudantes por isso, mas sim destacar a necessidade de “intervir” rapidamente e cuidadosamente na turma, com estratégias coordenadas (vários professores) para evitar uma provável evasão em massa. Minhas considerações têm sido apresentadas à coordenação do curso e à chefia do Depto de Física.

Professor 3. *Planejamento:*

Geralmente os alunos chegam com muitas lacunas de conhecimento, principalmente na parte de ondas e tem muitas dificuldades na parte matemática. Por este motivo é necessário preparar as aulas de maneira que a

disciplina seja mais ou menos autoconsistente. Entretanto, não há tempo para ver tudo em forma rigorosa. Por esse motivo temos que dar especial ênfase a uma explicação mais fenomenológica. Como a mudança conceitual é muito grande quando passamos para a Mecânica Quântica (MQ), é necessário criar exemplos em que os conceitos possam ser transmitidos da maneira mais didática possível. A utilização de ferramentas computacionais, tais como animações dos experimentos básicos da MQ são de grande utilidade, assim como as simulações das experiências com ondas. A razão de parte das aulas serem dedicadas à apresentação oral de trabalhos é por um lado, para dar a possibilidade de discutir melhor os conceitos, mas também dá a possibilidade ao aluno que trabalha e não tem tempo suficiente, de poder estudar durante o horário de aula. Isto é decorrência de termos um curso que não é de período integral.

Professor 4. *No planejamento da aula o que você prioriza?*

Na verdade, a metodologia da aula pretende que o aluno percorra por si mesmo o caminho acima nos itens 1 a 4 e que ao apresentar o relatório e o seminário sigam um processo semelhante que será testado na prova oral.

(ITENS 1-4 MENCIONADOS PELO P4):

- 1. Definir a qual parte da Teoria pertence o fenômeno a ser estudado buscando na literatura já conhecida pelos alunos.*
- 2. Explicitar em que ponto o experimento demonstra as leis da Física Clássica ou da Física Quântica. Quais são as hipóteses de partida.*
- 3. Explicar a metodologia do experimento: a finalidade, os meios, os parâmetros envolvidos*
- 4. Explicitar as leis e equações envolvidas e necessárias para chegar aos objetivos propostos.*

APÊNDICE M. FICHA DE CARACTERIZAÇÃO DA I.E.S.

IDENTIFICAÇÃO		
Designação: Universidade Estadual Paulista, Júlio de Mesquita Filho. UNESP-Campus de Bauru-SP		
Localização: Av. Engenheiro Luiz Edmundo Carrijo Coube, 14-01 - Vargem Limpa. Cep: 17033-360 - Bauru - SP		Fone: (14) 3103-6000.
Inicio do funcionamento: 1988	Universidade: Oficial <u> </u> X <u> </u> Privada <u> </u>	
Depende do: Governo do Estado de São Paulo	Horário: manha, tarde, noite.	
2. CARACTERÍSTICAS FÍSICAS E DE MATERIAL		
<p>Infra-estrutura: 45 salas de aula; 46 laboratórios de pesquisa e didáticos; 1 Biotério; 1 Oficina mecânica de apoio; 1 Restaurante; 1 Biblioteca Geral; 1 Centro Desportivo, 1 anfiteatro</p> <p>A infra-estrutura disponível, de uso comum das três unidades (Faculdade de Ciências, Faculdade de Engenharia e Faculdade de Arquitetura, Artes e Comunicação), para o ensino compreende:</p> <ul style="list-style-type: none"> - As salas de aula do Campus de Bauru. - Anfiteatro “Guilherme Ferraz”. - A Divisão de Biblioteca e Documentação do campus. <p>Na Faculdade de Ciências são de uso comum para os diferentes cursos:</p> <ul style="list-style-type: none"> - o Laboratório de Informática, - o anfiteatro (Sala1), - o Laboratório de Ensino de Química, - os Laboratórios de Ensino de Física (duas salas ambiente) 		
Mobiliário nos laboratórios: 20 laboratórios didáticos; 46 laboratórios de Pesquisa e, 04 laboratórios Didáticos de Informática.		
3. PESSOAL		
Servidores: 153 servidores docentes, e 82 servidores técnico-administrativos ativos.		
Alunos: 1.928 alunos de Graduação matriculados em 09 cursos de graduação, e, 646 alunos de Pós-Graduação distribuídos em 4 programas de mestrado e doutorado, dos quais 189 são do programa de educação para a ciência.		
4. FACULDADES E INSTITUTOS		
Possui três unidades universitárias: Faculdade de Ciências (FC), Faculdade de Engenharia de Bauru (FEB), Faculdade de Arquitetura, Artes e Comunicação (FAAC) e a Administração Geral (AG), considerada uma unidade administrativa de suporte às demais. Também estão instaladas, em Bauru, o Instituto de Pesquisas Meteorológicas (IPMet), a Rádio Unesp FM, o Colégio Técnico Industrial (CTI) e o Centro de Psicologia Aplicada (CPA).		
5. A FACULDADE DE CIÊNCIAS (FC)		

<p>- Tem 42 anos de antiguidade, sendo no começo da Fundação educacional de Bauru. Atualmente conta com 9 (nove) Cursos de Licenciatura e Bacharelado, que abrangem as três áreas do conhecimento (Ciências Humanas, Biológicas e Exatas).</p> <p>- O Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência - tem como núcleo de pesquisa a Ciência, a Educação e as relações entre saber científico e seu ensino. Propõe-se a formar pesquisadores cuja produção intelectual e científica possa contribuir para a melhoria do Ensino de Ciências no Brasil. O Programa iniciou suas atividades em 1997 com o Curso de Mestrado e em 2003 com o Curso de Doutorado. Suas atividades se concentram em seis linhas de pesquisa: L1 Filosofia, História e Sociologia da Ciência no Ensino de Ciências; L2 Ensino de Ciências em espaços não-formais e divulgação científica; L3 Fundamentos e modelos psico-pedagógicos no Ensino de Ciências e Matemática; L4 Ciência, Tecnologia, Ambiente e Desenvolvimento Humano; L5 Informática na Educação em Ciências e Matemática; L6 Linguagem, discurso e Ensino de Ciências.</p>	
<p>RELACIONAMENTO DA FACULDADE DE CIENCIAS COM SEU ENTORNO.</p>	
<p>- Assessorias às escolas, Diretoria Regionais de Ensino e Secretarias Municipais de Educação, organização de cursos de extensão voltados para a formação continuada (Especialização em Ensino de Ciências e Matemática, Projetos Pró-Ciências etc),</p> <p>- Organização e participação de atividades de extensão voltados para a formação continuada (Ciclo de Seminários de Pesquisa, Ciclos de Palestras, Ciclos de Seminários em Ensino de Ciências, Matemática e Educação Ambiental),</p> <p>- Incentivo e promoção de eventos científicos (Semana da Física, Encontros Regionais de Ciências etc.) e,</p> <p>- Atividades de divulgação da Ciência junto à comunidade em geral.</p>	
<p>ASPECTOS E OBSERVAÇÕES DE ORDEM GERAL.</p>	
<p>- A estrutura encontra-se atualmente em expansão, com projetos de construção de novos prédios com diversos fins.</p> <p>- O Campus de Bauru é um dos mais novos incorporados à Unesp, nasceu da encampação dos cursos mantidos pela então Universidade de Bauru em 12/08/1988.</p>	
<p>Data: Janeiro de 2011</p>	<p>Anotador: Diego Vizcaíno</p>

APÊNDICE N. FICHA DE CARACTERIZAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA-FC/UNESP/BAURU.

Nome: Licenciatura plena em Física	Duração: 8 semestres (mínimo 4 e máximo 7 anos)	Horário: Noturno, presencial.
Créditos: 182	Horas aula:2730	Vagas oferecidas:40
1. PERFIL DO CURSO		
<p>O curso de Licenciatura em Física forma professores na área para o ensino médio, permitindo que este profissional possa dedicar à pesquisa em Física e em Educação, particularmente na área de Ensino de Ciências. Durante o curso, pode-se dedicar à pesquisa por meio da iniciação científica, nas áreas de Ensino em Física e Física de Matéria Condensada.</p>		
2. PERFIL DO LICENCIADO EM FÍSICA		
<p>Assim, o perfil desejado do Licenciado em Física será o de um profissional com sólida formação em Física e Educação, conhecedor do método científico, com desenvolvimento da atitude científica como hábito para a busca da verdade científica, de maneira ética e com perseverança, preparado para enfrentar novos desafios e buscar soluções de problemas de forma criativa e com iniciativa.</p>		
3. GRADE CURRICULAR		
<p>1º Termo; Física I (6), Laboratório de Física I (2), Met. e pratica de ensino de Física I (4), Calculo diferencial e integral I (4), Calculo vetorial e Geometria analítica (4). Total créditos (TC): 20</p>		
<p>2º Termo; Física II (6), Laboratório de Física II (2), Met. e pratica de ensino de Física II (4), Calculo diferencial e integral II (4), Química Geral e inorgânica (4), Lab. De Química geral e inorgânica (2). TC: 22</p>		
<p>3º Termo; Física III (6), Laboratório de Física III (2), Met. e pratica de ensino de Física III (4), Calculo diferencial e integral III (4), Física computacional I (4), História da ciência (4). TC: 24</p>		
<p>4º Termo; Física IV (6), Laboratório de Física IV (2), Met. e pratica de ensino de Física IV (4), Calculo diferencial e integral IV (4), Física computacional II (4), Termodinâmica (4). TC: 24</p>		
<p>5º Termo; Elementos e Álgebra linear (4), Física Matemática I (4), Psicologia da Educação (4), Eletromagnetismo I (4), Met. e pratica de ensino de Física V (4), Estagio supervisionado I: a realidade escolar (4). TC: 24</p>		
<p>6º Termo; Física Moderna I (4), Mecânica clássica (4), Organização escolar: A escola, plan, org (4), Ciência, sociedade, ambiente e Dês. Humano (4), Estagio supervisionado II: A est e a org (8). TC: 24</p>		
<p>7º Termo; Física Moderna II (4), Lab. De Física Moderna (4), Instrumentação para o ensino da Física (4), Didática das ciências (4), Introdução á pesquisa em ensino de ciências (3), Estagio supervisionado III: Proj. Inter. Ens. ciências (5). TC: 24</p>		
<p>8º Termo; Introdução a mecânica Quantica (4), Filosofia da ciencia (4), (Estagio supervisionado IV: Ativ. Reg. Uni. Escolar (10). TC: 18</p>		
<p>Optativas: Astronomia, BioFísica molecular estrutural, Eletromagnetismo II, Física Estatística, Física matemática II, Introdução a ciência dos materiais, Propiedades magnéticas de materiais, Relatividade, Tópicos em Física da matéria condensada, Tópicos em Física de semicondutores, Educ. e prime. Cuid. Com a criança, Educação e sexualidade, Ens. e Aprend. de Cont. Escolares, Temas transversais em educação.</p>		

CURRÍCULO RESUMIDO
<p>Matérias obrigatórias de formação básica (114 Créditos); Matemática, e Fundamentos de Química, Mecânica Geral, Física, Física Experimental, Estrutura da Matéria, Instrumentação para o Ensino de Física.</p> <p>Matérias Obrigatórias Complementares (20 Cr); Matemática, Matemática aplicada, Física</p> <p>Matérias Pedagógicas (36 Cr); Psicologia da Educação, Estrutura e Funcionamento do Ensino, Didática, Prática de Ensino,</p> <p>Optativas (12 Créditos) .</p>
EIXOS FORMADORES DO PROFESSOR DE FÍSICA
<p>Eixo 1: Formação de conhecimentos básicos da Física e Ciências afins e seus instrumentais matemáticos.</p> <p>Eixo 2: A Formação dos Conhecimentos Didático-Pedagógicos do professor de Física.</p> <p>Eixo 3: Ciência, Tecnologia, Sociedade, Ambiente e Desenvolvimento Humano.</p> <p>Eixo articulador: Metodologia e Prática de Ensino de Física</p>
INFRA-ESTRUTURA
<p>Uso comum das três Faculdades; Salas de aula do Campus de Bauru, Anfiteatro “Guilherme Ferraz”, Divisão de Biblioteca e Documentação do campus.</p> <p>Uso comum na Faculdade de Ciências; Laboratório de Informática, Anfiteatro (Sala1), Laboratório de Ensino de Química, Laboratórios de Ensino de Física (Mecânica, Hidrostática e Termodinâmica, Eletricidade, Ondas e Ótica, Estrutura da Matéria) , Sala dos Técnicos.</p> <p>Uso exclusivo; uma sala de estudo para uso dos alunos com 5 microcomputadores conectados à rede local e Internet, uma oficina de apoio aos laboratórios didáticos e de pesquisa.</p>
HISTÓRICO DO DEPARTAMENTO DE FÍSICA
<p>O Departamento de Física foi criado em 1968, com objetivo de dar suporte aos Cursos de Engenharia de Bauru, mantidos pela Fundação Educacional de Bauru (FEB). Em 1969 foi instalado o curso de Licenciatura Plena e Específica em Física. Em 1985, a FEB foi transformada em Universidade de Bauru e encampada pela UNESP em 1988, alterando significativamente os objetivos do Departamento de Física, passando a dar ênfase também à pesquisa. A partir daí, o Departamento começou investir na qualificação de seus docentes, técnicos e administrativos, sendo que atualmente, conta com 22 docentes, um em RTC e 21 em RDIDP, todos com doutorado no país ou exterior, 4 técnicos de laboratório e 1 administrativo. Dos 22 docentes, 9 possuem Pós-doutorado e 2 possuem Livre-docência. Com esta qualificação, foi possível por parte dos docentes, a submissão de projetos de pesquisa para os órgãos de fomento, principalmente a FAPESP que investiu mais de um milhão de dólares. Hoje o Departamento possui nove Laboratórios de Pesquisa, com equipamentos de alta tecnologia, que trabalham na linha de materiais dielétricos, semicondutores, supercondutores e também na energia da agricultura, possuindo também uma Oficina Mecânica muito bem equipada e dois Laboratórios Didáticos. Esta infraestrutura teve reflexo imediato, dando um salto qualitativo no curso de Licenciatura em Física, envolvendo os alunos em Iniciação Científica.</p>
OBSERVAÇÕES GERAIS
<p>Em função ao atendimento da lei federal 9.394/96 LDB, que exigiu a adequação do currículo de todos os cursos de licenciatura, para o cumprimento do artigo que se refere à inclusão das Práticas de Ensino com um mínimo de 300 horas/aula conforme Parecer CNE/CP 744/97 e</p>

Resolução s/n de 03 de dezembro de 19976, co-existiu, em determinado período, duas estruturas curriculares. A última reestruturação entrou em vigência a partir do ano 2006, e teve como princípio norteador, garantir ao Licenciado em Física uma ação didática fundamentada em aspectos que contemplem a Física e seus conteúdos enquanto um corpo de conhecimentos estruturados que permite a compreensão dos fenômenos; os fundamentos históricos, filosóficos e epistemológicos da ciência e seu ensino; o respeito e adequação às características cognitivas dos educandos, bem como aos aspectos sociais e econômicos do mundo que os cerca e as relações entre Ciência, Tecnologia e Sociedade.

As principais novidades na estrutura curricular, tem a ver com a constituição das componentes curriculares como um todo orgânico de maneira a garantir que a estrutura curricular assegure a qualidade da prática docente (o saber, o saber pensar e o saber intervir), assim como o caráter integrador dos conteúdos entre si e destes com a realidade. Portanto, o projeto se compõe por 3 eixos, cujo eixo articulador é a Metodologia e prática de Ensino de Física. Assim, em termos de intensidade horária e créditos passou-se de 8 créditos de Prática de Ensino, para 20 créditos, implementando as disciplinas de “Metodologia e prática de ensino da Física I,II,III,IV,V” com 4 créditos cada.

Data: Janeiro de 2011

Anotador: Diego Vizcaíno

APÊNDICE O. RESPOSTAS AO QUESTIONÁRIO DOS ALUNOS DO GRUPO C1

Este questionário foi aplicado a **31 alunos** de uma disciplina de **primeiro semestre** de um curso de Licenciatura em Física de uma Universidade pública do interior do estado de São Paulo, Brasil. Apresentamos a continuação as 31 respostas para cada uma das quatro questões.

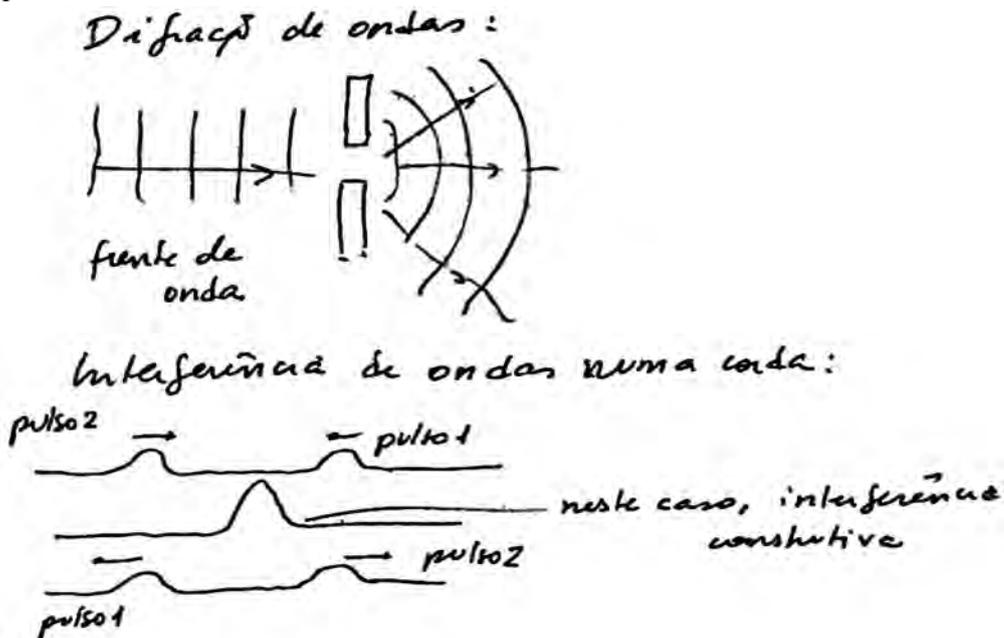
Questão 1: Descreva o processo que você costuma utilizar para resolver um problema da Física.

1. *1º procuro entender a situação física proposta e a pergunta do problema. 2º Faço, se possível, um esquema da situação. 3º anoto o que é conhecido e o que se pede. 4º tento relacionar o que é dado com o que é pedido através das leis físicas conhecidas. 5º Faço um plano mental de resolução. 6º Ao tentar resolver o problema, se não dá certo, faço novamente a 1ª etapa e procuro fatores relevantes ao problema que não forma percebidos. 7º chegando a uma resposta, verifico se ela é plausível.*
2. *Procuro ler o enunciado da pergunta, identifico o maior número possível de grandezas presentes no problema, de acordo com o que é pedido, busco a maneira mais simples de resolver o problema, tendo em vista os dados que tenho a meu dispor.*
3. *Eu interpreto a questão, tentando tirar o Máximo de informações possíveis. Depois, utilizo meu arsenal de formulas e tento aplicá-las no exercício.*
4. *Avalio o que é preciso para resolver, como:
Equações
Variáveis
Se necessário faço o trabalho algébrico, ou só escrevo uma resposta.*
5. *Analisar os dados, visualizar o que deve ser feito, lembrar de maneiras/ métodos de resolução.*
6. *Ler atentamente o exercício, capturar os dados principais e escrevê-los. Depois ler novamente o enunciado para ver o que realmente vão usar daqueles dados. Inicio a resolução e em caso de dúvida no desenvolvimento, volto a ler o questão.*
7. *Compreendendo o enunciado e depois conforme o mesmo resolvendo o que ele propõe a ser feito.*
8. *Analiso o problema, busco conhecimento no caderno ou um livro, anoto as informações dadas e equacionamento.*
9. *Utilizando formulas dados e também pela maneira lógica.*
10. *Releio o conteúdo apresentado em sala de aula, pesquiso em livros ou ate mesmo na internet, pego exemplos, daí tento resolve-lo.*
11. *O processo que eu costumo utilizar para resolver um problema de física, é ver quais as incógnitas que o problema tem e procurar uma formula que de informações para achar o valor dessa incógnita.*
12. *Primeiramente eu leio o enunciado do problema, depois faço uma relação dos dados que o problema me fornece, depois leio o enunciado novamente, faço uma relação das equações que acho que vou precisar utilizar, e então parto para a realização do problema.*
13. *Separo os dados do problema, tento esquematizar com algum desenho e posteriormente tento aplicar o conceito físico envolvido, resgatando formulas, estabelecendo relações.*
14. *Costumo utilizar livros para entender a teoria da matéria e depois tentar resolver exercícios simples, depois ir aumentando o nível de dificuldade.*
15. *Separo as informações que o enunciado me fornece e coloco nas formulas.*
16. *Para resolver um problema da física procuro primeiramente analisar o que o exercício esta me propondo, e apos isso, passo a explorar o exercício algebricamente, ate solucioná-lo.*
17. *Leio em media quatro vezes cada questão, faço alguns esboços, ate chegar em uma resposta que eu acredito estar certa. Dou uma ou duas revisada e finalizo. Se for em prova entrego para o professor, se não confirmo o gabarito.*
18. *Analiso o problema como um todo, identifico a grandeza da questão, junto o Máximo de informação relacionada à tal grandeza, imagino o sistema do problema e resolver.*
19. *Primeiro procuro analisar o que o exercício esta pedindo, achando isso, procurarei a equação em que se encaixe o solicitado e depois usarei de matemática para a resolução.*
20. *Inicio com a organização de todos os dados do exercício e em seguida os “encaixo” no assunto do exercício. Usando a lógica para o entendimento e a teoria para resolução.*
21. *processo que eu utilizo, são varias formulas, ou dados que um exercício costuma fornecer. (Calculadora científica)*
22. *Costumo entender o problema, A partir disso, coeto os dados necessários ou aqueles que o problema me oferece e com isso analiso em qual princípio físico ele se enquadra. Assim encontro a formula que vou necessitar para resolver o problema.*

23. Primeiramente observamos o conhecimento necessário para realizar o problema. Posteriormente, é colocada uma tabela com todos os dados fornecidos. Após isso, é necessário apenas a resolução.
24. Primeiro ler atentamente, escrever os dados do problema aparte para melhor visualização, escrever palavras chaves ou formulas gerais que eu entendi que seja o assunto do problema, prestar atenção nas unidades e na maneira como foi escrito o problema para ver as exigências, a partir daí começar com o tratamento matemático para o problema, sempre voltando e relendo o problema.
25. Ler o exercício; ler novamente e extrair informações; identificar a incógnita; relacionar com a matéria; escolher formulas que podem ajudar a solucionar o problema, isolar, na equação, a incógnita; pôr os dados fornecidos pelo exercício; resolver a equação.
26. Escrever todas as forças que agem no sistema. DECOMPOSIÇÃO de forças do sistema, isolar as variáveis, encontrar os pontos de equilíbrio caso haja, usar simetria caso haja. Análise qualitativa do problema antes de passar para o problema numérico. Embora isso tudo depende de qual tipo de problema, área da física e dados estejam sendo trabalhados.
27. Normalmente leio o problema e começo a pensar como resolve-lo, depois de pensar em uma ideia base passo pô-la o papel para ficar mais claro, como informação ou uma ilustração do problema e começo a resolver, mas se a ideia inicial estiver errada repenso a partir do erro que aparecer.
28. de principio faço uma breve leitura do enunciado para me contextualizar. Depois, ##### e extraio as informações dadas referentes ao problema e separo ao lado do exercício. Depois escrevo os dados em expressões matemáticas previamente conhecidas para chegar a um resultado numérico. Depois obtido o resultado numérico, interpreto do ponto de vista físico e formulo a resposta final.
29. Primeiramente eu tento compreender a teoria a qual o exercício abordo, logo apos faço uma representação do que se pede para entender melhor e por final vejo quais as formulas que podem ser utilizadas para se resolver o exercício.
30. Ler o enunciado duas o três vezes e anotar as informações contidas nele. Em seguida avaliar as opções de resolução de acordo com o tema e os dados fornecidos.
- 31.1 Para resolver um problema de física, primeiro eu analiso o que o enunciado do exercício esta pedindo, classifico os dados que o mesmo nos da, lembro-me de algumas leis que existe e tento resolver o problema. Caso o problema não esteja como o enunciado pede, eu procuro um livro como apoio.

Questão 2: Escolha um fenômeno ondulatório, nomeie-o e represente-o.

1-



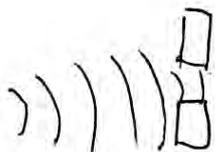
2. As ondas sonoras tem uma peculiaridade bem interessante, quanto mais denso o ambiente mais rápido é a sua velocidade, por exemplo:
Ondas sonoras e sua velocidade em diferentes ambientes
(na água)>(no ar)>(no vácuo)
3. Uma onda na água, quando encontra uma barreira sofre uma ondulação.
- 4.

DIFRAÇÃO



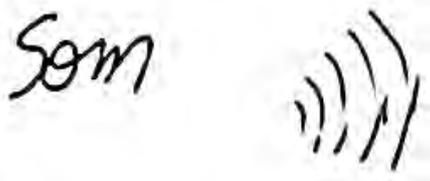
5.

uma onda propagada no eixo encontra uma barreira, realizando difração



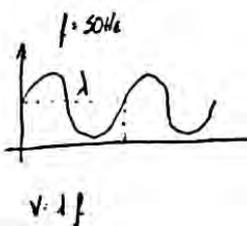
6. A transmissão de energia através de ondas de radio. Não tenho certeza quanto se este é um fenômeno ondulatório e não consigo representá-lo.

7.

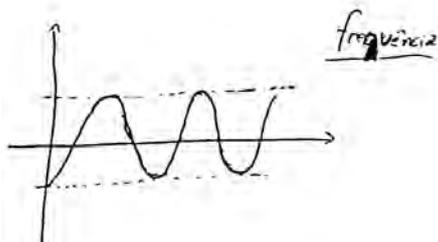


8.

Ondas sonoras



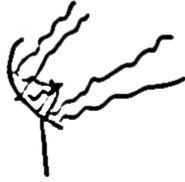
9.



10. Comentário: Não responde este numeral.

11.

Simbol de Telerubrica



- 12. Um pulso de luz realizado em laboratório”
- 13.

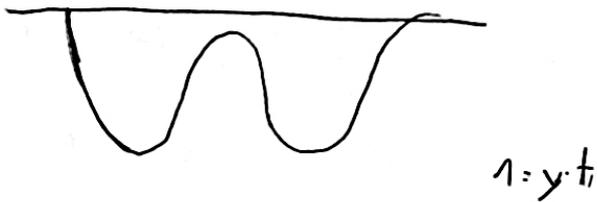


→ variação da forma de percepção do som pela pessoa quando a ambulância se aproxima.

- 14. A voz é um fenômeno ondulatório, sonoro.
- 15.



- 16.



ondas sonoras e ondas de luz

- 17.

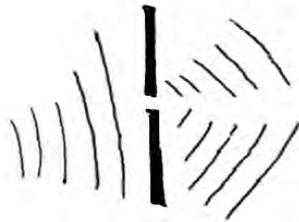
Ondas sonoras.



As ondas sonoras se representam através da fala. - nos brônquios de um coelho, ilude que produz som

- 18.

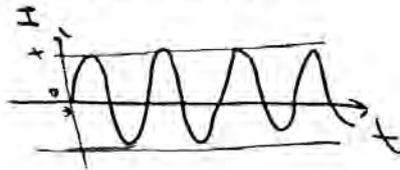
Difração - "dispersão" da onda por uma fenda



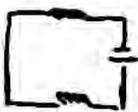
19. As ondas sonoras são ondas que se propagam pelo espaço e através de suas vibrações faz com que sejamos capazes de escutarmos ruídos no qual classificamos como sons.

20.

Corrente elétrica alternada.
 É onde a corrente elétrica vai do polo mais positivo passando pelo zero até o mais negativo com um certa frequência em um certo período.



21.

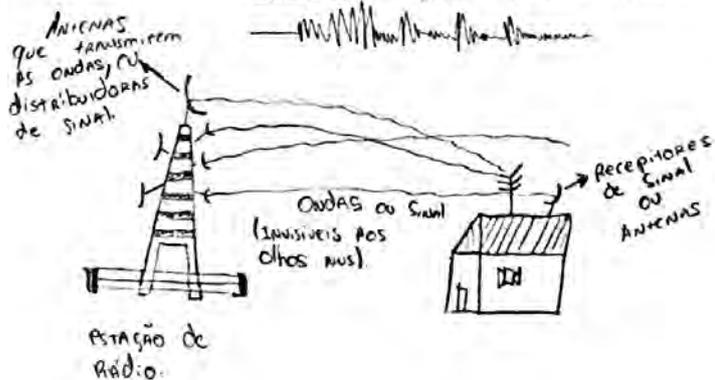
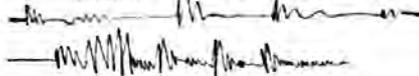


circuito interno

22.

+ Ondas de rádio.

forma que a onda pode se manifestar



23. Um corpo cai na água, produz ondas, assim como as ondas de rádio."

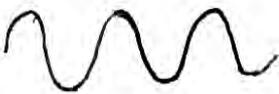
24.

interferência eletromagnética - ? ; efeito doppler - som



25.

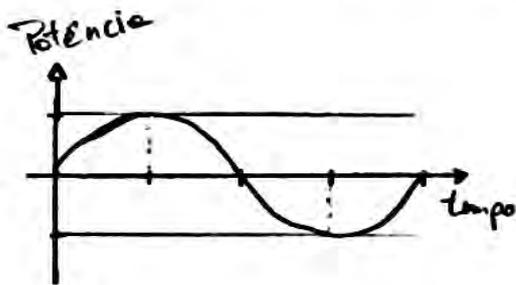
Ondas sonoras.



26. Efeito de superposição de ondas. Quando as ondas da mesma frequência porem em amplitudes diferentes podem se somar ou ate mesmo anular"

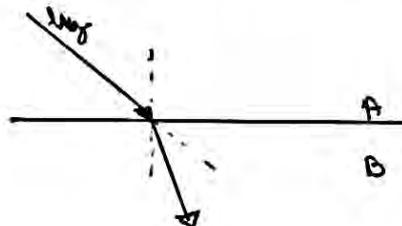
27. Comentário: Fez um desenho com o nome do desenho.

Frequência de voz em 60 Hz.



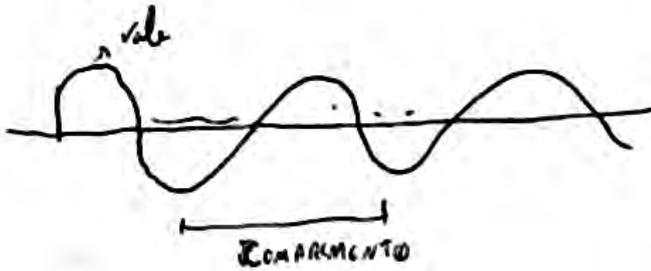
28.

é refração da luz que se dá quando a mesma se propaga entre meios com diferentes índices de refração



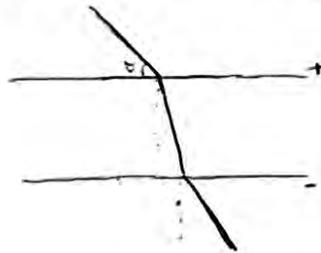
29.

Ondas sonoras



30.

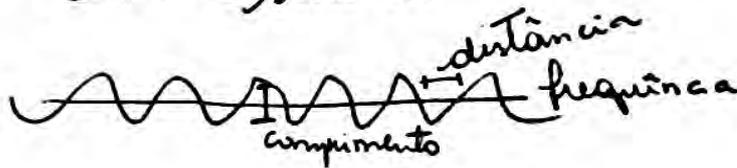
refração da luz.



Do incidir em diferentes meios, a luz sofre uma refração.

31.

Ondas sonoras



Questão 3: Uma forma de expressar o princípio de Arquimedes é: “um corpo ao ser imerso, total ou parcialmente em um fluido, sofre um empuxo igual ao peso do volume do fluido deslocado”. –Como você explicaria este princípio para outra pessoa?

1. O princípio, como escrito é auto-explicativo. É um resultado experimental. Resta a nós interpretá-lo à luz das teorias conhecidas.

2. Que ao colocar esse corpo, o imergindo no fluido, ele ocupará o local que antes pertencia ao fluido, esse fluido tenta voltar ao seu local de origem, a essa força aplicada sobre o objeto é dado o nome de empuxo.

3. Uma bola, ao ser colocada dentro de um pote com água, demora um pouco mais para se movimentar, devido ao volume da água, sendo assim, a bola tem como dificuldade o peso do volume do fluido deslocado.

4. Explicaria através de desenhos e equações

$$E = P_d$$

$$E = mg \quad d = \frac{m}{g} \Rightarrow m = dg$$

$$E = dvg$$

5. Não conheço este princípio.

6. Explicaria que uma pessoa quando entra na piscina sente o seu corpo mais leve isto é devido a esta força chamada empuxo que nos equilibra perante a força que nos faz ficar com os pés na terra.
7. Que a força de um objeto ao ser imerso em um fluido sofre uma força igual do fluido que é deslocado pelo objeto.
8. Quando mergulhamos um corpo em um fluido, por exemplo a água, este corpo sofre uma força contrária ó imersão denominada empuxo. O empuxo é igual ao peso do volume do fluido deslocado.
9. Explicaria como: Ao colocarmos um objeto em um fluido, ele sofrera uma força , a peso, e ao mesmo tempo sofrera uma força o empurrando para cima, o empuxo.
10. Que quando o corpo é imerso no fluido, o fluido tenta expulsá-lo com a mesma força que o corpo foi imerso.
11. Explicaria dizendo que a massa de água ou outro fluido deslocado é o valor do empuxo.
12. Dentro da água nosso corpo pareci “mais leve”.
13. Quando um corpo é imerso em um fluido haverá o deslocamento de uma massa desse fluido. A massa deslocada é a massa contida no volume desprendido.
14. Comentário: Não resolve este item.
15. Um corpo ao ser imerso num fluido sofre uma força oposta que é proporcional ao peso do volume que foi retirado, ao corpo Sr imerso no fluido.
16. Comentário: Não resolve este item.
17. Sempre que você coloca algum corpo dentro de um recipiente com algum liquido, o nível da coluna desse liquido vai aumentar de acordo com a massa desse determinado corpo.
18. A força que um objeto exerce sobre um liquido, é representado pelo volume que se desloca, recebendo a mesma força em reação.
19. Um corpo com massa m quando é imerso sofrera uma força oposta a força peso, na qual chamamos de empuxo.
20. O empuxo é uma reação do fluido ao corpo que quando o corpo é imerso desloca um certo volume do fluido e a reação do fluido sobre o corpo é igual a ação do corpo sobre o fluido.
21. Eu explicaria na forma “pratica”(*), na teórica só na sala de aula.
(*Fazendo o experimento)
22. Comentário: fez um desenho e escreve a seguinte explicação: Quando o corpo é mergulhado em um recipiente com fluido; ao empurrarmos ele sofrera um peso para baixo, no qual o fluido exercera sobre ele uma força equivalente no sentido inverso.
23. Uma forma bastante interessante de explicar esse principio é fornecendo uma ligação com o principio de que “dois corpos não podem ocupar o mesmo espaço”. Dessa forma, a metade em que o corpo tenta ocupar o espaço do fluido, a densidade do fluido o impede de afundar, de tomar seu espaço, “empurrando-o”
24. “Dois corpos não podem ocupar o mesmo espaço físico”, depende do nível de entendimento que eu pretendo transmitir o conceito de empuxo e o que a pessoa esta disposta a receber, mas normalmente eu evitaria o uso de equações porque as pessoas tendem a ter uma aversão à matemática, e eu ainda não possuo o completo entendimento desse fenômeno.
25. Um corpo ao ser imerso, total ou parcialmente em um fluido, sofre assim como todos os corpos, uma força peso, porem neste caso este liquido também agirá sobre o corpo deslocando-o para cima, este corpo ficara em equilíbrio quando as forças se igualarem.
26. De forma leiga e bem simplista podemos dizer que afundamos totalmente ou apenas em partes um objeto qualquer tipo de liquido, este mesmo objeto sofrera uma força equivalente ao peso do volume que este corpo deslocou de liquido em sentido contrario à submersão.
27. Um objeto ao ser acelerado totalmente ou parcialmente em um meio liquido, sofre uma força contraria ao seu peso ao se deslocar, de uma forma maior quando estamos componendo o ou como meio, que é um gás.
28. Comentário: Não resolveu o item.
29. Ao afundar um corpo em um fluido, ele pressão do fluido de todos os lados, com isso sofre o empuxo que é basicamente o peso do fluido que foi deslocado pelo corpo ao ser imerso.
30. Imagine um recipiente com água. Ao se colocar um corpo dentro dele, parte da água “vazará”. O peso do volume dessa água que vazou é chamado de empuxo.
31. Explicaria através de objetos, tipo um “testinho” para que as pessoas não fiquem com duvidas em relação à explicação.

Questão 4: Para você qual o significado da expressão matemática: $\vec{F} = m\vec{a}$

1.. $F=m.a$, a conhecida expressão da 2ª lei de Newton, nos diz que a força resultante sobre uma partícula de massa m (A força resultante pode ser “real” ou ser a soma vetorial das forças aplicadas ao corpo) é diretamente proporcional à aceleração do corpo(*). É uma expressão geral que adquire seu pleno

significado físico quando substituímos F pela soma das forças aplicadas ao corpo. (*) num referencial inercial.

2.. O vetor (F = força), é igual a constante (m =massa), pelo produto do vetor (a =aceleração).
Ou seja, para se obter o vetor F é necessário saber quanto é a massa de um objeto e o seu vetor aceleração.
Também é possível obter a \vec{a} e a massa, caso eu possua os outros valores.

3. Força é igual a massa vezes aceleração, onde \vec{F} y \vec{a} são grandezas vetoriais.

4. que o módulo da força é proporcional ao modulo da aceleração.

5. Para toda força não nula aplicada em um corpo em repouso gera uma aceleração.

6. Significa uma relação que conforme variamos uma aceleração de um corpo variamos a força que estamos aplicando a ele ou que L_e aplica em alguém. Esta expressão também significa relacionamos as tais grandezas físicas a fim de obter uma grandeza que represente uma ação em um objeto.

7. Que a massa vezes o vetor aceleração é igual ao vetor força.

8. Força esta relacionada com a aceleração e a massa de maneira direta. Se aumentamos a massa e mantemos a aceleração a força aumenta. Se mantermos a força e aumentar a massa, a acelera.ao diminui.

9. Força e igual a massa vezes a aceleração. Seu significado para mim é que: Para se ter uma força, temos que deslocar alguma coisa, que esse objeto tem uma certa massa, e ao deslocar temos uma aceleração, com isso, multiplicamos sua massa e sua aceleração e temos uma força.

10. \vec{F} é a força, m a massa, \vec{a} é a aceleração. Essa expressão é a 2ª lei de Newton, serve para calcular a força, massa ou aceleração.

11. Significa que para um corpo de massa m requer uma aceleração, tem que ter exercido uma força nesse corpo.

12. Massa vezes aceleração é diretamente proporcional à força, ou seja, força esta relacionada à massa e aceleração.

13. Existe uma relação entre a massa de um corpo, sua aceleração e uma força aplicada, onde a força é proporcional à aceleração.

14. \vec{F} = força vetorial.

M = massa de um corpo.

\vec{a} = aceleração vetorial.

Serve para determinar a força de um corpo em um plano retilíneo.

15. A força aplicada a um corpo é proporcional a massa do corpo vezes a aceleração que ele sofre, ou seja para ter uma força agindo sobre um corpo ele tem que sofrer aceleração.

16. O significado desta expressão esta proposto na 2ª lei de Newton, onde a força resultante é o produto entre massa e aceleração. Essa expressão junto com a primeira e a terceira lei de Newton tentam mostrar fenômenos em relação a aplicação de forças.

17. A força e igual a massa de um determinado corpo vezes sua aceleração.

18. Significa que todo sistema manifestando-se de modo variado tem uma força resultante, proporcional à sua massa.

19. A expressão matemática se baseia na segunda lei de Newton, onde temos F como força resultante, m como massa e a como aceleração, onde a e diretamente proporcional a F .

Essa equação nos revela que uma Força F é igual a massa multiplicada pela aceleração do corpo.

20. $F=m.a$ é o desmembramento de um item da natureza onde expressamos força como sendo um produto de outras dois fatores, a massa de um corpo e a aceleração aplicada sobre ele.

21. Comentário: escreve o nome de cada item na equação e escreve "segunda lei de Newton"

22. Expressão que representa a formula da força.

23. É a expressão onde, F = força, m = massa, a =aceleração. Dessa forma, sabendo-se a massa e a aceleração, é possível determinar sua força #####.

24.1 Primeiro ler atenciosamente, escrever os dados do problema aparte para melhor visualização, escrever palavras chaves ou formulas gerais que eu entendi que seja o assunto do problema, prestar atenção nas unidades e na maneira como foi escrito o problema para ver as exigências, a partir dai começar com o tratamento matemático para o problema, sempre voltando e relendo o problema.

24. A resultante das forças em um corpo equivalem a massa desse corpo multiplicado pelo modulo do vetor do vetor aceleração, o que implica que uma massa que possui aceleração necessariamente possui uma força agindo.

25. Esta expressão matemática evidencia que a força e vetorial e tem o mesmo sentido e direção da aceleração pois é outra grandeza vetorial. Alem disso para mesma força aplicada em diferentes corpos de diferentes massas, a reação ou seja, a aceleração sofrida será diferente.

26. Que uma força pode ser medida vetorialmente pela relação de massa que essa força pode acelerar em uma determinada direção e sentido.

27. Ele representa a segunda lei de Newton, para que um corpo possua uma aceleração, logo ele recebeu uma força ou fez uma com algum outro meio, onde força e aceleração são tidas vetoriais e nossa escolar.

28. Que o vetor resultante de todas as forças agindo em um corpo, é linearmente diferente do vetor aceleração, e a massa do corpo é o fator de dependência. Em relação ao módulo ($|\vec{F}| = m|\vec{a}|$), a força resultante agindo em um corpo é o produto de sua massa pela aceleração, $|\vec{F}|$ e proporcional à $|\vec{a}|$ pela constante m .

29. é utilizada para se calcular a força de algum objeto ou partícula, e pode ser usada para encontrar a massa em aceleração da tal.

30. A expressão nos diz que a força é diretamente proporcional a aceleração e a massa do corpo. Isso quer dizer que se você aplica uma força de 2N em um corpo de 1Kg, ele acelera a 2m/s². Mas si você duplica essa força, sua aceleração também dobrara. O mesmo acontece se a intensidade da força diminui, neste caso a aceleração se reduzira proporcionalmente. Já no caso da massa, quanto maior esta for, maior terá que ser a força para acelerá-la. Um corpo de 10Kg por exemplo, a uma aceleração de 4m/s² esta submetido a uma força de 40N. Já um corpo de 100Kg com a mesma aceleração, estará submetido a uma força resultante de 400N.

31. Vetor da força=massa.aceleração

APÊNDICE P. RESPOSTAS AO QUESTIONÁRIO DOS ALUNOS DO GRUPO C2

Este questionário foi aplicado a **10 alunos** de uma disciplina de **sétimo semestre** de um curso de Licenciatura em Física de uma Universidade pública do interior do estado de São Paulo, Brasil. Apresentamos a continuação as 31 respostas para cada uma das quatro questões.

Questão 1: Descreva o processo que você costuma utilizar para resolver um problema da Física.

1. Pensar sobre ele, levantar os dados, reconhecer variáveis e ###. Visualizar o que quero obter, sem resolver (planejamento). Resolver, Analisar e concluir (Pensar sobre o que for obtido)

2.

1º) Identificação do problema

2º) Dados e variáveis disponível

3º) Análise de possibilidades de enquadramento do problema

4º) Solução ou desistência.

3. Primeiramente devemos observar o fenômeno que esta ocorrendo, a partir desse devemos ver quais outros fenômenos e conceitos estão relacionados. Enfim devemos solucionar o problema, realizando as considerações necessárias para adaptação do fenômeno a teoria.

4. Primeiramente , identifico o problema e as respectivas variáveis. Posteriormente , procuro identificar a relação da teoria com o problema, bem como suas variáveis. Em seguida, através da relação teórica realizada, procuro resolver o problema.

5. Antes de mais nada é necessária a leitura do problema. Apos isso devemos reunir as informações contidas no enunciado do problema. Com a leitura e os dados devemos interpretá-los e concluir de qual assunto o problema trata. Portanto, conhecidos os objetivos do problema , os dados informados e o assunto do qual se trata, unimos tudo isso ao conhecimento de física e responde-se ao problema, seja por meio de explicação teórica ou explicação matemática.

6. 1º faço uma reflexão sobre o conteúdo físico do problema, nem sempre sei completamente, para isso, busco informações em livros textos e sites de universidades.

7. 1º leio o problema com atenção, 2º tento o que a questão esta pedindo, 3º tento relacionar o Maximo conteúdo de física com o problema, 4º Utilizo todo meu conhecimento teórico e as equações que eu conheço que relaciona com o problema para resolve-lo.

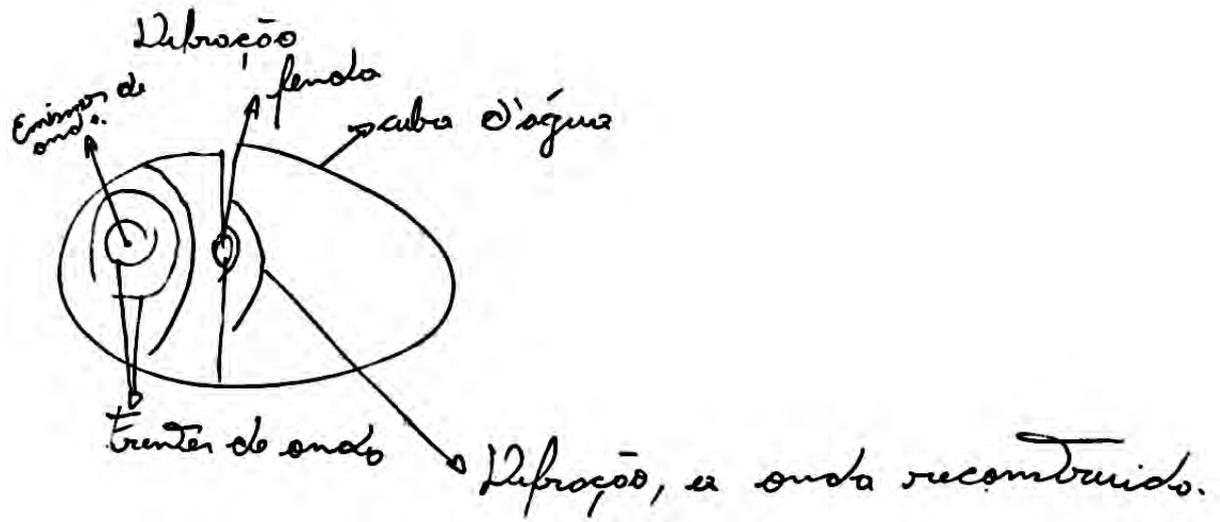
8. Ler com atenção o problema, pesquisar na literatura e depois tento resolve-lo. Se caso não conseguir procuro a ajuda de colegas e professor.

9. Em qualquer problema genérico, acho preferível partir da definição das grandezas envolvidas, podendo ser do equacionamento ou postulados.

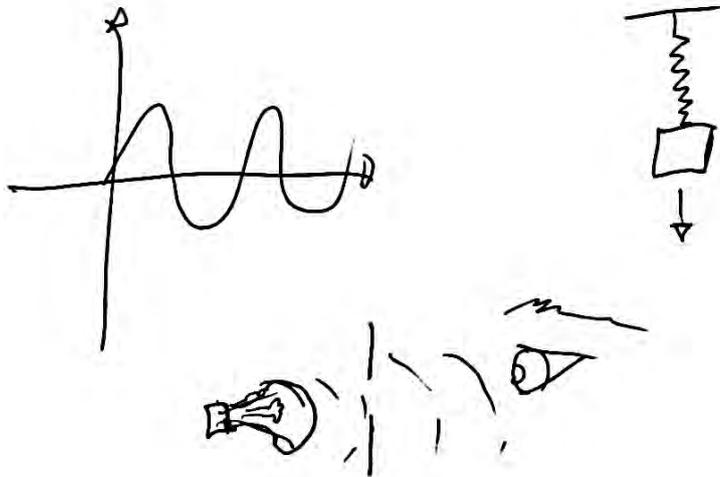
10. Primeiramente verifico quais são as variáveis e quais são as constantes no caso de um processo matemático. Tento isso verificar se existe um significado físico e se este significado é coerente com a teoria.

Questão 2: Escolha um fenômeno ondulatório, nomeie-o e represente-o.

1.



2. Comentário: Fez diferentes desenhos.



3. Os fenômenos ondulatórios estão relacionados em toda a natureza. Tendo em vista, a dualidade onda-partícula, podemos observar o comportamento ondulatório em qualquer fenômeno. Esse, pode ser representado matematicamente por uma associação de senos e cossenos.

4.

Propagação da luz. Neste fenômeno, consideramos que a luz se propaga como uma onda (com campo elétrico e magnético perpendiculares entre si), mas interage com a matéria como partícula.



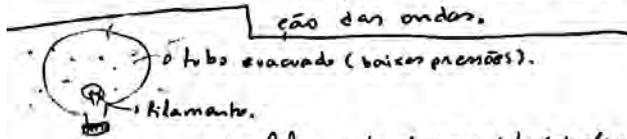
interação com a matéria
↓
fenômeno não ondulatório

5. Comentário: escreva a seguinte frase, "Um fenômeno ondulatório muito simples é a propagação de ondas na superfície de uma piscina. Esse tipo de onda necessita de uma fonte para ser produzida e de um meio para se propagar. Este é um exemplo visual facilmente. Outro exemplo é o som, o qual se dá também através da propagação de ondas em um meio natural, tal como as ondas da piscina, não entanto, não podemos enxergar essa propagação. Por último a luz também se propaga através de ondas eletromagnéticas, porém não necessita de um meio material para propagação e não a vemos, podemos apenas enxergar suas conseqüências, mas não sua propagação propriamente dita.

6.

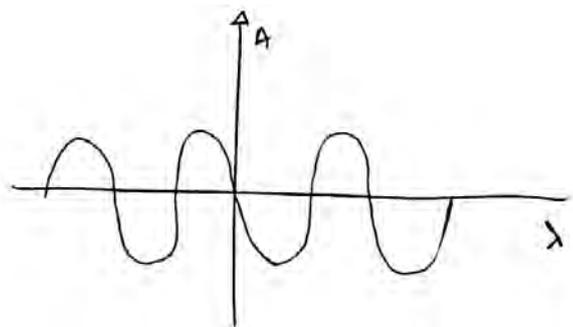
→ corda vibrante. Em (c) posição de equilíbrio, a e b, amplitudes das oscilações.

→ Considerando que as oscilações provocam uma perturbação no meio, temos a propagação das ondas.

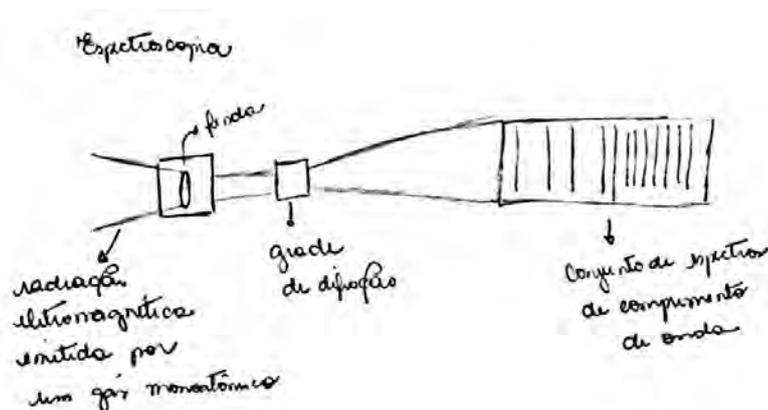


→ o filamento é aquecido (de alguma maneira) e ele começa ejetar elétrons que ao se recombinarem em íons formam fótons. Os fótons se propagam no meio vazio do tubo e fora do tubo.

7.



8.



9. Um fenômeno ondulatório pode ser identificado pela variação cíclica de uma grandeza e sua propagação, podendo surgir efeitos de refletância, absorvência dependendo do meio. Nota-se (informalmente) que essa discussão pode ser aplicada a ondas de qualquer natureza, mas reserva-se as particularidades de fenômenos de caráter dual.

10. Um fenômeno ondulatório que posso citar no momento é o caráter ondulatório da luz.

Questão 3: Uma forma de expressar o princípio de Arquimedes é: “um corpo ao ser imerso, total ou parcialmente em um fluido, sofre um empuxo igual ao peso do volume do fluido deslocado”. –Como você explicaria este princípio para outra pessoa?

1. Este princípio como o enunciado acima afirma que qualquer material imerso em um fluido sofre a ação de uma força que tenta compensar o volume do líquido deslocado. Ex: Dado o bloco A, que tem massa m , sujeito a aceleração gravitacional g e imerso em ar (70% Nitrogênio, 20% Oxigênio, 10% outros gases) A relação de forças é... (Comentário: Fez um desenho)

2 Comentário: Fez um desenho com a seguinte frase de texto, “Ao imergir um objeto de peso P e volume V , em um fluido, o empuxo (Força contrária a força exercida para a imersão) empuxo será igual do peso, do volume do líquido que é igual ao volume do objeto”.

3 O princípio esta relacionado a pressão existente em um fluido. Ao submergirmos um corpo em um fluido, este exerce uma força na área da superfície do volume submerso. Essa força, exerce uma pressão e é denominada empuxo.

*Observamos que o empuxo não necessariamente precisa ser igual ao peso do objeto, mas existe uma relação quanto a massa de liquido deslocado. Ou volume deslocado.

4. O princípio de Arquimedes é a base para a flutuação de navios, bem como outros meios de locomoção marítimos. Basicamente, este princípio diz que quando um objeto é imerso na água, certa quantidade de volume é deslocado, assim, uma força, denominada empuxo é exercida sobre o objeto de forma que este suba verticalmente no entanto, existe uma força peso (do objeto) que é exercida na mesma direção, no que em um sentido oposto. Quando essas duas forças são iguais, o objeto flutua sobre a água.

5. Isso basicamente representa que dois corpos não ocupam o mesmo lugar no espaço, ou seja, ao submergir um corpo, total ou parcialmente em um fluido, o corpo ocupara o local onde antes havia um fluido, sofrendo assim um empuxo, por parte do fluido, igual ao peso do volume do fluido deslocado, mostrando que o volume do fluido deslocado é igual ao volume do corpo.

6. Cada corpo material possui uma densidade específica. $D=m/v$, A densidade dos materiais influenciam na localização do objeto em um fluido. Comentário: fez um desenho com o seguinte texto, “Força empuxo devido a presença do material com densidade d_1 , imersa no fluido de densidade d_2 . Força peso do material submerso em um fluido.

7. Comentário: Fez um desenho com nomes e com legendas.

8. Dos corpos não ocupam o mesmo espaço, dessa forma ao imergir o corpo num fluido, o fluido que estava ocupando o lugar onde o corpo e imergido se espalha ocasionando assim o empuxo, que tem o mesmo peso desse volume que foi deslocado pelo corpo imerso.

9. Um corpo imerso “prejudica” a situação de menor energia de um liquido. A reação é que este liquido aplica uma força contra a superfície de este objeto. Corpos parcialmente submersos em equilíbrio possuem uma força de empuxo resultante igual em modulo e contraria em sentido à força peso exercida pela parcela submersa do objeto. Ao ser totalmente submerso, a força empuxo se aplica à toda superfície do objeto, anulando sua resultante e, portanto o objeto, anulando sua resultante e, portanto, o objeto atuara de acordo com seu peso.

10. Este principio quer dizer que quando um corpo é imerso em um fluido, com por exemplo, a água, o corpo sofre um empuxo, ou seja, é como uma força contraria, uma força para cima que é igual ao volume de fluido deslocado que acaba por deixar o corpo com um “peso aparente”, ou seja, um peso menor que o que o corpo realmente tem.

Questão 4: Para você qual o significado da expressão matemática: $\vec{F} = m\vec{a}$

1. Este é o conhecido enunciado da segunda lei de Newton, onde é originado da equação $\vec{F} = \frac{dP}{dT}$,

onde P é o momento e T o tempo, quando m não varia no tempo podendo isolar a massa e chamar $\frac{dV}{dT}$ de a onde a é aceleração (vetorial).

Logo essa equação representa a soma das forças sobre um corpo cujas massas no varia em relação à aceleração do mesmo permitindo entender as relações propostas para o movimento de uma maneira mais quantizada, abrangendo uma forma de resolver problemas para diferentes referencias (problemas dinâmicos).

2. Um objeto acelerado sempre tem uma força atuando sobre ele. Sendo essa força diretamente proporcional a massa e aceleração do objeto. Objetos em repouso ou velocidade continua não estão sobre influencia de nenhuma força.

3. Ao aplicarmos uma força sobre um corpo, esse adquire uma aceleração que dependerá da sua massa. Essa fórmula foi enunciada por Newton como: $F = \frac{dp}{dt}$, onde $F = m \frac{dv}{dt}$ ou, $F = m \cdot a$

*A derivada do momento linear de uma partícula, com relação ao tempo, é igual a força.

4. Esta relação é uma das 3 leis básicas acerca da teoria Newtoniana. Basicamente, esta relação diz que toda força aplicada sobre um corpo é proporcional a quantidade de movimento produzido (aceleração). A relação vira uma igualdade se consideramos a massa do objeto em que a força é aplicada. Esta força aplicada sobre determinado corpo é a soma de todas as forças aplicadas sobre este é igual a força resultante, que é igual à massa do objeto em relação pelo produto da aceleração imprimida pela força. Esta relação também mostra que a força possui caráter vetorial, com direção e sentido.

5. onde F é a força resultante aplicada em um corpo, dada em Newton (N) (S.I.); m é a massa desse corpo, dada em quilogramas (Kg)(S.I.); e a é a aceleração que esse corpo possui, dada em metros por segundo ao quadrado (M/S²)(S.I.). Portanto, todo corpo contendo de matéria possui massa, a qual está susceptível à ação de forças de qualquer natureza, produzindo assim uma aceleração nesse corpo, dependendo diretamente do valor em módulo da força.

6. Uma partícula sujeita a uma ou diversas forças $\sum \vec{F}$ sofre uma aceleração na direção e sentido da força resultante. Esta força pode ser transmitida por contato ou através da distância. Esta força é necessariamente vetorial, para isso necessita de uma revisão sobre vetores, operação vetorial. Também podemos deixar o problema mais simples de acordo com a simetria do problema.

7. O módulo da força aplicada a um objeto é igual a massa do objeto vezes sua aceleração.

8. A força aplicada em um corpo por exemplo, depende da massa e aceleração que a força é aplicada, ou seja, se a massa do corpo é grande e a aceleração também é alta a força aplicada também será alta e vice-versa.

9. Esta equação representa uma perturbação à inércia de um corpo com massa m . Ela tem caráter vetorial porque as grandezas associadas (força e aceleração) são vetoriais. Genericamente, esta equação é tratada em componentes separadas de coordenadas de interesse para facilitar a compreensão da atuação de cada elemento sobre a massa.

10. $F = m \cdot a$, é a segunda lei de Newton que relaciona a força com a massa de um determinado corpo e sua aceleração, onde pode-se relacionar com a mesma equação a força peso $P = MG$ e a aceleração da gravidade g no caso de um lançamento vertical. $F = m \cdot a$ é utilizada para o movimento uniforme), $P = MG$ pode ser utilizada para lançamento vertical,

APÊNDICE Q. Classificação dos conteúdos das respostas dos estudantes de Física I, porcentagem da quantidade de alunos por cada tipo de resposta à questão 2.

Quadro 32. Classificação dos conteúdos das respostas dos estudantes de Física I, porcentagem da quantidade de alunos por cada tipo de resposta.

Tipo de fenômeno ondulatorio e % de estudantes	Fenômenos nomeados Expressões dos estudantes de Física I
Ondas mecânicas 52%	<ul style="list-style-type: none"> - “Interferência de ondas numa corda” - “As ondas sonoras tem uma peculiaridade bem interessante, quanto mais denso o ambiente mais rápido é a sua velocidade, por exemplo: ondas sonoras e sua velocidade em diferentes ambientes; (na água)>(no ar)>(no vácuo)” - “Som” - “Ondas sonoras” - “variação da forma de percepção do som pela pessoa quando a ambulância se aproxima” - “A voz é um fenômeno ondulatorio, sonoro” - “As ondas sonoras se apresentam através da fala, nas buzinas de um carro, tudo que produz som” - “As ondas sonoras são ondas que se propagam pelo espaço e através de suas vibrações faz com que sejamos capazes de escutarmos ruídos no qual classificamos como sons” - “Frequência de voz em 60 Hz”
Ondas eletromagnéticas 16%	<ul style="list-style-type: none"> - “A transmissão de energia através de ondas de radio” - “sinal de televisão” - “Um pulso de luz realizado em laboratório” - “micro ondas” - “ondas de radio”
Propriedades das ondas 23%	<ul style="list-style-type: none"> - “Difração” - “Difração: dispersão de onda por uma fenda” - “frequência” - “É refração da luz que se da quando a mesma se propaga entre meios com diferentes índices de refração” - “Efeito de superposição de ondas. Quando as ondas da mesma frequência porem em amplitudes diferentes podem se somar ou ate mesmo anular” - “Interferência eletromagnética?” - “Ao incidir em diferentes meios a luz sofre uma refração.”
Comportamentos oscilatórios 3%	<ul style="list-style-type: none"> - “Corrente elétrica alternada. É onde a corrente elétrica vai do pico mais positivo passando pelo zero ate o mais negativo com certa frequência em um certo período”
Não responde à pergunta 6%	<ul style="list-style-type: none"> - “Circuito interno” - Não responde

Quadro 33. Classificação dos conteúdos das respostas dos estudantes de Laboratório de Física Moderna, porcentagem da quantidade de alunos por cada

Tipo de fenômeno ondulatório mencionado	Fenômenos nomeados Expressões dos estudantes de Laboratório de Física Moderna
Ondas mecânicas 30%	<ul style="list-style-type: none"> - “Cuba de água” - “Um fenômeno ondulatório muito simples é a propagação de ondas na superfície de uma piscina. Esse tipo de onda necessita de uma fonte para ser produzida e de um meio para se propagar. Este é um exemplo visual facilmente (...)” - “corda vibrante”
Ondas eletromagnéticas 40%	<ul style="list-style-type: none"> - “Propagação da luz. Nesse fenômeno, consideramos que a luz se propaga como uma onda (com campo elétrico e magnético perpendiculares entre si, mas interage com a matéria como partícula” - “radiação eletromagnética emitida por um gás monoatômico” - “ (...) o caráter ondulatório da luz”
Comportamentos oscilatórios 10%	<ul style="list-style-type: none"> - Desenho de uma mola suspensa. - Desenho de uma função sinusoidal sem nome nem explicação
Não responde à pergunta 20%	<ul style="list-style-type: none"> - “Os fenômenos ondulatórios estão relacionados em toda a natureza. Tendo em vista, a dualidade onda- partícula, podemos observar o comportamento ondulatório em qualquer fenômeno. Esse, pode ser representado matematicamente por uma associação de senos e cossenos” - “Um fenômeno ondulatório pode ser identificado pela variação cíclica de uma grandeza e sua propagação, podendo surgir efeitos de refletância, absorvência dependendo do meio. Nota-se (informalmente) que essa discussão pode ser aplicada a ondas de qualquer natureza, mas reserva-se as particularidades de fenômenos de caráter dual”.

ANEXOS

ANEXO 1. Cálculo do centro de gravidade de um triângulo, por Arquimedes. Tomado de. Assis, André Koch Torres, -Arquimedes, o centro de gravidade e a lei da alavanca 1962. Ed Apeiron, Montreal.

9.7.2 Cálculo do CG de um Triângulo por Arquimedes

Vamos agora analisar alguns aspectos do cálculo do CG de um triângulo apresentado por Arquimedes. Este CG coincide com o encontro das medianas, que são as retas que ligam os vértices aos pontos médios dos lados opostos. A importância deste resultado é que ele só vale para uma lei da alavanca linear com a distância. Por outro lado, o CG de um círculo ou de um retângulo continuaria sendo o centro geométrico destas figuras mesmo se a lei da alavanca fosse quadrática ou cúbica nas distâncias, como pode ser visto por argumentos de simetria. Logo, o cálculo do CG de um triângulo é o primeiro resultado não trivial encontrado para uma figura plana.

Arquimedes considera um triângulo escaleno genérico $AB\Gamma$. Mostra então na Proposição 13 que o CG tem de estar ao longo da linha reta unindo qualquer vértice ao ponto médio do lado oposto. Se Δ é o ponto médio do lado $B\Gamma$ no triângulo representado na Figura 9.16, isto significa que o CG tem de estar em algum ponto G ao longo da reta $A\Delta$. Arquimedes apresenta duas demonstrações para este fato. As duas demonstrações supõem que o CG não esteja ao longo de $A\Delta$, chegando então em uma contradição lógica. Logo, o CG tem de estar ao longo de $A\Delta$, que é o que ele queria demonstrar.

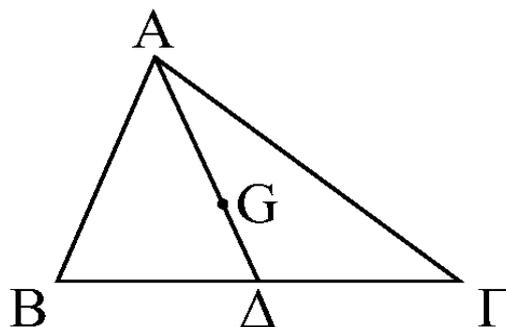


Figura 9.16: Centro de gravidade de um triângulo.

Vamos explorar aqui o aspecto inverso. Vamos supor que o CG esteja em algum ponto G ao longo de $A\Delta$, para ver não apenas que com isto se chega a algo logicamente coerente, mas também à relação entre AG e $G\Delta$. Esperamos com esta análise simplificada auxiliar na compreensão da demonstração de Arquimedes. Apresentamos explicitamente todos os postulados que estão sendo usados na demonstração.

Pelo Postulado 7 vem que o CG tem de estar dentro do triângulo $AB\Gamma$. Vamos supor então que ele esteja em um ponto G ao longo da reta $A\Delta$, onde Δ é o ponto médio do lado $B\Gamma$. Vamos chamar de E ao ponto médio do lado AB e de Z ao ponto médio do lado $A\Gamma$. Unimos os segmentos $E\Delta$, $Z\Delta$ e EZ . O segmento $E\Delta$ é paralelo ao lado $A\Gamma$, o segmento EZ é paralelo ao lado $B\Gamma$ e o segmento $Z\Delta$ é paralelo ao lado AB . Com isto vem então que $B\Delta = \Delta\Gamma = EZ = B\Gamma/2$, $BE = EA = Z\Delta = BA/2$, $AZ = Z\Gamma = E\Delta = A\Gamma/2$. Ficamos então com quatro triângulos iguais: $EB\Delta$, $Z\Delta\Gamma$, AEZ e ΔZE , ver a Figura 9.17. Estes

quatro triângulos são semelhantes ao triângulo original $AB\Gamma$. As áreas e os pesos P de cada um deles valem um quarto da área e do peso do triângulo original: $P_{EB\Delta} = P_{Z\Delta\Gamma} = P_{AEZ} = P_{\Delta ZE} = P_{AB\Gamma}/4$.

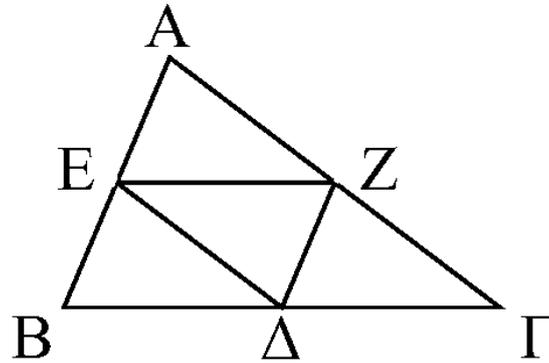


Figura 9.17: Passo intermediário para encontrar o CG de um triângulo.

Vamos chamar de M ao ponto médio do segmento EZ , que também é o ponto médio do segmento $A\Delta$. Chamamos ainda de M_1 ao ponto médio do segmento $B\Delta$ e de M_2 ao ponto médio do segmento $\Delta\Gamma$. Ligamos os pontos EM_1 , ZM_2 e $A\Delta$. Pelo Postulado 5 vem que os centros de gravidade dos triângulos $EB\Delta$, $Z\Delta\Gamma$, AEZ e ΔZE estarão nos pontos G_1 , G_2 , G_3 e G_4 ao longo dos segmentos EM_1 , ZM_2 , AM e ΔM , respectivamente, situados tal que $EG_1 = ZG_2 = AG_3 = \Delta G_4 = AG/2$, como na Figura 9.18.

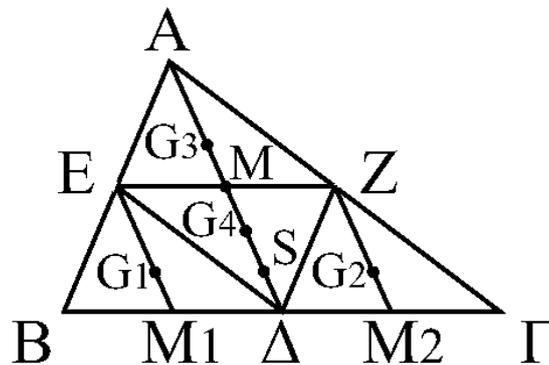


Figura 9.18: Passo final para encontrar o CG de um triângulo.

Pelos postulados 1 e 6 vem que se o triângulo $AB\Gamma$ ficava em equilíbrio ao ser apoiado pelo ponto G , então ele continuará equilibrado sendo apoiado no ponto G ao substituirmos os dois triângulos $EB\Delta$ e $Z\Delta\Gamma$ por um único corpo de peso igual à soma do peso destes dois triângulos atuando no ponto médio da reta G_1G_2 . Vamos chamar este ponto médio de S , localizado ao longo de $A\Delta$. De fato, Arquimedes demonstra na Proposição 4 deste trabalho o seguinte resultado, [Mug71a, pág. 82]: “Se duas grandezas iguais não possuem o mesmo centro de gravidade, o centro de gravidade da grandeza composta por estas [duas] grandezas estará no ponto médio do segmento de reta ligando os centros de gravidade das [duas] grandezas.”

Da mesma forma, podemos substituir os dois triângulos AEZ e $\triangle ZE$ por um único corpo de peso igual à soma do peso destes dois triângulos atuando no ponto médio do segmento G_3G_4 , isto é, no ponto M . Ou seja, o sistema vai continuar em equilíbrio ao ser apoiado no ponto G depois desta substituição.

Ficamos então apenas com dois pesos iguais atuando em M e em S . Novamente podemos substituir estes dois pesos por um único corpo que terá o peso total do triângulo original atuando no ponto médio do segmento MS , que é o CG do triângulo original, ou seja, o ponto G . Pelo Postulado 5 temos que $S\Delta = G_1M_1 = G_2M_2 = G_3M = G_4M = G\Delta/2$. Como G é o ponto médio do segmento MS , temos que $G\Delta = (M\Delta + S\Delta)/2$. Combinando estas duas últimas igualdades, obtemos: $G\Delta = (M\Delta + G\Delta/2)/2$. Isto é, $2G\Delta - G\Delta/2 = 3G\Delta/2 = M\Delta$. Como $M\Delta = A\Delta/2$, obtemos finalmente: $A\Delta = 3G\Delta$. Como $A\Delta = AG + G\Delta$ vem também que $AG = 2G\Delta$.

Podemos então concluir que a suposição de que o CG do triângulo está ao longo da linha reta ligando cada vértice ao ponto médio do lado oposto é coerente. Além disto, o procedimento anterior mostra que o CG dado pelo ponto G vai dividir esta reta $A\Delta$ de tal forma que $AG = 2G\Delta$.

Por outro lado, como $\Delta G_4 = AG/2$, vem deste último resultado que $\Delta G_4 = (2G\Delta)/2 = \Delta G$. Ou seja, o CG do triângulo $\triangle ZE$, que é o ponto G_4 , coincide com o CG do triângulo original $AB\Gamma$, que é o ponto G .

ANEXO 2. Dedução da equação de onda relativista de Dirac

La ecuación de onda relativista de Dirac

(Trabajo preparado por Armando Martínez* a partir de diversas fuentes e publicado no link: <http://teoria-de-la-relatividad.blogspot.com.br/2009/03/a6-la-ecuacion-de-onda-relativista-de.html> , aceso no abril de 2013.

La primera unificación de la Teoría de la Relatividad con la Mecánica Cuántica llevada a cabo en 1927 no tardó en producir un logro espectacular: la predicción teórica de la **antimateria**, predicción que no tardaría en ser confirmada experimentalmente pocos años después, dando inicio a una área de estudio conocida en la actualidad como la **Mecánica Cuántica Relativista**.

Al hablar de una unificación de la Teoría de la Relatividad con la Mecánica Cuántica estamos hablando de una unificación de la Teoría *Especial* de la Relatividad con la Mecánica Cuántica, dejando fuera a la Relatividad General. Si bien la unificación de los conceptos básicos de la Mecánica Cuántica con las ecuaciones relativistas que describen un espacio-tiempo *plano* ha sido fructífera, los esfuerzos por llevar a cabo la incorporación de estos conceptos hacia un espacio-tiempo *curvo* ha resultado ser un verdadero dolor de cabeza sin que hasta la fecha haya producido las predicciones que en otros tiempos distinguieron a la Teoría de la Relatividad o a la Mecánica Cuántica consideradas por separado.

El primer científico en llevar a cabo la unificación de la Mecánica Cuántica con la Teoría (Especial) de la Relatividad fué Paul Adrien Maurice Dirac, mejor conocido como P. A. M. Dirac, considerado por muchos como el “padre” de la *Electrodinámica Cuántica*. Uno de sus más importantes logros fue la formulación de lo que podemos llamar la *ecuación de onda relativista de Dirac*, ecuación a la cual él mismo le dió solución mediante unos esquemas ingeniosos, logrando con ello predecir la existencia de electrones con carga positiva (antielectrones o *positrones*), prediciendo también que para toda partícula elemental debía existir su correspondiente *antipartícula*.

En este apéndice llevaremos a cabo la derivación de la ecuación de onda relativista de Dirac reproduciendo los pasos seguidos por él en lugar de utilizar el formalismo axiomático moderno que desafortunadamente tiene a oscurecer las ideas más importantes detrás de la obtención de tan importante resultado. Si bien el formalismo abstracto es más elegante, el método histórico es más intuitivo, y aquí en lo que estamos interesados es en la disseminación de las ideas fundamentales detrás del andamiaje matemático utilizado.

* Ingeniero Consultor en Sistemas. Ciudad Juarez, Mexico. armando.martinez.mx@gmail.com

Aunque la explicación simplificada usualmente dada al público en general de este resultado obtenido por Dirac es que la relación “correcta” entra la masa y la energía no es la ecuación $E = mc^2$ dada por Einstein sino $E^2 = m^2c^4$, la cual al tomar la raíz cuadrada de ambos lados nos dá dos resultados siendo uno de ellos $E = mc^2$ (una energía positiva) y siendo el otro $E = -mc^2$ (una energía negativa), pronto se verá que esto en realidad es una sobresimplificación.

Antes de entrar en detalle sobre la ecuación de onda relativista de Dirac, es necesario repasar algunos conceptos esenciales sobre los cuales descansa la Mecánica Cuántica; específicamente la sustitución de *observables* (cantidades como la energía, la cantidad de movimiento, etc. que pueden ser medidas experimentalmente en el laboratorio) por **operadores matemáticos**, sobre lo cual el eminente físico Arno Bohm dijo lo siguiente: “La representación de observables físicas por operadores es uno de los más grandes logros de la ciencia”. Bajo este esquema, podemos tomar una ecuación de la física clásica, por ejemplo una ecuación en la cual aparezcan las tres componentes (en un sistema de coordenadas Cartesianas) del momento angular \mathbf{L} de un cuerpo, o sea (L_x , L_y , L_z), y estas cantidades las reemplazamos por operadores matemáticos como los siguientes:

$$\begin{aligned}L_x &= -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) \\L_y &= -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) \\L_z &= -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\end{aligned}$$

Obviamente, estos operadores matemáticos que involucran derivadas parciales de primer orden van a actuar sobre algo, van a actuar sobre un *operando* identificado con la letra Ψ conocido como una *función de onda*, y una vez que hemos montado un sistema de ecuaciones diferenciales dicho sistema puede ser resuelto para un caso en el cual las cantidades bajo consideración son cantidades muy pequeñas que corresponden al mundo sub-microscópico en el cual funcionan las reglas de la Mecánica Cuántica.

Aclarado lo anterior, estamos listos para ver cómo fue que P. A. M. Dirac obtuvo su ecuación de onda relativista. Dirac empezó con la ecuación fundamental que nos relaciona la energía total de una partícula con su momentum:

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$$

En un sistema de coordenadas Cartesianas, el cuadrado del momentum efectivo p^2 es igual a la suma de los cuadrados de los componentes del momentum en los ejes Cartesianos respectivos:

$$p^2 = (p_x)^2 + (p_y)^2 + (p_z)^2$$

de modo tal que podemos poner la relación anterior en la siguiente forma (el subscrito cero que identifica a la masa en la expresión como una *masa propia* invariante será abandonado de aquí en adelante al entenderse que se trata de una masa propia):

$$E^2 = c^2 \{ (p_x)^2 + (p_y)^2 + (p_z)^2 \} + (mc^2)^2$$

Esto nos sugiere la forma en la cual entrarán los operadores dentro de la fórmula. Pero para ello necesitamos los operadores que nos proporciona la Mecánica Cuántica, la cual nos demuestra que las componentes rectangulares del momentum lineal pueden ser substituídas por los siguientes operadores:

$$p_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$p_y = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y}$$

$$p_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z}$$

en donde $i = \sqrt{-1}$. Interpretamos a un símbolo operacional como $(p_x)^2$ como la *aplicación repetida* del operador p_x sobre el operando:

$$p_x^2 = p_x p_x = \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Siendo así, entonces:

$$p^2 = -h^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

Podemos reconocer la expresión dentro del paréntesis como aquello que es usualmente simbolizado en forma abreviada con el *operador de Laplace* o *Laplaciano*:

$$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Todo esto nos permite escribir nuestra expresión operacional tentativa:

$$E^2 = c^2 \{ -h^2 \nabla^2 + (mc)^2 \}$$

Para escribir nuestra ecuación en forma operacional actuando sobre la función de onda, tomamos a continuación la raíz cuadrada:

$$E = c \sqrt{-h^2 \nabla^2 + (mc)^2}$$

Por otra parte, de acuerdo con la Mecánica Cuántica la energía E puede ser substituída en la ecuación anterior por el siguiente *operador*:

$$E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

Esto nos permite escribir nuestra ecuación *operacional* siguiente:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = c \sqrt{-\hbar^2 \nabla^2 + (mc)^2} \Psi$$

Aquí hemos metido ya la función de onda Ψ porque las cantidades observables han sido reemplazadas por operadores diferenciales en ambos lados. Para que esta expresión sea válida, se requiere que la función de onda sea una función tanto del tiempo como de las coordenadas Cartesianas: $\Psi = \Psi(x, y, z, t) = \Psi(\mathbf{r}, t)$ en donde \mathbf{r} es el vector posición (x, y, z) . Al ver la expresión obtenida, Dirac concluyó que al no haber forma alguna de darle un significado físico a la raíz cuadrada de un Laplaciano la expresión dentro del radical tenía que ser forzosamente un cuadrado perfecto, de lo contrario la expresión carecía de significado. Fue así como Dirac propuso lo siguiente (hemos revertido aquí a la representación de los operadores cuánticos de los momentums como p_i para simplificar el desarrollo): $(p_x)^2 + (p_y)^2 + (p_z)^2 + m^2 c^2 = (\alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z + \beta mc)^2$ siendo $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z,$ y β los coeficientes desconocidos a ser evaluados comparando la expansión del cuadrado perfecto con la fórmula original.

Expandiendo la expresión del lado derecho:

$$\begin{aligned} (\alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z + \beta mc)^2 = & \\ \alpha_x^2 p_x^2 + \alpha_x \alpha_y p_x p_y + \alpha_x \alpha_z p_x p_z + \alpha_x \beta p_x mc + & \\ \alpha_y \alpha_x p_y p_x + \alpha_y^2 p_y^2 + \alpha_y \alpha_z p_y p_z + \alpha_y \beta p_y mc + & \\ \alpha_z \alpha_x p_z p_x + \alpha_z \alpha_y p_z p_y + \alpha_z^2 p_z^2 + \alpha_z \beta p_z mc + & \\ \beta \alpha_x mc p_x + \beta \alpha_y mc p_y + \beta \alpha_z mc p_z + \beta^2 m^2 c^2 & \end{aligned}$$

Resulta obvio de inmediato que los coeficientes α no pueden ser números ordinarios. Para que las dos relaciones sean válidas, es necesario primero que:

$$\alpha_x^2 = \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = \beta^2 = 1$$

Además, todos los coeficientes “fuera de la diagonal principal” (unidos a términos “cruzados” como $p_x p_y$) deben *anticommutar* (a Dirac se le atribuye al invención de la palabra) para que se puedan cancelar mutuamente, o sea:

$$\alpha_x \alpha_y = -\alpha_y \alpha_x,$$

$$\alpha_x \alpha_z = -\alpha_z \alpha_x,$$

$$\alpha_y \alpha_z = -\alpha_z \alpha_y.$$

Lo único en matemáticas que puede llenar tales requerimientos son las *matrices*, las cuales tienen la propiedad de que sus productos por regla general no son conmutativos (a

menos de que una de las matrices sea la inversa de la otra, o que sea la matriz identidad o la matriz cero) y que multiplicadas por sí mismas pueden dar la unidad en caso de ser sus propias inversas. La pregunta obvia es ahora: ¿qué matrices pueden llenar estos requerimientos aquí? Como puede verse en lo que hemos desarrollado hasta este punto, Dirac estaba entrando ya en un terreno teórico que no había sido explorado previamente.

Dirac demostró que no existe un conjunto de cuatro matrices 2×2 como tampoco existe un conjunto de cuatro matrices 3×3 que puedan satisfacer los requerimientos arriba indicados. Dirac se vió entonces en la necesidad de recurrir a matrices 4×4 para poder encontrar los coeficientes α y β que hicieran posible la expresión obtenida. Después de estar trabajando un buen tiempo probando varias combinaciones posibles de matrices, Dirac encontró que las siguientes matrices podían resolver el asunto:

$$[\alpha_x] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [\alpha_y] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$[\alpha_z] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [\beta] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Estas cuatro matrices son conocidas como las **matrices de Dirac**. Obsérvese que cada una de estas cuatro matrices multiplicada por sí misma nos produce la matriz identidad (o matriz unitaria), cumpliéndose uno de los requerimientos señalados arriba. Obsérvese también que las matrices *anti-conmutan*. Además, una operación que emplea matrices 4×4 no puede ser efectuada a menos de que el operando, la función de onda Ψ , sea una cantidad que conste de cuatro componentes, como en un vector columna (una matriz 1×4):

$$\Psi_i(\mathbf{r}, t) = \begin{bmatrix} \Psi_1(\mathbf{r}, t) \\ \Psi_2(\mathbf{r}, t) \\ \Psi_3(\mathbf{r}, t) \\ \Psi_4(\mathbf{r}, t) \end{bmatrix}$$

Las funciones Ψ_i reciben el nombre especial de **espinores** (*spinors*).

Habiendo comprobado la existencia de un cuadrado perfecto para todo el término que aparecía bajo la raíz cuadrática, podemos reemplazar dicho cuadrado perfecto dentro de la raíz para así extraerla metiendo nuevamente tras esto los *operadores* del momentum p_x , p_y y p_z obteniendo:

$$\begin{aligned}
& i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{bmatrix} \\
&= \{ic\hbar[\alpha_x] \frac{\partial}{\partial x} + ic\hbar[\alpha_y] \frac{\partial}{\partial y} + ic\hbar[\alpha_z] \frac{\partial}{\partial z} \\
&\quad - mc^2[\beta]\} \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Esta es una ecuación cuántica-relativista dependiente del tiempo. Para hacerla independiente del tiempo, recurrimos a una técnica matemática usual en estos casos, la *separación de variables*, separando la variable original Ψ_n en el producto de una función ψ_n dependiente únicamente del vector posición \mathbf{r} pero independiente del tiempo, multiplicada por otro factor dependiente del tiempo:

$$\Psi_n(\mathbf{r},t) = \psi_n(\mathbf{r}) e^{-iEt/\hbar}$$

que en nuestro caso para las cuatro componentes de la función de onda representada como un vector columna viene siendo:

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} e^{-iEt/\hbar}$$

La ventaja de utilizar la función $e^{-iEt/\hbar}$ radica en el hecho de que al tomar la derivada parcial de dicha función con respecto al tiempo nos queda como factor la misma función, lo cual permite cancelarla al aparecer en ambos lados de la ecuación matricial.

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\psi_n e^{-iEt/\hbar}) &= (i\hbar)(-iE/\hbar)(\psi_n e^{-iEt/\hbar}) \\
&= \psi_n E e^{-iEt/\hbar}
\end{aligned}$$

En la simplificación que se está llevando a cabo, es necesario obtener como resultado intermedio los siguientes productos de cada *matriz* $[\alpha_n]$ por el *vector columna* ψ en ese orden (recuérdese que el producto de dos matrices no es conmutativo, y en este caso estamos *post-*multiplicando cada una de las matrices 4x4 de Dirac por un vector columna que es en realidad una matriz 4x1, lo cual nos debe producir en cada caso una matriz 4x1):

$$\begin{aligned}
[\alpha_x]\psi &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_4 \\ \psi_3 \\ \psi_2 \\ \psi_1 \end{pmatrix} \\
[\alpha_y]\psi &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\psi_4 \\ i\psi_3 \\ -i\psi_2 \\ i\psi_1 \end{pmatrix} \\
[\alpha_z]\psi &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ -\psi_4 \\ \psi_1 \\ -\psi_2 \end{pmatrix} \\
[\beta]\psi &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ -\psi_3 \\ -\psi_4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Es así como se llegamos a la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
ic\hbar \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \psi_4 \\ \psi_3 \\ \psi_2 \\ \psi_1 \end{pmatrix} + ic\hbar \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} -i\psi_4 \\ i\psi_3 \\ -i\psi_2 \\ i\psi_1 \end{pmatrix} + ic\hbar \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \psi_3 \\ -\psi_4 \\ \psi_1 \\ -\psi_2 \end{pmatrix} \\
-mc^2 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ -\psi_3 \\ -\psi_4 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Esta es la **ecuación de onda relativista de Dirac**, conocida simplemente como **ecuación de Dirac**. Puesto que dos matrices son iguales cuando sus elementos correspondientes son iguales, la ecuación matricial de arriba en realidad corresponde a un conjunto de *cuatro ecuaciones diferenciales parciales acopladas*. En pocas palabras, la ecuación de Dirac en realidad es un conjunto de cuatro ecuaciones distintas y no una sola ecuación.

Como puede verse, una cosa es montar una ecuación como lo hizo Einstein con $\mathbf{G} = 8\pi\mathbf{GT}$, y otra cosa es desenvolver la ecuación encontrándole soluciones. Es aquí cuando los teóricos necesitan aplicar todo su ingenio al refinamiento o inclusive a la edificación del aparato matemático que se necesita para poder llegar a algún lado. Fue así como Newton se vio en la necesidad de tener que inventar por cuenta propia el cálculo infinitesimal (un mérito

que se estuvo disputando con Leibnitz hasta el final de sus días) para poder obtener fórmulas básicas para la explicación del movimiento de los planetas en base a su ley de gravitación universal, y fue así como Einstein se vió en la necesidad de concebir trucos ingeniosos para poder obtener una solución al problema de las mismas órbitas planetarias descritas ahora por sus ecuaciones de campo.

Podemos obtener una solución a la ecuación de Dirac (o mejor dicho, al conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas de Dirac) considerando el caso de una partícula libre viajando a lo largo de cierto eje (lo cual nos permite ignorar los otros dos ejes). Para una partícula libre que viaja a lo largo del eje-z, la ecuación de onda relativista de Dirac se reduce a lo siguiente:

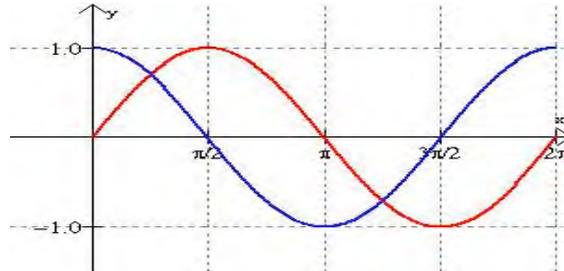
$$i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \psi_3 \\ -\psi_4 \\ \psi_1 \\ -\psi_2 \end{pmatrix} - mc^2 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ -\psi_3 \\ -\psi_4 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

El dilema ahora es determinar la manera en la cual vamos a representar matemáticamente una partícula libre. Cuando se trata de una partícula confinada dentro de un contenedor cerrado, esto no representa ningún problema, ya que en virtud de la naturaleza ondulatoria de la partícula en su dualidad *onda-partícula*, no puede haber cantidades fraccionarias de onda dentro del contenedor cerrado, solo puede haber múltiplos enteros de una frecuencia básica (al igual que en una guitarra cuando hacemos sonar una cuerda), esto es precisamente lo que determina la cuantización (o discretización) de los niveles de energía de la partícula. Pero cuando la partícula está libre viajando de un lugar a otro, no es fácil representarla como una onda viajera de una frecuencia específica. Para resolver este asunto, Dirac concibió una función que desde su creación no ha sido muy del agrado de los matemáticos por su naturaleza impropia, la **función Dirac delta** o **función- δ de Dirac**. Es una función *límite* que podemos imaginar como un rectángulo de área unitaria al cual le vamos acortando su base y le vamos agrandando su altura manteniéndolo el “área bajo la curva” igual a la unidad, hasta que su anchura es infinitamente pequeña y su altura es infinitamente grande, manteniéndose el “área bajo la curva” igual a la unidad al hacer tender la anchura y la altura hacia lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande respectivamente. Esta función representa, en efecto, *una discontinuidad en el espacio-tiempo suave que requiere la Relatividad General para poder funcionar*. Toda partícula sub-atómica es, en efecto, una discontinuidad en el espacio-tiempo en la cual la maquinaria matemática utilizada por Einstein en su formulación de la Relatividad General deja de ser válida.

Una onda *estacionaria* (conocida en la literatura inglesa como *standing wave*) se puede representar con cualquiera de las siguientes dos funciones trigonométricas:

$$y(x) = A \text{sen}(x) \quad y(x) = A \text{cos}(x)$$

en donde A es la amplitud de la onda estacionaria. El siguiente gráfico muestra ambas con una amplitud de A = 1, con la onda senoidal en color rojo y la onda cosenoidal en color azul:



Podemos convertir una onda estacionaria en una onda *viajera* con la simple adición de un término que va cambiando con el tiempo:

$$y(x) = A \text{sen}(x - \omega t) \quad y(x) = A \text{cos}(x - \omega t)$$

En estos casos, tenemos ondas viajeras que se van desplazando de izquierda a derecha. Si queremos que las ondas se desplacen de derecha a izquierda, todo lo que tenemos que hacer es cambiar el signo negativo por uno positivo. Podemos multiplicar en las ecuaciones de arriba la variable independiente por un factor de escala k sin que esto altere la esencia de la representación gráfica de las ondas viajeras:

$$y(x) = A \text{sen}(kx - \omega t) \quad y(x) = A \text{cos}(kx - \omega t)$$

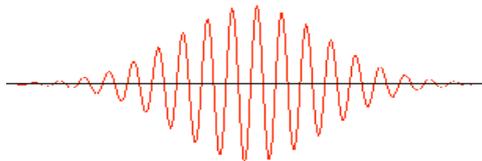
Empleando la relación de Euler:

$$e^{i\theta} = \text{cos}(\theta) + i \text{sen}(\theta)$$

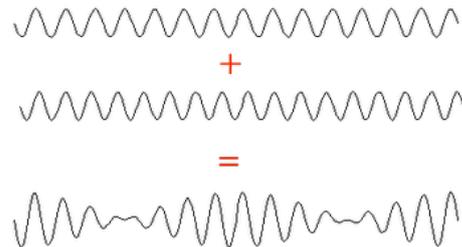
podemos representar una onda viajera en su forma más general del modo siguiente:

$$\psi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)}$$

Sin embargo, esta relación nos representa *una onda que se extiende con la misma amplitud hacia el infinito en dos direcciones*, hacia la derecha y hacia la izquierda. Y nosotros lo que queremos representar matemáticamente es algo conocido como un **paquete de onda** (*wave packet*) que no se extiende hasta el infinito en dos direcciones opuestas:



como correspondería a una partícula que es esencialmente una *onda de materia*. Esto lo podemos lograr si nos damos cuenta de que la adición de dos ondas de frecuencias diferentes produce un “batido” repetitivo cuya frecuencia de repetición dependerá de las frecuencias de las ondas originales:



En el diagrama de arriba sólo hemos agregados dos ondas con frecuencias ligeramente diferentes. Si vamos agregando una cantidad adicional de ondas cada “paquete de onda” se irá alejando más y más de sus paquetes de onda vecinos, hasta que en los extremos cercanos al infinito nuestro paquete de onda se encontrará prácticamente solo. Eventualmente, la suma se convierte en una integral representándonos a la partícula como un paquete de onda viajero. De este modo, la partícula libre, como fue concebida por Dirac, es el resultado de una superposición de un espectro infinito de frecuencias que por efectos de cancelación y adición adquieren una amplitud máxima precisamente en la misma partícula. Existe una teoría matemática para justificar esta representación de una partícula en el *dominio frecuencia* en lugar del *dominio tiempo*. Se llama **análisis de Fourier**, y en dicha rama de las matemáticas (que no es más que una extensión de las *series de Fourier* en donde las sumatorias de las series son reemplazadas por integrales mediante las *transformadas de Fourier*), se puede tomar una función que varía con el tiempo $f(t)$ y se puede encontrar su representación equivalente en el dominio frecuencia $g(\omega)$. Para una partícula libre caracterizada por un momentum preciso $p = \hbar k$ en donde k es el *número de onda* definido como $k = 2\pi/\lambda$ (inversamente proporcional a la longitud de onda), dicha partícula puede ser representada como el paquete de onda de una función- δ . Matemáticamente, para una partícula viajando a lo largo del eje- z , la representación es la siguiente:

$$\Psi(z,t) = \sqrt{2\pi} \int A(k) e^{-i(\omega t - kz)} dk$$

que en el caso que nos ocupa podemos escribir para cada una de las cuatro ecuaciones matriciales de Dirac como:

$$[\Psi_n(z,t)] = [A_n] e^{-i(\omega t - kz)} dk ;$$

$$[\Psi_n(z,t)] = [A_n] e^{ikz} e^{-iEt/\hbar} dk$$

Si sustituimos esta última expresión en la ecuación de Dirac para una partícula viajando a lo largo del eje-z tendremos entonces lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} E + mc^2 & 0 & chk & 0 \\ 0 & E + mc^2 & 0 & -chk \\ chk & 0 & E - mc^2 & 0 \\ 0 & -chk & 0 & E - mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = 0$$

Puesto que el vector columna de las amplitudes A_n no es igual al vector cero, el determinante de la matriz simétrica debe ser igual a cero. Obteniendo dicho determinante e igualándolo a cero tenemos entonces:

$$(E^2 - m^2c^4 - c^4h^2k^2)^2 = 0$$

y puesto que

$$p = hk,$$

esto nos da para la energía de la partícula:

$$E = \pm \{p^2c^2 + m^2c^4\}^{1/2} = E_{\pm}$$

A diferencia de otros problemas en la física clásica en donde descartamos mediante consideraciones lógicas una de las soluciones obtenidas tras la extracción de una raíz cuadrada con sus consecuentes dos signos, el positivo y el negativo, en este caso la raíz negativa nos da soluciones con significado físico. El signo negativo puede ser identificado con el electrón que posee una carga eléctrica negativa y el signo positivo puede ser identificado con el positrón que posee una carga eléctrica *positiva*. Siendo así, **la ecuación de onda relativista de Dirac predice la existencia del positrón**. Y no solo esto, *predice la existencia de la antimateria*.

Para una partícula confinada dentro de una barrera de potencial con paredes infinitamente altas (lo cual se puede tratar como un problema en una sola dimensión) separadas por una distancia L , no presenta mucha dificultad el determinar que la ecuación de onda relativista de Dirac predice niveles de energía proporcionados por la siguiente relación:

$$W = \pm \{m_0c^2 + h^2k^2\pi^2/2m_0L^2\}$$

Esta expresión difiere del resultado cuántico clásico (pre-relativista) por el término m_0c^2 que representa la masa en reposo de la partícula. Y predice niveles de energía iguales pero opuestos en signo para la partícula y su antipartícula.

Tras la ecuación de onda de Dirac, no tardaron en llegar otras ecuaciones tales como la **ecuación Klein-Gordon** que pasarían a formar el catálogo de conocimientos hoy conocido como la Mecánica Cuántica Relativista. Pero todo este material está basado, ultimadamente, en la unificación de la Mecánica Cuántica con la Teoría *Especial* de la Relatividad como lo

hemos visto aquí. La unificación con la Relatividad General es otro asunto que sigue pendiente de resolverse.

El mismo Einstein no pudo visualizar cómo se podría llevar a cabo esto, si es que se puede llevar a cabo. Y si se puede llevar a cabo ya sea con la introducción de nuevos conceptos o con la invención de nuevas herramientas matemáticas, se pueden esperar predicciones de efectos tan espectaculares como los desarrollos teóricos previos han logrado materializar.

PUBLICADO POR ARMANDO MARTINEZ

ANEXO 3. Sinopse de Métodos de Modelagem. Hestenes (2006).

MODELING METHOD Synopsis

The Modeling Method aims to correct many weaknesses of the traditional lecture-demonstration method, including the fragmentation of knowledge, student passivity, and the persistence of naive beliefs about the physical world.

What to teach: Model-centered instructional objectives

- To engage students in understanding the physical world by *constructing and using scientific models* to describe, to explain, to predict, to design and control physical phenomena.
- To provide students with *basic conceptual tools* for modeling physical objects and processes, especially mathematical, graphical and diagrammatic representations.
- To familiarize students with a small set of basic models as the *content core* of physics.
- To develop insight into the *structure* of scientific knowledge by examining how *models* fit into *theories*.
- To show how scientific knowledge is *validated* by engaging students in *evaluating* scientific models through comparison with empirical data.
- To develop skill in all aspects of modeling as the *procedural core* of scientific knowledge.

How to teach: Student-centered instructional design

- Instruction is organized into *modeling cycles* which engage students in all phases of model development, evaluation and application in concrete situations — thus promoting an integrated understanding of modeling processes and acquisition of coordinated modeling skills.
- The teacher sets the stage for student activities, typically with a demonstration and class discussion to establish common understanding of a question to be asked of nature. Then, in small groups, students *collaborate* in planning and conducting experiments to answer or clarify the question.
- Students are required to present and justify their conclusions in oral and/or written form, including a *formulation* of models for the phenomena in question and *evaluation* of the models by comparison with data.
- Technical terms and representational tools are introduced by the teacher as they are needed to sharpen models, facilitate modeling activities and improve the quality of discourse.
- The teacher is prepared with a definite *agenda* for student progress and *guides* student inquiry and discussion in that direction with "Socratic" questioning and remarks.
- The teacher is equipped with a *taxonomy* of typical student misconceptions to be addressed as students are induced to articulate, analyze and justify their personal beliefs.

BOX 2.