

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
**"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"**  
**CAMPUS DE SÃO JOÃO DA BOA VISTA**

**IGOR ALBIERO**

**Análise da eficiência da discretização  $h$  e  $p$  do método dos elementos finitos aplicados a estruturas aeroespaciais reticuladas**

São João da Boa Vista

2023

**Igor Albiero**

**Análise da eficiência da discretização  $h$  e  $p$  do método dos elementos finitos aplicados a estruturas aeroespaciais reticuladas**

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Engenharia Aeronáutica do Campus de São João da Boa Vista, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Engenharia Aeronáutica .

Orientador: Prof<sup>o</sup> Dr. Murilo Sartorato

São João da Boa Vista

2023

A335a            Albiero, Igor  
                    Análise da eficiência da discretização h e p do método  
dos elementos finitos aplicados a estruturas aeroespaciais  
reticuladas / Igor Albiero. -- São João da Boa Vista, 2023  
61 f. : il., tabs., fotos

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado -  
Engenharia Aeronáutica) - Universidade Estadual Paulista  
(Unesp), Faculdade de Engenharia, São João da Boa Vista  
Orientador: Murilo Sartorato

1. Análise de elementos finitos. 2. Engenharia  
aeroespacial. 3. Análise estrutural (Engenharia). I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da  
Faculdade de Engenharia, São João da Boa Vista. Dados fornecidos pelo  
autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE SÃO JOÃO DA BOA VISTA  
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA AERONÁUTICA**

**TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO**

**ANÁLISE DA EFICIÊNCIA DA DISCRETIZAÇÃO HP DO MÉTODO DOS  
ELEMENTOS FINITOS APLICADOS A ESTRUTURAS AEROESPACIAIS  
RETICULADAS**

Aluno: Igor Albiero  
Orientador: Prof. Dr. Murilo Sartorato

Banca Examinadora:

- Murilo Sartorato (Orientador)
- Carlos do Carmo Pagani Júnior (Examinador)
- David Fernando Castillo Zúñiga (Examinador)

A ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no prontuário do aluno (Expediente nº 004/2022)

São João da Boa Vista, 28 de fevereiro de 2023

## RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso tem como objetivo estudar a eficiência computacional das discretizações  $h$  e  $p$  no método dos elementos finitos aplicado a estruturas aeroespaciais reticuladas. Para isso foi selecionada uma estrutura desse tipo que foi simulada utilizando o método dos elementos finitos implementado utilizando a linguagem de programação MATLAB, a simulação da forma deformada foi repetido diversas vezes obtendo o tempo de processamento e aumentando a discretização a cada iteração, esse processo foi feito para a discretização  $h$  e para a discretização  $p$ . Após as simulações a discretização  $h$  se demonstrou mais eficiente em termos de eficiência computacional do que a discretização  $p$ .

**PALAVRAS-CHAVE:** Análise de elementos finitos. Engenharia aeroespacial. Análise estrutural (Engenharia).

## **ABSTRACT**

This course completion work aims to study the computational efficiency of  $h$  and  $p$  discretizations in the finite element method applied to lattice aerospace structures. For this, a structure of this type was selected, which was simulated using the finite element method implemented using the MATLAB programming language, the simulation of the deformed shape was repeated several times, obtaining the processing time and increasing the discretization at each iteration, this process was done for the  $h$  discretization and for the  $p$  discretization. After the simulations, the discretization  $h$  proved to be more efficient in terms of computational efficiency than the discretization  $p$ .

**KEYWORDS:** Finite element analysis. Aerospace engineering. Structural analysis (Engineering).

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Sistemas de coordenadas . . . . .	22
Figura 2	Tipos de nervuras . . . . .	38
Figura 3	Estrutura retícula utilizada . . . . .	41
Figura 4	Parâmetro $\psi$ para construção do reticulado . . . . .	41
Figura 5	Parâmetro h e parâmetro b para construção do reticulado . . . . .	42
Figura 6	Estrutura utilizada para validação . . . . .	44
Figura 7	Malha utilizada para validação no Ansys . . . . .	46
Figura 8	Força e condições de contorno no Ansys . . . . .	46
Figura 9	Fluxograma do script Discretizacao.m . . . . .	48
Figura 10	Discretização h . . . . .	49
Figura 11	Discretização p . . . . .	49
Figura 12	Comparação entre a forma deformada obtida pelo MEF e o formato original . . . . .	50
Figura 13	Comparação entre a forma deformada obtida pelo Ansys e o formato original . . . . .	51
Figura 14	Gráfico do tempo de processamento pelo erro máximo para discretização h . . . . .	52
Figura 15	Gráfico do numero de nós pelo erro máximo para discretização h . . . . .	52
Figura 16	Gráfico do numero de nós pelo tempo de processamento para discretização h . . . . .	53
Figura 17	Gráfico do tempo de processamento pelo erro máximo para discretização p . . . . .	54
Figura 18	Gráfico do numero de nós por elemento pelo erro máximo para discretização p . . . . .	54
Figura 19	Gráfico do numero de nós por elemento pelo tempo de processamento para discretização p . . . . .	55
Figura 20	Gráfico do número de nós na malha pelo tempo de processamento para os dois tipos de discretização . . . . .	56
Figura 21	Gráfico do numero de nós na malha pelo erro máximo para os dois tipos de discretização . . . . .	56
Figura 22	Gráfico do tempo de processamento pelo erro máximo para os dois tipos de discretização . . . . .	57
Figura 23	Comparação entre a forma original e deformada vista superior . . . . .	58
Figura 24	Comparação entre a forma original e deformada vista lateral . . . . .	58
Figura 25	Comparação entre a forma original e deformada vista isométrica . . . . .	59

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Constantes da fibra de carbono reforçada por plástico (CFRP). . . . .	42
Tabela 2 – Constantes para criar a malha utilizando a classe Malha.m. . . . .	43
Tabela 3 – Constantes para inicialização da classe MEF.m. . . . .	43
Tabela 4 – Constantes da seção transversal circular. . . . .	45
Tabela 5 – Constantes do aço inoxidável AISI 316 recozido. . . . .	45
Tabela 6 – Resultados da validação utilizando MEF.m. . . . .	50
Tabela 7 – Resultados da validação utilizando Ansys. . . . .	51
Tabela 8 – Resultados da validação utilizando Ansys. . . . .	51

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
UNESP	Universidade Estadual Paulista
MEF	Método dos Elementos Finitos
EDP	Equações Diferenciais Parciais

## LISTA DE SÍMBOLOS

$F$	Matriz de forças global
$K$	Matriz de rigidez global
$U$	Matriz de deslocamento global
$F_{x1}$	Força aplicada na direção do eixo x no primeiro nó da estrutura analisada
$F_{y1}$	Força aplicada na direção do eixo y no primeiro nó da estrutura analisada
$F_{z1}$	Força aplicada na direção do eixo z no primeiro nó da estrutura analisada
$M_{x1}$	Momento aplicado ao redor do eixo x no primeiro nó da estrutura analisada
$M_{y1}$	Momento aplicado ao redor do eixo y no primeiro nó da estrutura analisada
$M_{z1}$	Momento aplicado ao redor do eixo z no primeiro nó da estrutura analisada
$F_{xn}$	Força aplicada na direção do eixo x no enésimo nó da estrutura analisada
$F_{yn}$	Força aplicada na direção do eixo y no enésimo nó da estrutura analisada
$F_{zn}$	Força aplicada na direção do eixo z no enésimo nó da estrutura analisada
$M_{xn}$	Momento aplicado ao redor do eixo x no enésimo nó da estrutura analisada
$M_{yn}$	Momento aplicado ao redor do eixo y no enésimo nó da estrutura analisada
$M_{zn}$	Momento aplicado ao redor do eixo z no enésimo nó da estrutura analisada
$u_{x1}$	Deformação na direção do eixo x no primeiro nó da estrutura analisada
$v_{y1}$	Deformação na direção do eixo y no primeiro nó da estrutura analisada
$w_{z1}$	Deformação na direção do eixo z no primeiro nó da estrutura analisada
$\theta_{s1}$	Torção ao redor do eixo da viga do primeiro nó da estrutura analisada
$\theta_{t1}$	Informação para interpolação de plotagem do primeiro nó da estrutura analisada
$\theta_{r1}$	Informação para interpolação de plotagem do primeiro nó da estrutura analisada
$u_{xn}$	Deslocamento na direção do eixo x no enésimo nó da estrutura analisada
$v_{yn}$	Deslocamento na direção do eixo y no enésimo nó da estrutura analisada
$w_{zn}$	Deslocamento na direção do eixo z no enésimo nó da estrutura analisada
$\theta_{sn}$	Torção ao redor do eixo da viga do enésimo nó da estrutura analisada

$\theta_{tn}$	Informação para interpolação de plotagem do enésimo nó da estrutura analisada
$\theta_{rn}$	Informação para interpolação de plotagem do enésimo nó da estrutura analisada
$s$	Eixo alinhado ao elemento analisado
$r$	Eixo perpendicular ao eixo $s$ e ao eixo $z$
$t$	Eixo perpendicular ao eixo $s$ e ao eixo $r$
$K_l$	Matriz de rigidez local
$P$	Trabalho da força
$U_d$	Energia de deformação
$\varepsilon$	Matriz de deformação
$\sigma$	Matriz de tensões
$\Omega$	Volume de integração
$A$	Área de integração
$L$	Comprimento do elemento analisado
$\varepsilon_r$	Deformação na direção do eixo $r$
$\varepsilon_t$	Deformação na direção do eixo $t$
$\varepsilon_s$	Deformação na direção do eixo $s$
$\gamma_{rt}$	Deformação cisalhante no plano $rt$
$\gamma_{st}$	Deformação cisalhante no plano $st$
$\gamma_{rs}$	Deformação cisalhante no plano $rs$
$E_1$	Matriz das constantes de elasticidade do material
$\sigma_s$	Tensão na direção do eixo $s$
$\tau_{rt}$	Tensão cisalhante no plano $rt$
$\tau_{st}$	Tensão cisalhante no plano $st$
$\tau_{rs}$	Tensão cisalhante no plano $rs$
$E$	Módulo de elasticidade
$G$	Módulo de cisalhamento
$u$	Função responsável por obter o valor do deslocamento na direção $s$

$u_0$	Deslocamento na direção $s$
$v$	Função responsável por obter o valor do deslocamento na direção $r$
$w$	Função responsável por obter o valor do deslocamento na direção $t$
$v_0$	Deslocamento na direção $r$
$w_0$	Deslocamento na direção $t$
$\theta_s$	Função responsável por obter o valor da rotação ao redor do eixo $s$
$\theta_{s,0}$	Rotação ao redor do eixo $s$
$\theta_r$	Função responsável por obter o valor da rotação ao redor do eixo $r$
$\theta_t$	Função responsável por obter o valor da rotação ao redor do eixo $t$
$B_n$	Matriz da primeira derivada parcial de $u_0$ em $s$
$B_{br}$	Matriz da segunda derivada parcial de $v$ em $s$
$B_{bt}$	Matriz da segunda derivada parcial de $w$ em $s$
$B_s$	Matriz da segunda derivada parcial de $\theta_s$ em $s$
$Q_t$	Primeiro momento de área em relação a $t$
$Q_r$	Primeiro momento de área em relação a $r$
$I_{tt}$	Segundo momento de área ao redor de $t$
$I_{rr}$	Segundo momento de área ao redor de $r$
$I_{rt}$	Segundo momento de área cruzado
$J_1$	Momento polar de inercia
$\xi$	Variável que substitui $s$ para integração de -1 até 1
$J$	Jacobiano para mudança de variável de $s$ para $\xi$
$u_1$	Deslocamento na direção $s$ do primeiro nó do elemento
$u_2$	Deslocamento na direção $s$ do segundo nó do elemento
$\theta_{s,1}$	Torção ao redor de $s$ do primeiro nó do elemento
$\theta_{s,2}$	Torção ao redor de $s$ do segundo nó do elemento
$\phi_1$	Função de forma relacionada ao deslocamento $u_1$ na definição de $u_0$ e a torção $\theta_{s,1}$ na definição de $\theta_s$

$\phi_2$	Função de forma relacionada ao deslocamento $u_2$ na definição de $u_0$ e a torção $\theta_{s,2}$ na definição de $\theta_s$
$a_1$	Constante constituinte da função de forma $\phi_1$
$a_2$	Constante constituinte da função de forma $\phi_1$
$a_3$	Constante constituinte da função de forma $\phi_2$
$a_4$	Constante constituinte da função de forma $\phi_2$
$v_1$	Deslocamento na direção $r$ do primeiro nó do elemento
$v_2$	Deslocamento na direção $r$ do segundo nó do elemento
$\theta_{r,1}$	Torção ao redor de $r$ no primeiro nó do elemento
$\theta_{r,2}$	Torção ao redor de $r$ no segundo nó do elemento
$\varphi_1$	Função de forma relacionada ao deslocamento $v_1$ na definição de $v$
$\varphi_2$	Função de forma relacionada ao deslocamento $v_2$ na definição de $v$
$\varphi_3$	Função de forma relacionada a torção $\theta_{r,1}$ na definição de $v$
$\varphi_4$	Função de forma relacionada a torção $\theta_{r,2}$ na definição de $v$
$b_1$	Constante constituinte da função de forma $\varphi_1$
$b_2$	Constante constituinte da função de forma $\varphi_1$
$b_3$	Constante constituinte da função de forma $\varphi_1$
$b_4$	Constante constituinte da função de forma $\varphi_1$
$b_5$	Constante constituinte da função de forma $\varphi_2$
$b_6$	Constante constituinte da função de forma $\varphi_2$
$b_7$	Constante constituinte da função de forma $\varphi_2$
$b_8$	Constante constituinte da função de forma $\varphi_2$
$b_9$	Constante constituinte da função de forma $\varphi_3$
$b_{10}$	Constante constituinte da função de forma $\varphi_3$
$b_{11}$	Constante constituinte da função de forma $\varphi_3$
$b_{12}$	Constante constituinte da função de forma $\varphi_3$
$b_{13}$	Constante constituinte da função de forma $\varphi_4$

$b_{14}$	Constante constituinte da função de forma $\varphi_4$
$b_{15}$	Constante constituinte da função de forma $\varphi_4$
$b_{16}$	Constante constituinte da função de forma $\varphi_4$
$w_1$	Deslocamento na direção $t$ do primeiro nó do elemento
$w_2$	Deslocamento na direção $t$ do segundo nó do elemento
$\theta_{t,1}$	Torção ao redor de $t$ no primeiro nó do elemento
$\theta_{t,2}$	Torção ao redor de $t$ no segundo nó do elemento
$\psi_1$	Função de forma relacionada ao deslocamento $w_1$ na definição de $w$
$\psi_2$	Função de forma relacionada ao deslocamento $w_2$ na definição de $w$
$\psi_3$	Função de forma relacionada a torção $\theta_{t,1}$ na definição de $w$
$\psi_4$	Função de forma relacionada a torção $\theta_{t,2}$ na definição de $w$
$c_1$	Constante constituinte da função de forma $\psi_1$
$c_2$	Constante constituinte da função de forma $\psi_1$
$c_3$	Constante constituinte da função de forma $\psi_1$
$c_4$	Constante constituinte da função de forma $\psi_1$
$c_5$	Constante constituinte da função de forma $\psi_2$
$c_6$	Constante constituinte da função de forma $\psi_2$
$c_7$	Constante constituinte da função de forma $\psi_2$
$c_8$	Constante constituinte da função de forma $\psi_2$
$c_9$	Constante constituinte da função de forma $\psi_3$
$c_{10}$	Constante constituinte da função de forma $\psi_3$
$c_{11}$	Constante constituinte da função de forma $\psi_3$
$c_{12}$	Constante constituinte da função de forma $\psi_3$
$c_{13}$	Constante constituinte da função de forma $\psi_4$
$c_{14}$	Constante constituinte da função de forma $\psi_4$
$c_{15}$	Constante constituinte da função de forma $\psi_4$
$c_{16}$	Constante constituinte da função de forma $\psi_4$

$n_1$	Grau do polinômio que será integrado na quadratura de Gauss-Legendre
$g$	Número de pontos da integral quadratura de Gauss-Legendre
$w_i$	Peso para cada ponto para integral quadratura de Gauss-Legendre
$f$	Função que está sendo integrada pela quadratura de Gauss-Legendre
$t_i$	Pontos para integral quadratura de Gauss-Legendre
$r_{1,n}$	Vetor na direção de $s$ normalizado
$r_{2,n}$	Vetor na direção de $r$ normalizado
$r_{3,n}$	Vetor na direção de $t$ normalizado
$x_1$	Posição $x$ do primeiro nó do elemento
$y_1$	Posição $y$ do primeiro nó do elemento
$z_1$	Posição $z$ do primeiro nó do elemento
$x_2$	Posição $x$ do segundo nó do elemento
$y_2$	Posição $y$ do segundo nó do elemento
$z_2$	Posição $z$ do segundo nó do elemento
$r_1$	Vetor na direção de $s$
$r_2$	Vetor na direção de $r$
$r_3$	Vetor na direção de $t$
$R$	Matriz de rotação com base em dois nós
$R_{K_l}$	Matriz de rotação para rotacionar $K_l$
$K_g$	Matriz de rigidez local rotacionada para o sistema de coordenadas globais
$A_1$	Submatriz de $K_g$ que depende apenas do nó 1
$B_1$	Submatriz de $K_g$ que depende apenas do nó 2
$C_1$	Submatriz de $K_g$ que depende apenas do nó 3
$D_1$	Submatriz de $K_g$ que depende apenas do nó 4
$u_n$	Deslocamento na direção $s$ do $n$ ésimo nó do elemento
$v_n$	Deslocamento na direção $r$ do $n$ ésimo nó do elemento
$\theta_{r,n}$	Torção ao redor de $r$ no $n$ ésimo nó do elemento

$w_n$	Deslocamento na direção $t$ do $n$ ésimo nó do elemento
$\theta_{t,n}$	Torção ao redor de $t$ no $n$ ésimo nó do elemento
$\theta_{s,n}$	Torção ao redor de $s$ no $n$ ésimo nó do elemento
$n$	Número de nós por elemento
$\phi_n$	Função de forma relacionada ao deslocamento $u_n$ na definição de $u_0$ e a torção $\theta_{s,n}$ na definição de $\theta_s$
$\varphi_n$	Função de forma relacionada ao deslocamento $v_n$ na definição de $v$
$\varphi_{2n}$	Função de forma relacionada a torção $\theta_{r,n}$ na definição de $v$
$\psi_n$	Função de forma relacionada ao deslocamento $w_n$ na definição de $w$
$\psi_{2n}$	Função de forma relacionada a torção $\theta_{t,n}$ na definição de $w$
$\alpha$	Ângulo entre a projeção das nervuras helicoidais e o raio da base da estrutura analisada.
$h_1$	Altura da base da estrutura analisada.
$h_2$	Altura do topo da estrutura analisada.
$r_1$	Raio da base da estrutura analisada.
$r_2$	Raio do topo da estrutura analisada.
$\theta_{dd}$	distancia angular na base entre as nervuras helicoidais com $\alpha > 0$ estrutura analisada.
$\theta_{de}$	distancia angular na base entre as nervuras helicoidais com $\alpha < 0$ estrutura analisada.
$\theta_{dd_0}$	posição angular inicial na base entre as nervuras helicoidais com $\alpha > 0$ estrutura analisada.
$\theta_{de_0}$	posição angular inicial na base entre as nervuras helicoidais com $\alpha < 0$ estrutura analisada.
$\alpha_{dd}$	Ângulo $\alpha$ para conjunto de nervuras no sentido anti-horário, considerando como ponto de partida a base da estrutura.
$\alpha_{de}$	Ângulo $\alpha$ para conjunto de nervuras no sentido horário, considerando como ponto de partida a base da estrutura.
$n_p$	Número de subdivisões por "macro elemento"
$x_n$	Coordenadas x no espaço

$x_{n,p}$	Coordenadas x no plano xy
$x_n$	Coordenadas y no espaço
$x_{n,p}$	Coordenadas y no plano xy
$z_n$	Coordenadas z no espaço
$\phi_i$	Função de forma relacionada ao deslocamento $u_i$ na definição de $u_0$ e a torção $\theta_{s,i}$ na definição de $\theta_s$ , sendo $i$ um nó qualquer.
$\varphi_i$	Função de forma relacionada ao deslocamento $v_i$ ou a torção $\theta_{r,i}$ na definição de $v$ .
$\psi_i$	Função de forma relacionada ao deslocamento $w_i$ ou a torção $\theta_{t,i}$ na definição de $w$ .
$E_x$	Módulo de elasticidade na direção do eixo principal da viga
$G_{xy}$	Módulo de cisalhamento no plano xy da viga
$\psi$	Ângulo entre uma nervura e a imagem do raio da base no tronco de cone
$e$	Vetor paralelo a imagem do raio da base no tronco de cone
$m$	Vetor paralelo a nervura

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>18</b>
1.1	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	18
1.2	ESTRUTURAS AEROESPACIAIS RETICULADAS	18
1.3	OBJETIVO	19
<b>1.3.1</b>	<b>Objetivo Geral</b>	<b>19</b>
<b>1.3.2</b>	<b>Objetivos Específicos</b>	<b>19</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>20</b>
2.1	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	20
<b>2.1.1</b>	<b>Matriz de Força</b>	<b>20</b>
<b>2.1.2</b>	<b>Matriz de Deslocamento</b>	<b>21</b>
<b>2.1.3</b>	<b>Matriz de Rigidez</b>	<b>21</b>
<b>2.1.4</b>	<b>Sistema de coordenadas</b>	<b>21</b>
<b>2.1.5</b>	<b>Matriz de rigidez local para vigas torcionais com 2 nós por elemento</b>	<b>22</b>
<b>2.1.6</b>	<b>Matriz de rigidez local para vigas torcionais com qualquer numero de nós por elemento</b>	<b>33</b>
<b>2.1.7</b>	<b>Condições de contorno</b>	<b>35</b>
<b>2.1.8</b>	<b>Discretização</b>	<b>36</b>
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>37</b>
3.1	GERAÇÃO DE MALHAS	37
3.2	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	39
3.3	ESTRUTURA ANALISADA	41
3.4	VALIDAÇÃO	44
<b>3.4.1</b>	<b>Método dos elementos finitos</b>	<b>45</b>
<b>3.4.2</b>	<b>Ansys</b>	<b>46</b>
3.5	DISCRETIZAÇÃO	47
<b>3.5.1</b>	<b>Erro</b>	<b>48</b>
<b>3.5.2</b>	<b>Discretização h</b>	<b>49</b>
<b>3.5.3</b>	<b>Discretização p</b>	<b>49</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b>	<b>50</b>
4.1	VALIDAÇÃO	50
4.2	DISCRETIZAÇÃO H	52
4.3	DISCRETIZAÇÃO P	54
4.4	COMPARAÇÃO ENTRE A DISCRETIZAÇÃO H E A DISCRETIZAÇÃO P	55
4.5	ESTRUTURA DEFORMADA	57

<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>60</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>61</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

A análise estrutural tem como objetivo analisar o comportamento de estruturas quando submetidas a certas condições de contorno e forças. Isso pode ser feito de forma analítica ou numérica.

Uma das principais ferramentas para a análise estrutural numérica é o MEF que é um método de solução de EDP e portanto pode ser utilizado para outros tipos de análises e soluções além da análise estrutural.

O MEF subdivide o espaço de solução em um número finito de elementos o que resulta em um sistema de equações algébricas.

O MEF se originou no início da década de 1940. Em 1941 o engenheiro estrutural A. Hrennikof publicou o artigo "Solution of Problems of Elasticity by the Framework Method". Esse artigo levou ao nascimento do MEF, nele A. Hrennikof discretizou o domínio em uma malha de treliças (LIU; LI; PARK, 2022).

Em 1943 R. Courant publicou um artigo no qual propôs um tratamento numérico usando um método variacional para resolver EDPs de segunda ordem que surge do problema de torção de um cilindro de Saint-Venant. Após isso vários outros trabalhos de discretização utilizando formulação variacional foram publicados (COURANT, 1943), (STEIN, 2014) e (LIU; LI; PARK, 2022).

No início da década de 1950 vários engenheiros e acadêmicos passaram a utilizar a abordagem de formulação variacional para resolver problemas de engenharia reais, principalmente em engenharia aeronáutica e civil (LIU; LI; PARK, 2022).

Em paralelo Argyris e M. J. Turner desenvolveram a primeira forma do MEF, que na época foi chamado de Método da Matriz de Rigidez (LIU; LI; PARK, 2022).

Em 1960 R.W. Clough chamou esse método pela primeira vez de Método dos Elementos Finitos. Após isso diversas formulações de MEF foram criadas e com o aumento do poder computacional o MEF passou a ser utilizado amplamente por engenheiros e acadêmicos (LIU; LI; PARK, 2022).

## 1.2 ESTRUTURAS AEROESPACIAIS RETICULADAS

Estruturas reticuladas são estruturas constituídas por barras que são um tipo de componente estrutural caracterizado por possuírem uma direção predominante em relação as demais direções. As barras são conectadas de forma discreta a outras barras .

Estruturas reticuladas normalmente são mais leves quando comparadas com estruturas de outros tipos com propriedades mecânicas semelhantes. Por isso estruturas reticulada são amplamente utilizadas por diversas áreas da engenharia, especialmente áreas como aeronáutica e aeroespacial que precisam minimizar o peso das estruturas.

O setor aeroespacial possui grande interesse em estruturas reticuladas desde o início da exploração espacial, sendo um dos primeiros usos registrados como um isogrid na década de 1970 feito de alumínio

que possuía características isotrópicas facilitando os cálculos, foi utilizado como inter-estagio do veículo lançador Delta dos EUA (HUYBRECHTS; HAHN; MEINK, 1999).

Com o desenvolvimento de tecnologias estruturais o isogrid passou a ser muito pesado e de difícil construção se comparado as demais estruturas da época, por isso muito pouco dessas estruturas foram utilizadas até a década de 1990, quando foi possível construir as primeiras estruturas reticuladas de compósitos, fazendo com que o peso e a resistência se tornassem viáveis para uso (HUYBRECHTS; HAHN; MEINK, 1999).

Após o retorno das estruturas reticuladas no setor aeroespacial, essas estruturas passaram a ser utilizadas com o objetivo de redução de peso mantendo boas propriedades mecânicas se comparada com os demais tipos de estruturas (HUYBRECHTS; HAHN; MEINK, 1999).

As estruturas reticuladas são principalmente utilizadas como adaptadores para a conexão do payload e como inter-estagio.

### 1.3 OBJETIVO

#### 1.3.1 Objetivo Geral

O objetivo geral do trabalho consiste na comparação da eficiência da discretização  $h$  e da discretização  $p$  no MEF finitos clássico aplicado em estruturas aeroespaciais reticuladas.

#### 1.3.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos são:

1. Selecionar estruturas aeroespaciais reticuladas como estudos de caso.
2. Implementar um gerador de malhas compatíveis com elementos bidimensionais para as estruturas selecionadas.
3. Implementar uma formulação clássica de elementos finitos de viga com discretização  $h$  e discretização  $p$
4. Resolver problemas estáticos na estrutura selecionada
5. Comparar os resultados obtidos por ambos os métodos em relação a eficiência computacional.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O MEF para estruturas trata cada elemento como uma mola tridimensional na qual as forças somente podem ser aplicadas nas pontas em qualquer direção. O comportamento de uma mola tridimensional pode ser descrito pela equação de Hooke generalizada (1) como descrito em (TURNER et al., 1956).

$$F = K \cdot U \quad (1)$$

A equação 1 também é responsável por descrever o comportamento do objeto analisado pelo MEF, utilizando as respectivas matrizes na forma global, criadas a partir da combinação das matrizes locais.

Cada nó possui seis graus de liberdade sendo 3 graus de deslocamento e 3 graus de rotação.

#### 2.1.1 Matriz de Força

A matriz de força é utilizada diretamente na forma global, sendo uma matriz coluna com o numero de linhas igual ao numero de graus de liberdade vezes o numero de nós do objeto completo. A matriz de força é descrita pela equação 2.

$$F = \begin{pmatrix} F_{x_1} \\ F_{y_1} \\ F_{z_1} \\ M_{x_1} \\ M_{z_1} \\ M_{y_1} \\ \vdots \\ F_{x_n} \\ F_{y_n} \\ F_{z_n} \\ M_{x_n} \\ M_{z_n} \\ M_{y_n} \end{pmatrix} \quad (2)$$

### 2.1.2 Matriz de Deslocamento

Da mesma forma que a matriz de força, a matriz de deslocamento é utilizada diretamente na forma global, sendo uma matriz coluna com o numero de linhas igual ao numero de graus de liberdade vezes o numero de nós do objeto completo. A matriz de deslocamento é descrita pela equação 3.

$$u = \begin{pmatrix} u_{x_1} \\ v_{y_1} \\ w_{z_1} \\ \theta_{s_1} \\ \theta_{t_1} \\ \theta_{r_1} \\ \vdots \\ u_{x_n} \\ v_{y_n} \\ w_{z_n} \\ \theta_{s_n} \\ \theta_{t_n} \\ \theta_{r_n} \end{pmatrix} \quad (3)$$

### 2.1.3 Matriz de Rigidez

A matriz de rigidez é uma matriz quadrada com o número de linhas igual ao numero de graus de liberdade vezes o numero de nós do objeto completo e o número de colunas igual ao numero de linhas por ser uma matriz quadrada. Essa matriz é mais complexa do que a matriz de forças e a matriz de deformação, sendo ela a responsável por determinar como será feito o MEF. A matriz de rigidez deve levar em conta a rotação de todos os elementos, por isso são utilizadas matrizes locais que posteriormente serão rotacionadas para montarem a matriz de rigidez global. As matrizes de rigidez locais podem ser definidas de diversas maneiras, esse trabalho utilizará apenas duas maneiras de defini-la, sendo elas:

- Matriz de rigidez local para vigas torcionais com 2 nós em cada elemento
- Matriz de rigidez local para vigas torcionais com qualquer numero de nós em cada elemento

Com a matriz de rigidez global definida e a matriz de forças global é possível obter a matriz de deformações através da solução da equação 1.

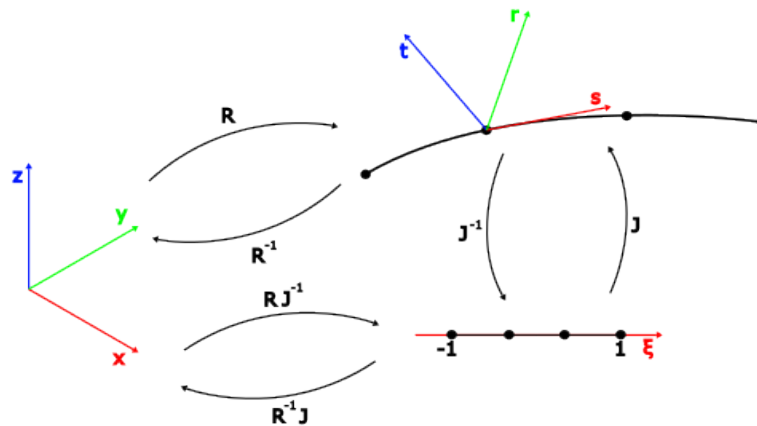
### 2.1.4 Sistema de coordenadas

Para calcular a matriz de rigidez local, será utilizado um sistema de coordenadas locais, que é posicionado de forma que o elemento se encontre alinhado com o eixo  $s$ , e a origem se encontre em um dos nós do elemento.

Além do sistema de coordenadas locais, será utilizado o sistema de coordenadas isoparamétricas.

A figura Figura 1, mostra como esses sistemas de coordenadas se relacionam.

Figura 1 – Sistemas de coordenadas



Fonte: Elaborada pelo autor

### 2.1.5 Matriz de rigidez local para vigas torcionais com 2 nós por elemento

A matriz de rigidez local é montada para cada elemento no sistema de coordenadas locais.

A matriz de rigidez local  $K_l$ , pode ser obtida a partir do variacional do trabalho que é dado pela equação 4.

$$\delta P = -\delta U F \quad (4)$$

Substituído a equação 1 na equação 4, obtém-se a equação 5.

$$\delta P = -\delta U K_l U \quad (5)$$

Portanto para determinar a matriz de rigidez local deve-se determinar  $\delta P$ , que pode ser determinado a partir da relação com o variacional de energia de deformação descrita na equação 6.

$$\delta U_d + \delta P = 0 \quad (6)$$

Com isso é necessário determinar  $\delta U_d$ , que pode ser descrito pela equação 7 como descrito em (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000).

$$\delta U_d = \int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \sigma d\Omega \quad (7)$$

A equação 7 pode ser reescrita considerando a equação 8, como demonstrado na equação 9.

$$d\Omega = dr dt ds = dA ds \quad (8)$$

$$\delta U_d = \int_0^L \int_A \delta \varepsilon^T \sigma dA ds \quad (9)$$

O termo  $\varepsilon$  pode ser reescrito utilizando a equação 10 considerando que não há variação na área da seção transversal do elemento e portanto  $\varepsilon_r = \varepsilon_t = 0$ , sendo  $\varepsilon$  o vetor de deformação na representação de Voigt.

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \gamma_{rt} \\ \gamma_{st} \\ \gamma_{rs} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

O termo  $\sigma$  pode ser reescrito em função de  $\varepsilon$  utilizando a equação 11.

$$\sigma = E_1 \varepsilon \quad (11)$$

Com isso o termo  $\sigma$  pode ser expandida para equação 12, considerando material isotrópico, sendo  $\sigma$  o vetor de tenções na representação de Voigt.

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_s \\ \tau_{rt} \\ \tau_{st} \\ \tau_{rs} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \gamma_{rt} \\ \gamma_{st} \\ \gamma_{rs} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E\varepsilon_s \\ G\gamma_{rt} \\ G\gamma_{st} \\ G\gamma_{rs} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Substituindo as equações 10 e 12 na equação 9, obtém-se a equação 13.

$$\begin{aligned} \delta U_d &= \int_0^L \int_A \begin{bmatrix} \delta\varepsilon_s & \delta\gamma_{rt} & \delta\gamma_{st} & \delta\gamma_{rs} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E\varepsilon_s \\ G\gamma_{rt} \\ G\gamma_{st} \\ G\gamma_{rs} \end{Bmatrix} dA ds \\ &= \int_0^L \int_A (\delta\varepsilon_s^T E\varepsilon_s + \delta\gamma_{rt}^T G\gamma_{rt} + \delta\gamma_{st}^T G\gamma_{st} + \delta\gamma_{rs}^T G\gamma_{rs}) dA ds \end{aligned} \quad (13)$$

Considerando uma viga de Euler-Bernoulli torsional tem-se as equações 14, 15, 16 , 17 e considerando a torção de Saint-Venant tem-se as equações 18, 19.

$$u = u_0 - r \frac{\partial v}{\partial s} - t \frac{\partial w}{\partial s} \quad (14)$$

$$v = v_0 \quad (15)$$

$$w = w_0 \quad (16)$$

$$\theta_s = \theta_{s,0} \quad (17)$$

$$\theta_r = \frac{\partial v}{\partial s} \quad (18)$$

$$\theta_t = -\frac{\partial w}{\partial s} \quad (19)$$

Sabendo que  $\varepsilon_s$ ,  $\gamma_{rt}$ ,  $\gamma_{st}$  e  $\gamma_{rs}$  são respectivamente dados pelas equações 20, 21, 22 e 23.

$$\varepsilon_s = \frac{\partial u}{\partial s} U = \left( \frac{\partial u_0}{\partial s} - r \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - t \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) U \quad (20)$$

$$\gamma_{rt} = \left( \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial s} \right) U = \frac{\partial \theta_s}{\partial s} U \quad (21)$$

$$\gamma_{st} = \left( \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{\partial w}{\partial s} \right) U = 0 \quad (22)$$

$$\gamma_{rs} = \left( \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial v}{\partial s} \right) U = 0 \quad (23)$$

Para facilitar a escrita será considerado as equações 24, 25, 26 e 27.

$$B_n = \frac{\partial u_0}{\partial s} \quad (24)$$

$$B_{br} = \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \quad (25)$$

$$B_{bt} = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \quad (26)$$

$$B_s = \frac{\partial \theta_s}{\partial s} \quad (27)$$

Reescrevendo as equações 20 e 21, tem-se as equações 28 e 29.

$$\varepsilon_s = (B_n - rB_{br} - tB_{bt}) U \quad (28)$$

$$\gamma_{rt} = B_s U \quad (29)$$

Substituindo as equações 28, 29, 22 e 23 na equação 13 obtém-se a equação 30.

$$\begin{aligned} \delta U_d = \delta U E U \int_0^L \int_A [B_n^T B_n - r(B_n^T B_{br} + B_n B_{br}^T) - t(B_n^T B_{bt} + B_n B_{bt}^T) + \\ + rt(B_{br}^T B_{bt} + B_{br} B_{bt}^T) + r^2 B_{br}^T B_{br} + t^2 B_{bt}^T B_{bt}] dA ds + \\ + \delta U G U \int_0^L \int_A (J_1 B_s^T B_s) dA ds \end{aligned} \quad (30)$$

Sabendo que as equações dos primeiros momentos de área ( $Q_t$ ,  $Q_r$ ) são 31 e 32 respectivamente, sabendo também que as equações dos segundos momentos de área ( $I_{tt}$ ,  $I_{rr}$ ) são 33 e 34 respectivamente e sabendo que o segundo momento de área cruzado ( $I_{rt}$ ) é dado pela equação 35, as equações dos momentos de área foram obtidos de (HIBBELER, 2013).

$$Q_t = \int_A r dA \quad (31)$$

$$Q_r = \int_A t dA \quad (32)$$

$$I_{tt} = \int_A r^2 dA \quad (33)$$

$$I_{rr} = \int_A t^2 dA \quad (34)$$

$$I_{rt} = \int_A rt dA \quad (35)$$

A equação 30 pode ser reescrita substituindo as equações 31, 32, 35, 33 e 34, com isso obtém-se a equação .

$$\begin{aligned} \delta U_d = \delta U E U \int_0^L [AB_n^T B_n - Q_t(B_n^T B_{br} + B_n B_{br}^T) - Q_r(B_n^T B_{bt} + B_n B_{bt}^T) + \\ + I_{rt}(B_{br}^T B_{bt} + B_{br} B_{bt}^T) + I_{tt} B_{br}^T B_{br} + I_{rr} B_{bt}^T B_{bt}] ds + \\ + \delta U G U \int_0^L (AJ_1 B_s^T B_s) ds \end{aligned} \quad (36)$$

Considerando que na geometria estudada a secção transversal possui simetria, então  $Q_t = Q_r = I_{rt} = 0$ , com isso a equação 36 pode ser reescrita como a equação 37.

$$\delta U_d = \delta U E U \int_0^L (AB_n^T B_n + I_{tt} B_{br}^T B_{br} + I_{rr} B_{bt}^T B_{bt}) ds + \delta U G U \int_0^L (J_1 B_s^T B_s) ds \quad (37)$$

Substituindo a equação 37 e a equação 5 na equação 6 obtém-se a equação 38.

$$\delta U E U \int_0^L [AB_n^T B_n + I_{tt} B_{br}^T B_{br} + I_{rr} B_{bt}^T B_{bt}] ds + \delta U G U \int_0^L (J_1 B_s^T B_s) ds - \delta U K_l U = 0 \quad (38)$$

Reescrevendo a equação 38 obtém-se a equação 39.

$$K_l = E \int_0^L (AB_n^T B_n + I_{tt} B_{br}^T B_{br} + I_{rr} B_{bt}^T B_{bt}) ds + G \int_0^L (J_1 B_s^T B_s) ds \quad (39)$$

Com isso para obter a matriz de rigidez local é necessário obter as matrizes  $B_n$ ,  $B_{br}$ ,  $B_{bt}$  e  $B_s$  e integra-las em função de  $s$ . Para fazer a integração será utilizado o método numérico quadratura de Gauss, por isso essas matrizes serão determinadas diretamente no intervalo de -1 até 1, substituindo a variável  $s$  por  $\xi$ , como exige o método numérico por isso a equação 39 pode ser reescrita como 40

$$K_l = E \int_{-1}^1 (AB_n^T B_n + I_{tt} B_{br}^T B_{br} + I_{rr} B_{bt}^T B_{bt}) J d\xi + G \int_{-1}^1 (J_1 B_s^T B_s) J d\xi \quad (40)$$

A equação que relaciona  $s$  com  $\xi$  é a equação 41, descrita em (CUNHA, 2003).

$$s(\xi) = \frac{L + L\xi}{2} \quad (41)$$

Sendo o jacobiano ( $J$ ) dado pela equação 42, descrito em (CUNHA, 2003).

$$J = \frac{\partial s}{\partial \xi} = \frac{b - a}{2} \quad (42)$$

Para determinar a matriz  $B_n$  é necessário obter  $u_0(\xi)$ . Para determinar  $u_0(\xi)$  serão utilizadas funções de forma que são funções definidas arbitrariamente de maneira que a função  $u_0(\xi)$  nos nós do elemento seja igual ao valor de deformação real nos nós. A principio será utilizada a função de forma mais simples possível para determinar  $u_0(\xi)$ , que são dois polinômios de grau um  $\phi_1(\xi)$  e  $\phi_2(\xi)$ . Com isso  $u_0(\xi)$  é definido pela equação 43.

$$u_0(\xi) = \phi_1(\xi) u_1 + \phi_2(\xi) u_2 \quad (43)$$

Onde  $\phi_1(\xi)$  e  $\phi_2(\xi)$  são determinados pelas equações 44 e 45.

$$\phi_1(\xi) = a_1 \cdot \xi + a_2 \quad (44)$$

$$\phi_2(\xi) = a_3 \cdot \xi + a_4 \quad (45)$$

Sabendo que  $u_1$  e  $u_2$  são as deformações na direção  $s$  nos nós, sendo o nó 1 posicionado em  $\xi = -1$  e o nó 2 posicionado em  $\xi = 1$ , então é possível obter um sistema de equações 46 para determinar as variáveis  $a_1$  e  $a_2$  da função de forma 44 e um sistema de equações 47 para determinar as variáveis  $a_3$  e  $a_4$  da função de forma 45.

$$\begin{cases} -a_1 + a_2 = 1 \\ a_1 + a_2 = 0 \end{cases} \quad (46)$$

$$\begin{cases} -a_3 + a_4 = 0 \\ a_3 + a_4 = 1 \end{cases} \quad (47)$$

Resolvendo os sistemas de equações é possível obter  $\phi_1$  e  $\phi_2$  e portanto é possível determinar  $u_0(\xi)$ . Com  $u_0(\xi)$  definido é possível obter  $\frac{\partial u_0(\xi)}{\partial s}$ , como demonstrado na equação 48.

Com  $u_0(\xi)$  definido é possível obter  $\frac{\partial u_0(\xi)}{\partial s}$ , como demonstrado na equação 48.

$$\frac{\partial u_0(\xi)}{\partial s} = \frac{\partial u_0(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial s} = \left( \frac{\partial \phi_1(\xi)}{\partial \xi} u_1 + \frac{\partial \phi_2(\xi)}{\partial \xi} u_2 \right) \frac{\partial \xi}{\partial s} \quad (48)$$

Na equação 48 o termo  $\frac{\partial \xi}{\partial s}$  é igual ao jacobiano inverso ( $J^{-1}$ ), podendo ser reescrito como a equação 49.

$$\frac{\partial u_0(\xi)}{\partial s} = \left( \frac{\partial \phi_1(\xi)}{\partial \xi} u_1 + \frac{\partial \phi_2(\xi)}{\partial \xi} u_2 \right) J^{-1} \quad (49)$$

Com isso é possível determinar  $B_n$  na forma matricial, como demonstrado na equação 50.

$$B_n = \left[ \begin{array}{cccccccccccc} \frac{\partial \phi_1(\xi)}{\partial \xi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \phi_2(\xi)}{\partial \xi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] J^{-1} \quad (50)$$

Para determinar a matriz  $B_{br}$  é necessário obter  $v(\xi)$ . Para isso foi utilizado um método análogo ao utilizado para determinar  $u_0(\xi)$ . No entanto  $B_{br}$  é necessário obter  $\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}$  que obriga as funções de forma a serem no mínimo um polinômio de grau dois criando a necessidade de no mínimo três funções de forma para que o sistema de equações seja determinado. Além dessa diferença, a deformação  $v(\xi)$  depende de  $v_1$  e  $v_2$  de maneira análoga a  $u_0(\xi)$ , mas também depende do ângulo de torção  $\theta_{r_1}$  e  $\theta_{r_2}$  devido a equação 18 e por isso necessita de quatro funções de forma, dessa maneira não será possível utilizar polinômios de grau dois sendo necessário utilizar polinômios de grau três para determinar as funções de forma.

As quatro funções de forma serão  $\varphi_1(\xi)$ ,  $\varphi_2(\xi)$ ,  $\varphi_3(\xi)$  e  $\varphi_4(\xi)$ . Com isso  $v(\xi)$  é definido pela equação 51.

$$v(\xi) = \varphi_1(\xi) v_1 + \varphi_2(\xi) v_2 + \varphi_3(\xi) \theta_{r_1} + \varphi_4(\xi) \theta_{r_2} \quad (51)$$

Onde  $\varphi_1(\xi)$ ,  $\varphi_2(\xi)$ ,  $\varphi_3(\xi)$  e  $\varphi_4(\xi)$  são determinados pelas equações 52, 53, 54 e 55.

$$\varphi_1(\xi) = b_1 \cdot \xi^3 + b_2 \cdot \xi^2 + b_3 \cdot \xi + b_4 \quad (52)$$

$$\varphi_2(\xi) = b_5 \cdot \xi^3 + b_6 \cdot \xi^2 + b_7 \cdot \xi + b_8 \quad (53)$$

$$\varphi_3(\xi) = b_9 \cdot \xi^3 + b_{10} \cdot \xi^2 + b_{11} \cdot \xi + b_{12} \quad (54)$$

$$\varphi_4(\xi) = b_{13} \cdot \xi^3 + b_{14} \cdot \xi^2 + b_{15} \cdot \xi + b_{16} \quad (55)$$

Sabendo que  $v_1$  e  $v_2$  são as deformações na direção  $s$  nos nós sendo o nó 1 posicionado em  $\xi = -1$  e o nó 2 posicionado em  $\xi = 1$ , com isso é possível obter o sistema de equações análogo a 46, com apenas duas equações sendo elas  $\varphi_1(-1) = 1$  e  $\varphi_1(1) = 0$ , levando em conta a equação 18, sabendo que  $\theta_{r_1}$  e  $\theta_{r_2}$  são as deformações torcionais nos nós, é possível obter mais duas equações, sendo elas  $\frac{d\varphi_1(-1)}{ds} = 0$  e  $\frac{d\varphi_1(1)}{ds} = 0$ , no entanto a função de forma está escrita em função de  $\xi$ , por isso é necessário reescrever essas duas equações como demonstrado nas equações 56 e 57, com isso é possível obter o sistema de equações possível e determinado 58 para determinar as variáveis  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  e  $b_4$  da função de forma 52, de maneira análoga é possível obter os sistemas de equações 59, 60 e 61 apenas modificando as condições de contorno para determinar as demais variáveis das funções de forma 53, 54 e 55.

$$\frac{\partial \varphi_1(-1)}{\partial s} = \frac{\partial \varphi_1(-1)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi_1(-1)}{\partial \xi} J = 0 \quad (56)$$

$$\frac{\partial \varphi_1(1)}{\partial s} = \frac{\partial \varphi_1(1)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi_1(1)}{\partial \xi} J = 0 \quad (57)$$

$$\begin{cases} -b_1 + b_2 - b_3 + b_4 = 1 \\ b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 0 \\ 3b_1 - 2b_2 + b_3 = 0 \\ 3b_1 + 2b_2 + b_3 = 0 \end{cases} \quad (58)$$

$$\begin{cases} -b_5 + b_6 - b_7 + b_8 = 0 \\ b_5 + b_6 + b_7 + b_8 = 1 \\ 3b_5 - 2b_6 + b_7 = 0 \\ 3b_5 + 2b_6 + b_7 = 0 \end{cases} \quad (59)$$

$$\begin{cases} -b_9 + b_{10} - b_{11} + b_{12} = 0 \\ b_9 + b_{10} + b_{11} + b_{12} = 0 \\ 3b_9 - 2b_{10} + b_{11} = J^{-1} \\ 3b_9 + 2b_{10} + b_{11} = 0 \end{cases} \quad (60)$$

$$\begin{cases} -b_{13} + b_{14} - b_{15} + b_{16} = 0 \\ b_{13} + b_{14} + b_{15} + b_{16} = 0 \\ 3b_{13} - 2b_{14} + b_{15} = 0 \\ 3b_{13} + 2b_{14} + b_{15} = J^{-1} \end{cases} \quad (61)$$

Resolvendo os sistemas de equações é possível obter  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  e  $\varphi_4$ , portanto é possível determinar  $v(\xi)$ . Com  $v(\xi)$  definido é possível obter  $\frac{\partial^2 v(\xi)}{\partial s^2}$ , como demonstrado na equação 62.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v(\xi)}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial v(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial s} \right) = \frac{\partial^2 v(\xi)}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial s} \right)^2 = \\ &= \left( \frac{\partial^2 \varphi_1(\xi)}{\partial \xi^2} v_1 + \frac{\partial^2 \varphi_2(\xi)}{\partial \xi^2} v_2 + \frac{\partial^2 \varphi_3(\xi)}{\partial \xi^2} \theta_{r_1} + \frac{\partial^2 \varphi_4(\xi)}{\partial \xi^2} \theta_{r_2} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial s} \right)^2 \end{aligned} \quad (62)$$

Na equação 62 o termo  $\frac{\partial \xi}{\partial s}$  é igual ao jacobiano inverso ( $J^{-1}$ ), podendo ser reescrito como a equação 63.

$$\frac{\partial^2 v(\xi)}{\partial s^2} = \left( \frac{\partial^2 \varphi_1(\xi)}{\partial \xi^2} v_1 + \frac{\partial^2 \varphi_2(\xi)}{\partial \xi^2} v_2 + \frac{\partial^2 \varphi_3(\xi)}{\partial \xi^2} \theta_{r_1} + \frac{\partial^2 \varphi_4(\xi)}{\partial \xi^2} \theta_{r_2} \right) (J^{-1})^2 \quad (63)$$

Com isso é possível determinar  $B_{br}$  na forma matricial, como demonstrado na equação 64.

$$B_{br} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial^2 \varphi_1(\xi)}{\partial \xi^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 \varphi_2(\xi)}{\partial \xi^2} & 0 & \frac{\partial^2 \varphi_3(\xi)}{\partial \xi^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 \varphi_4(\xi)}{\partial \xi^2} \end{bmatrix} (J^{-1})^2 \quad (64)$$

Para determinar a matriz  $B_{bt}$  é necessário obter  $w(\xi)$ , de forma semelhante a  $B_{br}$  a matriz  $B_{bt}$  necessita de  $\frac{\partial w}{\partial s}$  e  $w(\xi)$  de maneira análoga  $v(\xi)$  depende dos ângulos de torção  $\theta_{t_1}$  e  $\theta_{t_2}$  devido a equação 19, por isso é necessário utilizar polinômios de grau três para determinar as funções de forma assim como no caso de  $v(\xi)$ .

As quatro funções de forma serão  $\psi_1(\xi)$ ,  $\psi_2(\xi)$ ,  $\psi_3(\xi)$  e  $\psi_4(\xi)$ . Com isso  $w(\xi)$  é definido pela equação 65.

$$w(\xi) = \psi_1(\xi) w_1 + \psi_2(\xi) w_2 + \psi_3(\xi) \theta_{t_1} + \psi_4(\xi) \theta_{t_2} \quad (65)$$

Onde  $\psi_1(\xi)$ ,  $\psi_2(\xi)$ ,  $\psi_3(\xi)$  e  $\psi_4(\xi)$  são determinados pelas equações 66, 67, 68 e 69.

$$\psi_1(\xi) = c_1 \cdot \xi^3 + c_2 \cdot \xi^2 + c_3 \cdot \xi + c_4 \quad (66)$$

$$\psi_2(\xi) = c_5 \cdot \xi^3 + c_6 \cdot \xi^2 + c_7 \cdot \xi + c_8 \quad (67)$$

$$\psi_3(\xi) = c_9 \cdot \xi^3 + c_{10} \cdot \xi^2 + c_{11} \cdot \xi + c_{12} \quad (68)$$

$$\psi_4(\xi) = c_{13} \cdot \xi^3 + c_{14} \cdot \xi^2 + c_{15} \cdot \xi + c_{16} \quad (69)$$

O método utilizado para determinar essas funções de forma é semelhante ao aplicado para as funções de forma de  $v(\xi)$ . Os sistemas de equação utilizados para determinar as funções de forma 66, 67, 68 e 69 são respectivamente 70, 71, 72 e 73.

$$\begin{cases} -c_1 + c_2 - c_3 + c_4 = 1 \\ c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0 \\ 3c_1 - 2c_2 + c_3 = 0 \\ 3c_1 + 2c_2 + c_3 = 0 \end{cases} \quad (70)$$

$$\begin{cases} -c_5 + c_6 - c_7 + c_8 = 0 \\ c_5 + c_6 + c_7 + c_8 = 1 \\ 3c_5 - 2c_6 + c_7 = 0 \\ 3c_5 + 2c_6 + c_7 = 0 \end{cases} \quad (71)$$

$$\begin{cases} -c_9 + c_{10} - c_{11} + c_{12} = 0 \\ c_9 + c_{10} + c_{11} + c_{12} = 0 \\ 3c_9 - 2c_{10} + c_{11} = J^{-1} \\ 3c_9 + 2c_{10} + c_{11} = 0 \end{cases} \quad (72)$$

$$\begin{cases} -c_{13} + c_{14} - c_{15} + c_{16} = 0 \\ c_{13} + c_{14} + c_{15} + c_{16} = 0 \\ 3c_{13} - 2c_{14} + c_{15} = 0 \\ 3c_{13} + 2c_{14} + c_{15} = J^{-1} \end{cases} \quad (73)$$

Resolvendo os sistemas de equações é possível obter  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\psi_3$  e  $\psi_4$ , portanto é possível determinar  $w(\xi)$ . Com  $w(\xi)$  definido é possível obter  $\frac{\partial^2 w(\xi)}{\partial s^2}$ , como demonstrado na equação 74.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w(\xi)}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial w(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial s} \right) = \frac{\partial^2 w(\xi)}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial s} \right)^2 = \\ &= \left( \frac{\partial^2 \psi_1(\xi)}{\partial \xi^2} w_1 + \frac{\partial^2 \psi_2(\xi)}{\partial \xi^2} w_2 + \frac{\partial^2 \psi_3(\xi)}{\partial \xi^2} \theta_{t_1} + \frac{\partial^2 \psi_4(\xi)}{\partial \xi^2} \theta_{t_2} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial s} \right)^2 \end{aligned} \quad (74)$$

Com isso é possível determinar  $B_{bt}$  na forma matricial, como demonstrado na equação 75.

$$B_{bt} = \left[ \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & \frac{\partial^2 \psi_1(\xi)}{\partial \xi^2} & 0 & -\frac{\partial^2 \psi_2(\xi)}{\partial \xi^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 \psi_3(\xi)}{\partial \xi^2} & 0 & -\frac{\partial^2 \psi_4(\xi)}{\partial \xi^2} & 0 \end{array} \right] (J^{-1})^2 \quad (75)$$

Para determinar a matriz  $B_s$  é necessário obter  $\theta_s(\xi)$  que é definido pela equação 76.

$$\theta_s(\xi) = \phi_1(\xi) \theta_{s,1} + \phi_2(\xi) \theta_{s,2} \quad (76)$$

Para isso foi utilizado o mesmo método utilizado para determinar  $u_0(\xi)$ , possuindo as mesmas funções de forma. Com isso é possível determinar  $B_s$  na forma matricial, como demonstrado na equação 77.

$$B_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \phi_1(\xi)}{\partial \xi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \phi_2(\xi)}{\partial \xi} & 0 & 0 \end{bmatrix} J^{-1} \quad (77)$$

Com isso é possível obter a matriz  $K_l$  através da integral de quadratura de Gauss-Legendre, a quadratura de Gauss-Legendre é dada pela equação 78.

$$K_l = \sum_{i=1}^g w_i f(t_i) \quad (78)$$

Esse método possui uma solução exata da integral quando a função que está sendo integrada é polinomial e  $g$  é um numero inteiro que respeita a equação 79 descrito em (CUNHA, 2003).

$$g \geq \frac{n_1 + 1}{2} \quad (79)$$

Sabendo que as funções que serão integradas são polinomiais é necessário conhecer o grau do polinômio de maior grau que será integrado para obter o resultado exato.

Os polinômio são dados por multiplicações entre as matrizes  $B_n$ ,  $B_{br}$ ,  $B_{bt}$  e  $B_s$  e suas respectivas transpostas, dessa maneira o polinômio de maior grau é proveniente dos quadrados das derivadas das funções  $\varphi_i$  e  $\psi_i$ , uma vez que a segunda derivada das funções  $\varphi_i$  e  $\psi_i$  tem grau 1 e as derivadas das funções  $\phi_i$  tem grau 0.

As funções  $\varphi_i$  e  $\psi_i$  possuem grau 3, sabendo que as matrizes utilizam a segunda derivada das funções  $\varphi_i$  e  $\psi_i$  então o grau do polinômio gerado pelas  $\varphi_i$  e  $\psi_i$  na função que será integrada é 2.

Com isso o valor de  $g$  segundo a equação 79 deve ser maior ou igual a 1,5 para obter uma solução exata dessa integral por isso  $g$  deve ser igual a 2.

Fazendo o somatório da equação 78, obtém-se a matriz de rigidez local no sistema de coordenadas locais, portanto deve-se rotacionar a matriz  $K_l$  para obter a matriz de rigidez local no sistema de coordenadas globais, com isso a matriz de rigidez local é idêntica a descrita em (FERREIRA, 2014).

Para rotacionar a matriz de rigidez local será utilizada a matriz de rotação a partir da matriz de transformação de base, entre a base local que alinhada como o sistema de coordenadas locais e a base canônica.

Para obter a matriz de transformação de base é necessário obter os vetores normalizados da base que se alinha com o sistema de coordenadas locais, por isso é necessário obter os vetores  $r_{1,n}$ ,  $r_{2,n}$  e  $r_{3,n}$ .

Para determinar o vetor normalizado  $r_{1,n}$  que será alinhado ao eixo  $s$  e conseqüentemente ao elemento, é possível obtê-lo a partir das coordenadas dos nós que formão o elemento. Sabendo que o elemento se inicia no nó 1 com as coordenadas  $(x_1, y_1, z_1)$  e termina no nó 2 com as coordenadas

$(x_2, y_2, z_2)$ , então o vetor não normalizado  $r_1$  é dado pela equação 80, utilizando a equação 81 é possível obter o vetor normalizado  $r_{1,n}$ .

$$r_1 = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} \quad (80)$$

$$r_{1,n} = \frac{r_1}{|r_1|} \quad (81)$$

Após determinar o vetor  $r_{1,n}$  é possível determinar o vetor  $r_2$  considerando que ele deve ser ortogonal ao vetor  $r_{1,n}$  e ao vetor  $(0, 0, 1)$  da base canônica, dessa maneira  $r_2$  é determinado pela equação 82 e o vetor normalizado  $r_{2,n}$  é dado pela equação 83.

$$r_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times r_{1,n} \quad (82)$$

$$r_{2,n} = \frac{r_2}{|r_2|} \quad (83)$$

Com os vetores  $r_{1,n}$  e  $r_{2,n}$  é possível determinar  $r_3$  considerando que ele deve ser ortogonal a ambos os vetores, dessa maneira  $r_3$  é dado pela equação 84 e o vetor normalizado  $r_{3,n}$  é dado pela equação 85.

$$r_3 = r_{1,n} \times r_{2,n} \quad (84)$$

$$r_{3,n} = \frac{r_3}{|r_3|} \quad (85)$$

Com isso para determinar a matriz de transformação de base basta multiplicar as matrizes das bases, sendo a matriz da base a matriz que possui as colunas com os vetores que definem a base, por isso a matriz da base canônica é uma matriz identidade, com isso a matriz de base que nesse caso também é a matriz de transformação será dado pela equação 87.

$$R = \begin{bmatrix} r_{1,n} & r_{2,n} & r_{3,n} \end{bmatrix} \quad (86)$$

A matriz de transformação de base nesse caso é idêntica a matriz de rotação e também é idêntica a matriz de rotação descrita em (FERREIRA, 2014)

No entanto é necessário rotacionar a matriz  $K_l$  que é uma matriz 12 por 12, por isso a matriz de rotação que irá multiplicar a matriz  $K_l$  deve ser montada como demonstrado na equação 87, descrita em (FERREIRA, 2014).

$$R_{K_l} = \begin{bmatrix} R & 0_{3,3} & 0_{3,3} & 0_{3,3} \\ 0_{3,3} & R & 0_{3,3} & 0_{3,3} \\ 0_{3,3} & 0_{3,3} & R & 0_{3,3} \\ 0_{3,3} & 0_{3,3} & 0_{3,3} & R \end{bmatrix} \quad (87)$$

Com isso a matriz de rigidez local pode ser rotacionada para o sistema de coordenadas globais através da equação 88.

$$K_g = R_{K_l} K_l R_{K_l}^T \quad (88)$$

Para montar a matriz rigidez  $K$  global usando a matriz de rigidez local no sistema de coordenadas globais  $K_g$  cada parte da matriz  $K_g$  deve ser posicionada em na parte correspondente da matriz  $K$ , para facilitar a compreensão a matriz  $K_g$  será dividida em 4 partes, sendo elas:

- $A_1$  uma matriz 6 por 6 que depende apenas do nó 1.
- $B_1$  uma matriz 6 por 6 que depende do nó 1 nas linhas e do nó 2 nas colunas.
- $C_1$  uma matriz 6 por 6 que depende do nó 1 nas colunas e do nó 2 nas linhas.
- $D_1$  uma matriz 6 por 6 que depende apenas do nó 2.

Dessa maneira a matriz  $K_g$  pode ser escrita como demonstrado na equação 89.

$$K_g = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \quad (89)$$

A matriz de rigidez global possui os espaços que dependem do nó 1 e do nó 2, então a matriz  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  e  $D_1$  devem ser somados nas posições correspondentes na matriz de rigidez global, esse método é descrito em (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000).

Repetindo o processo para cada elemento é obtido a matriz de rigidez global completa.

### 2.1.6 Matriz de rigidez local para vigas torcionais com qualquer numero de nós por elemento

A matriz de rigidez para esse caso possui o desenvolvimento semelhante ao explicado na seção 2.1.5 para a matriz de rigidez com 2 nós por elemento, se diferenciando a partir das definições de  $u_0(\xi)$ ,  $v(\xi)$ ,  $w(\xi)$  e  $\theta_s(\xi)$ .

Uma vez que o elemento é descrito por  $n$  as equações que descrevem  $u_0(\xi)$ ,  $v(\xi)$ ,  $w(\xi)$  e  $\theta_s(\xi)$  serão respectivamente 93

$$u_0(\xi) = \phi_1(\xi) u_1 + \phi_2(\xi) u_2 + \dots + \phi_n(\xi) u_n \quad (90)$$

$$v(\xi) = \varphi_1(\xi) v_1 + \varphi_2(\xi) v_2 + \dots + \varphi_n(\xi) v_n + \varphi_{n+1}(\xi) \theta_{r_1} + \varphi_{n+2}(\xi) \theta_{r_2} + \dots \varphi_{2n}(\xi) \theta_{r_n} \quad (91)$$

$$w(\xi) = \psi_1(\xi) w_1 + \psi_2(\xi) w_2 + \dots + \psi_n(\xi) w_n + \psi_{n+1}(\xi) \theta_{t_1} + \psi_{n+2}(\xi) \theta_{t_2} + \dots + \psi_{2n}(\xi) \theta_{t_n} \quad (92)$$

$$\theta_s(\xi) = \phi_1(\xi) \theta_{s,1} + \phi_2(\xi) \theta_{s,2} + \dots + \phi_n(\xi) \theta_{s,n} \quad (93)$$

O método para determinar as funções de forma é igual ao utilizado na seção 2.1.5, no entanto nesse caso existem mais deformações para serem consideradas e portanto o grau do polinômio irá mudar. Para as funções de forma de  $u_0(\xi)$  e  $\theta_s(\xi)$  o polinômio que deve ser de grau  $n - 1$ , formando dessa maneira  $n$  sistemas de equações com  $n$  variáveis em cada sistema.

Para as funções de forma de  $v(\xi)$  e  $w(\xi)$  o polinômio que deve ser de grau  $2n - 1$  devido a necessidade de pelo menos  $2n$  equações para determinar os  $n$  ângulos de torção, formando dessa maneira  $2n$  sistemas de equações com  $2n$  variáveis em cada sistema.

Com isso é possível determinar  $B_n$ ,  $B_{bt}$ ,  $B_{br}$  e  $B_s$ , como descrito nas equações

$$B_n = \left[ \begin{array}{cccccccccccc} \frac{\partial \phi_1(\xi)}{\partial \xi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial \phi_n(\xi)}{\partial \xi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] J^{-1} \quad (94)$$

$$B_{br} = \left[ \begin{array}{cccccccccccc} 0 & \frac{\partial^2 \varphi_1(\xi)}{\partial \xi^2} & 0 & \frac{\partial^2 \varphi_{n+1}(\xi)}{\partial \xi^2} & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial^2 \varphi_n(\xi)}{\partial \xi^2} & 0 & \frac{\partial^2 \varphi_{2n}(\xi)}{\partial \xi^2} & 0 & 0 \end{array} \right] (J^{-1})^2 \quad (95)$$

$$B_{bt} = \left[ \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & \frac{\partial^2 \psi_1(\xi)}{\partial \xi^2} & 0 & -\frac{\partial^2 \psi_{n+1}(\xi)}{\partial \xi^2} & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial^2 \psi_n(\xi)}{\partial \xi^2} & 0 & -\frac{\partial^2 \psi_{2n}(\xi)}{\partial \xi^2} & 0 \end{array} \right] (J^{-1})^2 \quad (96)$$

$$B_s = \left[ \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \phi_1(\xi)}{\partial \xi} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \phi_n(\xi)}{\partial \xi} \end{array} \right] J^{-1} \quad (97)$$

Diferentemente da equação 40 da seção 2.1.5, a rotação nesse caso deve ser integrada já que não é uma constante, com isso a matriz de rigidez na forma global é dada pela equação 98.

$$K_g = E \int_{-1}^1 R_{K_l}^T (A B_n^T B_n + I_{tt} B_{br}^T B_{br} + I_{rr} B_{bt}^T B_{bt}) J R_{K_l} d\xi + G \int_{-1}^1 R_{K_l}^T (J_1 B_s^T B_s) R_{K_l} J d\xi \quad (98)$$

A matriz da rotação  $R$  é definida da mesma maneira que a mostrada na seção 2.1.5, no entanto a matriz da rotação  $R_{K_l}$  é uma matriz  $6n$  por  $6n$  e é definida apenas entre dois pontos, por isso a cada dois nós será definida uma matriz de rotação diferente. Para integral a matriz de rotação será definida como sendo a matriz de transformação da base alinhada pelos 2 nós entre os quais o ponto de integração se encontra e a base canônica. Fazendo a integral usando a quadratura de Gauss-Legendre,

sendo o grau  $g$  utilizado na quadratura um numero inteiro que respeita a equação 79. No entanto para isso é necessário obter o grau polinômio de maior grau que será integrado. Da mesma maneira que apresentado na seção 2.1.5 o polinômio de maior grau é proveniente do quadrado da segunda derivada das funções  $\varphi_i$  e  $\psi_i$ , nesse caso o grau das funções  $\varphi_i$  e  $\psi_i$ , é  $2n - 1$ , com isso o grau da segunda derivada é  $2n - 3$  e o grau do quadrado da segunda derivada das funções  $\varphi_i$  e  $\psi_i$  é  $4n - 6$ , dessa maneira é possível reescrever a equação 79 e com isso obter a equação 99 em função do numero de nós por elemento.

$$g \geq 2n - \frac{5}{2} \quad (99)$$

Fazendo o somatório da equação 100, é obtido a matriz de rigidez local no sistema de coordenadas globais.

$$K_g = \sum_{i=1}^g w_i f(t_i) \quad (100)$$

De maneira análoga ao usado na seção 2.1.5 a matriz de rigidez pode ser dividida em  $n^2$  matrizes  $6 \times 6$  sendo cada matriz descrita por um ou dois nós, com isso basta encaixar essas matrizes nas posições correspondentes na matriz de rigidez global.

Repetindo o processo para cada elemento é obtido a matriz de rigidez global completa.

### 2.1.7 Condições de contorno

Existem diversas formas de aplicar as condições de contorno, nesse estudo foram consideradas apenas condições de contorno que impedem o movimento do nó em uma ou mais direções bem como a rotação do nó, por isso a aplicação da condição de contorno nesse caso é apenas a retirada da linha e da coluna correspondente a direção de movimento bloqueada do nó na matriz de rigidez global e a remoção da mesma linha nas matrizes de força e deformação, o processo somente pode ser executado após a finalização da montagem da matriz de rigidez global, esse método foi obtido de (FERREIRA, 2014)

Retornando para a equação 1 após a aplicação das condições de contorno e sabendo que a matriz  $F$  é dada pelas forças externas aplicadas sobre os nós, então apenas resta a matriz  $U$ , sendo esse o objetivo do método de elementos finitos. Dessa maneira é possível obter as deformações sofridas em cada nó resolvendo um sistema de equações onde a matriz  $U$  é a matriz de variáveis.

### 2.1.8 Discretização

Para obter maior acurácia na solução é possível aumentar a discretização do domínio analisado, isso pode ser feito das duas maneiras descritas a seguir:

1. Discretização h: essa discretização consiste em aumentar o número de elementos que descrevem a estrutura, utilizando as funções de forma de grau 1, isso resulta em um aumento no número de nós e no número de elementos, isso aumenta a acurácia da solução e também o detalhamento da estrutura deformada sendo possível obter o deslocamento de mais nós.
2. Discretização p: essa discretização consiste em aumentar o grau do polinômio que descreve cada elemento, para isso é necessário aumentar a quantidade de nós de tal maneira que o número de elementos permaneça o mesmo, isso aumenta a acurácia da solução por permitir que as de forma se adaptem melhor a forma deformada de cada elemento e também resulta em um aumento de detalhamento da estrutura deformada sendo possível obter o deslocamento de mais nós.

### 3 METODOLOGIA

Nesse trabalho foi analisado a eficiência da discretização  $h$  e a discretização  $p$  no MEF quando aplicado a estruturas reticuladas aeroespaciais com formato de tronco de cone descrito na seção 3.3, para isso foram utilizados scripts MATLAB para gerar a malha da estrutura analisada e calcular as deformações usando o MEF.

#### 3.1 GERAÇÃO DE MALHAS

Para utilizar o MEF foi necessário criar uma malha com os nós e elementos definidos utilizando a geometria desejada, para isso foi utilizado a classe MATLAB Malha.m em conjunto com a classe Reta.m ambas criadas pelo autor.

Ambas as classes foram escritas de forma que são capazes de criar malhas para diversos reticulados na forma de tronco de cone. Por isso é necessário fornecer os seguintes parâmetros iniciais:

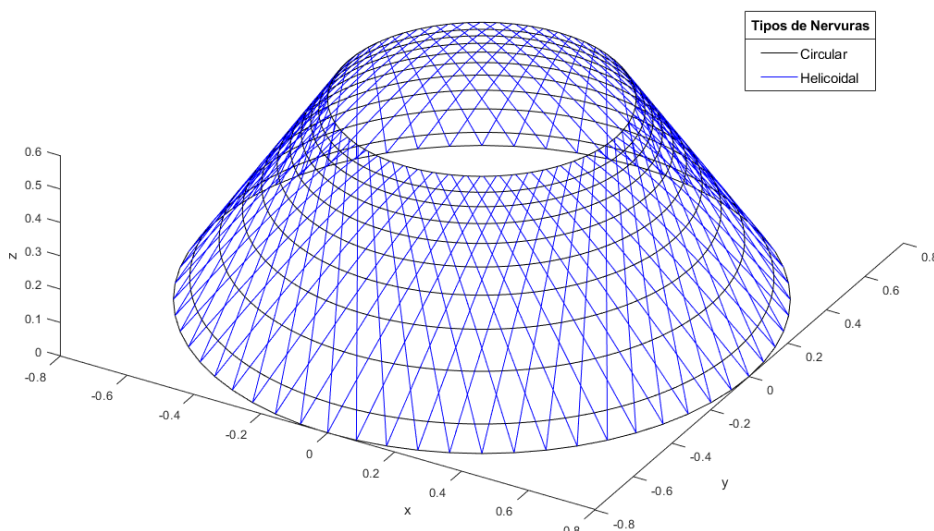
- $\alpha$  ângulo que a projeção da nervura no plano  $xy$  faz com o raio da circunferência da base.
- $h_1$  e  $h_2$  para controlar a altura do tronco de cone.
- $r_1$  e  $r_2$  para controlar o raio da base e do topo do tronco de cone.
- $\theta_{dd}$  e  $\theta_{de}$  para controlar distancia angular entre cada nervura helicoidal com  $\alpha > 0$  e com  $\alpha < 0$ .
- $\theta_{dd_0}$  e  $\theta_{de_0}$  para controlar a posição angular na base do cone onde se inicia a primeira nervura helicoidal com  $\alpha > 0$  e com  $\alpha < 0$ .
- $\alpha_{dd}$  e  $\alpha_{de}$  para controlar o ângulo de inclinação cada nervura helicoidal em relação ao raio no plano.

Foi considerado que as estruturas desse tipo são formadas por dois tipos de nervuras sendo elas:

- nervuras circulares: nervuras que possuem formato circular e concêntricas entre elas.
- nervuras helicoidais: nervuras que se iniciam na base e vão até o topo do tronco de cone sendo essas nervuras subdivididas em dois tipos com  $\alpha > 0$  e com  $\alpha < 0$ .

A figura Figura 2 mostra os dois tipos de nervuras que uma estrutura reticulada com formato de tronco de cone possui.

Figura 2 – Tipos de nervuras



Fonte: Elaborada pelo autor

Nos artigos (MOROZOV; LOPATIN; NESTEROV, 2011) e (FARHADINIA et al., 2014) é dito que normalmente estruturas desse tipo possuem suas nervuras helicoidais posicionadas de forma a coincidirem com as geodésicas do tronco de cone.

Segundo o artigo (FATELO; MARTINS-FERREIRA, 2013), a geodésica de um cone é definida como a projeção de uma reta do plano na superfície do tronco de cone, por isso a malha foi construída no plano e posteriormente a malha foi projetada na superfície cônica criando a malha tridimensional.

A criação da malha foi feita pela função `CriaMalha` da classe `Malha.m`, essa função necessita do número de nós por elemento ( $n$ ) e o número de subdivisões para cada "macro elemento" (explicado a seguir) ( $n_p$ ) inicia gerando todas as nervuras circulares que são posicionada na metade do raio entre as intersecções da nervuras helicoidais, por isso é necessário obter previamente os raios das intersecções das nervuras helicoidais. As nervuras circulares são criadas na forma de um vetor da classe `Reta.m`, esse vetor suporta todas as nervuras no plano.

A classe `Reta.m` carrega todas as informações necessárias para obter os nós em cada reta da estrutura e nos círculos.

Após criar as nervuras circulares, a função cria as nervuras helicoidais na forma da classe `Reta.m` para serem adicionadas ao vetor, junto às nervuras circulares. Para criar as nervuras, é necessário fornecer o raio da nervura circular em que se inicia a reta e o raio da nervura circular em que termina a reta. Com isso, e com a posição inicial da reta, é possível obter o ponto de intersecção com o círculo interno e obter os pontos de início e fim da reta. Durante esse processo, são adicionados os dois primeiros pontos de intersecção da reta, sendo eles as intersecções com os círculos externo e interno. Ao criar as retas, elas são adicionadas no vetor em que se encontram as nervuras circulares.

Para ser possível analisar corretamente o reticulado, deve-se garantir que os pontos de intersecção são nós da malha, por isso o script cria obtém todas as intersecções, comparando cada linha e círculos com todas as outras linhas e círculos.

Para evitar os nós duplicados o script limpa todas os nós duplicados dentro da mesma linha ou circulo comparando-os uns com os outros e caso a diferença entre x e a diferença entre y for menor  $10^{-6}$  um dos nós é descartado.

Considerando que todas as intersecções das nervuras são conectadas então deve-se garantir a existência dos nós nos pontos de intersecção, para isso são criados "macro elementos", que são semelhantes aos elementos mas que possuem apenas 2 nós independentemente da discretização utilizada e os dois nós são sempre pontos de intersecção. Todos os elementos devem ser criados dentro de macro elementos, dessa maneira sempre haverão os nós de intersecção.

Após criar os "macro elementos" o script cria os elementos dentro do "macro elemento", para isso é necessário mais dois parâmetros que devem ser fornecidos na inicialização da função, os parâmetros são o número de nós por elemento e o número de subdivisões que o macro elemento deve ter. Com isso o script consegue criar os elementos e nós necessários.

Com todos os elementos prontos os nós são unificados em um único vetor de nós com a posição x e y de cada nó no plano. Os nós são novamente filtrados para remover nós duplicados.

Com os nós unificados os elementos são reescritos e unificados em um único vetor que possui o número do elemento e os números dos nós que o compõem utilizando o vetor de nós como base para isso.

Após isso é necessário passar os nós para a forma tridimensional, para isso é utilizado a transformação dada pelas equações 1, 2 e 3

$$x_n = x_{n,p} \quad (1)$$

$$y_n = y_{n,p} \quad (2)$$

$$z_n = \frac{(h_2 - h_1)}{r_2 - r_1} (\sqrt{x_n^2 + y_n^2} - r_1) + h_1 \quad (3)$$

Com essa transformação é obtido um tronco de cone e os nós e elementos são exportados em um arquivo com nome "Elementos\_ $n_p$ \_ $n$ .mat".

## 3.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Para aplicar o MEF foi utilizado a classe MATLAB MEF.m criado pelo autor. Essa classe necessita de algumas informações iniciais sobre o material ( $E$  e  $G$ ) e o formato da seção transversal da viga utilizada ( $A$ ,  $I_{rr}$ ,  $I_{tt}$  e  $J_1$ ).

Além dessas informações é necessário fornecer a malha que é gerada pelo método descrito na seção 3.1 (fornecido através da leitura do arquivo "Elementos\_ $n_p$ \_ $n$ .mat" gerado), o ponto e direção de aplicação das forças e dos momentos (adicionados manualmente na função GeraPf da classe MEF.m), as forças e momentos aplicados em cada ponto (adicionados manualmente função GeraF da classe MEF.m) e as condições de contorno (adicionados manualmente função GeraContorno da classe MEF.m).

Com todas as informações iniciais a classe necessita que seja definido o  $n$  após isso utilizando a função ExecutarMEF a classe é capaz de iniciar o processo de montagem da matriz de rigidez.

Para cada elementos o script obtém as matrizes de rigidez local no sistema de coordenadas globais e com essas matrizes monta a matriz de rigidez global, para isso utiliza os equacionamentos descritos na seção e 2.1.6.

A matriz de rigidez local é dada por uma integral que é obtida utilizando o método de quadratura de Gauss-Legendre, para isso é utilizado o script lgwt.m obtido de (WINCKEL, 2023) que obtém o os pesos e nós para a ordem da quadratura de Gauss-Legendre que é definida por um numero inteiro que deve estar de acordo com a equação 99 do capítulo 2, é necessário um script para obter os pesos e nós de integração por haver a necessidade de repetir o processo para diversos graus da função de forma.

Para cada nó de integração do elemento as matrizes  $B_n$ ,  $B_{br}$ ,  $B_{bt}$  e  $B_s$  são obtidas e para isso são obtidas as funções de forma que são provenientes de um sistema de equação resolvido utilizando a função do MATLAB *mldivide*.

Além das matrizes  $B_n$ ,  $B_{br}$ ,  $B_{bt}$ ,  $B_s$  também é obtido a matriz de rotação e o jacobiano.

Com a integral concluída a matriz de rigidez local é utilizada para montar a matriz de rigidez global e o processo é reiniciado para o próximo elemento.

Após terminar a construção da matriz de rigidez global o script aplica as condições de contorno na matriz de rigidez global e na matriz de forças global como descrito na seção 2.1.7.

Com a matriz de rigidez global e a matriz de forças global considerando as condições de contorno o script resolve a equação 1, através de um sistema linear onde a matriz de rigidez é a matriz de coeficientes, a matriz de força é a matriz constante e a matriz de deformação é a matriz de variáveis, para resolver esse sistema o script utiliza a função do MATLAB *mldivide*.

Com a solução do sistema de equações é obtido a matriz de deformação global sem as linhas correspondentes as condições de contorno, então o script corrige isso adicionando as linhas novamente mas com valor 0 nas condições de contorno.

Após esse processo o script inicia a plotagem do resultado, plotando inicialmente o objeto não deformado e depois sobrepondo a plotagem do objeto não deformado é plotado o objeto deformado, possibilitando com isso a comparação entre os dois objetos.

Para obter o objeto deformado o script utiliza as funções de forma para uma melhor representação do resultado. Para isso para cada elemento é descrito por 20 pontos obtidos pelas funções de forma do elemento.

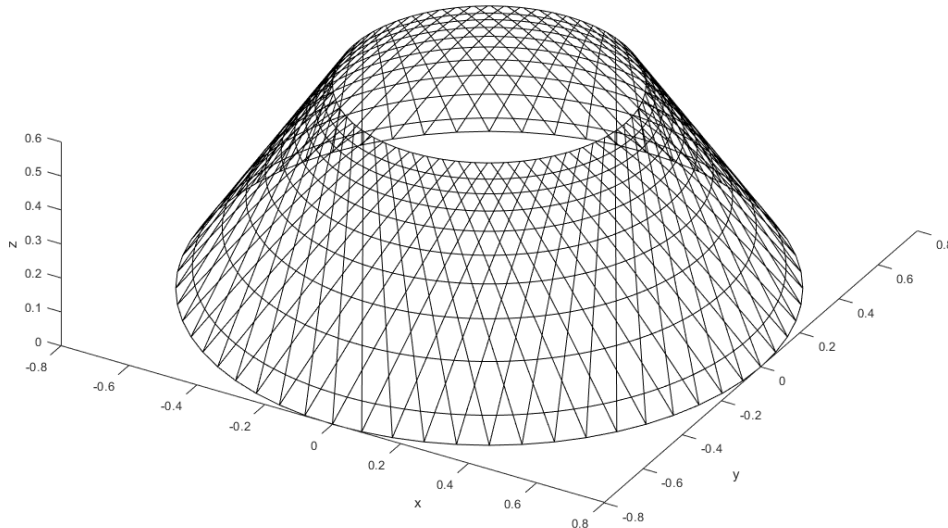
O script obtém as deformações dos nós no sistema de coordenadas locais através da matriz de rotação transposta e obtém também os coeficientes das funções  $\phi_i$ ,  $\varphi_i$  e  $\xi_i$ , com isso é possível descrever a deformação do elemento como descrito na seção 2.1.6.

Após isso o elemento deve ser reposicionado no inicio do primeiro nó na posição deformada, o resultado pode ser muito ser muito pequeno, por isso é aplicado um fator multiplicativo que amplia a deformação para facilitar a observação.

### 3.3 ESTRUTURA ANALISADA

Foi utilizada a estrutura reticulada da figura Figura 3 para as análises de eficiência, a estrutura foi criada com base nos dados utilizados na criação do adaptador de payload utilizado como objeto de estudo em (MOROZOV; LOPATIN; NESTEROV, 2011).

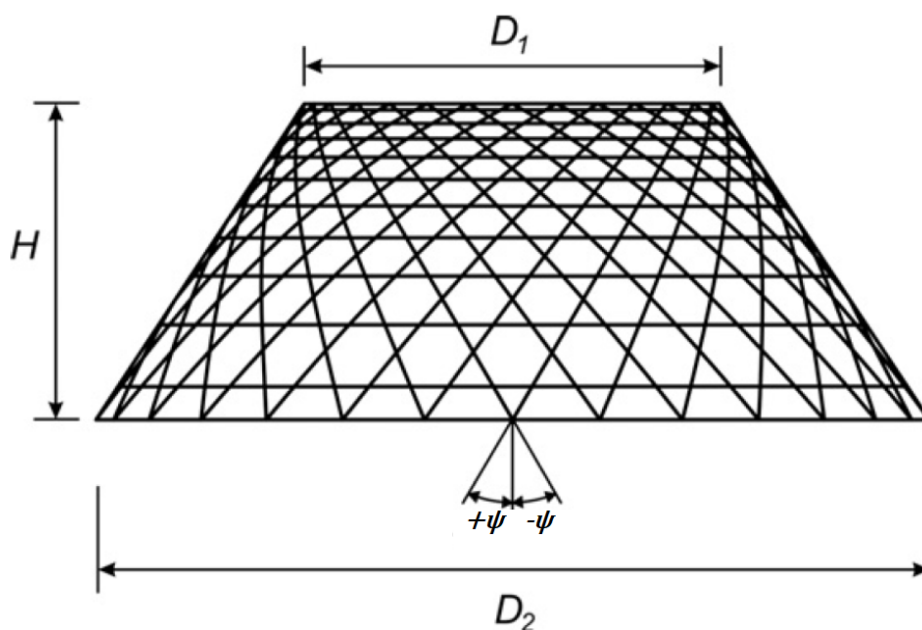
Figura 3 – Estrutura retícula utilizada



Fonte: Elaborada pelo autor

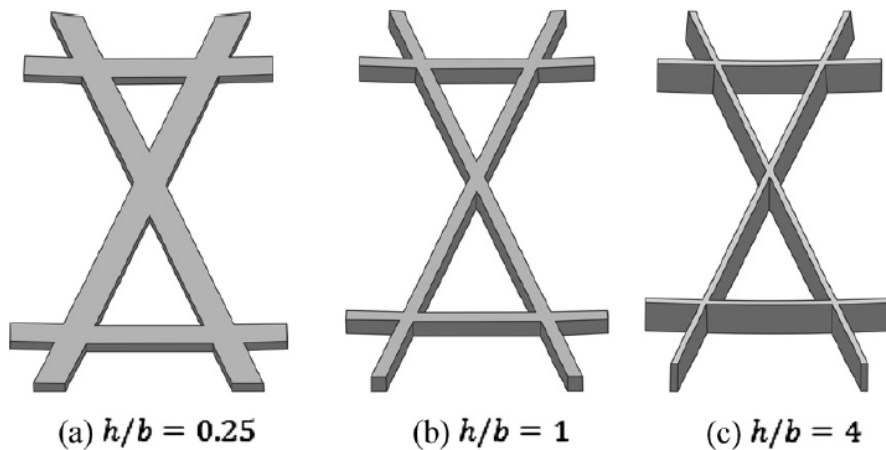
No artigo (MOROZOV; LOPATIN; NESTEROV, 2011) é analisado uma serie de variações dessa estrutura tendo como parâmetros o ângulo de orientação das nervuras na seção inferior ( $\psi$ ) demonstrado na figura Figura 4 e altura por largura da seção transversal das nervuras ( $h/b$ ) demonstrado na figura Figura 5.

Figura 4 – Parâmetro  $\psi$  para construção do reticulado



Fonte: (MOROZOV; LOPATIN; NESTEROV, 2011) modificada pelo autor

Figura 5 – Parâmetro  $h$  e parâmetro  $b$  para construção do reticulado



Fonte: (MOROZOV; LOPATIN; NESTEROV, 2011)

O reticulado escolhido possui  $\psi = 15^\circ$ ,  $h = 4 \text{ mm}$  e  $b = 4 \text{ mm}$ . Além dessas informações o artigo também fornece a altura de  $H = 0.6 \text{ m}$ , os diâmetros  $D2 = 1.6 \text{ m}$  e  $D1 = 0.8 \text{ m}$ .

O artigo também fornecesse os dados a respeito do material utilizado, o material é uma fibra unidirecional de carbono reforçada por plástico (CFRP) com as propriedades descritas na tabela.

Tabela 1 – Constantes da fibra de carbono reforçada por plástico (CFRP).

Constantes	Valores
$E_x$	$1.0 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$
$G_{xy}$	$5.5 \cdot 10^9 \text{ Pa}$

Fonte: (MOROZOV; LOPATIN; NESTEROV, 2011)

O material utilizado é um material compósito não isotrópico, para possibilitar os cálculos utilizando o MEF da forma como foi descrito, foi utilizada uma aproximação onde  $E = E_x$  e  $G = G_{xy}$ .

No artigo é fornecido o ângulo  $\psi = 15^\circ$ , no entanto para construir a malha foi necessário o ângulo  $\alpha$  que é o ângulo entre a projeção da nervura no plano  $xy$  e o raio da circunferência da base.

Para obter  $\alpha$  foi utilizado a função EncontraAlpha.m que iniciou o método da secante para obter  $\alpha$  que gere  $\psi = 15^\circ$  utilizando a equação 4.

$$\psi = \arccos \left( \frac{e_1 \cdot m_1}{|e_1| |m_1|} \right) \quad (4)$$

Sendo  $e_1$  e  $m_1$  dados pelas equações respectivamente 5 e 6.

$$e_1 = \left\{ \begin{array}{c} r_2 - r_1 \\ 0 \\ h_2 \end{array} \right\} \quad (5)$$

$$m_1 = \left\{ \begin{array}{c} \frac{r_1 \tan(\alpha)^2 + \sqrt{r_2^2 \tan(\alpha)^2 - r_1^2 \tan(\alpha)^2 + r_2^2}}{\tan(\alpha)^2 + 1} - r_1 \\ \tan(\alpha) \left( r_1 - \frac{r_1 \tan(\alpha)^2 + \sqrt{r_2^2 \tan(\alpha)^2 - r_1^2 \tan(\alpha)^2 + r_2^2}}{\tan(\alpha)^2 + 1} \right) \\ h_2 \end{array} \right\} \quad (6)$$

Com isso foi obtido  $\alpha = 23.4952^\circ$ .

Com isso resta apenas as condições de contorno e a força aplicada, as demais informações podem ser obtidas e estão dispostas nas tabelas 2 e 3.

Tabela 2 – Constantes para criar a malha utilizando a classe Malha.m.

Constantes	Valores
$h_1$	0 m
$h_2$	0.6 m
$r_1$	0.8 m
$r_2$	0.4 m
$\theta_{dd}$	6°
$\theta_{de}$	6°
$\theta_{dd0}$	0°
$\theta_{de0}$	0°
$\alpha_{dd}$	23.4952°
$\alpha_{de}$	-23.4952°

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 3 – Constantes para inicialização da classe MEF.m.

Constantes	Valores
$E$	$1.0 \cdot 10^{11} Pa$
$G$	$5.5 \cdot 10^9 Pa$
$A$	$1.3333 \cdot 10^{-5} m^2$
$I_{rr}$	$2.1333 \cdot 10^{-11} m^4$
$I_{tt}$	$2.1333 \cdot 10^{-11} m^4$
$J_1$	$3.5987 \cdot 10^{-11} m^4$

Fonte: Elaborado pelo autor

A força aplicada para as simulações foi 10% da força crítica para flambagem obtida no artigo (MOROZOV; LOPATIN; NESTEROV, 2011), sendo a força crítica obtida para esse formato  $F_c = 109475 N$ , portanto a força aplicada foi  $F = 10947.5 N$ , essa força foi distribuída igualmente sobre todos os nós da parte superior do cone.

A base foi considerada engastada, por isso todos os nós da base ( $z = 0$ ), foram considerados engastados.

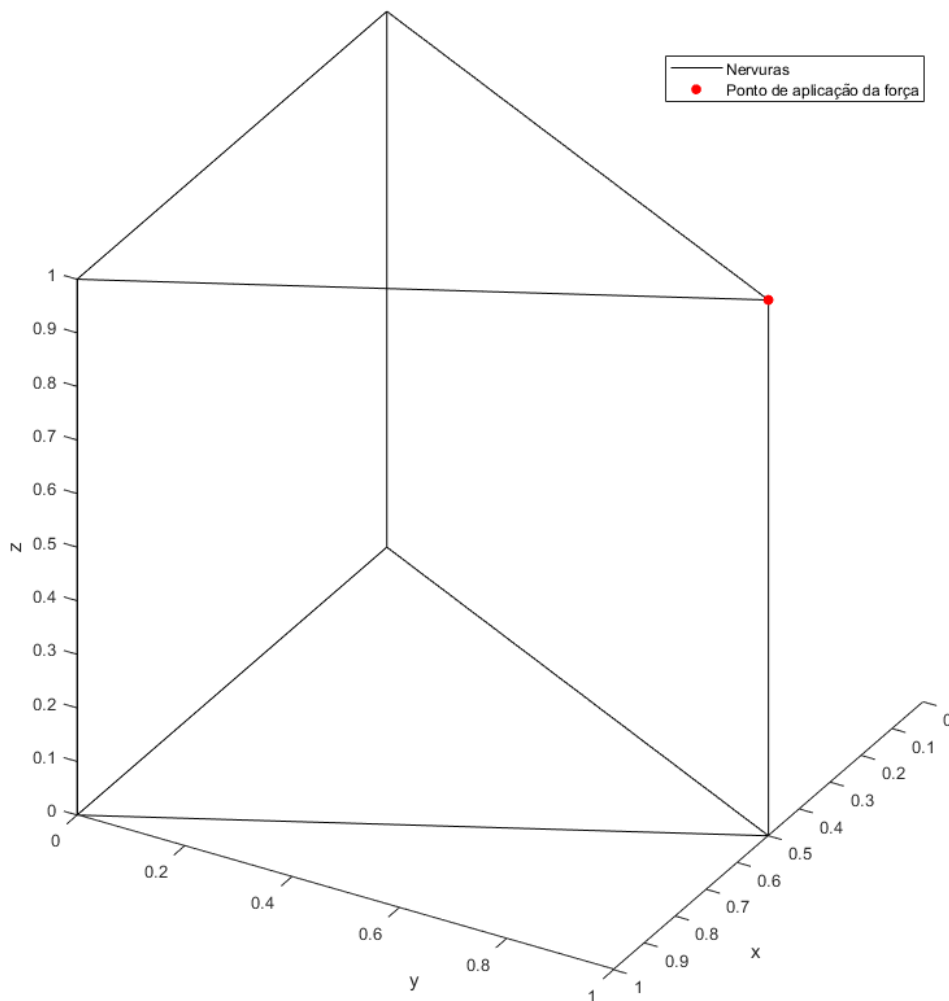
Para obter a forma deformada foi utilizado uma discretização em que o erro máximo seja menor que  $10^{-2}$ .

### 3.4 VALIDAÇÃO

Para fazer a validação do MEF utilizado foi feita uma comparação entre os deslocamento obtidas pelo MEF e pelo software comercial de simulação Ansys, capaz de simular estruturas de além de outros tipos de simulação.

Para essa comparação foi utilizada uma estrutura mais simples. A estrutura utilizada foi a mostrada na figura Figura 6 sendo as forças aplicadas no sentido positivo nas 3 direções (x, y e z) no ponto em vermelho com módulos iguais a  $10^3 N$  e considerando que a base ( $z = 0$ ) como sendo engastada para as condições de contorno.

Figura 6 – Estrutura utilizada para validação



Fonte: Elaborada pelo autor

As nervuras possuem seção transversal circular com raio de  $10\text{mm}$ , com as propriedades geométricas da tabela 4 .

Tabela 4 – Constantes da seção transversal circular.

Constantes	Valores
$A$	$3.1414 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$
$I_{rr}$	$7.85222 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4$
$I_{tt}$	$7.85222 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4$
$J_1$	$1.57080 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$

Fonte: Elaborado pelo autor

O material utilizado é o aço inoxidável AISI 316 recozido com as propriedades da tabela 5.

Tabela 5 – Constantes do aço inoxidável AISI 316 recozido.

Constantes	Valores
$E$	$1.9500 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$
$G$	$7.6772 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$

Fonte: Ansys GRANTA Materials Data for Simulation (Sample)

Apesar da MEF.m gerar um resultado para cada grau de liberdade de cada nó, para possibilitar a comparação com o resultado obtido no Ansys foi considerado apenas os deslocamentos nos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  no ponto de aplicação da força para comparação.

Após obter os deslocamentos foi calculado o erro entre as duas metodologias.

### 3.4.1 Método dos elementos finitos

Para obter o resultado utilizando a classe MEF.m, é necessário construir a malha do objeto da figura Figura 6.

Para construir a malha foi utilizado o script CriaMalhaValidacao.m que possui como parâmetros de entrada  $n$  e  $n_p$ , esse script é mais simples do que o apresentado na seção 3.1, apenas subdividindo os "macro elementos" que foram alimentados manualmente, com isso é capaz de construir os vetores de nós e elementos salvando-os para serem utilizados pela classe MEF.m, para facilitar a compatibilidade dos métodos a nomenclatura do arquivo foi a mesma utilizada pela classe Malha.m.

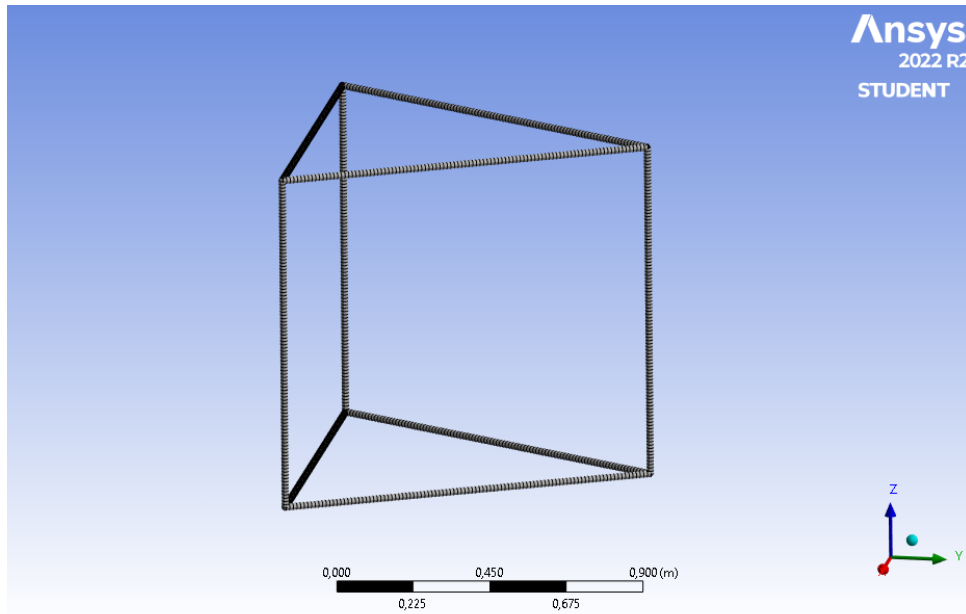
A malha utilizada tinha 100 elementos por nervura totalizando 900 elementos e cada elemento possui apenas dois nós totalizando 897 nós, com essa informação o script CriaMalhaValidacao.m foi capaz de criar o arquivo "Elementos\_100\_2.mat" com os nós e elementos para serem utilizadas na MEF.m.

Com a malha e os dados fornecidos inicialmente foi obtido os resultados utilizando a classe MEF.m.

### 3.4.2 Ansys

Para obter os resultados no Ansys foi construído o objeto da figura Figura 6 no DesignModeler do pacote Ansys no modulo de analise Static Structural, após isso foi criada a malha com o mesmo número de elementos por nervura utilizados na seção 3.4.1, a malha obtida no Ansys pode ser observada na figura Figura 7.

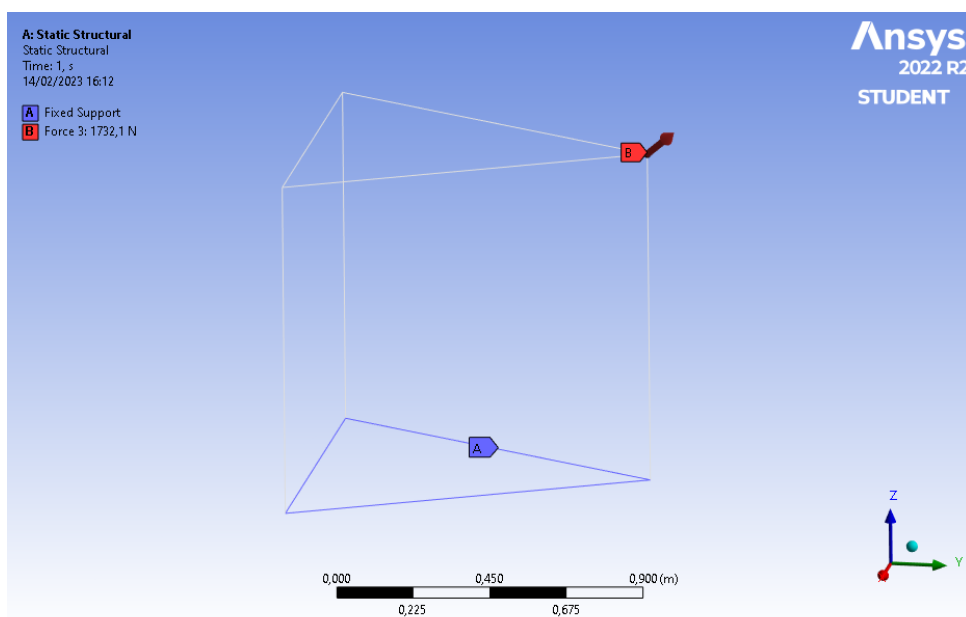
Figura 7 – Malha utilizada para validação no Ansys



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando Ansys

Após a construção da malha, as condições de contorno e as forças foram aplicadas da mesma forma que a utilizada na seção 3.4.1 e podem ser observadas na figura Figura 8.

Figura 8 – Força e condições de contorno no Ansys



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando Ansys

A força na figura Figura 8 é o somatório das forças aplicadas no sentido positivo nas 3 direções (x, y e z) no ponto em vermelho com módulos iguais a  $10^3 N$ , de maneira idêntica a utilizada para obter o resultado da MEF.m.

### 3.5 DISCRETIZAÇÃO

Para fazer os testes de eficiência e comparar os tipos de discretização foi necessário simular ambos os tipos de discretização de maneira a aumentar a discretização a cada passo para verificar a redução no erro. Para isso foi utilizado o script Discretizacao.m (descrito pelo fluxograma da figura Figura 9), esse arquivo é responsável por iniciar as classes Malha.m e MEF.m, após iniciar as classes o script inicia um loop que somente será parado quando o erro máximo for menor que  $10^{-3}$  no caso do tempo necessário entre as iterações serem muito altos o loop um erro de  $10^{-2}$  pode ser considerado como aceitável e o loop pode ser parado manualmente, em ambos os casos os resultados serão gravados em um arquivo com nome "Resultados.mat" para processamento e construção dos gráficos posteriormente.

Devido a mudança na numeração dos nós, para obter o erro máximo, os nós analisados são obtidos a partir da malha com  $n = 2$  e  $n_p = 1$ , e tem as numerações atualizadas a cada loop para possibilitar a comparação.

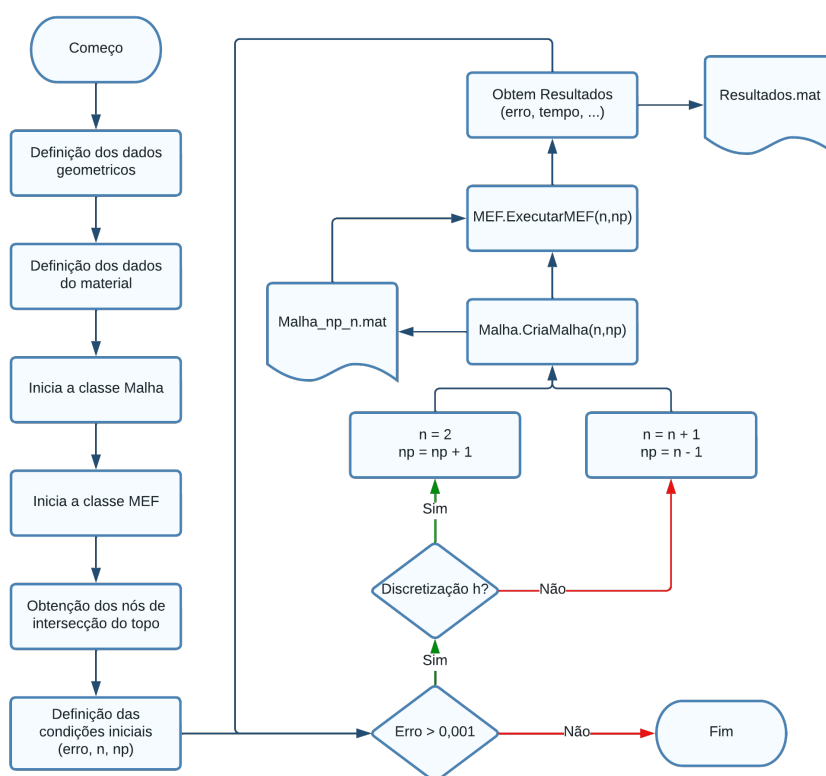
A cada loop a discretização da malha é aumentado, após isso a malha é criada utilizando a classe Malha.m, e o arquivo contendo a malha é utilizado para calcular o resultado da análise estrutura utilizando a classe MEF.m, a função ExecutarMEF dessa classe retorna o tempo de processamento, os deslocamentos de todos os nós e as numerações dos nós atualizadas serem analisados para obter o erro máximo.

Após passar ao menos uma vez pelo loop o script começa a calcular os erros totais em cada eixo e o erro máximo salvando esse dados no arquivo de resultados.

Além dos erros o loop salva no arquivo de resultados: o número de elementos, o número de nós, o número da iteração atual, todos os deslocamentos dos pontos que são analisados para o cálculo dos erros e o tempo de processamento.

Todas as informações são salvas na forma de vetores para serem utilizadas posteriormente para criar gráficos se necessário, isso se faz necessário dado o grande tempo de processamento necessário para obter esses dados.

Figura 9 – Fluxograma do script Discretizacao.m



Fonte: Elaborada pelo autor

Com o objetivo de reduzir o tempo de processamento, a plotagem da malha em Malha.m e a plotagem da forma deformada em MEF.m foram desabilitados para esses testes.

### 3.5.1 Erro

O erro foi obtido com base na comparação dos deslocamentos dos nós de intersecções das nervuras helicoidais e a nervura circular do topo do cone.

Foram obtidos 3 erros para cada nó sendo um para cada eixo (x, y, z). Os erros foram calculados como o modulo da diferença entre os valores obtidos na iteração atual e a iteração anterior para cada nó analisado.

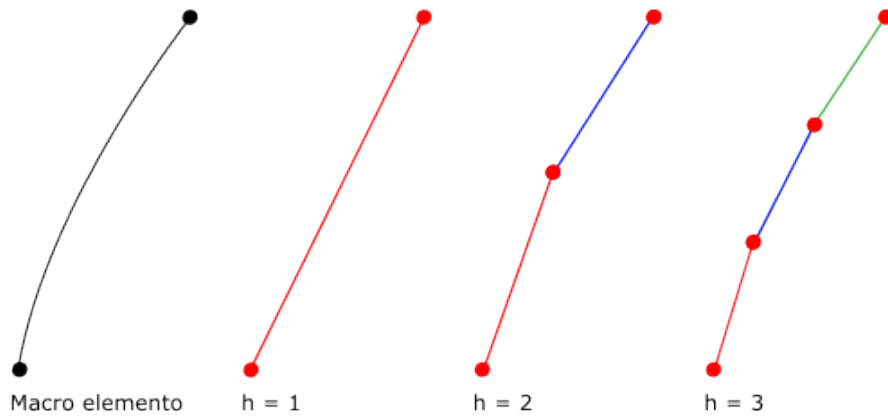
Com os erros de todos os nós analisados, os erros de cada eixo foram somados, gerando o erro total em cada eixo.

O erro utilizado para o resultado foi o maior entre os 3 erros totais obtidos, sendo portanto o erro máximo.

### 3.5.2 Discretização $h$

Na discretização  $h$  a cada loop o numero de subdivisões dos "macro elementos" da malha é aumentado em 1 como mostrado na figura Figura 10.

Figura 10 – Discretização  $h$

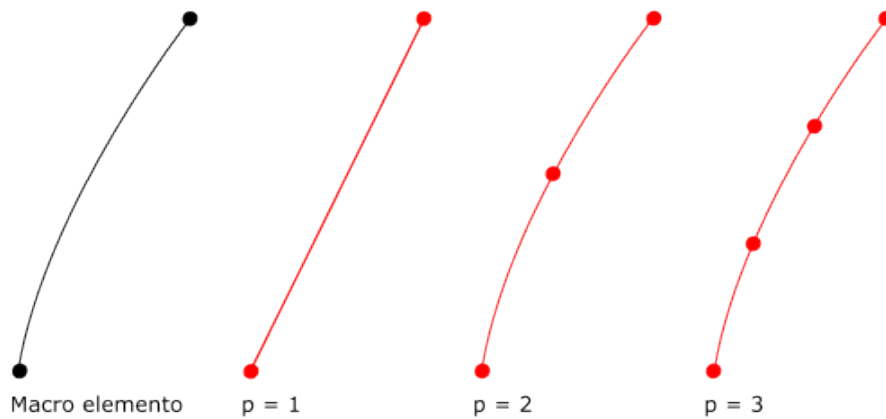


Fonte: Elaborada pelo autor

### 3.5.3 Discretização $p$

Na discretização  $p$  a cada loop o numero de nós por elemento é aumentado em 1 como mostrado na figura Figura 11.

Figura 11 – Discretização  $p$



Fonte: Elaborada pelo autor

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

### 4.1 VALIDAÇÃO

Os resultados dos deslocamentos em cada direção do ponto de aplicação das forças, obtidos pela classe MEF.m utilizando a malha descrita na seção 3.4.1 com as propriedades descritas nas tabelas 4 e 5, foram os dispostos na tabela 6.

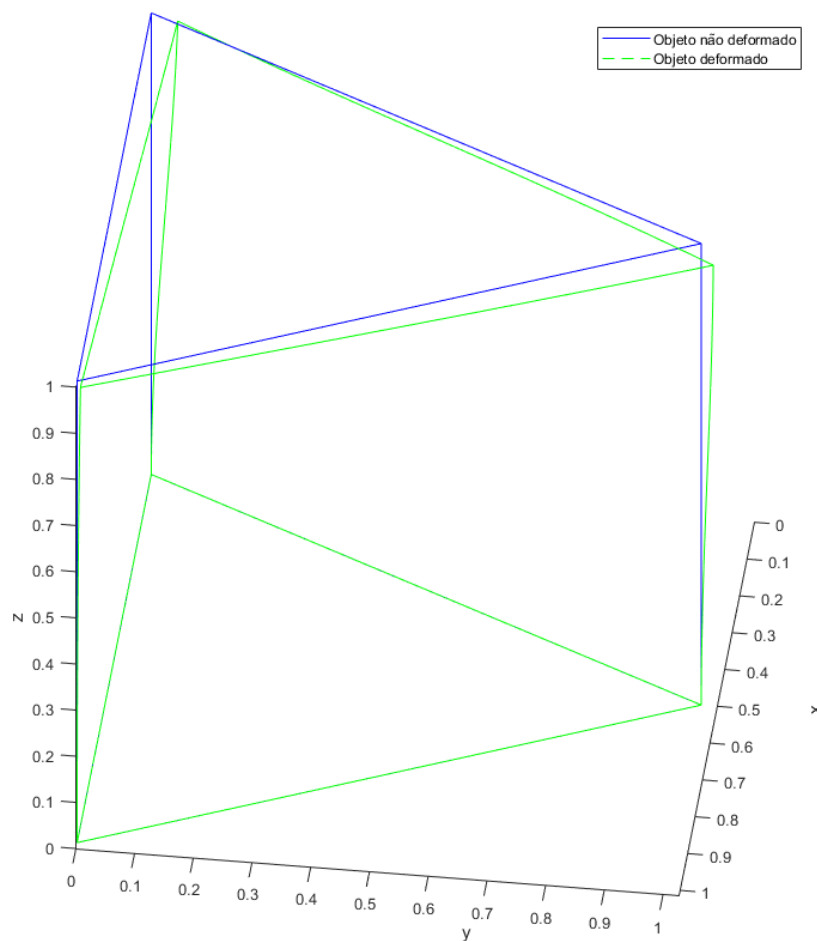
Tabela 6 – Resultados da validação utilizando MEF.m.

Eixo de deslocamento	Deslocamento
$x$	$5.5569 \cdot 10^{-2}$ m
$y$	$2.7525 \cdot 10^{-2}$ m
$z$	$9.5688 \cdot 10^{-6}$ m

Fonte: Elaborado pelo autor

A comparação entre a forma original e a forma deformada obtida pela MEF.m pode ser observada na figura Figura 12.

Figura 12 – Comparação entre a forma deformada obtida pelo MEF e o formato original



Fonte: Elaborada pelo autor

Os resultados dos deslocamentos em cada direção do ponto de aplicação das forças, obtidos pelo Ansys utilizando o procedimento da seção 3.4.2 foram os dispostos na tabela 7.

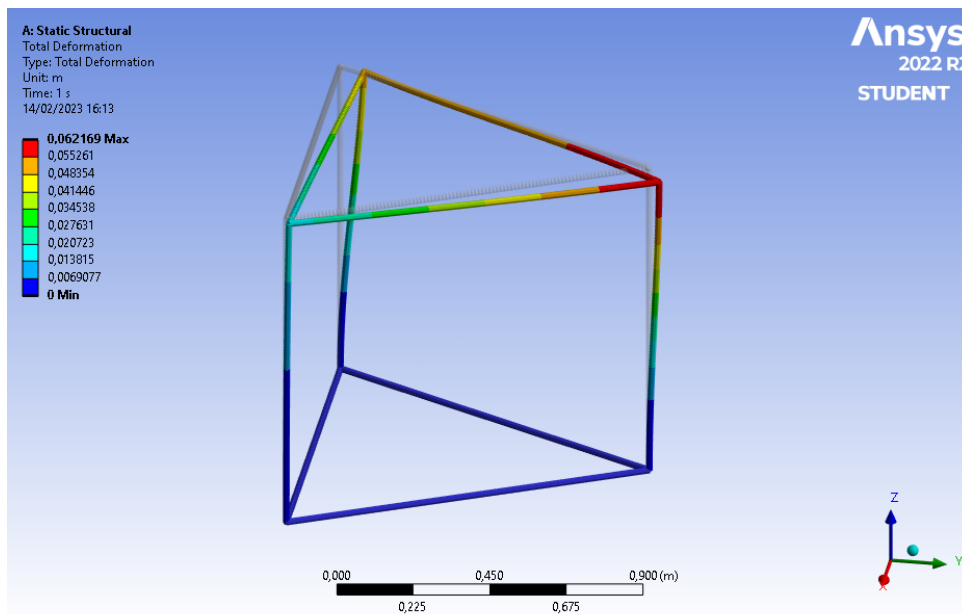
Tabela 7 – Resultados da validação utilizando Ansys.

Eixo de deslocamento	Deslocamento
$x$	$5.5708 \cdot 10^{-2}$ m
$y$	$2.7597 \cdot 10^{-2}$ m
$z$	$9.5765 \cdot 10^{-6}$ m

Fonte: Elaborado pelo autor utilizando Ansys

A comparação entre a forma original e a forma deformada obtida pelo Ansys pode ser observada na figura Figura 13.

Figura 13 – Comparação entre a forma deformada obtida pelo Ansys e o formato original



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando Ansys

Com isso é possível comparar os resultados obtidos pelo Ansys e pela classe MEF.m, essa comparação pode ser observada na tabela 8.

Tabela 8 – Resultados da validação utilizando Ansys.

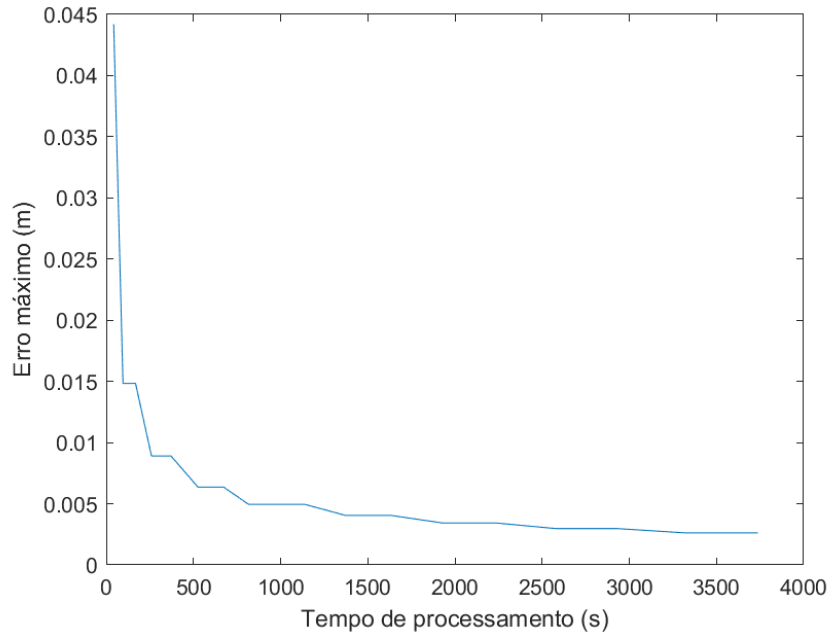
Eixo de deslocamento	Deslocamento MEF	Deslocamento Ansys	Erro
$x$	$5.5569 \cdot 10^{-2}$ m	$5.5708 \cdot 10^{-2}$ m	-0.2488 %
$y$	$2.7525 \cdot 10^{-2}$ m	$2.7597 \cdot 10^{-2}$ m	-0.2619 %
$z$	$9.5688 \cdot 10^{-6}$ m	$9.5765 \cdot 10^{-6}$ m	-0.0800 %

Fonte: Elaborado pelo autor

## 4.2 DISCRETIZAÇÃO H

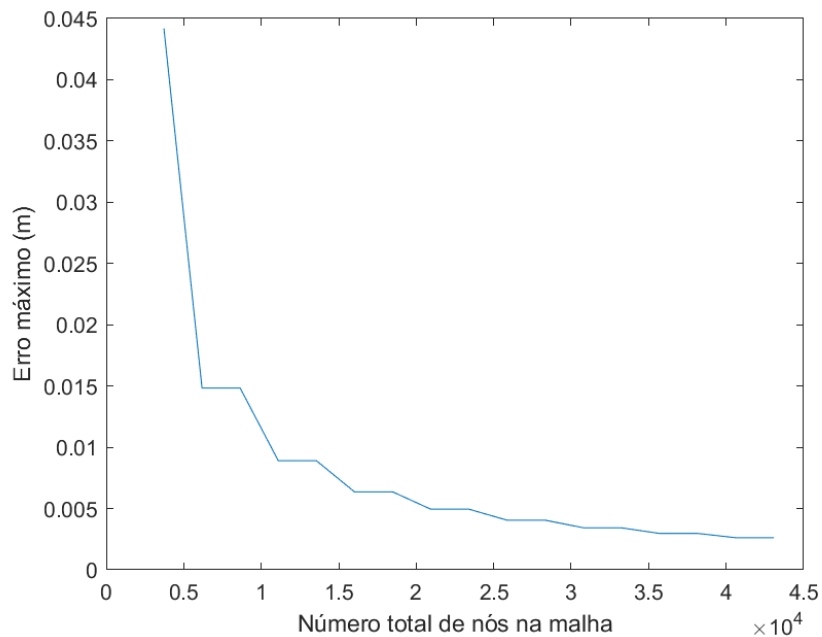
Após executar o procedimento para discretização  $h$  descrito na seção 3.5.2, obteve-se a eficiência e acurácia para cada incremento na discretização  $h$ . Os resultados foram os dispostos nos gráficos das figuras Figura 17), Figura 15) e Figura 16).

Figura 14 – Gráfico do tempo de processamento pelo erro máximo para discretização  $h$



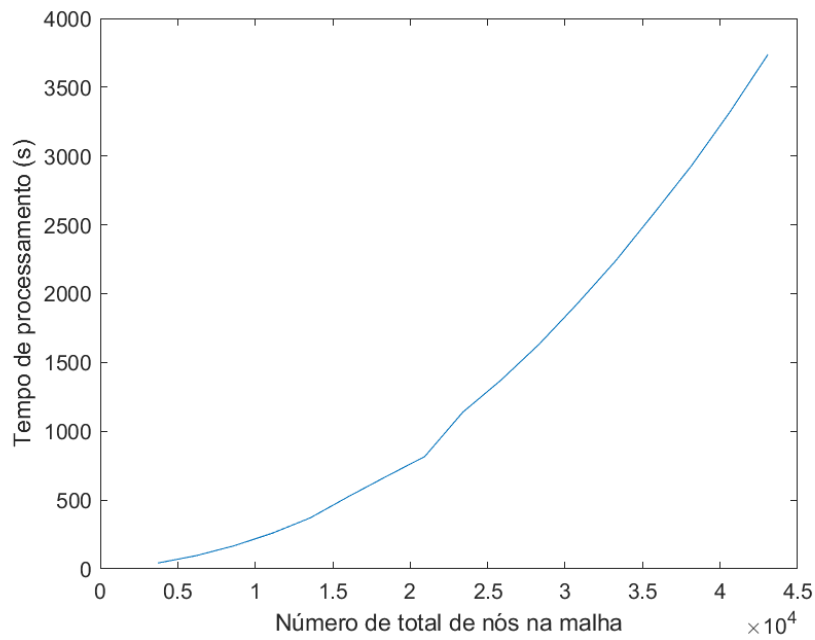
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 15 – Gráfico do numero de nós pelo erro máximo para discretização  $h$



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 16 – Gráfico do numero de nós pelo tempo de processamento para discretização h



Fonte: Elaborada pelo autor

O aumento no número de elementos e consequentemente no número de nós, resultou em uma redução do erro máximo entre uma iteração e a seguinte, como pode ser observado no gráfico da figura Figura 15.

No entanto a redução no erro diminui a cada iteração, além disso o aumento no numero de nós causou um aumento no tempo de processamento, como pode ser observado no gráfico da figura Figura 16.

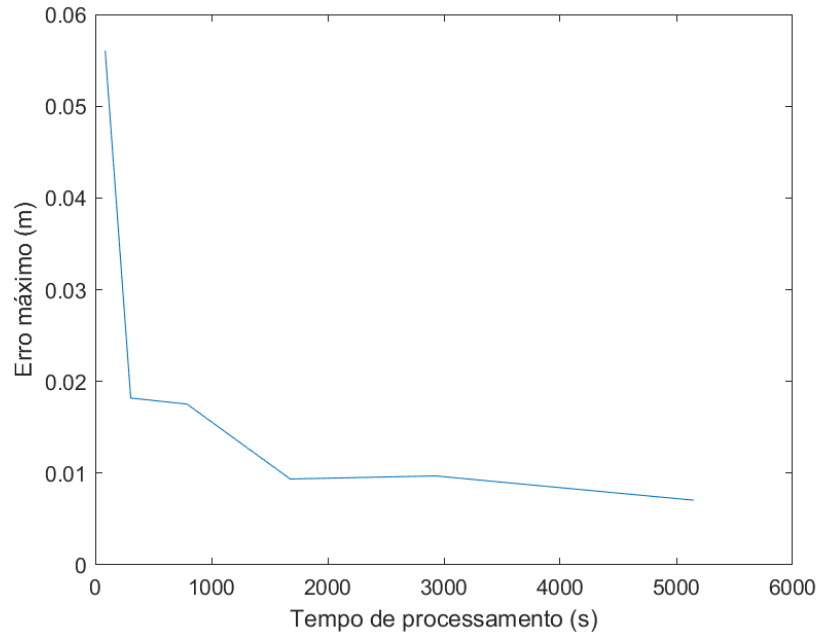
Por isso para obter um resultado com muita acurácia é necessário um grande tempo de processamento, como pode ser observado no gráfico da figura Figura 17.

Devido ao tempo muito alto necessário para obter resultados mais precisos utilizando a discretização h, não foi possível obter o resultado com erro de  $10^{-3}$ , sendo necessário parar manualmente antes do termino do loop.

### 4.3 DISCRETIZAÇÃO P

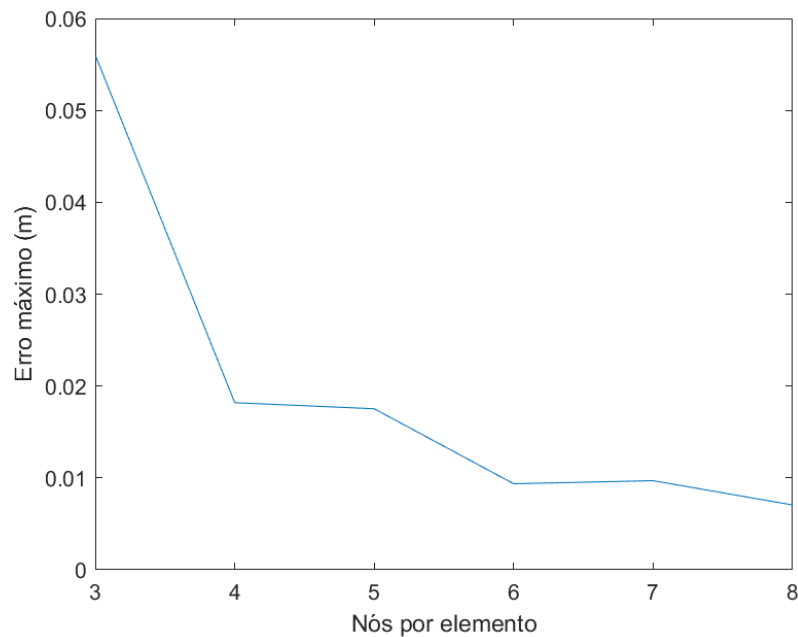
Após executar o procedimento para discretização p descrito na seção 3.5.3, obteve-se a eficiência e acurácia para cada incremento na discretização p. Os resultados foram os dispostos nos gráficos das figuras Figura 17), Figura 15) e Figura 16).

Figura 17 – Gráfico do tempo de processamento pelo erro máximo para discretização p



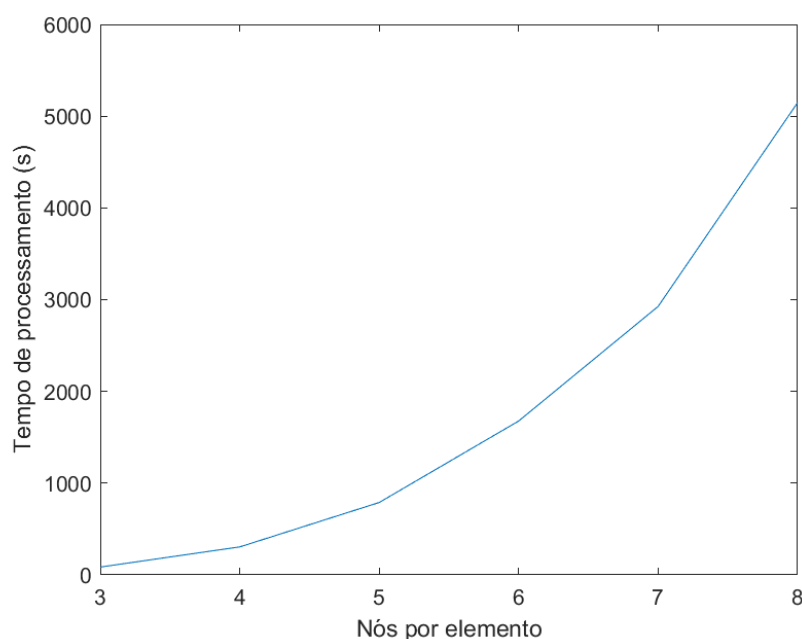
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 18 – Gráfico do numero de nós por elemento pelo erro máximo para discretização p



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 19 – Gráfico do numero de nós por elemento pelo tempo de processamento para discretização p



Fonte: Elaborada pelo autor

O aumento no número de nós por elemento resultou em uma redução do erro máximo entre uma iteração e a seguinte, como pode ser observado no gráfico da figura Figura 18.

No entanto a redução no erro diminui a cada iteração, além disso o aumento no numero de nós por elemento causou um aumento no tempo de processamento, como pode ser observado na figura Figura 19.

Por isso para obter um resultado com muita acurácia é necessário um grande tempo de processamento.

Devido ao tempo muito alto necessário para obter resultados mais precisos utilizando a discretização p, não foi possível obter o resultado com erro de  $10^{-3}$ , sendo necessário parar manualmente antes do termino do loop. Por isso não foi possível obter os resultados com o número de nós por elemento acima de 8.

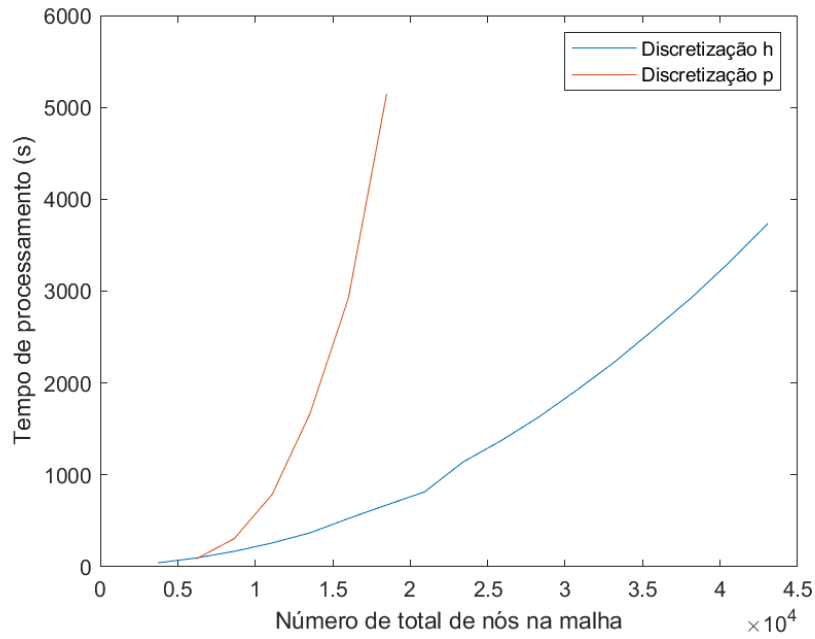
#### 4.4 COMPARAÇÃO ENTRE A DISCRETIZAÇÃO H E A DISCRETIZAÇÃO P

Após a obtenção dos resultados para cada tipo de discretização foram plotados os resultados sobrepostos de ambos os tipos para possibilitar a comparação.

Para que seja possível a comparação, será utilizado o número total de nós na malha como parâmetro de comparação, já que ambos os tipos de discretização resultam na variação do numero de nós na malha.

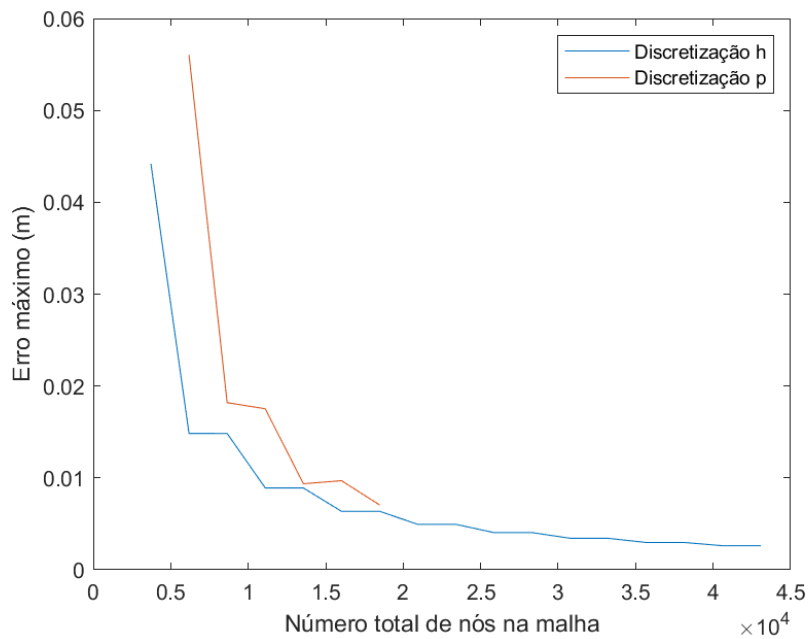
Os gráficos que comparam os dois tipos de discretização baseado no número total de nós na malha foram dispostos nas figuras Figura 20 e Figura 21.

Figura 20 – Gráfico do número de nós na malha pelo tempo de processamento para os dois tipos de discretização



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 21 – Gráfico do numero de nós na malha pelo erro máximo para os dois tipos de discretização



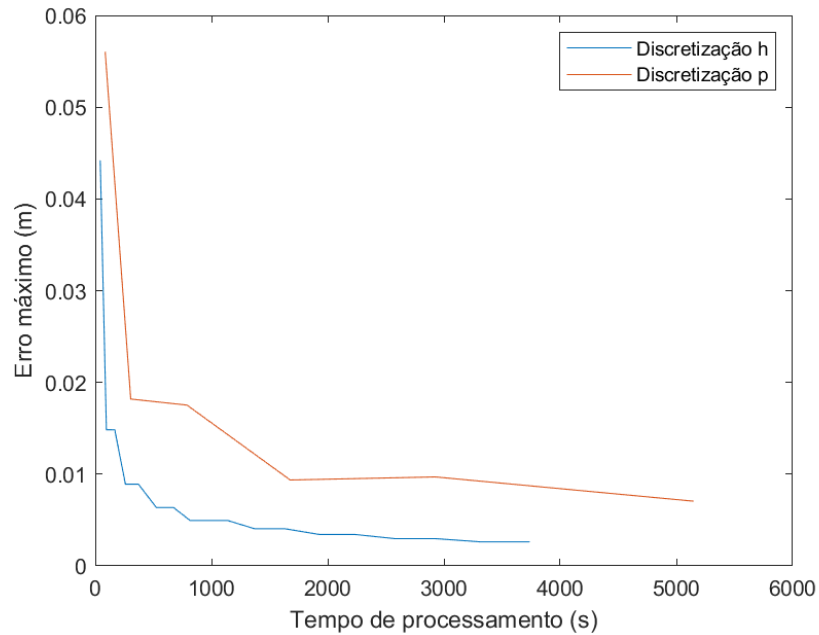
Fonte: Elaborada pelo autor

O erro máximo dos dois tipos de discretização reduzem com o aumento no numero de nós, como pode ser observado no gráfico da figura Figura 21.

No entanto o aumento no número de nós resultou em um aumento mais rápido no tempo de processamento para a discretização p, como mostrado no gráfico da figura Figura 20, aumentando o tempo necessário para obter o mesmo erro, como mostrado no gráfico da figura Figura 22.

Isso impossibilitou a obtenção de mais dados da discretização p.

Figura 22 – Gráfico do tempo de processamento pelo erro máximo para os dois tipos de discretização



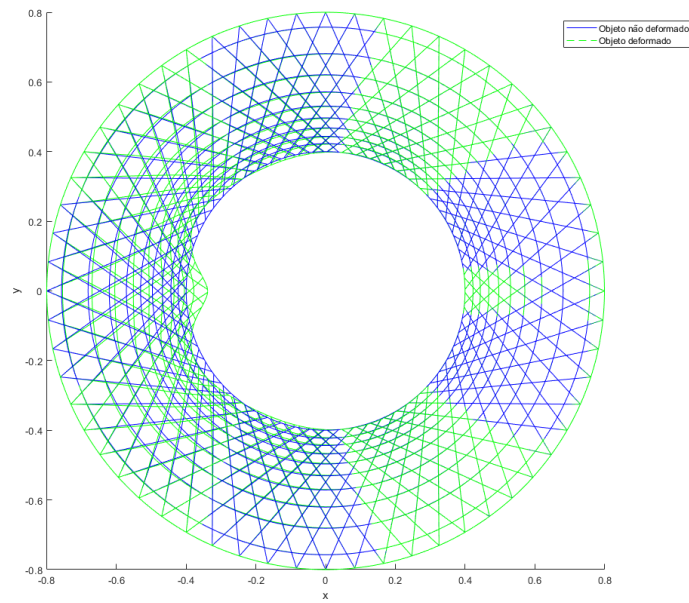
Fonte: Elaborada pelo autor

#### 4.5 ESTRUTURA DEFORMADA

A forma deformada foi obtida utilizando a discretização h com 5 subdivisões no macro elemento, que obteve um erro máximo igual a  $8,9 \cdot 10^{-3}$ . Essa escolha se deve ao fato dessa ser a discretização mais rápida que obteve um resultado com um erro máximo menor que  $10^{-2}$

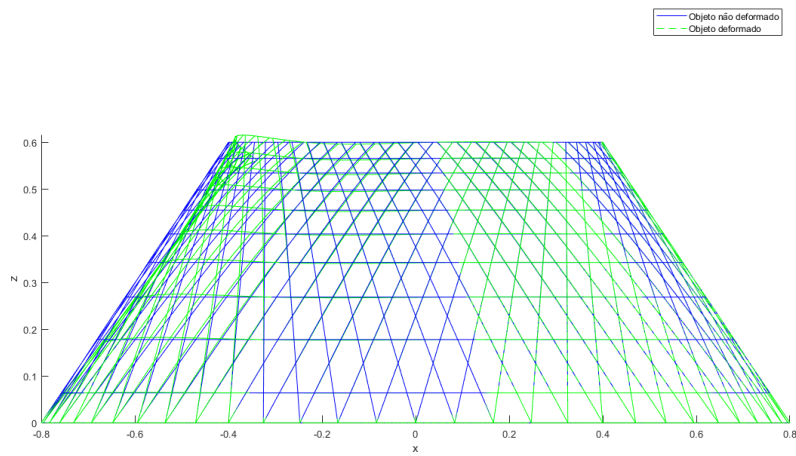
O resultado do MEF, para a estrutura analisada com as condições de contorno e forças aplicadas foram o disposto nas figuras Figura 23, Figura 24, Figura 25.

Figura 23 – Comparação entre a forma original e deformada vista superior



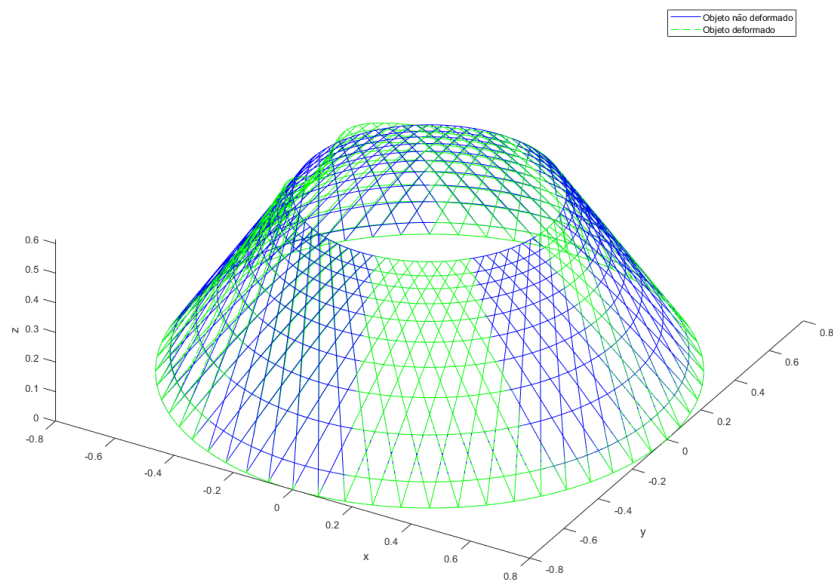
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 24 – Comparação entre a forma original e deformada vista lateral



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 25 – Comparação entre a forma original e deformada vista isométrica



Fonte: Elaborada pelo autor

Com isso é possível observar que a força compressiva distribuída aplicada gerou um deslocamento no sentido oposto ao da força aplicada no topo da estrutura.

## 5 CONCLUSÃO

Esse estudo tinha como objetivo comparar a eficiência do MEF clássico aplicado a estruturas reticuladas aeroespaciais utilizando a discretização  $h$  e a discretização  $p$ , para isso foram atingidos todos os objetivos específicos dispostos na seção 1.3.2.

O MEF foi implementado de forma satisfatória tendo obtido como maior erro  $-0.2619\%$  quando comparado com o Ansys, como demonstrado na tabela 8.

O método também obteve um resultado da forma deformada, demonstrando o funcionamento correto da malha. E a forma deformada se assemelha a forma deformada apresentada nos artigos (PROROKA; LYPOVSKYI, 2019) e (VASILIEV; BARYNIN; RASIN, 2001) para estruturas reticuladas semelhantes a utilizada nesse estudo, portanto o MEF gerou um resultado satisfatório.

Tanto a discretização  $h$  quanto a discretização  $p$  não conseguiram obter um erro menor que  $10^{-3}$ , isso se deve ao aumento muito rápido no tempo de processamento necessário, que inviabilizou a obtenção de resultados mais precisos.

A discretização  $h$  se mostrou mais eficiente para o MEF aplicado a estruturas reticuladas aeroespaciais, obtendo o resultado de forma precisa e rápida quando comparado a discretização  $p$ , isso pode ser observado no gráfico da figura Figura 22.

A diferença de eficiência temporal está relacionada a diversos fatores sendo os principais dispostos a seguir:

- O aumento no número de nós por elemento resulta no aumento do grau dos polinômios das funções de forma por isso os sistemas de equações para obter as funções de forma aumentam e se tornam mais lentos para serem resolvidos, apesar disso devem ser resolvidos para cada elemento presente na malha.
- O aumento no número de nós por elemento também aumenta o tamanho da matriz de rigidez local, aumentando o número de operações para posicionar corretamente a matriz de rigidez local de cada elemento na matriz de rigidez global, tornando esse processo mais lento.

Esses fatores por sua vez não afetam o MEF quando utilizado a discretização  $h$ .

Com isso é possível concluir que a discretização  $h$  é mais eficiente para o MEF clássico quando aplicado a estruturas reticuladas aeroespaciais semelhantes a utilizada nesse trabalho.

## REFERÊNCIAS

- COURANT, R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. **Bulletin of the American Mathematical Society**, American Mathematical Society, v. 49, n. 1, p. 1 – 23, 1943. Disponível em: <<https://doi.org/>>.
- CUNHA, M. C. C. **MÉTODOS NUMÉRICOS**. 2. ed. [S.l.]: Editora da Unicamp, 2003.
- FARHADINIA, M. et al. Analysis investigation of composite lattice conical shell as satellite carrier adapter for aerospace applications. **Int. J. Adv. Appl. Math. and Mech**, v. 1, n. 4, p. 40–51, Mar 2014. Disponível em: <[http://www.ijaamm.com/uploads/2/1/4/8/21481830/v1n4\\_paper-5.pdf](http://www.ijaamm.com/uploads/2/1/4/8/21481830/v1n4_paper-5.pdf)>.
- FATELO, J. P.; MARTINS-FERREIRA, N. Curvas geodésicas em superfícies. **core.ac.uk**, v. 1, n. 4, p. 40–51, Dec 2013. Disponível em: <[https://core.ac.uk/display/61798055?utm\\_source=pdf&utm\\_medium=banner&utm\\_campaign=pdf-decoration-v1](https://core.ac.uk/display/61798055?utm_source=pdf&utm_medium=banner&utm_campaign=pdf-decoration-v1)>.
- FERREIRA, A. J. M. **Matlab codes for finite element analysis**. [S.l.]: Springer, 2014. ISBN 9789400789555.
- HIBBELER, R. C. **Resistencia dos materiais**. 7. ed. [S.l.]: Pearson Educacion, 2013. ISBN 9781512940824.
- HUYBRECHTS, S. M.; HAHN, S. E.; MEINK, T. E. Grid stiffened structures: a survey of fabrication, analysis and design methods. In: **Proceedings of the 12th international conference on composite materials (ICCM/12)**. [S.l.: s.n.], 1999. p. 1–10.
- LIU, W. K.; LI, S.; PARK, H. S. Eighty years of the finite element method: Birth, evolution, and future. **Archives of Computational Methods in Engineering**, v. 29, n. 6, p. 4431–4453, Jun 2022.
- MOROZOV, E.; LOPATIN, A.; NESTEROV, V. Buckling analysis and design of anisogrid composite lattice conical shells. **Composite Structures**, v. 93, n. 12, p. 3150–3162, 2011. ISSN 0263-8223. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822311002352>>.
- PROROKA, V. A.; LYPOVSKYI, V. I. Prospects of anisogrid lattice structures using in adapters of launch vehicle. **Journal of Rocket-Space Technology**, v. 27, n. 4, p. 25–34, Dec 2019.
- STEIN, E. History of the finite element method – mathematics meets mechanics – part i: Engineering developments. **The History of Theoretical, Material and Computational Mechanics - Mathematics Meets Mechanics and Engineering**, p. 399–442, 2014.
- TURNER, M. J. et al. Stiffness and deflection analysis of complex structures. **Journal of the Aeronautical Sciences**, v. 23, n. 9, p. 805–823, Sep 1956.
- VASILIEV, V.; BARYNIN, V.; RASIN, A. Anisogrid lattice structures – survey of development and application. **Composite Structures**, v. 54, n. 2, p. 361–370, 2001. ISSN 0263-8223. Third International Conference on Composite Science and Technology. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822301001118>>.
- WINCKEL, G. v. **Legendre-Gauss Quadrature Weights and Nodes**. 2023. Disponível em: <<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/4540-legendre-gauss-quadrature-weights-and-nodes>>.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The finite element method**. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2000. ISBN 0750650494.