

FELIPE FIORIM CARVALHO SILVA

**Implementação de um algoritmo acelerador para simular numericamente o
desenvolvimento de esteira de aeronaves utilizando métodos lagrangianos**

Felipe Fiorim Carvalho Silva

**Implementação de um algoritmo acelerador para simular numericamente o
desenvolvimento de esteira de aeronaves utilizando métodos lagrangianos**

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em engenharia mecânica da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em engenharia mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Alex Mendonça Bimbato

S586i	Silva, Felipe Fiorim Carvalho Implementação de um algoritmo acelerador para simular numericamente o desenvolvimento de esteira de aeronaves utilizando métodos Lagrangianos / Felipe Fiorim Carvalho Silva – Guaratinguetá, 2019. 62 f : il. Bibliografia: f. 58-60 Trabalho de Graduação em Engenharia Mecânica – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2019. Orientador: Prof. Dr. Alex Mendonça Bimbato 1. Métodos de simulação. 2. Lagrange, Funções de. 3. Algoritmos de computador. I. Título. CDU 681.9.017
-------	--

Luciana Máximo

Bibliotecária CRB-8/3595

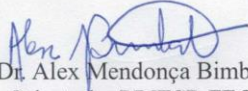
FELIPE FIORIM CARVALHO SILVA

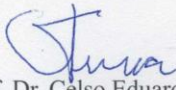
ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO
PARTE DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE
GRADUADO EM ENGENHARIA MECÂNICA

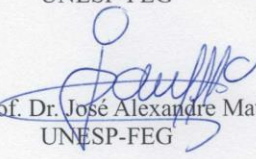
APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA


Prof. Dr. Marcelo Sampaio Martins
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. Alex Mendonça Bimbato
Orientador/UNESP-FEG


Prof. Dr. Celso Eduardo Tuna
UNESP-FEG


Prof. Dr. José Alexandre Matelli
UNESP-FEG

Novembro de 2019

dedico este trabalho
de modo especial, à minha família

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus, fonte da vida e da graça. Agradeço pela minha vida, minha inteligência, minha família e meus amigos;

ao meu orientador, Prof. Dr Alex Mendonça Bimbato que jamais deixou de me incentivar. Sem a sua orientação, dedicação e auxílio, o estudo aqui apresentado seria praticamente impossível;

aos meus pais José Eduardo e Ana Helena, que apesar das dificuldades enfrentadas, sempre incentivaram meus estudos.

“Só sabemos com exatidão quando sabemos pouco; à medida que vamos adquirindo conhecimento, instala-se a dúvida.”

Goethe

RESUMO

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de um algoritmo acelerador para ser incorporado a um código computacional (escrito em linguagem de programação FORTRAN) utilizado para simular as estruturas vorticosas desprendidas das asas de uma aeronave durante o seu procedimento de pouso ou de decolagem. O método numérico utilizado neste trabalho é o método de vórtices discretos, certamente o representante mais conhecido de uma classe de métodos numéricos mais geral, os denominados métodos de partículas. Diferentemente dos métodos numéricos clássicos, que discretizam o domínio fluido através de uma malha, os métodos de partículas discretizam uma propriedade do escoamento (no caso do método de vórtices discretos discretiza-se a vorticidade). Como o foco principal do trabalho está voltado para o desenvolvimento de um algoritmo acelerador, as fronteiras sólidas (pista de pouso e asas da aeronave) não são consideradas; trabalha-se apenas com as estruturas vorticosas contrarrotativas desprendidas a partir das asas da aeronave. Para tanto, vórtices discretos de Lamb são utilizados para discretizar tais estruturas vorticosas; os vórtices discretos são, então, submetidos aos processos de advecção e de difusão da vorticidade, visando simular a dinâmica de tal propriedade ao longo do tempo. Em termos de tempo computacional, a etapa mais onerosa da simulação numérica é a da advecção da vorticidade, pois envolve o cálculo do campo de velocidades do escoamento, o qual é determinado através da lei de Biot-Savart; nesta etapa, o processador efetua N^2 operações para cada N vórtices discretos utilizados para representar o par contrarrotativo de estruturas vorticosas desprendidas da asa da aeronave. O principal objetivo deste trabalho consiste em implementar o método de multipolos rápidos em associação com o método de vórtices discretos para reduzir o tempo gasto no cálculo do campo de velocidades do escoamento; estima-se que, neste último caso, para cada N vórtices discretos presentes no domínio fluido, o processador faça $N \log N$ operações ou, até mesmo, apenas N operações.

PALAVRAS-CHAVE: Método de vórtices discretos. Método de multipolos rápidos. Descrição lagrangiana. Algoritmo acelerador.

ABSTRACT

This work presents the development of an accelerator algorithm to be incorporated into a computational code (written in FORTRAN programming language) used to simulate the vortical structures detached from an aircraft's wings during its landing or takeoff procedure. The numerical method used in this work is the discrete vortex method, certainly the best-known representative of a more general class of numerical methods, so-called particle methods. Unlike classical numerical methods, which discretize the fluid domain through a mesh, the particle methods focus on a property of the flow (in the case of the discrete vortex method, the vorticity is discretized). As the main focus of the work is on the development of an accelerator algorithm, the solid boundaries (airstrip and wings of the aircraft) are not considered in this work; Only the vortical counter-rotating structures detached from the wings of the aircraft are used. For this purpose, discrete Lamb vortices are used to discretize such vortical structures; The discrete vortices are then submitted to the advection and diffusion processes of vorticity, in order to simulate the dynamics of such property over time. In terms of computational time, the most costly step of the numerical simulation is that of the advection of vorticity, since it involves the calculation of the velocity field of the flow, which is determined by Biot-Savart's law; In this step, the processor performs N^2 operations for each N discrete vortex used to represent the counter-rotating pair of vortical structures detached from the wing of the aircraft. The main objective of this work is to implement the fast multipoles method in association with the discrete vortices method to reduce the time spent in the calculation of the velocity field of the flow; It is estimated that in the latter case, for each N discrete vortex present in the fluid domain, the processor does $N \log N$ operations or even N operations only.

KEYWORDS: Discrete vortex method. Fast multipole method. Lagrangian approach. Accelerator algorithm.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Esboço da esteira formada a jusante de uma aeronave durante um procedimento de decolagem.....	12
Figura 2 – Representação do problema que será resolvido numericamente, onde $2d$ representa a envergadura da asa da aeronave.....	14
Figura 3 – Comportamento da velocidade tangencial induzida por um vórtice de Lamb.....	20
Figura 4 – Níveis de refinamento um (quatro caixas), dois (dezesesseis caixas), três (sessenta e quatro caixas) e quatro (duzentas e cinquenta e seis caixas).....	26
Figura 5 – Representação da região onde os campos de velocidade distante e próximo são calculados... ..	27
Figura 6 – Fluxograma esquemático do método de multipolos rápidos.....	28
Figura 7 – Domínio fluido discretizado em diferentes níveis de refinamento	30
Figura 8 – Numeração das caixas filhas em relação às respectivas caixas pais	31
Figura 9 – Definição de caixas vizinhas e de caixas distantes em relação a uma caixa em que se deseja contabilizar a influência das demais para calcular o campo de velocidades do escoamento (caixa B).....	32
Figura 10 – Determinação do domínio computacional	34
Figura 11 – Representação da subida pela árvore de níveis, conhecida como Upward Pass ..	37
Figura 12 – Representação esquemática da etapa Particle to Multipole (P2M).....	38
Figura 13 – Representação esquemática da etapa Multipole to Multipole.....	40
Figura 14 – Representação da descida pela árvore de níveis, conhecida como Downward Pass.....	42
Figura 15 – Representação esquemática da etapa Multipole to Local	43
Figura 16 – Representação esquemática da etapa Local to Local	44
Figura 17 – Representação esquemática da etapa Local to Particle	45
Figura 18 – Representação das caixas que contribuem no cálculo do campo de velocidades distante e do campo de velocidades próximo	46
Figura 19 – Desenvolvimento do par contrarrotativo de estruturas vorticosas desprendidos das pontas das asas de uma aeronave.....	51
Figura 20 – Tempo de simulação numérica dispendido em função do número de vórtices discretos presentes no domínio fluido	53
Figura 21 – Tempo dispendido na execução do cálculo do campo de velocidades próximo via método de multipolos rápidos	55
Figura 22 – Tempo de processamento de cada etapa do método de multipolos rápidos	55

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros das simulações utilizando o método de multipolos rápidos (FMM)...	49
Tabela 2 – Número de vórtices discretos utilizados em cada simulação numérica.....	50
Tabela 3 – Comparação entre as metodologias de teste	52
Tabela 4 – Comparação entre o método de multipolos rápidos e a lei de Biot-Savart para o cálculo do campo de velocidades do escoamento	54

LISTA DE SÍMBOLOS

d	Envergadura da aeronave
Γ	Circulação do vórtice
L	Força de sustentação da asa
b	Envergadura da aeronave
ρ	Massa específica do fluido
U_∞	Velocidade do escoamento incidente
μ	Viscosidade absoluta do fluido
ν	Viscosidade cinemática do fluido
p	Pressão do fluido
Re	Número de Reynolds
w	Vorticidade
u	Velocidade do fluido
r_{kj}	Raio do núcleo do vórtice de Lamb
div	Número de linhas e colunas de um determinado nível de refinamento
znb	Número máximo de caixas no nível de refinamento mais fino
$nbox$	Numeração de uma caixa
$nchild$	Caixa filha
Lx	Comprimento em x do domínio computacional
Ly	Comprimento em y do domínio computacional
$dx dy$	Comprimento do lado da caixa
$pvortx$	Posição em x de um vórtice discreto
$pverty$	Posição em y de um vórtice discreto
$linev$	Linha em que um vórtice discreto se encontra
$coluna$	Coluna em que um vórtice discreto se encontra
$boxn$	Número de um vórtice discreto na contagem geral
$countern$	Contador interno de vórtices para uma caixa
ϕ	Influência de um aglomerado de partículas em um ponto
q	Intensidade de um vórtice discreto
Q	Intensidade de um aglomerado de partículas em um ponto
at	Coeficiente do multipolo (Upward Pass)
bl	Coeficiente do multipolo (Downward Pass)
$cbox$	Centroide de uma caixa

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	15
2.1	EQUAÇÕES GOVERNANTES	17
2.2	SOLUÇÃO DO PROBLEMA: MÉTODO DE VÓRTICES DISCRETOS	18
2.2.1	A Advecção da Vorticidade	19
2.2.2	A Difusão da Vorticidade	21
3	METODOLOGIA: MÉTODO DE MULTÍPOLOS RÁPIDOS	24
3.1	CONCEITOS PRELIMINARES	25
3.2	ETAPAS DE PRÉ-PROCESSAMENTO	28
3.2.1	Pré-processamento fixo	28
3.2.2	Pré-processamento contínuo	33
3.3	UPWARD PASS	36
3.3.1	Particle to Multipole (P2M)	37
3.3.2	Multipole to Multipole (P2M)	40
3.4	DOWNWARD PASS	42
3.4.1	Multipole to Local (M2L) e Local to Local (L2L)	42
3.4.2	Local to Particle (L2P)	45
3.5	CAMPO DE VELOCIDADES PRÓXIMO	47
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	49
4.1	DESENVOLVIMENTO DA ESTEIRA DE VÓRTICES	50
4.2	AVALIAÇÃO DO CUSTO COMPUTACIONAL ENVOLVIDO NAS SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	52
4.3	AVALIAÇÃO DO TEMPO DISPENDIDO EM CADA ETAPA DO MÉTODO DE MULTÍPOLOS RÁPIDOS	54
5	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	57
	REFERÊNCIAS	58
	APÊNDICE A – Fluxograma do funcionamento do método de múltipolos rápidos	61

1 INTRODUÇÃO

É notável o crescimento do tráfego aéreo em nível mundial, seja devido à globalização, redução de preço das passagens em relação ao seu histórico ou, até mesmo, por mais pessoas terem condições financeiras de utilizar este meio de transporte. Isso contribui de maneira considerável para o aumento das operações de pouso e de decolagem, o que exige um aumento na eficiência dos aeroportos, pois a diminuição do tempo entre decolagens e pousos se faz necessária.

A união de grandes aeronaves com o aumento do tráfego aéreo torna os estudos sobre a formação de esteiras de vórtices, que são geradas nas asas dos aviões durante os procedimentos de pouso e de decolagem, imprescindíveis para as empresas que administram complexos aeroportuários. Na figura 1 apresenta-se a esteira formada a jusante de uma aeronave durante a sua decolagem.

Figura 1 - Esboço da esteira formada a jusante de uma aeronave durante um procedimento de decolagem



Fonte: Aviões e Música – Cuidados na decolagem (2012).

Este tipo de escoamento é regido por múltiplas variáveis, o que torna impossível a obtenção de uma solução analítica para tal problema. Um tipo de solução são os métodos experimentais, porém, estes não fornecem todas as respostas, dado que nem todas as situações podem ser previstas experimentalmente, seja por razões geométricas, seja pelo elevado custo envolvido em tais experimentos.

Em função das razões expostas anteriormente, os métodos numéricos passam a ser uma boa abordagem para este tipo de situação. Esse tipo de solução vem ganhando espaço, pois oferece, com alto grau de fidelidade em relação ao caso real, resultados razoáveis de

problemas complexos.

Existem duas categorias principais de métodos numéricos: os eulerianos e os lagrangianos. O primeiro método, o euleriano, consiste em discretizar o domínio fluido através de malhas, sendo as variáveis ou grandezas de interesse calculadas nas malhas. O método de diferenças finitas, o método de elementos finitos e o método de volumes finitos são exemplos clássicos deste tipo de abordagem.

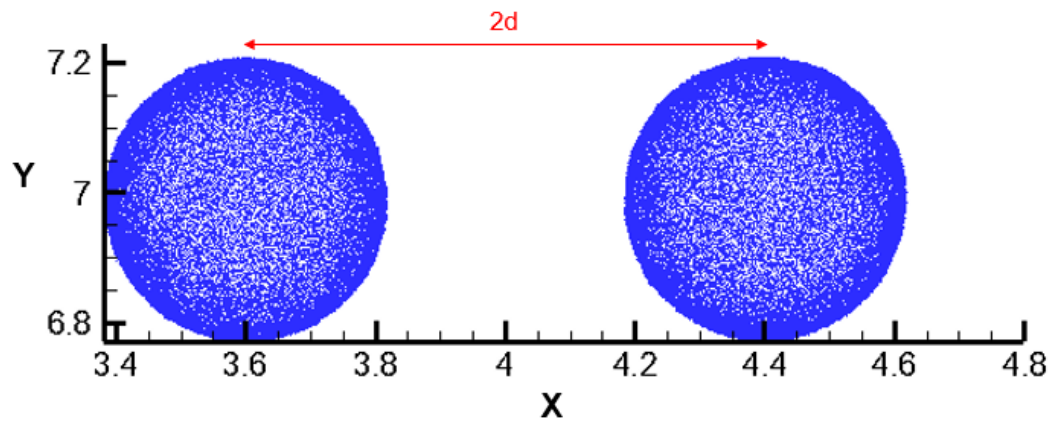
O segundo método, o lagrangiano, consiste em discretizar uma propriedade do escoamento em partículas, e não o domínio fluido. Desta forma, cada partícula discretizada é acompanhada durante cada incremento de tempo da simulação numérica, individualmente. O método de vórtices discretos (MVD) utilizado neste trabalho é um exemplo de abordagem lagrangiana, pois discretiza a vorticidade presente no escoamento representando-a por uma nuvem de vórtices discretos de Lamb. Assim, para simular a dinâmica da vorticidade, os vórtices discretos são submetidos aos processos de advecção e de difusão da vorticidade.

Em termos de tempo computacional, o processo de advecção da vorticidade é o mais dispendioso, pois envolve o cálculo do campo de velocidades do escoamento através da lei de Biot-Savart. Este processo envolve N^2 operações para cada N^2 vórtices discretos utilizados para representar o par contrarrotativo de estruturas vorticosas desprendidas da asa de uma aeronave (veja a figura 2). É intuitivo que, quanto maior o número de vórtices discretos utilizados na simulação numérica, melhor será a representação do campo de vorticidades presente no escoamento.

É o alto custo computacional inerente ao cálculo do campo de velocidades do escoamento que motiva o desenvolvimento do presente trabalho. Desta maneira, o principal objetivo deste trabalho é a implementação do método de multipolos rápidos, FMM, do inglês *Fast Multipole Method*, para ser usado em associação ao método de vórtices discretos. Estima-se que o método de multipolos rápidos possa reduzir as N^2 operações originais para $N \log N$ operações ou, até mesmo, para N operações reduzindo, assim, o tempo computacional necessário para a determinação do campo de velocidades do escoamento.

Devido à complexidade e à dificuldade na implementação do método de multipolos rápidos, as fronteiras sólidas (pista do aeroporto e asas da aeronave) são desconsideradas; trabalha-se, somente, com as estruturas vorticosas contrarrotativas, tal como mostrado na figura 2.

Figura 2 - Representação do problema que será resolvido numericamente, onde $2d$ representa a envergadura da asa da aeronave



Fonte: Produção própria do autor.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

É inegável que a redução no tempo dispendido entre operações de pouso e de decolagem subsequentes aumentam a eficiência dos aeroportos e, também, impactam financeiramente nas empresas administradoras de tais complexos aeroportuários. Entretanto, a segurança de tais operações não pode estar subordinada ao aumento indiscriminado de eficiência para ganho financeiro. Segundo Machol (1993), um problema que precisa ser evitado é aquele em que a esteira remanescente de uma aeronave interfere na operação seguinte (pouso ou decolagem) Zheng e Ash (1996) argumentam que os vórtices livres que se formam nas pontas das asas possuem circulação que é proporcional à dimensão e à velocidade da aeronave. Estas esteiras permanecem por distâncias significativas.

Zheng (1993) analisa a influência do número de Reynolds no desenvolvimento da esteira de vórtices em relação ao solo. Este estudo foi feito através de expansões assintóticas combinadas para inicializar as simulações numéricas feitas com o método de diferenças finitas (método euleriano). O estudo se restringiu ao regime laminar, pois dificuldades relacionadas às condições de contorno impediram o estudo do escoamento turbulento.

Moni et al. (2011), continuando o trabalho iniciado por Hirata et al. (2002), utilizaram o método de vórtices discretos de Lamb para representar o par de vórtices de ponta de asa, considerando também a vorticidade gerada na pista do aeroporto. Os resultados melhoraram significativamente em relação aos estudos anteriores, que considerou somente um par de vórtices discretos e, portanto, não simulava a deformação das estruturas vorticosas ao entrarem em contato com a pista.

Como o objetivo principal do presente trabalho é o de reduzir os tempos associados às simulações numéricas, um algoritmo do método de multipolos rápidos (Greengard & Rokhlin, 1987) é utilizado. Tal algoritmo é listado como um dos dez melhores já criados no século vinte (Cipra, 2000), e mais detalhes da implementação do referido método para a solução de outros problemas de engenharia podem ser obtidos em Carrier et al. (1988), Cheng et al. (1999), Darve (2000), Nishimura (2002), Ogami (2002), Gumerov e Duraiswami (2005), Wolf (2011), Ricciardi et al. (2017a) e Ricciardi et al. (2017b). No presente trabalho, o método de multipolos rápidos possui a função de reduzir o tempo de simulação através de uma redução no número de operações que utilizam a lei de Biot-Savart, quando do cálculo do campo de velocidades do escoamento.

Originalmente, o cálculo do campo de velocidades se dá, exclusivamente, pela lei de Biot-Savart, de maneira que cada vórtice discreto presente na nuvem de vórtices induz

velocidade em todos os outros vórtices discretos. Esse cálculo é oneroso por ser realizado em cada incremento de tempo da simulação numérica. A principal característica do método de multipolos rápidos é reduzir, ao máximo possível, a utilização da lei de Biot-Savart, substituindo este cálculo caro (em termos de tempo computacional) por expansões em série de Taylor e interações agrupadas de vórtices discretos.

Destaca-se que este trabalho utiliza a mesma abordagem de Moni et al. (2011), porém, a pista é eliminada para simplificar a implementação conjunta do método de vórtices discretos e do método de multipolos rápidos.

O problema consiste em simular o desenvolvimento de um par de vórtices desprendido a partir das pontas das asas de uma aeronave, denominados vórtices livres. Para cumprir esta meta, a técnica numérica escolhida é o método de vórtices discretos (MVD) aliado ao método de multipolos rápidos (FMM). Assim, cada vórtice discreto de Lamb (Panton, 1984) utilizado para representar o par de vórtices livres possui uma circulação Γ (com sinais opostos) dada pela lei de Kutta-Joukowski:

$$\Gamma = \frac{L}{b\rho U_{\infty}} \quad (1)$$

sendo L a força de sustentação das asas, b a envergadura da aeronave, ρ a massa específica do fluido em que a aeronave está imersa e U_{∞} a velocidade do escoamento incidente.

Para tornar a análise do problema viável do ponto de vista numérico, é preciso impor algumas hipóteses a fim de simplificar o caso estudado. As hipóteses adotadas neste trabalho são:

- H.1) Considera-se o fluido newtoniano, ou seja, a tensão cisalhante aplicada ao fluido é diretamente proporcional à taxa de deformação sofrida por ele;
- H.2) As propriedades do fluido (massa específica, ρ , viscosidade absoluta, μ , e viscosidade cinemática, ν) são constantes;
- H.3) As forças de campo são desprezadas, pois elas não são importantes para o problema proposto;
- H.4) A região fluida é infinita e bidimensional;
- H.5) Assume-se que o escoamento é isotérmico e incompressível;

2.1 EQUAÇÕES GOVERNANTES

Tendo em vista as hipóteses listadas anteriormente, nota-se que o escoamento analisado é governado por duas equações: o princípio de conservação da massa (equação 2) e o princípio de conservação da quantidade de momento linear (equação 3).

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3)$$

Visando obter um ganho de generalidade, é preciso adimensionalizar as equações que governam o fenômeno estudado. Para tanto, define-se as seguintes grandezas características:

- comprimento característico: b
- velocidade característica: $U_\infty = \Gamma/b$

Fazendo uso das grandezas características, tomando-se o rotacional da equação 3 e, com o auxílio da equação 2, obtém-se a equação do transporte da vorticidade adimensionalizada, cuja versão bidimensional é dada por (Batchelor, 1967):

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \omega \quad (4)$$

Na equação 4, ω representa o único componente não nulo do vetor vorticidade e o número de Reynolds é definido por:

$$\text{Re} = \frac{\Gamma}{\nu} \quad (5)$$

Chorin (1973), através do "*Viscous Splitting Algorithm*" (Algoritmo de Separação da Parte Viscosa da equação do Transporte de Vorticidade), propôs um algoritmo que, em um mesmo incremento de tempo, os efeitos advectivos fossem calculados independentemente dos efeitos difusivos, simplificando a implementação numérica do método de vórtices discretos, o

qual é caracterizado por acompanhar individualmente todas as partículas de vorticidade ao longo do tempo (descrição lagrangiana).

Dessa forma, a equação da advecção da vorticidade fica:

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\partial\omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega = 0 \quad (6)$$

a qual é resolvida utilizando-se a sua versão lagrangiana ($D\omega/Dt = 0$), uma vez que o termo convectivo, $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega$, que é não-linear, é de difícil solução.

Por outro lado, a equação da difusão da vorticidade é dada por:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad (7)$$

Como mostra a presença do número de Reynolds, é no processo de difusão da vorticidade que os efeitos da viscosidade são levados em consideração no método de vórtices discretos.

Quando o intervalo de tempo tende a zero, $\Delta t \rightarrow 0$, a solução das equações 6 e 7 tende para a solução da equação 4.

2.2 SOLUÇÃO DO PROBLEMA: MÉTODO DE VÓRTICES DISCRETOS

A presença dos efeitos viscosos no problema formulado na seção 2.1 não permite que se obtenha solução analítica; assim, é adotada uma solução numérica via método de vórtices discretos.

O método de vórtices discretos consiste em uma técnica numérica de grande importância para simulações de escoamentos de fluidos considerando-se os efeitos da viscosidade, especialmente quando tais escoamentos são dependentes do tempo (presença de um campo de vorticidades). No caso do presente trabalho, estuda-se o desenvolvimento de um par de vórtices livres desprendidos das asas de uma aeronave.

Como se faz uso do método de vórtices discretos, o escoamento é analisado pela dinâmica da vorticidade e, conseqüentemente, deve-se calcular o campo de velocidades na posição ocupada por cada um dos vórtices discretos utilizados para representar os vórtices livres. Assim, cada vórtice discreto induz, em cada incremento de tempo da simulação numérica, velocidade em todos os outros vórtices discretos presentes na nuvem. Aqui fica

evidente o alto custo computacional empregado em tais simulações, uma vez que o tempo de simulação é proporcional ao quadrado do número de vórtices discretos presentes no domínio fluido, quando se faz uso da lei de Biot-Savart.

Por esta razão, a fim de reduzir o custo computacional e, conseqüentemente, diminuir o tempo necessário para a realização da simulação numérica, o método de multipolos rápidos é implementado em conjunto com o método de vórtices discretos.

Deste modo, é pertinente evidenciar, mais uma vez, a contribuição do presente trabalho: pretende-se desenvolver um algoritmo que seja capaz de implementar, dentro do algoritmo do método de vórtices discretos, o método de multipolos rápidos. Isto limita o uso da lei de Biot-Savart e, conseqüentemente, reduz substancialmente o tempo gasto no cálculo do campo de velocidades, podendo abaixar o número de operações para $N \log N$ ou, até mesmo, N .

2.2.1 A Advecção da Vorticidade

Com a utilização do "*Viscous Splitting Algorithm*" proposto por Chorin (1973), os efeitos advectivos são calculados independentemente dos efeitos difusivos, em cada incremento de tempo da simulação numérica.

Visando obter a solução da etapa advectiva, é necessário calcular o campo de velocidades do escoamento na posição ocupada por cada um dos vórtices discretos utilizados para representar o campo de vorticidades. No caso deste trabalho, o campo de velocidades é obtido, apenas, pela interação vórtice-vórtice. Se, por exemplo, a pista do aeroporto estivesse sendo representada, a fronteira sólida também contribuiria no cálculo do campo de velocidades.

A velocidade tangencial induzida em um vórtice discreto k , por um vórtice discreto j (u_{θ}^{kj}), comporta-se de acordo com a figura 3 (modelo do vórtice de Lamb); é importante mencionar que, quando $r_{kj} = 0$, não há autoindução.

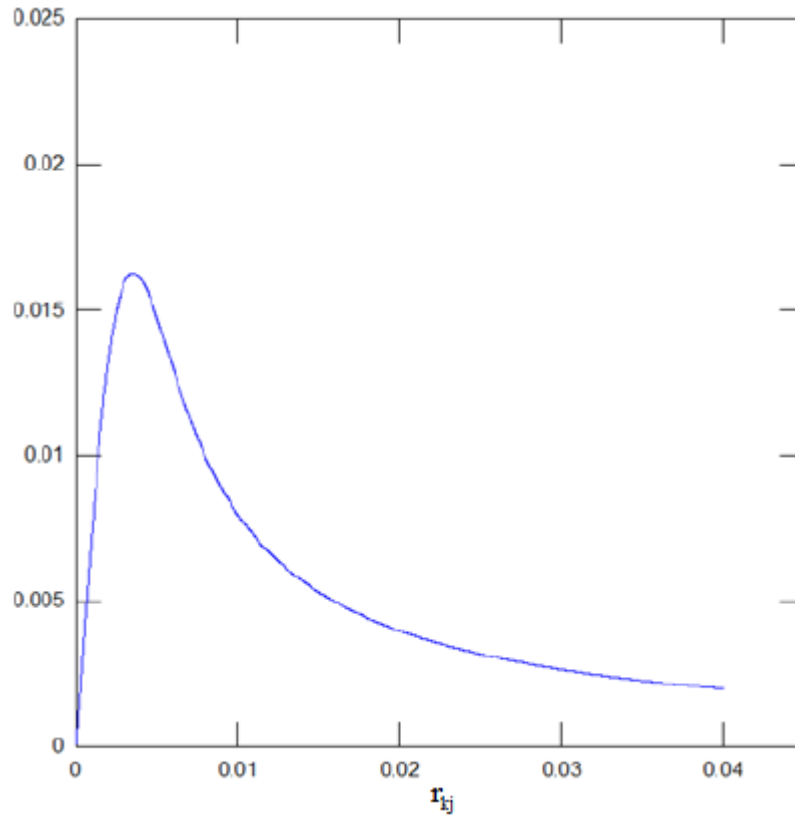
De maneira geral, os componentes nas direções x e y da velocidade total induzida no vórtice discreto k pelos demais vórtices discretos da nuvem são calculados pelas expressões:

$$u_{k_N} = \sum_{j=1}^N \Gamma_j U_{V_{k,j}}, j \neq k \quad (8)$$

$$v_{k_N} = \sum_{j=1}^N \Gamma_j V_{V_{k,j}}, j \neq k \quad (9)$$

sendo $U_{V_{k,j}}$ e $V_{V_{k,j}}$ as velocidades induzidas nas direções x e y , respectivamente, no vórtice discreto k pelo vórtice discreto j , se este último possuir intensidade, Γ_j , unitária.

Figura 3 - Comportamento da velocidade tangencial induzida por um vórtice de Lamb



Fonte: Bimbato (2012).

Para $r_{kj} > 0$, tem-se:

$$U_{V_{k,j}} = \frac{1}{2\pi} \frac{[y_k - y_j]}{[x_k - x_j]^2 + [y_k - y_j]^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{r_{kj}^2}{\sigma_0^2}\right) \right] \quad (10)$$

$$V_{V_{k,j}} = -\frac{1}{2\pi} \frac{[x_k - x_j]}{[x_k - x_j]^2 + [y_k - y_j]^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{r_{kj}^2}{\sigma_0^2}\right) \right] \quad (11)$$

Além da interação vórtice-vórtice, o exponencial presente na expressão da velocidade induzida pelo modelo do vórtice de Lamb (equações 10 e 11) contribui para tornar a lei de Biot-Savart onerosa em termos de tempo de simulação. O método de multipolos rápidos consiste, basicamente, em limitar a utilização da lei de Biot-Savart (a utilização das equações 10 e 11 é reduzida a um mínimo possível).

O raio do núcleo do vórtice de Lamb, σ_0 , é calculado de acordo com os detalhes apresentados por Mustto (1998) e por (Bimbato, 2012).

Uma vez obtido o campo de velocidades, a posição de cada vórtice discreto em cada incremento de tempo na etapa advectiva pode ser calculada por diversos esquemas de avanço: esquemas de primeira ordem (esquema de Euler), esquemas de segunda ordem (Adams-Bashforth ou Runge-Kutta), etc. Neste trabalho o avanço advectivo é calculado pelo esquema de primeira ordem de Euler (Ferziger, 1981). Assim, utilizando este esquema, a nova posição de um vórtice discreto k , após um incremento de tempo Δt , nas direções x e y é dada, respectivamente, por:

$$\Delta x_{advect\tilde{a}\tilde{o},k} = x_k(t) + u_{t_k}(t)\Delta t \quad (12)$$

$$\Delta y_{advect\tilde{a}\tilde{o},k} = y_k(t) + v_{t_k}(t)\Delta t \quad (13)$$

sendo u_{t_k} e v_{t_k} as velocidades totais induzidas no vórtice discreto k nas direções x e y , respectivamente (veja as equações 8 e 9).

2.2.2 A Difusão da Vorticidade

A equação que rege o transporte difusivo da vorticidade é dada pela equação 7. Existem várias técnicas que simulam a difusão da vorticidade, entre elas, o método de vórtices em células (Christiansen, 1973), o método da variação do raio núcleo do vórtice (Leonard, 1980; Kamemoto et al., 1990), o método da velocidade de difusão (Ogami & Akamatsu, 1991) e o método de avanço randômico, inicialmente proposto por Chorin (1973), baseado na teoria de movimento Browniano desenvolvida por Einstein (1956), e modificado posteriormente por Lewis (1991).

Neste trabalho utiliza-se o método de avanço randômico implementado por Lewis

(1991), haja vista que essa abordagem é adequada a escoamentos que envolvem altos valores do número de Reynolds, o que se verifica em processos de pouso e decolagem de aeronaves de médio porte.

Assim, o avanço temporal de um vórtice discreto k da nuvem é dado por:

$$x_k(t + \Delta t) = x_k(t) + \Delta x_{\text{advecção}_k} + \Delta x_{\text{difusão}_k} \quad (14)$$

$$y_k(t + \Delta t) = y_k(t) + \Delta y_{\text{advecção}_k} + \Delta y_{\text{difusão}_k} \quad (15)$$

Na seção 2.3.1 foi obtido o avanço advectivo (Equações 12 e 13). Agora, será apresentado o movimento difusivo, caracterizado pelo movimento aleatório das partículas de vorticidade.

O avanço de cada vórtice discreto k na direção radial e no intervalo $(0 - 2\pi)$ é dado respectivamente por (Alcântara Pereira, 1999):

$$\Delta r_k = \sqrt{\frac{4 \Delta t}{\text{Re}} \ln \frac{1}{P}} \quad (16)$$

$$\Delta \theta_k = 2 \pi Q \quad (17)$$

sendo P e Q números randômicos entre 0 e 1.

Assim, a difusão de um vórtice discreto k da nuvem após um incremento de tempo Δt , possui um deslocamento na direção x e um deslocamento na direção y , dados respectivamente por:

$$\Delta x_{\text{difusão}_k} = \Delta r \cos \Delta \theta_k \quad (18)$$

$$\Delta y_{\text{difusão}_k} = \Delta r \sin \Delta \theta_k \quad (19)$$

Assim, a nova posição de um vórtice discreto, k , da nuvem, decorrido um incremento de tempo Δt , é obtida substituindo-se as equações 18 e 19 nas equações 14 e 15.

Como o objetivo do presente trabalho é o de implementar o método de multipolos

rápidos para ser utilizado em conjunto com o método de vórtices discretos visando reduzir o tempo dispendido no cálculo do campo de velocidades (lei de Biot-Savart – veja as equações 8, 9 ,10 e 11), dedica-se o capítulo seguinte ao método de multipolos rápidos. Enfatiza-se, porém, que o referido método poderia ter sido abordado na seção 2.3.1.

3 METODOLOGIA: MÉTODO DE MULTIPÓLOS RÁPIDOS

O método de multipolos rápidos é considerado um dos 10 algoritmos mais importantes do século XX (Cipra, 2000). Essa importância se dá pela sua função, que é basicamente acelerar a operação de multiplicação entre uma matriz $N \times N$ por um vetor N , sem necessariamente resolver o resultado em uma única variável e sim em um vetor onde cada termo da série de expansão é armazenado separadamente.

Para casos de interação do tipo Coulomb entre N corpos, caso deste trabalho, a influência de partículas distantes pode ser aproximada para um único elemento. Neste caso, o agrupamento de partículas distantes tem o objetivo final de reduzir o número de operações de N^2 para a ordem de N , sendo N o número de vórtices discretos presentes no par contrarrotativo de ponta de asa.

Quando utilizado em conjunto com o método de vórtices discretos, a principal função do método de multipolos rápidos é limitar o uso de lei de Biot-Savart. Para tanto, o domínio fluido é dividido em caixas e, ao invés de utilizar-se a lei de Biot-Savart para calcular o campo de velocidades na posição ocupada por um vórtice discreto k , considerando-se a influência de cada vórtice discreto presente na nuvem, o método de multipolos rápidos é responsável por contabilizar as influências de vórtices discretos que estejam suficientemente distantes do vórtice discreto k , ou seja, nas caixas distantes, através de um processo de expansão em série de Taylor; de outro modo, tais influências seriam contabilizadas utilizando-se a lei de Biot-Savart, a qual, conforme já mencionado, possui um elevado custo computacional.

De maneira resumida, o método de multipolos rápidos divide o domínio computacional em caixas, agrupa as influências dos vórtices discretos da simulação no centroide destas mesmas caixas e, no lugar da interação entre vórtices pela lei de Biot-Savart, as caixas interagem entre si. Ao final, o resultado destas interações entre as caixas é “devolvido” a cada vórtice discreto, resultado em uma das componentes do campo de velocidades de cada vórtice discreto, o campo de velocidades distantes (este termo será abordado na próxima seção).

Neste trabalho opta-se por abordar em detalhes a implementação numérica do método de multipolos rápidos. Detalhes referentes à formulação matemática podem ser encontrados no trabalho original de Greengard & Rokhlin (1987), bem como no trabalho de Ricciardi (2016).

3.1 CONCEITOS PRELIMINARES

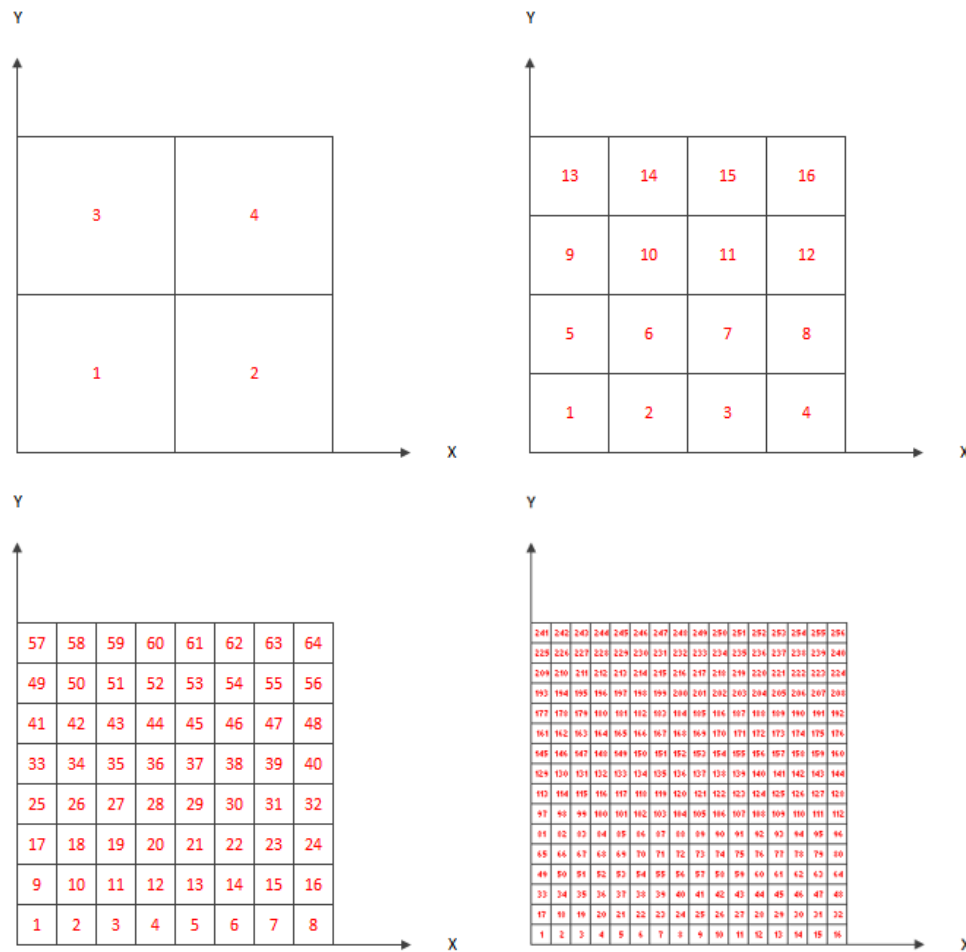
Antes de abordar o método de multipolos rápidos é pertinente estabelecer algumas definições importantes, tais como:

- 1) Caixa: é a unidade de discretização espacial do domínio fluido utilizada pelo método de multipolos rápidos. O domínio computacional é descrito por linhas e colunas (impõe-se que sempre existam um número igual de linhas e de colunas). Cada caixa é denominada por uma linha, i , e uma coluna, j . O número de caixas do domínio fluido varia conforme o nível de refinamento atual da simulação (veja a definição a seguir) e suas posições se alteram conforme a evolução do campo de vorticidades.
- 2) Nível de refinamento: trata-se de uma variável discreta da simulação, definida pelo usuário, que estabelece a quantidade de caixas em que o domínio fluido é discretizado (equação 20). É importante ressaltar que o usuário define o nível máximo de refinamento da simulação, porém, em diversas etapas do algoritmo os níveis anteriores (do nível dois até o nível máximo) também são utilizados.

$$\text{Quantidade de caixas} = 4^{\text{nível}} \quad (20)$$

A figura 4 ilustra o domínio fluido discretizado em diferentes níveis de refinamento.

Figura 4 - Níveis de refinamento um (quatro caixas), dois (dezesseis caixas), três (sessenta e quatro caixas) e quatro (duzentas e cinquenta e seis caixas)

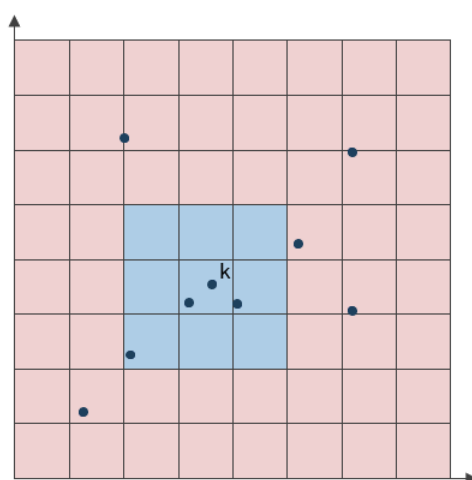


Fonte: produção do próprio autor.

- 3) Hierarquia entre caixas: uma das maneiras de se estabelecer a hierarquia (ou relação) entre as caixas em diferentes níveis de refinamento é pela árvore genealógica (caixas pais e caixas filhas). Uma caixa de um nível de refinamento n possui 4 caixas filhas no nível de refinamento $n + 1$. Estas caixas filhas possuem um quarto da área da caixa pai e todas elas têm as mesmas dimensões, além de, juntas, ocuparem exatamente a mesma posição que sua respectiva caixa pai (o funcionamento será abordado e mais detalhado na seção 3.2.1).
- 4) Campo de velocidades próximo e distante: o campo de velocidades é dividido em duas parcelas. A primeira parcela, calculada pelo método de multipolos rápidos, é aquela que contabiliza a influência dos vórtices discretos que estão distantes do vórtice discreto onde se deseja calcular o campo de velocidades (vórtice discreto k); tal

parcela é denominada de campo de velocidades distante e é calculada nas caixas vermelhas mostradas na figura 5. A segunda parcela que compõe o cálculo do campo de velocidades, obtida através da lei de Biot-Savart, contabiliza a influência dos vórtices discretos que estão próximos do vórtice discretos k ; tal parcela é denominada de campo de velocidades próximo e é calculada nas caixas azuis mostradas na figura 5.

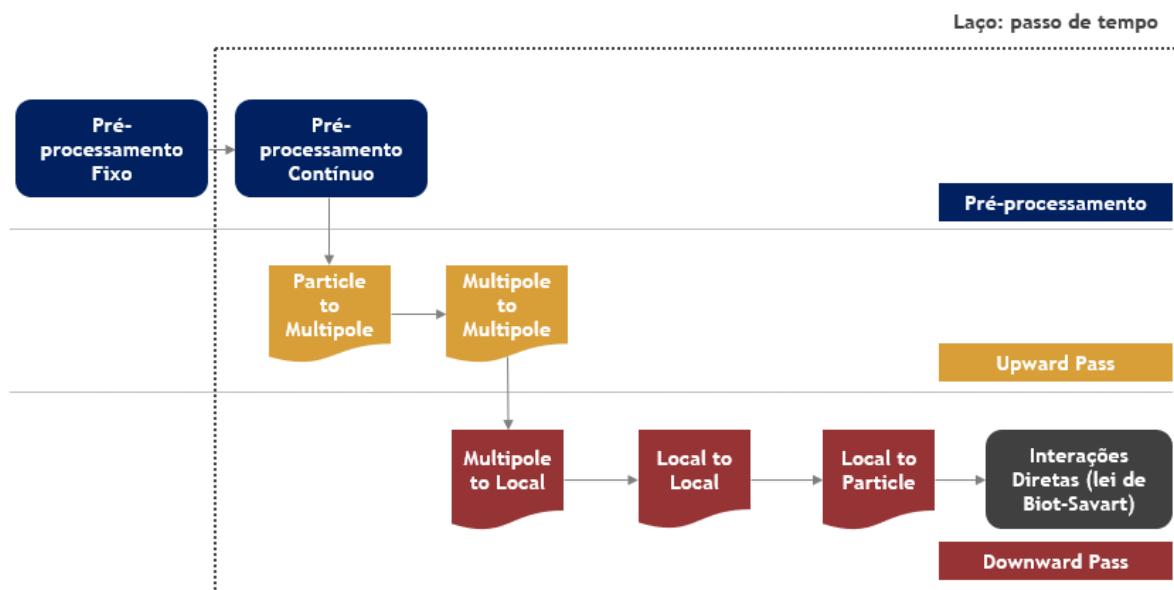
Figura 5 - Representação da região onde os campos de velocidade distante e próximo são calculados



Fonte: produção própria do autor.

O método de multipolos rápidos é dividido em 4 etapas: pré-processamento (fixo e contínuo), *Upward Pass*, *Downward Pass* e cálculo do campo de velocidades próximo. Na figura 6 apresenta-se um fluxograma referente ao procedimento de cálculo do método de multipolos rápidos.

Figura 6 - Fluxograma esquemático do método de multipolos rápidos



Fonte: produção própria do autor.

Neste fluxograma mostra-se que a etapa de interação direta entre vórtices discretos pela lei de Biot-Savart ainda ocorre, porém, o uso desta onerosa etapa é substancialmente limitada pelo método de multipolos rápidos. A etapa de interações diretas, em que se calcula o campo de velocidades próximo, está em cinza por não pertencer efetivamente ao *Downward Pass*, porém, como ocorre no mesmo nível de refinamento que a etapa de *Local to Particle*, esta foi posicionada ao seu lado.

3.2 ETAPAS DE PRÉ-PROCESSAMENTO

Existem duas etapas de pré-processamento de dados: o pré-processamento fixo, que ocorre somente uma vez (no início da simulação), e o pré-processamento contínuo, que ocorre no início de cada passo de tempo da simulação numérica. Estas etapas são responsáveis pelo cálculo de variáveis que são utilizadas pelo método de multipolos rápidos. Ambas são abordadas a seguir.

3.2.1 Pré-processamento fixo

A etapa de pré-processamento fixo é responsável por realizar cálculos que não dependem do campo de vorticidades (intensidade, posição ou raio do núcleo dos vórtices

discretos de Lamb). Esta etapa é dependente somente do nível máximo de refinamento do domínio fluido e do número máximo de termos utilizados nas séries de Taylor e recebe este nome pelo fato de que suas variáveis são calculadas somente uma vez e permanecem imutáveis durante toda a simulação.

Os cálculos efetuados por esta etapa são: o número máximo de linhas e colunas por nível de refinamento, número máximo de caixas por nível de refinamento, numeração das caixas, definição da hierarquia entre caixas pais e caixas filhas, definição das listas de interação (caixas vizinhas e caixas distantes) e cálculo dos binômios de Newton (veja mais detalhes a seguir).

O cálculo do número máximo de linhas e de colunas (equação 21) e o cálculo do número máximo de caixas (equação 22), por nível de refinamento, seguem equações semelhantes:

$$div = 2^{nível} \quad (21)$$

$$znb = 4^{nível} \quad (22)$$

Na equação 21, *div* significa divisão das linhas e colunas e na equação 22, *znb* representa a última caixa (*nb* significa *number of boxes* e *z* é uma notação para último). Observa-se, a partir da equação 22, que o domínio fluido sempre possui o mesmo número de linhas e de colunas, uma das condições que implicam que este é discretizado em caixas quadradas.

O próximo passo desta etapa é a numeração das caixas criadas. A numeração das caixas ocorre da mesma maneira para todos os níveis de refinamento e é realizada da esquerda para a direita e de cima para baixo, a partir da caixa localizada no canto inferior esquerdo do domínio fluido (veja a figura 4).

A numeração das caixas é realizada utilizando-se a equação 23:

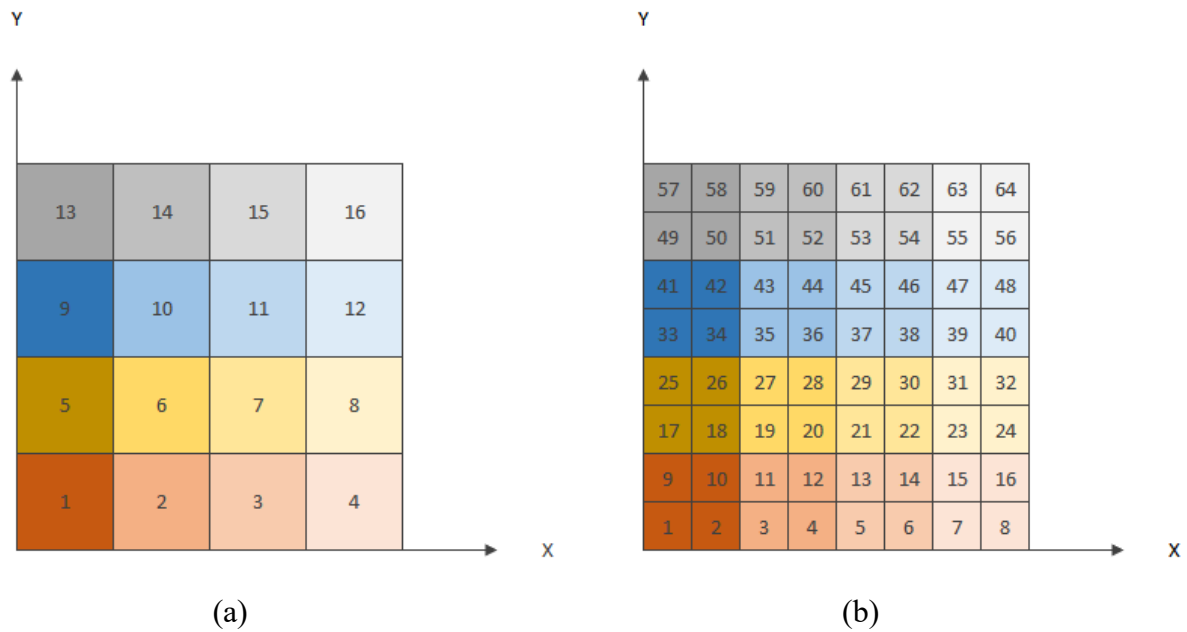
$$nbox = (i - 1) \cdot (2^{nível}) + j \quad (23)$$

Sendo *i* e *j* as linhas e colunas, respectivamente, e a variável *nível* refere-se ao nível de refinamento correspondente a um dado instante da simulação numérica.

A etapa seguinte consiste em estabelecer a hierarquização das caixas em diferentes

níveis de refinamento, ou seja, definir as caixas pais e as respectivas caixas filhas. A figura 7(a) ilustra o domínio fluido discretizado em um nível de refinamento n e a figura 7(b) ilustra o domínio fluido discretizado em um nível de refinamento $n + 1$. O nível $n + 1$ representa as caixas filhas oriundas das respectivas caixas pais referentes ao nível de refinamento n ; o esquema de cores adotado auxilia na identificação das caixas pais (nível n) e das respectivas caixas filhas (nível $n + 1$).

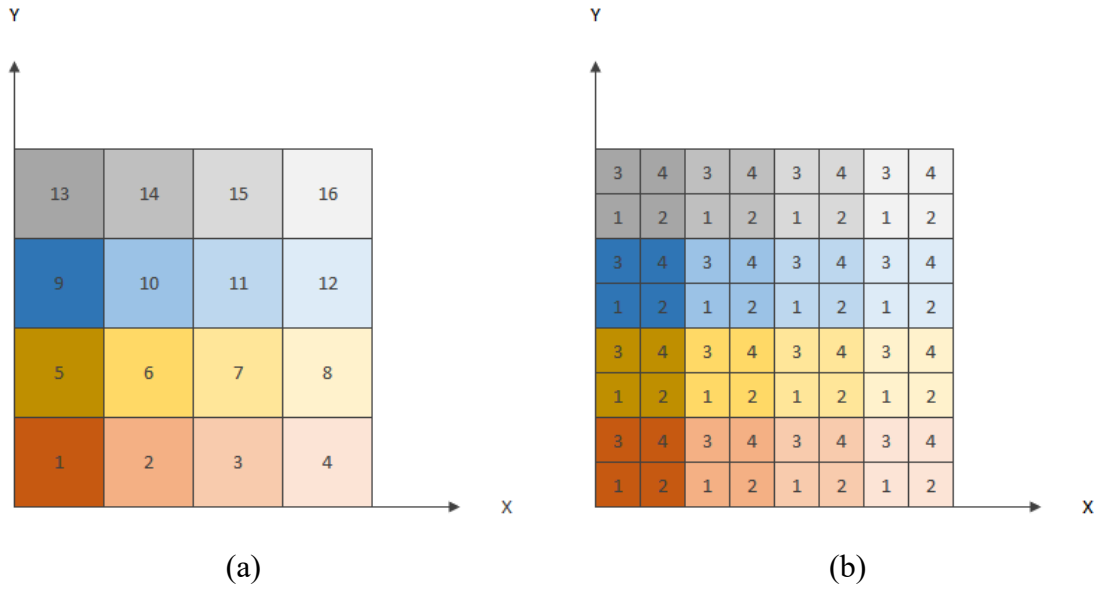
Figura 7 – Domínio fluido discretizado em diferentes níveis de refinamento



Fonte: produção própria do autor.

A numeração das caixas filhas utiliza a mesma lógica de numeração das caixas explicada anteriormente (equação 23). Vale ressaltar que as caixas filhas possuem duas numerações importantes: a numeração geral (dada pela equação 23) e a numeração referente à sua relação hierárquica com a caixa pai. A caixa 1, por exemplo, possui 4 filhas no nível 3: as caixas 1, 2, 9 e 10 (numeração geral – veja a figura 7). Porém, tais caixas são as filhas 1, 2, 3 e 4 da caixa 1 do nível de refinamento 2. A figura 8 ilustra a numeração referente à hierarquização.

Figura 8 – Numeração das caixas filhas em relação às respectivas caixas pais



Fonte: produção própria do autor.

Para definir quais caixas do nível $n + 1$ são filhas das caixas do nível n , as equações 24, 25, 26 e 27 são utilizadas:

$$nchild(1) = 1 + 2 \cdot (j - 1) + (i - 1) \cdot (2^{nível+2}) \quad (24)$$

$$nchild(2) = nchild(1) + 1 \quad (25)$$

$$nchild(3) = nchild(1) + 2^{nível+1} \quad (26)$$

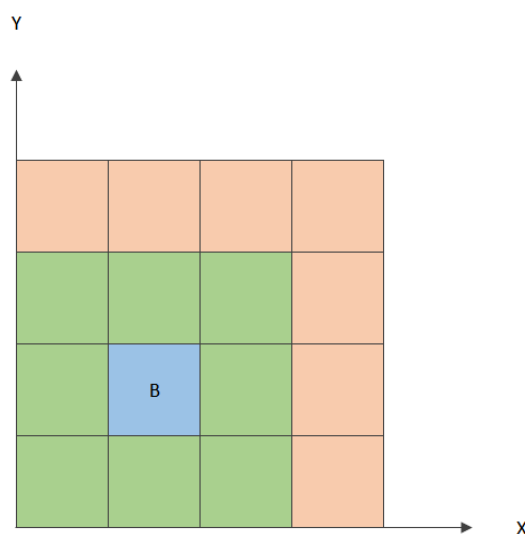
$$nchild(4) = nchild(3) + 1 \quad (27)$$

sendo $nchild(1)$, $nchild(2)$, $nchild(3)$ e $nchild(4)$ a primeira, segunda, terceira e quarta caixa filha, respectivamente, de uma dada caixa pai. Cada uma das quatro equações anteriores possuem como resultado um número $nbox$ de uma caixa filha em um nível $n + 1$, ou seja, a caixa filha de número 1 (equação 24) da caixa $nbox$ (no nível n) é uma caixa $nbox$ no nível $n + 1$.

Outra operação realizada pelo pré-processamento fixo é a definição das listas de interação de caixas vizinhas e caixas distantes. Uma caixa vizinha de uma caixa B, por exemplo, é aquela em que existe o compartilhamento de, no mínimo, um vértice com a caixa

B. A figura 9 ilustra o conceito referente a caixas vizinhas e distantes. Nesta figura, a caixa em cor azul (caixa B) consiste naquela em que se deseja contabilizar a influência das demais, tanto as vizinhas (cor verde) quanto as distantes (cor vermelha).

Figura 9 – Definição de caixas vizinhas e de caixas distantes em relação a uma caixa em que se deseja contabilizar a influência das demais para calcular o campo de velocidades do escoamento (caixa B)



Fonte: produção própria do autor.

Uma caixa (como por exemplo a caixa B da figura 9) sempre terá 8 vizinhas, a menos que esta esteja localizada na primeira ou na última linha ou, ainda, na primeira ou na última coluna (bordas do domínio computacional). Para efeitos práticos, a caixa B (em azul) é considerada vizinha de si própria, pois ao compararmos a caixa B com a própria caixa B, existe o compartilhamento de 4 vértices. Este artifício é de grande ajuda na etapa do cálculo do campo de velocidades devido às interações vórtice-vórtice, no final do processo.

A condição matemática que avalia se duas caixas são vizinhas ou não é a seguinte: se o módulo da subtração entre os valores das linhas e das colunas for menor do que 2, as caixas são vizinhas.

Analogamente ao raciocínio anterior as caixas distantes de B são aquelas em que não há compartilhamento de vértices. Ainda de maneira similar, a condição que define se duas caixas são distantes ou não é: se o módulo da subtração entre os valores das linhas ou das colunas for maior ou igual a 2, as caixas são distantes.

Por fim, tem-se o cálculo dos coeficientes binomiais de Newton que serão utilizados durante a simulação. Estes coeficientes serão utilizados pelo método de multipolos rápidos

como ferramenta para expansão em série de Taylor dos multipolos gerados em cada nível de refinamento, seguindo a equação abaixo:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (28)$$

Onde, de acordo com as equações que utilizam estes coeficientes das etapas *Upward Pass* e *Downward Pass*, os termos n e k variam de zero até duas vezes o número máximo de termos da série de Taylor subtraído de um.

3.2.2 Pré-processamento contínuo

Ao contrário da etapa de pré-processamento fixo, a etapa de pré-processamento contínuo depende do número de vórtices discretos e de suas posições. Como a posição dos vórtices discretos é alterada a cada instante de tempo da simulação numérica para simular a dinâmica da vorticidade, a etapa de pré-processamento contínuo é realizada no início de cada passo de tempo.

Os cálculos efetuados por esta etapa são: determinação das coordenadas máximas e mínimas do domínio computacional, definição do tamanho das caixas em cada nível de refinamento, comparação entre o tamanho das caixas em cada nível de refinamento e o tamanho do raio do núcleo dos vórtices discretos, cálculo do centroide de cada caixa em cada nível de refinamento, distribuição dos vórtices discretos nas caixas e contagem de vórtices por caixas em cada nível de refinamento.

Iniciando o pré-processamento contínuo, a determinação das coordenadas máximas e mínimas do domínio computacional serve de base para o cálculo de todas as outras variáveis desta etapa do processo. O cálculo é feito de forma simples: primeiro assume-se como menor e maior valor as posições em x e y do vórtice discreto de número 1. Feito isto, o algoritmo executa uma condição em laço: caso a posição do próximo vórtice discreto analisado (do 2 até o último vórtice discreto da simulação) seja maior ou menor que as atuais variáveis, respectivamente, estas são substituídas pelas posições do atual vórtice discreto analisado. Ao final do laço têm-se quatro variáveis: $xmax$, $xmin$, $ymin$ e $ymax$. Com estas quatro variáveis, pode-se determinar o domínio computacional através dos pares cartesianos a seguir:

1. $(xmin, ymin)$ – canto inferior esquerdo do domínio computacional.

2. (x_{max}, y_{min}) – canto inferior direito do domínio computacional.
3. (x_{min}, y_{max}) – canto superior esquerdo do domínio computacional.
4. (x_{max}, y_{max}) – canto superior direito do domínio computacional.

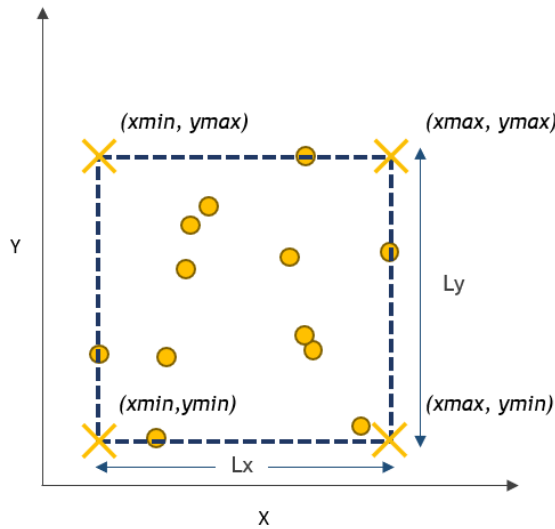
Na sequência, é possível determinar as dimensões do domínio computacional:

$$Lx = x_{max} - x_{min} \quad (29)$$

$$Ly = y_{max} - y_{min} \quad (30)$$

sendo Lx e Ly a dimensão do domínio computacional nas direções x e y , respectivamente. A figura 10 representa as coordenadas máximas e mínimas do domínio computacional e seus respectivos comprimentos em x e em y , onde as circunferências em amarelo representam os vórtice discretos.

Figura 10 - Determinação do domínio computacional



Fonte: produção própria do autor.

Através de um laço, para cada nível de refinamento, os lados das caixas são calculados:

$$dxdy = \left(\frac{Lx}{div}, \frac{Ly}{div} \right) \quad (31)$$

Onde $dxdy$ é uma variável complexa que armazena as dimensões das caixas em cada nível de

refinamento e div (equação 21) é uma variável que armazena o número de linhas e de colunas de um determinado nível de refinamento.

Até o momento, existe a possibilidade de os lados das caixas não serem de iguais dimensões, pois as variáveis Lx e Ly podem ter valores diferentes, uma vez que são determinadas em função da posição dos vórtices discretos de Lamb utilizados para representar o campo de vorticidades. Como as caixas precisam, necessariamente, ser quadradas para o correto funcionamento do método de multipolos rápidos, uma condição é executada a fim de igualar os lados das caixas em todos os níveis de refinamento. Esta condição impõe que, caso a dimensão em x seja maior que a dimensão em y , a dimensão em y recebe o valor da dimensão em x . Esta análise ocorre de maneira análoga para a dimensão em y .

Uma importante verificação é feita após o dimensionamento das caixas: caso o nível de refinamento escolhido pelo usuário seja tão elevado a ponto de o tamanho das caixas ser menor que o tamanho do raio do núcleo dos vórtices discretos, a simulação é encerrada. Proceda-se dessa maneira pelo fato de tal situação inviabilizar a atribuição dos vórtices discretos às caixas.

O próximo passo é o cálculo do centróide, $cbox(a,b)$, de cada caixa, em cada nível de refinamento. Esta etapa é de extrema importância pois todas as interações entre vórtices discretos e caixas e entre caixas ocorrem através dos centroides. Sendo $cbox$ uma variável complexa e a e b dados por:

$$a = xmin + (j - 1) * \left[dx dy + \left(\frac{dx dy}{2} \right) \right] \quad (32)$$

$$b = ymin + (i - 1) * \left[dx dy + \left(\frac{dx dy}{2} \right) \right] \quad (33)$$

a e b correspondem à posição em x e em y do centróide da caixa $nbox$ em um nível de refinamento n .

Na sequência, deve-se identificar os vórtices discretos presentes em cada caixa e, ainda, contabilizar o número de vórtices discretos presentes em cada caixa. Uma vez que a interação vórtice discreto-caixa é realizada, apenas, no último nível de refinamento (o mais elevado), as operações de identificação dos vórtices discretos presentes em cada caixa são realizadas apenas em tal nível de refinamento, já e de contagem do número de vórtices discretos presentes em cada caixa ocorre em todos os níveis, pois em diversas ocasiões, o

algoritmo utiliza do artifício de realizar uma conferência se a caixa analisada é vazia ou não, para que se economize tempo ao não interagir caixas vazias com caixas não vazias.

As equações que avaliam a qual caixa um vórtice discreto k pertence são:

$$linev = \left\lceil \frac{(pvorty - ymin)}{dxdy} \right\rceil + 1 \quad (34)$$

$$coluv = \left\lceil \frac{(pvortx - xmin)}{dxdy + 1} \right\rceil + 1 \quad (35)$$

$$pvortc = (pvortx, pvorty) \quad (36)$$

sendo $linev$ e $coluv$, respectivamente, a linha e a coluna em que um vórtice discreto, k , se encontra, e $pvortc$ é uma variável complexa que armazena a posição em x ($pvortx$) e em y ($pvorty$) de um vórtice discreto k .

Como $linev$ e $coluv$ são valores de linha e coluna, respectivamente, saber a caixa em que o vórtice discreto k se encontra é trivial; basta igualar os valores de i e j da variável $nbox$ (equação 23) aos valores de $linev$ e $coluv$, respectivamente. Uma vez localizados todos os vórtices discretos de Lamb utilizados para discretizar o campo de vorticidades, contabiliza-se a quantidade de vórtices discretos presentes em cada caixa; essa informação é armazenada na variável $countern$. Assim, cada caixa $nbox$ possui uma quantidade $countern$ de vórtices discretos.

Por fim, no último nível de refinamento tem-se a criação de uma variável que, através do número da caixa e, do número $countern$ de um vórtice discreto, retorna-se o número k (contagem geral de vórtices discretos da simulação). Esta variável, $boxn$, é útil para o momento em que é necessário transferir a influência armazenada em uma caixa de volta para os vórtices discretos que se encontram dentro desta.

$$boxn = k \quad (37)$$

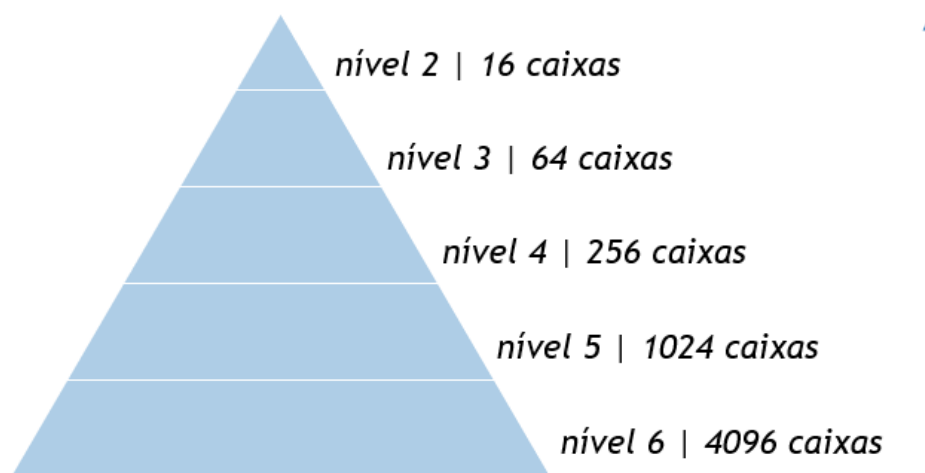
3.3 UPWARD PASS¹

¹ Por não haver uma tradução consagrada na língua portuguesa, os nomes das etapas do método de multipolos rápidos serão todos escritos em sua forma original, na língua inglesa.

A etapa do *Upward Pass* inicia de fato o método de multipolos rápidos, dado que o pré-processamento anterior preparou algumas variáveis para as etapas de *Upward* e *Downward Pass*.

O *Upward Pass* recebe este nome pelo fato de que este se inicia no nível de refinamento mais elevado (maior refinamento possível, escolhido pelo usuário) e encerra-se no nível de refinamento mais grosseiro da simulação, o nível 2, como ilustrado na figura 11. É importante ressaltar que, mesmo que ainda existam os níveis 0 e 1, o nível mais grosseiro considerado pelo método de multipolos rápidos é o 2, dado que não existem interações possíveis nos níveis 0 e 1 pelo referido método (na seção 3.5 ficará mais clara a razão pela qual as interações inexistem em tais níveis de refinamento).

Figura 11 - Representação da subida pela árvore de níveis, conhecida como *Upward Pass*



Fonte: produção própria do autor.

Esta etapa possui a função de fazer a transferência inicial das influências dos vórtices discretos para as caixas e, posteriormente, transferir estas influências armazenadas (até agora no nível mais fino da simulação) para as caixas pais das respectivas do nível analisado, até que se chegue ao nível 2.

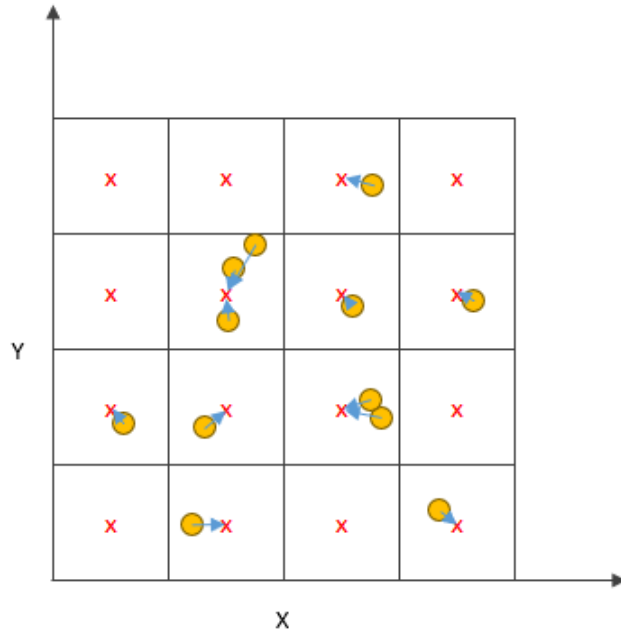
O primeiro passo do *Upward Pass* chama-se *Particle to Mutipole* (P2M).

3.3.1 Particle to Multipole (P2M)

A etapa do método de multipolos rápidos que é a responsável pelo armazenamento das influências dos vórtices discretos nas caixas no nível de refinamento mais elevado denomina-se *Particle to Multipole* (P2M), ou seja, é responsável pela montagem dos multipolos. Este

processo é realizado através de uma expansão em série de Taylor, onde o truncamento da série é definido previamente pelo usuário. Na figura 12 são representadas, através de flechas azuis, a influência dos vórtices discretos sobre os centroides das caixas às quais pertencem:

Figura 12 – Representação esquemática da etapa *Particle to Multipole* (P2M)



Fonte: produção própria do autor.

A transferência se dá através da criação de uma variável chamada coeficiente do multipolo. Para tanto calcula-se, inicialmente, o potencial de uma partícula k (ou seja, um vórtice discreto), induzido em um ponto p arbitrário (neste caso, pode-se admitir que p seja o centroide de uma caixa), o qual é dado por:

$$\phi_k(p) = q_k \log(z - z_k) \quad (38)$$

sendo q_k a intensidade da partícula k , z a posição de p e z_k a posição de k . De outro modo, pode-se escrever que:

$$\phi_k(p) = q_k \log(z) + q_k \log(1 - z_k/z) \quad (39)$$

A influência de todas as m partículas presentes em uma dada caixa no centroide, p , da caixa, é dada pelo somatório de todas as influências, ou seja:

$$\phi(p) = \sum_{k=1}^m \phi_k = \sum_{k=1}^m q_k \log(z) + \sum_{k=1}^m q_k \log(1 - z_k/z) \quad (40)$$

Pode-se escrever, ainda, que:

$$\sum_{k=1}^m q_k \log(z) = \log(z) \sum_{k=1}^m q_k \quad (41)$$

$$\sum_{k=1}^m q_k \log(z) = Q \log(z) \quad (42)$$

sendo Q , ou $bigQ$, a soma de todas as intensidades q_k . A variável $bigQ$ armazena as intensidades dos vórtices discretos de uma determinada caixa $nbox$ em um determinado nível de refinamento. Aqui tem-se o primeiro uso da variável $boxn$ (equação 37), pois como m se trata de um contador interno de vórtices discretos (*countern*) de uma caixa $nbox$, é necessário converter o valor para a contagem geral de vórtices discretos (k). Esta variável será utilizada no próximo passo, chamado de *Multipole to Multipole* (ainda dentro do *Upward Pass*) e auxiliará o processo de transferir as influências das caixas filhas para as caixas pais.

Expandindo o logaritmo presente no último termo da equação 40 em uma série de Taylor, tem-se:

$$\log(1 - x) = (-1) \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^T}{T} \right) \quad (43)$$

sendo $x = z_k/z$, e T o número de termos utilizados na expansão por série de Taylor.

Agrupando as equações 41 e 43, tem-se:

$$\sum_{k=1}^m \left(q_k \sum_{t=1}^T (-1) \left(\frac{z_k}{z} \right)^t \frac{1}{t} \right) = \sum_{t=1}^T \left(\frac{\sum_{k=1}^m (-q_k) \left(\frac{z_k}{z} \right)^t}{z^t} \right) \quad (44)$$

Dessa forma o potencial se torna:

$$\phi(p) = Q \log(z) + \sum_{t=1}^T \left(\frac{a_t}{z^t} \right) \quad (45)$$

e o termo a_t é definido como o coeficiente do multipolo:

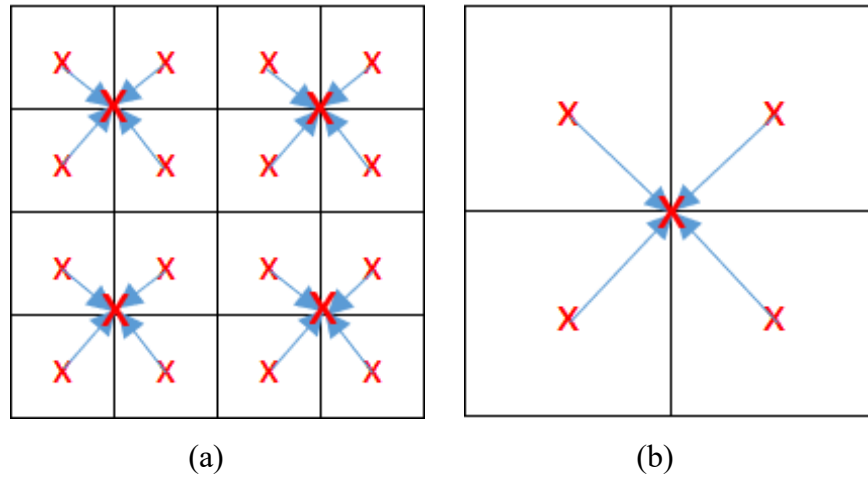
$$a_t = \sum_{k=1}^m \frac{(-q_k)z_k^t}{t} \quad (46)$$

Resumindo, a_t representa a influência de todos os vórtices discretos contidos em uma caixa no seu centroide. O cálculo de a_t para o nível de refinamento mais elevado encerra a etapa Particle to Multipole Θ (P2M).

3.3.2 Multipole to Multipole (M2M)

Último passo do *Upward Pass*, o *Multipole to Multipole* (abreviando, M2M) possui a função de transferir o coeficiente a_t , calculado na etapa Particle to Multipole, das caixas filhas (nível de refinamento mais elevado) para as respectivas caixas pais até que o nível de refinamento 2 seja atingido. A figura 13 representa a transferência de influência mencionada, onde cada X em vermelho representa o centróide de uma caixa:

Figura 13 - Representação esquemática da etapa Multipole to Multipole



Fonte: produção própria do autor.

Em outras palavras, o que se deseja é realizar um cálculo semelhante àquele realizado na etapa anterior (interação partícula-caixa), porém, na presente etapa, as interações serão do tipo caixa-caixa. Para tanto, nesta etapa deve ser calculado $\phi(P)$, ou seja, a influência das caixas filhas (nível de refinamento n) na respectiva caixa pai (nível de refinamento $n-1$):

$$\phi(P) = Q^{(n)} \log(z - z_p) + \sum_{t=1}^T \frac{a_t^{(n)}}{(z - z_p)^t} \quad (47)$$

$$z - z_p = cbox(nbox) - cbox(nchild) \quad (48)$$

sendo $Q^{(n)}$ equivalente a somatória das influências dos vórtices discretos de uma caixa filha em um nível n (equação 42), $a_t^{(n)}$ o coeficiente do multipolo de uma caixa filha de $nbox$ um nível n , $z - z_p$ a distância entre o centroide de uma caixa pai (no nível $n - 1$) e uma de suas caixas filhas (no nível n), $cbox(nbox)$ o centróide de uma caixa pai $nbox$ e $cbox(nchild)$ o centróide de uma caixa filha $nchild$.

O termo $a_t^{(n)}$ da equação 47 não pode ser descrito somente pela equação 46. Isto é explicado pelo fato de que agora, diferentemente da etapa de *Particle to Multipole*, existe a translação do centro do multipolo do centroide da caixa filha para o centroide da caixa pai. Portanto, o termo $a_t^{(n)}$ é equacionado como:

$$a_t^{(n)} = \frac{-Q^{(n)}(z - z_p)^t}{t} + \sum_l^t a_t^{(n)} (z - z_p)^{t-l} \binom{t-1}{l-1} \quad (49)$$

$$a_t^{(n-1)} = \sum_{t=1}^T \frac{a_t^{(n)}}{(z - z_p)^t} \quad (50)$$

$$\binom{l-1}{t-1} = \frac{(l-1)!}{(t-1)!(l-t)!} \quad (51)$$

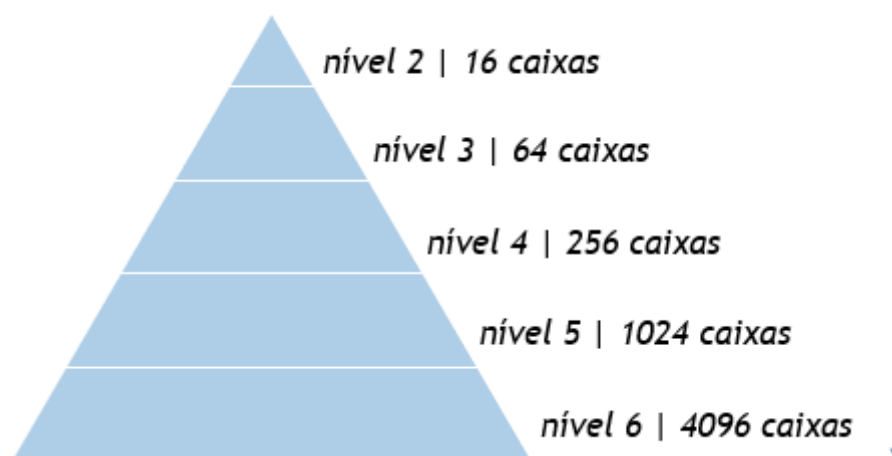
sendo o primeira termo da equação 49 proveniente da equação 46 e o segundo tratando-se efetivamente da translação do centro do multipolo do centroide da caixa filha para o centroide da caixa pai. Como o objetivo é o cálculo do coeficiente do multipolo no nível $n-1$, a equação 50 torna explícito que o multipolo em um nível $n-1$ dá-se pela somatória dos multipolos no nível n . Por fim, a equação 51 representa os coeficientes binomiais utilizados na equação 49.

O cálculo de a_t para as caixas pais até o nível de refinamento dois encerra o *Upward Pass*. Até agora têm-se os multipolos no nível mais grosseiro da simulação. Estes são redistribuídos através do *Downward Pass* que, ao final, calcula a influência, no campo de velocidades do escoamento, dos vórtices discretos mais distantes.

3.4 DOWNWARD PASS

O *Downward Pass* se inicia no nível de refinamento mais grosseiro da simulação (nível 2) e vai até o nível de refinamento mais elevado, ao contrário do *Upward Pass*, como mostrado pela figura 14.

Figura 14 - Representação da descida pela árvore de níveis, conhecida como *Downward Pass*



Fonte: produção própria do autor.

Esta etapa do método de multipolos rápidos, resumidamente, é responsável por transladar os coeficientes calculados no *Upward Pass* a partir das caixas de nível 2 para suas respectivas caixas filhas, e assim sucessivamente, até o nível de refinamento mais elevado, onde as influências armazenadas em cada centroide contabilizam a interação com cada vórtice discreto dentro da respectiva caixa; calculando, assim, o campo de velocidades distante (campo de velocidades gerado pelos vórtices discretos que estão localizados nas caixas distantes no nível de refinamento mais elevado).

O *Downward Pass* é composto por três etapas: *Multipole to Local* (M2L), *Local to Local* (L2L) e *Local to Particle* (L2P). As etapas M2L e L2L ocorrem em conjunto, enquanto a etapa L2P ocorre ao final do processo, separadamente.

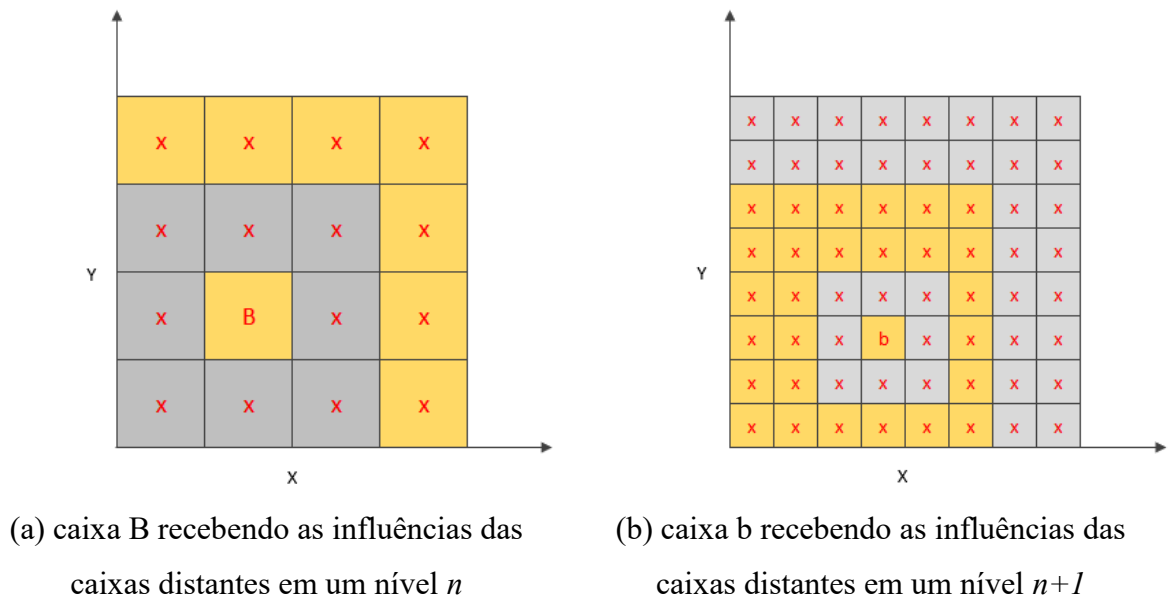
3.4.1 Multipole to Local (M2L) e Local to Local (L2L)

Uma vez determinados os 16 multipolos no nível de refinamento dois, inicia-se o *Downward Pass*, ou seja, desta vez caminha-se até o nível de refinamento mais elevado da

árvore genealógica, sempre a partir do nível dois.

A etapa Multipole to Local consiste na interação entre caixa distantes (que foram definidas no pré-processamento fixo). Esta é a única etapa em que caixas que não são pais e filhas interagem. Na figura 15 ilustra-se a lista de interação calculada no pré-processamento. Na figura 15(a), em que a caixa de interesse se chama "B" (usa-se a letra "B" maiúscula por se tratar da caixa pai), vê-se que as caixas cinzas são as caixas próximas e as amarelas são as caixas distantes. Na figura 15(b) vê-se, novamente, as caixas amarelas sendo as distantes. Nota-se que, na figura 15(b), além das amarelas, existem outras caixas distantes que poderiam se enquadrar na lista de caixas distantes, porém, estas já foram consideradas no passo anterior do processo (do nível n). Estas caixas terão a influência agrupada nos pais de b , ou seja, B , e são consideradas no próximo passo, Local to Local (L2L).

Figura 15 - Representação esquemática da etapa Multipole to Local



Fonte: produção própria do autor.

A influência de um aglomerado de partículas (cujo centro coincide com o de uma caixa b' , suficientemente distante) em um ponto (centro da caixa b) é dado por:

$$\phi(b) = \sum_{l=0}^T b_l \cdot z^l \quad (52)$$

onde:

$$b_0 = \left(\sum_{t=1}^T \frac{a_t}{z^t} (-1)^t \right) + Q^{(n)} \log(-z) \quad (53)$$

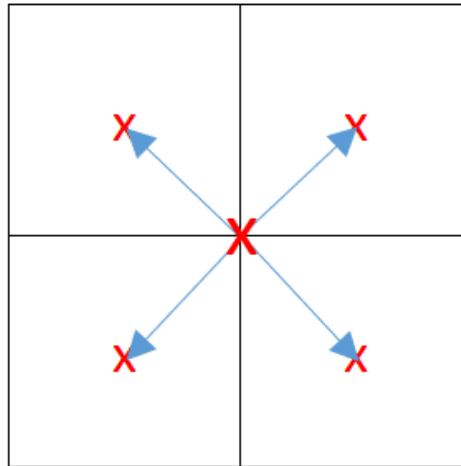
$$b_l = \left(\frac{1}{z^l} \sum_{t=1}^T \frac{a_t}{z^t} \binom{l+t-1}{t-1} (-1)^t \right) - \frac{Q^{(n)}}{l \cdot z^l}, \text{ para } l \geq 1 \quad (54)$$

$$z = cbox(b) - cbox(b') \quad (55)$$

sendo que na equação 52 o termo b_l não se refere a uma caixa, e sim ao coeficiente do multipolo que está sendo transferido (similar ao a_t no *Upward Pass*), mostrado nas equações 53 e 54. O termo z se refere à distância entre os centroides das caixas b e b' (na figura 15(b) a caixa b é a amarela no centro e as caixas b' são as amarelas distantes).

As caixas que ficaram em cinza na figura 15(b) terão sua influência considerada na etapa Local to Local (L2L). O L2L possui o papel de transladar a influência de uma caixa pai para suas quatro caixas filhas, processo inverso ao realizado na etapa Multipole to Multipole. A etapa Local to Local viabiliza a comunicação entre as caixas de diferentes níveis, conforme representado na figura 16.

Figura 16 - Representação esquemática da etapa Local to Local



Fonte: produção própria do autor.

A equação que define a influência de uma caixa pai em uma caixa filha é a mesma utilizada para o Multiple to Local (equação 52), porém o coeficiente do multipolo que será transferido de uma caixa de nível n para uma caixa de nível $n+1$ é dado pela equação 56:

$$b_l^{(n+1)} = \sum_{t=0}^T \sum_{l=t}^T b_l^{(n)} \binom{l}{t} (-z)^{l-t} \quad (56)$$

sendo:

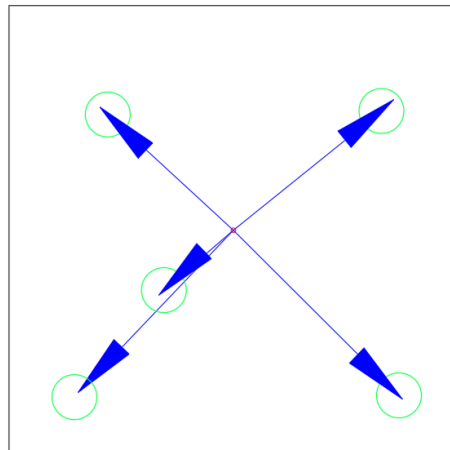
$$z = cbox(B) - cbox(b) \quad (57)$$

onde $cbox(B)$ o centroide da caixa pai, no nível de refinamento n , e $cbox(b)$ o centroide da caixa filha, b , no nível de refinamento $n + 1$.

3.4.2 Etapa Local to Particle (L2P)

Marcando o fim do *Downward Pass* e, também, o fim do método de multipolos rápidos, a etapa Local to Particle ocorre no nível de refinamento mais elevado e possui a função de transferir a influência que foi armazenada nas caixas durante todo o processo do *Upward e Downward Pass* para seus respectivos vórtices discretos. O resultado da transferência é o campo de velocidades distante, aquele que considera os vórtices discretos que estão nas caixas distantes da caixa de um vórtice discreto k , onde se deseja determinar o campo de velocidades. O campo de velocidades próximo é calculado pela lei de Biot-Savart, na etapa seguinte. Esta interação vórtice-vórtice ocorre somente entre os vórtices discretos que estão dentro de uma mesma caixa e entre os vórtices discretos de caixas vizinhas. A figura 17 representa o centroide de uma caixa transmitindo a influência resultante do processo de multipolos aos vórtices discretos que estão dentro dela.

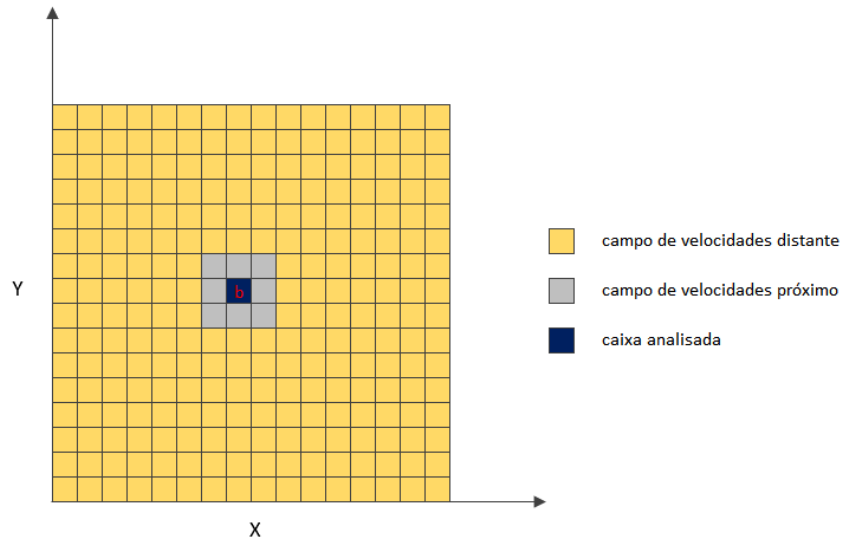
Figura 17 - Representação esquemática da etapa Local to Particle



Fonte: produção própria do autor.

A figura 18 representa quais regiões do domínio computacional são contempladas com o cálculo do campo de velocidades distante e quais são contempladas com o cálculo do campo de velocidades próximo.

Figura 18 - Representação das caixas que contribuem no cálculo do campo de velocidades distante e do campo de velocidades próximo



Fonte: produção própria do autor.

O equacionamento da etapa Local to Particle é dado por:

$$\phi(b) = \sum_{t=0}^T b_t z^t \quad (58)$$

sendo $\phi(b)$ a influência de uma caixa em um vórtice discreto, T o número de termos da série de Taylor, b_t o coeficiente do multipolo de uma caixa no nível de refinamento máximo e z representa a distância entre uma partícula (vórtice discreto) e um ponto b (centroide de uma caixa no nível de refinamento máximo):

$$z = pvortc(k) - cbox(b) \quad (59)$$

Como o resultado obtido pelo método de multipolos rápidos é um potencial, e não uma velocidade, deriva-se o resultado da equação 59:

$$\frac{\partial \phi(b)}{\partial z} = \sum_{t=1}^T b_t \cdot t \cdot z^{t-1} \quad (60)$$

O valor resultante da equação 60 é o campo de velocidades distante, cálculo que encerra o método de multipolos rápidos. Na seção seguinte, calcula-se o campo de velocidades próximo.

3.5 CAMPO DE VELOCIDADES PRÓXIMO

Após o cálculo do campo de velocidades distante (equação 60), é necessário calcular o campo de velocidades próximo; tal cálculo é feito através da lei de Biot-Savart. Na figura 18 ilustra-se como o uso da lei de Biot-Savart foi limitada (somente para a caixa azul e para as caixas cinzas). O equacionamento da lei de Biot-Savart foi abordado na seção 2.2.1 e é dado pelas equações 8 e 9.

Em resumo, o campo de velocidades na posição ocupada por um vórtice discreto é obtido pela adição de três componentes:

1. Para vórtices discretos da mesma caixa, a interação é feita diretamente pela lei de Biot-Savart (campo de velocidades próximo).
2. Para vórtices discretos nas caixas vizinhas (no nível de refinamento mais elevado), também é calculada a interação direta pela lei de Biot-Savart (campo de velocidades próximo).
3. Para vórtices discretos nas caixas distantes, o resultado é calculado pelo método de multipolos rápidos (em particular, a etapa final, Local to Particle; campo de velocidades distante).

O último passo para a obtenção do campo de velocidades é unir as contribuições dos campos resultantes das caixas próximas e distantes, o qual é dado por:

$$V = \left(\frac{V_{distante}}{2\pi} \right) + V_{próximo} \quad (61)$$

$$V_{final} = (-imag(V), -real(V)) \quad (62)$$

Para que ambos os campos de velocidade estejam na mesma escala de unidade, é necessário

dividir o campo de velocidades distante por 2π , como mostrado pela equação 61. Além disso, é necessário inverter a parte real com a imaginária do vetor de velocidades, análogo ao que é feito nas equações 10 e 11, onde, na equação 10, por exemplo, o cálculo do campo de velocidades em x utiliza somente de variáveis do eixo y . Maiores detalhes sobre a formulação matemática do método de multipolos rápidos podem ser encontrados no trabalho original de Greengard & Rokhlin (1987), bem como no trabalho de Ricciardi (2016).

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

A análise de resultados, neste trabalho, possui três frentes principais:

- 1) Análise do desenvolvimento da esteira de vórtices.
- 2) Comparação entre o tempo dispendido nas simulações numéricas com e sem a utilização do método de multipolos rápidos.
- 3) Avaliação da distribuição do tempo de simulação numérica no algoritmo do método de multipolos rápidos.

Antes de discutir-se cada um dos resultados, é importante estabelecer sob quais condições as simulações foram executadas. Ressalta-se que, tanto as simulações envolvendo o método de multipolos rápidos, quanto aquelas que utilizaram, exclusivamente, a lei de Biot-Savart, lançaram mão do modelo do vórtice discreto de Lamb (equações 10 e 11). A tabela 1 mostra os principais parâmetros envolvidos nas simulações numéricas.

Tabela 1 – Parâmetros das simulações utilizando o método de multipolos rápidos (FMM)

Propriedades das simulações	
Propriedades do FMM	
Nível de refinamento	6
Número de termos da série de Taylor	25
Propriedades dos vórtices discretos	
Número de vórtices discretos em cada ponta de asa	5 - 250.000
Raio do núcleo do vórtice discreto	0,001
Número de Reynolds	75000
Propriedade de tempo	
Incremento de tempo	0,05

Fonte: produção própria do autor.

O número de vórtices discretos utilizados nas simulações variou de 10 até 500000, porém, cada simulação teve um número fixo de vórtices discretos durante todo o teste. Em outras palavras, 20 testes para cada abordagem foram realizados, variando-se o número de vórtices discretos conforme a tabela 2:

Tabela 2 – Número de vórtices discretos utilizados em cada simulação numérica

Teste	Número total de vórtices discretos
1	10
2	50
3	100
4	500
5	1000
6	5000
7	10000
8	20000
9	30000
10	40000
11	50000
12	100000
13	150000
14	200000
15	250000
16	300000
17	350000
18	400000
19	450000
20	500000

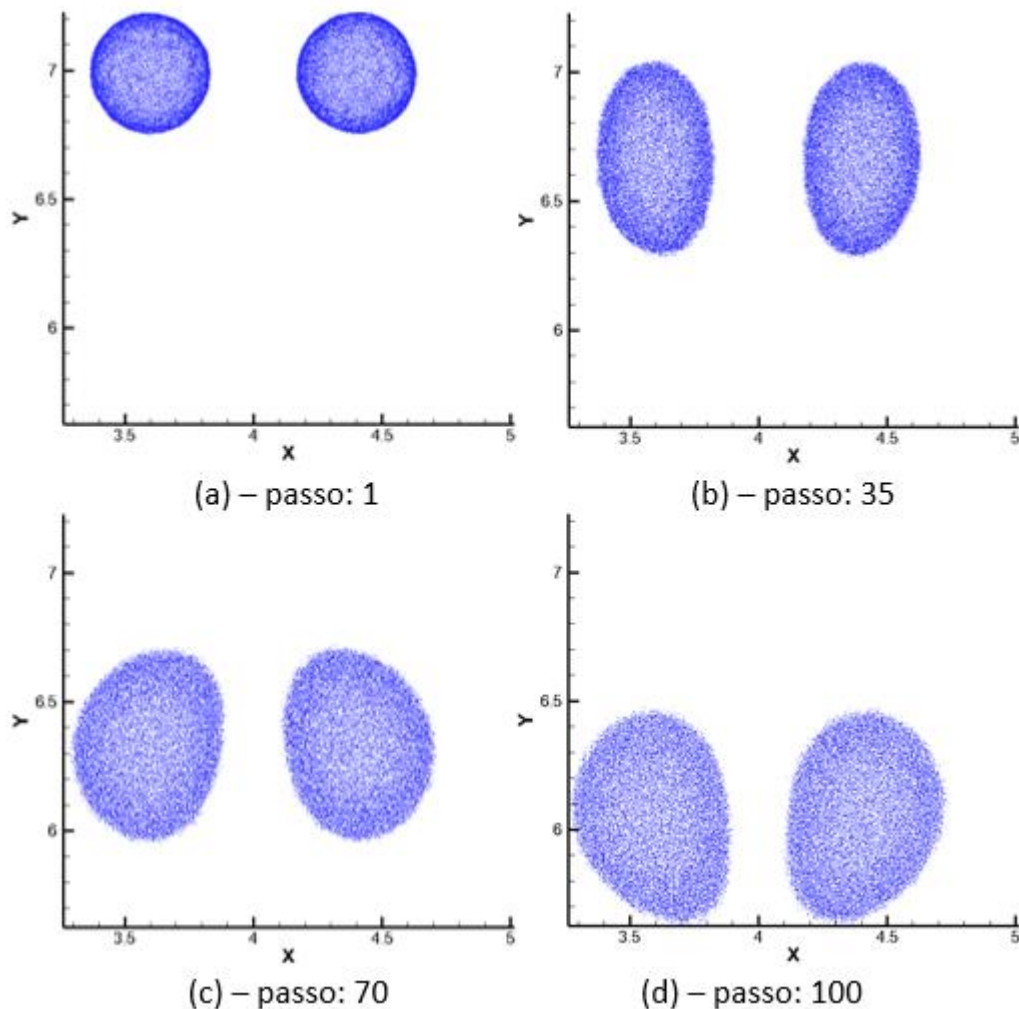
Fonte: produção própria do autor.

Quando da utilização do método de multipolos rápidos, nível máximo de refinamento 6 foi utilizado devido ao fato de ser o limite para atender à condição de que o tamanho da caixa deve ser maior do que o raio do núcleo do vórtice discreto de Lamb; esta condição foi imposta na etapa de pré-processamento contínuo (seção 3.2.2). Em relação ao número máximo de termos na da série de Taylor, informa-se que foram utilizados 25, pois após testes utilizando menos termos na série, erros em relação ao método original (puramente lei de Biot-Savart) apareciam tanto no cálculo do campo de velocidades como no cálculo das posições dos vórtices discretos.

4.1 DESENVOLVIMENTO DA ESTEIRA DE VÓRTICES

Na figura 19 apresenta-se a evolução, ao longo do tempo, das estruturas vorticosas. O desenvolvimento de tais estruturas foi obtido a partir da associação do método de multipolos rápidos com o método de vórtices discretos.

Figura 19 – Desenvolvimento do par contrarrotativo de estruturas vorticosas desprendidos das pontas das asas de uma aeronave



Fonte: produção própria do autor.

Na figura 19(a), 19(b), 19(c) e 19(d) apresenta-se o resultado do teste número 10 (40000 vórtices discretos em cada ponta de asa) da tabela 2, onde cada ponto azul representa um vórtice discreto de Lamb.

A tabela 3 exibe, para cada passo de tempo da figura 19, a posição e velocidade de quatro vórtices discretos aleatórios (dois de cada nuvem de vórtices discretos) para os dois métodos abordados: exclusivamente lei de Biot-Savart e o método de multipolos rápidos.

Tabela 3 - Comparação entre as metodologias de teste

Passo	Vórtice Discreto	Lei de Biot-Savart				Método de Multipolos Rápidos				Variação percentual			
		Px	Py	Vx	Vy	Px	Py	Vx	Vy	Px	Py	Vx	Vy
1	10136	3,4165	7,1153	-3,2836	2,7650	3,4165	7,1153	-3,2836	2,7650	0,0000%	0,0000%	0,0000%	0,0000%
1	17980	3,4605	7,1682	-2,4490	3,5816	3,4605	7,1682	-2,4490	3,5816	0,0000%	0,0000%	0,0000%	0,0000%
1	24515	4,5766	6,8393	3,8425	-2,8099	4,5766	6,8393	3,8425	-2,8099	0,0000%	0,0000%	0,0000%	0,0000%
1	27547	4,5592	7,0577	3,0657	1,4075	4,5592	7,0577	3,0657	1,4075	0,0000%	0,0000%	0,0000%	0,0000%
35	10136	3,7697	6,4537	-0,1603	-0,6192	3,7697	6,4537	-0,1603	-0,6192	0,0000%	0,0000%	0,0000%	0,0000%
35	17980	3,7243	6,3854	-0,2570	-0,4899	3,7243	6,3854	-0,2570	-0,4899	0,0000%	0,0000%	0,0000%	0,0000%
35	24515	4,2021	6,7623	-0,1105	-0,6566	4,2021	6,7623	-0,1105	-0,6566	0,0000%	0,0000%	0,0000%	0,0000%
35	27547	4,2865	6,7743	-0,0945	-0,3885	4,2865	6,7743	-0,0945	-0,3885	0,0000%	0,0000%	0,0000%	0,0000%
70	10136	3,3313	6,3614	0,0326	0,2781	3,3313	6,3614	0,0326	0,2781	0,0000%	0,0000%	0,0000%	0,0000%
70	17980	3,3698	6,4628	0,1426	0,2296	3,3698	6,4628	0,1426	0,2296	0,0000%	0,0000%	0,0000%	0,0000%
70	24515	4,5833	6,0747	0,3041	0,1137	4,5833	6,0747	0,3041	0,1137	0,0000%	0,0000%	0,0000%	0,0000%
70	27547	4,3845	6,1330	0,1540	-0,2214	4,3845	6,1330	0,1540	-0,2214	0,0000%	0,0000%	0,0000%	0,0000%
100	10136	3,7253	6,3668	0,2701	-0,3698	3,7253	6,3668	0,2701	-0,3698	0,0000%	0,0000%	0,0000%	0,0000%
100	17980	3,7687	6,2719	0,1688	-0,4588	3,7687	6,2719	0,1688	-0,4588	0,0000%	0,0000%	0,0000%	0,0000%
100	24515	4,5233	6,3851	-0,2990	0,0354	4,5233	6,3851	-0,2990	0,0354	0,0000%	0,0000%	0,0000%	0,0000%
100	27547	4,5506	6,0384	0,0314	0,0084	4,5506	6,0384	0,0314	0,0084	0,0000%	0,0000%	0,0000%	0,0000%

Fonte: produção própria do autor.

As colunas de delta da tabela 3 tornam explícito a precisão do método de multipolos rápidos. É importante ressaltar que a precisão do método é altamente atrelada ao truncamento da série de Taylor, definido pelo usuário (25 termos para os testes executados neste trabalho). Caso a série fosse truncada em menos termos, erros apareceriam nas colunas de delta.

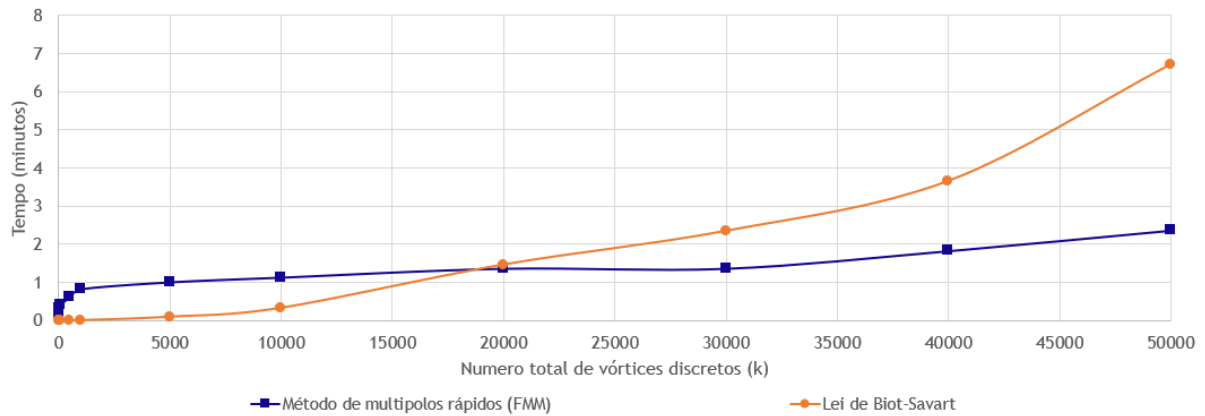
4.2 AVALIAÇÃO DO CUSTO COMPUTACIONAL ENVOLVIDO NAS SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Antes que se entre na discussão sobre o custo computacional e tempo das simulações, é importante que se cite a máquina utilizada para a realização de tais testes: computador equipado com processador Intel Core i7-5500U (2,40 GHz) e 8,0GB de memória RAM.

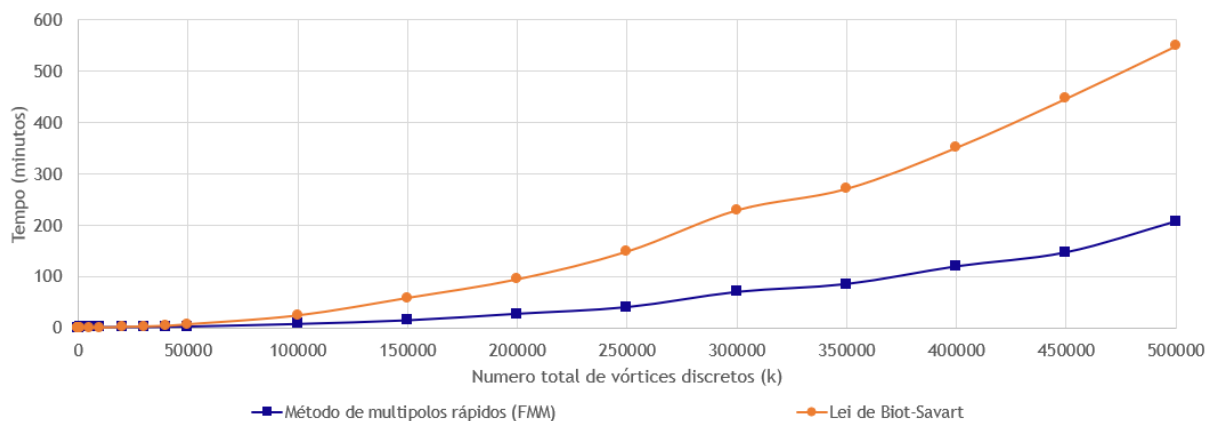
Verifica-se que, em alguns dos testes realizados, o tempo dispendido nas simulações numéricas que utilizam o método de multipolos rápidos é superior àquele dispendido nas simulações que utilizam, exclusivamente, a lei de Biot-Savart. Isto pode ser explicado pelo fato de que a execução de algumas etapas do método de multipolos rápidos, em particular, as etapas de pré-processamento, consomem um tempo computacional relativamente alto. Deste modo, em função da existência de tais etapas, a utilização do método de multipolos rápidos só se justifica para simulações numéricas envolvendo um número elevado de vórtices discretos. Caso contrário, ou seja, para um número reduzido de vórtices discretos, o tempo gasto nas etapas de pré-processamento pode superar o tempo gasto pela lei de Biot-Savart,

inviabilizando, assim, o uso do método de múltiplos rápidos em tais situações. Essa discussão pode ser melhor compreendida a partir da observação da figura 20.

Figura 20 – Tempo de simulação numérica dispendido em função do número de vórtices discretos presentes no domínio fluido



(a)



(b)

Fonte: produção própria do autor.

Nota-se, portanto, que, quando o número de vórtices discretos presentes no domínio fluido situa-se na faixa entre 15000 e 20000 (figura 20a), o método de multipolos rápidos passa a ser mais eficiente, em termos de tempo de processamento, do que a lei de Biot-Savart, chegando a ser 184,58% mais veloz, quando $k = 50000$. Extrapolando a análise para um número ainda maior de vórtices discretos presentes no domínio fluido (figura 20(b)), fica evidente o quão importante é a associação do método de multipolos rápidos com o método de vórtices discretos visando a redução do tempo dispendido em simulações numéricas

lagrangianas.

Na tabela 4 mostra-se os valores exatos de tempo de processamento para cada simulação executada, assim como a variação percentual da lei de Biot-Savart em relação ao FMM.

Tabela 4 – Comparação entre o método de multipolos rápidos e a lei de Biot-Savart para o cálculo do campo de velocidades do escoamento

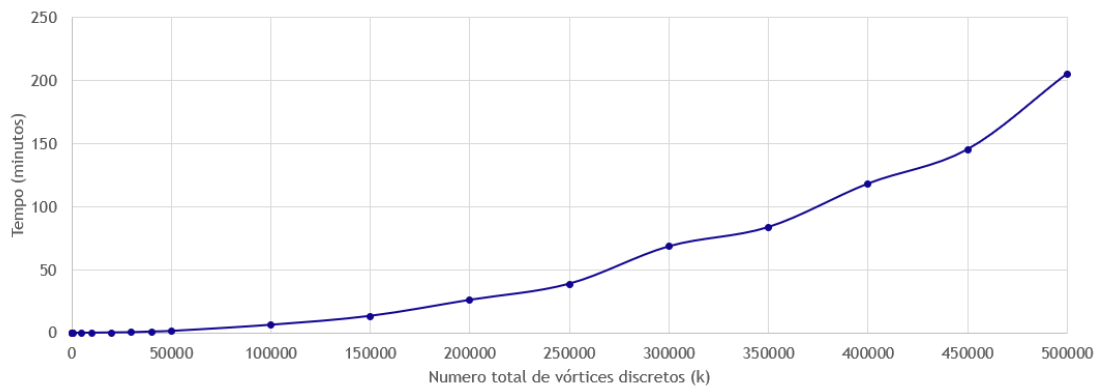
Teste	Número de vórtices discretos	Lei de Biot-Savart Tempo total (minutos)	Variação percentual: (Lei de Biot-Savart / FMM)-1	Método de multipolos rápidos (FMM) Tempo total (minutos)
1	10	0,000067	-99,96%	0,1829
2	50	0,0001	-99,97%	0,324651
3	100	0,000183	-99,96%	0,413634
4	500	0,001367	-99,78%	0,609501
5	1000	0,003383	-99,59%	0,818634
6	5000	0,093733	-90,63%	1,000718
7	10000	0,328167	-70,83%	1,125199
8	20000	1,462633	7,64%	1,35876
9	30000	2,347367	72,84%	1,358116
10	40000	3,656333	100,83%	1,820583
11	50000	6,716467	184,58%	2,360116
12	100000	23,978784	223,74%	7,4067
13	150000	58,134566	301,12%	14,493183
14	200000	94,399748	246,44%	27,248434
15	250000	148,478516	269,41%	40,193648
16	300000	228,938802	228,04%	69,788915
17	350000	270,662695	217,98%	85,118336
18	400000	350,69821	193,44%	119,512068
19	450000	446,346322	204,06%	146,793571
20	500000	548,673177	165,05%	207,0051883

Fonte: produção própria do autor.

4.3 AVALIAÇÃO DO TEMPO DISPENDIDO EM CADA ETAPA DO MÉTODO DE MULTIPOLOS RÁPIDOS

De maneira geral, o aumento do número de vórtices discretos presentes no domínio fluido resulta em um aumento não proporcional do tempo de cálculo do método de multipolos rápidos, porém, isto não se aplica à etapa de cálculo do campo de velocidades próximo do referido método. Existe uma tendência de crescimento do tempo de simulação de tal etapa, proporcional ao número de vórtices discretos presentes no domínio fluido, conforme mostrado na figura 21.

Figura 21 – Tempo dispendido na execução do cálculo do campo de velocidades próximo via método de multipolos rápidos

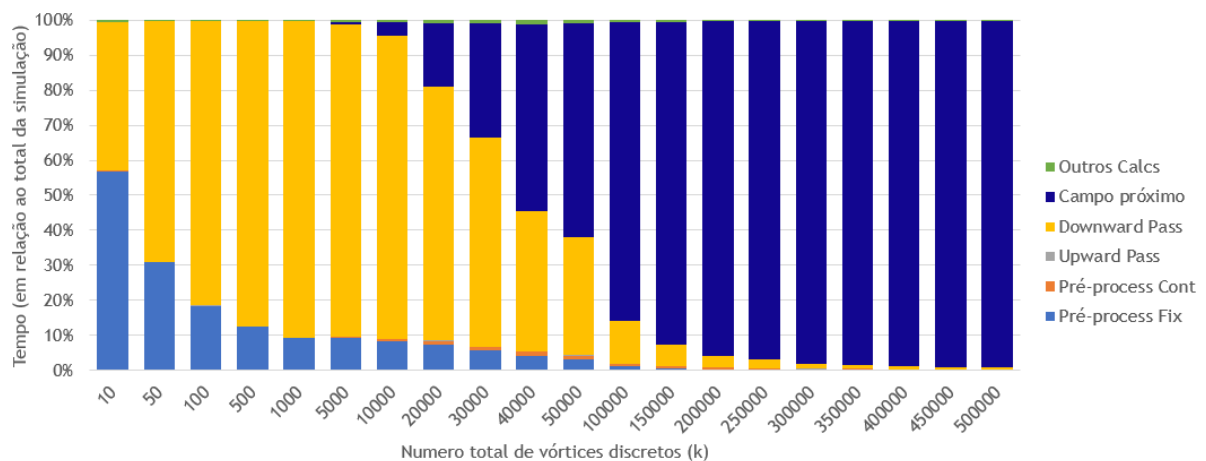


Fonte: produção própria do autor.

A explicação para o comportamento observado na figura 21 pode ser obtida lembrando-se que o método de multipolos rápidos não elimina por completo a utilização da lei de Biot-Savart; ele apenas restringe sua utilização a um mínimo possível. Entretanto, a etapa do método de multipolos rápidos que executa o cálculo do campo de velocidades próximo (mostrada na figura 21) utiliza a lei de Biot-Savart e, por isso, tem relação estreita com o número de vórtices discretos presentes no domínio fluido. Para se ter uma ideia, no teste 20 (tabela 4), o tempo de execução da etapa referente ao cálculo do campo de velocidades próximo ultrapassa 99% do tempo total dispendido no método de múltiplos rápidos.

Na figura 22 apresenta-se a percentagem do tempo de cálculo dispendida em cada etapa do método de multipolos rápidos, o que corrobora com a explicação dada anteriormente.

Figura 22 – Tempo de processamento de cada etapa do método de multipolos rápidos



Fonte: produção própria do autor.

Observa-se, a partir da figura 22 que, a partir de 150000 vórtices discretos, a etapa referente ao cálculo do campo de velocidades próximo responde por mais de 90% do tempo total dispendido com o método de múltiplos rápidos.

5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

O método de vórtices discretos, técnica lagrangiana de simulação numérico-computacional, apesar de promissora por permitir a obtenção de detalhes dos escoamentos, tem como principal desvantagem ser onerosa em termos de tempo de processamento. Essa característica é patente no cálculo do campo de velocidades, o qual utiliza, originalmente, a lei de Biot-Savart para calcular a interação vórtice-vórtice.

Visando contribuir para a evolução do método de vórtices discretos, no presente trabalho utilizou-se o método de múltiplos rápidos com o intuito de acelerar a etapa referente ao cálculo do campo de velocidades do escoamento. O método de multipolos rápidos reúne os vórtices discretos presentes no domínio fluido em caixas e reduz o número de interações vórtice-vórtice, agrupando a influência dos vórtices discretos nas caixas às quais pertencem de forma a promover o maior número possível de interações caixa-caixa.

A partir dos testes apresentados no capítulo 5 mostrou-se, de forma cabal, que o método de múltiplos rápidos acelera o cálculo do campo de velocidades e conserva os resultados obtidos quando se utiliza, exclusivamente, a lei de Biot-Savart. Mais precisamente, para simulações numéricas envolvendo mais de 20000 vórtices discretos de Lamb na representação do campo de vorticidades do escoamento, o método de multipolos rápidos reduz o tempo de processamento em, aproximadamente, 185,78%. Quanto maior o número de vórtices discretos presentes no domínio fluido, mais importante se torna o método de multipolos rápidos, reduzindo cada vez mais o tempo de processamento em relação aos casos em que a lei de Biot-Savart é usada de forma exclusiva. A lei de Biot-Savart é tão onerosa, em termos de tempo computacional que, mesmo quando se utiliza o método de multipolos rápidos, ela ainda responde pela maior parte do tempo de processamento.

Duas outras frentes podem ser exploradas em trabalhos futuros, uma relacionada ao método de vórtices discretos, e outra que envolve o método de multipolos rápidos. A primeira é a adição de uma fronteira sólida (pista do aeroporto) ao problema, o que deixa o estudo mais próximo da realidade e, ainda, demanda um esforço computacional maior, haja vista que as estruturas vorticosas mostradas na figura 19 induzirão a formação de camada limite na pista. A segunda seria paralelizar o algoritmo do método de multipolos rápidos, o que tornaria o código ainda mais ágil em termos de tempo computacional.

REFERÊNCIAS

ALCÂNTARA PEREIRA, Luiz Antonio. **Simulação numérica do escoamento em torno de um corpo de forma arbitrária utilizando o método de vórtices discretos**. 1999. 102 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 1999.

AVIÕES E MÚSICA. **Wake turbulence, cuidados na decolagem**. Disponível em: <http://www.avioesemusicas.com/wake-turbulence-cuidados-na-decolagem.html>. Acesso em: 01 nov. 2019.

BATCHELOR, G. K. **An introduction to fluid dynamics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1967. 615 p.

BIMBATO, Alex Mendonça. **Estudo de escoamentos turbulentos em torno de um corpo rombudo de superfície hidraulicamente lisa ou rugosa utilizando o método de vórtices discreto**. 2012. 165 f. Dissertação (Doutorado em Dinâmica dos Fluidos e Máquinas de Fluxo) – Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2012.

CARRIER, J.; GREENGARD, L.; ROKHLIN, V. A fast adaptive multipole algorithm for particle simulations. **SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing**, Philadelphia, v. 9, p. 669–686, 1998.

CHENG, H.; GREENGARD, L.; ROKHLIN, V. A fast adaptive multipole algorithm in three dimensions. **Journal of Computational Physics**, Amsterdam, v. 155, p. 468–498, 1999.

CHORIN, A. J. Numerical study of slightly viscous flows. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge, v. 57, p. 785–796, 1973.

CHRISTIANSEN, J. P. Numerical simulation of hydrodynamics by the method of point vortices. **Journal of Computational Physics**, Amsterdam, v. 13, p. 363–379, 1973.

CIPRA, B.A. The best of the 20th century: editors name top 10 algorithms. **SIAM News**, Philadelphia, v. 33, p. 1–2, 2000.

DARVE, E. The fast multipole method: numerical implementation. **Journal of Computational Physics**, Amsterdam, v. 160, p. 195–240, 2000.

EINSTEIN, A. **Investigation on the theory of Brownian motion**. Mineola: Dover Publications, 1956. 119 p.

FERZIGER, J. H. **Numerical methods for engineering application**. New York: John Wiley & Sons, 1981. 288 p.

GREENGARD, L.; ROKHLIN, V. A fast algorithm for particle simulations. **Journal of Computational Physics**, Amsterdam, v. 73, p. 325–348, 1987.

GUMEROV, N.A.; DURAISWAMI, R. **Fast multipole methods for the Helmholtz equation in three dimensions**. Amsterdam: Elsevier Science, 2005. 426 p.

HIRATA, M.H.; RICCI, J.E.R.; OLIVEIRA, W. Comportamento da esteira de aeronaves nas operações de pouso e decolagem, *In: BRAZILIAN CONGRESS OF THERMAL ENGINEERING AND SCIENCES*, 9., 2011, Rio de Janeiro. **Anais [...]**. Rio de Janeiro: Brazilian Congress of Thermal Engineering and Sciences – ENCIT, 2011.

KAMEMOTO, K.; NAKAHARA, N.; KAWATA, Y.; IMAMURA, K.; KANEKO, T. Numerical simulation of vortex flows interacting with vibrations under flow Gates. *In: IAHR SYMPOSIUM*, 4., 1990, Belgrade. **Symposium [...]**. Belgrade: IAHR, 1990.

LEONARD, A. Vortex methods for flow simulation. **Journal of Computational Physics**, Amsterdam, v. 37, p. 289-335, 1980.

LEWIS, R. I. **Vortex element method for fluid dynamic analysis of engineering systems**. Cambridge: Cambridge University Press, 1991. 529 p.

MACHOL, R. Wake vortices – a primer. **FAA Aviation Safety Journal**, Washington, v. 3, n. 1, p. 16-19, 1993.

MONI, A.P.; ALCÂNTARA PEREIRA, L.A.; HIRATA, M.H. Airplane wake near the ground with natural convection. *In: INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING*, 21., 2011, Natal. **Anais [...]**. Natal: International Congress of Mechanical Engineering – COBEM, 2011.

MUSTTO, A. A. **Simulação numérica do escoamento em torno de um cilindro circular com e sem rotação utilizando o método de vórtices**. 1998. Dissertação de Mestrado, PEM – COPPE/UFRJ. 1998. 95 f. Dissertação (Mestrado em Ciências e Engenharia Mecânica) – Programas de Pós Graduação em Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1998.

NISHIMURA, N. Fast multipole accelerated boundary integral equation methods. **Applied Mechanics Reviews**, New York, v. 55, p. 299–324, 2002.

OGAMI, Y., AKAMATSU, T. Viscous flow simulation using the discrete vortex model – the diffusion velocity method. **Computers & Fluids**, Amsterdam, v. 19, p 433-441, 1982.

OGAMI, Y. Fast summation algorithms for the particle simulation of far-field potential and rapid decaying potential. **JSEM International Journal**, Tsukuba, v. 45, n. 1, p. 174-182, 2002.

PANTON, R. L. **Incompressible flow**. New York: John Wiley & Sons, 1984. 1555 p.

RICCIARDI, T.M. **Fast multipole discrete vortex method applied to unsteady flow simulations**. 2016. 171 f. Dissertation (Degree of Master in Mechanical Engineering, in the area of Thermal and Fluids) – Faculty of Mechanical Engineering, University of Campinas, Campinas, 2016.

RICCIARDI, T. R.; WOLF, W. R., BIMBATO, A. M. Fast multipole method applied to

Lagrangian simulations of vortical flows. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, Amsterdam, v. 51, p. 180-197, 2017a.

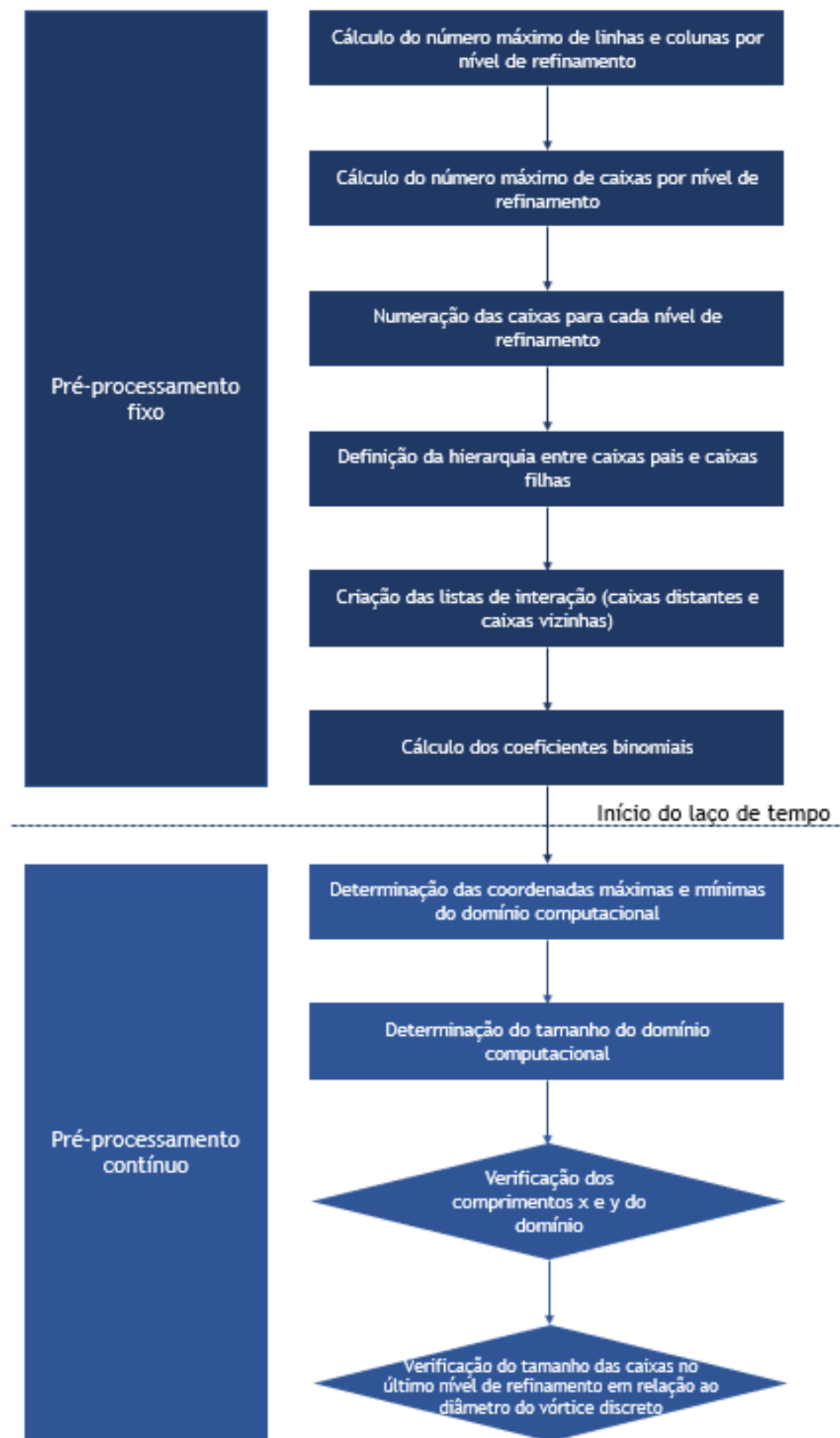
RICCIARDI, T. R.; WOLF, W. R.; BIMBATO, A. M. A fast algorithm for simulation of periodic flows using discrete vortex particles. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, Porto Alegre, v. 39, p. 4555, 2017b.

WOLF, William Roberto. **Airfoil aeroacoustics: LES and acoustic analogy predictions**. 2011. 220 f. Dissertation (Degree of Doctor of Philosophy in Aeronautics and Astronautics) – Department of Aeronautics and Astronautics, Stanford University, Stanford, 2011.

ZHENG, Zhongquan Charlie. **The influence of Reynolds number and atmospheric effects on aircraft wake vortices near the ground**. 1993. 168 f. Dissertation (Degree of Doctor of Philosophy in Mechanical Engineering and Mechanics) - Mechanical Engineering and Mechanics Department, Old Dominion University, Norfolk, 1993.

ZHENG, Z.C.; ASH, R.L. Study of aircraft wake vortex behavior near the ground. **AIAA Journal**, Reston, v. 34, n. 3, p. 580-588, 1996.

APÊNDICE A – Fluxograma do funcionamento do método de multipolos rápidos
(continua)



APÊNDICE A – Fluxograma do funcionamento do método de multipolos rápidos
(conclusão)

