

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ÁREA DE FÍSICA APLICADA

**DIFUSÃO E CAOS EM SISTEMAS UNIDIMENSIONAIS E
BIDIMENSIONAIS**

VALDIR BARBOSA DA SILVA JUNIOR

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO – SP

2025

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Valdir Barbosa da Silva Júnior

DIFUSÃO E CAOS EM SISTEMAS UNIDIMENSIONAIS E BIDIMENSIONAIS

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antônio Barreiro.

Co-Orientador: Prof. Dr. Diogo Ricardo da Costa

Rio Claro - SP

2025

S586d Silva Junior, Valdir Barbosa da
Difusão e caos em sistemas unidimensionais e
bidimensionais / Valdir Barbosa da Silva Junior. -- Rio Claro,
2025
85 p. : il., tabs.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP),
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientador: Luiz Antônio Barreiro
Coorientador: Diogo Ricardo da Costa

1. Caos nos Sistemas. 2. Difusão. 3. Modelo Bouncer. 4.
Bilhar Lemniscata. I. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Valdir Barbosa da Silva Júnior

Difusão e Caos em Sistemas Unidimensionais e Bidimensionais

Tese de Doutorado apresentada ao
Instituto de Geociências e Ciências
Exatas do Câmpus de Rio Claro, da
Universidade Estadual Paulista “Júlio
de Mesquita Filho”, como parte dos
requisitos para obtenção do título de
Doutor em Física.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. LUIZ ANTÔNIO BARREIRO
IGCE / UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. EDSON DENIS LEONEL
IGCE / UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. JOELSON DAYVISON VELOSOS HERMES
IFSULDEMINAS / Inconfidentes (MG)

Profa. Dra. ANA LAURA BOSCOLO
Rede Particular/Rio Claro (SP)

Dr. MATHEUS HANSEN FRANCISCO
Center for Mathematics and applications (NOVA Math)/Caparica

Conceito: Aprovado.

Rio Claro (SP), 21 de fevereiro de 2025.

Agradecimentos

Esse espaço destinado aos agradecimentos, seguramente, é pequeno e não me permite agradecer de forma adequada a todas as pessoas que tiveram alguma participação ao longo do meu doutorado. Dessa forma, deixo apenas poucas palavras, mas de todo o meu coração. Agradeço ao meu Deus por me dar força e discernimento nessa fase da minha vida.

Agradeço a toda minha família pelo apoio nesta empreitada. Em especial à minha esposa, Cândida Cristina, por estar sempre ao meu lado e acreditando em mim, sempre com palavras na medida certa. E às minhas três lindas e preciosas filhas, Bruna, Rebeca e Manuela.

Agradeço ao meu Pai, Valdir e Minha amada e querida Mãe Iris Marta, pelas palavras e por tudo o que fizeram para que eu e meus irmãos pudéssemos estudar.

Aos meus irmãos, Adriano e Fernando, pelas conversas e sonhos que sempre planejamos juntos.

Agradeço à minha sogra Gildete por estar presente nas horas de minha ausência por conta dos estudos e também ao meu cunhado Fernando.

Aos amigos Flávio, Joelson e Kadu, por me apresentarem ao programa, pelos estudos em grupo, pelas viagens e muitas risadas juntos. Mas que, quando nas adversidades, sempre estiveram comigo com sábias palavras e muita motivação. Obrigado, meus amigos.

Agradeço à minha amiga e colega de pesquisa e de todos os momentos, Ana Laura, por toda ajuda, ensinamentos e discussões.

Aos meus amigos e irmãos da Tenda de luz que com suas orações sempre mandaram energias positivas.

Aos meus amigos do dia-a-dia, como Rafael e Iolanda. A amizade de vocês é uma bênção que surgiu em nossos caminhos.

A todos os colegas e amigos do departamento de Física da UNESP (Rio Claro), em especial ao Professor Denis pelas dicas e instruções para a finalização deste trabalho.

Ao meu orientador, me faltam palavras, professor Luiz Antônio Barreiro, que com muito carinho e paciência me conduziu até esse final. A você, professor, o meu muito obrigado!

Ao meu coorientador professor Diogo Ricardo da Costa, com o qual tive o prazer de aprender muito.

Agradeço ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul de Minas Gerais - IFSULDEMINAS, campus Inconfidentes, por possibilitar que eu me dedicasse integralmente ao doutorado.

Devemos considerar o estado presente do universo como efeito dos seus estados passados e como causa dos que se vão seguir. Suponha-se uma inteligência que pudesse conhecer todas as forças pelas quais a natureza é animada e o estado em um instante de todos os objetos - uma inteligência suficientemente grande que pudesse submeter todos esses dados à análise -, ela englobaria na mesma fórmula os movimentos dos maiores corpos do universo e também dos menores átomos: nada lhe seria incerto e o futuro, assim como o passado, estaria presente ante os seus olhos. (Laplace)

Resumo

Motivado por um modelo de bilhar unidimensional, o modelo *Bouncer* consiste em uma partícula clássica sob ação de um campo gravitacional, que colide com uma parede oscilante no tempo. Esse modelo foi proposto como um sistema alternativo para estudar a aceleração de Fermi, fenômeno que consiste no ganho ilimitado de energia da partícula devido às colisões com a parede móvel. Nesta tese de doutorado, exploramos inicialmente a influência de parâmetros de controle, como a flutuação térmica e uma hipótese adiabática, em um modelo que chamamos de modelo *Bouncer* "modificado". Além disso, utilizamos o Mapa Padrão de Chirikov para compreender melhor o comportamento do caos e da difusão na evolução do sistema. Essas características motivaram a análise de um bilhar bidimensional com fronteira inicialmente ovóide, com foco no comportamento de trajetórias e órbitas no espaço de fase conforme o parâmetro de controle é variado. Começamos descrevendo o sistema e sua dinâmica, destacando como as mudanças nesse parâmetro de controle afetam as trajetórias. Utilizamos uma paleta de cores para representar a frequência das visitas das órbitas a regiões específicas do espaço de fase. Efetuando mudanças na fronteira do bilhar, ou seja, aproximando o parâmetro de deformação de seu valor máximo, observamos alguns padrões como taxa de escape, decaimento exponencial e o surgimento de novas estruturas em um espaço de fase distorcido.

Palavras-chave: Caos; Modelo *Bouncer*; Difusão; Bilhar Lemniscata.

Abstract

Motivated by a one-dimensional billiards model, the *Bouncer* model consists of a classical particle under the action of a gravitational field, which collides with a wall oscillating in time. This model was proposed as an alternative system to study Fermi acceleration, a phenomenon that consists of the particle's unlimited energy gain due to collisions with the moving wall. In this doctoral thesis, we initially explore the influence of control parameters, such as thermal fluctuation and an adiabatic hypothesis, in a model that we call the "modified" *Bouncer* model. Furthermore, we use the Standard Chirikov Map to better understand the behavior of chaos and diffusion in the evolution of the system. These characteristics motivated the analysis of a two-dimensional billiard with an initially ovoid boundary, focusing on the behavior of trajectories and orbits in phase space as the control parameter is varied. We begin by describing the system and its dynamics, highlighting how changes in this control parameter affect trajectories. We use a color palette to represent the frequency of orbit visits to specific regions of phase space. By making changes to the billiard boundary, that is, bringing the deformation parameter closer to its maximum value, we observe some patterns such as escape rate, exponential decay and the emergence of new structures in a distorted phase space.

Keywords: Chaos; *Bouncer* model; Diffusion; Lemniscata billiards.

LISTA DE FIGURAS

- 2.1 Nesta figura está representada a colisão no instante t_{n+1} . No instante anterior t_n a partícula sobe com velocidade v_n . Sob influência do campo gravitacional a partícula retorna com velocidade $-v_n$ para colidir no instante t_{n+1} e fator de restituição γ_{n+1} 26
- 2.2 Gráficos V_{rms} para 4 valores diferentes de z , considerando um conjunto de 10^4 condições iniciais variando ϕ no intervalo $[0, 2\pi]$ e evoluindo 10^6 iterações. 31
- 2.3 Gráfico ilustrando regiões onde a fase congelada transita para a fase difusiva em três valores distintos de $\bar{\zeta}$. Os valores críticos de z são enfatizados nos quais essas transições ocorrem. 32
- 2.4 Diagrama de fases categorizado pela relação lei de potência $V_{rms} = an^b$. Para $b < 0,49$, o processo é identificado como subdifusivo, enquanto para $b > 0,51$ é classificado como superdifusivo. A fronteira entre estes dois regimes, onde $0,49 < b < 0,51$, corresponde a um processo de difusão normal. 35
- 2.5 Espaços de fase para vários valores de $\bar{\zeta}$ e z 37
- 2.6 Variações nos valores dos expoentes de Lyapunov em função dos parâmetros $\bar{\zeta}$ e z . Em todos os gráficos, os eixos coordenados representam as condições iniciais. A fase inicial (ϕ_{in}) e a velocidade inicial (V_{in}) são representadas no eixo x e eixo y , respectivamente. A barra em tons de cinza denota os valores dos expoentes de Lyapunov. 42

2.7	Diagrama de transmissividade. Fração de órbitas que atingir ou exceder a posição do valor máximo alcançado para última curva invariante <i>spanning</i> . A barra em tons de cinza indica a porcentagem de transmissividade.	44
3.1	Ilustração da trajetória de uma partícula entre duas colisões sucessivas no interior do bilhar.	48
3.2	Esboço de diferentes geometrias da fronteira, para as combinações de parâmetros.	50
3.3	Esquema ilustrativo da trajetória de uma partícula entre duas colisões sucessivas no interior do bilhar e dos ângulos envolvidos na descrição do mapa	51
3.4	Evolução do movimentos de rotação de uma partícula dentro de um bilhar circular. Sendo $\epsilon = 0$, $p = 2$. Para (a) $\alpha_n = 1,5$, (b) $\alpha_n = 1,2$, (c) $\alpha_n = 1,0$ e (d) $\alpha_n = 0,5$	54
3.5	Representação do espaço de fase de um bilhar circular.	55
3.6	a) Bilhar de Sinai. (b) Bilhar <i>stadium</i> . Representamos aqui duas trajetórias de uma partícula sujeita a duas condições iniciais muito próximas. Percebe-se que rapidamente apresentam trajetórias que diferenciam-se entre si.	56
3.7	Espaços de fases construídos para os parâmetros: (a) $p = 2$ e $\epsilon = 0,08$, (b) $p = 2$ e $\epsilon = 0,12$, (c) $p = 2$ e $\epsilon = 0,6$ e (d) $p = 2$ e $\epsilon = 0,9$	57

- 4.1 Em (a) a trajetória de uma partícula é mostrada, começando na posição inicial (x_0, y_0) com posição angular inicial θ_n . O ângulo inicial ϕ_n representa o ângulo entre o linha horizontal e a linha tangente no ponto inicial. O ângulo α_n é o ângulo entre o linha tangente e a linha ao longo da qual a partícula é lançada. A trajetória cruza o limite em (x_1, y_1) e novamente em (x_2, y_2) . Todos os ângulos são medidos no sentido anti-horário. Em (b), a mesma trajetória como em (a) é mostrado, mas com detalhes adicionais das intercepções com o eixo horizontal. A primeira intercepção ocorre em S_0 , seguida pela segunda intercepção em S_1 . A distância S é medida a partir do lado esquerdo da fronteira do bilhar, em $x = -1 - \epsilon$. Os parâmetros de controle usados nesta simulação são $\epsilon = 0,2$, $p = 2$, $\theta_n = 0,5$ e $\alpha_n = 1,5$. 61
- 4.2 Referente a Figura 4.1 (a), a trajetória da partícula cruza o limite em (x_1, y_1) e novamente em (x_2, y_2) 62
- 4.3 Nos painéis (a), (c) e (d), apresentamos uma única órbita caótica iterada até 10^7 vezes com os parâmetros $p = 2$, $\theta_n = 0,3$ e $\alpha_n = 1,9$, variando o parâmetro de controle ϵ . Em painel (a), definimos $\epsilon = 0,2$, onde um exemplo da trajetória caótica é ilustrado no painel (b) usando os mesmos parâmetros de controle como em (a). Os painéis (c) e (d) mostram os resultados para valores de ϵ de 0,21 e 0,35, respectivamente. 64
- 4.4 O painel (a) apresenta uma única órbita iterada até 10^7 vezes para $\epsilon = 0,5$. As cores indicam a frequência das visitas da órbita a regiões específicas do espaço de fase. Painel (b) ilustra um exemplo de trajetória correspondente às condições descritas em (a). Painel (c) e (d) exiba os resultados para $\epsilon = 0,7$. Em todos os casos, definimos $\theta_n = 0,3$ e $\alpha_n = 1,9$ 65
- 4.5 Em (a), uma única órbita caótica iterada até 10^7 vezes para $\epsilon = 0,99$, $p = 2$, $\theta_n = 0,3$ e $\alpha_n = 1,9$. Em (b), a mesma simulação exibindo a trajetória caótica, iterada 100 vezes. 66

- 4.6 (a) Uma órbita caótica é iterada até 10^6 vezes usando o seguinte parâmetro conjunto: $\epsilon = 0,2$, $p = 2$, $\theta_n = 0,3$ e $\alpha_n = 1,9$. O eixo θ é dividido em 10.000 intervalos igualmente espaçados, e cada vez que a órbita atinge um desses intervalos, contamos o número de vezes que ela visita esse intervalo. (b) A mesma simulação de (a) é mostrada, mas com valores diferentes de ϵ , especificamente 0,2, 0,21, 0,35, 0,5, 0,7 e 0,99. 67
- 4.7 M representa o número de acertos no limite do bilhar antes da partícula escapar pelo orifício em $X = 0$ (veja a Figura 4.5 (b) para detalhes). Em (a), mostramos o histograma η , que representa o número de ocorrências de cada valor M, ou seja, a contagem de diferentes acertos com o limite. O item (b) apresenta gráfico semelhante, mas com redimensionamento do eixo vertical, onde $\text{Frequência} = \eta(M) / \max(\eta)$ 68
- 4.8 Referente a 4.1 (b), as intercepções com o eixo horizontal ocorre primeiro em S_0 , seguido pela segunda em S_1 69
- 4.9 Para o conjunto de parâmetros $\epsilon = 0,2$, $p = 2$, $\theta_n = 0,3$ e $\alpha_n = 1,9$, plotamos S_1 versus S_0 . A linha L_1 representa a linha identidade, que atua como eixo de simetria da figura, onde $S_0 = S_1$. A linha L_2 conecta os pontos $(S_0, S_1) = (0, 2 + 2\epsilon)$ e $(S_0, S_1) = (2 + 2\epsilon, 0)$. As cores no gráfico representa a frequência (contagem) com a qual a órbita caótica visita regiões no espaço $S_0 S_1$. Os itens (b), (c) e (d) mostram diferentes seções ampliadas do gráfico em (a). 71
- 4.10 Para o conjunto de parâmetros $p = 2$, $\theta_n = 0,3$ e $\alpha_n = 1,9$, plotamos S_1 versus S_0 para diferentes valores de ϵ . Em (a) $\epsilon = 0,21$, (b) $\epsilon = 0,35$, (c) $\epsilon = 0,5$ e (d) $\epsilon = 0,7$. As cores no gráfico representa a frequência (contagem) com a qual a órbita caótica visita regiões no espaço $S_0 S_1$ 73
- 4.11 Para o conjunto de parâmetros $\epsilon = 0,99$, $p = 2$, $\theta_n = 0,3$ e $\alpha_n = 1,9$ plotamos S_1 versus S_0 . As cores no gráfico representam a frequência (contagem) com que a órbita caótica visita regiões no espaço $S_0 S_1$. Os itens (b), (c) e (d) mostram diferentes seções ampliadas do gráfico em (a). 74

LISTA DE TABELAS

2.1	V_{rms} para 4 valores diferentes de z	30
2.2	A tabela apresenta,os valores z críticos para cada valor do parâmetro ζ . Esses valores críticos representam os menores valores z abaixo dos quais a transição para o estado congelado ocorre.	33

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
	Introdução	16
1.1	Contexto Histórico	16
1.2	Os Processos difusivos	18
1.3	Organização da tese de doutorado	22
2	Controle de Processos Difusivos em um Modelo <i>Bouncer</i> modificado através do mapa padrão	23
2.1	O Modelo <i>Bouncer</i> modificado	23
2.2	Processo de Difusão	28
2.3	Propriedades Caóticas	36
2.3.1	Os espaços de fase	36
2.3.2	Determinante Jacobiano	40
2.3.3	Expoentes de Lyapunov	42
2.4	Propriedades de transporte	43
3	Bilhares Clássicos	47
3.1	Bilhares	47
3.2	Mapeamento em bilhares	49

3.3	Classificação Quanto a Dinâmica do Bilhar	53
3.3.1	Bilhares Integráveis	53
3.3.2	Bilhares não Integráveis	56
3.3.3	Bilhares Mistos	57
4	Dinâmica Caótica de um Sistema de Bilhares	59
4.1	Sobre o bilhar e considerações iniciais	60
4.2	Resultados Numéricos	62
4.2.1	Resultados para o plano X-Y	62
4.2.2	Taxa de Fuga	67
4.2.3	Resultados para o plano $S_1 - S_0$	69
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS	75
	Referências Bibliográficas	79

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Neste capítulo, será apresentado um breve contexto histórico a respeito de sistemas dinâmicos e processos de difusão, além de uma explicação sobre a estrutura desta tese de doutorado, destacando os principais focos de cada seção.

1.1 Contexto Histórico

Durante os séculos XVII e XVIII, com o início da Mecânica Clássica, teve-se também a origem dos estudos envolvendo sistemas dinâmicos [1], os quais são modelos matemáticos que descrevem a evolução de um sistema ao longo do tempo, que podem ser descritos basicamente de duas formas: os fluxos, sendo o tempo uma variável contínua, e os mapas, nos quais o tempo é uma variável discreta [2].

A teoria dos Sistemas Dinâmicos é utilizada para descrever problemas que evoluem temporalmente e aparecem tanto na Física, como em outras áreas como Biologia, Meteorologia, Economia, entre outras [3, 4]. Devido ao caráter determinístico, acreditava-se que fenômenos descritos no mundo macroscópico poderiam ser previsíveis, em que, mediante uma condição inicial e conhecendo as equações de movimento, poder-se-iam prever toda a órbita de um sistema. Porém, alguns problemas surgem devido à não linearidade das

equações e ao fato de que soluções analíticas não podiam ser obtidas. Nos tempos atuais, os modelos matemáticos utilizados para descrever fenômenos da natureza são [5], em sua grande maioria, não lineares. Trabalhos com este tipo de sistema começaram a ter um maior destaque após o matemático francês Henri Poincaré [6], no final do século XVIII e início do XIX, demonstrar a estabilidade do movimento dos corpos do Sistema Solar.

Poincaré, em 1886, ao participar de uma prova proposta pelos reis da Suécia e da Noruega, ganhou o prêmio, usando técnicas geométricas e topológicas, reduziu o sistema solar a um sistema de três corpos, provando - meio que parcialmente - que é impossível encontrar fórmula analítica exata que descreva o movimento de " m " partículas a partir de uma posição inicial qualquer. Foi então, pela primeira vez, considerada a possibilidade de caos em um sistema dinâmico determinístico, notando que pequenas perturbações nas condições iniciais poderiam resultar em comportamentos muito diferentes, introduzindo assim a ideia de sistemas dinâmicos complexos e caóticos.

Birkhoff, em 1927, tornou-se o precursor no estudo de bilhares [7], considerou um sistema de região fechada por uma fronteira para descrever o movimento de uma partícula livre, a qual sofrera colisões, e assim seguido de importantes trabalhos como os de Kolmogorov [8] e Smale [9].

Posteriormente, com o advento da tecnologia e o desenvolvimento dos computadores modernos, tornou-se possível abordar sistemas não lineares de uma forma diferente (mais precisa) e confiar em soluções numéricas, quando as soluções analíticas são muito complexas ou inviáveis.

Com os trabalhos de Edward Lorentz [10], a partir dos anos 70, surgiram na literatura uma série de resultados em relação a comportamentos caóticos e suas descrições, mostrando como a progressão da dinâmica se instala em sistemas físicos, como por exemplo nos trabalhos de Feigenbaum [11], Kaplan e Yorke [12], Chirikov [13] e May [14].

Este tipo de abordagem permitiu observar a presença de comportamento irregular ou aperiódico e a sensível dependência das condições iniciais. A teoria do caos ganhava mais força para estudos e entendimentos. Para compreender estes tipos de fenômenos e os seus mecanismos, pesquisadores buscam desenvolver modelos simplificados que permitam

uma compreensão mais profunda destes fenômenos. Alguns destes modelos são os bilhares, que, dependendo da sua geometria, podem apresentar movimentos caóticos, movimentos regulares ou uma combinação destes.

Além de ser uma das ferramentas mais simples para o estudo de sistemas caóticos, o bilhar oferece grande flexibilidade na sua aplicação e estudo. Tem sido aplicado em áreas como química, fenômenos de transferência de calor, supercondutores, nanoestruturas e também para o estudo da difusão, entendendo suas características e aplicações [15].

Em meados da década de 70, trabalhos importantes neste contexto foram desenvolvidos, como o mapa padrão desenvolvido por Taylor e analisado por Chirikov [13], ao tratar um pêndulo não-linear como uma relação de recorrência, o que permitia que a descrição do problema fosse feita de forma mais simples. Esta técnica é muito utilizada para resolver problemas através das seguidas equações conhecidas como mapas [16].

1.2 Os Processos difusivos

A compreensão microscópica dos processos que impulsionam os fenômenos macroscópicos, como pressão, temperatura e energia tem sido objeto de estudo e interesse da física, como na dinâmica não linear e na física estatística. A dinâmica não linear, por descrever comportamentos que não podem ser previsíveis, leva a estudos mais complexos como caos, bifurcações e oscilações não periódicas. A física estatística, atua através de métodos probabilísticos, fornecendo uma base teórica para entendermos fenômenos como a difusão.

O progresso das ciências se deve em muitas circunstâncias, a uma busca para descrever e analisar fenômenos que são observados na natureza. A difusão constitui um fenômeno natural, fundamental e inevitável numa vasta gama de disciplinas científicas e tecnológicas, desempenhando um papel central na compreensão do transporte e difusão de matéria, energia e informação. Enraizado na física estatística e nos processos estocásticos, o conceito de difusão surgiu das primeiras observações de movimento aleatório de partículas em fluidos durante o início do século XIX. Desde então, o estudo da difusão evoluiu em um campo sofisticado e interdisciplinar com aplicações que abrangem física, química, biologia,

engenharia, economia, sociologia e muito mais [17, 18].

A difusão é impulsionada pela movimentação aleatória das partículas, chamada Movimento Browniano, e está relacionada à entropia e à tendência natural dos sistemas de aumentar sua desordem. Mas um retratamento histórico nos leva a vislumbrar como tudo se iniciou. Em 1810, Pierre – Simon Laplace, físico e matemático de grande influência em nossa história, foi fundamental para o grande desenvolvimento da mecânica celeste e da probabilidade, com conceitos fundamentais da estatística, dando grandes passos para a compreensão dos conceitos que fundamentam o teorema do limite central, tendo a ideia de que a soma de várias observações aleatórias tende a uma distribuição normal [19].

Conhecido por seus trabalhos sobre a distribuição de calor, Jean-Baptiste Joseph Fourier, teve grande relevância no estudo e compreensão de processos difusivos em seu trabalho sobre condução de calor [20]. Em 1822, ele desenvolveu a equação da condução de calor (equação de Fourier ou ainda a equação de difusão de calor), que descreve como o calor se propaga ao longo do tempo em materiais. Posteriormente, em 1828, o botânico Robert Brown, muito conhecido pelo fenômeno que chamamos de Movimento Browniano, descoberto enquanto estudava partículas suspensas em água sob um microscópio, pode observar que pequenas partículas de pólen em gotículas aquosas imersas em óleo moviam-se de maneira desordenada e contínua [21]. Percebeu também que esse comportamento era exibido por outras partículas microscópicas suspensas em um líquido.

Um dos pioneiros no estudo da difusão de gases e líquidos [22], foi o químico Thomas Graham, que em 1833 pesquisou sobre o comportamento da velocidade de difusão em função de sua densidade, concluindo que a taxa de difusão de um gás é inversamente proporcional à raiz quadrada de sua densidade ou massa molar.

Já em 1855, o médico Adolf Eugen Fick, criador de diversos dispositivos, como por exemplo as lentes de contato, foi o pioneiro na publicação de um estudo na área de física médica, o tratado *Die medizinische Physik*¹ (1856). Este tratado abrange uma vasta gama de estudos, incluindo a mistura de ar nos pulmões, o funcionamento do coração, a hidrodinâmica da circulação sanguínea, entre outros [23] e [24]. Mesmo com todas as

¹A física Médica [tradução nossa]

suas contribuições, incluindo sua contribuição para a história da cardiologia e a escrita de ensaios filosóficos [25], é possível afirmar que, para os pesquisadores de física, seu nome é o mais conhecido no campo dos fenômenos difusivos, tendo inclusive leis batizadas com seu nome, Leis de Fick da Difusão, que descrevem o processo de difusão em meios fluidos e sólidos, revelando como as substâncias se propagam ou se movem de áreas de alta concentração para áreas de baixa concentração. O trabalho que difundiu seu nome na física foi *Über Diffusion*² (1855) [26].

O Movimento Browniano observado refere-se ao movimento aleatório e incessante de pequenas partículas suspensas em um fluido, este motivou diversos pesquisadores a buscar uma explicação satisfatória. De fato, foram várias tentativas para explicar esse fenômeno, mas foi em 1905, com Albert Einstein, que tivemos uma explicação satisfatória para este movimento, a qual foi seguida por várias outras contribuições de P. Langevin, A. D. Fokker, M. Smoluchowski, entre outros [27].

Einstein observou que a evolução do processo difusivo no Movimento Browniano é uma relação linear entre o deslocamento quadrático médio das partículas e o tempo e este tipo de difusão ficou conhecido como difusão usual (ou normal), seguindo as Leis de Fick.

Em 1926, Lewis Fry Richardson fez avanços significativos na compreensão dos processos de difusão, especialmente no contexto da turbulência atmosférica, descrevendo como a distância entre duas partículas se comporta ao longo do tempo em um fluxo turbulento.

Observou que esses sistemas não reproduziam resultados satisfatórios com a equação de Fick, propondo uma equação com coeficiente de difusão dependente da variável espacial [28]. Desta forma, ao estudar o deslocamento quadrático médio (ou variância), ele percebeu que a taxa de difusão aumenta de maneira exponencial com o aumento da distância entre as partículas e assim não mais possuía um comportamento linear, mas um comportamento da ordem de t^3 .

Podemos classificar a difusão basicamente em 4 tipos: Difusão molecular (descritas pelas leis de Fick), difusão efetiva (utilizada em materiais mais complexos), difusão térmica (relacionada ao gradiente de temperatura) e difusão em estado sólido (a qual envolve a

²Sobre a Difusão [tradução nossa]

migração de átomos ou íons através de defeitos na estrutura cristalina) [28].

De extrema importância para a natureza, de modo que estão presentes em diferentes situações que abrangem desde contextos físicos até contextos biológicos, nestas e em demais situações, a difusão pode ser usual ou anômala, dependendo do meio ou da interação presente entre as partículas. Estas características têm uma direta influência no comportamento do deslocamento quadrático médio que, no caso usual, tem uma dependência linear com tempo, ou seja,

$$\langle (r - \langle r \rangle)^2 \rangle \sim t. \quad (1.1)$$

Podendo ser descritos por uma distribuição Gaussiana ou normal, é típico de processos markovianos, que apresentam formas mais simples de processos que são independentes, de forma que o resultado em qualquer instante depende do resultado que vem a seguir, o passado não influencia nos resultados, ou seja, processos sem memória [29].

No caso de uma difusão anômala temos uma dependência não linear com o tempo, ou seja, o deslocamento quadrático médio não ocorre mais de forma linear e sim seguindo uma lei de potência, podendo ocorrer de forma mais lenta (subdifusivo) ou de forma mais rápida (superdifusivo) de acordo com o processo estudado. Por exemplo,

$$\langle (r - \langle r \rangle)^2 \rangle \sim t^\gamma, \quad (1.2)$$

onde $\gamma < 1$ e $\gamma > 1$ correspondem a subdifusão e superdifusão, respectivamente. Compreender o formalismo difusivo através de seus formalismos matemáticos permite entender suas características e aplicações, e assim, para descrever um processo usual ou anômalo, pode-se destacar o formalismo estocástico de transporte em termos de caminhada aleatória e a descrição pela equação de difusão [30].

Do ponto de vista matemático, os processos de difusão são caracterizados por equações de difusão bem definidas, como as clássicas leis de difusão de Fick, a equação do calor e as equações diferenciais estocásticas empregadas em processos estocásticos [28]. Essas

equações oferecem uma estrutura quantitativa para modelar e analisar a evolução de difundir espécies em uma miríade de contextos, que vão desde a difusão de substâncias químicas em meio líquido à difusão de inovações nas redes sociais.

A importância de processos difusivos na descrição de transporte anômalo em sistemas desordenados [31], para modelar processos dinâmicos não Markovianos, vemos que a difusão anômala pode ser investigada por meio de diferentes tipos de equações de difusão. Assim, o estudo desses tipos de equações, suas extensões e as situações relacionadas a elas são importantes, pois possibilitam a investigação de novos cenários como, por exemplo, em sistemas dinâmicos não-lineares, como os bilhares que não possuem uma dinâmica regular.

1.3 Organização da tese de doutorado

Esta tese de doutorado está organizada da seguinte forma. No capítulo 2, tendo como base o modelo *Bouncer* tradicional, apresentamos um modelo *Bouncer* "modificado" usando o mapa padrão (Chirikov-Taylor) para entender esse modelo, onde adicionamos em seu mapeamento uma flutuação térmica (ζ) e uma hipótese adiabática (z). Assim, exploramos o comportamento caótico e difusivo do sistema.

No capítulo 3, apresentamos os bilhares clássicos, com uma breve revisão literária, mostrando as etapas para construção do mapeamento discreto que descreve a dinâmica do sistema de um bilhar.

No capítulo 4, partimos do estudo de um bilhar com geometria oval, investigando o comportamento de trajetórias e órbitas a partir de um sistema de cores. Posteriormente, efetuando mudanças no parâmetro de controle da fronteira do sistema, ou seja, aproximando o parâmetro de controle ao seu valor máximo ($\epsilon = 1$), encontramos um formato de lemniscata ³ ao qual denominamos de bilhar lemniscata. Neste último modelo, foram realizados estudos como espaço de fase, taxa de fuga, e observados padrões intrincados, onde exploramos o surgimento de novas estruturas em um espaço de fase "distorcido".

No capítulo 5, apresentamos as conclusões deste trabalho e perspectivas.

³formato do infinito (∞)

CAPÍTULO 2

CONTROLE DE PROCESSOS DIFUSIVOS EM UM MODELO *BOUNCER* MODIFICADO ATRAVÉS DO MAPA PADRÃO

Neste capítulo, apresentamos um estudo do modelo *Bouncer* "modificado", uma variação do modelo *Bouncer* tradicional, com alterações físicas em sua estrutura. Introdução de uma flutuação térmica e de uma hipótese adiabática.

2.1 O Modelo *Bouncer* modificado

O modelo *Bouncer* consiste em um sistema no qual uma partícula colide verticalmente com uma plataforma oscilante, e dependendo das condições iniciais do sistema às quais a partícula está submetida, pode ocorrer o fenômeno da aceleração de Fermi ⁴. Dentro deste contexto, foi proposta uma mudança física no sistema, substituindo a oscilação

⁴Crescimento ilimitado da velocidade de partículas, observado por Enrico Fermi ao estudar a aceleração de raios cósmicos a partir de um sistema dinâmico com campos magnéticos oscilantes.

mecânica da plataforma por uma flutuação térmica concomitantemente com uma hipótese adiabática, as quais controlam a interação da partícula com a superfície. Denominou-se, como modelo *Bouncer* "modificado".

Analisando a termodinâmica do sistema, a abordagem de Boltzmann para compreender a distribuição de Maxwell [32], fornece uma base teórica sólida para descrever a distribuição de velocidade em um gás ideal em equilíbrio térmico, ou seja, permite descrever como as partículas de um gás se distribuem em termos de suas velocidades em diferentes direções a uma temperatura constante. Assim, examinamos partículas que se movem sob a influência de um campo gravitacional, incorporando ao sistema colisões inelásticas com a plataforma. Com isso, temos que a partícula pode perder ou ganhar energia cinética devido a flutuação térmica do solo.

No nível molecular, a interação de uma molécula com uma superfície pode ser entendida como uma combinação de forças atrativas e repulsivas, essas interações podem ser analisadas em termos de forças de curto e longo alcance, geralmente envolvendo dipolos presentes tanto na superfície quanto na própria molécula. As interações repulsivas de curto alcance resultam em uma variação na velocidade da partícula porque, em distâncias muito pequenas, a orientação relativa dos dipolos pode levar à superposição de campos elétricos que geram forças de repulsão [33]. E assim podemos ter o seguinte mapeamento:

$$v_{n+1} = \gamma_{n+1} v_n, \quad (2.1)$$

onde n representa a n -ésima colisão e a variável v_i denotará consistentemente a velocidade imediatamente após a i -ésima colisão. O fator γ_{n+1} , que controla a troca de energia entre a partícula e o chão durante a $(n + 1)$ -ésima colisão, é modelado como

$$\gamma_{n+1} = \gamma \left[1 + \frac{\zeta \sin(\omega t_{n+1})}{v_n^z} \right]. \quad (2.2)$$

Substituindo a Equação (2.1) na Equação (2.2), temos

$$v_{n+1} = \gamma \left[v_n + \frac{\zeta \sin(\omega t_{n+1})}{v_n^{z-1}} \right]. \quad (2.3)$$

O termo que envolve a função seno representa a flutuação térmica com frequência ω no tempo $t_{n+1} = t_n + \delta t_{n,n+1}$, onde t_n é o instante da n -ésima colisão e $\delta t_{n,n+1}$ é definido como o tempo de viagem que a partícula leva entre a n -ésima colisão e a $(n+1)$ -ésima colisão. O termo v_n^z será referido como o fator adiabático que, com o auxílio da flutuação térmica, diminui com velocidade crescente.

O expoente z tem um impacto relevante nesta conexão. Como veremos nas simulações numéricas, pequenas modificações no parâmetro z resultam em mudanças significativas no comportamento do sistema. O fator ζ denota a amplitude ou intensidade da flutuação térmica. Se $\zeta = 0$, o parâmetro γ_n se reduz a um valor constante γ . Considerando este caso, a constante γ determina a natureza da colisão: quando $\gamma = 1$, a colisão é elástica, preservando a energia cinética; por outro lado, quando $\gamma = 0$, a colisão resulta na dissipação completa da energia cinética. Em geral, qualquer valor entre 0 e 1 é permitido. Neste trabalho examinamos exclusivamente o cenário onde γ é igual a 1.

Para utilizar a Equação (2.1), é necessário calcular o tempo t_{n+1} com base na velocidade v_n e no tempo t_n . Dado que a partícula se move sob a influência de uma força gravitacional de campo g , o intervalo de tempo entre duas colisões sucessivas com o solo é igual ao dobro do tempo gasto durante a subida. Esse movimento está descrito na Figura 2.1,

A partir da Figura 2.1, encontramos o tempo de subida e descida

$$t_{n+1} = t_n + \frac{2v_n}{g}. \quad (2.4)$$

Com o intuito de compararmos com o mapa padrão [34], definimos as seguintes variáveis adimensionais, $\bar{\phi}_n = \omega t_{n+1}$ e $\bar{V}_n = \frac{\omega}{g} v_n$, encontramos a partir da Equação (2.3)

$$\frac{g}{\omega} \bar{V}_{n+1} = \gamma \left[\frac{g}{\omega} \bar{V}_n + \frac{\zeta \sin(\bar{\phi}_{n+1})}{\left(\frac{g}{\omega} \bar{V}_n\right)^{z-1}} \right] \quad (2.5)$$

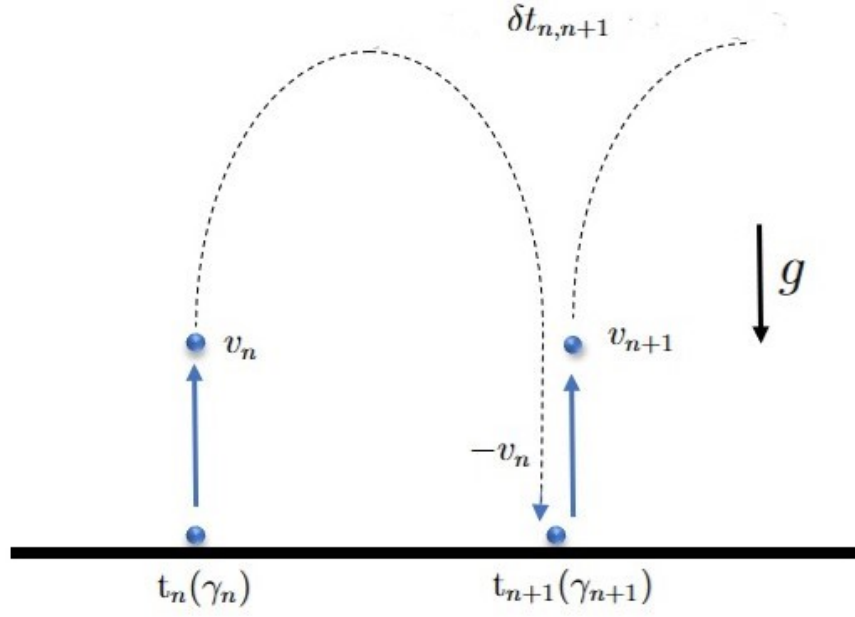


Figura 2.1: Nesta figura está representada a colisão no instante t_{n+1} . No instante anterior t_n a partícula sobe com velocidade v_n . Sob influência do campo gravitacional a partícula retorna com velocidade $-v_n$ para colidir no instante t_{n+1} e fator de restituição γ_{n+1} .

$$\frac{g}{\omega} \bar{V}_{n+1} = \gamma \frac{g}{\omega} \left[\bar{V}_n + \left(\frac{\omega}{g} \right)^z \zeta \frac{\sin(\bar{\phi}_{n+1})}{\bar{V}_n^{z-1}} \right] \quad (2.6)$$

$$\bar{V}_{n+1} = \gamma \left[\bar{V}_n + \bar{\zeta} \frac{\sin(\bar{\phi}_{n+1})}{\bar{V}_n^{z-1}} \right] \quad (2.7)$$

onde $\bar{\zeta} = \left(\frac{\omega}{g} \right)^z \zeta$ e da Equação (2.4)

$$\frac{\bar{\phi}_{n+1}}{\omega} = \frac{\bar{\phi}_n}{\omega} + \frac{2\bar{V}_n}{\omega} \quad (2.8)$$

$$\bar{\phi}_{n+1} = \bar{\phi}_n + 2\bar{V}_n \quad (2.9)$$

No caso $z = 1$ as Equações (2.7) e (2.9) reproduzem o modelo *Bouncer* simplificado. Dessa forma, essas equações formam o que denominamos modelo *Bouncer* modificado pelo fator adiabático $\bar{V}_n^{z-1}$.

Por outro lado, se fizermos a redefinição do par canônico por $V_n = 2\bar{V}_n$ e $\phi_n = \bar{\phi}_{n+1}$,

obtemos da Equação (2.7)

$$\frac{V_{n+1}}{2} = \gamma \left[\frac{V_n}{2} + \bar{\zeta} \frac{\sin(\phi_n)}{\left(\frac{V_n}{2}\right)^{z-1}} \right] \quad (2.10)$$

$$\frac{V_{n+1}}{2} = \frac{\gamma}{2} \left[V_n + \frac{2^z \bar{\zeta}}{V_n^{z-1}} \sin(\phi_n) \right] \quad (2.11)$$

$$V_{n+1} = \gamma [V_n + K_n \sin(\phi_n)] \quad (2.12)$$

onde K_n é uma função de ζ , z e V_n

$$K_n = K(V_n, \bar{\zeta}, z) = \frac{2^z \bar{\zeta}}{V_n^{z-1}} = \frac{2^z}{V_n^{z-1}} \left(\frac{\omega}{g} \right)^z \zeta. \quad (2.13)$$

Da Equação (2.9) temos,

$$\phi_n = \phi_{n-1} + V_n \rightarrow \phi_{n+1} = \phi_n + V_{n+1} \quad (2.14)$$

Assim, temos um mapa definido por

$$\begin{cases} V_{n+1} = \gamma [V_n + K_n \sin(\phi_n)] \\ \phi_{n+1} = \phi_n + V_{n+1} \end{cases} \mod (2\pi), \quad (2.15)$$

As equações que formam o Mapa (2.15), com $\gamma = 1$ e K_n constante, o que ocorre quando $z = 1$, recupera o famoso mapa de Chirikov-Taylor [13] ou, mapa padrão. Este é um exemplo clássico de um sistema dinâmico que passa de comportamento regular para comportamento caótico, com o aumento da intensidade de uma perturbação. Tal semelhança também foi observada na referência [35] onde, através de uma nova definição das variáveis, foi possível fazer uma conexão entre o modelo *Bouncer* e o mapa padrão.

A ideia de se utilizar o mapa padrão como comparação é aproveitar todos os resultados já conhecidos, como a localização da curva invariante ⁵ *spaning*, entender a transição entre

⁵Uma curva é dita invariante quando ela é invariante por iterada. Uma vez que a condição inicial é dada sobre a curva ela permanecerá sobre essa curva. Elas podem ser do tipo fechadas que no espaço de fase são as ilhas, e as curvas do tipo *spanning* que são aquelas que atravessam o espaço de fase.

caos local e global.

Uma nova reparametrização das variáveis ($\phi_n \rightarrow \phi_{n+1}$ e $v_n \rightarrow 2v_n$) do nosso modelo, leva o sistema a ser equivalente a uma versão simplificada do modelo Fermi-Ulam usado por Lieberman e Lichtenberg [16], para facilitar simulações computacionais, muitas vezes referidas na literatura como modelo *Bouncer* simplificado.

Primeiramente observamos que no processo iterativo, se a partícula adquirir um valor negativo de velocidade, é considerada absorvida pela superfície. Posteriormente, a partícula é reinjetada com o mesmo resultado da velocidade positiva. Outra observação é que quando o valor de $z < 1$, o expoente $z - 1$ torna-se negativo e V_n^{z-1} muda para o numerador. Consequentemente, se a velocidade V_n for pequena, a tendência é que os valores da velocidade diminuam a cada iteração.

2.2 Processo de Difusão

O modelo *Bouncer* é um sistema dinâmico que descreve o movimento de uma partícula que colide com uma superfície oscilante. Este modelo é um exemplo de sistema não-linear e é amplamente utilizado para explorar os efeitos das forças dissipativas e as propriedades estatísticas de órbitas caóticas [36, 37]. Devido a isto, pesquisadores investigam vários aspectos, oportuno à sua capacidade de flexibilização para diversos modelos reais e possíveis resultados que podem ser obtidos a partir desta dinâmica. Explorando este modelo através de diferentes perspectivas, podemos obter resultados tanto do ponto de vista da dinâmica não linear como do estudo de difusão, que são áreas de extrema importância para a Física Estatística.

Consideremos um conjunto de partículas com velocidades inicialmente baixas, o que significa um conjunto caracterizado por uma temperatura baixa, mas suficientemente alta para negligenciar os efeitos quânticos. Elevando ao quadrado a Equação (2.12), obtemos

$$V_{n+1}^2 = \gamma^2 V_n^2 + 2\gamma^2 K_n \sin(\phi_n + 2\mathbf{v}_n) + \gamma^2 K_n^2 \sin^2(\phi_n + 2\mathbf{v}_n). \quad (2.16)$$

Fazendo uma média de conjunto sobre $\phi \in [0, 2\pi]$ obtemos:

$$\langle V_{n+1}^2 \rangle = \gamma^2 \langle V_n^2 \rangle + \frac{1}{2} \gamma^2 \langle K_n^2 \rangle. \quad (2.17)$$

Para um n suficientemente grande, podemos expressar a relação do seguinte modo:

$$\frac{\partial \langle V_n^2 \rangle}{\partial n} \simeq \frac{\langle V_{n+1}^2 \rangle - \langle V_n^2 \rangle}{(n+1) - n} = (\gamma^2 - 1) \langle V_n^2 \rangle + \frac{1}{2^{1-z}} \gamma^2 \bar{\zeta}^2 \langle V_n^{2-2z} \rangle. \quad (2.18)$$

Considerando essa distribuição descrita por uma forma gaussiana de difusão anômala [38, 39] é possível expressar a distribuição da velocidade quadrática média como

$$\Psi(V, n) = \sqrt{\frac{a}{\Pi}} \frac{1}{n^u} \exp \left[-a \left(\frac{V}{n^\mu} \right)^2 \right]. \quad (2.19)$$

Com essa distribuição, os momentos associados são obtidos como

$$\langle V_n^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} V^2 \Psi_\mu(V, n) dV = \frac{n^{2\mu}}{2\sqrt{a^2}}, \quad (2.20)$$

$$\langle V_n^{2-2z} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} V^{2-2z} \Psi_\mu(V, n) dV = \frac{1}{2\sqrt{a^{2-2z}\pi}} \Gamma \left(\frac{3-2z}{2} \right) (n^{2\mu})^{1-z}. \quad (2.21)$$

Pode-se concluir

$$\langle V_n^{2-2z} \rangle = \frac{2^{1-z}}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left(\frac{3}{2} - z \right) \langle V_n^2 \rangle^{1-z}. \quad (2.22)$$

Fazendo $\alpha = \frac{2^{1-z}}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left(\frac{3}{2} - z \right)$, pode-se definir $\langle V_n^{2-2z} \rangle \approx \alpha \langle V_n^2 \rangle^{1-z}$, levando a Equação (2.18) em uma equação diferencial para $\langle V_n^2 \rangle$.

A solução da Equação (2.18), pode então ser expressa como

$$\langle V_n^2 \rangle = \left\{ V_0^{2z} e^{z(\gamma^2-1)n} + \frac{\alpha \gamma^2 \bar{\zeta}^2}{2^{1-z}(\gamma^2-1)} \left[e^{z(\gamma^2-1)n} - 1 \right] \right\}^{1/z}. \quad (2.23)$$

Assumindo que as colisões sejam elásticas, podemos considerar o limite quando γ se aproxima de 1 expandindo $e^{z(\gamma^2-1)n} \approx 1 + z(\gamma^2-1)n$. Além disso, apresentamos a função β como

$$\beta(z, \bar{\zeta}) = (2^{z-1}z) \bar{\zeta}^2 \alpha = \frac{z}{\sqrt{\pi}} \bar{\zeta}^2 \Gamma\left(\frac{3}{2} - z\right). \quad (2.24)$$

Portanto, a velocidade quadrática média (V_{rms}), definida por $V_{rms}^{(z)} = \sqrt{\langle V_n^2 \rangle}$ e expressada por

$$V_{rms}^{(z)} = \{V_0^{2z} + \beta n\}^{1/2z} \sim \beta^{1/2z} \sqrt[2z]{n}. \quad (2.25)$$

O resultado da Equação (2.25), sugere que o comportamento da difusão em um sistema dependa do valor do parâmetro z . Especificamente, quando $z = 1$, o sistema apresenta difusão normal. Porém, para $z < 1$, o sistema apresenta comportamento superdifusivo, enquanto para $z > 1$, o comportamento observado é subdifusivo. Neste contexto, a difusão normal corresponde ao fato de que a velocidade quadrada média (V_{rms}) é linearmente proporcional a n .

A superdifusão é caracterizada por um V_{rms} que aumenta mais rápido do que linearmente com o tempo, indicativo de correlações de longo alcance ou movimento persistente dentro do sistema. Por outro lado, a subdifusão é marcada por um V_{rms} que cresce mais lentamente do que linearmente com o tempo, muitas vezes resultante de regiões de estabilidade ou de efeitos de impedimento. Assim, o parâmetro adiabático z serve como um controle crítico, mecanismo que dita a transição entre estados subdifusivo, difusivos e superdifusivos, na energia dinâmica do sistema.

Portanto, compreender o papel do parâmetro adiabático z é essencial para prever e controlar as propriedades difusivas do sistema. Este parâmetro efetivamente modula a taxa da transferência de energia dentro do sistema, influenciando o comportamento dinâmico geral e permitindo a manipulação precisa dos processos de difusão. Para fundamentar

z	Resultado
0,4	$\sqrt[2z]{n} = n^{1/0.8}$
0,9	$\sqrt[2z]{n} = n^{1/1.8}$
1,0	$\sqrt[2z]{n} = n^{1/2}$
1,1	$\sqrt[2z]{n} = n^{1/2.2}$

Tabela 2.1: V_{rms} para 4 valores diferentes de z

esse comportamento, realizamos simulações com $n = 10^6$ iterações e 10^4 condições iniciais

diferentes, para quatro valores diferentes do parâmetro z especificamente, $z = 1$, $z = 1,1$, $z = 0,9$ e $z = 0,4$. De acordo com a Equação (2.25), os resultados esperados são mostrados na Tabela 2.1.

Os resultados numéricos obtidos através das Equações (2.12) e (2.14), que formam o mapeamento (2.15), com os valores dos parâmetros $\gamma = 1$ e $\bar{\zeta} = 5$, são ilustrados na Figura 2.2, juntamente com as funções de potência que se ajustam aos dados. O número de iterações $n = 10^6$ garante que as simulações capturem o comportamento de longo prazo do sistema, proporcionando assim uma compreensão abrangente dos processos de difusão. Além disso, usar 10^4 condições iniciais diferentes nos permite explicar a variabilidade e garante que os resultados não sejam dependentes de qualquer ponto de partida específico, melhorando assim a robustez e a generalização de nossas descobertas.

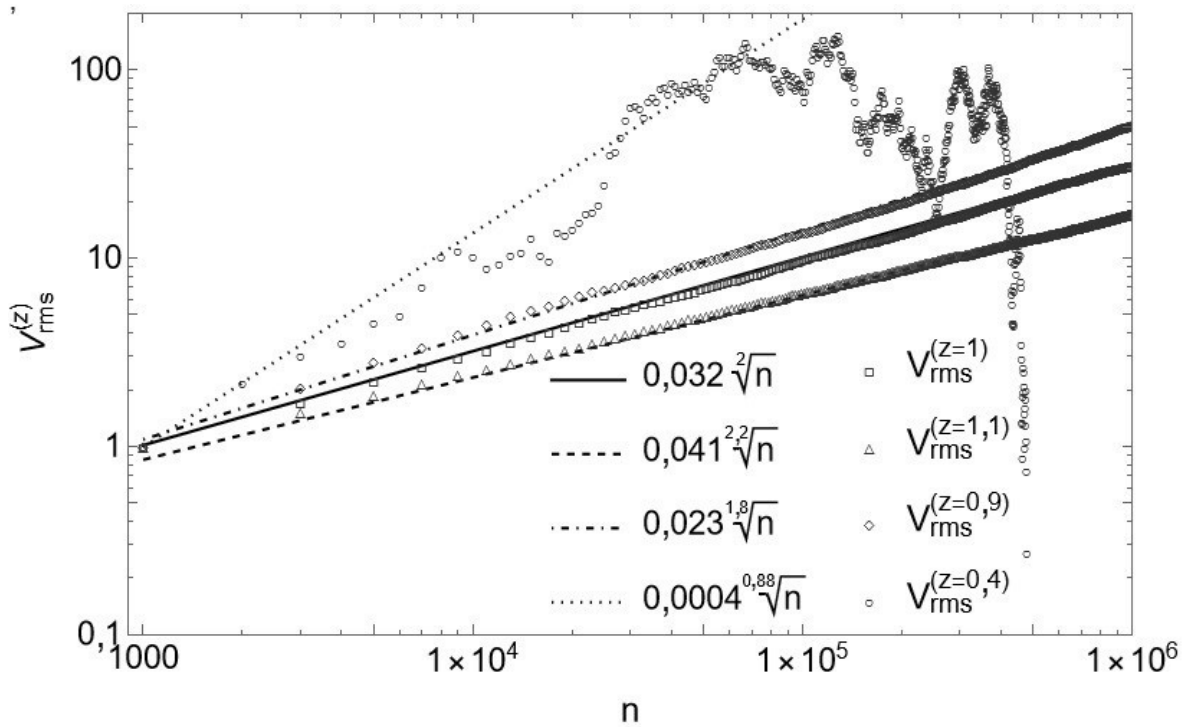


Figura 2.2: Gráficos V_{rms} para 4 valores diferentes de z , considerando um conjunto de 10^4 condições iniciais variando ϕ no intervalo $[0, 2\pi]$ e evoluindo 10^6 iterações.

Os valores numéricos encontrados comprovam os resultados teóricos para os três casos iniciais, $z = 1,1$; 1 e $0,9$. No entanto, para $z = 0,4$, $V_{rms}^{(z)}$ inicialmente exibe comportamento difusivo, aproximadamente alinhando-se com o resultado teoricamente previsto. No entanto, para valores de iteração maiores $n > 10^5$, $V_{rms}^{(z)}$ aproxima-se abruptamente de

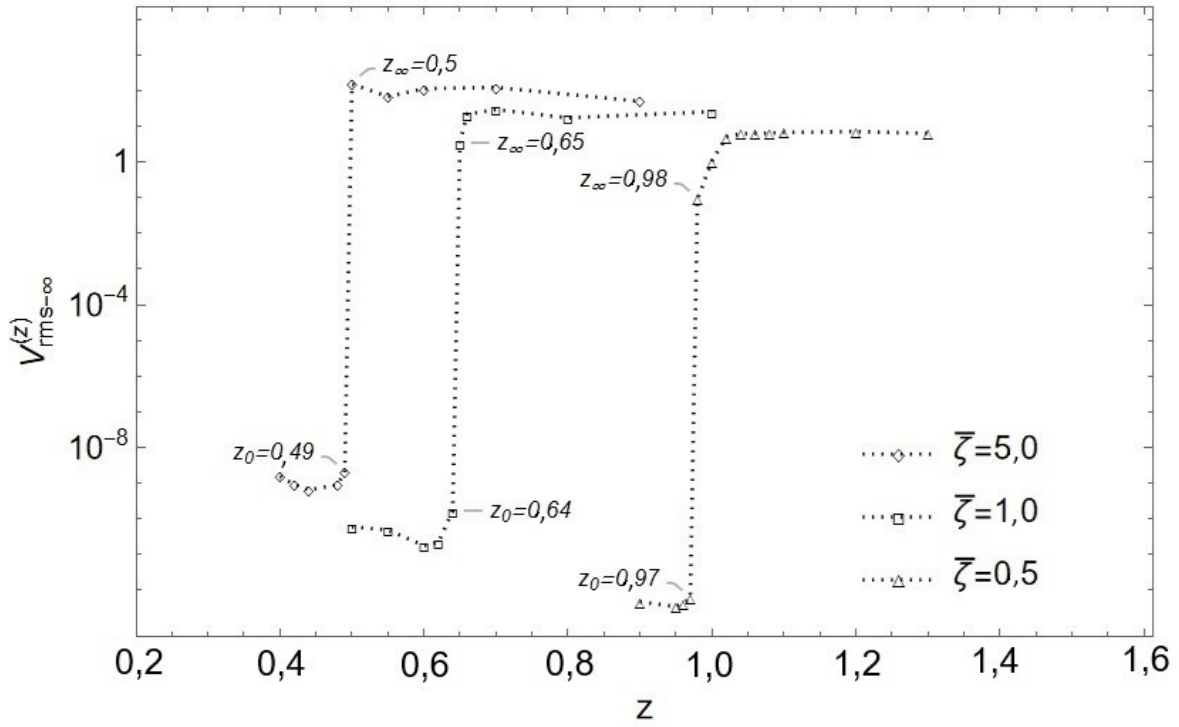


Figura 2.3: Gráfico ilustrando regiões onde a fase congelada transita para a fase difusiva em três valores distintos de $\bar{\zeta}$. Os valores críticos de z são enfatizados nos quais essas transições ocorrem.

zero, indicando um processo dissipativo. Para uma melhor comparação entre os gráficos, foi introduzida uma normalização tal que $V_{rms}^{(z)}(1000) = 1$ para qualquer valor z . Esta normalização nos permite ter uma comparação mais efetiva do comportamento do V_{rms} sob diferentes regimes.

Para elucidar esse resultado final, a Figura 2.3 apresenta um gráfico representando $V_{rms}^{(z)}$ na 10^6 iteração, que a partir de agora será referido como $V_{rms-\infty}^{(z)}$, em função de z .

Observa-se claramente que, para um dado $\bar{\zeta}$, existe um valor crítico para z , abaixo do qual $V_{rms-\infty}^{(z)}$ tende para zero ($v_{rms-\infty}^{(z)} < 10^{-8}$). Este comportamento pode ser interpretado como um "congelamento" do sistema de partículas, onde as partículas perdem seu movimento dinâmico e o sistema atinge um estado estático. Na notação usada no gráfico, z_∞ representa o menor valor de z que ainda permite processos de difusão. Por outro lado, z_0 representa o valor limite em que o sistema transita para a fase congelada. O valor crítico z_∞ serve como um ponto de distinção entre comportamento difusivo e a fase congelada, assim fornecendo informações significativas sobre a dinâmica subjacente do sistema. O gráfico ilustra o intervalo de z valores dentro dos quais ocorre o congelamento.

Por exemplo, quando $\bar{\zeta} = 5$, o valor de z que ainda permite estados difusivos é $z_{\infty} = 0,5$. Se este valor for diminuído para $z_0 = 0,49$, o sistema transita para o estado congelado. Alguns parâmetros são mostrados na Tabela 2.2. Assim, uma pequena mudança de 0,01 no valor z , altera significativamente o comportamento do sistema. Para $\bar{\zeta} = 0,5$, o valor limite de z_{∞} para a ocorrência de estados difusivos se aproxima de 1.

$\bar{\zeta}$	z_{∞}
5,0	0,5
1,0	0,65
0,5	0,98
0,4	0,95
0,3	1,00
0,2	0,99
0,02	0,91

Tabela 2.2: A tabela apresenta, os valores z críticos para cada valor do parâmetro $\bar{\zeta}$. Esses valores críticos representam os menores valores z abaixo dos quais a transição para o estado congelado ocorre.

Estas transições que mencionamos no parágrafo anterior indicam uma possível transição de fase do sistema, sendo que para este comportamento ser afirmado de fato é necessário que alguns critérios sejam satisfeitos, assim como demonstra a referência [40] e esta análise será uma das perspectivas deste trabalho.

Pode-se explorar também os resultados obtidos através do desenvolvimento de um diagrama de fases que esclarece a relação entre o comportamento do sistema e os parâmetros $\bar{\zeta}$ e z . Este processo envolve gerar uma grade de pontos discretos, com valores de $\bar{\zeta}$ variando de 0,2 a 5 e valores z variando de 0,2 a 1,2. Para cada par único $(\bar{\zeta}, z)$ dentro desta grade, calculamos o $V_{rms}^{(z)}$. Inspirado na Equação (2.1), modelamos o crescimento de V_{rms} como uma função de lei de potência de n (número de iterações), expresso como $V_{rms} = an^b$. A resultante $V_{rms}^{(z)}$ são valores subsequentemente, categorizados de acordo ao expoente b , que fornece informações sobre o comportamento da difusão do sistema. Especificamente, para $b < 0,49$, o sistema é classificado com comportamento subdifusivo, indicando difusão mais lenta que o normal. Na faixa $0,49 < b < 0,51$, o sistema demonstra difusão padrão características, onde o processo de difusão é caracterizado por uma relação linear com o tempo. Por outro lado, para $b > 0,51$, o sistema é classificado como

superdifusivo, sugerindo um processo de difusão que ocorre a uma taxa mais rápida do que a difusão padrão.

Essas classificações e seus comportamentos correspondentes estão ilustrados na Figura 2.4, que representa visualmente os vários regimes de difusão como uma função dos parâmetros $\bar{\zeta}$ e z . Considerando que é normal, o comportamento difusivo está confinado a uma faixa estreita de valores b , e é representado por linhas tracejadas nos limites entre subdifusivo (região clara) e superdifusivo (região cinzenta). A região escura representa a fase congelada.

Para uma análise completa do diagrama de fases da Figura 2.4, vamos examinar a dimensionalidade da difusão normal, limite que separa o comportamento subdifusivo do superdifusivo. Para isso, utilizamos o Método de Contagem de Caixas, também conhecido como Dimensão Minkowski-Bouligand [41], que é uma técnica comum usada para estimar a dimensão fractal de um conjunto. Este método envolve cobrir o conjunto com uma grade de caixas de tamanho ϵ e determinar como o número de caixas $N(\epsilon)$ que contém parte das escalas definidas como o tamanho da caixa ϵ diminui. A dimensão D é definida pela relação de escala:

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)}$$

Na prática, calculamos $N(\epsilon)$ para vários valores de ϵ para estimar a inclinação do gráfico log-log de $N(\epsilon)$ versus $1/\epsilon$. Esta inclinação corresponde à dimensão fractal D . Para o conjunto de pontos que definem o limite de difusão normal, determinamos o seguinte valor dimensional: $D = 1,52439\dots$. Este resultado sugere a natureza fractal do limite em questão.

Portanto, os parâmetros z e ζ , desempenham papéis cruciais na determinação do comportamento dinâmico do sistema. À medida que variamos os parâmetros, o sistema pode fazer a transição do processo superdifusivo para difusão normal e, finalmente, para o processo subdifusivo. Observamos que dentro de qualquer regime de difusão, há um aumento ilimitado de energia, um fenômeno conhecido como aceleração de Fermi. Além

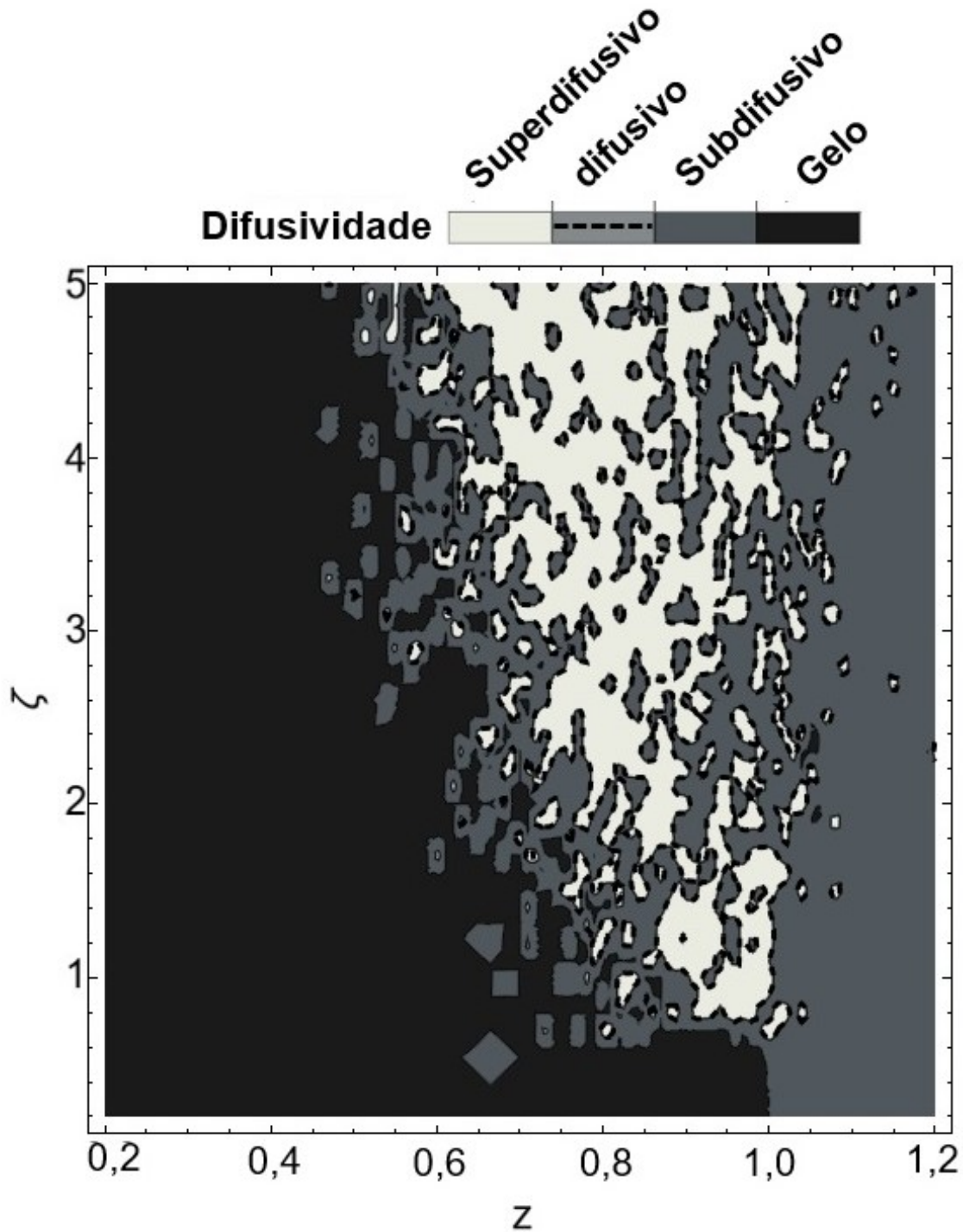


Figura 2.4: Diagrama de fases categorizado pela relação lei de potência $V_{rms} = an^b$. Para $b < 0,49$, o processo é identificado como subdifusivo, enquanto para $b > 0,51$ é classificado como superdifusivo. A fronteira entre estes dois regimes, onde $0,49 < b < 0,51$, corresponde a um processo de difusão normal.

disso, se o parâmetro z cair abaixo de um determinado limite $z \leq 0,46$, para qualquer valor de ζ o sistema resulta em um estado “congelado”. A representação (---) no diagrama de fases da Figura 2.4, forma o conjunto de pontos que definem o limite de difusão normal,

ou seja a passagem do processo superdifusivo para o subdifusivo ou vice e versa. Isso indica uma rica complexidade estrutural, influenciada significativamente por variações no parâmetro z e ζ . Portanto obter uma compreensão mais profunda desses resultados, é essencial estudar a estabilidade e o caos dentro deste sistema.

2.3 Propriedades Caóticas

O objetivo principal desta seção é examinar as propriedades caóticas do mapeamento para entender as transições entre regimes de difusão e a evolução do caos durante esse processo. Pretendemos analisar, especificamente, como as mudanças nos parâmetros de controle influenciam o comportamento do sistema e a estrutura de seu espaço de fase.

2.3.1 Os espaços de fase

Característicos de sistemas dinâmicos que exibem caos, os espaços de fase consistem no conjunto de todos os estados acessíveis ao sistema, de modo que a evolução, a partir de um determinado estado inicial, passa por pontos ao longo do espaço de fases. A esse conjunto percorrido denomina-se órbita. Por meio de condições iniciais apropriadas, podemos construir o espaço de fases (V, ϕ) associado ao problema e a análise do espaço de fase é essencial para compreender as propriedades dinâmicas do sistema.

Os espaços de fase para o Mapa (2.15), dependem do valor do parâmetro $\bar{\zeta}$, bem como do parâmetro adiabático z . Variações nesses parâmetros resultam em mudanças na estrutura do espaço de fase, o que pode fornecer informações importantes sobre a dinâmica do sistema. Alterando o parâmetro $\bar{\zeta}$ e z , podemos obter uma melhor compreensão do espaço de fases no sistema. Os resultados das estruturas dos espaços de fase são apresentados na Figura 2.5.

Em todos os gráficos, o eixo x corresponde a ϕ , enquanto o eixo y corresponde a V . Os 200.000 pontos de dados iniciais são excluídos para eliminar quaisquer estados transitórios. Na primeira linha, os espaços de fases correspondentes para $\bar{\zeta} = 5$ são mostrados, com z variando de 0,9 a 1,5. A segunda linha ilustra espaços de fases adicionais para $\bar{\zeta} = 0,47$,

com z exibindo pequenas variações na faixa de 0,98 a 1,0001. É importante notar que os espaços de fase com $z = 1$, Figura 2.5 (b) e (g), representam os resultados estabelecidos para o mapa padrão.

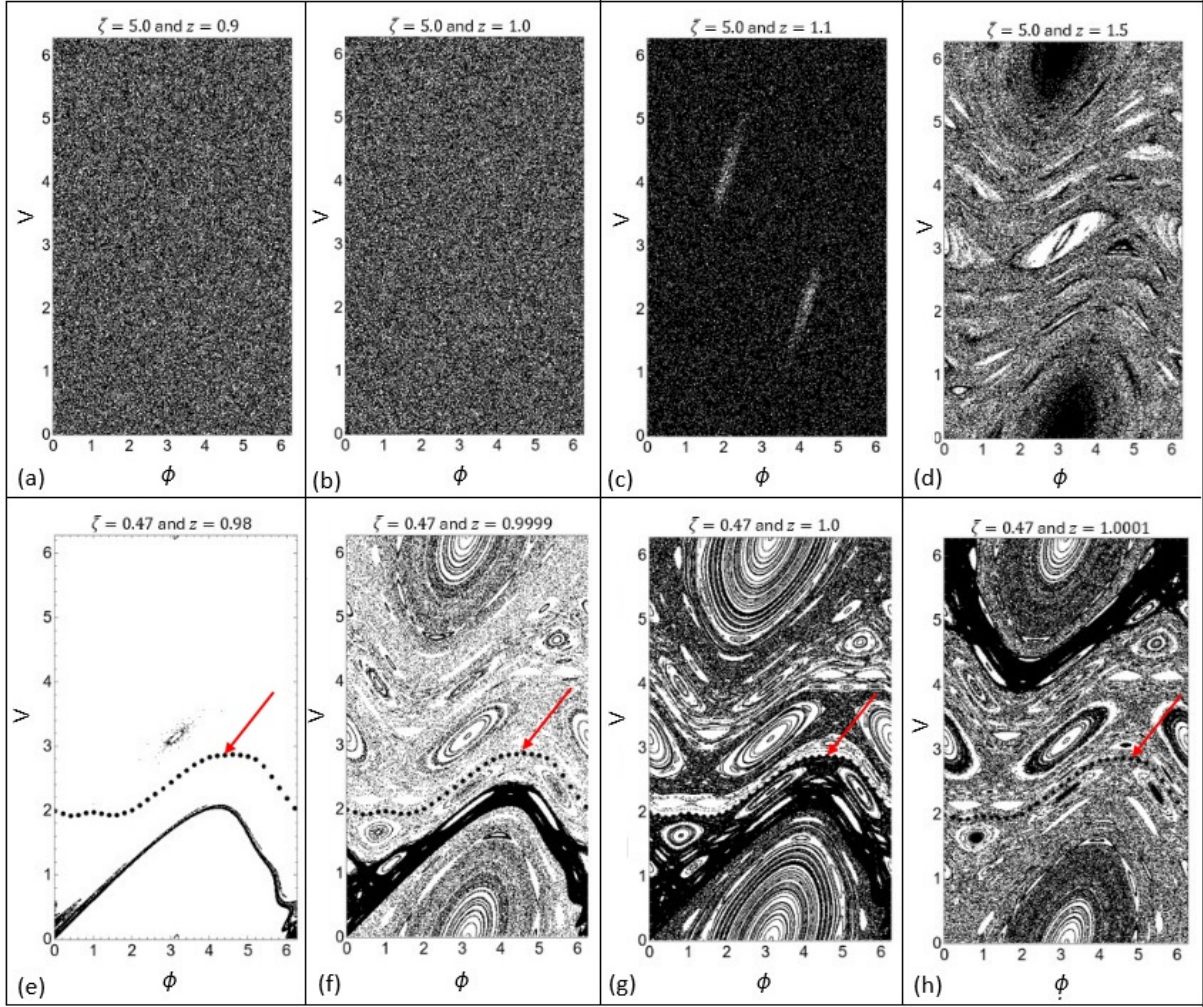


Figura 2.5: Espaços de fase para vários valores de $\bar{\zeta}$ e z .

A Figura 2.5 apresenta duas linhas gráficas, cada uma caracterizada por um valor $\bar{\zeta}$ significativamente diferente. A primeira linha ilustra os espaços de fase para $\bar{\zeta} = 5$ com $z = 0,9$, $z = 1,0$, $z = 1,1$ e $z = 1,5$. O valor $\bar{\zeta}$ correspondente aos valores de z são selecionados para facilitar a comparação com os resultados V_{rms} representados na Figura 2.2. Uma diferença significativa entre os espaços de fase da Figura 2.5 (a) $z = 0,9$ e (b) $z = 1,0$, não é facilmente observável. Contudo, é importante analisar que o primeiro (a) representa um processo superdifusivo, enquanto o segundo (b) corresponde a um processo difusivo. A distinção entre esses processos difusivos será identificada com mais precisão,

avaliando a evolução da distância entre dois pontos no espaço de fase através do cálculo dos expoentes de Lyapunov. Este método permite uma análise quantitativa da sensibilidade do sistema a condições iniciais, proporcionando assim uma visão mais profunda sobre a dinâmica subjacente dos processos difusivo e superdifusivo.

Processos difusivos ocorrem predominantemente para $\bar{\zeta} = 5$, Figura 2.5 (a), (b), (c) e (d), enquanto fenômenos de "congelamento" são observados na segunda linha para valores z abaixo do limite $z = 0,98$ Figura 2.5 (e). Nos espaços de fase representados na primeira linha, a presença do caos é evidente, levando a processos superdifusivos para $z < 1$ (por exemplo, $z = 0,9$) e processos difusivos para $z = 1$. Para $z > 1$, estruturas estáveis emergem dentro do espaço de fase, que deverão retardar o aumento da velocidade média das partículas, resultando em processos subdifusivos.

A segunda linha (e), (f), (g) e (h), apresentam os espaços de fase para $\bar{\zeta} = 0,47$ com $z = 0,98$, $z = 0,9999$, $z = 1,0$ e $z = 1,0001$. Representamos com uma seta a linha tracejada que mostra onde a curva invariante *spanning* irá se formar. Em (g) temos de fato sua formação.

O valor escolhido para $\bar{\zeta}$ foi inspirado no valor k para o mapa padrão que ainda exibe a última curva invariante *spanning*. As curvas invariantes desempenham um papel crucial na compreensão da transição entre comportamentos ordenados e caóticos em sistemas dinâmicos. Quando referimos a última curva invariante *spanning*, dizemos que é a curva invariante mais externa que ainda atravessa todo o espaço de fases, delineando as fronteiras entre ordem e caos no comportamento dinâmico [42]. No mapa padrão, o último intervalo da curva invariante é destruído quando o valor de k excede o valor crítico $k_c = 0,9716...$. Neste cenário, caos local, com $k < k_c$, transita para o caos global quando $k \geq k_c$ e a última curva invariante *spanning* é destruída. No modelo em consideração, o mapa padrão é recuperado quando $z = 1$. Portanto, de acordo com a Equação (3.15), obtemos um valor crítico para $\bar{\zeta}$.

$$\bar{\zeta}_c = \frac{K_c}{2} = 0,4858... .$$

Ao selecionar $\bar{\zeta} = 0,47$, garante-se que quando $z = 1$, a curva invariante *spanning*,

permanece presente no espaço de fase, conforme ilustrado no terceiro gráfico da segunda linha na Figura 2.5. A sequência de pontos pretos representa a última curva invariante *spanning*. Deve-se notar que a curva invariante é, na verdade, um conjunto contínuo de pontos, não discreto. Esta representação gráfica usando um moderado conjunto de pontos é empregada para ilustrar onde a última curva invariante estaria. No caso do mapa padrão, $z = 1$, qualquer condição inicial colocada em qualquer ponto da linha irá evoluir ao longo da linha. No entanto, com uma variação do z valor em uma parte em dez mil, a curva invariante é transformada em uma região invariante.

Neste contexto, o termo "região invariante" refere-se ao fenômeno onde, se algum ponto na curva invariante original for selecionado com uma condição inicial, esse ponto evolui para uma localização dentro das regiões escuras, caracterizadas por pontos de densidades mais altas, conforme destacado nos gráficos. Uma vez que o ponto chega a essas regiões, fica preso dentro delas, uma propriedade que foi testada para até 10^8 iterações. Então, em nossas simulações, observamos que essas trajetórias não apresentam o fenômeno de *stickiness*⁶.

O sistema pode ser classificado como um mapa não *twist*, como satisfaz a condição onde ϕ_n e V_n estão relacionados pela equação $2^z \bar{\zeta} (z - 1) \sin(\phi_n) = V_n^z$, quando $z \neq 1$. Consequentemente, observamos que

$$\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} = \gamma \left(1 + (1 - z) \frac{2^z \bar{\zeta}}{V_n^z} \sin(\phi_n) \right) = 0, \quad (2.26)$$

violando a condição *twist*, $\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} \neq 0$ [43], que é uma afirmação crucial para a aplicabilidade do teorema de KAM[44] ao mapa. Portanto, a ausência de cisalhamento (ou *twist*) torna o comportamento do sistema menos previsível, resultando frequentemente em dinâmicas complexas, como a formação de barreiras de transporte, como observado em nossas simulações. Portanto, quando z desvia de 1, o sistema sofre uma transição de um mapa *twist* para um mapa não *twist*.

É importante notar que quando $z < 1$, a curva invariante é deslocada para uma "região

⁶O fenômeno de *stickiness* ocorre, quando uma trajetória caótica passa longos períodos perto da borda de uma ilha de estabilidade antes de escapar novamente para a região caótica.

invariante" abaixo da sua posição original, enquanto para $z > 1$, a correspondente "região invariante" está localizada acima da posição inicial da curva invariante. Essas observações podem ser vistas nos espaços de fase apresentados na linha inferior dos gráficos na Figura 2.5. A curva invariante está incluída em todos os espaços de fases para facilitar a observação desses fenômenos. Contudo, deve-se ressaltar que nos gráficos onde $z \neq 1$, a curva não está mais presente.

Quando o fator adiabático z é reduzido, a "região invariante" diminui proporcionalmente até atingir um limite em $z = 0,98$. Para valores de z abaixo deste limite, ocorre uma transição para o estado congelado, resultando em um espaço de fase com déficit de estruturas.

2.3.2 Determinante Jacobiano

Analisando a dinâmica das equações do Mapa (2.15), observamos um espaço de fases que exibe tanto regiões de comportamento regular (ordenado) quanto regiões de comportamento caótico, que pode ser observado na Figura 2.5. Essa coexistência cria um cenário onde há diferenças significativas, como variações e regiões de instabilidade local ao longo de qualquer trajetória caótica. Essencialmente, o sistema não segue um único caminho previsível, mas exibe uma interação complexa entre diferentes tipos de movimento. Como forma de analisar esse comportamento, calculamos o determinante da matriz Jacobiana

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} & \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} & \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} = \gamma \left[1 + \frac{\partial K_n}{\partial V_n} \sin(\phi_n) \right] \quad (2.28)$$

Mas,

$$\frac{\partial K_n}{\partial V_n} = 2^z \left(\frac{\omega}{g} \right)^z \zeta \frac{(1-z)}{V_n^{z-2}} = (1-z) K_n V_n \quad (2.29)$$

portanto

$$\frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} = \gamma [1 + (1 - z)K_n V_n \sin(\phi_n)] \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} = \gamma K_n \cos(\phi_n) \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} = \frac{\partial}{\partial V_n}(\phi_n + V_{n+1}) = \gamma [1 + (1 - z)K_n V_n \sin(\phi_n)] \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} = \frac{\partial}{\partial \phi_n}(\phi_n + V_{n+1}) = 1 + \gamma K_n \cos(\phi_n) \quad (2.33)$$

Assim

$$J = \gamma \begin{pmatrix} 1 + (1 - z)K_n V_n \sin(\phi_n) & K_n \cos(\phi_n) \\ 1 + (1 - z)K_n V_n \sin(\phi_n) & \frac{1}{\gamma} + K_n \cos(\phi_n) \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

De modo que

$$\det[J] = \gamma[1+(1-z)K_n V_n \sin(\phi_n)]\gamma \left[\frac{1}{\gamma} + K_n \cos(\phi_n) \right] \gamma[1+(1-z)K_n V_n \sin(\phi_n)]\gamma K_n \cos(\phi_n)$$

$$\det[J] = \gamma[1 + (1 - z)K_n V_n \sin(\phi_n)] \quad (2.35)$$

Considerando $\gamma = 1$ o único valor de z que preserva a área no espaço de fase é $z = 1$.

Se $z = 1$, ocorre preservação de área no espaço de fases de acordo com o teorema de Liouville [16, 45], pois $\det[J] = 1$.

Quando $z \neq 1$, $\det[J]$ tem a possibilidade de ser diferente de 1, sugerindo que o sistema expande ou contrai o volume do espaço de fase, indicando a presença de comportamento caótico, dissipação ou outro comportamento complexo de fenômenos dinâmicos. As grandes variações de comportamento estão diretamente relacionadas ao sistema, alternando entre estados distintos de movimento. Especificamente, vemos alternâncias entre movimentos caóticos, onde o comportamento do sistema é altamente sensível às condições iniciais, ao movimento regular, onde o sistema se mostra mais previsível, embora padrões não totalmente regulares. Essa mistura de comportamentos dentro do mesmo sistema torna a

dinâmica interessante e mais complexa de se analisar.

2.3.3 Expoentes de Lyapunov

Os expoentes de Lyapunov [46, 47] são frequentemente utilizados como indicadores de caos. Analisamos os expoentes de Lyapunov para caracterizar o comportamento caótico de algumas partículas sujeitas às condições iniciais, o que nos permite capturar os detalhes intrincados deste mapa padrão com dinâmica modificada e compreender melhor a interação entre os vários regimes difusivos.

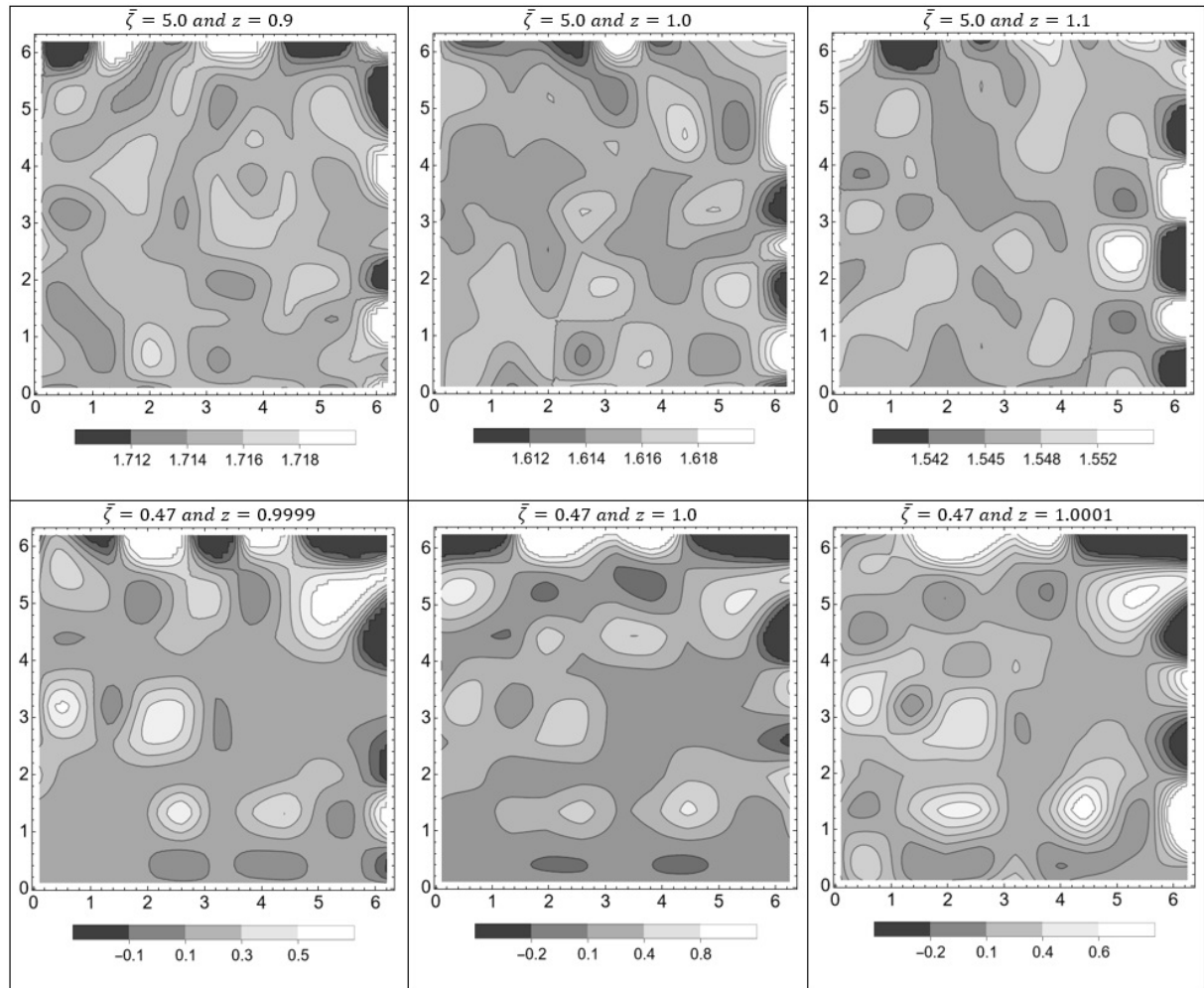


Figura 2.6: Variações nos valores dos expoentes de Lyapunov em função dos parâmetros $\bar{\zeta}$ e z . Em todos os gráficos, os eixos coordenados representam as condições iniciais. A fase inicial (ϕ_{in}) e a velocidade inicial (V_{in}) são representadas no eixo x e eixo y , respectivamente. A barra em tons de cinza denota os valores dos expoentes de Lyapunov.

O expoente de Lyapunov é muito importante na caracterização da dinâmica do sistema, indicando o quão sensível o sistema é às condições iniciais. Para sistemas bidimensionais

são definidos como

$$\lambda_j = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln |\Lambda_j^N|, \quad (2.36)$$

onde Λ_j^N são os autovalores da matriz $M = \prod_{n=1}^N J(V_n, \phi_n)$ e J é a matriz Jacobiana avaliada sobre a órbita [48]. Os resultados estão ilustrados na Figura 2.6. As condições iniciais foram sistematicamente escolhidas a partir de uma grade de pontos igualmente espaçados, onde as variáveis V_{in} e ϕ_{in} foram amostradas dentro do intervalo $[0, 2\pi]$. Posteriormente, um processo iterativo foi aplicado, estendendo-se por mais de 1 milhão de termos para garantir a precisão e estabilidade dos resultados. Na primeira linha dos gráficos, onde $\bar{\zeta} = 5$, observa-se que à medida que o valor de z aumenta, o valor médio dos expoentes de Lyapunov diminui. Esta tendência indica uma transição no comportamento do sistema: inicialmente, ele exibe dinâmica superdifusiva, então passa por um regime de difusão normal e eventualmente torna-se subdifusiva. Esta observação está alinhada com a interpretação dos expoentes de Lyapunov como indicadores da divergência de trajetórias no espaço de fase. Um expoente de Lyapunov mais alto corresponde a uma taxa mais rápida de separação entre trajetórias, que está associado a um comportamento mais difuso do sistema.

2.4 Propriedades de transporte

Nas seções anteriores, examinamos a transição de um mapa *twist* para um mapa não *twist*. No entanto, mesmo após a ruptura da última curva invariante, uma barreira de transporte pode persistir no espaço de fase, contingente nos parâmetros do sistema. Para este fenômeno, calculamos a razão do número de órbitas que atravessam a barreira para o número total de órbitas, à semelhança do que foi feito na referência [49]. Primeiro, consideramos um conjunto de condições iniciais mantendo $V_{in} = 1$ e variando ϕ_{in} entre 0,5 e 6,0. Após um processo iterativo com $N = 10^5$ passos, determinamos a fração de órbitas que atingem os pontos definidos por $V_N = 2,6$ correspondente ao valor máximo atingido pela última curva invariante *spanning*. Os resultados são apresentados na Figura 2.7, a

barra em tons de cinza representa a fração de órbitas que passam pela barreira. Nas regiões negras, essa fração de órbitas é zero, ou seja, o sistema tem total barreira. Vale ressaltar que quando $z > 1$, a transmissão ocorre quase invariavelmente, independentemente do valor de $\bar{\zeta}$.

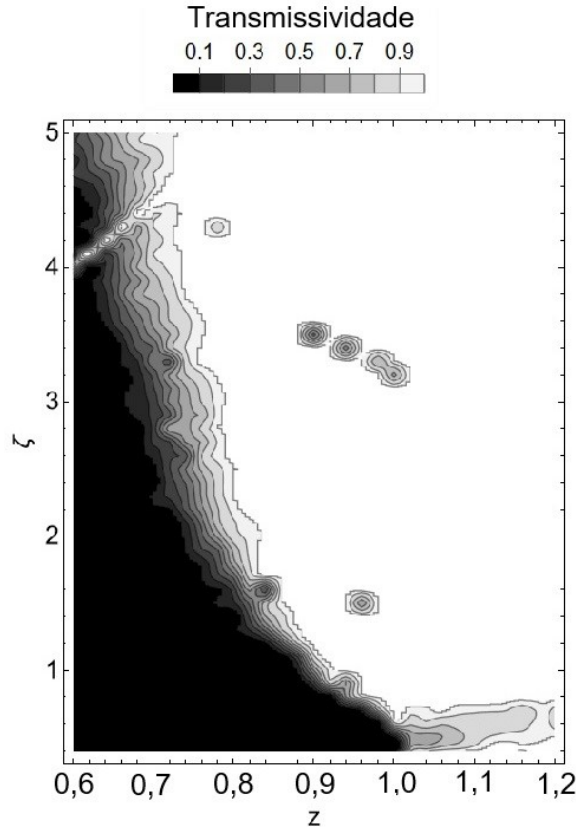


Figura 2.7: Diagrama de transmissividade. Fração de órbitas que atingem ou excedem a posição do valor máximo alcançado para última curva invariante *spanning*. A barra em tons de cinza indica a porcentagem de transmissividade.

Este comportamento também pode ser entendido nos diagramas de espaço de fase na segunda linha da Figura 2.5, onde é aparente que a região com maior densidade de pontos muda progressivamente para valores mais altos de V à medida que z aumenta. Esta mudança indica que as órbitas, que anteriormente eram obstruídas, encontram resistência decrescente, levando a uma região acessível mais extensa.

Por outro lado, quando $\bar{\zeta}$ assume valores mais elevados, o sistema experimenta um aumento na dinâmica caótica, o que facilita maior transmissividade no espaço de fase. Neste contexto, transmissividade refere-se à capacidade das órbitas atravessarem regiões do espaço de fase, de outra forma poderiam ficar obstruídas. O caos crescente perturba a

regularidade do sistema, permitindo que as órbitas passem por regiões que normalmente impediriam o seu progresso.

A região de interface, que fica entre as zonas de bloqueio total e início da transmissividade, exibe flutuações. Essas flutuações estão ligadas a variações na estabilidade local do sistema, sugerindo que pequenas mudanças na estabilidade podem levar a diferenças significativas no comportamento das órbitas neste limite crítico. Esse comportamento enfatiza a complexa interação entre estabilidade, caos e dinâmica de órbita dentro do sistema.

No gráfico da Figura 2.7, uma clara semelhança qualitativa com o gráfico da Figura 2.4 é observada, indicando que o comportamento do sistema permanece consistente em ambas as representações. Especificamente, a região de congelamento na Figura 2.4 corresponde à proporção de órbitas que não conseguem superar a barreira estabelecida. Esta região demonstra visualmente onde o sistema encontra resistência, levando ao aprisionamento de órbitas dentro de uma faixa específica de valores de $\bar{\zeta}$ e z .

Além da região de congelamento, as demais regiões do gráfico da Figura 2.7 apresentam comportamento análogo àqueles no gráfico da Figura 2.4. Essas regiões refletem as diferentes capacidades das órbitas escaparem ou permanecerem confinadas pelas restrições subjacentes do sistema.

Neste capítulo, analisamos um bilhar unidimensional sob a influência de um parâmetro adiabático, que governa a transferência de energia durante cada colisão. Os resultados demonstraram que o parâmetro adiabático não só controla a troca de energia - onde a partícula pode ganhar ou perder energia por meio de uma interação oscilatória, mas também altera fundamentalmente a estrutura e a dinâmica do espaço de fase da partícula.

A variação do parâmetro adiabático introduz uma gama diversificada de regimes dinâmicos. Para determinados valores, a partícula pode atingir um estado “congelado”, caracterizado pela velocidade zero $V_N = 0$ e outras regiões do espaço de parâmetros levam a comportamentos difusivos, com a partícula exibindo subdifusão ou movimento superdifusivo. No próximo capítulo, começamos um estudo com a dinâmica mista de um bilhar, onde também teremos um sistema que apresenta regiões de movimento regular

com regiões de zonas caóticas.

CAPÍTULO 3

BILHARES CLÁSSICOS

Este capítulo mostrará como bilhares são definidos, algumas formas geométricas e os tipos de dinâmicas correspondentes. Demonstraremos as etapas envolvidas na construção de um mapeamento bidimensional não-linear. Mostramos que nos bilhares, o tipo do espaço de fases apresentado pela dinâmica está ligado à forma geométrica. Classificados em três diferentes grupos: integráveis, ergóticos e mistos. Através do mapeamento, é possível verificar a estrutura do espaço de fases exibido pela dinâmica do bilhar. Isso mostra que, para condições iniciais apropriadas, uma partícula pode exibir trajetórias periódicas e/ou caóticas no bilhar.

3.1 Bilhares

Ao mencionar o termo bilhar, pelo senso comum a primeira coisa que pensamos é no velho e conhecido jogo de sinuca. Uma mesa retangular, bolas, taco e um potencial adversário, com um objetivo único que é acertar as bolas nas caçapas. Sim, essa seria uma maneira bem simples de começar a explicar a definição de bilhar para uma pessoa com pouco ou nenhum conhecimento do assunto, pois a primeira imagem que vem é uma mesa plana, com bolas colidindo entre si e com as paredes dessa mesa, de modo a encontrar

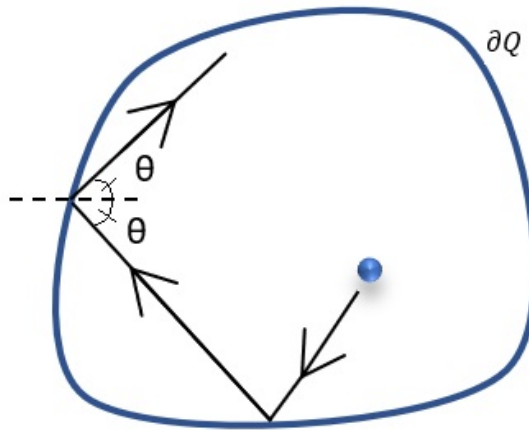


Figura 3.1: Ilustração da trajetória de uma partícula entre duas colisões sucessivas no interior do bilhar.

o desejado. Agora podemos melhorar um pouco essa definição, explicando que vamos considerar nesse momento um bilhar matemático. Mesa plana com curvas fechadas e que o jogo será realizado com apenas uma bola. Analisando isso, a trajetória da bola sobre a mesa será um segmento de reta. Quando a trajetória da bola atinge a borda da mesa, a mesma será refletida com ângulo de reflexão igual ao ângulo de incidência.

Constituindo uma das mais simples classes de sistemas dinâmicos, os bilhares têm despertado grande interesse entre os matemáticos e físicos. Isso muitas das vezes se dá por serem considerados como os melhores exemplos para a análise do caos determinístico, têm fornecido (desde o começo de seus estudos) inúmeros problemas em teorias matemáticas (como geometria, probabilidade e teoria ergódica) [50].

De uma maneira mais formal, um bilhar [51] pode ser entendido como um sistema físico cuja partícula está confinada em uma região delimitada por um contorno ∂Q Figura 3.1, que se move livremente em trajetórias retilíneas, mantendo constante a sua componente tangencial, enquanto sua componente normal muda de sinal, assim o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão [52].

As colisões sofridas pelas partículas no domínio de ∂Q podem ser classificadas como elásticas ou inelásticas. Na colisão elástica, observa-se tanto a conservação do *momentum* quanto da energia cinética da partícula. Na colisão inelástica, a partícula experimenta uma perda fracional de energia, conservando o seu *momentum*. Temos que entender que a velocidade da partícula se manterá constante ou não dependendo das condições da

fronteira do bilhar, ou seja, se o domínio ∂Q não depende do tempo, então o sistema não troca energia, mantendo a velocidade constante, temos um sistema de fronteira fixa. Por outro lado, se $\partial Q = \partial Q(t)$, dizemos então que o sistema apresenta dependência temporal, é permitida a troca de energia no sistema, assim a partícula poderá sofrer um aumento ou uma diminuição no módulo de sua velocidade. Após a ocorrência de uma colisão, a partícula exibe reflexão especular com a fronteira, ou seja, o ângulo de incidência no instante do impacto é igual ao ângulo de reflexão em relação à superfície normal da parede, dando assim origem a uma nova direção por onde a partícula deve prosseguir.

Contudo, os bilhares são constantemente ligados aos trabalhos de Sinai [53] e Bunimovich [54], que discutiram de forma rigorosa as características desses sistemas, além de atualmente esses modelos serem frequentemente utilizados na descrição de problemas relacionados à mecânica estatística.

3.2 Mapeamento em bilhares

A forma geométrica de um bilhar influencia diretamente no desenvolvimento da partícula ao longo da região delimitada. Essas formas são modeladas por equações ou formas geométricas que descrevem a fronteira escolhida. Assim, uma das características fundamentais para a definição da forma geométrica (que vai delimitar a região do movimento da partícula) é o raio que descreve esse tipo de bilhar em coordenadas polares, ao qual pode ter infinitas possibilidades, como mostramos na Figura 3.2.

O raio que descreve esse tipo de bilhar em coordenadas polares pode ser escrito como

$$R(\theta, \epsilon, p) = 1 + \epsilon \cos(p\theta). \quad (3.1)$$

Temos que ϵ é o parâmetro que controla o achatamento do bilhar, ou seja, a deformação do círculo, onde $\epsilon \in [0, 2\pi)$, p está associado à geometria, é um número inteiro e maior que zero, pois números não inteiros ocasionam aberturas na fronteira do bilhar, o que acaba por permitir o escape das partículas [55]. θ é o ângulo que representa a coordenada polar, está entre $\theta \in [0, 2\pi)$.

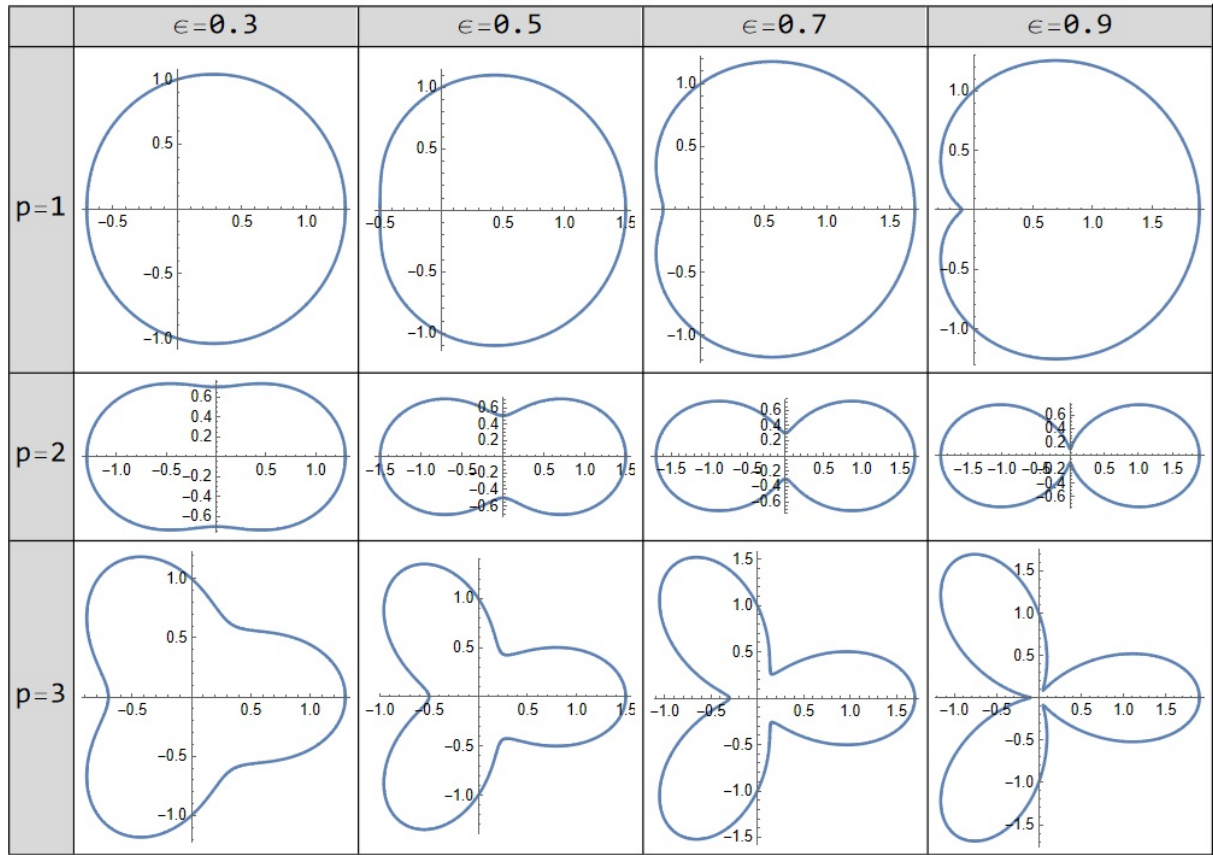


Figura 3.2: Esboço de diferentes geometrias da fronteira, para as combinações de parâmetros.

Em bilhares, a caracterização da dinâmica é descrita através de mapas bidimensionais não lineares nas variáveis θ_n (posição angular) e α_n (ângulo que a trajetória faz com a reta tangente à fronteira no ponto θ_n). Temos que a dinâmica é dada por um mapa A , tal que $A(\theta_n, \alpha_n) = (\theta_{n+1}, \alpha_{n+1})$, onde n representa a enésima colisão da partícula com a fronteira, ou seja, a dinâmica é caracterizada observando o estado da partícula apenas em cada colisão, Figura 3.3.

Para construção do mapeamento A podemos prosseguir da seguinte forma. A Figura 3.3, mostra um esquema ilustrativo de duas colisões sucessivas de uma partícula com a fronteira do bilhar. A partir de um dado valor de θ_n (coordenada polar) obtemos o valor do ângulo que a reta tangente da fronteira faz com o eixo x positivo calculado no ponto em que ocorreu a colisão, na qual chamamos de ϕ_n .

Com essas informações, podemos escrever as coordenadas retangulares $X(\theta_n)$ e $Y(\theta_n)$ da partícula como sendo:

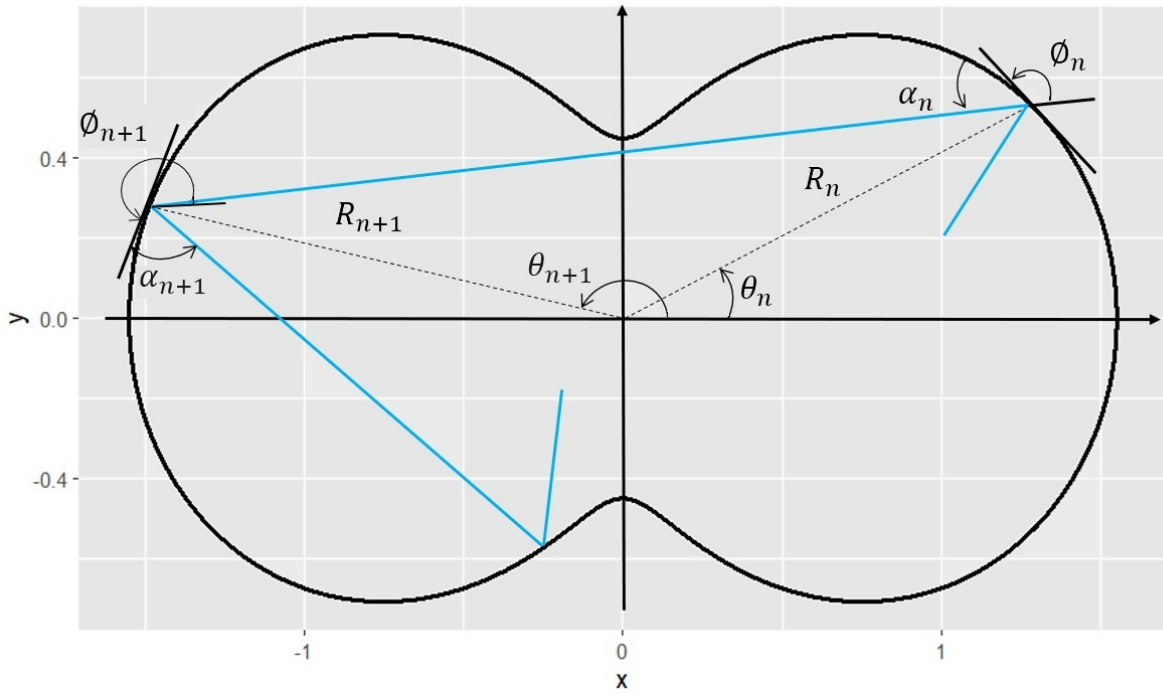


Figura 3.3: Esquema ilustrativo da trajetória de uma partícula entre duas colisões sucessivas no interior do bilhar e dos ângulos envolvidos na descrição do mapa

$$X(\theta_n) = R(\theta_n, \epsilon, p) \cos(\theta_n), \quad (3.2)$$

$$X(\theta_n) = [1 + \epsilon \cos(p\theta)] \cos(\theta_n), \quad (3.3)$$

$$Y(\theta_n) = R(\theta_n, \epsilon, p) \sin(\theta_n), \quad (3.4)$$

$$Y(\theta_n) = [1 + \epsilon \cos(p\theta)] \sin(\theta_n). \quad (3.5)$$

Conhecida a posição angular inicial, θ_n , o ângulo que a reta tangente à fronteira no ponto de colisão, de coordenadas $X(\theta_n)$, $Y(\theta_n)$ faz com a horizontal é dado por

$$\phi_n = \arctan \left[\frac{Y'(\theta_n)}{X'(\theta_n)} \right], \quad (3.6)$$

onde $X'(\theta_n)$ e $Y'(\theta_n)$ são as derivadas primeiras das coordenadas retangulares em relação ao ponto de colisão θ_n .

Essas derivadas são dadas por

$$\frac{dX(\theta_n)}{d\theta_n} = X'(\theta_n) = \frac{dR(\theta_n)}{d\theta_n} \cos(\theta_n) - R(\theta_n) \sin(\theta_n), \quad (3.7)$$

$$\frac{dY(\theta_n)}{d\theta_n} = Y'(\theta_n) = \frac{dR(\theta_n)}{d\theta_n} \sin(\theta_n) + R(\theta_n) \cos(\theta_n), \quad (3.8)$$

Assim

$$\frac{dR(\theta_n)}{d\theta_n} = -\epsilon p \sin(p\theta_n). \quad (3.9)$$

Com o conhecimento de α_n , θ_n e ϕ_n podemos encontrar o valor de θ_{n+1} construindo a trajetória da partícula, uma vez que a partícula se encontra livre de influências do meio externo, e sua trajetória é retilínea e livre dentro das paredes do bilhar, o valor de θ_{n+1} será encontrado resolvendo o instante em que a trajetória cruza com a fronteira, determinando a posição da próxima colisão. A trajetória é construída a partir da equação da reta que é dada por

$$Y(\theta_{n+1}) - Y(\theta_n) = \tan(\alpha_n + \phi_n) [X(\theta_{n+1}) - X(\theta_n)], \quad (3.10)$$

em que $X(\theta_{n+1}) = R(\theta_{n+1}) \cos(\theta_{n+1})$ e $Y(\theta_{n+1}) = R(\theta_{n+1}) \sin(\theta_{n+1})$, são as coordenadas cartesianas do novo ponto de colisão parametrizado pelo ângulo polar θ_{n+1} , que é obtido numericamente como solução da Equação (3.10). Uma vez conhecido θ_{n+1} , é possível encontrar o valor de ϕ_{n+1} através da Equação (3.6). Portanto, sabendo que o ângulo de incidência e reflexão são iguais e usando a regra do ângulo oposto pelo vértice, encontramos α_{n+1} através de

$$\alpha_{n+1} = \phi_{n+1} - (\alpha_n + \phi_n). \quad (3.11)$$

Na Figura 3.3, podemos ver a orientação dos ângulos para cada colisão. Portanto, o

mapa que descreve a dinâmica do modelo é dado por:

$$A : \begin{cases} F(\theta_{n+1}) = [Y(\theta_{n+1}) - Y(\theta_n)] - tg(\alpha_n + \phi_n) [X(\theta_{n+1}) - X(\theta_n)] \\ \alpha_{n+1} = \phi_{n+1} - (\alpha_n + \phi_n) \end{cases} . \quad (3.12)$$

Se, $F(\theta_{n+1}) = 0$, obtemos o valor de θ_{n+1} , o que possibilita encontrar α_{n+1} , depois que isso ocorre, iteramos o mapa novamente.

3.3 Classificação Quanto a Dinâmica do Bilhar

A forma geométrica de um bilhar influencia diretamente no desenvolvimento da partícula ao longo da região delimitada, ou seja, no modo como o sistema evolui com o passar do tempo, caracterizando assim a sua dinâmica. Essa dinâmica pode ser do tipo integrável, não integrável e mista.

3.3.1 Bilhares Integráveis

Também chamados de regulares, os bilhares integráveis possuem sua integrabilidade vinda da conservação do momento angular, onde o número de quantidades conservadas é igual ao número de graus de liberdade. São sistemas dinâmicos, onde as trajetórias das partículas seguem um comportamento regular e previsível, com trajetórias bem definidas. Podemos citar como exemplo o bilhar circular e o bilhar elíptico. [52, 56] .

a) Bilhar Circular

Sendo a fronteira do bilhar dada por $R(\theta) = 1$, a curvatura é sempre constante [34]. Tendo assim, o seguinte mapeamento

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + \pi - 2\alpha_n \\ \alpha_{n+1} = \alpha_n \end{cases} , \quad (3.13)$$

Uma forte característica do bilhar circular é que o valor atribuído inicialmente a α

permanece constante durante todas as reflexões da partícula, determinando assim o tipo de órbita que a partícula vai descrever no espaço de fase.

Os tipos de movimentos possíveis para um bilhar circular são do tipo rotação [52], representados no espaço de fase por curvas invariantes na Figura 3.4.

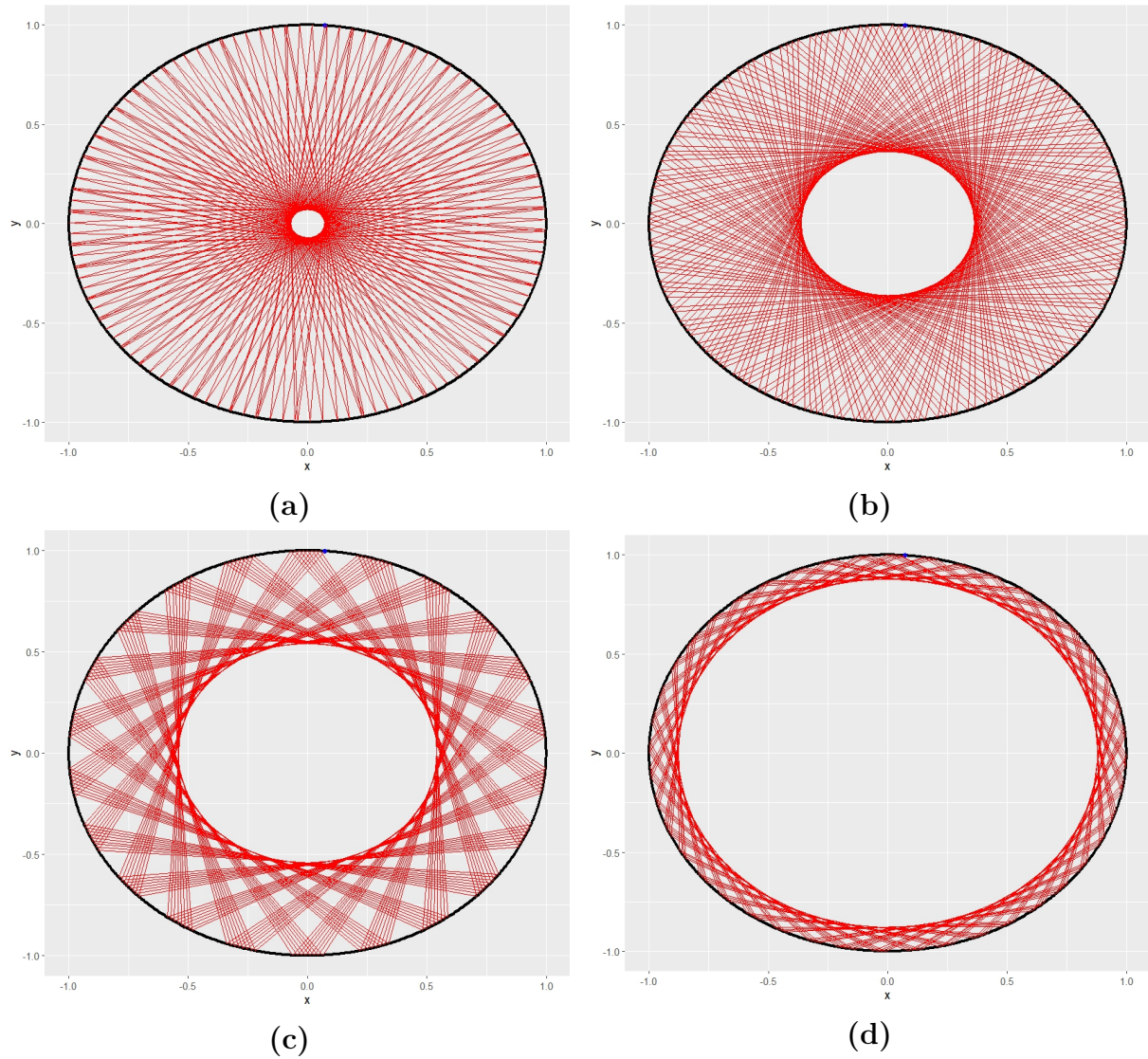


Figura 3.4: Evolução do movimentos de rotação de uma partícula dentro de um bilhar circular. Sendo $\epsilon = 0$, $p = 2$. Para (a) $\alpha_n = 1,5$, (b) $\alpha_n = 1,2$, (c) $\alpha_n = 1,0$ e (d) $\alpha_n = 0,5$.

Como mencionado anteriormente, sistemas integráveis apresentam regularidade em seu espaço de fase. No caso do bilhar circular, o espaço de fase é composto por segmentos de reta, conforme representado na Figura 3.5.

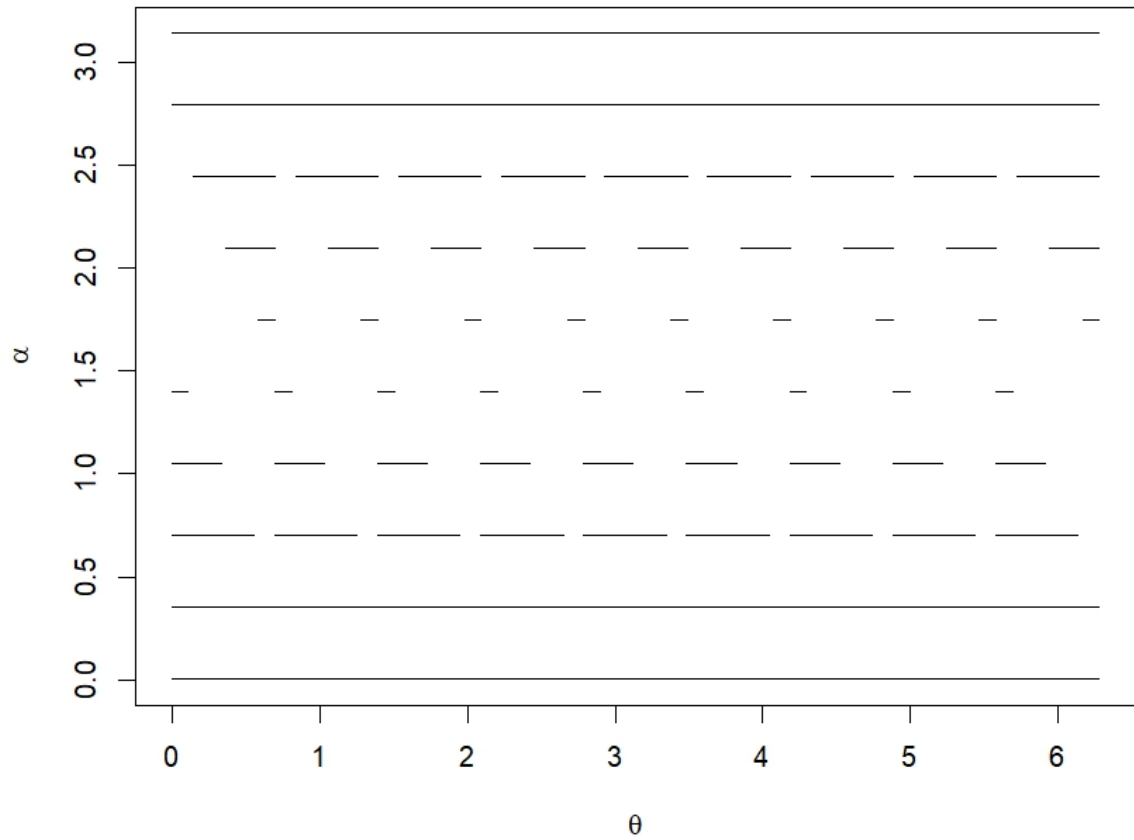


Figura 3.5: Representação do espaço de fase de um bilhar circular.

b) Bilhar Elíptico

Com característica um pouco diferente do bilhar circular, o bilhar elíptico também é um bilhar integrável, tendo duas constantes de movimento (energia e o produto do momento angular calculado em relação aos dois focos) [56]. O espaço de fase de um bilhar elíptico, apesar de não apresentar comportamento caótico, possui uma riqueza de comportamentos maior que a do bilhar circular. Apresentando duas grandes ilhas limitadas por uma separatriz e um conjunto de curvas invariantes do tipo *spanning*.

O bilhar elíptico tem a expressão do raio em coordenadas polares, dado por

$$R(\theta, e, q) = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos(q\theta)}. \quad (3.14)$$

3.3.2 Bilhares não Integráveis

Apresentando um comportamento complexo e imprevisível, esses sistemas exibem regiões caóticas no espaço de fase, com características de sensibilidade a condições iniciais e trajetórias que podem divergir significativamente mesmo com pequenas variações. Como exemplo de bilhares com dinâmica caótica, podemos citar os bilhares que aparecem nos trabalhos de Sinai e Bunimovich, Figura 3.6. Esses trabalhos foram os primeiros a mostrar que o comportamento caótico pode surgir em um problema aparentemente simples, que é o de uma partícula confinada.

O bilhar de Sinai consiste em uma fronteira retangular com um refletor circular em seu centro. As colisões com o obstáculo introduzem dispersão e comportamento caótico, tornando o sistema não integrável. Este bilhar possui grande importância no estudo do comportamento de moléculas em um gás composto por várias esferas pequenas que colidem entre si e com a fronteira, conhecido como gás de Lorentz [57]. O bilhar de Bunimovich é também conhecido como bilhar *stadium* (forma de um estádio de futebol), com duas paredes retas e duas semicircunferências nos extremos. As curvas das bordas introduzem comportamentos caóticos, pois o ângulo de incidência da partícula muda de forma imprevisível após cada colisão. Juntos, estes estudos fundamentais revelam como mesmo pequenas variações na forma dos limites podem alterar radicalmente as propriedades dinâmicas dos sistemas de bilhar.

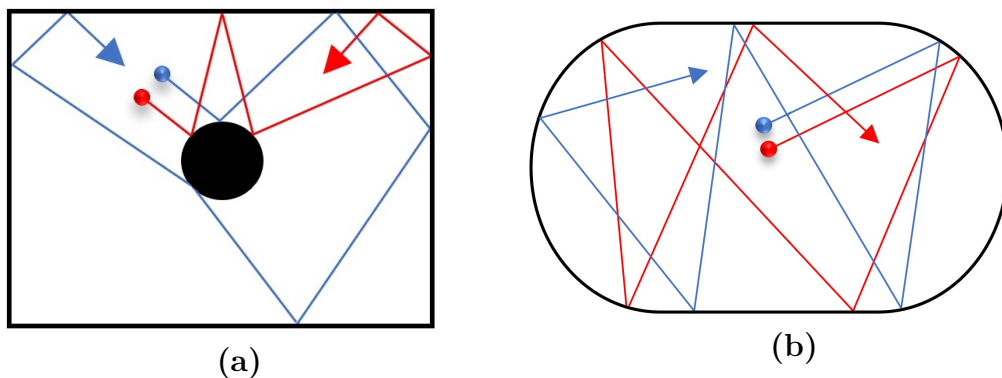


Figura 3.6: a) Bilhar de Sinai. (b) Bilhar *stadium*. Representamos aqui duas trajetórias de uma partícula sujeita a duas condições iniciais muito próximas. Percebe-se que rapidamente apresentam trajetórias que diferenciam-se entre si.

3.3.3 Bilhares Mistos

Apresentando um espaço de fase composto por regiões regulares e caóticas, os bilhares mistos correspondem à maioria dos sistemas dinâmicos [58], onde é possível verificar a coexistência de um mar de caos, cadeia de ilhas de estabilidade e um conjunto de curvas invariantes do tipo *spanning* ao longo do espaço de fase. Em geral, as regiões regulares estão associadas a órbitas periódicas ou quase-periódicas, enquanto as regiões caóticas apresentam sensibilidade às condições iniciais como, por exemplo, a dinâmica do bilhar ovóide [59].

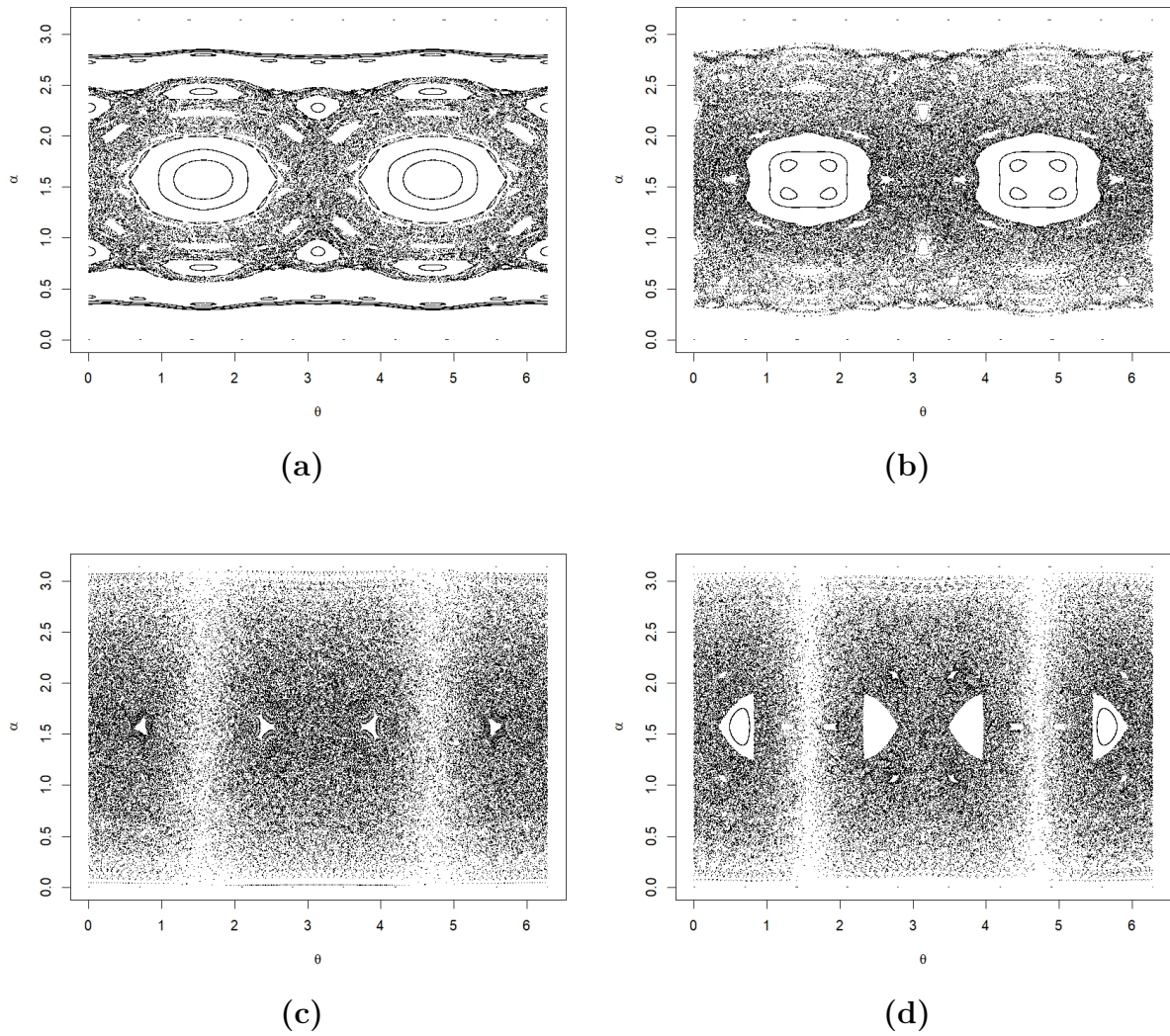


Figura 3.7: Espaços de fases construídos para os parâmetros: (a) $p = 2$ e $\epsilon = 0,08$, (b) $p = 2$ e $\epsilon = 0,12$, (c) $p = 2$ e $\epsilon = 0,6$ e (d) $p = 2$ e $\epsilon = 0,9$.

A variação de ϵ exerce uma grande influência na dinâmica do problema, como por

exemplo a mudança na curvatura da fronteira. Define-se então um parâmetro crítico, Equação (3.15), tal que indica o valor máximo para uma fronteira que apresenta regiões com curvaturas convexas (voltadas para fora) e curvaturas côncavas (voltadas para dentro), afetando o comportamento das trajetórias das partículas. Esse parâmetro pode ser dado por [59, 60, 61]

$$\epsilon_c = \frac{1}{1 + p^2} \quad p \geq 1, \quad (3.15)$$

onde para valores $\epsilon < \epsilon_c$, Figura 3.7 (a) a fronteira do bilhar tem a forma côncava e o espaço de fase é misto, contendo ilhas de periodicidade, curvas invariantes *spaning* e caos. Quando $\epsilon > \epsilon_c$, Figura 3.7 (d) a fronteira do bilhar pode exibir regiões convexas, conduzindo à destruição das curvas invariantes *spaning*, o crescimento da região caótica, restando apenas algumas poucas ilhas.

Neste capítulo, fizemos uma revisão do bilhar, mostrando as etapas envolvidas na construção de seu mapeamento, que será utilizado na descrição da evolução de uma partícula no interior do sistema. Após obtermos o mapa, mostramos que nos bilhares o tipo do espaço de fases apresentado pela dinâmica está totalmente ligado à forma geométrica assumida pela fronteira do modelo, classificados em três diferentes grupos: integráveis, ergóticos e mistos. Esta passagem nos levará a um melhor entendimento do capítulo três, onde faremos uma abordagem do sistema um pouco diferente do usual, nos permitindo uma observação interessante do espaço de fase.

CAPÍTULO 4

DINÂMICA CAÓTICA DE UM SISTEMA DE BILHARES

Neste capítulo, iniciamos o estudo investigando um sistema de bilhar com geometria oval, com foco no comportamento de trajetórias e órbitas no espaço de fase conforme o parâmetro de controle é variado. Destacamos como as mudanças no parâmetro de controle afetam as trajetórias do sistema. Nesta análise, usamos uma paleta de cores no espaço de fase, que indica a frequência das visitas da órbita a regiões específicas. Realizando alterações no parâmetro de controle da fronteira do sistema, visitamos um novo bilhar o qual denominamos de bilhar lemniscata.

A escolha desse nome deve-se ao fato de que a lemniscata é uma curva plana em forma de ∞ (símbolo do infinito), caracterizada por uma equação matemática que descreve sua simetria em relação a um ponto central. Um dos exemplos mais conhecidos é a lemniscata de Bernoulli [62]. Essa curva surge em diversos contextos matemáticos e físicos, como na dinâmica de partículas e no estudo de integrais elípticas [63].

Mostramos que, à medida que o parâmetro de controle aumenta, a taxa de escape decai exponencialmente pois a partícula encontra dificuldade em atravessar de um lado para o outro devido à geometria do sistema. Exploramos o surgimento de novas estruturas em um

espaço de fase distorcido. Demonstramos como o espaço de fase evolui com o parâmetro de controle, revelando padrões intrincados. Estas observações nos deram alguns resultados que nos permitirão discutir possíveis caminhos e perspectivas para pesquisa deste trabalho como estruturas de auto-similaridade ou auto-afim, assim como aplicações em sistemas de bilhares não lineares e mecânica estatística.

4.1 Sobre o bilhar e considerações iniciais

Analisamos um sistema de bilhar que inicialmente apresenta uma geometria oval e que gradualmente transita para o bilhar lemniscata. A essa progressão deliberada, permite a observação de comportamentos integráveis e caóticos, dependendo dos valores específicos do parâmetro.

Esta pesquisa baseia-se em estudos anteriores, oferecendo uma análise visual e quantitativa abrangente das distribuições de trajetórias. Em particular, empregamos um mapa espacial de fase codificado por cores para representar a frequência de visitas em órbita em várias regiões. Esta abordagem de codificação por cores fornece uma representação visual clara das estruturas dinâmicas, enfatizando áreas com níveis distintos de atividade, e é inspirada em metodologias de análise de densidade de espaço de fase em sistemas caóticos [52].

À medida que o parâmetro de controle se aproxima do seu máximo, surge um fenômeno distinto: a região do bilhar divide-se em duas sub-regiões ligadas por uma abertura estreita (formato de lemniscata). De acordo com a Equação (3.1), o parâmetro de controle p é um número inteiro que determina o número de pontos de inflexão na fronteira. Especificamente, quando ϵ excede o valor crítico Equação (3.15), o limite exhibe pontos de inflexão $2p$, lembrando que ϵ é o parâmetro de controle que altera a deformação da fronteira. Assumimos que a partícula inicia seu movimento imediatamente após atingir o limite do bilhar no ponto (x_0, y_0) , com posição angular inicial θ_n , Equações (3.2 e 3.4).

A Figura 4.1 (a) ilustra um exemplo de trajetória para $p = 2$ e $\epsilon = 0,2$. Como mostrado, a trajetória começa em (x_0, y_0) , depois cruza o limite em (x_1, y_1) e novamente em (x_2, y_2) . O ângulo ϕ_n é definido como o ângulo entre a linha horizontal (representada pela linha

cinza) e a linha tangente ao limite no ponto (x_0, y_0) (representado pela linha laranja). Esse ângulo é encontrado usando a Equação (3.6).

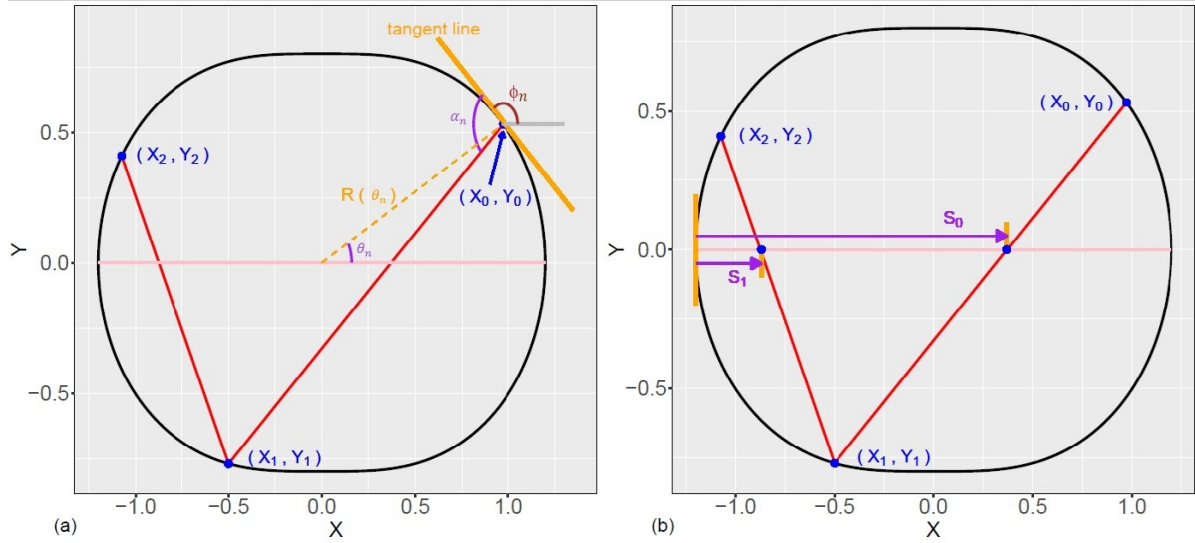


Figura 4.1: Em (a) a trajetória de uma partícula é mostrada, começando na posição inicial (x_0, y_0) com posição angular inicial θ_n . O ângulo inicial ϕ_n representa o ângulo entre o linha horizontal e a linha tangente no ponto inicial. O ângulo α_n é o ângulo entre o linha tangente e a linha ao longo da qual a partícula é lançada. A trajetória cruza o limite em (x_1, y_1) e novamente em (x_2, y_2) . Todos os ângulos são medidos no sentido anti-horário. Em (b), a mesma trajetória como em (a) é mostrado, mas com detalhes adicionais das interseções com o eixo horizontal. A primeira interseção ocorre em S_0 , seguida pela segunda interseção em S_1 . A distância S é medida a partir do lado esquerdo da fronteira do bilhar, em $x = -1 - \epsilon$. Os parâmetros de controle usados nesta simulação são $\epsilon = 0,2$, $p = 2$, $\theta_n = 0,5$ e $\alpha_n = 1,5$.

O $\alpha_n \in (0, \pi)$ é um ângulo complementar que determina a direção em que a partícula irá ser lançada em relação à linha tangente. Finalmente, o ângulo $\mu_n = \alpha_n + \phi_n$ representa a direção do movimento da partícula.

Para reproduzir a Figura 4.1 definimos os parâmetros de controle como $\epsilon = 0,2$, $p = 2$, $\theta_n = 0,5$ e $\alpha_n = 1,5$. A Figura 4.1 (b) mostra a mesma simulação da Figura 4.1 (a), mas agora com o detalhe adicional de que a partícula primeiro intercepta o eixo horizontal em S_0 , depois em S_1 e assim sucessivamente.

4.2 Resultados Numéricos

4.2.1 Resultados para o plano X-Y

Para melhor descrever os resultados, focamos no caso em que $p = 2$, correspondente a um sistema de bilhar com quatro pontos de inflexão quando $\epsilon > \epsilon_c$.

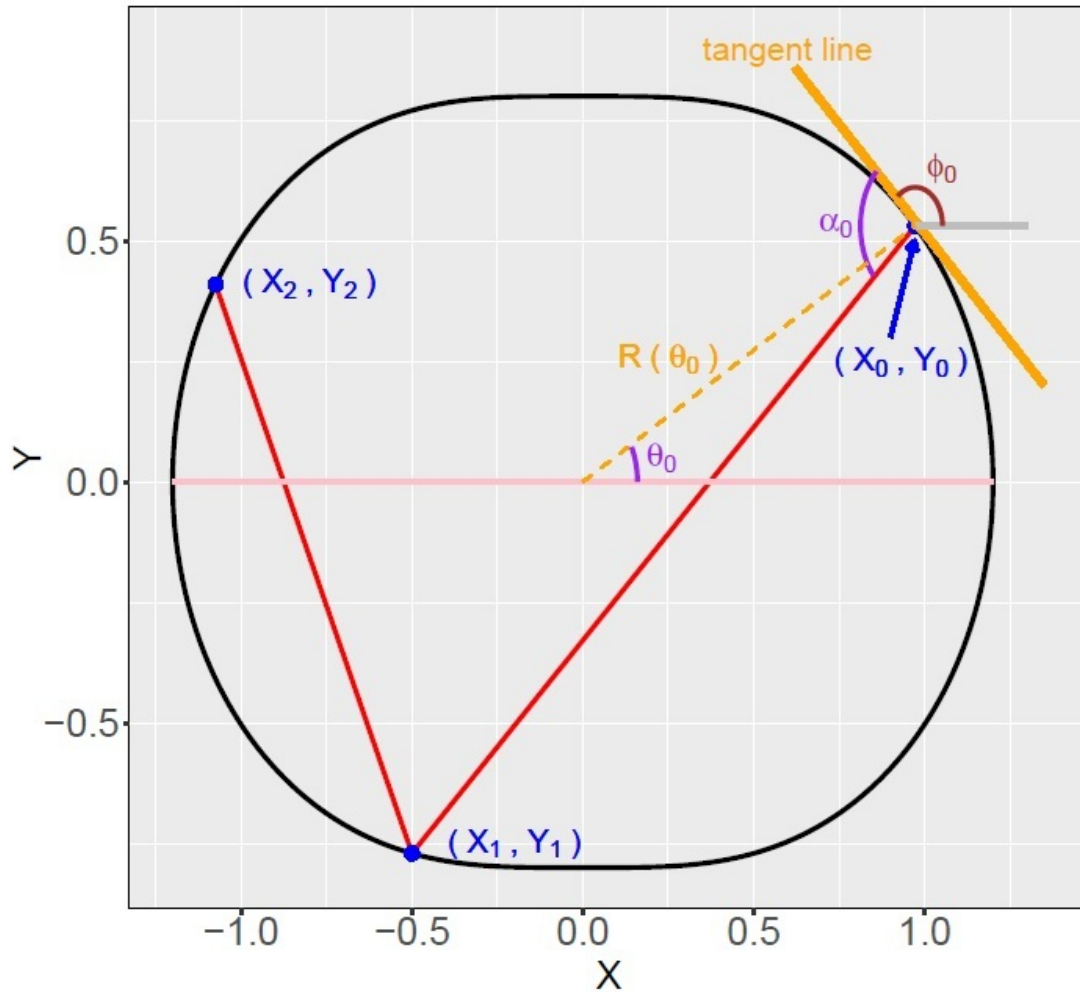


Figura 4.2: Referente a Figura 4.1 (a), a trajetória da partícula cruza o limite em (x_1, y_1) e novamente em (x_2, y_2) .

A Figura 4.3 (a) mostra um exemplo de órbita caótica iterada até 10^7 vezes com condições iniciais $\theta_n = 0,3$ e $\alpha_n = 1,9$, e com $\epsilon = 0,2$. O código de cores na Figura 4.3 (a) é gerado da seguinte forma: primeiro imagine que dividimos os eixos θ e α em 500 regiões igualmente espaçadas, resultando em um total de 250.000 células retangulares. Para cada célula, contamos o número de vezes que a órbita visita aquela região. É então aplicada uma paleta de cores que vai do branco ao vermelho, onde o branco indica zero visitas e o

vermelho indica um elevado número de visitas. Especificamente, uma região é colorida em vermelho se for visitada aproximadamente 80 vezes, o que corresponde à contagem mais alta neste caso.

Uma característica interessante, surge ao observar o comportamento na linha horizontal em que $\alpha = \pi/2$. Nesta linha, quando $\theta = 0$, $\theta = \pi$, e $\theta = 2\pi$, as regiões são predominantemente vermelhas, indicando que esses pontos são visitados significativamente mais do que outros. Isso ocorre porque em $(\theta, \alpha) = (0, \pi/2)$, $(\theta, \alpha) = (\pi, \pi/2)$ e $(\theta, \alpha) = (2\pi, \pi/2)$, nós encontramos pontos fixos hiperbólicos, que são inerentemente instáveis e contribuem para o comportamento caótico do sistema.

Como mostrado na Figura 4.3, duas ilhas periódicas são visíveis (representadas por regiões brancas), centradas em torno os pontos fixos elípticos em $(\theta, \alpha) = (\pi/2, \pi/2)$ e $(\theta, \alpha) = (3\pi/2, \pi/2)$. O número destas ilhas periódicas é influenciada pelo valor de p .

Ao considerar uma linha vertical em $\theta = \pi$, observamos o seguinte: para α começando em 0 (onde a região é branca), a cor muda gradualmente para o vermelho à medida que α se aproxima de $\pi/2$, depois retorna ao branco à medida que α atinge π . Isto sugere que as regiões onde $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$ são visitadas com muito menos frequência do que a região próxima a $\alpha = \pi/2$.

A Figura 4.3 (b) mostra a trajetória do sistema no plano Y - X, utilizando os mesmos parâmetros de controle como na Figura 4.3 (a). A linha preta representa o limite do bilhar, enquanto a trajetória vermelha corresponde para a órbita caótica iterada até 100 vezes. A condição inicial é indicada pelo ponto azul. Esse comportamento é típico de uma trajetória caótica, exibindo dinâmicas complexas e imprevisíveis.

Na Figura 4.3 (c), é utilizado o mesmo conjunto de parâmetros de controle da Figura 4.3 (a), mas com um ligeiro valor aumentado para ϵ , agora definido como 0,21. Aqui, regiões periódicas começam a aparecer em torno das principais ilhas, indicando o início de uma estrutura mais organizada no comportamento caótico.

A Figura 4.3 (d) apresenta o comportamento do sistema para $\epsilon = 0,35$. Neste caso, os pontos dados em $(\theta, \alpha) = (\pi/2, \pi/2)$ e $(\theta, \alpha) = (3\pi/2, \pi/2)$ tornam-se instáveis, como evidenciado pelo desaparecimento das ilhas periódicas centradas nesses pontos. Ocorre

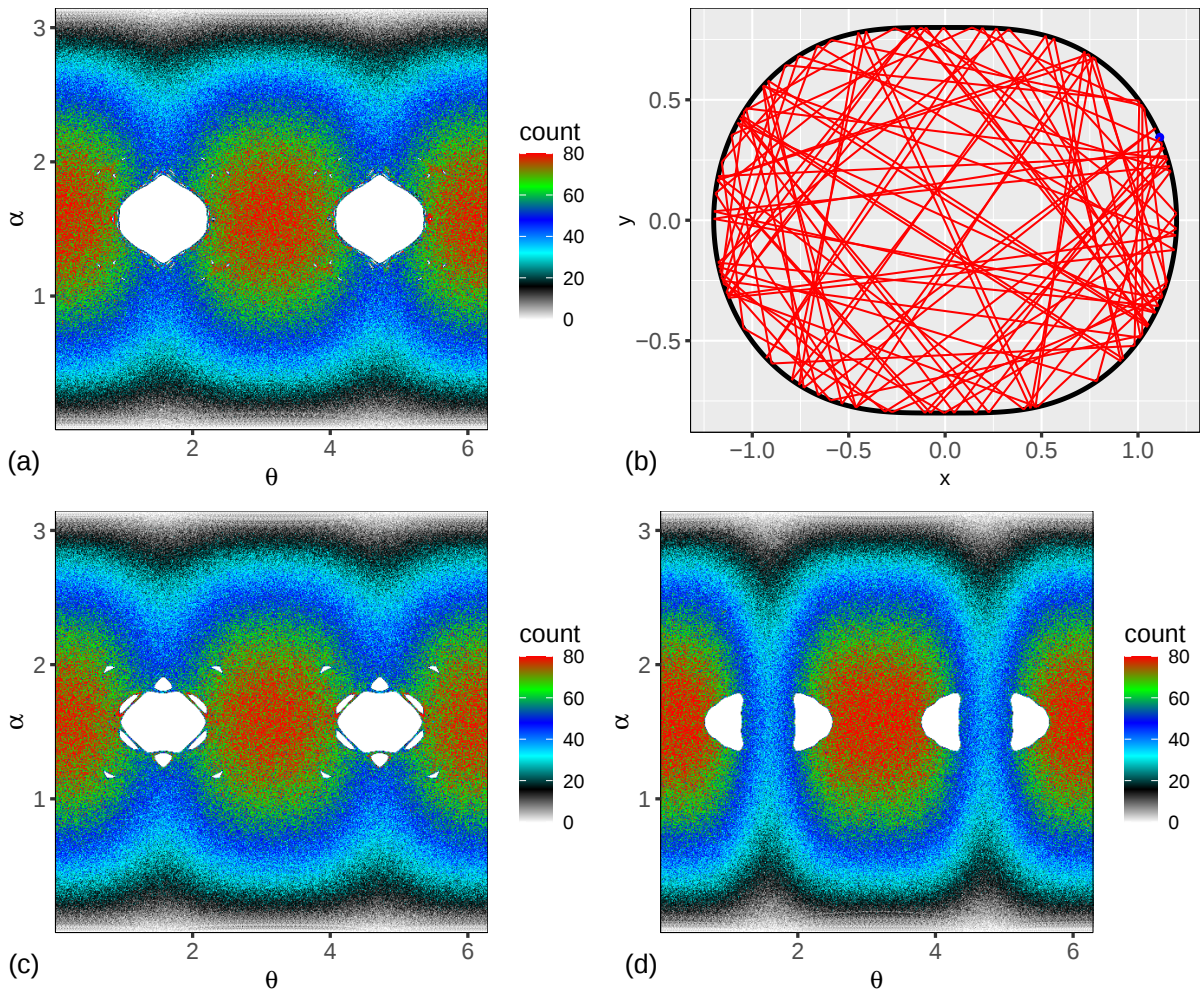


Figura 4.3: Nos painéis (a), (c) e (d), apresentamos uma única órbita caótica iterada até 10^7 vezes com os parâmetros $p = 2$, $\theta_n = 0,3$ e $\alpha_n = 1,9$, variando o parâmetro de controle ϵ . Em painel (a), definimos $\epsilon = 0,2$, onde um exemplo da trajetória caótica é ilustrado no painel (b) usando os mesmos parâmetros de controle como em (a). Os painéis (c) e (d) mostram os resultados para valores de ϵ de 0,21 e 0,35, respectivamente.

então uma bifurcação de duplicação de período, transformando uma ilha do período 2 em uma ilha do período 4.

Na Figura 4.4 (a) consideramos os parâmetros $\epsilon = 0,5$, $\theta_0 = 0,3$ e $\alpha_0 = 1,9$. O espaço de fase é altamente caótico e ilhas periódicas são quase inexistentes. A trajetória caótica, iterada até 100 vezes é mostrada na Figura 4.4 (b). Notavelmente, duas regiões de curvatura negativa são observadas em $X = 0$.

Quando o valor de ϵ aumentou para 0,7, regiões brancas começaram a aparecer em $\theta = \pi/2$ e $\theta = 3\pi/2$, como mostrado na Figura 4.4 (c). Este comportamento pode ser explicado pelas duas regiões locais de curvatura negativa aproximando-se um do outro,

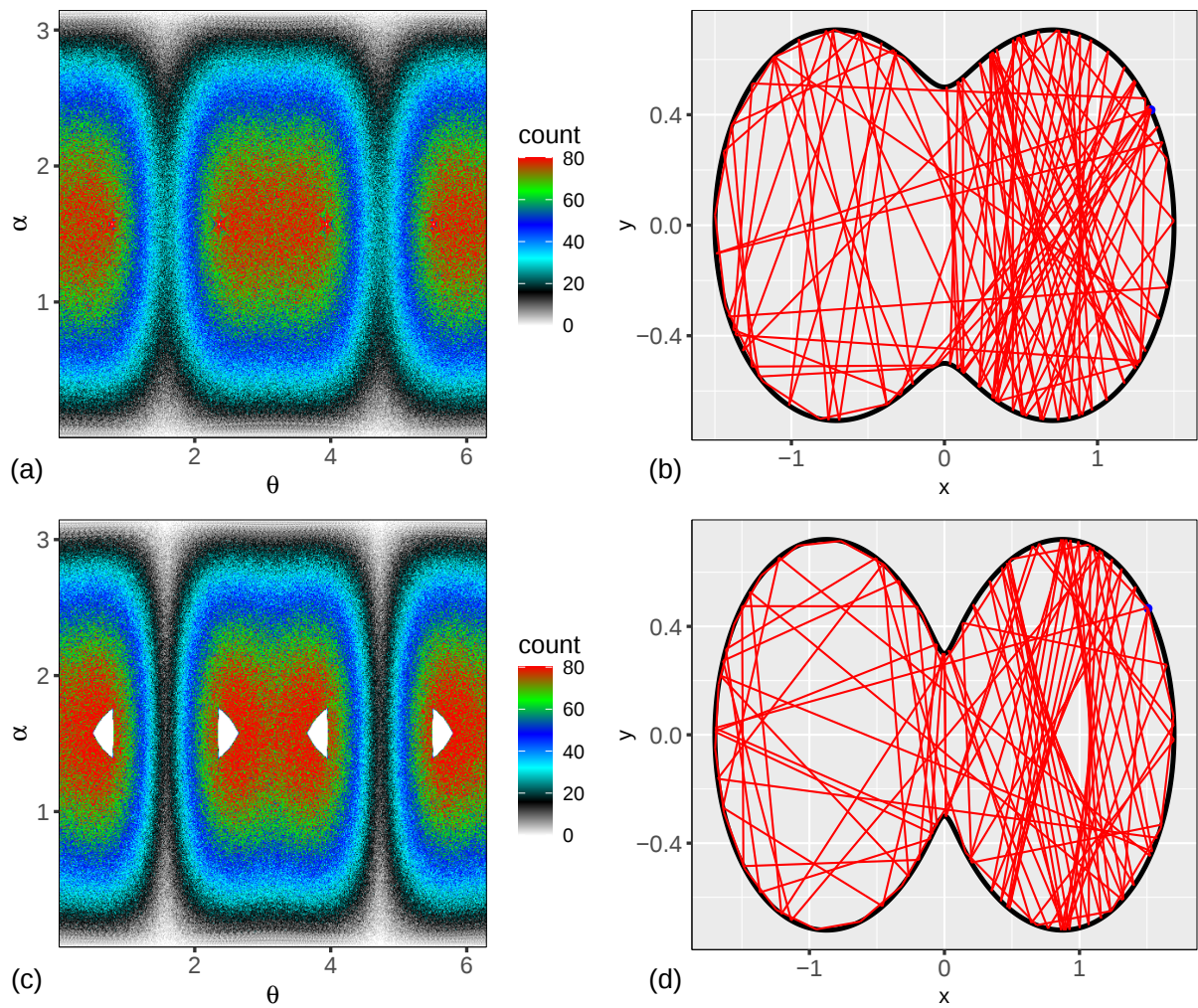


Figura 4.4: O painel (a) apresenta uma única órbita iterada até 10^7 vezes para $\epsilon = 0,5$. As cores indicam a frequência das visitas da órbita a regiões específicas do espaço de fase. Painel (b) ilustra um exemplo de trajetória correspondente às condições descritas em (a). Painel (c) e (d) exibem os resultados para $\epsilon = 0,7$. Em todos os casos, definimos $\theta_n = 0,3$ e $\alpha_n = 1,9$.

como visto na Figura 4.4 (d), em comparação com a Figura 4.4 (b) e a Figura 4.3 (b). Na Figura 4.4 (c), ilhas periódicas reaparecem, indicando que a dinâmica do sistema passou de caótica para comportamento mais periódico.

Esta sequência demonstra que a estabilidade dos pontos fixos no sistema é sensível ao parâmetro de deformação ϵ , que controla o comportamento geral do sistema. Agora na Figura 4.5 (a), onde definimos $\epsilon = 0,99$ (valor próximo de 1), notamos que as regiões brancas em $\theta = \pi/2$ e $\theta = 3\pi/2$ tornam-se mais proeminentes, separando efetivamente o espaço de fase. São observadas quatro grandes ilhas periódicas, juntamente com várias ilhas menores circundando as principais.

A trajetória caótica, iterada 100 vezes, é mostrada na Figura 4.5 (b). Como visto, as duas regiões da curvatura negativa estão agora quase se tocando. Para este caso, a órbita caótica não cruza $x = 0$ nas primeiras 100 iterações, sugerindo que o número de travessias em $x = 0$ provavelmente seja maior do que para os valores mais baixos de ϵ considerados anteriormente.

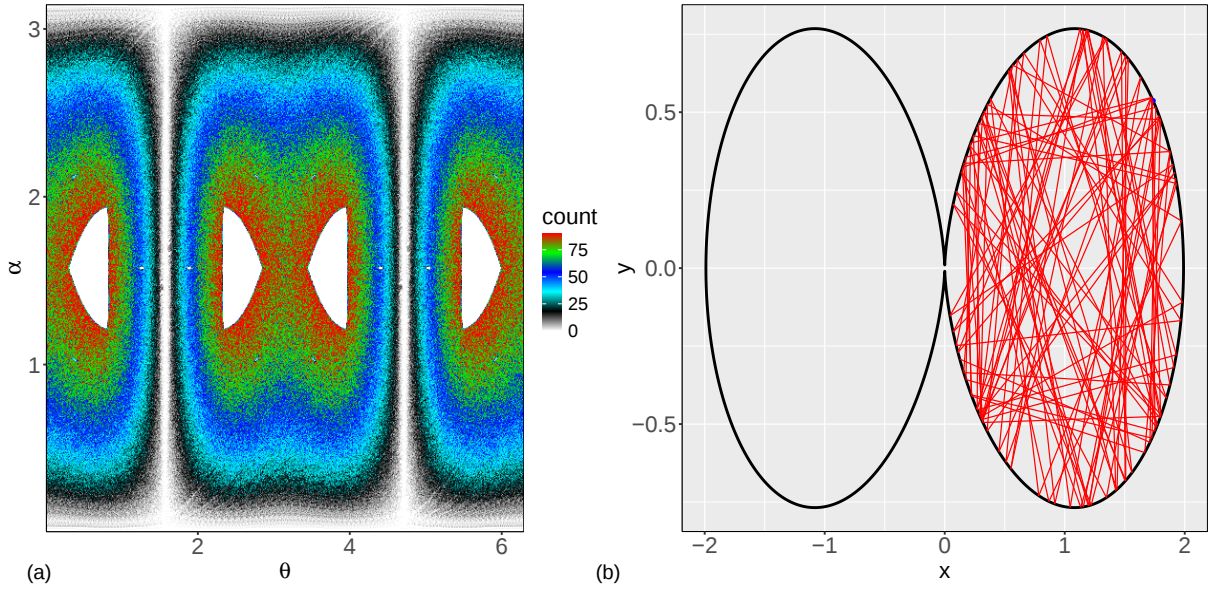


Figura 4.5: Em (a), uma única órbita caótica iterada até 10^7 vezes para $\epsilon = 0,99$, $p = 2$, $\theta_n = 0,3$ e $\alpha_n = 1,9$. Em (b), a mesma simulação exibindo a trajetória caótica, iterada 100 vezes.

A Figura 4.6 (a) apresenta uma simulação com os parâmetros $\epsilon = 0,2$, $p = 2$, $\theta_n = 0,3$ e $\alpha_n = 1,9$. O eixo θ é dividido em 10.000 intervalos igualmente espaçados, e cada vez que a órbita atinge um desses intervalos, contamos quantas vezes ele visita esse intervalo. A simulação envolve uma partícula atingindo o limite do bilhar 10^6 vezes. Os dados resultantes são mostrados como um histograma laranja na Figura 4.6 (a), enquanto a curva preta representa uma média móvel com um tamanho de janela de $k = 100$.

Observe que em $\theta = 0$, $\theta = \pi$ e $\theta = 2\pi$, o histograma exibe locais máximos, correspondendo as posições dos pontos fixos elípticos, conforme mostrado na Figura 4.3 (a). Em contraste, em $\theta = \pi/2$ e $\theta = 3\pi/2$, o histograma mostra mínimos locais, correspondentes às localizações dos pontos fixos hiperbólicos, que são instáveis.

A Figura 4.6 (b) mostra histogramas para diferentes valores de ϵ : 0,2, 0,21, 0,35, 0,5, 0,7 e 0,99. Como ϵ se aproxima de 1, o mínimo em $\theta = \pi/2$ diminui e se aproxima de zero,

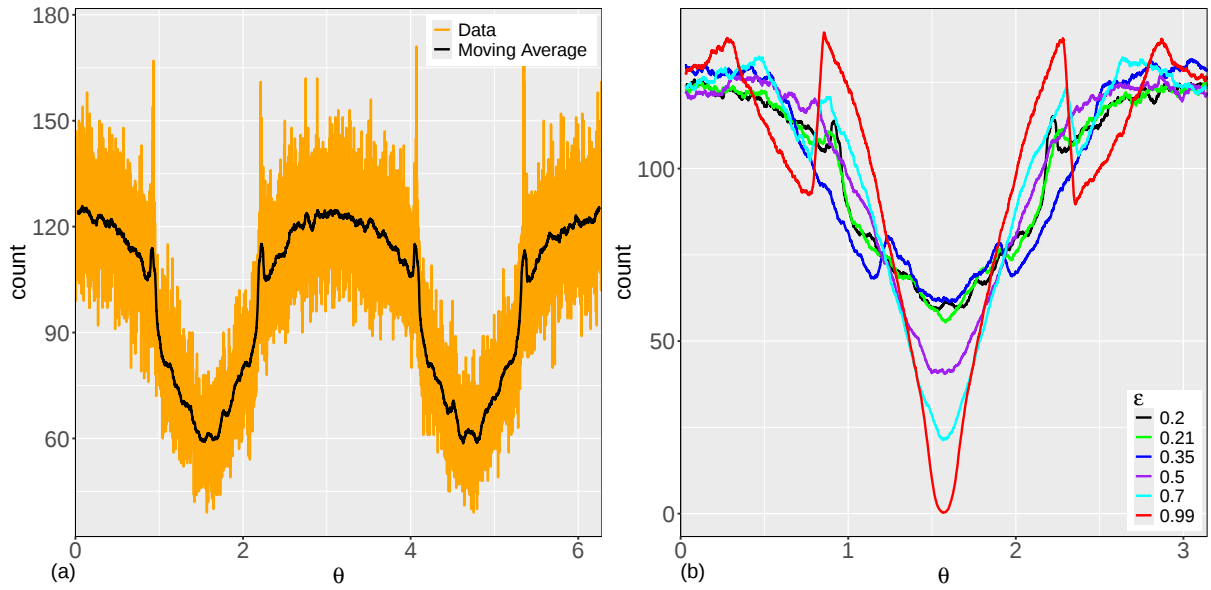


Figura 4.6: (a) Uma órbita caótica é iterada até 10^6 vezes usando o seguinte parâmetro conjunto: $\epsilon = 0,2$, $p = 2$, $\theta_n = 0,3$ e $\alpha_n = 1,9$. O eixo θ é dividido em 10.000 intervalos igualmente espaçados, e cada vez que a órbita atinge um desses intervalos, contamos o número de vezes que ela visita esse intervalo. (b) A mesma simulação de (a) é mostrada, mas com valores diferentes de ϵ , especificamente 0,2, 0,21, 0,35, 0,5, 0,7 e 0,99.

indicando que esta região é raramente visitada. Isto é consistente com a observação na Figura 4.5 (a), onde o espaço de fase se torna mais fragmentado à medida que ϵ aumenta.

4.2.2 Taxa de Fuga

Considere a Figura 4.5 (b) como um exemplo de referência. Como mencionado anteriormente, 100 iterações foram insuficientes para permitir que a partícula faça a transição do lado direito ($x > 0$) do bilhar para o lado esquerdo ($x < 0$). Na simulação a seguir, calculamos o número de colisões M que uma partícula sofre antes de cruzar a linha vertical em $x = 0$. Neste ponto, a partícula é considerada como tendo escapado, se movendo da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda. Um histograma da contagem de colisão η em função de M é então construído para órbitas caóticas iteradas até 10^8 vezes.

A Figura 4.7 (a) apresenta o histograma para diferentes valores do parâmetro de controle ϵ , especificamente ϵ iguais a 0,5, 0,6, 0,7, 0,8, 0,9, 0,95 e 0,99. O histograma é plotado em uma escala logarítmica ao longo do eixo η e escala linear ao longo do eixo M . Para facilitar a interpretação desses dados, redimensionamos o eixo vertical, normalizando-o em relação ao valor máximo, produzindo uma frequência normalizada $F = \eta(M) / \max(\eta)$.

O histograma redimensionado é mostrado na Figura 4.7 (b).

Conforme observado, aumentando o valor de ϵ resulta em uma transição do histograma de redimensionamento de uma curva em $\epsilon = 0,5$ até linhas quase retas para $\epsilon > 0,8$. Essas linhas permanecem em uma escala logarítmica versus escala linear, que sugere um comportamento de declínio exponencial. Especificamente, a curva marrom, após o ajuste, é descrita pela seguinte expressão:

$$F = 0,46927 \cdot e^{(-0,0074796M)} \quad (4.1)$$

Este comportamento de decaimento exponencial indica que a partícula experimenta um número crescente de colisões antes de escapar de uma região para outra, com o número de acertos M necessários para escapar crescendo à medida que ϵ aumenta. Notavelmente, o coeficiente linear para $\epsilon = 0,99$ é maior do que para os outros valores de ϵ , sugerindo que escapar pelo orifício em $x = 0$ se torna progressivamente mais difícil à medida que $\epsilon \rightarrow 1$.

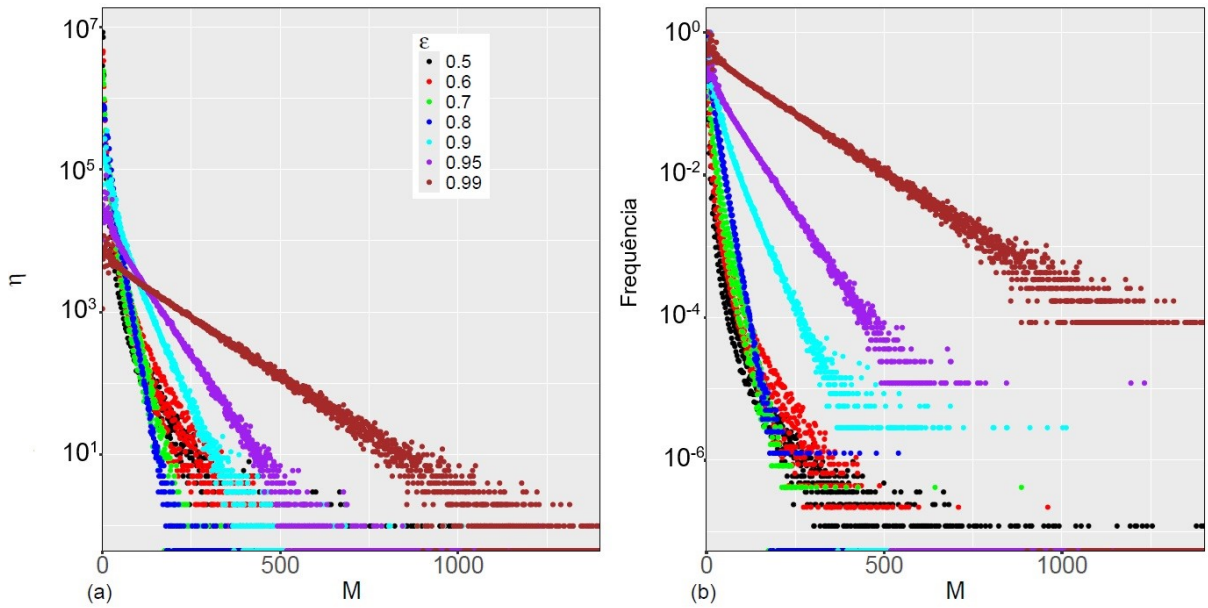


Figura 4.7: M representa o número de acertos no limite do bilhar antes da partícula escapar pelo orifício em $X = 0$ (veja a Figura 4.5 (b) para detalhes). Em (a), mostramos o histograma η , que representa o número de ocorrências de cada valor M , ou seja, a contagem de diferentes acertos com o limite. O item (b) apresenta gráfico semelhante, mas com redimensionamento do eixo vertical, onde $\text{Frequência} = \eta(M) / \max(\eta)$.

4.2.3 Resultados para o plano $S_1 - S_0$

Para entender melhor os conceitos apresentados nesta seção, nos referimos à Figura 4.8. Cada vez que trajetória cruza a linha horizontal ($Y = 0$), calculamos o ponto de interseção ao longo do eixo X e calculamos o valor de S, que representa a distância da borda esquerda do bilhar (nosso ponto de referência) até o ponto de interseção. Para $p = 2$, a posição esquerda do bilhar é dada por $X_{esquerda} = R(\theta = \pi) = -1 - \epsilon$. Definimos S_0 como a primeira interceptação que ocorre quando a partícula começa da posição inicial (X_0, Y_0) . A interceptação subsequente é rotulada como S_1 . Depois de salvar este ponto, atualizamos a referência definindo $S_0 = S_1$ e calculamos a próxima interceptação, que agora chamamos de S_1 . Este procedimento define um mapeamento onde traçamos o novo valor de S *versus* o anterior.

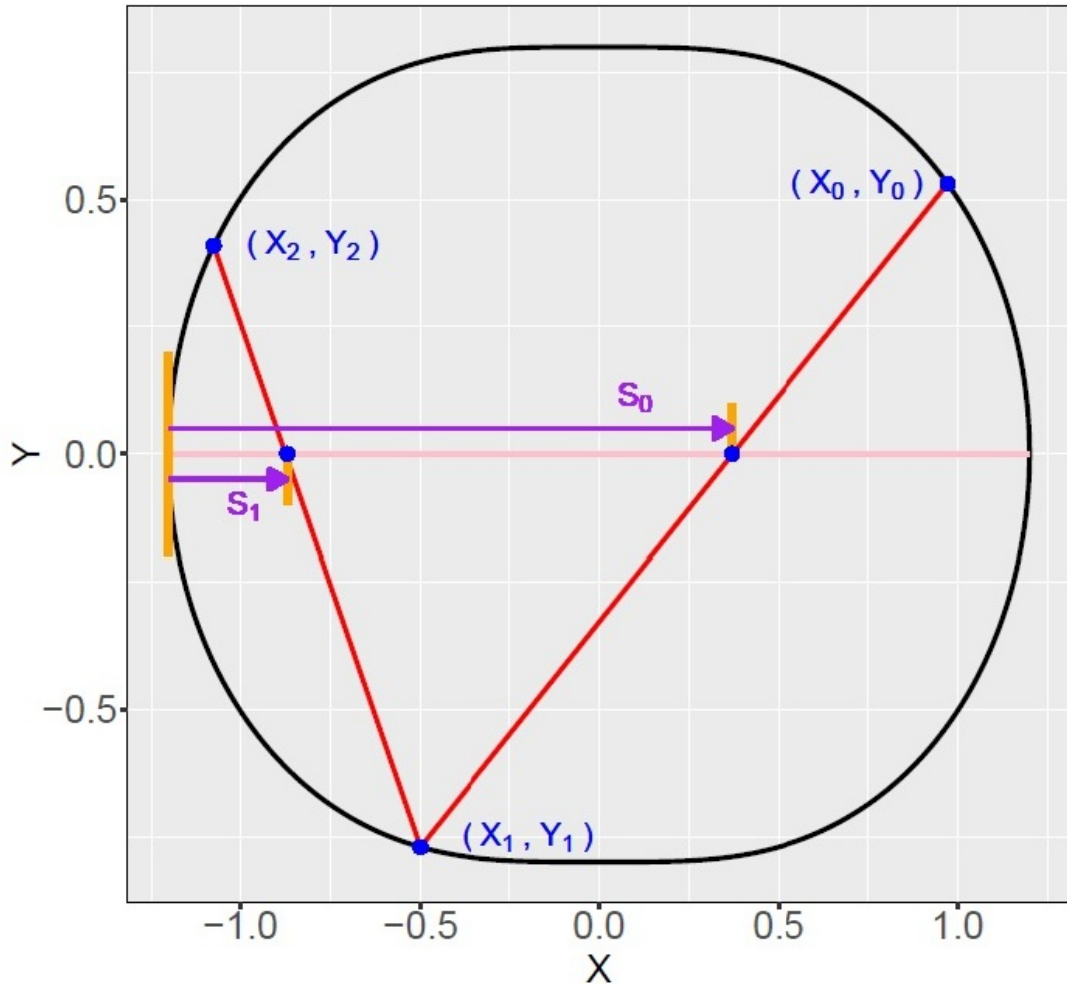


Figura 4.8: Referente a 4.1 (b), as interseções com o eixo horizontal ocorre primeiro em S_0 , seguido pela segunda em S_1 .

Agora dividimos os eixos S_0 e S_1 em intervalos de 500 por 500 igualmente espaçados, resultando em uma grade de retângulos de 500×500 . Para cada retângulo, contamos o número de vezes que uma partícula visita aquela região específica do plano $S_1 - S_0$, construindo assim a distribuição de densidade para cada célula. Esse procedimento é repetido para órbitas iteradas até N vezes.

Todos os resultados nesta seção são baseados no seguinte conjunto de parâmetros: $p = 2$, $\theta_0 = 0,3$ e $\alpha_0 = 1,9$. Começamos mostrando os resultados na Figura 4.9, onde definimos $\epsilon = 0,2$, para todos os painéis.

A Figura 4.9 (a) mostra a distribuição de densidade no plano $S_1 - S_0$. A densidade é representada usando uma paleta de cores que varia de branco (correspondendo a uma contagem de 0) a preto, ciano, azul, verde e termina em vermelho (representando o valor máximo de contagem). As regiões que se aproximam do vermelho indicam áreas que recebem um elevado número de visitas no plano $S_1 - S_0$.

As linhas laranja L_1 e L_2 na Figura 4.9 (a) destacam as principais simetrias dentro do plano $S_1 - S_0$. Especificamente, a linha L_1 representa a linha identidade, onde $S_0 = S_1$. A linha L_2 conecta os pontos $(S_0, S_1) = (0, 2 + 2\epsilon)$ e $(S_0, S_1) = (2 + 2\epsilon, 0)$, onde $2 + 2\epsilon$ corresponde ao valor máximo de S , representando a distância entre as bordas esquerda e direita do bilhar (conforme ilustrado na Figura 4.8).

Vale ressaltar que a intersecção das linhas L_1 e L_2 marca o centro de uma ilha periódica. Esta estrutura periódica também foi observada na Figura 4.3 (a) para o plano $\alpha - \theta$, mas no contexto atual, o espaço está distorcido como visto na Figura 4.9 (a). A Figura 4.9 (b) fornece um zoom da Figura 4.9 (a), destacando a linha L_1 e mostrando que os centros de algumas regiões periódicas ficam ao longo desta linha laranja. Quando $S_0 \approx 0,725$, a paleta de cores muda para vermelho, indicando alta densidade de visitas. À medida que a partícula se move à direita da linha, a densidade diminui e a cor muda para o azul.

A Figura 4.9 (c) apresenta um zoom da Figura 4.9 (a), revelando um comportamento altamente complexo que não é aparente na Figura 4.3 (a) para o plano $\alpha - \theta$. A distorção introduzida pela transformação do plano $S_1 - S_0$ foi suficiente para destacar a presença de dinâmicas intrincadas nas órbitas caóticas. Movendo-se ao longo da linha L_2 , a paleta de

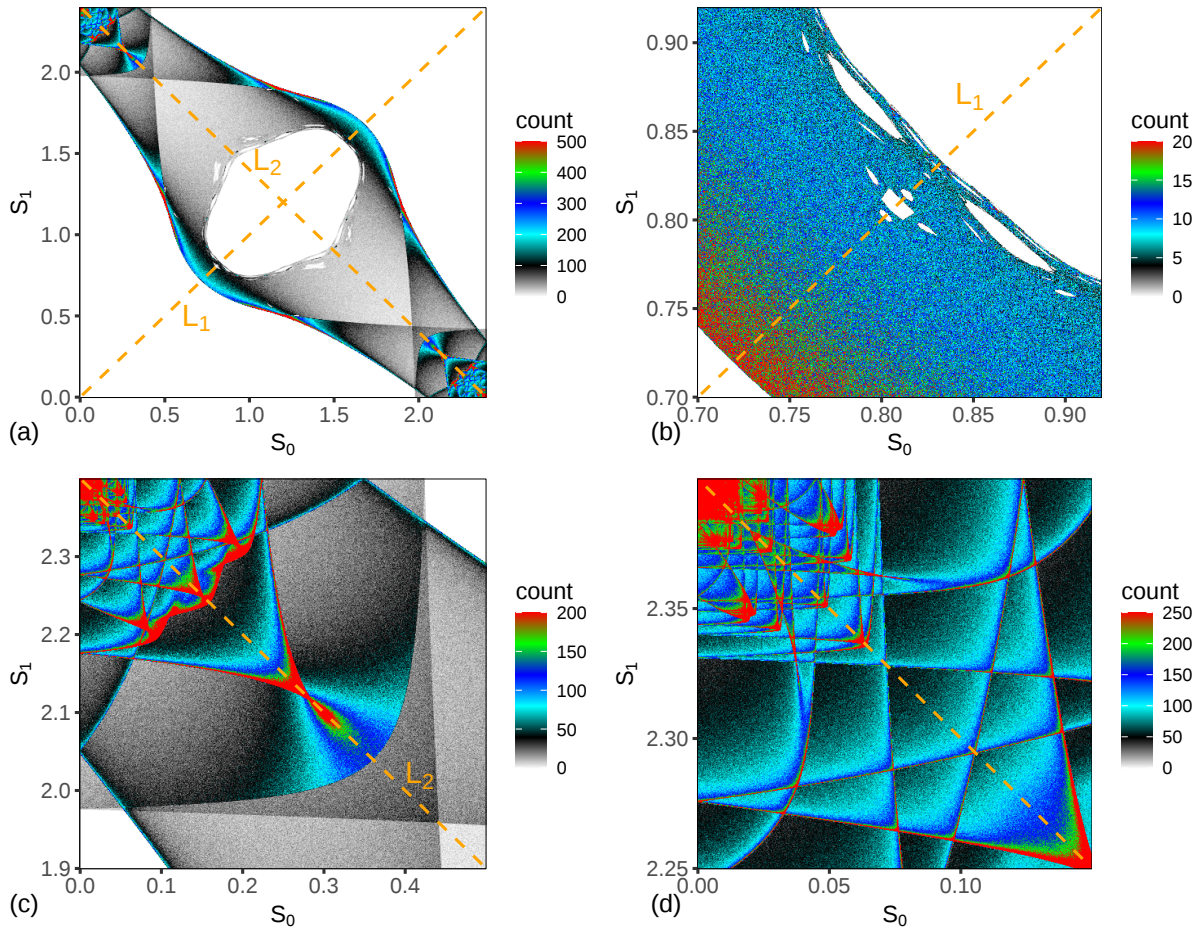


Figura 4.9: Para o conjunto de parâmetros $\epsilon = 0,2$, $p = 2$, $\theta_n = 0,3$ e $\alpha_n = 1,9$, plotamos S_1 versus S_0 . A linha L_1 representa a linha identidade, que atua como eixo de simetria da figura, onde $S_0 = S_1$. A linha L_2 conecta os pontos $(S_0, S_1) = (0, 2 + 2\epsilon)$ e $(S_0, S_1) = (2 + 2\epsilon, 0)$. As cores no gráfico representa a frequência (contagem) com a qual a órbita caótica visita regiões no espaço $S_0 S_1$. Os itens (b), (c) e (d) mostram diferentes seções ampliadas do gráfico em (a).

cores muda abruptamente, exibindo máximos e mínimos, indicando variações significativas na densidade de visitas.

A Figura 4.9 (d) fornece um aumento adicional da Figura 4.9 (c), onde o comportamento complexo se torna mais pronunciado quando S_0 se aproxima de 0.

Aumentamos agora o valor do parâmetro de controle ϵ , examinando o plano $S_1 - S_0$ para $\epsilon = 0,21$ Figura 4.10 (a). Como pode ser visto, uma grande ilha periódica permanece centrada na intersecção das linhas L_1 e L_2 . Além disso, ilhas periódicas menores aparecem ao redor da ilha principal, também notáveis no plano $\alpha - \theta$ na Figura 4.3 (c).

A Figura 4.10 (b) mostra os resultados para $\epsilon = 0,35$. Aqui, a principal ilha periódica na intersecção das linhas L_1 e L_2 desaparece, indicando que o ponto fixo correspondente

perde sua estabilidade linear e torna-se instável. Observa-se uma bifurcação de duplicação de período, com duas novas ilhas periódicas emergindo da ilha destruída. Ambas as novas ilhas estão centradas ao longo da linha L_1 (a linha de identidade). Esta bifurcação de duplicação de período também é evidente na Figura 4.3 (d).

Para $\epsilon = 0,5$, mostrado na Figura 4.10 (c), considera-se que o sistema apresenta comportamento análogo ao visto no plano $\alpha - \theta$ na Figura 4.4 (a). Neste valor de ϵ , as duas ilhas periódicas quase desaparecem, e o espaço de fase torna-se quase totalmente caótico. Observamos que o comportamento complexo próximo de $S_0 \rightarrow 0$ e $S_1 \rightarrow 2 + 2\epsilon$ começa a se dissipar, tornando-se menos pronunciado. As estruturas observadas na Figura 4.9 (d) parecem migrar para diferentes regiões do plano $S_1 - S_0$. Esta migração é ainda mais acentuada quando ϵ é aumentado para 0,7, conforme mostrado na Figura 4.10 (d).

Finalmente, consideramos o caso limite onde $\epsilon \rightarrow 1$. Os resultados para $\epsilon = 0,99$ são apresentados em Figura 4.11 (a). Neste valor, o comportamento complexo observado perto de $S_0 \rightarrow 0$ e $S_1 \rightarrow 2 + 2\epsilon$ desaparece completamente e não podemos observar estruturas centradas na linha L_2 .

A Figura 4.11 (b) apresenta uma seção ampliada do gráfico mostrado na Figura 4.11 (a), onde S_0 e S_1 são restritos ao intervalo $[0,2]$. Conforme mostrado, uma ilha periódica está centrada na linha L_1 . Na Figura 4.11 (c), onde o foco está na região com $S_0 \in [0; 0,46]$ e $S_1 \in [1,2; 2,02]$, o comportamento complexo torna-se mais aparente, com certas áreas apresentando alta densidade de pontos ao longo da fronteira, que são representados em vermelho.

Ampliando a Figura 4.11 (c), onde a região de interesse é $S_0 \in [0, 0.1]$ e $S_1 \in [1.9, 2.01]$, estruturas complexas exibem um padrão, com sucessivas ampliações revelando estruturas semelhantes que se repetem regularmente, Figura 4.11 (d). Em teoria, continuando a ampliar estas estruturas poderemos encontrar semelhança a um padrão fractal [64]. Padrão fractal este que poderá ter características de auto-similaridade ou auto-afim, como definimos anteriormente. Mais investigações são necessárias para compreender completamente os mecanismos subjacentes e as razões para a existência de fronteiras que separam estas estruturas distintas.

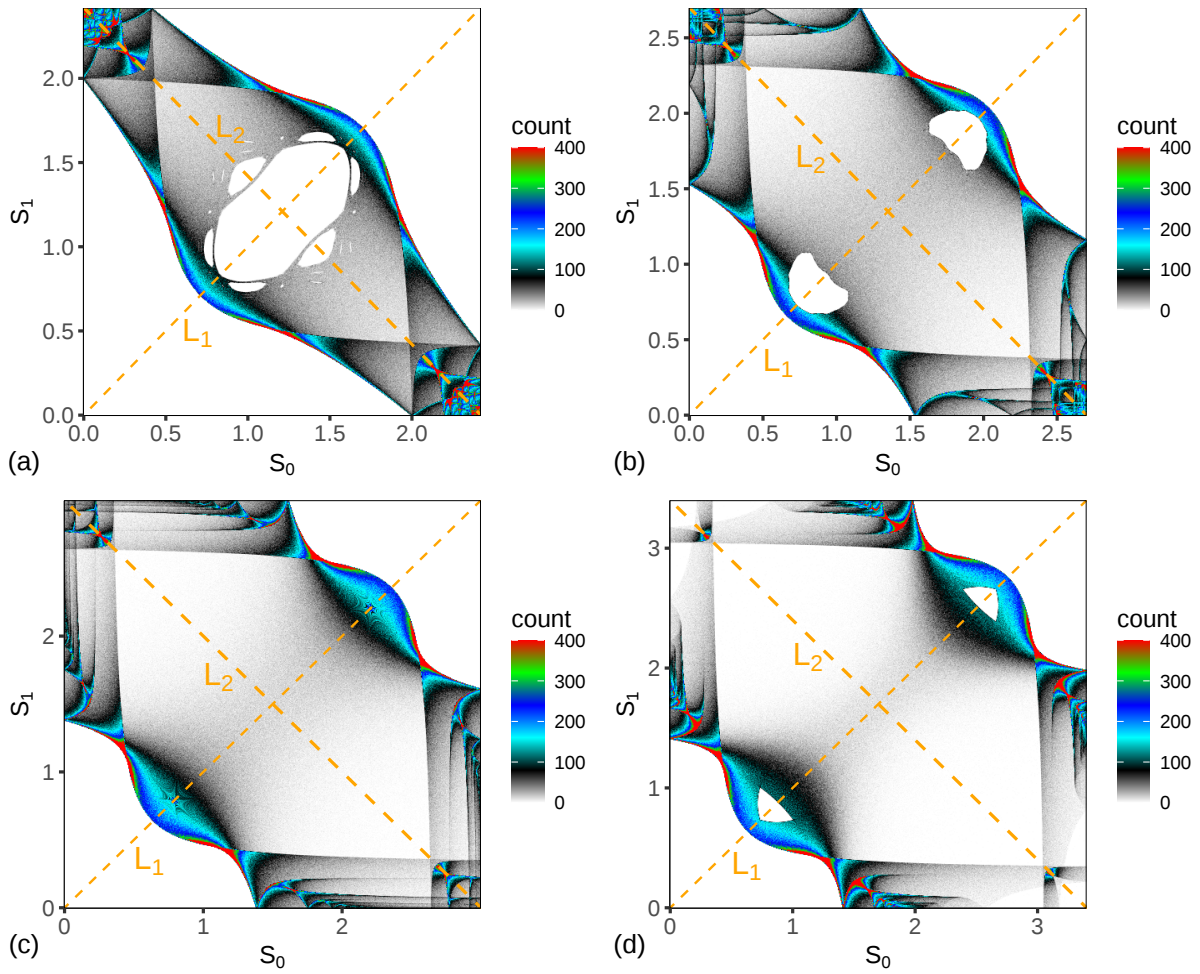


Figura 4.10: Para o conjunto de parâmetros $p = 2$, $\theta_n = 0,3$ e $\alpha_n = 1,9$, plotamos S_1 versus S_0 para diferentes valores de ϵ . Em (a) $\epsilon = 0,21$, (b) $\epsilon = 0,35$, (c) $\epsilon = 0,5$ e (d) $\epsilon = 0,7$. As cores no gráfico representa a frequência (contagem) com a qual a órbita caótica visita regiões no espaço $S_0 S_1$.

Como primeiro exemplo de sistemas exibindo o padrão auto-similaridade, destacamos o trabalho abordando reflexões múltiplas de partículas clássicas confinadas em um poço de potencial dependente do tempo [65, 66]. Este sistema é descrito por um mapeamento bidimensional, que é fundamentalmente diferente do nosso sistema de bilhar. Neste estudo, os autores demonstram que existe um conjunto de curvas contínuas que separam regiões no plano da fase de energia, onde ocorrem múltiplas reflexões, representando um evento raro no espaço de fase dinâmico.

Padrões auto-similares também foram observados no bilhar em forma de cogumelo com chapéu inclinado [67]. O bilhar Cogumelo é normalmente formado por um chapéu semicircular preso a uma haste retangular. No citado trabalho, os autores introduzem uma

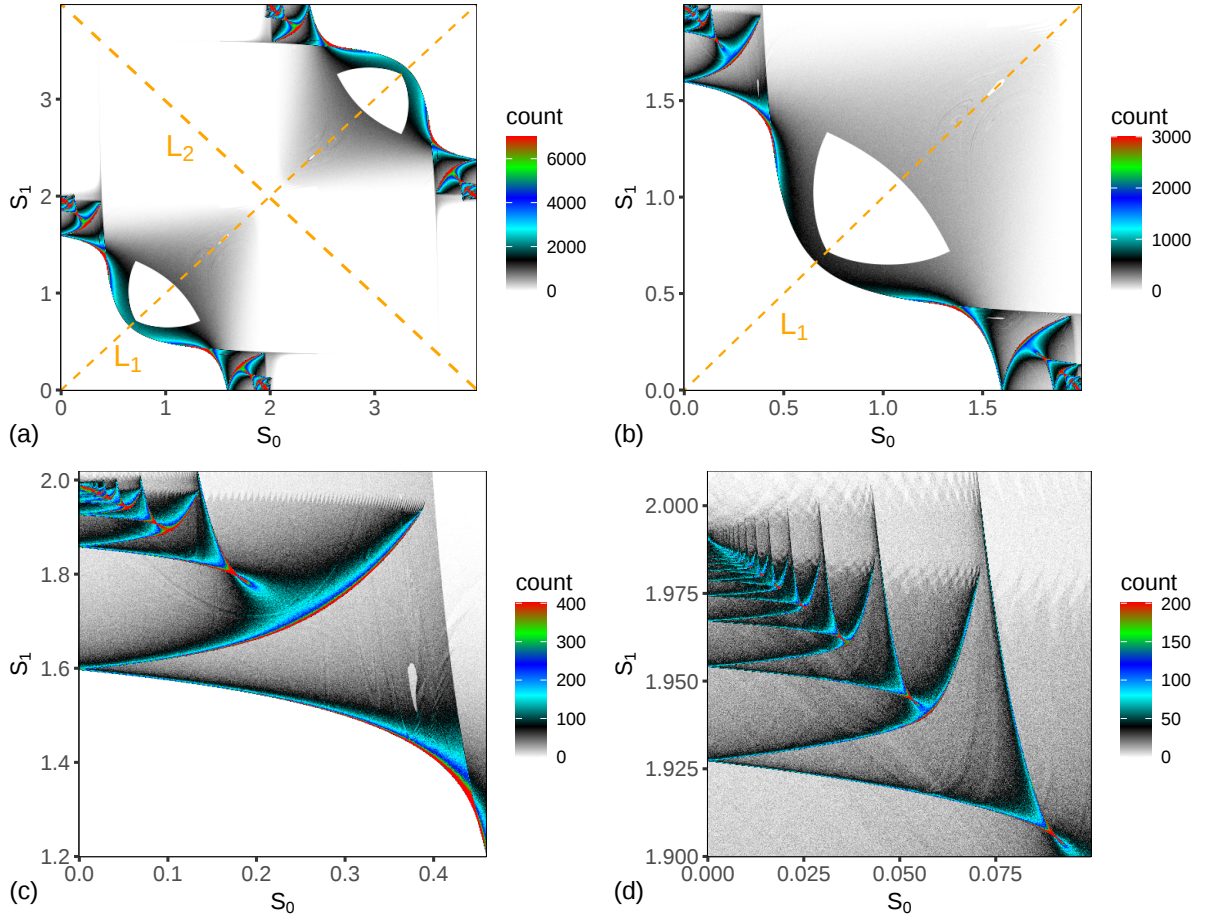


Figura 4.11: Para o conjunto de parâmetros $\epsilon = 0,99$, $p = 2$, $\theta_n = 0,3$ e $\alpha_n = 1,9$ plotamos S_1 versus S_0 . As cores no gráfico representam a frequência (contagem) com que a órbita caótica visita regiões no espaço S_0S_1 . Os itens (b), (c) e (d) mostram diferentes seções ampliadas do gráfico em (a).

inclinação do chapéu, resultando em uma mistura altamente não trivial (ou seja, não-KAM) de seu espaço de fase. Para pequenas inclinações, o espaço de fase exibe uma estrutura hierárquica semelhante a uma teia. Embora esse sistema tenha dinâmicas distintas, ele ainda exibe possíveis estruturas auto-similares observadas em nosso sistema de bilhar.

Finalmente, consideramos o modelo Fermi-Ulam, que envolve uma partícula pontual submetida a colisões entre duas paredes rígidas, uma das quais é fixa enquanto a outra oscila periodicamente no tempo [68]. Os autores mostram que as estruturas emergentes de múltiplas colisões exibem características fractais e auto-similaridade, muito semelhante aos padrões encontrados em nosso sistema de bilhar.

CAPÍTULO 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS

Neste trabalho, analisamos o comportamento de uma partícula sob a influência de um parâmetro adiabático, que governa a transferência de energia durante cada colisão. Os resultados demonstraram que o parâmetro adiabático não só controla a troca de energia, onde a partícula pode ganhar ou perder energia por meio de uma interação oscilatória, mas também altera fundamentalmente a estrutura e a dinâmica do espaço de fase da partícula.

A variação do parâmetro adiabático introduz uma gama diversificada de regimes dinâmicos. Para determinados valores, a partícula pode atingir um estado "congelado", caracterizado pela velocidade ($V_N = 0$), onde o sistema para estar em uma configuração estática. Em contraste, outras regiões do espaço de parâmetros levam a comportamentos difusivos, com a partícula exibindo subdifusão ou movimento superdifusivo. A fronteira entre estes regimes difusivos possui propriedades fractais, refletindo a estrutura intrincada e auto-semelhante do espaço de fase e indicando uma dependência sensível das condições iniciais e escolhas de parâmetros. Além disso, o espaço de fase revela-se misto, combinando regiões de movimento regular com regiões caóticas. Isto é confirmado pelo cálculo do expoente de Lyapunov, que indica a presença de ambos, caoticidade e regularidade.

Nas regiões onde os expoentes de Lyapunov são positivos, o sistema exibe um comportamento caótico, caracterizado pela sensibilidade às condições iniciais e divergência exponencial de trajetórias próximas. Por outro lado, regiões com expoentes de Lyapunov negativos sugerem movimento estável e previsível, marcando uma distinção clara entre dinâmicas ordenadas e caóticas dentro do sistema.

Além disso, a variação do parâmetro adiabático induz uma transição de um sistema de um mapa *twist*, para um sistema de mapa não *twist*. Avaliamos também a transmissividade da partícula através do espaço de fase e notamos que para $z > 1$, a transmissão ocorre praticamente independente do valor de $\bar{\zeta}$. Mas quando o valor de $\bar{\zeta}$ assume valores mais elevados, temos uma aumento da dinâmica caótica tendo assim maior transmissividade no espaço de fase. Nossas descobertas indicam que, dependendo da escolha específica dos parâmetros, o espaço de fase pode ser totalmente acessível, permitindo que a partícula explore todo o espaço, ou parcialmente acessível, onde certas regiões se tornam dinamicamente inacessíveis. Este acesso restrito em certos regimes de parâmetros introduz barreiras no espaço de fase, confinando o movimento da partícula e limitando a gama de possíveis resultados.

Em conclusão, a interação entre o parâmetro adiabático e a dinâmica da partícula cria um complexo e sistema rico, onde mecanismos de troca de energia, comportamentos difusivos, dinâmicas caóticas e regulares, e a transição de *twist* para não *twist* contribuem para uma situação altamente espaço de fase estruturado. O estudo fornece informações importantes sobre como os parâmetros de controle sensíveis podem alterar significativamente a dinâmica global e local de um sistema, com implicações para compreender fenômenos semelhantes em outras áreas físicas, governados por processos adiabáticos. Exploramos o surgimento de novas estruturas no espaço de fase “distorcido” de um bilhar oval. Demonstramos como o espaço de fase evolui ao mudar o controle parâmetro ϵ , que apresenta bifurcações distintas, levando à formação de padrões intrincados. Essas observações destacam o comportamento complexo e fractal do sistema, sugerindo que a dinâmica subjacente exibe um comportamento de auto-similaridade ou auto-afinidade em diferentes escalas.

Ao fazer comparações com outros sistemas que apresentam fenômenos semelhantes,

como o sistema múltiplo reflexões em um poço de potencial dependente do tempo, o bilhar de cogumelo com chapéu inclinado e o Fermi-Ulam modelo, mostramos que as estruturas observadas em nosso sistema de bilhar não são únicas, mas compartilham características comuns com outros sistemas que exibem dinâmicas complexas, incluindo múltiplas colisões e estruturas espaciais de fase não triviais.

Realizando alterações no parâmetro de controle da fronteira do sistema, visitamos um novo bilhar, o qual chamamos de bilhar lemniscata. Mostramos que, à medida que o parâmetro de controle aumenta, a taxa de escape decai exponencialmente, pois a partícula encontra dificuldade em atravessar de um lado para o outro devido à geometria do sistema. Nas primeiras 100 iterações conseguimos comprovar, uma vez que não houve passagem de um lado para o outro da partícula. Calculamos a taxa de fuga da partícula no bilhar lemniscata para diferentes valores do parâmetro de controle ϵ e vimos, através do histograma, que para uma iterada de 10^8 vezes o comportamento de decaimento exponencial indica que a partícula experimenta um número crescente de colisões antes de escapar de uma região para outra; temos que o coeficiente linear para $\epsilon = 0,99$ é maior do que para os outros valores de ϵ , sugerindo que escapar pelo orifício se torna progressivamente mais difícil à medida que $\epsilon \rightarrow 1$.

Como perspectivas, no modelo *Bouncer* "modificado", pretendemos desenvolver ainda mais o estudo, estabelecendo uma conexão com a termodinâmica, através da definição e análise da entropia do sistema, que deverá oferecer uma perspectiva física do modelo. Ao integrar o conceito de entropia, o estudo visa aprimorar o conhecimento teórico e oferecer novas informações sobre o comportamento do sistema sob condições termodinâmicas. Apresentamos um gráfico que nos mostra regiões onde a fase congelada transita para a fase difusiva e que para comprovar uma possível transição de fase no sistema precisamos de algumas análises como parâmetro de ordem, suscetibilidade magnética, energia livre, simetria expoentes críticos e classes de universalidade dentre outros uma transição de primeira ou segunda ordem. Investigar os padrões auto-similaridade ou auto-afinidade e o comportamento fractal observados no bilhar lemniscata para compreender os mecanismos que dão origem a essas estruturas. Aprofundar na metodologia da definição de bifurcação,

uma vez que acreditamos estar em mãos de uma abordagem nova para esse sistema de bilhar. Em geral, a natureza das fronteiras que separam diferentes regiões no espaço de fase permanece uma questão em aberto. Estudos futuros poderiam explorar a conexão entre essas novas estruturas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Luiz Henrique Alves Monteiro. *Sistemas dinâmicos*. Editora Livraria da Física, 2002.
- [2] Robert Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*. CRC press, 2018.
- [3] Trachette Jackson and Ami Radunskaya. *Applications of dynamical systems in biology and medicine*, volume 158. Springer, 2015.
- [4] Steven H Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. CRC press, 2018.
- [5] Robert L Devaney. *A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment*. CRC Press, 2018.
- [6] Henri Poincaré. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, volume 3. Gauthier-Villars et fils, 1899.
- [7] George D Birkhoff. On the periodic motions of dynamical systems. In *Hamiltonian Dynamical Systems*, pages 154–174. CRC Press, 2020.
- [8] Andrey Nikolaevich Kolmogorov. On conservation of conditionally periodic motions for a small change in hamilton’s function. In *Dokl. akad. nauk Sssr*, volume 98, pages 527–530, 1954.

-
- [9] Stephen Smale. Differentiable dynamical systems. *Bulletin of the American mathematical Society*, 73(6):747–817, 1967.
- [10] Edward N Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of atmospheric sciences*, 20(2):130–141, 1963.
- [11] Mitchell J Feigenbaum. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *Journal of statistical physics*, 19(1):25–52, 1978.
- [12] James L Kaplan and James A Yorke. Preturbulence: a regime observed in a fluid flow model of lorenz. *Communications in Mathematical Physics*, 67:93–108, 1979.
- [13] Boris V Chirikov. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Physics reports*, 52(5):263–379, 1979.
- [14] Robert M May. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261(5560):459–467, 1976.
- [15] Edward Ott. *Chaos in dynamical systems*. Cambridge university press, 2002.
- [16] Allan J Lichtenberg and Michael A Lieberman. *Regular and stochastic motion*, volume 38. Springer Science & Business Media, 2013.
- [17] James G Berryman. Evolution of a stable profile for a class of nonlinear diffusion equations with fixed boundaries. *Journal of mathematical physics*, 18(11):2108–2115, 1977.
- [18] Xin Yu and David M Leitner. Anomalous diffusion of vibrational energy in proteins. *The Journal of chemical physics*, 119(23):12673–12679, 2003.
- [19] Hans Fischer. *A history of the central limit theorem: from classical to modern probability theory*, volume 4. Springer, 2011.
- [20] Jean Baptiste Joseph Baron Fourier et al. *The analytical theory of heat*. Courier Corporation, 2003.

- [21] Robert Brown. Xxvii. a brief account of microscopical observations made in the months of june, july and august 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. *The philosophical magazine*, 4(21):161–173, 1828.
- [22] Jaime Wisniak. Thomas graham. ii. contributions to diffusion of gases and liquids, colloids, dialysis, and osmosis. *Educación Química*, 24:506–515, 2013.
- [23] Angel Akio Tateishi. *Desenvolvimento do conceito de difusão: de Fourier ao Modelo de Pente*. PhD thesis, Universidade Estadual de Maringá (UEM), Maringá, PR, 09 2010.
- [24] Jean Philibert. One and a half century of diffusion: Fick, einstein before and beyond. *Journal for the Basic Principles of Diffusion Theory, Experiment and Application*, 2006.
- [25] Bernard Pourprix and Robert Locqueneux. Adolf fick (1829-1901) et la diffusion liquide: l’alliance entre une pratique scientifique et une philosophie idéaliste. *Fundamenta scientiae*, 8(2):147–171, 1987.
- [26] Adolf Fick. Ueber diffusion. *Annalen der physik*, 170(1):59–86, 1855.
- [27] Albert Einstein. *Investigations on the Theory of the Brownian Movement*. Courier Corporation, 1956.
- [28] Lewis Fry Richardson. Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 110(756):709–737, 1926.
- [29] Athanasios Papoulis. *Random variables and stochastic processes*. McGraw Hill, 1965.
- [30] Ana Laura Boscolo. *Processos difusivos e influência termodinâmica em variações do modelo Bouncer*. PhD thesis, Universidade Estadual Paulista (Unesp), Rio Claro, SP, 05 2024.

-
- [31] Ralf Metzler, Eli Barkai, and Joseph Klafter. Anomalous diffusion and relaxation close to thermal equilibrium: A fractional fokker-planck equation approach. *Physical review letters*, 82(18):3563, 1999.
- [32] Raj Kumar Pathria. *Statistical Mechanics: International Series of Monographs in Natural Philosophy*, volume 45. Elsevier, 2017.
- [33] Kerson Huang. *Statistical mechanics*. John Wiley & Sons, 2008.
- [34] Edson Denis Leonel. *Invariância de escala em sistemas dinâmicos não lineares*. Editora Blucher, 2019.
- [35] André LP Livorati, Tiago Kroetz, Carl P Dettmann, Iberê Luiz Caldas, and Edson D Leonel. Stickiness in a bouncer model: A slowing mechanism for fermi acceleration. *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 86(3):036203, 2012.
- [36] J-Y Chastaing, Eric Bertin, and J-C Géminard. Dynamics of a bouncing ball. *American Journal of Physics*, 83(6):518–524, 2015.
- [37] Shiuan-Ni Liang and Boon Leong Lan. Newtonian versus general-relativistic prediction for the trajectory of a bouncing ball system. *Results in Physics*, 1(1):36–39, 2011.
- [38] Ana Laura Boscolo, Valdir Barbosa da Silva Junior, and Luiz Antonio Barreiro. Normal and anomalous diffusion in a bouncing ball over an irregular surface. *Physical Review E*, 107(4):045001, 2023.
- [39] Fabio Cecconi, Giulio Costantini, Alessandro Taloni, and Angelo Vulpiani. Probability distribution functions of sub-and superdiffusive systems. *Physical Review Research*, 4(2):023192, 2022.
- [40] Sílvia RA Salinas. *Introdução à física estatística*. Edusp, 1999.
- [41] John M Hitchcock. *Effective fractal dimension: foundations and applications*. Iowa State University, 2003.

-
- [42] Joelson Dayvison Veloso Hermes. *Um estudo da localização das últimas curvas invariantes e de tempos característicos em mapeamentos Hamiltonianos bidimensionais*. PhD thesis, Universidade Estadual Paulista (Unesp), Rio Claro, SP, 11 2022.
- [43] Linda E Reichl and Linda E Reichl. Stochastic manifestations of chaos. *The Transition to Chaos: Conservative Classical Systems and Quantum Manifestations*, pages 474–485, 2004.
- [44] Ricardo de Lima Ribeiro. *Introdução à teoria KAM*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2008.
- [45] Frederick Reif. *Fundamentals of statistical and thermal physics*. Waveland Press, 2009.
- [46] George M Zaslavsky. *Hamiltonian chaos and fractional dynamics*. Oxford University Press, USA, 2005.
- [47] Alan Wolf, Jack B Swift, Harry L Swinney, and John A Vastano. Determining lyapunov exponents from a time series. *Physica D: nonlinear phenomena*, 16(3):285–317, 1985.
- [48] JP Eckmann and D Ruelle. Rev. mod. phys. *Rev. Mod. Phys*, 57(617), 1985.
- [49] Gabriel C Grime, Marisa Roberto, Ricardo L Viana, Yves Elskens, and Iberê L Caldas. Biquadratic nontwist map: a model for shearless bifurcations. *Chaos, Solitons & Fractals*, 169:113231, 2023.
- [50] Roberto Markarian. Bilhares. *A Hipótese Ergódica de Boltzmann. Matemática Universitária*, 29:45–74, 2000.
- [51] Serge Tabachnikov. *Geometry and billiards*, volume 30. American Mathematical Soc., 2005.
- [52] Nikolai Chernov and Roberto Markarian. *Chaotic billiards*. Number 127. American Mathematical Soc., 2006.

-
- [53] Yakov G Sinai. Dynamical systems with elastic reflections. *Russian Mathematical Surveys*, 25(2):137, 1970.
- [54] Leonid A Bunimovich. On ergodic properties of certain billiards. *Functional Analysis and Its Applications*, 8(3):254–255, 1974.
- [55] Matheus Hansen, Diogo Ricardo da Costa, Iberê L Caldas, and Edson D Leonel. Statistical properties for an open oval billiard: An investigation of the escaping basins. *Chaos, Solitons & Fractals*, 106:355–362, 2018.
- [56] Michael V Berry. Regularity and chaos in classical mechanics, illustrated by three deformations of a circular ‘billiard’. *European Journal of Physics*, 2(2):91, 1981.
- [57] Jean-Philippe Bouchaud and Pierre Le Doussal. Numerical study of a d-dimensional periodic lorentz gas with universal properties. *Journal of statistical physics*, 41:225–248, 1985.
- [58] Vjera Lopac, Ivana Mrkonjić, and Danko Radić. Chaotic dynamics and orbit stability in the parabolic oval billiard. *Physical Review E*, 66(3):036202, 2002.
- [59] Matheus Hansen Francisco. *Propriedades Estatísticas e Termodinâmicas de Bilhares Clássicos*. PhD thesis, Universidade de São Paulo (USP), São Paulo, SP, 07 2019.
- [60] Diego Fregolente Mendes de Oliveira. Bilhares dependentes do tempo: um mecanismo para suprimir aceleração de fermi. 2009.
- [61] Diego FM Oliveira and Edson D Leonel. On the dynamical properties of an elliptical–oval billiard with static boundary. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15(4):1092–1102, 2010.
- [62] Joel C Langer and David A Singer. Reflections on the lemniscate of bernoulli: The forty-eight faces of a mathematical gem. *Milan Journal of Mathematics*, 78:643–682, 2010.
- [63] Geniffer Pereira de Souza Luz et al. Curvas parametrizadas diferenciáveis: Parametrização de curvas planas e um teorema geral de classificação. 2016.

-
- [64] Benoit B Mandelbrot, Carl JG Evertsz, and Martin C Gutzwiller. *Fractals and chaos: the Mandelbrot set and beyond*, volume 3. Springer, 2004.
- [65] Flávio Heleno Graciano, Diogo Ricardo da Costa, Edson D. Leonel, and Juliano A. de Oliveira. Multiple reflections for classical particles moving under the influence of a time-dependent potential well. *Entropy*, 24(10), 2022.
- [66] Diogo R Da Costa, JA Méndez-Bermúdez, and Edson D Leonel. Scaling and self-similarity for the dynamics of a particle confined to an asymmetric time-dependent potential well. *Physical Review E*, 99(1):012202, 2019.
- [67] Diogo Ricardo da Costa, Matheus S. Palmero, J.A. Méndez-Bermúdez, Kelly C. Iarosz, José D. Szezech Jr, and Antonio M. Batista. Tilted-hat mushroom billiards: Web-like hierarchical mixed phase space. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 91:105440, 2020.
- [68] Diogo Ricardo da Costa, Mario R Silva, Edson D Leonel, and JA Méndez-Bermúdez. Statistical description of multiple collisions in the fermi-ulam model. *Physics Letters A*, 383(25):3080–3087, 2019.