





Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



OK

**Análise das Singularidades não Físicas ("espúrias") no
Espalhamento de Duas Partículas ($2 \rightarrow 2$) na
Eletrodinâmica Escalar (QED_4) Calibrada no Cone de
Luz**

Ricardo Martin Bentin Zacarias



Orientador

Prof. Dr. Alfredo Takashi Suzuki

Maio 1998

Dedicado ...

Para mi mejor amigo:

*J*esús de Nazaret.

Agradecimentos ...

... A Ga $\mathcal{B}$ rieLA, mi adorada esposa;
... und Ri $\mathcal{C}$ ardo $\mathcal{B}$ runO, mein kleiner und teurer Sohn.
... A los $\mathcal{B}$ ENTIN y a los $\mathcal{Z}$ ACARIAS.
... A turma do IF $\mathcal{T}$ (excluindo você).
... Aos LEitE.
... Aos professores A.T.Suzuki e B.M.Pimentel.
... A CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Estudar-se-á a possibilidade de se obter pólos de natureza “espúrea” para o caso dos espalhamentos de duas partículas, pólos esses originários do fator $(q.n)^{-1}$ presente no propagador do campo de gauge. Nosso laboratório de ensaios para esta análise será a Eletrodinâmica Escalar (QED_4) no gauge do cone de luz.

As singularidades características do gauge que aparecerem serão tratadas usando-se a prescrição causal, desenvolvida pelos professores A.T.Suzuki e B.M.Pimentel.

PALAVRAS-CHAVES : Espalhamento de partículas duas a duas.
Eletrodinâmica Escalar no gauge do cone de luz.
Singularidades não físicas.

Àrea de conhecimento: 1.05.03.00-5

Abstract

The possibility of obtaining spurious poles for the scattering amplitude of two particles will be studied, whose poles are due to the factor $(q.n)^{-1}$ present in the gauge field propagator. Our lab to test this will be Scalar Electrodynamics (QED_4) in the light-cone gauge.

The characteristic singularities of this gauge will be treated using the causal prescription, developed by professors A.T.Suzuki e B.M.Pimentel.

KEY WORDS : Scattering of particles two into two.
Scalar Quantum Electrodynamics.
Non-physical singularities.

Índice

Capítulo I: Introdução Geral. 1

1.1	Introdução.	1
	♣ Um pouco de história.	2
	♣ Em nossos dias.	3
1.2	Gauges.	3
	♣ Introdução.	3
	♣ Gauges não-covariantes, introdução.	6
1.3	Gauges não-covariantes.	7
	♣ Gauge Axial.	7
	♣ Gauge Planar.	9
	♣ Gauge do Cone de Luz.	9
	♣ Gauge Temporal.	10
1.4	Gauge do Cone de Luz.	11
	♣ O Gauge.	11
	♣ Coordenadas do cone de luz.	11

Capítulo II: Eletrodinâmica Escalar(QED₄) 15

2.1	Introdução.	15
	♣ Lagrangeana.	15
	♣ Regras de Feynmann.	16

2.2 O problema dos pólos $(q.n)^{-1}$	16
---	----

Capítulo III: Espalhamento ($2 \rightarrow 2$). 19

3.1 Espalhamento ($2 \rightarrow 2$).	19
♣ Dependência do gauge.	21
♣ Diagramas a calcular.	22
3.2 “Sea-Gull” Escalar.	23
♣ Resultados.	24
♣ Observações.	24
3.3 “Box ” Escalar.	24
♣ Resultados.	30
♣ Observações.	30
3.3 “Box” Escalar-Vetorial.	30
♣ Resultados.	31
♣ Observações.	32

Capítulo IV: Integrais no cone de luz. 33

1. Introdução.	33
2. Integrais Escalares.	34
♣ Integral E2	37
♣ Integral E3	39
3. Integrais Tensoriais.	41
♣ Integral T3_μ	43
♣ Integral T3_{μν}	44
♣ Integral T4_μ	46
♣ Integral T4_{μν}	47
♣ Integral T4_{μνγ}	48
3. Observações finais.	50

Capítulo V: Conclusões.	51
-------------------------	----

Apêndices.	53
------------	----

♠ Apêndice A: Gráficos 1PI, funções geradoras e afins.	53
♠ Apêndice B: Gauge do cone de luz sem fantasmas.	59
♠ Apêndice C: Prescrição causal.	65
♠ Apêndice D: Relações matemáticas usadas.	67
♠ Apêndice D: Integração em dimensão negativa.	71

Capítulo 1

Introdução Geral.

1.1 Introdução.

O objetivo desta monografia é estudar a possível dependência dos pólos da função de quatro pontos que vem do espalhamento de duas partículas para o caso de se fazer a escolha do gauge não-covariante do cone de luz.

A motivação para esse estudo se baseia no fato de que gauges não-covariantes induzem o aparecimento de pólos “espúrios” - singularidades não físicas- nas amplitudes de espalhamento. Tais singularidades devem ser convenientemente contornadas levando-se em conta o princípio físico básico da causalidade. A razão por que focalizamos essa análise na função de quatro pontos ao nível de um “loop” se deve ao fato de que as integrais associadas aos diagramas de Feynman nesses casos apresentam quatro propagadores covariantes, além do fator de gauge do tipo $(q.n)^{-1}$.

Nossa análise nos leva a resultados já anteriormente verificados na função de dois pontos, ou seja, o cancelamento dos pólos de mais alta ordem no setor PV (“principal value”) com os do setor modo zero (“zero mode”), e do aparecimento dos típicos termos não-locais.

As funções de quatro pontos serão calculadas dentro da teoria QED escalar, sem massa, e a razão para essa nossa escolha é basicamente a simplicidade: trata-se de uma teoria de gauge Abelian e, ao mesmo tempo, evitamos a necessidade de lidarmos com campos fermiônicos e/ou campos com massa.

Neste capítulo introdutório discutiremos alguns aspectos referentes aos gauges, e especificamente para os gauges não-covariantes. Logo após, falaremos do

gauge do cone de luz e a notação usada para ele.

No segundo capítulo apresentaremos a QED escalar, especificamente para o gauge do cone de luz. As regras de Feynman serão dadas ali. Também discutiremos os pólos “espúrios” que aparecem na teoria e o fato que deu origem ao uso de prescrições para seu tratamento.

No capítulo terceiro centraremos nossa atenção nos espalhamentos a um “loop” de duas partículas e faremos uma análise daqueles processos que se vêm afetados com a presença do termo $(q.n)^{-1}$. Em seguida vamos estudá-los mais detidamente, fazendo os cálculos das amplitudes de espalhamento em cada caso que apresente dependência do gauge.

O capítulo quatro tem por objetivo mostrar detalhadamente o cálculo das integrais do cone de luz. Integrais que foram usadas para se obter o resultado do capítulo terceiro.

As conclusões finais desta tese serão apresentadas no último capítulo.

1.1.1 Um pouco de história.

Tudo teve seu início quando Dirac [1] em 1949 estudava a relação possível entre a formulação Hamiltoniana e a Relatividade. Como consequência desta combinação aparecem *dez quantidades* $(P_\mu, M_{\mu\nu})$ *fundamentais* para cada sistema dinâmico, quantidades estas que são independentes da transformação de coordenadas. Sete destas quantidades $(P_0, P_i$ e $M_{ij})$ tem uma interpretação física simples (energia total, momento total e momento angular total, respectivamente). Foi nesse contexto que ele propôs o denominado “light front frame”, que na verdade foi o início do gauge do cone de luz. Na realidade, Dirac não propôs somente a dinâmica do cone de luz; esta foi apenas uma das propostas entre uma série de possíveis formas dinâmicas que poderiam ser construídas. Resumidamente, podemos mencionar (considere o sistema de coordenadas u^μ):

- A forma instantânea (condição : $u_0 = 0$): Aqui $P_1, P_2, P_3, M_{23}, M_{31}$ e M_{12} são calculadas facilmente, as restantes P_0, M_{10}, M_{20} e M_{30} são mais complicadas e são associadas às Hamiltonianas.
- A forma pontual (condição : $u^\mu u_\mu = k^2; u_0 > 0$): Aqui as quantidades $M_{\mu\nu}$ são relativamente simples e as outras (os P_μ) serão associadas às Hamiltonianas.

- A forma frontal (condição : $u_0 - u_3 = 0$): Usando a notação do cone de luz, as quantidades $P_1, P_2, P_-, M_{12}, M_{+-}, M_{1-}$ e M_{2-} são simples, as restantes P_+, M_{1+} e M_{2+} serão as Hamiltonianas (podemos dizer que aqui nasceu o gauge do cone de luz).

Cada uma destas formas vêm do fato que Dirac buscava escrever as quantidades dinâmicas que têm participação ativa num certo processo, isto é, aquelas quantidades que realmente podem ser consideradas como quantidades dinâmicas fundamentais.

1.1.2 Em nossos dias.

O recente avivamento no interesse pelo gauge do cone de luz pode ser sintetizado em três itens, que são:

1. É um gauge que apesar de não ser manifestamente covariante, explicitamente desacopla os campos fantasmas dos campos de gauge (ver apêndice B);
2. Possibilita a formulação Hamiltoniana de quantização na frente de luz ("light-front quantization") para a cromodinâmica quântica (QCD) e o estudo da fenomenologia dos hádrons nesse formalismo (estudo dos estados ligados e cálculos dos fatores de forma hadrônicos);
3. No estudo das supercordas e teorias superssimétricas. É o único gauge no qual se demonstrou a finitude ultravioleta da teoria superssimétrica de Yang-Mills com quatro cargas (N=4 SUSY Yang-Mills) e é onde a quantização da corda bosônica [2] [3] e a supercorda de Green-Schwartz [2] [4] [3] pode ser levada a efeito.

1.2 Gauges

1.2.1 Introdução.

Historicamente, o *conceito de invariância de gauge* foi ocupando lugares cada vez mais importantes na descrição das teorias físicas. Com o tempo, o conceito foi recebendo o status de princípio - o *princípio da invariância de gauge*. Atualmente este princípio é uma ferramenta teórica poderosa e imprescindível

na descrição das partículas elementares como campos interagentes, tanto na QED, quanto nas demais teorias construídas espelhando-se nela, como a QCD (cromodinâmica quântica), gravitação quântica e chegando até às teorias de supercordas. A invariância de uma teoria sob as transformações de gauge, nos deixa com uma certa **liberdade** de escolha; vale dizer que, na verdade; se tem graus de liberdade não-físicos que devem ser eliminados mediante à fixação de gauge.

Para uma introdução nas teorias de gauge o leitor pode procurar alguns bons livros [7], [8], [9] introdutórios .

Do ponto de vista da relatividade, em particular da invariância de Lorentz, os gauges podem ser classificados como sendo:

- Gauges covariantes, ou
- Gauges não-covariantes.

Os casos dos gauges covariantes são bem conhecidos e estudados. Dentro destes encontram-se o gauge de Lorentz, o de 't Hooft, etc. A tabela (1.1) mostra os principais gauges covariantes. O sucesso dos gauges covariantes se estende já por muitos anos e a maioria dos cálculos em teoria quântica de campos são feitos nesses bem conhecidos gauges como o gauge de Landau ou o gauge de Feynman.

Os gauges covariantes possuem três vantagens principais:

- Eles têm invariância relativística,
- São facilmente aplicados a teorias convencionais como a QED, e
- Têm uma *prescrição uniforme* no tratamento das singularidades no espaço dos momentos do propagador, conhecida como a prescrição $i\epsilon$ de Feynman.

Além destas vantagens gerais , as integrais de Feynman calculadas, que são fixadas em um gauge covariante, também apresentam as seguintes propriedades:

- A parte divergente de toda integral de um “loop” é uma *função local dos momentos externos*.
- A parte divergente de uma integral de um “loop” só possui pólos simples.

(1) Gauge geral de Lorentz:

$$F^a \equiv \partial^\mu A_\mu^a(x) = B^a(x), \mu = 0, 1, 2, 3.$$

$$\mathcal{L}_{fix} = -\frac{1}{2\lambda}(\partial^\mu A_\mu^a)^2.$$

- (a) Com a escolha $\lambda \rightarrow 0$ se obtém o gauge de Landau.
- (b) Com a escolha $\lambda \rightarrow 1$ dá o gauge de Feynman.
- (c) A escolha $B^a(x) = 0$ é chamado gauge de Fermi.

(2) Gauges de 't Hooft:

$$F^a \equiv \partial^\mu A_\mu^a - i\lambda(v, t^a \varphi) = B^a.$$

$$\mathcal{L}_{fix} = -\frac{1}{2\lambda}(\partial^\mu A_\mu^a - i\lambda(v, t^a \varphi))^2.$$

Onde $\frac{v}{\sqrt{2}}$ é o valor esperado do campo de Higgs φ , e t^a são geradores.

- (a) Com a escolha $\lambda \rightarrow 0$ se chega ao gauge renormalizável de Landau.
- (b) A escolha $\lambda \rightarrow \infty$ dá o gauge unitário.

(3) Gauges do campo de fundo:

$$F^a \equiv \partial^\mu Q_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b Q^{c\mu} = B^a.$$

$$\mathcal{L}_{fix} = -\frac{1}{2\lambda}(\partial^\mu Q_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b Q^{c\mu})^2.$$

Tabela 1.1: Os principais gauges covariantes .

- A contagem simples de potências é válida.
- A rotação de Wick de um espaço de Minkowski para um outro Euclidiano sempre pode ser levada a cabo, pois a prescrição $i\epsilon$ de Feynman coloca os pólos em quadrantes opostos, isto é, segundo e quarto, como é mostrado na figura (1.1).
- As integrais apresentam invariância de Lorentz, que permite a aplicação do eficiente método tensorial. Para a integral:

$$I_{\mu\nu} = \int d^2\omega q \frac{q_\mu q_\nu}{q^2(q-p)^2}$$

dada, fazendo considerações de invariância de Lorentz, pode-se dar origem ao ansatz seguinte:

$$I_{\mu\nu} = A(p^2)g_{\mu\nu} + B(p^2)p_\mu p_\nu$$

Os coeficientes A e B são calculados multiplicando $I_{\mu\nu}$ por $p_\mu p_\nu$, logo, contraindo μ e ν , e finalmente resolvendo para A e B.

No entanto, o uso de gauges covariantes tem um grande problema, especificamente para o caso de teorias não-Abelianas. A dificuldade é a aparição necessária de fantasmas, fato que complica todos os cálculos perturbativos.

1.2.2 Gauges não-covariantes, introdução.

Recapitulando o exposto na seção anterior, partindo da invariância das leis físicas na relatividade, as quantidades podem ser classificadas como covariantes ou não-covariantes. Fazendo uso deste conceito no caso das teorias de gauge, chega-se ao conceito e classificação dos gauges como sendo gauges covariantes ou não-covariantes.

A família de gauges não-covariantes pode ser caracterizada pela presença de um certo quadri vetor externo arbitrário n_μ [7].

Para ilustrar esta última afirmação citarei rapidamente dois exemplos de gauges não-covariantes : (i) o gauge de Coulomb e (ii) o gauge axial.

No primeiro caso, também conhecido como o gauge de radiação, este é obtido em termos deste quadri vetor arbitrário n_μ como sendo da forma :

$$\begin{aligned} \partial_\mu A^\mu - (n_\mu \partial^\mu)(n_\nu A^\nu) &= 0 \\ n_\mu &= (1, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

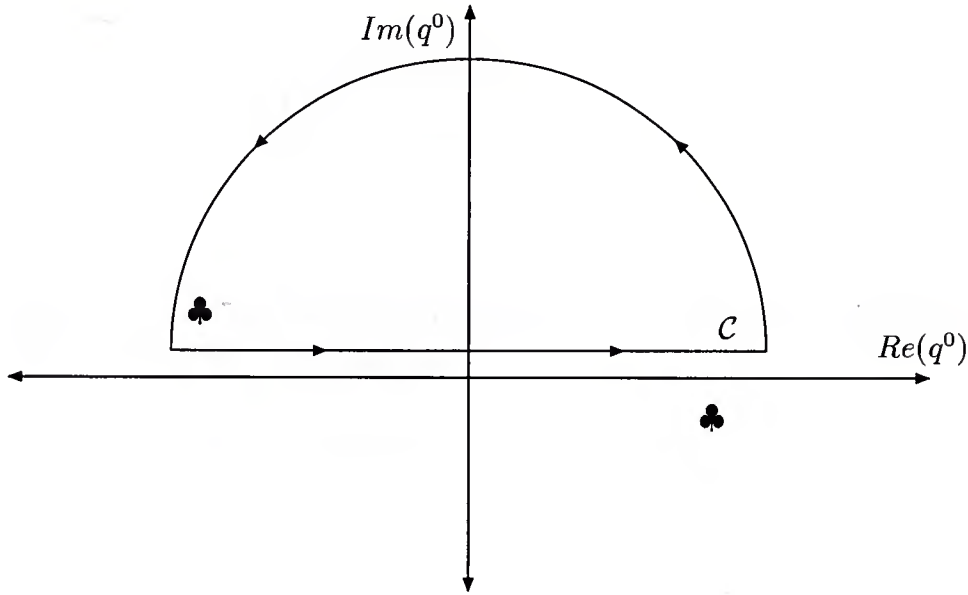


Figura 1.1: Gráfico mostrando a localização para os pólos do tipo $(q^2)^{-1}$ no plano complexo q^0 . Os pólos são representados com um ♣.

No segundo caso, o gauge axial tem a forma:

$$\begin{aligned} n_\mu A^\mu_\alpha &= 0 \\ n_\mu n^\mu &= n^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Estes gauges não-covariantes que possuem um quadrivetor arbitrário n_μ , também são conhecidos como gauges algébricos [7].

1.3 Gauges não-covariantes.

Esta seção está baseada no trabalho de Leibbrandt [5]. Serão apresentados os diferentes tipos de **gauges não-covariantes do tipo axial**, classificando a partir da escolha que se faz do quadrivetor n^μ .

1.3.1 O gauge axial.

Originariamente proposto por Kummer [6], na verdade ele é o gauge axial puro (homogêneo), mas por simplicidade é chamado simplesmente de gauge

axial. Ele é definido pela condição:

$$\begin{aligned} F^a &\equiv n^\mu A_\mu^a = 0, \quad n^2 < 0, \quad n^2 = n_0^2 - \mathbf{n}^2, \\ \mathcal{L}_{fix} &= -\frac{1}{2\alpha}(n^\mu A_\mu^a)^2, \quad \alpha \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Para um melhor entendimento, tomaremos como ilustração a teoria de Yang-Mills, descrita pela Lagrangeana:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 + \frac{1}{2\alpha}(n \cdot A^a)^2 + \mathcal{L}_{ext} + \mathcal{L}_{ghost}$$

Sendo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ghost} &= \bar{\eta}^a n \cdot D^{ab} \eta^b \\ \mathcal{L}_{ext} &= J^a \cdot A^a \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \\ D_\mu^{ab} &= \delta^{ab} \partial_\mu + g f^{abc} A_\mu^c \end{aligned}$$

Então, nesta teoria e com este gauge, o propagador do campo de gauge será:

$$G_{\mu\nu}^{ab}(q) = -\frac{i\delta^{ab}}{(2\pi)^4 q^2} \left[g^{\mu\nu} - \frac{(q^\mu n^\nu + q^\nu n^\mu)}{q \cdot n} + q^\mu q^\nu \frac{n^2}{(q \cdot n)^2} \right]$$

Observe-se como os pólos no propagador do tipo $(q \cdot n)^{-1}$ e $(q \cdot n)^{-2}$ entram em cena. O tratamento destes é feito com o uso de alguma prescrição. Apesar de o gauge axial ($\alpha = 0$) possuir um número significativo de vantagens em relação aos outros gauges covariantes, suas aplicações no caso da QCD ou outras teorias não-Abelianas vêem-se dificultadas pela estrutura do propagador do campo de gauge.

1.3.2 O gauge planar.

A condição deste gauge é:

$$\begin{aligned} F^a &\equiv n^\mu A_\mu^a = B^a, \quad n^2 < 0 \\ \mathcal{L}_{fix} &= -\frac{1}{2\alpha n^2} n \cdot A^a \partial^2 n \cdot A^a, \quad \alpha = +1 \end{aligned}$$

Tomando novamente a teoria de Yang-Mills:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 - \frac{1}{2\alpha n^2} n \cdot A^a \partial^2 n \cdot A^a + \mathcal{L}_{ext} + \mathcal{L}_{ghost}$$

Sendo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ghost} &= \bar{\eta}^a n \cdot D^{ab} \eta^b \\ \mathcal{L}_{ext} &= J^a \cdot A^a \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \\ D_\mu^{ab} &= \delta^{ab} \partial_\mu + g f^{abc} A_\mu^c \end{aligned}$$

Então, nesta teoria e com este gauge, o propagador do campo de gauge será:

$$G_{\mu\nu}^{ab}(q) = -\frac{i\delta^{ab}}{(2\pi)^4 q^2} \left[g^{\mu\nu} - \frac{(q^\mu n^\nu + q^\nu n^\mu)}{q \cdot n} \right]$$

Que é mais simples se comparado com o anterior (axial).

1.3.3 O gauge do cone de luz.

Este é um dois gauges mais conhecidos, apesar de ter ficado esquecido por muitos anos. A sua condição é:

$$\begin{aligned} F^a &\equiv n^\mu A_\mu^a = 0, \quad n^2 = 0 \\ \mathcal{L}_{fix} &= -\frac{1}{2\alpha} (n^\mu A_\mu^a)^2, \quad \alpha \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Tomando novamente a teoria de Yang-Mills:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 + \frac{1}{2\alpha}(n \cdot A^a)^2 + \mathcal{L}_{ext} + \mathcal{L}_{ghost}$$

Sendo:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{ghost} &= \bar{\eta}^a n \cdot D^{ab} \eta^b \\ \mathcal{L}_{ext} &= J^a \cdot A^a\end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \\ D_\mu^{ab} &= \delta^{ab} \partial_\mu + g f^{abc} A_\mu^c\end{aligned}$$

Então, nesta teoria e com este gauge, o propagador do campo de gauge será:

$$G_{\mu\nu}^{ab}(q) = -\frac{i\delta^{ab}}{(2\pi)^4 q^2} \left[g^{\mu\nu} - \frac{(q^\mu n^\nu + q^\nu n^\mu)}{q \cdot n} \right],$$

que é idêntico ao caso planar.

1.3.4 O gauge temporal.

Este gauge é tão velho como a existência da mecânica quântica; ele é usado na quantização do campo de Maxwell-Dirac. A condição de gauge é dada por:

$$\begin{aligned}F^a &\equiv n^\mu A_\mu^a = A_0^a, \quad n^2 > 0, \quad n_\mu = (1, 0, 0, 0) \\ \mathcal{L}_{fix} &= -\frac{1}{2\alpha}(n^\mu A_\mu^a)^2, \quad \alpha \rightarrow 0\end{aligned}$$

Na teoria de Yang-Mills, a Lagrangeana é :

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 + \frac{1}{2\alpha}(n \cdot A^a)^2 + \mathcal{L}_{ext} + \mathcal{L}_{ghost}$$

Sendo:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{ghost} &= \bar{\eta}^a n \cdot D^{ab} \eta^b \\ \mathcal{L}_{ext} &= J^a \cdot A^a\end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \\ D_\mu^{ab} &= \delta^{ab} \partial_\mu + gf^{abc} A_\mu^c \end{aligned}$$

Então, o propagador do campo de gauge será:

$$G_{\mu\nu}^{ab}(q) = -\frac{i\delta^{ab}}{(2\pi)^4 q^2} \left[g^{\mu\nu} - \frac{(q^\mu n^\nu + q^\nu n^\mu)}{q \cdot n} + q^\mu q^\nu \frac{n^2}{(q \cdot n)^2} \right],$$

que tem a mesma estrutura do gauge axial.

Observação: O gauge temporal é um gauge apropriado só em casos específicos. A implementação duma prescrição ainda não é bem entendida, ou melhor, não se conhece uma prescrição adequada para esse caso.

O resumo dos principais gauges não-covariantes se tem na tabela (1.2).

1.4 Gauge do cone de Luz

1.4.1 O Gauge.

Esta seção tem por objetivo recapitular e a detalhar o gauge do cone de luz, pois é ele a base do nosso trabalho.

Como já foi dito, o gauge do cone de luz vem definido pela condição:

$$F^a \equiv n^\mu A_\mu^a = 0, \quad n^2 = 0$$

$$\mathcal{L}_{fix} = -\frac{1}{2\alpha} (n^\mu A_\mu^a)^2, \quad \alpha \rightarrow 0$$

1.4.2 Coordenadas do cone de luz.

Usamos a métrica (+, -, -, -), com x^0 sendo a componente temporal de um quadrivetor geral x^μ . As componentes do cone de luz deste último são:

$$x^\mu = (x^+, x^-, x^i), \quad i = 1, 2 \quad (1.1)$$

(1) Gauge de Coulomb:

$$F^a \equiv \partial^k A_k^a = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

$$\mathcal{L}_{fix} = -\frac{1}{2\alpha}(\partial^k A_k^a)^2, \quad \alpha \rightarrow 0$$

(2) Gauge axial (homogeneo $B^a \equiv 0$):

$$F^a \equiv n^\mu A_\mu^a = B^a, \quad n^2 < 0 \quad n^2 = n_0^2 - \mathbf{n}^2,$$

$$\mathcal{L}_{fix} = -\frac{1}{2\alpha}(n^\mu A_\mu^a)^2, \quad \alpha \rightarrow 0$$

(3) Gauge Planar:

$$F^a \equiv n^\mu A_\mu^a = B^a, \quad n^2 < 0$$

$$\mathcal{L}_{fix} = -\frac{1}{2\alpha n^2} n \cdot A^a \partial^2 n \cdot A^a, \quad \alpha = +1$$

(4) Gauge do cone de luz:

$$F^a \equiv n^\mu A_\mu^a = 0, \quad n^2 = 0$$

$$\mathcal{L}_{fix} = -\frac{1}{2\alpha}(n^\mu A_\mu^a)^2, \quad \alpha \rightarrow 0$$

(3) Gauge temporal:

$$F^a \equiv n^\mu A_\mu^a = A_0^a, \quad n^2 > 0, \quad n_\mu = (1, 0, 0, 0)$$

$$\mathcal{L}_{fix} = -\frac{1}{2\alpha}(n^\mu A_\mu^a)^2, \quad \alpha \rightarrow 0$$

Tabela 1.2: Os principais gauges não-covariantes .

Onde:

$$\begin{aligned} x^{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 \pm x^3) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_0 \mp x_3) = x_{\mp} \\ x^i &\equiv (\hat{x})^i = (x^1, x^2) \end{aligned}$$

Definamos agora os vetores tipo luz n_{μ} e $\bar{n}_{\mu}$ em coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} n_{\mu} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1) \\ \bar{n}_{\mu} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1) \end{aligned}$$

Eles satisfazem : $n^2 = \bar{n}^2 = 0$ e $n^{\mu}\bar{n}_{\mu} = 1$. Observe-se que:

$$\begin{aligned} x^+ &= x^{\mu}n_{\mu} \\ x^- &= x^{\mu}\bar{n}_{\mu} \end{aligned}$$

O produto escalar agora toma a forma seguinte:

$$x^{\mu}y_{\mu} = x^+y^- + x^-y^+ - \hat{x}\hat{y} \quad (1.2)$$

Isto quer dizer que a métrica, nas coordenadas do cone de luz, tem a forma seguinte:

$$g^{\mu\nu} = \begin{matrix} & \begin{matrix} + & - & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} + \\ - \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix} \quad (1.3)$$

Em particular:

$$x^2 = 2x^+x^- - \hat{x}^2. \quad (1.4)$$

O elemento de volume é:

$$d^4x = d^2\hat{x}dx^-dx^+$$

Para implementar a regularização dimensional é necessário fazer a generalização a D -dimensões:

$$d^{2\omega}x = d^{2(\omega-1)}\hat{x}dx^-dx^+, \quad (1.5)$$

onde a relação entre a dimensão D do espaço-tempo e ω vem dada pela expressão:

$$D = 2\omega \quad (1.6)$$

Com as idéias desta introdução em mente, podemos continuar para o capítulo seguinte.

Capítulo 2

Eletrodinâmica Escalar (QED₄)

2.1 Introdução.

Neste capítulo estudaremos a teoria de gauge conhecida como eletrodinâmica escalar (QED₄). Na verdade, o que faremos é trabalhar com esta teoria para o caso de fixar o gauge do cone de luz. Para isso, partiremos escrevendo a Lagrangeana da mesma, para logo a partir desta obtermos as regras de Feynman. No final, será feito um comentário importante sobre o que se modifica no uso do gauge do cone de luz para a QED escalar, confrontando com outros gauges covariantes. Este capítulo é a introdução necessária para continuar o estudo do capítulo seguinte.

2.1.1 Lagrangeana.

A Lagrangeana para o caso da teoria QED escalar é apresentada em vários textos básicos [9], [7], mas todas elas no caso do conhecido gauge de Feynman-Landau. Para aplicar ao caso do gauge do cone de luz, bastará modificar o multiplicador de Lagrange, isto é, o termo conhecido como $\mathcal{L}_{fix}$. Então, já estamos em condições de escrever a Lagrangeana desta teoria. Nós usaremos aquela encontrada em [17], onde o gauge do cone de luz é estudado detidamente para teorias de Yang-Mills e teorias de Yang-Mills supersimétricas. A Lagrangeana é:

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + |D_\mu\phi|^2 - V(\phi, \phi^*) + \frac{1}{2\alpha}(n.A)^2 \quad (2.1)$$

Sendo:

$$\begin{aligned} D_\mu \phi^i &= \partial_\mu \phi^i + ig R_j^i \phi^j A_\mu \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ \phi_i^* &= \phi^i \end{aligned}$$

Os campos da teoria são A_μ (vetorial de spin 1) e ϕ^i (real escalar de spin 0). Algumas observações importantes são que na derivada covariante se encontram a constante de acoplamento g e R_j^i , que é a analogia do caso de uma teoria não-Abeliana, para deixar deste modo o caminho aberto para o estudo desta, no mesmo gauge. Neste caso os R_j^i são representados por matrizes, todas elas diagonais. Também se tem que o potencial $V(\phi, \phi^*)$ é um polinômio Hermitiano invariante de gauge. Para o caso de nosso interesse, que é a nível de um “loop”, este termo pode ser ignorado.

2.1.2 Regras de Feynman.

As regras de Feynman podem ser geradas a partir da Lagrangeana da teoria usando uma forma mnemônica, como é descrita no livro de C. Quigg [10]. Mas não se deve esquecer do método formal usado para gerá-las, como demonstrado em inúmeros textos de teoria de campos [9], [7], [8]. Seja como for, as regras são mostradas na tabela (2.1).

2.2 O problema dos pólos $(q.n)^{-1}$.

Observando-se as regras de Feynman, podemos facilmente detectar que o propagador do campo A_μ apresenta um problema : a **aparência de pólos tipo $(q.n)^{-1}$** .

Na verdade o problema não é assim simples ou pequeno, como a princípio pode parecer. Pois sempre que se tente calcular uma amplitude de espalhamento, isto envolverá o cálculo de uma ou mais integrais, a um ou mais “loops”, que no fundo são integrais sobre quadrimomentos; estes deverão ser estendidos de (1,3) dimensões para (1,D-1) dimensões (isto é, pode-se utilizar a regularização dimensional [11]). Logo, para o tratamento dos pólos, deverá ser feita uma rotação de Wick, e é aqui onde a dificuldade com os pólos do tipo $(q.n)^{-1}$ tem seu início, pois eles **não permitem a rotação**

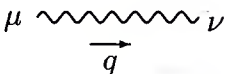
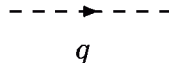
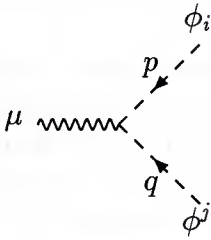
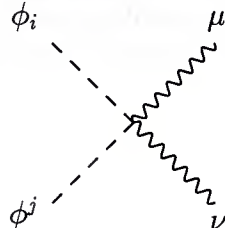
Gráficos de Feynman	Representação no espaço dos momentos
	Propagador do fóton: $-\frac{i}{(2\pi)^4 q^2} \left[g^{\mu\nu} - \frac{(q^\mu n^\nu + q^\nu n^\mu)}{q \cdot n} \right]$
	Propagador escalar: $\frac{i}{(2\pi)^4 q^2}$
	Vértice fóton-escalar-escalar: $i(2\pi)^4 g R_j^i (p - q)^\mu$
	Vértice escalar-escalar-fóton-fóton: $i(2\pi)^4 g^2 (R^2)_j^i (2g^{\mu\nu})$

Tabela 2.1: Regras de Feynman, QED escalar no cone de luz.

de Wick. Observe na figura (2.1) como não é possível fazer uma rotação de Wick. Este resultado foi obtido no caso da QED escalar, mas ele é

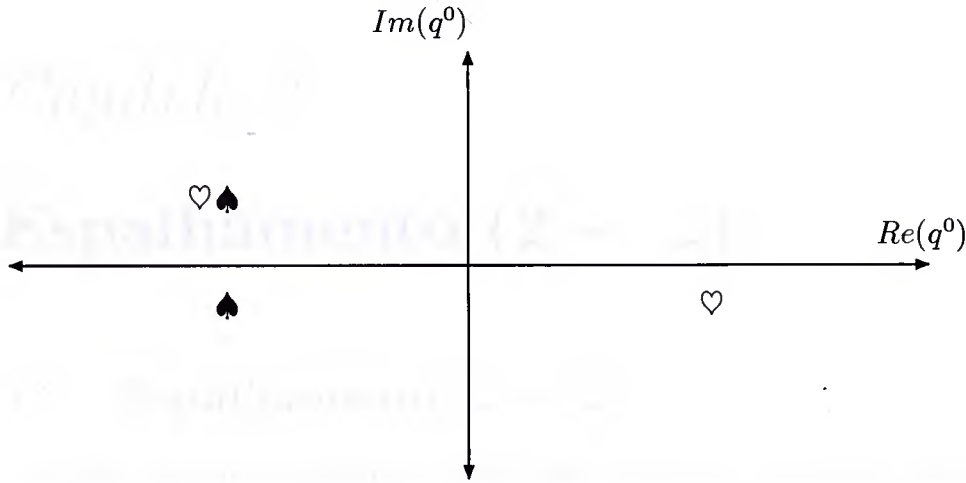


Figura 2.1: Gráfico no plano complexo q^0 . Pólos do tipo $(q^2)^{-1}$ são representados com ♡. Pólos do tipo $(q.n)^{-1}$ são representados com ♠.

sempre típico duma teoria trabalhada num gauge axial em geral. Para o tratamento dos pólos $(q.n)^{-1}$, comumente chamados de pólos “espúrios”, foram desenvolvidas várias prescrições, entre as quais citaremos as de Mandelstam [12], Leibbrandt [13] e a desenvolvida pelos professores A.T.Suzuki e B.M.Pimentel [14].

Nesta tese empregaremos a última destas prescrições.

Para uma referência rápida, no apêndice C, o leitor encontrará alguns aspectos desta prescrição e sua implementação.

Capítulo 3

Espalhamento ($2 \rightarrow 2$).

3.1 Espalhamento ($2 \rightarrow 2$).

Consideremos duas partículas, sejam elas escalares ou vetoriais, dentro da teoria da QED escalar. Então, deixaremos que elas interajam entre si de modo que no final tenhamos duas partículas novamente. Este processo é o que denominaremos de espalhamento ($2 \rightarrow 2$), espalhamento que será objeto de nosso estudo.

O nosso objetivo central é estudar a possível dependência do gauge que possa surgir na amplitude de probabilidade do espalhamento de duas partículas ao nível de um “loop”, no caso de se usar o gauge do cone de luz. Mais ainda, queremos ver se neste caso se obtém a divergência na forma de pólos duplos no setor PV (“principal value”) para quando se retoma o limite de quatro dimensões ($\omega \rightarrow 2$), como acontece no caso da função de dois pontos (o setor PV da polarização do vácuo ao nível de um “loop” tem pólo duplo). Nesse último caso, o pólo duplo do setor PV é exatamente cancelado pelo pólo duplo do setor modo zero de modo que a causalidade é preservada. Em outras palavras, a questão que queremos considerar é: seria o pólo duplo no setor PV uma patologia inerente à função de dois pontos ao nível de um “loop”? Ainda mais, queremos testar se há remanescentes (pólos ou não) não-locais como no caso da função de dois pontos. É sabido que funções de quatro pontos em digramas tipo “box” não apresentam singularidades na região física. As singularidades ocorrem nas funções de quatro pontos nas quais as partículas incidentes “entram” no mesmo vértice e as duas partículas

emergentes “deixam” o mesmo vértice. Em outras palavras, haveria pólos não-locais em funções de quatro pontos? Em caso afirmativo, seriam esses pólos localizados fora da região física? Em resumo, queremos testar:

1. Grau da singularidade no setor PV;
2. Cancelamento dessa singularidade pelo pólo do setor modo zero;
3. Carácter da singularidade não local (se houver).

Tendo em mãos esses objetivos bem definidos, vamos buscá-los a partir das regras de Feynman que foram dadas no capítulo anterior e a partir da análise de quais funções de quatro pontos que possivelmente apresentarão pólos do tipo $(q.n)^{-1}$.

A QED escalar no gauge do cone de luz permite, em geral, três tipos de espalhamentos $2 \rightarrow 2$. Para uma melhor análise destes processos, nós vamos classificá-los como sendo provenientes de:

- Funções de quatro pontos escalares (fig.3.1),

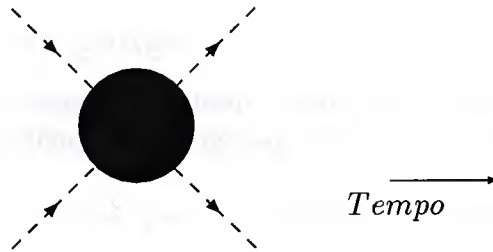


Figura 3.1:

- Funções de quatro pontos vetoriais (fig.3.2)
- Funções de quatro pontos escalares-vetoriais (fig.3.3).

Logo a seguir calcularemos as amplitudes que apresentam dependência do gauge, e será aqui onde aparecerão as integrais do cone de luz. O método de resolução destas integrais será exposto no seguinte capítulo.

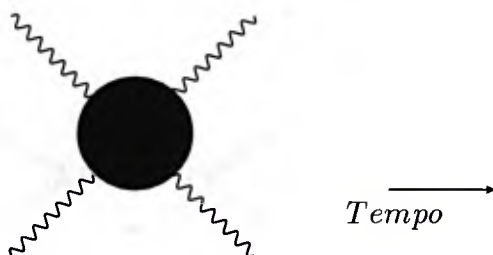


Figura 3.2:

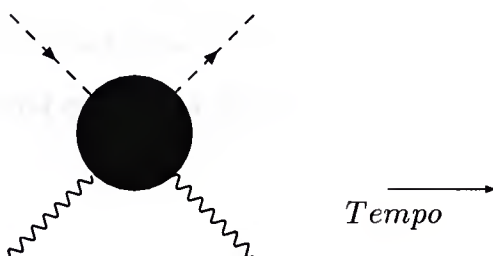


Figura 3.3:

3.1.1 Dependência do gauge.

O nosso trabalho limita-se ao caso de um “loop”; mais ainda, o que na verdade queremos é observar a dependência do gauge algébrico do cone de luz nestes processos.

Das regras de Feynman; sabemos que a dependência do gauge algébrico

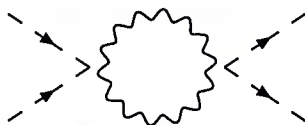


Figura 3.4: “Sea-Gull” escalar

(neste caso o gauge do cone de luz) se encontra no propagador vetorial, e os diagramas que o contém estão:

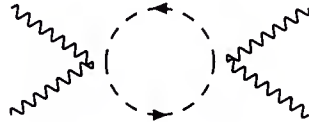


Figura 3.5: “Sea-Gull” vetorial

- no espalhamento de duas partículas escalares, e
- de uma partícula vetorial com outra escalar.

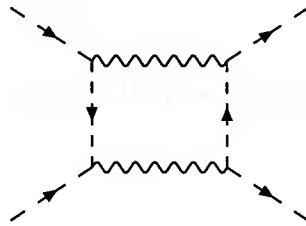


Figura 3.6: “Box” escalar

Para ver isto melhor, observe-se os gráficos das figuras (3.4), (3.5), (3.6), (3.7) e (3.8), que são todos os permitidos pela teoria ao nível de um “loop” (considerando somente os processos do canal s)

Observe-se que os propagadores vetoriais (que são os que têm a dependência do gauge) só aparecem no caso das funções de quatro pontos escalares e no “box” escalar-vetorial, fato que vai simplificar nosso trabalho.

3.1.2 Diagramas a calcular.

Pelo exposto na secção anterior, só teremos três gráficos a calcular. Sendo estes os das figuras (3.4), (3.6) e (3.8). Agora nosso trabalho limita-se ao cálculo destes diagramas que, de aqui em diante, chamaremos respectivamente de:

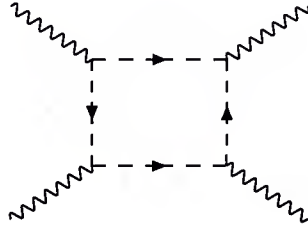


Figura 3.7: “Box” vetorial

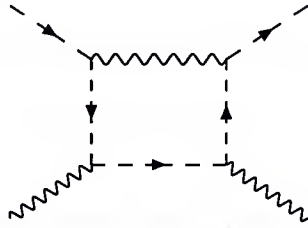


Figura 3.8: “Box” escalar-vetorial

- “Sea-Gull” escalar,
- “Box” escalar, e
- “Box” escalar-vetorial.

3.2 “Sea-Gull” Escalar.

O gráfico mostrando os momentos externos e internos está detalhado na figura (3.9). Aplicando as regras de Feynman (2.1) , obteremos:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{Sea-gull'} = & \int d^2\omega q \cdot i(2\pi)^4 g^2 (R^2)_i^j 2g_{\mu\beta} \cdot \frac{-i}{(2\pi)^4 q^2} \left[g^{\mu\nu} - \frac{(q^\mu n^\nu - q^\nu n^\mu)}{q \cdot n} \right] \\ & \cdot i(2\pi)^4 g^2 (R^2)_k^l 2g_{\nu\alpha} \cdot \frac{-i}{(2\pi)^4 (q-p)^2} \left[g^{\alpha\beta} - \frac{(q-p)^\alpha n^\beta - (q-p)^\beta n^\alpha}{(q-p) \cdot n} \right] \end{aligned}$$

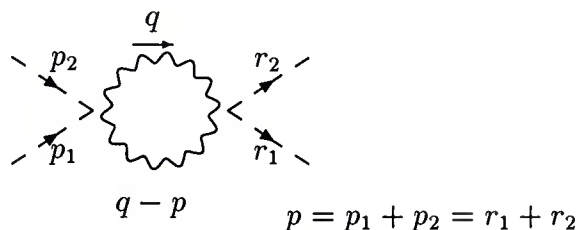


Figura 3.9: “Sea-Gull” escalar mostrando os momentos

3.2.1 Resultados.

Da última equação da seção anterior, não é difícil chegar ao resultado seguinte:

$$\mathcal{M}_{Sea-gull'} = 8g^4 (R^2)_i^j (R^2)_k^l \left[(\omega - 1) \int d^{2\omega} q \frac{1}{q^2 (q - p)^2} \right]$$

Para fins de completeza, vamos ter que a função total será:

$$\mathcal{M}_{Sea-gull} = \mathcal{M}_{Sea-gull'}(s) + \mathcal{M}_{Sea-gull'}(t) + \mathcal{M}_{Sea-gull'}(u), \quad (3.1)$$

onde se considerou os processos provenientes dos canais t e u .

3.2.2 Observações.

É muito interessante observar que o resultado obtido é **inteiramente independente do vector n** , o que equivale dizer que não possui termos não-locais e conseqüentemente é independente do gauge não-covariante. Ele **não apresenta divergências duplas** para o caso limite de quatro dimensões ($\omega \rightarrow 2$).

3.3 “Box” Escalar.

O gráfico mostrando os momentos externos e internos é mostrado na figura (3.10).

Aplicando as regras de Feynman (2.1), obteremos:

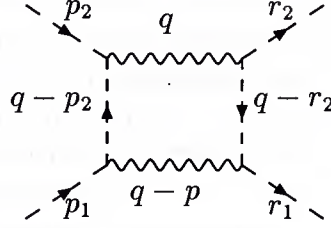


Figura 3.10: “Box” escalar

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{Box'} &= \int d^2\omega q \cdot i(2\pi)^4 g R_j^n (q - 2p_2)_\mu \cdot \frac{-i}{(2\pi)^4 q^2} \left[g^{\mu\nu} - \frac{(q^\mu n^\nu - q^\nu n^\mu)}{q \cdot n} \right] \\
 &\quad \cdot i(2\pi)^4 g R_m^l (q - 2r_2)_\nu \cdot \frac{i}{(2\pi)^4 (q - r_2)^2} \cdot i(2\pi)^4 g R_k^m (q - p + 2r_1)_\alpha \\
 &\quad \cdot \frac{-i}{(2\pi)^4 (q - p)^2} \left[g^{\alpha\beta} - \frac{(q - p)^\alpha n^\beta - (q - p)^\beta n^\alpha}{(q - p) \cdot n} \right] \\
 &\quad \cdot i(2\pi)^4 g R_n^i (q - p + 2p_1)_\beta \cdot \frac{i}{(2\pi)^4 (q - p_2)^2}
 \end{aligned}$$

Simplificando um pouco obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{Box'} &= A_{jk}^{li} \left[\int d^2\omega q \frac{(q - 2p_2)_\mu g^{\mu\nu} (q - 2r_2)_\nu (q - p + 2r_1)_\alpha g^{\alpha\beta} (q - p + 2p_1)_\beta}{q^2 (q - p)^2 (q - p_2)^2 (q - r_2)^2} \right. \\
 &\quad - \int d^2\omega q (q - 2p_2)_\mu g^{\mu\nu} (q - 2r_2)_\nu (q - p + 2r_1)_\alpha \\
 &\quad \cdot \frac{[(q - p)^\alpha n^\beta - (q - p)^\beta n^\alpha] (q - p + 2p_1)_\beta}{q^2 (q - p)^2 (q - p_2)^2 (q - r_2)^2 (q - p) \cdot n} \\
 &\quad - \int d^2\omega q \frac{(q - 2p_2)_\mu [q^\mu n^\nu - q^\nu n^\mu] (q - 2r_2)_\nu (q - p + 2r_1)_\alpha g^{\alpha\beta} (q - p + 2p_1)_\beta}{q^2 (q - p)^2 (q - p_2)^2 (q - r_2)^2 q \cdot n} \\
 &\quad + \int d^2\omega q (q - 2p_2)_\mu [q^\mu n^\nu - q^\nu n^\mu] (q - 2r_2)_\nu (q - p + 2r_1)_\alpha \\
 &\quad \cdot \frac{[(q - p)^\alpha n^\beta - (q - p)^\beta n^\alpha] (q - p + 2p_1)_\beta}{q^2 (q - p)^2 (q - p_2)^2 (q - r_2)^2 q \cdot n (q - p) \cdot n} \left. \right]
 \end{aligned}$$

Sendo:

$$A_{jk}^{li} = g^4 R_j^n R_m^l R_k^m R_n^i$$

Como se observa, das quatro integrais, uma delas não apresenta pólos do tipo $(q.n)^{-1}$; é por isso que centraremos nossa atenção somente nas três últimas, as quais chamaremos de $I_{\hat{a}}$, $I_{\hat{b}}$ e $I_{\hat{c}}$ respectivamente. Observando cuidadosamente as integrais $I_{\hat{a}}$, $I_{\hat{b}}$ e $I_{\hat{c}}$, descobriremos que, na verdade, cada uma delas pode ser decomposta em uma parte independente de pólos do tipo $(q.n)^{-1}$ e outra que apresenta esta dependência.

Assim é mostrado explicitamente no seguinte conjunto de equações:

Para $I_{\hat{a}}$:

$$I_{\hat{a}} = \int d^{2\omega} q A_a \quad \left[\otimes + \frac{(q-p)(q-p+2r_1)2p_1.n}{(q-p).n} + \oplus + \frac{(q-p)(q-p+2p_1)2r_1.n}{(q-p).n} \right]$$

Sendo:

$$\begin{aligned} A_a &= \frac{(q-2p_2).(q-2r_2)}{q^2(q-p)^2(q-p_2)^2(q-r_2)^2} \\ \otimes &= (\text{livre de pólos } (q.n)^{-1}) \\ \oplus &= (\text{livre de pólos } (q.n)^{-1}) \end{aligned}$$

Para $I_{\hat{b}}$:

$$I_{\hat{b}} = \int d^{2\omega} q A_b \quad \left[\otimes - \frac{q.(q-2p_2)2r_2.n}{q.n} + \oplus - \frac{q.(q-2r_2)2p_2.n}{q.n} \right]$$

Sendo:

$$\begin{aligned} A_b &= \frac{(q-p+2p_2).(q-p+2r_2)}{q^2(q-p)^2(q-p_2)^2(q-r_2)^2} \\ \otimes &= (\text{livre de pólos } (q.n)^{-1}) \\ \oplus &= (\text{livre de pólos } (q.n)^{-1}) \end{aligned}$$

Para $I_{\hat{c}}$:

$$\begin{aligned} I_{\hat{c}} = 4 \int d^{2\omega} q A_c & \left[q^2 - (p_2 + r_2).q - \frac{q.(q+2p_2)r_2.n}{q.n} - \frac{q.(q+2r_2)p_2.n}{q.n} \right] \\ & \cdot \left[(q-p)^2 + (p_1 + r_1).(q-p) + \frac{(q-p).(q-p+2r_1)p_1.n}{(q-p).n} \right. \\ & \left. + \frac{(q-p).(q-p+2p_1)r_1.n}{(q-p).n} \right] \end{aligned}$$

Sendo:

$$A_c = \frac{1}{q^2(q-p)^2(q-p_2)^2(q-r_2)^2}$$

Para bem de nossos interesses, somente trabalharemos com as integrais que apresentam dependência dos pólos, as quais serão chamadas de I_a , I_b e I_c respectivamente.

Simplificando cada uma delas, com bastante cuidado e usando alguns truques para o caso de haver dois pólos “espúrios” (ver apêndice D), finalmente obteremos expressões simplificadas.

Então a integral I_a será:

$$\begin{aligned}
 I_a = 2(p_1 + r_1) \cdot n \left[\int d^2\omega q \frac{1}{(q-p_2)^2(q-r_2)^2} \cdot \frac{1}{(q-p) \cdot n} \right. \\
 - 2(p_2 + r_2)^\nu \int d^2\omega q \frac{q_\nu}{q^2(q-p_2)^2(q-r_2)^2} \cdot \frac{1}{(q-p) \cdot n} \\
 \left. + 4(p_2 \cdot r_2) \int d^2\omega q \frac{1}{q^2(q-p_2)^2(q-r_2)^2} \cdot \frac{1}{(q-p) \cdot n} \right] \quad (3.2) \\
 + 4[(p_1 \cdot n)r_1^\mu + (r_1 \cdot n)p_1^\mu] \left[\int d^2\omega q \frac{(q-p)_\mu}{(q-p)^2(q-p_2)^2(q-r_2)^2} \cdot \frac{1}{(q-p) \cdot n} \right. \\
 - 2(p_2 + r_2)^\nu \int d^2\omega q \frac{(q-p)_\mu q_\nu}{q^2(q-p)^2(q-p_2)^2(q-r_2)^2} \cdot \frac{1}{(q-p) \cdot n} \\
 \left. + 4(p_2 \cdot r_2) \int d^2\omega q \frac{(q-p)_\mu}{q^2(q-p)^2(q-p_2)^2(q-r_2)^2} \cdot \frac{1}{(q-p) \cdot n} \right]
 \end{aligned}$$

Para I_b se tem:

$$\begin{aligned}
 I_b = -2(p_2 + r_2) \cdot n \left[\int d^2\omega q \frac{1}{(q-p_2)^2(q-r_2)^2} \cdot \frac{1}{q \cdot n} \right. \\
 - 2(p_2 + r_2)^\nu \int d^2\omega q \frac{(q-p)_\nu}{(q-p)^2(q-p_2)^2(q-r_2)^2} \cdot \frac{1}{q \cdot n} \\
 \left. + 4(p_1 \cdot r_1) \int d^2\omega q \frac{1}{(q-p)^2(q-p_2)^2(q-r_2)^2} \cdot \frac{1}{q \cdot n} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +4[(p_2.n)r_2^\mu + (r_2.n)p_2^\mu] \left[\int d^2\omega q \frac{q_\mu}{q^2(q-p_2)^2(q-r_2)^2} \cdot \frac{1}{q.n} \right. \\
& -2(p_2+r_2)^\nu \int d^2\omega q \frac{q_\mu(q-p)_\nu}{q^2(q-p)^2(q-p_2)^2(q-r_2)^2} \cdot \frac{1}{q.n} \\
& \left. +4(p_1.r_1) \int d^2\omega q \frac{q_\mu}{q^2(q-p)^2(q-p_2)^2(q-r_2)^2} \cdot \frac{1}{q.n} \right] \quad (3.3)
\end{aligned}$$

E finalmente para I_c :

$$\begin{aligned}
I_c = & \frac{4(p_1+r_1).n}{p.n} \left[\begin{aligned} & (p_2-r_1).n \int d^2\omega q \frac{1}{(q-p_2)^2(q-r_2)^2} \cdot \frac{1}{(q-p).n} \\ & +[(r_1-r_2).np_1^\nu + (p_1-p_2).nr_1^\nu] \int d^2\omega q \frac{q_\nu}{q^2(q-p_2)^2(q-r_2)^2} \cdot \frac{1}{(q-p).n} \end{aligned} \right] \\
& -\frac{4(p_2+r_2).n}{p.n} \left[\begin{aligned} & (p_1-r_2).n \int d^2\omega q \frac{1}{(q-p_2)^2(q-r_2)^2} \cdot \frac{1}{q.n} \\ & -[(r_2-r_1).np_2^\nu + (p_2-p_1).nr_2^\nu] \int d^2\omega q \frac{(q-p)_\nu}{q^2(q-p_2)^2(q-r_2)^2} \cdot \frac{1}{q.n} \end{aligned} \right] \quad (3.4) \\
& +\frac{8[(p_1.n)r_1^\mu + (r_1.n)p_1^\mu]}{p.n} \left[\begin{aligned} & (p_2-r_1).n \int d^2\omega q \frac{(q-p)_\mu}{q^2(q-p_2)^2(q-r_2)^2} \cdot \frac{1}{(q-p).n} \\ & -[(r_1-r_2).np_2^\nu + (p_1-p_2).nr_2^\nu] \int d^2\omega q \frac{(q-p)_\mu q_\nu}{q^2(q-p_2)^2(q-r_2)^2} \cdot \frac{1}{(q-p).n} \end{aligned} \right] \\
& +\frac{8[(p_2.n)r_2^\mu + (r_2.n)p_2^\mu]}{p.n} \left[\begin{aligned} & (p_1-r_2).n \int d^2\omega q \frac{q_\mu}{q^2(q-p_2)^2(q-r_2)^2} \cdot \frac{1}{q.n} \\ & +[(r_2-r_1).np_2^\nu + (p_2-p_1).nr_2^\nu] \int d^2\omega q \frac{(q-p)_\mu q_\nu}{q^2(q-p_2)^2(q-r_2)^2} \cdot \frac{1}{q.n} \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

É aqui onde se reconhece a existência das integrais do cone de luz, que chamaremos de **integrais fundamentais** no gauge do cone de luz. Observando com cuidado, vê-se que estas integrais fundamentais podem ser divididas em duas classes que denominaremos de **integrais escalares** e de **integrais tensoriais** no gauge do cone de luz. Para um melhor entendimento desta classificação, o leitor deverá esperar até o próximo capítulo.

O cálculo explícito destas integrais também será apresentado no próximo capítulo. Na continuação, só escreveremos os resultados obtidos em termos

destas integrais. Para a integral I_a tem-se:

$$\begin{aligned}
 I_a = & 2(p_1 + r_1).n \left[E2(-p_1, -r_1) + 2[p_2.r_2 - p_1.(p_2 + r_2)]E3(-p, -p_1, -r_1) \right. \\
 & \left. - 2(p_2 + r_2)^\nu T3_\nu(-p, -p_1, -r_1) \right] \\
 & + 4[(p_1.n)r_1^\mu + (r_1.n)p_1^\mu] \left[T3_\mu(0, -p_1, -r_1) + 2[p_2.r_2 - p_1.(p_2 + r_2)]T4_\mu(0, -p, -p_1, -r_1) \right. \\
 & \left. - 2(p_2 + r_2)^\nu T4_{\mu\nu}(0, -p, -p_1, -r_1) \right]
 \end{aligned}$$

A integral I_b será:

$$\begin{aligned}
 I_b = & -2(p_2 + r_2).n \left[E2(p_2, r_2) + 2[p_1.r_1 - p_2.(p_1 + r_1)]E3(p, p_2, r_2) \right. \\
 & \left. - 2(p_2 + r_2)^\nu T3_\nu(p, p_2, r_2) \right] \\
 & + 4[(p_2.n)r_2^\mu + (r_2.n)p_2^\mu] \left[T3_\mu(0, p_2, r_2) + 2[p_1.r_1 - p_2.(p_1 + r_1)]T4_\mu(0, p, p_2, r_2) \right. \\
 & \left. - 2(p_2 + r_2)^\nu T4_{\mu\nu}(0, p, p_2, r_2) \right]
 \end{aligned}$$

Finalmente, a integral I_c é:

$$\begin{aligned}
 I_c = & \frac{4(p_1 + r_1).n}{p.n} \left[(p_2 - r_1).n E2(-p_1, -r_1) \right. \\
 & \left. + [(r_1 - r_2).np_2^\nu + (p_1 - p_2).nr_2^\nu][T3_\nu(-p, -p_1, -r_1) + p_\nu E3(-p, -p_1, -r_1)] \right] \\
 & - \frac{4(p_2 + r_2).n}{p.n} \left[(p_1 - r_2).n E2(p_2, r_2) \right. \\
 & \left. + [(r_1 - r_2).np_2^\nu + (p_1 - p_2).nr_2^\nu][T3_\nu(0, p_2, r_2) + p_\nu E3(0, p_2, r_2)] \right] \\
 & + \frac{8[(p_1.n)r_1^\mu + (r_1.n)p_1^\mu]}{p.n} \left[(p_2 - r_1).n T3_\mu(-p, -p_1, -r_1) \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -[(r_1 - r_2).np_2^\nu + (p_1 - p_2).nr_2^\nu][T3_{\mu\nu}(-p, -p_1, -r_1) + p_\nu T3_\mu(-p, -p_1, -r_1)] \\
& + \frac{8[(p_2.n)r_2^\mu + (r_2.n)p_2^\mu]}{p.n} \left[(p_1 - r_2).nT3_\mu(0, p_2, r_2) \right. \\
& \left. - [(r_1 - r_2).np_2^\nu + (p_1 - p_2).nr_2^\nu][T3_{\mu\nu}(0, p_2, r_2) - p_\nu T3_\mu(0, p_2, r_2)] \right]
\end{aligned}$$

3.3.1 Resultados.

Juntando todos os termos e usando as integrais do cone de luz, chegaremos finalmente a:

$$\mathcal{M}_{Box'}(s) = g^4 R_j^n R_m^l R_k^m R_n^i \left[\bigotimes + I_a + I_b + I_c \right]$$

Este resultado ainda é incompleto, pois estão faltando somar aqueles processos que vêm dos canais t e u . Desta forma chegaremos ao resultado final:

$$\mathcal{M}_{Box} = \mathcal{M}_{Box'}(s) + \mathcal{M}_{Box'}(t) + \mathcal{M}_{Box'}(u) \quad (3.5)$$

3.3.2 Observações.

O resultado obtido usando a prescrição causal concorda (fazendo o limite necessário) com aquele achado recentemente por Leibbrandt [16]. O que é realmente interessante é que o “Box” escalar **não apresenta pólos para o limite $\omega \rightarrow 2$** .

3.4 “Box” Escalar-Vetorial.

O gráfico mostrando os momentos externos e internos está detalhado na figura (3.11). Aplicando as regras de Feynman (2.1) obteremos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{Box^{**}\mu\nu} &= \int d^2\omega \, q \cdot i(2\pi)^4 g R_j^n (q - 2p_2)_\alpha \cdot \frac{-i}{(2\pi)^4 q^2} \left[g^{\alpha\beta} - \frac{(q^\alpha n^\beta - q^\beta n^\alpha)}{q.n} \right] \\
&\quad \cdot i(2\pi)^4 g R_m^l (q - 2r_2)_\beta \cdot \frac{i}{(2\pi)^4 (q - r_2)^2} \cdot i(2\pi)^4 g R_k^m (q - p + 2r_1)_\mu \\
&\quad \cdot \frac{-i}{(2\pi)^4 (q - p)^2} \cdot i(2\pi)^4 g R_n^i (q - p + 2p_1)_\nu \cdot \frac{i}{(2\pi)^4 (q - p_2)^2}
\end{aligned}$$

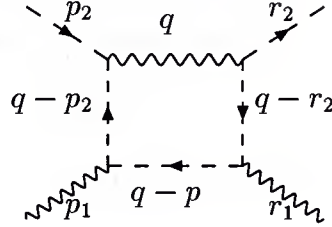


Figura 3.11: “Box” escalar-vetorial

Simplificando:

$$\mathcal{M}_{Box^{*'}_{\mu\nu}} = g^4 (R^2)_m^n R_j^n R_m^l \left[\bigotimes + 2(p_2 + r_2) \cdot n \int d^2\omega q \cdot \frac{A_{\mu\nu}}{(q-p)^2 (q-p_2)^2 (q-r_2)^2} \cdot \frac{1}{q \cdot n} \right. \\ \left. - 4[(p_2 \cdot n) r_2^\gamma - (r_2 \cdot n) p_2^\gamma] \int d^2\omega q \cdot \frac{A_{\mu\nu} q_\gamma}{q^2 (q-p)^2 (q-p_2)^2 (q-r_2)^2} \cdot \frac{1}{q \cdot n} \right] \quad (3.6)$$

Sendo:

$$A_{\mu\nu} = (2q - p - p_2)_\mu (2q - p - r_2)_\nu \\ \bigotimes = (\text{livre de pólos } (q \cdot n)^{-1})$$

Novamente, nos encontramos ante as integrais do cone de luz que, como já se falou anteriormente, serão calculadas no capítulo seguinte. Na continuação somente colocaremos os resultados.

3.4.1 Resultados.

Juntando todos os termos e usando as integrais do cone de luz, chegaremos finalmente a:

$$\mathcal{M}_{Box^{*'}(s)_{\mu\nu}} = g^4 (R^2)_m^n R_j^n R_m^l \left[\bigotimes + 2(p_2 + r_2) \cdot n \left[4T3_{\mu\nu}(p, p_2, r_2) - 2(p + r_2)_\nu T3_\mu(p, p_2, r_2) \right. \right. \\ \left. \left. - 2(p + p_2)_\mu T3_\nu(p, p_2, r_2) + (p + p_2)_\mu (p + r_2)_\nu E3(p, p_2, r_2) \right] \right. \\ \left. - 4[(p_2 \cdot n) r_2^\gamma - (r_2 \cdot n) p_2^\gamma] \left[4T4_{\mu\nu\gamma}(0, p, p_2, r_2) - 2(p + r_2)_\nu T4_{\mu\gamma}(0, p, p_2, r_2) \right. \right. \\ \left. \left. - 2(p + p_2)_\mu T4_{\nu\gamma}(0, p, p_2, r_2) + (p + p_2)_\mu (p + r_2)_\nu T4_\gamma(0, p, p_2, r_2) \right] \right]$$

Mas este resultado somente foi calculado para o canal s. Então, para-se obter o resultado completo será necessário somar-lhe o resultado para o canal t (observe-se que não se tem canal u).

Sendo assim, finalmente se chega a:

$$\mathcal{M}_{Box^*\mu\nu} = \mathcal{M}_{Box^*}(s)_{\mu\nu} + \mathcal{M}_{Box^*}(t)_{\mu\nu} \quad (3.7)$$

3.4.2 Observações.

Neste processo os pólos “espúrios” desaparecem na direções (i) e (-), mas ainda, aparentemente, se tem pólos “espúrios” na direção (+), que vem do setor PV. Entretanto como se observará no capítulo seguinte, haverá um cancelamento. Então tem-se que **os pólos “espúrios” desaparecem**. Somente ficam os termos não-locais que deixam a amplitude como sendo **não-covariante**.

Capítulo 4

Integrais no cone de luz.

4.1 Introdução.

Observando as equações (3.2), (3.3) e (3.4), do capítulo anterior, que são provenientes do cálculo do “box” escalar e a equação (3.6) do “box” escalar-vetorial, nota-se que se tem 7 integrais a calcular, que tem a forma seguinte:

- Primeira:

$$\int d^{2\omega} q \frac{1}{(q-a)^2(q-b)^2} \cdot \frac{1}{q.n}$$

- Segunda:

$$\int d^{2\omega} q \frac{1}{(q-a)^2(q-b)^2(q-c)^2} \cdot \frac{1}{q.n}$$

- Terceira:

$$\int d^{2\omega} q \frac{q_\mu}{(q-a)^2(q-b)^2(q-c)^2} \cdot \frac{1}{q.n}$$

- Quarta:

$$\int d^{2\omega} q \frac{q_\mu q_\nu}{(q-a)^2(q-b)^2(q-c)^2(q-d)^2} \cdot \frac{1}{q.n}$$

- Quinta:

$$\int d^{2\omega} q \frac{q_\mu}{(q-a)^2(q-b)^2(q-c)^2(q-d)^2} \cdot \frac{1}{q.n}$$

- Sexta:

$$\int d^{2\omega} q \frac{q_\mu q_\nu}{(q-a)^2(q-b)^2(q-c)^2} \cdot \frac{1}{q.n}$$

- Sétima:

$$\int d^{2\omega} q \frac{q_\mu q_\nu q_\gamma}{(q-a)^2(q-b)^2(q-c)^2(q-d)^2} \cdot \frac{1}{q.n}$$

Observe-se que estas integrais podem ser classificadas em 2 tipos, logo as integrais a calcular serão:

1. Integrais escalares:

$$EN = \int d^{2\omega} q \frac{1}{(q-a_1)^2 \cdots (q-a_N)^2} \cdot \frac{1}{q.n}$$

2. Integrais tensoriais:

$$TN_{\mu_1 \dots \mu_k} = \int d^{2\omega} q \frac{q_{\mu_1} \cdots q_{\mu_k}}{(q-a_1)^2 \cdots (q-a_N)^2} \cdot \frac{1}{q.n}$$

4.2 Integrais escalares.

Para o cálculo de cada integral destas chamadas escalares, o esquema será o seguinte:

- Para o pólo “espúrio”, aplicar a prescrição causal (ver apêndice C). Aqui a nossa integral vai se dividir em outras duas.
- Em cada uma das duas integrais, parametrizaremos os inversos dos momentos quadráticos exponencialmente, a cada inverso do quadrado do momento lhe corresponde uma parametrização (ver apêndice D).

- Logo, para o caso
 - da integral I_{PV} , será feita a integração sobre os momento usando o esquema desenvolvido por Capper, Dulwich e Litvak [18] .
 - da integral I_δ , primeiro deverá ser feita a integração sobre o momento q^+ , logo se procederá como no item anterior.
- Para calcular as integrais sobre os parâmetros, é necessário fazer uma mudança de variáveis.

É importante lembrar que o nosso objetivo é a análise dos possíveis pólos que aparecerão no limite $\omega \rightarrow 2$. Então o resultado do nosso cálculo deverá necessariamente passar por aquele limite. Observando se apresentam divergências. Para ilustrar o exposto trabalharemos em forma geral, sendo assim se tem que a integral fundamental de N-propagadores tem a forma:

$$EN(a_1, \dots, a_N) = \int d^2\omega q \frac{1}{(q - a_1)^2 \dots (q - a_N)^2} \cdot \frac{1}{q \cdot n}$$

Usando a prescrição causal chegaremos à:

$$EN = \underbrace{PV \left[\int d^2\omega q \frac{1}{(q - a_1)^2 \dots (q - a_N)^2} \cdot \frac{1}{q \cdot n} \right]}_{EN_{PV}} - i\pi \underbrace{\int d^2\omega q \frac{\text{sign}(q^0) \delta(q \cdot n)}{(q - a_1)^2 \dots (q - a_N)^2}}_{EN_\delta}$$

Agora temos duas integrais a calcular:

• Cálculo de EN_{PV} :

Parametrizando:

$$EN_{PV} = i^N \int_0^\infty d\alpha_1 \dots d\alpha_N \cdot e^{-i(\alpha_1 a_1^2 + \dots + \alpha_N a_N^2)} \cdot \int \frac{d^2\omega q}{q \cdot n} \cdot e^{i[-(\alpha_1 + \dots + \alpha_N)q^2 + 2(\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_N a_N) \cdot q]}$$

Integrando sob os momentos:

$$EN_{PV} = i^{N+\omega+1} \pi^\omega \int_0^\infty d\alpha_1 \dots d\alpha_N \cdot \frac{(\alpha_1 + \dots + \alpha_N)^{1-\omega}}{\alpha_1^{1+\omega} + \dots + \alpha_N^{1+\omega}} \cdot e^{i \left[\frac{(\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_N a_N)^2}{\alpha_1 + \dots + \alpha_N} - (\alpha_1 a_1^2 + \dots + \alpha_N a_N^2) \right]}$$

Fazendo a mudança de variáveis (ver apêndice D):

$$EN_{PV} = i^{N+\omega+1} \pi^\omega \int_0^\infty dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots dx_N \frac{x_1^{N-1-\omega}}{a_1^+ - (a_1 - a_2)^+ x_2 - \cdots - (a_1 - a_N)^+ x_N} \\ \cdot e^{-x_1 \cdot i([a_1^2 - (a_1^2 - a_2^2)x_2 - \cdots - (a_1^2 - a_N^2)x_N] - [a_1 - (a_1 - a_2)x_2 - \cdots - (a_1 - a_N)x_N]^2)}$$

Integrando sob x_1 , finalmente se obtém:

$$EN_{PV} = i^{2\omega+1} \pi^\omega \Gamma(N - \omega) \quad (4.1) \\ \cdot \int_0^1 dx_2 \cdots dx_N \frac{([a_1^2 - (a_1^2 - a_2^2)x_2 - \cdots - (a_1^2 - a_N^2)x_N] - [a_1 - (a_1 - a_2)x_2 - \cdots - (a_1 - a_N)x_N]^2)^{\omega-N}}{a_1^+ - (a_1 - a_2)^+ x_2 - \cdots - (a_1 - a_N)^+ x_N}$$

• Cálculo de EN_δ :

Parametrizando:

$$EN_\delta = -i^{N+1} \pi \int_0^\infty d\alpha_1 \cdots d\alpha_N \cdot e^{-i(\alpha_1 a_1^2 + \cdots + \alpha_N a_N^2)} \\ \cdot \int d^{2\omega} q \cdot \delta(q^+) \text{sign}(q^0) \cdot e^{i[-(\alpha_1 + \cdots + \alpha_N)q^2 + 2(\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_N a_n) \cdot q]}$$

Seja:

$$\alpha = -(\alpha_1 + \cdots + \alpha_N) \\ \rho = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_N a_n$$

Decompondo em coordenadas do cone de luz:

$$EN_\delta = -i^{N+1} \pi \int_0^\infty d\alpha_1 \cdots d\alpha_N \cdot e^{-i(\alpha_1 a_1^2 + \cdots + \alpha_N a_N^2)} \\ \cdot \int d^{2(\omega-1)} \hat{q} dq^+ dq^- \cdot \delta(q^+) \text{sign}(q^0) \cdot e^{i[\alpha(2q^- q^+ - \hat{q}^2) + 2\rho^+ \cdot q^- + 2\rho^- \cdot q^+ - 2\hat{\rho} \cdot \hat{q}]}$$

Integrando sob q^+ se tem:

$$EN_\delta = -i^{N+1} \pi \int_0^\infty d\alpha_1 \cdots d\alpha_N \cdot e^{-i(\alpha_1 a_1^2 + \cdots + \alpha_N a_N^2)} \\ \cdot \int d^{2(\omega-1)} \hat{q} \cdot e^{i[-\alpha \hat{q}^2 - 2\hat{\rho} \cdot \hat{q}]} \int_{-\infty}^\infty dq^- \cdot e^{i2\rho^+ \cdot q^-} \text{sign}(q^-)$$

Integrando sob os momentos $\hat{q}$ e q^- :

$$EN_\delta = -i^{N+\omega+1}\pi^\omega \int_0^\infty d\alpha_1 \cdots d\alpha_N \frac{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_N)^{1-\omega}}{\alpha_1^+ \alpha_1^+ + \cdots + \alpha_N^+ \alpha_N^+} \cdot e^{i \left[\frac{(\alpha_1 \hat{a}_1 + \cdots + \alpha_N \hat{a}_N)^2}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_N} - (\alpha_1 a_1^2 + \cdots + \alpha_N a_N^2) \right]}$$

Mudando de variáveis (ver apêndice D):

$$EN_\delta = -i^{N+\omega+1}\pi^\omega \int_0^\infty dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots dx_N \frac{x_1^{N-1-\omega}}{a_1^+ - (a_1 - a_2)^+ x_2 - \cdots - (a_1 - a_N)^+ x_N} \cdot e^{-x_1 \cdot i \left([a_1^2 - (a_1^2 - a_2^2)x_2 - \cdots - (a_1^2 - a_N^2)x_N] - [\hat{a}_1 - (\hat{a}_1 - \hat{a}_2)x_2 - \cdots - (\hat{a}_1 - \hat{a}_N)x_N]^2 \right)}$$

Integrando sob x_1 , finalmente se obtém:

$$EN_\delta = -i^{2\omega+1}\pi^\omega \Gamma(N - \omega) \quad (4.2) \\ \cdot \int_0^1 dx_2 \cdots dx_N \frac{([a_1^2 - (a_1^2 - a_2^2)x_2 - \cdots - (a_1^2 - a_N^2)x_N] - [\hat{a}_1 - (\hat{a}_1 - \hat{a}_2)x_2 - \cdots - (\hat{a}_1 - \hat{a}_N)x_N]^2)^{\omega-N}}{a_1^+ - (a_1 - a_2)^+ x_2 - \cdots - (a_1 - a_N)^+ x_N}$$

No que se segue calcula-se as integrais que foram denominadas de escalares e para isto utilizaremos os resultados obtidos nas equações (4.1) e (4.2).

4.2.1 Integral E2.

$$E2(a, b) = \int d^{2\omega} q \frac{1}{(q - a)^2 (q - b)^2} \cdot \frac{1}{q \cdot n}$$

Usando a prescrição causal chegaremos à:

$$E2 = PV \underbrace{\left[\int d^{2\omega} q \frac{1}{(q - a)^2 (q - b)^2} \cdot \frac{1}{q \cdot n} \right]}_{E2_{PV}} - i\pi \underbrace{\int d^{2\omega} q \frac{\text{sign}(q^0) \delta(q \cdot n)}{(q - a)^2 (q - b)^2}}_{E2_\delta}$$

Agora temos duas integrais a calcular:

- Cálculo de $E2_{PV}$:

Da equação (4.1) se reconhece:

$$\begin{aligned} E2_{PV} &= i^{2\omega+1} \Gamma(2-\omega) \int_0^1 dx \frac{([a^2 - (a^2 - b^2)x] - [a - (a-b)x]^2)^{\omega-2}}{a^+ - (a-b)^+ x} \\ &= \frac{i^{2\omega+1} [(a-b)^2]^{\omega-2} \Gamma(2-\omega)}{a^+} \int_0^1 dx \frac{x^{\omega-2} (1-x)^{\omega-2}}{1-\lambda x} \end{aligned}$$

Sendo:

$$\lambda = \frac{(a-b)^+}{a^+}$$

Finalmente:

$$E2_{PV} = \frac{i^{2\omega} \pi^\omega \cdot [(a-b)^2]^{\omega-2}}{a^+} \cdot \Gamma(2-\omega) B(\omega-1, \omega-1) \cdot {}_2F_1(1, \omega-1; 2\omega-2; \lambda)$$

Observe-se que fazendo $b=0$, então se retoma a integral calculada por Capper [18] [14].

Tomando-se o limite de quatro dimensões ($\omega \rightarrow 2$):

$$E2_{PV} = \frac{i\pi^2}{(2-\omega)(a-b)^+} \cdot \ln\left(\frac{b^+}{a^+}\right) + \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(2-\omega)$$

Integral que **apresenta um pólo simples** para quando ($\omega \rightarrow 2$).

- Cálculo de $E2_\delta$.

Usando a expressão encontrada para EN_δ em (4.2), obteremos que:

$$\begin{aligned} E2_\delta &= \frac{-i^{2\omega+1} \pi^\omega \Gamma(2-\omega)}{a^+} \cdot \int_0^1 dx \frac{([a^2 - (a^2 - b^2)x] - [\hat{a} - (\hat{a} - \hat{b})x]^2)^{\omega-2}}{a^+ - (a-b)^+ x} \\ &= -i^{2\omega+1} \pi^\omega \Gamma(2-\omega) \cdot \int_0^1 dx \frac{[Q(x)]^{\omega-2}}{1-\lambda x} \end{aligned}$$

Sendo:

$$Q(x) = [a^2 - (a^2 - b^2)x] - [\hat{a} - (\hat{a} - \hat{b})x]^2$$

Expandindo a potência de $(\omega - 2)$ (apêndice D):

$$E2_\delta = -\frac{i^{2\omega+1}\pi^\omega\Gamma(2-\omega)}{a^+} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(\omega-2)^k}{k!} \int_0^1 dx \frac{\ln^k Q(x)}{1-\lambda x}$$

Ressaltando que quando $b = 0$, então se chega à integral calculada pelos professores Pimentel e Suzuki [14].

Voltando para o limite de quatro dimensões ($\omega \rightarrow 2$), se observa que teremos:

$$\begin{aligned} E2_\delta &= -\frac{i\pi^2}{a^+(2-\omega)} \cdot \int_0^1 dx \frac{1}{1-\lambda x} + \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(2-\omega) \\ &= -\frac{i\pi^2}{(2-\omega)(a-b)^+} \cdot \ln\left(\frac{b^+}{a^+}\right) + \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(2-\omega) \end{aligned}$$

Esta integral também tem um pólo simples para o caso ($\omega \rightarrow 2$), mas...

A soma das integrais $E2_{PV}$ e $E2_\delta$, neste limite, se cancela identicamente, é dizer, finalmente se obtém:

$$E2 = E2_{PV} + E2_\delta = \mathcal{O}(2-\omega) \quad (4.3)$$

Observe que sendo assim, a integral **E2** não apresenta pólos para o caso $\omega \rightarrow 2$.

4.2.2 Integral E3.

$$E3(a, b, c) = \int d^{2\omega} q \frac{1}{(q-a)^2(q-b)^2(q-c)^2} \cdot \frac{1}{q.n}$$

Usando a prescrição causal chegaremos à:

$$E3 = \underbrace{PV \left[\int d^{2\omega} q \frac{1}{(q-a)^2(q-b)^2(q-c)^2} \cdot \frac{1}{q.n} \right]}_{E3_{PV}} - \underbrace{i\pi \int d^{2\omega} q \frac{\text{sign}(q^0)\delta(q.n)}{(q-a)^2(q-b)^2(q-c)^2}}_{E3_\delta}$$

Novamente temos duas integrais a calcular:

- Cálculo de $E3_{PV}$:

Da equação (4.1) se reconhece:

$$E3_{PV} = \frac{i^{2\omega+1}\pi^\omega\Gamma(3-\omega)}{a^+} \int_0^1 dx dy \frac{([a^2 - (a^2 - b^2)x - (a^2 - c^2)y] - [a - (a-b)x - (a-c)y]^2)^{\omega-3}}{1 - \lambda x - \gamma y}$$

Sendo:

$$\lambda = \frac{(a-b)^+}{a^+}$$

$$\gamma = \frac{(a-c)^+}{a^+}$$

Expandindo em séries:

$$E3_{PV} = \frac{i^{2\omega+1}\pi^\omega\Gamma(3-\omega)}{a^+} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(\omega-3)^k}{k!} \underbrace{\int_0^1 dx dy \frac{\ln^k P(x,y)}{1 - \lambda x - \gamma y}}_{\text{independente de } \omega}$$

Onde:

$$P(x,y) = [a^2 - (a^2 - b^2)x - (a^2 - c^2)y] - [a - (a-b)x - (a-c)y]^2$$

Que para o caso limite $\omega \rightarrow 2$, pode-se escrever como sendo:

$$E3_{PV} = \frac{i\pi^2\Gamma(1)}{a^+} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_0^1 dx dy \frac{\ln^k P(x,y)}{1 - \lambda x - \gamma y}$$

Integral que **não apresenta pólos** para quando $(\omega \rightarrow 2)$.

- Cálculo de $E3_\delta$.

Usando a expressão encontrada para EN_δ em (4.2), obteremos que:

$$\begin{aligned} E3_\delta &= -i^{2\omega+1}\pi^\omega\Gamma(3-\omega) \\ &\cdot \int_0^1 dx dy \frac{([a^2 - (a^2 - b^2)x - (a^2 - c^2)y] - [\hat{a} - (\hat{a} - \hat{b})x - (\hat{a} - \hat{c})y]^2)^{\omega-2}}{a^+ - (a-b)^+x - (a-c)^+y} \\ &= \frac{-i^{2\omega+1}\pi^\omega\Gamma(3-\omega)}{a^+} \cdot \int_0^1 dx dy \frac{[Q(x,y)]^{\omega-3}}{1 - \lambda x - \gamma y} \end{aligned}$$

Sendo:

$$Q(x, y) = [a^2 - (a^2 - b^2)x - (a^2 - c^2)y] - [\hat{a} - (\hat{a} - \hat{b})x - (\hat{a} - \hat{c})y]^2$$

Expandindo a potência de $(\omega - 2)$ (apêndice D):

$$E3_\delta = -\frac{i^{2\omega+1}\pi^\omega\Gamma(3-\omega)}{a^+} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(\omega-3)^k}{k!} \underbrace{\int_0^1 dx dy \frac{\ln^k Q(x, y)}{1 - \lambda x - \gamma y}}_{\text{independente de } \omega}$$

No caso limite de quatro dimensões ($\omega \rightarrow 2$), se tem:

$$E3_\delta = -\frac{i\pi^2\Gamma(1)}{a^+} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_0^1 dx dy \frac{\ln^k Q(x, y)}{1 - \lambda x - \gamma y}$$

Esta integral também **não apresenta pólos** para o caso ($\omega \rightarrow 2$).

Juntando as integrais $E3_{PV}$ e $E3_\delta$ se obtém a expressão final para $E3$:

$$E3_{PV} = \frac{i\pi^2\Gamma(1)}{a^+} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_0^1 \frac{dx dy}{1 - \lambda x - \gamma y} \cdot \ln^k \left[\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \right] \quad (4.4)$$

Logo se conclui que a integral $E3$ **não apresenta pólos** para o caso limite ($\omega \rightarrow 2$).

4.3 Integrais Tensoriais.

Para o cálculo destas integrais, devemos fazer uso das expressões que foram calculadas no apêndice D. Observe-se em particular a aparição de termos não locais na direção x^- . Logo ao aplicar a prescrição causal, como já se sabe, obteremos duas integrais.

- Para a primeira integral (setor PV), observemos que todo o processo é parecido ao caso onde se calculou a integral EN na equação (4.1), com a diferença que a integração sob os momentos terá agora um fator multiplicativo adicional para a equação (4.1), fator que é possível de ver nas equações (D.2), (D.3) e (D.4) do apêndice, como se vê a

continuação para o caso da integral tensorial de ordem 1 (vetor), na equação seguinte:

$$(TN_\mu)_{PV} = i^{N+\omega+1} \pi^\omega \int_0^\infty d\alpha_1 \cdots d\alpha_N \cdot \frac{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_N)^{1-\omega}}{\alpha_1 a_1^+ + \cdots + \alpha_N a_N^+} \\ \cdot e^{i \left[\frac{(\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_N a_N)^2}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_N} - (\alpha_1 a_1^2 + \cdots + \alpha_N a_N^2) \right]} \\ \cdot \underbrace{\left[\frac{\alpha_1 a_{1\mu} + \cdots + \alpha_N a_{N\mu}}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_N} - \frac{1}{2i} \frac{\mathbf{e}^-}{\alpha_1 a_1^+ + \cdots + \alpha_N a_N^+} \right]}_{\text{este é o fator adicional}}$$

Mudando de variáveis:

$$(TN_\mu)_{PV} = i^{N+\omega+1} \pi^\omega \int_0^\infty dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots dx_N \frac{x_1^{N-\omega-1}}{R^+(x_2, \cdots, x_N)} \\ \cdot e^{-x_1 \cdot i P(x_2, \cdots, x_N)} \cdot \left[R_\mu(x_2, \cdots, x_N) - \frac{1}{2i} \frac{\mathbf{e}^-}{x_1 \cdot R^+(x_2, \cdots, x_N)} \right]$$

Sendo:

$$\begin{aligned} P(x_2, \cdots, x_N) &= [a_1^2 - (a_1^2 - a_2^2)x_2 - \cdots - (a_1^2 - a_N^2)x_N] \\ &\quad - [a_1 - (a_1 - a_2)x_2 - \cdots - (a_1 - a_N)x_N]^2 \\ R_\mu(x_2, \cdots, x_N) &= a_{1\mu} - (a_1 - a_2)_\mu x_2 - \cdots - (a_1 - a_N)_\mu x_N \quad (4.5) \\ Q(x_2, \cdots, x_N) &= [a_1^2 - (a_1^2 - a_2^2)x_2 - \cdots - (a_1^2 - a_N^2)x_N] \\ &\quad - [\hat{a}_1 - (\hat{a}_1 - a_2)x_2 - \cdots - (\hat{a}_1 - \hat{a}_N)x_N]^2 \end{aligned}$$

Integrando sob x_1 :

$$(TN_\mu)_{PV} = i^{2\omega+1} \pi^\omega \left[\Gamma(N-\omega) \int_0^1 dx_2 \cdots dx_N \frac{[P(x_2, \cdots, x_N)]^{N-\omega}}{R^+(x_2, \cdots, x_N)} \cdot R_\mu(x_2, \cdots, x_N) \right. \\ \left. - \frac{\Gamma(N-\omega-1)}{2} \int_0^1 dx_2 \cdots dx_N \frac{[P(x_2, \cdots, x_N)]^{\omega-N+1}}{[R^+(x_2, \cdots, x_N)]^2} \mathbf{e}^- \right] \quad (4.6)$$

- Para a segunda integral (setor δ ou setor de modo zero), ter-se-ão varias direções canceladas, devido a função $\delta(q^+)$ no numerador . Observe-se

que qualquer integral tensorial de modo zero não apresenta componentes na direção (+).

Em particular escreveremos a expressão para a integral vetorial deste setor:

$$\begin{aligned}
 (TN_\mu)_\delta &= -i^{N+1}\pi \int_0^\infty d\alpha_1 \cdots \alpha_N \cdot e^{-i(\alpha_1 a_1^2 + \cdots + \alpha_N a_N^2)} \\
 &\cdot \left[\int d^{2(\omega-1)} \hat{q} \cdot \hat{q} e^{i(-\alpha \hat{q}^2 - 2\hat{p} \cdot \hat{q})} \int_{-\infty}^\infty dq^- \text{sign}(q^-) e^{2i\rho^+ q^-} \right. \\
 &\left. + e^- \int d^{2(\omega-1)} \hat{q} \cdot e^{i(-\alpha \hat{q}^2 - 2\hat{p} \cdot \hat{q})} \int_{-\infty}^\infty dq^- q^- \text{sign}(q^-) e^{2i\rho^+ q^-} \right] \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

Como se observa e já se falou, não se tem componentes na direção (+).

4.3.1 Integral $T3_\mu$.

$$T3_\mu(a, b, c) = \int d^{2\omega} q \frac{q_\mu}{(q-a)^2 (q-b)^2 (q-c)^2} \cdot \frac{1}{q \cdot n}$$

As integrais para o sector PV e do setor de modo zero serão analisadas a seguir:

• Análise de $(T3_\mu)_{PV}$:

A partir da equação (4.6), escolheremos o caso $N = 3$, sendo assim, a integral $(T3_\mu)_{PV}$ será:

$$\begin{aligned}
 (T3_\mu)_{PV} &= i^{2\omega+1} \pi^\omega \left[\Gamma(3-\omega) \int_0^1 dx dy \frac{[P(x, y)]^{3-\omega}}{R^+(x, y)} \cdot R_\mu(x, y) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\Gamma(2-\omega)}{2} \int_0^1 dx dy \frac{[P(x, y)]^{2-\omega}}{[R^+(x, y)]^2} e^- \right]
 \end{aligned}$$

Sendo $P(x, y)$ e $R_\mu(x, y)$ definidos de acordo com a equação (4.5). Observe-se que no caso limite ($\omega \rightarrow 2$) se tem divergência na direção (-).

- Análise de $(T\mathbf{3}_\mu)_\delta$:

Como vimos, esta integral não possui componentes na direção (+), contudo na direção (-) apresenta uma singularidade. Usando a expressão para (4.7), e integrando sob os momentos se tem:

$$(T\mathbf{3}_-)_\delta = i^{2\omega+1} \pi^\omega \left[\frac{\Gamma(2-\omega)}{2} \int_0^1 dx dy \frac{[Q(x,y)]^{2-\omega}}{[R^+(x,y)]^2} e^- \right]$$

Sendo $Q(x,y)$ definido como na equação (4.5).

Daqui a análise é similar ao feito para o caso **E2**, só que aqui se tem um pólo simples. Esse pólo simples cancela-se com aquele do setor PV como é fácil de ver. Concluimos que a integral $T\mathbf{3}_\mu$ é livre de pólos “espúrios”.

4.3.2 Integral $T\mathbf{3}_{\mu\nu}$.

$$T\mathbf{3}_{\mu\nu}(a,b,c) = \int d^{2\omega} q \frac{q_\mu q_\nu}{(q-a)^2 (q-b)^2 (q-c)^2} \cdot \frac{1}{q \cdot n}$$

Aplicando a prescrição causal obteremos duas integrais:

- Análise de $(T\mathbf{3}_{\mu\nu})_{PV}$:

Observemos que para calcular a integral tensorial $(TN_\mu)_{PV}$ se partiu da integral escalar EN ; o que foi modificado vem da parte que integrara os momentos, como se descreve nas equações (D.2), (D.3) ou (D.4) do apêndice. Esta modificação é na verdade colocar um fator que multiplicará o valor antigamente usado no caso escalar. Para a integral desta seção usaremos o fator que vem da equação (D.3). Logo se fará uma mudança de variáveis, onde se tem que substituir:

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow -x_1 \\ \rho_\mu &\rightarrow x_1 R_\mu(x_2 \cdots x_N) \end{aligned}$$

De onde $R_\mu(x_2 \cdots x_N)$ foi definido na equação (4.5).

Mais ainda, as funções $g_\alpha(\rho^+)$, e $h_\alpha(\rho^+)$, se tem o seguinte

$$\begin{aligned} g_\alpha(\rho^+) &\sim \frac{1}{\rho^+} \rightarrow \frac{1}{x_1 R^+} \\ h_\alpha(\rho^+) &\sim \frac{1}{\rho^{+2}} \rightarrow \frac{1}{(x_1 R^+)^2} \end{aligned}$$

A integração sob x_1 tem que ser feita, logo cada fator de (D.3) alterará o expoente de x_1 , fato que mudará o argumento da função Γ , ou seja, a possibilidade de não ter pólos. Os termos do fator de multiplicação são:

$$f^{\mu\nu} \sim \left[(x_1)^{-1} g^{\mu\nu} + (x_1)^0 R^\mu R^\nu + \frac{(x_1)^{-1}}{(R^+)} R^\mu e^- + \frac{(x_1)^{-2}}{(R^+)^2} e^- e^- \right]$$

fator que tem que ser multiplicado por $(x_1)^{N-\omega-1}$ antes de ser integrado sob x_1 . Isto implicará que no limite $(\omega \rightarrow 2)$ e para nosso caso $N = 3$, se tem pólos para as componentes $(T3_{\mu\nu})_{PV}$, $(T3_{\mu-})_{PV}$ e $(T3_{--})_{PV}$

$$(T3_{\mu\nu})_{PV} = \frac{i^{2\omega+3}\pi^\omega}{2}\Gamma(2-\omega) \int_0^1 \frac{dx dy dz}{R^+(x,y)} [P(x,y)]^{\omega-2} g_{\mu\nu}$$

$$(T3_{\mu-})_{PV} = i^{2\omega+3}\pi^\omega \Gamma(2-\omega) \int_0^1 \frac{dx dy dz}{[R^+(x,y)]^2} [P(x,y)]^{\omega-2} R_\mu e^-$$

$$(T3_{--})_{PV} = i^{2\omega+3}\pi^\omega \Gamma(1-\omega) \int_0^1 \frac{dx dy dz}{[R^+(x,y)]^3} [P(x,y)]^{\omega-1} e^- e^-$$

• Análise de $(T3_{\mu\nu})_\delta$:

Seja $\alpha \equiv (-, i)$, analisaremos $(T3_{\alpha\beta})_\delta$:

$$(T3_{i-})_\delta = \frac{i^{2\omega+3}\pi^\omega}{2}\Gamma(2-\omega) \int_0^1 \frac{dx dy dz}{[R^+(x,y)]^2} [Q(x,y)]^{\omega-2} R^i(x,y) e^-$$

$$(T3_{-j})_\delta = \frac{i^{2\omega+3}\pi^\omega}{2}\Gamma(2-\omega)\int_0^1 \frac{dxdydz}{[R^+(x,y)]^2}[Q(x,y)]^{\omega-2}\mathbf{e}^-R^j(x,y)$$

$$(T3_{ij})_\delta = (\text{termo} - \text{finito}) + i^{2\omega+3}\pi^\omega\Gamma(2-\omega)\int_0^1 \frac{dxdydz}{R^+(x,y)}[Q(x,y)]^{\omega-2}g_{ij}$$

$$(T3_{--})_\delta = i^{2\omega+3}\pi^\omega\Gamma(1-\omega)\int_0^1 \frac{dxdydz}{[R^+(x,y)]^3}[Q(x,y)]^{\omega-1}\mathbf{e}^-\mathbf{e}^-$$

Observação: Novamente os termos de pólos simples se cancelam mutuamente.

Conclui-se que a integral $\mathbf{T3}_{\mu\nu}$ não tem pólos.

4.3.3 Integral $\mathbf{T4}_\mu$.

$$T4_\mu(a, b, c, d) = \int d^{2\omega}q \frac{q_\mu}{(q-a)^2(q-b)^2(q-c)^2(q-d)^2} \cdot \frac{1}{q \cdot n}$$

As integrais para o sector PV e do setor de modo zero serão analisadas a seguir:

- Análise de $(\mathbf{T4}_\mu)_{\mathbf{PV}}$:

Apartir da equação (4.6), escolheremos o caso $N = 4$, logo, a integral $(\mathbf{T4}_\mu)_{\mathbf{PV}}$ será:

$$(T4_\mu)_{PV} = i^{2\omega+1}\pi^\omega \left[\Gamma(4-\omega) \int_0^1 dxdy \frac{[P(x,y,z)]^{4-\omega}}{R^+(x,y,z)} \cdot R_\mu(x,y,z) \right]$$

$$-\frac{\Gamma(3-\omega)}{2} \int_0^1 dx dy dz \frac{[P(x,y,z)]^{3-\omega}}{[R^+(x,y,z)]^2} e^{-}$$

Observe-se que no caso limite ($\omega \rightarrow 2$) não se tem pólos.

• Análise de $(\mathbf{T4}_\mu)_\delta$:

Similarmente e partindo da equação (4.7), é fácil de ver que esta integral também é livre de pólos.

Sendo assim, concluímos que **a integral $\mathbf{T4}_\mu$ não apresenta pólos para $\omega \rightarrow 2$.**

4.3.4 Integral $\mathbf{T4}_{\mu\nu}$.

$$T4_{\mu\nu}(a, b, c, d) = \int d^{2\omega} q \frac{q_\mu q_\nu}{(q-a)^2(q-b)^2(q-c)^2(q-d)^2} \cdot \frac{1}{q \cdot n}$$

As integrais para o setor PV e do setor de modo zero serão analisadas usando como modelo de procedimento aquele que se usou para obter o resultado anterior. Nós estamos interessados especialmente na análise dos possíveis pólos.

• Análise de $(\mathbf{T4}_{\mu\nu})_{\text{PV}}$:

Trabalhando similarmente ao caso onde foi analisada a integral $(\mathbf{T3}_{\mu\nu})_{\text{PV}}$. Logo se fará uma mudança de variáveis, onde se tem que substituir:

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow -x_1 \\ \rho_\mu &\rightarrow x_1 R_\mu(x_2 \cdots x_N) \end{aligned}$$

Donde $R_\mu(x_2 \cdots x_N)$ foi definido na equação (4.5).

Mais ainda, as funções $g_\alpha(\rho^+)$, e $h_\alpha(\rho^+)$, se tem o seguinte

$$\begin{aligned} g_\alpha(\rho^+) &\sim \frac{1}{\rho^+} \rightarrow \frac{1}{x_1 R^+} \\ h_\alpha(\rho^+) &\sim \frac{1}{\rho^{+2}} \rightarrow \frac{1}{(x_1 R^+)^2} \end{aligned}$$

Agora já estamos em condições de fazer a análise.

Observa-se que a integração sob x_1 tem que ser feita, logo cada fator de (D.3) alterará o expoente de x_1 , fato que mudará o argumento da função Γ , ou seja, a possibilidade de não ter pólos. Os termos do fator de multiplicação são:

$$f^{\mu\nu} \sim \left[(x_1)^{-1} g^{\mu\nu} + (x_1)^0 R^\mu R^\nu + \frac{(x_1)^{-1}}{(R^+)} R^\mu e^- + \frac{(x_1)^{-2}}{(R^+)^2} e^- e^- \right]$$

fator que tem que ser multiplicado por $(x_1)^{N-\omega-1}$ antes de ser integrado sob x_1 . Isto implicará que no limite ($\omega \rightarrow 2$) e para nosso caso $N = 4$, se tem pólos para a componente $(T4_{--})_{PV}$:

$$(T4_{--})_{PV} = i^{2\omega+3} \pi^\omega \Gamma(2-\omega) \int_0^1 \frac{dx dy dz}{[R^+(x, y, z)]^2} [P(x, y, z)]^{\omega-2} e^- e^-$$

• Análise de $(T4_{\mu\nu})_\delta$:

Para este caso, analisaremos a integral na direção $T4_{--}$, que é onde se tem singularidades. Para a integral $(T4_{--})_\delta$:

$$(T4_{--})_\delta = -i^{2\omega+3} \pi^\omega \Gamma(2-\omega) \int_0^1 \frac{dx dy dz}{[R^+(x, y, z)]^2} [Q(x, y, z)]^{\omega-2} e^- e^-$$

Também como no caso do setor PV , apresenta pólos, mas são pólos simples, que se cancelam exatamente com os do setor PV .

Conclui-se que a integral $T4_{\mu\nu}$ não tem pólos “espúrios”.

4.3.5 Integral $T4_{\mu\nu\gamma}$.

$$T4_{\mu\nu\gamma}(a, b, c, d) = \int d^2\omega q \frac{q_\mu q_\nu q_\gamma}{(q-a)^2 (q-b)^2 (q-c)^2 (q-d)^2} \cdot \frac{1}{q \cdot n}$$

As integrais para o setor PV e do setor de modo zero serão analisadas a seguir:

• Análise de $(T4_{\mu\nu\gamma})_{PV}$:

Agora já se tem experiência na análise da parte divergente, e a faremos rapidamente para o caso desta integral tensorial. Só estaria faltando achar como varia $j_\alpha(\rho^+)$; fazendo o cálculo se tem que:

$$j_\alpha(\rho^+) \sim \frac{1}{\rho^{+3}} \rightarrow \frac{1}{(x_1 R^+)^3}$$

O fator multiplicante agora é:

$$\begin{aligned} f^{\mu\nu\gamma} \sim & \left[(x_1)^{-1} \left[(g^{\mu\nu} R^\gamma + g^{\mu\gamma} R^\nu + g^{\nu\gamma} R^\mu) \right] + 2(x_1)^0 R^\mu R^\nu R^\gamma \right. \\ & + \frac{(x_1)^{-2}}{R^+} \left[(g^{\mu\nu} \mathbf{e}^- + g^{\mu\gamma} \mathbf{e}^- + \mathbf{e}^- g^{\nu\gamma}) \right] \\ & + \frac{(x_3)^{-1}}{R^{+2}} \left[(R^\mu R^\nu \mathbf{e}^- + R^\mu \mathbf{e}^- R^\gamma + \mathbf{e}^- R^\nu R^\gamma) \right] \\ & \left. + \frac{(x_1)^{-2}}{R^{+2}} \left[R^\mu \mathbf{e}^- \mathbf{e}^- + \mathbf{e}^- R^\nu \mathbf{e}^- + \mathbf{e}^- \mathbf{e}^- R^\gamma \right] + \frac{(x_1)^{-3}}{R^{+3}} \mathbf{e}^- \mathbf{e}^- \mathbf{e}^- \right] \end{aligned}$$

fator que tem que ser multiplicado por $(x_1)^{N-\omega-1}$ antes de ser integrado sob x_1 . Isto implicará que no limite ($\omega \rightarrow 2$) e para nosso caso $N = 4$, se tem pólos para as componentes $(T4_{\mu\nu-})_{PV}$, $(T4_{\mu--})_{PV}$ e $(T4_{---})_{PV}$. Logo:

Para a integral $(T4_{\mu\nu-})_{PV}$:

$$(T4_{\mu\nu-})_{PV} = \frac{i^{2\omega+3} \pi^\omega}{2} \Gamma(2-\omega) \int_0^1 \frac{dx dy dz}{[R^+(x, y, z)]^2} [P(x, y, z)]^{\omega-2} g^{\mu\nu} \mathbf{e}^-$$

Esta integral somente apresenta pólo simples. Para a integral $(T4_{\mu--})_{PV}$:

$$(T4_{\mu--})_{PV} = i^{2\omega+3} \pi^\omega \Gamma(2-\omega) \int_0^1 \frac{dx dy dz}{[R^+(x, y, z)]^3} [P(x, y, z)]^{\omega-2} R^\mu \mathbf{e}^- \mathbf{e}^-$$

Esta integral também apresenta pólo simples. Para a integral $(T4_{---})_{PV}$:

$$(T4_{---})_{PV} = i^{2\omega+3} \pi^\omega \Gamma(1-\omega) \int_0^1 \frac{dx dy dz}{[R^+(x, y, z)]^4} [P(x, y, z)]^{\omega-1} \mathbf{e}^- \mathbf{e}^- \mathbf{e}^-$$

Esta integral também apresenta pólo simples (fazer um pequeno truque).

• Análise de $(T4_{\mu\nu\gamma})_\delta$:

Seja $\alpha \equiv (-, i)$, i.e. **excluimos a direção (+)**, então analisaremos as integrais das componentes $T4_{\alpha\beta-}$, $T4_{\alpha--}$ e $T4_{---}$ para este setor de modo zero, pois como já se falou, este setor não apresenta componentes (+).

Para a integral $T4_{\alpha\beta-}$

$$(T4_{\alpha\beta-})_\delta = \frac{-i^{2\omega+3}\pi^\omega}{2}\Gamma(2-\omega)\int_0^1 \frac{dxdydz}{[R^+(x,y,z)]^2}[Q(x,y,z)]^{\omega-2}g^{\alpha\beta}e^-$$

Se tem também pólo simples. E para a integral $T4_{\alpha--}$

$$(T4_{\alpha--})_\delta = i^{2\omega+3}\pi^\omega\Gamma(2-\omega)\int_0^1 \frac{dxdydz}{[R^+(x,y,z)]^3}[Q(x,y,z)]^{\omega-2}R^\alpha e^- e^-$$

Aqui também se tem somente pólo simples. E para a integral $T4_{---}$

$$(T4_{---})_\delta = i^{2\omega+3}\pi^\omega\Gamma(1-\omega)\int_0^1 \frac{dxdydz}{[R^+(x,y,z)]^4}[Q(x,y,z)]^{\omega-1}e^- e^- e^-$$

Aqui também se tem somente pólo simples.

Observação: Uma cuidadosa análise dessas seis componentes nos mostram que os termos de pólos simples se cancelam mutuamente.

4.4 Observações finais.

Não se tem pólos de nenhum tipo nos termos locais, mas sim se tem termos não locais finitos e, se houver, os pólos da parte covariante, obviamente.

Capítulo 5

Conclusões.

Em nossa análise da função de quatro pontos para a QED escalar calibrada no gauge do cone de luz, obtivemos os seguintes resultados interessantes:

1. O estudo centralizou-se em três diagramas de Feynman que são afetados pelo propagador de gauge contendo o fator $(q.n)^{-1}$, que chamamos de “sea-gull” escalar, “box” escalar e “box” escalar-vetorial;
2. No caso do diagrama “sea-gull” escalar, o resultado é completamente independente do vetor externo n que define o gauge, de modo que esse particular diagrama não apresenta nenhum pólo de natureza “espúrea”; o que se obtém é o pólo covariante característico dos gráficos de um “loop”, isto é, pólos que provem da integral básica

$$\int \frac{d^2\omega q}{q^2(q-a)^2};$$

3. Já para o caso dos diagramas de “box”, os resultados nos mostram que:
 - Nenhum dos setores (PV ou de modo zero) apresentam pólos duplos, mostrando que os pólos de ordem dois nos setores PV e de modo zero são intrínsecos da função de dois pontos (auto-energia). Essa patologia no setor PV da autoenergia é contornada pelo setor de modo zero como um termo absolutamente necessário para preservar a causalidade. No presente estudo das funções de quatro pontos mostramos que em quaisquer desses setores os pólos de maior ordem são pólos simples.

- O diagrama de “box” escalar não apresenta nenhum termo do tipo $T4_{\mu\nu\gamma}$ e podemos facilmente observar e concluir que não apresentam pólos “espúreos”; apenas termos finitos não locais na direção (-).
- Já o diagrama de “box” escalar -vetorial apresenta termos do tipo $T4_{\mu\nu\gamma}$ que contem separadamente pólos “espúreos” simples em diversos setores e componentes, mas que ao final se cancelam mutuamente, restando apenas os termos finitos não locais na direção (-). Concluimos por tanto pelo nosso estudo, que **não há singularidades não locais nas funções de quatro pontos estudadas.**

Só para finalizar desejaria mencionar que existe a possibilidade de implemetar uma forma de cancelar os termos não locais, sem sair do gauge do cone de luz, e sem perder a estrutura causal da teoria. Mas tudo isto ainda esta na fase de estudos preliminares.

Apêndice A

Gráficos 1PI, funções geradoras e afins.

A.1 Introdução.

Este apêndice tem por objetivo dar uma introdução razoável aos métodos funcionais e aos métodos de integrais de caminho em teoria quântica de campos. Para um melhor entendimento deste apêndice, o leitor pode referir-se a um trabalho do professor J.Strathdee [19]. Por simplicidade consideraremos uma teoria escalar. A lagrangeana no caso livre será:

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2}\phi(\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\phi$$

Para o caso com interação:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\phi(\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\phi + \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

A.2 Gerador Funcional $Z[J]$.

Caso livre: Neste caso se tem:

$$Z_E^0[J] = N^0 \int [d\phi] e^{-\frac{1}{\hbar} Z_E^0[\phi] + \frac{1}{\hbar} \int d^2\omega x J(x)\phi(x)}$$

Sendo:

$$S_E^0[\phi] = \int d^2\omega x \frac{1}{2}\phi(\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\phi$$

Usando a identidade do cálculo real:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^n x e^{-\frac{1}{2}[(x, Ax) + 2(b, x) + c]} = e^{\frac{1}{2}(b, A^{-1}b) - c} (\det A)^{-\frac{1}{2}}$$

Para nosso caso funcional, a analogia é obtida fazendo:

$d^n x \rightarrow [d\phi]; x \rightarrow \phi; A \rightarrow (\partial^\mu \partial_\mu + m^2); b \rightarrow J; c \rightarrow 0$. Logo:

$$Z_E^0[J] = N^0 e^{-\frac{1}{2\hbar} \int d^2\omega x d^2\omega x' J(x) (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) J(x')} (\det A)^{-\frac{1}{2}}$$

Usando o fato da normalização do vácuo:

$$< 0|0 > = Z_E^0[J = 0] = 1 \implies N^0 = (\det A)$$

Finalmente:

$$Z_E^0[J] = e^{-\frac{1}{2\hbar} \int d^2\omega x d^2\omega x' J(x) \Delta_E(x-x') J(x')} \quad (\text{A.1})$$

Onde:

$$\Delta_E(x - x') = (\partial^\mu \partial_\mu + m^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Caso não livre: Este é o caso da conhecida teoria $\lambda\phi^4$, onde a ação será:

$$S_E^0[\phi] = \int d^2\omega x \left[\frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \frac{1}{2} \phi (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi \right]$$

Então o funcional gerador das funções de Green será:

$$\begin{aligned} Z_E[J] &= N \int [d\phi] e^{-\frac{1}{\hbar} \int d^2\omega x \frac{\lambda}{4!} \phi^4} e^{-\frac{1}{\hbar} \int d^2\omega x \frac{1}{2} \phi (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi - J(x) \phi(x)} \\ &= N \int [d\phi] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[-\frac{\lambda}{\hbar 4!} \int d^2\omega x \phi^4 \right]^n e^{-\frac{1}{\hbar} \int d^2\omega x \frac{1}{2} \phi (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi - J(x) \phi(x)} \end{aligned}$$

Aqui vem um passo importante, pois se observar bem, a expressão é parecida ao caso livre, o que é diferente vem da parte que está dentro da somatória, então se conseguir “apagar” este, o problema ficaria bem mais fácil. Observe-se que a somatória é função de ϕ e esta por sua vez fica dentro da integral funcional, mas cada ϕ pode ser gerado tomando a derivada funcional com respeito a J no exponencial. Então:

$$Z_E[J] = N \int [d\phi] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[-\frac{\lambda}{\hbar 4!} \int d^2\omega x \left(\frac{\delta}{\delta J} \right)^4 \right]^n e^{-\frac{1}{\hbar} \int d^2\omega x \frac{1}{2} \phi (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi - J(x) \phi(x)}$$

Agora a integral funcional pode entrar livremente e pode-se reconhecer observando a equação (A.1) :

$$\begin{aligned} Z_E[J] &= N \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[-\frac{\lambda}{\hbar 4!} \int d^{2\omega} x \left(\frac{\delta}{\delta J} \right)^4 \right]^n \cdot \int [d\phi] e^{-\frac{1}{\hbar} \int d^{2\omega} x \frac{1}{2} \phi (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi - J(x) \phi(x)} \\ &= N \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[-\frac{\lambda}{\hbar 4!} \int d^{2\omega} x \left(\frac{\delta}{\delta J} \right)^4 \right]^n \cdot Z_E^0[J] \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

A condição de normalização do vacuo:

$$\langle 0|0 \rangle = Z_E[J=0] = 1 \implies N^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[-\frac{\lambda}{\hbar 4!} \int d^{2\omega} x \left(\frac{\delta}{\delta J} \right)^4 \right]^n \cdot Z_E^0[J] \Big|_{J=0}$$

Ou seja, o factor de normalização é calculado perturbativamente ordem a ordem. O mesmo ocorre com o funcional gerador $Z_E[J]$. As funções de Green de n pontos são calculadas usando:

$$G_E(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{i} \right)^n \frac{\delta^n Z_E[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} \quad (\text{A.3})$$

Exemplo 1. Calcule a função de dois pontos até a primeira ordem em λ . Primeiro calcularemos N^{-1} :

$$\begin{aligned} N^{-1} &= \left(1 - \frac{\lambda \hbar^3}{4!} \int d^{2\omega} x \frac{\delta^4}{\delta J(x)^4} + \dots \right) \left[1 + \frac{1}{1!} \left(\frac{1}{2\hbar} \int d^{2\omega} x d^{2\omega} x' J(x) \Delta_E(x-x') J(x') \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{2\hbar} \int d^{2\omega} x d^{2\omega} x' J(x) \Delta_E(x-x') J(x') \right)^2 + \dots \right] \\ N^{-1} &= 1 - \frac{\lambda \hbar}{8} \int d^{2\omega} x \Delta_E^2(x-x) \end{aligned}$$

O que pode ser expressado graficamente na figura (A.1). Agora calcularemos a função de Green de dois pontos :

$$\begin{aligned} G_E(x_1 - x_2) &= N \left(1 - \frac{\lambda \hbar}{8} \int d^{2\omega} x \Delta_E^2(x-x) \right) \left[\Delta_E(x_1 - x_2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda \hbar}{2} \int d^{2\omega} x' \Delta_E(x_1 - x') \Delta_E(x' - x') \right] \end{aligned}$$

$$G_E(x_1 - x_2) = \Delta_E(x_1 - x_2) - \frac{\lambda \hbar}{2} \int d^{2\omega} x \Delta_E(x_1 - x') \Delta_E(x' - x') \Delta_E(x' - x_2)$$

Que graficamente é expresso como na figura (A.2) :

$$N^{-1} = \text{dot} + \text{loop}$$

Figura A.1: Ex.1,gráficos para N^{-1} .

$$G_E(x_1 - x_2) = \text{line} + \text{bubble}$$

Figura A.2: Ex.1,gráficos para $G_E(x_1 - x_2)$.

A.3 Gerador Funcional $W[J]$.

Agora sabemos que usando $Z[J]$, pode-se gerar todas as funções de Green. O desenvolvimento perturbativo das funções de Green é expresso em termos dos diagramas de Feynman. Mas o número de diagramas cresce rapidamente com o ordem de cálculo. São justamente os métodos funcionais que nos permitem ter certo controle sob os cálculos realizados. Considere por exemplo os gráficos da figura (A.3):

$(a) \sim \Delta(x_1 - x_2) \Delta(x_3 - x_4)$

$(b) \sim \Delta(x_1 - x_2) \left[\frac{-\lambda \hbar}{2} \int d^2\omega x' \Delta(x_3 - x') \Delta(x' - x') \Delta(x' - x_4) \right]$

Observe-se : (a) e (b) são gráficos desconexos.

Definição: As funções conexas de Green são obtidas se não são considerados todos os diagramas que possuem termos que se fatorizam em dois ou

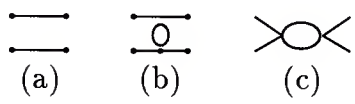


Figura A.3: Funções conexas (a e b) e funções não conexas (c).

mais funções sem argumentos que se misturem.

$$Z[J] = e^{\frac{i}{\hbar}W[J]} \quad (\text{A.4})$$

Para uma demonstração da relação de acima veja [9] . As funções conexas de Green de n pontos são calculadas usando:

$$G^c(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\hbar} \left(\frac{1}{i} \right)^{n-1} \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} \quad (\text{A.5})$$

Observação:

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{\hbar}W[J]} &= Z[J] = \int [d\phi] e^{\frac{i}{\hbar}(S + \int J\phi)} \\ \Rightarrow \frac{i}{\hbar} \frac{\delta}{\delta J(x)} Z[J] &= \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \cdot Z[J] = \int [d\phi] \phi(x) e^{\frac{i}{\hbar}(S + \int J\phi)} \\ &\Rightarrow \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \frac{\int [d\phi] \phi(x) e^{\frac{i}{\hbar}(S + \int J\phi)}}{\int [d\phi] e^{\frac{i}{\hbar}(S + \int J\phi)}} \\ i.e. : \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} &= \langle \phi(x) \rangle = \varphi(x) \end{aligned}$$

A.4 Gerador Funcional $\Gamma[\varphi]$.

As funções conexas de Green, na verdade, não são a estrutura mas simples possível. Então vamos definir o funcional gerador das funções **1PI (1 Particle Irreducible)**, $\Gamma[\varphi]$, usando a transformação de Legendre para $W[J]$.

$$W[J] = \Gamma[\varphi] + \int d^2\omega x J(x) \varphi(x) \Rightarrow \frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(x)} = -J(x)$$

As funções 1PI de Green de n pontos são calculadas usando:

$$\Gamma^n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\delta^n \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(x_1) \delta \varphi(x_2) \dots \delta \varphi(x_n)} \Big|_{\varphi=0} \quad (\text{A.6})$$

Para poder trabalhar com as funções 1PI, é preciso obter uma equação para $\Gamma[\varphi]$, então partindo da identidade:

$$0 = \int [d\phi] \frac{\delta}{\delta \phi}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
 0 &= \int [d\phi] \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta\phi} \cdot e^{\frac{i}{\hbar}(S[\phi] + \int J\phi)} = \int [d\phi] \left[\frac{\delta}{\delta\phi} (S[\phi] + \int J\phi) \right] \cdot e^{\frac{i}{\hbar}(S[\phi] + \int J\phi)} \\
 &= \int [d\phi] \left(\frac{\delta S}{\delta\phi(x)} + J(x) \right) e^{\frac{i}{\hbar}(S + \int J\phi)} = \int [d\phi] \left[\left(\frac{\delta S}{\delta\phi(x)} \right)_{\phi \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J}} + J(x) \right] e^{\frac{i}{\hbar}(S + \int J\phi)} \\
 &= \left[\left(\frac{\delta S}{\delta\phi(x)} \right)_{\phi \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J}} + J(x) \right] \underbrace{\int [d\phi] e^{\frac{i}{\hbar}(S + \int J\phi)}}_{Z[J] = e^{\frac{i}{\hbar}W[J]}} = \left[\left(\frac{\delta S}{\delta\phi(x)} \right)_{\phi \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J}} + J(x) \right] e^{\frac{i}{\hbar}W[J]}
 \end{aligned}$$

Usando a identidade analoga a do caso real : $F(\partial_x)e^{g(x)} = e^{g(x)}F(g'(x) + \partial_x)$.

$$\begin{aligned}
 0 &= e^{\frac{i}{\hbar}W[J]} \cdot \left[\left(\frac{\delta S}{\delta\phi(x)} \right)_{\phi \rightarrow \frac{\delta W}{\delta J} + \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J}} + J(x) \right] \\
 i.e. \quad -J &= \left(\frac{\delta S}{\delta\phi(x)} \right)_{\phi \rightarrow \frac{\delta W}{\delta J} + \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J}}
 \end{aligned}$$

A transformação de Legendre implica:

$$J(x) = -\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)} \quad \wedge \quad \varphi(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}$$

Finalmente:

$$\boxed{\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)} = \left(\frac{\delta S}{\delta\phi(x)} \right)_{\phi \rightarrow \varphi + \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J}}} \quad (A.7)$$

É justamente a partir da observação desta última equação, que $\Gamma[\varphi]$ vai receber o nome de “ação efetiva” (para isto bastará observar o limite $\hbar \rightarrow 0$ e perceber que neste caso se chegará à ação clássica).

Apêndice B

Gauge no cone de luz sem fantasmas.

B.1 Introdução.

Esta seção está baseada no artigo de Frenkel [20] e do livro de Ryder [8]. Na verdade o que aqui mostraremos é como um gauge axial geral desacopla, mas falaremos em particular do gauge do cone de luz. Para entender como no gauge do cone de luz, os fantasmas são desacoplados, precisaremos entender como estes são gerados, e para isso partiremos de:

$$\int [dA_\mu] f(A_\mu) e^{i \int d^D x \mathcal{L}} \quad (\text{B.1})$$

Na realidade, A_μ , quer dizer, A_μ^a , onde a representa o índice do grupo de gauge. Aqui uma observação, $f(A_\mu)$, é um funcional invariante de gauge. É assumido que $[dA_\mu] = [dA_\mu^\omega]$

O ansatz a usar para $[dA_\mu]$ é : $[dA_\mu] = \prod_{\mu,a,x} dA_\mu^a(x)$

A integral de caminho (B.1), considera todas as possíveis configurações de $A_\mu(x)$, o que quer dizer que se tem uma contagem múltipla das configurações físicas equivalentes (equivalentes no sentido de uma transformação de gauge). Então vamos dividir o espaço de configurações $\{A_\mu(x)\}$ em uma equivalência de classes $\{A_\mu^\omega(x)\}$ chamadas órbitas do grupo de gauge. Uma órbita do grupo possui todas as configurações do campo que são o resultado de aplicar todas as transformações ω do grupo de gauge $\mathcal{G}$ a partir de uma configuração

inicial do campo $A_\mu(x)$. A transformação de gauge:

$$A_\mu'^a \equiv (A^\omega)_\mu^a = A_\mu^a + f^{abc} A_\mu^b \omega^c + \partial_\mu \omega^a \quad (\text{B.2})$$

B.1.1 Preliminares.

Permitamos que $[d\omega]$ denote uma medida invariante sobre o grupo de gauge $\mathcal{G}$, i.e. $[d\omega] = [d\omega\omega']$, o ansatz é:

$$[d\omega] = \prod_x d\omega(x)$$

Também seja introduzido o funcional $\Delta[A_\mu(x)]$ através de:

$$1 = \Delta[A_\mu(x)] \cdot \int [d\omega] \delta[F[A_\mu^\omega(x)]] \quad (\text{B.3})$$

Onde $\delta[f(x)]$ representa $\prod_x \delta[f(x)]$. Também, para $F[A_\mu^\omega]$ é assumido:

$$F[A_\mu^\omega] = 0$$

Que tem exatamente uma solução, ω_0 , para qualquer A_μ . Esta última expressão é o vínculo, que define hipersuperfícies e também o “gauge”.

Observação: $\Delta[A_\mu(x)]$ é invariante de gauge:

$$\begin{aligned} \Delta^{-1}[A_\mu^\omega] &= \int [d\omega'] \delta[F[A_\mu^{\omega\omega'}]] = \int [d\omega\omega'] \delta[F[A_\mu^{\omega\omega'}]] \\ &\int [d\omega''] \delta[F[A_\mu^{\omega''}]] = \Delta^{-1}[A_\mu] \end{aligned}$$

inserindo (B.3) em (B.1), se obtém:

$$\int [d\omega] \int [dA_\mu] f(A_\mu) \Delta[A_\mu(x)] \delta[F[A_\mu^\omega(x)]] e^{iS[A_\mu^\omega]}$$

Observação: A expressão dentro de $f[d\omega]$ é invariante de gauge; i.e. não depende de ω .

$$\underbrace{\left(\int [d\omega] \right)}_{vol.infinito} \int [dA_\mu] f(A_\mu) \Delta[A_\mu(x)] \delta[F[A_\mu^\omega(x)]] e^{iS[A_\mu^\omega]} \quad (\text{B.4})$$

B.1.2 Determinante de Faddeev-Popov.

A partir da equação (B.3):

$$\Delta^{-1}[A_\mu] = \int [dF] \left(\det \frac{\delta F[A_\mu^\omega]}{\delta \omega} \right)^{-1} \delta F$$

i.e.

$$\Delta[A_\mu] = \det \frac{\delta F[A_\mu^\omega]}{\delta \omega} \Big|_{F[A_\mu^\omega]=0} = \det M$$

$\Delta[A_\mu]$ é usualmente denominado como o determinante de Faddeev-Popov. Se considerar o gauge $F[A_\mu^\omega] - C(x) = 0$, então nossa expressão integral (B.4) ficaria assim:

$$\int [d\omega] \int [dA_\mu] \det M \cdot f(A_\mu) \delta[F[A_\mu^\omega(x)] - C(x)] e^{iS[A_\mu^\omega]} \quad (\text{B.5})$$

A expressão para o gerador funcional $Z[J=0]$ (ver apêndice anterior) será:

$$Z[J=0] = N \int [d\omega] \int [dA_\mu] \det M \cdot f(A_\mu) \delta[F[A_\mu^\omega(x)] - C(x)] e^{iS[A_\mu^\omega]}$$

Usando a identidade das matrizes com os números de grassman:

$$\det M = \int [d\bar{c}][dc] \cdot e^{i\bar{c}Mc} \quad (\text{B.6})$$

Escrevermos $Z[J=0]$ como sendo:

$$Z[J=0] = N \int [d\omega] \int [dA_\mu] [d\bar{c}][dc] \cdot f(A_\mu) \delta[F[A_\mu^\omega(x)] - C(x)] e^{i(S[A_\mu^\omega] - \bar{c}Ac)}$$

Onde agora os campos c e $\bar{c}$ são os denominados *campos de fantasmas*, que devido a seu caráter estatístico somente aparecerão como linhas internas nos gráficos de Feynman.

B.2 Fantasmas são desacoplados.

Agora já estamos em condições para poder desacoplar os fantasmas para um gauge axial. Existem duas formas de mostrar isto:

B.2.1 Sem fantasmas A.

Partamos da definição para um gauge tipo axial:

$$\begin{aligned} n^\mu A_\mu^a &= 0 \\ n^\mu n_\mu &= \text{const.} \end{aligned}$$

O termo de fixação de gauge é:

$$F^a = n^\mu A_\mu^a$$

Então, sob a transformação de gauge (B.2) se tem:

$$\delta F^a \equiv f^{abc} A_\mu^b \omega^c + \partial_\mu \omega^a = n_\mu \partial_\mu \omega^a$$

Isto implica que:

$$\frac{\delta F^a}{\delta \omega^b} = \delta^{ab} n_\mu \partial_\mu$$

Observe-se que esta última expressão é a matriz M , que **não contém** $\mathbf{A}_\mu^a$. Isto significa que também $\det M$ não contém $\mathbf{A}_\mu^a$, o que quer dizer que podemos colocar $\det M$ fora da integral de $[dA_\mu]$ da expressão (B.5). Sendo assim, a expressão para $Z[J=0]$ ficará:

$$Z[J=0] = N \int [d\omega] \det M. \int [dA_\mu] f(A_\mu) \delta[F[A_\mu^\omega(x)] - C(x)] e^{iS[A_\mu^\omega]}$$

E dizer o termo $\int [d\omega] \det M$ pode ser absorvido na constante, ou se preferir, pode fazer-se uma re-definição, então se chega a:

$$Z[J=0] = N \int [dA_\mu] f(A_\mu) \delta[F[A_\mu^\omega(x)] - C(x)] e^{iS[A_\mu^\omega]}$$

Como se ve, esta última equação é livre da possibilidade de apresentar fantasmas, que era o que queríamos mostrar.

B.2.2 Sem fantasmas B.

Partindo da definição do $\det M$ e usando a propriedade do produto dos determinantes:

$$\begin{aligned}\det M &= \det(n^\mu D_\mu) \\ &= \det(n \cdot \partial) \cdot \det(1 - g G f^a A^{a\mu} n_\mu)\end{aligned}$$

Onde se está usando a representação adjunta e além se tem que:

$$\begin{aligned}D_\mu &= \partial_\mu - g f^a n_\mu \partial^\nu A_\nu^a \\ (\partial \cdot n) G(x - y) &= \delta^D(x - y)\end{aligned}$$

Então, trabalhando com o segundo determinate, aplicar-lhe-emos uma conhecida propriedade dos determinantes, logo, expandiremos o logaritmo em uma somatoria sobre k ($k = 1 \cdots \infty$):

$$\begin{aligned}\det(1 - g G f^a A_\mu^a n_\mu) &= e^{\text{Tr}[\ln(1 - g G f^a A_\mu^a n_\mu)]} \\ &= e^{-\text{Tr}[\sum_k \frac{g^k}{k} G(x_0 - x_1) f^{a_1} A_{\mu_1}^{a_1} n_{\mu_1} \cdots G(x_{k-1} - x_k) f^{a_k} A_{\mu_k}^{a_k} n_{\mu_k}]}\end{aligned}$$

Aqui se observa que o que se tem é uma série de gráficos de funções de k -pontos, em outras palavras, cada termo da somatória é um gráfico de Feynman que pode ser representado como na figura (B.1).

Isto implica que cada processo gerará integrais de Feynman, as quais a sua

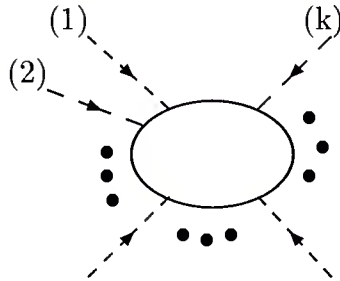


Figura B.1: Função de fantasmas de k -pontos.

vez podem ser calculadas (usando a parametrização de Feynman) dentro do contexto da regularização dimensional. Sendo assim, a integral correspondente ao gráfico da figura (B.1) será:

$$I_{\mu_1 \cdots \mu_k}^{a_1 \cdots a_k} = g^k \prod_{i=1}^k n_{\mu_i} \text{Tr} \left[\prod_{i=1}^k f^{a_i} \right] (k-1)! \int_0^1 dx_1 \cdot \int_0^{x_{k-1}} dx_{k-2} \int \frac{d^D q}{(n \cdot q + \cdots - n \cdot p_2 x_{k-1})^k}$$

Fazendo mudança de variáveis se obtém:

$$I_{\mu_1 \dots \mu_k}^{a_1 \dots a_k} = g^k \prod_{i=1}^k n_{\mu_i} \text{Tr} \left[\prod_{i=1}^k f^{a_i} \right] I$$

Sendo I (e usando a invariância de Lorentz):

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{d^D q}{(n \cdot q)^k} \\ &= c(n, k) \frac{1}{n^k} \int \frac{d^D q}{q^k} \end{aligned}$$

Integral que no contexto da regularização dimensional é nula. Sendo assim é fácil observar que $\det(1 - gGf^a A_\mu^a n_\mu) = 1$, é dizer $\det M$ novamente não depende do campo de gauge, isso equivale a dizer que novamente os fantasmas desacoplam.

Apêndice C

Prescrição causal.

Um dos preços a pagar pelo uso do gauge no cone de luz é a aparição das singularidades “espúrias”, provenientes dos pólos do tipo $(q.n)^{-1}$. Neste gauge, a conhecida prescrição usual do “Principal Value” não é possível de implementar. Logo se tentaram uma serie de novas prescrições como a de Mandelstam, a de Leibbrandt e aquela de Pimentel-Suzuki. Esta última prescrição parte dos trabalhos de Giambaggi, Bollini e Dominguez, referentes a distribuições causais [21]; em outras palavras, tenta incorporar a causalidade de maneira que os problemas dos polos $(q.n)^{-1}$ desapareçam. A prescrição que foi proposta para os pólos $(q.n)^{-1}$, é:

$$\frac{1}{k.n} = \frac{1}{k^+} \rightarrow \frac{\Theta(k^0)}{k^+ + i\epsilon} + \frac{\Theta(-k^0)}{k^+ - i\epsilon}$$

Usando a identidade:

$$\frac{1}{k^+ \pm i\epsilon} = PV\left(\frac{1}{k^+}\right) \pm \frac{\pi}{i}\delta(k^+)$$

Sendo assim, a prescrição pode-se escrever como:

$$\frac{1}{k.n} = \frac{1}{k^+} \rightarrow \overbrace{[\Theta(k^0) + \Theta(-k^0)]}^1 PV\left(\frac{1}{k^+}\right) + \frac{\pi}{i} \overbrace{[\Theta(k^0) - \Theta(-k^0)]}^{Sign(k^0)} \delta(k^+)$$

Mas da definição da função $\Theta(x)$, finalmente se obtém a expressão que é a que nos usaremos nesta tese.

$$\boxed{\frac{1}{k.n} = \frac{1}{k^+} \rightarrow PV\left(\frac{1}{k^+}\right) - i\pi Sign(k^0)\delta(k^+)} \quad (C.1)$$

Observe-se que nesta nova prescrição o que se faz é *corrigir* a muito usada prescrição do valor principal, correção que vem do fato de que se trabalhou dentro do cone de luz. Somente para completar este apêndice, colocarei a expressão que permite calcular pólos do tipo $(q.n)^{-2}$, que são encontrados nos cálculos de um gauge axial homogêneo. Na verdade a expressão é geral para pólos do tipo $(q.n)^{-n}$

$$\frac{1}{(k.n)^n} = \frac{1}{(k^+)^n} \rightarrow PV \left(\frac{1}{(k^+)^n} \right) - i\pi \text{Sign}(k^0) (-1)^{n-1} \delta^{n-1}(k^+)$$

Apêndice D

Relações matemáticas usadas.

Neste apêndice colocaremos as relações matemáticas que foram usadas nos diversos cálculos efetuados nesta tese.

D.1 Parametrização exponencial.

$$\frac{1}{(q - a_1)^2(q - a_2)^2 \cdots (q - a_n)^2} = i^n \int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 \cdots d\alpha_n e^{i[-\alpha_i q^2 + 2\alpha_i a_i \cdot q]} \cdot e^{-i\alpha_i a_i^2}$$

Sendo:

$$\begin{aligned} -\alpha_i q^2 + 2\alpha_i a_i \cdot q &= \sum_{i=1}^n [-\alpha_i q^2 + 2\alpha_i a_i \cdot q] \\ \alpha_i a_i^2 &= \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i^2 \end{aligned}$$

D.2 Integração sob os momentos.

Esta seção foi tomada de parte de um artigo do Capper [18].

$$\int \frac{d^2\omega}{f(q^+)} \cdot e^{i(\alpha q^2 + 2\rho \cdot q)} = \frac{i^{\omega+1}}{f(-\rho^+/\alpha)} \left(\frac{-\pi}{\alpha}\right)^\omega \cdot e^{-i\rho^2/\alpha} = I \quad (\text{D.1})$$

Esta identidade é encontrada, para o caso covariante, no livro de Bogoliubov e Shirkov [22], que é um dos bons livros textos de teorias de campos quânticos.

Mas além desta última identidade, também tivemos necessidade de deduzir a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{2\omega} q}{f(q^+)} \cdot q^\mu e^{i(\alpha q^2 + 2\rho \cdot q)} &= -\left[\frac{\rho^\mu}{\alpha} + g_\alpha(\rho^+) \mathbf{e}^-\right] \cdot I \\ &= f^\mu \cdot I \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Sendo:

$$g_\alpha(\rho^+) = \frac{1}{2i} \frac{1}{f(-\rho^+/\alpha)} \cdot \frac{\partial f(-\rho^+/\alpha)}{\partial \rho^+}$$

E

$$I = \int \frac{d^{2\omega} q}{f(q^+)} \cdot e^{i(\alpha q^2 + 2\rho \cdot q)} = \frac{i}{\alpha f(-\rho^+/\alpha)} \left(\frac{-i\pi}{\alpha}\right)^\omega \cdot e^{\frac{-i\rho^2}{\alpha}}$$

O vetor unitario $\mathbf{e}^-$ faz parte do vetor:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(1, 1, \dots, 1) = \mathbf{e}^+ + \mathbf{e}^- + \hat{\mathbf{e}}$$

Ou seja é um vetor unitário na direção $(-)$, direção na qual os termos não locais costumam aparecer. Também foi necessário deduzir:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{2\omega} q}{f(q^+)} \cdot q^\mu q^\nu e^{i(\alpha q^2 + 2\rho \cdot q)} &= \left[\frac{1}{2\alpha^2} [i\alpha g^{\mu\nu} + 2\rho^\mu \rho^\nu] + \frac{1}{\alpha} g_\alpha(\rho^+) [\rho^\mu \mathbf{e}^- + \mathbf{e}^- \rho^\nu] \right. \\ &\quad \left. + h_\alpha(\rho^+) \mathbf{e}^- \mathbf{e}^- \right] \cdot I \\ &= f^{\mu\nu} \cdot I \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Sendo:

$$h_\alpha(\rho^+) = \frac{1}{2i} \left[g_\alpha^2(\rho^+) - \frac{\partial g_\alpha(\rho^+)}{\partial \rho^+} \right]$$

Finalmente também foi deduzida para calcular uma das integrais tensoriais:

$$\int \frac{d^{2\omega} q}{f(q^+)} \cdot q^\mu q^\nu q^\gamma e^{i(\alpha q^2 + 2\rho \cdot q)} = -\left[\frac{1}{2\alpha^3} [i\alpha (g^{\mu\nu} \rho^\gamma + g^{\mu\gamma} \rho^\nu + g^{\nu\gamma} \rho^\mu) + 2\rho^\mu \rho^\nu \rho^\gamma] \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{g_\alpha(\rho^+)}{2i\alpha^2} \left[i\alpha(g^{\mu\nu}e^- + g^{\mu\gamma}e^- + e^-g^{\nu\gamma}) + 2(\rho^\mu\rho^\nu e^- + \rho^\mu e^- \rho^\gamma + e^- \rho^\nu \rho^\gamma) \right] \\
& + \frac{h_\alpha(\rho^+)}{\alpha} [\rho^\mu e^- e^- + e^- \rho^\nu e^- + e^- e^- \rho^\gamma] \\
& + j_\alpha(\rho^+) e^- e^- e^- \cdot I \\
& = f^{\mu\nu\gamma} \cdot I
\end{aligned} \tag{D.4}$$

Sendo:

$$j_\alpha(\rho^+) = \frac{1}{2i} \left[g_\alpha(\rho^+) h_\alpha(\rho^+) - \frac{\partial h_\alpha(\rho^+)}{\partial \rho^+} \right]$$

Observe-se que estas integrais apresentam **termos não locais**, os quais aparecem devido a função $f(-\rho^+/\alpha)$. O limite para o caso covariante é feito fazendo $f(-\rho^+/\alpha) = \text{const} = 1$, neste caso $g_\alpha(\rho^+) = h_\alpha(\rho^+) = j_\alpha(\rho^+) = 0$, sendo assim, obteremos as integrais para o caso covariante que se encontram no livro de Bogoliubov [22].

D.3 Mudança de variáveis.

Sejam dois espaços vetoriais $\mathcal{M}(\alpha_N)$ e $\mathcal{N}(x_N)$, então se a transformação de $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ é dada mediante a expressão seguinte, também esta implicará:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= x_1 \left(1 - \sum_{k=2}^N x_k \right) \\ \alpha_k &= x_1 x_k, \quad k = 2 \dots N \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{J(\alpha_1 \dots \alpha_N)}{J(x_1 \dots x_N)} = x^{N-1}, \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 &\in [0, \infty[\\ x_k &\in [0, 1], \quad k = 2 \dots n \end{aligned} \right.$$

D.4 Um pequeno truque.

Para a simplificação das integrais obtidas no capítulo 3, usamos a seguinte identidade:

$$\frac{1}{q.n} \cdot \frac{1}{(q-p).n} = \frac{1}{p.n} \left[\frac{1}{q.n} - \frac{1}{(q-p).n} \right]$$

É assim que os aparentes pólos do tipo $(q.n)^{-2}$ vão para pólos do tipo $(q.n)^{-1}$.

D.5 Função Gamma, Beta e Hipergeométrica.

As funções foram tomadas das tabelas de integrais do Gradshteyn [23]

- Função Gamma:

$$\int_0^{\infty} dx \cdot x^{\nu-1} \cdot e^{-\mu x} = \frac{1}{\mu^{\nu}} \cdot \Gamma(\nu)$$

- Função Beta:

$$\int_0^1 dx \cdot x^{\mu-1} \cdot (1-x)^{\nu-1} = B(\mu, \nu)$$

- Função Hipergeométrica:

$$\int_0^1 dt \cdot t^{\beta-1} \cdot (1-t)^{\gamma-\beta-1} \cdot (1-tz)^{-\alpha} = B(\beta, \gamma-\beta) {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)$$

D.6 Expansão de $(1-y)^{\omega}$.

Partiremos lembrando-nos da muito bem conhecida expansão da função exponencial:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^k}{k!}$$

Agora usando a propriedade do logaritmo:

$$\begin{aligned} (1-y)^{\omega} &= e^{\ln(1-y)^{\omega}} \\ &= e^{\omega \cdot \ln(1-y)} \end{aligned}$$

Finalmente usando a expansão da função exponencial:

$$(1-y)^{\omega} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot \omega^k \cdot \ln^k(1-y)}{k!}$$

Esta expressão foi usada no cálculo de muitas das integrais do capítulo 4.

Apêndice E

Integração em dimensão negativa.

Como já foi visto, no cálculo dos processos físicos, aparecem integrais sobre os quadrimomentos que devem de ser calculadas. Existem vários métodos para o cálculo delas. Recentemente foi introduzido um método sumamente interessante [24] denominado como *método de integração negativa*. Este método já foi amplamente testado [25], [26], [27] e [28], para o caso de se trabalhar em gauges covariantes. Somente para comprovar o uso no caso das integrais discutidas nesta tese, vamos mostrar o cálculo de uma delas usando esta técnica. Para a elaboração deste apêndice quero agradecer de forma muito especial ao Alexandre G .M. Schmidt.

E.1 O método.

Para implementar o método de integração negativa, deve-se partir da teoria das funções complexas e do princípio da continuação analítica, sendo assim, considere a integral gaussiana:

$$\int d^{2\omega} q \cdot e^{-\lambda q^2} = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^\omega \quad (\text{E.1})$$

Exapandamos a exponencial em séries de Taylor, e invertamos a ordem da somatória com a integração:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int d^{2\omega} q \cdot (q^2)^n = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^\omega$$

E daqui que se concluí que:

$$\int d^{2\omega} q \cdot (q^2)^n = (-1)^n \pi^\omega \Gamma(1+n) \delta_{\omega, -n}$$

Como o índice da soma n é *necessariamente* positivo, implica que ω , isto é **a dimensão deverá ser negativa**. Ademais, sendo o lado direito de (E.1) uma função analítica de ω , então a integral para $\omega < 0$ também deverá ser função analítica de ω . Como segundo passo, e trabalhando semelhantemente, se chega a calcular:

$$\begin{aligned} \int d^{2\omega} q \cdot e^{-\alpha q^2 - \beta(q-p)^2} &= \sum_{j,k=0}^{\infty} (-1)^{j+k} \frac{\alpha^j \beta^k}{j! k!} \int d^{2\omega} q \cdot [(q^2)^j [q-p]^2]^k \\ &= \left(\frac{\pi}{\alpha + \beta} \right)^\omega e^{-\frac{\alpha\beta p^2}{\alpha + \beta}} \\ &= \pi^\omega \sum_{n_1, n_2, n_3=0}^{\infty} \alpha^{n_1+n_2} \beta^{n_1+n_3} \frac{(-n_2-n_3)!}{n_1! n_2! n_3!} [-(p)^2]^{n_1} \end{aligned}$$

Para chegar no último passo, o que usamos foi a expansão multinomial para o denominador $(\alpha + \beta)^{-n_1-\omega}$, isto implica que se deve de cumprir que $n_1 + n_2 + n_3 + \omega = 0$. Agora podemos reconhecer a integral da somatória como sendo:

$$\begin{aligned} \int d^{2\omega} q \cdot [(q^2)^j [q-p]^2]^k &= \pi^\omega (-1)^{j+k} \Gamma(1+j) \Gamma(1+k) \\ &\cdot \sum_{n_1, n_2, n_3=0}^{\infty} [-(p)^2]^{n_1} \frac{\Gamma(1-n_1-\omega)}{n_1! n_2! n_3!} \cdot \delta_{n_1+n_2, j} \cdot \delta_{n_1+n_3, k} \cdot \delta_{n_2+n_3, -(n_1+\omega)} \end{aligned}$$

Daqui se obtém o *sistema de equações lineares*:

$$\begin{cases} n_1 + n_2 = j \\ n_1 + n_3 = k \\ n_1 + n_2 + n_3 + \omega = 0 \end{cases}$$

que tem uma única solução $n_1 = \rho$, $n_2 = j - \rho$, $n_3 = k - \rho$, com $\rho = j + k + \omega$. Então:

$$\int d^{2\omega} q \cdot [(q^2)^j [q-p]^2]^k = \frac{\pi^\omega [(p)^2]^\rho}{(1+j-\rho) \cdot (1+k-\rho) \cdot (1-\rho-\omega) (2\rho+\omega)}$$

Onde o símbolo de Pochhammer se define como:

$$(a|k) \equiv (a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}$$

Até agora trabalhamos para dimensão negativa ($\omega < 0$), para voltar ao caso de interesse físico $\omega \rightarrow 2$, primeiro devemos fazer a continuação analítica para valores positivos de ω . Para isto vamos a usar uma propriedade do símbolo de Pochhammer:

$$(a|-k) = \frac{(-1)^k}{(1-a|k)}$$

Finalmente chegaremos a

$$\int d^{2\omega} q \cdot [(q)^2]^j [q-p)^2]^k = \pi^\omega (p^2)^\rho (\rho + \omega| - 2\rho - \omega) \cdot (-j|\rho) \cdot (-k|\rho)$$

Com este resultado obtido, agora é fácil calcular a integral:

$$\int d^{2\omega} q \cdot \frac{1}{q^2(q-p)^2}$$

Para isso bastará tomar $j = -1$ e $k = -1$, sendo assim se obtém:

$$\int d^{2\omega} q \cdot \frac{1}{q^2(q-p)^2} = \pi^\omega (p^2)^{\omega-2} \frac{\Gamma(2-\omega)\Gamma^2(\omega-1)}{\Gamma(2\omega-2)}$$

Resultado amplamente conhecido da teoria quântica de campos.

E.2 A integral.

Para aplicar o método ao nosso caso, vamos primeiro a definir a integral a ser calculada como sendo:

$$I = \int d^{2\omega} q \cdot \frac{1}{(q-a)^2(q-b)^2} \frac{1}{q \cdot n}$$

Isto é, devemos obter uma expressão para:

$$I_{ijk} = \int d^{2\omega} q \cdot (q-a)^{2i} (q-b)^{2j} q \cdot n^k$$

e então fazer $i, j, k \rightarrow -1$. Assim a integral gaussiana a ser expandida e calculada tem a forma:

$$\begin{aligned}
 \int d^{2\omega} q \cdot e^{-\alpha(q-a)^2 - \beta(q-b)^2 - \gamma(q \cdot n)} &= \sum_{i,j,k=0}^{\infty} (-1)^{i+j+k} \frac{\alpha^i \beta^j \gamma^k}{i!j!k!} \int d^{2\omega} q \cdot (q-a)^{2i} (q-b)^{2j} (q \cdot n)^k \\
 &= \left(\frac{\pi}{\alpha + \beta} \right)^{\omega} e^{-\frac{1}{\alpha + \beta} [\alpha \beta (a-b)^2 - \alpha \gamma (a \cdot n) - \beta \gamma (b \cdot n) + \frac{1}{4} \gamma^2 n^2]} \\
 &= \pi^{\omega} \sum_{n_i=0}^{\infty} (-1)^{n_1+n_2+n_3} \alpha^{n_1+n_2+n_4} \beta^{n_1+n_3+n_5} \gamma^{n_2+n_3} \\
 &\quad \cdot \frac{(-n_1 - n_2 - n_3 - \omega)!}{n_1! n_2! n_3! n_4! n_5!} (a-b)^{n_1} (a \cdot n)^{n_2} (b \cdot n)^{n_3}
 \end{aligned}$$

Na expressão anterior também se usou a expansão multinomial, com a condição $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + \omega = 0$. Então se reconhece que:

$$\begin{aligned}
 \int d^{2\omega} q \cdot (q-a)^{2i} (q-b)^{2j} q \cdot n^k &= \pi^{\omega} (-1)^{i+j+k} \Gamma(1+i) \Gamma(1+j) \Gamma(1+k) \\
 &\quad \cdot \sum_{n_i=0}^{\infty} (-1)^{n_1+n_2+n_3} \frac{(-n_1 - n_2 - n_3 - \omega)!}{n_1! n_2! n_3! n_4! n_5!} (a-b)^{n_1} (a \cdot n)^{n_2} (b \cdot n)^{n_3} \\
 &\quad \cdot \delta_{n_1+n_2+n_4, i} \cdot \delta_{n_1+n_3+n_5, j} \cdot \delta_{n_2+n_3, k} \cdot \delta_{n_4+n_5, -(n_1+n_2+n_3+\omega)}
 \end{aligned}$$

O sistema de equações lineares será:

$$\begin{cases} n_1 + n_2 + n_4 = i \\ n_1 + n_3 + n_5 = j \\ n_2 + n_3 = k \\ n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + \omega = 0 \end{cases}$$

Analisando um pouco, se vê que se tem 5 índices (n_i) e somente 4 equações. Então são possíveis $C_4^5 = 5$ soluções, destas 5, uma é trivial e as outras 4 fornecem 2 respostas. Seja:

$$\sigma = i + j + k + \omega$$

Então, uma das respostas nos dá duas soluções, que depois deverão de ser somadas. Elas são :

- A primeira é:

$$I_1 = \pi^\omega (-j|\sigma)(-i|i+j+\omega)(\sigma+\omega|-2\sigma-\omega+k)[(a-b)^2]^{\sigma-k}(b.n)^k \cdot {}_2F_1(-k, \omega+j; 1+j-\sigma; \eta)$$

Tomando o limite $i, j, k \rightarrow -1$:

$$I_1 = \pi^\omega \frac{[(a-b)^2]^{\omega-2}}{(b.n)} \frac{\Gamma(\omega-2)\Gamma(\omega-1)\Gamma(2-\omega)}{\Gamma(2\omega-3)} {}_2F_1(1, \omega-1; 3-\omega; \eta)$$

- A outra será:

$$I_2 = \pi^\omega (-j|i+j+\omega)(-i|i+k-\sigma)(-k|j+k-\sigma)[(a-b)^2]^{\sigma-k}(a.n)^{\sigma-j}(b.n)^{-\sigma+j+k} \cdot {}_2F_1(\omega+i, \sigma+\omega; 1+\sigma-j; \eta)$$

Tomando o limite $i, j, k \rightarrow -1$:

$$I_2 = \pi^\omega \frac{[(a-b)^2]^{\omega-2}(a.n)^{\omega-2}}{(b.n)^{\omega-1}} \Gamma(\omega-1)\Gamma^2(2-\omega) {}_2F_1(\omega-1, 2\omega-3; \omega-1; \eta)$$

Sendo:

$$\eta = \frac{a.n}{b.n}$$

Usando a propriedade das funções hipergeométricas:

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; z) &= (1-z)^{-a} \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} {}_2F_1(a, c-b; a-b+1; \frac{1}{1-z}) \\ &\quad + (1-z)^{-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} {}_2F_1(b, c-a; b-a+1; \frac{1}{1-z}) \end{aligned}$$

Se chega a:

$$I = I_1 + I_2 = \pi^\omega \frac{[(a-b)^2]^{\omega-2}}{(a.n)} \Gamma(2-\omega) B(\omega-1, \omega-1) {}_2F_1(1, \omega-1; 2\omega-2; \lambda)$$

Sendo agora:

$$\lambda = \frac{(a-b).n}{a.n}$$

Resultado que concorda com aquele calculado para $F2_{PV}$ em (4.3).

E.3 O problema aberto.

Este novo método, desloca o problema de usar uma parametrização para calcular as integrais sob os momentos, mas o preço a pagar é que, como já se viu, se tem que resolver um sistema de equações, que se bem que são lineares, apresentam um grande número de soluções possíveis, sendo muitas delas triviais e outras degeneradas (no sentido que levam para uma mesma integral). É justamente este último ponto que ainda não é bem entendido, e é um campo aberto de estudo.

Referências Bibliográficas

- [1] Paul Adrian Maurice Dirac, *Forms of Relativistic Dynamics*, Rev.Mod.Phys.**21** (1949) 392
- [2] M.B.Green,J.H.Schwarz,Witten, *Superstring Theory*, Cambrigde Monograph on Mathematical Physics.
- [3] M.Kaku, *Introduction to Superstrings*, Graduate Text in Contemporary Physics, Springer-Verlag (1988).
- [4] M.B.Green,J.H.Schwarz, *Supersymmetrical String Theories*, Phys.Lett.**109B** (1982) 444-448.
- [5] G.Leibbrandt,
An introduction to noncovariant gauges, Rev.Mod.Phys.**59** (1987) 1067-1120.
- [6] W.Kummer, Acta Phys.Austriaca **14** (1961) 149
- [7] Stefan Pokorski, *Gauge Field Theories* Cambrigde Monograph on Mathematical Physics, Cambrigde University Press (1987).
- [8] Lewis Ryder, *Quantum Field Tehory* Cambrigde University Press (1985).
- [9] C.Itzykson,J.B.Zuber *Quantum Field Tehory*, McGraw-Hill Inc (1980).
- [10] C.Quigg, *Gauge Theories of the Strong,Weak,and Electromagnetic Interactions*, Frontiers in Physics, the Benjamin - Cummings (1983).
- [11] C.G.Bollini, J.J Giambiagi *Dimensional Renormalization: The Number of Dimensions as a Regularizing Parameter*. Il Nouvo Cimento **12B**, (1972) 20-25
- [12] S.Mandelstam, *Light-cone superspace and the ultraviolet finiteness of the $N = 4$ model* Nucl. Phys.**B213**, (1983) 149-168

- [13] G.Leibbrandt, *Light-cone gauge in Yang-Mills theory* Phys.Rev.**D29**, (1984) 1699-1708
- [14] A.T.Suzuki,B.M.Pimentel, *Light-Cone gauge and the (causal) principal-value prescription*, Phy.Rev D42,6 (1990) 2115
- [15] D.K.Park, *Comment on prescription problem in light-cone gauge*, hep-th/9608087.
- [16] G.Leibbrandt,A.Richardson,C.Martin, *The pole part of the 1PI Four-Point Function in Light-Cone Gauge Yang-Mills Theory*, hep-th/9801185.
- [17] Alfredo T.Suzuki, *Light-Cone Techniques in Yang-Mills and Supersymmetric Yang-Mills Field Theories (PhD. Thesis)*, Queen Mary College, University of London, July 1986.
- [18] D.M.Capper,J.J.Dulwich and M.J.Litvak, *On the evaluation of integrals in the light-cone gauge*, Nucl.Phys.**B241** (1984) 463-476
- [19] J.Strathdee *Introduction to Functional and Path Integral Methods in Quantum Field Theory*, 1991 Summer School in High Energy Physics and Cosmology, The ICTP series in Theoretical Physics - Volume 8, Trieste, Italy.
- [20] J.Frenkel, *Class of ghost-free non-Abelian gauge theories*, Phys.Rev.**D13**,8 (1976) 2325-2334
- [21] C.G.Bollini, J.J.Giambiggi and A.González Domínguez *On the Reduction Formula of Feinberg and Pais*, Jour.Math.Phys. **6**(1965) 165-166
- [22] N.N.Bogoliubov and D.V.Shirkov, *Quantum Fields*, Benjamim/Cummings (1983)
- [23] I.S.Gradshcheyn and I.M.Ryshik, *Table of Integrals Series and Products*, Academic Press (1965)
- [24] I.G.Halliday, M.Riccota, *Topics in Field Theory*, Phys.Lett.**B193** (1987) 241
- [25] A.T.Suzuki, M.Riccota, *Topics in Theoretical Physics-Festschrift for P.L.Ferreira*,
- [26] I.G.Halliday, M.Riccota, A.T.Suzuki, *XVII Brazilian Meeting on Particles and Fields*

- [27] A.T.Suzuki, A.G.M.Schmidt *An easy way to solve two-loop vertex integrals* , hep-th/9712108.
- [28] A.T.Suzuki, A.G.M.Schmidt *Negative Dimensional Integration for Massive Four Point Functions; 1, the Standard Solutions* hep-th/9707187.

