

**PROGRAMA DE  
PÓS-GRADUAÇÃO  
EM FÍSICA**

**ÁREA DE CONCENTRAÇÃO EM FÍSICA APLICADA**

**Convergência para estados assintóticos em  
mapeamentos não lineares**

**Danilo Silva Rando**

**INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS**

**RIO CLARO - SP**

**2024**

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"Júlio de Mesquita Filho"  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Câmpus de Rio Claro

Danilo Silva Rando

## Convergência para estados assintóticos em mapeamentos não lineares

Tese apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor(a) em Física.

Orientador: Edson Denis Leonel  
Coorientador: Diego Fregolent Mendes de Oliveira

Rio Claro - SP

2024

R192c Rando, Danilo Silva  
Convergência para estados assintóticos em mapeamentos não lineares / Danilo Silva Rando. -- Rio Claro, 2024  
71 p. : il., tabs.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro  
Orientador: Edson Denis Leonel  
Coorientador: Diego Fregolent Mendes de Oliveira

1. Mapeamentos não lineares. 2. Leis de escala. 3. Caos. I.  
Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Câmpus de Rio Claro

# Convergência para estados assintóticos em mapeamentos não lineares

Danilo Silva Rando

Tese apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Física.

## Comissão Examinadora

**Prof. Dr. Edson Denis Leonel**

IGCE / UNESP / Rio Claro (SP)

**Prof. Dr. Antonio Marcos Batista**

UEPG / Ponta Grossa (PR)

**Prof. Dr. Denis Gouvêa Ladeira**

UFSJ / Ouro Branco (MG)

**Prof. Dr. André Luis Prando Livorati**

IGCE / UNESP / Rio Claro (SP)

**Dr. Matheus Rolim Sales**

DF / UNESP / Rio Claro (SP)

**Conceito: Aprovado**

Rio Claro-SP, 16 de julho de 2024.

## Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por me conceder a vida, a família e os amigos que me sustentam em cada passo da jornada.

À minha universidade, expresso minha sincera gratidão: ao corpo docente, à direção e à administração, que abriram para mim uma janela de oportunidades, permitindo-me vislumbrar um horizonte pleno, iluminado pela confiança no mérito e na ética que aqui se cultivam.

Com profunda admiração e respeito, dedico um especial agradecimento ao meu orientador e amigo, Prof. Dr. Edson Denis Leonel, cuja dedicação incansável e amor pela profissão inspiram todos ao seu redor. Sua orientação foi essencial em cada fase deste trabalho e de minha trajetória.

Agradeço também à minha família, parentes e amigos, cujo apoio inabalável e incentivo foram fundamentais para que eu alcançasse mais esta conquista em minha carreira.

Um agradecimento especial à minha amada namorada, Ana Laura, que com amor, apoio e compreensão esteve ao meu lado em cada momento. Sem você, este trabalho jamais teria sido concluído. Todo o meu coração é grato a você.

Agradeço ainda ao Prof. Dr. Diego F. M. Oliveira pela valiosa oportunidade de vivenciar uma experiência enriquecedora na Universidade da Dakota do Norte, cuja contribuição foi essencial para o desenvolvimento deste trabalho.

A todos que, de alguma forma, participaram direta ou indiretamente de minha formação e da conclusão deste projeto, deixo o meu sincero e profundo obrigado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

## Resumo

Nesta tese nós fizemos uma investigação da dinâmica de alguns mapeamentos discretos, cuja evolução converge para o estado estacionário em diferentes tipos de bifurcações e próximas a elas. Para bifurcações locais, ocorre uma convergência para o estado estacionário feita pelo uso de uma função homogênea e generalizada, levando a um conjunto de três expoentes críticos. Perto da bifurcação, a convergência é descrita por um decaimento exponencial onde o tempo de relaxação é caracterizado por uma lei de potência. Para bifurcação global, como notado para uma crise de fronteira, onde um atrator caótico é repentinamente substituído por um transiente caótico após uma pequena mudança nos parâmetros de controle, a dinâmica tem uma evolução que fornece a probabilidade de sobrevivência descrita por um decaimento exponencial cujo tempo transitório é dado por uma lei de potência.

Palavras-chave: Mapeamentos não lineares, Leis de escala, Caos.

## **Abstract**

We investigated the dynamics of discrete mappings, whose evolution converges to the steady state at different types of bifurcations and near to them. For local bifurcations, a convergence to the steady state occurs by using a homogeneous and generalized function, leading to three critical exponents. Near the bifurcation, the convergence is described by an exponential decay, where the relaxation time is determined by a power law. For a global bifurcation, as noted for a boundary crisis, where a chaotic attractor is suddenly replaced by a chaotic transient after a small change in the control parameters, the dynamics have an evolution that gives the probability of survival described by an exponential decay, where the time transient is given by a power law.

Keywords: Nonlinear mappings, Scaling laws, Chaos.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Convergência para estados assintoticamente estáveis em mapeamentos unidimensionais</b>	<b>11</b>
2.1	Pontos Fixos . . . . .	11
2.2	Diagrama de Órbita . . . . .	14
2.3	Expoente de Lyapunov . . . . .	15
2.4	Escalas no <i>logistic-like</i> . . . . .	17
2.5	Mapa <i>logistic-like</i> com $\mu = 0$ em $R=1$ . . . . .	23
2.6	Mapa <i>logistic-like</i> com o caso de $\mu \neq 0$ na primeira bifurcação	25
2.7	Mapa <i>logistic-like</i> com o caso de $\mu = 0$ na bifurcação de duplicação de período . . . . .	27
2.8	Mapa <i>logistic-like</i> com o caso de $\mu \neq 0$ na bifurcação de duplicação de período . . . . .	31
<b>3</b>	<b>O Modelo do acelerador de Fermi</b>	<b>34</b>
3.1	O modelo e suas propriedades . . . . .	35
3.1.1	Parâmetros e variáveis . . . . .	35
3.1.2	Atualização da velocidade . . . . .	36
3.1.3	Atualização da fase angular . . . . .	36
3.1.4	Interpretação física . . . . .	36
3.1.5	Comportamento dinâmico . . . . .	37
3.2	Dinâmica com choques inelásticos. . . . .	38
3.3	Convergência para o estado estacionário em uma bifurcação local . . . . .	42
3.3.1	Convergência na bifurcação . . . . .	44
3.3.2	Convergência próximo à bifurcação . . . . .	45
3.4	Investigação de uma bifurcação global - uma crise de fronteira	47
<b>4</b>	<b>Aplicação para o modelo kicked-rotator</b>	<b>51</b>
4.1	Introdução ao <i>Standard Map</i> . . . . .	51

4.1.1	Interpretação Física . . . . .	52
4.1.2	Transição do Comportamento Integrável para o Caótico	52
4.1.3	Importância e Aplicações . . . . .	52
4.1.4	Explicação dos Termos . . . . .	53
4.1.5	Integração entre Dinâmicas Conservativas e Dissipativas	54
4.1.6	Transição para Dinâmicas Caóticas . . . . .	54
4.2	Transição do Caso Conservativo para o Caso Dissipativo . . .	54
4.2.1	Sistema Conservativo . . . . .	55
4.2.2	Introdução de Dissipação . . . . .	56
4.2.3	Comportamento Dinâmico no Caso Dissipativo . . . . .	56
4.2.4	Bifurcações no Caso Dissipativo . . . . .	57
4.3	Convergência para o estado estacionário . . . . .	58
4.3.1	Convergência na bifurcação . . . . .	58
4.3.2	Convergência próxima a bifurcação . . . . .	60

**5 Conclusões e Perspectivas** **65**

# Capítulo 1

## Introdução

Os sistemas dinâmicos têm uma longa e distinta história como um ramo da matemática[1]. A partir da obra fundamental de Isaac Newton[2], as equações tornaram-se a principal técnica matemática para descrever processos que evoluem continuamente no tempo. Durante os séculos posteriores, os matemáticos criaram técnicas para resolver problemas diferenciais, dentre elas estão transformadas de Laplace [3], séries de potência [4] e métodos algébricos lineares [5]. Muitos dos processos mais importantes da natureza são inerentemente não lineares. Um exemplo disso é fornecido pelas leis de Newton[2], nas quais podemos descrever o movimento dos planetas no sistema solar, conhecido como o problema de n-corpos. Essas leis nos dão um sistema de equações diferenciais cujas soluções descrevem o movimento de n “massas pontuais” movendo-se no espaço sujeito apenas a atração gravitacional mútua. Se conhecermos as posições e velocidades iniciais dessas massas, então tudo o que temos a fazer é resolver as equações de Newton para poder prever onde e como essas massas se moverão no futuro. Isso acaba sendo uma tarefa formidável. Se houver apenas um ou dois corpos com massas, então essas equações podem ser resolvidas explicitamente, como geralmente é feito nos cursos de Física. Porém, quando introduzimos mais corpos no problema, a situação muda completamente. É verdade que as soluções numéricas de equações diferenciais por computadores nos permitiram aproximar o comportamento das soluções reais em muitos casos [6], mas ainda existem regimes no problema onde as soluções são tão complicadas ou caóticas que eles desafiam até mesmo a computação. Embora a solução explícita de equações diferenciais ordinárias não lineares nem sempre seja possível, houve vários eventos marcantes nos últimos tempos que revolucionaram a forma como estudamos sistemas dinâmicos. Em 1890, o Rei Oscar II da Suécia anunciou um prêmio para o primeiro matemático que conseguisse resolver o sistema de n-corpos, e provar a estabilidade do sistema solar. Ninguém resolveu o problema original,

mas Henri Poincaré[7] chegou mais perto. Poincaré revolucionou a maneira como lidamos com equações diferenciais ordinárias não lineares. Em vez de buscar soluções explícitas para essas equações, Poincaré defendeu trabalhar qualitativamente, usando técnicas topológicas e geométricas, para descobrir as estruturas globais de todas as soluções [9]. Para ele, o conhecimento de todos os comportamentos possíveis do sistema sob investigação era muito mais importante do que o estudo especializado de soluções individuais. Mais tarde o meteorologista americano E. N. Lorenz [10], usando um computador muito rudimentar, descobriu que equações diferenciais muito simples poderiam exibir o tipo de caos que Poincaré observou. Lorenz passou a observar que seu modelo meteorológico simples (agora chamado de sistema de Lorenz) exibiu o que é chamado de dependência sensível de condições iniciais. Para ele, isso significava que a previsão do tempo a longo prazo era quase impossível e mostrou que o tópico matemático do caos era importante em todas as outras áreas da ciência.

Nos sistemas caóticos, nós temos os atratores, que são padrões complexos e imprevisíveis que surgem em sistemas dinâmicos não lineares [1]. Eles são um resultado da sensibilidade às condições iniciais e à complexidade das interações entre as diferentes variáveis do sistema [1]. Um atrator é uma região no espaço de estados do sistema para a qual o sistema evolui ao longo do tempo. Em sistemas dinâmicos não caóticos, os atratores são geralmente estáveis e previsíveis. Por exemplo, em um pêndulo forçado e amortecido[8], o atrator é um ciclo limite estável em que o pêndulo oscila de um lado para o outro. No entanto, em sistemas caóticos, os atratores são complexos e irregulares [10]. O exemplo mais conhecido de um atrator caótico é o atrator de Lorenz, ele descreve o comportamento do sistema meteorológico e é caracterizado por trajetórias não periódicas que formam uma estrutura tridimensional complexa. Os atratores caóticos exibem algumas propriedades interessantes, como a sensibilidade às condições iniciais, o que significa que pequenas variações nas condições iniciais podem levar a grandes diferenças nas trajetórias futuras do sistema.

No estudo dos sistemas dinâmicos, geralmente nos deparamos com mapas ou mapeamentos, funções que evoluem ao longo do tempo. De forma discreta, essas funções são descritas por equações que representam o mapeamento do sistema. O parâmetro de controle governa a evolução do mapa, determinando seu comportamento. O conjunto de soluções pode variar conforme a modificação desses parâmetros. Um tipo de comportamento [11, 12], denominado bifurcação [13, 14, 15], divide-se em duas classes: (i) bifurcações locais; e (ii) bifurcações globais. Nas bifurcações locais [3, 4], o conhecimento dos pontos fixos (ou de uma órbita periódica) e da estabilidade do sistema é suficiente para identificar e classificar cada tipo de bifurcação, que pode

ser: transcítica, forquilha, sela-nó e duplicação de período, entre outras. No caso de uma bifurcação global [16], geralmente há uma mudança abrupta nos atratores, que podem aumentar drasticamente ou até serem destruídos, levando a uma crise de fronteira.

No mapeamento unidimensional, a convergência para o estado estacionário na bifurcação é descrita por uma equação homogênea generalizada. Uma lei de escala surge quando a função homogênea é aliada com um conjunto de hipóteses de escala. Existem três expoentes críticos que descrevem o comportamento da convergência para o estado estacionário, ambos estão ligados entre si por uma lei de escala. Os expoentes são universais para a caso da bifurcação de duplicação de período [17], mas dependem do tipo de não linearidade para o caso da bifurcação transcítica e do tipo forquilha [18]. Muito próximo da bifurcação, a convergência não é mais descrita por uma função homogênea, mas sim por um decaimento exponencial [19]. O tempo de relaxação é descrito por uma lei de potência [20, 21] cujo o argumento da lei é a distância no parâmetro onde ocorreu a bifurcação. A descrição foi aplicada em mapeamentos unidimensionais [18], e recentemente também foi utilizada em mapeamentos bidimensionais por nós [22].

Portanto, um dos objetivos do presente trabalho é demonstrar nosso estudo sobre a convergência para o estado estacionário em dois mapas bidimensionais e dissipativos. Entre as investigações aplicadas nas bifurcações locais, também investigamos a dinâmica perto de uma bifurcação global, particularmente em uma crise de fronteira. Na crise, uma variedade estável emergindo de um ponto fixo de sela intercepta uma variedade instável do mesmo ponto fixo do tipo sela [16].

Se o ponto fixo for do tipo sela, consideraremos o valor absoluto dos autovalores a partir da matriz jacobiana. O valor absoluto dos autovalores da matriz jacobiana é crucial porque fornece informações sobre a taxa de crescimento ou decrescimento das trajetórias em torno do ponto fixo. Isso reflete a estabilidade global do sistema e é essencial para entender a natureza do ponto fixo no contexto de mapas bidimensionais.

Antes da crise, um atrator caótico coexiste com uma órbita periódica. Após a crise, o atrator caótico é destruído e um transiente caótico é observado [16]. A probabilidade de sobrevivência da partícula na região onde o atrator caótico existia antes da crise é descrita por um decaimento exponencial [24]. O tempo de relaxação é uma lei de potência, cujo expoente crítico foi medido numericamente.

Vamos investigar a convergência para o estado estacionário perto de duas bifurcações diferentes, em um modelo de acelerador de Fermi dissipativo [25, 26], e a convergência também em um *kicked rotator model*[27]. No caso do mapeamento do tipo Fermi-Ulam, uma das bifurcações é local, mais

especificamente uma duplicação de período, enquanto a outra é global, levando a uma crise de fronteira. O mapeamento é descrito por duas variáveis dinâmicas: a velocidade da partícula após o impacto com a parede e a fase da parede no instante da colisão. A dissipação é introduzida por um coeficiente de restituição levando à perda de fração da energia na colisão.

Esta tese está organizada da seguinte forma. No capítulo 2 temos o estudo da convergência para estados assintoticamente estáveis em mapeamentos unidimensionais, e suas propriedades, demonstrada pela análise matemática e simulações numéricas. No capítulo 3, abrangemos o estudo da convergência para um mapeamento bidimensional, utilizando um mapa do tipo Fermi-Ulam como exemplo, no capítulo 4 temos a convergência no caso do *kicked-rotator model*, e no capítulo. 5, temos as conclusões do trabalho.

# Capítulo 2

## Convergência para estados assintoticamente estáveis em mapeamentos unidimensionais

Mapeamentos discretos são frequentemente utilizados para caracterizar a evolução temporal de diversos sistemas dinâmicos. Um mapeamento discreto bastante conhecido é o mapa logístico. O mapa foi estudado por Robert May [28] com o intuito de descrever a dinâmica de populações. O mapeamento tem uma série de comportamentos dinâmicos relevantes, dentre os quais incluem-se regularidade, diversos tipos de bifurcações, assim como rotas para o caos via cascata de duplicação de período. Ao longo das bifurcações de duplicação de período, existem dois expoentes conhecidos como expoentes de Feigenbaum [29] que descrevem comportamentos de escala conduzindo a uma universalidade. Nas proximidades das bifurcações, a dinâmica exibe um comportamento crítico. No ponto de bifurcação, uma órbita evolui para o ponto de equilíbrio, a partir de uma lei de potência em  $n$ , onde  $n$  é o número de iterações. Ligeiramente distante do ponto de bifurcação, a órbita evolui para o ponto de equilíbrio de forma exponencial, com um tempo de relaxação descrito por uma lei de potência no parâmetro de controle [30].

### 2.1 Pontos Fixos

O mapeamento logístico é definido pela equação

$$x_{n+1} = F(x_n) = Rx_n(1 - x_n), \quad (2.1)$$

onde  $R$  é o parâmetro de controle. Este parâmetro pode assumir qualquer valor real, embora os valores de interesse encontram-se no intervalo  $R \in [0, 4]$ ,

devido às propriedades dinâmicas do sistema dentro desse intervalo. Sendo assim, a variável  $x$  fica limitada a assumir valores em  $[0,1]$ , de modo que a aplicação de  $F(x)$  é fechada, pois  $F : [0,1] \rightarrow [0,1]$ . O mapeamento é estudado pelo processo iterativo, de modo que dado um ponto inicial  $x_0$ , encontra-se  $x_1 = F(x_0)$ ,  $x_2 = F(x_1) = F^2(x_0), \dots, x_n = F^n(x_0)$ . Aqui  $F^2(x_0)$  indica a segunda iteração do mapeamento, ou seja  $F(F(x_0))$ . A órbita ou trajetória de  $x_0$  é a sequência de pontos [30].

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots \quad (2.2)$$

Ela representa a evolução do sistema a partir da condição inicial  $x_0$ . Se o sistema evolui de tal maneira que permanece sempre no mesmo valor de  $x$  tem-se um ponto fixo. Os pontos fixos são encontrados resolvendo-se a seguinte equação

$$F(x^*) = x^*. \quad (2.3)$$

Então, para a equação (2.1) encontra-se soluções dadas por

$$x_1^* = 0, \quad (2.4)$$

$$x_2^* = \frac{R-1}{R}. \quad (2.5)$$

Um ponto fixo  $x^*$  é dito ser estável (instável) caso a evolução da condição inicial  $x^* + \epsilon_0$ , onde  $\epsilon_0$  é pequeno, se aproximar (afastar) de  $x^*$ . Isso é caracterizado pela derivada de  $F(x)$  em relação a  $x$ , ou seja  $F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ . Considerando  $x_0 = x^* + \epsilon_0$  e mantendo termos de ordem  $\epsilon_0$ , a primeira iteração fornece

$$x_1 = F(x_0) = x^* + \epsilon_0 F'(x^*). \quad (2.6)$$

Observando que  $\epsilon_1 = \epsilon_0 F'(x^*)$ , pode-se iterar a equação anterior, bastando trocar  $\epsilon_0$  por  $\epsilon_1$ . Assim obtém-se para a  $n$ -ésima iteração que

$$x_n = F^n(x_0) = x^* + \epsilon_0 [F'(x^*)]^n. \quad (2.7)$$

Portanto, quando  $F'(x)$  tiver módulo menor que 1 o ponto fixo é dito ser estável, se for maior que 1 é instável e caso seja exatamente 1 tem-se que considerar derivadas de ordem superiores. Para o caso específico do mapeamento logístico tem-se que [30]

$$F'(x^*) = R(1 - 2x^*). \quad (2.8)$$

O ponto fixo  $x^* = 0$  é estável para  $0 < R < 1$ , tornando-se instável a partir de  $R > 1$ . Em  $R = 1$  o ponto fixo dado pela equação (2.5) tem o valor 0 e o módulo da derivada de  $F(x)$  é igual a 1. Para  $R$  entre 1 e 3,

esse ponto fixo é estável e para  $R > 3$  é instável. Para  $R > 3$  o sistema apresenta novo tipo de comportamento, onde o ponto fixo (2.5) é instável e surge um novo ponto periódico: uma órbita de período 2 ou um ciclo 2. Isso significa que assintoticamente o sistema apresenta a órbita  $\dots, x_1, x_2, x_1, x_2, \dots$ . A mudança de comportamento que ocorre em  $R = 3$ , quando um ponto fixo desestabiliza-se, surge uma órbita de período 2, classificada como uma bifurcação de duplicação de período. Quando a órbita de período 2 fica instável, nova bifurcação de duplicação de período ocorre e surge uma órbita de período 4 e esse processo continua até ocorrência de caos. Órbitas de períodos maiores são definidas analogamente. Assim num ciclo 3 o sistema oscila entre 3 valores  $x_1, x_2, x_3$ . Um ponto fixo corresponde a um ciclo 1. Semelhante a obtenção do ponto fixo, os pontos  $x_1$  e  $x_2$  associados a órbita de período 2 são obtidos resolvendo-se a equação de ponto fixo para  $F^2(x)$ , ou seja

$$F^2(x^*) = x^*. \quad (2.9)$$

Para o mapeamento logístico, a expressão para  $F^2(x)$  é dada por:

$$F^2(x) = (R^2x - R^2x^2) - (1 - Rx + Rx^2). \quad (2.10)$$

Os pontos fixos que foram obtidos fazendo-se  $F(x^*) = x^*$ , são também soluções de  $F^2(x^*) = x^*$ , portanto pode-se simplificar a relação definindo uma função

$$g(x^*) = \frac{F^2(x^*) - x^*}{F(x^*) - x^*}. \quad (2.11)$$

ou de forma simplificada

$$g(x) = Rx^2 - (R^2 + R)x + R + 1. \quad (2.12)$$

As soluções de  $g(x)$  são

$$x_1^* = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \sqrt{R^2 - 2R - 3} \right), \quad (2.13)$$

$$x_2^* = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{R} - \frac{1}{R} \sqrt{R^2 - 2R - 3} \right). \quad (2.14)$$

Estas soluções são reais somente se  $R^2 - 2R - 3 \geq 0$ , o que nos leva a obter

$$R_1 \geq 3, \quad (2.15)$$

$$R_2 \leq -1. \quad (2.16)$$

A solução  $R_2$  é descartada, pois  $R_2 \notin [0, 4]$ . Com o resultado acima, tem-se que  $R_1$  é o valor que determina o início da região de ciclo 2, enquanto que

o valor que determina o término da região de estabilidade do ciclo 2 será obtido por meio do estudo da estabilidade deste ciclo. Necessita-se avaliar agora  $(F^2(x_2))'$ . Através da regra da cadeia mostra-se que

$$(F^2(x_2))' = F'(x_1)F'(x_2). \quad (2.17)$$

Caso  $|(F^2(x_2))'| < 1$ , a solução é estável. Se  $|(F^2(x_2))'| > 1$  a solução é instável. Usando  $x_1$  e  $x_2$  das relações (2.13) e (2.14), obtém-se

$$(F^2(x_2))' = R^2((1 - 2x_1)(1 - 2x_2)), \quad (2.18)$$

que simplificando leva a

$$(F^2(x_2))' = -R^2 + 2R + 4. \quad (2.19)$$

Daqui tira-se que  $|(F^2(x_2))'| \geq 1$  se

$$R_3 \geq 1 + \sqrt{6}, \quad (2.20)$$

$$R_4 \leq 4 - \sqrt{6}, \quad (2.21)$$

mas  $R_4 < 0$  é sem interesse, já que  $R_4 \in [0, 4]$ . Com esse resultado encontrado para  $R_3$ , conclui-se que a região de período 2 fica completamente especificada para qualquer  $x_0 \in (0, 1)$ , desde que  $R \in [3, 1 + \sqrt{6}]$ , sendo este último intervalo, o indicador da região de ciclo 2 estável. Generalização imediata é feita para a obtenção dos pontos pertencentes a ciclos de ordem  $n$ , onde a equação é da forma

$$F^n(x^*) = x^*. \quad (2.22)$$

A estabilidade agora é verificada por

$$|(F^n(x^*))'| = |F'(x^1)F'(x^2)F'(x^3)\dots F'(x^n)| \leq 1, \quad (2.23)$$

onde  $a$  assume qualquer valor inteiro entre 1 e  $n$ .

## 2.2 Diagrama de Órbita

Agora que é conhecido o procedimento para a obtenção dos pontos fixos e ciclos de ordem  $n$ , pode-se introduzir o diagrama de órbita. O diagrama de órbita mostra o comportamento assintótico de uma trajetória a partir de uma dada condição inicial  $x_0$  para cada valor do parâmetro de controle. A região do espaço de fase para onde trajetórias convergem assintoticamente é dita ser um atrator. No mapeamento logístico, quando  $1 < R < 3$ , as trajetórias convergem para o ponto fixo estável dado pela equação (2.5) desde que a

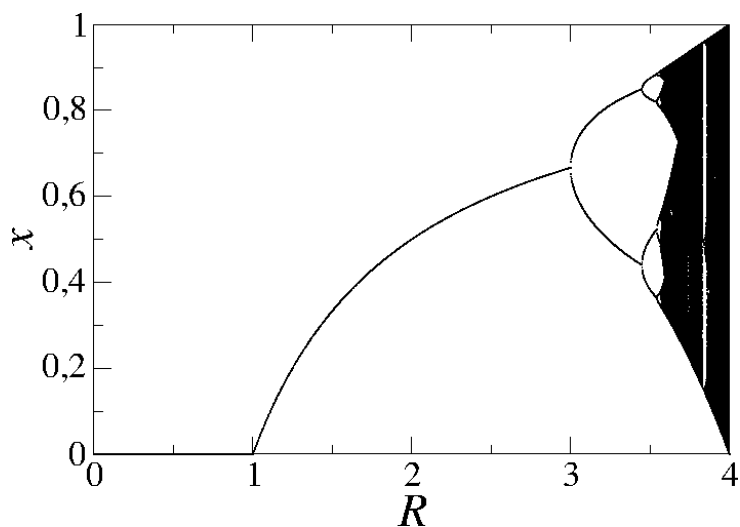


Figura 2.1: Diagrama de órbita para o mapa logístico. No eixo horizontal tem-se o parâmetro de controle enquanto que no eixo vertical é representada a variável  $x$ . A condição inicial usada foi  $x_0 = \frac{1}{2}$ .

condição inicial  $x_0 \in (0, 1)$ . Dessa forma, o ponto fixo  $x_2^*$  é o atrator. Para  $3 \leq R \leq 1 + \sqrt{6}$  o atrator é um ciclo 2, definido pelos pontos cujas equações são (2.13) e (2.14). Dessa forma, a partir da condição inicial  $x_0$ , a trajetória evolui convergindo para os pontos  $x_1^*, x_2^*$  estabelecendo o ciclo 2 estável. Na figura 2.1 tem-se um diagrama típico, onde o eixo horizontal representa o parâmetro de controle e no eixo vertical é representado a variável  $x$ . O procedimento utilizado na obtenção deste diagrama é o seguinte. Como condição inicial escolhe-se arbitrariamente  $x_0 = \frac{1}{2}$ . A seguir itera-se o mapeamento dado pela equação (2.1) 100.000 vezes salvando apenas os últimos 100 pontos. O eixo horizontal foi dividido em 800 partes igualmente espaçadas.

## 2.3 Expoente de Lyapunov

Quando estudamos um sistema dinâmico, uma das questões mais frequentes que se coloca é a da existência de caos em tal sistema. Existem muitas definições de caos, mas a maioria delas concorda no que diz respeito à presença de sensibilidade nas condições iniciais. Para medir a taxa de divergência de trajetórias e portanto quantificar a dependência sensível às condições iniciais, utilizam-se os expoentes característicos de Lyapunov [30]. Seja a evolução temporal de um sistema dinâmico a partir de suas condições iniciais próximas,  $x_0$  e  $x_0 + \epsilon$ . Decorrido um intervalo de tempo  $t$  temos que a

distância entre as trajetórias é

$$d(t) \sim \epsilon e^{(\lambda t)}. \quad (2.24)$$

onde o expoente de Lyapunov  $\lambda$  fornece a taxa média de divergência das trajetórias. Para um tempo  $t$  finito, o expoente de Lyapunov depende de  $x_0$ .

No caso de mapas unidimensionais o cálculo do expoente de Lyapunov é obtido de [30]

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |F'(x_i)|, \quad (2.25)$$

onde  $x_i = F^{(i)}(x_0)$  é o resultado da  $i$ -ésima iteração do mapa  $F$  a partir da condição inicial  $x_0$  e  $F'(x_i) = (dF/dx)_{(x_i)}$ . No limite de  $N$  tendendo ao infinito o expoente de Lyapunov não deve mais depender da condição inicial  $x_0$ . Na prática trabalhamos com  $N$  finito, então é necessário calcular o expoente para várias condições iniciais e fazer uma média dos valores obtidos.

A função  $F$  que define o mapa depende geralmente de um parâmetro de controle  $R$ . Então o valor de  $\lambda$  também dependerá desse parâmetro, ou seja,  $\lambda = \lambda(R)$ . Ao construir o gráfico da dependência desse parâmetro, identifica-se os valores de  $R$ , para os quais, tem-se dependência em relação às condições iniciais ( $\lambda > 0$ ) e, portanto, sob quais condições o sistema apresenta comportamento caótico (figura 2.2).

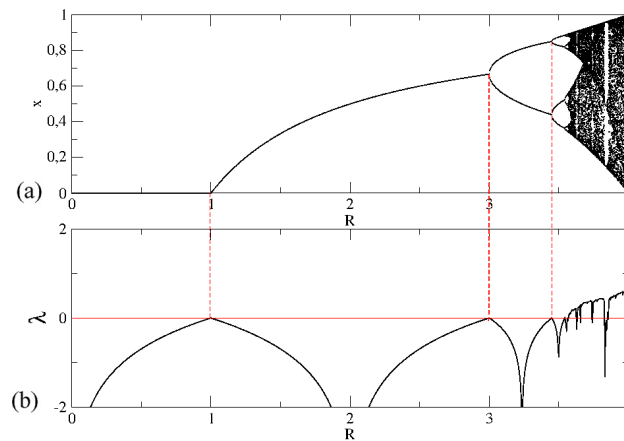


Figura 2.2: (a) Diagrama de órbita para o mapa logístico. (b) Expoente de Lyapunov referente ao diagrama de órbita mostrado em (a).

Discutiremos, neste capítulo, a convergência para o estado estacionário em uma família de mapeamentos discretos unidimensionais.

## 2.4 Escalas no *logistic-like*

Apresentaremos uma discussão de como se dá a convergência para os estados estacionários no mapeamento unidimensional. Considerando o mapa *logistic-like*, escrito como

$$x_{(n+1)} = Rx_n(1 - x_n^\gamma), \quad (2.26)$$

onde  $\gamma \geq 1$  e  $R \geq 0$  é um parâmetro de controle. O parâmetro  $R$  é definido nesse intervalo para abranger uma faixa completa de comportamentos dinâmicos, desde estabilidade e periodicidade até caos, enquanto garante que as trajetórias permaneçam dentro do intervalo válido de  $x_n$ .

Os pontos fixos são obtidos de

$$x_{(n+1)} = x_n = x, \text{ logo } Rx(1 - x^\gamma) = x, \quad (2.27)$$

o primeiro ponto fixo é dado por

$$x = 0, \quad (2.28)$$

Para  $\gamma$  ímpar [17], o segundo é obtido por

$$R(1 - x^\gamma) = 1, \quad (2.29)$$

conduzindo a

$$x = \left[1 - \frac{1}{R}\right]^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (2.30)$$

Quando  $\gamma$  [17] é par, temos

$$x = \pm \left[1 - \frac{1}{R}\right]^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (2.31)$$

Das expressões dos pontos fixos determinamos as suas estabilidades fazendo [31]

$$\left| \frac{df}{dx} \right|_{x^*} < 1, \quad (2.32)$$

onde

$$f = Rx(1 - x^\gamma), \quad (2.33)$$

logo temos

$$\frac{df}{dx} = R(1 - x^\gamma(1 + \gamma)). \quad (2.34)$$

Analizando agora a estabilidade do ponto fixo  $x = 0$

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=0} = R, \quad (2.35)$$

temos como resultado que esse ponto fixo é assintoticamente estável para

$$-1 < R < 1. \quad (2.36)$$

Como  $R \geq 0$ , o ponto fixo fica assintoticamente estável para  $R \in (0, 1)$ . Para continuar a análise, consideraremos o caso que  $\gamma$  é ímpar, racional ou irracional.

$$x = \left[1 - \frac{1}{R}\right]^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (2.37)$$

logo temos

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x^*} = R[1 - x^\gamma(1 + \gamma)], \quad (2.38)$$

que quando analisada no ponto fixo leva a

$$\left| \left. \frac{df}{dx} \right|_{x^*} \right| = 1 + \gamma - \gamma R. \quad (2.39)$$

Para ser assintoticamente estável

$$\left| \left. \frac{df}{dx} \right|_{x^*} \right| < 1, \quad (2.40)$$

logo

$$-1 < 1 + \gamma - \gamma R < 1, \quad (2.41)$$

$$-1 - (1 + \gamma) < -\gamma R < 1 - (1 - \gamma), \quad (2.42)$$

$$-2 - \gamma < -\gamma R < -\gamma, \quad (2.43)$$

$$\frac{2 + \gamma}{\gamma} > R > 1, \quad (2.44)$$

então  $x = \left[1 - \frac{1}{R}\right]^{\frac{1}{\gamma}}$  é assintoticamente estável para

$$R \in \left(1, \frac{2 + \gamma}{\gamma}\right). \quad (2.45)$$

Em  $R = 1$  ocorre a troca de estabilidade entre  $x = 0$  e  $x = \left[1 - \frac{1}{R}\right]^{\frac{1}{\gamma}}$ , o que caracteriza uma bifurcação transcítica. Para  $\gamma$  ímpar, racional ou irracional os pontos fixos são:  $x = 0$ , assintoticamente estável para  $R \in [0, 1]$

e  $x = [1 - \frac{1}{R}]^{\frac{1}{\gamma}}$ , assintoticamente estável para  $R \in [1, \frac{2+\gamma}{\gamma}]$ , em  $R = 1$  ocorre uma bifurcação transcítica.

Considerando agora o caso de  $\gamma$  par temos que os pontos fixos são

$$x = \pm [1 - \frac{1}{R}]^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (2.46)$$

estudando a estabilidade desses pontos fixos temos

$$\frac{df}{dx} = R[1 - x^\gamma(1 + \gamma)], \quad (2.47)$$

finalmente chegamos em

$$\frac{df}{dx}|_{x^*} = 1 + \gamma - \gamma R. \quad (2.48)$$

Para ser assintoticamente estável devemos ter

$$\left| \frac{df}{dx} \right|_{x^*} < 1, \quad (2.49)$$

logo

$$-1 < 1 + \gamma - \gamma R < 1, \quad (2.50)$$

$$\frac{2 + \gamma}{\gamma} > R > 1, \quad (2.51)$$

então  $x = [1 - \frac{1}{R}]^{\frac{1}{\gamma}}$  é assintoticamente estável para

$$R \in \left( 1, \frac{2 + \gamma}{\gamma} \right). \quad (2.52)$$

Em  $R = 1$  ocorre uma bifurcação de forquilha. Cada ponto fixo positivo ou negativo é visitado conforme valor de  $\gamma$ , para valores ímpar, temos somente a parte positiva, e para valores par, temos a parte negativa juntamente com a parte positiva (figura 2.3). O ponto fixo  $x = [1 - \frac{1}{R}]^{\frac{1}{\gamma}}$  perde estabilidade em  $R = \frac{2+\gamma}{\gamma}$ . Nesta circunstância,  $F'(x^*) = -1$ , o que caracteriza um ponto flip incipiente marcando assim o nascimento de uma bifurcação de duplicação de período [24].

Vamos agora considerar a convergência para o ponto de equilíbrio em duas situações distintas, a primeira sendo no ponto de bifurcação e a segunda sendo imediatamente antes do ponto de bifurcação.

A variável relevante para a descrição é a distância em relação ao ponto de equilíbrio, que é escrita como uma função dependente de  $n$  (número de iterações),  $x_0$  (condição inicial) e  $\mu = R_c - R$ , onde  $R_c$  identifica o ponto de

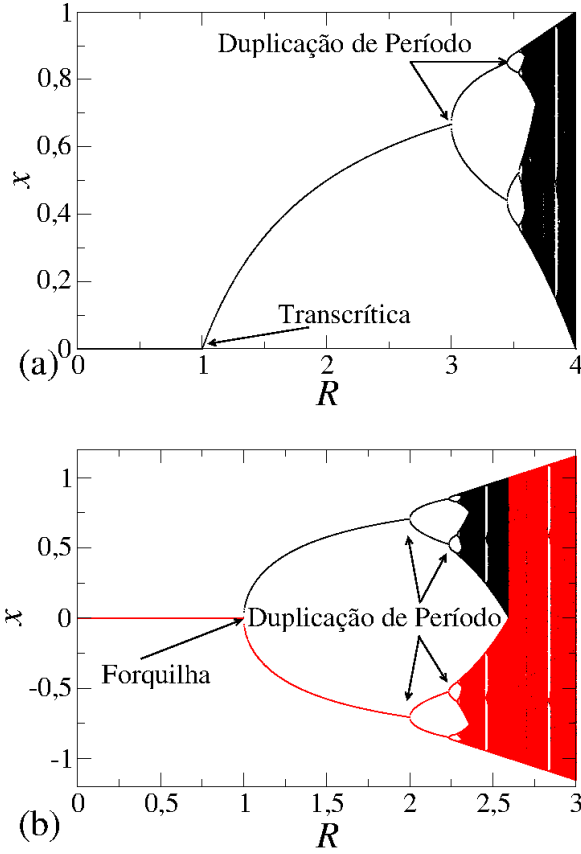


Figura 2.3: (a) Ilustração das bifurcações do tipo transcritical e duplicação de período considerando  $\gamma$  par. (b) Ilustração das bifurcações do tipo forquilha e duplicação de período, considerando  $\gamma$  ímpar.

bifurcação ( $R_c = 1$  na bifurcação transcritical) e  $R < R_c$ . Se  $\mu = 0$  então  $R = R_c$ , estamos exatamente na bifurcação. Neste caso a evolução dinâmica para o ponto fixo deve ser dada por uma função homogênea generalizada [25] de suas variáveis, ou seja:

$$X(x_0, n) = lX(l^a x_0, l^b n), \quad (2.53)$$

onde  $l$  é um fator de escala,  $a$  e  $b$  são expoentes característicos. Para  $\mu \neq 0$ ,  $R < R_c$ , a convergência para o ponto fixo é dada [17] por

$$X(x, \mu) \sim e^{-\frac{n}{\tau}}, \quad (2.54)$$

onde  $\tau \sim \mu^\delta$  sendo  $\delta$  um expoente crítico.

Vamos começar com o caso 1, onde  $\mu = 0$ . Uma descrição fenomenológica baseada na figura 2.4 pode ser feita. Propomos três hipóteses, onde

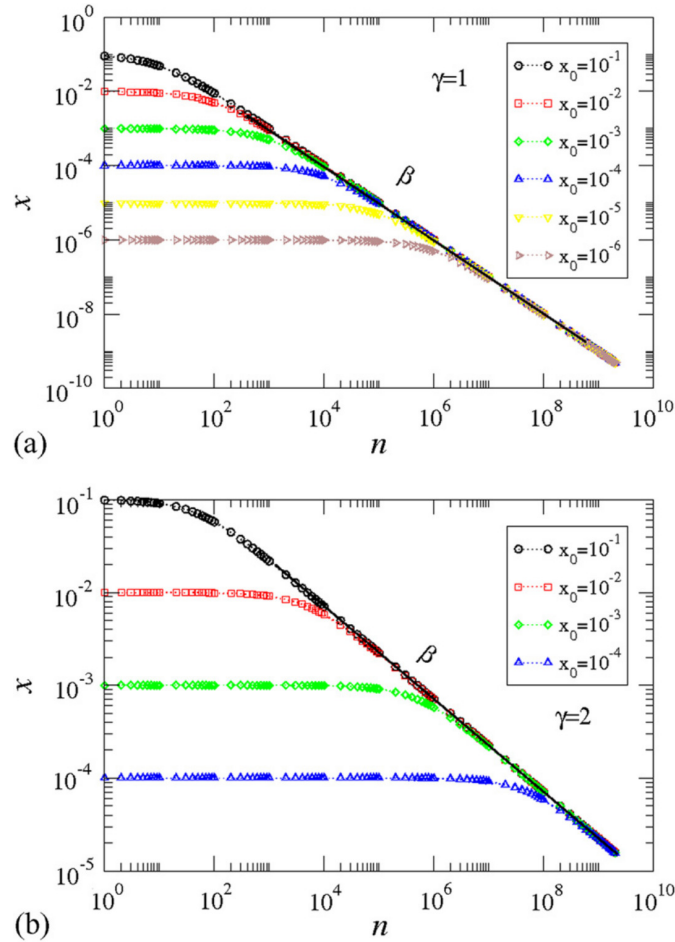


Figura 2.4: Evolução de  $x$  vs.  $n$  para diversos valores de  $x_0$  considerando: (a)  $\gamma = 1$  e (b)  $\gamma = 2$ .

1.  $x(n) \sim x_0^\alpha$ , para  $n \ll n_x$
2.  $x(n) \sim n^\beta$ , para  $n \gg n_x$
3.  $n_x \sim x_0^z$

onde  $n_x$  define o número de iterações de crossover que marca a mudança do platô constante para o decaimento em lei de potência  $n^\beta$ . Com base nas três hipóteses de escala e da função homogênea generalizada, podemos relacionar os expoentes característicos com os expoentes críticos.

Escolhendo  $l^a x_0 = 1$ , temos  $l = x_0^{-\frac{1}{a}}$ , logo

$$x(x_0, n) = x_0^{-1/a} x(1, x_0^{-\frac{b}{a}} n). \quad (2.55)$$

Assumindo que  $x(1, x_0^{-\frac{b}{a}} n)$  como constante para  $n \ll n_x$ , e comparando com a hipótese 1 temos que  $x_0^{-\frac{1}{a}} = x_0^\alpha$ , logo

$$\alpha = -\frac{1}{a}. \quad (2.56)$$

Escolhendo agora  $l^b n = 1$ ,  $l = n^{-\frac{1}{b}}$ ,

$$x(x_0, n) = n^{-\frac{1}{b}} x(n^{-\frac{a}{b}} x_0, 1). \quad (2.57)$$

Assumindo que  $x(n^{-\frac{a}{b}} x_0, 1)$  constante para  $n \gg n_x$ , e comparando com a segunda hipótese temos que

$$n^{-\frac{1}{b}} = n^\beta, \text{ assim } \beta = -\frac{1}{b}. \quad (2.58)$$

Utilizando agora as duas expressões de  $l$  temos

$$n^\beta = x_0^\alpha, \text{ logo } n_x = x_0^{\frac{\alpha}{\beta}}. \quad (2.59)$$

Comparando a última equação com a hipótese 3, temos

$$z = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (2.60)$$

Esta relação define uma lei de escala, conhecendo quaisquer dois expoentes o terceiro é determinado pela relação acima (figura 2.5). Fazendo algumas simulações numéricas com  $\mu = 0$ , obtivemos alguns dos expoentes citados anteriormente, como exemplo, no caso da bifurcação transcítica, para  $\gamma = 1$ , encontramos,  $\alpha = -1$ ,  $\beta = -0,9668(4)$ ,  $z = -1$ , como um exemplo de bifurcação pitchfork, usamos  $\gamma = 2$ , e obtemos  $\alpha = -1$ , e  $\beta = -0,4970(5)$ ,  $z = -2$  (tabela 3.1) e por último caso temos a bifurcação de duplicação de período, que obtemos  $\alpha = -1$ ,  $\beta = -0,4951(6)$ ,  $z = -2$ , fazendo agora uma simulação com  $\mu \neq 0$ , chegamos em um  $\delta = -0,994(1)$ . O expoente  $\delta$  é obtido da seguinte forma. Evoluímos uma condição inicial nas vizinhanças do ponto fixo para um parâmetro de controle próximo da bifurcação. Medimos o número de iterações que a trajetória gasta até atingir uma distância menor que  $10^{-9}$  do ponto fixo. Quando essa condição era atingida, o número de iterações gasto até aquele ponto era salvo em um arquivo de saída e uma nova simulação era iniciada com outro valor de parâmetro de controle. Variamos  $\mu$  entre  $[10^{-4}, 10^{-2}]$  e nossos resultados computacionais levam a crer que  $\delta \cong -1$ .

Tabela 2.1: Resultados numéricos de  $\beta$  e  $z$  para distintos valores de  $\gamma$ .

$\gamma$	1	2	3	4	5	6
$z$	-1,0002(3)	-2,0001(2)	-3,0002(4)	-4,0002(1)	-5,0001(3)	-6,0003(1)
$\beta$	-0,9992(4)	-0,4995(3)	-0,3336(3)	-0,2503(1)	-0,1995(4)	-0,1662(3)

## 2.5 Mapa *logistic-like* com $\mu = 0$ em $\mathbf{R}=1$

Para o primeiro caso começaremos com a expressão do mapeamento

$$x_{n+1} = Rx_n(1 - x_n^\gamma). \quad (2.61)$$

No ponto de bifurcação,  $R = 1$ , o mapeamento fica escrito como

$$x_{n+1} = x_n - x_n^{\gamma+1}. \quad (2.62)$$

Podemos fazer a seguinte aproximação

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{(n+1) - n} \cong \frac{dx}{dn} = -x^{\gamma+1}. \quad (2.63)$$

Muito próximo do ponto fixo, consideramos que a dinâmica da variável  $x$  é praticamente contínua, com isso chegamos em uma EDO de primeira ordem, Fazendo separação de variáveis, temos,

$$\frac{dx}{x^{\gamma+1}} = -dn, \quad (2.64)$$

integrando de os ambos os lados

$$\int_{x_0}^{x(n)} \frac{1}{x^{\gamma+1}} dx = - \int_0^n dn, \quad (2.65)$$

e rearranjando os termos encontramos

$$x(n) = \frac{x_0}{(x_0^\gamma \gamma n + 1)^{\frac{1}{\gamma}}}. \quad (2.66)$$

Interpretando a equação acima:

Se

$$(x_0^\gamma \gamma n) \ll 1, \text{ para } (n \ll n_x), \quad (2.67)$$

logo

$$x(n) \sim x_0^1. \quad (2.68)$$

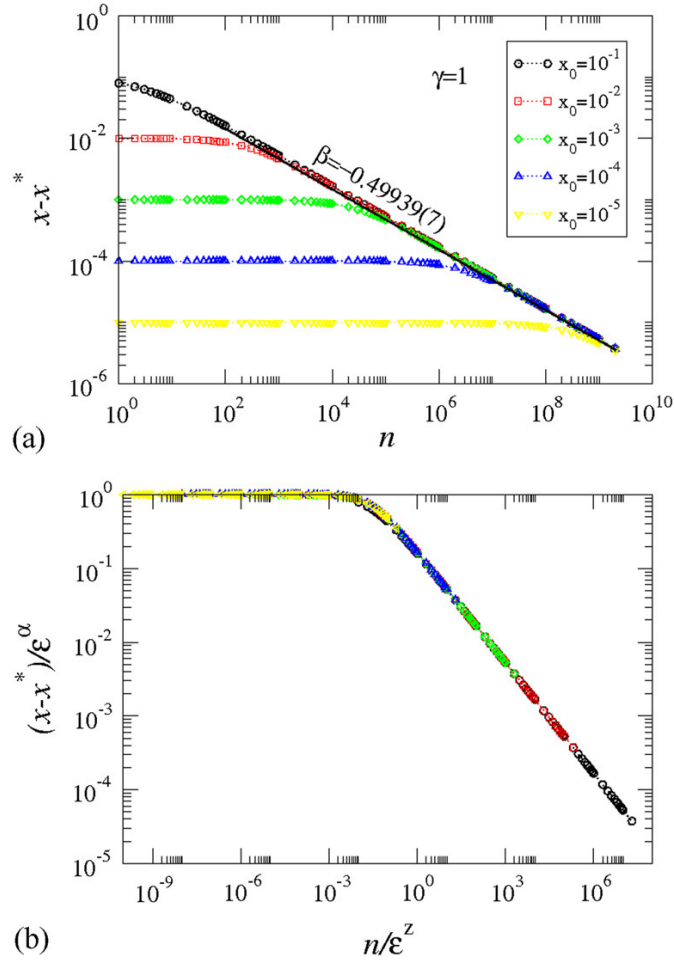


Figura 2.5: (a) Convergência para o ponto fixo  $x^* = 2/3$  para  $\gamma = 1$  considerando  $R = 3$ . (b) Convergência de todas as curvas de (a) em uma curva universal.

Comparando com a primeira hipótese de escala que fizemos da seção, temos que

$$\alpha = 1. \quad (2.69)$$

Para o caso

$$(x_0^\gamma \gamma n) \gg 1, \text{ para } (n \gg n_x), \quad (2.70)$$

$$x(n) \sim n^{\frac{-1}{\gamma}}. \quad (2.71)$$

Comparando com a segunda hipótese da seção, temos

$$\beta = \frac{-1}{\gamma}. \quad (2.72)$$

Para o caso

$$(x_0^\gamma \gamma n) = 1, \quad (2.73)$$

logo

$$n_x \sim x_0^{-\gamma}. \quad (2.74)$$

Comparando com a terceira hipótese da seção temos

$$z = -\gamma. \quad (2.75)$$

Os resultados obtidos aqui, confirmam a validade da nossa hipótese de lei de escala proposta.

Da lei de escala temos que

$$z = \frac{\alpha}{\beta}, \quad (2.76)$$

E obtemos que

$$\alpha = 1, \quad (2.77)$$

$$\beta = -\frac{1}{\gamma}, \quad (2.78)$$

$$z = -\gamma. \quad (2.79)$$

Levando  $\alpha$  e  $\beta$  na expressão de  $z$  temos

$$z = \frac{1}{-\frac{1}{\gamma}} = -\gamma. \quad (2.80)$$

Confirmando o resultado acima.

## 2.6 Mapa *logistic-like* com o caso de $\mu \neq 0$ na primeira bifurcação

Vamos agora considerar a dinâmica nas vizinhanças do ponto de bifurcação, ou seja  $R \lesssim R_c$ , onde  $R_c = 1$ , respeitando os limites do parâmetro  $R$ .

Da expressão do mapeamento temos

$$x_{n+1} = Rx_n - Rx_n^{\gamma+1}. \quad (2.81)$$

Reescrevendo a expressão acima de forma conveniente temos

$$x_{n+1} - x_n = Rx_n - x_n - Rx_n^{\gamma+1}. \quad (2.82)$$

Da mesma forma como resolvido anteriormente

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{(n+1) - n} \cong \frac{dx}{dn}, \quad (2.83)$$

$$\frac{dx}{dn} = x(R - 1) - Rx^{\gamma+1}. \quad (2.84)$$

É importante mencionar que para  $\gamma > 1$  e no regime de  $x$  suficientemente próximo ao ponto fixo,  $x = 0$ ,  $x^{\gamma+1}$  vai a zero mais rapidamente que  $x$ , portanto a equação acima pode ser aproximada por

$$x_{n+1} - x_n \sim x_n(R - 1), \quad (2.85)$$

$$\frac{dx}{dn} = -x(1 - R), \quad (2.86)$$

chamando

$$1 - R = \mu, \quad (2.87)$$

temos

$$\frac{dx}{x} = -\mu dn, \quad (2.88)$$

logo

$$\int_{x_0}^{x(n)} \frac{1}{x} dx = -\mu \int_0^n dn. \quad (2.89)$$

Portanto

$$\ln \left[ \frac{x(n)}{x_0} \right] = -\mu n, \quad (2.90)$$

$$x(n) = x_0 e^{-\mu n}. \quad (2.91)$$

Do estudo fenomenológico temos que (figura 2.6)

$$x(n, \mu) \sim e^{\frac{-n}{\tau}}, \quad (2.92)$$

e que

$$\tau \sim \mu^\delta. \quad (2.93)$$

Portanto, temos que

$$e^{-\mu n} = e^{\frac{-n}{\tau}}, \quad (2.94)$$

então

$$\tau = \mu^{-1}, \quad (2.95)$$

$$\delta = -1. \quad (2.96)$$

Comparando o resultado analítico com o resultado numérico, temos um valor satisfatório para  $\delta$  2.6.

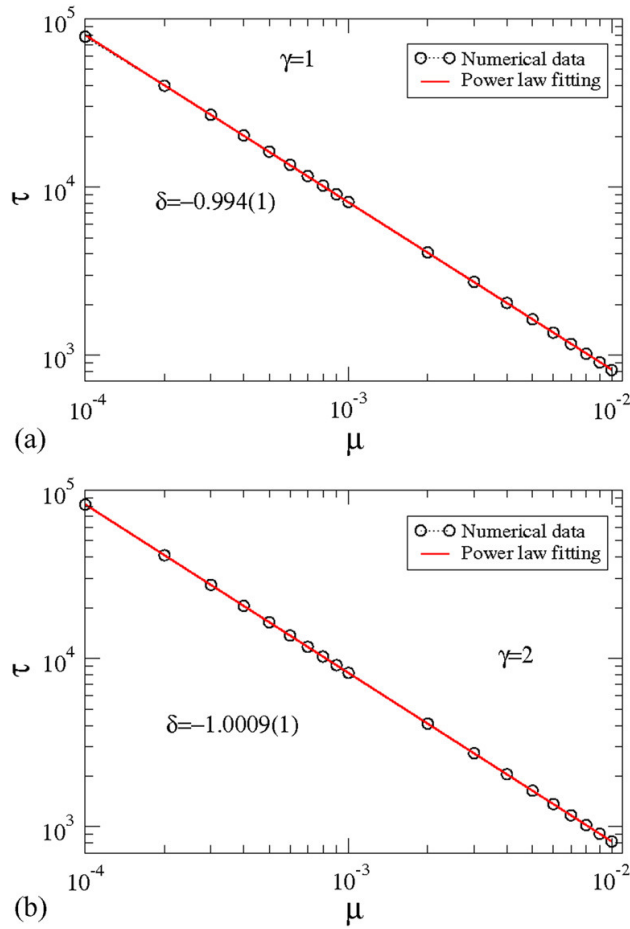


Figura 2.6: Relaxação para os pontos fixos como uma função de  $\mu$  no mapa *logistic-like* para os expoentes: (a)  $\gamma = 1$  e; (b)  $\gamma = 2$ .

## 2.7 Mapa *logistic-like* com o caso de $\mu = 0$ na bifurcação de duplicação de período

No ponto de bifurcação, o decaimento para o ponto fixo obedece a uma função homogênea generalizada com expoentes críticos bem definidos, o objetivo é determinar tais expoentes.

Próximo ao ponto de bifurcação, o decaimento é exponencial e o tempo de relaxação é dado por uma lei de potência em

$$\mu = R - R_c, \quad R \lesssim R_c. \quad (2.97)$$

Tentaremos uma abordagem próximo ao ponto fixo de tal forma que

$$x = x^* + y \quad e \quad R = R_c + \mu, \quad (2.98)$$

onde  $y$  é a distância do ponto fixo.

Da segunda iterada do mapeamento, temos

$$x_{n+2} = F^{(2)}(x_n) = R[Rx_n(1 - x_n^\gamma)][1 - [Rx_n(1 - x_n^\gamma)]^\gamma]. \quad (2.99)$$

Assim devemos expandir  $F^{(2)}(x)$  em série de Taylor em torno de  $x = x^* + y$  e  $R = R_c + \mu$ . Logo, temos:

$$\begin{aligned} F^{(2)} &= F^{(2)}(R_c, x^*) + (x - x^*) \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x} \Big|_{x^*, R_c} + (R - R_c) \frac{\partial F^{(2)}}{\partial R} \Big|_{x^*, R_c} \\ &+ (x - x^*)^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial x^2} \Big|_{x^*, R_c} + (R - R_c)^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial R^2} \Big|_{x^*, R_c} \\ &+ (x - x^*)(R - R_c) \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial x \partial R} \Big|_{x^*, R_c} + (x - x^*)^3 \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3} \Big|_{x^*, R_c} \\ &+ (R - R_c)^3 \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial R^3} \Big|_{x^*, R_c} + (x - x^*)^2 (R - R_c) \frac{1}{2} \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^2 \partial R} \Big|_{x^*, R_c} \\ &+ (x - x^*)(R - R_c)^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x \partial R^2} \Big|_{x^*, R_c} + \dots \end{aligned} \quad (2.100)$$

Precisamos então determinar as expressões de

$$j_0 = F^{(2)}(R_c, x^*) = \left[ \frac{2}{2 + \gamma} \right]^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (2.101)$$

$$j_1 = \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x} \Big|_{x^*} = 1, \quad (2.102)$$

$$j_2 = \frac{\partial F^{(2)}}{\partial R} \Big|_{x^*} = 0, \quad (2.103)$$

$$j_3 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial x^2} \Big|_{x^*} = 0, \quad (2.104)$$

$$j_4 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial R^2} \Big|_{x^*, R_c}, \quad (2.105)$$

$$j_5 = \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial x \partial R} \Big|_{x^*, R_c}, = 2\gamma \quad (2.106)$$

$$j_6 = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3} \Big|_{x^*, R_c}, \quad (2.107)$$

$$j_7 = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial R^3} \Big|_{x^*, R_c}, \quad (2.108)$$

$$j_8 = \frac{1}{2} \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^2 \partial R} \Big|_{x^*, R_c}, \quad (2.109)$$

$$j_9 = \frac{1}{2} \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x \partial R^2} \Big|_{x^*, R_c} = \gamma^2. \quad (2.110)$$

As expressões de  $j_4$ ,  $j_6$ ,  $j_7$ ,  $j_8$ , são extensas e não precisam ser apresentadas. Em vez disso, fizemos uma simulação numérica de seu comportamento em função de  $\gamma$ , e percebemos que eles são bem definidos e suaves. A partir daí, chamando  $y = x - x^*$ , e  $\mu = R - R_c$ , temos uma nova função dependente de  $\mu$  e  $y$ , que são as variáveis de interesse.

$$G(y, \mu) = F^{(2)}(R, x) - F^{(2)}(R_c, x^*), \quad (2.111)$$

temos

$$G(y, \mu) = y + \mu^2 j_4 + 2\gamma y \mu + y^3 j_6 + \mu^3 j_7 + y^2 \mu j_8 + y \mu^2 \gamma^2. \quad (2.112)$$

Estamos interessados na investigação de quando  $\mu = 0$ , logo:

$$G(y, 0) = y + y^3 j_6. \quad (2.113)$$

Fazendo a aproximação

$$G(y) - y = \frac{dy}{dn}, \quad (2.114)$$

$$\frac{dy}{dn} = y^3 j_6, \quad (2.115)$$

assim temos que

$$\frac{dy}{y^3} = j_6 dn, \quad (2.116)$$

integrando de ambos os lados, temos

$$\int_{y_0}^{y(n)} y^{-3} dy = \int_0^n j_6 dn, \quad (2.117)$$

$$y^2 = \frac{y_0^2}{1 - 2j_6 n y_0^2}, \quad (2.118)$$

Parece estranho o sinal negativo no denominador, entretando  $j_6 < 0$ , como pode ser visto na figura 2.7, o que permite que a expressão acima seja escrita como

$$y(n) = \frac{y_0}{\sqrt{1 + 2|j_6|y_0^2 n}}, \quad (2.119)$$

Podemos concluir que para

$$2|j_6|y_0^2 n \ll 1, \quad (2.120)$$

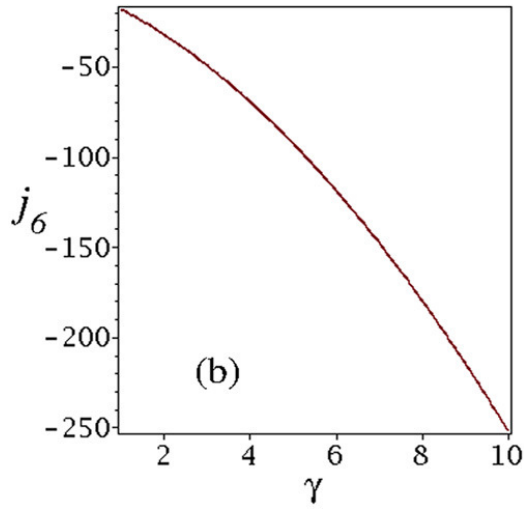


Figura 2.7: Comportamento de  $j_6$  para diferentes valores de  $\gamma$ .

então

$$y(n) \sim y_0^1. \quad (2.121)$$

Da primeira hipótese de escala

$$y \sim y_0^\alpha, \quad n \ll n_x, \quad (2.122)$$

logo

$$\alpha = 1. \quad (2.123)$$

Considerando agora

$$2|j_6|y_0^2n \gg 1, \quad (2.124)$$

então

$$y(n) \sim \frac{y_0}{\sqrt{y_0 2|j_6|n}}, \quad (2.125)$$

$$y(n) \sim \frac{1}{\sqrt{2|j_6|}} n^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.126)$$

Da hipótese de escala

$$y \sim n^\beta \quad n \gg n_x, \quad (2.127)$$

$$\beta = -\frac{1}{2}. \quad (2.128)$$

E o último caso

$$2|j_6|y_0^2n = 1, \quad (2.129)$$

temos

$$n = \frac{1}{2|j_6|y_0^2}, \quad (2.130)$$

logo

$$n \sim y_0^{-2}, \quad (2.131)$$

Da hipótese de escala

$$n_x \sim y_0^z, \quad (2.132)$$

$$z = -2. \quad (2.133)$$

## 2.8 Mapa *logistic-like* com o caso de $\mu \neq 0$ na bifurcação de duplicação de período

Vamos agora descrever o decaimento para  $\mu \neq 0$ . Para tal escolheremos apenas os termos mais simples de  $\mu$ , os demais serão desprezados. Assim encontramos

$$G(y, \mu) = y + 2\gamma y\mu + j_6 y^3, \quad (2.134)$$

$$G(y, \mu) - y = \frac{dy}{dn}, \quad (2.135)$$

$$\frac{dy}{dn} = y(2\gamma\mu + j_6 y^2), \quad (2.136)$$

$$\frac{dy}{y(2\gamma\mu + j_6 y^2)} = dn. \quad (2.137)$$

Integrando de ambos os lados obtemos

$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{y(2\gamma\mu + j_6 y^2)} = \int_0^n dn, \quad (2.138)$$

Aplicando os limites e reagrupando apropriadamente encontramos

$$y^2 = \frac{2\mu\gamma y_0^2}{|j_6|y_0^2 + (2\mu\gamma - |j_6|y_0^2)e^{-4\mu\gamma n}}. \quad (2.139)$$

Tirando a raiz dos dois lados, temos

$$y(n) = \sqrt{\frac{2\mu\gamma y_0^2}{|j_6|y_0^2 + (2\mu\gamma - |j_6|y_0^2)e^{-4\mu\gamma n}}}, \quad (2.140)$$

o que conduz a

$$y(n) = \sqrt{\frac{2\mu\gamma}{|j_6|} \left[ 1 + \left( \frac{2\mu\gamma}{y_0^2 |j_6|} - 1 \right) e^{-4\mu\gamma n} \right]^{-\frac{1}{2}}}. \quad (2.141)$$

Para ter uma melhor compreensão da equação anterior, é conveniente expandi-la em série de Taylor. Assim, obtemos

$$y(n) = \sqrt{\frac{2\mu\gamma}{|j_6|}} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{2\mu\gamma}{y_0^2 |j_6|} - 1 \right) e^{-4\mu\gamma n} \right], \quad (2.142)$$

$$y(n) = \sqrt{\frac{2\mu\gamma}{|j_6|}} - \frac{\mu\gamma}{y_0^2 |j_6|} \sqrt{\frac{2\mu\gamma}{|j_6|}} e^{-4\mu\gamma n} + \sqrt{\frac{\mu\gamma}{2|j_6|}} e^{-4\mu\gamma n}, \quad (2.143)$$

Considerando apenas o termo linear de  $\mu$ , portanto, desconsiderando termos da ordem  $\mu\sqrt{\mu}$

$$y(n) - \sqrt{\frac{2\mu\gamma}{|j_6|}} = \sqrt{\frac{\mu\gamma}{2|j_6|}} e^{-4\mu\gamma n}. \quad (2.144)$$

Com isso a relaxação para o equilíbrio é dada por

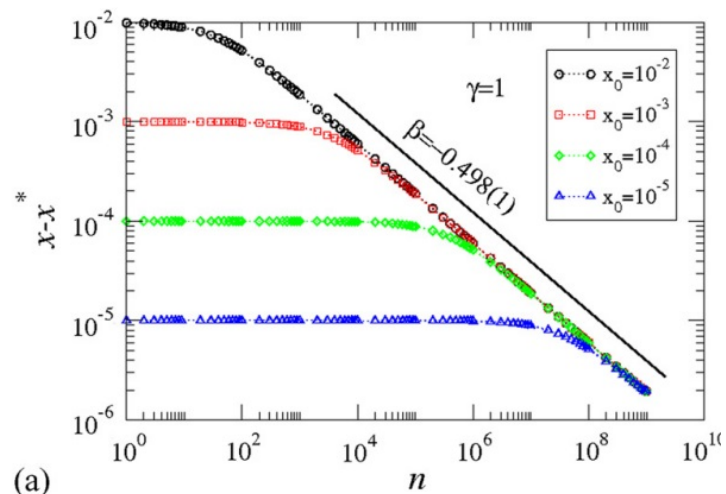
$$y(n) \sim e^{-4\mu\gamma n}, \quad (2.145)$$

das hipóteses de escala

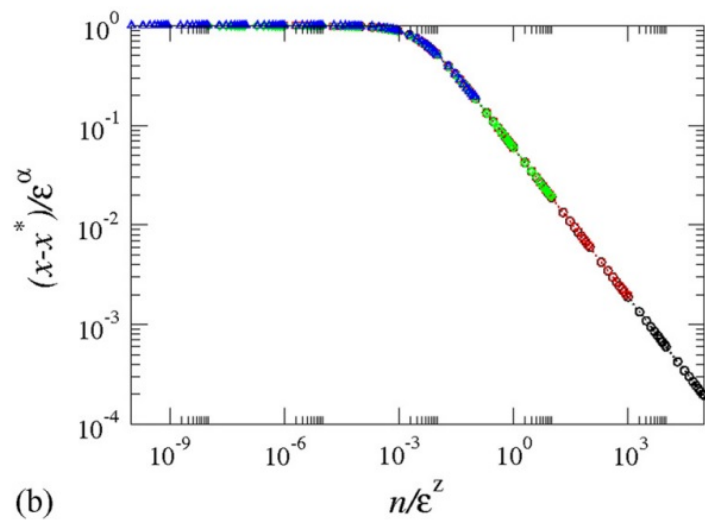
$$y(n) \sim e^{\frac{-n}{\tau}}, \quad (2.146)$$

$$\tau \sim \mu^\delta. \quad (2.147)$$

Aqui provamos que  $\delta = -1$ , de acordo com a relaxação para outras bifurcações.



(a)



(b)

Figura 2.8: (a) Convergência para o ponto fixo de duplicação de período, para  $\gamma = 1$ . (b) Sobreposição das curvas mostradas em (a) em um único gráfico e, portanto, universal.

## Capítulo 3

# O Modelo do acelerador de Fermi

Neste capítulo, apresentaremos uma discussão sobre o modelo do acelerador de Fermi e o mapeamento que descreve sua dinâmica. Em 1949, Enrico Fermi [32], propôs que os raios cósmicos são acelerados no meio interestelar, por conta dos campos magnéticos, dependentes do tempo. Desde então, diferentes versões deste modelo foram propostas e estudadas por diversos autores [33]. Um deles é o chamado modelo de Fermi-Ulam (FUM) [34], que consiste em uma bola de massa  $m$  confinada entre uma parede rígida fixa e outra em movimento periódico com as quais sofre colisões. As colisões com a parede permitem que a partícula troque energia e momento, fazendo uma clara alusão às interações dos raios cósmicos - partículas clássicas - com os campos magnéticos em movimento - parede em movimento. A parede fixa funciona como um mecanismo de rebote para reinjetar a partícula para uma nova colisão com a parede em movimento, reforçando a ideia de um conjunto grande de campos magnéticos no cosmos.

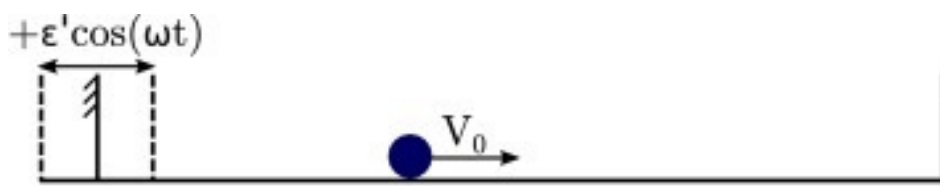


Figura 3.1: Desenho ilustrativo do modelo Fermi-Ulam. Figura retirada da ref. [35].

A dinâmica é dada por um mapeamento que descreve a velocidade da partícula e a fase da parede após cada colisão com a parede móvel. A velocidade da partícula pode aumentar ou diminuir, um regime dinâmico que

depende da fase do movimento da parede no instante do impacto. Este trabalho considera uma aproximação de parede estática para a dinâmica. Isto assume que ambas as paredes são fixas, mas no instante do impacto com uma das paredes, digamos aquela colocada à esquerda (vide figura 3.1), a partícula troca energia como se a parede estivesse se movendo. Esta aproximação tem duas implicações: (i) isso diminui substancialmente o tempo de simulação já que nenhuma equação transcendental deve ser resolvida para a determinação do instante do impacto, pois elas estão no modelo completo; (ii) permite tratamentos analíticos simples, como localização de pontos fixos e mantém a não linearidade do modelo e as principais propriedades, quando comparado ao modelo completo.

### 3.1 O modelo e suas propriedades

O mapeamento bidimensional de Fermi-Ulam é utilizado para descrever o comportamento de uma partícula colidindo com uma barreira oscilante. Este modelo é governado por duas equações não-lineares que atualizam a velocidade  $V_n$  e a fase angular  $\phi_n$  da partícula após cada colisão. Assumimos também que existem duas paredes, uma fixa em  $x = 0$  com a qual a partícula pode trocar energia, enquanto a outra parede é posicionada em  $x = 1$ . As equações que regem este mapeamento são:

$$T : \begin{cases} V_{n+1} = |\gamma^2 V_n - (1 + \gamma)\epsilon \sin(\phi_{n+1})| \\ \phi_{n+1} = [\phi_n + \frac{1}{V_n} + \frac{1}{\gamma V_n}] \text{ mod } 2\pi \end{cases}, \quad (3.1)$$

#### 3.1.1 Parâmetros e variáveis

- $V_n$ : Velocidade da partícula antes da colisão  $n$ .
- $\phi_n$ : Fase angular da partícula no instante  $n$ , que está associada à posição relativa da partícula no ciclo da barreira.
- $\gamma$ : Parâmetro relacionado ao coeficiente de restituição.
- $\epsilon$ : Amplitude de oscilação da barreira, que determina a influência da barreira móvel na velocidade da partícula.
- $\frac{1}{V_n}$  corresponde ao intervalo de tempo em que a partícula gasta viajando da parede estabelecida na esquerda até a parede da direita,
- $\frac{1}{\gamma V_n}$  é o tempo para a partícula voltar até a parede da esquerda.

- $\gamma^2$  corresponde a uma perda de energia fracionária devido a uma dupla colisão.
- $\sin(\phi_{n+1})$ : Termo oscilatório que modela a variação periódica da velocidade da barreira no momento da colisão.
- $\text{mod } 2\pi$ : Garantia de que a fase angular  $\varphi$  permanece dentro do intervalo  $[0, 2\pi]$ , caracterizando a natureza cíclica do sistema.

### 3.1.2 Atualização da velocidade

A equação de atualização da velocidade é dada por:

$$V_{n+1} = \left| \gamma^2 V_n - (1 + \gamma)\epsilon \sin(\phi_{n+1}) \right|, \quad (3.2)$$

onde a velocidade  $V_n$  da partícula é atualizada levando em conta dois componentes principais: o termo  $\gamma^2 V_n$ , que representa a contribuição da velocidade anterior, e o termo  $(1 + \gamma)\epsilon \sin(\phi_{n+1})$ , que descreve a influência da barreira oscilante sobre a partícula. O valor absoluto é utilizado para garantir que a velocidade resultante seja sempre positiva.

### 3.1.3 Atualização da fase angular

A equação de atualização da fase angular é dada por:

$$\phi_{n+1} = \left[ \phi_n + \frac{1}{V_n} + \frac{1}{\gamma V_n} \right] \text{ mod } 2\pi, \quad (3.3)$$

onde a fase  $\phi_n$  da partícula é atualizada a cada colisão. Esta equação contém termos que dependem inversamente da velocidade  $V_n$ , representando o tempo entre colisões. O uso de  $\text{mod } 2\pi$  garante que a fase angular permaneça dentro de um intervalo de 0 a  $2\pi$ , caracterizando o ciclo periódico do sistema.

### 3.1.4 Interpretação física

Estas equações descrevem a dinâmica de uma partícula colidindo com uma barreira oscilante em um sistema bidimensional. A cada colisão, a velocidade da partícula pode aumentar ou diminuir, dependendo da interação com a barreira. O termo oscilatório  $\sin(\phi_n + 1)$  introduz uma dependência periódica, que pode resultar em comportamento caótico ou periódico, dependendo dos valores dos parâmetros  $\gamma$ ,  $\epsilon$ , e das condições iniciais de  $V_0$  e  $\phi_0$ .

### 3.1.5 Comportamento dinâmico

Dependendo das condições iniciais e dos parâmetros do sistema, o mapeamento pode exibir diferentes tipos de comportamento dinâmico:

- Aceleração contínua: a partícula aumenta sua velocidade após cada colisão.
- Flutuações: a velocidade oscila entre valores altos e baixos.
- Dinâmica caótica: pequenas variações nas condições iniciais resultam em trajetórias completamente diferentes ao longo do tempo, um comportamento típico de sistemas dinâmicos não-lineares.

O determinante da matriz Jacobiana é  $\det(J) = \gamma$ , e como  $\gamma < 1$ , isso implica na criação de atratores no espaço de fase. O espaço de fase em sistemas não lineares é uma representação matemática multidimensional que descreve todos os possíveis estados do sistema ao longo do tempo. É uma ferramenta para visualizar e analisar a dinâmica complexa desses sistemas e desempenha um papel importante no estudo da teoria do caos.

A figura 3.2 mostra o espaço de fase considerando o caso conservativo para  $\gamma = 1$  e dois diferentes valores para o parâmetro  $\epsilon$ , nomeados: (a)  $\epsilon = 5 \times 10^{-3}$  e (b)  $\epsilon = 10^{-2}$ . A estrutura presente no espaço de fase é do tipo misto. Em regiões de baixas energias (ou baixas velocidades), observa-se um "mar de caos". Esse mar de caos é caracterizado por trajetórias altamente sensíveis às condições iniciais e imprevisíveis, resultando em um comportamento desordenado e irregular. Nesse regime, pequenas variações nas condições iniciais podem levar a trajetórias muito diferentes, refletindo uma difusão estocástica das partículas.

Enquanto isso, em regiões de altas energias (ou altas velocidades), existem as "ilhas de periodicidade" e os "toros invariantes". As ilhas de periodicidade são áreas onde as trajetórias são regulares e fechadas, indicando um comportamento ordenado e previsível. Os toros invariantes, por sua vez, são superfícies fechadas no espaço de fase que confinam as partículas à trajetórias regulares, funcionando como barreiras que separam o mar de caos das regiões de periodicidade. A presença de toros invariantes, particularmente a curva mais baixa do tipo *spanning*, serve como uma barreira para impedir que as partículas no mar de caos atravessem para as regiões de alta energia, limitando a difusão de energia das partículas.

Essas estruturas no espaço de fase mostram que o sistema não leva a dinâmica a ser ilimitada na energia. A presença de toros invariantes desempenha um papel crucial na dinâmica da difusão, estabelecendo uma escala

para o comportamento da velocidade média quadrática [36]. Tais curvas bloqueiam o crescimento ilimitado de energia, que era o principal objetivo do trabalho de Fermi [25].

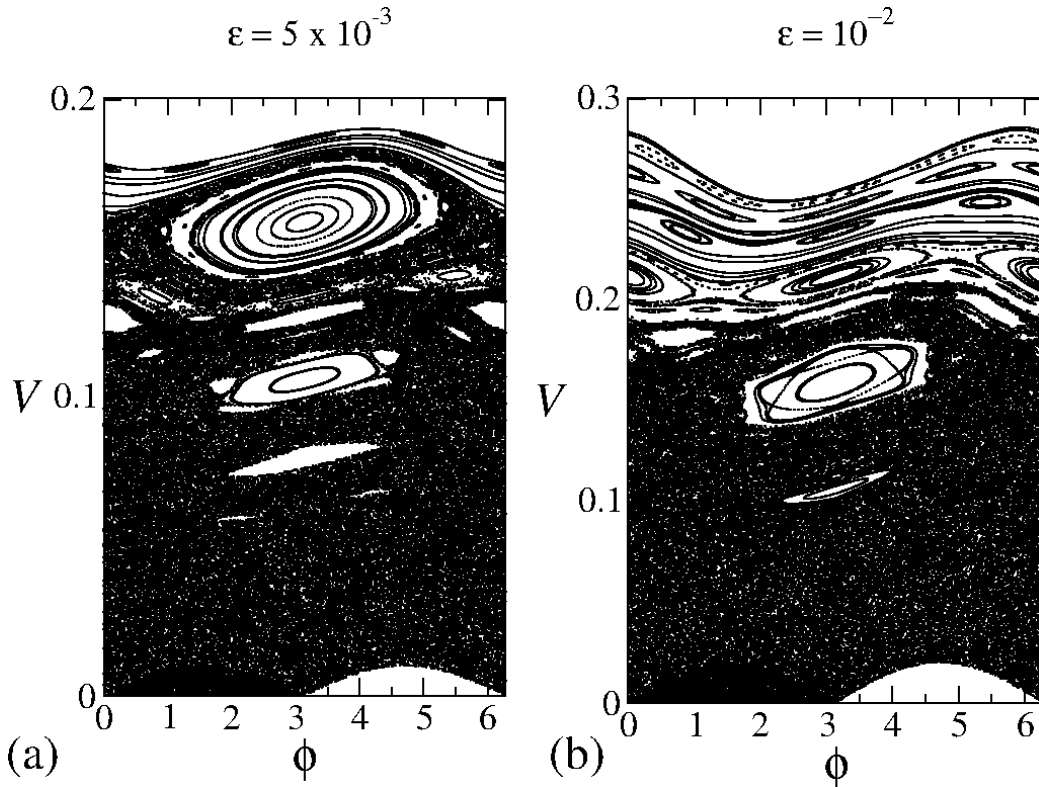


Figura 3.2: Gráfico do espaço de fase para o caso conservativo considerando  $\gamma = 1$ , e dois diferentes valores para  $\epsilon$ : (a)  $\epsilon = 5 \times 10^{-3}$  e (b)  $\epsilon = 10^{-2}$ .

### 3.2 Dinâmica com choques inelásticos.

Os sistemas dinâmicos podem ser classificados em duas grandes categorias: conservativos e dissipativos. O mapeamento Fermi-Ulam, um modelo fundamental na teoria do caos e dinâmica não linear, oferece uma visão clara de como essas duas classes de sistemas se manifestam e interagem.

No caso conservativo, o sistema é definido por um determinante da matriz jacobiana com um valor que reflete a preservação do volume no espaço de fase. Por outro lado, no caso dissipativo, o sistema não conserva o volume no espaço de fase. O determinante da matriz jacobiana é menor que 1, refletindo a presença de dissipação de energia. Em sistemas dissipativos, há uma perda

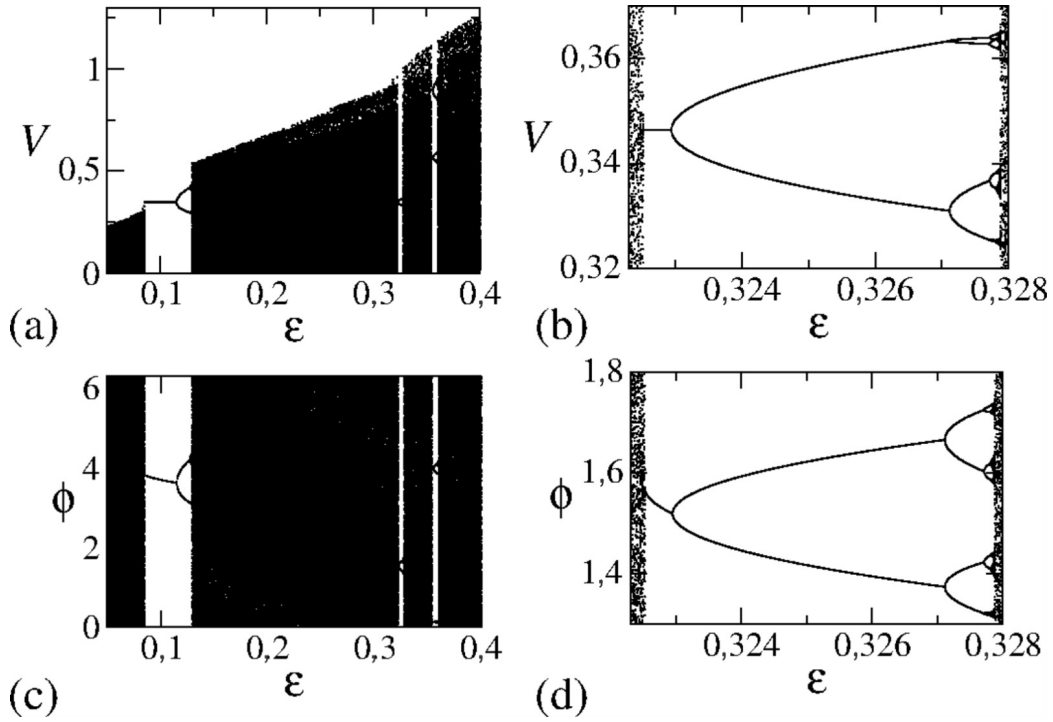


Figura 3.3: Diagrama de órbita do mapeamento (4.2) considerando  $\gamma = 0,85$ . Gráficos (a) e (b) são para  $V$  vs.  $\epsilon$  enquanto (c) e (d) mostram  $\phi$  vs.  $\epsilon$ . A condição inicial escolhida foi  $(V_0, \phi) = (2, 1, \pi + 0.01)$ , e iteramos até  $10^6$ , salvando as 100 últimas colisões.

contínua de energia ao longo do tempo, geralmente devido a efeitos como atrito, resistência, ou outras formas de dissipação. Esta perda de energia tende a reduzir o "volume" das regiões acessíveis no espaço de fase, levando a uma eventual convergência para atratores de menor dimensionalidade, como pontos fixos, ciclos limite ou estranhas formas de atratores. No mapeamento Fermi-Ulam dissipativo, a introdução de dissipação altera significativamente a dinâmica do sistema. As partículas perdem energia ao longo do tempo devido à interação com uma barreira móvel ou um amortecimento introduzido, o que faz com que o sistema se aproxime de estados estacionários ou periódicos. Em vez de um mar de caos amplo, o sistema pode apresentar um espaço de fase dominado por regiões de atratores, onde as partículas eventualmente se agrupam.

Quando  $\gamma < 1$ , as figuras 3.3 mostram o comportamento do diagrama de órbita [3] para o mapeamento (4.2) considerando  $\gamma = 0.85$ . As figuras (a) e (c) são para  $V$  vs.  $\epsilon$  enquanto (b) e (d) mostram  $\phi$  vs.  $\epsilon$ . A condição inicial escolhida foi  $(V_0, \phi) = (2.1, \pi + 0.01)$ , e iteramos até  $10^6$ , salvando apenas as

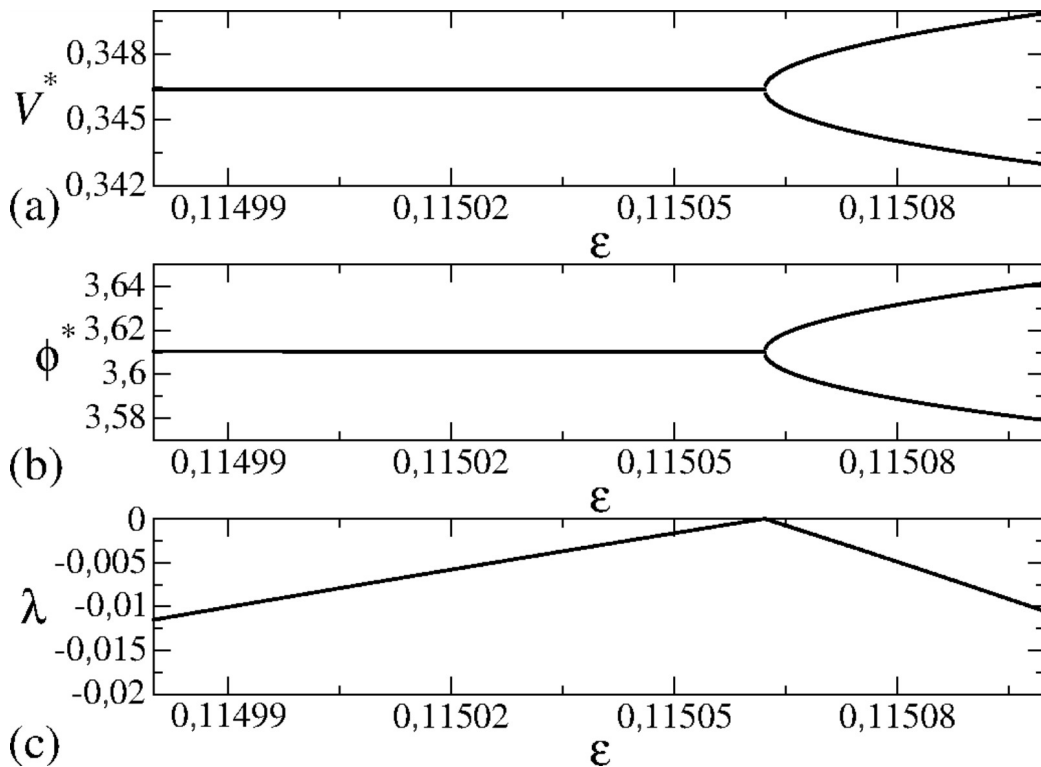


Figura 3.4: Diagrama de órbita para o mapeamento (4.2) considerando  $\gamma = 0,85$  para as variáveis: (a)  $V$  vs.  $\epsilon$  e (b)  $\phi$  vs.  $\epsilon$ . Figura (c) mostra o comportamento do expoente de Lyapunov considerando os mesmos parâmetros de (a) e (b). Uma bifurcação de duplicação de período é observada em  $\epsilon = 0,11506218$ .

100 últimas colisões.

Uma ampliação da figura 3.3 (a,c) é mostrada na figura 3.4 considerando  $\gamma = 0.85$  para as variáveis: (a)  $V$  vs.  $\epsilon$  enquanto (b)  $\phi$  vs.  $\epsilon$ . Figura (c) mostra o comportamento do expoente de Lyapunov. O expoente de Lyapunov é calculado considerando um par de trajetórias próximas no espaço de fase e medindo a taxa de divergência ou convergência entre elas ao longo do tempo. Em um sistema caótico, pequenas diferenças iniciais podem levar a grandes diferenças futuras. Isso é indicado por um expoente de Lyapunov positivo, que reflete a sensibilidade às condições iniciais. Na bifurcação, o expoente de Lyapunov tem valor nulo. Esta observação é feita considerando o mesmo intervalo usado em (a) e (b) [12]. Uma bifurcação de duplicação de período é obtida em  $\epsilon = 0.11506218$ . Desde que o autovalor da matrix Jacobiana é igual a um na bifurcação [6], o expoente de Lyapunov é nulo naquela bifurcação, como mostrado na figura 3.4(c) exatamente no parâmetro  $\epsilon = 0.11506218$ .

Na próxima seção, discutiremos a convergência para o estado estacionário exatamente na bifurcação e em suas proximidades.

Para mapeamentos bidimensionais os expoentes de Lyapunov são obtidos a partir da expressão [23]:

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |A_n^j|. \quad (3.4)$$

com  $j=1,2$ , em que  $A_n^j$  representa os autovalores da matriz jacobiana

$$M = \prod_{i=1}^n J_i(V_i, \phi_i) = J_n J_{n-1} J_{n-2} \dots J_2 J_1. \quad (3.5)$$

A convergência ocorre para valores elevados de  $n$  e devido ao acúmulo de matrizes  $J_i$  pode gerar indeterminação dos coeficientes, tornando inviável o cálculo de  $\lambda$ . Para evitar esse problema, pode-se utilizar o algoritmo de triangularização, no qual a matriz  $J$  é reescrita como  $J = \Theta T$ , em que  $\Theta$  é uma matriz ortogonal e  $T$  é uma matriz triangular superior. Dessa forma tem-se que:

$$\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

De modo que:

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Para utilizar essas duas matrizes, nota-se que a matriz  $M$  pode ser escrita da forma:

$$\begin{aligned} M &= J_n J_{n-1} J_{n-2} \dots J_2 J_1 \\ &= J_n J_{n-1} J_{n-2} \dots J_2 \theta_1 \theta_1^{-1} J_1. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Considerando  $T_1 = \theta_1^{-1} J_1$  e  $\tilde{J}_2 = J_2 \theta_1$ , pode-se determinar os coeficientes da matriz  $T_1$  como:

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Ao compararmos o coeficiente  $T_{21} = 0$ , temos que

$$0 = -j_{11} \sin(\theta) + j_{21} \cos(\theta), \quad (3.10)$$

o que permite obter a seguinte equação:

$$\frac{j_{21}}{j_{11}} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}. \quad (3.11)$$

Ao invés de calcularmos  $\theta = \arctan\left(\frac{j_{21}}{j_{11}}\right)$ , o que demanda mais tempo computacional, as funções  $\sin(\theta)$  e  $\cos(\theta)$  podem ser escritas diretamente das relações de  $J$ , de forma que:

$$\cos(\theta) = \frac{j_{11}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}, \sin(\theta) = \frac{j_{21}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}. \quad (3.12)$$

Assim, as expressões para  $T_{11}$  e  $T_{22}$  podem ser escritas como

$$T_{11} = j_{11} \cos(\theta) + j_{21} \sin(\theta) \text{ e } T_{22} = -j_{12} \sin(\theta) + j_{22} \cos(\theta), \quad (3.13)$$

as quais levam às equações:

$$T_{11} = \frac{j_{11}^2 + j_{21}^2}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}, T_{22} = \frac{j_{11}j_{22} - j_{12}j_{21}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}. \quad (3.14)$$

Como as expressões de  $T_{11}$  e  $T_{22}$  são conhecidas, pode-se determinar a matriz  $\tilde{J}_2$  como  $\tilde{J}_2 = J_2 \Theta_1$ , de forma que:

$$\begin{pmatrix} \tilde{j}_{11} & \tilde{j}_{12} \\ \tilde{j}_{21} & \tilde{j}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

O procedimento para determinar  $T_{11}$  e  $T_{22}$  para a primeira iteração do mapeamento deve ser repetido até que toda série de matrizes  $J_n, J_{n-1}, J_{n-2}$ , e assim por diante seja percorrida. Após todas as matrizes jacobianas ao longo da órbita serem percorridas, os expoentes de Lyapunov podem ser escritos como:

$$\Lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |T_{jj}^{(i)}|, \quad j = 1, 2. \quad (3.16)$$

### 3.3 Convergência para o estado estacionário em uma bifurcação local

Nesta seção, descrevemos a evolução do estado estacionário próximo a uma bifurcação de duplicação de período. Como a dinâmica está no plano ( $V$  vs.  $\phi$ ), devemos primeiro definir uma métrica para medir a distância que a partícula está do estado estacionário.

A Figura 3.5(a) mostra um gráfico do espaço de fase para os parâmetros de controle  $\epsilon = 10^{-2}$  e  $\gamma = 1$ . A estrutura mista é clara com a existência de regiões periódicas e dinâmicas caóticas. Uma ampliação da Fig (a) é

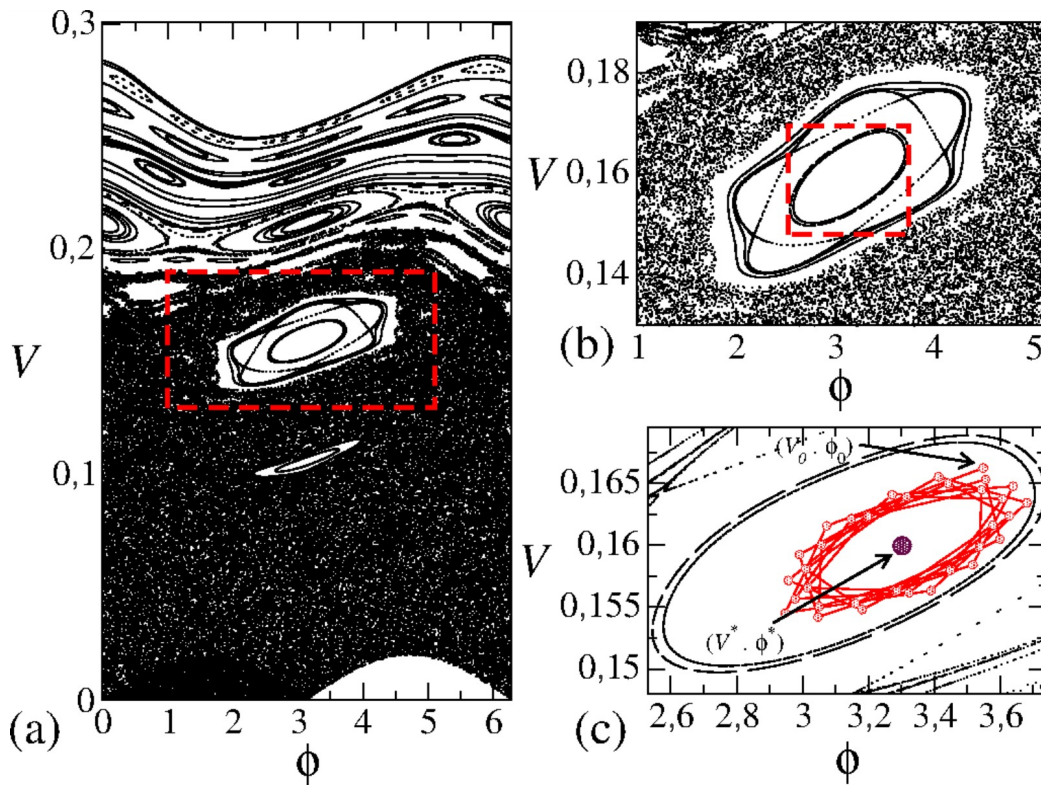


Figura 3.5: (a) Gráfico do espaço de fase para o caso conservativo com o parâmetro de controle  $\epsilon = 10^{-2}$ . (b) Ampliação da região de período um. (c) Ampliação da região destacada em (b) enquanto os marcadores internos ilustram alguns passos em direção à convergência para o estado estacionário. O parâmetro de dissipação que leva à convergência para o estado estacionário foi  $\gamma = 0,99$ .

mostrada na Figura 3.5(b), que será usada para ilustrar a evolução para o estado estacionário. É uma ampliação de uma região de período um. Uma ampliação ainda maior de (b) é mostrado na Figura 3.5(c). Os pontos internos correspondem à evolução da dinâmica dissipativa com  $\gamma = 0,99$  e alguns passos para a evolução para o estado estacionário. O marcador  $(V^*, \phi^*)$  identifica o ponto fixo de atração para a dinâmica, que é obtido para a dinâmica de tempos longos. Como a convergência para a dinâmica estacionária está no plano, a distância da partícula às coordenadas do ponto fixo deve ser medida considerando esta informação. Portanto nós definimos

$$d(n) = \sqrt{(V_n - V^*)^2 + (\phi_n - \phi^*)^2}, \quad (3.17)$$

que dá a distância que a partícula está do ponto fixo.

### 3.3.1 Convergência na bifurcação

O objetivo é investigar o comportamento da convergência para o estado estacionário em uma bifurcação. De fato, uma investigação cuidadosa por meio da estabilidade do período um, aliada ao comportamento do expoente de Lyapunov, fornece uma bifurcação de duplicação de período observada em  $\epsilon_c = 0,11506218$ , que é o parâmetro que examinamos. O comportamento de  $d$  versus  $n$  para diferentes condições iniciais, considerando  $\epsilon_c$  e  $\gamma = 0.85$ , é mostrado na Figura 3.6(a).

As curvas mostradas na Figura 3.6(a) exibem o seguinte comportamento. Por um curto período de tempo, tipicamente  $n \ll n_x$ , as curvas ficam limitadas a um platô estacionário que pode ser descrito considerando  $d(n) \propto d_0^\alpha$ , onde  $\alpha$  é um expoente crítico. A partir da figura, fica claro que o platô é estacionário em  $d_0$ , o que implica que o expoente crítico é  $\alpha = 1$ . Em outras palavras, durante esse período inicial, o valor de  $d(n)$  permanece constante em  $d_0$ , independentemente do número de iterações.

Eventualmente, a dinâmica do sistema deixa o platô após um número de iterações  $n_x$  e converge para um regime decrescente descrito por  $d(n) \propto n^\beta$ , onde  $n \gg n_x$  e  $\beta$  é um expoente crítico. Um ajuste da lei de potência mostrado na Figura 3.6(a) resulta em  $\beta = -0,5030(5) \approx -1/2$ . Isso indica que, após o platô, o valor de  $d(n)$  decai com uma taxa proporcional a  $n^{-1/2}$ .

Finalmente, o número de iterações do cruzamento, que marca a mudança do domínio de platô constante para o decaimento da lei de potência, é dado por  $n_x \propto d_0^z$ , onde  $z$  é um terceiro expoente crítico. Esse expoente caracteriza como o ponto de transição  $n_x$  depende do valor inicial  $d_0$ .

Podemos assumir que a convergência ao estado estacionário pode ser descrita por uma função homogênea e generalizada do tipo

$$d(n, d_0) = \ell d(\ell^a n, \ell^b d_0), \quad (3.18)$$

onde  $\ell$  é um fator de escala e  $a$  e  $b$  são expoentes característicos. Como  $\ell$  é um fator de escala, pode ser escolhido como  $\ell^a n = 1$ , o que leva a  $\ell = n^{-1/a}$ . Uma comparação com a hipótese de escala que leva ao decaimento dá  $\beta = -1/a$ . Outra escolha é  $\ell^b d_0 = 1$ , resultando em  $\ell = d_0^{-1/b}$ . Novamente, comparar a hipótese de escala do platô fornece  $\alpha = -1/b$ . Das duas expressões de  $\ell$  terminamos com uma expressão  $n_x = d_0^{\alpha/\beta}$ . Uma comparação com a hipótese de escala nos mostra o cruzamento leva a uma lei do tipo

$$z = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (3.19)$$

Como  $\alpha = 1$  e o expoente crítico  $\beta = -1/2$ , resulta que o expoente crítico  $z = -2$ .

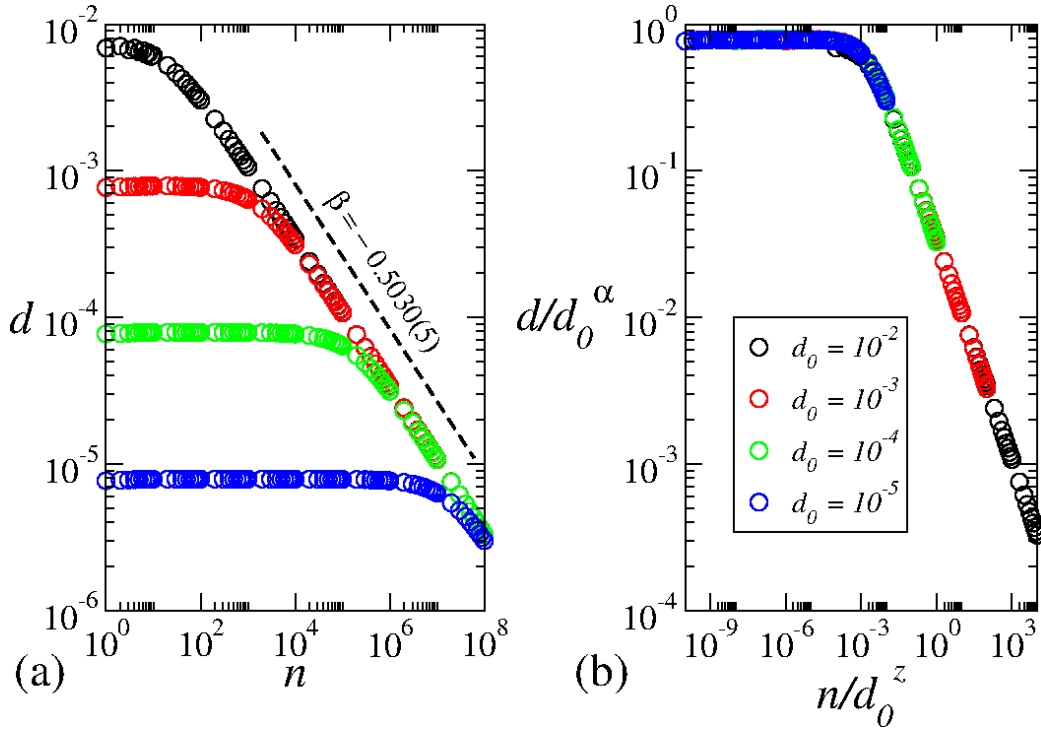


Figura 3.6: (a) Gráfico de  $d$  vs.  $n$  para diferentes distâncias iniciais do ponto fixo. (b) Sobreposição de todas as curvas mostradas em (a) em um gráfico único e universal após as transformações de escala apropriadas.

O conhecimento dos três expoentes críticos e as transformações de escala apropriadas fazem com que todas as curvas mostradas na Figura 3.6(a) se sobreponham umas às outras em um gráfico único e, portanto, universal, conforme mostrado na Figura 3.6(b). As transformações são  $d \rightarrow d/d_0^\alpha$  e  $n \rightarrow n/d_0^z$ , e comprovam a invariância de escala para a convergência da dinâmica em direção ao ponto fixo.

### 3.3.2 Convergência próximo à bifurcação

Perto da bifurcação, a dinâmica não é mais descrita por uma função homogênea e generalizada, mas sim um decaimento exponencial [37] do tipo que nos dá a evolução para o estado estacionário

$$d(n) = d_0 e^{-n/\tau}, \quad (3.20)$$

onde  $d_0$  é a distância inicial do ponto fixo e  $\tau \propto \mu^\delta$  com  $\mu = \epsilon_c - \epsilon$  para  $\epsilon \lesssim \epsilon_c$ .

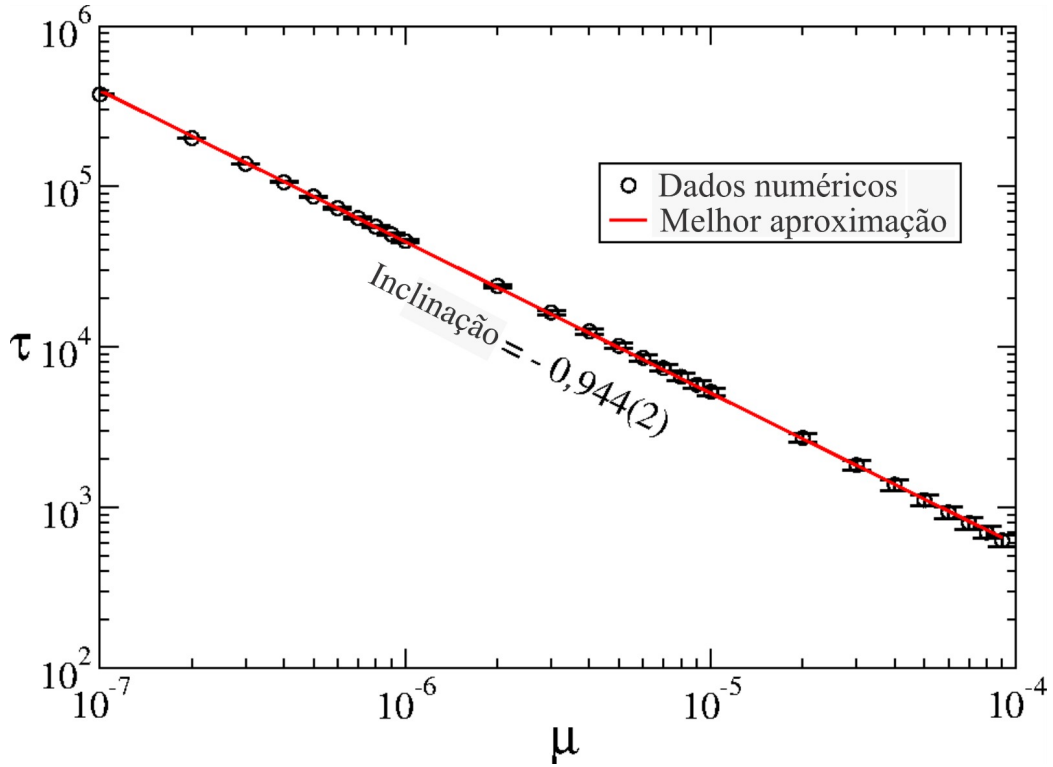


Figura 3.7: Gráfico de  $\tau$  vs.  $\mu$  considerando  $\gamma = 0,85$ . Um ajuste de lei de potência leva a  $\delta = -0,944(2)$ .

O tempo de relaxação  $\tau$  pode ser obtido por simulação numérica. Para determiná-lo numericamente, iniciamos uma condição inicial no limite da bacia do ponto fixo atrativo e deixamos a dinâmica evoluir. Quando a distância do ponto fixo for menor que  $10^{-6}$ , paramos a dinâmica, medimos o número de iterações que a partícula gastou até atingir essa condição e iniciamos uma nova condição inicial com o mesmo parâmetro de controle. Este procedimento permite medir o tempo de relaxação usando um ensemble de  $10^6$  diferentes condições iniciais. Uma vez esgotado o conjunto, o tempo médio de relaxação pode ser determinado e o procedimento é repetido para um parâmetro de controle diferente. Figura 3.7 mostra o comportamento de  $\tau$  vs.  $\mu$  considerando  $\gamma = 0,85$ . Ajustar uma lei de potência à curva resulta em  $\delta = -0,944(2)$ . Uma discussão feita na Ref. [20] provou analiticamente que  $\delta = -1$  para mapeamentos unidimensionais.

### 3.4 Investigação de uma bifurcação global - uma crise de fronteira

Uma crise de fronteira [20] é caracterizada quando uma variedade estável gerada a partir de um ponto fixo de sela intercepta uma variedade instável produzida a partir do mesmo ponto fixo de sela. Sabe-se que um único cruzamento implica um número infinito de cruzamentos [20]. Consequentemente, um atrator caótico é repentinamente destruído e substituído por um transiente caótico [20]. Isso significa que se uma condição inicial é dada na região onde o atrator caótico existia antes da crise, a dinâmica sobrevive nessa região por um tempo. Eventualmente, a partícula encontra a rota apropriada e escapa de tal domínio, movendo-se na direção do outro atrator, no nosso caso, um ponto fixo atrativo [19].

A figura 3.8(a) mostra um gráfico das variedades estáveis e instáveis produzidas a partir do mesmo ponto fixo do tipo sela, marcado como uma estrela na figura. Um ramo das variedades instáveis evolui em direção ao atrator caótico, enquanto o outro se move em direção ao ponto fixo assintoticamente estável. Os outros dois estáveis definem o limite da bacia onde as condições iniciais convergem. Os parâmetros de controle utilizados foram  $\gamma = 0,85$  e  $\epsilon = 0,0845$ , correspondendo à dinâmica imediatamente anterior à crise de fronteira. A Figura 3.8(b) mostra uma ampliação de (a) para elucidar que os cruzamentos das variedades ainda não aconteceram. A Figura 3.8(c) mostra a mesma região de (b) mas logo após a crise de fronteira onde os cruzamentos são facilmente vistos. O parâmetro de controle usado em (c) foi  $\epsilon = 0,0849$ .

Após a crise de fronteira [38], o atrator caótico é substituído por um transiente caótico. Suponha que uma condição inicial seja dada na região onde o atrator caótico existia antes da crise. Nesse caso, a dinâmica fica presa em tal domínio até encontrar a rota apropriada e sair dessa região em direção ao ponto fixo assintoticamente estável. A probabilidade de uma partícula sobreviver dentro de tal domínio é dada [37, 39] por

$$P(n) = e^{-\frac{n}{\tilde{\tau}}}, \quad (3.21)$$

onde  $n$  corresponde ao número de colisões que uma partícula tem com a parede, e  $\tilde{\tau}$  identifica o tempo de relaxação, que é escrito como

$$\tilde{\tau} \propto \mu^{\tilde{\delta}}, \quad (3.22)$$

e  $\mu = \epsilon_b - \epsilon$  com  $\epsilon_b$  correspondente ao parâmetro onde ocorreu a crise de fronteira. Considerando a primeira região periódica visível da Figura 3.2(a), um parâmetro de controle crítico que leva a uma crise de fronteira foi  $\epsilon_b =$

0,0845... A figura 3.9 mostra o comportamento de  $\tilde{\tau}$  vs.  $\mu$ . A construção da figura foi a seguinte. Um conjunto de  $10^5$  condições iniciais foi dado em uma região onde o atrator caótico existia antes da crise. Cada condição inicial evoluiu no tempo até um máximo de  $10^8$  colisões. Se a partícula escapasse do domínio caótico e evoluísse para o ponto fixo atrativo, o número de colisões até aquele ponto era identificado e uma nova condição inicial era iniciada. Depois de esgotar o ensemble, um ajuste de lei de potência dá uma inclinação de  $\tilde{\delta} = -1.99(26) \cong -2$ , que é notavelmente próximo do valor numérico medido em [19] e teoricamente previsto em [39].

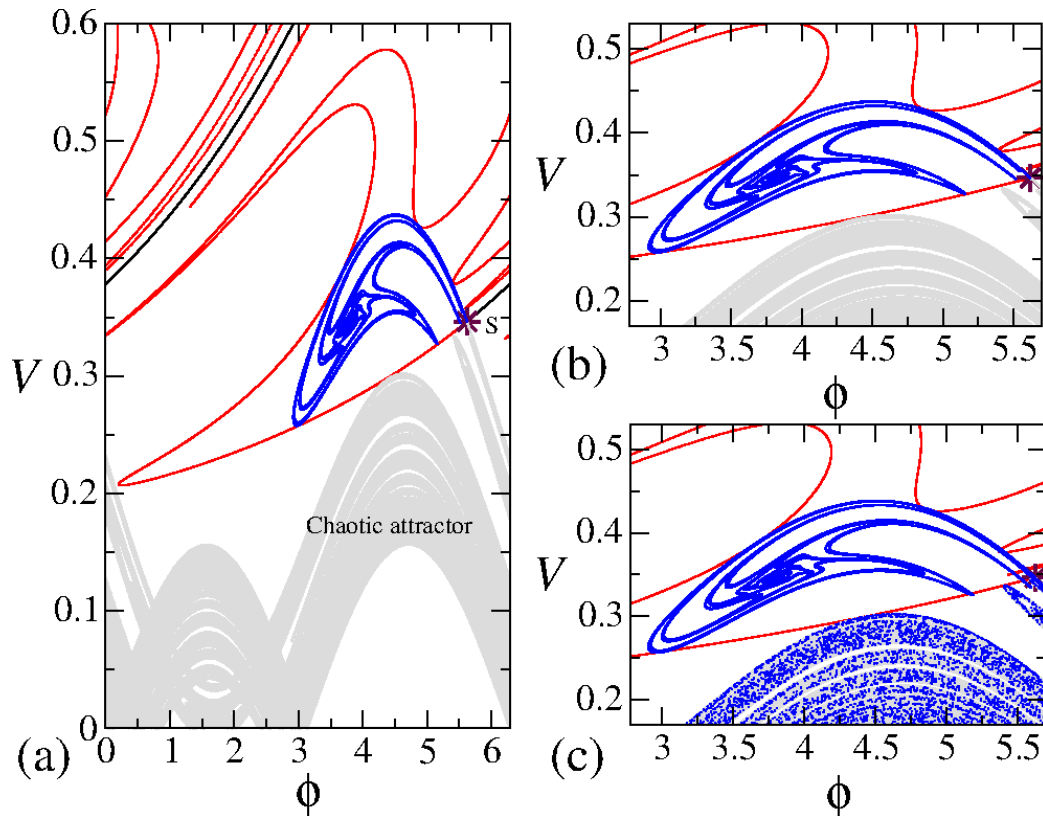


Figura 3.8: (a) gráfico das variedades estáveis e instáveis produzidas a partir do mesmo ponto fixo do tipo sela, marcado como uma estrela na figura. Os parâmetros de controle utilizados foram  $\gamma = 0,85$  e  $\epsilon = 0,0845$ , correspondendo à dinâmica imediatamente anterior à crise de fronteira. (b) Ampliação de (a) para mostrar que os cruzamentos ainda não aconteceram. (c) A mesma região de (b) mas logo após a crise de fronteira, os cruzamentos são facilmente vistos para o parâmetro de controle  $\epsilon = 0,0849$ .

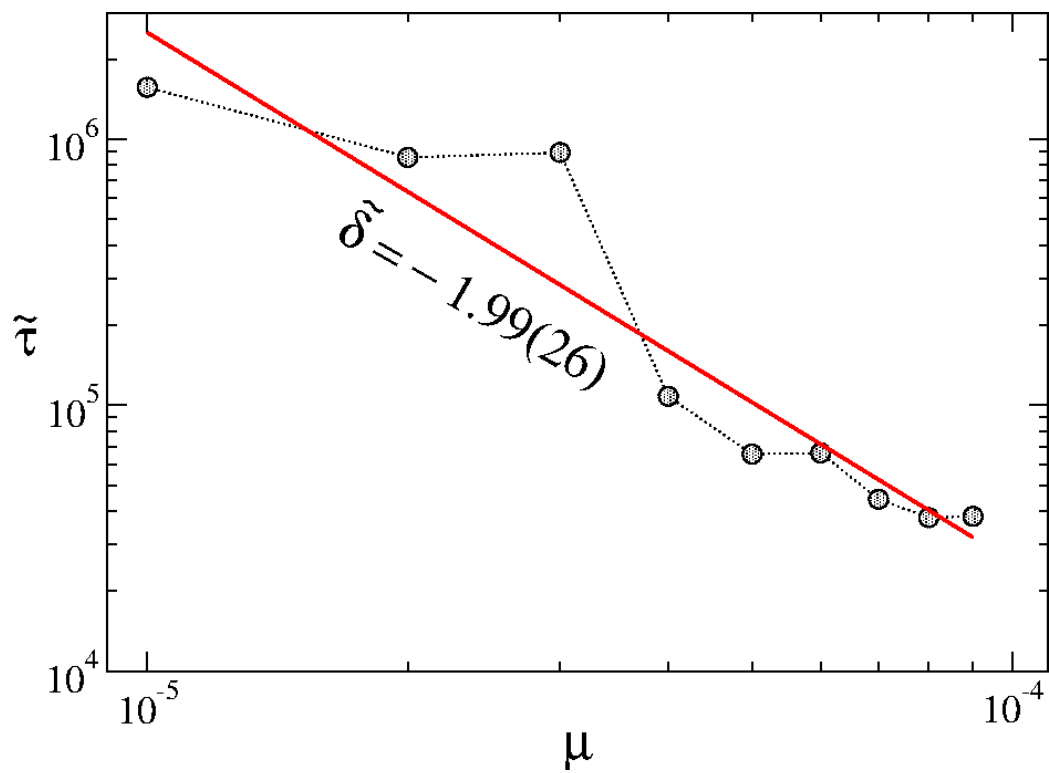


Figura 3.9: Gráfico de  $\tilde{\tau}$  vs.  $\mu$  considerando  $\gamma = 0,85$  e  $\epsilon_b = 0,0845\dots$ . Um ajuste de lei de potência fornece  $\tilde{\delta} = -1,99(26) \cong -2$ .

# Capítulo 4

## Aplicação para o modelo kicked-rotator

Neste capítulo, exploraremos o modelo do *kicked rotator*, uma ferramenta fundamental para o estudo de sistemas dinâmicos não lineares. Utilizaremos uma versão desse mapeamento previamente estudada por outros autores [27], mas com um foco específico na análise da convergência para o estado estacionário.

O *kicked rotator* é uma generalização do famoso *standard map* para sistemas que consideram efeitos dissipativos. O modelo original, o *standard map*, é amplamente utilizado para estudar a transição entre comportamentos integráveis e caóticos em sistemas dinâmicos.

### 4.1 Introdução ao *Standard Map*

O *standard map*, também conhecido como mapa de Chirikov-Taylor, é um dos modelos mais estudados em sistemas dinâmicos não lineares, particularmente em relação à transição entre comportamentos integráveis e caóticos. Ele foi inicialmente introduzido para descrever a dinâmica de partículas carregadas em campos magnéticos oscilantes, mas sua simplicidade e riqueza dinâmica tornaram-no um paradigma para o estudo do caos em sistemas discretos.

O *standard map* é definido por um mapeamento discreto das variáveis angulares e de momento em um sistema bidimensional, que descreve a evolução de um pêndulo impulsionado periodicamente:

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= \theta_n + I_n \pmod{2\pi}, \\ I_{n+1} &= I_n + K \sin(\theta_{n+1}),\end{aligned}\tag{4.1}$$

onde  $\theta_n$  é a variável angular,  $I_n$  é o momento, e  $K$  é um parâmetro de

controle que mede a intensidade do impulso periódico aplicado ao sistema.

### 4.1.1 Interpretação Física

Fisicamente, o *standard map* pode ser pensado como um modelo para a dinâmica de um pêndulo que recebe impulsos regulares em intervalos discretos de tempo. A variável  $\theta$  representa a posição angular do pêndulo, enquanto  $I$  corresponde ao momento conjugado. O parâmetro  $K$  regula a força dos impulsos. Quando  $K = 0$ , o sistema é completamente integrável, com órbitas regulares e não caóticas, o que significa que o pêndulo oscila de forma previsível. À medida que  $K$  aumenta, a dinâmica torna-se progressivamente mais complexa, eventualmente levando ao caos.

### 4.1.2 Transição do Comportamento Integrável para o Caótico

Uma característica notável do *standard map* é que ele permite o estudo de como sistemas dinâmicos podem transitar entre comportamentos ordenados e caóticos. Quando  $K$  é pequeno, as órbitas no espaço de fase permanecem confinadas em curvas fechadas, que são indicativas de movimento integrável. À medida que  $K$  aumenta, começam a aparecer regiões caóticas no espaço de fase, onde as trajetórias não seguem mais padrões regulares, mas se espalham de maneira aparentemente aleatória.

Essa transição para o caos é um fenômeno típico em muitos sistemas dinâmicos não lineares e está relacionada ao fenômeno de interseção transversal das variedades estáveis e instáveis associadas a órbitas periódicas instáveis, um mecanismo descrito matematicamente pelo teorema de Poincaré-Birkhoff.

### 4.1.3 Importância e Aplicações

O *standard map* tem grande importância teórica e prática. Ele serve como uma base para o estudo de inúmeros problemas em mecânica clássica, física de plasmas, aceleradores de partículas, e sistemas de controle. Sua simplicidade matemática o torna uma ferramenta poderosa para a compreensão de conceitos fundamentais da teoria do caos, como a mistura caótica, difusão no espaço de fase, e comportamento quase-periódico. Além disso, devido à sua estrutura discreta, o *standard map* é amplamente utilizado em simulações numéricas para estudar sistemas complexos.

Em resumo, o *standard map* desempenha um papel central na investigação de como pequenas mudanças nas condições iniciais ou nos parâmetros do

sistema podem levar a grandes variações no comportamento dinâmico ao longo do tempo, ilustrando assim uma das propriedades mais intrigantes dos sistemas caóticos.

No entanto, para descrever fenômenos mais complexos, como partículas imersas em um fluido ou sujeitas a forças dissipativas, o mapeamento precisa ser modificado. O mapeamento inclui a dissipação de energia, tornando-se um modelo mais realista para diversas situações físicas.

Neste mapeamento, as partículas são sujeitas a impulsos periódicos, que podem ser de força, energia ou torque, e ocorrem em intervalos regulares de tempo. Ao mesmo tempo, essas partículas estão imersas em um fluido viscoso, o que introduz um efeito dissipativo. A combinação desses fatores leva a uma evolução não linear complexa, que pode ser usada para descrever uma ampla gama de fenômenos dinâmicos, como transições entre movimento regular e caótico, a formação de atratores e a dissipação de energia ao longo do tempo.

Podemos descrever o modelo[27] usando um mapeamento bidimensional, com as variáveis  $\theta$  e  $I$ , de modo que:

$$S : \begin{cases} \theta_{n+1} = [\theta_n + \frac{I_n}{\sqrt{1+(\rho I_n)^2}} - \xi I_n] \text{ mod } 2\pi \\ I_{n+1} = (1 - \psi)I_n + K \sin(\theta_{n+1}) \end{cases}, \quad (4.2)$$

onde cada termo possui uma interpretação física importante, que será explicada em detalhes a seguir.

#### 4.1.4 Explicação dos Termos

**$\theta_n$ : Ângulo de Rotação** O termo  $\theta_n$  representa o ângulo de rotação da partícula imediatamente antes do  $n$ -ésimo *kick* (impulso). Esse ângulo é atualizado de maneira não linear em cada iteração do mapeamento. A evolução do ângulo depende do momento  $I_n$  e dos efeitos dissipativos ( $\xi$ ) e ( $\psi$ ).

**$I_n$ : Momento Angular**  $I_n$  representa o momento angular da partícula imediatamente antes do  $n$ -ésimo *kick*. O momento é atualizado por um termo não linear  $K \sin(\theta_{n+1})$  e pela dissipação de energia  $\psi$ . Quando  $\psi = 0$ , o sistema é conservativo, e o momento é atualizado apenas pelo termo impulsivo  $K \sin(\theta_{n+1})$ . Quando  $\psi \neq 0$ , o momento decai a cada iteração, representando a perda de energia.

**$\rho$ : Parâmetro Relativístico** O parâmetro  $\rho$  controla a transição entre as dinâmicas newtoniana e relativística. Quando  $\rho \rightarrow 0$ , o termo  $\sqrt{1 + (\rho I_n)^2}$  se

aproxima de 1, e o mapeamento relativístico se reduz ao mapeamento padrão. No limite ultrarrelativístico ( $\rho \rightarrow \infty$ ), o sistema tende à integrabilidade.

**$\xi$ : Parâmetro de Dissipação** O termo  $\xi I_n$  introduz dissipação devido à viscosidade do fluido em que a partícula está imersa. O parâmetro  $\xi$  é proporcional à viscosidade do fluido, de modo que  $\xi = 0$  corresponde a um sistema sem dissipação, enquanto valores maiores de  $\xi$  correspondem a maior dissipação.

**$\psi$ : Fração de Dissipação por Chute** O parâmetro  $\psi$  representa a fração de energia que a partícula perde após cada chute. Para  $\psi = 0$ , o sistema é conservativo. Para  $\psi \neq 0$ , o momento decai, representando a perda de energia após cada chute.

#### 4.1.5 Integração entre Dinâmicas Conservativas e Dissipativas

O mapeamento descreve sistemas conservativos e dissipativos, dependendo dos valores de  $\xi$  e  $\psi$ . Para  $\xi = \psi = 0$ , o sistema é conservativo e preserva a área no espaço de fase ( $\det(J) = 1$ ). Quando  $\psi \neq 0$ , a área não é preservada, e o sistema torna-se dissipativo.

#### 4.1.6 Transição para Dinâmicas Caóticas

À medida que  $K$  aumenta, o sistema passa de um comportamento regular para caótico. O parâmetro  $K$  controla a força dos chutes aplicados ao sistema, e quando  $K$  aumenta, o comportamento do sistema torna-se mais complexo, com órbitas caóticas e bifurcações.

### 4.2 Transição do Caso Conservativo para o Caso Dissipativo

Em sistemas dinâmicos, a transição do regime conservativo para o regime dissipativo é um tema amplamente estudado, especialmente em relação ao comportamento de sistemas caóticos. Um sistema conservativo é caracterizado pela preservação de quantidades como a energia total ou a área no espaço de fase, enquanto um sistema dissipativo é caracterizado pela perda gradual de energia ou pela contração do volume de fase, o que eventualmente pode levar à formação de atratores.

### 4.2.1 Sistema Conservativo

No regime conservativo, a dinâmica do sistema é descrita por equações que preservam uma quantidade conservada, como a energia. Para mapas bidimensionais, um exemplo clássico de sistema conservativo é o mapa padrão (*standard map*) com  $K > 0$ , mas sem termos dissipativos. Nesse caso, o determinante da matriz Jacobiana associada ao mapeamento é igual a 1, o que indica que a área no espaço de fase é preservada. Isso implica que, independentemente da complexidade da dinâmica, o volume total ocupado pelas órbitas das partículas permanece constante ao longo do tempo.

Em sistemas conservativos, podemos observar tanto órbitas periódicas quanto regiões caóticas, mas o caos observado nesses sistemas é chamado de *caos conservativo*, uma vez que ele não leva a uma perda de energia, e as partículas podem se mover indefinidamente em regiões caóticas do espaço de fase. Isso significa que, embora o comportamento possa ser caótico, as partículas não se "fixam" em nenhum ponto específico e continuam a percorrer o espaço de fase.

Para o caso conservativo onde  $\psi = 0$  e  $\xi \neq 0$ . O sistema exibe um espaço de fase misto apresentando ilhas KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser), regiões caóticas e curvas invariantes *spanings*, como ilustrado na Figura 4.1.

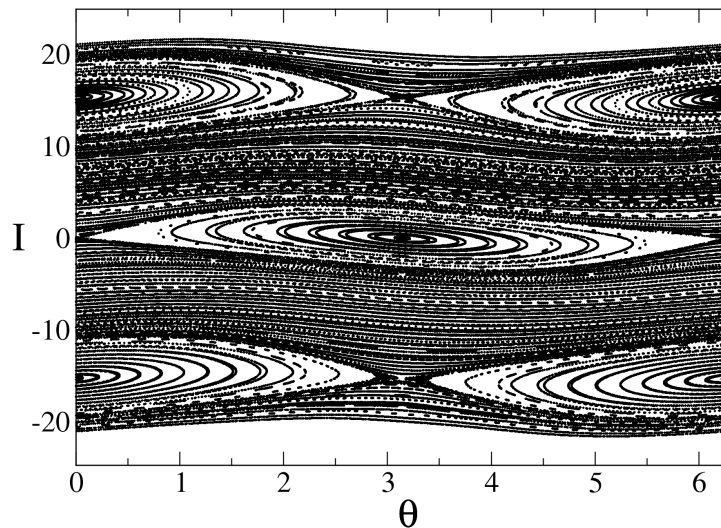


Figura 4.1: Gráfico do espaço de fases para o caso conservativo,  $\psi = 0$ ,  $\xi = 0,4$ ,  $\rho = 0,15$  e  $K = 1,55$ .

## 4.2.2 Introdução de Dissipação

Quando um sistema passa a incluir dissipação, ele perde gradualmente energia, e o comportamento dinâmico se altera significativamente. A dissipação é frequentemente modelada por termos adicionais nas equações que introduzem uma perda de energia a cada iteração do mapeamento. No contexto de um mapa como o *standard map*, a dissipação pode ser modelada pela introdução de um parâmetro de perda de energia  $\delta$ , que modifica a dinâmica do sistema ao longo do tempo. A equação para o momento  $I_{n+1}$ , por exemplo, pode ser modificada para incluir a dissipação:

$$I_{n+1} = (1 - \psi)I_n + K \sin(\theta_{n+1}), \quad (4.3)$$

onde  $\psi \in [0, 1)$  é o parâmetro de dissipação. Quando  $\psi = 0$ , o sistema é conservativo. À medida que  $\psi$  aumenta, o sistema perde progressivamente energia a cada iteração.

A dissipação implica que o determinante da matriz Jacobiana se torna menor que 1, ou seja,  $\det(J) < 1$ , o que significa que o volume do espaço de fase está se contraindo. Isso cria uma tendência para as partículas caírem em um atrator, que pode ser um ponto fixo, um ciclo limite ou mesmo um atrator caótico. Em contraste com o caos conservativo, o caos dissipativo é caracterizado pela convergência das partículas para um conjunto atrativo, onde elas permanecem confinadas.

## 4.2.3 Comportamento Dinâmico no Caso Dissipativo

No regime dissipativo, a presença de atratores é um aspecto fundamental. Atratores são conjuntos no espaço de fase para os quais as trajetórias do sistema convergem ao longo do tempo. Dependendo da intensidade da dissipação e dos parâmetros do sistema, podem surgir diferentes tipos de atratores, desde ciclos limites até atratores caóticos. Isso contrasta com o comportamento no regime conservativo, onde as partículas continuam a percorrer o espaço de fase sem convergir para nenhuma região específica.

No caso de atratores caóticos, a dissipação desempenha um papel importante na formação de padrões dinâmicos complexos. No espaço de fase, um atrator caótico pode parecer uma estrutura irregular e altamente sensível às condições iniciais. No entanto, ao contrário do caos conservativo, onde as partículas podem se mover indefinidamente, no regime dissipativo o atrator "captura" as partículas e as mantém confinadas em uma região limitada do espaço de fase.

Além disso, em sistemas dissipativos, as bifurcações são frequentemente observadas à medida que os parâmetros são variáveis. Uma bifurcação típica

é a bifurcação de duplicação de período, onde o sistema passa de um comportamento periódico estável para um comportamento caótico à medida que a dissipação é ajustada.

Para o caso dissipativo onde  $\psi \neq 0$  o cenário da evolução temporal muda, e os atratores dominam a dinâmica do sistema. A figura 4.2 mostra um exemplo do diagrama de bifurcações para o mapeamento (4.2), considerando os parâmetros  $\psi = 0,01$ ,  $\xi = 0,4$ ,  $\rho = 0,15$  e  $K = 1,55$ .

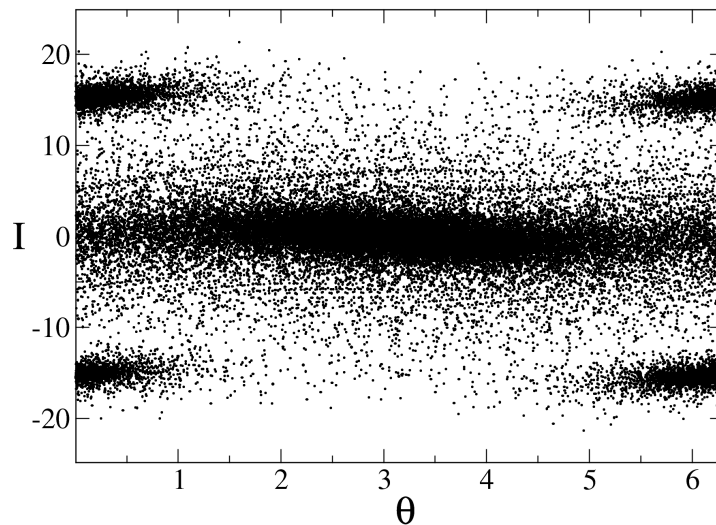


Figura 4.2: Gráfico para o caso dissipativo com os parâmetros  $\psi = 0,01$ ,  $\xi = 0,4$ ,  $\rho = 0,15$  e  $K = 1,55$ .

#### 4.2.4 Bifurcações no Caso Dissipativo

Em sistemas dinâmicos, as bifurcações representam mudanças qualitativas na estrutura das órbitas de um sistema à medida que os parâmetros de controle são modificados. No caso de sistemas conservativos, essas transições podem alterar a natureza das órbitas, mas não envolvem perda de energia ou volume no espaço de fase. No entanto, no caso de sistemas dissipativos, as bifurcações assumem características ainda mais ricas e complexas devido à presença de atratores e à contração do volume de fase causada pela dissipação.

A figura 4.3 mostra uma região onde ocorre uma bifurcação juntamente com os valores do expoente de Lyapunov, indicando um valor nulo para o expoente, onde ocorre uma bifurcação de duplicação de período. O parâmetro de controle  $K$  na bifurcação tem o valor de  $3,999999997$ .

## 4.3 Convergência para o estado estacionário

A convergência para um estado estacionário desempenha um papel crucial na compreensão do comportamento e da estabilidade de sistemas dinâmicos. Refere-se à tendência das variáveis de um sistema se estabilizar em torno de valores ou trajetórias específicas ao longo do tempo, fornecendo *insights* sobre o comportamento de longo prazo e as propriedades de estabilidade de sistemas não lineares.

O processo de convergência para um estado estacionário pode assumir várias formas, dependendo das características e da dinâmica do sistema. Pode envolver o decaimento gradual do comportamento transitório até que o sistema atinja um equilíbrio estável ou órbita periódica. Alternativamente, pode levar ao surgimento de comportamentos complexos e não periódicos, como atratores caóticos.

Em nossa análise do estado estacionário para uma bifurcação de duplicação de período, focamos no plano ( $I$  vs.  $\theta$ ), onde a dinâmica ocorre. Para quantificar a proximidade da partícula ao estado estacionário, é crucial estabelecer uma métrica que incorpore a distância da partícula das coordenadas do ponto fixo em nossa medida. Assim, definimos:

$$d(n) = \sqrt{(I_n - I^*)^2 + (\theta_n - \theta^*)^2}. \quad (4.4)$$

Essa formalização nos permite medir a distância entre as trajetórias do sistema e o estado estacionário, facilitando a compreensão da dinâmica de convergência até o ponto de bifurcação.

### 4.3.1 Convergência na bifurcação

Quando discutimos a convergência ao estado estacionário durante bifurcações, estamos especificamente estudando como o sistema se comporta à medida que se aproxima e estabiliza em estados estacionários próximos a esses pontos críticos no espaço de parâmetros. Esse fenômeno é de particular interesse porque lança luz sobre como o comportamento do sistema muda em resposta a pequenas variações em seus parâmetros, potencialmente levando a transições entre diferentes estados qualitativos de comportamento. Compreender esse comportamento de convergência é crucial para prever e analisar o comportamento de sistemas dinâmicos, especialmente em sistemas complexos onde as bifurcações desempenham um papel significativo.

No contexto da explicação da convergência aos estados estacionários durante bifurcações, o uso de funções homogêneas e generalizadas pode oferecer ferramentas matemáticas robustas para capturar e analisar a dinâmica intrínseca. Isso é exemplificado pela equação:

$$d(n, d_0) = \ell d(\ell^a n, \ell^b d_0). \quad (4.5)$$

Nosso principal objetivo é explorar o processo de convergência em direção ao estado estacionário durante um evento de bifurcação. Especificamente, nosso foco está em entender as complexidades de uma bifurcação por duplicação de período, que ocorre no valor crítico de  $K_c = 3,999999997$ . Essa bifurcação marca um momento crucial, indicando uma mudança significativa na dinâmica comportamental do sistema. Para entender essa transição, realizamos uma análise de estabilidade de período um para avaliar a estabilidade de órbitas que demonstram comportamento de período um. Simultaneamente, exploramos a dinâmica dos expoentes de Lyapunov, que fornecem *insights* sobre as taxas exponenciais de divergência ou convergência de trajetórias próximas. Essa investigação nos permite entender as sutis complexidades de como as trajetórias próximas evoluem ao longo do tempo. Ao reunir esses métodos analíticos, obtemos uma compreensão profunda de como o sistema se move em direção a um estado estacionário durante o processo de bifurcação. Essa integração nos ajuda a explorar a dinâmica complexa envolvida, observando as pequenas mudanças e transições que ocorrem dentro do sistema à medida que ele passa por diferentes estados. Com essa compreensão detalhada, podemos descobrir as razões por trás do processo de bifurcação, esclarecendo os fatores que afetam o comportamento do sistema e sua eventual estabilização. Além disso, para ilustrar esse comportamento, mostramos a relação entre  $d$  e  $n$ , onde diferentes condições iniciais são consideradas mantendo  $K_c$  e os parâmetros  $\psi = 0,8$ ,  $\xi = 0,4$  e  $\rho = 0,15$  fixos. Essa visualização ajuda a enfatizar como o sistema se comporta de forma diferente sob várias condições iniciais, oferecendo percepções valiosas sobre como ele converge ao longo do tempo.

As curvas plotadas na Figura 4.4 revelam diferentes comportamentos, cada uma mostrando características únicas. Primeiramente, quando  $n$  é muito menor que  $n_x$ , há um platô constante. Esse platô, que é típico do comportamento do sistema, segue o padrão  $d(n) \propto d_0^\alpha$ , onde  $\alpha$  representa o expoente para o patamar constante. Curiosamente, o platô constante em torno de  $d_0$  é observado em várias ordens de magnitude, sugerindo fortemente que o expoente  $\alpha$  para o platô constante seja igual a 1. Após isso, pode-se observar uma mudança de comportamento de um platô para uma lei de potência, caracterizada por um ponto de mudança  $n_x$ . Esse regime de decaimento pode ser descrito por  $d(n) \propto n^\beta$ , onde  $\beta$  representa o expoente de decaimento. Após um ajuste de lei de potência na região de decaimento na Figura 4.4, encontramos que  $\beta = -0.50624(5) \approx -1/2$ . Finalmente, o número de *crossover*  $n_x$ , marcando a mudança do platô constante para a lei

de potência, pode ser obtido assumindo que no ponto de crossover temos  $n_x \propto d_0^z$ , onde  $z$  é o expoente de *crossover*.

Observe que a equação (4.5) captura um aspecto fundamental do comportamento do sistema. Ela articula a quantidade  $d(n, d_0)$  às suas contrapartes escaladas  $d(\ell^a n, \ell^b d_0)$ . Aqui,  $\ell$  é um fator de escala crucial que governa a lei de escala, com  $a$  e  $b$  sendo expoentes críticos, determinando como o sistema reage a mudanças nos parâmetros. Esses expoentes contêm informações cruciais sobre a sensibilidade do sistema a mudanças em seus parâmetros, oferecendo *insights* sobre sua dinâmica subjacente. Ao explorar duas hipóteses de escala distintas, assumimos  $\ell^a n = 1$  e  $\ell^b d_0 = 1$ , encontramos as relações entre  $\ell$ ,  $n$  e  $d_0$ , a partir das quais surgem expressões para  $\alpha$  e  $\beta$ . Essas formulações surgem da comparação de hipóteses de escala com leis de escala bem estabelecidas que regulam diferentes aspectos do comportamento do sistema. A lei de escala resultante,  $n_x \propto d_0^z$ , onde  $z = \frac{\alpha}{\beta}$ , não apenas resume como o sistema se comporta em torno do ponto de *crossover*, mas também serve como uma ferramenta potente para prever seu comportamento em diferentes condições.

### 4.3.2 Convergência próxima a bifurcação

Ao explorar a convergência próxima do ponto de bifurcação, a dinâmica se desvia de uma função uniforme e generalizada e, em vez disso, exibe um comportamento que se assemelha a um decaimento exponencial, como observado nos mapas anteriores. Nesse caso, a distância é agora descrita por:

$$d(n) = d_0 e^{-n/\tau}, \quad (4.6)$$

O padrão de decaimento, descrito pela Equação (4.6), controla a progressão em direção ao estado estacionário. Aqui,  $d_0$  representa a distância inicial do ponto de bifurcação, e  $\tau$  caracteriza o tempo de relaxamento. Importante,  $\tau$  é proporcional a  $\mu^\delta$ , onde  $\mu = K_c - K$ , para  $K \lesssim K_c$ . Determinar o tempo de relaxamento  $\tau$  requer extensa simulação numérica. Para fazer isso, iniciamos partículas na fronteira da bacia de atração do ponto fixo e deixamos a dinâmica evoluir. Quando a distância do ponto fixo atinge uma tolerância pré-definida, geralmente  $10^{-6}$ , a simulação é interrompida e registramos o número de iterações. Este procedimento se repete para um conjunto de  $10^6$  diferentes condições iniciais. Ao calcular a média dos tempos de relaxamento deste conjunto, encontramos o tempo de relaxamento médio. Repetimos este processo para vários parâmetros de controle. Os dados resultantes proporcionam uma compreensão detalhada da dinâmica nas proximidades do ponto de bifurcação, contribuindo para uma análise aprofundada do comportamento de convergência.

A Figura 4.5 mostra o comportamento de  $\tau$  em função de  $\mu$ , considerando valores de  $\psi = 0.8$ ,  $\xi = 0.4$ ,  $\rho = 0.15$ . Após um ajuste de lei de potência, obtemos  $\delta = -0.9811(5)$ . Vale ressaltar que a mesma discussão foi feita para o caso unidimensional, mostra analiticamente que  $\delta = -1$  se aplica a mapeamentos unidimensionais. Esse resultado destaca a importância do parâmetro de ajuste obtido e suas implicações para entender a dinâmica do sistema próximo a pontos de bifurcação.

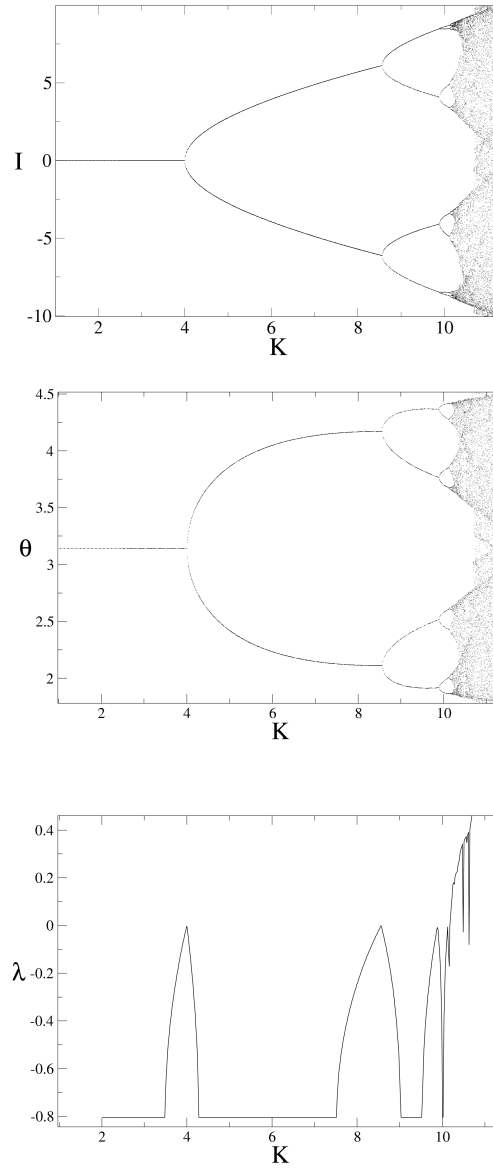


Figura 4.3: Gráficos do diagrama de órbita para o mapeamento (4.2) considerando  $\psi = 0.8$ ,  $\xi = 0.4$ ,  $\rho = 0.15$  para as variáveis:  $I$  versus  $K$  e  $\theta$  versus  $K$  mostram o comportamento do expoente de Lyapunov ( $\lambda$ ) considerando a mesma faixa de parâmetros utilizada para  $\theta$  e  $I$ . Uma bifurcação de duplicação de período é medida em  $K = 3.999999997$ .

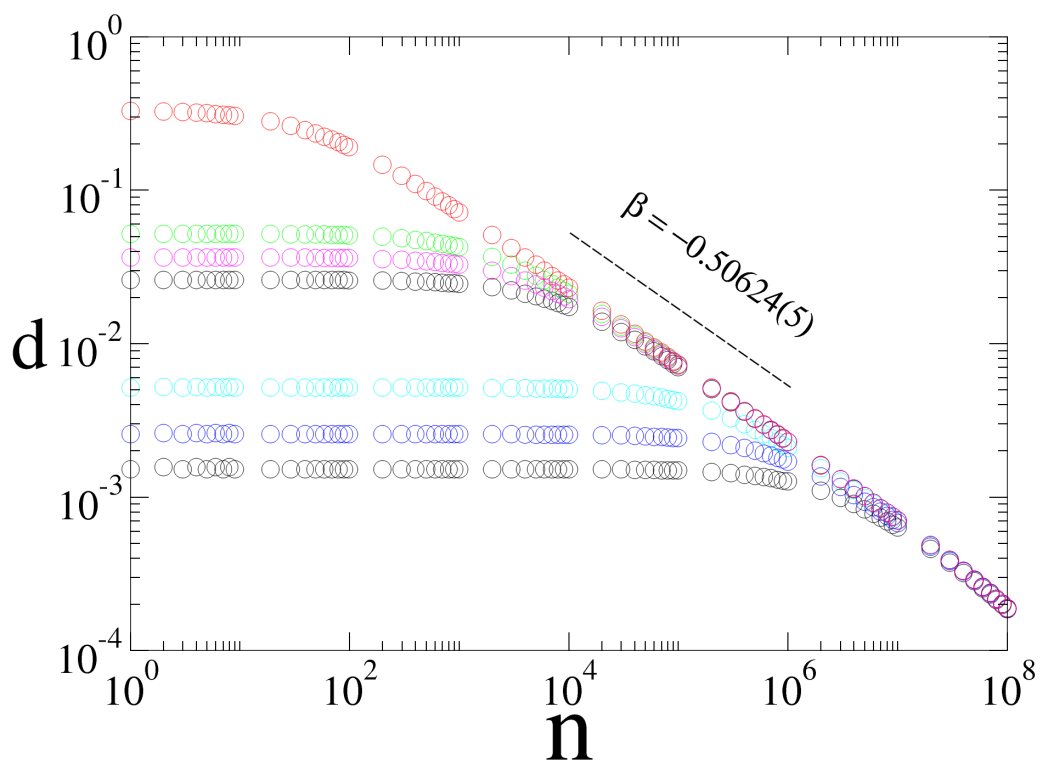


Figura 4.4: Comportamento de  $d$  vs.  $n$  para diferentes condições iniciais a partir do ponto de bifurcação.

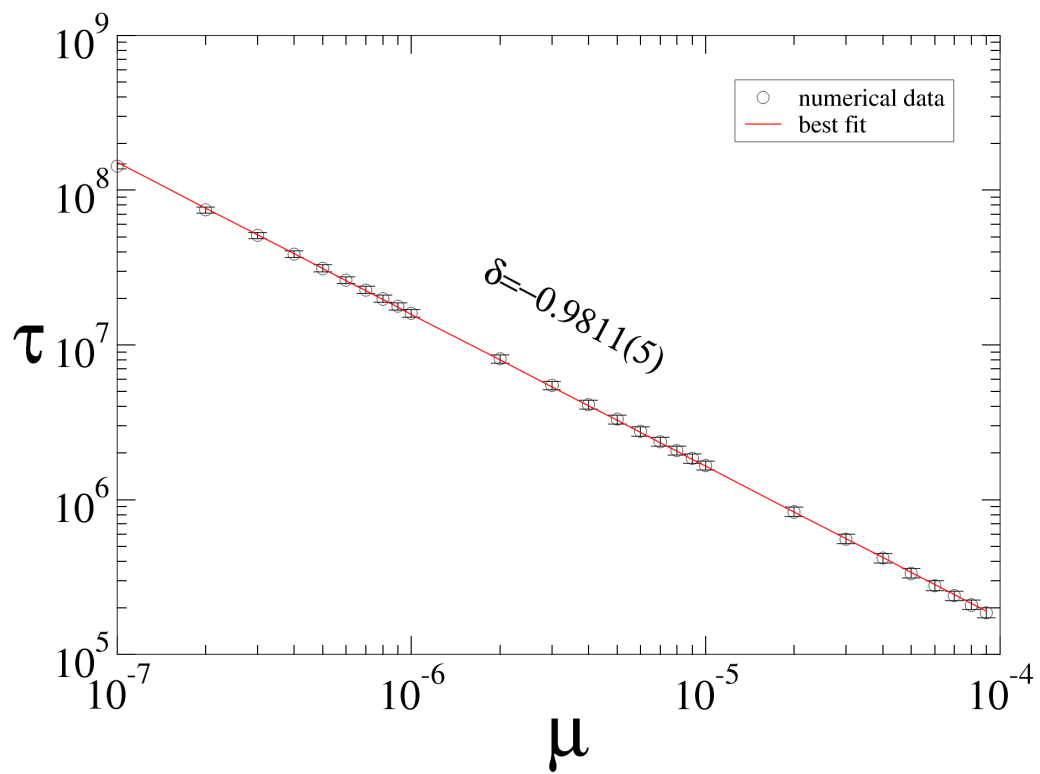


Figure 4.5: Behaviour of  $\tau$  vs.  $\mu$  considering  $\psi = 0, 8$ ,  $\xi = 0, 4$ ,  $\rho = 0, 15$ . A power law fitting gives slope  $\delta = -0,9811(5)$ .

# Capítulo 5

## Conclusões e Perspectivas

Investigamos propriedades dinâmicas para a convergência no estado estacionário em mapeamentos unidimensionais (*logistic-like*) e mais recente, em um mapeamento bidimensional do tipo Fermi-Ulam e um modelo kicked-rotator. Estudamos algumas propriedades dinâmicas desses mapeamentos como, seus pontos fixos, diagrama de órbita, e em particular, analisamos o comportamento da convergência para o ponto de equilíbrio utilizando uma função homogênea generalizada com argumentos  $(x_0, n)$ . Para o caso do mapeamento do tipo Fermi-Ulam, fizemos em dois tipos de bifurcações: (i) duplicação de período local; (ii) global - crise de fronteira. A dinâmica do mapeamento é descrita pelas variáveis ângulo e velocidade da partícula. A dissipação foi introduzida por colisões inelásticas levando a uma perda fracionária de energia na colisão da partícula com as paredes. O caso conservativo tem um espaço de fase que exibe uma estrutura mista contendo dinâmicas caóticas, periódicas e quase periódicas. Na dinâmica dissipativa, o diagrama de órbita, mostrando a dinâmica estacionária, tem bifurcações locais e globais. Em uma bifurcação local, o fluxo topológico das soluções de um ponto fixo (ou órbita periódica) muda com a variação do parâmetro de controle. Uma análise da estabilidade do ponto fixo nos permite prever a mudança de estabilidade e identificar o tipo de bifurcação. A evolução para o estado estacionário em uma bifurcação de duplicação de período é conhecida por ser descrita como uma função homogênea generalizada, levando a uma lei de escala. Os três expoentes críticos foram descritos em um mapeamento unidimensional [19] como  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -1/2$  e  $z = -2$ . No entanto, mesmo para o mapeamento bidimensional, na bifurcação de duplicação de período, a evolução para o estado estacionário levou ao mesmo conjunto de expoentes críticos observados para o caso unidimensional. Perto da bifurcação, a dinâmica não é mais descrita por uma função homogênea, mas um decaimento exponencial no qual o tempo de relaxação é escrito como  $\tau \propto \mu^\delta$ ,

e o expoente crítico  $\delta = -0,944(2) \cong -1$ , que é o mesmo observado para mapeamentos unidimensionais.

A bifurcação global estudada, particularmente a crise de fronteira, é caracterizada pelo cruzamento de uma variedade instável com uma variedade estável gerada a partir do mesmo ponto de sela. A probabilidade de uma partícula sobreviver ao longo da região onde existia o atrator caótico antes da crise é descrita por um decaimento exponencial. O tempo de relaxação tem uma lei de potência com expoente  $\tilde{\delta} = -1,99(26) \cong -2$ , conforme previsto analiticamente para mapeamentos bidimensionais [16].

No caso do modelo kicked rotator, nosso estudo teve como alvo especificamente a versão dissipativa desse mapeamento, permitindo um exame detalhado dos comportamentos de convergência tanto no ponto de bifurcação quanto próximo a ele. Ao aplicar uma lei de escala, fomos capazes de determinar numericamente o expoente crítico  $\beta = 1/2$ . Essa determinação nos levou aos valores de  $\alpha = 1$  e  $z = -2$ , consistentes com as expectativas de estudos anteriores no campo.

Ao examinarmos as proximidades da bifurcação, identificamos um fenômeno de decaimento exponencial, indicando de um processo de relaxamento. Esse decaimento deu origem ao surgimento de um tempo de relaxamento caracterizado pelo expoente crítico  $\delta = -1$ . Esses achados não apenas confirmam nossas expectativas derivadas de mapeamentos unidimensionais, mas também se alinham com *insights* obtidos a partir de estudos sobre o modelo Fermi-Ulam. Esta examinação meticulosa destaca a natureza intrincada dos comportamentos dinâmicos próximos aos pontos de bifurcação e contribui para uma compreensão mais profunda da dinâmica de sistemas complexos.

Como perspectiva deste trabalho, temos a análise matemática em aberto para os casos bidimensionais.

# Referências Bibliográficas

- [1] R. L. Devaney, *A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment*. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, Inc, (1992).
- [2] Newton, Isaac, and N. W. Chittenden. *Newton's principia: The mathematical principles of natural philosophy*. Geo. P. Putnam, 1850.
- [3] M. de Laplace, P. Simon, *Théorie analytique des probabilités (1749-1827)*
- [4] Villate, Jaime E. (2011). *Equações Diferenciais e Equações de Diferenças*. Porto, 120 páginas.
- [5] Ferreira, Maria Teodora. Métodos lineares e não lineares de análise de séries temporais e sua aplicação no estudo da variabilidade da frequência cardíaca de jovens saudáveis. 2010. 120 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências de Botucatu, 2010.
- [6] F. F. C. Filho, *Algoritmos Numéricos - Uma Abordagem Moderna de Cálculo Numérico*. LTC; 3ª edição, 2018.
- [7] Poincaré, Henri. *The foundations of science: Science and hypothesis, the value of science, science and method*. DigiCat, 2022.
- [8] Ott, E. (2002). *Chaos in dynamical systems*. Cambridge university press.
- [9] Boyer, Carl B. *História da Matemática*. São Paulo: Blucher, 2012.
- [10] Lorenz, E. N. *The nature and theory of the general circulation of atmosphere*. World Meteorological Organization. Vol. 218. 1967
- [11] S. Wiggins, *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. New York: Springer-Verlag, 1990.
- [12] P. C. Rech, “Naimark-Sacker bifurcations in a delay quartic map”. *Chaos, Solitons & Fractals*, v. 37, p. 387, 2008.

- [13] M. Tabor, *Chaos and integrability in nonlinear dynamics: an introduction*. New York: John Wiley & Sons, 1989.
- [14] V. B. Silva, E. D. Leonel, “Evolution Towards the Steady State in a Hopf Bifurcation: A Scaling Investigation”. *Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity*, v.7, p. 67, 2018.
- [15] Strogatz, S. H. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry and engineering*. Bolder: Westview Press, 2015.
- [16] C. Grebogi, E. Ott, J. A. Yorke, “Chaotic Attractors in Crisis”, *Phys. Rev. Lett.*, v. 48, p. 1507, 1982.
- [17] E. D. Leonel, R. M. N. Teixeira, D. S. Rando, R. N. Costa Filho, J. A. Oliveira, *Phys. Lett. A*, 379, 1796, 2015.
- [18] R. M. N. Teixeira, D. S. Rando, F. C. Geraldo, R. N. Costa-Filho, J. A. Oliveira, E. D. Leonel, “Convergence towards asymptotic state in 1-D mappings: A scaling investigation”. *Physics Letters A*, v. 379, p. 1246, 2015.
- [19] E. D. Leonel, *Scaling Laws in Dynamical Systems, Singapore*, Springer, 2021.
- [20] C. Grebogi, E. Ott, J. A. Yorke, “Critical exponent of chaotic transients in nonlinear dynamical systems”. *Physical Review Letters*, 57, 1284, 1986.
- [21] E. D. Leonel, R. E. Carvalho, “A family of crisis in a dissipative Fermi accelerator model”. *Physics Letters A*, 364, 475, 2007.
- [22] D. S. Rando, A. C. Martí, E. D. Leonel, “Bifurcations, relaxation time, and critical exponents in a dissipative or conservative Fermi model”, *Chaos* 33, 023138 2023.
- [23] Eckmann, J-P., and David Ruelle. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Reviews of modern physics* 57.3 (1985): 617.
- [24] E. D. Leonel and M. F. Marques, *An Investigation of the Chaotic Transient for a Boundary Crisis in the Fermi-Ulam Model, A Mathematical Modeling Approach from Nonlinear Dynamics to Complex Systems, Nonlinear Systems and Complexity*. Springer, 22, 2019.
- [25] D. F. M. Oliveira, E. D. Leonel, “Some dynamical properties of a classical dissipative bouncing ball model with two nonlinearities”. *Physica A*, v. 392, p. 1762, 2013.

- [26] Everson, R. M. “Chaotic dynamics of a bouncing ball”. *Physica D*, Amsterdam, v. 19, n. 3, p. 355-383, 1986.
- [27] Oliveira, Diego F.M.; Leonel, Edson D. Statistical and dynamical properties of a dissipative kicked rotator. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 413, p. 498-514, 2014.
- [28] May, R. M. *Stability and Complexity in Model Ecosystems*, Princeton University Press, vol 1, 1974.
- [29] Feigenbaum, M. (1978). ”Quantitative universality for a class of nonlinear transformations”. *Journal of Statistical Physics*. 19 (1): 25–52.
- [30] Fiedler - Ferrara, N., e Prado, C. P. C. (1995). *Caos, Uma Introdução*. São Paulo, Blucher.
- [31] Luo, A. *Bifurcation and Stability in Nonlinear Discrete Systems(Nonlinear Physical Science)*, Springer 2020.
- [32] E Fermi, “On the Origin of the cosmic radiation”. 75 (1169)
- [33] E. D. Leonel and P V E McClintock 2005 *J. Phys. A: Math. Gen.* 38 823
- [34] E. D. Leonel, P. V. E. McClintock, and J. Kamphorst Leal da Silva, 2004 *Phys. Rev. Lett.* 93, 014101
- [35] D. R. da Costa, M. R. Silva, E. D. Leonel, J.A. Méndez-Bermúdez, Statistical description of multiple collisions in the Fermi-Ulam model, *Physics Letters A*, Volume 383, Issue 25, 2019, Pages 3080-3087, ISSN 0375-9601.
- [36] M. A. Lieberman and A. J. Lichtenberg, “*Phys. Rev. A*”, 5, 1852 1971.
- [37] H. M. J. Mendonça, E. D. Leonel, J. A. Oliveira, “An investigation of the convergence to the stationary state in the Hassell mapping”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 466, p. 537, 2017.
- [38] Kuznetsov, Y. *Elements of Applied Bifurcation Theory(Applied Mathematical Sciences,112)* , Sringer, 2004.
- [39] J. A. Oliveira, H. M. J. Mendonça, D. R. Costa, E. D. Leonel, “Effects of a parametric perturbation in the Hassell mapping”. *Chaos, Solitons and Fractals - Nonlinear Science, and Nonequilibrium and Complex Phenomena* v. 113, p. 238, 2018.